

00362
3



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO



**FUNCIÓN DIELECTRICA PARA UN
GAS DE EXCITONES EN UN
ALAMBRE CUÁNTICO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A :
FIS. PAOLA MARIA MERCEDES CASTRO GARAY



ASESOR: DR. GERARDO JORGE VAZQUEZ FONSECA



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MEXICO D.F.



posgrado en ciencias físicas
u n a m

2003

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS
CON
FALLA DE
ORIGEN**

PAGINACIÓN DISCONTINUA

Dedicatoria

A la memoria de mi padre.

*A mi madre, a mis abuelos, a mis hermanas
y a Miranda, por su amor y cariño.*

Al Nene y a Jorge, que ya son mi familia.

A mis amigos que siempre están cerca.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo académico.

NOMBRE: Paola Mena Méndez

Castro Gera

FECHA: 11 Agosto, 2003

FIRMA: Castro Gera

Dedicatoria

A la memoria de mi padre.

*A mi madre, a mis abuelos y a mis hermanas
por su amor y cariño.*

A mis amigos que siempre están cerca.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Agradecimientos

Agradezco a mis directores de tesis **Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca** y **Marcelo del Castillo-Mussot** el apoyo, la confianza, y el tiempo dedicado a mi persona durante la realización de este trabajo.

Al **Dr. Adrián Reyes** y al **Dr. Miguel Angel Solís** por su intensa y valiosa colaboración en los cálculos de este trabajo.

A mis sinodales por aceptar ser parte de mi jurado y revisar mi trabajo: **Dr. Eleuterio Castaño**, **Dr. Raúl Esquivel** y **Dr. Adrian Reyes**.

Al **Dr. Carlos F. Bunge**, al **Dr. Eugenio Ley-Koo** y al **Dr. Marcos Salazar** por brindarme incondicionalmente su apoyo y confianza.

Al **Dr. Dennis Boyer**, **Oliverio Jitrik Mercado** y **Lorea Chaos Cador** por brindarme su amistad y su apoyo académico.

Al **Posgrado en Ciencias (Físicas)-UNAM** por la impresión de esta tesis.

Finalmente agradezco al **Instituto de Física, UNAM** y especialmente a la **Dra. Myriam Mondragón** y al **Dr. Manuel Torres** por brindarme las condiciones necesarias para mi formación académica y profesional.

ÍNDICE GENERAL

Función dieléctrica para un gas de excitones en alambres cuánticos

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
1 Introducción	2
2 Gas ideal de bosones unidimensional	5
2.1 Energía interna, calor específico y potencial químico de un gas de bosones unidimensional	7
3. Modelo del gas de excitones unidimensional	12
3.1 Ecuaciones básicas	13
3.2 Interacción de corto alcance	15
3.3 Interacción de largo alcance	23
4. Cálculo de la función dieléctrica del sistema	38
4.1 Función dieléctrica a temperatura cero	38
4.2 Función dieléctrica unidimensional para $T \neq 0$	39
4.3 Modos colectivos longitudinales del sistema	45
5. Resultados	53
5.1 Resumen	53
5.2 Resultados	55
6. Conclusiones	72
Apéndice I	74
Apéndice II	76
Apéndice III	77
Apéndice IV	81
Lista de Figuras	83
Lista de Tablas	85
Referencias	86

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo es calcular la función dieléctrica de un gas de excitones cuasi-unidimensional en dos alambres cuánticos paralelos. Los alambres cuánticos paralelos están separados una distancia d y tienen cada uno un ancho σ , en uno de ellos hay un gas diluido de electrones y en el otro un gas de huecos también diluido. Hemos supuesto que la interacción entre electrones y huecos (los cuales permanecen uno enfrente del otro) es tan fuerte que la distancia entre ellos permanece constante. Estos pares de electrones y huecos constituyen excitones los cuales obedecen la estadística de Bose-Einstein por lo que describimos el comportamiento de nuestro sistema usando la función de distribución de Bose en una dimensión. En la figura 5 del capítulo 3 (página 14) se muestra esquemáticamente un par de excitones de nuestro sistema.

A partir de los años cincuentas el estudio del gas de Bose se ha incrementado en el contexto de teorías de superconductividad a altas temperaturas [1]-[3]. Por otra parte, el cálculo de la función dieléctrica para un gas de Bose se ha hecho en dos (2D) [3]-[7] y tres dimensiones (3D)[2, 8, 9, 10]. Se han realizado numerosos cálculos para la función dieléctrica de un gas de fermiones en sólidos por su relación con la teoría de conductividad[11]-[16]. El primer cálculo de la función dieléctrica en dos dimensiones fue realizado por Stern[11] para un gas de electrones, en donde obtuvo una relación de dispersión para temperatura de cero absoluto.

En contraste, han sido pocos los cálculos que se han realizado para la función dieléctrica en un gas de bosones, el primero fue hecho por Bogoliubov citado por Foldy en la ref. [2] y de ahí se han derivado algunos más [2]-[10].

Para realizar estos cálculos se usa la expresión de la función dieléctrica que fue obtenida por Lindhard con un método del modelo de campo autoconsistente más conocido por sus siglas en inglés SCF (self-consistent-field). También Nozieres y Pines obtuvieron una expresión análoga de la función dieléctrica usando un método basado en la aproximación de fases aleatorias, que por sus siglas en inglés se conoce como RPA (random-phase-approximation) citado por Ehrenreich en la ref. [17]. Harris [4, 18, 19] obtuvo una

expresión analítica de la función dieléctrica basada en el RPA aplicada a Bosones.

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{V(q)}{L} \left(\frac{F(\mathbf{k}) - F(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} \right). \quad (1.1)$$

donde $V(q)$ es la transformada de Fourier del potencial de interacción entre dos partículas del sistema, $F(\mathbf{k})$ es la probabilidad de encontrar a una partícula con energía $E_{\mathbf{k}}$ y \mathbf{k} es el vector de onda asociado a esta energía; $F(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ es la probabilidad de encontrar a una partícula con momento $\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ correspondiente al momento transferido cuando la partícula es apantallada por un potencial $V(q)$, $\hbar\omega$ es la energía transferida a la partícula y m es la masa de la partícula. Esta aproximación es válida para sistemas diluidos donde las interacciones entre tres partículas son poco probables y sólo se consideran las interacciones de largo alcance entre un par de partículas que en el espacio recíproco equivale a considerar q pequeñas.

El cálculo de la función dieléctrica no es trivial y numerosas expresiones han sido desarrolladas para este propósito. Es necesario manejar adecuadamente la discontinuidad en el denominador de la función dieléctrica. Una forma de hacerlo es a través de tomar la transformada de Laplace para la frecuencia y resolviendo el problema de valores iniciales en el espacio recíproco[19].

El estudio de un gas de bosones aplicado a los superconductores (Schafroth [1, 2]) y el desarrollo de la nanotecnología ha conducido a cálculos en sistemas de dimensión cada vez más pequeña [20]. Calcular la función dieléctrica en alambres unidimensionales es un reto, ya que las propiedades termodinámicas de un gas de bosones cambian considerablemente en esta dimensión y el potencial químico no se puede obtener analíticamente, lo que obliga a un cálculo numérico para los valores de la función dieléctrica.

A través de la función dieléctrica podemos obtener los modos colectivos longitudinales de oscilación de nuestro gas de bosones, ya que la función dieléctrica es una descripción de la respuesta de un sistema a un potencial de apantallamiento dado. Este potencial representa la interacción modificada por el medio y está definido por el potencial de Coulomb dividido por la constante dieléctrica [21].

El sistema físico considerado en este trabajo es similar al considerado por Ulloa[5] en su cálculo de la función dieléctrica en 2D: en éste observamos un potencial efectivo interdipolar inadecuado para describir la interacción dipolar efectiva de cuatro cargas puntuales, en nuestro cálculo corregimos dicho potencial efectivo mediante un cálculo cuántico que

toma en cuenta el confinamiento de los electrones y huecos que conforman los dipolos. Encontrar un potencial de interacción interdipolar consistente con las consideraciones físicas de nuestro sistema fue una de las primeras motivaciones para realizar este trabajo.

La segunda motivación de este trabajo es que en la actualidad se pueden construir y diseñar este tipo de estructuras además de ser un sistema unidimensional que no se ha estudiado. Por otro lado, en los últimos años se ha incrementado el número de experimentos donde se demuestra que la espectroscopía de electroabsorción es particularmente sensible a materiales de estructura casi unidimensional[22, 23, 24], esto nos ha motivado aún más a modelar este tipo de estructuras.

El objetivo de nuestro trabajo es calcular la función dieléctrica de un gas de excitones cuasi-unidimensional, los excitones son bosones y cumplen con la estadística de Bose, por esta razón, en el capítulo 2 calculamos las propiedades termodinámicas de un gas ideal unidimensional de bosones, en especial la fugacidad y el potencial químico, que usamos en el capítulo 4 para calcular la función dieléctrica. En el capítulo 3 se deduce el potencial efectivo entre excitones cuando el confinamiento lateral es parabólico y se calcula la transformada de Fourier de dicho potencial que se usa en el capítulo 4, ahí se calcula la función dieléctrica y la relación de dispersión con el valor de la temperatura igual a cero y distinto de cero. En el capítulo 5 se presentan los resultados y en el capítulo 6 las conclusiones.

CAPÍTULO 2

GAS IDEAL DE BOSONES UNIDIMENSIONAL

En este capítulo calculamos las propiedades termodinámicas de un gas de bosones ideal en un alambre unidimensional de longitud L . Consideramos que no existe interacción entre las partículas, la energía de cada partícula bosónica corresponde a la energía de una partícula libre de masa m [25, 26],

$$\epsilon_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.1)$$

con,

$$k^2 = k_x^2, \quad (2.2)$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad (2.3)$$

y

$$n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (2.4)$$

es decir, la relación de dispersión entre el momento $\hbar k$ y la energía ϵ_k de las partículas es cuadrática. Ahora bien, en el caso de un sistema de partículas de Bose-Einstein el número promedio de partículas en un nivel de energía definido por el momento k está dado por n_k ,

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (2.5)$$

conocida también como la distribución de Bose-Einstein, donde ϵ_k está dada por la ecuación (2.1), μ es el potencial químico y $\beta = 1/k_B T$, con k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura en Kelvin (K). El número total N de partículas está dado por la suma de las partículas en cada nivel de energía asociado al momento $\hbar k$,

$$N = \sum_k n_k = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (2.6)$$

Por conveniencia, N se escribe como la suma del número de partículas en el estado base N_0 más N_ϵ , el número de partículas que están en los estados excitados N_ϵ ,

$$N = N_0 + N_\epsilon. \quad (2.7)$$

donde

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}. \quad (2.8)$$

y

$$N_\epsilon = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (2.9)$$

Por simplicidad, escribiremos ϵ en lugar de ϵ_k de aquí en adelante. En el límite termodinámico ($L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ pero $N/L \equiv \text{cte.}$) la separación entre los niveles tiende a cero, al grado que podemos aproximar (2.9) como una función continua de k y así podemos escribir

$$N = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} n_k dk_x. \quad (2.10)$$

donde $\Omega \equiv 2\pi/L$, o bien

$$N = \int_0^{\infty} g(\epsilon) n_k(\epsilon) d\epsilon. \quad (2.11)$$

donde $g(\epsilon)$ es la densidad de estados unidimensional para partículas sin espín

$$g(\epsilon) = \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.12)$$

Por lo tanto,

$$N = \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon \quad (2.13)$$

Sea $x \equiv \beta\epsilon$ y $z \equiv e^{\beta\mu}$, la fugacidad, reescribiendo la ecuación anterior queda que:

$$N = \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{e^x z^{-1} - 1} dx. \quad (2.14)$$

$$N = \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi \beta} \right)^{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}(z) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.15)$$

$$N = \frac{L}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi \beta} \right)^{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}(z). \quad (2.16)$$

donde,

$$g_{\sigma}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l / l^{\sigma}. \quad (2.17)$$

Esta ecuación relaciona el número de partículas N con la temperatura, es decir,

$$N = \frac{L}{2} \left(\frac{2mk_B T}{h^2 \pi} \right)^{\frac{3}{2}} g_{\frac{5}{2}}(z). \quad (2.18)$$

En el límite de altas temperaturas el potencial químico μ se comporta clásicamente ($\mu \leq 0$), es decir, todas las partículas del sistema se encuentran en los estados excitados de energía. Sin embargo, cuando la temperatura del sistema disminuye hasta cierto valor, $\mu \rightarrow 0$ y $N = N_0 + N_e$, el estado base de energía comienza a poblarse, mientras que el número de ocupación de los los estados excitados disminuye pero N permanece constante. La temperatura a la que $\mu = 0$ ($z = 1$) se le llama temperatura crítica T_c y para calcularla usamos la ecuación 2.18,

$$T_c = \frac{4N^2 \pi h^2}{2mL^2 k_B g_{\frac{5}{2}}(1)^2}. \quad (2.19)$$

Por otra parte, de la Ec. (2.17) vemos que para $\sigma \equiv 1/2$ $\sigma \leq 1$, $g_{\sigma} \rightarrow \infty$, por lo que,

$$T_c = 0. \quad (2.20)$$

La fracción condensada N_0/N es la fracción de partículas que se encuentran en el estado base, para este caso es

$$N_0/N = \begin{cases} 1 & \text{si } T = 0 \\ 0 & \text{si } T > 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

2.1 Energía interna, calor específico y potencial químico

La energía interna $U(V,T)$ de un gas ideal de bosones se calcula de la siguiente manera

$$U(T, V) = \sum_k \epsilon_k n_k = \sum_k \frac{\epsilon_k}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (2.22)$$

donde ϵ_k es la energía del estado definido por k . En el límite termodinámico ($L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ pero con $N/L \equiv \text{cte.}$) la suma anterior la podemos convertir en una integral,

$$U(T, V) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon g(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon. \quad (2.23)$$

lo que resulta es

$$U(T, V) = \frac{Lk_B T}{4} \left(\frac{2mk_B T}{\hbar^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} g_{\frac{3}{2}}(z). \quad (2.24)$$

En términos del número total de partículas,

$$U(T, V) = \frac{k_B T N g_{\frac{3}{2}}(z)}{2g_{\frac{1}{2}}(z)}, \quad (2.25)$$

que en unidades de $K_B T N$ es igual a

$$\frac{U(T, V)}{k_B T N} = \frac{g_{\frac{3}{2}}(z)}{2g_{\frac{1}{2}}(z)}. \quad (2.26)$$

La Fig. 1 nos muestra la energía interna en función de la fugacidad z . Cuando $T \rightarrow \infty$ entonces $z = 0$ estamos en el límite clásico y la energía interna $U(T, V)/Nk_B$ es igual a $1/2$. Si $T \rightarrow 0$, entonces $z = 1$, $g_{1/2}(1) \rightarrow \infty$ y por consiguiente $U(T, V)/Nk_B$ es igual a cero.

Para calcular el calor específico C_V derivamos la expresión de la energía interna con respecto a la temperatura T ,

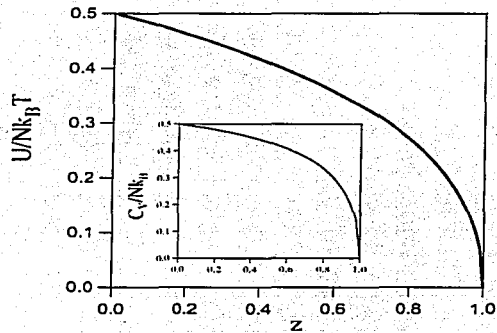
$$C_V = \left(\frac{\partial U(T, V)}{\partial T} \right)_{N, V}, \quad (2.27)$$

obteniendo

$$\frac{C_V}{k_B N} = \frac{1}{2} \left[\frac{3g_{\frac{3}{2}}(z)}{2g_{\frac{1}{2}}(z)} - \frac{1}{2} \frac{g_{\frac{1}{2}}(z)}{g_{-\frac{1}{2}}(z)} \right]. \quad (2.28)$$

La figura insertada de la Fig. 1 muestra el calor específico en función de la fugacidad z . El calor específico es igual a cero en límite cuando $T \rightarrow 0$, debido a que la fugacidad tiende a uno ($z = 1$) y la función $g_{\sigma}(1) \rightarrow \infty$ para valores de $\sigma < 1$ y $g_{\sigma}(1) \rightarrow \text{cte}$ para valores de $\sigma > 1$, donde $\text{cte} \equiv \zeta(\sigma)$ y ζ es la función zeta de Riemann. Si $T \rightarrow \infty$ entonces $z = 0$ y el límite de $g_{\frac{1}{2}}(0)/g_{\frac{3}{2}}(0) \rightarrow 1$, al igual que $g_{\frac{1}{2}}(0)/g_{-\frac{1}{2}}(0) \rightarrow 1$.

En resumen, en la Fig. 1 se muestran las gráficas en función de la fugacidad z de la energía interna y el calor específico. La temperatura es una función implícita de la fugacidad, de tal forma que en a temperaturas altas la fugacidad tiende a 1 y se cumple el teorema de equipartición[27]: La energía interna tiende a su valor clásico $0.5Nk_B T$ y el calor específico a una constante $0.5K_B$.



1: Energía interna y calor específico (figura insertada) en función de z .

