00365
8

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS ESTOCÁSTICOS Y ANÁLISIS DE UNA CARTERA DE TARJETAS DE CRÉDITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P r e s e n t a :

MAT. ERICK TREVIÑO AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS: DR. PABLO PADILLA LONGORIA

MEXICO, D.F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2003

A

PAGINACIÓN DISCONTINUA

I

Modelos estocásticos y análisis de una cartera de tarjetas de crédito

Índice general

Introducción

La intención de este trabajo es presentar un modelo estoćastico para un problema real de mucho interés como es la cartera de tarjetas de crédito de un banco. Para este propósito es necesario contar con herramientas matemáticas propias de la probabilidad y conocer los modelos estoćasticos propuestos a la fecha. Esto se expone en los capítulos dos y tres.

En el capítulo uno se hace una semblanza histórica de la banca y se hace énfasis en la crisis y rescate bancario. En este período se observa que el origen de la crisis, es la cartera vencida en todos los sectores de crédito. Aunque también se observa, que el sector de consumo es el primer tipo de crédito en recuperar.

Esto sugiere que estudiar la cartera de tarjetas de crédito es interesante.

También en este capítulo se revisan los modelos que existen para el estudio de esta cartera. Encontramos que la literatura se especializa en los sectores de crédito empresarial e hipotecario. Por este motivo, en el capítulo cuatro, se presenta un modelo general estocástico para representar el portafolio de tarjetas. Otra observación, es que existe una aversión total al riesgo. Esto se ve reflejado en la práctica común en el manejo de las tarjetas. Al primer pago vencido, se suspende el servicio sin importar el historial del cliente. Con respecto a esto, una propuesta es utilizar la protección que ofrece el mercado de derivados, para aceptar cierto riesgo y administrarlo. Desde un punto de vista teórico se puede comparar los rendimientos de distintos créditos. Por ejemplo, el rendimiento de una tarjeta de crédito, con un bono. Este bono se puede adecuar para que tenga relación a la tarjeta, además si se considera que puede ser incumplido, el modelo de Merton es aplicable.

En mayor detalle el contenido de los capítulos es como sigue.

En el capítulo uno, se hace una exposición del desarrollo histórico de la banca en México y la perspectiva actual que tienen las tarjetas de crédito. También en este capítulo, se presentan los modelos utilizados en finanzas, desde el descubrimiento del movimiento browniano hasta los modelos de la actualidad.

En el capítulo dos, se exponen los conceptos elementales de probabilidad que permiten llegar a la definición de proceso estocástico. El ejemplo mas importante de proceso que se presenta es el movimiento browniano que además es un elemento indispensable para los modelos del capítulo tres; se demuestra su existencia y tres propiedades que son fundamentales para la construcción de la integral estocástica de *Itô*. En la sección cuatro se construye la integral estocástica con respecto al movimiento browniano para procesos progresivamente medibles. Finalmente, en la sección cinco se demuestra el lema de *Itô*.

En el capítulo tres, se estudia un modelo estocástico para el comportamiento de un conjunto de instrumentos que representa un mercado financiero. En la sección uno se presenta el modelo browniano geométrico el cual queda justificado con el material presentado en el apéndice B y un conjunto de hipótesis en la operación del mercado. En estas hipótesis sobresalen el principio de no arbitraje y completez del mercado. En la sección dos se presenta el modelo browniano geométrico para el precio de una acción. En la sección tres se presenta el modelo de Black-Scholes para la valuación de una opción europea de compra. En la sección cuatro se presenta el modelo de Vasicek para el precio de un bono. Finalmente, en la sección cinco se presenta el modelo de Merton para el precio de un bono cuyo emisor puede incumplir su obligación.

En el capítulo cuatro, se propone un modelo estocástico que permite estudiar la cartera de tarjetas de crédito de un banco. Para esto es necesario delimitar la complejidad del problema a través de un conjunto de hipótesis, poner en claro que elementos del problema no se están considerando, proponer el modelo y entender cuales son los problemas técnicos a los que da lugar.

La numeración de proposiciones, lemas, teoremas y definiciones sigue el esquema capítulo.sección.subsección.contador, la referencia se hace de la misma forma y el contador se reinicia con cada capítulo.

Capítulo 1

Banca y modelos estocásticos

En la sección uno de este capítulo se da una breve reseña de la banca en México desde la aparición del primer banco hasta la fecha. En la privatización de la banca en la década de 1990, la crisis bancaria de 1995 y las medidas que se tomaron para el rescate bancario, son dos puntos los que resaltan: la importancia de la administración del riesgo en crédito y el hecho de que en el período del 2000 al 2002 el primer sector que mostró un avance después de la crisis fue el crédito al consumo. Se puede encontrar mayor detalle en el artículo Murillo[33] y las referencias que ahí se dan.

Esto motiva el estudio de la cartera de tarjetas de crédito de un banco.

En la sección dos se expone el desarrollo histórico de los modelos probabilistas, que utilizan el movimiento browniano para resolver problemas de finanzas. Destacan el trabajo pionero de Louis Bachelier y el modelo de valuación de opciones de Black-Scholes. Estos modelos se revisan en detalle en los capítulos dos y tres.

Al final de esta sección se incluye una descripción de los modelos que se aplican para el estudio de crédito. El modelo de Merton para la valuación de bonos con default es la referencia principal, de este se extienden otros modelos estructurales.

1.1. Banca

Esta es una cronología de eventos relacionados al desarrollo de la banca en México:

1830 Nace el primer banco: banco de avio-industrial textil.

1837 Nace el banco de amortización de la moneda de cobre.

1860 Aparecen los bancos Londres, México y Sudamérica-capital.

1880 Aparecen banco México-Serfin y el banco nacional.

1895 Opera por primera vez, la bolsa de México.

1897 Se promulga la ley general de instituciones de crédito.

1910 El sistema financiero mexicano colapsa y desaparece.

1925 Nace el banco de México.

1934 Nace nacional financiera.

1975 Sale la ley del mercado de valores.

1976 Se promulgan las reglas de banca múltiple.

1977 Primera emisión de petrobonos.

1978 Primera emisión de cetes.

1980 Emisión de papel comercial.

1982 Nacionalización de la banca.

1991 Privatización de la banca.

1994 Devaluación del peso.

1995 El banco de México otorga créditos a 16 bancos, a través del fondo bancario de protección al ahorro (FOBAPROA).

1995 Se implementa el programa de capitalización temporal(PROCAPTE).

1999 Se publica en el diario oficial, la ley de protección al ahorro bancario. Se crea el instituto de protección al ahorro bancario (IPAB). Este absorbe las funciones del FOBAPROA.

1.1.1. Nacionalización de 1980

En 1976 se promulgaron las reglas de banca múltiple, esto permitía que los bancos pudieran diversificar sus portafolios y aumentar su participación en el sistema financiero. Por ejemplo los dos bancos mas grandes de ese año, Bancomer y Banamex reunían alrededor del 50 % de la captación y 75 % de los activos del país. Esto dio mayor importancia de la banca en la economía nacional y los convirtió en un grupo influyente.

También por estos años, el precio del petróleo sufrío un desplome, sector que representaba el cuarenta por ciento del PIB, esto causo la desconfianza de los inversionistas y hubo una fuga masiva de capitales al extranjero[1]. Esto origino un proceso de devaluación del peso mexicano y con ello un descontrol en el intercambio de divisas en el mercado.

Las autoridades y analistas coincidieron que para evitar la catástrofe, era necesaria la nacionalización de la banca y acordar nuevas reglas en el sistema financiero. Es entonces que en 1982 el poder ejecutivo decreta la nacionalización de la banca.

En esta etapa, la banca se convierte en una paraestatal. Y como tal no fue bueno su desempeño, por ejemplo mencionemos el bajo nivel de servicio debido a falta de preparación en empleados, tecnología absoleta y corrupción -es en esta época que tiene lugar los delitos de cuello blanco. Por ejemplo, en BANPESCA un fraude por 400 mil millones de pesos.

Así es que pese al costo de la estatización de la banca y pese a lo que autoridades y analistas coincidieran tan sólo diez años antes, ahora había una opinión generalizada de que era necesaria la privatización de la banca.

1.1.2. Privatización de 1990

La opinión bien aceptada de que era necesaria la privatización de la banca, se llevo a cabo, y en 1990 varias acciones comenzarían este proceso:

- Revocación del párrafo quinto del artículo 28 de la constitución, que impedía a los agentes privados participar en las actividades bancarias.
- Revocación del artículo 123 sobre el trabajo y la previsión social en las instituciones de crédito.

[1] Tan sólo en 1980 y 1981 14000 millones de dólares salieron del país.

- Expidición de la ley de instituciones de crédito, que sustituiría a la ley reglamentaria del servicio público de banca y crédito. Publicada en el diario oficial de la federación el día 18 de julio de 1990.

- Expedición de la ley para regular las agrupaciones financieras. Publicada el mismo día que la ley de instituciones de crédito.

- Reformas a la ley del mercado de valores.

- Liberación de las tasas de interés pasivas de las instituciones de crédito.

- Eliminación de la canalización obligatoria y selectiva del crédito hacia las actividades que se consideraban prioritarias.

- Eliminación del encaje legal. Este es un instrumento que limita o expande el crédito y el circulante. Este determina el porcentaje de la captación bancaria que el banco de México obliga a que se deposite en el mismo instituto, con o sin remuneración.

- Emisión de criterios generales. Acuerdo presidencial publicado en el diario oficial el 5 de septiembre de 1990 en el que se marcaban las líneas generales que debía seguir el proceso de venta de los bancos.

- Licitación de 18 bancos nacionales. Proceso que inició el 7 de junio de 1991 y finalizo el 3 de julio de 1992.

Los primeros dos años de la banca privatizada fueron buenos, sin embargo pronto vendría un acontecimiento que marcaría un nuevo rumbo. La devaluación del peso mexicano en 1994, el llamado error de diciembre. Como consecuencia la inflación y las tasas de interés se incrementaron, el producto interno bruto se redujo en mas de nueve puntos porcentuales y la producción bajó. Estos hechos repercutieron en la economía nacional y tuvieron su impacto en el sistema financiero mexicano.

La banca sufrió en forma inmediata, un incremento en el volumen de la cartera vencida. Como consecuencia, los niveles de capitalización bajaron a un punto que situaba la banca en quiebra. Nuevas acciones tomarían las autoridades para prevenir la crisis bancaria:

- Ventana de liquidez en dólares. El banco de México dio facilidades a través del FOBAPROA, para que los bancos renovaran créditos denominados en dólares. También ayudo a diseñar un esquema de tasas de interés para incentivar a los deudores a un pronto pago.

- Capitalización temporal. Esto permitió a los bancos emitir instrumentos de deuda, subordinados a títulos de acciones, con vencimiento a cinco años. Los montos debían permitir llegar a un nivel de capitalización del nueve por ciento. Estos instrumentos fueron adquiridos por el FOBAPROA.

- Intervención gerencial. En este proceso las autoridades financieras reemplazan el consejo administrativo del banco al detectar operaciones o estados irregulares.

- Capitalización mediante la compra de cartera vencida. El FOBAPROA compra porciones de la cartera vencida de los bancos y asume las perdidas por incumplimiento, aunque el proceso de cobranza de dichos quebrantos lo mantienen los bancos.

- Nueva legislación, que abria la banca mexicana a la inversión extranjera. De aquí Bancomer es adquirido por el banco Bilbao Vizcaya, Banamex adquirido por Citygroup, Serfin por banco Santander e Inverlat por Scotia Bank.

- Mayor control en la aceptación de riesgo en el sector crediticio.

- Cambios legislativos para nuevas reglas en los niveles de capitalización. Se adopta el 8 % de capitalización y las prácticas contables enmarcadas en el acuerdo de Basilea[2].

[2]El acuerdo fue diseñado por el comité de supervisión bancaria de Basilea. Este comité se estableció en 1975 por los gobernadores de los bancos centrales de los países del grupo de los diez. El comité se integra por funcionarios de los bancos centrales y las agencias de supervisión bancaria de Alemania, Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Holanda, Italia, Japón, Luxemburgo, Reino Unido, Suecia y Suiza. El propósito del acuerdo de Basilea es armonizar la regulación prudencial en el ámbito internacional, promover una sana competencia entre las instituciones financieras y mejorar la disciplina mediante un nivel adecuado de capitalización. Aunque el acuerdo lo firmaron únicamente los países que integran el comité de Basilea, varios países han adoptado, en forma voluntaria, varias de las reglas que contiene éste.

1.1.3. Problemática

En el proceso de rescate bancario se observa lo siguiente:

1. Aumento en la cartera vencida, después de diciembre 1994(ver la figura 1.1). Esto origina la crisis bancaria.

2. Repunte del crédito al consumo. Durante la crisis, no se otorgan créditos. En la figura 1.2, se muestra el cambio porcentual en el otorgamiento de créditos en los sectores: hipotecario, pymes y consumo.

3. La normatividad exige un mayor control en el nivel de capitalización. Esto hace necesario contar con mejores estrategias, para decidir los sectores de crédito que se van a estimular.

4. Nuevas reglas para la buena administración en el riesgo aceptado en las carteras de crédito. Por ejemplo, ahora es requisito la solicitud del cliente para emitir una tarjeta de crédito. En el pasado se otorgaban tarjetas sin solicitud escrita.

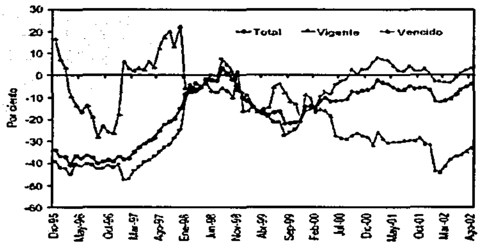

Figura 1.1: Crecimiento de la cartera vencida.

Lo anterior, motiva los siguientes comentarios:

1. Si el primer sector crediticio que se ha reactivado, es el crédito al consumo y el detonante a la crisis bancaria fue la cartera vencida, es bien justificado: estudiar este sector de crédito, buscar estrategias para minimizar la probabilidad de incumplimiento, estructurar la cartera de acuerdo a ciertos parámetros y administrar el riesgo en el mercado financiero.

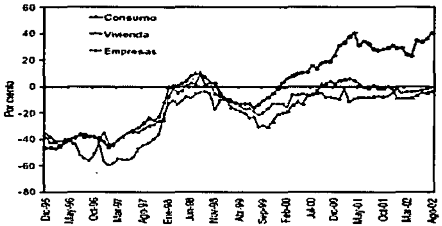

Figura 1.2: Indice de créditos otorgados por sectores después de diciembre de 1994.

2. El crédito al consumo se otorga a través de una tarjeta de crédito. Respecto a esta cartera, estas son algunas preguntas:

   a) Una práctica común de hoy día es que al primer pago vencido la tarjeta se suspende y se cobra una comisión por gastos de cobranza.

   Como repercute en la relación con un cliente puntual y solvente esta política?

   Sería mas redituable si se restringe el límite de crédito, sin suspender el servicio, aplicando un esquema de tasas de interés?

   b) Hay clientes con varios periodos de morosidad, sin embargo tienen un límite de crédito, igual a 10 veces sus ingresos mensuales. Que estrategia se persigue?

   c) Desde un punto de vista matemático cuales son los parámetros con los cuales se debe fragmentar la cartera?

   d) El uso de instrumentos derivados es extendido, que portafolio se puede formar para administrar el riesgo?

1.1.4. Tarjetas de crédito

Esta sección es un extracto del artículo Jallath[12].

La primer tarjeta de crédito la emite la empresa Western Union en 1914. Le siguen Diners Club en 1950 y Franklin National Bank en 1951.

En la década de los sesenta aparecen las antecesoras de las firmas Mastercard Internacional y Visa Internacional.

En la década de 1970, se incorpora la banda magnética y las tarjetas se unen a la era de la información. Década también en que la primer tarjeta de crédito aparece en México.

Esta es una serie de datos de las tarjetas en México:

1. En una transacción de una tarjeta de crédito intervienen cuatro partes: el cliente, el comercio, el banco emisor de la tarjeta y el banco adquiriente que es el dueño de la terminal punto de venta (tpv). Esto tiene un costo al comercio entre 4 % y 5 % del monto de la operación. De este porcentaje el 80 % es para el banco emisor y 20 % al banco adquiriente.
2. Aproximadamente 14 millones de tarjetas antes de 1994.

   A partir de 1995:

3. Reducción a 7 millones.
4. En la figura 1.3 se puede ver una grafica del importe transaccionado. Siempre mayor a cinco mil millones de pesos mensuales y apartir del año 2000 mas de 10 mil millones de pesos. Esto equivale a un mínimo de 320 millones de pesos mensuales, por costo transaccional.
5. En el primer pago vencido, se suspende el servicio de la tarjeta y se generan gastos de cobranza.

   A partir del 2000:

6. Oferta de promociones, de compras a plazos sin intereses.

Lo anterior es un indicador, de la desconfianza generada por la crisis pasada. En esta cartera, se muestra una total aversión al riesgo y un esfuerzo por captar clientes, que generen costo transaccional.

Ante esto, surge la pregunta: Porque no seguir otras estrategias, que admitan cierto nivel de riesgo?

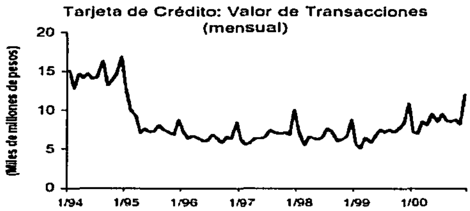

Figura. 1.3: Importe mensual transaccionado en tarjetas de crédito.

1.2. Modelos

1.2.1. Modelos estocásticos

En 1827 el biólogo escocés Robert Brown[8] observa bajo un microscopio una suspensión de granos de polen y descubre que los granos se mueven en forma rápida y errática, descubre el movimiento browniano. Analiza el movimiento y determina que el origen del fenómeno no es biológico. Esto da lugar a un problema en física.

Es Albert Einstein[9] quien da una explicación del fenómeno partiendo de la teoría cinética de la materia desarrollada por Ludwig Boltzmann[7] y es Norbert Wiener[45] quien demuestra formalmente la existencia del movimiento browniano a partir de las propiedades que le define. Por este motivo también se conoce proceso de Wiener.

Paul Levy[16, 17, 18] en una serie de artículos profundiza en las propiedades del movimiento browniano.

A partir de este desarrollo, las aplicaciones que se encuentran son numerosas, todos aquellos fenómenos que se pueden modelar como un proceso de difusión: biología(evolución de poblaciones, evolución de transmisión de enfermedades), ingeniería(filtración de señales electromagnéticas, análisis de eventos extremos), física(mecánica cuántica), finanzas(modelos de valuación), etc. En el campo de las matemáticas inspira el desarrollo de los procesos estocásticos, las martingalas y el cálculo estocástico.

Por otro lado, en forma independiente al desarrollo del concepto de movimiento browniano, Louis Bachelier[3] se gradua en 1900 en la Sorbona y presenta la tesis con título "Teoría de la Especulación"[1].

En este trabajo encontramos por primera vez, el movimiento browniano aplicado a un modelo, para las variaciones absolutas del precio de una acción. Las ideas de Bachelier son originales, sin embargo no recibieron mucha atención, debido principalmente a que en ese tiempo el estudio de la probabilidad a penas comenzaba y generalmente las aplicaciones se encontraban en física, particularmente mecánica.

Pasaron mas de cincuenta años para que estas ideas fueran retomadas y

[3]Ver Apéndice A para su biografía.

para que el trabajo de Bachelier recibiera el reconocimiento que merecía.

Sólo hasta 1965, Samuelson[37, 40] retoma el modelo browniano para el precio de una acción. Pero a diferencia de Bachelier, Samuelson toma los cambios relativos del precio de una acción, lo cual da lugar al modelo browniano geométrico para una acción: $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$.

Posteriormente Merton[23, 24] formaliza estos trabajos utilizando el cálculo estocástico de Ito.

Las ideas implementadas son innovadoras y dieron lugar a una nueva línea de investigación. Sin lugar a dudas es Bachelier el pionero.

Se pueden clasificar los problemas de las finanzas (desde el punto de vista matemático) en proponer modelos para los instrumentos primarios, la valuación de instrumentos derivados y administración de riesgo[4] a través de estos y finalmente, la optimización de portafolios.

Con respecto al modelado de instrumentos primarios, como el precio de una acción o la tasa de interés libre de riesgo, los trabajos antes mencionados de Bachelier, Samuelson y Merton proponen el uso del movimiento browniano geométrico.

Con respecto al problema de valuación de instrumentos derivados, en la década de los 70 aparecen los artículos Samuelson[37], Samuelson y Merton[41], Black-Scholes[6] y Merton[25] que resuelven el problema de valuación de instrumentos derivados y el problema relacionado de administración de riesgo. Estos trabajos dan lugar a la teoría de valuación de opciones[5]. Son dos las contribuciones de estos trabajos, primero un conjunto de hipótesis que dan un método para atacar distintos problemas y segundo la solución al problema de valuación. Las hipótesis son en la operación del mercado:

- No hay costos por transacción.
- El mercado es eficiente. Esto quiere decir que toda la información de un instrumento, es conocida por todos los agentes y está incorporada en el precio.
- No hay límite para las posiciones en corto.

[4] En inglés el término es Risk hedging.
[5] Pricing option theory.

- El mercado es libre de oportunidades de arbitraje. Una oportunidad de arbitraje, es cuando un mismo instrumento tiene dos valores distintos en dos mercados. Esto da la oportunidad de hacer una ganancia segura sin ningún riesgo.

- El mercado es completo. Esto significa que existe un portafolio de bonos y un instrumento primario que replica el precio de un instrumento derivado.

Con respecto al problema de optimización de portafolios el primer trabajo que aparece, es el de Markowitz[20, 21, 22]. Este trabajo propone lo siguiente.

