

01190

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO 7

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA



Optimización de procesos y dispositivos energéticos basada en la producción de entropía

Tesis para obtener el grado de
Doctor en Ingeniería
(Energía)

Presenta
Guillermo Ibáñez Duharte

Directores de tesis
Dr. Sergio Cuevas García
Dr. Mariano López de Haro

Temixco, Morelos, México, 2003

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Primeramente quisiera expresar mi gratitud a los Drs. Sergio Cuevas García y Mariano López de Haro, quienes fungieron como supervisores de esta tesis, por sus contribuciones, amistad y continuo apoyo durante el desarrollo de este trabajo. La guía de ellos me ha dotado de conocimientos que estoy seguro en un futuro, me permitirán enfrentar los problemas relacionados con el trabajo investigativo con una mayor profesionalidad. También agradezco la contribución que me brindaron los miembros del comité doctoral, Dr. Jesús A. del Río Portilla, Dr. Federico Méndez Lavielle, Dra. Guadalupe Huelsz Lesbros, Dr. Marcos Ley Koo y Dr. Javier Siqueiros Alatorre quienes con sus comentarios y observaciones enriquecieron el contenido de esta tesis.

Deseo asimismo reconocer el apoyo brindado por el Centro de Investigación en Energía de la UNAM por brindarme el uso de sus instalaciones, así como a todos aquellos profesores del posgrado que amablemente me ofrecieron su tiempo y conocimientos para aclarar todo tipo de dudas.

Finalmente, agradezco a la Subdirección de Intercambio Académico perteneciente a la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM por su apoyo en el financiamiento de esta investigación.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo profesional.

NOMBRE: Guillermo Rogelio
Ibáñez Lubiarte
FECHA: 26/12/2003
FIRMA: [Firma]

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Contenido

Resumen

Abstract

Introducción

	1
1 Fundamentos de la Termodinámica de Procesos Irreversibles Lineal y ecuaciones de balance	5
1.1 Introducción	5
1.2 Hipótesis de la TIL	6
1.3 Balance de entropía	9
1.4 Ecuaciones del campo electromagnético	12
1.5 Ecuaciones de balance para un fluido conductor de electricidad en presencia de un campo electromagnético	13
1.5.1 Balance de Masa	13
1.5.2 Conservación de Momento Lineal	14
1.5.3 Balance de Energía	16
1.6 Ecuaciones básicas de la <i>MHD</i>	17
1.7 Producción de entropía	19
2 Minimización de la producción de entropía mediante enfriamiento asimétrico por convección	22
2.1 Introducción	22
2.2 Calentamiento interno estacionario en una placa sólida	23
2.2.1 Campo de temperatura	23
2.2.2 Producción de entropía.	24
2.3 Flujo de un fluido viscoso entre paredes paralelas	27
2.3.1 Campos de velocidad y temperatura	27
2.3.2 Producción de entropía.	30
2.4 Conclusiones	35
3 Optimización energética de flujos magnetohidrodinámicos	37
3.1 Introducción	37
3.2 Flujo radial de un fluido viscoso eléctricamente conductor entre discos paralelos concéntricos	38
3.2.1 Consideraciones básicas	38
3.2.2 Ecuaciones fundamentales	39
3.2.3 Campos de velocidad, densidad de corriente eléctrica y temperatura	41
3.2.4 Producción de entropía	45
3.3 Flujo de un fluido viscoso eléctricamente conductor entre planos paralelos de conductividad eléctrica finita.	52
3.3.1 Consideraciones básicas	52

C

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.3.2	Campos de velocidad, densidad de corriente eléctrica y temperatura	53
3.3.3	Producción de entropía	58
3.4	Conclusiones	63
4	Análisis de optimización de un generador eléctrico alterno <i>MHD</i>	65
4.1	Introducción	65
4.2	Modelo teórico del generador alterno <i>MHD</i>	66
4.2.1	Consideraciones básicas	66
4.3	Campos de velocidad, densidad de corriente eléctrica y temperatura en el generador alterno <i>MHD</i>	68
4.3.1	Campo de velocidad	68
4.3.2	Densidad de corriente eléctrica y campo de temperatura	70
4.4	Eficiencia eléctrica isotrópica del generador alterno <i>MHD</i>	75
4.5	Producción de entropía y eficiencia global de Segunda Ley del generador alterno <i>MHD</i>	78
4.5.1	Producción de entropía	78
4.5.2	Eficiencia global de Segunda Ley	81
4.6	Conclusiones	84
	Comentarios finales	86
	Apéndice	88
	Referencias	90

D

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Resumen

Se aplica el método de minimización de la producción de entropía para el análisis de optimización de diferentes dispositivos y procesos energéticos. Se determinan las condiciones donde la producción de entropía es mínima, y se puede optimizar el sistema reduciendo la disipación a un valor mínimo.

En el capítulo 1, se presenta la descripción general de la teoría fenomenológica de la termodinámica de no equilibrio y se establecen las ecuaciones del campo electromagnético, las que se incorporan a las ecuaciones de balance de un medio continuo. Esto da lugar a las ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica. Por último, en este capítulo, se llega a una expresión explícita para la producción de entropía. En los capítulos 2 y 3, son estudiados 4 problemas, el calentamiento interno uniforme de una placa sólida, el flujo forzado entre dos paredes planas paralelas infinitas de espesor finito (flujo de Poiseuille), el flujo radial entre discos paralelos concéntricos eléctricamente aislantes y el flujo longitudinal entre dos planos infinitos de conductividad eléctrica finita. En estos dos últimos ejemplos, se trabaja con un fluido eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético. En los cuatro casos, se parte de la solución de las ecuaciones de balance para la obtención de los comportamientos dinámico y térmico del sistema. Una vez, conocidos estos comportamientos, se obtiene una expresión explícita para la producción local y global de entropía del sistema. Esta última función, expresada en forma adimensional, es la que se minimiza como función de los parámetros relevantes del problema, determinándose entonces las condiciones de mínima disipación de energía. Se encuentra que cuando el intercambio de calor por convección entre el sistema y el medio que lo rodea se realiza en forma asimétrica (coeficientes de transferencia de calor por convección para cada frontera distintos), existen condiciones óptimas de operación donde las irreversibilidades son mínimas. Además, para el caso del flujo de Poiseuille, se evalúa la transferencia de calor para condiciones de mínima disipación.

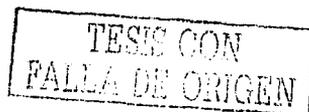
El análisis de optimización de un generador eléctrico alterno *MHD*, se muestra en el capítulo 4 usando como criterios la eficiencia eléctrica isotrópica convencional y una eficiencia de Segunda Ley basada en la producción global de entropía. A partir de esta eficiencia de Segunda Ley, para condiciones de frontera térmicas y frecuencias de oscilación similares a las reportadas para los dispositivos termoacústicos de sodio líquido, se encuentra un número de Hartmann óptimo en condiciones de potencia de salida máxima. Finalmente, se presentan los comentarios finales del trabajo.

Abstract

The entropy generation minimization method is applied to the optimization of various thermodynamic processes and devices. By determining the conditions under which the entropy generation rate is minimized, it is possible to optimize the operating conditions by reducing the dissipation in the system to a minimum.

In the first chapter a general description of the phenomenological theory of nonequilibrium thermodynamics and the fluid balance equations for the case of an electrically conducting fluid under an electromagnetic field are presented in order to assess an explicit expression for the entropy generation rate. In the second and third chapters, four problems, namely, the uniform internal heating of a solid slab, the flow of a viscous fluid between two infinite parallel plane walls of finite thickness (Poiseuille flow), the radial flow between parallel electrically insulating disks under a magnetic field and the longitudinal flow between two infinite parallel plane walls of finite electric conductivity (ordinary Hartmann flow) are studied. In these problems, the systems exchange heat with the ambient following Newton's cooling law. We solve analytically the heat transfer equation for each case with thermal boundary conditions of the third kind. It is assumed that the heat transfer coefficients for each surface are in general different. From the analytic expressions for the temperature field, in the first case, the velocity and temperature fields, in the second one, and the velocity, temperature and electric current density fields in the third and fourth cases, the local and global entropy generation rates are calculated. Fixing the dimensionless convective heat transfer coefficient (Biot number) in one of the surfaces, an optimum convective heat transfer coefficient for the second surface that minimizes the global entropy generation rate is found. In this way, the conditions for minimum total energy loss due to irreversibilities in these systems are determined. For the Poiseuille flow, the behavior of the local Nusselt number and its asymptotic value for minimum entropy generation conditions is also explored. The optimization analysis of an alternate magnetohydrodynamic generator is presented in the fourth chapter using the conventional isotropic electrical efficiency and an overall Second Law efficiency, based on the global entropy generation rate. The overall Second Law efficiency is used to determine optimum operation conditions that minimize process irreversibilities. For thermal boundary conditions and oscillation frequencies similar to the ones reported for liquid sodium thermoacoustic devices, an optimum Hartmann number is found under maximum power output conditions. At last, concluding remarks are provided.

F



Introducción

Recientemente se ha investigado de manera amplia la optimización de diferentes dispositivos y procesos termodinámicos con base en el Método de Minimización de la Producción de Entropía. Este es un método que combina en modelos simples los conceptos básicos de la transferencia de calor, la mecánica de fluidos y la termodinámica. El proceso de optimización se lleva a cabo tomando en cuenta las constricciones físicas impuestas por las irreversibilidades producidas durante la operación de un dispositivo dado, de manera que se minimicen las pérdidas de energía. Este enfoque ha sido aplicado a diferentes sistemas térmicos como intercambiadores de calor, plantas de potencia y sistemas de convección natural y forzada [1]-[8]. La mayoría de los problemas de flujos de fluidos han considerado la minimización de las irreversibilidades asociadas con los fenómenos de transferencia de calor, masa y momento en fluidos viscosos. Asimismo, recientemente se han estudiado dispositivos de inducción magnetohidrodinámica (*MHD*) tales como bombas electromagnéticas o generadores eléctricos utilizando este criterio [9]. En estos sistemas, además de las irreversibilidades producidas por la disipación viscosa y la transferencia de calor y masa, se considera la disipación de Joule generada por las corrientes eléctricas que circulan en el fluido conductor.

En el presente trabajo, se utiliza el Método de Minimización de la Producción de Entropía como una herramienta para la optimización de dispositivos relevantes para el transporte y la transformación de energía. Esencialmente, se consideran problemas que involucran el flujo de fluidos viscosos tanto en ausencia como en presencia de campos magnéticos. En este último caso, se supone que el fluido es, además de viscoso, eléctricamente conductor (por ejemplo, un metal líquido), por lo que se tratan situaciones que caen dentro del ámbito de la magnetohidrodinámica. La propiedad física distintiva de los flujos magnetohidrodinámicos, y que de hecho es la que da lugar a la aparición de fenómenos disipativos muy característicos, es la conductividad eléctrica del fluido. De esta forma un fluido conductor en presencia de un campo electromagnético tiene un comportamiento esencialmente distinto al de un fluido no conductor lo cual se manifiesta básicamente mediante la aparición de nuevas fuerzas de cuerpo y nuevos mecanismos para la conversión y disipación de energía, lo que da lugar a la aparición de nuevas irreversibilidades en el sistema. La presencia del campo electromagnético provoca que la descripción del fenómeno trascienda a la hidrodinámica ordinaria y sea necesario incluir en su conjunto a la teoría

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

electromagnética. Desde el punto de vista didáctico este problema ofrece la oportunidad de unir con una perspectiva global la mecánica de fluidos, la electrodinámica clásica y la termodinámica, enmarcadas dentro de la Termodinámica de Procesos Irreversibles Lineal (*TIL*).

Este trabajo pretende dar una visión global de los aspectos relacionados con los procesos disipativos que se presentan, tanto en flujos hidrodinámicos como magnetohidrodinámicos. Pero, primordialmente, está enfocado a la determinación de condiciones óptimas (de diseño u operación) que permitan minimizar las irreversibilidades que se presentan en sistemas energéticos. Como se mencionó previamente, la herramienta para lograr este objetivo es la minimización de la producción de entropía. Esto implica, por un lado, determinar los campos de velocidad y temperatura en el sistema, así como, en su caso, la densidad de corriente eléctrica y demás variables electromagnéticas relevantes al problema. Esto requiere, evidentemente, la solución de las ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos o bien de la *MHD*.

Una vez conocidos los campos mencionados, es posible determinar la producción de entropía local en el sistema bajo estudio. Como en el proceso de optimización se requiere considerar las dimensiones finitas del dispositivo, es necesario integrar la producción de entropía local en toda la región de análisis con el fin de obtener la producción de entropía global. Es esta cantidad (que no depende de las coordenadas espaciales ni del tiempo) la que se minimiza como función de los parámetros relevantes del problema, conduciendo entonces a la determinación de condiciones de disipación de energía mínima. Una característica importante de los problemas aquí tratados es que es posible encontrar soluciones analíticas, lo que permite un análisis detallado de los mismos.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se expone la teoría de la *TIL* como la herramienta teórica que nos permite tratar una gran variedad de sistemas en los que se llevan a cabo fenómenos irreversibles, estableciendo las hipótesis en las que se basa esta teoría. Asimismo, se obtiene formalmente el balance de entropía del sistema analizado, cuya expresión explícita requiere de las ecuaciones de conservación. Posteriormente, se formulan las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético, para luego obtener las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía tomando en consideración la presencia del campo magnético. Estas ecuaciones se simplifican mediante una aproximación que desprecia efectos relativistas y de altas frecuencias. Las ecuaciones obtenidas de esa forma, son conocidas como las

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ecuaciones de la *MHD* y están contenidas dentro del formalismo general de la *TIL*. Se plantea entonces la necesidad de cerrar el sistema de ecuaciones, lo que se logra mediante las relaciones constitutivas lineales para el tensor de esfuerzos y los flujos de calor, masa y corriente eléctrica, es decir, utilizando las leyes fenomenológicas lineales que la *TIL* incorpora como un postulado macroscópico necesario. Finalmente, se obtiene una expresión explícita para la producción de entropía del sistema.

En el capítulo 2 realizamos el análisis del calentamiento uniforme interno de una placa sólida, y de un flujo viscoso entre dos planos paralelos infinitos (flujo de Poiseuille). Bajo estas condiciones las irreversibilidades son generadas por conducción de calor, en el primer ejemplo, y por disipación viscosa y conducción de calor, en el segundo ejemplo. En ambos casos se intercambia calor con el ambiente siguiendo la ley de enfriamiento de Newton y se ilustra la posibilidad de minimizar la producción global de entropía mediante un enfriamiento asimétrico por convección de las superficies externas. Las expresiones analíticas para los campos de temperatura del sólido, y de velocidad y temperatura del fluido, son usadas para calcular explícitamente la producción global de entropía. Esta función depende de la temperatura ambiente adimensional y de los coeficientes de transferencia de calor por convección (números de Biot) de cada superficie los que, en general, se suponen distintos. En ambos casos, es posible encontrar un número de Biot óptimo para condiciones de enfriamiento específicas y para el ejemplo del flujo de Poiseuille se puede definir un número local de Nusselt como función de dicho valor óptimo.

En el capítulo 3 analizamos la optimización energética de flujos de fluidos eléctricamente conductores en presencia de un campo magnético a través de dos nuevos ejemplos, el flujo radial entre discos paralelos concéntricos eléctricamente aislantes, y el flujo longitudinal entre paredes planas paralelas infinitas con conductividad eléctrica finita. En ambos problemas se considera un campo magnético externo, aplicado en dirección transversal. Aquí, debemos resolver las ecuaciones de balance para un fluido conductor de electricidad, y además de las irreversibilidades generadas por disipación viscosa y conducción de calor, aparecen las debidas a la conducción eléctrica. Procedemos de manera similar al capítulo anterior. Primeramente, determinamos el comportamiento dinámico, térmico y electromagnético para ambos flujos, es decir, los campos de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica, y luego obtenemos una expresión explícita de la producción local y global de entropía. Esta última función, en ambos ejemplos, además de depender de la temperatura ambiente adimensional y de los coeficientes de transferencia de calor por

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

convección (números de Biot), dependerá del número de Hartmann, cuyo valor nos caracteriza la intensidad del campo magnético aplicado. Además, en el caso del flujo radial entre discos, tomamos en cuenta los efectos convectivos en la transferencia de calor a través del número de Péclet, y en el caso del flujo longitudinal entre planos infinitos, tomamos en cuenta la relación de conductividades eléctrica pared-fluido a través del parámetro c . Nuevamente, en estos dos problemas se intercambia calor con el ambiente siguiendo la ley de enfriamiento de Newton, y se obtienen condiciones de mínima producción de entropía cuando este intercambio de calor se realiza en forma asimétrica.

En el capítulo 4 analizamos la optimización de un generador alterno *MHD*, que es un dispositivo que convierte el movimiento oscilatorio de un fluido conductor en energía eléctrica a través de la interacción con un campo magnético. Primeramente, definimos el problema físico y apuntamos el método de solución que lleva a determinar los campos de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica, cuyas expresiones analíticas se dan explícitamente. A partir de éstas, se calcula la producción de entropía en términos de los números adimensionales del problema (número de Hartmann, número de Reynolds oscilatorio y factor de carga). Posteriormente se utiliza la producción de entropía global para definir una eficiencia de Segunda Ley que considera todas las irreversibilidades presentes en el sistema. Finalmente, a partir de esta eficiencia se determinan las condiciones óptimas de operación del dispositivo. En este caso, la ecuación de balance de energía se resuelve con condiciones de frontera de primer tipo y a diferencia de los problemas anteriores, a pesar de existir un intercambio de calor con el medio en forma simétrica, es posible encontrar condiciones de operación en las que la disipación es mínima.

De todo lo anterior, se puede resumir que el objetivo del trabajo es optimizar los procesos de transporte que ocurren en dispositivos hidrodinámicos y magnetohidrodinámicos de conversión y transferencia de energía utilizando el Método de Minimización de la Producción de Entropía, y por tanto, determinar las condiciones que minimizan las pérdidas de energía total ocasionadas por las irreversibilidades en un proceso dado con el fin de optimizar el proceso mismo o bien el diseño de un dispositivo específico.

Capítulo 1

Fundamentos de la Termodinámica de Procesos Irreversibles Lineal y ecuaciones de balance

1.1 Introducción

La Termodinámica de Procesos Irreversibles Lineal (*TIL*) es una teoría fenomenológica bien establecida que provee un marco general para la descripción de los procesos irreversibles que se llevan a cabo en una gran variedad de sistemas. Al igual que la termodinámica de equilibrio, la *TIL* puede sintetizarse mediante una formulación axiomática. La teoría se basa en cuatro postulados que más adelante se explicarán y da resultados que han sido ampliamente verificados experimentalmente. En particular, ofrece un sólido marco natural para describir los procesos disipativos, tanto en el flujo de fluidos conductores en presencia de campos magnéticos, lo que se conoce como magnetohidrodinámica, como en la hidrodinámica ordinaria.

La *TIL* es una teoría del continuo, que trata a las variables de estado como variables de campo, es decir, como funciones continuas de las coordenadas espaciales y del tiempo. Las ecuaciones básicas de la teoría se formulan de manera que contienen únicamente cantidades que sólo se refieren a un punto en el espacio y a un tiempo dado, o sea, se expresan en forma de ecuaciones locales, al igual que la dinámica de fluidos y la electrodinámica clásica. La primera hipótesis de la teoría, el equilibrio local, tiene relación con lo anterior y permite describir el estado termodinámico del sistema en cada punto mediante pocas variables, relacionadas entre sí de la misma forma que cuando el fluido se encuentra en equilibrio.

Uno de los objetivos fundamentales de la *TIL* es relacionar explícitamente la fuente de entropía con los diversos procesos irreversibles que se presentan en el sistema. Esto se puede lograr a través de la ecuación de balance de entropía si conocemos las ecuaciones de balance de masa, momento y energía que describen la evolución temporal de las cantidades que se conservan en el sistema. Para el caso específico de fluidos conductores en presencia de un campo magnético se deben considerar los efectos de dicho campo en las variaciones de las variables conservadas a través de las ecuaciones de Maxwell.

1.2 Hipótesis de la TIL

En general se dice que un sistema está en equilibrio si las variables de estado intensivas (temperatura, densidad, etc) son constantes a todo tiempo y tienen la misma magnitud en todas las regiones del sistema. De aquí se infiere que en equilibrio no existen gradientes de los parámetros intensivos y además no se presentan procesos espontáneos, de modo que no hay un intercambio neto de energía o materia entre el sistema y sus alrededores, o entre una y otra parte del sistema. Si un sistema está en un estado en el que no se satisfacen estas condiciones, el sistema se encuentra fuera de equilibrio.

Cuando se perturba un sistema en equilibrio hacia un estado de no equilibrio mediante un agente externo o interno, al menos uno de los parámetros de estado se vuelve una función del vector de posición, r , y del tiempo, t . La forma en que el sistema se aleja de su estado de equilibrio se derivará, en última instancia, de la suavidad o brusquedad con que estas funciones varíen en r y t , esto es, de la magnitud de los gradientes espaciales y temporales [10]. Cuando se elimina la perturbación, se presenta espontáneamente un proceso irreversible de decaimiento, y el sistema avanza a través de una serie de estados de no equilibrio hasta que se alcanza el equilibrio. El proceso de decaimiento es un proceso de transporte, ya que alguna cantidad se transporta a través del sistema conforme éste intenta hacer independientes de la posición a todos los parámetros. Una dependencia espacial de los parámetros se asocia con un flujo.

Ahora bien, un sistema dado puede ser dividido en varios subsistemas de volumen dV cuyas posiciones son denotadas por un vector r dado para cada subsistema. Estos subsistemas son pequeños comparados con las dimensiones macroscópicas del sistema, pero son grandes comparados con la trayectoria libre media molecular. El valor de una variable de

estado en r es el valor de la variable promediada sobre el elemento de volumen y además se supone que el elemento de volumen se escoge de tal forma que la variación de dicho valor en el mismo elemento es despreciable. Si el elemento de volumen se escoge de la forma descrita anteriormente se dice que está en equilibrio local y es posible asignar cantidades termodinámicas a los subsistemas y estas cantidades tendrán el mismo significado que poseen en un sistema en equilibrio total, es decir, fuera de equilibrio se siguen manteniendo las mismas relaciones funcionales de equilibrio entre las variables termodinámicas.

Por todo lo anterior el postulado de equilibrio local dentro de la *TIL* permite definir cantidades termodinámicas para sistemas fuera de equilibrio y escribir relaciones termodinámicas en la misma forma que se haría para un sistema en equilibrio total, con la diferencia de que las cantidades termodinámicas toman sus valores locales, como funciones de r y t .

En la termodinámica de no equilibrio es de primordial importancia la ecuación de balance de entropía, que expresa el hecho de que la entropía de un elemento de volumen cambia con el tiempo debido a dos razones. En primer lugar cambia porque la entropía fluye a través del elemento de volumen y en segundo lugar porque existe una fuente de entropía (no negativa) debida a los fenómenos irreversibles presentes dentro del elemento de volumen. Para transformaciones reversibles la fuente de entropía es cero. Esta es la formulación local de una segunda ley de la termodinámica y constituye el segundo postulado de la *TIL*.

La fuente o producción de entropía puede calcularse si se utiliza la relación termodinámica de Gibbs que conecta, en un fluido isotrópico multicomponente, la razón de cambio de la entropía en cada elemento de masa, con las razones de cambio de la energía y la composición. Como las ecuaciones de balance contienen diversas cantidades como los flujos de masa, el flujo de calor y corriente eléctrica, y el tensor de esfuerzos que se relacionan al transporte de masa, energía y momento, es evidente que, finalmente, la producción de entropía quedará expresada como la suma de términos formados por el producto de un flujo que caracteriza el proceso irreversible y una cantidad denominada fuerza termodinámica, que se relaciona con la no uniformidad del sistema o con las desviaciones de los valores de equilibrio de algunas variables de estado internas. La producción de entropía puede servir entonces como una base para la descripción sistemática de los procesos irreversibles que ocurren en el sistema.

De lo antes mencionado se infiere que el conjunto de ecuaciones de conservación junto

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

con la de balance de entropía y las ecuaciones de estado, contienen a los flujos irreversibles como incógnitas y por tanto deben darse ecuaciones fenomenológicas adicionales que relacionan los flujos y las fuerzas termodinámicas, para poder obtener un sistema de ecuaciones cerrado que pueda resolverse para las condiciones iniciales y de frontera dadas.

La tercera hipótesis de la *TIL* plantea que, en primera aproximación, los flujos son funciones lineales de las fuerzas termodinámicas. De manera precisa este tercer postulado plantea que si un sistema termodinámico inicialmente en equilibrio, es sometido a la acción de fuerzas termodinámicas suficientemente pequeñas para que su estado perturbado no difiera mucho de su estado de equilibrio inicial, entonces los flujos que se generan como consecuencia de esta acción son proporcionales a dichas fuerzas y las constantes de proporcionalidad (coeficientes fenomenológicos) dependen únicamente de las propiedades del sistema en equilibrio. Ejemplos de este tipo de relaciones fenomenológicas lineales son la ley de Fourier para la conducción de calor, la ley de difusión de Fick y la ley de Ohm para la conducción eléctrica. Matemáticamente este postulado se expresa como $J_i = \sum_k L_{ik} X_k$ y la expresión para la producción de entropía toma la forma $\dot{S} = \sum_i J_i X_i$ donde L_{ik} es la matriz de los coeficientes fenomenológicos o de transporte y J_i y X_i son cualesquiera de las componentes cartesianas de los flujos independientes y las fuerzas termodinámicas.

Otra cuestión importante se refiere a la matriz de coeficientes fenomenológicos que relacionan a los flujos y las fuerzas termodinámicas. Si la matriz es simétrica, el sistema de ecuaciones será completo, en caso contrario se necesitaría más información para poder resolverlo. Esto lleva a introducir una cuarta hipótesis conocida como el teorema de reciprocidad de Onsager que plantea la existencia de la simetría de la matriz de los coeficientes fenomenológicos. Esto, que ha sido demostrado por Onsager [10], da lugar a un número de relaciones entre estos coeficientes, reduciendo el número de cantidades independientes y relacionando entre sí distintos efectos físicos. Uno de los objetivos de la *TIL* es estudiar las consecuencias físicas de las relaciones de reciprocidad en aplicaciones de la teoría a diversas situaciones. Otro aspecto a tener en cuenta es que las ecuaciones para los flujos obedecen el principio de Curie el cual especifica que para un sistema isotrópico donde existen procesos irreversibles, sólo pueden acoplarse entre sí flujos y fuerzas de la misma naturaleza tensorial.