Deducir una expresión para el potencial químico bosónico en una dimensión no es simple ya que no existe una solución analítica como la que existe en 2D [28], por lo que es necesario recurrir a una solución numérica. Usamos la Eq. (2.17) y (2.18) se tiene,

$$N = \frac{L}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2m_B k_B T}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.29)$$

donde m_B es la masa del bosón, z es la fugacidad y μ el potencial químico. Obtenemos de la Eq.(2.29) al usar temperatura de Fermi, $T_F \equiv 8N^2\pi^2\hbar^2/L^2 2m_B k_B$ (que se calcula en la sección 3.2 del Apéndice III),

$$1 = (2\pi\hat{T})^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}}, \quad (2.30)$$

donde $\hat{T} \equiv T/T_F$. Despejamos \hat{T} ,

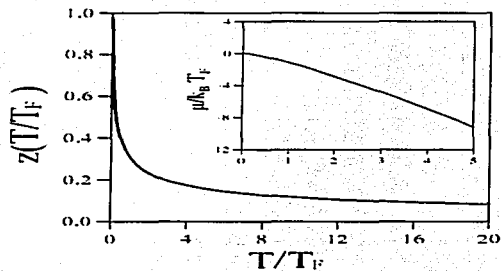
$$\hat{T} = 1 / \left(2\pi \left(\sum_{l=1}^{\infty} z^l / l^{3/2} \right)^2 \right). \quad (2.31)$$

Resolvemos numéricamente y calculamos la función inversa. La Fig. 2 nos muestra la fugacidad z en función de \hat{T} , observando que cumple los límites impuestos por la condición $z \equiv e^{\hat{\mu}/\hat{T}}$, donde $\hat{\mu} \equiv \mu/k_B T_F$ y z pertenece al intervalo $[0, 1]$; cuando $\hat{T} \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 1$ y si $\hat{T} \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ siempre y cuando $\hat{\mu} < 0$. La gráfica insertada en la Fig. 2 nos muestra el potencial químico en función de \hat{T} .

$$\hat{\mu} = \hat{T} \ln(z). \quad (2.32)$$

En resumen a temperaturas altas la fugacidad tiende a cero y el potencial químico se hace negativo como se esperaba en el límite clásico. En sentido inverso, cuando la temperatura toma el valor de cero el potencial químico toma el valor de cero y la fugacidad alcanza su valor máximo en 1.

Conocer las propiedades termodinámicas de un gas de Bose unidimensional es importante porque nuestro sistema está modelado como un gas de bosones. La dependencia numérica de la temperatura que tiene la fugacidad impone un cálculo numérico de la función dieléctrica.



2: La fugacidad y el potencial químico bosónico μ (figura insertada) en función de la temperatura T en 1D, donde T_F es la temperatura de Fermi.

CAPÍTULO 3

MODELO DEL GAS DE EXCITONES UNIDIMENSIONAL

Como se menciono anteriormente, el objetivo principal de este trabajo es calcular la función dieléctrica de un gas de excitones que estadísticamente se comportan como bosones. Por ello, el objetivo de este capítulo es describir el sistema y calcular la transformada de Fourier del potencial efectivo entre dos elementos de mi sistema, es decir, la interacción efectiva entre dos excitones. Una de las motivaciones de este trabajo es que el potencial efectivo contenga toda la información sobre la estructura y la geometría del sistema, además de considerar las interacciones de corto y largo alcance entre las partículas que forman los dos excitones, por este motivo, este capítulo está dividido en tres secciones, en la primera sección mostramos el hamiltoniano general del sistema, en la sección 3.2 modelamos las interacciones a corto alcance y en la sección 3.3 las interacciones de largo alcance.

El sistema consiste de dos alambres cuánticos paralelos entre sí, cada uno de ancho σ separados una distancia d como se muestra en la Fig. 3. En uno de ellos suponemos que existe un gas diluido de electrones y en el otro un gas de huecos que también está diluido. La interacción entre electrones y huecos, los cuales permanecen uno enfrente del otro, es tan fuerte que la distancia entre el valor esperado de la probabilidad de la densidad de carga entre ellos permanece constante. Suponemos que hay el mismo número de electrones y huecos apareados. Estos pares de electrones y huecos constituyen excitones los cuales obedecen la estadística de Bose-Einstein en una dimensión.

Debido a la extrema cercanía entre los pares de cargas electrón-hueco que forman a cada excitón o dipolo hemos supuesto que la distancia entre cada par de cargas dipolares d es fija de tal forma que los grados de libertad correspondientes a dos partículas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son suficientes para describir a nuestro sistema. Si el alambre cuántico en donde se encuentran los dipolos es suficientemente delgado, las energías base del confinamiento transversal ejercido por el potencial de confinamiento, V_L , serán mucho más grandes que la energía de interacción dipolar, V_{int} , por lo que será difícil sacar de los

estados base de confinamiento transversal a los dipolos. Es decir, dentro del modelo de confinamiento armónico los dipolos están atrapados en un potencial parabólico en el eje x y en el eje y de tal forma que juntos forman un paraboloide que no permite que escapen las cargas de los dipolos al fijarse la distancia de separación d entre ellos. El electrón y el hueco no son cargas puntuales sino densidades de probabilidad de carga que se distribuyen de acuerdo al potencial de confinamiento y al nivel energético correspondiente. En la sección 3.2 tomamos en cuenta la densidad de carga del electrón y el hueco, y calculamos la corrección a la distancia entre los valores esperados de los alambres cuánticos debido a la fuerte atracción entre el electrón y el hueco enfrente de él. En la sección 3.3 calculamos el potencial efectivo interdipolar del sistema, donde hemos supuesto que el electrón y el hueco están separados una distancia constante mínima d' .

3.1 Ecuaciones básicas

En la introducción de este capítulo hemos supuesto que cada par electrón-hueco forma un dipolo rígido y cada uno de los elementos de este par se mueve a lo largo de un alambre cuántico infinito de ancho σ (ver Fig. 3). La distancia d entre los valores esperados de las probabilidades de carga del electrón y el hueco que forman un excitón es mucho más pequeña que la distancia de separación entre los excitones de tal forma que d puede considerarse como fija en una primera aproximación.

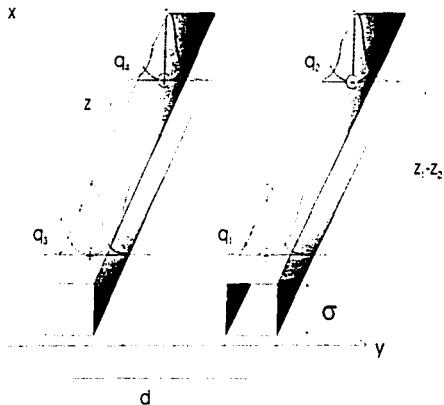
La ecuación de Schrödinger de cuatro partículas cargadas que forman los dos dipolos está dada por,

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = E_t\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \quad (3.1)$$

donde E_t es la energía total del sistema y los subíndices 1, 2, 3 y 4 denotan a las partículas q_1 , q_2 , q_3 y q_4 de la Fig. 3. El hamiltoniano del sistema \hat{H} está definido por

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^4 \hat{H}_i + \hat{V}_{int} \quad (3.2)$$

y el hamiltoniano de cada partícula es,



Dibujo esquemático del sistema de dipolos en alambres paralelos

$$\hat{H} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\hbar^2 \nabla_{\nu}^2}{2m_{\nu}} + \hat{V}_{\nu}, \quad (3.3)$$

donde ν es el subíndice de cada partícula. m_{ν} es la masa efectiva correspondiente, \hat{V}_{ν} es el potencial de confinamiento transversal originado por el alambre cuántico que actúa sobre cada portador de carga y \hat{V}_{int} es la interacción coulombiana a pares entre las cuatro partículas cargadas,

$$\hat{V}_{int} = \hat{V}_{1,2} + \hat{V}_{1,3} + \hat{V}_{1,4} + \hat{V}_{2,3} + \hat{V}_{2,4} + \hat{V}_{3,4}. \quad (3.4)$$

Por simetría,

$$\hat{V}_{int} = 2\hat{V}_{1,3} + 2\hat{V}_{1,4} + 2\hat{V}_{1,2}. \quad (3.5)$$

6

$$\begin{aligned} \hat{V}_{int}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) &= \frac{2q^2}{\epsilon\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \\ &\quad - \frac{2q^2}{\epsilon\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (z_1 - z_4)^2}} \\ &\quad - \frac{2q^2}{\epsilon\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde ϵ es la constante de apantallamiento apropiada que describe al medio semiconductor.

3.2 Interacción de corto alcance

Ahora consideramos la interacción más fuerte que es la interacción entre cargas más cercanas, en nuestra figura 3 corresponde, a la interacción entre las cargas 1 y 3, y también 2 y 4. Por esta razón, despreciamos en este punto todos los términos del potencial de interacción de la ecuación (3.6) excepto aquellos que contengan las interacciones anteriores, es decir: $\hat{V}_{1,3}$ y $\hat{V}_{2,4}$.

Para resolver este hamiltoniano simplificado primero consideramos sólo la interacción $\hat{V}_{1,3}$ para después incluir $\hat{V}_{2,4}$ en forma similar. Proponemos una solución para la función de onda de la misma forma que Reyes y del Castillo lo hacen en la ref. [29],

$$\Psi = \Psi(y_1, y_3)S_1(x_1)S_3(x_3)R(z_1, z_3) \quad (3.7)$$

donde $S_i(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}$, $i=1,3$ son las funciones base del oscilador armónico y $R(z_1, z_3) = R(z)\text{Exp}[iK_{cm}z_{cm}]$ es la función calculada por Reyes y del Castillo en su artículo [29] correspondiente a la interacción entre un electrón y un hueco que están confinados separadamente en dos alambres cuánticos paralelos, K_{cm} es una constante, z_{cm} y z son las coordenadas de centro de masa y la coordenada relativa, respectivamente.

Usando la función de onda (Ec. 3.7) y el hamiltoniano (Ec. 3.2) proyectamos en el subespacio de variables y_1 y y_2 , calculando la expresión $\langle S(x_1 - x_3)R(z_1 - z_3)|\hat{H}|\Psi \rangle$,

(que es similar a un bracket pero nótese que la $\Psi(y_1, y_3)$ no aparece en el lado izquierdo del bracket) conduce a un hamiltoniano efectivo,

$$\bar{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy_3^2} + \frac{k}{2} (y_1 - d/2)^2 + \frac{k}{2} (y_3 + d/2)^2 + \bar{U}_{eff}(y_1, y_3) \quad (3.8)$$

y

$$\bar{U}_{eff}(y_1, y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_3 \times |\Psi(1)|^2 |\Psi(3)|^2 \bar{V}_{1,3} \quad (3.9)$$

donde $|\Psi(1)|^2$ y $|\Psi(3)|^2$ son funciones base del confinamiento armónico en la coordenada x , y en la coordenada z son de la forma $R(z_1, z_3) = R(z) \text{Exp}[iK_{cm} z_{cm}]$. Finalmente, $\bar{V}_{1,3}$ es el potencial de interacción de dos partículas cargadas,

$$\bar{V}_{int}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{q^2}{\epsilon \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \quad (3.10)$$

La función de onda $\Psi(y_3, y_4)$ para las partículas 2 y 4 satisface una ecuación análoga a (3.8).

Como es claro en el hamiltoniano efectivo (Ec. 3.8) la función de onda que satisface la ecuación depende de las coordenadas y_1, y_3 . Este hamiltoniano se reduce al del oscilador armónico si \bar{U}_{eff} es despreciable. Sin embargo, tomaremos en cuenta su efecto proponiendo una función de onda para la cual los centros de la funciones de probabilidad de la distribución de carga de cada partícula no están necesariamente centrados en los centros de los potenciales armónicos. Es decir, las cargas se pueden atraer debido a la interacción coulombiana y el objetivo es calcular la corrección a la distancia entre los valores esperados de las partículas en los alambres cuánticos. El valor del parámetro k de la Ec. (3.8) se obtiene al calcular el valor esperado del segundo momento $\sigma^2 \equiv \langle y^2 \rangle$ de la densidad de probabilidad de cada partícula obteniendo $k \equiv \hbar^2 / 4m\sigma^4$.

Ambas cargas están confinadas por un potencial de oscilador armónico muy rígido de tal forma que basta tomar el estado base para describir la dependencia transversal de la función de onda de la partícula [30, 31], ya que los otros estados tienen energía demasiado alta.

En efecto, cuando el potencial de atracción es muy rígido la diferencia del estado base y cada uno de los estados excitados del oscilador armónico será lo suficientemente grande para que no sea posible excitar a estados de mayor energía a una partícula que se halla en el estado base. Por esta razón la función de onda particularmente en la coordenada transversal y se puede representar por una gaussiana que es la eigenfunción de onda del estado base en el oscilador armónico. Esto es al calcular el segundo momento en la dirección y , $\sigma^2 = \langle y^2 \rangle$ de la distribución de densidad de probabilidad de cada partícula. Consideramos el potencial de atracción entre las dos cargas en la función de onda de prueba, aproximándolo por un término lineal en la exponencial,

$$\Psi(y_1, y_2) = A e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1+d/2)^2} e^{\frac{\beta y_1}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1-d/2)^2} e^{-\frac{\beta y_1}{\sigma}} \quad (3.11)$$

donde $A \equiv 1/\sigma\sqrt{2\pi}$ es un coeficiente de normalización y β es el parámetro que desplaza del centro a la gaussiana contiene la información sobre el potencial atractivo en la función de onda.

El valor esperado de la energía

$$\langle \Psi(y_1, y_2) | \hat{H} | \Psi(y_1, y_2) \rangle = \frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} \left[1 + \frac{\beta^2}{2} \right] + \langle \Psi(y_1, y_2) | \hat{U}_{eff}(y_1, y_2) | \Psi(y_1, y_2) \rangle \quad (3.12)$$

donde hemos sustituido la ecuación (3.11) en la ecuación (3.8) y el valor de k .

Usaremos la función de onda de Reyes y del Castillo[29] para calcular el potencial efectivo de interacción $\hat{U}_{eff}(y_1, y_2)$ entre dos partículas (electrón-hueco). Este contiene información sobre la geometría y estructura del sistema, así como del confinamiento transversal en y de las probabilidades de las densidades de carga del estado base del oscilador armónico. A partir de esta referencia obtenemos el potencial efectivo en y .

$$\begin{aligned} \hat{U}(y_1, y_2) &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-0.5(u/\sigma)^2} du}{\sqrt{u^2 + (y_1 - y_2 + d)^2}} \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{0.707107}{\sigma} {}_1F_1[0.5, 1, 0.5(d + y_1 - y_2)/\sigma^2], \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde ϵ es la constante dieléctrica del medio semiconductor y ${}_1F_1$ es la función hipergeométrica confluyente [32].

$${}_1F_1[a, c, x] = \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt. \quad (3.14)$$

que utilizaremos para calcular el valor esperado del potencial atractivo, es decir.

$$\begin{aligned} \langle \Psi(y_1, y_3) | \tilde{U}_{eff}(y_1, y_3) | \Psi(y_1, y_3) \rangle &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{0.707107}{2\pi\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_1}{\sigma} + \frac{d-y_3}{\sigma})^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_1}{\sigma} - \frac{d-y_3}{\sigma})^2} \\ &\times {}_1F_1[0.5, 1, 0.5(d+y_1-y_3)/\sigma^2] dy_1 dy_3, \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{0.707107}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} {}_1F_1[0.5, 1, (w+\bar{d}-\beta)^2] e^{-w^2} dw, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $\bar{r} \equiv r/\sigma$, $\bar{d} \equiv d/\sigma$ y $w \equiv \bar{r}/2 - (\bar{d} - 2\beta/2)$ y hemos introducido la variable v que satisface $y_1 \equiv v+r/2$ y $y_3 \equiv v-r/2$. Los factores que multiplican a la energía cinética y a la energía potencial en la Ec. (3.12) pueden ser factorizados convenientemente si elegimos una a_{excit} tal que [33]

$$\frac{\hbar^2}{ma_{excit}^2} = \frac{\sigma^2}{4\pi\epsilon_0 e a_{excit}}. \quad (3.16)$$

Resolviendo la ecuación (3.16) para a_{excit} obtenemos.

$$a_{excit} = \frac{4\pi\epsilon_0 e \hbar^2}{e^2 m} = \frac{\epsilon a_0}{0.05}. \quad (3.17)$$

que nos sirve de unidad de longitud, donde $m = 0.05m_e$ es la masa reducida del electrón y el hueco, m_e es la masa del electrón, $a_0 = 4\pi\hbar^2\epsilon_0/e^2m_e = 0.5\text{\AA}$ es el radio de Bohr y podemos pensar así que a_{excit} es el radio de Bohr del excitón. Sustituyendo el valor de a_{excit} en la Eq. (3.12) y usando Eq.(3.15) obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle \Psi(y_1, y_3) | \tilde{H} | \Psi(y_1, y_3) \rangle &= D [0.5 + 0.25\beta^2 \\ &- \frac{0.707107}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} {}_1F_1[0.5, 1, (w+\bar{d}-\beta)^2] e^{-w^2} dw] \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde D tiene unidades de energía y es igual a $D = \hbar^2/ma_{excit}^2$.

El mínimo del valor esperado de la energía nos da información acerca del potencial atractivo a través del parámetro β , el cual encontramos minimizando la Ec. (3.18). La Tabla 3.1 nos muestra el valor del mínimo de β , así obtenido para distintos valores de \bar{d} . β es un parámetro que mide la contribución del potencial de Coulomb a la energía total.

Tabla 3.1
Energía mínima del sistema
Caso atractivo

$\bar{d} = d/\sigma$	Energía (h^2/ma_{ext}^2)	β
4	0.317951	0.0981788
5	0.3562	0.0598854
6	0.380895	0.0407117
7	0.39824	0.0295747
8	0.411134	0.0224918
9	0.421109	0.0176951
10	0.42906	0.0142914
11	0.435549	0.0117867
12	0.440947	0.00988913
13	0.445509	0.00841662
14	0.449414	0.00725079
15	0.452797	0.00631185
16	0.455755	0.00554443
17	0.458363	0.00490909
18	0.460681	0.00437715
19	0.462754	0.00392729
20	0.464619	0.00354345

La primera columna de la Tabla 3.1 muestra los valores posibles de \bar{d} de acuerdo a los datos reales que puede tener nuestro sistema, la separación del centro de los alambres d y el espesor de los mismos σ (se discuten al final de la sección). La segunda columna exhibe la energía mínima del sistema en los valores de la columna 1 y la tercera columna contiene el valor de β que minimiza a la Ec. (3.18) al cual se alcanza el mínimo de energía.

Cargas con mismo signo.

Ahora consideramos el caso en que las cargas tienen el mismo signo, en este caso, la función de onda propuesta tiene información de un potencial netamente repulsivo, por lo que difiere por signos del caso atractivo, esta es la función de onda de prueba .

$$\Psi(y_1, y_3) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_3+d/2)^2} e^{-\frac{dy_1}{2\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1-d/2)^2} e^{\frac{dy_1}{2\sigma}}. \quad (3.19)$$

Usamos la ecuación (3.12) para escribir el valor esperado de la energía.

$$\langle \Psi(y_1, y_3) | \hat{H} | \Psi(y_1, y_3) \rangle = D \left[0.5 + \frac{\beta^2}{4} \right] + \frac{0.707107}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} {}_1F_1[0.5, 1, (w + \bar{d} + \beta)^2] e^{-w^2} dw \quad (3.20)$$

donde $\bar{U}_{eff}(y_1, y_3) \equiv (0.707107/\sigma\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} {}_1F_1[0.5, 1, (w + \bar{d} + \beta)^2] e^{-w^2} dw$ es el potencial repulsivo con $y_1 \equiv v + r/2$, $y_3 \equiv v + r/2$, $\bar{r} \equiv r/\sigma$, $w \equiv \bar{r}/2 - (\bar{d} + 2\beta)/2$ y $\bar{d} \equiv d/\sigma$.