Sea $M = \{I_j\}_{1\leq j\leq n}$ un mercado con instrumentos I_j. Sea dada una matriz A, esta define un conjunto lineal $S \subset R^n$ en la forma $x \in S \iff Ax = b$ y $x \geq 0$. Un elemento de S representa un portafolio y sus componentes representan las proporciones invertidas en cada instrumento, la matriz A representa restricciones que pueden ser por preferencias del inversionista o por restricciones legales. Cada elemento de S tiene un rendimiento (valor esperado) y una volatilidad (varianza), un portafolio Π del conjunto S se llama eficiente, si para cualquier portafolio Φ con el mismo rendimiento, la volatilidad es mayor o igual. Markowitz demuestra que si la matriz de covarianzas de los instrumentos es semidefinida positiva, entonces existe el conjunto de portafolios eficientes y que tiene la forma de una parábola. También planteando un problema de regresión lineal, da un algoritmo para encontrar este conjunto.

Esta teoría conocida como análisis de la media-varianza[6] es exitosa pero presenta algunas dificultades para su implementación en la práctica. Una de ellas es que requiere la matriz de covarianza entre los instrumentos del mercado, esto en la práctica resulta muy difícil de conseguir sino es que imposible.

En los artículos Mossin[30, 31], Lintner[19] y Sharpe[42] se resuelve este problema, y se da lugar al llamado capital asset pricing model, el cual sigue los pasos de Markowitz pero no requiere conocer todas las covarianzas de los instrumentos, en su lugar, considera al mercado M en su totalidad como un instrumento y solo requiere del conocimiento de la covarianza entre un instrumento I_j y el mercado (el coeficiente β).

Sin embargo este es un modelo estático y sólo aplica a un período, Samuelson[39] hace la extensión al caso multiperiodo y Merton[23, 24]

[6]En inglés mean-variance anlisis.

estudia el caso dinámico aplicando el cálculo estocástico de Ito y la ecuación de Jacobi-Hamilton-Bellman.

1.2.2. Modelos en crédito

Los modelos que existen para crédito están enfocados mayormente a los sectores de crédito hipotecario y crédito empresarial. Podemos hacer una clasificación de estos en:

Modelos clásicos. Estos se refieren a los modelos para caracterizar el comportamiento en tasa de interés compuesto y bonos libres de default.

Modelos estructurales. Están encaminados a valuar el valor actual de una deuda negociable en el mercado que tiene el riesgo de incumplimiento por parte del emisor. Se hace énfasis en la estructura del portafolio de la empresa que emite la deuda (de aquí el nombre de modelos estructurales). Estos se basan en el artículo de Merton[27] el cual sigue las ideas del modelo de valuación de Black-Scholes.

Modelos de intensidad. Estos también tienen como propósito valuar el valor de la deuda pero en un camino diferente. Estos modelos suponen que el tiempo en que la empresa cae en banca rota es impredecible y puede ser antes de la madurez de la deuda. Esto es contrario a lo que se supone en los modelos estructurales donde el default ocurre en la fecha de madurez del instrumento.

Modelos estadísticos. Estos modelos se basan en el análisis e interpretación de información histórica para construir calificaciones en el riesgo crediticio y matrices de probabilidades de transición. Con esto se puede valuar la deuda como un valor esperado.
Según el metodo empleado, existen modelos de regresión logística, probit, logit, representación de información en redes y árboles.

Modelos híbridos. El propósito de estos, es su implementación en sistemas para el uso en las instituciones del sistema financiero. Estos combinan los tres tipos de modelos anteriormente mencionados. Por ejemplo, CREDITRISK$^+$ de Credit Suisse Financial Products, CreditMetrics de JP Morgan, Credit Portfolio View de Mckinsey y KMV Portfolio manager utilizan modelos estadísticos para la interpretación de información y obtener así datos de entrada a modelos estructurales.

Capítulo 2

Integral estocástica

El propósito de este capítulo es presentar tres elementos que son fundamentales para los modelos matemáticos en finanzas, el movimiento browniano también llamado proceso de Wiener, la integral estocástica y el lema de *Itô*.

Las referencias a este capítulo son: Karatzas[13], Steele[44] y Oksendal[35].

Por completez, en la primer sección, se expone el concepto de variable aleatoria. Como ejemplos, se presentan las variables con distribución binomial y normal.

En la segunda sección se expone el concepto de proceso estocástico.

En la tercera sección, se presenta el movimiento browniano. Se da la definición moderna que le caracteriza y se demuestra su existencia. Existen varias demostraciones de la existencia del movimiento browniano, se incluye una que es intuitiva y sólo requiere resultados estándar. También en esta sección se demuestran tres propiedades que son importantes para la construcción de la integral estocástica.

En la sección cuatro, se construye la integral estocástica con respecto al movimiento browniano para procesos progresivamente medibles.

Finalmente, en la sección cinco se enuncia y demuestra el lema de *Itô*.

La integral estocástica requiere el uso de la teoría de Lebesgue, no se incluyen las demostraciones de sus resultados, pero se pueden consultar

Bartle[3] o Billingsley[5].

2.1. Variables aleatorias

Para mayor detalle ver Papoulis[36] o Shiryaev[43].

Definiciones 2.1.0.1

1. Una terna (Ω, σ, P) donde Ω es un espacio en el que se haya definida una sigma-algebra σ y una medida P, se dice un *espacio de probabilidad* si $P(\Omega) = 1$.

2. Sea $X : \Omega \to R$ una función, esta es una *variable aleatoria* si es $\sigma-$medible.

3. Sean $A, B \in \sigma$, estos son *conjuntos independientes* si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

4. Sean X, Y dos variables aleatorias, estas son *variables independientes* si para cualesquiera borelianos de los reales $U, V \in B(R)$, los conjuntos $X^{-1}(U)$ y $Y^{-1}(V)$ son conjuntos independientes.

5. Una variable aleatoria induce una medida en los borelianos de los reales por la relación $D_X(A) = P(X \in A)$, donde A es un boreliano, esta es la *distribución* de la variable aleatoria X.

6. Si existe una función medible $f : R \to R$ tal que $D_X(A) = \int\limits_A f dx$, entonces la variable aleatoria X tiene la *función de densidad* f.

7. Sea X una variable aleatoria y σ un algebra. El *valor esperado* de X respecto a σ, es una variable aleatoria:

$$E(X \mid \sigma),$$

que es $\sigma-$medible y satisface para toda A$\in \sigma$:

$$\int_A E(X \mid \sigma) dP = \int_A X dP.$$

Usando el teorema de Radon-Nikodym se demuestra que siempre existe una variable aleatoria con esta propiedad.

Ahora, tres ejemplos para ilustrar las anteriores definiciones.

1. Sea $\Omega_N = \{f : \{1, 2, .., N\} \to \{a, b\}\}$ con $\sigma-$algebra el conjunto potencia de Ω_N. Sean r y s dos números reales positivos arbitrarios que satisfacen $r + s = 1$ y sea m la cardinalidad de $f^{-1}(b)$. La probabilidad del espacio está dada por $P(f) = r^m s^{N-m}$. Aseguramos que $P(\Omega_N) = 1$.

   Sea X_N la variable definida por $X_N(f) = m$.

   Sea $A_i = \{X_N = i\}$, es claro que estos conjuntos son ajenos y su unión es Ω_N, entonces $P(\Omega_N) = \sum_0^N p(A_i)$. Observamos que la cardinalidad de A_i es $\binom{N}{i}$ con lo cual $P(A_i) = \binom{N}{i} r^i s^{N-i}$, finalmente la expansión $\sum_0^N \binom{N}{i} r^i s^{N-i} = (r+s)^N = 1^N = 1$, implica que $P(\Omega_N) = 1$.

2. También definida en el espacio Ω_N la variable $X_{i,j}(f)$ es igual a la cardinalidad del conjunto $f^{-1}(b) \cap [i, j]$, $i \leq j$. Esta cuenta las veces que aparece el valor b en el intervalo entero $[i, j]$. Estas variables son independientes y además tienen distribución binomial. Esto se demuestra como sigue:

   Cualquier permutación del conjunto $\{1, 2, .., N\}$ deja invariante la medida, con esto es suficiente restringirse al caso de las variables $X_{1,j}$ y $X_{j+1,h}$.

   Si se demuestra la fórmula:

$$P(X_{1,j} = T \cap X_{j+1,h} = L) = \binom{j}{T}\binom{h-j}{L} r^T s^{j-T} r^L s^{h-j-L},$$

   entonces resultará que las variables son independientes y tienen distribución binomial, porque al tomar la sumatoria:

$$\sum_{L=0}^{h-j} P(X_{1,j} = T \cap X_{j+1,h} = L),$$

   que es igual a $P(X_{1,j} = T)$, se tienen las igualdades:

$$\binom{j}{T} r^T s^{j-T} \sum_{L=0}^{h-j} \binom{h-j}{L} r^L s^{h-j-L} = \binom{j}{T} r^T s^{j-T} (r+s)^{h-j} = \binom{j}{T} r^T s^{j-T}.$$

   Para demostrar la fórmula, sea $I = \{X_{1,j} = T \cap X_{j+1,h} = L\}$ y $m = X_{h+1,N}$. Para $f \in I$, $P(f) = r^T s^{j-T} r^L s^{h-j-L} r^m s^{N-m}$ luego entonces

$P(I) = \sum_{f \in I} P(f) = \sum_{f \in I} r^T s^{j-T} r^L s^{h-j-L} r^m s^{N-m}$ con lo que finalmente:

$$\sum_{m=0}^{N-m} \binom{j}{T}\binom{h-j}{L}\binom{N-m}{m} r^T s^{j-T} r^L s^{h-j-L} r^m s^{N-m} =$$

$$\binom{j}{T}\binom{h-j}{L} r^T s^{j-T} r^L s^{h-j-L} (r+s)^{N-m} = \binom{j}{T}\binom{h-j}{L} r^T s^{j-T} r^L s^{h-j-L}.$$

3. El tercer ejemplo son las variables aleatorias que tienen la función de densidad:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right),$$
estas son las variables aleatorias con *distribución normal* de parámetros μ y σ^2.

Definición 2.1.0.2 *El valor medio, media o valor esperado de una variable aleatoria X es*
$$E(X) = \int_\Omega X dP.$$

Como ejemplo calculemos el valor esperado de una variable N-Binomial,
$$\int_{\Omega_N} X dp = \sum_0^N i\binom{N}{i} r^i s^{N-i} = \sum_1^N i\binom{N}{i} r^i s^{N-i},$$

para calcular esta suma hacemos lo siguiente: sea g la función $g(x) = (x+y)^N = \sum_0^N \binom{N}{i} x^i y^{N-i}$, su derivada es $g'(x) = N(x+y)^{N-1} = \sum_1^N i\binom{N}{i} x^{i-1} y^{N-i}$ y si multiplicamos por x tenemos la igualdad
$$Nx(x+y)^{N-1} = \sum_1^N i\binom{N}{i} x^i y^{N-i}.$$

Pongamos $x = r$, $y = s$ y tendremos $\sum_1^N i\binom{N}{i} r^i s^{N-i} = Nr(r+s)^{N-1} = Nr$ es decir que
$$E(X) = Nr.$$

El valor esperado de una variable aleatoria es un promedio de los valores que toma, y en cierta forma podemos pensar que este es el valor ideal de la variable. Los valores que toma oscilan alrededor de este. Para medir esta variación introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.1.0.3 *La varianza de una variable aleatoria es:*

$$Var(X) = E[(X - m)^2],$$

en donde $m = E(X)$.

En la siguiente proposición, se resumen las propiedades del valor esperado y la varianza. Las demostraciones se pueden encontrar en Papoulis[36] o en Shiryaev[43].

Proposición 2.1.0.4 *Sean* X, Y *variables aleatorias,* $Z = c$ *una variable aleatoria constante y* a *un número real, entonces:*

1. $E(Z) = c$.
2. $E(X + aY + Z) = E(X) + aE(Y) + E(Z)$.
3. $VarX = 0$ sii X es constante en medida.
4. $Var(aX + Z) = a^2 Var(X)$.
5. $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.
6. Sea f la función de densidad de X y sea $g : R \to R$ una función continua. Entonces $E(g \circ X) = \int_R g(x)f(x)dx$.

   Si las variables X, Y son independientes:
7. $E(XY) = E(X)E(Y)$.
8. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.
9. $Var(XY) = Var(X)Var(Y)$.

Las anteriores propiedades facilitan el cálculo del valor esperado y la varianza de una variable aleatoria X con distribución normal de parámetros μ y σ^2.

$$E(X) = \int_{\Omega} X dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{R} x \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)dx,$$

para el cálculo de esta integral hacemos el cambio de variable:

$$x = \sigma y + \mu, \tag{2.1}$$

entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{R} x \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)dx =$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{R} \exp(-\frac{1}{2}(y)^2)dx + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{R} y \exp(-\frac{1}{2}(y)^2)dx.$$

La primer integral es igual a μ, la segunda es cero porque el integrando es el producto de una función par por una función impar. El valor esperado de la variable es:

$$EX = \mu.$$

El cálculo de la varianza es similar:

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - \mu^2.$$

Si se aplica el cambio de variable 2.1 en EX^2, se obtiene la expresión:

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{R} y^2 \exp(-\frac{1}{2}(y)^2)dx + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{R} y \exp(-\frac{1}{2}(y)^2)dx + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{R} \exp(-\frac{1}{2}(y)^2)dx,$$

la primer integral es igual a σ^2 la segunda igual a cero y la tercera igual a μ^2.

2.2. Procesos estocásticos

Las siguientes definiciones se pueden encontrar en Karatzas[13].

Definiciones 2.2.0.5

1. Un *proceso estocástico* es una familia indexada de variables aleatorias
$$\{X_t : \Omega \to R, t \in [0, \infty)\}.$$
Un proceso estocástico induce una función $X : \Omega \to M\,[0, \infty)$ definida por $X(\omega)(t) = X_t(\omega)$ en el espacio $M\,[0, \infty)$ de funciones medibles.

2. La *trayectoria* de un proceso estocástico $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ en un punto $\omega \in \Omega$ es una función $X(\omega) : [0, \infty) \to R$ con regla $X(\omega)(t) = X_t(\omega)$. Un proceso es *continuo* cuando todas sus trayectorias son funciones continuas, análogamente un proceso es *continuo por la derecha* si sus trayectorias son continuas por la derecha.

3. Una *filtración* para una $\sigma-$álgebra, es una familia de subsigma algebras $\{\mathbb{F}_s\}_{0 \leq s < \infty}$, cuyos elementos deben satisfacer $s < t \Rightarrow \mathbb{F}_s \subset \mathbb{F}_t \subset \sigma$.

   Sean:
   $\mathbb{F}_{t^-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathbb{F}_s)$
   $\mathbb{F}_{t^+} = \sigma(\bigcap_{\varepsilon>0} \mathbb{F}_{t+\varepsilon})$
   $\mathbb{F}_{0^-} = \mathbb{F}_0$.

   La filtración es *continua por la derecha* sii $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}_{t^+}$, *continua por la izquierda* sii $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}_{t^-}$, y es *continua*, si es simultáneamente continua por la derecha y por la izquierda.

4. Un proceso estocástico $\{X_s\}_{0 \leq s < \infty}$ es $\{\mathbb{F}_s\}_{0 \leq s < \infty}$ *adaptado* si X_s es $\mathbb{F}_s$ medible.

5. Un proceso estocástico $\{X_s\}_{0 \leq s < \infty}$ adaptado a la filtración $\{\mathbb{F}_s\}_{0 \leq s < \infty}$ es una *submartingala* con respecto a esta filtración si satisface:
$$E(X_{s+h} \mid \mathbb{F}_s) \geq X_s.$$
Y es una *martingala* si satisface:
$$E(X_{s+h} \mid \mathbb{F}_s) = X_s.$$

A título de ilustración veamos el siguiente problema. Sea X un proceso estocástico cuyas trayectorias son continuas por la derecha y tiene límites izquierdos finitos. Sea A el evento de que X es continuo en $[0, t_0)$ entonces $A \in \mathbb{F}_{t_0}^X$.

Demostración. Sean:

$$A_{r,s,n} = \{\omega \in \Omega \mid |X_r(\omega) - X_s(\omega)| > \frac{1}{n}\}$$

$$B_m = \{r, s \in Q \cap [0, t_0) \mid |r - s| < \frac{1}{m}\}$$

$$A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{r,s \in B_m} A_{r,s,n}.$$

Si se demuestra que $A = \cap A_n^c$, entonces automáticamente A es un conjunto medible de $\mathbb{F}_{t_0}^X$.

$A \subset \cap A_n^c$. Sea $\omega \in A$ pero supongamos que $\omega \notin \cap A_n^c$ entonces existe una sucesión de parejas (r_k, s_k) de numeros racionales en el intervalo $[0, t_0)$ que satisface $|r_k - s_k| < \frac{1}{k}$ y que por lo tanto podemos suponer converge al punto (z, z) de tal forma que $\omega \in A_{r_k,s_k,n}$ esto demuestra que $\lim X_{r_k}(\omega) \neq \lim X_{s_k}(\omega)$ lo cual niega la continuidad de X.

$\cap A_n^c \subset A$. Sea $\omega \in \cap A_n^c$ si demostramos que el límite izquierdo $\lim_{\uparrow t} X(\omega)$ es igual a $X_t(\omega)$ entonces establecemos la continuidad de la trayectoria. Por contradicción supongamos que $\lim_{\uparrow t} X(\omega) \neq X_t(\omega)$ en este caso podemos encontrar una sucesión de parejas de racionales (r_k, s_k) que satisfagan $r_k \leq t \leq s_k$, $|r_k - s_k| < \frac{1}{k}$, y $|X_{r_k}(\omega) - X_{s_k}(\omega)| > \frac{1}{m_0}$ lo cual demuestra que $\omega \in A_{m_0}$ que es una contradicción con el hecho de que comenzamos con $\omega \in \cap A_n^c$.$\square$

Definición 2.2.0.6 *Un proceso estocástico X es* **medible** *si la correspondencia $R^+ \times \Omega \to R$ definida por $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ es $B \otimes \sigma$-medible donde B es la sigma algebra de los borelianos.*

Definición 2.2.0.7 *Consideremos una filtración $\{\mathbb{F}_s\}_{0<\infty}$ de la sigma algebra σ. Un proceso estocástico X es* **progresivamente medible** *si las funciones $[0, t] \times \Omega \to R$ definidas por $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ son $B \otimes \mathbb{F}_t$-medible* *para toda t positiva, donde B es la sigma algebra de los borelianos del intervalo* $[0, t]$.

Proposición 2.2.0.8 *Un proceso estocástico medible y adaptado a la filtración* $\{\mathbb{F}_s\}_{0\leq s<\infty}$ *es progresivamente medible.*

La demostración se puede encontrar en Karatzas[13] y la referencia que ahí se cita. A continuación un resultado menos general con una prueba directa.

Sea X_s un proceso estocástico continuo por la derecha adaptado a la filtración $\{\mathbb{F}_s\}_{0\leq s<\infty}$. Existe una modificación progresivamente medible.

Demostración. Recordemos que el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es una función medible.

Sean $t < 0$, $n \geq 1$, $k \in \{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\}$ y $0 \leq s \leq t$.

Definimos el proceso

$$X_s^n(\omega) = X_{\frac{k+1}{2^n}t}(\omega),$$

para $\frac{k}{2^n}t < s \leq \frac{k+1}{2^n}t$. Este es medible como consecuencia de la igualdad $(X^n)^{-1}(A) = \bigcup_{k=1}^{2^n-1}\{X^{-1}_{\frac{k+1}{2^n}t}(A)\}$.

Por otro lado el límite puntual $\lim_{k\to\infty} X_{\frac{k+1}{2^n}t}(\omega)$ es igual $X_s(\omega)$ porque la sucesión $\frac{k+1}{2^n}t$ converge por la derecha al valor s y X es continuo por la derecha.$\square$

2.3. Movimiento browniano

Definición 2.3.0.9 *Un proceso estocástico B_t es un proceso de Wiener o movimiento browniano sii:*

1. $B_0 = 0$ en un conjunto de medida uno.
2. La diferencia $B_t - B_s$ tiene distribución normal, con media cero y varianza $t - s$, para todo par $0 \leq s < t$.
3. $B_t - B_s$ es independiente a $\mathbb{F}_s$.
4. Las trayectorias $B(\omega)$ son funciones continuas.

2.3.1. Existencia del movimiento browniano

Ahora demostremos que el movimiento browniano existe.

Para n número natural sea $I(n)$ el conjunto de números naturales impares comenzando en uno y finalizando en 2^n y sea $I(0) = \{1\}$.

Para $k \in I(n)$ sea $\{\xi_k^n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución normal con media cero y varianza uno.

Sea $S_k^n : [0, \infty] \to R$ la función llamada de Schauder definida como $S_1^0(t) = t$, $S_k^n(t) = 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} 2^{\frac{n-1}{2}}(t - \frac{k-1}{2^n}) - 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} 2^{\frac{n-1}{2}}(t - \frac{k+1}{2^n})$ donde 1_A es la función indicadora del conjunto A.

Definimos:

$$B_t^n(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in I(m)} \xi_k^m(\omega) S_k^m(t). \tag{2.2}$$

Proposición. Existe un conjunto $\widetilde{\Omega}$ de medida uno, en el que la sucesión 2.2 converge uniformemente a un proceso $B(\omega)$ continuo.

Para la demostración de esta proposición son necesarios dos lemas, el primero el lema de Borel-Cantelli.