En la discusión anterior se han formulado los cuatro principios básicos de los cuales parte la *TIL* para el análisis de los diferentes problemas. Resumiendo, estos postulados son:

TESIS CON
FALLA DE ORICEN

1. La hipótesis de equilibrio local.
2. La producción local de entropía es una cantidad no negativa.
3. La relación entre flujos y fuerzas termodinámicas es lineal y obedece el principio de Curie.
4. La matriz de coeficientes que relaciona los flujos y las fuerzas termodinámicas es simétrica.

1.3 Balance de entropía

De acuerdo con los principios de la termodinámica, para un sistema macroscópico se puede introducir una función de estado S , llamada entropía del sistema, que tiene las siguientes propiedades [11].

El cambio de la entropía dS se puede escribir como la suma de dos términos

$$dS = d_e S + d_i S, \quad (1.1)$$

donde $d_e S$ es la entropía suministrada al sistema por sus alrededores y $d_i S$ es la entropía producida dentro del sistema. La segunda ley de la termodinámica establece que

$$d_i S = 0, \quad \text{para un proceso reversible,} \quad (1.2)$$

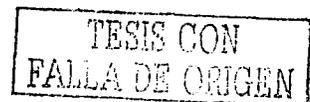
$$d_i S > 0, \quad \text{para un proceso irreversible.} \quad (1.3)$$

Por otra parte, la entropía suministrada, $d_e S$, puede ser positiva, negativa o cero dependiendo de la interacción del sistema con sus alrededores. Para un sistema aislado adiabáticamente, $d_e S$ es cero y por tanto para este caso

$$dS = dS_i \geq 0, \quad (1.4)$$

que es una forma bien conocida de la segunda ley de la termodinámica.

Para sistemas cerrados que sólo intercambian calor con sus alrededores, de acuerdo con el teorema de Carnot-Clausius se tiene que



$$d_c S = \frac{dQ}{T}, \quad (1.5)$$

donde dQ es el calor suministrado al sistema por sus alrededores y T es la temperatura absoluta a la que el sistema recibe calor. Para este caso de (1.4) y (1.5) se obtiene que

$$dS \geq \frac{dQ}{T}, \text{ para un sistema cerrado,} \quad (1.6)$$

que también es una forma bien conocida de la segunda ley de la termodinámica.

La termodinámica de equilibrio estudia procesos reversibles para los que se cumple la igualdad (1.2). En la TIL uno de los objetivos importantes es relacionar la producción de entropía $d_i S$ con los diversos fenómenos irreversibles que ocurren dentro del sistema.

Como la entropía es una cantidad extensiva es posible obtener expresiones para la entropía total S y para su razón de cambio temporal

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV, \quad (1.7)$$

donde s es la entropía por unidad de masa, ρ la densidad de masa y V el volumen. Asimismo, puede escribirse una ecuación de balance para la entropía que en forma integral se expresa como

$$\int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV = - \int_A \mathbf{J}_s^T \cdot \mathbf{n} da + \int_V \dot{S} dV, \quad (1.8)$$

donde \mathbf{J}_s^T es el flujo total de entropía, \mathbf{n} el vector unitario perpendicular a la superficie A y \dot{S} es la producción de entropía por unidad de volumen. Diferenciando (1.1) con respecto al tiempo y comparando con la ecuación (1.8), se puede asociar

$$d_c S = - \int_A \mathbf{J}_s^T \cdot \mathbf{n} da \quad \text{y} \quad d_i S = \int_V \dot{S} dV. \quad (1.9)$$

Al utilizar el teorema de Gauss, la ecuación (1.8) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s^T + \dot{S}, \quad (1.10)$$

donde la condición suficiente es

$$\dot{S} \geq 0. \quad (1.11)$$

Estas son las formas locales de (1.1) y (1.3), es decir, las expresiones matemáticas locales para la segunda ley de la termodinámica. Formalmente la ecuación (1.10) es una ecuación de balance para la densidad de entropía ρs , con un término fuente que satisface la desigualdad (1.11). Esta desigualdad, que expresa que la producción de entropía es una cantidad no negativa, es el segundo postulado de la TIL y se puede entender como una extensión de la segunda ley de la termodinámica para situaciones fuera de equilibrio.

Definiendo el flujo de entropía \mathbf{J}_s como la diferencia entre el flujo total de entropía y un término convectivo $\rho s \mathbf{v}$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s^T - \rho s \mathbf{v}, \quad (1.12)$$

la ecuación (1.10) se puede reescribir en la forma

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \dot{S}, \quad (1.13)$$

donde d/dt denota la derivada material dada por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (1.14)$$

Para un sistema fluido de un solo componente fuera de equilibrio la entropía por unidad de masa s es una función de la energía interna e y la densidad ρ , que son los parámetros necesarios para definir completamente el estado del sistema, es decir, $s = s(e, \rho)$.

La hipótesis de equilibrio local implica la validez local de la relación de Gibbs, donde ahora las diferenciales que aparecen en ella deben tomarse como funciones de las coordenadas y el tiempo, es decir, será una relación entre derivadas totales, a saber, .

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (1.15)$$

donde T es la temperatura absoluta y p la presión. Esta relación nos permite deducir la forma como cambia la entropía del sistema en el tiempo, si conocemos las ecuaciones que describen la evolución temporal de las cantidades e y ρ , o sea, las ecuaciones de conservación.

De acuerdo a los principios formulados anteriormente, el balance de entropía puede obtenerse de la ecuación de Gibbs (1.15) y con ayuda de las ecuaciones de conservación es posible obtener expresiones explícitas para el flujo y la producción de entropía.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A continuación obtendremos las ecuaciones de conservación que describen el comportamiento de fluidos conductores de electricidad en presencia de un campo magnético; para ello primero se describen las ecuaciones del campo electromagnético o ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de balance, obtenidas de esta forma, se pueden particularizar para el caso de fluidos en ausencia de campos electromagnéticos.

1.4 Ecuaciones del campo electromagnético

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo son conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones junto con la ecuación de Lorentz para la fuerza, establecen las interacciones fundamentales del campo electromagnético, que se caracteriza por las siguientes cantidades macroscópicas: intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, inducción magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, densidad de corriente eléctrica $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ y densidad de carga eléctrica $\rho_e(\mathbf{r}, t)$, que también puede expresarse como $\rho z(\mathbf{r}, t)$, donde z es la carga por unidad de masa. Las cantidades macroscópicas se definen como promedios estadísticos sobre un número de átomos contenidos en un elemento de masa que es suficientemente grande para que puedan aplicarse los principios de la mecánica estadística, pero que es pequeño desde el punto de vista macroscópico.

En su forma diferencial las ecuaciones macroscópicas de Maxwell se expresan de la siguiente forma [11, 12]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho z}{\epsilon}, \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (1.19)$$

donde ϵ y μ son escalares conocidos como la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio, respectivamente.

En general ε y μ podrían depender del estado termodinámico del medio, sin embargo para la gran mayoría de los problemas en que existen fluidos conductores pueden considerarse constantes. En particular, al trabajar con metales líquidos es posible tomar como una muy buena aproximación $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. Lo anterior confirma que las características del campo electromagnético en distintos medios materiales dependen de la estructura de tales medios y su estado termodinámico.

1.5 Ecuaciones de balance para un fluido conductor de electricidad en presencia de un campo electromagnético

El principal efecto de un campo magnético sobre un fluido conductor es, por una parte, el surgimiento de fuerzas de cuerpo sobre el fluido (intercambio de cantidad de movimiento), y por otra, el intercambio de energía entre el campo y el fluido. En consecuencia las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos por sí mismas ya no son suficientes para dar una descripción adecuada del fenómeno cuando se considera la interacción electromagnética, y es necesario combinarlas con las ecuaciones del campo electromagnético a fin de obtener las ecuaciones fundamentales que gobiernan el flujo de un fluido conductor en presencia de un campo magnético. Estas ecuaciones, en ausencia del campo, se reducen a las ecuaciones de la hidrodinámica ordinaria.

A continuación estableceremos dichas ecuaciones, para un fluido simple, comenzando por las ecuaciones de conservación y luego las del campo electromagnético, para finalmente, bajo las conocidas aproximaciones de la magnetohidrodinámica [12], combinarlas y obtener las ecuaciones de la *MHD*.

1.5.1 Balance de Masa

Considérese un sistema monocomponente en donde no existen reacciones químicas y sea $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densidad de masa y $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ el campo de velocidades del fluido. En su forma integral la ecuación de conservación de masa establece que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (1.20)$$

donde dV es el elemento de volumen ocupado por el fluido. Con ayuda del teorema de transporte de Reynolds la ecuación anterior puede expresarse en la forma

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0, \quad (1.21)$$

Puesto que el integrando es una función continua y el volumen de integración es arbitrario, se tiene que

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.22)$$

Utilizando (1.14), de la ecuación anterior se obtiene la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v}. \quad (1.23)$$

Como puede apreciarse, la ecuación (1.23) no se ve alterada por la interacción electromagnética y expresa el hecho de que la masa total se conserva, es decir, que la masa total en cualquier elemento de volumen del sistema sólo puede cambiar si la materia fluye a través del elemento de volumen.

La ecuación (1.22) en términos del volumen específico $v = 1/\rho$, se puede escribir como

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (1.24)$$

Para el caso de un fluido incompresible, se tiene simplemente $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

1.5.2 Conservación de Momento Lineal

La ecuación de balance de momento en su forma integral es la siguiente [13]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{f} dV. \quad (1.25)$$

La integral de superficie del lado derecho considera las fuerzas de superficie que se presentan en el fluido, donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos mecánico. La segunda integral del lado derecho toma en cuenta las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido, siendo \mathbf{f} la densidad de fuerza de cuerpo. Mediante el teorema de transporte de Reynolds y utilizando la ecuación de balance de masa (1.22), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV, \quad (1.26)$$

mientras que, utilizando el teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV. \quad (1.27)$$

Sustituyendo (1.26) y (1.27) en la ecuación (1.25) se obtiene la forma diferencial de la ecuación de balance de momento lineal, es decir

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}. \quad (1.28)$$

El efecto del campo electromagnético se incorpora a través de la fuerza de Lorentz, la cual es una fuerza de cuerpo. Para obtener la densidad de fuerza de Lorentz se deben tener presentes algunas consideraciones.

La fuerza sobre una carga eléctrica depende de los campos eléctricos y magnéticos presentes y de la velocidad con que se desplaza dicha carga. En todo punto del espacio se caracteriza por dos cantidades vectoriales, la primera es la fuerza eléctrica que da una componente de la fuerza que es independiente del movimiento de la carga, y se describe por medio del campo eléctrico en la forma $z\mathbf{E}$. La segunda componente es la fuerza magnética cuya dirección y módulo dependen de la dirección y la velocidad con que se mueve la partícula siendo siempre perpendicular al vector velocidad y al campo magnético. Así la fuerza magnética se puede expresar como $z\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La ley de Lorentz para la fuerza electromagnética es entonces

$$\mathbf{F} = z(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.29)$$

Para un medio continuo que contenga partículas cargadas, la densidad de carga ρ_e está dada por ρz .

Asimismo, la densidad de corriente eléctrica total \mathbf{I} puede escribirse en términos de la velocidad \mathbf{v} de la sustancia, como,

$$\mathbf{I} = \rho z \mathbf{v} + \mathbf{j}, \quad (1.30)$$

donde $\rho z \mathbf{v}$ es la corriente eléctrica debida a la convección y \mathbf{j} es la corriente de conducción. Entonces para un medio continuo con densidad de carga ρz y densidad de corriente \mathbf{I} , la ecuación (1.29) se transforma en la densidad de fuerza

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\mathbf{f} = \rho z \mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B}. \quad (1.31)$$

De modo que para un fluido conductor que se desplaza en un campo magnético la ecuación de balance de momento es

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho z \mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B}. \quad (1.32)$$

Utilizando la ecuación (1.30) esta ecuación se puede escribir como

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho z (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1.33)$$

1.5.3 Balance de Energía

La forma integral de la ecuación de balance de la energía es la siguiente [13]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \int_A \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} da - \int_A (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{I} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (1.34)$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior representa la tasa de cambio temporal de la energía contenida en el volumen V , donde ρe y $\rho v^2/2$ son las densidades de energía interna y cinética respectivamente. El primer término del miembro derecho representa la transferencia de calor por conducción térmica debida a la diferencia de temperaturas en el fluido, donde \mathbf{J}_q denota al flujo de calor. Este término indica como fluye el calor en la superficie del volumen V . El segundo término del lado derecho representa el flujo de energía a través de la superficie, tanto por transporte de masa como por procesos de fricción interna. El último término representa la tasa de cambio temporal a la cual el campo electromagnético hace trabajo sobre el volumen de fluido V , esta potencia representa una conversión de energía electromagnética en energía mecánica o térmica.

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds y la ecuación de balance de masa se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V \rho \left(\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) dV, \quad (1.35)$$

y del teorema de Gauss

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\int_A \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_q dV, \quad (1.36)$$

$$\int_A (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) dV, \quad (1.37)$$

de donde la ecuación (1.34) puede expresarse en la siguiente forma diferencial

$$\rho \left(\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.38)$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \mathbf{v} \cdot \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.39)$$

y con la ayuda de la ecuación de conservación de momento (1.32) y la ecuación (1.30), (1.39) toma la forma

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.40)$$

Ya que

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{v}, \quad (1.41)$$

donde p es la presión, usando (1.24), se obtiene

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \rho p \frac{dv}{dt} - \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.42)$$

donde $\boldsymbol{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos. Esta ecuación es la formulación local de la primera ley de la termodinámica y establece que la energía interna por unidad de volumen y tiempo puede variar debido a flujo de calor e interacciones mecánicas o electromagnéticas.

1.6 Ecuaciones básicas de la *MHD*

Las ecuaciones anteriores pueden ser simplificadas mediante la aproximación *MHD* que se basa en las siguientes suposiciones [12]:

- La velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz (aproximación no relativista, $v^2 \ll c^2$).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- Los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias.
- Los campos eléctricos son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz (fem) inducida, $v \times B$.

Con estas suposiciones se pueden incluir simplificaciones adicionales en las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido conductor en un campo magnético. Primeramente, en esta aproximación, se desprecia la corriente de desplazamiento de Maxwell, $\epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$, en la ecuación (1.19). Esta es una aproximación que comunmente se hace en cualquier problema de electromagnetismo donde no intervienen oscilaciones de alta frecuencia [12], y significa que se desprecia el proceso de acumulación o redistribución de cargas eléctricas.

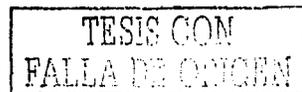
En la mayoría de los problemas de flujos de metales líquidos en campos magnéticos es común que la magnitud de los términos E y $v \times B$ sean del mismo orden, esto quiere decir físicamente que los campos eléctricos son del orden de magnitud de los efectos inducidos, lo que equivale a suponer que el campo magnético inducido es mucho menor que el campo magnético aplicado.

Por otra parte, obteniendo el cociente de la magnitud de los términos $\rho z E$ y $I \times B$ que aparecen en la fuerza de Lorentz (1.31), y suponiendo que $|E| \approx |v \times B|$, se encuentra que dicho cociente es de orden v^2/c^2 , por lo que el término eléctrico en la fuerza de Lorentz resulta despreciable comparado con $I \times B$. Una consideración similar se puede llevar a cabo para comparar los términos $\rho z v$ y j de la densidad de corriente eléctrica total (1.30), encontrándose que la corriente convectiva $\rho z v$ es despreciable en esta aproximación; por consiguiente, la corriente de conducción j se toma como la corriente total I , y de la ecuación (1.31) se obtiene que $f = j \times B$. Un análisis detallado de los órdenes de magnitud de las cantidades anteriores puede encontrarse en [12].

Tomando en cuenta las aproximaciones anteriores, las ecuaciones fundamentales de la *MHD* para un fluido conductor en presencia de un campo magnético, expresadas en forma diferencial, son:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot v = 0, \quad (1.43)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla \cdot \tau + j \times B, \quad (1.44)$$



$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \tau : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.46)$$

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{j}, \quad (1.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.49)$$

donde se ha omitido la ecuación de Gauss para el campo eléctrico, ya que ρ_c no es de interés en la *MHD* y además los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} quedan determinados por las ecuaciones restantes (1.46-1.49) y la ecuación constitutiva para \mathbf{j} (ley de Ohm), que se dará más adelante.

1.7 Producción de entropía

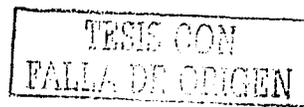
Una vez obtenidas las ecuaciones de conservación es posible obtener una forma explícita para el flujo y la producción de entropía. De acuerdo a los principios formulados anteriormente, introduciendo en la expresión (1.15), que representa el balance de entropía obtenido a partir de la ecuación de Gibbs, la ecuación (1.42), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} = & -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_q}{T} \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \tau' : \nabla \mathbf{v} \\ & + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1.13) se observa que el flujo de entropía está dado por

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{T} \mathbf{J}_q, \quad (1.51)$$

y la producción de entropía por



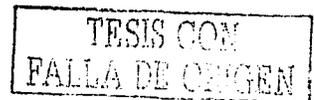
$$\dot{S} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.52)$$

La ecuación (1.51) muestra que para sistemas abiertos, el flujo de entropía está dado a través del flujo de calor \mathbf{J}_q , mientras que la expresión (1.52) muestra que la producción de entropía contiene tres diferentes contribuciones, que producen las irreversibilidades del sistema. El primer término del lado derecho de (1.52) surge de la conducción de calor, el segundo está relacionado con los procesos de fricción en un flujo viscoso y el tercero se debe a la conducción de electricidad, evidentemente este último término no existe en el caso de fluidos no conductores de electricidad. La estructura de la expresión para \dot{S} es una forma bilineal, ya que consiste de la suma de términos que son el producto escalar de dos factores, que se identifican con un flujo y un término que da lugar al flujo, es decir, tomando en cuenta sólo efectos directos se puede decir que el segundo factor se relaciona con la causa que experimentalmente se ha establecido que da lugar al proceso irreversible y que generalmente se manifiesta como el gradiente de una variable de estado intensiva o como una fuerza externa como en el caso electromagnético. De esta manera el flujo de calor se relaciona con el gradiente de temperatura, los fenómenos viscosos se atribuyen a gradientes de velocidades y el movimiento de partículas cargadas se origina por los campos electromagnéticos.

De todo lo anterior se infiere que el conjunto de ecuaciones de conservación junto con la de balance de entropía y las ecuaciones de estado, contienen a los flujos irreversibles como incógnitas y por tanto deben darse ecuaciones fenomenológicas adicionales que relacionan los flujos y las fuerzas termodinámicas, para poder obtener un sistema de ecuaciones cerrado que pueda resolverse para las condiciones iniciales y de frontera dadas. Estas relaciones constitutivas para los flujos de calor, momento y corriente eléctrica, en ausencia de efectos cruzados, son las leyes ordinarias de Fourier, Navier-Newton y Ohm, respectivamente, y establecen relaciones lineales entre los flujos y los gradientes o fuerzas generalizadas que dan lugar a los procesos irreversibles:

$$\mathbf{J}_q = -k \nabla T, \quad (1.53)$$

$$\boldsymbol{\tau}' = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{1} - \eta (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T), \quad (1.54)$$



$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.55)$$

donde k , λ , η y σ son la conductividad térmica, el segundo coeficiente de viscosidad, la viscosidad dinámica y la conductividad eléctrica del fluido, respectivamente. El superíndice T significa que es la matriz transpuesta del gradiente de velocidad y $\mathbf{1}$ es el tensor unitario.

Si sustituimos estas relaciones lineales en (1.52), podemos darnos cuenta de que se presenta una forma cuadrática respecto a las fuerzas generalizadas. Por lo tanto, para que la producción de entropía sea positiva los coeficientes de transporte (k, λ, η, σ) deben ser positivos, lo que concuerda con los experimentos.

En los siguientes capítulos, se hará uso del formalismo teórico de la *TIL* presentado aquí para estudiar algunos sistemas de relevancia práctica. En particular, se utilizará la producción de entropía como una herramienta de optimización de los sistemas bajo estudio.

Capítulo 2

Minimización de la producción de entropía mediante enfriamiento asimétrico por convección

2.1 Introducción

Se ha mencionado previamente que la producción de entropía es una herramienta útil para la evaluación de las irreversibilidades intrínsecas asociadas a un proceso o dispositivo dado [14]- [17]. Determinando las condiciones bajo las cuales se minimiza esta función, es posible optimizar las condiciones de operación reduciendo la disipación a un valor mínimo consistente con las constricciones físicas impuestas en el sistema. Por otro lado, se ha reconocido que un buen diseño ingenieril de transferencia de calor en dispositivos donde se requiere, ya sea un aumento de la transferencia de calor, o bien un aislamiento térmico, conduce a condiciones donde la generación de entropía se minimiza [14].

En este capítulo, el método de minimización de la producción de entropía se aplica en el análisis de dos problemas simples, el calentamiento interno uniforme de una placa sólida y el flujo entre dos paredes planas paralelas infinitas de espesor finito (flujo de Poiseuille) [18]. En ambos casos, los sistemas intercambian calor con el ambiente siguiendo la ley de enfriamiento de Newton. Primero, resolvemos analíticamente la ecuación de transferencia de calor para cada caso (placa sólida y flujo entre paredes paralelas) con condiciones de frontera de tercer tipo. Se supone que los coeficientes de transferencia de calor para cada superficie son, en general, diferentes. De las expresiones analíticas para el campo de temperatura, en el primer caso, y los campos de velocidad y temperatura, en el segundo

caso, se calculan explícitamente la producción local y global de entropía. Fijando el coeficiente convectivo de transferencia de calor adimensional (número de Biot) en una de las superficies, se encuentra para la segunda superficie un coeficiente de transferencia de calor convectivo óptimo que minimiza la producción global de entropía. De esta forma se determinan las condiciones para lograr pérdidas mínimas de energía total en estos sistemas. Además, para el flujo entre placas paralelas se explora el comportamiento del número local de Nusselt y su valor asintótico para condiciones de generación de entropía mínima. Una extensión de este último problema aparece en [19].

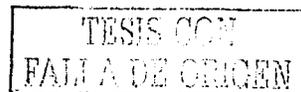
2.2 Calentamiento interno estacionario en una placa sólida

2.2.1 Campo de temperatura

Consideramos una placa sólida de conductividad térmica k_s y espesor a la cual está sometida a un calentamiento volumétrico uniforme \dot{q} . Suponemos que la placa está ubicada horizontalmente de modo que la superficie superior está situada en $y = a/2$ y la superficie inferior en $y = -a/2$, siendo y la coordenada transversal. El campo de temperatura alcanza un estado estacionario porque las superficies de la placa son bañadas por un fluido de temperatura fija T_a . En forma adimensional, la ecuación de transferencia de calor para este sistema se reduce a

$$\frac{d^2\Theta_s}{dy^{*2}} = -1, \quad (2.1)$$

donde la temperatura adimensional está dada por $\Theta_s = k_s(T_s - T_a)/\dot{q}a^2$, siendo T_s la temperatura del sólido. La coordenada (espacial) adimensional y^* está normalizada por a . Evidentemente, el comportamiento térmico del sistema, particularmente las irreversibilidades debidas al flujo de calor, depende fuertemente de las condiciones de frontera. Aquí la ecuación de transferencia de calor se resuelve usando condiciones de frontera de tercer tipo que indican que el gradiente de temperatura normal a cualquier punto en la frontera es proporcional a la diferencia de temperatura que existe entre la temperatura de la superficie y la temperatura ambiente externa. Debido a esto, la cantidad de calor que entra o sale del sistema depende de la temperatura externa, así como del coeficiente convectivo de



transferencia de calor. Suponemos que las corrientes de fluido que bañan cada superficie de la placa son, en general, diferentes. Entonces, los coeficientes convectivos de transferencia de calor, se consideran constantes, pero no tienen los mismos valores en ambas superficies. La ecuación (2.1) debe satisfacer entonces las condiciones de frontera

$$\frac{d\Theta_s}{dy^*} + Bi_{1s}\Theta_s = 0, \text{ en } y^* = \frac{1}{2}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\Theta_s}{dy^*} - Bi_{2s}\Theta_s = 0, \text{ en } y^* = -\frac{1}{2}, \quad (2.3)$$

donde los números de Biot $Bi_{1s} = h_{1s}a/k_s$ y $Bi_{2s} = h_{2s}a/k_s$ son las expresiones adimensionales de los coeficientes convectivos de transferencia de calor de las superficies superior e inferior, h_{1s} y h_{2s} , respectivamente. Por tanto, dan una medida de la transferencia de calor entre las fronteras del sistema y el medio que lo rodea.

La solución de la ecuación (2.1) con las condiciones de frontera (2.2) y (2.3) es de la forma

$$\Theta_s(y^*, Bi_{1s}, Bi_{2s}) = -\frac{y^{*2}}{2} + C_s y^* + D_s, \quad (2.4)$$

donde

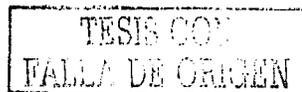
$$C_s = -\frac{1}{2} \left(\frac{Bi_{1s} - Bi_{2s}}{Bi_{1s} + Bi_{2s} + Bi_{1s}Bi_{2s}} \right),$$

$$D_s = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{4}{Bi_{2s}} - \frac{2(2 + Bi_{2s})(Bi_{1s} - Bi_{2s})}{Bi_{2s}(Bi_{1s} + Bi_{2s} + Bi_{1s}Bi_{2s})} \right].$$

Nótese que cuando $h_{1s} = h_{2s}$ la solución (2.4) se reduce a la solución bien conocida del problema de calentamiento interno estacionario dado por Bejan (ecuación (2.62) en [20]).