La integral que aparece en el valor esperado de la energía se obtiene numéricamente, se obtiene el valor de β para el cual la energía es mínima [34]. La Tabla 3.2 nos muestra el mínimo para distintos valores de \bar{d} .

Tabla 3.2
Energía mínima del sistema
Caso repulsivo

$\bar{d} = d/\sigma$	Energía (h^2/ma^2_{rel})	β
5	0.642072	0.057056
6	0.618299	0.039612
7	0.601330	0.029075
8	0.588615	0.022239
9	0.578736	0.017556
10	0.570839	0.014210
11	0.564382	0.011736
12	0.559001	0.009856
13	0.554456	0.008395
14	0.550559	0.007236
15	0.547183	0.006301
16	0.544230	0.005537
17	0.541625	0.004903
18	0.539309	0.004373
19	0.537238	0.003924
20	0.535374	0.003541

La Tabla 3.2 tiene las mismas columnas de la Tabla 3.1, pero para el caso repulsivo. En la Tabla 3.3 comparamos los resultados del caso atractivo y repulsivo de las Tablas 3.1 y 3.2, respectivamente.

Tabla 3.3
Energía mínima del sistema

Caso atractivo			Caso Repulsivo		
\bar{d}	β	Energía (h^2/ma_{eff}^2)	β	Energía (h^2/ma_{eff}^2)	
3.3	0.157286	0.274623	0.129619	0.715285	
5	0.059885	0.3662	0.057056	0.642072	
10	0.014291	0.42906	0.142095	0.570839	
15	0.006312	0.452797	0.006301	0.547183	

Las tres primeras columnas son las columnas de la Tabla 3.1 y las columnas restantes son las correspondientes a la Tabla 3.2.

Consideramos los valores experimentales que pueden ser $d = 100\text{\AA}$ y 150\AA , $\sigma = 10\text{\AA}$ y 40\AA , estos valores establecen limitaciones sobre \bar{d} , comparamos $\bar{d} = 3.3$ que corresponde a $d = 100\text{\AA}$ y $\sigma = 30\text{\AA}$, con $\bar{d} = 5$ para $d = 150\text{\AA}$ y $\sigma = 30\text{\AA}$. Es un hecho que la energía total es menor para $d = 100\text{\AA}$ (respecto a $d = 150\text{\AA}$); ya que la interacción atractiva es una cantidad negativa y mayor para $d = 100\text{\AA}$ (respecto a $d = 150\text{\AA}$). Contrariamente, un valor grande en la interacción repulsiva corresponde a un valor más grande y positivo en el valor de la energía total para $d = 100\text{\AA}$ (respecto a $d = 150\text{\AA}$). El valor de β es más grande para distancias cortas ($d = 100\text{\AA}$); puesto que la interacción repulsiva o atractiva es mayor cuando se encuentran las cargas muy cerca.

En este trabajo sólo consideramos el caso del potencial atractivo; ya que estamos modelando la interacción atractiva electrón-hueco corrigiendo así la distancia entre los centros de los alambres por una distancia efectiva menor \bar{d} que se muestra en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4
Distancia mínima o efectiva del sistema

$\tilde{d} = d/\sigma$	β	Caso atractivo		$d(A)$	$\sigma(A)$
		$\tilde{d}' = \tilde{d} - 2\beta$	$d'(A)$		
3.3	0.157286	2.98543	89.56290	100	30
5	0.059885	4.88023	97.60460	100	20
5	0.059885	4.88023	146.40690	150	30
10	0.014291	9.97142	99.7142	100	10
15	0.006312	14.9874	149.8737	150	10

En la primera columna se encuentra el valor de la distancia de separación entre los centros de los alambres en términos del ancho del alambre σ , la segunda columna muestra el valor del parámetro β que corresponde al mínimo de energía, la tercera columna muestra la distancia efectiva de nuestro sistema en términos de σ y la cuarta columna exhibe la distancia efectiva en Anstrongs que hemos colocado el valor de la distancia separación de los alambres en Anstrongs que consideramos al inicio del cálculo variacional para comparar la corrección a dicha distancia que se hizo en la columna tres. La sexta columna muestra el ancho de los alambres que hemos considerado en este trabajo.

3.3 Interacción de largo alcance

Como se mostró anteriormente el efecto global de la interacción fuerte de las cargas más cercanas (electrón-hueco) lo tomaremos en cuenta sólo a través de la distancia efectiva \tilde{d} , que es el valor esperado de la distancia mínima a la cual se pueden atraer las probabilidades de la densidad de carga. Ahora vamos a estudiar las interacciones a escalas espaciales más grandes en comparación con la interacción entre cargas frontales apenas consideradas, que corresponden a la interacción dipolo-dipolo.

Si la interacción coulombiana entre cargas opuestas es muy fuerte la distancia relativa (\tilde{d}) entre cada par electrón-hueco cambia muy poco en comparación con las variaciones espaciales en la distancia entre dipolos por lo que la aproximaremos como fija. El potencial de interacción está dado por la ecuación (3.6), nótese que al considerar la distancia efectiva \tilde{d} las coordenadas de las partículas 3 y 4, se pueden escribir en términos de las coordenadas

de las partículas 1 y 2, es decir, $(x_1, y_1 + d', z_1)$ son las coordenadas de q_3 y $(x_2, y_2 + d', z_2)$ son las coordenadas de q_4 , la ecuación (3.6) se reduce,

$$\hat{V}_{int}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{2q^2}{\epsilon\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} - \frac{2q^2}{\epsilon\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2 - d')^2 + (z_1 - z_2)^2}} - 2\frac{q^2}{\epsilon d'} \quad (3.21)$$

donde d' es la distancia efectiva entre cada par electrón-hueco y ϵ es la constante de apantallamiento apropiada de los medios semiconductores involucrados. De esta manera hemos reducido el problema de cuatro partículas cargadas fermiónicas a sólo dos partículas dipolares bosónicas.

En la Fig. 3 podemos observar que el electrón con subíndice 1 forma un par con el hueco de subíndice 3, es decir, un dipolo. Además, el electrón con subíndice 2 forma otro dipolo con el hueco de subíndice 4. Ambos dipolos están separados una distancia relativa $z_1 - z_2$. Cambiando la notación de los subíndices de partículas a dipolos, de ahora en adelante el subíndice 1 denota al dipolo 1 y el subíndice 2 denota al dipolo 2, p_1 y p_2 , respectivamente. Usamos la ecuación de Schrödinger para obtener la interacción efectiva entre los dos dipolos y despreciamos las posibles imperfecciones en las paredes de los alambres, tenemos que

$$\hat{H}\Psi(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2) = E_T\Psi(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2) \quad (3.22)$$

en donde E_T es la energía total del sistema completo. Nótese que los subíndices 1 y 2 ya no se refieren a las coordenadas de las partículas consideradas en la ecuación (3.2) ahora son las coordenadas del dipolo 1 y del dipolo 2, respectivamente

La función de onda de los dos dipolos puede aproximarse como:

$$\Psi^{1D}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_2) = \Psi_1^0(x_1, y_1)\Psi_2^0(x_2, y_2)S_1(z_1, z_2) \quad (3.23)$$

en donde $\Psi_1^0(x_1, y_1)$, $\Psi_2^0(x_2, y_2)$ son las funciones de onda de los estados base de confinamiento transversal, las cuales satisfacen

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \Psi_1^0(x_1, y_1) + V_1(x_1, y_1) \Psi_1^0(x_1, y_1) = E_1^0 \Psi_1^0(x_1, y_1) \quad (3.24)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi_2^0(x_2, y_2) + V_2(x_2, y_2) \Psi_2^0(x_2, y_2) = E_2^{0t} \Psi_2^0(x_2, y_2) \quad (3.25)$$

y $S(z_1, z_2)$ es la parte de la función de onda que describe la interacción entre dipolos. $V_1(x_1, y_1)$ y $V_2(x_2, y_2)$ son los potenciales de confinamiento en el eje x y en el eje y que mantienen sobre los rieles al dipolo 1 y al dipolo 2, respectivamente: son potenciales transversales armónicos, ésto es, $V_1(x_1, y_1) = kx_1^2/2 + ky_1^2/2$ y $V_2(x_2, y_2) = kx_2^2/2 + ky_2^2/2$. Para encontrar la ecuación de Schrödinger excitónica para $S_1(z_1, z_2)$ calculamos la proyección sobre el subespacio de la coordenada z dada por la expresión

$$\langle \Psi_1^0(x_1, y_1) \Psi_2^0(x_2, y_2) | \hat{H} | \Psi \rangle = E_t S_1(z_1, z_2). \quad (3.26)$$

que es similar a un bracket pero difiere de éste en que el lado izquierdo de la expresión no contiene a $S_1(z_1, z_2)$. Usando la Ec. (3.23) en las ecuaciones (3.24) y (3.25), y sustituyendo ambas en la Ec. (3.26) obtenemos,

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial z_{cm}^2} \right) + E_1^{0t} + E_2^{0t} + V_{eff}^1 \right] S_1(z_1, z_2) = E_t S_1(z_1, z_2). \quad (3.27)$$

en donde $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, $z \equiv z_2 - z_1$ y $z_{cm} \equiv (m_1 z_1 + m_2 z_2) / (m_1 + m_2)$ son la masa relativa y las coordenadas relativa y de centro de masa, respectivamente.

Separando variables $S(z, z_{cm}) = f(z)e^{ikz_{cm}}$ en la Ec. (3.27), ésta puede reducirse a

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{eff}^1 \right] f(z) = E_{exc} f(z) \quad (3.28)$$

en donde $E_{exc} \equiv E_t - (E_1^{0t} + E_2^{0t} + E_{cm})$ con $E_{cm} \equiv \hbar^2 k^2 / 2(m_1 + m_2)$ y

$$V_{eff}^1(z) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_1^0(x_1, y_1)|^2 |\Psi_2^0(x_2, y_2)|^2 \tilde{V}_{int} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \quad (3.29)$$

es el potencial efectivo.

La Ec. (3.29) es para dos partículas p_1 y p_2 que están en sus respectivos estados base. A diferencia del potencial de pared infinita, el potencial armónico puede modelar físicamente potenciales reales tanto débiles como fuertes. En términos de la desviación estándar $\sigma_{x_1} = \langle (x_1)^2 \rangle_0$, $\sigma_{y_2} = \langle (y_2)^2 \rangle_0$, $\sigma_{x_2} = \langle (x_2)^2 \rangle_0$ y $\sigma_{y_2} = \langle (y_2)^2 \rangle_0$ (del orden de magnitud del

grosso del alambre, donde 0 indica el estado base) estos potenciales permiten escribir las funciones de onda normalizadas de los estados base,

$$|\Psi_1^0(x_1, y_1)|^2 = \frac{e^{-\left(\frac{x_1^2}{2\sigma_{x1}^2} + \frac{y_1^2}{2\sigma_{y1}^2}\right)}}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{y1}} \quad (3.30)$$

$$|\Psi_2^0(x_2, y_2)|^2 = \frac{e^{-\left(\frac{x_2^2}{2\sigma_{x2}^2} + \frac{y_2^2}{2\sigma_{y2}^2}\right)}}{2\pi\sigma_{x2}\sigma_{y2}} \quad (3.31)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.6), (3.30) y (3.31) en la expresión para el potencial Ec.(3.29), obtenemos

$$\begin{aligned} V_{eff}^{1D}(z) &= \frac{e^2}{4\epsilon\pi^2\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2+(y_1-d')^2+y_2^2)} \right) \\ &\quad \frac{dx_1 dx_2 dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + z^2}} \\ &= \frac{e^2}{4\epsilon\pi^2\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((u+\frac{r}{2}\sin\phi)^2 + (u-\frac{r}{2}\sin\phi)^2 + (v-\frac{r}{2}\cos\phi)^2)} \\ &\quad \left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(v+\frac{r}{2}\cos\phi)^2} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(v+\frac{r}{2}\cos\phi-d')^2} \right] \frac{rdrd\phi dv du}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \frac{e^2}{4\epsilon\pi^2\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{v^2}{2}+2uv+2u^2)} \\ &\quad \left[1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2rd'-dr\cos\phi+d'^2)} \right] \frac{rdrd\phi dv du}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad (3.32) \end{aligned}$$

en donde hemos introducido las variables $r \sin \phi \equiv x_1 - x_2$, $v = (x_1 + x_2)/2$, $r \cos \phi \equiv y_1 - y_2$ y $u = (y_1 + y_2)/2$ junto con la condición $\sigma_{x1} = \sigma_{y1} = \sigma_{x2}$ y hemos reescrito $E_{e,rc}^2 = E_{e,rc} + e^2/2\epsilon d'$. En la ecuación (3.32) la integral sobre u es inmediata y conducen a la expresión

$$\begin{aligned} \epsilon V_{eff}^{1D}(z)/2e^2 &= \frac{1}{4\sigma^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} I_0 \left(\frac{rd'}{2\sigma^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(2v^2-2vd'+d'^2)} dv \right] \\ &\quad \times \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad (3.33) \end{aligned}$$

El valor del potencial efectivo está en función del valor de la separación de los alambres d' .

$$\begin{aligned}
\epsilon V_{eff}^{1D}(z)/2e^2 &= \frac{1}{2\sigma} e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}} \int_{|z|/2\sigma}^{\infty} e^{-u^2} du - \frac{1}{4\sigma^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}} I_0\left(\frac{rd'}{2\sigma^2}\right) \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(2v^2-2vd'-d'^2)} dv \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma} e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}} (1 - \text{erf}(|z|/2\sigma)) - \frac{1}{4\sigma^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}} \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} I_0\left(\frac{rd'}{2\sigma^2}\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(2v^2-2vd'-d'^2)} dv
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $\text{erf}(x)$ es la función de error y $I_0(x)$ es la función de Bessel modificada de orden cero. Reescribimos la ecuación (3.34) en términos de $\tilde{d}' = d'/\sigma$,

$$\begin{aligned}
\epsilon \sigma V_{eff}^{1D}(z)/2e^2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{\tilde{z}^2}{4}} (1 - \text{erf}(|\tilde{z}|/2)) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-r'^2} \frac{\tilde{r}d\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{r}^2 + (\tilde{z}/2)^2}} I_0(\tilde{r}\tilde{d}') \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(2\tilde{v}^2-2\tilde{v}\tilde{d}'+\tilde{d}'^2)} d\tilde{v},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

donde $\tilde{z} = z/\sigma$, $\tilde{v} = v/\sigma$ y $\tilde{r} = r/\sigma$. Sustituimos el valor de la integral $\text{Int}(\tilde{d}') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(2\tilde{v}^2-2\tilde{v}\tilde{d}'+\tilde{d}'^2)} d\tilde{v} = \sqrt{\pi} e^{-\tilde{d}'^2/4}$ en la ecuación (3.35) y obtenemos.

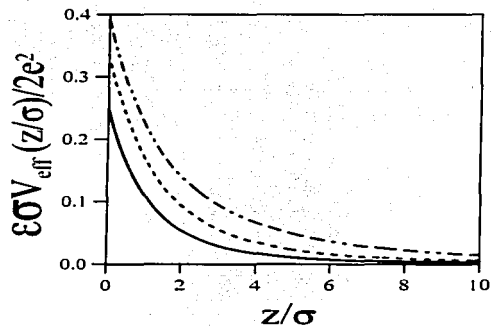
$$\begin{aligned}
\epsilon \sigma V_{eff}^{1D}(z)/2e^2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{\tilde{z}^2}{4}} (1 - \text{erf}(|\tilde{z}|/2)) - \frac{\sqrt{\pi} e^{-\tilde{d}'^2/4}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-r'^2} \frac{\tilde{r}d\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{r}^2 + (\tilde{z}/2)^2}} I_0(\tilde{r}\tilde{d}') \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{\tilde{z}^2}{4}} (1 - \text{erf}(|\tilde{z}|/2)) \\
&\quad - \frac{e^{-\tilde{d}'^2/4}}{2} \int_0^{\infty} e^{-r'^2} \frac{\tilde{r}d\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{r}^2 + (\tilde{z}/2)^2}} I_0(\tilde{r}\tilde{d}').
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Para graficar (Ec. 3.36) usamos los parámetros típicos de la estructura de un semiconductor[29]: $\tilde{d}' = 2.98543$ que corresponde a una distancia de separación entre los centros de los alambres de $d' = 89.56290 \text{ \AA}$ y de $\sigma = 30 \text{ \AA}$ para el ancho de los alambres. $\tilde{d}' = 4.88023$ correspondiente a $d' = 97.60460 \text{ \AA}$ y $\sigma = 20 \text{ \AA}$. Finalmente, $\tilde{d}' = 9.97142$ correspondiente a $d' = 99.7142 \text{ \AA}$ y $\sigma = 10 \text{ \AA}$.

La Fig. 4 muestra el potencial efectivo de la interacción entre las densidades de carga dipolares confinadas en el eje x y en el eje y por un potencial armónico en dos alambres cuánticos paralelos, este potencial está en función de la distancia relativa de la separación de los dipolos z . En la Fig. 4 hemos usado la ecuación (3.36) en $\tilde{d}' = 2.98543, 4.88023$ y

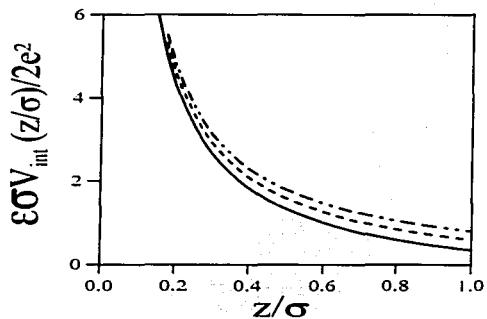
9.97142, donde $d' = d'/\sigma$, d' es la distancia de separación de los alambres paralelos y σ es el ancho de los alambres. Observamos que el valor del potencial efectivo es mayor cuando el espesor de los alambres es más pequeño, en este caso, $\sigma = 10\text{\AA}$. En la Fig. 5 graficamos el potencial de interacción (Ec. 3.21) en función de z y observamos que cualitativamente es el mismo comportamiento que en la Fig. 4, es decir, el valor del potencial de interacción es mayor cuando el espesor de los alambres es $\sigma = 10\text{\AA}$. Cuantitativamente el valor del potencial efectivo aumenta; ya que al disminuir el ancho de los alambres los niveles de energía de las coordenadas de confinamiento entre el estado base y el primer estado excitado se separan, de tal forma que no es posible que el excitón pase a niveles de energía mayores al estado base. Es decir, las energías del estado base a lo largo de los ejes x y y permanecen congeladas y sólo se puede ganar energía en el eje z lo que hace que el valor de la energía del potencial efectivo en la coordenada z aumente al disminuir el ancho de los alambres.