Lema(Borel-Cantelli). Consideremos una sucesión de conjuntos medibles A_k de tal forma que $\sum_1^\infty p(A_k) < \infty$. Entonces el conjunto $B = \{\omega \mid$ pertenece

a una infinidad de conjuntos $A_k\}$ tiene medida cero.
Demostración. Sea $B_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$. Entonces tenemos la sucesión de desigualdades que inmediatamente demuestran el resultado: $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots) \leq P(B_j) \leq \sum_j^{\infty} p(A_k) \to 0.\square$

Lema. Consideremos una sucesión de variables aleatorias $\{\xi_k^n\}_{k\in I(n)}$ independientes con distribución normal con media cero y varianza uno. Sea

$$b_n = \max_{k\in I(n)} \{|\xi_k^n|\}. \tag{2.3}$$

Existe un conjunto $\widetilde{\Omega}$ de medida uno tal que $\forall \omega \in \widetilde{\Omega}$ existe $n(\omega)$ que satisface $\forall n > n(\omega) \Rightarrow b_n(\omega) \leq n$.
Demostración. Sea $x > 0$, tenemos las igualdades:

$$P(|\xi_k^n| > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-\frac{u^2}{2}) du \tag{2.4}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{u}{x} \exp(-\frac{u^2}{2}) du = \frac{2}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-\frac{x^2}{2}), \tag{2.5}$$

es fácil ver que 2.4 es menor que 2.5. Similarmente, la igualdad:

$$P(b_n > n) = p(\cup_{k\in I(n)} (|\xi_k^n| > n)),$$

es menor que

$$\sum_{k\in I(n)} P(|\xi_k^n| > n) \leq \frac{2^n}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-\frac{n^2}{2}).$$

Si reunimos las cuatro ecuaciones llegamos a que:

$$\sum_1^{\infty} P(b_n > n) \leq \sum_1^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-\frac{n^2}{2}). \tag{2.6}$$

La prueba de la integral implica que la serie 2.6 es convergente. El lema de Borel-Cantelli implica que el conjunto:

$$\{\omega \mid \exists n_i \mid b_{n_i}(\omega) > n_i\},$$

tiene medida cero y entonces su complemento

$$\{\omega \mid \exists n(\omega) \mid b_{n(\omega)+h}(\omega) < n(\omega) + h\},$$

tiene medida uno.□

Ahora demostremos la proposición. Sigamos las desigualdades:

$$\sum_{m=n(\omega)}^{\infty} \sum_{k\in I(m)} | \xi_k^m(\omega) S_k^m(t) | \leq \sum_{m=n(\omega)}^{\infty} \sum_{k\in I(m)} | b_m(\omega) S_k^m(t) |$$

$$\leq \sum_{m=n(\omega)}^{\infty} \sum_{k\in I(m)} m \, | S_k^m(t) | \leq \sum_{m=n(\omega)}^{\infty} m 2^{-\frac{m+1}{2}} \to 0.$$

Esto quiere decir que la sucesión de funciones $B^n(\omega)$, es uniformemente convergente y entonces converge a una función continua.□

La anterior construcción demuestra la existencia de un proceso estocástico *continuo*, el cual se demostrará es un movimiento browniano.

1. Sea $t_j = \frac{j}{2^n}$, entonces que las diferencias $\{B_{t_j}^n - B_{t_{j-1}}^n\}_{j=0,1,\ldots,2^n}$ son variables independientes, normal distribuidas con media cero y varianza $\frac{1}{2^n}$.

   En efecto, la combinación lineal de variables independientes con distribución normal también es una variable normal, de esto se sigue que la diferencia $B_{t_j}^n - B_{t_{j-1}}^n$ tiene distribución normal y como la media es lineal, esta diferencia tiene media cero. Para calcular la varianza seguimos las siguientes igualdades:

   $$Var(B_{t_j}^n - B_{t_{j-1}}^n) = Var\{\sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} \xi_k^m(\omega)(S_k^m(t_j) - S_k^m(t_{j-1}))\}$$

   $$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} Var\{\xi_k^m(\omega)(S_k^m(t_j) - S_k^m(t_{j-1}))\}$$

   $$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} (S_k^m(t_j) - S_k^m(t_{j-1}))^2 = (\tfrac{1}{2^n})^2 + \sum_{m=1}^{n} (2^{\frac{m-1}{2}} \tfrac{1}{2^n})^2 =$$
   $$\tfrac{1}{2^{2n}} \times (\sum_{m=1}^{n} 2^{m-1} + 1) = \tfrac{1}{2^n}.$$

   Para demostrar que son variables independientes, siendo estas variables con distribución normal, es suficiente demostrar que sus covariancias son cero y esto es consecuencia de la fórmula $cov(B_t^n, B_s^n) = \min(t,s)$ pues entonces para $t_j < t_s$ se tiene: $cov(B_{t_j}^n - B_{t_{j-1}}^n, B_{t_s}^n - B_{t_{s-1}}^n) =$

$$B^n_{t_j}B^n_{t_s} - B^n_{t_j}B^n_{t_{s-1}} - B^n_{t_j-1}B^n_{t_s} + B^n_{t_j-1}B^n_{t_{s-1}} = t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} = 0.$$

2. Los incrementos $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}$ con $0 = t_0 < t_1 < .. < t_n \leq 1$ numeros racionales diadicos, son variables independientes, normal distribuidos con media cero y varianza $t_j - t_{j-1}$. Sea 2^n el mínimo común denominador a todos estos números, y observemos que $B^M_{\frac{k}{2^m}} = B^m_{\frac{k}{2^m}}$ para toda M mayor que m. Entonces $B_{\frac{k}{2^n}} = B^n_{\frac{k}{2^n}}$ por lo cual $B_{t_j} - B_{t_{j-1}} = B^n_{t_j} - B^n_{t_{j-1}}$ y podemos aplicar el punto 1 para derivar las propiedades antes mencionadas.

3. Los incrementos $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}$ con $0 = t_0 < t_1 < .. < t_n \leq 1$ tienen las mismas propiedades que el punto 2 aunque no necesariamente los numeros t_i sean racionales diadicos. Para demostrar esta afirmación observamos que existe una sucesión de numeros diadicos $t^n_j \to t_j$ y una sucesión de procesos $B^n_{t^n_j} \to B_{t_j}$ donde la convergencia es en L_1 que implica la convergencia en distribución.□

2.3.2. Propiedades del movimiento browniano

El movimiento browniano tiene varias propiedades importantes e interesantes del cual se derivan toda una clase de procesos. En este apartado nos concentramos en tres propiedades que son importantes para la definición de integral estocástica.

El movimiento browniano es una martingala, su variación cuadrática es la identidad respecto al tiempo y su variación es infinita en cualquier intervalo. Estas propiedades son esenciales para la construcción de la integral estocástica porque la variación infinita implica que no es posible aplicar la integral de Riemann-Stieljes para definir un proceso de integración, y el hecho de que su variación sea la identidad nos permitirá demostrar que la integral define una isometría que es una propiedad muy importante con varias aplicaciones. Finalmente que sea una martingala, trae como consecuencia que todos los procesos que son martingalas pueden ser representados con el movimiento browniano utilizando la integral estocástica.

1. El movimiento browniano es una martingala.

La demostración es directa: $E(B_t - B_s \mid \mathbb{F}_s) = E(B_t \mid \mathbb{F}_s) - E(B_s \mid \mathbb{F}_s) = E(B_t \mid \mathbb{F}_s) - B_s$ pero como $B_t - B_s$ es independiente de B_s entonces $E(B_t - B_s \mid \mathbb{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0$ es decir que $E(B_t \mid \mathbb{F}_s) - B_s = 0$.

2. La variación cuadrática del movimiento browniano es $Var^2(B)(0,T) = T$.

Para esta propiedad, demostramos que las variaciones de segundo grado tienen un límite con la norma de la media cuadrada.

Consideremos una partición homogénea $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = T$, $t_i^n = \frac{i}{n}T$ y sea $\Delta_i^n = B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)$. Entonces es cierto que:

$$\lim_{n\to\infty} E(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n)^2 - T)^2 = 0. \tag{2.7}$$

Para demostrar esta igualdad, son necesarias las ecuaciones:

$$E(\Delta_i^n) = 0. \tag{2.8}$$

$$E[(\Delta_i^n)^2] = \frac{T}{n}. \tag{2.9}$$

$$E[(\Delta_i^n)^4] = \frac{3T^2}{n^2}. \tag{2.10}$$

La igualdad 2.10 se verifica calculando la integral $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi T}} \int x^4 \exp \frac{n}{T}(-\frac{x}{2})^2 dx$.

Luego seguimos las igualdades:

$$E\{(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n)^2 - T)^2\} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} E\{((\Delta_i^n)^2 - \frac{T}{n})^2\} + 2\sum E\{((\Delta_i^n)^2 - \frac{T}{n})^2\}\{((\Delta_j^n)^2 - \frac{T}{n})^2\}. \tag{2.11}$$

En 2.11 el segundo sumando es igual a cero:

$E\{((\Delta_i^n)^2 - \frac{T}{n})^2((\Delta_j^n)^2 - \frac{T}{n})^2\} =$
$E\{((\Delta_i^n)^2 - \frac{T}{n})^2\}E\{((\Delta_j^n)^2 - \frac{T}{n})^2\} = 0,$

con lo cual:

$E\{(\sum_{i=0}^{n-1}((\Delta_i^n)^2 - \frac{T}{n})^2\} =$
$\sum_{i=0}^{n-1} E\{((\Delta_i^n)^2 - \frac{T}{n})^2\} =$
$\sum_{i=0}^{n-1} E\{(\Delta_i^n)^4 - 2\frac{T}{n}(\Delta_i^n)^2 + \frac{T^2}{n^2}\} =$

$\sum_{i=0}^{n-1} E(\Delta_i^n)^4 - 2E\frac{T}{n}(\Delta_i^n)^2 + \frac{T^2}{n^2},$
en esta sustituimos las ecuaciones 2.8, 2.9 y 2.10:
$\sum_{i=0}^{n-1} 3\frac{T^2}{n^2} - 2\frac{T}{n}\frac{T}{n} + \frac{T^2}{n^2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\frac{T^2}{n^2} = 2n\frac{T^2}{n^2} = 2\frac{T^2}{n}.$

Esto permite concluir que:

$$E\{(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n)^2 - T)^2\} = 2\frac{T^2}{n},$$

y se desprende la veracidad de la ecuación 2.7.

3. Las trayectorias tienen variación infinita en cualquier intervalo en un conjunto de medida uno. De acuerdo al punto anterior existe una sucesión n_k tal que $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} \mid \Delta_i^{n_k} \mid^2 = T$.

   $B(\omega)$ es una función uniformemente continua, entonces $\lim_{k\to\infty} \max_i\{\mid \Delta_i^{n_k} \mid\} = 0$ además su variación cuadrática es igual a T.

   La desigualdad $\sum_{i=0}^{n_k-1} \mid \Delta_i^{n_k} \mid^2 \leq \max_i\{\mid \Delta_i^{n_k} \mid\} \sum_{i=0}^{n_k-1} \mid \Delta_i^{n_k} \mid$ implica que la suma $\sum_{i=0}^{n_k-1} \mid \Delta_i^{n_k} \mid$ no es acotada y converge a infinito.□

2.4. Integral estocástica

Para motivar la definición de integración estocástica, si en la aproximación $S(t+h) - S(t) = S(t)[\mu h + \sigma(B_{t+h}(S) - B_t(S)]$ del precio de una acción se suman estas diferencias, resulta:

$$S(T) - S(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu S(\frac{i}{n}T)\frac{T}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma S(\frac{i}{n}T)(B_{\frac{i+1}{n}}(S) - B_{\frac{i}{n}}(S)). \qquad (2.12)$$

El primer sumando es una suma de Riemann, es posible tomar el límite cuando n tiene a infinito y llegar a una integral, la segunda es una suma de Riemann-Stieltjes pero el movimiento browniano tiene variación infinita, por lo que no se puede aplicar esta integral para definir el límite. La integral estocástica de Ito resuelve esta dificultad.

Construcción de la integral estocástica. La construcción es directa y es similar a la construcción de la integral de Lebesgue pero hay detalles y lemas preparatorios que trabajar. La construcción sigue los pasos:

1. Definición de la clase de integradores.
2. Definición de la clase de integrandos $H(\Omega, [0,T])$ que tiene estructura de espacio de Hilbert.
3. Definición de un subespacio $H_0(\Omega)$ de $H(\Omega, [0,T])$ y un operador $H_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$.
4. Probar que $H_0(\Omega)$ es denso en $H(\Omega, [0,T])$.
5. Extensión del operador $I : H(\Omega, [0,T]) \to L^2(\Omega)$.
6. Definición de la integral.

Ahora veamos con detalle cada paso.

Paso 1. El integrador será el movimiento browniano. Este tiene trayectorias continuas y variación cuadrática igual a la identidad. Esto permite demostrar el lema de isometría del paso tres en forma inmediata.

Es posible considerar la clase de martingalas continuas cuadrado integrables para definir una integral, incluso a través del teorema de descomposición de Doob-Meyer B1 la clase de submartingalas, sin embargo para el propósito de este trabajo el movimiento browniano es suficiente. La construcción es similar pero el lema de isometría del paso tres tiene una demostración con mas elementos técnicos.

Paso 2. $H(\Omega, [0,T]) = L^2(dP, dt)$. Simplificamos la notación escribiendo $H(\Omega)$. Este es el espacio de clases de procesos estocásticos progresivamente medibles que son cuadrado integrables: $E[\int_0^T X^2(\omega,t)dt] < \infty$. Este es un espacio de Hilbert cuyos elementos se pueden aproximar por los procesos simples que se definen en el paso tres.

Paso 3. $H_0(\Omega)$ es la clase de procesos estocásticos en $H(\Omega)$ que son simples, es decir los procesos que aceptan la representación:

$$X_t(\omega) = \sum_0^{n-1} a_i(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}.$$

La variable a_i es elemento de $L^2(F_{t_i})$, el espacio de funciones $F_{t_i} - $ *medibles* y cuadrado integrables. La integral de un proceso simple se define por:

$$I(X) = \sum_0^{n-1} a_i(\omega)\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\},$$

es claro que $H_0(\Omega)$ es un subespacio lineal de $H(\Omega)$. El operador I es lineal y define una isometría como se prueba en el siguiente lema.

Lema de isometría 2.4.0.1 *El operador $I : H_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ define una isometría:*

$$E[\int_0^T X^2(\omega,t)dt] = E[I(X)^2].$$

Demostración. Se tienen el par de igualdades:

$$E[\int_0^T X^2(\omega,t)dt] = E[\sum_0^{n-1} a_i^2(t_i - t_{i+1})] = \sum_0^{n-1} E(a_i^2)(t_i - t_{i+1}),$$

$$\int_\Omega I(X)^2 dP = \int_\Omega [\sum_0^{n-1} a_i(\omega)\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\}]^2 dP = \sum_0^{n-1} \int_\Omega a_i^2(\omega)\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\}^2 dP,$$

la segunda igualdad es valida porque los términos:

$$E[a_i(\omega)\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\} a_j(\omega)\{B_{t_{j+1}} - B_j\}],$$

se anulan como consecuencia a que los incrementos del movimiento browniano son independientes y con media cero, tenemos además:

$$\sum_{0}^{n-1}\int_{\Omega} a_i^2(\omega)\{B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\}^2 dP = \sum_{0}^{n-1} E(a_i^2)E\{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\} = \sum_{0}^{n-1} E(a_i^2)(t_{i-1}-t_i),$$

la última igualdad es porque la varianza de los incrementos del movimiento browniano es lineal. Comparando las igualdades concluimos la demostración.□

Paso 4. El espacio de procesos simples $H_0(\Omega)$ es denso en $H(\Omega)$. En el primer lema se demuestra que los procesos simples aproximan a los procesos continuos. En el segundo lema se demuestra que los procesos continuos aproximan a los procesos de $H(\Omega)$.

Lema. Sean X un proceso continuo elemento de $H(\Omega)$ y sea:

$$Y^n = X_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{2^n-1} X_{\frac{i}{2^n}T} 1_{(\frac{i}{2^n}T, \frac{i+1}{2^n}T]}.$$

Este proceso es simple y además $\lim Y^n = X$ en $H(\Omega)$.
Demostración. Es claro que Y^n es elemento de $H_0(\Omega)$. Se demostrará que Y^n converge a X con la norma de $H(\Omega)$.

Sea $Z^n = |X^n - X|^2$ y observemos que $Z^n(t) = \left|X_{\frac{i}{2^n}T} - X_t\right|^2$, donde $t \in (\frac{i}{2^n}T, \frac{i+1}{2^n}T]$. Pero X es continuo y en el intervalo $[0,T]$ uniformemente continuo. Entonces para $\omega \in \Omega$ y $\delta > 0$ existe una partición tal que $Z^n(t) < \delta$ y por lo tanto $\forall\omega \in \Omega \lim_n Z^n(t) = 0$.

Ahora utilizamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para justificar las igualdades: $\lim_n E[\int_0^T |X^n - X|^2\, dt] = E[\lim_n \int_0^T |X^n - X|^2\, dt] = E[\int_0^T \lim |X^n - X|^2\, dt] = E[\int_0^T \lim Z^n dt] = E[\int_0^T 0 dt] = 0$. Esto demuestra el lema.□

Lema. Sea X un proceso de $H(\Omega)$. Existe una sucesión de procesos continuos X^n que convergen a X en $H(\Omega)$.
Demostración. Por ahora nos restringimos al caso en que X es acotado:

$|X_t(\omega)| \leq B(\omega)$. Definamos la sucesión de procesos:

$$F_t^n = \int_0^t X_s ds,$$

$$X_t^n = n[F_t^n - F_{(t-\frac{1}{n})+}^n] = n \int_{(t-\frac{1}{n})+}^{t} X_s ds.$$

El proceso F_t^n es continuo de acuerdo a la estimación: $|F_{t+h}^n - F_t^n| = \left|\int_t^{t+h} X_s ds\right| \leq \int_t^{t+h} |X_s|\, ds \leq hB$. Los pasos de la demostración de la proposición 2.2.0.8 se pueden aplicar para ver que F^n es adaptado y que es progresivamente medible. Como consecuencia a lo anterior X^n también es continuo y progresivamente medible.

Sea $B_\omega = \{t \in [0,T] \mid \lim X_t^n(\omega) = X_t(\omega)\}$ aseguramos que $P(B_\omega) = 1$. Si demostramos que $\lim \int_a^b X_s^n(\omega) ds = \int_a^b X_s(\omega) ds$ entonces aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y el lema de la clase monótona, resultará que:

$$\int_A \lim X_s^n(\omega) ds = \int_A X_s(\omega) ds,$$

donde A es un conjunto boreliano del intervalo $[0,T]$ lo cual implica que $P(B_\omega) = 1$.

Aproximamos $\int_a^b X_s^n(\omega) ds$ con sumas de Riemann: $\int_a^b X_s^n(\omega) ds = \Delta \sum_{i=1}^{N} X_{a+\Delta i}^n(\omega) + \delta_{\omega,N}$ en donde $\Delta = \frac{b-a}{N}$ y $\lim_{N\to\infty} \delta_{\omega,N} = 0$. Sin perdida de generalidad: $\frac{1}{n} < t$. Ahora tenemos la aproximación: $X_{a+\Delta i}^n(\omega) = n \int_{a+\Delta i - \frac{1}{n}}^{a+\Delta i} X_s ds = n \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{Mn} X_{a+\Delta i + \frac{j}{Mn} - \frac{1}{n}}(\omega) + n\eta_{\omega,M}$. Las dos aproximaciones permiten llegar a la fórmula:

$$\int_a^b X_s^n(\omega) ds = \frac{b-a}{NM} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} X_{a+\Delta i + \frac{j}{Mn} - \frac{1}{n}}(\omega) + \delta_{\omega,N} + n\eta_{\omega,M}.$$

debemos establecer la relación $\frac{1}{n} < \Delta$ para que la partición tenga sentido. Es posible elegir una sucesión M_n tal que $\lim n\eta_{\omega,M_n} = 0$, si observamos que el primer sumando es una suma de Riemmann para la integral $\int_a^b X_s(\omega)ds$ podemos concluir la igualdad de las integrales.

Como consecuencia a $P(B_\omega) = 1$ tenemos que $\forall \omega \in \Omega$:

$$\lim \int_0^T [X_t^n(\omega) - X_t(\omega)]^2 \, dt = 0.$$

Si aplicamos el teorema de convergencia dominada obtenemos la sucesión de igualdades: $\lim E \int_0^T [X_t^n(\omega) - X_t(\omega)]^2 \, dt = E \lim \int_0^T [X_t^n(\omega) - X_t(\omega)]^2 \, dt$ $= E(\int_0^T \lim [X_t^n(\omega) - X_t(\omega)]^2) = E(0) = 0.$
Quedando así demostrado el lema.□

Cuando X no es acotado consideramos la sucesión de procesos definidos por $X^n = X1_{\{|X|<n\}}$. Esta sucesión converge a X porque este proceso es cuadrado integrable. Ahora aplicamos un proceso de diagonal para concluir que existe una sucesión de procesos continuos en $H(\Omega)$ que convergen a X.□

Si reunimos los dos lemas anteriores en un proceso de diagonal podemos concluir que para todo elemento X de $H(\Omega)$ existe una sucesión de procesos simples progresivamente medibles que convergen a el en $H(\Omega)$.

Paso 5. Consideremos $X \in H(\Omega)$ sabemos que existe una sucesión X_n de procesos simples en $H_0(\Omega)$ que convergen a X con la norma de $H(\Omega)$. Como el operador I es una isometría, entonces la sucesión $I(X_n)$ es de Cauchy y como $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, entonces es una sucesión convergente a un elemento Z de $L^2(\Omega)$.
Definimos:

$$I(X) = Z.$$

Esta es una buena definición. En efecto, sean X_n y Y_n dos sucesiones de procesos simples que convergen a X, se debe demostrar que las sucesiones $I(X_n)$, $I(Y_n)$ convergen a un mismo límite. Como I es una isometría es cierta la igualdad: $E^{1/2}[I(X_n - Y_n)^2] = E^{1/2}[\int_0^T \{X_n(\omega, t) - Y_n(\omega, t)\}^2 dt]$. Al aplicar la desigualdad del triangulo en el término derecho:

$$E^{1/2}[I(X_n - Y_n)^2] \leq$$

$$E^{1/2}[\int_0^T \{X_n(\omega,t) - X(\omega,t)\}^2 dt] + E^{1/2}[\int_0^T \{Y_n(\omega,t) - X(\omega,t)\}^2 dt],$$

ambos sumandos tienen límite igual a cero, entonces la sucesión $I(X_n) - I(Y_n)$ tiene límite cero.□

Paso 6. Se ha construido un operador lineal:

$$I : H(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

Si precisamos la notación debemos escribir $I_T(X) = \int_0^T X_s dB_s$. Que pasa al variar el límite de integración?, tiene sentido la igualdad $I_t(X) = \int_0^t X_s dB_s$?, en el caso de que la respuesta sea afirmativa, se obtiene un proceso estocástico en $H(\Omega)$?. Para contestar estas preguntas debe tomarse en cuenta que $I_t(X)$ es una clase de equivalencia y la ecuación planteada representa pegar correctamente las clases para obtener un proceso de $H(\Omega)$.