2.2.2 Producción de entropía.

En el caso del problema de calentamiento interno estacionario en un material sólido, la producción de entropía debe considerar las irreversibilidades causadas por el flujo de calor. Su forma explícita puede obtenerse de las ecuaciones de balance de energía y entropía, usando la ley de Fourier para el flujo de calor como se mostró en el capítulo 1. En términos adimensionales, la producción de entropía local, \dot{S}^* , está dada por [11]



$$\dot{S}^* = \frac{1}{(\Theta_s + \Theta_{as})^2} \left(\frac{d\Theta_s}{dy^*} \right)^2, \quad (2.5)$$

donde \dot{S}^* está normalizada por k_s/a^2 y la temperatura ambiente adimensional está dada por $\Theta_{as} = k_s T_a / \dot{q} a^2$. Una vez que \dot{S}^* se integra desde $y^* = -1/2$ a $y^* = 1/2$, se obtiene la producción global de entropía por unidad de longitud en la dirección axial, $\langle \dot{S}^* \rangle$. El resultado explícito es [18]

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}^* \rangle = & \frac{Bi_{1s}(2 + Bi_{2s})}{2 + Bi_{2s} + 2\Theta_{as}(Bi_{1s} + Bi_{2s} + Bi_{1s}Bi_{2s})} \\ & + \frac{Bi_{2s}(2 + Bi_{1s})}{2 + Bi_{1s} + 2\Theta_{as}(Bi_{1s} + Bi_{2s} + Bi_{1s}Bi_{2s})} \\ & + \frac{E_s}{\sqrt{F_s}} \left[\arctan \left(\frac{Bi_{1s}(2 + Bi_{2s})}{\sqrt{F_s}} \right) \right. \\ & \left. - \arctan \left(\frac{-Bi_{2s}(2 + Bi_{1s})}{\sqrt{F_s}} \right) \right], \quad (2.6) \end{aligned}$$

donde

$$E_s = 4(Bi_{1s} + Bi_{2s} + Bi_{1s}Bi_{2s}),$$

$$\begin{aligned} F_s = & -8(Bi_{1s} + Bi_{2s}) - 4[(Bi_{1s} + Bi_{2s})^2 + Bi_{1s}Bi_{2s}(1 + Bi_{1s} + Bi_{2s})] \\ & - Bi_{1s}^2 Bi_{2s}^2 - 8\Theta_{as}(Bi_{1s} + Bi_{2s} + Bi_{1s}Bi_{2s})^2. \end{aligned}$$

Nótese que esta cantidad sólo depende de los parámetros adimensionales Bi_{1s} , Bi_{2s} y Θ_{as} . Puesto que la producción global de entropía considera la disipación total producida por las irreversibilidades en el sistema, podemos buscar valores de los parámetros que minimizan la función $\langle \dot{S}^* \rangle$. Primero exploramos el comportamiento de $\langle \dot{S}^* \rangle$ cuando los números de Biot de cada superficie son iguales ($Bi = Bi_{1s} = Bi_{2s}$). Esto corresponde a un enfriamiento convectivo simétrico. La figura 2.1 muestra la producción global de entropía como función de un único número de Biot para diferentes valores de la temperatura ambiente adimensional ($\Theta_{as} = 1, 2$ y 3). Por ejemplo, $\Theta_{as} = 1$ puede corresponder a una placa de cobre comercial con un espesor de 0.05 m a una temperatura de (20°C) y una razón de calentamiento de 4.36×10^7 W/m³. Como puede observarse de la figura 2.1, para este caso la producción global de entropía es siempre una función monótonamente creciente de Bi y alcanza, para una Θ_{as} dada, un valor límite cuando $Bi \rightarrow \infty$.

TRIE CON
FALLA DE ORIGEN

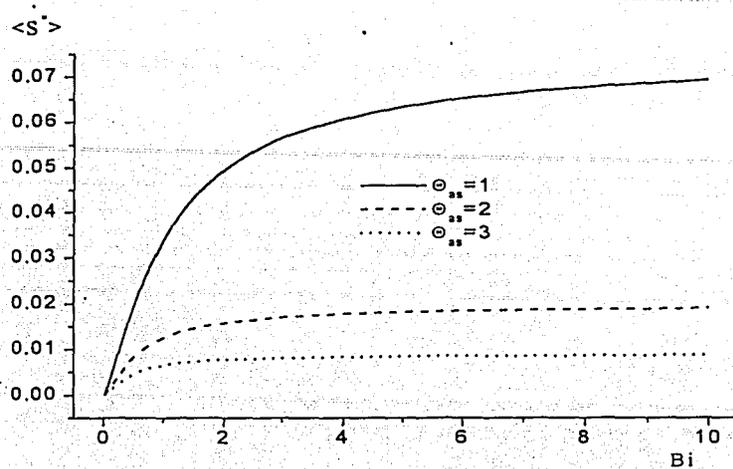


Figura 2.1: Producción de entropía global en el sólido como función del número de Biot y diferentes valores de Θ_{as} (enfriamiento simétrico por convección).

Ahora consideremos condiciones de enfriamiento convectivo asimétrico, es decir, el caso cuando los números de Biot para cada superficie son diferentes. En este caso, es posible encontrar un número de Biot óptimo para una de las superficies el cual conduce a una producción global de entropía mínima siempre que la temperatura ambiente adimensional y el número de Biot de la otra superficie permanezcan fijos. Por ejemplo, si fijamos Θ_{as} y el número de Biot de la superficie inferior, Bi_{2s} , encontramos que existe un valor del número de Biot de la superficie superior, Bi_{1s} , que minimiza $\langle \dot{S}^* \rangle$. Esto se ilustra en la figura 2.2 donde hemos graficado $\langle \dot{S}^* \rangle$ como función de Bi_{1s} para $\Theta_{as} = 1$ y diferentes valores de Bi_{2s} . Un comportamiento similar se obtiene cuando en vez de fijar el número de Biot de la superficie inferior, Bi_{2s} , fijamos el de la superficie superior, Bi_{1s} , y graficamos $\langle \dot{S}^* \rangle$ como función de Bi_{2s} .

Los resultados anteriores indican que puede lograrse una disipación mínima al extraer calor en el sistema en forma asimétrica. Aunque no fue posible obtener el valor del mínimo analíticamente, en la figura 2.3 presentamos el número de Biot óptimo de la

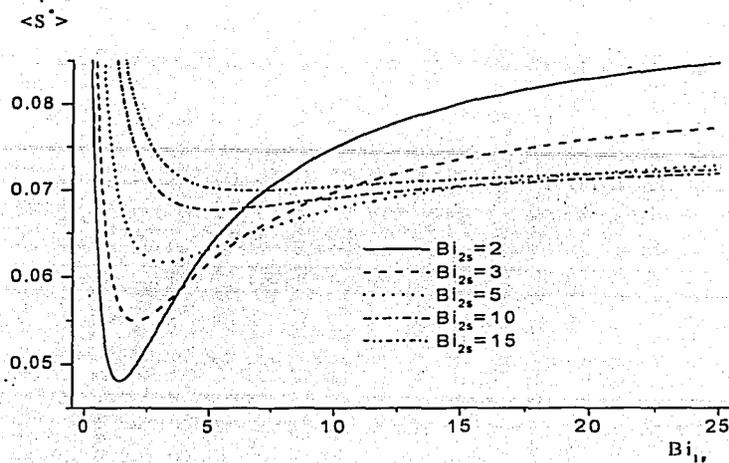


Figura 2.2: Producción de entropía global en el sólido como función de Bi_{1s} para diferentes valores de Bi_{2s} y $\Theta_{as} = 1$.

superficie superior, $(Bi_{1s})_{opt}$, obtenido numéricamente, como función del número de Biot de la superficie inferior, Bi_{2s} , y para tres valores diferentes de la temperatura ambiente adimensional. El comportamiento observado en la figura indica que mientras menor es la temperatura ambiente adimensional mayor es la asimetría requerida en el enfriamiento para lograr pérdidas irreversibles mínimas.

Ahora consideraremos el análisis del enfriamiento asimétrico en un problema donde además de flujo de calor hay irreversibilidades debidas a disipación viscosa.

2.3 Flujo de un fluido viscoso entre paredes paralelas

2.3.1 Campos de velocidad y temperatura

El campo de velocidad adimensional de un flujo viscoso entre dos paredes planas paralelas infinitas situadas en $y^* = -1/2$ y $y^* = 1/2$ es

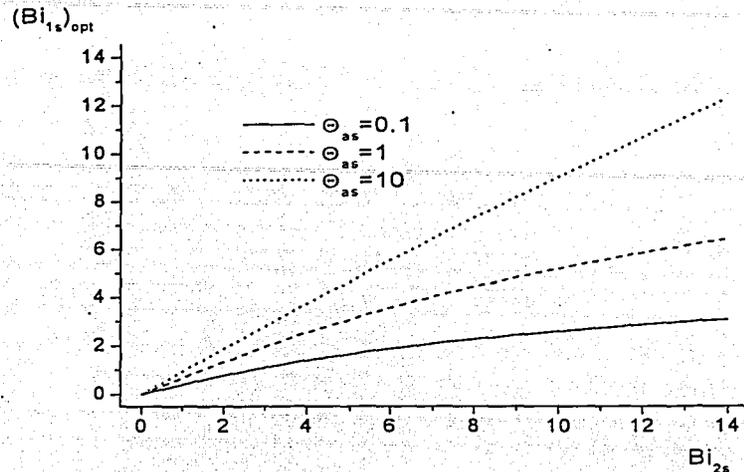


Figura 2.3: Número de Biot óptimo de la superficie superior del sólido como función de Bi_{2s} y diferentes valores de Θ_{as} .

$$u^* = \frac{1}{8}(1 - 4y^2), \quad (2.7)$$

que se conoce como el flujo de Poiseuille, donde la velocidad, u^* , ha sido normalizada por $U = -(a^2/\eta)(dp/dx)$; en este ejemplo, a es la separación entre las paredes, y η y dp/dx son la viscosidad dinámica del fluido y el gradiente de presión impuesto, respectivamente.

Con el campo de velocidad anterior, procedemos a resolver la ecuación de balance de energía considerando disipación viscosa. De nuevo, el comportamiento térmico del flujo depende fuertemente de las condiciones de frontera. Como en el problema anterior, consideramos condiciones de frontera de tercer tipo. En este caso, la cantidad de calor que entra o sale del sistema depende de la temperatura externa así como del coeficiente efectivo de transferencia de calor por convección, que incluye la resistencia térmica de la pared y el coeficiente externo de transferencia de calor por convección. La ecuación de transferencia de calor, en forma adimensional, se reduce a

$$\frac{d^2\Theta_f}{dy^{*2}} + \left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 = 0, \quad (2.8)$$

donde la temperatura adimensional ahora está dada por $\Theta_f = k_f (T_f - T_a) / \eta U^2$, siendo T_f y T_a las temperaturas del fluido y el ambiente, respectivamente, y k_f la conductividad térmica del fluido. La ecuación (2.8) debe satisfacer las condiciones de frontera

$$\frac{d\Theta_f}{dy^*} + Bi_1 \Theta_f = 0, \quad \text{en } y^* = \frac{1}{2}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\Theta_f}{dy^*} - Bi_2 \Theta_f = 0, \quad \text{en } y^* = -\frac{1}{2}, \quad (2.10)$$

donde los números de Biot $Bi_1 = (h_{ef})_1 a / k_f$ y $Bi_2 = (h_{ef})_2 a / k_f$ son las expresiones adimensionales de los coeficientes de transferencia de calor por convección de las paredes superior e inferior, $(h_{ef})_1$ y $(h_{ef})_2$, respectivamente, los que en general, se suponen diferentes. Aquí

$$(h_{ef})_j = \frac{1}{\frac{(\delta_w)_j}{k_w} + \frac{1}{(h_e)_j}}, \quad j = 1, 2. \quad (2.11)$$

En la ecuación (2.11), δ_w y k_w son el espesor y la conductividad térmica de la pared, respectivamente, mientras que $(h_e)_1$ y $(h_e)_2$ son los coeficientes externos de transferencia de calor por convección de las paredes superior e inferior, respectivamente.

La solución para el campo de temperatura está dada en la forma

$$\Theta_f(y^*, Bi_1, Bi_2) = -\frac{y^{*4}}{12} + C_f y^* + D_f, \quad (2.12)$$

donde

$$C_f = -\frac{1}{24} \left(\frac{Bi_1 - Bi_2}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2} \right),$$

$$D_f = \frac{1}{192} \left[1 + \frac{8}{Bi_2} - \frac{4(Bi_1 - Bi_2)(2 + Bi_2)}{Bi_2(Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2)} \right].$$

Ahora procedemos a calcular la producción de entropía usando los campos de velocidad y temperatura anteriores.

2.3.2 Producción de entropía.

Como se mostró en el capítulo 1 para el flujo de un fluido viscoso monocomponente, la producción de entropía, \dot{S} , puede escribirse explícitamente en términos adimensionales como [11]

$$\dot{S}^* = \frac{1}{(\Theta_f + \Theta_{af})^2} \left(\frac{d\Theta_f}{dy^*} \right)^2 + \frac{1}{\Theta_f + \Theta_{af}} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2, \quad (2.13)$$

donde \dot{S}^* está normalizada por k_f/a^2 y la temperatura ambiente adimensional está dada por $\Theta_{af} = k_f T_a / \eta U^2$. En la ecuación (2.13), hemos tomado en cuenta las irreversibilidades causadas por la disipación viscosa y el flujo de calor. Los valores de \dot{S}^* más altos se obtienen cerca de las paredes, región en la que ocurre una disipación más fuerte. La producción global de entropía por unidad de longitud en la dirección axial, $\langle \dot{S}^* \rangle$, una vez más, se obtiene integrando \dot{S}^* desde $y^* = -1/2$ a $y^* = 1/2$. El resultado explícito es

$$\langle \dot{S}^* \rangle = \frac{Bi_1(2 + Bi_2)}{2 + Bi_2 + 24\Theta_{af}(Bi_1 + Bi_2 + Bi_1Bi_2)} + \frac{Bi_2(2 + Bi_1)}{2 + Bi_1 + 24\Theta_{af}(Bi_1 + Bi_2 + Bi_1Bi_2)}. \quad (2.14)$$

En este ejemplo, la cantidad resultante sólo depende de los parámetros adimensionales Bi_1 , Bi_2 y Θ_{af} . Nuevamente se pueden explorar los valores de los parámetros que minimizan la función $\langle \dot{S}^* \rangle$. Como en el ejemplo anterior, primero hemos explorado el comportamiento de $\langle \dot{S}^* \rangle$ cuando los números de Biot de cada pared son iguales ($Bi = Bi_1 = Bi_2$), es decir, enfriamiento simétrico por convección de las paredes. Aunque no lo mostramos gráficamente, similarmente a lo que ocurrió en el problema del calentamiento interno estacionario del sólido, encontramos que en el presente ejemplo la producción global de entropía es siempre una función monótonamente creciente de Bi (sin mínimos) y eventualmente alcanza un valor límite cuando $Bi \rightarrow \infty$.

Cuando consideramos el caso donde los números de Biot para cada pared son diferentes, es decir, condiciones de enfriamiento asimétrico por convección, es posible encontrar una vez más un número de Biot óptimo para una de las paredes, el cual conduce a una producción global de entropía mínima cuando la temperatura ambiente adimensional y el número de Biot de la otra pared permanecen fijos. El resultado puede ser obtenido analíticamente. Por ejemplo, si fijamos Θ_{af} y el número de Biot de la pared inferior, Bi_2 ,

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

se encuentra que el valor del número de Biot de la pared superior, Bi_1 , que minimiza $\langle \dot{S}^* \rangle$ está dado por

$$(Bi_1)_{opt} = \frac{1}{2\beta} \left\{ -\alpha + \left\{ \alpha^2 - 16\beta \left[(Bi_2 + 2)^2 + 6\Theta_{af}(16Bi_2 + 8Bi_2^2 - 2Bi_2^3 - Bi_2^4) + 144\Theta_{af}^2(4Bi_2^2 - Bi_2^4) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (2.15)$$

donde

$$\alpha = 4 \left[(Bi_2 + 2)^2 + 12\Theta_{af}(8 + 24Bi_2 + 16Bi_2^2 + 3Bi_2^3) + 288\Theta_{af}^2(4Bi_2 + 8Bi_2^2 + 3Bi_2^3) \right],$$

y

$$\beta = (Bi_2 + 2)^2 + 24\Theta_{af}(8 + 18Bi_2 + 11Bi_2^2 + 2Bi_2^3) + 576\Theta_{af}^2(4 + 16Bi_2 + 19Bi_2^2 + 8Bi_2^3 + Bi_2^4).$$

La figura 2.4 muestra el número de Biot óptimo de la pared superior, $(Bi_1)_{opt}$, como función de Bi_2 para diferentes valores de Θ_{af} . Es claro de la figura que cuando Θ_{af} cambia en dos órdenes de magnitud hay sólo un cambio insignificante en las curvas. Se encuentra que cuando Bi_2 aumenta, $(Bi_1)_{opt}$ se aproxima a un valor límite el cual explícitamente está dado por

$$\lim_{Bi_2 \rightarrow \infty} (Bi_1)_{opt} = \left(1 + \frac{1}{24\Theta_{af}} \right)^{1/2}. \quad (2.16)$$

$Bi_2 \rightarrow \infty$ corresponde al caso en el que la temperatura de la pared inferior tiende a un valor constante (condición de frontera de primer tipo en $y^* = -1/2$). De (2.16) nos podemos dar cuenta que el valor límite, al cual se aproxima el número de Biot óptimo cuando $Bi_2 \rightarrow \infty$, es 1.

Por otro lado, se observa que para $Bi_2 < 2$, $(Bi_1)_{opt}$ toma valores negativos que evidentemente no tienen significado físico. En realidad, para $Bi_2 < 2$ no se encuentran valores mínimos de $\langle \dot{S}^* \rangle$. Esto puede observarse en la figura 2.5 donde se muestra la producción

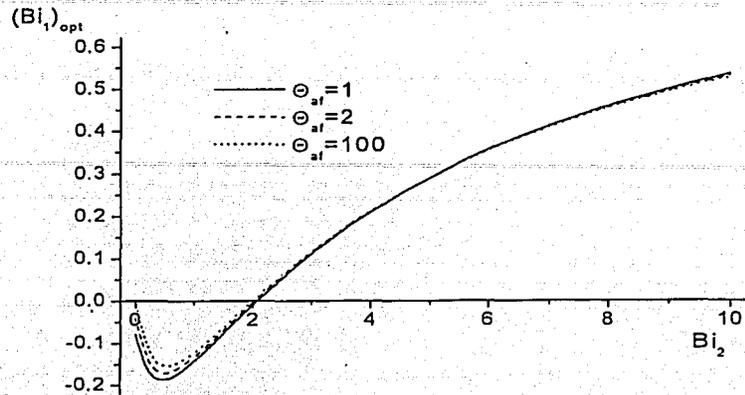


Figura 2.4: Número de Biot óptimo de la superficie superior para el flujo de Poiseuille como función de Bi_2 y diferentes valores de Θ_{af} .

global de entropía como función del número de Biot de la pared superior, Bi_1 , para diferentes valores del número de Biot de la pared inferior ($Bi_2 = 1, 2, 3, 4$ and 6) y $\Theta_{af} = 7$. Este valor de Θ_{af} se obtiene usando las propiedades físicas del aceite de máquina [21] a una temperatura ambiente $T_a = 20^\circ C$. Para cada curva, la función $\langle \dot{S}^* \rangle$ se normaliza por su valor en $Bi_1 = 0$. Nótese que los valores mínimos de $\langle \dot{S}^* \rangle$ ocurren para un Bi_1 dado cuando $Bi_2 > 2$. Además, cuanto mayor es el valor de Bi_2 , mayor es el valor del mínimo. Una vez que se alcanzan los valores mínimos, $\langle \dot{S}^* \rangle$ exhibe un incremento monótono a medida que Bi_1 crece. La figura 2.6 muestra también a $\langle \dot{S}^* \rangle$ contra Bi_1 pero para valores mayores de Bi_2 . Cuando Bi_2 aumenta el valor óptimo de Bi_1 también aumenta pero alcanza el valor límite dado por la ecuación (2.16) cuando $Bi_2 \rightarrow \infty$. Los resultados anteriores indican una vez más, que se puede lograr una disipación mínima cuando se intercambia calor en el sistema en forma asimétrica.

Ahora calculamos el número local de Nusselt para la pared superior, basado en el coeficiente interno de transferencia de calor por convección, h_i , es decir [20],

$$h_i = -\frac{k_f}{T_w - T_b} \left(\frac{\partial T_f}{\partial y} \right)_{y=a/2}, \quad (2.17)$$

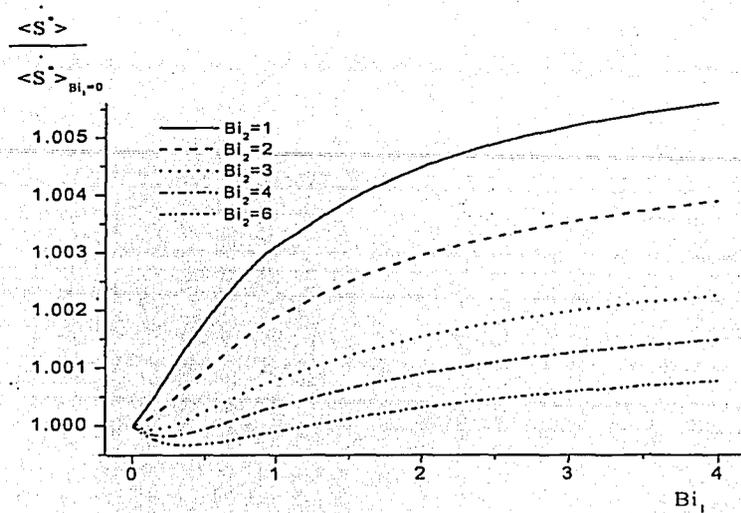


Figura 2.5: Producción global de entropía para el flujo de Poiseuille, normalizada por su valor en $Bi_1 = 0$, como función de Bi_1 y diferentes Bi_2 . $\Theta_{af} = 7$.

donde T_b y T_w son las expresiones dimensionales de la temperatura de bulbo (temperatura promedio del fluido en la sección transversal) y la temperatura de la pared, respectivamente. Por lo tanto, el número local de Nusselt para la pared superior está dado por

$$Nu = \frac{h_s a}{2k_f} = - \frac{\left(\frac{d\Theta_f}{dy^*} \right)_{y^*=1/2}}{2(\Theta_f(y^*=1/2) + \Theta_{af} - \Theta_b)} = \frac{Bi_1 \Theta_f(y^*=1/2)}{2(\Theta_f(y^*=1/2) + \Theta_{af} - \Theta_b)}, \quad (2.18)$$

donde la temperatura adimensional de bulbo se define como

$$\Theta_b = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} u^* (\Theta_f + \Theta_{af}) dy^*}{\int_{-1/2}^{1/2} u^* dy^*}.$$

El número de Nusselt representa el coeficiente adimensional de transferencia de calor interno entre el fluido y las paredes del sistema (caracteriza los procesos de transferencia de calor entre las paredes y el fluido en contacto con ella).

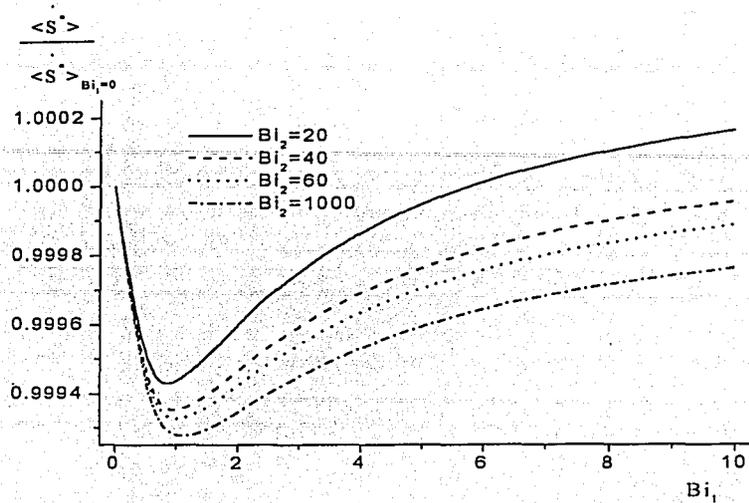


Figura 2.6: Producción global de entropía para el flujo de Poiseuille, normalizada por su valor en $Bi_1 = 0$, como función de Bi_1 y diferentes Bi_2 . $\Theta_{af} = 7$.

La figura 2.7 muestra el número de Nusselt (2.18) evaluado en el número de Biot óptimo de la pared superior, $(Bi_1)_{opt}$, como función de Bi_2 para diferentes valores de la temperatura ambiente adimensional. Este número local de Nusselt para condiciones de generación de entropía mínima exhibe un comportamiento monótono en la medida en que Bi_2 aumenta y alcanza un valor límite cuando $Bi_2 \rightarrow \infty$. Este valor límite puede determinarse analíticamente, es decir,

$$\lim_{Bi_2 \rightarrow \infty} (Nu)_{opt} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{24\Theta_{af}}}}{1 - 0.2286 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{24\Theta_{af}}}\right)}, \quad (2.19)$$

el cual sólo depende de la temperatura ambiente adimensional. Como puede observarse en la figura 2.7, el efecto de la temperatura ambiente no es muy pronunciado.

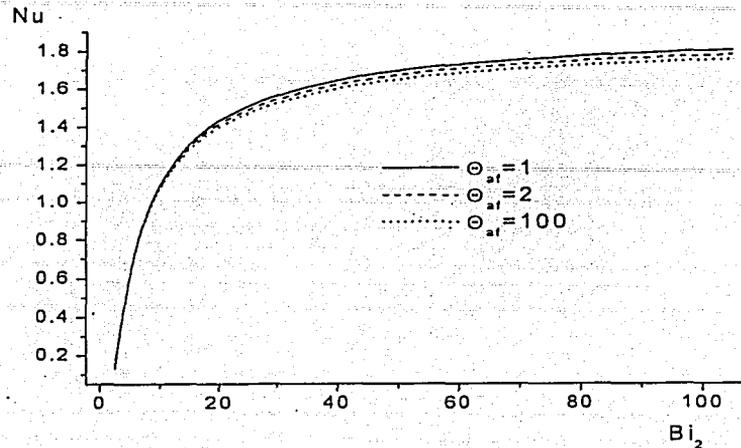


Figura 2.7: Número local de Nusselt para el flujo de Poiseuille en condiciones de generación de entropía mínima como función de Bi_2 y diferentes Θ_{af} .