En resumen, el potencial efectivo que hemos calculado va más allá de un potencial de interacción, puesto que contiene información sobre la geometría y estructura del sistema al incluir los valores de σ y de ϵ ; además de tomar en cuenta el confinamiento de los electrones y huecos que forman los dipolos.



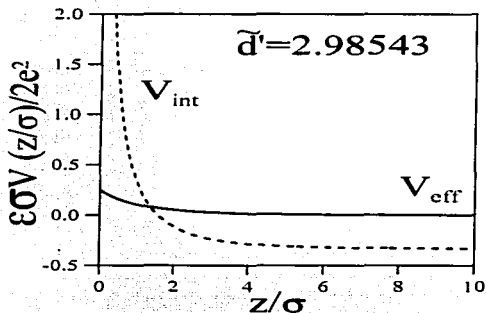
4: La línea sólida representa el potencial efectivo cuando el ancho de los alambres es $\sigma = 30\text{\AA}$ y la distancia efectiva a la cual están separados es $d' = 89.56290\text{\AA}$. La línea segmentada muestra el potencial efectivo en $\sigma = 20\text{\AA}$ y $d' = 97.60460\text{\AA}$. Finalmente, la línea segmentada más puntos exhibe el potencial efectivo en $\sigma = 10\text{\AA}$ y $d' = 99.7142\text{\AA}$ (Ec. 3.36).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



5: Potencial de interacción de dos dipolos considerados como 4 partículas cargadas (Ec. 3.21). La línea sólida representa el potencial de interacción cuando el ancho de los alambres es $\sigma = 30\text{\AA}$ y la distancia efectiva a la cual están separados es $d' = 89.56290\text{\AA}$. La línea segmentada muestra el potencial de interacción en $\sigma = 20\text{\AA}$ y $d' = 97.60460\text{\AA}$. Finalmente, la línea segmentada más puntos exhibe el potencial de interacción en $\sigma = 10\text{\AA}$ y $d' = 99.7142\text{\AA}$

Las Fig. 6, 7 y 8 exhiben el comportamiento del potencial de interacción y el potencial efectivo para $\tilde{d}' = 2.98543$, 4.88023 y 9.97142, respectivamente. Nótese que al haber tomado los alambres de ancho finito σ , la singularidad del potencial de interacción fue eliminada.

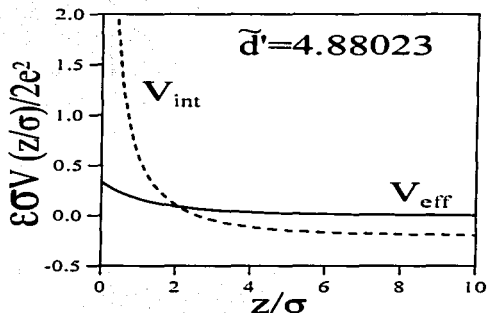


6: La línea sólida representa el potencial efectivo y la línea segmentada representa al potencial de interacción en $\tilde{d}' = d'/\sigma$, donde $d' = 89.56290\text{\AA}$ es la distancia efectiva a la cual están separados los alambres de ancho $\sigma = 30\text{\AA}$.

Si tomamos la transformada de Fourier de $V_{eff}^{1D}(z)$ definida por

$$V(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqz} V_{eff}^{1D}(z) dz, \quad (3.37)$$

Al sustituir la ecuación (3.33) en la ecuación (3.37) obtenemos la transformada de Fourier para el potencial efectivo en términos de \tilde{d}' .



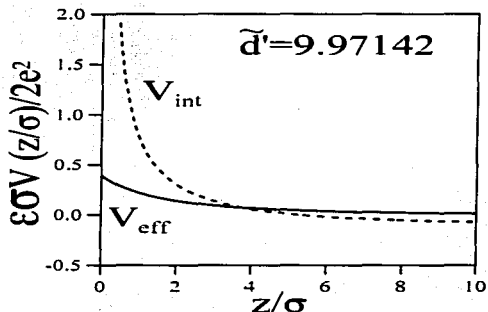
7: La línea sólida representa el potencial efectivo y la línea segmentada representa al potencial de interacción en $\tilde{d}' = d'/\sigma$, donde $d' = 97.60460\text{\AA}$ es la distancia efectiva a la cual están separados los alambres de ancho $\sigma = 20\text{\AA}$.

$$\begin{aligned}
 V(q) &= \frac{e^2}{2\pi\epsilon\sigma^2} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \left[1 - \frac{\text{Int}(d')}{\sqrt{\pi}} I_0\left(\frac{rd'}{2\sigma^2}\right) \right] \int_0^\infty \frac{\cos(qz)dz}{\sqrt{r^2+z^2}} r dr. \\
 &= \frac{e^2}{2\pi\epsilon} \int_0^\infty u du e^{-\frac{z^2}{4}} \left[1 - e^{-\tilde{d}'^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \int_0^\infty \frac{\cos(qu\sigma w)dw}{\sqrt{1+w^2}} dw. \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

donde $u \equiv r/\sigma$, $\tilde{d}' \equiv d'/\sigma$ y $z' \equiv z/\sigma$. Además $w \equiv z'/u$. La Eq. (3.38) se puede escribir como:

$$V(q) = \frac{e^2}{2\pi\epsilon} \int_0^\infty u du e^{-\frac{z^2}{4}} \left[1 - e^{-\tilde{d}'^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] K_0(q\sigma u) \quad (3.39)$$

en donde $K_0(q\sigma u)$ es la función de Bessel modificada de orden cero.



8: La línea sólida representa el potencial efectivo y la línea segmentada representa al potencial de interacción en $\tilde{d}' = d'/\sigma$, donde $d' = 99.7142\text{\AA}$ es la distancia efectiva a la cual están separados los alambres de ancho $\sigma = 10\text{\AA}$.

Para graficar la ecuación (3.39) consideramos los valores típicos de la estructura de un semiconductor[29]: $\tilde{d}' = 2.98543$ que corresponde a una distancia de separación entre los centros de los alambres de $d' = 89.56290\text{\AA}$ y de $\sigma = 30\text{\AA}$ para el ancho de los alambres, $\tilde{d}' = 4.88023$ correspondiente a $d' = 97.60460\text{\AA}$ y $\sigma = 20\text{\AA}$. Finalmente, $\tilde{d}' = 9.97142$ correspondiente a $d' = 99.7142\text{\AA}$ y $\sigma = 10\text{\AA}$.

La Fig. 9 exhibe el comportamiento de la transformada de Fourier para $\tilde{d}' = 2.98543$, 4.88023 y 9.97142 . El valor de la transformada de Fourier para el potencial efectivo es mayor cuando el ancho del alambre, σ , es más pequeño, en este caso, $\sigma = 10\text{\AA}$.

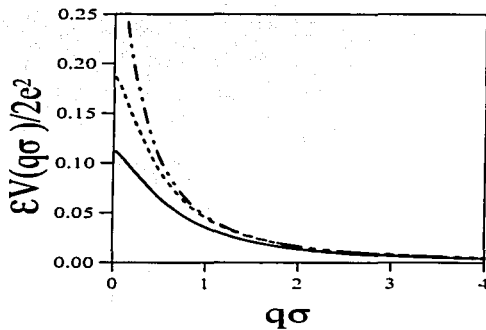
Al igual que el potencial efectivo la transformada de Fourier del potencial efectivo también

está definida tanto para q 's pequeñas como para q 's grandes, que en el espacio de coordenadas equivale a distancias grandes y cortas, respectivamente.

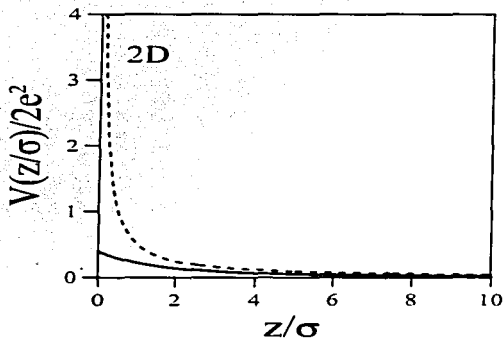
En resumen el estado base gaussiano es apropiado para una sólo partícula, sin embargo, para nuestras partículas vecinas 1 y 3, 2 y 4, confinadas en dos alambres cuánticos paralelos es necesario tomar en cuenta la interacción electrostática entre dichas partículas. Para ello, recurrimos a un cálculo variacional (sección 3.2) para tomar en cuenta el desplazamiento debido a la atracción (si son de carga opuesta) y repulsión (si son de la misma carga). En la sección 3.3 calculamos la transformada de Fourier del potencial efectivo que se usa en el cálculo de la función dieléctrica del capítulo 4.

Por otra parte, hemos mencionado en la introducción de este trabajo (capítulo 1) que nuestro sistema físico es similar al considerado por Ulloa en la ref. [5], quien usa un potencial interdipolar en 2D para describir la interacción del sistema. A pesar de que el potencial efectivo calculado por nosotros es en 1D, la diferencia de nuestro potencial con respecto al de Ulloa radica en que nuestro potencial contiene más información sobre la geometría y estructura del sistema, así como del confinamiento del electrón y el hueco que forman al excitón. Además de no presentar ningún tipo de singularidad en el origen como se ilustra en la Fig. (10).

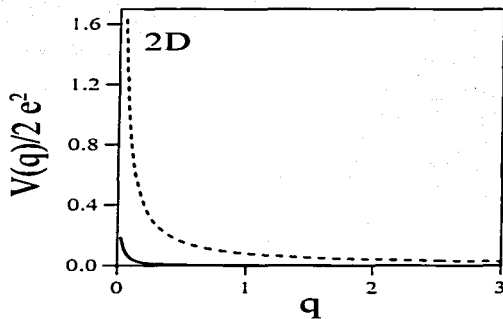
El potencial considerado por Ulloa es una buena aproximación para las interacciones dipolares de largo alcance, es decir, z 's grandes que en el espacio de Fourier es equivalente a considerar q 's pequeñas, nuestro potencial contempla las interacciones de largo y corto alcance que en el espacio de Fourier equivale a números de onda pequeños y grandes, como se muestra en la Fig. 11. Estos números de onda están asociados con el momento de los excitones por la relación $\hbar q$.



9: La línea sólida representa la transformada de Fourier del potencial efectivo en $d' = d'/\sigma$, donde $d' = 89.56290\text{\AA}$ es la distancia efectiva a la cual están separados los alambres de ancho $\sigma = 30\text{\AA}$. La línea segmentada muestra la transformada de Fourier del potencial efectivo en $d' = 97.60460\text{\AA}$ y $\sigma = 20\text{\AA}$. Finalmente, la línea segmentada más puntos exhibe la transformada de Fourier del potencial efectivo en $d' = 99.7142\text{\AA}$ y $\sigma = 10\text{\AA}$.



10: La línea segmentada muestra el potencial interdipolar en 2D calculado por Ulloa [5]. La línea sólida representa el potencial efectivo en 1D calculado por nosotros en $d' = 99.7142\text{\AA}$ y $\sigma = 10\text{\AA}$, donde d' es la distancia efectiva a la cual están separados los alambres de ancho σ .



11: La línea segmentada muestra la transformada de Fourier del potencial interdipolar en 2D calculado por Ulloa [5]. La línea sólida representa la transformada de Fourier del potencial efectivo en 1D calculado por nosotros en $d' = 99.7142\text{\AA}$ y $\sigma = 10\text{\AA}$, donde d' es la distancia efectiva a la cual están separados los alambres de ancho σ .

CAPÍTULO 4

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DIELECTRICA DEL SISTEMA

El gas de excitones o dipolos es un gas neutro, es decir, no está cargado. Los dipolos interactúan repulsivamente entre sí, provocando una continua expansión del gas de dipolos. En un sistema acotado los dipolos tienden a una distribución homogénea, pues los dipolos al estar confinados llegan a la frontera donde se reflejan y así generan oscilaciones en un sistema que originalmente era inestable[5]. Para calcular los modos longitudinales de oscilación de nuestro sistema es necesario calcular la función dieléctrica.

En la sección 4.1 de este capítulo calculamos la función dieléctrica en $T = 0$, en la sección 4.2 calculamos la función dieléctrica en $T \neq 0$ y finalmente en la sección 4.3 calculamos los modos de oscilación de nuestro sistema.

La expresión para la función dieléctrica en una dimensión está dada por [4, 18, 19].

$$\epsilon(q, \omega) = 1 + \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{V(q)}{L} \left(\frac{F(\mathbf{k}) - F(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} \right), \quad (4.1)$$

donde $V(q)$ es la componente 1D de Fourier del potencial de interacción, \mathbf{q} y ω son el número de onda y la frecuencia de oscilación del gas de bosones, respectivamente. $F(\mathbf{k}) = [e^{\beta(\hbar^2 k^2/2m - \mu)} - 1]^{-1}$ es la función de distribución Bose-Einstein para un gas de bosones, $\beta = 1/k_B T$ con k_B la constante de Boltzmann, μ el potencial químico, m es la masa efectiva del sistema, \mathbf{k} es el número de onda de valores permitidos de las partículas bosónicas libres a lo largo de los alambres de longitud L .

4.1 Función dieléctrica a temperatura cero

El cálculo de la función dieléctrica a $T = 0$ es interesante porque no hay ninguna restricción ante el intercambio de partículas en nuestro sistema, es decir, el potencial químico es igual a cero ($\mu = 0$). La función de distribución de Bose, la cual renombramos como $F_0(\mathbf{k})$, se comporta para $T = 0$ de la siguiente manera,[4]

$$F_0(\mathbf{k}) = \begin{cases} N & \text{si } \mathbf{k} = 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{k} \neq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

con N el número de partículas en el sistema de longitud L . La suma del segundo término a la derecha (4.1) toma la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \frac{F_0(\mathbf{k}) - F_0(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} &= \frac{F_0(\mathbf{k} = 0)}{\omega + \hbar q^2/2m} - \frac{F_0(\mathbf{k} - \mathbf{q} = 0)}{\omega - \hbar q^2/2m + \hbar q^2/2m} \\ &= N \left(\frac{-\hbar q^2/m}{\omega^2 - \hbar^2 q^4/4m^2} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.1) obtenemos finalmente,

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{1}{\hbar} \frac{V(q)}{L} N \left(\frac{-\hbar q^2/m}{\omega^2 - \hbar^2 q^4/4m^2} \right). \quad (4.4)$$

4.2 Función dieléctrica unidimensional para $T \neq 0$

Usamos la función de distribución de Bose,

$$F_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{z^{-1} e^{\hbar^2 k^2/2mk_B T} - 1} \quad (4.5)$$

Desarrollamos el siguiente término en la ecuación (4.1).

$$\frac{F_0(\mathbf{k}) - F_0(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} =$$

$$\left[\frac{1}{z^{-1} e^{\hbar^2 k^2/2mk_B T} - 1} - \frac{1}{z^{-1} e^{\hbar^2 (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2/2mk_B T} - 1} \right] \left(\frac{1}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} \right). \quad (4.6)$$

Usando la expresión para la serie geométrica,

$$\frac{1}{x^{-1} - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} x^j, \quad |x| < 1 \quad (4.7)$$

Donde $x = z e^{-\hbar^2/2mk_B T}$ y la fugacidad $z = e^{2\mu}$ pertenece al intervalo $[0, 1]$. El segundo miembro de la ecuación (4.6) se puede reescribir como

$$\sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\frac{e^{-\hbar^2 k^2 j/2mk_B T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} - \frac{e^{-\hbar^2 (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 j/2mk_B T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} \right]. \quad (4.8)$$

Sustituyendo este resultado en (4.1), en el mismo espíritu que Frankel en su cálculo para bosones en 2D [4],

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{V(q)}{L} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\frac{e^{-\hbar^2 k^2 j/2mk_B T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-\hbar^2 (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 j/2mk_B T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2/2m} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aproximando la suma sobre los estados por un integral, es decir,

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk, \quad (4.10)$$

e intercambiando las posiciones de la suma sobre j y la integral sobre k , la anterior ecuación 4.9 queda

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk e^{-\hbar^2 k^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2 / 2m} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk e^{-\hbar^2 (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2 / 2m} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Realizamos un cambio de variable $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$, entonces $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{q}$ y $d\mathbf{k} = d\mathbf{k}'$, la segunda integral de la ecuación (4.11) resulta,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}' e^{-\hbar^2 k'^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)(\mathbf{k}' + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2 / 2m} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}' e^{-\hbar^2 k'^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k}' \cdot \mathbf{q} - \hbar q^2 / 2m}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

La ecuación (4.11) se reescribe,

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk e^{-\hbar^2 k^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \hbar q^2 / 2m} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk e^{-\hbar^2 k^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \hbar q^2 / 2m} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para realizar las integrales de la ecuación (4.13), necesitamos resolver el producto punto $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$ del denominador, escojamos las coordenadas del sistema tales que el vector \mathbf{k} es paralelo a \mathbf{q} , es decir, $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{q} = k'q$.

La expresión 4.13 queda de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk e^{-\hbar^2 k^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)kq + \hbar q^2 / 2m} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk e^{-\hbar^2 k^2 j / 2mk_j T}}{\omega - (\hbar/m)k'q - \hbar q^2 / 2m} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sea $x^2 \equiv \hbar^2 k^2 j / 2mk_j T$, $k \equiv (2mk_j T / \hbar^2 j)^{1/2} x$ y $dk \equiv (2mk_j T / \hbar^2 j)^{1/2} dx$. La ecuación (4.14) se reescribe,

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{-x^2}}{x - \left(\frac{\hbar^2 j}{2mk_j T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\hbar q} + \frac{q}{2}\right)} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{-x^2}}{x - \left(\frac{\hbar^2 j}{2mk_j T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\hbar q} - \frac{q}{2}\right)} \right]. \quad (4.15)$$

Sea $A \equiv \hbar^2/2mk_j T$.