El siguiente teorema garantiza que es posible hacer esta elección de una forma que permite obtener una martingala con trayectorias continuas.

Teorema de existencia de la integral estocástica 2.4.0.2 *Sea X un proceso de $H(\Omega)$ y sea $l_t(\omega)$ la función indicadora del intervalo $[0,t]$. Existe una martingala con trayectorias continuas M en $H(\Omega)$ de tal forma que para toda $t > 0$ y $A_t = \{\omega \mid M_t = I_T(l_t X)\}$ se cumple:*

$$P(A_t) = 1.$$

Demostración. Existe una sucesión de procesos simples X^n que convergen a X en $H(\Omega)$. Es claro que $\lim l_t X_t^n = l_t X_t$.

Definimos la sucesión $I_t^n = I_T(l_t X_t^n)$ de martingalas continuas. Existe una martingala continua M_t de $H(\Omega)$ tal que $\lim I_t^n = M_t$.

Por otro parte: $\lim I_t^n = I_T(l_t X_t)$.

Lo anterior permite concluir que $M_t = I_T(l_t X_t)$. Como la igualdad es en $L^2(\Omega)$, entonces $P(A_t) = 1$.□

De esta forma concluimos los pasos que llevan a la construcción de la integral estocástica.

Si recordamos la ecuación 2.12 que era la motivación para definir la integral estocástica, al tomar el límite, tenemos la siguiente igualdad:

$$S(T) - S(0) = \int_0^T \mu S(t)dt + \int_0^T \sigma S(t)dB_t,$$

que en forma diferencial se acostumbra a escribir como:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB.$$

Considerando lo anterior, definimos un concepto importante al que da lugar la integral estocástica.

Procesos de difusión de Ito 2.4.0.3 *Un proceso de difusión de Ito es un proceso estocástico que acepta la representación:*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB,$$

donde μ_t y σ_t son procesos estocásticos progresivamente medibles y cuadrado integrables.

2.5. Lema de Ito

Para la integral estocástica hay un resultado análogo a la regla de la cadena del cálculo diferencial. Este es el lema de *Itô.*

Lema de Ito 2.5.0.4 *Sea $F(t,x)$ una función de dos variables reales con derivadas parciales continuas hasta el orden dos. Es valida la fórmula de Itô:*

$$F(T,B(T)) - F(0,B(0)) =$$
$$\int_0^T F_t(t,B(t))dt + \frac{1}{2}\int_0^T F_{xx}(t,B(t)))dt + \int_0^T F_x(t,B(t))dB_t.$$

Demostración. Nos restringimos a las funciones F con soporte compacto; con esta condición todas las derivadas de la función son acotadas. Acordemos la notación $h = \frac{T}{N}$, $t_i = hi$, $\Delta_i = B(t_i) - B(t_{i-1})$.

La diferencia $F(t_i,B(t_i)) - F(t_{i-1},B(t_{i-1}))$ desarrollada en serie de Taylor hasta el grado dos es:

$$F(t_i,B(t_i)) - F(t_{i-1},B(t_{i-1})) =$$
$$hF_t(t_{i-1},B(t_{i-1})) + \Delta_i F_x(t_{i-1},B(t_{i-1})) + \frac{1}{2}\Delta_i{}^2 F_{xx}(t_{i-1},B(t_{i-1}))$$
$$+$$
$$\frac{1}{2}h^2 F_{tt}(t_{i-1},B(t_{i-1})) + \Delta_i h F_{tx}(t_{i-1},B(t_{i-1})) + R(t_{i-1},B(t_{i-1}),h,\Delta_i).$$

Al sumar todos los incrementos se obtiene:

$$F(T,B(T)) - F(0,B(0)) =$$
$$\sum_{i=1}^N F(t_i,B(t_i)) - F(t_{i-1},B(t_{i-1})) =$$
$$\sum_{i=1}^N hF_t + \sum_{i=1}^N \Delta_i F_x$$
$$+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \Delta_i{}^2 F_{xx} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N h^2 F_{tt}$$
$$+$$
$$\sum_{i=1}^N \Delta_i h F_{tx} + \sum_{i=1}^N R(t_{i-1},B(t_{i-1}),h,\Delta_i).$$

Ahora calculamos el límite de cada uno de los sumandos:

1. La suma $\sum_{i=1}^{N} hF_t$ converge a la integral $\int_0^T F_t(t, B(t))dt$ pues es una suma de Riemmann y el integrando es continuo.

2. La suma $\sum_{i=1}^{N} \Delta_i F_x$ converge a la integral $\int_0^T F_x(t, B(t))dB_t$ porque esta suma corresponde a la integral estocástica de un proceso simple que aproxima al proceso $F_x(t, B(t))$.

3. Para calcular el límite de la suma $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta_i{}^2 F_{xx}$ usamos la igualdad $\sum \Delta_i{}^2 F_{xx} = \sum hF_{xx} + \sum[\Delta_i{}^2 - h]F_{xx}$. El primer sumando converge a la integral $\int_0^T F_{xx}(t, B(t)))dt$ y demostramos a continuación que el segundo sumando converge a cero.

$$E(\{\sum[\Delta_i{}^2 - h]F_{xx}\}^2) =$$

$$E\{\sum[\Delta_i{}^2 - h]^2 F_{xx}^2\} + 2E\{\sum[\Delta_i - h]F_{xx}(t_i)[\Delta_j - h]F_{xx}(t_j)\}.$$

Los incrementos del proceso de Weiner son independientes y tienen media cero, entonces el segundo sumando es cero. Los incrementos del proceso de Weiner tienen variación: $E(\Delta_i^2) = h$. En la sección 2.3 se estableció la ecuación 2.10 $E(\Delta_i{}^4) = 3h^2$, entonces:

$$E[(\Delta_i{}^2 - h)^2] = E(\Delta_i{}^4) - 2hE(\Delta_i{}^2) + h^2 = 3h^2 - 2h^2 + h^2 = 2h^2.$$

Como F tiene soporte compacto, F_{xx} es acotada por una constante B, y se sigue la desigualdad:

$$E\{\sum[\Delta_i{}^2 - h]^2 F_{xx}^2\} \leq N2h^2B^2 = 2B\frac{T^2}{N},$$

esta cota demuestra que $\lim E(\{\sum[\Delta_i{}^2 - h]F_{xx}\}^2) = 0$. El teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que:

$$\lim P([\Delta_i{}^2 - h]F_{xx} = 0) = 1.$$

4. La suma $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} h^2 F_{tt}$ converge a cero de acuerdo a las desigualdades $|\sum h^2 F_{tt}| \leq h^2 \sum |F_{tt}| \leq h^2 NB = \frac{T^2}{N}B$.

5. La suma $\sum_{i=1}^{N} \Delta_i h F_{tx}$ converge a cero porque tenemos la siguiente igualdad $\sum \Delta_i h F_{tx} = h \sum \Delta_i F_{tx} = h(\int_0^T F_{tx} dB_s + \eta_{N,\omega})$ donde $\lim \eta_{N,\omega} = 0$.

6. Para la suma $\sum_{i=1}^{N} R(t_{i-1}, B(t_{i-1}), h, \Delta_i)$ observamos que el residuo satisface la igualdad $R(a, b, h, \Delta) = G(a, b, h, \Delta) \|(h, \Delta)\|^2$ donde G es una función continua y $G(a, b, 0, 0) = 0$.

Nos damos a la tarea de estimar las sumas $\sum_{i=1}^{N} G(t_i, B(t_i), h, \Delta_i)h^2 + \sum_{i=1}^{N} G(t_i, B(t_i), h, \Delta_i)\Delta_i^2$.
Seguimos la prueba del punto cuatro para ver que el primer sumando tiene límite igual a cero.

Para el segundo sumando observamos que G es una función uniformemente continua y entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que $|G(a, b, h, \Delta)| < \varepsilon$ siempre que $|h| < \varepsilon$ y $|\Delta| < \varepsilon$.

Sean $A_i = \{\omega \mid |\Delta_i| < \delta\}$ y $B_i = \Omega - A_i$.

Estimamos el valor esperado:

$$E(|G(t_{i-1}, W_{t_{i-1}}, h, \Delta_i)\Delta_i^2| = \int_{A_i} |G| \, \Delta_i^2 dP + \int_{B_i} |G| \, \Delta_i^2 dP,$$

tomamos cada sumando por separado

$$\int_{A_i} |G| \, \Delta_i^2 dP \leq \varepsilon \int_{A_i} \Delta_i^2 dP \leq \varepsilon h$$

$$(\int_{B_i} |G| \, \Delta_i^2 dP)^2 \leq \int_{B_i} |G|^2 \, dP \int_{B_i} \Delta_i^4 dP \leq (3k^2 P(B_i)) \cdot h^2 \leq 3k^2 E(|\Delta_i|) \frac{1}{\delta} h^2.$$

Para justificar la segunda igualdad se aplica la desigualdad de Markov.

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(X).$$

El valor esperado del valor absoluto de los incrementos del movimiento browniano esta dado por: $E(|\Delta_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}h$. Al reunir las desigualdades anteriores se llega a que:

$$E[|G(t_{i-1}, B_{t_{i-1}}, h, \Delta_i)\Delta_i^2|] \leq \varepsilon h + 3k^2\frac{1}{\delta}h^3.$$

juntando todo lo anterior:

$$E[\left|\sum G(t_{i-1}, B_{t_{i-1}}, h, \Delta_i)\Delta_i^2\right|] \leq E[\sum |G(t_{i-1}, B_{t_{i-1}}, h, \Delta_i)\Delta_i^2|] \leq$$

$$\sum +3k^2\frac{1}{\delta}h^3 = \varepsilon T + 3k^2\frac{1}{\delta}\frac{T}{N^2}^3.$$

Dado que ε no depende de N, el límite $\lim E[|\sum G(t_{i-1}, B_{t_{i-1}}, h, \Delta_i)\Delta_i^2|]$ es igual a cero.

Lo anterior significa que $\lim P(|\sum G(t_{i-1}, B_{t_{i-1}}, h, \Delta_i)\Delta_i^2| = 0) = 1$. □

Queda así establecido para $T \geq 0$ la fórmula de Ito.

Para hacer valida la fórmula, para todo tiempo, no es suficiente con variar a t. Esto establece la igualdad de clases de equivalencia para cada t, sin embargo los conjuntos de medida cero pueden estar variando para cada t hasta formar un conjunto no nulo en $[0, T] \times \Omega$. Se puede establecer la igualdad de los procesos, al observar que el intervalo $[0, T]$ es primero numerable y los dos procesos involucrados son continuos.

Si la función F no tiene soporte compacto, sea F_M una función con soporte compacto tal que $F_M(t, s) = F(t, s)$ siempre que $|s| \leq M$.

Sea $A_M = \{\omega \mid |W_t(\omega)| < M\}$, entonces $A_M \subset A_{M+1}$ y $\cup A_M = \Omega$. Aplicamos la fórmula de Ito para F_M que establece la misma para F restringido al conjunto A_M.□

Capítulo 3

Modelos matemáticos en finanzas

En este capítulo se utilizan las herramientas desarrolladas en páginas anteriores para presentar los modelos matemáticos directamente relacionados a la modelación en finanzas. Siempre se denotará el movimiento browniano por W. Las referencias de este capítulo son Bielecki[4], Hull[10], Karatzas[14] y Musiela[34].

Específicamente el modelo browniano geométrico para el precio de una acción, el modelo de valuación de Black-Scholes para una opción europea, el modelo de Vasicek para una tasa de interés instantánea y un bono en ella y finalmente, el modelo de Merton para un bono con riesgo de incumplimiento.

En la primera sección se expone el modelo browniano geométrico para un mercado financiero que consta de N instrumentos con riesgo y una cuenta de ahorro que representa el único instrumento libre de riesgo. Esta exposición es una versión simplificada del modelo que se puede encontrar en detalle en Karatzas[14]. Los resultados del apéndice B son necesarios para este desarrollo.

En la sección dos se expone con detalle el modelo browniano geométrico para el precio de una acción $dS = S(\mu dt + \sigma dW)$.

En la sección tres se deduce la ecuación de Black-Scholes para el precio de una opción de compra europea. Mediante un cambio de variable se transforma a la ecuación de calor, con esto es posible resolver para obtener una solución analítica. La solución que se obtiene es la fórmula de Black-Scholes.

En la sección cuatro se revisa el modelo de Vasicek para el precio de un bono.

Finalmente, en la sección cinco se expone el modelo de Merton para el precio de un bono con riesgo de incumplimiento.

3.1. El modelo browniano geométrico

En esta sección se abordan los siguientes puntos:

- Establecer el modelo matemático browniano geométrico para representar el mercado de instrumentos.
- Establecer las hipótesis del mercado.
- Estudiar como se reflejan las hipótesis del mercado en el modelo matemático.

3.1.1. El modelo browniano geométrico para un mercado financiero

Hipótesis 3.1.1.1 *Se representará con un proceso estocástico el precio de un instrumento. Este debe ser una submartingala positiva y continua.*

Es razonable suponer que es una submartingala por la interpretación de este tipo de proceso: con la información presente es posible anticipar que el valor futuro es mayor, en caso contrario nadie invertiría en ellos; es positivo porque así se observa en la práctica y es continuo porque se ajusta en buena aproximación con las observaciones estadísticas.

Pero si S es una submartingala, acepta la descomposición de Doob-Meyer (teorema B.1 en el apéndice B) $S = M + B$ donde M es una martingala continuo y B es un proceso creciente el cual vamos a suponer que es derivable, luego el teorema de representación de martingalas (teorema B.2 en el apéndice B) nos permite escribir $M_t = \int_0^t \phi_u dW_u$.

Finalmente, de acuerdo al teorema B.3 del apéndice:

$$dS_t = S_t[\mu_t dt + \sigma_t dW].$$

En la anterior ecuación se ha usado $\mu_t = \frac{1}{S_t}B'$ y $\sigma_t = \frac{1}{S_t}\phi_t$. En conclusión, S es un proceso de difusión de Ito de acuerdo a la definición 2.4.0.3.

Lo anterior motiva la siguiente definición de mercado financiero[1]:

Definición de mercado 3.1.1.2 *Un mercado de instrumentos financieros consta de los siguientes elementos:*

- *Un espacio de probabilidad* (Ω, σ, F, P).
- *Un tiempo terminal* T.
- *Un movimiento browniano* $W^* = (W^1, \ldots, W^D)$ *de dimensión* D.
- *Una tasa libre de riesgo* $r(t)$ *progresivamente medible e integrable.*
- *Un vector* $b = (b_i)$ *de dimensión* N, *progresivamente medible e integrable. Este vector representa la tasa instantánea de rendimiento de cada uno de los instrumentos.*
- *Una matriz progresivamente medible y cuadrado integrable, de dimensión* $D \times N$, $\sigma = (\sigma_{ij}(t))$. *Esta matriz representa las covarianzas entre los intrumentos.*
- N *submartingalas continuas positivas, relacionadas por el sistema* $dS_i = S_i[b_i dt + \sum_{d=1}^{D} \sigma_{id} dW^d]$. *Estos procesos representan los instrumentos del mercado.*

Dos comentarios acerca del modelo.

El modelo acepta una tasa que representa el pago de dividendos por acción. No se incluye en la definición, dado que nos concentramos en acciones que no pagan dividendos.

Aunque se definió en generalidad el modelo y es posible que $D \neq N$, como aceptaremos mercados completos y libres de arbitraje, siempre D es igual a N[2].

Este modelo es general y bien justificado, ahora es necesario especificar los coeficientes del sistema: b_i, σ_{ij}. Esto se consigue con algunas condiciones en la forma de operar los instrumentos.

[1] Siguiendo la definición 1.3 página 4 de Karatzas[14].
[2] Ver sección 3.1.4.

3.1.2. Hipótesis del mercado

Un instrumento derivado es un contrato financiero cuyo valor depende del precio de un instrumento primario subyacente como una acción o un bono. Su principal función es ser un medio para la administración del riesgo.

Estos instrumentos deben ser valuados y relacionado a su función de administración de riesgo, encontrar un portafolio replicante. Para poner en términos específicos estos dos problemas y aplicar el modelo estocástico del anterior apartado, se aceptan las siguientes hipótesis:

1. El mercado es libre de fricción.

   Esta hipótesis significa que dentro del modelo no se ven reflejados los costos por transacción debido a impuestos o comisiones de las instituciones.

2. Existe una única tasa de interés.

   Esto quiere decir que la tasa de interés que un banco o institución financiera aplica a una cuenta de ahorro de un cliente es igual a la tasa de interés que el banco cobra a un cliente que tiene un crédito.

3. Posiciones ilimitadas.

   Esto significa que no hay límites en el numero de instrumentos de los que esta formado un portafolio. No hay restricciones en posiciones en corto ni en el crédito que se puede solicitar.

4. El mercado es viable.

   Esto significa que no hay oportunidades de arbitraje. Una oportunidad de arbitraje es cuando un instrumento en forma simultanea tiene dos precios distintos. Esto da la oportunidad de hacer una ganancia libre de riesgo.

5. El mercado es completo.

   Un mercado es completo cuando el precio de un instrumento derivado puede ser replicado por un portafolio autofinanciable de instrumentos primarios.

3.1.3. Portafolios autofinanciables

En el apartado 3.1.4 se expone en que forma se reflejan las hipótesis de mercado en el modelo browniano geométrico. Es necesario en este propósito el concepto de portafolio autofinanciable. Este es un concepto importante y lo revisamos a continuación.

Consideremos un portafolio $\Pi_t = \phi_1 I_1(t) + ... + \phi_n I_n(t)$ en donde I_j representa el precio de un instrumento elegido y ϕ_j es el número de posiciones dentro del portafolio. Decimos que este portafolio es autofinanciable cuando después de la inversión inicial, en la evolución del portafolio en el tiempo no hay consumo ni tampoco hay inyección de capital y el cambio en el valor del portafolio se debe a la fluctuación del valor de cada instrumento y al número de posiciones.

Definición 3.1.3.1 *Un portafolio* Π_t *es* **autofinanciable** *sii:*

$$d\Pi_t = \phi_1 dI_1(t) + ... + \phi_n dI_n(t).$$

Veamos un ejemplo.

Sea S el precio de una acción y P el precio de un bono. Formemos un portafolio con ϕ acciones y ψ bonos:

$$\Pi_t = \phi_t S_t + \psi_t P_t.$$

La condición para que sea autofinanciable es:

$$d\Pi = \phi_t dS + \psi_t dP. \tag{3.1}$$

Consideremos la partición $\Xi = \{t_i = \frac{i}{N}T\}_{i=0,\dots,N}$ del intervalo $[0, T]$. La ecuación 3.1 en Ξ es:

$$\Pi_{t_{i+1}} - \Pi_{t_i} = \phi_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + \psi_{t_i}(P_{t_i+1} - P_{t_i}),$$

esto dice que el cambio del valor del portafolio en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ se debe al cambio en los precios en el período y el número de posiciones que se mantuvieron al inicio del mismo.

Al sumar todas las diferencias, se obtiene:

$$\Pi_T - \Pi_0 = \sum \Pi_{t_{i+1}} - \Pi_{t_i} =$$

$$\sum \phi_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + \sum \psi_{t_i}(P_{t_i+1} - P_{t_i})$$

$$
\begin{aligned}
&= \\
&\phi_T S_T - \phi_0 S_0 + \psi_T P_T - \psi_0 P_0 + \\
&\sum_1^{N-1} S_{t_i}(\phi_{t_{i+1}} - \phi_{t_i}) + \sum_1^{N-1} P_{t_i}(\psi_{t_{i+1}} - \psi_{t_i}).
\end{aligned}
$$

Al tomar el límite y escribir en notación diferencial:

$$d\Pi = (d\phi)S + (d\psi)P. \tag{3.2}$$

Se puede interpretar 3.2 como sigue. Supongamos que en el instante de tiempo $t_0 = 0$ un inversionista pide un préstamo representado por $-P_{t_0}\psi_{t_0}$ con este dinero decide comprar $S_{t_0}\phi_{t_0}$ acciones, y forma el portafolio

$$\Pi_{t_0} = S_{t_0}\phi_{t_0} + P_{t_0}\psi_{t_0} = 0.$$

En el siguiente instante de tiempo la acción cambia al valor S_{t_1}, supongamos que este es mayor que S_{t_0} y entonces decide comprar mas acciones pero pidiendo un nuevo préstamo. Denotemos esta operación como $S_{t_1} f_{t_1} = -P_{t_1} m_{t_1}$. La nueva configuración del portafolio es:

$$\Pi_{t_1} = S_{t_1}(\phi_{t_0} + f_{t_1}) + P_{t_1}(\psi_{t_0} + m_{t_1}).$$

El valor del portafolio no ha cambiado: $\Pi_0 = \Pi_{t_1} = 0$, es independiente a la distribución de los instrumentos. En forma diferencial podemos escribir:

$$d\Pi_{t_1} = 0. \tag{3.3}$$

Hagamos $\phi_{t_1} = \phi_{t_0} + f_{t_1}$ y $\psi_{t_1} = \psi_{t_0} + m_{t_1}$, entonces

$$S_{t_1}(\phi_{t_1} - \phi_{t_0}) + P_1(\psi_{t_1} - \psi_{t_0}) = S_{t_1} f_{t_1} + P_{t_1} m_{t_1} = 0.$$

Este argumento se puede generalizar para demostrar que:

$$S_{t_{i+1}}(\phi_{t_{i+1}} - \phi_{t_i}) + P_{t_{i+1}}(\psi_{t_{i+1}} - \psi_{t_i}) = 0. \tag{3.4}$$

Con el teorema del valor medio de la derivada, es posible construir una familia de particiones con norma convergente a cero, de tal forma que para $s < t$ elementos de una partición se cumple:

$$S_t\phi' + P_t\psi' = \frac{1}{t-s} S_t(\phi_t - \phi_s) + \frac{1}{t-s} P_t(\psi_t - \psi_s). \tag{3.5}$$

Si reunimos las ecuaciones 3.3, 3.4 y 3.5 se obtiene la ecuación 3.2:

$$d\Pi = (d\phi)S + (d\psi)P.$$

3.1.4. Condiciones de arbitraje y completez

El modelo 3.1.1.2 acepta expresiones útiles en la práctica para los principios de no arbitraje y completez.