2.4 Conclusiones

En este capítulo, a través de dos problemas de transferencia de calor, es decir, el calentamiento interno estacionario de una placa sólida y el flujo viscoso entre dos paredes planas paralelas de espesor finito, hemos mostrado que se puede lograr una generación de entropía mínima extrayendo calor del sistema en forma asimétrica.

Nuestro punto de partida fue la solución de las ecuaciones de balance en estos problemas para la obtención, en el primer caso, del campo de temperatura y en el segundo, de los campos de velocidad y temperatura. En los dos problemas el campo de temperatura fue determinado aplicando condiciones de frontera de tercer tipo, suponiendo en general que el coeficiente de transferencia de calor por convección para cada frontera es distinto. Bajo estas condiciones, y suponiendo que uno de los coeficientes de transferencia de calor (el de la pared o superficie inferior) y la temperatura ambiente son fijos, la producción global de entropía como función del otro coeficiente de transferencia de calor exhibe un mínimo. Esto proporciona las condiciones bajo las cuales las irreversibilidades debidas a

la fricción viscosa y/o el flujo de calor son minimizadas. Los resultados obtenidos para ambos ejemplos muestran muchas similitudes, pero además importantes diferencias. Por un lado, es algo sorprendente que la situación aparentemente más simple (calentamiento interno de la placa sólida) conduce a una expresión más compleja para la producción global de entropía. Esto está vinculado al hecho de que la integración (espacial) en el caso del flujo de Poiseuille conduce a expresiones algebraicas mientras que en la placa sólida participan funciones transcendentales. Por otro lado, el efecto de la temperatura ambiente en las condiciones de generación de entropía mínima es mucho más importante en el calentamiento interno estacionario de una placa sólida que en el flujo de Poiseuille entre paredes planas paralelas. Finalmente, en el problema del calentamiento interno hay siempre un número de Biot óptimo para la superficie superior. En contraste, en el caso del flujo viscoso, sólo para $Bi_2 > 2$ existen números de Biot de la pared superior que conducen a un mínimo en la producción global de entropía.

Por último, cabe mencionar que debido a la gran cantidad de aplicaciones donde se utiliza el enfriamiento convectivo, la minimización de irreversibilidades mediante el enfriamiento asimétrico por convección puede tener una relevancia práctica importante.

En el siguiente capítulo se analizarán dos ejemplos que involucran el flujo de un fluido eléctricamente conductor a través de un ducto en presencia de un campo magnético. Aquí, aparece una nueva disipación debida a la conducción eléctrica.

Capítulo 3

Optimización energética de flujos magnetohidrodinámicos

3.1 Introducción

En este capítulo, realizamos el estudio de dos nuevos problemas que a diferencia de los ejemplos tratados en el capítulo anterior, involucran el flujo de fluidos eléctricamente conductores en presencia de un campo magnético. Hartmann fue el primero en investigar estos tipos de flujos, también conocidos como flujos magnetohidrodinámicos, en los que, además de las pérdidas de energía ocasionadas por la disipación viscosa y la conducción de calor, se debe considerar las pérdidas debidas a la conducción eléctrica. Esto conduce, si comparamos con lo visto en el capítulo anterior, a una expresión explícita de la producción global de entropía con un término de disipación adicional.

Primeramente, se analiza el flujo radial entre discos paralelos concéntricos en donde se consideran los efectos convectivos en la transferencia de calor. Este flujo es de gran interés por estar presente en una gran cantidad de aplicaciones, tales como sistemas de lubricación, difusores e intercambiadores de calor. En la literatura se han publicado diferentes trabajos donde se estudia el comportamiento dinámico y térmico de flujos radiales [22]-[28]. Posteriormente, se estudia el flujo longitudinal entre paredes planas paralelas infinitas con conductividad eléctrica finita [29]-[31], que es el análogo en *MHD* del flujo de Poiseuille en la mecánica de fluidos ordinaria. Esta investigación tiene relevancia debido a que, proporciona conocimientos importantes en el desarrollo de modelos para el generador *MHD* que más adelante veremos. En ambos problemas se puede verificar el

límite para campos magnéticos nulos y en ellos, nuevamente, se resuelve la ecuación de energía considerando que los sistemas intercambian calor con el ambiente siguiendo la ley de enfriamiento de Newton. Aquí, además de los campos de velocidad y temperatura, se requiere conocer el campo de densidad de corriente eléctrica para obtener una expresión explícita para la producción local y global de entropía. En estos flujos también se cumple que, fijando el coeficiente convectivo de transferencia de calor adimensional (número de Biot) en una de las superficies, se encuentra para la segunda superficie un coeficiente de transferencia de calor convectivo óptimo, que minimiza la producción global de entropía y por consiguiente las pérdidas de energía.

La diferencia fundamental entre estos dos problemas es que en el caso de los discos las paredes son eléctricamente aislantes mientras que en el segundo ejemplo las paredes son eléctricamente conductoras. Por esta razón, la corriente eléctrica puede circular en ellas.

3.2 Flujo radial de un fluido viscoso eléctricamente conductor entre discos paralelos concéntricos

3.2.1 Consideraciones básicas

El sistema físico a estudiar es mostrado en la figura 3.1. Este consiste de dos discos paralelos eléctricamente aislantes con radio interior r_1 y radio exterior r_2 separados por una distancia a . Un fluido viscoso, incompresible y eléctricamente conductor, por ejemplo un metal líquido, es sometido a un gradiente de presión en dirección radial que provoca que el fluido fluya radialmente hacia afuera a través del espacio entre los dos discos. El fluido está en presencia de un campo magnético constante, aplicado en dirección transversal al flujo $\mathbf{B} = B_0 \hat{y}$, donde B_0 es la intensidad del campo y \hat{y} es el vector unitario en la dirección y . El origen del sistema de coordenadas (r, θ, y) se fija en el centro del sistema. El movimiento del fluido en presencia del campo magnético transversal induce una corriente eléctrica en la dirección angular θ . La existencia de corrientes eléctricas circulando en el fluido alteran el comportamiento dinámico y térmico del flujo. Por un lado, la corriente eléctrica interactúa con el campo aplicado produciendo una fuerza de Lorentz que se opone al movimiento del fluido; y por el otro, el flujo de corriente a través del fluido conductor, constituye una fuente de disipación óhmica que tiende a incrementar la temperatura de

dicho fluido.

En principio la corriente eléctrica induce un campo magnético en dirección radial, pero en la práctica este campo inducido es mucho menor que el campo aplicado y puede ser despreciado. Esto es válido cuando el número magnético de Reynolds $R_m = \mu\sigma V_0 l$ es mucho menor que la unidad, donde μ y σ son la permeabilidad magnética y conductividad eléctrica del fluido, mientras que V_0 y l son una velocidad característica y la longitud característica del flujo, respectivamente. Para simplificar el análisis teórico, despreciamos los efectos de borde debidos a la longitud finita de los discos en dirección radial. Además por simplicidad, suponemos que el perfil de velocidad depende sólo de las coordenadas radial y transversal, r y y , respectivamente.

Los fenómenos de difusión de masa son despreciados al considerar que el fluido es monocomponente y todas las propiedades físicas del fluido se consideran constantes.

Por último, suponemos que la transferencia de calor entre los discos y el ambiente sigue la ley de enfriamiento de Newton y que los coeficientes de transferencia de calor para cada disco son, en general, constantes y distintos.

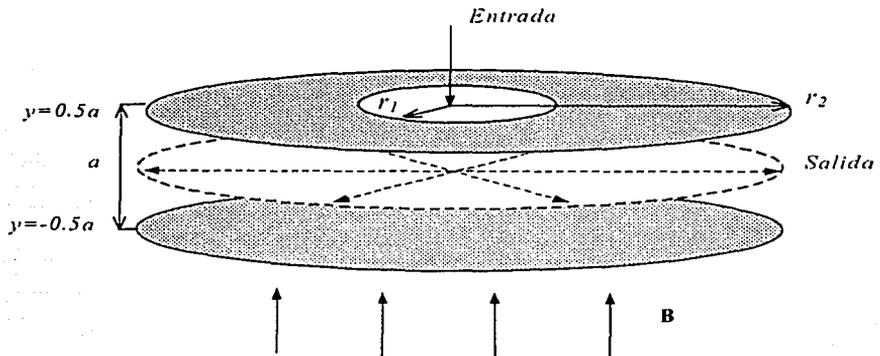


Figura 3.1: Esquema del sistema

3.2.2 Ecuaciones fundamentales

Para determinar la producción de entropía en forma explícita, tenemos que encontrar los comportamientos dinámico, térmico y electromagnético. Para esto, resolvemos las ecua-

ciones de balance del fluido tomando en cuenta las ecuaciones de la teoría electromagnética bajo la aproximación *MHD* y otras suposiciones que se consideren. El sistema de ecuaciones a resolver para el flujo de un metal líquido en presencia de un campo magnético se describe a continuación.

Las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes son, respectivamente

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.2)$$

donde \mathbf{u} , p y \mathbf{j} son los campos de velocidad, presión y densidad de corriente eléctrica mientras ρ and η son la densidad de masa y la viscosidad dinámica del fluido.

La ecuación de transferencia de calor se expresa como

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \Phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.3)$$

donde T , \mathbf{E} and Φ son la temperatura, el campo eléctrico y la función de disipación viscosa, respectivamente, y C_p y k son el calor específico a presión constante y la conductividad térmica del fluido, respectivamente.

Las ecuaciones del campo electromagnético requeridas para cerrar nuestra descripción, en la aproximación cuasi-estática [32] son

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.7)$$

Como no hay variación del campo magnético en el tiempo, la ley de inducción de Faraday (3.4) se reduce a $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Es decir, en este caso el campo eléctrico \mathbf{E} es potencial. Sin embargo, en este problema el campo eléctrico es cero, ya que las corrientes eléctricas circulan formando un lazo cerrado en la dirección θ y no existe campo eléctrico

externo aplicado. Por otro lado, tal y como fue expuesto previamente, el campo magnético no se altera por el movimiento del fluido ($R_m \ll 1$). Esto significa que el campo magnético es gobernado por las ecuaciones de la magnetostática, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que evidentemente se satisfacen para la suposición de que $\mathbf{B} = B_o \hat{y}$. Además, debido a que el fluido se considera incompresible, el campo de velocidad se desacopla del campo de temperatura. En ausencia de campo magnético (caso hidrodinámico), no hay corrientes eléctricas circulando en el fluido y el tercer término de la parte derecha de las ecuaciones (3.2) y (3.3) no existe.

3.2.3 Campos de velocidad, densidad de corriente eléctrica y temperatura

Campo de velocidad

Un flujo radial primario fue obtenido por Maki [24] bajo las suposiciones magnetohidrodinámicas que se hacen en los sistemas de lubricación. De esta forma, la componente radial de la ecuación (3.2) en estado estacionario, que considera los efectos inerciales, se expresa en términos adimensionales como

$$R_c u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} - M^2 u^*, \quad (3.8)$$

donde la componente radial de velocidad u^* está normalizada por $U = Q/a^2$, siendo $Q = 2\pi r \int_{-0.5a}^{0.5a} u dy$ el flujo volumétrico, mientras que r^* y y^* están normalizadas por a . Aquí, $R_c = \rho U a / \eta$ es el número ordinario de Reynolds y $M = B_o a \sqrt{\sigma / \eta}$ es el número de Hartmann. El primero de ellos da una estimación de la fuerza inercial comparada con la fuerza viscosa y el segundo da una estimación de la fuerza magnética comparada con la fuerza viscosa. Si suponemos que el valor del número de Reynolds es pequeño, se puede obtener la solución a través del método de perturbaciones mediante las expansiones $u^* = u_o^* + R_c u_1^* + O(R_c^2)$ y $p^* = p_o^* + R_c p_1^* + O(R_c^2)$. Por simplicidad, sólo tomaremos la solución hasta $O(1)$, que para condiciones de frontera de no deslizamiento, $u^*(\pm 0.5) = 0$, tiene la forma [22, 24]

$$u^*(y^*, r^*) = \frac{M}{4\pi r^* \left(\frac{M}{2} - \tanh \frac{M}{2} \right)} \left(1 - \frac{\cosh M y^*}{\cosh \frac{M}{2}} \right). \quad (3.9)$$

El gradiente de presión radial hasta $O(1)$ puede ser expresado como

$$\frac{\partial p_o^*}{\partial r^*} = \frac{M^3}{4\pi r^* \left(\tanh \frac{M}{2} - \frac{M}{2} \right)},$$

donde la presión está normalizada por $\eta Q/a^3$.

En la figura 3.2 se muestra que la velocidad disminuye con r^* y que el efecto principal de la fuerza magnética es aplanar el perfil de velocidad radial del flujo de Hartmann, incrementando el gradiente de velocidad cerca de las paredes. Este efecto llega a ser más pronunciado a medida que el número de Hartmann aumenta.

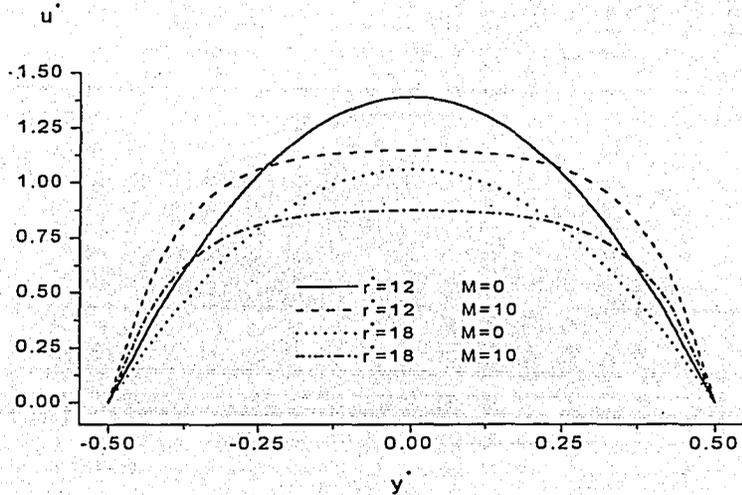


Figura 3.2: Perfil de velocidad para diferentes valores de M y r^* .

Densidad de corriente eléctrica y campo de temperatura

Una vez obtenido el campo de velocidad, resolvemos la ecuación de balance de energía considerando la disipación viscosa y óhmica. Nuevamente utilizamos condiciones de frontera de tercer tipo que indican que el gradiente de temperatura en la frontera se considera

proporcional a la diferencia entre la temperatura del fluido y la temperatura ambiente externa. Además, suponemos que la transferencia de calor por conducción en dirección radial es despreciable comparada con la transferencia de calor en dirección transversal. De la ley de Ohm, se tiene que la densidad de corriente eléctrica normalizada por $U\sqrt{\sigma\eta}/a$, está dada por

$$j_{\theta}^* = -Mu^*, \quad (3.10)$$

donde $u^*(r^*, y^*)$ está dada por la ecuación (3.9). Bajo estas aproximaciones, la ecuación de balance de energía (3.3), en forma adimensional, queda expresada como

$$P_e u^* \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{*2}} + 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{u^*}{r^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 u^{*2}, \quad (3.11)$$

donde $P_e = aU/\alpha$ es el número de Péclet el cual da una medida de la importancia de la convección del calor comparada con la difusión y $\alpha = k/\rho C_p$ es la difusividad térmica del fluido. Aquí, $\Theta = k(T - T_a)/\eta U^2$ es la temperatura adimensional con T y T_a representando las temperaturas del fluido y el ambiente, respectivamente.

La ecuación (3.11) debe satisfacer las condiciones de frontera

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y^*} + Bi_1 \Theta = 0, \quad \text{en } y^* = 0.5, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y^*} - Bi_2 \Theta = 0, \quad \text{en } y^* = -0.5, \quad (3.13)$$

donde, al igual que en el ejemplo anterior del flujo de Poiseuille, los números de Biot $Bi_1 = h_1 a/k$ y $Bi_2 = h_2 a/k$ son las expresiones adimensionales de los coeficientes constantes de transferencia de calor de las paredes superior e inferior, h_1 y h_2 , respectivamente, los que en general se consideran diferentes.

Para incluir los efectos convectivos de transferencia de calor en el flujo analizado, se propone la siguiente solución por el método de perturbaciones para el campo de temperatura, es decir,

$$\Theta(y^*, r^*) = \Theta_0(y^*, r^*) + P_e \Theta_1(y^*, r^*) + P_e^2 \Theta_2(y^*, r^*) + \dots, \quad (3.14)$$

donde se supone un número de Péclet pequeño, $P_e \ll 1$. En este trabajo, tomamos la solución hasta los dos primeros términos de la serie. Esto será suficiente para incluir todos

los efectos físicos importantes del problema.

Sustituyendo la ecuación (3.14) en la ecuación (4.6) y agrupando los términos del mismo orden, obtenemos para orden P_e^0

$$0 = \frac{\partial^2 \Theta_o}{\partial y^{*2}} + 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{u^*}{r^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 u^{*2}, \quad (3.15)$$

que debe satisfacer las condiciones de frontera $\frac{\partial \Theta_o}{\partial y^*} + Bi_1 \Theta_o = 0$ en $y^* = 0.5$ y $\frac{\partial \Theta_o}{\partial y^*} - Bi_2 \Theta_o = 0$ en $y^* = -0.5$. La solución puede ser expresada en la forma

$$\Theta_o(r^*, y^*) = \int \left\{ \int \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{u^*}{r^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 u^{*2} \right] dy^* \right\} dy^*. \quad (3.16)$$

Para orden P_e , tenemos la ecuación

$$u^* \frac{\partial \Theta_o}{\partial r^*} = \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^{*2}}, \quad (3.17)$$

que debe satisfacer las condiciones de frontera $\frac{\partial \Theta_1}{\partial y^*} + Bi_1 \Theta_1 = 0$ en $y^* = 0.5$ and $\frac{\partial \Theta_1}{\partial y^*} - Bi_2 \Theta_1 = 0$ en $y^* = -0.5$. La solución formal de la ecuación se puede expresar en la forma

$$\Theta_1(r^*, y^*) = \int \left[\int \left(u^* \frac{\partial \Theta_o}{\partial r^*} \right) dy^* \right] dy^*. \quad (3.18)$$

La figura 3.3 muestra el campo de temperatura para diferentes valores de M y Bi_2 , $r^* = 12$ y $Bi_1 = 1$. Al aumentar el coeficiente de transferencia de calor por convección de la pared inferior, Bi_2 , la transferencia de calor desde el sistema hacia el medio aumenta y por tanto la temperatura disminuye. Al aumentar M , el valor modular de la corriente eléctrica aumenta siendo mayor la disipación de Joule. Esto trae por consecuencia un aumento en la temperatura del fluido y en la producción de entropía, aunque este último efecto se verá más adelante.

En ambas ecuaciones (3.16) y (3.18) las constantes de integración son evaluadas usando las condiciones de frontera en las paredes superior e inferior. Es interesante notar que cuando las ecuaciones (3.9), (3.16) and (3.18) son evaluadas en el límite $M \rightarrow 0$, obtenemos los resultados correspondientes al caso puramente hidrodinámico. Los campos de velocidad y temperatura obtenidos en esta sección serán utilizados para la determinación de la producción de entropía.

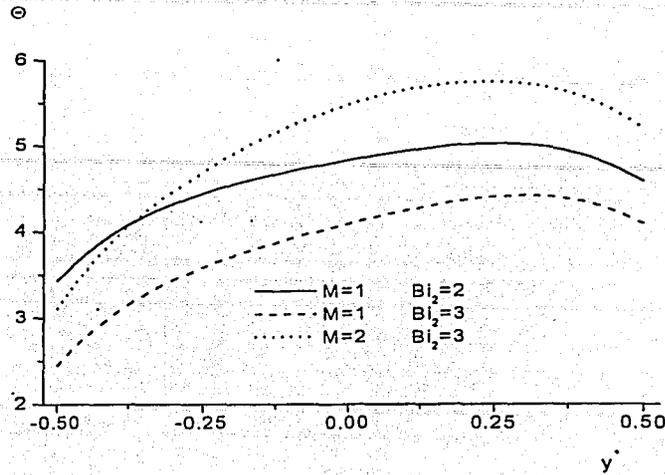


Figura 3.3: Perfil de temperatura para diferentes valores de M y Bi_2 , $r^* = 12$ y $Bi_1 = 1$.

3.2.4 Producción de entropía

Para el flujo de un fluido viscoso eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético, la producción de entropía debe considerar las irreversibilidades causadas por la fricción del fluido, el flujo de calor y la conducción eléctrica. Su forma explícita se puede obtener de las ecuaciones de balance del fluido y la entropía con las relaciones lineales constitutivas para los flujos de momento, calor y corriente eléctrica. En términos adimensionales, la producción local de entropía, \dot{S}^* , está dada por [11]

$$\dot{S}^* = \frac{1}{(\Theta + \Theta_a)^2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y^*} \right)^2 + \frac{1}{\Theta + \Theta_a} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{u^*}{r^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right\} + \frac{1}{\Theta + \Theta_a} j_{\theta}^{*2}, \quad (3.19)$$

donde \dot{S}^* está normalizada por k/a^2 y la temperatura ambiente adimensional está dada por $\Theta_a = kT_a/\eta U^2$. Nuevamente, los valores mayores de \dot{S}^* son obtenidos cerca de las

paredes. Evidentemente, al aumentar el número de Hartmann, la disipación aumenta. En este caso, para obtener la producción global de entropía, $\langle \dot{S}^* \rangle$, \dot{S}^* fue integrada desde $y^* = -0.5$ a $y^* = 0.5$ y desde $r^* = 5$ a $r^* = 20$. Aquí, se utiliza $\langle \dot{S}^* \rangle$, la que sólo depende de los parámetros adimensionales M , Bi_1 , Bi_2 , Θ_a y P_e , como criterio para optimizar el comportamiento del dispositivo. Puesto que la producción global de entropía considera toda la disipación producida por las irreversibilidades en el sistema, podemos obtener los valores de los parámetros M , Bi_1 , Bi_2 y P_e que minimizan la función $\langle \dot{S}^* \rangle$ para una Θ_a dada. Se trabaja con el valor de $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$, que se determinó considerando que el fluido de trabajo es mercurio líquido [33] a una temperatura ambiente constante de $T_a = 27^\circ C$. Este valor de Θ_a fue usado en todos los cálculos que se presentan para este problema.

En este ejemplo, los resultados obtenidos para el caso de intercambio de calor en forma simétrica se presentan en la figura 3.4. donde hemos graficado la diferencia entre la producción global de entropía y su valor en $Bi = 0$ ($\langle \dot{S}^* \rangle - \langle \dot{S}^* \rangle_{Bi=0}$) como función del número de Biot Bi para $M = 0$ y 2 , $P_e = 0$ y 0.05 , y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$. Todas las curvas están normalizadas con el valor de $\langle \dot{S}^* \rangle$ en $Bi = 0$. El comportamiento de las cuatro curvas es muy similar, se observa un aumento monótono de $\langle \dot{S}^* \rangle$ con una tendencia final a un valor asintótico que aumenta con el aumento de M y de P_e .

En las figuras 3.5 y 3.6 se muestran las curvas de la diferencia entre la producción global de entropía y su valor mínimo ($\langle \dot{S}^* \rangle - \langle \dot{S}^* \rangle_{\min}$), normalizadas por el valor de $\langle \dot{S}^* \rangle$ en $Bi_1 = 0$, como función de Bi_1 para $P_e = 0$ y 0.05 , respectivamente. En ambas figuras, se supone $M = 10$ (caso magnetohidrodinámico), $Bi_2 = 2, 4, 6$ y 10 , y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$. Al igual que ocurrió en el flujo de Poiseuille, no se observan valores mínimos de $\langle \dot{S}^* \rangle$ para todas las curvas. Por ejemplo, cuando $P_e = 0$, los valores mínimos de $\langle \dot{S}^* \rangle$ son observados para un valor de Bi_1 dado, si $Bi_2 > 2$ y cuando $P_e = 0.05$, los valores mínimos de $\langle \dot{S}^* \rangle$ son observados para todos los valores de Bi_2 . Además, al aumentar el valor de Bi_2 , el valor de Bi_1 , en el cual se observa el mínimo, aumenta. Se puede concluir, que al igual que en los dos ejemplos anteriores, en este problema las condiciones que minimizan $\langle \dot{S}^* \rangle$, se corresponden con las que minimizan las pérdidas de energía en el sistema y que una vez que los valores mínimos son alcanzados, $\langle \dot{S}^* \rangle$ muestra un aumento monótono con Bi_1 . Cuando el número de Biot disminuye, la transferencia de calor hacia los alrededores es menos eficiente y la temperatura del sistema aumenta.

Aunque las curvas de la producción global de entropía como función de Bi_1 no se

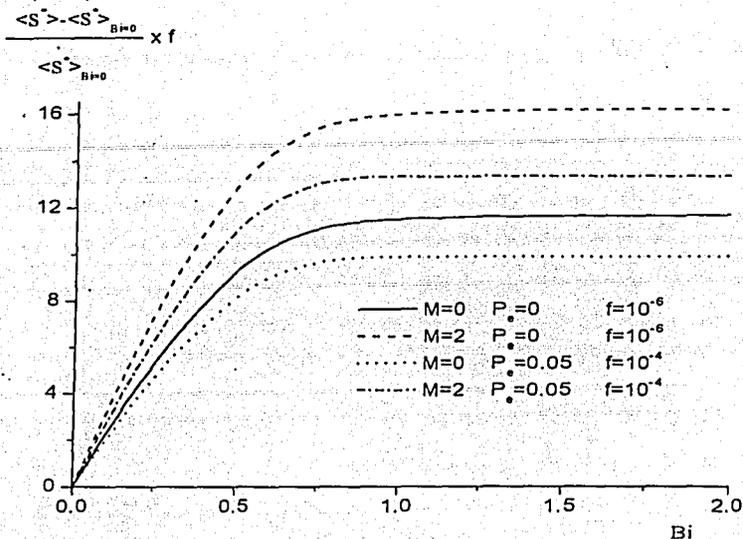


Figura 3.4: Valor normalizado de la diferencia entre la producción global de entropía y su valor en $Bi = 0$ como función del número de Biot Bi para $M = 0$ y 2 , $P_e = 0$ y 0.05 , y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$.

muestran para $M = 0$ (caso hidrodinámico), los comportamientos cualitativos de $\langle \dot{S}^* \rangle$ son similares a los mostrados en las figuras 3.5 y 3.6. La principal diferencia es que en el caso $M = 0$, no hay disipación de energía por conducción eléctrica y los valores de $\langle \dot{S}^* \rangle$ son más pequeños, comparados con los que corresponden a $M = 10$.