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{-x^2}}{x - (Aj)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\hbar q} + \frac{q}{2}\right)} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{-x^2}}{x - (Aj)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\hbar q} - \frac{q}{2}\right)} \right]. \quad (4.16)$$

Sea $C_j \equiv A^{\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}}$, $D \equiv m\omega/\hbar q + q/2$ y $B \equiv m\omega/\hbar q - q/2$.

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{-x^2}}{x - C_j B} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{-x^2}}{x - C_j D} \right]. \quad (4.17)$$

Si usamos la función de dispersión de plasma de Fried and Conte [4, 37]

$$Y(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{-x^2}}{x - \zeta}, \quad (4.18)$$

obtenemos

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \sqrt{\pi} [Y(C_j B) - Y(C_j D)]. \quad (4.19)$$

Para valores reales de $\zeta = C_j B$, $C_j D$, $Y(\zeta)$ se escribe,

$$Y(\zeta) = i\sqrt{\pi} e^{-\zeta^2} [1 + \phi(i\zeta)] \quad (4.20)$$

y $\phi(\zeta)$ es la función error [37],

$$\phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-t^2} dt. \quad (4.21)$$

Reescribimos la Ec. (4.19),

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \sqrt{\pi} \left[i\sqrt{\pi} e^{-C_j^2 B^2} (1 + \phi(iC_j B)) \right. \\ &\quad \left. - i\sqrt{\pi} e^{-C_j^2 D^2} (1 + \phi(iC_j D)) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \pi i \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left[e^{-C_j^2 B^2} \right. \\ &\quad \left. - e^{-C_j^2 D^2} + e^{-C_j^2 B^2} \phi(iC_j B) - e^{-C_j^2 D^2} \phi(iC_j D) \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \frac{\pi}{i} \left[\sum_{j=1}^{\infty} z^j (e^{-C_j^2 D^2} - e^{-C_j^2 B^2}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} z^j e^{-C_j^2 D^2} \phi(iC_j D) - \sum_{j=1}^{\infty} z^j e^{-C_j^2 B^2} \phi(iC_j B) \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sustituimos la expresión (ver apéndice I),

$$\sum_{j=1}^{\infty} z^j \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} = iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p) x^{p+1/2}} (1 + g_{1/2+p}(z)), \quad (4.25)$$

en la Ec. (4.24) obtenemos,

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi\hbar} V(q) \frac{m}{\hbar q} \frac{\pi}{i} \left[\sum_{j=1}^{\infty} z^j (e^{-C_j^2 D^2} - e^{-C_j^2 B^2}) + iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{(AD^2)^{p+1/2}} - \frac{1}{(AB^2)^{p+1/2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Desarrollaremos por partes la ecuación (4.26), del segundo sumando que está en los paréntesis cuadrados, obtenemos

$$iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left[\frac{(AB^2)^{p+1/2} - (AD^2)^{p+1/2}}{(A^2 D^2 B^2)^{p+1/2}} \right]. \quad (4.27)$$

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left[\frac{A^{p+1/2} B^{2p+1} - A^{p+1/2} D^{2p+1}}{(ABD)^{2p+1}} \right], \quad (4.28)$$

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) A^{p-2p+1/2-1} \left[\frac{B^{2p+1} - D^{2p+1}}{(BD)^{2p+1}} \right], \quad (4.29)$$

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \frac{1}{A^{p+1/2}} \left[\frac{B^{2p+1} - D^{2p+1}}{(BD)^{2p+1}} \right]. \quad (4.30)$$

Sustituyendo los valores de A , B , C y D , en la Ec. (4.30) obtenemos,

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \frac{1}{(\hbar^2/2mk_j T)^{p+1/2}} \times \left[\frac{(m\omega/\hbar q - q/2)^{2p+1} - (m\omega/\hbar q + q/2)^{2p+1}}{((m\omega/\hbar q - q/2)(m\omega/\hbar q + q/2))^{2p+1}} \right], \quad (4.31)$$

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2mk_j T}{\hbar^2} \right)^{p+1/2} \times \left[\frac{(m\omega/\hbar q - q/2)^{2p+1} - (m\omega/\hbar q + q/2)^{2p+1}}{(m^2 \omega^2 / \hbar^2 q^2 - q^2/4)^{2p+1}} \right], \quad (4.32)$$

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2mk_j T}{\hbar^2} \right)^{p+1/2} \times \left[(m\omega/\hbar q)^{2p+1} \left(\frac{(1 - \hbar q^2/2m\omega)^{2p+1} - (m\omega/\hbar q + q/2)^{2p+1}}{(m^2 \omega^2 / \hbar^2 q^2)^{2p+1} (1 - \hbar^2 q^4/4m^2 \omega^2)^{2p+1}} \right) \right]. \quad (4.33)$$

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2mk_j T}{\hbar^2} \right)^{p+1/2} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{2p+1} \times \left[\frac{(1 - q^2 \hbar/2m\omega)^{2p+1} - (1 + q^2 \hbar/2m\omega)^{2p+1}}{(1 - \hbar^2 q^4/4m^2 \omega^2)^{2p+1}} \right], \quad (4.34)$$

$$= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2k_j T q^2}{m\omega^2} \right)^p \left(\frac{\hbar q}{m\omega} \right) \left(\frac{2mk_j T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - \hbar^2 q^4/4m^2 \omega^2} \times$$

$$\left[\frac{(1 - q^2 h/2m\omega)^{2p+1} - (1 + q^2 h/2m\omega)^{2p+1}}{(1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2)^{2p}} \right]. \quad (4.35)$$

Usamos la relación del apéndice II.

$$(1 - x)^{2p+1} - (1 + x)^{2p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2) \binom{2p+1}{2n+1} x^{2n} x \quad (4.36)$$

donde $x \equiv q^2 h/2m\omega$ y reescribimos la ecuación (4.35)

$$\begin{aligned} &= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2k_3 T q^2}{m\omega^2} \right)^p \left(\frac{\hbar q}{m\omega} \right) \left(\frac{2mk_3 T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2} \times \\ &\quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-2) \frac{\binom{2p+1}{2n+1} (q^2 h/2m\omega)^{2n} (q^2 h/2m\omega)}{(1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2)^{2p}} \right]. \quad (4.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2k_3 T q^2}{m\omega^2} \right)^p \left(\frac{\hbar^2 q^3}{m^2\omega^2} \right) \left(\frac{2mk_3 T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2} \times \\ &\quad \left[\sum_{n=0}^p (-2) \frac{\binom{2p+1}{2n+1} (q^4 \hbar^2/2m^2\omega^2)^n}{(1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2)^{2p}} \right]. \quad (4.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2k_3 T q^2}{m\omega^2} \right)^p \left(\frac{\hbar^2 q^3}{2m^2\omega^2} \right) \left(\frac{2mk_3 T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2} \times \\ &\quad \left[\sum_{n=0}^p (-2) \frac{\binom{2p+1}{2n+1} (q^4 \hbar^2/2m^2\omega^2)^n}{(1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2)^{2p}} \right]. \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$= -iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p)} (1 + g_{1/2+p}(z)) \left(\frac{2k_3 T q^2}{m\omega^2} \right)^p \left(\frac{\hbar^2 q^3}{2m^2\omega^2} \right) \left(\frac{2mk_3 T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - \hbar^2 q^4/4m^2\omega^2} \times$$

$$\left[\sum_{n=0}^p \frac{\binom{2p+1}{2n+1} (q^4 \hbar^2 / 2m^2 \omega^2)^n}{(1 - \hbar^2 q^4 / 4m^2 \omega^2)^{2p}} \right] \quad (4.40)$$

Incorporando este resultado a la ecuación (4.26) obtenemos.

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V(q) \frac{z}{2m(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m^2)} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{(-1)^\rho (1 + g_{\rho+1/2}(z))}{\Gamma(1/2 - \rho)} \frac{(2k_B T q^2 / m \omega^2)^\rho}{(1 - \hbar^2 q^4 / 4m^2 \omega^2)^{2\rho}} \times$$

$$\left(\frac{2mk_B T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^p \binom{2p+1}{2n+1} \left(\frac{q^4 \hbar^2}{4m^2 \omega^2} \right)^n \quad (4.41)$$

Esta es la ecuación de la función dieléctrica en $T \neq 0$. En la siguiente sección la usaremos para calcular los modos longitudinales colectivos del sistema. En el límite cuando la temperatura tiende a cero ($T \rightarrow 0$) de la Ec. (4.41) obtenemos la expresión de la función dieléctrica para $T = 0$ (Ver desarrollo en el apéndice IV).

4.3 Modos colectivos longitudinales del sistema

Los modos longitudinales del sistema se obtienen cuando la función dieléctrica $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ es igual a cero.

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad (4.42)$$

Igualemos a cero la Ec. (4.4) para obtener la frecuencia de oscilación del gas de Bose en función del momento transferido q al reflejarse en el borde de los alambres cuánticos. Caso $T = 0$:

$$1 + \frac{1}{\hbar} \frac{V(q)}{L} N \left(\frac{-\hbar q^2 / m}{\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m^2} \right) = 0 \quad (4.43)$$

Despejando ω^2

$$\omega^2 = \left(\frac{\hbar^2 q^4}{4m^2} + \frac{N}{L} V(q) \frac{q^2}{m} \right) \quad (4.44)$$

o

$$\omega = \left(\frac{\hbar^2 q^4}{4m^2} + \frac{N}{L} V(q) \frac{q^2}{m} \right)^{1/2} \quad (4.45)$$

Usando la transformada de Fourier $V(q)$ del potencial (Eq. 3.39) calculada en el Capítulo 3 obtenemos.

$$V(\vec{q}, \vec{d}') = \frac{e^2}{2\pi\epsilon} \int_0^\infty u du e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\vec{d}'^2/4} I_0\left(\frac{u\vec{d}'}{2}\right) \right] \times K_0(\sigma qu). \quad (4.46)$$

en donde $K_0(k\sigma u)$ es la función de Bessel modificada de orden cero y ϵ es la constante dieléctrica del medio, la ecuación (4.44) queda

$$\omega^2 = \frac{e^2}{2\pi m \epsilon} \frac{N}{L} \int_0^\infty u du e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\vec{d}'^2/4} I_0\left(\frac{u\vec{d}'}{2}\right) \right] \times K_0(\sigma qu) q^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2} q^4. \quad (4.47)$$

Reescribiendo los momentos y las energías respecto al vector de onda y la energía de Fermi (ver apéndice III) la ecuación (4.44) se convierte a

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{E_F^2} = C(N/L) \int_0^\infty u du e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\vec{d}'^2/4} I_0\left(\frac{u\vec{d}'}{2}\right) \right] K_0(2\pi \frac{N}{L} \sigma \vec{q} u) \vec{q}^2 + 0.25 \vec{q}^4 \quad (4.48)$$

y

$$C(T = 0, \rho) = \frac{1}{(0.05)(4\rho) a_{exc} \pi^3}. \quad (4.49)$$

donde $\rho \equiv N/L$, $\vec{q} \equiv q/k_F$, $E_F \equiv (N^2/L^2)\hbar^2\pi^2/2m$ y $k_F^2 \equiv 4\rho\pi^2$. Hemos introducido que $e^2 \equiv \epsilon\hbar^2/\mu a_{exc}$, donde $\mu \equiv 0.05m_e$ es la masa reducida, m_e es la masa del electrón y $a_{exc} \equiv 120\text{\AA}$ es el radio de Bohr excitónico [38] para un medio semiconductor con $\epsilon \equiv 12$ [29].

El valor de ρ está dado por la raíz cuadrada del dato reportado por Ulloa [5] en su cálculo de 2D[5], que a su vez pertenece al intervalo de densidades de oscilación del plasma reportado experimentalmente por Pierre Bigenwald [35, 36]. Las Tablas 4.1 y 4.2 muestran el valor de las constantes de la Ec. (4.48) para los valores $\rho = 1 \times 10^{12} \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^{10} \text{cm}^{-1}$, respectivamente.

Ahora vamos a obtener la relación de dispersión $\omega(q)$ en $T \neq 0$, reescribimos la Ec. (4.41) usando $\vec{q} \equiv q/k_F$, $\vec{T} \equiv T/T_F$, $k_F \equiv 2N\pi/L$, $m_B \equiv 2m_F$ y $T_F \equiv 8N_B^2\pi^2\hbar^2/2m_B k_B L^2 \equiv \hbar^2 k_F^2 / m_B k_B \equiv E_F / k_B$. Obtenemos:

$$\epsilon\left(\frac{q}{k_F}, \omega\right) = 1 - V(\vec{q}) \frac{\sqrt{2} E_F}{2} \frac{E_F}{\hbar^2} k_F z \frac{\vec{q}^2}{(\omega^2 - E_F^2 \vec{q}^4 / 4\hbar^2)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (1 + g_{p-1/2}(Z))}{\Gamma(1/2 - p)} \frac{(2E_F^2 \vec{q}^2 \vec{T} / \hbar^2 \omega^2)^p}{(1 - E_F^2 \vec{q}^4 / 4\hbar^2 \omega^2)^{2p}} \times$$

$$(\tilde{T})^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2p+1}{2n+1} \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4h^2 \omega^2} \right)^n. \quad (4.50)$$

Desarrollamos la serie.

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\frac{q}{k_F}, \omega\right) &= 1 - \left(V(\tilde{q}) \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{E_F}{h^2} k_F Z \frac{\tilde{q}^2}{(\omega^2 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2)} (\tilde{T})^{1/2} \right) \times \\ &1 + \frac{g_{1/2}(z)}{\Gamma(1/2)} - \frac{g_{3/2}(z)}{\Gamma(-1/2)} \frac{2E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2 \omega^2)^2} \left(3 + \frac{\tilde{q}^2 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right) \\ &+ \frac{g_{5/2}(z)}{\Gamma(3/2)} \frac{(2E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2)^2}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2 \omega^2)^4} \left(5 + 10 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right) + \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{g_{7/2}(z)}{\Gamma(5/2)} \frac{(2E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2)^3}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2 \omega^2)^6} \left(7 + 35 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right) + 21 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right)^3 \right) + \dots \quad (4.51) \end{aligned}$$

Hemos usado el hecho. $\Gamma(1/2) \equiv (\pi)^{1/2}$, $\Gamma(1/2 - p) \equiv (-1)^p 2^p (\pi)^{1/2} (2p - 1)!!$. Simplificamos.

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\frac{q}{k_F}, \omega\right) &= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\pi^{1/2}} V(q) \frac{E_F k_F^2}{h^2 k_F} z \frac{\tilde{q}^2}{(\omega^2 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2)} (\tilde{T})^{1/2} \right) \times \\ &1 + g_{1/2}(z) - \frac{g_{3/2}(z)}{-2} \frac{2E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2 \omega^2)^2} \left(3 + \frac{\tilde{q}^2 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right) \\ &+ \frac{g_{5/2}(z)}{12} \frac{(2E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2)^2}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2 \omega^2)^4} \left(5 + 10 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right) + \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{g_{7/2}(z)}{120} \frac{(2E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2)^3}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4h^2 \omega^2)^6} \left(7 + 35 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right) + 21 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4\omega^2 h^2} \right)^3 \right) + \dots \quad (4.52) \end{aligned}$$

Usamos la transformada de Fourier del potencial efectivo $V(\tilde{q})$, Ec. (3.39) en términos de $\tilde{q} = q/k_F$, donde $k_F = 2\pi\rho$ y la sustituimos en la Ec. (4.52).

$$\begin{aligned}
\epsilon\left(\frac{q}{k_F}, \omega\right) &= 1 - \left(\int_0^\infty u d u e^{-\frac{u}{2}} \left[1 - e^{-u^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{u}}{2}\right) \right] \right. \\
&\times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \frac{q}{k_F} u) \frac{\sqrt{3} E_F^2 z}{0.2 h^2 \pi^{3/2} a_{\text{ext}} \frac{N}{L} (\omega^2 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4 h^2)} \tilde{q}^2 (\tilde{T})^{1/2} \\
&\times \left. 1 + g_{1/2}(z) - \frac{g_{3/2}(z)}{-2} \frac{2 E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4 h^2 \omega^2)^2} \left(3 + \frac{\tilde{q}^2 E_F^2}{4 \omega^2 h^2} \right) \right. \\
&+ \frac{g_{5/2}(z)}{12} \frac{(2 E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2)^2}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4 h^2 \omega^2)^4} \left(5 + 10 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4 \omega^2 h^2} \right) + \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4 \omega^2 h^2} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{g_{7/2}(z)}{120} \frac{(2 E_F^2 \tilde{T} \tilde{q}^2 / h^2 \omega^2)^3}{(1 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4 h^2 \omega^2)^6} \left(7 + 35 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4 \omega^2 h^2} \right) + 21 \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4 \omega^2 h^2} \right)^2 \right. \\
&\left. + \left(\frac{\tilde{q}^4 E_F^2}{4 \omega^2 h^2} \right)^3 \right) + \dots \tag{4.53}
\end{aligned}$$

En la ecuación (4.53) solamente consideramos términos \tilde{q}^2 para \tilde{q} pequeñas.

$$\begin{aligned}
\epsilon(\tilde{q}, \omega) &= \\
1 - C(T, N/L) \int_0^\infty u d u e^{-\frac{u}{2}} \left[1 - e^{-u^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{u}}{2}\right) \right] &K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \frac{q}{k_F} u) \times \\
\frac{E_F^2}{h^2} \frac{\tilde{q}^2}{(\omega^2 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4 h^2)} (g_{1/2}(z) + 1) &. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

donde

$$C(T, N/L) = \frac{\sqrt{3\tilde{T}} z(\tilde{T})}{0.2 \pi^{3/2} a_{\text{ext}} (N/L)}. \tag{4.55}$$

Para obtener la relación de dispersión $\omega(q)$, hacemos,

$$\begin{aligned}
\epsilon(\tilde{q}, \omega) &= 0, \\
0 &= 1 - C(T, N/L) \int_0^\infty u d u e^{-\frac{u}{2}} \left[1 - e^{-u^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{u}}{2}\right) \right] K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q} u) \times \\
\frac{E_F^2}{h^2} \frac{\tilde{q}^2}{(\omega^2 - E_F^2 \tilde{q}^4 / 4 h^2)} (g_{1/2}(z) + 1) &. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

$$1 = C(T, N/L) (g_{1/2}(z) + 1) \left(\int_0^\infty u l u e^{-uz} \left[1 - e^{-\tilde{\rho}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] \right. \\ \left. \times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q} u) \frac{E_F^2}{\hbar^2} \frac{\tilde{q}^2}{(\omega^2 - E_F^2 \tilde{q}^4/4\hbar^4)} \right), \quad (4.57)$$

$$\omega^2 - \frac{E_F^2 \tilde{q}^4}{4\hbar^2} = C(T, N/L) (g_{1/2}(z) + 1) \left(\int_0^\infty u l u e^{-uz} \left[1 - e^{-\tilde{\rho}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] \right. \\ \left. \times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q} u) \frac{\tilde{q}^2 E_F^2}{\hbar^2} \right), \quad (4.58)$$

$$\omega^2 = \frac{E_F^2 \tilde{q}^4}{4\hbar^2} + C(T, N/L) (g_{1/2}(z) + 1) \left(\int_0^\infty u l u e^{-uz} \left[1 - e^{-\tilde{\rho}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] \right. \\ \left. \times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q} u) \frac{\tilde{q}^2 E_F^2}{\hbar^2} \right), \quad (4.59)$$

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{E_F^2} = 0.25 \tilde{q}^4 + C(T, N/L) (g_{1/2}(z) + 1) \tilde{q}^2 \left(\int_0^\infty u l u e^{-uz} \left[1 - e^{-\tilde{\rho}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] \right. \\ \left. \times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q} u) \right). \quad (4.60)$$

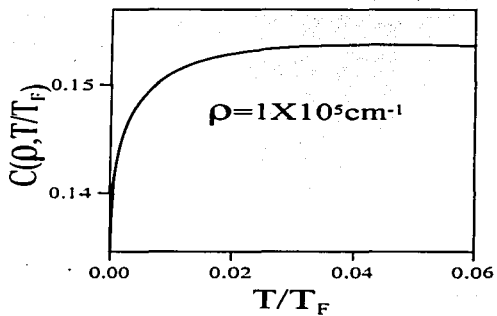
Las figuras 12 y 13 muestran la dependencia de los coeficientes $C(\tilde{T}, \rho)$ (Ec. 4.55), en función de la temperatura $\tilde{T} = T/T_F$ para $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$, respectivamente.