Un mercado está libre de oportunidades de arbitraje, si no es posible obtener ganancias estrictamente positivas sin riesgo. El siguiente teorema presenta formas equivalentes al principio de arbitraje.

Teorema 3.1.4.1 *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *El mercado es libre de arbitraje.*
2. *La dimensión del proceso W^* es mayor al número de instrumentos en el mercado.*
3. *Existe una medida P^*, equivalente a la medida P, de tal forma que todos los instrumentos descontados son martingalas.*

En un mercado completo, siempre es posible replicar el comportamiento del precio de una opción mediante un portafolio autofinanciable con posiciones en la acción subyacente y un bono.

El siguiente teorema caracteriza un mercado completo.

Teorema 3.1.4.2 *Un mercado libre de oportunidades de arbitraje es completo sii se cumplen las dos condiciones:*

1. *La dimensión de W^* es igual al número de instrumentos.*
2. *La matriz de volatilidades $(\sigma_{i,j}(t))$ es no singular casi seguramente.*

3.2. El modelo browniano geométrico para el precio de una acción

3.2.1. Tipos de acciones

Una acción es un instrumento financiero en el cual intervienen la empresa emisora, el accionista y una institución que respalda la transacción.

La colocación inicial de una empresa de acciones se llama Oferta Pública Inicial(OPI) y se canaliza a través de una casa de bolsa a la Bolsa Mexicana de Valores (BMV)[3] con apego a la Comisión Nacional Bancaria y de Valores(CNBV).[4] En esta operación existe una transacción (flujo de dinero) entre el inversionista y la empresa, pero una vez efectuada esta, el accionista tiene la opción de poner en venta sus títulos en la que no se haya ninguna fecha comprometida y el precio de transacción pocas veces está relacionado con el precio inicial de oferta, además la empresa emisora no interviene en forma alguna.

Las principales características de una acción que debemos tomar en cuenta para su estudio las enumeramos a continuación:

1. Existen dos clases de acciones, las acciones preferenciales y las acciones ordinarias.

   Las acciones preferenciales se distinguen porque al poseedor de la misma tiene el derecho de participar en toma de decisiones y le garantiza una participación de las utilidades generadas por la empresa, dicho de otro modo el poseedor de un porcentaje de las acciones preferenciales de una empresa lo convierte en poseedor en el mismo porcentaje de la

[3] Institución sede del mercado mexicano de valores. Institución responsable de proporcionar la infraestructura, la supervisión y los servicios necesarios para la realización de los procesos de emisión, colocación e intercambio de valores y títulos inscritos en el Registro Nacional de Valores (RNV), y de otros instrumentos financieros. Así mismo, hace pública la información bursátil, realiza el manejo administrativo de las operaciones y transmite la información respectiva a SD Indeval, supervisa las actividades de las empresas emisoras y casas de bolsa, en cuanto al estricto apego a las disposiciones aplicable, y fomenta la expansión y competitividad del mercado de valores mexicanos.

[4] Órgano de la SHCP, con autonomía técnica y facultades ejecutivas, que regula la operación de las bolsas de valores, el desempeño de los intermediarios bursátiles y el depósito central de valores. La CNBV puede ordenar la suspensión de la cotización de valores o intervenir administrativamente a los intermediarios que no mantengan prácticas sanas de mercado. Es la entidad responsable de mantener el Registro Nacional de Valores, en el que se inscribe todo valor negociado en la BMV.

empresa. De esta forma, podemos entender las acciones preferenciales como un instrumento practico mediante el cual las empresas y los grandes inversionistas pueden realizar transacciones.

Las acciones ordinarias no dan derecho al poseedor de participar en tomas de decisión ni tampoco garantizan un porcentaje fijo de las utilidades de la empresa. En su lugar el accionista ordinario puede esperar un dividendo que es variable y que es determinado por el comite ejecutivo de la empresa. Son estas acciones las que normalmente se negocian a diario en todo el mundo y son el tipo de acción que nos interesa estudiar en esta sección.

2. Son bursátiles.

   Una vez que el inversionista tiene sus títulos tiene el derecho de negociar con ellos, y colocarlos a venta en un Mercado de Valores sin que haya de por medio alguna fecha. Por otro lado el marco legal condiciona el estado de parámetros que son indicadores de la buena salud de las empresas, de tal forma que los participantes en el mercado tienen garantía de la honorabilidad de las firmas emisoras. Esto hace que en términos prácticos podamos considerar estos instrumentos absolutamente negociables, en el sentido de que si algún agente coloca a venta un numero de títulos, siempre habrá un inversionista dispuesto a negociar un precio para su compra.

3. Son volátiles.

   En el comportamiento del precio de una acción intervienen varios factores entre los que podemos identificar salud y valor presente de la empresa emisora, especulación en el desempeño y desarrollo futuro de la empresa, la ley de oferta y demanda, la tasa de interés libre de riesgo, programas de desarrollo del sector económico, correlaciones con otros sectores, eventos extremos, etc. Podemos observar que estos factores son difíciles de determinar y prácticamente imposibles de pronosticar, esto tiene repercusión en dos fenómenos que inicialmente parecen no estar relacionados. Primero, al observar la gráfica en el tiempo del precio de una acción observamos un comportamiento en extremo irregular y segundo la información del pasado no nos permite anticipar el comportamiento en el futuro inmediato. La conección resulta al aceptar que si no podemos anticipar el comportamiento futuro de la acción en base a la información presente, no es resultado de la ignorancia, en el sentido de que estamos dejando variables libres sin considerar cuya inclusión en el análisis permitiría hacer un pronóstico, mas bien es porque este fenómeno tiene una naturaleza de incertidumbre que es inevitable, de tal forma que debemos necesariamente considerar un elemento probabilistíco que en el modelo matemático evidencia de donde viene esta irregularidad[5].

Desde el punto de vista de una empresa, la emisión de acciones ordinarias es una alternativa para financiar proyectos internos que pueden responder a diversos objetivos. La ventaja de las acciones es que la empresa no adquiere una deuda, aunque si da el derecho a los accionistas de participar de las utilidades generadas, la desventaja es que (y resulta paradójico) cuando la empresa tiene un período importante de crecimiento, entonces este instrumento se convierte en una forma cara de financiarse porque el dividendo a sus accionistas es grande y puede rebasar la tasa de inversión del mercado.

Desde el punto de vista del poseedor, las acciones ordinarias son un instrumento que le permiten especular y formar portafolios de inversión. De acuerdo a sus tendencias podemos clasificar en modo groso los accionistas como:

1. Especuladores. Estos accionistas se caracterizan por esperar altos rendimientos y aceptar un nivel alto de riesgo, generalmente se concentran en identificar tendencias en el comportamiento de la acción para pronosticar una caída drástica de precio(en cuyo caso venden inmediato sus acciones) o un rápido crecimiento(en cuyo caso compran tantas acciones como les sea posible) siendo el diferencial de la operación su ganancia.

2. Técnicos. Estos inversionistas se caracterizan por seguir estrategias de inversión resultado de aplicar técnicas establecidas de análisis. Su interés es formar un portafolio de inversión en el que se reflejen sus preferencias de rendimiento y riesgo aceptado. De acuerdo a sus preferencias respecto al rendimiento y riesgo tenemos inversionistas que tienen tolerancia al riesgo a cambio de esperar un rendimiento alto y en un

[5]La diferencia entre un fenómeno con naturaleza de incertidumbre y un fenómeno determinista en el que no se han considerado todas las variables no es una consideración trivial, es una sutileza importante como lo muestra la mecánica cuántica.

periodo corto de tiempo, estos son los inversionistas agresivos; por otro lado tenemos los inversionistas que tienen aversión al riesgo y por ello aceptan un rendimiento bajo y son capaces de mantener su inversión en un periodo largo de tiempo.

3. Finalmente tenemos los inversionistas que se enfocan a estudiar la empresa, el sector económico y si determinan que la empresa puede crecer en forma importante compran y mantienen sus acciones lo cual se traduce en una recompensa futura en los dividendos y en el aumento del valor del precio de la acción.

3.2.2. El modelo browniano geométrico

El modelo más aceptado para estudiar el precio de una acción es el modelo geométrico:

$$dS = S(\mu dt + \sigma dB).$$

Veamos cual es la justificación para utilizar este modelo. Necesitamos aceptar las hipótesis de mercado de la primer sección y una tasa de interés constante.

Supongamos que el precio de una acción S esta libre de riesgo, en este caso el principio de arbitraje implica que el valor de la acción está dado por: $S(t) = S_0 e^{rt}$. Sin embargo el comportamiento de una acción siempre presenta volatilidad, por ello debe darse un elemento de incertidumbre. Proponemos entonces la ecuación $S_t = S_0 \exp(rt + X)$ donde X es un proceso estocástico.

Con algunas hipótesis, es posible deducir que X esta relacionado al movimiento browniano. Algunas de estas hipótesis son de naturaleza técnica para poder aplicar las herramientas desarrolladas en el capítulo dos y otras de ellas siguen los datos estadísticos. Este es el plan a seguir.

Establecer las hipótesis:

1. S_t es adaptado a una filtración $\{\mathbb{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ continua por la derecha.

2. S_t es continuo.

3. $E(S_t) = S_0 e^{rt}$.

4. S_t tiene incrementos independientes.

5. $\ln S_t$ tiene distribución normal.

Deducir las siguientes propiedades de X a partir de las hipótesis en S :

1. $X_0 = 0$. X es continuo y adaptado a la filtración $\{\mathbb{F}_t\}_{0\leq t<\infty}$.
2. X_t tiene distribución normal.
3. X_t tiene incrementos independientes.

- *Hipótesis 1.* S_t es adaptado a la filtración $\{\mathbb{F}_t\}_{0\leq t<\infty}$. Esta es la primera hipótesis técnica que necesitamos para conectar S_t con el movimiento browniano. Pero además tenemos una interpretación para la filtración, $\mathbb{F}_t$ representa la información observada hasta el instante de tiempo t.

- *Hipótesis 2.* S_t es continuo. Esta también es una hipótesis técnica necesaria para conectar S_t con el movimiento browniano. Además es una condición de regularidad natural y corresponde en primera aproximación con las observaciones estadísticas.

- *Hipótesis 3.* $E(S_t) = S_0e^{rt}$. Esta es una hipótesis cuya interpretación es que en el proceso para obtener el valor esperado de la acción las variaciones debido al riesgo se equilibran y en el resultado se obtiene un comportamiento libre de riesgo.

- *Hipótesis 4.* S_t tiene incrementos independientes. No hay correlación en el comportamiento de la acción en un intervalo y otro, independientemente de cuan cercanos estén ni lo pequeños que sean. No es posible hacer un pronóstico del comportamiento de una acción con la información presente. Esta hipótesis corresponde con los datos estadísticos.

- *Hipótesis 5.* $\ln S_t$ tiene distribución normal. Esta hipótesis se puede justificar de varias formas, la que aceptamos aquí es que corresponde con los datos estadísticos. Otra forma de justificar es utilizar el modelo discreto de Cox-Ross-Rubinstein que permite construir una sucesión de procesos discretos que aproximan el precio de una acción, sin embargo es necesario desarrollar herramientas para asegurara la convergencia de estos procesos.

Otra alternativa es utilizar las hipótesis de la sección uno, las hipótesis de Samuelson[6] acerca del riesgo y la caracterización de Paul Levy del movimiento browniano. No desarrollamos alguna de estas alternativas, ya que los resultados del apéndice B justifican en un camino diferente el modelo browniano geométrico y en particular esta hipótesis.

- *Propiedad 1.* X_t es continuo y adaptado a la filtración $\{\mathbb{F}_t\}_{0\leq t<\infty}$ y $X_0 = 0$. Es suficiente despejar la ecuación $S_t = S_0 \exp(rt + X_t)$ para obtener

$$X_t = \ln(\frac{S_t}{S_0}) - rt,$$

y aplicar las hipótesis 1 y 2.

- *Propiedad 2.* X_t tiene distribución normal. Es consecuencia directa de la hipótesis 5.

Sea $X_t = \sqrt{\frac{b_t}{t}} Z_t + a_t$ donde $E(X_t) = a_t$ y $Var(X_t) = b_t$. Entonces $E(Z_t) = 0$ y $Var(Z_t) = E(Z_t^2) = t$.

La hipótesis 3 implica que $E(e^{X_t}) = 1$ y en términos de la distribución normal $\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x \exp(-\frac{(x-a)^2}{2b})dx = 1$. Completando cuadrados se obtiene que: $\frac{\exp(-2a-b)}{\sqrt{2\pi b}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{(x-a-b)^2}{2b})dx = 1$ y entonces:

$$2a + b = 0. \tag{3.6}$$

- *Propiedad 3.* X_t tiene incrementos independientes. Es consecuencia a la hipótesis 4 y al siguiente

Lema. Sean A, B, C y D variables positivas y acotadas tales que las diferencias $A - B, C - D$ son variables independientes. Las variables $\ln \frac{A}{B})$ y $\ln(\frac{C}{D})$ son independientes.

Demostración. Sea M una cota para las variables A, B, C y D. Sean $W = \{\omega \in \Omega \mid \ln(\frac{A}{B}) < a\}$ y $V = \{\omega \in \Omega \mid \ln(\frac{C}{D}) < b\}$. Se debe

[6]Estas son:
a)El valor absoluto de la suma de los riesgos esta acotado.
b)El riesgo no se acumula en un período de tiempo en particular.
Esto permite concluir que la variación cuadrática del riesgo es la identidad con respecto al tiempo.

demostrar que $P(W \cap V) = P(W) \times P(V)$.

Sean $B^N = \sum_{k=1}^{M2^n} \frac{k-1}{2^N} 1_k$ y $D^N = \sum_{k=1}^{M2^n} \frac{k-1}{2^N} 1'_k$ donde $1_k = 1_{\{\frac{k-1}{2^N} \leq B < \frac{k}{2^N}\}}$ y $1'_k = 1_{\{\frac{k-1}{2^N} \leq D < \frac{k}{2^N}\}}$.

Sean $W^N = \{A - B < B^N(e^a - 1)\}$ y $V^N = \{C - D < D^N(e^b - 1)\}$.

Sean $W_k^N = \{\frac{k-1}{2^N}(e^a - 1) \leq A - B < \frac{k}{2^N}(e^a - 1)\}$ y $V_k^N = \{\frac{k-1}{2^N}(e^b - 1) \leq C - D < \frac{k}{2^N}(e^b - 1)\}$ entonces $W^N = \bigsqcup_{k=1}^{M2^N} W_k^N$, $V^N = \bigsqcup_{k=1}^{M2^N} V_k^N$ y $W^N \cap V^N = \bigsqcup_{k=1,j=1}^{M2^N} W_k^N \cap V_j^N$;

si tomamos en cuenta que la unión es ajena y los conjuntos W_k^N y V_k^N son independientes:

$$P(W^N \cap V^N) = P(\bigsqcup_{k=1,j=1}^{M2^N} W_k^N \cap V_j^N) = \sum_{k=1,j=1}^{M2^N} P[W_k^N \cap V_j^N] =$$

$$\sum_{k=1,j=1}^{M2^N} P[W_k^N] \cdot P[V_j^N] = \sum_{k=1}^{M2^N} P[W_k^N] \cdot P[V^N] = P[W^N] \cdot P[V^N].$$

Ahora demostramos que $\lim P[W^N] = P[W]$, $\lim P[V^N] = P[V]$ y $\lim P(W^N \cap V^N) = P(W \cap V)$.

Vemos el caso $\lim P[W^N] = P[W]$ siendo los otros casos similares.

Dos propiedades son necesarias:

$W^N \subset W$. Sea $\omega \in W^N$, entonces $A(\omega) - B(\omega) < B^N(\omega)(e^a - 1) \leq B^{N+1}(\omega)(e^a - 1) \leq B(\omega)(e^a - 1)$. La última desigualdad se sigue porque $B^N \leq B^{N+1} \leq B$ de acuerdo a la definición de estas variables.

$\cup W^N = W$. Sea $\omega \in W$, entonces $A(\omega) - B(\omega) < B(\omega)(e^a - 1)$. Sabemos que $\lim B^N(\omega) = B(\omega)$ y como la desigualdad es *estricta* entonces existe N_0 tal que $A(\omega) - B(\omega) < B^{N_0}(\omega)(e^a - 1)$ lo cual implica que $\omega \in W^{N_0}$.

tenemos entonces $W^N \subset W^{N+1} \subset W$ y $\cup W^j = W$, lo cual implica las igualdades: $\lim P(W^N) = P(\cup W^N) = P(W)$.□

Las propiedades 1, 2 y 3 dan la fórmula para S:

$$S_t = S_0 e^{rt} \exp(\sqrt{\frac{b_t}{t}} Z_t + a_t),$$

donde Z_t es una variable continua, con media cero y varianza t, con incrementos independientes y distribución normal, precisamente las propiedades que definen al movimiento browniano.

Aplicamos el lema de Ito a la función $F(t, x) = S_0 e^{rt} \exp(\sqrt{\frac{b_t}{t}} x + a_t)$ para lo cual las funciones $\sqrt{\frac{b_t}{t}}$ y a_t deben ser derivables. Calculamos las parciales:
$F_t = rF + F\{a' + \frac{x}{2}(\frac{b_t}{t})^{-1/2} \frac{b't-b}{t^2}\}$.
$F_x = \sqrt{\frac{b_t}{t}} F$.
$F_{xx} = \frac{b_t}{t} F$.

Entonces:

$$S_A - S_B =$$

$$\int_A^B F(t, Z_t)[r + a' + \frac{Z_t}{2}(\frac{b_t}{t})^{-1/2} \frac{b't - b}{t^2}]dt + \frac{1}{2} \int_A^B \sqrt{\frac{b_t}{t}} F(t, Z_t)dt$$

$$+$$

$$\int_A^B \sqrt{\frac{b_t}{t}} F(t, Z_t) dZ_t$$

$$=$$

$$\int_A^B S_t[r + a' + \frac{Z_t}{2}(\frac{b_t}{t})^{-1/2} \frac{b't - b}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{b_t}{t}]dt + \int_A^B \sqrt{\frac{b_t}{t}} S_t dZ_t. \qquad (3.7)$$

Cuando el término $\sqrt{\frac{b_t}{t}}$ es constante, entonces $b_t = \sigma^2 t$. La ecuación 3.6 implica que $a_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 t$ y la ecuación 3.7 se reduce a:

$$S_A - S_B = r \int_A^B S_t dt + \sigma \int_A^B S_t dZ_t.$$

Lo anterior se puede rescribir como:

$$S_t = S_0 \exp(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma Z_t).$$

3.3. El modelo de valuación Black-Scholes

3.3.1. Tipos de opciones

Una opción es un instrumento financiero[7] en el que intervienen un emisor, un comprador, un instrumento primario subyacente y una institución que respalda la transacción.

Como ejemplo de instrumento primario podemos pensar en una acción o un bono. Un instrumento derivado es aquel cuyo precio está relacionado a un instrumento primario subyacente. El principal ejemplo a tomar en cuenta es una opción.

Una opción es un instrumento derivado generalmente sobre una acción o un bono, altamente transaccionada en un mercado especializado en derivados, y es un medio por el cual se administra el riesgo debido a la alta volatilidad del instrumento subyacente.

Esto quiere decir que el poseedor o emisor de una opción generalmente es un inversionista técnico que cuenta con un portafolio que relaciona posiciones en opciones con posiciones en los títulos accionarios subyacentes.

Esta es una lista de las características de una opción:

1. Existen dos tipos de opciones.

   Una opción de compra es un contrato por el que se debe pagar una cantidad pactada. Da al poseedor el derecho pero no la obligación de comprar en una fecha de expiración un título de acción a un precio establecido.

   Una opción de venta es un contrato por el que se debe pagar una cantidad pactada. Da al poseedor el derecho pero no la obligación de vender en una fecha de expiración un título de acción a un precio convenido.

2. La opción está definida por tres parámetros.

   De acuerdo al anterior punto una opción queda determinada por la fecha de expiración del contrato, el valor de la opción y el valor de ejercicio del instrumento subyacente.

[7] Como todo instrumento financiero, un contrato legal en el que se establecen derechos y obligaciones por ambas partes.

3. Existen varias clases de opciones.

   Las opciones europeas que sólo se pueden ejercer en la fecha de expiración, las opciones americanas que se pueden ejercer en cualquier fecha antes de su expiración, las opciones asiáticas cuyo valor al día depende de la gráfica de precios en el pasado. En cuanto al problema de valuación de estos instrumentos, sólo las opciones europeas permiten encontrar soluciones analíticas. En lo que sigue nos concentraremos en las opciones de compra europeas.

4. Son volatiles.

   Esto es una consecuencia a que el precio de la opción está en función del precio de la acción.

5. Determinan posiciones en corto y en largo.

   El poseedor de una opción (de compra o venta) sobre una acción se dice que adquiere una posición larga sobre la opción.

   El emisor de una opción (de compra o venta) sobre una acción se dice que adquiere una posición corta sobre la opción.

3.3.2. Paridad de compra-venta y spreads

Las opciones de compra y venta están relacionadas por una fórmula que se llama paridad de compra-venta (put-call parity) la cual obtenemos de la siguiente forma:

Consideremos un portafolio Π que consta de un título de una acción con precio inicial S_0, una posición en corto de una opción de compra C con fecha de expiración T y precio de ejercicio X, una opción de venta P con la misma fecha de expiración y precio de ejercicio que C.