La figura 3.7 es un gráfico de $[(\langle \dot{S}^* \rangle - \langle \dot{S}^* \rangle_{\min}) / \langle \dot{S}^* \rangle_{Bi_1=0}]$ como función de Bi_1 para $M = 10$, diferentes valores de P_e ($0.1, 0.05, 0.01$ y 0), $Bi_2 = 50$, y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$. Se observa un comportamiento similar de $\langle \dot{S}^* \rangle$ para los cuatro valores de P_e con valores mínimos. Cuando P_e aumenta, los efectos convectivos de la transferencia de calor aumentan y los valores de la producción global de entropía son mayores. Una vez más, tal y como ocurrió en los problemas anteriores, los resultados indican que se puede lograr una disipación mínima, extrayendo calor en forma asimétrica, pero ahora este efecto

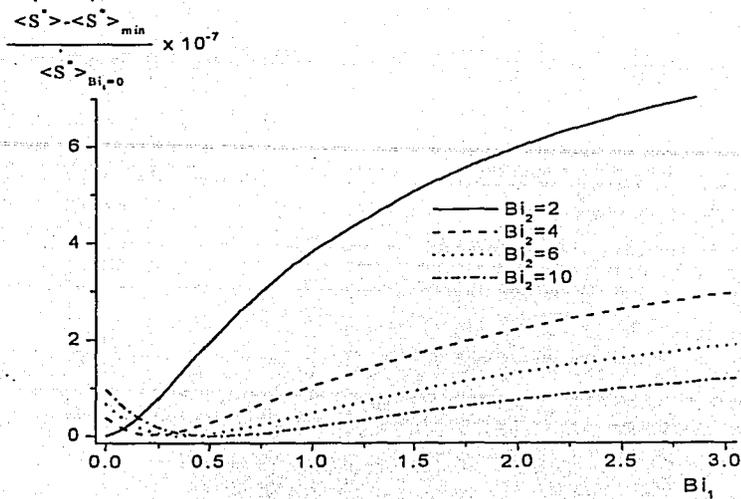


Figura 3.5: Valor normalizado de la diferencia entre la producción global de entropía y su valor mínimo como función de Bi_1 para $P_e = 0$, $M = 10$, diferentes valores de Bi_2 , y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$.

se observa tanto en el problema hidrodinámico como en el magnetohidrodinámico y además se consideran los efectos convectivos de transferencia de calor.

En la figura 3.8 se presenta el número de Biot óptimo de la superficie superior, $(Bi_1)_{opt}$, determinado numéricamente, como función del número de Biot de la superficie inferior, Bi_2 , $M = 0$ y 10 (casos hidrodinámico y magnetohidrodinámico, respectivamente), $P_e = 0$ y 0.05, y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$. El comportamiento observado en la figura indica que cuando el número de Péclet disminuye, mayor es la asimetría requerida en la transferencia de calor para lograr pérdidas irreversibles mínimas. Como era de esperar, no se encontraron valores mínimos de $\langle \dot{S}^* \rangle$ para $Bi_2 < 2$ cuando $P_e = 0$ (ver figura 3.5). Además, se observa que para valores grandes de P_e , mayor es la diferencia entre las curvas obtenidas para $M = 0$ y 10.

Ahora, definiremos un número de Nusselt promedio en la pared superior, basado en el

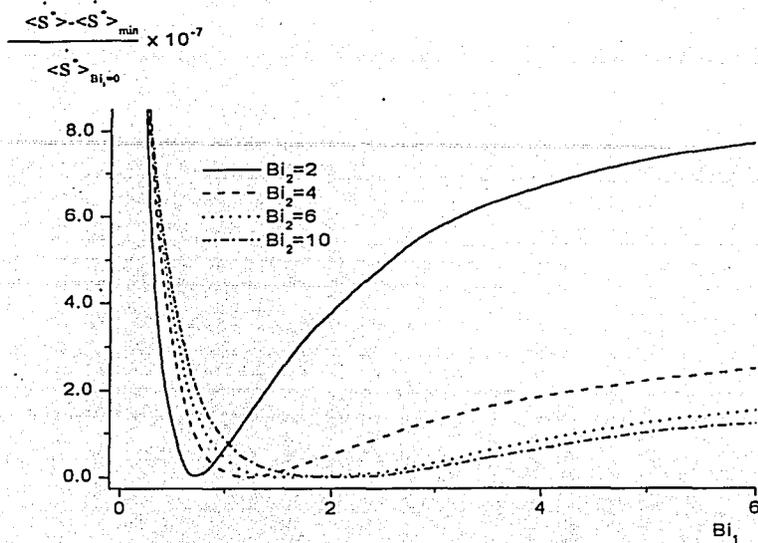


Figura 3.6: Valor normalizado de la diferencia entre la producción global de entropía y su valor mínimo como función de Bi_1 para $Pe = 0.05$, $M = 10$, diferentes valores de Bi_2 , y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$.

coeficiente interno promedio de transferencia de calor por convección, h_m , entre los radios r_1 y r_2 , es decir,

$$h_m = - \frac{\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r k (\partial T / \partial y)_{y=a/2} dr}{\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r (T_w - T_b) dr}, \quad (3.20)$$

donde T_b y T_w son, al igual que en el flujo de Poiseuille, las expresiones dimensionales de la temperatura de bulbo (temperatura promedio en la sección transversal al flujo) y de la temperatura en la pared, respectivamente. El número de Nusselt promedio en la pared superior estará dado por

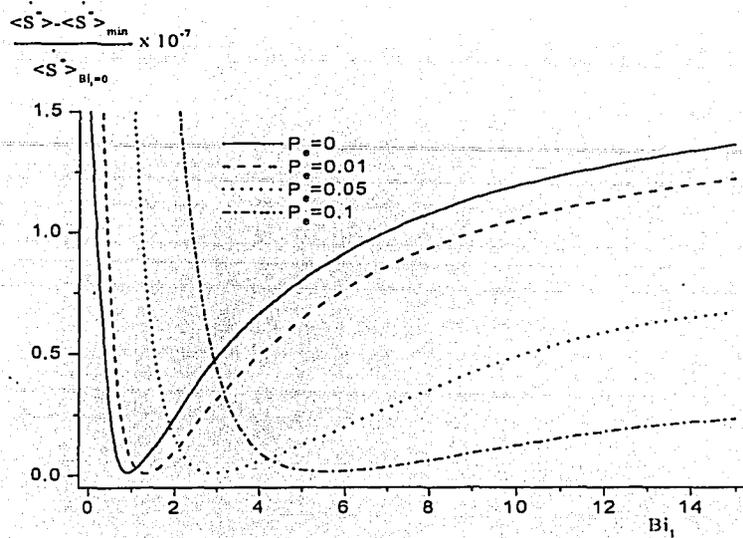


Figura 3.7: Valor normalizado de la diferencia entre la producción global de entropía y su valor mínimo como función de Bi_1 para $M = 10$, diferentes valores de P_c , $Bi_2 = 50$ y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$.

$$\begin{aligned}
 Nu_m &= \frac{h_m a}{2k} = - \frac{\int_{r_1^*}^{r_2^*} \left(\frac{d\Theta}{dy^*} \right)_{y^*=1/2} r^* dr^*}{2 \int_{r_1^*}^{r_2^*} (\Theta(y^*=1/2) + \Theta_a - \Theta_b) r^* dr^*} \\
 &= \frac{\int_{r_1^*}^{r_2^*} Bi_1 \Theta(y^*=1/2) r^* dr^*}{2 \int_{r_1^*}^{r_2^*} (\Theta(y^*=1/2) + \Theta_a - \Theta_b) r^* dr^*}, \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

donde la temperatura de bulbo adimensional se define como

$$\Theta_b = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} u^* (\Theta + \Theta_a) r^* dy^*}{\int_{-1/2}^{1/2} u^* r^* dy^*}.$$

La figura 3.9 muestra el número de Nusselt promedio (3.21) como función de M para cuatro valores de $Bi_1 = (Bi_1)_{opt}$. Los dos primeros valores de $(Bi_1)_{opt} = 0.6$ y 2.15 se

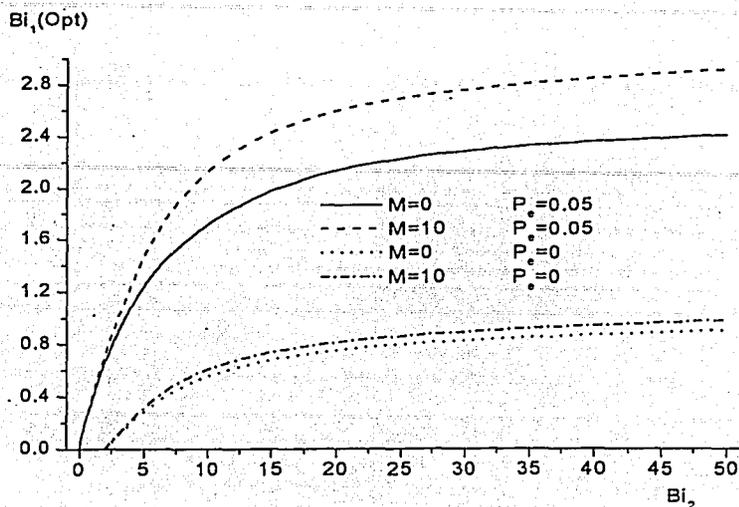


Figura 3.8: Número de Biot óptimo de la superficie superior, $(Bi_1)_{opt}$, como función de Bi_2 para $M = 0$ y 10 , $P_e = 0$ y 0.05 , y $\Theta_a = 8.32 \times 10^{12}$.

obtienen para $P_e = 0$ y 0.05 , respectivamente, cuando $Bi_2 = 10$, mientras que los otros dos valores de $(Bi_1)_{opt} = 0.98$ y 2.9 se obtienen para $P_e = 0$ y 0.05 , respectivamente, cuando $Bi_2 = 50$. El número de Nusselt promedio alcanza un valor máximo en todas las curvas, es decir, existe un valor óptimo del número de Hartmann, M_{opt} , donde la transferencia de calor es máxima, cuando fijamos los valores de $Bi_1 = (Bi_1)_{opt}$, Bi_2 , P_e y Θ_a . Una vez que el valor máximo se alcanza, Nu_m muestra una disminución monótona con M . Nótese, que el valor del número de Hartmann para el cual el número de Nusselt promedio alcanza el máximo (condiciones de máxima transferencia de calor) está bastante cercano al valor que tiene dicho número de Hartmann para producción de entropía mínima ($M = 10$). Al aumentar P_e , mayor es la diferencia entre el valor de M donde se alcanza una transferencia de calor máxima y el valor de M donde se alcanza una disipación mínima. Nótese, que cuando P_e aumenta a 0.05 la temperatura promedio en la sección transversal del flujo supera el valor de la temperatura de la pared y el flujo de calor se invierte (el calor sale

del sistema). En tales circunstancias, el número de Nusselt promedio pasa a ser negativo.

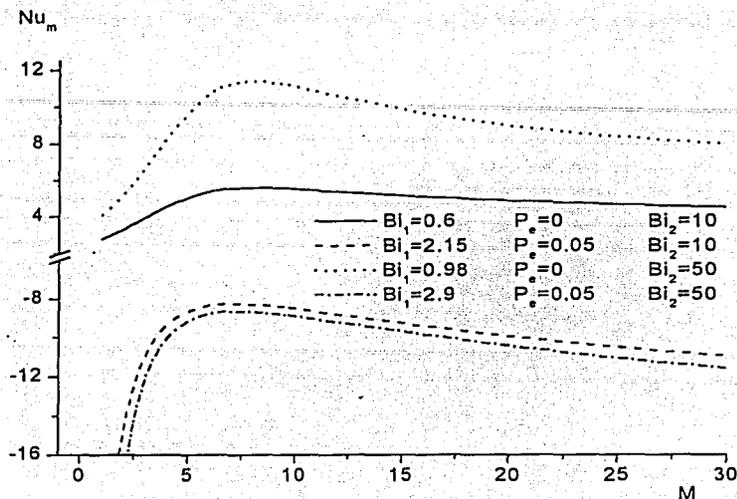


Figura 3.9: Número de Nusselt promedio como función de M para diferentes valores de $Bi_1 = (Bi_1)_{opt}$, que corresponden a diferentes combinaciones de $P_e = 0$ y 0.05 , y $Bi_2 = 10$ y 50 . (ver texto)

A continuación pasamos a realizar el análisis de un flujo magnetohidrodinámico entre planos paralelos infinitos con conductividad eléctrica finita.

3.3 Flujo de un fluido viscoso eléctricamente conductor entre planos paralelos de conductividad eléctrica finita.

3.3.1 Consideraciones básicas

El sistema que se analiza a pesar de tener una geometría muy similar a la del flujo ordinario de Poiseuille, con dos planos infinitos ubicados en $y = a$, el superior, y en $y = -a$,

el inferior, tiene una solución mucho más complicada. En este problema también se considera la presencia de un campo magnético externo, aplicado en la dirección normal a las paredes, pero ahora estas paredes son eléctricamente conductoras. Esto implica que las corrientes eléctricas pueden circular no sólo en el fluido sino también dentro de la pared. Una vez más, la suposición de planos infinitos separados una distancia $2a$ en dirección y , permite desprestigiar los efectos de borde y considerar que estamos en presencia de un flujo completamente desarrollado de manera que el problema es unidimensional y sólo existe una componente de la velocidad en dirección x que va a depender de la coordenada y . Con el fin de considerar la conductividad finita de las paredes, el campo magnético inducido en dirección axial por las corrientes eléctricas no se desprecia. Además de la geometría del sistema, lo que marca la diferencia con el problema anterior es precisamente el considerar paredes de conductividad eléctrica finita.

3.3.2 Campos de velocidad, densidad de corriente eléctrica y temperatura

Campos de velocidad y densidad de corriente eléctrica

Para obtener el perfil de velocidad del fluido y el campo magnético inducido, resolvemos las ecuaciones de balance de momento y de transporte del campo magnético, bajo las aproximaciones de la *MHD*. En este ejemplo, al considerar el campo magnético inducido, estas dos ecuaciones van a estar acopladas entre sí. Por tanto, se debe resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que ellas forman. Estas ecuaciones expresadas en forma adimensional, bajo las suposiciones hechas, son [31]

$$M \frac{\partial b}{\partial y^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} = -1, \quad (3.22)$$

$$M \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^{*2}} = 0, \quad (3.23)$$

con las condiciones de frontera

$$u^* = 0 \quad \text{en} \quad y^* = \pm 1, \quad (3.24)$$

$$\partial b / \partial y^* \pm b/c = 0 \quad \text{en} \quad y^* = \pm 1, \quad (3.25)$$

donde la velocidad u^* y la coordenada y^* están normalizadas, al igual que en el flujo ordinario de Poiseuille, por $U = -(a^2/\eta)(dp/dx)$ y el valor medio de la distancia entre los planos, a , respectivamente, mientras que el campo magnético inducido b está normalizado por $\mu U \sqrt{\sigma\eta}$. El parámetro adimensional $c = \sigma_w t_w / \sigma a$ toma en cuenta los efectos de la conductividad eléctrica y representa la relación entre las resistencias eléctricas de la pared y el fluido. Aquí, σ_w y σ son las conductividades eléctricas de la pared y el fluido, respectivamente, y t_w el espesor de la pared.

Las condiciones de frontera (3.25), que se usan para el campo magnético inducido, se obtienen con la suposición de que la pared es eléctricamente conductora y delgada [31].

Evaluando las condiciones de frontera (3.24) y (3.25) en el sistema de ecuaciones formado por (3.22) y (3.23), las soluciones que se obtienen para el campo de velocidad y el campo magnético inducido, son [31]

$$u^*(y^*) = \hat{u} \left(1 - \frac{\cosh My^*}{\cosh M} \right), \quad (3.26)$$

$$b(y^*) = \frac{\hat{u} \sinh My^*}{\cosh M} - \frac{y^*}{M}, \quad (3.27)$$

donde

$$\hat{u} = \frac{(1+c)}{M(cM + \tanh M)}.$$

Conocido el campo magnético inducido es posible, utilizando la ley de Ampere (3.5), determinar la densidad de corriente eléctrica que aparece en dirección z . Esta densidad de corriente, normalizada por $\sigma U B_0$, está dada por

$$j_z^*(y^*) = \frac{1}{M^2} - \hat{u} \frac{\cosh My^*}{\cosh M}. \quad (3.28)$$

En nuestro contexto, estamos particularmente interesados en la acción de la fuerza de Lorentz. Esta fuerza normalizada con el gradiente de presión, aparece aplicada en dirección x y su expresión adimensional toma la forma $F_l = -M^2 j_z^*$. De esto se deduce que cuando la corriente va en la dirección positiva de la coordenada z , produce una fuerza que se opone al movimiento del fluido, mientras que, cuando va en la dirección negativa de z produce una fuerza que favorece el movimiento del fluido.

En la figura 3.10 se puede apreciar el perfil de velocidad para diferentes valores de M y c . Cuando $c = 0$, paredes eléctricamente aislantes, la trayectoria de retorno de

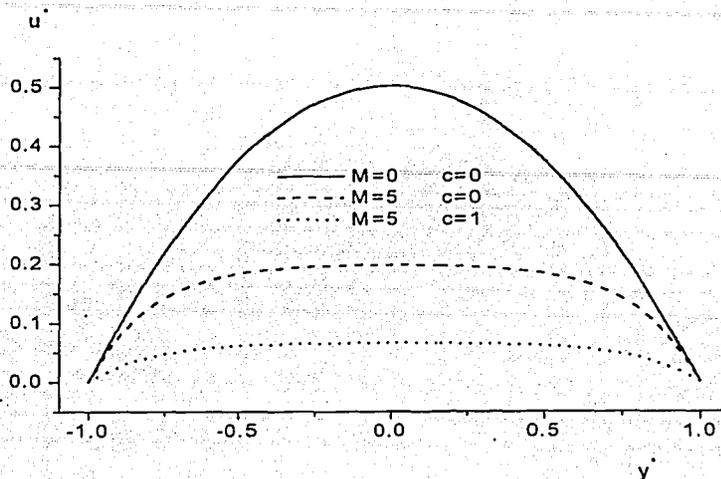


Figura 3.10: Perfil de velocidad para $M = 0$ y 5 , y $c = 0$ y 1 .

la corriente eléctrica inducida, en la dirección negativa del eje z , es a través del fluido, principalmente en las capas límite. Es decir, en este caso en el fluido existen corrientes positivas primordialmente en el núcleo y corrientes negativas que circulan a través de las capas límite. Por su parte, cuando las paredes son eléctricamente conductoras, de modo que c toma un valor distinto de cero, una parte de la corriente de retorno (que depende del valor de c) viajará a través de las paredes. Esto ocasiona que la corriente que circula en el núcleo sea mayor que la que circula en el caso de paredes aislantes. Por tanto, la fuerza de Lorentz que se opone al movimiento del fluido es mayor en el caso de paredes eléctricamente conductoras, lo que lleva a una reducción adicional en la velocidad. Esto quiere decir que para mantener el mismo flujo volumétrico que existe cuando las paredes son aislantes, se requiere un gradiente de presión mayor. Al igual que en el ejemplo anterior del flujo radial entre discos aislantes, un aumento de M lleva a una disminución de la velocidad y al aplanamiento del perfil. Sin embargo, cuando c es mayor que cero el gradiente de velocidad cerca de las paredes no aumenta con M sino que disminuye. Esto

implica que el calor generado por disipación viscosa será menor al del caso de paredes aislantes. Puede mostrarse [31] que en el límite $M \rightarrow 0$, el perfil de velocidades recupera la forma parabólica, $u^* = 0.5(1 - y^{*2})$, que corresponde al flujo de Poiseuille.

Campo de temperatura

Las expresiones de los campos de velocidad y densidad de corriente eléctrica, (3.26) y (3.28), respectivamente, son usadas para resolver la ecuación de balance de energía (3.3). Expresada en forma adimensional, esta ecuación en estado estacionario, considerando las fuentes de disipación óhmica y viscosa, y tomando únicamente en cuenta la conducción de calor en la dirección del campo magnético, es

$$0 = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{*2}} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 j_z^{*2}, \quad (3.29)$$

donde la temperatura adimensional Θ está normalizada de la misma forma que en el ejemplo anterior, es decir, $\Theta = k(T - T_a) / \eta U^2$.

La solución de la ecuación (3.29), evaluada otra vez para condiciones de frontera de tercer tipo con valores constantes pero diferentes de los números de Biot de las paredes superior e inferior, $Bi_1 = (h_{ef})_1 a / k$ y $Bi_2 = (h_{ef})_2 a / k$, respectivamente, es

$$\Theta = - \left(\frac{\hat{u}}{2 \cosh M} \right)^2 \cosh 2My^* + \frac{2\hat{u}}{M^2 \cosh M} \cosh My^* - \frac{1}{2M^2} y^{*2} + E_1 y^* + E_2, \quad (3.30)$$

donde

$$E_1 = \alpha \left(\frac{Bi_1 - Bi_2}{Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1 Bi_2} \right), \quad (3.31)$$

$$E_2 = -\alpha \left(\frac{Bi_1 + Bi_2 + 2}{Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1 Bi_2} \right) + \left(\frac{\hat{u}}{2 \cosh M} \right)^2 \cosh 2M + \frac{1}{2M^2} (1 - 4\hat{u}), \quad (3.32)$$

$$\alpha = -2M \sinh 2M \left(\frac{\hat{u}}{2 \cosh M} \right)^2 + \frac{2\hat{u}}{M} \tanh M - \frac{1}{M^2}. \quad (3.33)$$

Aquí, al igual que en el ejemplo del flujo de Poiseuille, $(h_{ef})_1$ y $(h_{ef})_2$ son los coeficientes efectivos de transferencia de calor por convección de las paredes superior e inferior, respectivamente.

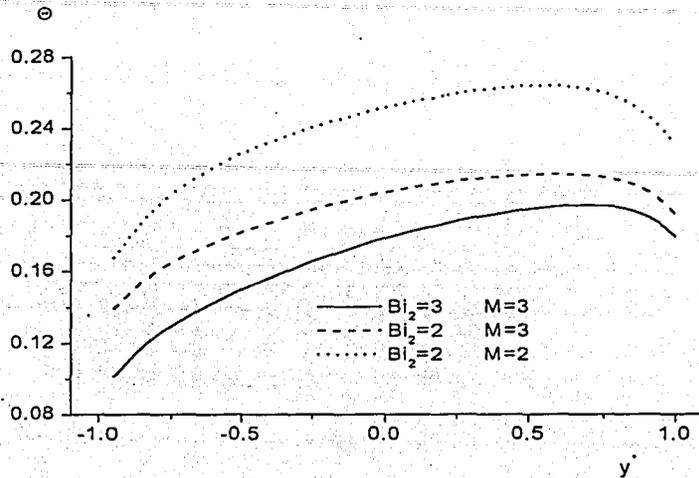


Figura 3.11: Perfil de temperatura para $M = 2$ y 3 , $Bi_2 = 2$ y 3 , $c = 0$ y $Bi_1 = 1$.

Las figuras 3.11 y 3.12 muestran el perfil de temperatura para diferentes valores de M y Bi_2 con $Bi_1 = 1$, cuando $c = 0$ y 0.1 , respectivamente. El comportamiento del perfil cuando varía Bi_2 es similar al del ejemplo del flujo radial, un aumento de Bi_2 trae por consecuencia un aumento en el flujo de calor hacia el exterior a través de la frontera lo que se manifiesta mediante una disminución general en la temperatura del fluido. En este caso, al aumentar M y c , el cuadrado del gradiente de velocidad disminuye en todo el rango de valores de la coordenada y (ver figura 3.10), incluyendo la región cercana a las paredes. Esto hace que el calor generado por disipación viscosa disminuya y como consecuencia la temperatura también disminuirá. Aquí, en determinado rango de valores de M y c el calor liberado por efecto Joule aumenta y tiende a incrementarse la temperatura, pero a pesar de este aumento, la disminución que se tiene del calor generado por disipación viscosa, para ese mismo rango de variación de M y c , predomina. Esto implica, que la suma del calor generado por disipación viscosa más el generado por efecto Joule siempre disminuye con M y c provocando que la temperatura del fluido también disminuya.

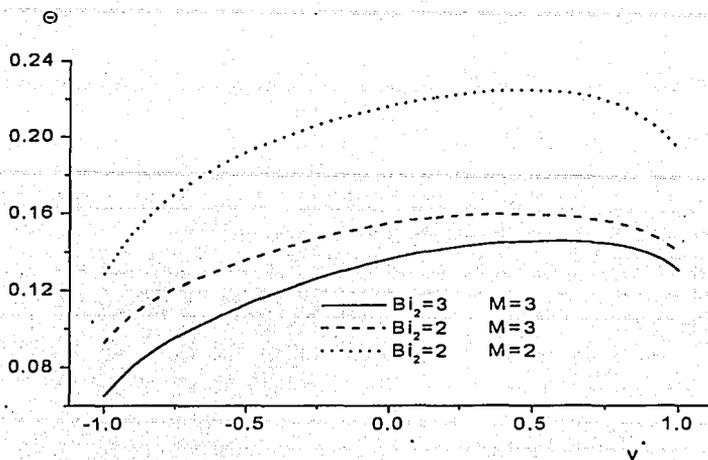


Figura 3.12: Perfil de temperatura para $M = 2$ y 3 , $Bi_2 = 2$ y 3 , $c = 0.1$ y $Bi_1 = 1$.

3.3.3 Producción de entropía

La producción local de entropía, \dot{S}^* , en términos adimensionales queda expresada como

$$\dot{S}^* = \frac{1}{(\Theta + \Theta_a)^2} \left(\frac{d\Theta}{dy^*} \right)^2 + \frac{1}{\Theta + \Theta_a} \left[\left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 + M^2 j_z^{*2} \right], \quad (3.34)$$

donde \dot{S}^* y Θ_a , de forma similar a ejemplos anteriores, están normalizadas por k/a^2 y $kT_a/\eta U^2$, respectivamente. En este caso, después de integrar \dot{S}^* desde $y^* = -1$ a $y^* = 1$, obtenemos una expresión explícita para la producción global de entropía, $\langle \dot{S}^* \rangle$, que, al igual que en el ejemplo anterior, estará en función de los parámetros adimensionales M , Bi_1 , Bi_2 y Θ_a , pero ahora en lugar del número de Péclet dependerá del parámetro c .