En conclusión, los N excitones se mueven en un medio semiconductor caracterizado por la constante ϵ , inicialmente tienen una energía de $\hbar^2 k^2/2m$, donde k es el vector de onda de cada excitón, podemos pensar que sólo existen las interacciones entre un par de excitones ya que el gas es altamente diluido. Esta interacción transfiere un nuevo momento $\hbar(k-q)$ al excitón, sin embargo, este excitón interactúa con los $N-1$ excitones restantes, de tal forma que la energía que le es transferida $\hbar\omega$ es el resultado del apantallamiento de un campo de potencial promedio originado por los demás excitones, esto puede ser visto como una interpretación física de la función dieléctrica. Por este motivo, la energía transferida es el resultado más importante de la función dieléctrica y todo el comportamiento del medio

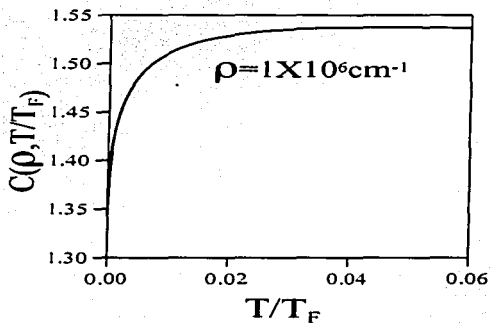
puede ser descrito por la relación de dispersión $\omega(q)$ donde ω es la frecuencia de oscilación de los excitones y q es el vector de onda. En nuestro sistema la relación de dispersión depende de la densidad de excitones ρ , del espesor del alambre σ y de la temperatura T .

En el capítulo 5 se calcula la frecuencia de los modos normales de oscilación al asignar valores numéricos a ρ , σ y T a las ecuaciones (4.48) y (4.60).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



12: $C(\rho, \bar{T})$ para $\rho = 1 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$ de la ecuación (4.55), donde ρ es la densidad de excitones y T_F es la temperatura de Fermi.



13: $C(\rho, \bar{T})$ para $\rho = 1 \times 10^6 \text{ cm}^{-1}$ de la ecuación (4.55), donde ρ es la densidad de excitones y T_F es la temperatura de Fermi.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

5.1 Resumen

En el transcurso de este trabajo hemos usado tres espesores para el ancho de los alambres, $\sigma = 30\text{Å}$, 20Å y 10Å , la razón de haber elegido estos valores radica en que garantizamos, que aún en estas dimensiones, nos encontramos en la energía del estado base del excitón como se mencionó en el penúltimo párrafo de la página 31 del capítulo 3. El sistema se destruye al no permanecer en dicho estado; ya que el estado base garantiza que el electrón que forma a un excitón este exactamente enfrente del hueco [29]. Esto también establece una restricción para el valor de la temperatura máxima que puede tomar el sistema ($T_{max} = 117^{\circ}K$).

El objetivo de este capítulo es graficar la relación de dispersión del sistema, asignando valores numéricos a σ , T y ρ , el ancho de los alambres, la temperatura y la densidad de excitones, respectivamente. Usamos las densidades de oscilación experimentales para un gas diluido, $\rho = 10^5\text{cm}^{-1}$ y $\rho = 10^6\text{cm}^{-1}$ [35, 36]. Esencialmente se discuten tres puntos:

El primer punto se refiere al cambio de la frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^{\circ}K$ al variar el ancho de los alambres y considerando a ρ constante. Observamos en las figuras 14 y 15, para $\rho = 10^5\text{cm}^{-1}$ y $\rho = 10^6\text{cm}^{-1}$, respectivamente: que la frecuencia de los modos longitudinales colectivos de oscilación en $T = 0^{\circ}K$ son mayores cuando el ancho del alambre es menor, en este caso con el valor de $\sigma = 10\text{Å}$. Para nuestros cálculos hemos supuesto que los electrones y los huecos están confinados en un potencial de oscilador armónico, si los anchos de los alambres aumentan, la densidad de probabilidad de los electrones y los huecos, que son funciones gaussianas basales, se ensanchan provocando que la interacción dipolar disminuya y por consiguiente la frecuencia de oscilación.

El segundo punto a discutir es el cambio de la frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^{\circ}K$ al variar la densidad de excitones y considerando a σ constante, más aún, que sucede en $1^{\circ}K$. En Las gráficas 16, 23 y 24 en $\sigma = 10\text{Å}$; observamos que la frecuencia de oscilación es mayor cuando el gas es más denso, en este caso para $\rho = 10^6\text{cm}^{-1}$. Al aumentar la densidad de excitones disminuye en promedio la distancia interdipolar por lo

que aumenta la densidad de la interacción dipolar y con ello la frecuencia de oscilación. Finalmente discutimos el cambio de la frecuencia de oscilación del sistema al variar la temperatura tomando a σ y ρ constantes, esto se muestra para $\rho = 10^5 \text{cm}^{-1}$ en las figuras 17, 18 y 19 en $\sigma = 10 \text{Å}$, 20Å y 30Å , respectivamente. Y para $\rho = 10^6 \text{cm}^{-1}$ en las figuras 20, 21 y 22 para $\sigma = 10 \text{Å}$, 20Å y 30Å , respectivamente. En estas figuras observamos que la frecuencia de oscilación se incrementa al aumentar la temperatura. Nuestro modelo está limitado de $0^\circ K$ a $117^\circ K$, ya que a temperaturas más altas que $117^\circ K$ la probabilidad de que se destruyan los dipolos (al separarse térmicamente los pares electrón-hueco) aumenta.

Con la relación de dispersión $\omega(q)$ hemos modelado la respuesta de un sistema que se puede construir en la actualidad, la frecuencia de oscilación del sistema se puede asociar a un cierto tipo de sistema caracterizado por los valores de ρ , σ y T , una frecuencia de oscilación mayor correspondería a un sistema más rígido, respecto a otro asociado a una frecuencia de oscilación menor.

Lo que podemos predecir de nuestros resultados es que la frecuencia de oscilación de un sistema ρ - σ - T aumentará (respecto a otra frecuencia de oscilación menor asociada a otro sistema ρ - σ - T) en presencia de una perturbación externa.

5.2 Resultados

En el capítulo 3 obtuvimos el parámetro β que es la corrección a la distancia entre los valores esperados de las partículas en los alambres cuánticos, es decir, la distancia mínima o distancia efectiva, $\tilde{d}' = \tilde{d} - 2\beta$, a la que pueden estar separados el electrón-hueco sin que se junten (caso atractivo). La Tabla 5.1 nos muestra estas distancias que dependen del espesor del alambre, recordemos que $\tilde{d} = d/\sigma$ y $d = 100\text{Å}$.

Tabla 5.1
Distancia efectiva del sistema

$\tilde{d} = d/\sigma$	Caso atractivo β	$\tilde{d}' = \tilde{d} - 2\beta$	$\tilde{d}'(\text{Å})$
3.3	0.157286	2.98543	89.56290
5	0.059885	4.88023	97.60460
10	0.014291	9.97142	99.7142

En la primera columna se encuentra el valor de la distancia de separación entre los centros de los alambres en términos de ancho del alambre σ , la segunda columna muestra el valor del parámetro β , la tercera columna muestra la distancia efectiva de nuestro sistema y la última columna exhibe la distancia efectiva en Anstrongs.

Las relaciones de dispersión del capítulo 4 dependen de la densidad de excitones en una dimensión (ρ), de la fugacidad (z), de la temperatura (T) y por supuesto de la distancia efectiva (\tilde{d}') de la columna 3 de la Tabla 5.1, sin embargo, hay constantes que caracterizan a nuestro sistema tales como la constante dieléctrica ϵ y el radio de Born excitónico a_{exc} . Sustituimos en las relaciones de dispersión del capítulo 4, Ec.(4.48) y Ec. (4.60), la distancia efectiva \tilde{d}' y el valor de ρ .

El valor de ρ lo obtendremos de los datos reportados por Ulloa en su cálculo de 2D[5], que a su vez pertenece al intervalo de densidades de oscilación del plasma reportado experimentalmente por Pierre Bigenwald [35, 36], [$\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$, $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$]. Las Tablas 5.2 y 5.3 muestran el valor de los nuevos coeficientes de la función de dispersión a temperatura cero para los valores $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$, respectivamente.

Tabla 5.2
Constantes que dependen de
 $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y \bar{d} .

$\bar{d} = d/\sigma$	$\bar{d}' = \bar{d} - 2\beta$	$C(T = 0^\circ K, \rho)$	$e^{-\bar{d}'/4}$	$I_0(u\bar{d}/2)$	$K_0(2\pi\sigma\rho\bar{q}u)$
3.3	2.98543	1.3438	0.107722	$I_0(2.98543u/2)$	$K_0(0.188496\bar{q}u)$
5	4.88023	1.3438	0.002595	$I_0(4.88023u/2)$	$K_0(0.125664\bar{q}u)$
10	9.97142	1.3438	1.60×10^{-11}	$I_0(9.97142u/2)$	$K_0(0.062832\bar{q}u)$

En la primera columna de la Tabla 5.2 está el parámetro \bar{d} que depende de la distancia de separación de los alambres y del espesor de los mismos. La segunda columna nos muestra la distancia efectiva \bar{d}' que fue calculada variacionalmente en el capítulo 3. La columna 3 nos muestra el coeficiente que depende la densidad de excitones para $T = 0$. Las tres columnas restantes son términos originados en la transformada de Fourier del potencial efectivo.

Tabla 5.3
Constantes que dependen de
 $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ y \bar{d}' .

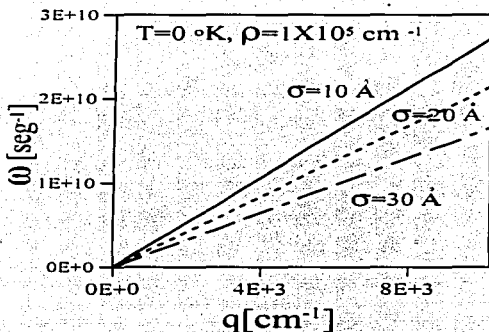
\bar{d}	\bar{d}'	$C(T = 0^\circ K, \rho)$	$e^{-\bar{d}'/4}$	$I_0(u\bar{d}/2)$	$K_0(2\pi\sigma\rho\bar{q}u)$
3.3	2.98543	0.13438	0.107722	$I_0(2.98543u/2)$	$K_0(1.88496\bar{q}u)$
5	4.88023	0.13438	0.002595	$I_0(4.88023u/2)$	$K_0(1.25664\bar{q}u)$
10	9.97142	0.13438	1.60×10^{-11}	$I_0(9.97142u/2)$	$K_0(0.62832\bar{q}u)$

La Tabla 5.3 es la misma que la Tabla 5.2, pero con la densidad de excitones $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$.

Como mencionamos en el tercer párrafo la relación de dispersión depende de tres valores numéricos, la temperatura T , la densidad de excitones, ρ y el grueso del alambre σ . En las siguientes gráficas se fijan dos parámetros y se varía uno especificados en el pie de figura.

Las figuras 14 y 15 muestran la relación de dispersión para las densidades de excitones $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$, respectivamente. Las curvas muestran las relaciones

de dispersión para distintos valores de σ (ancho del alambre) $\sigma = 30\text{\AA}$, 20\AA y 10\AA en $T = 0^\circ$ que la frecuencia de los modos longitudinales colectivos de oscilación en $T = 0^\circ K$ son mayores cuando el ancho del alambre es menor, en este caso con el valor de $\sigma = 10\text{\AA}$.

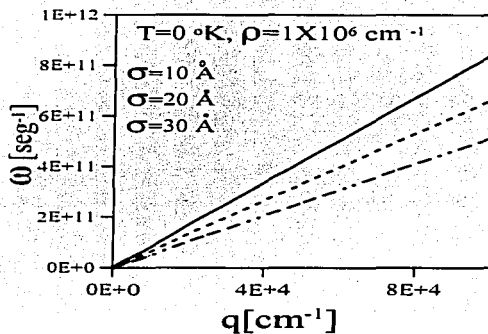


14: La línea sólida representa la frecuencia de oscilación para $\sigma = 10\text{\AA}$, la línea punteada y la línea discontinua representan las frecuencias de oscilación para $\sigma = 20\text{\AA}$ y $\sigma = 30\text{\AA}$, respectivamente. σ es el espesor de los alambres, ρ es la densidad de excitones y T la temperatura.

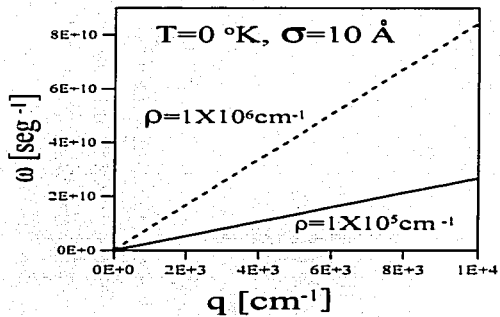
Para nuestros cálculos hemos supuesto que los electrones y los huecos están confinados en un potencial de oscilador armónico, si los anchos de los alambres aumentan, la densidad de probabilidad de los electrones y los huecos, que son funciones gaussianas basales, se ensanchan provocando que la interacción dipolar disminuya y por consiguiente la frecuencia

de oscilación.

La Fig. 16 nos muestra la relación de dispersión en $T = 0^{\circ}K$ con un ancho fijo $\sigma = 10\text{\AA}$, para las dos densidades de excitones, $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$. Observamos que la frecuencia de oscilación es mayor cuando el gas es más denso, en este caso para $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$. Al aumentar la densidad de excitones disminuye en promedio la distancia interdipolar por lo que aumenta la densidad de la interacción dipolar y con ello la frecuencia de oscilación.



15: La línea sólida representa la frecuencia de oscilación para $\sigma = 10 \text{ \AA}$, la línea segmentada y la línea segmentada más puntos representan las frecuencias de oscilación para $\sigma = 20 \text{ \AA}$ y $\sigma = 30 \text{ \AA}$, respectivamente. σ es el espesor de los alambres, ρ es la densidad de excitones y T la temperatura.



16: Compara la frecuencia de oscilación para dos densidades de excitones $\rho = 1 \times 10^5 \text{ \AA}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{ \AA}$, fijando la temperatura y el ancho de los alambres.

Los coeficientes para el caso $T \neq 0$ (Ec. 4.55) que dependen de la temperatura están en la Tabla 5.4. se usan para graficar la relación de dispersión de la Ec. 4.60. El sistema no puede tener cualquier temperatura, pues hay una temperatura máxima (T_{max}) a la cual el electrón se separa del hueco. La energía máxima, que depende de la temperatura, a la cual el electrón y el hueco se separan es $0.73\text{meV}[29]$, por lo que la temperatura máxima del sistema es,

$$T_{max} = \frac{0.73 \times 10^{-3} \text{eV}}{k_B} = 117\text{K}, \quad (5.1)$$

donde k_B es la constante de Boltzman. Por tal motivo, el intervalo de temperatura de nuestro sistema es $0 < T < T_{max} = 117^\circ\text{K}$.

Tabla 5.4
Constantes que dependen de
 T y ρ .

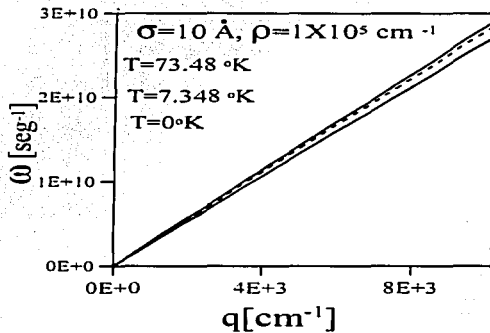
$\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$					
\tilde{T}	z	$g_{1/2}(z)$	$C(T, \rho)$	$g_{1/2}(z) + 1$	$C(T, \rho)(g_{1/2}(z) + 1)$
0.4×10^{-1}	0.761976	1.99471	0.513332	2.99471	1.53728
0.4×10^{-2}	0.949133	6.30783	0.202201	7.30783	1.47765
$\rho = 1 \times 10^9 \text{cm}^{-1}$					
0.4×10^{-1}	0.761976	1.99471	0.0513332	2.99471	0.153728
0.4×10^{-2}	0.949133	6.30783	0.0202201	7.30783	0.147765

En la primera columna de la Tabla 5.4 está el valor de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi, la $\tilde{T} = T/T_F = 0.4 \times 10^{-2}$ y 0.4×10^{-1} , corresponde al intervalo de 7.348°K y 73.48°K , respectivamente. En la segunda columna se encuentra el valor de la fugacidad, z , en $T = 7.348^\circ\text{K}$ y 73.48°K , la tercera columna exhibe la fugacidad en la función $g_{1/2}$, la cuarta columna muestra el coeficiente que depende de la temperatura y de la densidad de excitones ρ , las columnas restantes son operaciones básicas con los valores de las columnas ya mencionadas. Nótese que se han considerado los dos valores de ρ .

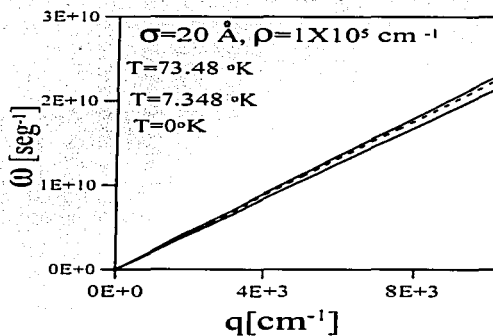
Las figuras 17, 18 y 19 muestran la relación de dispersión para $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ cuando el espesor del alambre es $\sigma = 10\text{\AA}$, 20\AA y 30\AA , respectivamente, en $T = 0^\circ\text{K}$, $T = 7.348^\circ\text{K}$

y $73.48^{\circ}K$. Observamos que la frecuencia de oscilación se incrementa al aumentar la temperatura. El intervalo de temperatura para nuestro sistema es $[0^{\circ}K, 117^{\circ}K]$. La frecuencia de oscilación mínima multiplicada por \hbar nos da la energía mínima del sistema.

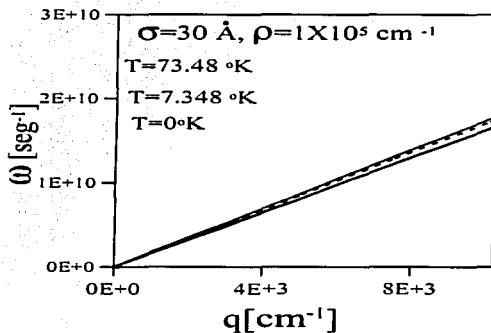
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



17: Relación de dispersión para el sistema. La línea punteada representa la frecuencia de oscilación en función del vector de onda q para la temperatura de 7.348°K . La línea sólida superior representan la frecuencia de oscilación en $T = 73.48^\circ\text{K}$ y la línea sólida inferior representa la frecuencia de oscilación en $T = 0^\circ\text{K}$. Todos los casos mencionados mantienen fijos la densidad de excitones ρ y el ancho de los alambres σ .

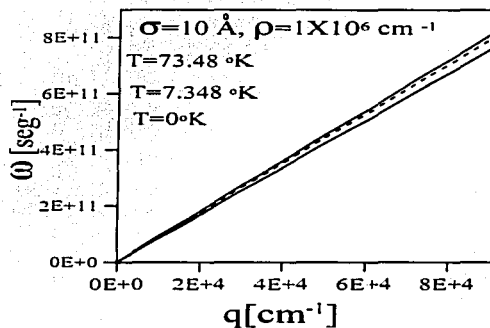


18: Relación de dispersión del sistema. La línea punteada representa la frecuencia de oscilación en función del vector de onda q para la temperatura de 7.348°K . La línea sólida superior representan la frecuencia de oscilación en $T = 73.48^\circ\text{K}$ y la línea sólida inferior representa la frecuencia de oscilación en $T = 0^\circ\text{K}$. Todos los casos mencionados mantienen fijos la densidad de excitones ρ y el ancho de los alambres σ .

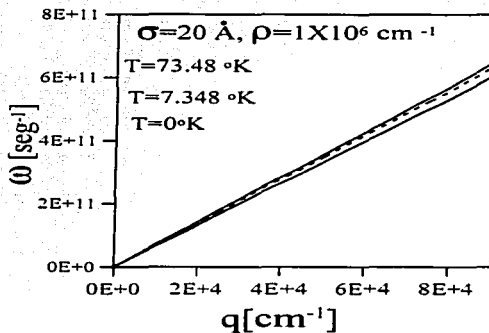


19: Relación de dispersión del sistema. La línea punteada representa la frecuencia de oscilación en función del vector de onda q para la temperatura de 7.348°K . La línea sólida superior representa la frecuencia de oscilación en $T = 73.48^\circ\text{K}$ y la línea sólida inferior representa la frecuencia de oscilación en $T = 0^\circ\text{K}$. Todos los casos mencionados mantienen fijos la densidad de excitones ρ y el ancho de los alambres σ .

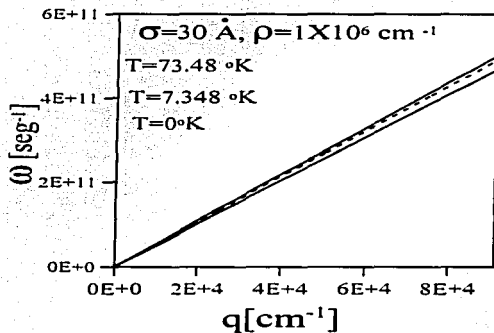
Al igual que en las figuras anteriores (Fig. 17-19) las siguientes gráficas, Fig. 20, Fig. 21 y Fig. 22 muestran la relación de dispersión cuando el espesor del alambre es $\sigma = 10\text{Å}$, 20Å y 30Å , respectivamente, en $T = 0^\circ\text{K}$, $T = 73.48^\circ\text{K}$ y 73.48°K ; pero para $\rho = 1 \times 10^6\text{cm}^{-1}$. Observamos que la frecuencia de oscilación se incrementa al aumentar la temperatura. Nuestro modelo está limitado de 0°K a 117°K , ya que a temperaturas más altas que 117°K la probabilidad de que se destruyan los dipolos (al separarse térmicamente los pares electrón-hueco) aumenta.



20: Relación de dispersión del sistema. La línea puntada representa la frecuencia de oscilación en función del vector de onda q para la temperatura de 7.348°K . La línea sólida superior representan la frecuencia de oscilación en $T = 73.48^\circ\text{K}$ y la línea sólida inferior representa la frecuencia de oscilación en $T = 0^\circ\text{K}$ casos mencionados mantienen fijos la densidad de excitones ρ y el ancho de los alambres σ .

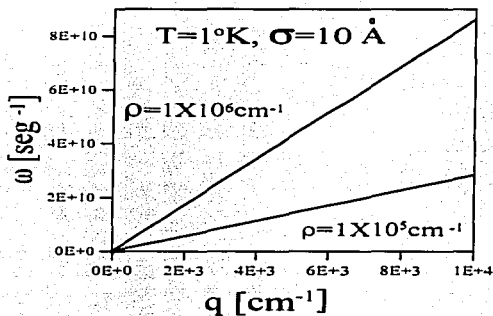


21: Relación de dispersión del sistema. La línea punteada representa la frecuencia de oscilación en función del vector de onda q para la temperatura de 7.348°K . La línea sólida superior representan la frecuencia de oscilación en $T = 73.48^\circ\text{K}$ y la línea sólida inferior representa la frecuencia de oscilación en $T = 0^\circ\text{K}$. Todos los casos mencionados mantienen fijos la densidad de excitones ρ y el ancho de los alambres σ .



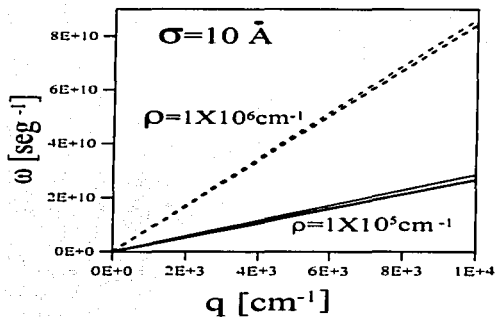
22: Relación de dispersión del sistema. La línea punteada representa la frecuencia de oscilación en función del vector de onda q para la temperatura de 7.348°K . La línea sólida superior representan la frecuencia de oscilación en $T = 73.48^\circ\text{K}$ y la línea sólida inferior representa la frecuencia de oscilación en $T = 0^\circ\text{K}$. Todos los casos mencionados mantienen fijos la densidad de excitones ρ y el ancho de los alambres σ .

La Fig. 23 muestra la frecuencia de oscilación para la densidad de excitones $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ en $T = 1^\circ \text{K}$ y $\sigma = 10 \text{\AA}$. Observamos un comportamiento similar al de la Fig. 5.3 para $T = 0^\circ \text{K}$, la frecuencia de oscilación aumenta al aumentar la densidad de excitones.



23: Relación de dispersión para dos densidades de excitones $\rho = 1 \times 10^5 \text{\AA}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{\AA}$, fijando la temperatura y el ancho de los alambres.

Se superponen las figuras 16 y 23 en la Fig. 24 para $\sigma = 10 \text{\AA}$ con $T = 0^\circ \text{K}$ y $T = 1^\circ \text{K}$, para $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$.



2-4: Relación de dispersión del sistema. Las líneas punteadas representan la frecuencia de oscilación en función del de onda q para $\rho = 1 \times 10^6 \text{ \AA}$ y las líneas sólidas la frecuencia de oscilación para $\rho = 1 \times 10^5 \text{ \AA}$. La línea superior sólida así como la línea superior punteada representan las frecuencias de oscilación a $1^\circ K$ y las inferiores las frecuencias de oscilación a $T = 0^\circ K$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

1) En nuestro modelo de confinamiento cuántico en un alambre hemos supuesto que un electrón o hueco están confinados por un potencial parabólico o armónico, el cual es más parecido a confinamiento reales suaves que el de pozo cuadrado con salto de potencial finito o infinito, este último es más abrupto en las fronteras del pozo. El estado base gaussiano para dicho sistema es apropiado para una sola partícula, sin embargo, para dos partículas vecinas confinadas en dos alambres cuánticos paralelos es necesario tomar en cuenta la interacción electrostática entre dichas partículas cargadas. Por ello, recurrimos a un cálculo variacional para tomar en cuenta el desplazamiento debido a la atracción (si son de carga opuesta) o repulsión (si son de la misma carga). En este trabajo utilizamos sólo resultados del caso atractivo ya que estamos modelando la interacción atractiva electrón-hueco, corrigiendo así la distancia entre los centros de los alambres por una distancia efectiva menor.

2) Hasta lo que se ha investigado en la literatura científica sobre el tema no existía un cálculo cuántico preciso de la interacción dipolar para el caso de dipolos formados por excitones en un sistema unidimensional. Por ejemplo, para el caso de dos dimensiones Dimitri y Ulloa[5] introduce arbitrariamente una función gaussiana para suavizar el potencial, es decir, utilizaron un modelo aproximado para la interacción de los excitones en el caso bidimensional. En realidad, nuestro cálculo de la interacción dipolar para excitones en alambres cuánticos nos da más información de la que necesitamos en nuestro estudio de gas muy diluido de dipolos unidimensional, es decir, dicho cálculo se podría utilizar también para el caso de densidades de dipolos mayores que las presentadas en este trabajo, puesto que aquí consideramos solamente densidades bajas. Cuando los anchos de los alambres aumentan, la densidad de probabilidad de los electrones o huecos se extiende por lo que la interacción dipolar disminuye dando como consecuencia que también disminuya la frecuencia de oscilación colectiva.

3) La transformada de Fourier del potencial de interacción es un ingrediente importante para el cálculo de la función dieléctrica. Utilizamos el modelo RPA de la función dieléctrica para calcular la dependencia con la temperatura y la densidad unidimensional de dipolos.

Al aumentar la densidad disminuye en promedio la distancia interdipolar por lo que aumenta la intensidad de la interacción dipolar y la frecuencia de oscilación. Se estudian los casos de temperatura igual a cero y temperaturas bajas menores que $T_{max} = 117^{\circ}K$, ya que a temperaturas más altas la probabilidad de que se destruyan los dipolos (al separarse térmicamente los pares electrón-hueco) aumenta.

4) Como mencionamos anteriormente, los gráficos de la relación de dispersión muestran que la frecuencia de oscilación disminuye al aumentar el ancho de los alambres. También encontramos la dependencia cuantitativa de la frecuencia con la temperatura. Cualitativamente la frecuencia de oscilación aumenta con la temperatura. Por lo tanto, el cálculo a temperatura cero establece un límite inferior para la frecuencia de oscilación, es decir, el sistema tiene una mínima frecuencia de oscilación asociada a la mínima energía del estado base, $T = 0^{\circ}K$.

Nuestra teoría es muy general, pero en este trabajo está restringida por los valores de los parámetros del sistema, σ , ρ , T_{max} .

Esperamos que este trabajo sirva de guía para futuras investigaciones teóricas y experimentales de sistemas de dipolos en sistemas de baja dimensionalidad; ya que en la actualidad se pueden construir este tipo de estructuras que pueden generar dispositivos ópticos y optoelectrónicos que ofrezcan un funcionamiento muy eficiente.

APÉNDICE I

La deducción de la función dieléctrica en $T \neq 0$ del capítulo 4 se calcula utilizando el mismo procedimiento de Frankel[4, 8], sólo que aquí se describe un sistema unidimensional en lugar de los sistemas tridimensionales o bidimensionales estudiados por Frankel.

Frankel en su cálculo para 3D[8] utiliza una la expresión matemática.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} = i \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{\Gamma(1/2 - \mu) x^{\mu-1/2}} g_{3/2+\mu}(z), \quad \text{si } x \gg 1 \quad (1.i)$$

válida para tres dimensiones. Nosotros necesitamos una expresión similar para.

$$\sum_{j=1}^{\infty} z^j \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} = ? \quad \text{si } x \gg 1 \quad (1.ii)$$

en una dimensión. Si derivamos el lado izquierdo de la ecuación 1.i respecto a z obtenemos.

$$\frac{d \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} \right)}{dz} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j z^{j-1}}{j} \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj}, \quad (1.iii)$$

observamos que la ecuación (1.iii) se puede expresar en términos de la incógnita de la ecuación (1.ii), $\sum_{j=1}^{\infty} z^j \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj}$,

$$\frac{d \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} \right)}{dz} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j z^{j-1}}{j} \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} = \frac{1}{z} (\text{Ec.1.ii}). \quad (1.iv)$$

Despejamos $\sum_{j=1}^{\infty} z^j \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj}$ de la ecuación (1.iv).

$$\sum_{j=1}^{\infty} z^j \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} = z \frac{d(\text{Ec.1.ii})}{dz} \quad (1.v)$$

Lo único que depende de z en la ecuación (1.i) es $g_{3/2+\mu}(z)$, pues en general,

$$g_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \quad (1.vi)$$

$$\frac{d g_1(z)}{dz} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (1.vii)$$

$$\frac{dg_1(z)}{dz} = 1 + g_0(z), \quad (1.viii)$$

entonces,

$$\frac{dg_n(z)}{dz} = 1 + g_{n-1}(z). \quad (1.ix)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dg_{3/2+p}(z)}{dz} = 1 + g_{1/2+p}(z). \quad (1.x)$$

Derivamos el lado derecho de la ecuación (1.i) y usamos el resultado de la ecuación (1.x).

$$\sum_{j=1}^{\infty} z^j \phi(ix^{1/2} j^{1/2}) e^{-xj} = iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(1/2 - p) x^{p+1/2}} (1 + g_{1/2+p}(z)). \quad (1.xi)$$

Esta ecuación se sustituye en la relación (4.24) del capítulo 4 para el cálculo de la función dieléctrica en $T \neq 0$.

APÉNDICE II

En el capítulo 4 en el cálculo de la función dieléctrica para $T \neq 0$ se usa una expresión que se sustituye en la ecuación (4.35). Deduiremos dicha expresión,

$$(1-x)^{2p+1} - (1+x)^{2p-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-2) \binom{2p+1}{2m+1} x^{2m}. \quad (2.i)$$

Utilizando los desarrollos binomiales se tiene,

$$(1-x)^{2p+1} - (1+x)^{2p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2p+1}{n} (-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2p+1}{n} (x)^n. \quad (2.ii)$$

Factorizando,

$$(1-x)^{2p+1} - (1+x)^{2p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{2p+1}{n} (-x)^n - \binom{2p+1}{n} (x)^n \right], \quad (2.iii)$$

$$(1-x)^{2p+1} - (1+x)^{2p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2p+1}{n} [(-1)^n - 1] x^n. \quad (2.iv)$$

Si n es par $(-1)^n - 1 = 0$; si n es impar $(-1)^n - 1 = -2$, es decir, sólo permanecen los impares,

$$(1-x)^{2p+1} - (1+x)^{2p+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-2) \binom{2p+1}{2m+1} x^{2m+1} \quad (2.v)$$

$$(1-x)^{2p+1} - (1+x)^{2p+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-2) \binom{2p+1}{2m+1} x^{2m+1} \quad (2.vi)$$

APÉNDICE III

Este apéndice está dividido en dos secciones: En la sección 3.1 se reescribe la relación de dispersión en $T = 0$ (Ec. (4.44)) del capítulo 4 en términos de la energía y el vector de onda de Fermi. En la sección 3.2 se calcula la temperatura de Fermi que es útil para reescribir la relación de dispersión (Ec. (4.11)) del capítulo 4 en $T \neq 0$.

3.1 Temperatura igual a cero.

La función de dispersión en $T = 0$ Ec. (4.44) ,

$$\omega^2 = \frac{e^2}{2\pi m_B \epsilon} \frac{N}{L} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{x}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] K_0(\sigma q u) q^2 + \frac{\hbar^2}{4m_B^2} q^4. \quad (3.i)$$

Sea $\tilde{q} \equiv q/k_F$.

$$\omega^2 = \frac{e^2}{2\pi m_B \epsilon} \frac{N}{L} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{x}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] K_0(\sigma k_F \frac{q}{k_F} u) \tilde{q}^2 k_F^2 + \frac{\hbar^2 k_F^4}{4m_B^2} \tilde{q}^4. \quad (3.ii)$$

Multiplicamos la Ec. (3.ii) por \hbar^2 ,

$$\hbar^2 \omega^2 = \frac{e^2}{\pi \epsilon} \frac{N}{L} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{x}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] K_0(\sigma k_F \tilde{q} u) \tilde{q}^2 \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_B} + \frac{\hbar^4 k_F^4}{4m_B^2} \tilde{q}^4. \quad (3.iii)$$

Sabemos que $m_B \equiv 2m_F$ y usando $E_F \equiv \hbar^2 k_F^2 / 2m_F$ escribimos,

$$\hbar^2 \omega^2 = \frac{e^2}{\pi \epsilon} \frac{N}{L} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{x}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] K_0(\sigma k_F \tilde{q} u) \tilde{q}^2 E_F + E_F^2 \tilde{q}^4, \quad (3.iv)$$

multiplicando el primer término de la derecha por k_F^2/K_F^2

$$\hbar^2 \omega^2 = \frac{e^2 k_F^2}{\pi \epsilon} \frac{N}{k_F k_F L} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{x}^2/4} I_0 \left(\frac{u\tilde{d}}{2} \right) \right] K_0(\sigma k_F \tilde{q} u) \tilde{q}^2 \frac{E_F}{2} + \frac{E_F^2}{4} \tilde{q}^4, \quad (3.v)$$

De la expresión $k_F \equiv 2N\pi/L$ reescribimos Ec. (3.v).

$$\begin{aligned} \hbar^2\omega^2 &= \frac{e^2 k_F^2}{\pi\epsilon} \frac{N}{k_F 2N\pi} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{d}^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \\ &\times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q}u) \tilde{q}^2 \frac{E_F}{2} + \frac{E_F^2}{4} \tilde{q}^4, \end{aligned} \quad (3.vi)$$

$$\begin{aligned} \hbar^2\omega^2 &= \frac{e^2 k_F^2}{\pi\epsilon} \frac{1}{k_F 2\pi} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{d}^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \\ &\times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q}u) \tilde{q}^2 \frac{E_F}{2} + \frac{E_F^2}{4} \tilde{q}^4. \end{aligned} \quad (3.vii)$$

Sabemos que el radio de Bohr excitónico, $a_{excit} \equiv \epsilon\hbar^2/\mu e^2$, donde $\mu \equiv 0.05m_e$, es la masa reducida y m_e la masa del electrón. Reyes y Mussot[29] usan el valor de la constante dieléctrica, $\epsilon \equiv 12$, para calcular la energía del estado base y los primeros estados excitados de un excitón de Wannier-Mott que corresponde a un valor de $a_{excit} \equiv 120\text{Å}$.

$$\begin{aligned} \hbar^2\omega^2 &= \frac{\epsilon\hbar^2 k_F^2}{\mu a_{excit} \pi\epsilon} \frac{1}{k_F 2\pi} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{d}^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \\ &\times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q}u) \tilde{q}^2 \frac{E_F}{2} + \frac{E_F^2}{4} \tilde{q}^4, \\ &= \frac{\hbar^2 k_F^2}{4(0.05m_e) a_{excit} \pi^2} \frac{1}{k_F} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{d}^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \\ &\times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q}u) \tilde{q}^2 E_F + \frac{E_F^2}{4} \tilde{q}^4, \end{aligned} \quad (3.viii)$$

donde $m_F \equiv m_e$.

$$\begin{aligned} \hbar^2\omega^2 &= \frac{1}{2(0.05)k_F a_{excit} \pi^2} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{d}^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \\ &\times K_0(2\pi \frac{N}{L} \tilde{q}u) \tilde{q}^2 E_F^2 + \frac{E_F^2}{4} \tilde{q}^4, \\ &= \frac{1}{2(0.05)(2N\pi/L) a_{excit} \pi^2} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{d}^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \\ &\times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \tilde{q}u) \tilde{q}^2 E_F^2 + \frac{E_F^2}{4} \tilde{q}^4, \\ &= \frac{1}{2(0.05)(2N/L) a_{excit} \pi^2} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2/4} \left[1 - e^{-\tilde{d}^2/4} I_0\left(\frac{u\tilde{d}'}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \bar{q}u) \bar{q}^2 E_F^2 + \frac{E_F^2}{4} \bar{q}^4 \\
& = C(T=0, N/L) \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^{3/4}} \left[1 - e^{-\bar{q}^{2/4}} I_0 \left(\frac{u\bar{q}^2}{2} \right) \right] \\
& \times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \bar{q}u) \bar{q}^2 E_F^2 + \frac{E_F^2}{4} \bar{q}^4.
\end{aligned} \tag{3.ix}$$

donde

$$C(T=0, N/L) = \frac{1}{2(0.05)(2N/L) a_{\text{exc}} \pi^3}. \tag{3.x}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2 \omega^2}{E_F^2} & = C(T=0, N/L) \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^{3/4}} \left[1 - e^{-\bar{q}^{2/4}} I_0 \left(\frac{u\bar{q}^2}{2} \right) \right] \\
& \times K_0(2\pi\sigma \frac{N}{L} \bar{q}u) \bar{q}^2 + \frac{\bar{q}^4}{4},
\end{aligned} \tag{3.xi}$$

3.2 Temperatura de Fermi

La temperatura de Fermi de un gas de $2N$ fermiones con masa $m_F \equiv m_B/2$ y sin espín, está definida como

$$T_F \equiv \frac{\epsilon_F}{k_B} \tag{3.xii}$$

y la energía de Fermi se obtiene de la ecuación de número de partículas, a $T=0$,

$$N_F = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d(\epsilon), \tag{3.xiii}$$

sustituyendo la Eq. (2.12) del capítulo 2 en Eq. (3.xiii) obtenemos,

$$N_F = \frac{L}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{2m_F}{\hbar^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{-\frac{1}{2}} d\epsilon. \tag{3.xiv}$$

Por lo tanto, la energía de Fermi queda expresada de la siguiente forma

$$\epsilon_F = \left(\frac{N}{L} \right)^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_F}. \tag{3.xv}$$

Y la temperatura de Fermi

$$T_F = \frac{N_F^2}{L^2} \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_F k_B} \right). \tag{3.xvi}$$

Para $2N$ fermiones con masas $m_B/2$.

$$T_F = \frac{8N_B^2 \Gamma^2(\frac{1}{2})}{L^2} \left(\frac{\hbar^2 \pi}{2m_B k_B} \right). \quad (3.xvii)$$

APÉNDICE IV

En este apéndice analizaremos el límite cuando la temperatura tiende a cero ($T \rightarrow 0$) de la función dieléctrica para $T \neq 0$ (Ec. (4.41)). Este resultado es consistente con la expresión de la función dieléctrica en $T = 0$ (4.4) del capítulo 4.

Necesitamos una expresión de la fugacidad z que dependa explícitamente de la temperatura. Usaremos la relación del número de partículas (Ec. 2.29) del capítulo 2,

$$N = \frac{L}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.i)$$

$$\frac{2N}{L} \left(\frac{h^2 \pi}{2mk_B T} \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.ii)$$

Para despejar z realizaremos una inversión de series [32],

$$z = y \left(1 - \frac{y}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) y^2 + \dots \right), \quad (4.iii)$$

donde $y \equiv \frac{2N}{L} (h^2 \pi / 2mk_B T)^{\frac{1}{2}}$.

Escribiremos la ecuación (4.iii) y obtenemos z , la fugacidad.

$$z = \left(\frac{2\pi m_B k_B T}{h^2 k_F^2} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\pi m_B k_B T}{h^2 k_F^2} \right)^{-1/2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{2\pi m_B k_B T}{h^2 k_F^2} \right)^{-1} + \dots \right). \quad (4.iv)$$

Requerimos la expresión de la fugacidad z para sustituirlo en la expresión de la función dieléctrica para $T \neq 0$ (Ec. (4.41)),

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - V(q) \frac{z}{2m_B} \frac{q^2}{(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (1 + g_{p+1/2}(z))}{\Gamma(1/2 - p)} \frac{(2k_B T q^2 / m_B \omega^2)^p}{(1 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2 \omega^2)^{2p}} \times \left(\frac{2m_B k_B T}{h^2} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^p \binom{2p+1}{2m+1} \left(\frac{q^4 \hbar^2}{4m_B^2 \omega^2} \right)^m. \quad (4.v)$$

para $p = 0$, la expresión se reduce,

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V(q) \frac{q^2}{2m_B (\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \frac{(1 + g_{1/2}(z))}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{2m_B k_B T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (4.vi)$$

sustituimos la expresión de z (Ec. 4.iv) en la ecuación (4.vi) y expresamos el límite cuando $T \rightarrow 0$ de la función dieléctrica.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= \lim_{T \rightarrow 0} \left[1 - V(q) \frac{1}{2m_B} \frac{q^2}{(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \frac{(1 + g_{1/2}(z))}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m_B k_B T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{2\pi m_B k_B T}{\hbar^2 k_F^2} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\pi m_B k_B T}{\hbar^2 k_F^2} \right)^{-1/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{2\pi m_B k_B T}{\hbar^2 k_F^2} \right)^{-1} + \dots \right) \right] \quad (4.vii) \end{aligned}$$

y

$$\lim_{T \rightarrow 0} g_{1/2}(z) = 0. \quad (4.viii)$$

Entonces,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V(q) \frac{1}{2m_B} \frac{q^2}{(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi}{k_F^2} \right)^{-1/2} \quad (4.ix)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V(q) \frac{1}{2m_B} \frac{q^2}{(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_F}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (4.x)$$

y $K_F \equiv 2N\pi/L$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V(q) \frac{1}{2m_B} \frac{q^2}{(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \left(\frac{2N\pi}{L\pi} \right) \quad (4.xi)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V(q) \frac{1}{2m_B} \frac{q^2}{(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \left(\frac{2N}{L} \right) \quad (4.xii)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V(q) \frac{1}{m_B} \frac{q^2}{(\omega^2 - \hbar^2 q^4 / 4m_B^2)} \left(\frac{N}{L} \right) \quad (4.xiii)$$

Hemos llegado a la ecuación (4.4) del capítulo 4.

Lista de Figuras

- Figura 1** Energía interna y calor específico en función de la fugacidad z .
- Figura 2** La fugacidad y el potencial químico z en función de la temperatura.
- Figura 3** El modelo del alambre cuántico.
- Figura 4** Potencial efectivo del sistema.
- Figura 5** Potencial de interacción de dos dipolos considerados como 4 partículas cargadas.
- Figura 6** Potencial de interacción y potencial efectivo para $\tilde{d}' = 2.98543$.
- Figura 7** Potencial de interacción y potencial efectivo para $\tilde{d}' = 4.88023$.
- Figura 8** Potencial de interacción y potencial efectivo para $\tilde{d}' = 9.97142$.
- Figura 9** Transformada de Fourier del potencial efectivo.
- Figura 10** Potencial efectivo y potencial interdipolar de Ulloa.
- Figura 11** Transformada de Fourier del potencial efectivo y del de Ulloa.
- Figura 12** El coeficiente $C(T/T_F, \rho)$ de la relación de dispersión del sistema en función de la temperatura para $\rho = 1 \times 10^9 \text{cm}^{-1}$.
- Figura 13** El coeficiente $C(T/T_F, \rho)$ de la relación de dispersión en función de la temperatura para $\rho = 1 \times 10^8 \text{cm}^{-1}$.
- Figura 14** La frecuencia de oscilación del sistema para diferentes anchos de los alambres en $T = 0$ y $\rho = 1 \times 10^9 \text{cm}^{-1}$.
- Figura 15** La frecuencia de oscilación del sistema para diferentes anchos de los alambres en $T = 0$ y $\rho = 1 \times 10^8 \text{cm}^{-1}$.
- Figura 16** La frecuencia de oscilación del sistema para dos densidades de estados. $\rho = 1 \times 10^9 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^8 \text{cm}^{-1}$ en $T = 0$ y $\sigma = 10\text{\AA}$

- Figura 17** La frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^\circ K$, $7.34^\circ K$ y $73.48^\circ K$ para $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\sigma = 10\text{\AA}$.
- Figura 18** La frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^\circ K$, $7.34^\circ K$ y $73.48^\circ K$ para $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\sigma = 20\text{\AA}$.
- Figura 19** La frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^\circ K$, $7.34^\circ K$ y $73.48^\circ K$ para $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\sigma = 30\text{\AA}$.
- Figura 20** La frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^\circ K$, $7.34^\circ K$ y $73.48^\circ K$ para $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ y $\sigma = 10\text{\AA}$.
- Figura 21** La frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^\circ K$, $7.34^\circ K$ y $73.48^\circ K$ para $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ y $\sigma = 20\text{\AA}$.
- Figura 22** La frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^\circ K$, $7.34^\circ K$ y $73.48^\circ K$ para $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ y $\sigma = 30\text{\AA}$.
- Figura 23** Frecuencia de oscilación del sistema para dos densidades $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$ y $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ en $T = 1^\circ K$ y $\sigma = 10\text{\AA}$.
- Figura 24** Frecuencia de oscilación del sistema en $T = 0^\circ K$ y $T = 1^\circ K$.

Lista de Tablas

Tabla 3.1 Energía mínima del sistema (caso Atractivo).

Tabla 3.2 Energía mínima del sistema (caso Repulsivo).

Tabla 3.3 Energía mínima del sistema, caso atractivo y caso repulsivo.

Tabla 3.4 Distancia mínima o efectiva del sistema.

Tabla 5.1 Distancia efectiva del sistema.

Tabla 5.2 Coeficientes $C(T/T_F, \rho)$ para $\rho = 1 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$.

Tabla 5.3 Coeficientes $C(T/T_F, \rho)$ para $\rho = 1 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ y \bar{d} .

References

- [1] M. R. Schafroth, *Phys. Rev.* **100**, 463, 1955.
- [2] L. L. Foldy *Phys. Rev.* **124**, 649 (1961).
- [3] A. S. Alexandrov y W. H. Beere, *Phys. Rev. B* **51**, 5887, 1995.
- [4] D. F. Hines y N. E. Frankel, *Phys. Rev. B* **20**, 972, 1979.
- [5] D. M. Kachintsev y S. E. Ulloa, *Phys. Rev. B* **50**, 8715, 1994.
- [6] D. S. Fisher y P. C. Hohenberg, *Phys. Rev. B* **37**, 4036 (1988).
- [7] V. K. Wong, *Ann. Phys.* **83**, 252 (1974).
- [8] S. R. Hore y N. E. Frankel, *Phys. Rev. B* **12**, 2619 (1975).
- [9] D. Bartley y V. K. Wong, *Phys. Rev. B* **12**, 3775 (1975).
- [10] A. L. Fetter, *Ann. Phys.* **64**, 1 (1971).
- [11] F. Stern, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 5-16, 1967.
- [12] K.W. Chiu y J.J. Quinn, *Phys. Rev. B* **9**, 4724 (1974).
- [13] P. B. Visscher y L.M. Falicov, *Phys. Rev. B* **3**, 2541 (1971).
- [14] N.J.M. Horing y M.M. Yildiz, *Ann. Phys.* **97**, 216 (1976).
- [15] A. L. Fetter, *Ann. Phys.* **81**, 367 (1973).
- [16] B. M. Santoyo y M. del Castillo-Mussot, *Rev. Mex. Fis.* **39**, 640 (1993).
- [17] H. Ehrenreich y M.H. Cohen, *Phys. Rev.*, **115**, 786, 1959.
- [18] Harris G. E., en *Advances in plasma physics*, Vol. 3, A. Simon and W.B. Thompson (ed. Wiley-Interscience, New York, 1969).
- [19] Harris G. E., *A pedestrian approach to quantum field theory* (ed. Wiley-Interscience, E.U.A., 1972).
- [20] L. J. Chalis, *Contemporary Physics*, **33**, 111 (1992).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- [21] Shang-Keng Ma y Chia-Wei Woo, *Phys. Rev.* **159**, 165 (1967).
- [22] T.G. Pedersen *Phys. Rev. B* **61**, 10504 (2000).
- [23] T.G. Pedersen y T.B. Lyngø, *Phys. Rev. B* **65**, 085201-1 (2002).
- [24] M. Casas, M. Fortes, S. Fujita. "Condensación de Bose-Einstein y Superconductividad". Ciencia y Desarrollo (1996).
- [25] F. J. Sevilla Pérez, "Gas de bosones atrapados por potenciales armónicos". tesis de Licenciatura (Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2000).
- [26] S. Tapia Reynoso, "Gas de bosones en bajas dimensiones atrapados por potenciales armónicos". tesis de Licenciatura (Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2001).
- [27] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*(ed. Butterworth Heinemann, E.U.A., 1996. 2a. edición. Sección 3.7).
- [28] A.L. Fetter y J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particles Systems* (McGraw-Hill, N.Y., 1971).
- [29] J. A. Reyes y M. del Castillo-Mussot, *Phys. Rev. B* **57**, 1690, 1998.
- [30] J. A. Reyes, M. del Castillo-Mussot, M. A. Molero and G. J. Vázquez, *Helv. Phys. Acta* **72**(3), 180-188 (1999).
- [31] F.J.Becerra, J.A. Reyes, M. del Castillo-Mussot, *Physica E* **13**, 43-53 (2002).
- [32] Arfken G. B. y Weber H. J., *Mathematical Methods for Physicist* (ed. Academic press. E.U.A., 2001).
- [33] Szabo Attila, *Modern quantum chemistry*, (ed. Dover, E.U.A., 1989).
- [34] The *Mathematica* Archive, Wolfram Research, Inc. 100 Trade Center Drive Champaign, IL 61820, USA.
- [35] M. O Godzaev y B. E. Sernelius, *Phys. Rev. B*, **33**, 8568, 1986.
- [36] P. Bigenwald y A. Kavokin, *Phys. Rev. B*, **61**, 15621, 2000.



- [37] Fried. D. Burton and Conte D. S., *The plasma dispersion function* (ed. Academic press. E.U.A., 1961).
- [38] F.J. Becerra Camacho. "Excitón de Wannier-Mott en aros cuánticos coplanares y concéntricos". tesis de Maestría (IF-UNAM. México, 2000).
- [39] Kittel C., *Introduction to Solid State Physics*. (ed. John Wiley. New York. 1976).