Tenemos entonces que $\Pi_0 = S_0 + P - C$ y el valor del portafolio en la fecha de expiración T está dado por $\Pi_T = S_T + P_T - C_T = S_T + (X - S_T)^+ - (S_T - X)^+$ es fácil ver que $\Pi_T = X$, es decir que el valor final del portafolio es independiente al comportamiento del precio de la acción S. El principio de arbitraje determina el valor del portafolio en el intervalo $[0, T]$ y está dado por:

$$\Pi_t = Xe^{-r(T-t)}. \tag{3.8}$$

Esta fórmula que se llama **paridad de compra-venta** relaciona en forma explícita el comportamiento de una opción de compra con una opción de venta. Esto reduce el estudio de las opciones a las opciones de compra.

Se mencionó más arriba que la función de una opción es dar una alternativa para la administración del riesgo y en este sentido la deducción de la paridad compra-venta ilustra esta afirmación. También es posible especular con estos instrumentos pero en una forma sistemática y controlando el riesgo como se muestra en los siguientes ejemplos.

Un portafolio *bull spread* β, consiste de una opción de compra C sobre una acción S con fecha de expiración T y precio de ejercicio X y de una posición en corto de una opción de compra C' con la misma fecha de expiración T pero con precio de ejercicio $X + h$, es decir que $\beta_t = C_t - C'_t$.

En la fecha de expiración tenemos que $\beta_T = (S_T - X)^+ - (S_T - X - h)^+$ si partimos el dominio en que se mueve S_t:

- $S_T \in [0, X]$ entonces $\beta_T = 0$.
- $S_T \in [X, X + h]$ entonces $\beta_T = S_T - X$.
- $S_T \in [X + h, \infty]$ entonces $\beta_T = h$.

En la figura 3.1 podemos ver la gráfica.

El poseedor de un portafolio bull spread especula sobre el crecimiento de la acción S pero controlando el riesgo, en el sentido de que conoce el valor en riesgo. Este valor está dado por $|C_0 - C'_0|$.

Un portafolio *butterfly spread* β, consiste de una opción de compra C sobre una acción S con fecha de expiración T y precio de ejercicio X, otra opción de compra C' con la misma fecha de expiración T pero con precio de ejercicio $X + Y$ y finalmente $2C''$ posiciones en corto de una opción con fecha T y con precio de ejercicio $X + \frac{1}{2}Y$, es decir que $\beta_t = C_t + C'_t - 2C''_t$.

El valor del portafolio en la fecha de expiración es $\beta_T = (S_T - X)^+ + (S_T - X - Y)^+ - 2(S_T - X - \frac{1}{2}Y)^+$, si partimos el dominio en que se mueve S_t:

- $S_T \in [0, X]$ entonces $\beta_T = 0$.
- $S_T \in [X, X + \frac{1}{2}Y]$ entonces $\beta_T = S_T - X$.
- $S_T \in [X + \frac{1}{2}Y, X + Y]$ entonces $\beta_T = X + Y - S_T$.

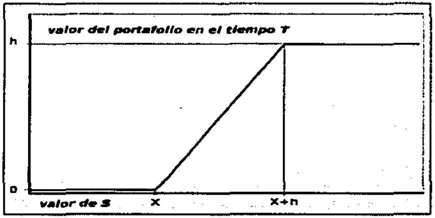

Figura. 3.1: Comportamiento del portafolio *bull spread.*

- $S_T \in [X+Y, \infty]$ entonces $\beta_T = 0$.

En la figura 3.2 podemos ver la gráfica.

Es claro que en este portafolio, el inversionista especula que el valor de S_T estará próximo a $X + \frac{1}{2}Y$. El valor en riesgo de este portafolio es $|\beta_0| = |C_0 + C_0' - 2C_0''|$.

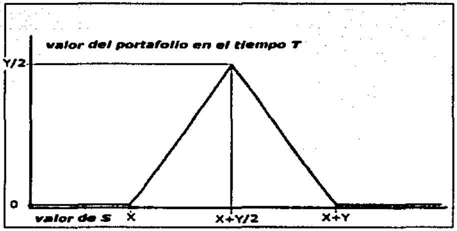

Figura. 3.2: Comportamiento del portafolio *butterfly spread.*

3.3.3. Ecuación de Black-Scholes

Una vez revisados los conceptos financieros relacionados a una opción, se procederá a la tarea de su valuación. Específicamente se verá el modelo de valuación de Black-Scholes para una opción de compra europea. Se toma el modelo browniano geométrico para una acción, las hipótesis de la sección uno y una tasa de interés constante.

Como una opción depende del precio de la acción subyacente, suponemos que el precio tiene la forma $V(t, S_t)$. La función V, debe satisfacer las condiciones de regularidad para aplicar el lema de Ito.

Se obtiene la función en dos pasos. Primero, se deduce una ecuación diferencial que se debe satisfacer en forma única dadas ciertas condiciones de frontera, y segundo, se simplifica la ecuación para resolver y encontrar en forma explícita la solución.

La acción sigue el movimiento browniano geométrico $S_t = S_0 e^{rt}\exp(\sigma B - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$. El lema de Ito permite escribir:

$$V(S_t, t) - V(S_0, 0) = \int_0^t \{\frac{\partial}{\partial t}V + \mu S\frac{\partial}{\partial s}V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}V\}dt + \sigma\int_0^t S\frac{\partial}{\partial s}VdB.$$

Mediante un portafolio autofinanciable se replica el precio de la opción. Este tiene la forma:

$$\Pi_t = \phi_t S_t + \psi_t P_t,$$

ϕ indica el numero de títulos de acciones, S indica el precio de una acción, ψ el numero de bonos y P indica el precio.

Las diferenciales de Π y V deben ser iguales:

$$[\frac{\partial}{\partial t}V + \mu S\frac{\partial}{\partial s}V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}V]dt + \sigma S\frac{\partial}{\partial s}VdB$$
$$=$$
$$\phi dS + \psi dP.$$

Necesariamente:

$$\frac{\partial}{\partial s}V = \phi.$$

al sustituir $dS = \mu Sdt + \sigma dB$ y $dP = rPdt$ se llega a la igualdad:

$$[\frac{\partial}{\partial t}V + \mu S\frac{\partial}{\partial s}V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}V]dt = [\mu S\frac{\partial}{\partial s}V + r\psi P]dt,$$

la anterior ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t}V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}V - r\psi P = 0.$$

Observando que $r\psi P = r(V - S\frac{\partial}{\partial s}V)$ se llega a la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}V + rS\frac{\partial}{\partial s}V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}V - rV = 0, \tag{3.9}$$

que es la *ecuación de Black-Scholes.* Con esto se cubre el primer paso.

3.3.4. Fórmula de Black-Scholes

Ahora seguimos con el paso dos. Para resolver la ecuación 3.9 es necesario aplicar una transformación que convierta la ecuación de Black-Scholes en la ecuación de calor. También es necesario tener las condiciones de frontera y cambiar sus coordenadas.

La primer simplificación se obtiene al observar que V es solución a la ecuación de Black-Scholes 3.9, si $W = \exp(-rt)V$ es solución a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}W + rS\frac{\partial}{\partial s}W = 0. \tag{3.10}$$

Esto elimina el término $-rV$.

Con un cambio de variable se elimina el término $rS\frac{\partial}{\partial s}W$ de 3.10.

Para encontrar el cambio de variable que elimina este término, se hace un cálculo con la regla de la cadena.

Sea $\Phi(t,S) = (a(t,S), b(t,S))$ la transformación mediante la cual se hará el cambio de variable. Sea $G \circ \Phi = W$ y apliquemos la regla de la cadena para obtener $DG \cdot D\Phi = DW$. Explícitamente:

$$W_t = a_t G_a + b_t G_b$$
$$W_s = a_s G_a + b_s G_b.$$

La parcial de segundo grado es:

$$W_{ss} = a_{ss}G_a + a_s(G_a)_s + b_{ss}G_b + b_s(G_b)_s.$$

$(G_a)_s$ se obtiene con la regla de la cadena $D(G_a \circ \Phi) = DG_a \cdot D\Phi$. Explícitamente:

$$(G_a \circ \Phi)_t = a_t G_{aa} + b_t G_{ba}$$
$$(G_a \circ \Phi)_s = a_s G_{aa} + b_s G_{ba},$$

en forma análoga:

$$(G_b \circ \Phi)_t = a_t G_{ab} + b_t G_{bb}$$
$$(G_b \circ \Phi)_s = a_s G_{ab} + b_s G_{bb}.$$

Lo anterior da la expresión correcta para W_{ss}:

$$W_{ss} = a_{ss}G_a + a_s[a_s G_{aa} + b_s G_{ba}] + b_{ss}G_b + b_s[a_s G_{ab} + b_s G_{bb}].$$

Al sustituir en 3.10 las anteriores igualdades y reagrupar:

$$G_a(a_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 a_{ss} + rsa_s) + G_{bb}(\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 b_s^2)$$
$$+$$
$$G_b(b_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 b_{ss} + rsb_s) + G_{ab}\sigma^2 s^2 b_s a_s + G_{aa}(\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 a_s^2) = 0. \qquad (3.11)$$

Eliminamos el término en G_{aa} al hacer $a(t,s) = H(t)$ y entonces la ecuación se reduce a:

$$G_a H'(t) + G_{bb}(\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 b_s^2) + G_b(b_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 b_{ss} + rsb_s) = 0. \qquad (3.12)$$

Es posible elegir a y b que reduzcan 3.12 a la ecuación de calor.

Primero, hacemos $H(t) = T - t$ pues la ecuación para V tiene la condición final $V(T,s) = (s-K)^+$. La transformación $H(t) = T - t$ nos da una condición inicial.

Segundo, es necesario un término constante en G_{bb}. La única forma en que se cumple esto, es cuando $b(t,s) = \ln s + g(t)$. Si sustituimos en el coeficiente de G_b e igualamos a cero, resulta que $g'(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{1}{s^2} + rs\frac{1}{s} = g'(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 + r$, esto implica que $g(t) = (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)t$.

Es decir que el cambio de variable:

$$\Phi(t,s) = (T - t, \ln s + (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)t),$$

reduce la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}W + rS\frac{\partial}{\partial s}W = 0,$$

a la ecuación de calor

$$G_a = \frac{1}{2}\sigma^2 G_{bb}. \tag{3.13}$$

Sean $\lambda = \frac{1}{2}\sigma^2$, $A = \frac{1}{2}\sigma^2 - r$ y φ la condición inicial a esta ecuación. La solución a 3.13 es:

$$G(a,b) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sqrt{\lambda}y) \exp(-\frac{(\lambda^{-1/2}b - y)^2}{4a}) dy. \tag{3.14}$$

Ahora se determinará la función φ para obtener la solución dada por 3.14.

Dado que $V = e^{rt}W = e^{rt}G \circ \Phi$ y $V(T,s) = (s-K)^+$, entonces resulta que: $G(0, \ln s + AT) = e^{-rT}(s-K)^+$, que se puede reescribir como $G(0,b) = e^{-rT}(e^{b-AT} - K)^+$. Esto significa que: $\varphi(b) = e^{-rT}(e^{b-AT} - K)^+$. La solución 3.14 con la condición inicial φ es:

$$G(a,b) = \frac{e^{-rT}}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\sqrt{\lambda}y - AT} - K)_+ \exp(-\frac{(\lambda^{-1/2}b - y)^2}{4a}) dy.$$

La desigualdad $\varphi(\sqrt{\lambda}y) > 0$ se cumple sólo en el caso en que $y \geq (\ln K + AT)\lambda^{-1/2} = y_0$ y entonces:

$$G(a,b) = -I_1 + I_2$$

$$I_1(a,b) = \frac{Ke^{-rT}}{2\sqrt{\pi a}} \int_{y_0}^{\infty} \exp(-\frac{(\lambda^{-1/2}b - y)^2}{4a}) dy$$

$$I_2(a,b) = \frac{e^{-rT}}{2\sqrt{\pi a}} \int_{y_0}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda}y - AT} \exp(-\frac{(\lambda^{-1/2}b - y)^2}{4a}) dy.$$

Sea $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2a\lambda}}(b - \ln K - AT)$. El cambio de variable:

$$y = -u\sqrt{2a} + b\lambda^{-1/2}, \tag{3.15}$$

reduce I_1 y I_2:

$$I_1 = \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_0} \exp(-\frac{(u)^2}{2}) du,$$

$$I_2 = \frac{e^{-rT}e^{-AT}e^b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_0} e^{-\sqrt{2a\lambda}u} \exp(-\frac{u^2}{2}) du.$$

Completamos un cuadrado: $-\sqrt{2a\lambda}u - \frac{u^2}{2} = \frac{-u^2-\sqrt{2a\lambda}u}{2} = \frac{-(u+\sqrt{2a\lambda})^2+2a\lambda}{2} = -\frac{(u+\sqrt{2a\lambda})^2}{2} + a\lambda$ y entonces $I_2 = \frac{e^{-rT}e^{-AT}e^b}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u_0} e^{a\lambda} \exp(-\frac{(u+\sqrt{2a\lambda})^2}{2})du$. Hacemos el cambio de variable $u = Z - \sqrt{2a\lambda}$ y definimos la constante $Z_0 = u_0 + \sqrt{2a\lambda}$ para concluir que: $I_2 = \frac{e^{-rT}e^{-AT}e^b e^{a\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{Z_0} \exp(-\frac{Z^2}{2})dZ$.

Si reunimos lo anterior se obtiene:

$$G(a,b) = \frac{e^{-rT}e^{-AT}e^b e^{a\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{Z_0} \exp(-\frac{Z^2}{2})dZ - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u_0} \exp(-\frac{(u)^2}{2})du.$$

Tenemos los cálculos explícitos:

1. $-rT-AT+b+a\lambda = rt-rT-\frac{1}{2}\sigma^2T+rT+\ln s+\frac{1}{2}\sigma^2t-rt+\frac{1}{2}\sigma^2T-\frac{1}{2}\sigma^2t = \ln s - rt$.
2. $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2a\lambda}}(b - \ln K - AT) = \frac{1}{\sigma\sqrt{a}}(\ln s + At - \ln K - AT) = \frac{1}{\sigma\sqrt{a}}(\ln\frac{s}{K} - A(a))$.
3. $Z_0 = u_0+\sqrt{2a\lambda} = \frac{1}{\sigma\sqrt{a}}(\ln\frac{s}{K}-A(a))+\sqrt{2a\lambda} = \frac{1}{\sigma\sqrt{a}}(\ln\frac{s}{K}-A(a)+2a\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{a}}(\ln\frac{s}{K}-A(a)+2a\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{a}}(\ln\frac{s}{K}+a(\sigma^2-A)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{a}}(\ln\frac{s}{K}+a(\frac{1}{2}\sigma^2+r))$.

Denotemos con Ψ la distribución normal: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(\frac{Z^2}{2})dZ$. Lo anterior demuestra la siguiente fórmula:

$$V(t,s) = s\Psi(\frac{\ln\frac{s}{K} + a(\frac{1}{2}\sigma^2+r)}{\sigma\sqrt{a}}) - Ke^{-ra}\Psi(\frac{\ln\frac{s}{K} + a(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{a}}). \quad (3.16)$$

Esta es la *fórmula de Black-Scholes*, la solución al problema de valuación de una opción de compra europea sobre una acción que no paga dividendos y cuyo comportamiento sigue el movimiento browniano geométrico.

3.4. Modelos para un bono

3.4.1. Tipos de bono

Un bono es un contrato por el que se debe pagar un precio inicial, y da al poseedor el derecho de recibir en una fecha de madurez T, un pago preestablecido dentro del contrato, el valor nominal[8].

Los bonos son instrumentos altamente transaccionados cuyos emisores son empresas consolidadas en su sector y que satisfacen los requerimientos de normatividad; desde su perspectiva, la emisión de un bono representa una forma de financiar proyectos internos para el desarrollo de oportunidades de negocio aceptando un nivel de endeudamiento. Desde el punto de vista del inversionista, un bono es una alternativa de inversión segura en donde el rendimiento se conoce anticipadamente y se puede elegir el nivel deseado de riesgo.

Existen dos características que un bono debe tener:

- Nivel de riesgo.

  Existen los bonos que son emitidos por empresas altamente confiables tanto en su actividad empresarial como en el manejo de sus finanzas, esto da una alta seguridad de que la obligación adquirida se cumplirá, un ejemplo de ellos serían los cetes[9], que son bonos emitidos por el gobierno. En este caso, se considera que el bono es libre de incumplimiento.

  Contrario al anterior tipo de bono, existen los bonos emitidos por empresas que por su situación en la fecha de madurez, no pueden cumplir con su obligación contractual, en este caso se incurre en incumplimiento. Las empresas que han sido calificadas como riesgosas hacen atractivos sus bonos al ofrecer un premio mayor que un bono bien calificado. Los bonos con posibilidad de incumplimiento se tratan en la siguiente sección con el modelo de Merton.

- Flujo de cupones.

  Una de las características de un bono, es que son contratos a un plazo largo de tiempo que puede llegar a veinte años. Para aumentar la

[8] En inglés, the face value o the nominal value.

[9] Los certificados de la tesorería de la federación. Títulos de crédito al portador emitidos y liquidados por el gobierno federal a su vencimiento.

demanda de los mismos, existen los llamados bonos con cupón, que periódicamente pagan un capital a los inversionistas. Este importe se le conoce como cupón.

Los bonos que no ofrecen el pago de cupones se conocen como bono cupón cero.

En esta sección se considerará, un bono cupón cero que es libre de riesgo de incumplimiento.

Sea $B(t,T)$ el precio de un bono con fecha de madurez T en el instante de tiempo t. La diferencia $B(T,T) - B(0,T)$ está determinada por una tasa de interés. En el caso mas sencillo, la tasa de interés simple que está dada por $\{B(0,T) - B(T,T)\}/B(0,T) = r$. Esto permite obtener el rendimiento global que tuvo el bono en el período de su existencia $[0,T]$.

El tiempo de madurez T generalmente es grande, y en este intervalo de tiempo, el precio del bono tiene variaciones que la tasa simple no muestra, esto sugiere considerar intervalos pequeños distribuidos homogeneamente en el intervalo $[0,T]$:

$$\frac{B(t,T) - B(t+h,T)}{B(t,T)},$$

estos cocientes capturan mas información del comportamiento del bono y mediante un proceso de límite de estos cocientes, se obtiene la tasa instantánea de interés compuesto, también llamada tasa de rendimiento[10]:

$$Y(t,T) = \frac{-1}{T-t} \ln B(t,T),$$

si despejamos a B de la anterior igualdad, se obtiene:

$$B(t,T) = \exp[-Y(t,T)(T-t)],$$

esto dice que la tasa de rendimiento determina el comportamiento del precio de un bono.

3.4.2. El modelo de Vasicek

Ahora pasamos al problema de encontrar un modelo para el precio de un bono, los pasos a seguir son similares al proceso con el que se resolvió el

[10]En inglés yield-to-maturity.

problema de valuación de una opción. La tasa de interés juega el papel de una acción y el bono juega el papel de una opción.

El proceso que aceptamos para la tasa instantánea de interés es de acuerdo al modelo de Vasicek[11]:

$$dr = \alpha(\beta - r)dt + \sigma dW.$$

Para entender los términos que aparecen en esta ecuación, resolvamos la ecuación diferencial $r' + \alpha r - \alpha\beta = 0$. Esta ecuación tiene el factor de integración $\mu = e^{\alpha t}$ y su solución es: $r(t) = e^{-\alpha t}[r(0) - \beta] + \beta$. Esta función tiene propiedades interesantes. Su límite en el infinito es:

$$\lim_{t \to +\infty} r(t) = \beta,$$

el parámetro α determina la rapidez de convergencia del límite y β determina a donde converge; siempre es positiva lo cual es deseable de una función que va a representar una tasa de interés.

El término σdW al igual que el modelo para una acción, captura la incertidumbre del fenómeno.

Dada una tasa instantánea de interés compuesta constante r, el comportamiento de una cuenta de ahorro que comienza con un peso está dada por $B_t = e^{rt}$, esta función satisface la ecuación $dB_t = rB_t dt$. En el caso general de una tasa que no es constante: $B_t = \exp(\int_0^t r_u du)$ y también se satisface la ecuación $dB_t = r_t B_t dt$.

El modelo de una acción, sugiere modelar el precio de un bono por $dB_t = B_t(r_t dt + \sigma_t dW)$. Esto concuerda con la intuición que dice, que un bono es similar a una cuenta de ahorro en el que un elemento de incertidumbre se ha introducido, pues al precio lo afectan factores del mercado que no se pueden determinar. También se puede establecer con mayor formalidad esta representación al suponer que el proceso $B(t,T)$ es una submartingala continua y positiva, entonces se aplica el teorema de representación del apéndice B.

Se llega así a un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dr = \alpha(\beta - r)dt + \sigma dW,$$

$$dB_t = B_t(r_t dt + \sigma_t dW).$$

[11] Ver Musiela[34].

En este sistema aún no se conoce el coeficiente de difusión σ_t. Para determinar a σ existe cierta libertad inevitable relacionada al precio de mercado del riesgo(the market price of risk).

En un mercado libre de oportunidades de arbitraje existe una medida P_* del espacio Ω bajo la cual el precio del bono descontado $B(t,T)/B_t$ es una martingala.

Bajo esta condición se cumple que:

$$B(t,T)/B_t = E_{P_*}(B(T,T)/B_T \mid F_t) = E_{P_*}(\exp(-\int_0^T r_u du) \mid F_t),$$

lo cual rescribimos como:

$$B(t,T) = B_t E_{P_*}(\exp(-\int_0^T r_u du) \mid F_t) = E_{P_*}(B_t \exp(-\int_0^T r_u du) \mid F_t),$$

es decir:

$$B(t,T) = E_{P_*}(B_t \exp(-\int_t^T r_u du) \mid F_t), \tag{3.17}$$

supongamos que $B(t,T)$ tiene la forma $V(t,r_t)$, entonces la ecuación 3.17 es equivalente a la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(r,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r,t) + (a-br)\frac{\partial V}{\partial r}(r,t) - rV(r,t) = 0,$$

cuya solución es:

$$B(t,T) = e^{m(t,T)-n(t,T)r_t},$$

en donde:

$$n(t,T) = \frac{1}{b}(1-e^{-b(T-t)}),$$

$$m(t,T) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T n^2(u,T)du - a\int_t^T n(u,T)du.$$

3.4.3. El modelo de Merton

El modelo de Vasicek da el precio para un bono que esta libre de riesgo de incumplimiento.