En la figura 3.13 se puede observar la variación de $\langle \dot{S}^* \rangle$ como función de M para diferentes valores de c , $Bi_1 = 1$, $Bi_2 = 6$ y $\Theta_a = 5$. El valor de Θ_a , no afecta el comportamiento cualitativo de $\langle \dot{S}^* \rangle$, y en este caso tomamos como valor representativo para los cálculos $\Theta_a = 5$. El aumento, tanto de c como de M , produce una disminución en $\langle \dot{S}^* \rangle$. Con el fin de comprender mejor los procesos disipativos involucrados en el sistema,

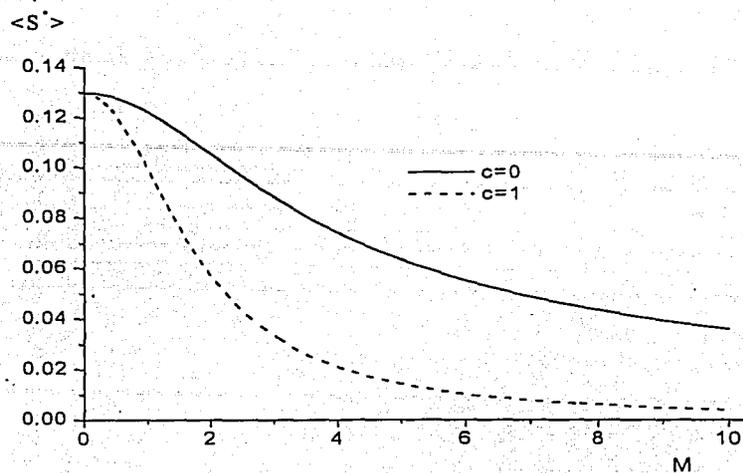


Figura 3.13: Variación de $\langle \dot{S}^* \rangle$ como función de M para diferentes valores de c , $Bi_1 = 1$, $Bi_2 = 6$ y $\Theta_n = 5$.

en las figuras 3.14, 3.15 y 3.16 se muestra el comportamiento de cada uno de los términos de la ecuación (3.34), asociados a la disipación por conducción de calor, a la disipación viscosa y a la disipación óhmica, como función de M y c , en los rangos $0 < M < 6$ y $0 < c < 4$. Cuando M y c aumentan, los términos asociados a la disipación por conducción de calor y a la disipación viscosa, siempre disminuyen. Esto puede observarse en las figuras 3.14 y 3.15. En estos dos términos, la disminución de los cuadrados del gradiente de temperatura y del gradiente de velocidad, predomina sobre la disminución de temperatura la que por aparecer de manera inversa llevaría a un aumento de la producción de entropía. El resultado neto es una disminución de la producción de entropía generada por ambas vías. Por otro lado, la variación respecto a M de la producción de entropía asociada a la disipación óhmica (tercer término del lado derecho de la ecuación (3.34)) muestra un comportamiento no monótono. Para todo valor de c , excepto valores muy cercanos a $c = 0$, dicho término aumenta con M , alcanza un máximo y disminuye uniformemente (ver figura 3.16). Respecto a c , muestra dos comportamientos distintos dependiendo del

número de Hartmann. Para valores pequeños de M , la producción de entropía asociada a la disipación óhmica primero disminuye con c y luego aumenta; para valores grandes de M , siempre disminuye al aumentar c . En el intervalo de valores de M y c donde este término disipativo aumenta, predomina la disminución de las otras dos fuentes de la producción de entropía, es decir, la de conducción de calor y la viscosa. En este ejemplo, el término que tiene mayor peso en el comportamiento de $\langle S^* \rangle$, es el asociado a la disipación viscosa. Aunque no se muestra en el gráfico, el efecto de Θ_a sobre $\langle S^* \rangle$, es provocar una disminución más brusca de sus valores y por consiguiente el valor asintótico se alcanzará más rápidamente, pero con un comportamiento cualitativo similar.

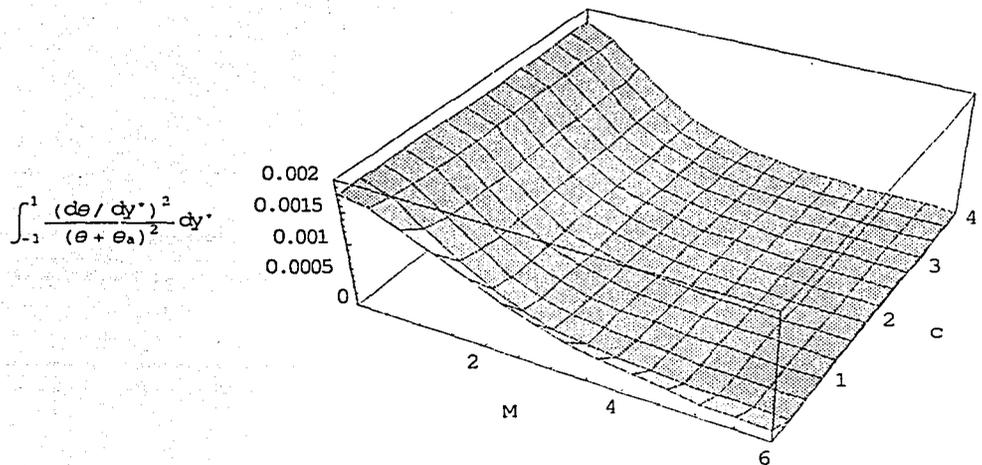


Figura 3.14: Disipación por conducción térmica como función de M y c , $Bi_1 = 1$, $Bi_2 = 6$ y $\Theta_a = 5$.

La variación de $\langle S^* \rangle$ como función de Bi_1 para diferentes valores de c y M es

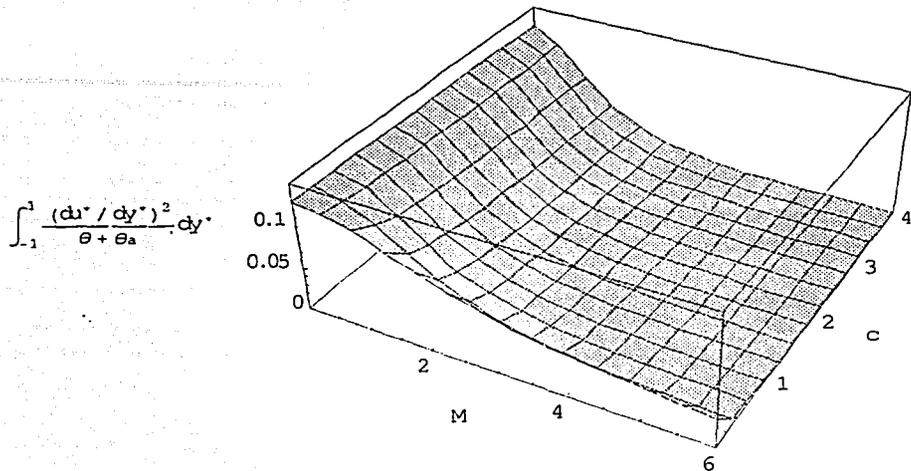


Figura 3.15: Disipación viscosa como función de M y c , $Bi_1 = 1$, $Bi_2 = 6$ y $\Theta_a = 5$.

mostrada en la figura 3.17 cuando $Bi_2 = 6$ y $\Theta_a = 5$. Se aprecian valores mínimos de $\langle \dot{S}^* \rangle$ en todos los casos. Aquí, al aumentar Bi_1 los términos asociados a la disipación viscosa y óhmica siempre aumentan debido a la disminución de la temperatura, pero el asociado a la disipación por conducción de calor, inicialmente disminuye y luego es que aumenta (el gradiente de temperatura disminuye al principio, predominando sobre la disminución de la temperatura, y luego a partir de determinado valor de Bi_1 es que comienza a aumentar). Esta disminución inicial del término asociado a la disipación por conducción de calor es la que predomina sobre las otras fuentes de disipación. Por tanto, para valores pequeños de Bi_1 , $\langle \dot{S}^* \rangle$ disminuye hasta alcanzar un valor mínimo después del cual comienza a aumentar. Aunque no se aprecia en el gráfico por estar normalizado, $\langle \dot{S}^* \rangle$ disminuye con c y M , tal y como se observó en la figura 3.13.

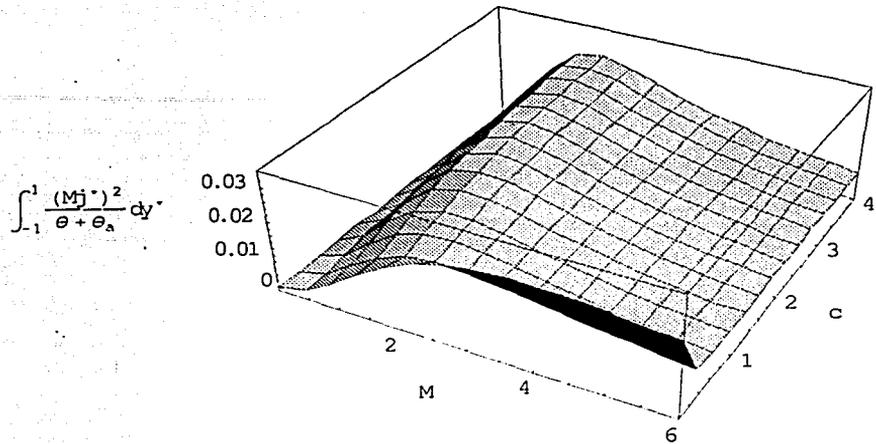


Figura 3.16: Disipación por conducción eléctrica como función de M y c , $Bi_1 = 1$, $Bi_2 = 6$ y $\Theta_a = 5$.

Además, es interesante hacer notar que en este caso para valores de $Bi_2 < 2$, tampoco se observan mínimos igual que en los otros ejemplos analizados que involucran el movimiento de fluidos [18, 19]. Esto es debido al hecho de que en estos valores pequeños de Bi_2 , va a predominar el aumento que existe de los términos asociados a las disipaciones viscosa y óhmica sobre la disminución inicial del término asociado a la disipación por conducción de calor. Retomando el caso del calentamiento del sólido, analizado en el capítulo anterior, nos podemos dar cuenta que en este problema, al existir sólo el término asociado a la disipación por conducción de calor, este último efecto que ocurre para valores pequeños de Bi_2 no estará presente; por tanto, existirán siempre valores mínimos para la producción global de entropía cuando el intercambio de calor se realice en forma asimétrica.

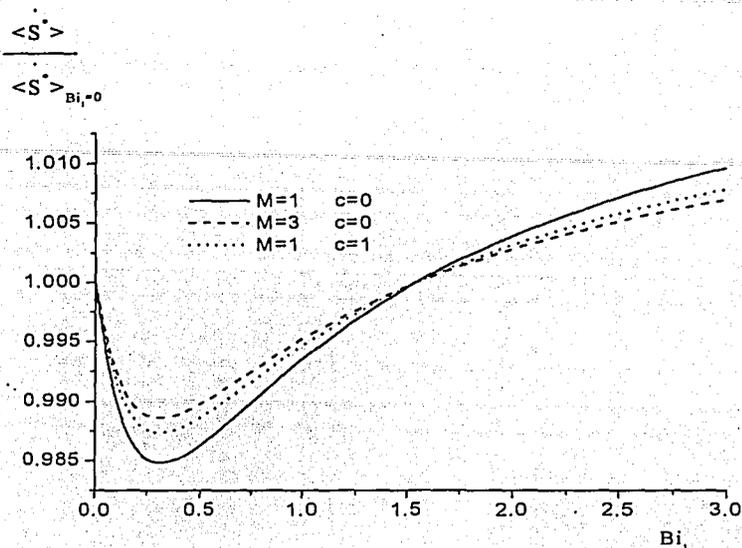


Figura 3.17: Variación de $\langle \dot{S}^* \rangle$ como función de Bi_1 para diferentes valores c y M , $Bi_2 = 6$ y $\Theta_a = 5$.

3.4 Conclusiones

En este capítulo, con el objetivo de realizar la optimización energética de flujos magnetohidrodinámicos, hemos estudiado dos problemas relacionados con el flujo de fluidos eléctricamente conductores a través de un ducto en presencia de un campo magnético. Primeramente, analizamos el flujo radial entre discos paralelos concéntricos eléctricamente aislantes donde consideramos los efectos convectivos en la transferencia de calor. Posteriormente, estudiamos el flujo viscoso entre dos planos paralelos infinitos con conductividad eléctrica finita.

Se procedió de manera similar al capítulo anterior. Primeramente, se obtuvo el comportamiento dinámico, térmico y electromagnético de estos flujos, para luego a partir de dichos comportamientos determinar la producción local y global de entropía en el sis-

tema. Aquí, a diferencia del capítulo anterior, se debe considerar la interacción del campo magnético con el fluido conductor, por tanto, resolveremos las ecuaciones de balance de la magnetohidrodinámica. Estas ecuaciones, no son más que las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos combinadas con las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, bajo la aproximación *MHD*. Una vez más, se comprobó que a pesar de las diferencias presentes en estos ejemplos respecto a los anteriores, el intercambio de calor en forma asimétrica proporciona condiciones óptimas de operación del sistema, es decir, condiciones de pérdida de energía mínima.

Los dos problemas analizados, además de tener cada uno una geometría distinta, se diferencian entre sí en que, por un lado, en el flujo radial se consideran los efectos convectivos en la transferencia de calor, además de los efectos difusivos que normalmente se tienen en cuenta; para ello se resuelve la ecuación de energía por el método de perturbaciones, suponiendo un número de Péclet pequeño. Por otro lado, en el flujo entre planos paralelos infinitos, consideramos la existencia del campo magnético inducido en dirección axial, lo que permite tomar en cuenta la conductividad eléctrica finita de las paredes.

Lo anterior conduce a que la expresión explícita que se obtiene de $\langle \dot{S}^* \rangle$, además de los parámetros adimensionales M , Bi_1 , Bi_2 y Θ_a que son comunes para los dos ejemplos, dependa de P_e en el caso del flujo radial entre discos y de c en el caso del flujo entre planos paralelos infinitos.

Es interesante notar también que en estos ejemplos la variación del número de Hartmann no conduce a las mismas consecuencias. En el caso del flujo radial entre discos aislantes, cuando M aumenta, la temperatura del fluido también aumenta al ser mayor el calor que se genera por disipación viscosa y por efecto Joule. Por otro lado, para el flujo entre planos infinitos conductores ocurre todo lo contrario al predominar la disminución que se presenta del calor generado por disipación viscosa. Esto también se ve reflejado en la producción de entropía.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 4

Análisis de optimización de un generador eléctrico alterno *MHD*

4.1 Introduction

Este capítulo tiene como objetivo aplicar el Método de Minimización de la Producción de Entropía en la optimización de un dispositivo de conversión de energía térmica en energía eléctrica. El sistema que se considera es lo que se conoce como un generador eléctrico alterno *MHD*. Este es un dispositivo que convierte el movimiento oscilatorio de un fluido eléctricamente conductor en potencia eléctrica a través de la interacción con un campo magnético constante, aplicado en dirección transversal al movimiento del fluido.

En nuestro caso, la justificación principal para estudiar un generador eléctrico alterno *MHD* está relacionada con la posibilidad de transformar potencia acústica en potencia eléctrica a través de un transductor termoacústico *MHD* de metal líquido [40]- [43], lo que resulta de interés puesto que recientemente se ha estudiado la factibilidad de acoplar una fuente solar a una máquina de este tipo [44]. Las máquinas termoacústicas tienen la ventaja de producir una gran cantidad de potencia mecánica a partir de calor con buena eficiencia y sin la utilización de ninguna parte o mecanismo móvil. El comportamiento de un transductor *MHD* ha sido estudiado experimentalmente y un modelo lineal simple se desarrolló para su análisis [42]. Aunque a partir de este análisis se determinó su eficiencia eléctrica, no se han considerado todas las irreversibilidades internas asociadas con la operación del generador. Aquí, analizamos el comportamiento dinámico y térmico de un generador eléctrico alterno *MHD* y determinamos las condiciones óptimas de

operación que minimizan las irreversibilidades asociadas al proceso. Suponemos la existencia de un gradiente de presión oscilatorio, producido a través del efecto termoacústico [41, 42]. Además, consideramos en el modelo condiciones físicas similares a las encontradas en los dispositivos termoacústicos y visualizamos el generador alterno (el transductor termoacústico) como una máquina de inducción que convierte energía mecánica (acústica) en energía eléctrica. Primeramente, se obtienen los campos de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica de un fluido eléctricamente conductor, sometido a un gradiente de presión oscilatorio y bajo los efectos de un campo magnético transversal. Este modelo simplificado corresponde al flujo oscilatorio de Hartmann. De este modelo, obtenemos expresiones para cantidades eléctricas que caracterizan el comportamiento del generador, particularmente, la eficiencia eléctrica isotrópica. A partir de los campos de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica, se calculan la producción local y global de entropía, que consideran las irreversibilidades causadas por la fricción del fluido, la disipación óhmica y el flujo de calor. De manera similar al análisis previo de dispositivos de inducción *MHD* ordinarios [9], se define una eficiencia de Segunda Ley basada en la producción global de entropía. Esta eficiencia es usada para obtener parámetros de diseño óptimos en condiciones de operación dadas, que minimizan las pérdidas de energía total producidas por las irreversibilidades en el generador *MHD* [45].

4.2 Modelo teórico del generador alterno *MHD*

4.2.1 Consideraciones básicas

Para modelar la operación de este dispositivo, consideramos el flujo oscilatorio de un fluido viscoso eléctricamente conductor, a través de un ducto de sección transversal rectangular en presencia de un campo magnético constante, aplicado en dirección transversal al flujo, $\mathbf{B} = B_0 \hat{y}$, donde B_0 es la intensidad del campo y \hat{y} es el vector unitario en la dirección y (ver figura 4.1). Las paredes normales a la dirección del campo están eléctricamente aisladas, mientras que las que están en dirección paralela a él, son paredes conductoras conectadas a un circuito eléctrico externo. Se supone que entre los extremos del ducto existe un gradiente de presión periódico, cuyo valor promedio es cero, que provoca un flujo oscilatorio

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

en la dirección axial x . El movimiento oscilatorio del fluido en el campo magnético aplicado induce una corriente eléctrica alterna en la dirección z , que puede ser extraída hacia el circuito eléctrico externo a través de los electrodos. De esta forma se puede obtener un trabajo eléctrico útil en una carga finita que se coloque en el circuito externo. La existencia de corrientes eléctricas circulando en el fluido, tal y como ya se mencionó, alteran el comportamiento dinámico y térmico del flujo. Por un lado, produciendo la fuerza de Lorentz que se opone al movimiento del fluido; y por el otro, provocando una disipación óhmica que tiende a incrementar la temperatura de dicho fluido.

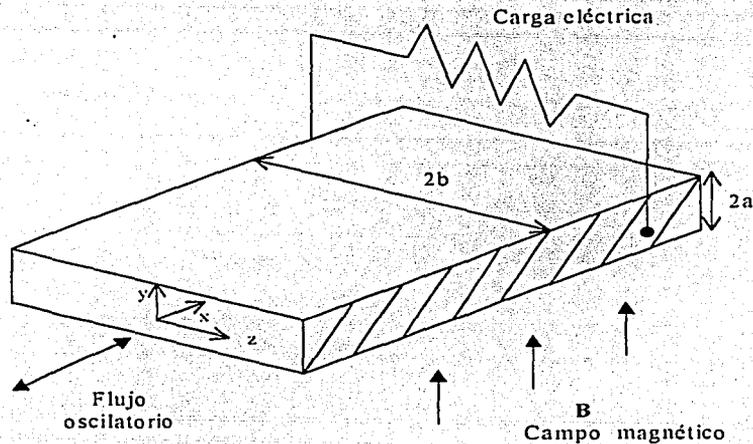


Figura 4.1: Esquema del generador alterno *MHD*.

En este problema, igual que en el ejemplo del flujo radial ya analizado, no se considera el campo magnético inducido y suponemos que $R_m \ll 1$. Para determinar el número de Reynolds magnético $R_m = \mu\sigma V_o l$, utilizamos una velocidad característica $V_o = p/\rho c$, donde p y c son la amplitud de la oscilación de presión y la velocidad del sonido en el líquido, respectivamente [40]. De los valores reportados para la impedancia acústica, ρc [42], y las presiones de operación de los dispositivos termoacústicos [41], se obtiene que el valor de R_m es mucho menor que uno. En consecuencia, encontramos que despreciar el campo magnético inducido en dirección axial es una aproximación razonable en nuestro modelo.

Para simplificar el análisis teórico, se supone que la distancia entre las paredes paralelas al campo $2b$ es mucho mayor que la distancia $2a$ que existe entre las paredes inferior y superior ($b \gg a$). Con esta aproximación se puede considerar que el flujo ocurre entre dos planos paralelos infinitos. Además se desprecian los efectos de borde, de manera que el flujo puede considerarse completamente desarrollado. En estas condiciones todas las variables dependen únicamente de la coordenada transversal y y el tiempo t , excepto la presión, que varía con x y t . Finalmente, suponemos que todos los coeficientes de transporte del fluido son constantes.

4.3 Campos de velocidad, densidad de corriente eléctrica y temperatura en el generador alterno *MHD*

Para obtener los campos de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica se parte de las ecuaciones fundamentales que gobiernan el flujo de un fluido conductor en presencia de un campo magnético, mostradas en los capítulos anteriores.

4.3.1 Campo de velocidad

Introduciendo la ley de Ohm (3.7) en la ecuación (3.2), y suponiendo un flujo unidireccional que sólo depende de la coordenada transversal y el tiempo, la ecuación de balance de momento se reduce a

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B_o (E_z + u B_o). \quad (4.1)$$

El gradiente de presión oscilatorio, que produce el movimiento, puede ser expresado como la parte real de $(\partial p / \partial x) = G e^{i\omega t}$, donde G es una constante. Suponemos que los campos de velocidad y eléctrico son funciones armónicas de t , por tanto, $\mathbf{u} = [u_o(y) e^{i\omega t}, 0, 0]$ y $\mathbf{E} = [0, 0, E_o e^{i\omega t}]$, donde E_o , es una constante. En todas las expresiones complejas, se sobreentiende que la parte real es la única que tiene significado físico. La solución de la ecuación (4.1) que satisface las condiciones de frontera de no deslizamiento, $u(\pm a) = 0$, es:

$$u(y, t) = u_o(y) e^{i\omega t} = \frac{a^2}{\lambda^2} \left(\frac{G}{\eta} + \frac{M}{a} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} E_o \right) \left(\frac{\cosh \lambda \frac{y}{a}}{\cosh \lambda} - 1 \right) e^{i\omega t}, \quad (4.2)$$

donde $\lambda = \alpha + i\beta$ con

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{M^4 + R_\omega^2} + M^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{M^4 + R_\omega^2} - M^2}{2}}.$$

Aquí M es el número de Hartmann, ya definido en el capítulo anterior, y $R_\omega = \omega a^2 \rho / \eta$ es el número de Reynolds oscilatorio, cuya raíz cuadrada compara la longitud característica con la distancia de penetración viscosa. La velocidad promedio del flujo en la sección transversal del ducto está dada por

$$U = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} u_o dy = \frac{a^2}{\lambda^2} \left(\frac{G}{\eta} + \frac{M}{a} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} E_o \right) \left(\frac{\tanh \lambda}{\lambda} - 1 \right). \quad (4.3)$$

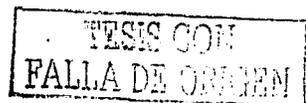
En términos de las variables adimensionales del problema $u^* = u/U$, $y^* = y/a$ y $t^* = \omega t$, la ecuación(4.2) se puede expresar como

$$u^*(y^*, t^*) = u_o^*(y^*) e^{it^*} = \lambda \left(\frac{\cosh \lambda - \cosh \lambda y^*}{\lambda \cosh \lambda - \sinh \lambda} \right) e^{it^*}. \quad (4.4)$$

De la ecuación (4.4), puede mostrarse que la parte real del campo de velocidad tiene una contribución que está en fase con el gradiente de presión y otra que está fuera de fase.

En la figura 4.2 se muestra la variación de u^* con la coordenada transversal, y^* , para $t^* = 0$ y diferentes valores de $M(0, 5)$ y $R_\omega(0, 100)$. Cuando $R_\omega = 0$, la solución se reduce al flujo ordinario de Hartmann mientras que, cuando $R_\omega = 0$ y $M = 0$, se reduce al flujo hidrodinámico de Poiseuille. El efecto principal de la fuerza magnética en el flujo es aplanar el perfil de velocidades, intensificando el gradiente de velocidad cerca de las paredes. Este efecto llega a ser más pronunciado a medida que el número de Hartmann es mayor. Un aumento de la frecuencia de oscilación (R_ω), también conduce a una intensificación del gradiente de velocidad cerca de las paredes. En el apéndice, expresamos los resultados en forma de ecuaciones canónicas integradas usadas por Swift [42].

El perfil de velocidad adimensional, u^* , como función del tiempo está dado en la figura 4.3 para $y^* = 0$ y diferentes valores de $M(0, 5)$ y $R_\omega = (0, 100)$. Todas las curvas muestran un comportamiento oscilatorio acorde con el gradiente de presión oscilatorio que produce el movimiento del fluido, y la amplitud de las oscilaciones disminuye tanto con M como con R_ω .



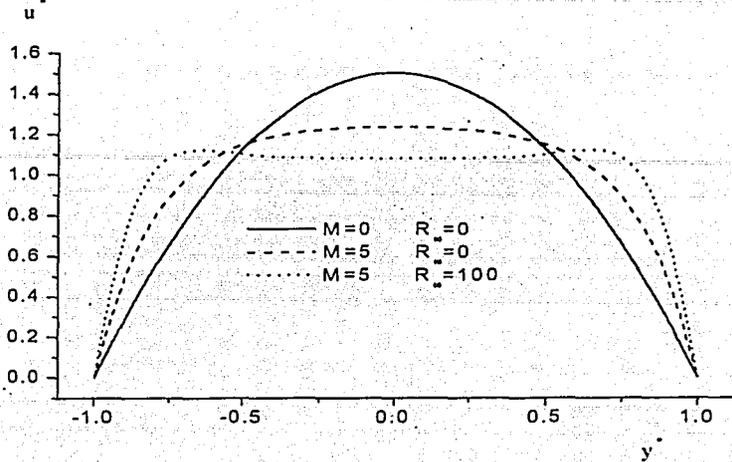


Figura 4.2: Perfil de velocidad adimensional del generador alterno *MHD* como función de y^* para $t^* = 0$ y diferentes números de Hartmann y Reynolds oscilatorios.

4.3.2 Densidad de corriente eléctrica y campo de temperatura

Una vez obtenido el campo de velocidad, se procede a resolver la ecuación de balance de energía suponiendo como condición de frontera un valor de temperatura constante en la pared. Evidentemente el comportamiento térmico del flujo, particularmente las irreversibilidades debidas al flujo de calor, dependen fuertemente de las condiciones de frontera. De la ley de Ohm se obtiene que la densidad de corriente eléctrica, normalizada por $U\sqrt{\eta\sigma}/a$, está dada por

$$j_z^* = M(u^* - E_z^*), \quad (4.5)$$

donde $E_z^* = E_z/UB_o$. En este ejemplo, el balance de energía (ecuación (3.3)) se reduce, en forma adimensional, a

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t^*} + \frac{R_e}{R_w} u^* \frac{\partial \Theta}{\partial x^*} = \frac{1}{Pr R_w} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{*2}} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] + \frac{M^2}{Pr R_w} (u^* - E_z^*)^2, \quad (4.6)$$

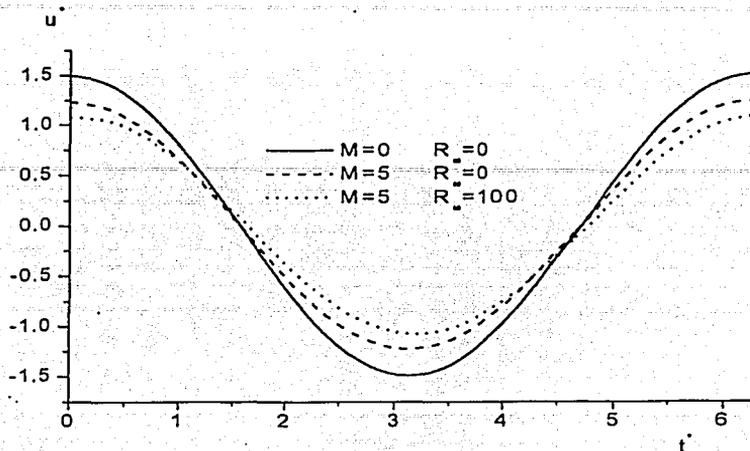


Figura 4.3: Velocidad adimensional del generador alterno *MHD* como función de t^* para $y^* = 0$ y diferentes números de Hartmann y Reynolds oscilatorios.

donde $Pr = \eta C_p / k$, es el número de Prandtl que representa la relación de difusión en el fluido de los efectos viscosos respecto a los efectos térmicos, $Re = Ua\rho/\eta$ es el número ordinario de Reynolds ya visto con anterioridad, y $\Theta = kT/\eta U^2$ es la temperatura adimensional.

En nuestras condiciones de operación, similares a las reportadas para los dispositivos termoacústicos [41, 42], se trabaja con valores grandes de R_w y M^2 , es decir, valores altos de la frecuencia de oscilación y de la intensidad del campo magnético al cuadrado; y con valores relativamente pequeños de los números ordinarios de Reynolds, Re , y Prandtl, Pr . Esto conduce, a que el cociente Re/R_w resulte mucho menor que uno, por tanto, el término convectivo, segundo término del lado izquierdo de la ecuación (4.6), puede ser despreciado al compararlo con otros términos de la ecuación. Con un buen grado de aproximación, no consideramos los efectos convectivos en la transferencia de calor y la solución de la ecuación de balance de energía se simplifica. Aunque aquí no se muestran los resultados, lo anterior está en correspondencia con un estudio que realizamos considerando el término convectivo de la ecuación de balance de energía, donde obtuvimos que para condiciones de operación,

operación, similares a las utilizadas en este ejemplo, el calor por convección en dirección axial es despreciable. En [46], donde se estudia el efecto del campo magnético sobre el transporte de calor a lo largo de una placa plana delgada e infinita que oscila dentro de un fluido viscoso eléctricamente conductor, también se concluye que al aumentar el número de Hartmann M , el flujo de calor por convección en dirección longitudinal se reduce debido a la desaceleración del fluido. Por último, suponemos que el gradiente de temperatura axial es mucho menor que el gradiente en dirección transversal. Bajo estas consideraciones la ecuación (4.6) toma la forma

$$\text{Pr } R_\omega \frac{\partial \Theta}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{*2}} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 (u^* - E_z^*)^2. \quad (4.7)$$

Aquí, las contribuciones de la disipación viscosa y óhmica involucran términos cuadráticos de funciones armónicas del tiempo. Consecuentemente, estas contribuciones contienen términos armónicos temporales con dos veces la frecuencia de oscilación, así como una contribución estacionaria. Debido a lo anterior, la solución de la ecuación (4.7) para la temperatura adimensional tiene la forma

$$\Theta(y^*, t^*) = \Theta_u(y^*)e^{2it^*} + \Theta_s(y^*), \quad (4.8)$$

donde los subíndices u y s se refieren a las contribuciones no estacionaria y estacionaria, respectivamente. Introduciendo la ecuación (4.8) en la ecuación (4.7), las ecuaciones que se satisfacen para Θ_u y Θ_s son

$$\frac{d^2 \Theta_u}{dy^{*2}} - 2i \text{Pr } R_\omega \Theta_u = - \left[\left(\frac{\partial u_o^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 (K - u_o^*)^2 \right]^{(u)}, \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2 \Theta_s}{dy^{*2}} = - \left[\left(\frac{\partial u_o^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 (K - u_o^*)^2 \right]^{(s)}, \quad (4.10)$$

donde los supraíndices (u) y (s) denotan las partes no estacionaria y estacionaria, respectivamente. El parámetro $K = E_o/UB_o$ es el factor de carga que depende de las condiciones del circuito eléctrico externo. Para un generador eléctrico con una resistencia de carga dada, K varía desde cero (condición de corto-circuito) hasta uno (condición de circuito abierto). Las ecuaciones (4.9) y (4.10) deben satisfacer, respectivamente, las condiciones de frontera

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\Theta_u = 0, \text{ en } y^* = \pm 1, \quad (4.11)$$

$$\Theta_s = \Theta_w \text{ en } y^* = \pm 1, \quad (4.12)$$

donde $\Theta_w = kT_w/\mu U^2$, y T_w es la temperatura dimensional de la pared. La solución de la ecuación (4.9) con las condiciones de frontera (4.11) es

$$\Theta_u(y^*) = \frac{1}{8A^2} \left\{ F_1 \left(1 - \frac{\cosh \gamma y^*}{\cosh \gamma} \right) + F_2 \left(\cosh \lambda y^* - \frac{\cosh \lambda \cosh \gamma y^*}{\cosh \gamma} \right) + F_3 \left(\cosh 2\lambda y^* - \frac{\cosh 2\lambda \cosh \gamma y^*}{\cosh \gamma} \right) \right\}, \quad (4.13)$$

donde $\gamma = \sqrt{PrR_w}(1+i)$. La solución para la temperatura estacionaria que satisface las condiciones (4.12) es

$$\Theta_s(y^*) = \frac{1}{AA} \{ F_4 (\cosh 2\alpha - \cosh 2\alpha y^*) + F_5 (\cos 2\beta - \cos 2\beta y^*) + F_6 (1 - y^{*2}) + (F_7 \alpha + F_8 \beta) (\sinh \alpha \sin \beta - \sinh \alpha y^* \sin \beta y^*) - (F_7 \beta - F_8 \alpha) (\cosh \alpha \cos \beta - \cosh \alpha y^* \cos \beta y^*) \} + \Theta_w. \quad (4.14)$$

Los parámetros A y F_1 a F_8 están definidos como:

$$A = \frac{\lambda \cosh \lambda - \sinh \lambda}{\lambda},$$

$$F_1 = \frac{i}{PrR_w} \left[\lambda^2 - 2M^2 \left(\frac{1}{2} + (\cosh \lambda - KA)^2 \right) \right],$$

$$F_2 = \frac{8M^2(\cosh \lambda - KA)}{\lambda^4 + 4(PrR_w)^2} [\lambda^2 + 2iPrR_w],$$

$$F_3 = -\frac{\lambda^2 + M^2}{4\lambda^4 + (PrR_w)^2} [2\lambda^2 + iPrR_w],$$

$$F_4 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + M^2}{16\alpha^2}, \quad F_5 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - M^2}{16\beta^2},$$

$$F_6 = \frac{M^2}{8} [\cosh 2\alpha + \cos 2\beta + 2A\bar{A}K^2 + 4K(c_1 + c_2)],$$

$$F_7 = \frac{\alpha c_3 + \beta c_4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad F_8 = \frac{\alpha c_4 - \beta c_3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2},$$

donde

$$c_1 = \frac{\cosh \alpha \cos \beta}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sinh \alpha \cos \beta + \beta \cosh \alpha \sin \beta) - \cosh^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

$$c_2 = \frac{\sinh \alpha \sin \beta}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cosh \alpha \sin \beta - \beta \sinh \alpha \cos \beta) - \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta,$$

$$c_3 = M^2(K - 1) \sinh \alpha \sin \beta - \frac{KM^2}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cosh \alpha \sin \beta - \beta \sinh \alpha \cos \beta),$$

$$c_4 = M^2(K - 1) \cosh \alpha \cos \beta - \frac{KM^2}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sinh \alpha \cos \beta + \beta \cosh \alpha \sin \beta).$$

El valor de $\Theta_w = 1.92 \times 10^6$ fue determinado usando las condiciones de operación reportadas para una máquina termoacústica, que trabaja con sodio líquido a una temperatura de 130°C [42]. Este valor de Θ_w es usado en todos los cálculos que se realizaron para el generador alterno *MHD*.

En la figura 4.4 se muestra la variación del perfil de temperatura adimensional con y^* para diferentes valores de M y R_w en $t^* = 0$, $Pr = 0.01$ y $K = 0.5$. El valor $K = 0.5$ corresponde a condiciones de potencia eléctrica máxima. Se puede apreciar que con el aumento de M el perfil de temperatura aumenta ya que aumenta el calor generado tanto por disipación óhmica como viscosa. Al aumentar R_w , por un lado, la temperatura en la parte central del ducto disminuye; y por el otro, el gradiente de temperatura cerca de las paredes, igual que ocurre con el gradiente de velocidad, se intensifica. En este caso lo que ocurre es que el calor generado por disipación viscosa, en esa zona cercana a las paredes, aumenta. Esto juega un papel importante en la transferencia de calor que ocurre en dirección transversal.

En la figura 4.5 se muestra la variación de la temperatura adimensional con el tiempo para diferentes valores de M y R_w en $y^* = 0$, $Pr = 0.01$ y $K = 0.5$. El comportamiento periódico de la velocidad del fluido provoca que también se obtengan perfiles de temperatura

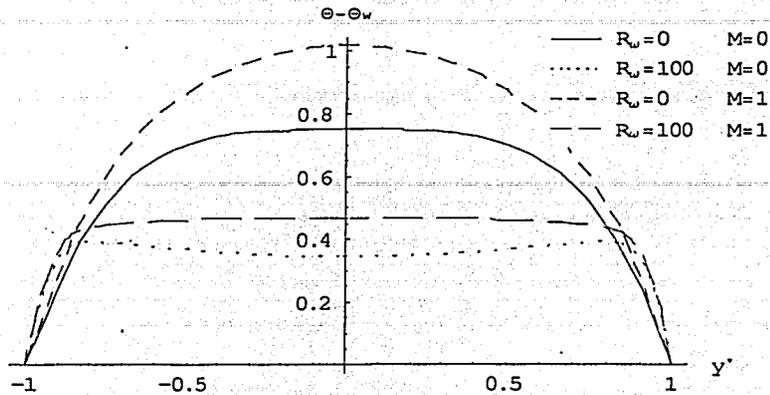


Figura 4.4: Perfil de temperatura adimensional del generador alterno *MHD* como función de y^* para diferentes números de Hartmann y Reynolds oscilatorio, $t^* = 0$, $Pr = 0.01$ y $K = 0.5$.

oscilatorios en el tiempo además de un perfil estacionario. Se puede apreciar que el efecto fundamental del número de Hartmann es aumentar los valores de temperatura y el del Reynolds oscilatorio disminuirlos acorde con la figura 4.4 en $y^* = 0$.

Los campos de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica serán usados para la determinación de la producción de entropía del generador eléctrico alterno *MHD*, pero primeramente determinaremos la eficiencia eléctrica isotrópica del generador.

4.4 Eficiencia eléctrica isotrópica del generador alterno *MHD*

La eficiencia es de importancia fundamental para el diseño de un generador *MHD*. Comúnmente, la eficiencia eléctrica isotrópica se define como la relación entre la potencia eléctrica, P_e , y la potencia de flujo, P_f , integrada sobre el volumen total V del canal *MHD* [34]. En el caso de un generador alterno *MHD*, también debe realizarse la integración temporal sobre un período de tiempo, τ , (o un número entero de períodos), quedando,

$$\eta_e = \frac{P_e}{P_f} = \frac{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV}{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV} \quad (4.15)$$

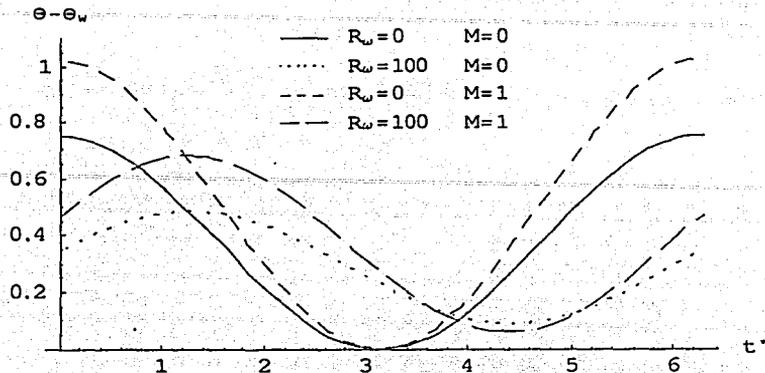


Figura 4.5: Temperatura adimensional del generador alterno *MHD* como función de t^* para diferentes números de Hartmann y Reynolds oscilatorio, $y^* = 0$, $Pr = 0.01$ y $K = 0.5$.

El término $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ en el sistema de referencia de laboratorio es igual a la suma de la disipación de Joule y el trabajo hecho contra la fuerza de Lorentz que se opone al movimiento del fluido ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$). Por tanto, η_e da la fracción del trabajo mecánico hecho por el fluido para vencer la fuerza magnética que es convertido en potencia eléctrica útil. La ecuación (4.15) implica integración sobre todo el volumen V ; por lo tanto, la eficiencia eléctrica sólo depende de los parámetros K , M y R_w . Puesto que los términos $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ y $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$ contienen productos de funciones armónicas del tiempo, existirá una contribución armónica temporal y una parte estacionaria. La primera desaparece después de integrar en el tiempo, mientras que la última da un valor distinto de cero.

En la figura 4.6 se muestra la variación de la potencia eléctrica total como función de K para $R_w = 1.37 \times 10^6$ y diferentes números de Hartmann. Para los tres valores de M , la potencia de salida alcanza su valor máximo en $K = 0.5$. Cuando $K = 0$ y 1 la potencia es cero. Este comportamiento se debe a que cuando $K = 0$, existe un flujo de los electrones sin restricción en el circuito eléctrico externo, entonces no se presenta ninguna distribución estática de cargas, y el campo electrostático es cero. Si nos vamos al otro extremo, $K = 1$, el paso de los electrones se restringe hasta que el sistema se comporta como un circuito abierto, y la corriente neta es cero. Un aumento de M provoca un aumento de la corriente eléctrica y por tanto de la potencia eléctrica que entrega el generador *MHD*.

En la figura 4.7, se muestra la eficiencia eléctrica isotrópica (4.15) como función de

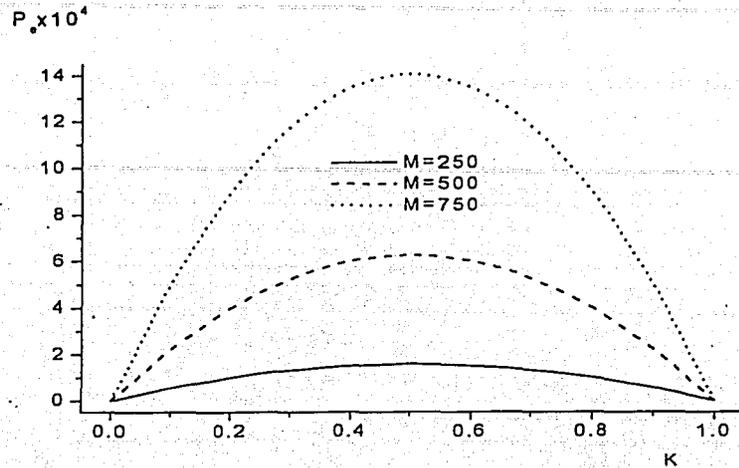


Figura 4.6: Potencia eléctrica del generador alterno *MHD* como función de K para $R_\omega = 1.37 \times 10^6$ y diferentes números de Hartmann.

R_ω para condiciones de potencia eléctrica total máxima, es decir, $K = 0.5$, y diferentes números de Hartmann (250, 500, 750, 1500). Particularmente, el valor $M = 1500$ es muy similar a las condiciones experimentales analizadas por Swift en su transductor MHD de sodio líquido [42]. La escala está amplificada en el eje de las ordenadas para observar los pequeños cambios de η_e que tienen lugar desde $R_\omega = 10^4$ a $R_\omega = 10^8$. El comportamiento de las cuatro curvas es muy similar, tendiendo la eficiencia η_e a un valor asintótico de 0.5 para valores de R_ω mayores que 10^8 , a pesar de que para valores menores de R_ω la diferencia entre las eficiencias es despreciable. En realidad, este comportamiento es típico de un generador ideal MHD para números grandes de Hartmann donde la eficiencia eléctrica tiende al valor del factor de carga, $\eta_e \rightarrow K$ [34]. Esto también se observa en la figura 4.8, donde η_e escalado por K se grafica contra el número de Hartmann para diferentes condiciones del factor de carga y $R_\omega = 1.37 \times 10^6$.

La figura 4.9 muestra η_e contra el factor de carga para los cuatro valores del número de Hartmann y $R_\omega = 1.37 \times 10^6$. Para todos los valores grandes analizados del número de

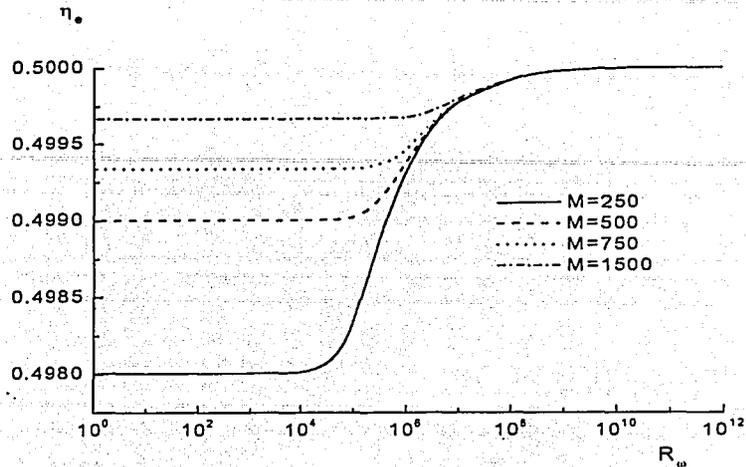


Figura 4.7: Eficiencia eléctrica del generador alterno *MHD* como función de R_ω para condición de potencia de salida máxima ($K = 0.5$) y diferentes números de Hartmann.

Hartmann, la eficiencia eléctrica es prácticamente la misma, aumentando linealmente con K .

4.5 Producción de entropía y eficiencia global de Segunda Ley del generador alterno *MHD*

4.5.1 Producción de entropía

La producción de entropía para el flujo de un fluido monocomponente, viscoso y eléctricamente conductor inmerso en un campo magnético, debe considerar las irreversibilidades causadas por la fricción del fluido, la conducción eléctrica y el flujo de calor. Su forma explícita se obtiene de las ecuaciones de balance del fluido y la entropía, utilizando relaciones lineales constitutivas para los flujos de momento, corriente eléctrica y calor, como se mostró en el capítulo 1. En forma adimensional, la producción local de entropía, \dot{S}^* ,

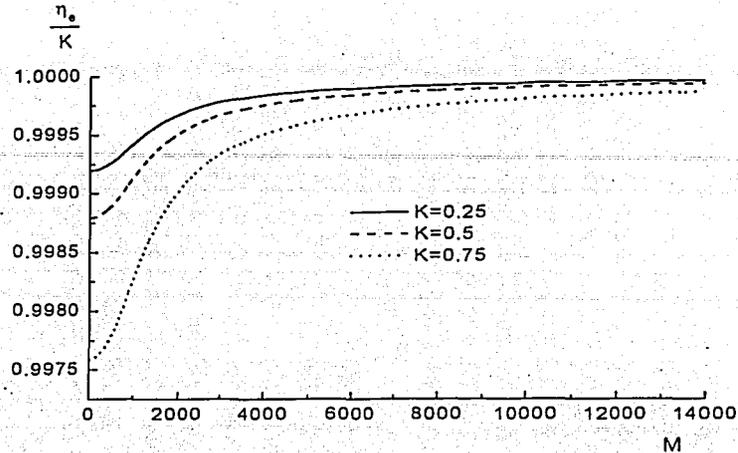


Figura 4.8: Eficiencia eléctrica del generador alterno *MHD* como función de M para diferentes factores de carga. $R_\omega = 1.37 \times 10^6$.

está dada por [9, 11]

$$\dot{S}^* = \frac{1}{\Theta^2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y^*} \right)^2 + \frac{1}{\Theta} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + \frac{1}{\Theta} j_z^2, \quad (4.16)$$

donde \dot{S}^* está normalizada por k/a^2 y es una función del espacio y el tiempo, que contiene una parte armónica temporal y una parte estacionaria. Después de integrar en el tiempo para un número entero de períodos, sólo la última da una contribución neta. Aunque aquí no se muestra explícitamente, es interesante mencionar que la parte estacionaria de \dot{S}^* debida a la conducción de calor (primer término de la parte derecha en la ecuación (4.16)), toma en cuenta las contribuciones de las temperaturas estacionaria y no estacionaria, $\Theta_s(y)$ y $\Theta_u(y)$, respectivamente. La producción de entropía local integrada en el tiempo como una función de y^* para el generador alterno *MHD*, es cualitativamente similar a la calculada para un generador estacionario *MHD* [9]. Los valores más altos de \dot{S}^* se obtienen cerca de las paredes, región en la que la disipación es más fuerte. Evidentemente, mientras mayor es el número de Hartmann más fuerte es la disipación.

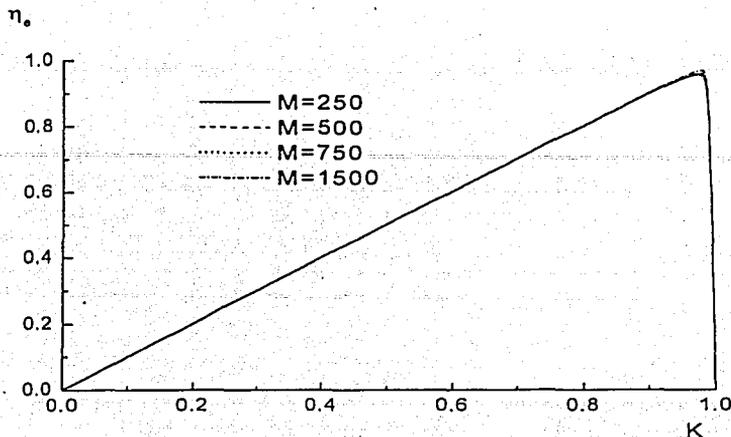


Figura 4.9: Eficiencia eléctrica del generador alterno *MHD* como función de K para diferentes números de Hartmann. $R_w = 1.37 \times 10^6$.

La figura 4.10 muestra la producción global de entropía promediada en el tiempo, $\langle\langle \dot{S}^* \rangle\rangle$, normalizada usando su valor en $R_w = 0$, como función de R_w , para diferentes números de Hartmann en las condiciones de potencia de salida máxima ($K = 0.5$) y $\Theta_w = 1.92 \times 10^6$. El símbolo $\langle\langle \rangle\rangle$ denota integración sobre todo el volumen del ducto *MHD*, e integración sobre un período de oscilación. Para $M = 250$ y 500 , se observan valores mínimos de $\langle\langle \dot{S}^* \rangle\rangle$ en $R_w = 4 \times 10^3$ y 1.4×10^4 , respectivamente. Aunque no se muestra en la figura, la misma tendencia se obtiene también para números de Hartmann de $M = 750$ y 1500 , donde se encuentra un mínimo para valores de R_w , alrededor de $R_w = 1.4 \times 10^6$. Una vez, alcanzados los valores mínimos, $\langle\langle \dot{S}^* \rangle\rangle$ exhibe un aumento monótono conforme R_w aumenta. Las condiciones que minimizan $\langle\langle \dot{S}^* \rangle\rangle$ corresponden a aquellas que minimizan las pérdidas de energía en el generador alterno *MHD*. El comportamiento mostrado aquí se refleja en la eficiencia de Segunda Ley que se definirá posteriormente.

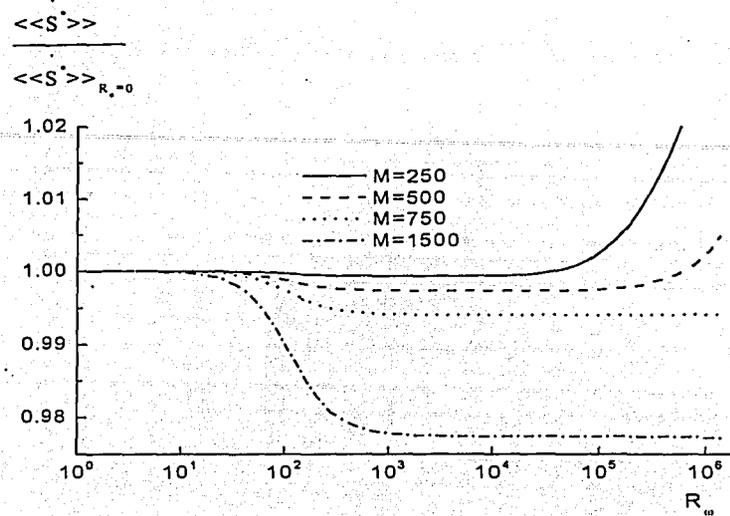


Figura 4.10: Producción global de entropía, normalizada por su valor en $R_w = 0$, como función de R_w para diferentes números de Hartmann. $K = 0.5$, $\Theta_w = 1.92 \times 10^6$.