En Merton[27] se da el precio para un bono con la posibilidad de incumplimiento, contestando así a la pregunta:

En un mercado libre de arbitraje; cuál sería el precio justo de un bono que tiene la posibilidad de incumplimiento y hace la promesa de un pago L en una fecha de madurez T?

Veamos como se procede, siguiendo la exposición en Bielecki[4].

Introduzcamos los siguientes procesos:

1. V_t es igual al valor del emisor.
2. E_t es la equidad en el tiempo t.
3. D_t es la deuda al tiempo t,
   estos procesos estan relacionados por $V_t = E_t + D_t$.
4. $X = \min\{V_T, L\}$ que representa la promesa de un pago L en la fecha T. Si el valor V_T es mayor que su obligación, entonces $X = L$ y puede hacerse este pago, sin embargo, cuando V_T es menor, entonces $X = V_T$ y el emisor incumple su promesa.

Observese que:

$$D_T = X,$$

y además

$$D_t = LB(t,T) - P_t, \tag{3.18}$$

donde $B(t,T)$ es un bono libre de incumplimiento con valor nominal uno y P_t es una opción de venta sobre V_T con precio de ejercicio L, ambos con fecha de madurez T. Para justificar esto, observese que $LB(T,T) = L$ y $P_T = (L - V_T)^+$. Por otra parte $L - (L - V_T)^+ = \min\{V_T, L\}$.

De lo anterior se sigue que E_t es una opción de compra:

$$E_T = V_T - D_T = V_T - \min\{V_T, L\} = (V_T - L)^+.$$

La ecuación 3.8 de paridad entre opciones de compra venta, permite calcular el precio de una opción de venta con el valor de la correspondiente opción de compra, la fórmula de Black-Scholes 3.16.

Suponiendo que el valor V_t sigue un movimiento browniano geométrico : $dV_t/V_t = (r-k)dt + \sigma dW$ la ecuación 3.18 tiene una forma cerrada:

$$D(t,T) = V_t e^{-k(T-t)} N(-d^+(V_t, T-t)) + LB(t,T)N(d^-(V_t, T-t)), \quad (3.19)$$

donde:

$$d^+(V_t, T-t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[\ln(\tfrac{V_t}{L}) + (r-k+\tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]$$
$$d^-(V_t, T-t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[\ln(\tfrac{V_t}{L}) + (r-k-\tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]$$
$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Esta fórmula resuelve el problema de valuar un bono que puede incurrir en incumplimiento, pero también permite contestar la siguiente pregunta: Cual es el costo de un crédito *negociable* el cual puede convertirse en crédito vencido?. Lo que se debe hacer es despejar el valor nominal L de la fórmula 3.19 y ponerla en función de la deuda $D(0,T)$.

Capítulo 4

Modelo para una cartera de tarjetas de crédito

En este capítulo se propone un modelo para la cartera de tarjetas de crédito de un banco.

En la sección uno, se discute en forma general, el portafolio de un banco y la operación de una tarjeta de crédito.

En la sección dos, se expone un modelo estocástico general para representar el comportamiento de un cliente.

En la sección tres, se resuelve el problema de integrar los clientes que comparten ciertos parámetros para simular una fragmentación de la cartera. Esto da un único proceso de deuda para una volatilidad particular.

En la sección cuatro, se define un esquema para aplicar una tasa de interés cuando la deuda es variable.

En la sección cinco, se presentan algunas especializaciones del modelo que simplifican los coeficientes de las ecuaciones involucradas.

4.1. La cartera de tarjetas de crédito

4.1.1. El portafolio de un banco

En una primera aproximación, el portafolio de un banco está dado en la forma:

$$\Pi_t = A_t + P_t + I_t + TC_t + TD_t + F_t.$$

1. A representa el activo del banco. Esto se refiere a todos los sectores de crédito: al consumo, crédito comercial, autofinanciamiento, hipotecario, etc.

2. P representa el pasivo del banco. Esto es el capital que el banco capta a través de productos como son: sociedades de inversión, servicios de recaudación, nómina, programas gubernamentales de desarrollo, etc.

3. I representa las posiciones en instrumentos financieros, como son los cetes, acciones o productos derivados.

4. TC representa la cartera de tarjetas de crédito.

5. TD representa la cartera de tarjetas de débito.

6. F representa un fondo que mantiene el nivel de capitalización del banco. Debe ser de un mínimo de ocho por ciento sobre el valor presente de la deuda de la cartera de crédito.

Los segmentos deben mantener una buena relación entre ellos. Por ejemplo, con respecto a los segmentos de activo y pasivo, si un banco capta dinero y no lo coloca en crédito, está comprando dinero que no esta vendiendo, ciertamente esto genera una pérdida. En el otro caso, si existen clientes sujetos a crédito pero no hay suficiente captación, hay oportunidades de negocio desaprovechadas.

Este portafolio lleva a los siguientes problemas:

1. El análisis de cada uno de los segmentos para modelar su evolución en el tiempo.

2. Integrar los segmentos para determinar la evolución del portafolio.

3. Optimizar el portafolio con respecto a los parámetros de rendimiento-volatilidad.

En este capítulo, se propone un marco general para estudiar la cartera de tarjetas de crédito, y tener así, un modelo para atacar el primer problema.

4.1.2. El concepto de tarjeta de crédito

Ahora se plantean dos preguntas que ayudarán a poner en claro que se pretende estudiar de la cartera de tarjetas de crédito:

1. Comó funciona este instrumento?
   Desde el punto de vista del tarjetahabiente, una tarjeta de crédito es un medio de pago que le permite comprar dentro de un límite, sin tener efectivo disponible en el momento de la compra. Además una tarjeta de crédito es atractiva porque da acceso a promociones como compras a plazos con tasa de interés cero, sorteos y acumulación de puntos.

   Para el punto de vista del banco, una tarjeta de crédito requiere inversión en análisis, capital humano y gastos operativos. Estos son algunos de ellos:

   a) La emisión de una tarjeta de crédito implica una forma específica de crédito y por lo tanto de asumir un riesgo. Esto hace necesario realizar un estudio al cliente mediante un proceso llamado credit scoring lo que implica inversión para formar capital humano con conocimiento en el área y además instalación y mantenimiento de sistemas.

   b) Análisis para determinar los parámetros que caracterizan un producto como son: tasa de interés, límite del crédito, fechas de corte, etc.

   c) Gastos operativos en sistemas, departamento de aclaraciones, departamento de cobranza, mensajería etc.

2. Qué expectativa tiene esta cartera?

   Las oportunidades de negocio de este instrumento son:

   a) Si se admiten clientes que tienen cierto nivel de riesgo, lo que se ve reflejado en que son clientes impuntuales y generan deuda, entonces se tiene la oportunidad usual de un crédito.

   b) Comisión anual para la emisión y renovación de la tarjeta.

   c) Costo transaccional, con cargo al comercio por una operación hecha con la tarjeta de crédito.

d) El valor del cliente. Cuando un cliente tiene una tarjeta de crédito, existe la oportunidad de ofrecerle una canasta de productos relacionado a sus necesidades y actividades como: cuentas de ahorro, administración de inversiones, seguros, pago de servicios, etc.

4.1.3. Problemática

Con respecto a la primer pregunta, es interesante estudiar los parámetros que definen un producto de la cartera de tarjetas de crédito.

No se pretende estudiar el proceso de credit scoring ni gastos operativos.

Con respecto a la segunda pregunta, es interesante estudiar el comportamiento del cliente para determinar la relación riesgo-rendimiento en el crédito.

No se pretende estudiar otra oportunidad de negocio.

El problema toma forma en tres pasos:

Primero. Un modelo general para representar el comportamiento del cliente.

Segundo. Integración de clientes que comparten valores en ciertos parámetros.

Tercero. Especialización de los coeficientes del modelo resultante de los pasos uno y dos.

4.2. El modelo para el comportamiento de un cliente

Considerando que las actividades básicas de un cliente son consumir y pagar en su tarjeta, se propone un modelo que tiene los siguientes elementos:

1. Una filtración $\mathbb{F}$, que satisface las condiciones usuales[1], con respecto a la cual todos los procesos considerados son progresivamente medibles.
2. Un tiempo T, que representa el tiempo que tiene el cliente para pagar su consumo. Para fijar ideas, T corresponde a 30 días.
3. Un tiempo T^*, que representa un horizonte, en el que termina el período de análisis. Para fijar ideas, $T^* = 12T$, es decir un año.
4. Un proceso C, que representa el consumo acumulativo del cliente. Este consumo es continuo e instantáneo.
5. Un proceso P, que representa el pago acumulativo del cliente. Este pago es continuo e instantáneo.
6. Un proceso L, que representa el límite de crédito disponible en el instante de tiempo t. El valor inicial del límite de crédito es una cota para este proceso en todo tiempo, es decir que $L_t \leq L_0$. Además el valor inicial está determinado por una constante l que representa un porcentaje determinado en credit scoring:

$$L_0 = lI.$$

Antes de continuar es necesario introducir las siguientes definiciones.

Definición 4.2.0.1 *La* **deuda** *del cliente en el tiempo t, es el proceso:*

$$D_t = C_{(t-T)^+} - P_t. \tag{4.1}$$

Definición 4.2.0.2 *Un cliente es* **puntual** *cuando su deuda es cero:*

$$D_t = 0.$$

Los procesos C, P, L y D son continuos, positivos y progresivamente medibles. Pero además tienen las siguientes propiedades:

[1] Las condiciones usuales son: la filtración es continua por la derecha y contiene a todos los conjuntos nulos.

1. Son procesos crecientes positivos:

$$0 \leq P_t \leq P_{t+h}.$$

$$0 \leq C_t \leq C_{t+h}.$$

2. C domina a P:

$$0 \leq P_t \leq C_{(t-T)^+}.$$

3. Son submartingalas:

$$E(C_{t+h} \mid \mathbb{F}_t) \geq C_t.$$

$$E(P_{t+h} \mid \mathbb{F}_t) \geq P_t.$$

4. Si se introduce el proceso $\widetilde{D}_t = C_t - P_t$, entonces es válida la relación:

$$dL_t + d\widetilde{D}_t = 0. \tag{4.2}$$

Esto es porque el límite de crédito disponible en el instante $t+h$ es:

$$\begin{aligned} L_{t+h} = L_t - (C_{t+h} - C_t) + (P_{t+h} - P_t) = \\ L_t + C_t - P_t + P_{t+h} - C_{t+h} = \\ L_t + \widetilde{D}_t - \widetilde{D}_{t+h}, \end{aligned}$$

es decir que

$$L_{t+h} - L_t = -(\widetilde{D}_{t+h} - \widetilde{D}_t)$$

y en forma diferencial es la ecuación 4.2

Observación 4.2.0.3 *Como los procesos C_t y P_t son submartingalas continuas, de acuerdo a los teoremas B1 y B2 del apéndice B, aceptan la representación:*

$$C_t = \int M' dW + A'.$$

$$P_t = \int N' dW + B'.$$

Se puede garantizar que estos procesos son estrictamente positivos, si se toma la condición $C_0 = 1$ y $P_0 = 1$. El teorema B3 implica que los procesos siguen un comportamiento browniano geométrico:

$$dC_t = C_t(Adt + MdW). \tag{4.3}$$

$$dP_t = P_t(Bdt + NdW). \tag{4.4}$$

Lo anterior permite concluir que la deuda de un cliente, es un proceso de difusión de *Itô*:

$$dD = \delta_t dt + \sigma_t dW. \tag{4.5}$$

con

$$\delta = CA - PB$$

y

$$\sigma = CM - PN.$$

Como los clientes que son puntuales, no tienen una deuda positiva, no es posible aplicar una tasa de interés, de acuerdo a la problemática que se planteó en 4.1.3, esta clase de clientes no se estudia en lo que sigue.

La ecuación 4.2 es interesante, porque caracteriza los clientes que son puntuales. Esto sugiere que los clientes que no lo son, deberían tener una ecuación similar a 4.2, pero con alguna modificación.

4.3. Fragmentación de la cartera

En esta sección se plantea una alternativa para formar segmentos en la cartera de tarjetas de crédito. Esta fragmentación se hace respecto al riesgo de incumplimiento.

Son necesarias las siguientes hipótesis:

Hipótesis 4.3.0.4 *La volatilidad de la deuda de un cliente se mantiene en el intervalo:*

$$\sigma_t \in I^\sigma = [\sigma - \epsilon, \sigma + \epsilon].$$

Haciendo abuso del lenguaje, se puede decir que la deuda tiene volatilidad σ.

Hipótesis 4.3.0.5 *En el proceso de credit scoring se determina la relación entre l el porcentaje del ingreso que un cliente tendrá de limite de crédito, el riesgo que representa el cliente σ y la tasa de interés ρ (definición 4.4.0.7) que se le aplicará como premio excedente a la tasa del mercado por el riesgo tomado.*

La hipótesis 4.3.0.5 hace que la volatilidad sea el parámetro utilizado para identificar un segmento de la cartera. Para integrar los clientes que tienen la misma volatilidad, es necesario hacerlo respecto a un único proceso que refleje la incertidumbre de esta colección:

Hipótesis 4.3.0.6 *Existe un proceso de Wiener:*

$$W^\sigma,$$

que representa la incertidumbre del segmento.

Ahora, sean dados N clientes con volatilidad σ.

Los procesos asociados a cada uno de estos clientes $\{C^i, P^i, D^i, L^i\}_{i=1}^N$ se pueden integrar para obtener solamente cuatro procesos $\{C, P, D, L\}_\sigma$ representativos del segmento correspondiendo a σ.

De acuerdo a la ecuación 4.5 la deuda del cliente tiene la forma:

$$dD^i = \delta^i dt + \sigma_t^i dW^i.$$

El teorema B2 permite escribir $\sigma_t^i dW^i = \sigma_t^i \Phi^i dW^\sigma$, al sumar estos procesos se obtiene:

$$dD^{\sigma} = \sum_{i=1}^{N} dD^{i} = [\sum_{i=1}^{N} \delta^{i}]dt + [\sum_{i=1}^{N} \sigma_{t}^{i}\Phi^{i}]dW^{\sigma}.$$

Si se define:

$$\hat{\delta} = \sum_{i=1}^{N} \delta^{i},$$

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{t}^{i}\Phi^{i},$$

se llega a la siguiente representación para la deuda:

$$dD^{\sigma} = \hat{\delta}dt + \hat{\sigma}dW^{\sigma}. \tag{4.6}$$

4.4. Interés generado por una deuda dinámica

Definición 4.4.0.7 *El* **spread** ρ_t *es una tasa de interés compuesto que representa un premio por el riesgo tomado en el cliente.*

Definición 4.4.0.8 *Dada una tasa instantánea de interés compuesto* r_t *y un spread* ρ_t *sea* $\hat{r}_t = r_t + \rho_t$.

El **interés generado** *por la deuda* D_t *es:*

$$G_t = \int_0^t D_s dF, \tag{4.7}$$

donde $F(\omega, t) = \exp(\int_0^t \hat{r}_s ds)$.

Motivación.

A continuación la motivación de la definición 4.4.0.8.

Sea dada una tasa de interés $\hat{r}$ constante y un intervalo $[0, T]$. Sean: $h = \frac{T}{N}$ y $t_i = ih$.

Supóngase que la deuda es constante $D_t = d$. El cliente debe pagar $d\exp(rT)$ al final del período y se obtiene una ganancia:

$$G_T(D) = d\exp(rT) - d.$$

Si la deuda D no fuera constante, se debe proponer una aproximación para encontrar la ganancia. La primera propuesta es:

$$G_T(D) \approx \sum_{i=1}^{N} D_{t_i} \exp(rh).$$

Esta aproximación para el caso en que D es constante se reduce a: $G_T(D) \approx Nd\exp(rh)$, pero al tomar el límite, este converge a infinito.

Cambiamos la aproximación de la siguiente forma:

$$G_T(D) \approx \sum_{i=1}^{N} D_{t_i} [\exp(rt_i) - \exp(rt_{i-1})]. \tag{4.8}$$

Para el caso de una deuda constante, 4.8 es una suma estroboscópica:

$$d\sum_{i=1}^{N}\exp(rt_i)-\exp(rt_{i-1})=d\exp(rT)-d\exp(rt_0)=d\exp(rT)-d.$$

Por otro lado se tiene que $\int_0^t d_1 dF = d_1[\exp(rt)-\exp(0)]$, es decir que 4.7 y 4.8 coinciden.

Cuando la deuda no es constante, es posible aproximarla por una función constante por pedazos, es decir, una función simple. En este caso, se debe observar que existen diferentes esquemas para aplicar una tasa de interés. Esto se explica a continuación.

Sea:

$$D(\omega)=d_1 1_{[0,A)}+d_2 1_{[A,B]}.$$

Supongase que $d_1 < d_2$.

Es posible definir, en al menos tres formas el interés generado por $D(\omega)$:

1. $G^1(D)=d_1(e^{rA}-1)+d_2(e^{r(B-A)}-1)$.
   En este esquema cada vez que la deuda del cliente cambia, se corta el tiempo y se reinicia la composición del interés.
2. $G^2(D)=d_1(e^{rB}-1)+(d_2-d_1)(e^{r(B-A)}-1)$.
   En este esquema se da continuidad a la composición del interés, tanto como sea posible.
3. $G^3(D)=d_1(e^{rA}-1)+d_2(e^{rB}-e^{rA})$.
   En este esquema se pondera la deuda del cliente y se acumula.

Sea $f(x)=e^{rB}-e^{rx}-e^{rB-rx}$.

Entonces $f(0)=-1$, $f(B)=-1$, tiene un máximo $f(\frac{B}{2})=e^{rB}-2e^{r\frac{B}{2}}$ y es fácil ver que $\lim_{B\to\infty} f(\frac{B}{2})=\infty$.

Es cierto que:

$$G^3(D)=G^1(D)+d_2[f(A)+1],$$
$$G^3(D)=G^2(D)+(d_2-d_1)[f(A)+1],$$

esto quiere decir que G^3 es mayor que G^2 y G^1 y además esta diferencia se hace infinita en forma exponencial cuando el intervalo de tiempo crece.

Finalmente, la integral 4.7, las aproximaciones 4.8, y G^3 coinciden.

4.5. Coeficientes constantes en el proceso de consumo

Se tiene un modelo estocástico para el estudio de la cartera de tarjetas de crédito: un proceso D_t^σ que representa la deuda de todos los clientes con el mismo riesgo definido por la ecuación 4.6 y $G(D^\sigma)$ que representa el interés generado.

En esta sección se exploran algunas especializaciones para los coeficientes del modelo.

En lo que sigue se supone que los coeficientes de la ecuación 4.3 son constantes: $A_t = A$ y $M_t = \sigma$.

Esta condición acepta la siguiente interpretación: la volatilidad de consumo es constante al igual que la velocidad de consumo de cada cliente y es igual para clientes en el mismo segmento de la cartera.

4.5.1. Simplificación de la ecuación de deuda

Es posible encontrar un proceso u_t que relaciona el proceso de consumo y de pago en la forma $P_t = u_t C_t$ con $0 \leq u_t \leq 1$. En estos términos la deuda es $D_t = (1 - u_t)C_t$ y su diferencial es

$$dD_t = (1 - u_t)dC_t - C_t du_t. \tag{4.9}$$

Supongase que u_t es un proceso de Ito:

$$du_t = \alpha_t dt + \beta_t dW, \tag{4.10}$$

entonces

$$dD_t = C_t[(1 - u_t)A - \alpha_t]dt + C_t[(1 - u_t)\sigma_t - \beta_t]dW. \tag{4.11}$$

Caso I la deuda es una martingala

Estudiemos el caso en que la deuda es una martingala y $\beta_t = \beta$ es constante.

Para ello es necesario que $(1 - u_t)A = \alpha_t$. Con esto, las ecuaciones 4.10 y 4.11 se reducen a:

$$du_t = (1 - u_t)Adt + \beta dW, \tag{4.12}$$

$$dD_t = C_t[(1-u_t)\sigma - \beta]dW. \tag{4.13}$$

Es posible encontrar una solución explícita a la ecuación 4.12. Hagamos $X_t = 1 - u_t$ entonces:

$$dX_t = -AX_t dt - \beta dW.$$

Su solución es:

$$X_t = -\beta e^{-At}\int_0^t e^{As}dW_s.$$

Esto se puede comprobar con la fórmula de integración por partes[2]:

$$\int_0^t D(\omega,s)dF(\omega,s) = D_tF_t - D_0F_0 - \int_0^t F(\omega,s)dD(\omega,s) - < D, F >_t .$$

La ecuación 4.13 se puede rescribir como:

$$dD_t = D_t[\sigma - \frac{\beta}{(1-u_t)}]dW,$$

y explícitamente:

$$dD_t = D_t[\sigma + \frac{e^{At}}{\int_0^t e^{As}dW_s}]dW.$$

Bajo la hipótesis de que la deuda es una martingala, observamos lo siguiente:

- Durante y en el término del período de estudio la deuda no se anula.
- La razón u_t es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck y esta modelada de la misma forma que la tasa de interés instantánea para un bono.
- La deuda no depende de la volatilidad de u_t.
- El pago tiene la ecuación:

$$dP_t = AC_t dt + C_t[\beta + \sigma u_t]dW.$$

Es decir que los procesos de pago y consumo coinciden en la proyección determinista y difieren en su volatilidad.

[2]Karatzas[13] problema 3.12 página 155.

Caso II la deuda es determinista.

Ahora el caso en que la deuda es determinista.

Para ello es necesario que $(1-u_t)\sigma = \beta_t$ con lo cual las ecuaciones 4.10 y 4.11 se reducen a:

$$du_t = \alpha_t dt + (1-u_t)\sigma dW. \tag{4.14}$$

$$dD_t = D_t[A - \frac{\alpha_t}{1-u_t}]dt. \tag{4.15}$$

Sea $X_t = 1 - u_t$, entonces $dX = -\alpha_t dt - \sigma X_t dW$. Sea:

$$F(t, W) = e^{\sigma W + \frac{\sigma^2}{2}t},$$

con el lema de Ito se calcula su diferencial: $dF = \sigma^2 F dt + \sigma F dW$, luego integrando por partes:

$$d(FX) = FdX + XdF + < F, X > dt =$$
$$-\alpha_t F dt - \sigma F X_t dW + \sigma^2 X F dt + \sigma X F dW - \sigma^2 F X dt =$$
$$-\alpha_t F dt.$$

Esto permite encontrar la solución:

$$X_t = F_t^{-1}[-\int_0^t \alpha_s F_s ds].$$

La ecuación 4.15 se puede rescribir como:

$$dD_t = D_t[A + \alpha_t \frac{F_t}{\int_0^t \alpha_s F_s ds}]dt.$$

Bajo estas hipótesis:

- Si α_t es constante entonces:

$$dD_t = D_t[A + \frac{F_t}{\int_0^t F_s ds}]dt,$$

y la deuda sólo depende de la tendencia y volatilidad del consumo.

- El pago tiene la ecuación

$$dP_t = C_t[u_t A + \alpha_t]dt + \sigma C_t dW.$$

Es decir que el pago y el consumo tienen la misma volatilidad pero difieren en su parte determinista.

Apéndice A

Louis Bachelier

Extracto de: **Bachelier and his times: A conversation with Bernard Bru**[32].

Louis Bachelier nació el 11 de Marzo de 1870 en la Havre Francia, fue hijo de una familia de clase media, su padre Alphonse Bachelier, fue un empresario en la Havre y su madre Cecile Fort Meu, fue la hija de un banquero.

En 1889 pierde a sus padres y debe abandonar sus estudios para trabajar. En 1892 viaja a Paris en donde ingresa a la Bolsa de Valores. Después de un período de trabajo es capaz de reunir fondos que le permiten regresar a sus estudios y en ese mismo año registra en la universidad de la Sorbona su tesis con titulo: *Teoría de la Especulación*[1] al paso de tres años en 1895 consigue graduarse como matemático.

Fue el mismo Henri Poincaré quien dio el reporte dictaminatorio de la tesis de Bachelier y comienza:

"La materia elegida por el señor Bachelier es distinta a los temas normalmente elegidos por nuestros estudiantes. Su tesis tiene el título Teoría de la Especulación y es una aplicación de la probabilidad a los mercados financieros. Al principio uno teme que el autor exagere en la aplicabilidad de la probabilidad pues este es un hecho frecuente. Afortunadamente, este no es el caso. En su introducción y en el parrafo "Probabilidad en las operaciones del mercado de acciones" el se esfuerza para establecer los limites en los cuales es legitimo aplicar este tipo de razonamiento. El no exagera el rango de sus resultados y creo que es claro con sus fórmulas."

Bachelier era un hombre talentoso y gran trabajador, cuenta con más de veinte publicaciones todas ellas relacionadas a la probabilidad y sus aplicaciones a las finanzas. Particularmente su tesis y el articulo *Teoría de las probabilidades continuas*[2] destacan por sus ideas originales:

- Un estudio del movimiento browniano, el principio de reflexión y cálculo de distribuciones.

  Para entender la originalidad de las ideas de Bachelier a este respecto y como estaban adelantadas a su tiempo observemos que tuvieron que pasar cinco años para el articulo de Albert Einstein[9] acerca del movimiento browniano, veinte años para el articulo de Norbert Wiener[45] acerca de la formalización del movimiento browniano y mas de treinta años para los trabajos de Paul Levy acerca de la propiedades del movimiento browniano.

- Conexión con la ecuación de calor.

  Este punto interesó particularmente a Henri Poincaré.

- Aplicación de estos conceptos a un modelo para el precio de instrumentos financieros.

  El concibe la idea de que los precios de una acción forman una trayectoria definida en un intervalo de tiempo continuo y propone modelar los cambios absolutos $S_T - S_0$ mediante un movimiento browniano.

- Una versión heurística de la probabilidad en tiempo continuo y la ecuación de Kolmogorov-Chapman.

  Kolmogorov escribe en Kolmogorov[15](vol2 p 63):

  En la teoría de probabilidad uno usualmente considera esquemas en los que cualquier cambio en los estados del sistema son posibles en momentos específicos t1, t2, . . . , tn, que forma un conjunto discreto. Hasta donde se, es Bachelier el primero en hacer un estudio sistemático en los esquemas cuya probabilidad $P(t_0, x, t, E)$ varia continuamente en el tiempo t. Regresaremos a los casos estudiados por Bachelier en el apartado 16 y en la conclusión. Hacemos notar que las construcciones de Bachelier no son rigurosas.

Sin embargo debido a las circunstancias de la época en que publicó sus trabajos estos no fueron bien recibidos, debido principalmente a que la probabilidad era un área muy poco explorada y la aplicación a las finanzas era causa de escepticismo. De hecho hacia 1900 no habían matemáticos que hicieran investigación en probabilidad.

Sólo hasta el período 1920-1950 viene un desarrollo importante en la probabilidad y hasta la década de 1960, Samuelson retoma el modelo browniano para las fluctuaciones del precio de una acción.

Apéndice B

Teoremas de representación

En este apéndice enunciamos y demostramos tres teoremas:

El teorema de **descomposición de Doob-Meyer** de una submartingala.

El teorema de **representación de martingalas**.

El teorema de **representación de submartingalas** continuos positivos.

En Karatzas[13] y las referencias que ahí se dan, se pueden encontrar en detalle las demostraciones de estos resultados.

B.1. Descomposición de Doob-Meyer

Recordemos los conceptos de martingala y submartingala: un proceso estocástico M es una martingala si $E(M_{t+h} \mid \mathbb{F}_t) = M_t$ y es una submartingala X satisface $E(X_{t+h} \mid \mathbb{F}_t) \geq X_t$.

El teorema de descomposición de Doob-Meyer nos dice que podemos descomponer una submartingala X en la forma:

$$X = M + A,$$

donde M es una martingala y A es un proceso creciente, concepto que ahora definimos:
Definición. Un proceso estocástico A es un proceso creciente sii:

1. $A_0 = 0$.

2. La función $t \to A_t(\omega)$ es continua por la derecha y no decreciente.

3. $E(A_t) < \infty$.

4. El proceso es integrable si $E(\lim_{t\to\infty} A_t) < \infty$.

Teorema **(Descomposición de Doob-Meyer)** Sea $\{\mathbb{F}_t\}$ una filtración continua por la derecha, X una submartingala continuo por la derecha uniformemente integrable. Existe una martingala M y un proceso creciente continuo A de tal forma que $X = M + A$.

Demostración.

Para el caso en que el proceso estocástico es discreto.

Definimos $A_0 = 0$, y recursivamente $A_{n+1} = A_n + E[X_{n+1} - X_n \mid \mathbb{F}_n]$, $M_n = X_n - A_n$. Es claro que A_n es creciente y para verificar que M_n es una martingala tenemos las siguientes igualdades: $M_{n+k} = X_{n+k} - X_n - \sum_{j=n}^{n+k+1} E[X_{j+1} - X_j \mid \mathbb{F}_j] + X_n - A_n = X_{n+k} - X_n - \sum_{j=n}^{n+k+1} E[X_{j+1} - X_j \mid \mathbb{F}_j] + M_n$ y $E[X_{n+k} - X_n - \sum_{j=n}^{n+k+1} E[X_{j+1} - X_j \mid \mathbb{F}_j] \mid \mathbb{F}_n] = E[X_{n+k} - X_n - \sum_{j=n}^{n+k+1} X_{j+1} - X_j \mid \mathbb{F}_n] = E[0 \mid \mathbb{F}_n] = 0$ esto demuestra la existencia. La unicidad se sigue bajo la Hipótesis de que el proceso A sea predecible, en este caso si suponemos que $X = M + A = m + a$ entonces $M - m = a - A$ de tal forma que la diferencia $a - A$ es simultaneamente predecible y una martingala con lo cual $E[a_{n+1} - A_{n+1} \mid F_n] = a_{n+1} - A_{n+1} = a_n - A_n$ y por inducción tenemos que $0 = a_0 - A_0 = a_1 - A_1 = a_2 - A_2 = ...$

Para el caso en que el proceso estocástico es continuo.

La idea es discretizar el proceso X dar una sucesión de procesos discretos y asegurar que convergen.

Consideremos $t_k^n = k2^{-n}$, $\Delta_{k+1}^n = X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}$. Sea $A_0^n = 0$, para $k \in \{0, 1, 2, ..., 2^n\}$ definimos recursivamente, $A_{k+1}^n = A_k^n + E[\Delta_{k+1}^n \mid F_k]$.

Vamos a demostrar que existe el limite de la sucesión A_1^n.

Hagamos $B_{n,r} = \{A_1^n > r\}$, $\int_{B_{n,2r}} A_1^n \leq 2 \int_{B_{n,2r}} A_1^n - r \leq 2 \int A_1^n - \text{mín}(r, A_1^n)$. Sea $T_{n,l} = \text{mín}\{k2^{-n} \mid A_k^n > l\}$ y siempre que $T_{n,l}$ se igual a cero le damos el valor de uno, con esta definicion se puede ver que $2\int A_1^n - \text{mín}(r, A_1^n) \leq 2\int A_1^n - A_{T_{n,r}}^n = 2\int X_1 - X_{T_{n,r}} = 2\int_{B_{n,r}} X_1 - X_{T_{n,r}}$ con lo cual llegamos a la desigualdad $\int_{B_{n,2r}} A_1^n \leq 2 \int_{B_{n,r}} X_1 - X_{T_{n,r}}$ veamos que esto implica que A^n es uniformemente integrable. Tenemos la desigualdad $rP(B_{n,r}) \leq \int A_1^n = \int X_1 - X_0$ con lo cual $P(B_{n,r}) \leq \frac{M}{r}$ hagamos $C_{k,r} = \{X_{k2^{-n}} > r^{\frac{1}{2}}\}$ entonces $B_{n,r} = (B_{n,r} \cap C_{n,r}) \cup (B_{n,r} - C_{n,r})$ y $\int_{B_{n,r}} X_t = \int_{(B_{n,r} \cap C_{n,r})} X_t + \int_{(B_{n,r} - C_{n,r})} X_t$ el primer sumando se puede hacer pequeño porque X es uniformemente integrable y el segundo porque tenemos la estimación $\int_{(B_{n,r} - C_{n,r})} X_t \leq \int_{(B_{n,r} - C_{n,r})} r^{\frac{1}{2}} \leq r^{\frac{1}{2}} P(B_{n,r}) \leq \frac{M}{r^{\frac{1}{2}}} \to 0$. Entonces existe una sucesión A_1^k que converge debilmente en L_1 a la variable A_1. Este proceso se puede generalizar en forma obvia para definir un proceso A_t.

Procederemos a verificar que se satisfacen las condiciones mencionadas en A_t.

$A_0 = 0$ por definición. Para verificar que es creciente veamos lo siguiente $s < t$ $\int_{A_t < A_s} A_s - A_t = \int_{A_t < A_s} A_s - A_s^n + A_s^n - A_t^n + A_t^n - A_t = \int_{A_t < A_s} A_s$ -$A_s^n + \int_{A_t < A_s} A_s^n - A_t^n + \int_{A_t < A_s} A_t^n - A_t$ el primer y tercer sumando tienden a cero mientras que el segundo es negativo lo cual contradice que la integral inicial es positiva.□

B.2. Teorema de representación de martingalas

Consideremos una filtración $\mathbb{F} = \{\mathbb{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ que satisface las condiciones usuales y un movimiento browniano W respecto a la filtración $\mathbb{F}$. Sabemos que todas las integrales de la forma:

$$M_t = \int_0^t \phi_s dW_s,$$

definen una martingala, es natural la siguiente pregunta: todos las martingalas respecto a la filtración $\mathbb{F}$ tienen esta forma?, la respuesta es si y enunciamos directamente el teorema:

Teorema. Consideremos una filtración $\mathbb{F} = \{\mathbb{F}_t\}_{0\leq t<\infty}$ que satisface las condiciones usuales. Un movimiento browniano W respecto a la filtración $\mathbb{F}$. Para una martingala M respecto a F siempre existe un proceso estocástico ϕ progresivamente medible cuadrado integrable, tal que es cierta la representación:

$$M_t = \int_0^t \phi_s dW_s.$$

Ahora delineamos la prueba del teorema, no se demuestra porque son necesarias herramientas de la teoría de la medida que no desarrollamos.

Lema. Un proceso estocástico continuo que acepta la representación $M_t = V(t, W_t)$ es una martingala sii:

1. V satisface la ecuación de calor

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

2. El proceso

$$\frac{\partial V(t, W_t)}{\partial S},$$

es cuadrado integrable.

Demostración.

El lema de Ito nos permite escribir $dV = (V_t + \frac{1}{2}V_{ss})dt + V_s dW$ pero el coeficiente en dt es identicamente cero con lo que $dV = V_s dW$ y en forma integral:

$$V(t, S_t) - V(0, S_0) = \int_0^t \frac{\partial V(x, W_x)}{\partial S} dW_x.$$

Supongamos ahora que M es una martingala entonces $E(M_t \mid \mathbb{F}_h) = M_h$ y en terminos de V esto es: $E(V(t, W_t) \mid \mathbb{F}_h) = V(h, W_h)$, de acuerdo al lema de Ito $V(t, W_t) - V(0,0) = \int_0^t (V_t + \frac{1}{2}V_{xx})dt + \int_0^t V_x dW$ sustituido en la ecuación anterior:$\int_0^h (V_t + \frac{1}{2}V_{xx})dt + (t-h)[V_t + \frac{1}{2}V_{xx}] + \int_0^h V_x dW = \int_0^h (V_t + \frac{1}{2}V_{xx})dt + \int_0^h V_x dW$ la única forma en que se cumpla esta igualdad es que $V_t + \frac{1}{2}V_{xx} = 0$. □

Corolario. Una martingala que acepta la representación $M_t = V(t, W_t)$ también acepta la representación:

$$M_t = \int_0^t \phi_s dW_s,$$

con $\phi = \frac{\partial V}{\partial s}$. □

Ahora hacemos notar que si $X = M_T$ entonces $M_t = E(X \mid \mathbb{F}_t)$ y si es cierto que la variable X acepta la representación $X = \int_0^T \phi_s dW_s$ podemos concluir que $M_t = E(X \mid \mathbb{F}_t) = E(\int_0^T \phi_s dW_s \mid \mathbb{F}_t) = \int_0^t \phi_s dW_s$, es decir el teorema de representación. Esto es correcto y lo enunciamos a continuación.

Proposición. Sea X una variable aleatoria con media cero, cuadrado integrable en un espacio $(\Omega, \sigma, P, \mathbb{F}, W)$, entonces acepta la representación

$$X = \int_0^T \phi_s dW_s.$$

La demostración se hace en tres pasos:

Primero observamos que las variables aleatorias de la forma $V(T, W_T)$ son densas en el conjunto de variables aleatorias de la forma $H(T, W_T)$ donde $H(t, x)$ es una función continua de dos variables, esto lo conseguimos al observar que el conjunto de funciones $V(t, x)$ contiene los polinomios trigonométricos y utilizamos la teoría de series de Fourier.

Segundo demostramos que las variables aleatorias de la forma $H(T, W_T)$ son densas en el conjunto de variables aleatorias de la forma $B(T, W_T)$ donde $B(t, x)$ es una función Boreliana-medible.

Y finalmente, las variables aleatorias $B(T, W_T)$ aproximan bien a los procesos simples y por lo tanto a todas las variables aleatorias.

B.3. Teorema de representación de submartingalas

Teorema. Sea $\mathbb{F} = \{\mathbb{F}_t\}_{0 \le t \le T}$ una filtración que satisface las condiciones usuales. W un movimiento browniano respecto a $\mathbb{F}$. Sea $S : [0, T] \times \Omega \rightarrow$

$(0,\infty)$ una $\{\mathbb{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$—submartingala continua y positiva. S acepta la representación:

$$dS = S[\beta(t)dt + d\alpha(t) + \rho(t)dW(t)].$$

Demostración: Por el teorema B1, podemos descomponer a S en la forma $S = M + A$, donde M es una martingala continua y A es un proceso creciente que necesariamente es continuo.

Luego de acuerdo al teorema B.2, M acepta la representación $M_t = \int_0^t \phi_s dW_s$, con esto se puede escribir $S = A + \int_0^t \phi_s dW_s$. Supongase que A es un proceso con trayectorias derivables, entonces $A_t = \int_0^t A' dt$ y si se reunen las expresiones:

$$S = \int_0^t A' dt + \int_0^t \phi_s dW_s,$$

en forma diferencial se puede escribir:

$$dS = A' dt + \phi dW,$$

pero ahora observamos que S es estrictamente positivo y rescribimos $dS = S(A'/Sdt + \phi/SdW)$ que demuestra la representación del teorema con $\beta = A'/S$, $\alpha = 0$ y $\rho = \phi/S$.

Para el caso genera, si A no es derivable, como es continua y creciente, se puede tomar su parte absolutamente continua: $A_t^c - A_0^c = \int_0^t A_s' ds$ y su parte singular $A^s = A - A^c$, en este caso escribimos $\beta = A'/S$, $d\alpha = (1/S)dA^s$ y $\rho = \phi/S$.$\square$

Bibliografía

[1] Bachelier, L.(1900), *Theorie de la speculation*, Annales Scientifiques de lÉcole Normale Superieure **III-17**, 21-86. Tesis presentada para el grado de doctor en ciencias Matemticas defendida el 29 de marzo de 1900.

[2] Bachelier, L.(1906), *Theorie des Probabilites continues*, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, **2**, 259-327.

[3] Bartle, R.G.(1966), *The elements of integration*, J Wiley & Sons, New York.

[4] Bielecki, T. and Rutkowski, M.(2002), *Credit Risk: Modelling, valuation and Hedging*, Springer Verlag, New York.

[5] Billingsley, P.(1995), *Probability and Measure*, J Wiley & Sons, New York.

[6] Black, F. and Scholes M.(1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Political Economy, **81**, 637-659.

[7] Boltzmann, L.(1896), *Vorlesungen uber Gastheorie*, J.A. Barth, Leipzig.

[8] Brown R.(1828), *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, Philosophical Magazine **4**, 161-173.

[9] Einstein A.(1905), *Uber die von der molekularkinetischen Theorie der Warme gefordete Bewegung von in ruhenden Flussigkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik **17**, 549-560.

[10] Hull J.(1995), *Introduction to futures and options markets*, Prentice Hall.

[11] *Itô*, K.(1946), *On a Stochastic Integral equation*, Proc. Imperial Acad. Tokyo, **22**, 32-35.

[12] Jallath E.(2001), *Evolución y Estructura de los Medios de Pago Distintos al Efectivo en México*, Banco de México.

[13] Karatzas, I. y Shreve, S.(1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag.

[14] Karatzas, I. y Shreve, S.(1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer Verlag.

[15] Kolmogorov A. N.(1931), *Selected works*, 3 vols. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1991.

[16] Levy P.(1939), *Sur certains processus stochastiques homogenes*, Compositio Math. **7**, 283-339.

[17] Levy P.(1948), *Processus stochastiques et mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris.

[18] Levy P.(1959), *Construction du processu de W. Feller et H.P. Mckean en partant du movement brownien*, Almqvist and Wiksell, Stockholm 162-174.

[19] Lintner, J.(1965), *The valuation of risky assets and the selection of risky investment in stock portfolios and capital budgets*, Rev. Economics and Statistics **47**, 13-37.

[20] Markowitz H.(1952), *Portfolio Selection*, J Finance. **8**, 77-91.

[21] Markowitz H.(1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, J Wiley & Sons, New York.

[22] Markowitz H.(1990), *Mean variance analisys in Portfolio choice and capital market*, Cowly road Oxford.

[23] Merton R.C.(1969), *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case*, Rev. Econom. Statist. **51**, 247-257.

[24] Merton R.C.(1971), *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*, J. Econom. theory. **3**, 373-413.

[25] Merton R.C.(1973a), *Theory of rational option pricing*, Bell J. Econom. Manag. Sci., **4**, 141-183.

[26] Merton R.C. (1973b), *An intertemporal capital asset pricing model.*, Econometrica, **41**, 867-888.

[27] Merton R.C.(1974), *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates.*, J. Finance, **29**, 449-470.

[28] Merton R.C.(1976), *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, J. Financial Economics, **3**, 125-144.

[29] Merton R.C.(1990), *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, Oxford and Cambridge.

[30] Mossin(1966), *Equilibrium in a capital asset market*, Econometrica **34**, 768-783.

[31] Mossin(1968), *Optimal multiperiod portfolio policies* J. Business **41**, 215-229.

[32] Murad S.(2001), *Bachelier and his times: A conversation with Bernard Bru*, Finance Stochast. **5**, 3-32.

[33] Murillo J. A.(2000), *La Banca en México: Privatización, Crisis y Reordenamiento*, Banco de México.

[34] Musiela, M. y Rutkowski, M.(1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer Verlag, New York.

[35] Oksendal B.(2000), *Stochastic Differential Equations. An introduction with applications*, Springer Verlag, New York.

[36] Papoulis A.(1991), *Probability Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw Hill Third edition.

[37] Samuelson, P.A(1965), *Rational theory of warrant pricing*, Industr. Manag. Rev. **6**, 13-31.

[38] Samuelson, P.A(1965), *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*, Industr. Manag. Rev. **6**, 41-50.

[39] Samuelson, P.A(1969), *Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming*,Rev. Econom. Statist. **51**, 239-246.

[40] Samuelson, P.A(1973), *Mathematics of speculative prices*, SIAM Review **15**, 1-39.

[41] Samuelson, P.A y Merton R.C.(1969), *A complete model of warrant pricing that maximizes utility*, Industr. Manag. Rev. **10**, 17-46.

[42] Sharpe, W.F.(1964), *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*, J. Finance **19**, 425-442.

[43] Shiryaev A.N.(1996), *Probability*, Springer Verlag Secong edition.

[44] Steele J. M.(2000), *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer Verlag.

[45] Wiener N.(1923), *Differential Space*, J. Math. Phys. **2**, 131-174.