4.5.2 Eficiencia global de Segunda Ley

La maximización de la eficiencia eléctrica isotrópica (4.15) es uno de los criterios más comunes usados para optimizar el comportamiento de los generadores *MHD*. Sin embargo, ésta no considera las irreversibilidades debidas a la fricción y al flujo de calor. De hecho, η_e sólo toma en cuenta la pérdida de energía causada por la disipación de Joule. Se puede definir una eficiencia total generalizada de tal forma que considere no sólo la cantidad de energía mecánica necesaria para vencer la fuerza magnética, sino también la fuerza de fricción así como la cantidad de energía térmica introducida al sistema por las fronteras y que, además de la disipación de Joule, incluya las pérdidas de energía debidas a disipación viscosa y flujo de calor. Así pues, la eficiencia total o global de un generador alterno *MHD* en términos de la generación de entropía puede definirse como

$$\eta_s = 1 - \frac{\langle\langle \Theta \dot{S}^* \rangle\rangle}{\langle\langle \dot{W}^* \rangle\rangle}, \quad (4.17)$$

donde \dot{W}^* es la cantidad de trabajo neto transferido al sistema, que comprende el trabajo mecánico hecho para vencer las fuerzas de Lorentz y de fricción, así como el flujo de calor debido a la diferencia entre la temperatura de las paredes y la temperatura del fluido. La eficiencia global (4.17) considera toda la disipación producida por irreversibilidades en el sistema. Puede ser utilizada para optimizar la operación del generador alterno *MHD*, estableciendo los valores de los parámetros M , R_w y K que maximizan la función η_s para un valor dado de Θ_w , que en nuestro caso se ha fijado como $\Theta_w = 1.92 \times 10^6$.

En la figura 4.11 se grafica η_s como función de K para $R_w = 1.37 \times 10^6$ y diferentes valores de M . Para los cuatro valores de M , se observa un aumento monótono de η_s en un amplio rango de valores de K con una disminución final que conduce a valores máximos localizados muy cerca de la condición de circuito abierto ($K = 1$).

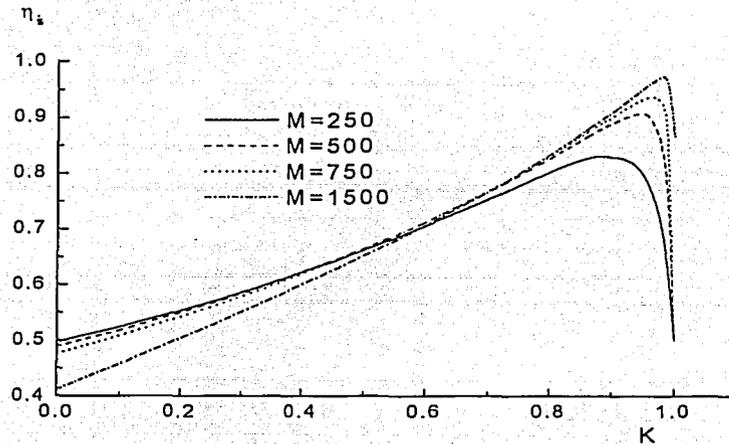


Figura 4.11: Eficiencia global de Segunda Ley como función de K para diferentes números de Hartmann. $R_w = 1.37 \times 10^6$, $\Theta_w = 1.92 \times 10^6$.

La figura 4.12 muestra la eficiencia global η_s contra M para $R_w = 1.37 \times 10^6$ y diferentes

valores de K . Para los tres valores explorados de $K = 0.25, 0.5$ y 0.75 , los valores máximos de η_s se encuentran para $M = 250, 450$ y 1100 , respectivamente. En particular para $K = 0.5$, la eficiencia global máxima es de 66 %. De ahí que el valor $M = 450$ representa el número de Hartmann óptimo que conduce a condiciones de potencia de salida máxima con una pérdida de energía mínima en la frecuencia de oscilación crítica adimensional $R_\omega = 1.37 \times 10^6$. Nótese, además, que la razón de decrecimiento de η_s es muy lenta para $K = 0.5$ y $K = 0.75$, y por lo tanto, eficiencias similares pueden ser encontradas para números de Hartmann mayores.

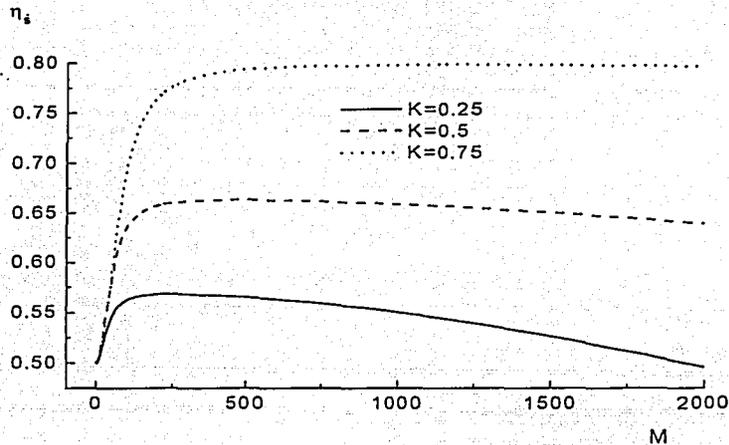


Figura 4.12: Eficiencia global de Segunda Ley como función de M para diferentes valores del factor de carga. $R_\omega = 1.37 \times 10^6$, $\Theta_\omega = 1.92 \times 10^6$.

En la figura 4.13 se muestra la variación de η_s con R_ω para la condición de potencia de salida máxima y diferentes números de Hartmann. Como era de esperar, para $M = 250$ y 500 , η_s es máxima en los valores de R_ω que minimizan $\langle \dot{S}^* \rangle$, es decir, en 4×10^3 y 1.4×10^4 , respectivamente. Para $M = 750$ y 1500 , los valores máximos de η_s son alcanzados en un valor aproximado de 1.4×10^6 . Nótese, sin embargo, que en este rango de números de Hartmann, la diferencia entre los valores máximos de η_s no excede el 1.5 %. Estos resultados reflejan el comportamiento de $\langle \dot{S}^* \rangle$ mostrado en la figura 4.10.

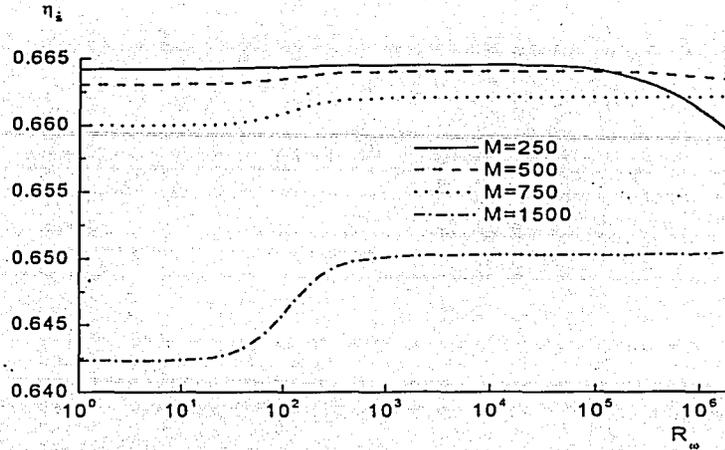


Figura 4.13: Eficiencia global de Segunda Ley como función de R_ω para diferentes números de Hartmann. $K = 0.5$, $\Theta_w = 1.92 \times 10^6$.

4.6 Conclusiones

En este capítulo se mostró a través de un ejemplo concreto, i.e. el análisis de un generador MHD alterno, la utilidad del método de minimización de la producción de entropía para optimizar la operación del dispositivo. En este problema es posible obtener analíticamente los campos de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica. Con ellos se pueden calcular la producción de entropía local y global del sistema. Se encuentra que cuatro parámetros adimensionales, denotados como, K , M , R_ω y Θ_w , y que caracterizan la carga eléctrica, la intensidad del campo magnético, la frecuencia de oscilación y la temperatura de la pared, respectivamente, son los que gobiernan el comportamiento del generador MHD alterno, para un fluido de trabajo dado. Se utilizaron dos criterios complementarios para estudiar el comportamiento del generador. El primero de ellos, se basa en la maximización de la eficiencia eléctrica isotrópica convencional del generador. El segundo criterio de optimización tiene en cuenta una eficiencia de Segunda Ley denotada

por η_s , que se define a partir de la producción de entropía y toma en cuenta las irreversibilidades presentes en el generador debidas a fricción, conducción eléctrica y flujo de calor. Maximizando la función η_s con respecto a los parámetros K , M y R_w para una Θ_w dada, se encontraron condiciones de operación óptimas que minimizan las pérdidas de energía. Para condiciones de frontera térmicas y frecuencias de oscilación similares a las reportadas para los dispositivos termoacústicos de sodio líquido [41, 42], pudo determinarse un número de Hartmann óptimo bajo condiciones de potencia de salida máxima.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Comentarios finales

En el presente trabajo, se ha utilizado el método de minimización de la producción de entropía como una herramienta para la determinación de condiciones óptimas de operación o diseño que permiten minimizar las irreversibilidades que se presentan en sistemas energéticos. A través del análisis de los dos problemas presentados en el capítulo 2, es decir, el calentamiento interno estacionario de una placa sólida y el flujo viscoso entre dos paredes planas paralelas de espesor finito; el análisis de dos ejemplos que involucran el flujo de un fluido eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético mostrado en el capítulo 3; y el análisis de un generador eléctrico alterno *MHD* presentado en el capítulo 4, hemos mostrado que es posible determinar condiciones físicas específicas de operación y diseño que lleven a una producción de entropía mínima.

Nuestro punto de partida fue la solución de las ecuaciones de balance en estos problemas para la obtención, según sea el caso, de los campos de temperatura, velocidad y densidad de corriente eléctrica. En los ejemplos presentados en los capítulos 2 y 3, el problema de transferencia de calor fue resuelto aplicando condiciones de frontera de tercer tipo y suponiendo que los coeficientes de transferencia de calor por convección para cada frontera son diferentes (intercambio de calor por convección en forma asimétrica), mientras que en el problema de optimización del generador alterno *MHD* se utilizaron condiciones de frontera de primer tipo. Una vez, conocidos estos campos, se calculó la producción de entropía local y global del sistema. Esta última cantidad, es la que se minimizó como función de los parámetros adimensionales relevantes del problema, conduciendo entonces a la determinación de condiciones de disipación de energía mínima.

Uno de los resultados importantes de este trabajo es que en todos los casos en los que se consideró intercambio de calor por convección en forma asimétrica, es posible encontrar condiciones óptimas de operación donde la producción global de entropía es mínima. Particularmente, en el caso del flujo de Poiseuille, evaluamos también la transferencia de calor para condiciones de mínima disipación o mínima producción de entropía.

En el caso del generador eléctrico alterno *MHD* definimos una eficiencia de Segunda Ley a partir de la producción de entropía que toma en cuenta todas las irreversibilidades presentes en el generador. Maximizando esta función con respecto a los parámetros que caracterizan el sistema, se encontraron condiciones óptimas de operación que minimizan las pérdidas de energía. Se obtuvo un número de Hartmann óptimo bajo condiciones de

potencia de salida máxima, es decir, existe un valor de intensidad del campo magnético en el que la eficiencia de Segunda Ley es máxima.

Aunque en los ejemplos estudiados, considerando algunas simplificaciones razonables, fue posible encontrar soluciones analíticas para los comportamientos dinámico y térmico del sistema y, en consecuencia, para la producción de entropía, en problemas con una mayor sofisticación difícilmente pueden encontrarse este tipo de soluciones. En tales casos, el método presentado en este trabajo puede aplicarse directamente utilizando soluciones determinadas numéricamente.

Por último, esperamos que a través de los problemas analizados en este trabajo se hayan podido apreciar las ventajas que ofrece el Método de Minimización de la Producción de Entropía en la optimización de procesos y dispositivos energéticos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice

Ecuaciones canónicas para el generador alterno *MHD*.

En este apéndice, expresamos los resultados del modelo del generador alterno *MHD* en forma de ecuaciones canónicas como las usadas por Swift [43], es decir,

$$\Delta P = Z_{mc}U - T_B I, \quad (1)$$

$$V = T_B U + Z_{el} I, \quad (2)$$

donde $\Delta P = -GL$ es la diferencia de presión a través del canal, U es la velocidad volumétrica a lo largo del canal, I es la corriente eléctrica total a través del ancho del canal y V es el voltaje terminal entre los electrodos. T_B , Z_{mc} y Z_{el} son el coeficiente de acoplamiento electromecánico y las impedancias mecánica y eléctrica, respectivamente. Para determinar explícitamente estos coeficientes, hacemos uso de la ecuación (4.3) y la Ley de Ohm (3.7). La integración espacial de ésta última da

$$-I = 2L \int_0^a j_{zo}(y) dy = 2L \left(a\sigma E_o + \frac{\sigma B_o}{4b} U \right), \quad (3)$$

donde la velocidad volumétrica se define como

$$U = 4b \int_0^a u_o(y) dy = 4abU_o.$$

Por otro lado, el voltaje terminal está dado por

$$V = - \int_{-b}^b E_o dz = -2bE_o, \quad (4)$$

y sustituyendo en la ecuación (3), obtenemos

$$V = \frac{B_o}{2a} U + \frac{b}{aL\sigma} I. \quad (5)$$

Por otro lado, usando las ecuaciones (4) y (5), la ecuación (4.3) puede ser expresada como

$$\Delta P = i \frac{\rho\omega L}{4ab} \left\{ \left(1 - \frac{\tanh \lambda}{\lambda} \right)^{-1} + iN \left[1 - \left(1 - \frac{\tanh \lambda}{\lambda} \right)^{-1} \right] \right\} U - \frac{B_o}{2a} I, \quad (6)$$

donde $N = M^2/R_\omega$. Por lo tanto, de las ecuaciones (5) y (6), encontramos que

$$T_B = \frac{B_o}{2a},$$

$$Z_{cl} = \frac{b}{aL\sigma},$$

$$Z_{mc} = i \frac{\rho\omega L}{4ab} \left\{ \left(1 - \frac{\tanh \lambda}{\lambda} \right)^{-1} + iN \left[1 - \left(1 - \frac{\tanh \lambda}{\lambda} \right)^{-1} \right] \right\}.$$

Se puede notar que estos coeficientes coinciden con los dados por Swift [43] en el límite $R_m \rightarrow 0$ y para $M \gg 1$. Para incluir los efectos de resistencias en serie y de cortocircuitos en paralelo que pueden resultar de paredes conductoras y efectos de borde, estos coeficientes pueden ser generalizados a través de un circuito equivalente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Referencias

1. Bejan A., Entropy Generation Minimization. New York: CRC Press, 1996.
2. Sekulic' D. P., Campo A. and Morales J. C., Irreversibility phenomena associated with heat transfer and fluid friction in laminar flows through singly connected ducts, Int. J. Heat Mass Transfer, 1997; 40:905-.
3. Sahin B., Kodal A. and Yavuz H., Maximum power density analysis of an irreversible Joule-Brayton engine, J. Phys. D: Appl.Phys., 1996; 29:1162-.
4. Johannessen E., Nummedal L. and Kjelstrup S., Minimizing the entropy production in heat exchange, Int. J. Heat Mass Transfer, 2002; 45:2649-2654.
5. Cihat Baytas A., Entropy generation for natural convection in an inclined porous cavity, Int. J. Heat Mass Transfer, 2000; 43:2089-2099.
6. San Y. J., Worek M. W. and Lavan Z., Entropy generation in combined heat and mass transfer, Int. J. Heat Mass Transfer, 1987; 30(7):1359-1369.
7. Saha K. S. and Mahanta K. D., Thermodynamic optimization of solar flat-plate collector, Renewable Energy, 2001; 23:181-193.
8. Salah El-Din M.M., Thermodynamic optimisation of irreversible solar heat engines, Renewable Energy, 1999; 17:183-190.
9. Salas H., Cuevas S. and López de Haro M., Entropy generation analysis of magneto-hydrodynamic induction devices, J. Phys. D: Appl.Phys., 1999; 32:2605-2608.
10. García-Colín L. Termodinámica de procesos irreversibles. Colección CBI, Univ. Autónoma Metropolitana. México.
11. De Groot S. R. and Mazur P., Non-Equilibrium Thermodynamics, Dover, New York, 1984.
12. Hughes, W. F. and Young, F. J., The Electromagnetodynamics of Fluids. Robert E. Krieger Publishing company. Florida, 1989.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

13. Cuevas S., Procesos disipativos en fluidos conductores de electricidad. Tesina para la presentación de examen general de conocimientos (opción B). Fac. de Ciencias. UNAM. México, D.F., 1989.
14. Bejan A., Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow, Wiley, New York, 1994.
15. Demirel Y. and Kahraman R., Entropy generation in a rectangular packed duct with wall heat flux, Int. J. Heat Mass Transfer, 1999; 42:2337-2344.
16. Abu-Hijleh B., Abu-Qudais M. and Abu Nada E., Entropy generation due to laminar natural convection from a horizontal isothermal cylinder, ASME J. Heat Transfer, 1998; 120:1089-1090.
17. Cihat Baytas A., Optimization in an inclined enclosure for minimum entropy generation in natural convection, J. Non-Equilib. Thermodyn., 1997; 22:145-155.
18. Ibáñez G., Cuevas S. and López de Haro M., Minimization of entropy generation by asymmetric convective cooling, Int. J. Heat Mass Transfer, 2003; 46:1321-1328.
19. Ibáñez G., Cuevas S. and López de Haro M., Heat transfer in asymmetric convective cooling and optimized entropy generation rate, Rev. Mex, Física, 49(4), 2003.
20. Bejan A., Heat Transfer, Wiley, New York, 1993.
21. Holman J. P., Heat Transfer, seventh ed., Mc Graw-Hill, New York, 1990, p.659.
22. Hughes, W. F. and Elco, R. A. Magnetohydrodynamic lubrication flow between parallel rotating disks, J. Fluid Mech., 1962; 26(3):21-32.
23. Kuzma D. C., Maki E. R. and Donnelly R.J. The magnetohydrodynamic squeeze film, J. Fluid Mech., 1964; 19(3):395-400.
24. Maki E. R., Kuzma D. C. and Donnelly R. J. Magnetohydrodynamic lubrication flow between parallel plates, J. Fluid Mech., 1966; 26(3):537-543.
25. Raal J.D.. Radial source flow between parallel disks. J. Fluid Mech., 1978; 85(3):401-416.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

26. Mochizuki S. and Yang W.. Self-sustained radial oscillating flows between parallel disks. *J. Fluid Mech.*, 1985; 154:377-397.
27. Mochizuki, S., Sugishita, H., Yang, W., Heat transfer performance in radial flow between two parallel circular disks, *Proc. of The Fourth Int. Symposium on Transport Phenomena in Heat and Mass Transfer, Vol. I, Elsevier Science Publishers, Netherlands, 1992, 468-478.*
28. Acosta Olea R.. Estudio teórico experimental de la transferencia de calor en la placa absorbadora del calorímetro que actúa como receptor del DEFRAC. Tesis de Maestría, CIE, UNAM, México, 2001.
29. Yen J.T., Effect of wall electrical conductance on magnetohydrodynamic heat transfer in a channel, *J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 85, p. 371.*
30. Snyder W.T., The influence of wall conductance on magnetohydrodynamic channel-flow heat transfer, *J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 86, p. 552.*
31. Muller U., and Buhler L., *Magnetofluidynamics in channels and containers.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2001.
32. Moreau R., *Magnetohydrodynamics.* Dordrecht: Kluwer, Netherlands, 1990.
33. Incropera F. and De Witt D. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer.* Fifth Edition. John Wiley & Sons. New York, 2002.
34. Rosa R. J., *Magnetohydrodynamic Energy Conversion.* New York: Hemisphere, 1987.
35. Kurzweg U. H., Temporal and spatial distribution of heat flux in oscillating flow subjected to an axial temperature gradient, *Int. J. Heat Mass Transfer, 1986; 29:1969-1977.*
36. Kurzweg U. H., Enhanced heat conduction in oscillating viscous flows within parallel-plate channels, *J. Fluid Mech.*, 1985; 156:291-300.
37. Kurzweg U. H. and Chen J., Heat Transport Along an Oscillating Flat Plate, *Transactions of the ASME: J. Heat Transfer, 1988; 110:789-790.*

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

38. Guo Z. and Sun Gin H., Analysis of the Nusselt number in pulsating pipe flow, Int. J. Heat Mass Transfer, 1997; 40(10):2486-2489.
39. Moschandreou T. and Zamir M., Heat transfer in a tube with pulsating flow and constant heat flux, Int. J. Heat Mass Transfer, 1997; 40(10):2461-2466.
40. Morse P.M. and Ingard K.U., Theoretical acoustics. New Jersey: Princeton, 1986.
41. Migliori A. and Swift G. W., Liquid-sodium thermoacoustic engine, Appl. Phys. Lett., 1988; 53(5):355-357.
42. Swift G. W., A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic transducer, J. Acoust. Soc. Am., 1988; 83(1):350-361.
43. Ajisaka H. and Hixson E. L., Transduction principles of a liquid state electromagnetic transducer, J. Acoust. Soc. Am., 1985; 77(5):1933-1938.
44. Chen Reh-Lin y Garret S. L. Solar/Heat Driven Thermoacoustic Engine. Proc. 16th Int. Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acoust. Soc. Am., 1998; 2:813-.
45. Ibáñez G., Cuevas S. and López de Haro M., Optimization analysis of an alternate MHD electric generator. Energy Conversion and Management, 2002; 43(14):1757-1771.
46. Shailendhra K. and Anjali Devi P. S., Heat transport along an oscillating flat plate in the presence of a transverse magnetic field, Int. J. Heat Mass Transfer, 1997; 40(2):498-501.
47. Ikegami Y. and Bejan A., On the thermodynamic optimization of power plants with heat transfer and fluid flow irreversibilities, J. Solar Energy Engng., 1998; 120:139-.
48. Ishikawa H. and Hobson P. A., Optimization of heat exchanger design in a thermoacoustic engine using a second law analysis, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 1996; 23(3):325-.
49. Huelsz G. and Ramos E., On the phase difference of the temperature and pressure waves in the thermoacoustic effect, Int. Comm. Heat Mass Transf., 1995; 22:71-80.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

50. Huelsz G. and Ramos E., A physical interpretation of the thermoacoustic effect, J. Non-Equilib. Thermodyn., 1996; 21:278-284.
51. Moffatt H. K. and Toomre J., The annihilation of a two-dimensional jet by a transverse magnetic field, J. Fluid Mech., 1967; 83(1):65-82.
52. Sahin B., Kodal A. and Yavuz H., Performance analysis of a non-regenerative MHD power cycle at maximum power density, J. Phys. D: Appl.Phys., 1996; 29:1473-.
53. Sahin B., Kodal A. and Oktem A. S., Optimal performance analysis of irreversible regenerative MHD power cycles, J. Phys. D: Appl.Phys., 1999; 32:1832-1841.
54. Cuevas S., Transferencia de calor en un flujo MHD con condiciones a la frontera de tercer tipo; Tesis de Maestría en Ciencias. Fac. de Ciencias. UNAM. México, D.F., 1988.
55. Currie I. G., Fundamental Mechanics of fluids, McGraw-Hill, Inc., USA, 1993.
56. Acheson D. J., Elementary Fluid Dynamics, Oxford University Press, New York, 1990.
57. Landau L. D. and Lifshitz E. M., Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1959.
58. Schlichting H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, USA, 1960.
59. Roberts P. H., An Introduction to Magnetohydrodynamics, Longmans, London, 1967.
60. Walker J. S., Magnetohydrodynamic Flows in a Rectangular Duct with Thin Conducting Walls. Part I. Constant Area and Variable Area Ducts with Strong Magnetic Fields, J. Méc., 1981; 20:79-112.
61. Cuevas S., Dinámica y transferencia de calor en flujos de metales líquidos en campos magnéticos intensos, Tesis de Doctorado en Ciencias. Fac. de Ciencias. UNAM. México, D.F., 1994.
62. Cuevas S. and Huelsz G., Oscillatory Boundary-Layers Flows, Recent Res. Devel. Fluid Dynamics, 1999, 2:35-61.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

63. Hesselgreaves J. E., Rationalisation of second law analysis of heat exchangers, Int. J. Heat Mass Transfer, 2000; 43:4189-4204.
64. Bejan A., Second law analysis in heat transfer, Energy, 1980; 5:721-732.
65. Zimparov V., Extended performance evaluation criteria for enhanced heat transfer surfaces: heat transfer through ducts with constant wall temperature, Int. J. Heat Mass Transfer, 2000; 43:3137-3155.
66. Zimparov V., Extended performance evaluation criteria for enhanced heat transfer surfaces: heat transfer through ducts with constant heat flux, Int. J. Heat Mass Transfer, 2001; 44:169-180.
67. Nag K. P. and Mukherjee P., Thermodynamic optimization of convective heat transfer through a duct with constant wall temperature, Int. J. Heat Mass Transfer, 1987; 30(2):401-405.
68. Demirel Y. and Sandler S.I., Linear-nonequilibrium thermodynamics theory for coupled heat and mass transport, Int. J. Heat Mass Transfer, 2001; 44:2439-2451.
69. Rossow V. J. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field, Technical Note 3971, NACA, Washintong, May, 1957.
70. Walker J.S., Periodic fluid transients in rectangular ducts with transverse magnetic field, Angew. Math. Phys., 1974; 23:353-366.
71. Walker J.S., Periodic fluid transients in rectangular ducts with transverse magnetic field II, Angew. Math. Phys., 1976; 27:71-81.
72. Cowling T. G., Magnetohydrodynamics, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN