

00323
49



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

ANALISIS GEOMETRICO Y TOPOLOGICO DE ESPACIOS CON CURVATURA CONSTANTE

572 Dirección General de Bibliotecas de la UNAM difundir en formato electrónico e impreso el trabajo de mi trabajo recepcional.

AUTORE: Francisco Nettel

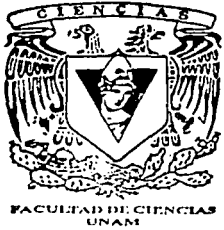
FECHA: 14 de Julio del 2003

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
FRANCISCO NETTEL RUEDA

DIRECTOR DE TESIS DR. HERNANDO QUEVEDO CASILLAS



2003



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

A



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVILA 14
AVILA

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Análisis Geométrico y Topológico de Espacios con Curvatura Constante"

realizado por Nettel Rueda Francisco

con número de cuenta 09550441-0, quien cubrió los créditos de la carrera de: física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis
Propietario

Dr. Hernando Quevedo Cubillos

Propietario

Dr. Nora Eva Bretón Báez

Propietario

Dr. Alipio Gustavo Calles Martínez

Suplente

Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Suplente

Dr. Hernán Larralde Ridaura

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

**Análisis geométrico y topológico de espacios
con curvatura constante**

Francisco Nettel Rueda

Julio del 2003

A Pepe, Lita, Bárbara, Peco y Úrsula

Agradecimientos

Agradezco a Hernando por guiarme en todo el proceso y por las buenas conversaciones acerca de todo. A Trinidad por su ayuda oportuna. A los doctores Hernán Larralde Ridaura, Alberto Güijosa Hidalgo, Nora Bretón Báez y Alipio Calles Martínez, por sus valiosos comentarios. A Yuriditzi por su compañía y amor. A mis amigos de aquí: Horacio, Javier, Miguel, Adriana, Sergio, Cruz, Mario, Tiber, Lorenzo, Martha, y a todos los demás que se me olvidan. A los de Tampico: Silvano, Pedro, Ernesto, Jorge, Juan Manuel, Luis, Mario, Rocio, Amelia, Norma y los otros que tampoco puedo recordar. A todos ellos por los buenos momentos que me hicieron pasar. A mi abuela Concha por darme posada todos estos años, y a mi familia por tenerme paciencia.

Agradezco a la DGAPA-UNAM por el apoyo brindado mediante el proyecto IN112401.

Índice general

Introducción	III
1. Fundamentos de la Relatividad General	1
1.1. Variedades Riemannianas	2
1.1.1. Variedades diferenciales	3
1.1.2. Vectores y Tensores	4
1.1.3. Mapeos de Variedades	10
1.1.4. Derivada de Lie	11
1.1.5. La Métrica	13
1.2. Conexión y Curvatura	18
1.3. Ecuaciones de Einstein	24
2. Espacios de curvatura constante	29
2.1. El tensor de Riemann para espacios de curvatura constante	29
2.2. Los espacios de de Sitter y de anti de Sitter	33
2.2.1. Encaje de un espacio en otro de dimensión mayor	35
2.2.2. El espacio de de Sitter	37
2.2.3. El espacio de anti de Sitter	42
3. Simetrías en espacios con curvatura constante	47
3.1. Isometrías y transformaciones conformes	47
3.2. Simetrías del espacio de de Sitter	57
3.2.1. La 'frontera' del espacio de de Sitter	58
3.2.2. El límite del horizonte	62
3.3. Simetrías del espacio de anti de Sitter	66
3.3.1. La 'frontera' del espacio de anti de Sitter	67
Conclusiones	69
A. El elemento de volumen	71
B. Solución para curvatura constante	75
C. El espacio de Minkowski	79

Introducción

Los espacios de de Sitter son espacios de curvatura constante, solución a las ecuaciones de Einstein para el espacio vacío, es decir, con tensor de energía-momento igual a cero, y con término cosmológico. Precisamente esta constante cosmológica nos permite distinguir dos soluciones, el espacio de de Sitter y el de anti de Sitter, que dependiendo de la convención que se use, el primero corresponde a la constante cosmológica mayor que cero y el otro cuando ésta es menor que cero.

Estos espacios, en particular al que se identifica como anti de Sitter AdS , han ganado importancia en los últimos años en el marco de la llamada correspondencia AdS/CFT , siendo ésta un resultado parcial de un nuevo concepto que ha surgido en la física, el principio holográfico. Éste tiene como idea principal que una teoría de un campo en particular, definido sobre una variedad diferencial, puede ser representada mediante otra teoría definida en la 'frontera' de dicha variedad. Dicha correspondencia establece una equivalencia (matemática) entre una teoría cuántica de cuerdas en un espacio $AdS_d \times M_{D-d}$ con una teoría cuántica de campo conforme en un espacio-tiempo de dimensión $d-1$, el cual se interpreta como la 'frontera' de AdS_d . El caso más estudiado en la correspondencia AdS/CFT es el de la teoría de cuerdas en el espacio $AdS_5 \times S_5$ que resulta ser completamente equivalente a la teoría de Super Yang Mills $n=4$ en la frontera del espacio de anti de Sitter ∂AdS_5 [1]. (A esto se le llama la conjetura de Maldacena.) Es importante mencionar que también existe la correspondencia dS/CFT [2], de hecho, en este trabajo estudiamos a detalle el espacio de de Sitter, el cual corresponde a este caso.

En este trabajo no pretendemos estudiar el principio holográfico, pues esto implicaría un conocimiento profundo de teoría de campos. Más bien, haremos un estudio de los espacios-tiempo que han jugado un papel importante en este contexto.

El objetivo de este trabajo es estudiar los espacios de de Sitter en lo general, poniendo especial atención en sus características geométricas, sus isometrías y como actúan éstas sobre las 'fronteras'.

Para esto empezamos con un resumen basado en Hawking y Ellis [3] de

los fundamentos de la teoría de la Relatividad General. En este resumen, buscamos hacer un acercamiento desde el punto de vista geométrico, empezando por definir lo que es una variedad riemanniana para luego utilizarla como modelo del espacio-tiempo, pasando por la curvatura de los espacios, hasta obtener las ecuaciones de campo de Einstein.

En el siguiente capítulo nos dedicaremos a los espacios de curvatura constante, donde veremos cómo se expresa el tensor de Riemann para espacios con esta característica. De éstos estudiaremos los llamados espacios de de Sitter como solución a las ecuaciones de Einstein para el espacio vacío y con constante cosmológica, observando que debido a ésta tenemos dos posibilidades, el espacio de de Sitter y el de anti de Sitter.

Analizaremos las condiciones para hacer el encaje de un espacio en otro de mayor dimensión y veremos, para los dos casos, cómo se pueden expresar las métricas en distintos sistemas de coordenadas, así como algunas características de estos espacios en lo que se refiere a las propiedades físicas.

En el tercer capítulo empezaremos estudiando lo que son las transformaciones de un espacio, veremos qué significa que tenga una isometría y cuáles son éstas expresadas como una transformación de coordenadas. De la misma forma, estudiaremos el grupo de las transformaciones conformes, su álgebra de Lie y el tipo de transformaciones particulares que se encuentran contenidas en este grupo, dependiendo de la dimensionalidad de la variedad sobre la que actúan.

Analizaremos esto aplicado a los espacios de de Sitter, y nos detendremos de manera especial en el espacio con curvatura positiva, para el cual definiremos una 'frontera' y estudiaremos la acción del grupo de isometrías sobre ella, observando que este grupo de isometrías al actuar sobre esta frontera lo hace como el grupo conforme. También veremos que este espacio tiene un horizonte cuando la métrica la expresamos de forma tal que es estática e identificaremos este límite con la 'frontera'. Nos encontraremos que para el espacio de de Sitter tenemos dos 'fronteras' mientras que para anti de Sitter solamente tenemos una. Con esto concluirá el trabajo.

Se anexan dos apéndices, el primero para complementar el primer capítulo en lo que se refiere a la deducción de las ecuaciones de Einstein, y el segundo como complemento del capítulo dos, donde se obtienen las soluciones de de Sitter a partir de las ecuaciones de Einstein y de la condición de curvatura constante, proponiendo una métrica que tenga simetría esférica y que sea estática. En un tercer apéndice revisamos el espacio de Minkowski y sus propiedades, lo cual nos servirá durante el desarrollo del segundo capítulo. Para terminar haremos unos breves comentarios como conclusión al trabajo y mencionaremos posibles líneas de investigación las cuales podríamos continuar explorando en un futuro.

Capítulo 1

Fundamentos de la Teoría General de la Relatividad

Es a Albert Einstein a quien debemos algunas teorías fundamentales en la física moderna, en particular: la Teoría Especial de la Relatividad y la Teoría General de la Relatividad.

En la Teoría Especial de la Relatividad hay dos postulados a partir de los cuales podemos definir el intervalo entre dos eventos y establecer que éste es invariante bajo el cambio de sistemas de referencia, es decir, que cualquier observador inercial medirá el mismo intervalo entre dos eventos. Los intervalos entre cualquier par de eventos los podemos calcular haciendo uso de la métrica, la cual se puede ver como la función que nos permite medir 'distancias' en el espacio-tiempo. Para la Relatividad Especial la métrica que usamos es una métrica plana pseudo-Euclidiana llamada la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. En la Relatividad Especial no se toma en cuenta la fuerza debida al campo gravitacional, lo que nos permite trabajar con un solo sistema de referencia inercial en todo el espacio-tiempo.

La Relatividad Especial deja de ser útil globalmente cuando tenemos un observador no inercial o en la presencia de un campo gravitacional. El experimento de Pound-Rebka-Snider nos muestra esta incompatibilidad de la geometría de Minkowski. Así que para tener una teoría que incluya los campos gravitacionales, debemos buscar otro tipo de geometría para el espacio-tiempo, al menos globalmente.

La gravedad se distingue de las otras interacciones en que es una fuerza que afecta en la misma forma a todas las partículas, esto, hasta donde sabemos, fue reconocido primero por Galileo. Así, no existe un sistema inercial en reposo en presencia de un campo gravitacional uniforme en donde las partículas mantengan una velocidad uniforme en ausencia de otras fuerzas.

De esto se puede concluir que los campos gravitacionales uniformes son equivalentes a sistemas de referencia que se aceleran uniformemente respecto a los sistemas inerciales en reposo. Éste es el llamado *principio débil de equivalencia* debido a que solamente toma en cuenta a la gravedad. El comportamiento de las demás fuerzas en presencia de un campo gravitacional está incluido en el *principio fuerte de equivalencia*, que postula que las leyes que gobiernan a estas fuerzas, en un sistema inercial en caída libre, son idénticas a las leyes en la Relatividad Especial.

Se puede encontrar un sistema de referencia inercial en presencia de un campo gravitacional uniforme, pero si éste no es uniforme no podemos encontrar dicho sistema inercial global que esté en caída libre. A lo más que se puede aspirar es a construir un sistema de referencia inercial local, esto quiere decir que solamente se puede considerar inercial en una pequeña región del espacio-tiempo, o dicho de otra forma, cualquier campo gravitacional se puede considerar uniforme al menos localmente.

En Relatividad Especial las líneas de mundo de las partículas que empiezan paralelas permanecen así sin importar hasta dónde se extiendan, por esto el espacio de Minkowski es un espacio plano. En un campo gravitacional que no es uniforme las líneas de mundo de dos partículas cercanas que empiezan paralelas, en general, no permanecen de esta forma, por lo que el espacio-tiempo no puede ser plano. Así, al no cumplir el axioma de paralelismo, lo que tenemos es un espacio curvo. Pero estos espacios curvos se pueden ver como espacios planos, al menos localmente, alrededor de un punto como sucede con la superficie de una esfera. Esto motiva nuestro estudio de las variedades Riemannianas, que nos es sumamente útil al hablar de espacios curvos.

Lo que se ve es que hay una similitud entre los espacios de Riemann y la física en presencia de un campo gravitacional no uniforme. Einstein identificó las trayectorias de las partículas en caída libre con las geodésicas de la geometría de los espacios curvos. La Teoría General de la Relatividad usa la geometría de los espacios-tiempo curvos para representar el efecto que tiene el campo gravitacional en la trayectoria de las partículas.

1.1. Variedades Riemannianas

Sin hacer una definición precisa se puede decir que una variedad es un espacio que localmente puede ser visto como un espacio Euclidiano y que puede ser cubierto por un conjunto de sistemas coordenados o cartas. Otra forma de expresarlo es que cualquier conjunto que puede ser parametrizado de forma continua es una variedad. Sin la idea de distancia y otras propiedades geométricas, lo único que nos interesa es que la topología local de nuestros espacios sea la misma que la de \mathbb{R}^n .

Un mapeo ϕ de un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ a un conjunto abierto $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es C^r si las coordenadas (x'_1, \dots, x'_n) de la imagen de $p \in \mathcal{U}$, $\phi(p) \in \mathcal{U}'$, son funciones de las coordenadas $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ de $p \in \mathcal{U}$ cuyas r derivadas existen y son continuas. Si el mapeo es C^0 hablamos de un mapeo continuo.

1.1.1. Variedades diferenciales

Una variedad \mathcal{M} (diferencial) C^r de dimensión n es un conjunto \mathcal{M} junto con una colección de cartas $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ donde \mathcal{U}_α son subconjuntos de \mathcal{M} y ϕ_α son mapeos uno a uno (1-1) de los correspondientes \mathcal{U}_α a conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n que cumplen:

1. La colección de conjuntos \mathcal{U}_α cubren el espacio, es decir,

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha.$$

2. Si $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ es distinta del vacío entonces el mapeo $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ es un mapeo C^r de un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Los subconjuntos \mathcal{U}_α son vecindades coordenadas locales con coordenadas $\{x^i, (i = 1, \dots, n)\}$ definidas por el mapeo ϕ_α , de esta forma si $p \in \mathcal{U}_\alpha$ las coordenadas de p son las coordenadas de $\phi_\alpha(p)$ en \mathbb{R}^n .

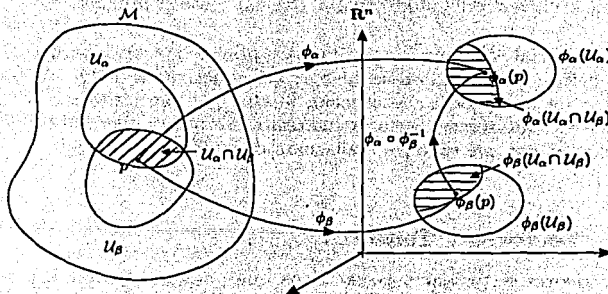


Figura 1.1: El mapeo $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ debe de ser C^r .

La composición $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ es un mapeo de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es una transformación de coordenadas; digamos, si (x^1, x^2, \dots, x^n) son las coordenadas $\phi_\beta(p)$ de

$p \in U_\alpha \cap U_\beta$ entonces las derivadas parciales de las funciones $\phi_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ con respecto a cada una de las $\{x^i\}$ deben existir y ser continuas.

Entonces se dice que el conjunto de cartas (U_α, ϕ_α) (al que se llama *atlas*) es un atlas C^r denotado por $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$. Un atlas se dice que es *compatible* con un atlas C^r si su unión es un atlas C^r para M . A todos los atlas compatibles con el atlas dado se les llama el *atlas completo* de la variedad. La topología de los conjuntos abiertos de M es la de \mathbb{R}^n , así los mapeos ϕ_α son homeomorfismos de M a \mathbb{R}^n .

Una variedad se dice que es *orientable* si existe un atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ tal que en cada intersección $U_\alpha \cap U_\beta$ el Jacobiano de la transformación de coordenadas, $|\partial x^i / \partial x'^j|$, es positivo, donde (x^1, \dots, x^n) y (x'^1, \dots, x'^n) son las coordenadas $\phi_\alpha(p)$ y $\phi_\beta(p)$ respectivamente.

Una función f en una variedad M C^r es un mapeo de M a \mathbb{R}^1 . Si el mapeo $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ en cualquier vecindad coordenada U_α es una función C^k ($k \leq r$) de las coordenadas locales en p , $\phi_\alpha(p)$, entonces se dice que la función es de clase C^k en el punto $p \in U \subset M$. Si f es de clase C^k en cada punto $p \in U \subset M$ entonces se dice que es una función C^k en U .

Como ya lo mencionamos, las variedades son localmente como \mathbb{R}^n , así dos variedades que sean de la misma dimensión y de la misma clase (C^r) son, localmente, prácticamente indistinguibles y existe un mapeo biyectivo de una variedad a otra. Este mapeo de una variedad diferencial M (C^k) a otra M' que es 1-1 y C^k y cuya inversa también es C^k , se le llama *difeomorfismo* de M sobre M' , donde C^k significa que las coordenadas de un punto en M' son funciones tales que todas sus k derivadas parciales respecto a las coordenadas de la imagen inversa del punto en M existen y son continuas.

La diferenciabilidad de la variedad nos provee de cierta estructura que nos permite definir tensores, formas diferenciales y derivadas de Lie. Además podemos dotar de una métrica al espacio, lo cual nos permitirá medir distancias y también le añadiremos cierta estructura extra para poder hablar de diferenciación covariante que es la generalización de la derivada parcial.

1.1.2. Vectores y Tensores

Los tensores son objetos geométricos que podemos definir a partir de la estructura diferencial de la variedad, éstos son independientes del sistema de coordenadas que se esté utilizando y están definidos en un punto. Ahora, al asociar un vector o tensor a cada punto de la variedad hablamos de un campo vectorial o tensorial respectivamente. Para hablar de estos objetos primero definiremos lo que es un vector en cada punto, partiendo del concepto de una curva en M .

Una curva $\lambda(t)$ (diferenciable) C^k en \mathcal{M} es un mapeo C^k de un conjunto abierto de \mathbb{R}^1 en \mathcal{M} . El que sea una curva diferenciable significa que las coordenadas de la imagen de λ , que podemos denotar como $\{x^i(\lambda(t)), i = 1, \dots, n\}$, son funciones diferenciables respecto a t en todos los puntos, al menos hasta el orden k . La imagen del mapeo λ , es decir, el conjunto de puntos $\lambda(t)$ en la imagen son lo que podemos visualizar como la curva en \mathcal{M} . A cada punto en la curva corresponde un valor de t , esto es, la curva está parametrizada con el parámetro t . Así podríamos parametrizar de forma distinta el mismo conjunto de puntos que son la imagen de la curva.

Un vector lo podemos ver como un mapeo de funciones en \mathcal{M} a números en \mathbb{R}^1 . Ahora consideremos una función f diferenciable sobre \mathcal{M} que actúa sobre $\lambda(t)$, el vector $(\frac{\partial f}{\partial t})_\lambda|_{t_0}$ tangente a la curva $\lambda(t)$ en el punto $\lambda(t_0)$ es un operador que mapea la función f en $\lambda(t_0)$ al número $(\partial f / \partial t)_\lambda|_{t_0}$, es decir hace el mapeo $f(\lambda(t_0)) \mapsto (\partial f / \partial t)_\lambda|_{t_0}$, así podemos ver a $(\partial f / \partial t)_\lambda$ como la derivada direccional de f a lo largo de $\lambda(t)$ con respecto al parámetro t

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda \Big|_t = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(\lambda(t+l)) - f(\lambda(t))}{l}.$$

Denotando las coordenadas de la imagen como $\{x^i(\lambda(t)), i = 1, \dots, n\}$ en una vecindad de $p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ tenemos que podemos expresar el valor de la derivada como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda \Big|_{t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} \Big|_{t=t_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{\lambda(t_0)} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{\lambda(t_0)}.$$

De esto podemos ver que el conjunto de números $\{\frac{dx^i}{dt}\}$ son las componentes del vector tangente a la curva $x^i(\lambda(t))$ respecto a la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_p$. Entonces lo que tenemos es una estructura de espacio vectorial para los vectores tangentes en un punto, de esta forma si \mathbf{X} y \mathbf{Y} son vectores, a y b números, y f una función tenemos que $(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y})f = a\mathbf{X}(f) + b\mathbf{Y}(f)$. El espacio de todos los vectores tangentes a un punto p en la variedad \mathcal{M} es un espacio vectorial de dimensión n al cual denotamos como T_p [4].

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes $\{e_i\}$ forman una base para el espacio T_p , de esta forma un vector \mathbf{X} lo podemos escribir como $\mathbf{X} = X^i e_i$, donde X^i son las componentes del vector en la base $\{e_i\}$. Si tenemos coordenadas $\{x^i\}$ para una vecindad \mathcal{U} de p entonces $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ es una base coordenada para los puntos en la vecindad \mathcal{U} .

De esta forma teniendo un espacio tangente a un punto podemos definir una *uno-forma* ω como una función lineal del espacio T_p en \mathbb{R} , es decir, una *uno-forma* es una función que mapea vectores del espacio tangente en p a números reales. Se denota como $\omega(\mathbf{X})$ ó $\langle \omega, \mathbf{X} \rangle$. Que sea una función lineal significa que cumple con

$$\langle \omega, a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} \rangle = a\langle \omega, \mathbf{X} \rangle + b\langle \omega, \mathbf{Y} \rangle,$$

y si η es otra *uno-forma* tenemos que la *uno-forma* $\omega + \eta$ cumple con

$$\langle a\omega + b\eta, \mathbf{X} \rangle = a\langle \omega, \mathbf{X} \rangle + b\langle \eta, \mathbf{X} \rangle \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

El conjunto de todas las uno-formas en p tiene la estructura de un espacio vectorial, lo denotamos como T_p^* y decimos que es el dual de T_p , debido a que los vectores también pueden ser vistos como funciones que mapean uno-formas en números. Cualquier conjunto de n uno-formas linealmente independientes forma una base para el espacio T_p^* , pero si $\{e_i\}$ es una base para los vectores en p existe un único conjunto de n uno-formas linealmente independientes que forman la base dual para las uno-formas en p denotado por $\{e^i\}$. Estas bases duales cumplen la condición de que un elemento de la base T_p^* mapea a un vector a su componente en esa dirección $X^i = \langle \mathbf{X}, e^i \rangle$ y lo correspondiente para la uno-forma $\omega_i = \langle \omega, e_i \rangle$, de esta forma tenemos que $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i$. Se puede expresar el número $\langle \omega, \mathbf{X} \rangle$ en términos de las componentes de la uno-forma y del vector respecto a sus respectivas bases

$$\langle \omega, \mathbf{X} \rangle = \langle \omega_i e^i, X^j e_j \rangle = \omega_i X^i.$$

A esto se le llama la contracción de \mathbf{X} con ω , donde de forma implícita estamos sumando sobre el índice i tomando como convención que dos índices iguales en posiciones covariante (abajo) y contravariante (arriba) se suman, estos índices son mudos y pueden ser reemplazados por cualquier otra letra.

Dada una función f en \mathcal{M} hay una uno-forma df llamada el gradiente de f en p que mapea al vector \mathbf{X} en el número $\mathbf{X}(f)$, esto es $\langle df, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}(f)$. Si $\{x^i\}$ son coordenadas locales alrededor de p existe una base coordinada para los vectores, y $\{dx^i\}$ es su correspondiente dual para las uno-formas debido a que

$$\langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

Así el gradiente lo podemos escribir como $df = \langle df, e_i \rangle e^i = (\partial f / \partial x^i) dx^i$. La notación es la misma que se usa para la diferencial de f , pero ésta se obtiene al contraer la uno-forma df con un vector que representa un desplazamiento infinitesimal. La forma de visualizar una uno-forma es como superficies cuyo vector normal es el vector asociado a la uno-forma gradiente, lo cual veremos más adelante cuando hablemos de la métrica. De esta manera si un vector es tangente a una curva en una superficie definida como $\{f = \text{constante}\}$, entonces $\langle df, \mathbf{X} \rangle = 0$, lo que significa que el vector no cruza la superficie.

La forma natural de extender el concepto de vectores y uno-formas es mediante objetos geométricos llamados tensores. Éstos, a diferencia de los objetos que hemos visto anteriormente, no pueden ser representados visualmente como una flecha tangente a la curva en el caso de los vectores o como superficies para las uno-formas.

Un tensor \mathbf{T} de tipo (l, m) en p es una función lineal que mapea al elemento $(\omega^1, \dots, \omega^l, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$ a un número real que escribimos como

$$\mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^l, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m).$$

Los elementos que mapea el tensor \mathbf{T} pertenecen al espacio que es el producto cartesiano de los espacios tangentes de los vectores y de las uno-formas.

El que un tensor (l, m) sea una función lineal significa que lo es para todos sus argumentos, es decir, para las l uno-formas y para los m vectores. Para uno de los argumentos tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(a\eta^1 + b\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^l, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m) = \\ a\mathbf{T}(\eta^1, \omega^2, \dots, \omega^l, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m) + b\mathbf{T}(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^l, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m), \end{aligned}$$

y de forma similar para todos y cada uno de los argumentos. Así como los vectores, el conjunto de todos los tensores de tipo (l, m) son un espacio vectorial de dimensión n^{l+m} sobre \mathbb{R} , este espacio es el producto tensorial

$$T_m^l = \underbrace{T_p \otimes \dots \otimes T_p}_l \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_m.$$

La suma de tensores y la multiplicación por un escalar es similar a la de los vectores. Si \mathbf{T} y \mathbf{T}' son dos tensores en T_m^l

$$(\mathbf{T} + \mathbf{T}')(\omega^i, \mathbf{X}_j) = \mathbf{T}(\omega^i, \mathbf{X}_j) + \mathbf{T}'(\omega^i, \mathbf{X}_j),$$

$$(a\mathbf{T})(\omega^i, \mathbf{X}_j) = a\mathbf{T}(\omega^i, \mathbf{X}_j) \quad \text{donde } \omega^i \in T_p^*, \mathbf{X}_j \in T_p, \text{ y } a \in \mathbb{R}^1.$$

También tenemos el producto tensorial de dos tensores, si $\mathbf{T} \in T_m^l$ y $\mathbf{F} \in T_q^p$, expresamos al nuevo tensor como $\mathbf{T} \otimes \mathbf{F}$. Es un tensor del tipo $(l+p, m+q)$ y pertenece al espacio T_{m+q}^{l+p} .

Cualquier tensor $\mathbf{T} \in T_m^l(p)$ se puede expresar de forma similar a los vectores y uno-formas en términos de una base y de sus componentes

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_l} \otimes e^{\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{\nu_m}$$

Siendo $\{e_{\mu}\}$ la base del espacio T_p y $\{e^{\nu}\}$ la base dual correspondiente al espacio T_p^* donde μ_k, ν_k van de 1 a n . Las componentes del tensor se obtienen al tomar como argumentos de éste a los vectores y uno-formas base. Las operaciones con tensores se pueden expresar en términos de las componentes

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} + \mathbf{T}')^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} &= T^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} + T'^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} \\ (a\mathbf{T})^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} &= aT^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} \\ (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}')^{\mu_1 \dots \mu_{l+p}}_{\nu_1 \dots \nu_{m+q}} &= T^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} T'^{\mu_{l+1} \dots \mu_{l+p}}_{\nu_{m+1} \dots \nu_{m+q}} \end{aligned}$$

La contracción de un tensor del tipo (l, m) en dos de sus índices, uno contravariante y otro covariante, nos da como resultado otro tensor de tipo $(l-1, m-1)$, esta operación es independiente de la base en la que están expresadas las componentes del tensor al que se le aplicará la contracción. Lo que significa es que se suma sobre un par de índices lo cual expresamos asignándoles la misma letra

$$C = T^{\mu\alpha\dots\sigma}{}_{\mu\beta\dots\rho} e_{\alpha} \otimes \dots \otimes e_{\sigma} \otimes e^{\beta} \otimes \dots \otimes e^{\rho}.$$

Uno puede expresar los tensores en términos de otras bases y encontrar una relación entre ellas. Si tengo una base $\{e_{\mu}\}$ para el espacio T_p puedo encontrar otra base distinta $\{e'_{\nu}\}$ mediante una transformación lineal Λ en T_p

$$e'_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} e_{\mu}. \quad (1.1)$$

Los números $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ son las componentes de una matriz de $n \times n$ no singular ($\det \Lambda \neq 0$), de forma que los vectores de la nueva base $\{e'_{\nu}\}$ son linealmente independientes. Al ser una matriz no singular podemos encontrar la transformación inversa, y obtener la base dual primada

$$e'^{\nu} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu} e^{\mu}, \quad (1.2)$$

y así tenemos que

$$\delta^{\nu'}{}_{\nu'} = \langle e'^{\mu}, e'_{\nu'} \rangle = \langle \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} e^{\alpha}, \Lambda^{\beta}{}_{\nu'} e_{\beta} \rangle = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} \Lambda^{\beta}{}_{\nu'} \delta^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} \Lambda^{\alpha}{}_{\nu'}.$$

Si tenemos coordenadas $\{x^{\mu}\}$ para una vecindad de \mathcal{U} alrededor de p las bases duales coordenadas son $\{e_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\}$ y $\{e^{\mu} = dx^{\mu}\}$. Al introducir otro sistema de coordenadas $\{x'^{\nu}\}$ mediante la transformación $x'^{\nu} = x'^{\nu}(x^1, \dots, x^n)$ $\nu = 1, \dots, n$ se debe de cumplir que la matriz con elementos $\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ tenga determinante distinto de cero en \mathcal{U} . Las bases coordenadas en este otro sistema de coordenadas son $\{e'_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\}$ y $\{e'^{\nu} = dx'^{\nu}\}$ y mediante la regla de la cadena sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

y además

$$dx'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu},$$

y observando las ecuaciones (1.1) y (1.2) vemos que

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}$$

$$\Lambda^{\nu'}{}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

Las componentes de los tensores, respecto a una base $\{e_\mu\}$, $\{e^\mu\}$, se pueden transformar para expresarlas en términos de otra base, $\{e'_\mu\}$, $\{e'^\mu\}$, de la siguiente forma

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_1 \dots \nu_s} = T^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_1 \dots \nu_s} \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\nu'_s}_{\nu_s} \Lambda^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \dots \Lambda^{\beta_r}_{\beta'_r}.$$

Es importante recordar que las componentes de los tensores son distintas al cambiar de base, pero el tensor en sí es el mismo.

Un tensor $(2, 0)$ es simétrico si al intercambiar los argumentos se cumple que $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{T}(\omega_2, \omega_1)$ y antisimétrico si $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2) = -\mathbf{T}(\omega_2, \omega_1)$. De esta forma a partir de cualquier tensor $(2, 0)$ se puede definir un tensor simétrico \mathbf{S} y uno antisimétrico \mathbf{A}

$$\mathbf{S}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2!} [\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2) + \mathbf{T}(\omega_2, \omega_1)]$$

$$\mathbf{A}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2!} [\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2) - \mathbf{T}(\omega_2, \omega_1)].$$

Al poner como argumento a los vectores base obtenemos las componentes de estos tensores y las denotamos de la siguiente forma, llamándolas la parte simétrica de \mathbf{T}

$$T^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2!} [T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}],$$

y la parte antisimétrica de \mathbf{T}

$$T^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2!} [T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}].$$

Para tensores con más índices ya sea en la posición covariante o contravariante se tiene la misma notación, el paréntesis para los simétricos y el paréntesis cuadrado para los antisimétricos. La parte simétrica se expresa como la suma de las permutaciones de los n índices dividida por $n!$, lo mismo para la parte antisimétrica con la diferencia de que se toma la suma y resta alternada de las permutaciones pares e impares de los índices respectivamente. Un tensor es simétrico en los índices covariantes o contravariantes si es igual a la parte simétrica en esos índices y antisimétrico si es igual a su parte antisimétrica. Esto se puede expresar para el caso de un tensor simétrico $(2, 0)$ como $T^{[\mu\nu]} = 0$ y si es antisimétrico $T^{(\mu\nu)} = 0$.

Como ya mencionamos, al asociar un tensor del espacio $T^l_m(p)$ a cada punto de una vecindad $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$ alrededor de p , lo que tenemos es un campo tensorial $\mathbf{T} \in C^k$ de tipo (l, m) en \mathcal{U} , sus componentes con respecto a una base coordinada para la vecindad son funciones diferenciables en \mathcal{U} .

Un tensor de tipo $(0, r)$ es completamente antisimétrico si al intercambiar cualquiera dos de sus argumentos éste cambia de signo, es decir, cualquier permutación impar de índices cambia el signo del tensor y cualquier permutación par deja el signo igual. A este subconjunto de tensores se les llama r -formas.

Si \mathbf{R} es una r -forma la podemos escribir como la parte antisimétrica, es decir, la suma y resta alternada de las permutaciones de los r índices multiplicada por $\frac{1}{r!}$. Las uno-formas son un caso particular de este tipo de tensores, y podemos escribir cualquier r -forma como el producto tensorial antisimétrico \wedge de r uno-formas. Si tenemos una base para las uno-formas $\{e^\mu\}$, cualquier r -forma la podemos escribir como $\mathbf{R} = R_{\mu\dots\nu} e^\mu \wedge \dots \wedge e^\nu$ con $R_{\mu\dots\nu} = R_{[\mu\dots\nu]}$.

El producto tensorial antisimétrico de una r -forma \mathbf{R} con una p -forma \mathbf{P} nos da la $(r+p)$ -forma $\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}$ con componentes $(\mathbf{R} \wedge \mathbf{P})_{\mu\dots\nu\alpha\dots\beta} = R_{[\mu\dots\nu} P_{\alpha\dots\beta]}$. Al conmutar las formas tenemos que $(\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}) = (-1)^{rp} (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R})$, esto es fácil de ver si notamos que al mover una de las r uno-formas base la intercambiamos de lugar p veces por lo que tenemos que multiplicar por un factor $(-1)^p$ y haciendo esto para todas las demás uno-formas base tenemos que nos queda un factor $[(-1)^p]^r$.

Podemos definir un operador diferencial d para r -formas que las preserve como tensores covariantes y completamente antisimétricos. Una función f en una variedad \mathcal{M} es una cero-forma la cual bajo el operador d se convierte en la uno-forma df . Al extender este operador a r -formas con $r \geq 1$ debemos pedir que la forma resultante sea de un grado mayor. Si \mathbf{R} es una r -forma y \mathbf{P} es una p -forma tenemos que se deben cumplir las propiedades

$$(i) \quad d(\mathbf{R} + \mathbf{P}) = d\mathbf{R} + d\mathbf{P},$$

$$(ii) \quad d(\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}) = d\mathbf{R} \wedge \mathbf{P} + (-1)^r \mathbf{R} \wedge d\mathbf{P},$$

$$(iii) \quad d(d\mathbf{R}) = 0,$$

donde en la propiedad (ii) el factor de $(-1)^r$ proviene de mover el operador por toda la r -forma un número r de veces. La tercera propiedad es fácil de ver en el caso de una cero-forma f , donde en términos de coordenadas la uno-forma df es $df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ y al aplicar otra vez el operador d tenemos $d(df) = (\partial^2 f / \partial x^\nu \partial x^\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$ que es cero ya que es el producto de un término simétrico por uno antisimétrico.

1.1.3. Mapeos de Variedades

Un mapeo ψ de una variedad diferencial \mathcal{N} de dimensión n a otra \mathcal{M} de dimensión m se dice que es C^k si las coordenadas de la imagen de $\psi(p)$ en \mathcal{M} son funciones C^k de las coordenadas de p en \mathcal{N} . El mapeo ψ nos define otro mapeo ψ^* que manda de forma lineal una función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ a una función $f \circ \psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos a la nueva función como $\psi^* f$, así para un punto $p \in \mathcal{N}$ tenemos

$$(\psi^* f)(p) = f(\psi(p)).$$

De forma similar existe un mapeo lineal $\psi_* : T_p(\mathcal{N}) \rightarrow T_{\psi(p)}(\mathcal{M})$, que se define como

$$(\psi_* \mathbf{X})(f)|_p = \mathbf{X}(\psi^* f)|_{\psi(p)} \quad \text{con } \mathbf{X} \in T_p(\mathcal{N}).$$

También podemos definir el mapeo $\psi^* : T_{\psi(p)}^*(\mathcal{M}) \rightarrow T_p^*(\mathcal{N})$ pidiendo que la contracción de un vector con una uno-forma sea invariante bajo estos mapeos

$$\langle \psi^* \omega, \mathbf{X} \rangle|_p = \langle \omega, \psi_* \mathbf{X} \rangle|_{\psi(p)} \quad \text{con } \omega \in T_{\psi(p)}^*$$

Este mapeo se puede extender a los tensores de tipo $(0, l)$ y $(l, 0)$, de esta manera tenemos $\psi_* : T_0^l(\mathcal{N}) \rightarrow T_0^l(\mathcal{M})$ y $\psi^* : T_0^l(\mathcal{M}) \rightarrow T_0^l(\mathcal{N})$ para un punto $p \in \mathcal{N}$ y $\mathbf{T} \in T_0^l(p)$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\psi^* \omega^1, \dots, \psi^* \omega^l)|_p &= \psi_* \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^l)|_{\psi(p)} & \text{con } \omega^i \in T_{\psi(p)}^* \\ \psi^* \mathbf{T}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_l)|_p &= \mathbf{T}(\psi_* \mathbf{X}_1, \dots, \psi_* \mathbf{X}_l)|_{\psi(p)} & \text{con } \mathbf{X}_i \in T_p \end{aligned}$$

Un mapeo $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ que es C^k es un difeomorfismo si es uno a uno, suprayectivo y su inverso también es diferenciable, esto significa que los espacios \mathcal{N} y \mathcal{M} tienen la misma dimensión $\dim(\mathcal{N}) = \dim(\mathcal{M}) = n$ con ($k \geq 1$) y que ψ es un mapeo biyectivo. Si ψ es un difeomorfismo podemos hablar de un mapeo inverso $(\psi^{-1})^* : T_p^*(\mathcal{N}) \rightarrow T_{\psi(p)}^*(\mathcal{M})$ entre los espacios duales, esto nos permite definir un mapeo para los tensores en general de $T_m^l(\mathcal{N})$ a $T_m^l(\mathcal{M})$ en un punto p de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^l, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)|_p &= \\ \psi_* \mathbf{T}((\psi^{-1})^* \omega^1, \dots, (\psi^{-1})^* \omega^l, \psi_* \mathbf{X}_1, \dots, \psi_* \mathbf{X}_m)|_{\psi(p)} \end{aligned}$$

para $\omega^i \in T_p^*$ y $\mathbf{X}_i \in T_p$. Al igual que antes, la contracción de un tensor en $p \in \mathcal{N}$ permanece invariante bajo este mapeo ψ_* , es decir, uno puede contraer el tensor y luego mapearlo o hacer el mapeo y luego contraerlo.

A un mapeo $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ que es C^k , localmente uno a uno y su inverso también es un mapeo C^k se le llama *inmersión*. Si para cada punto $p \in \mathcal{N}$ existe un conjunto abierto \mathcal{V} tal que ψ es uno a uno en esa vecindad y $(\psi|_{\mathcal{V}})^{-1} : \psi(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{N}$ es C^k entonces decimos que $\psi(\mathcal{N})$ es una subvariedad de dimensión n inmersa en \mathcal{M} . Este mapeo puede no ser uno a uno globalmente, mas si cumple esta condición para todo el espacio decimos que el mapeo es un *encaje*. Se puede pedir además que el mapeo $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \psi(\mathcal{N})$ sea un homeomorfismo sobre su imagen $\psi(\mathcal{N}) \in \mathcal{M}$. A la imagen $\psi(\mathcal{N}) \in \mathcal{M}$ bajo un encaje ψ se le llama subvariedad encajada en \mathcal{M} de dimensión n que también puede ser vista como una hipersuperficie definida en \mathcal{M} .

1.1.4. Derivada de Lie

Al hablar en este momento de derivadas de campos vectoriales y tensoriales se presentan varias dificultades. El definir la derivada de un campo vectorial sugiere la comparación de vectores en distintos puntos respecto a la distancia que los separa, pero aun no hemos definido lo que es distancia entre dos puntos.

Otro problema que se presenta al comparar vectores en dos puntos distintos es saber si son paralelos o no, esto en un espacio Euclidiano no representa ningún problema, pero en un espacio curvo no sabemos cómo mover vectores en forma paralela con la estructura que tiene la variedad diferencial. Aun así podemos comparar vectores o tensores sobre una curva en la variedad, mapeando uno de ellos con un difeomorfismo al otro punto en cuestión. Para esto tenemos que hablar sobre curvas en la variedad.

Sabemos que cada curva tiene un vector tangente en cada punto, y por el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias sabemos que dado un campo tensorial \mathbf{X} en \mathcal{M} existe una curva máxima $\lambda(t)$ a través de cada punto $p \in \mathcal{M}$ tal que $\lambda(0) = p$ y que su vector tangente en el punto $\lambda(t_0)$ es el vector $\mathbf{X}|_{\lambda(t_0)}$. De esta forma si tenemos coordenadas $\{x^i\}$ en una vecindad de p y el vector \mathbf{X} tiene componentes X^i , la curva es una solución, al menos en la vecindad, del conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^j(t)) \quad \text{donde } j = 1, \dots, n.$$

Esta curva máxima es llamada la curva integral de \mathbf{X} con punto inicial en p . Un campo vectorial \mathbf{X} puede generar un mapeo de la variedad \mathcal{M} sobre sí misma, al menos localmente, así en una vecindad \mathcal{V} alrededor de cada punto $q \in \mathcal{M}$ tenemos que el campo vectorial \mathbf{X} define una familia de difeomorfismos de un parámetro $\psi_{\Delta t} : \mathcal{V} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ donde $|\Delta t| \leq \epsilon$ con $\epsilon \geq 0$, que lo que hacen es arrastrar un punto p una distancia Δt sobre la curva $\lambda(t)$. Esta familia de difeomorfismos de un parámetro forma un grupo abeliano, al menos en \mathcal{V} , con ley de composición $\Delta t_1 + \Delta t_2$, inverso $\psi_{-\Delta t} = (\psi_{\Delta t})^{-1}$, e identidad ψ_0 . Este mapeo, como ya vimos, se puede extender a tensores de tipo (l, m) , es decir, el mapeo $\psi_{\Delta t}$ mapea un tensor $\mathbf{T}|_p \in T_m^l(\mathcal{M})$ al tensor $\psi_{*\Delta t}\mathbf{T}|_{\psi_{\Delta t}(p)} \in T_m^l(\mathcal{M})$.

La comparación de tensores en dos puntos se hace mapeando el tensor que está en el punto $t + \Delta t$ al punto t mediante $\psi_{*-\Delta t}$ y tomando la diferencia, así tenemos que la derivada de Lie $L_{\mathbf{X}}$ de un campo tensorial \mathbf{T} con respecto a un campo vectorial \mathbf{X} es

$$L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}|_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi_{*-\Delta t}\mathbf{T}|_p - \mathbf{T}|_p}{\Delta t}.$$

La derivada de Lie de un tensor \mathbf{T} de tipo (l, m) es un mapeo a otro tensor $L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ del mismo tipo (l, m) , debido a que el mapeo ψ_* , como ya vimos, es del espacio $T_m^l(\psi(p))$ al espacio $T_m^l(p)$. Este mapeo es lineal y deja invariante a las contracciones, además sigue la regla de Leibniz $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}') = L_{\mathbf{X}}\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}' + \mathbf{T} \otimes L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}'$. Actuando sobre una función f tenemos $L_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}(f)$. Si tenemos coordenadas en una vecindad de p las componentes de la derivada de Lie sobre el vector \mathbf{Y} respecto de \mathbf{X} son

$$(L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j.$$

Si f es una función diferenciable (C^r con $r \geq 2$) podemos escribir al tensor $L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ actuando sobre ella como

$$(L_X Y) f = X(Yf) - Y(Xf),$$

así podemos escribir la derivada de Lie de Y respecto a X como $[X, Y]$ y debido a que el paréntesis de Lie es antisimétrico tenemos

$$L_X Y = [X, Y] = -[Y, X] = -L_Y X.$$

Si $[X, Y] = 0$ se dice que los campos vectoriales conmutan, esto se puede interpretar de forma geométrica; si $X = \frac{d}{dt_x}$ y $Y = \frac{d}{dt_y}$ son los campos vectoriales, cuando nos movemos a lo largo de las curvas integrales de X el parámetro t_y permanece constante y si lo hacemos a través de las curvas de Y el que permanece constante es t_x , de esta forma si avanzamos primero una distancia t_x y luego una t_y llegamos al mismo punto que al recorrer t_y primero y luego t_x . Las componentes de la derivada de Lie de una uno-forma son

$$(L_X \omega)_i = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) X^j + \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \omega_j,$$

y para un campo tensorial del tipo (l, m)

$$(L_X T)^{\mu \dots \nu}_{\alpha \dots \beta} = \left(\frac{\partial T^{\mu \dots \nu}_{\alpha \dots \beta}}{\partial x^i} \right) X^i - T^{i \dots \nu}_{\alpha \dots \beta} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} - (\text{índices superiores}) \\ + T^{\mu \dots \nu}_{i \dots \beta} \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha} + (\text{índices inferiores}).$$

De la diferenciabilidad de la variedad hemos obtenido todos los resultados anteriores, sin embargo, no hemos mencionado cómo medir distancias o algo sobre la curvatura de la variedad. Para poder hacer esto necesitamos definir un campo tensorial llamado la métrica de la variedad, lo que trataremos a continuación.

1.1.5. La Métrica

La métrica en una variedad M es un campo tensorial C^r simétrico no degenerado de tipo $(0, 2)$, por lo que para cada punto de la variedad tenemos un tensor g , al cual llamaremos tensor métrico, este tensor es una función lineal, en sus dos argumentos, del espacio T_p a los números reales. Así al actuar sobre un espacio vectorial la asociamos con el producto escalar de este espacio $g(X, Y) \equiv X \cdot Y$. De esta forma al actuar sobre un vector $X \in T_p$ lo que obtenemos es la magnitud de este vector $|g(X, X)|^{1/2}$ y podemos definir el 'coseno del ángulo' entre dos vectores X y Y ambos en T_p o el ángulo entre las dos curvas de las cuales los X y Y son vectores tangentes como

$$\frac{g(X, Y)}{|g(X, X)|^{1/2} |g(Y, Y)|^{1/2}} \quad (1.3)$$

donde $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \neq 0$. Si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ se dice que los vectores son ortogonales. Decimos que es no degenerada si dado que $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ para todo $\mathbf{Y} \in T_p$, tenemos necesariamente que $\mathbf{X} = 0$. Podemos encontrar las componentes del tensor métrico respecto a una base $\{e_\mu\}$

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(e_\mu, e_\nu).$$

Así al tensor métrico respecto a esta base lo podemos representar como una matriz de $n \times n$ si la dimensión de \mathcal{M} es n .

La longitud de arco de una curva parametrizada como $\lambda(t)$ la podemos definir como

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})|^{1/2} dt$$

donde $\mathbf{X} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \big|_{\lambda(t)}$ es el vector tangente a la curva. Si $\{e_\mu\}$ es una base coordenada podemos escribir

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu|^{1/2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right|^{1/2} dt.$$

En ocasiones se expresa a la métrica como $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, donde dx^α representa las componentes de un vector de desplazamiento infinitesimal, que no se debe confundir con la expresión para el tensor métrico respecto a una base coordenada $\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$. Esta última al tener como argumento un vector de desplazamiento infinitesimal nos da la expresión para ds^2 .

La métrica la llamamos positiva definida si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$ para todo $\mathbf{X} \neq 0$ en T_p , y la llamamos indefinida cuando el valor de $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ puede ser mayor, menor o igual a cero.

Una variedad diferencial dotada de una métrica positiva definida la llamamos *variedad Riemanniana*, si la métrica es indefinida recibe el nombre de *variedad semi-Riemanniana*, de forma que es un par $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Así distintas métricas nos dan distintas variedades Riemannianas, por ejemplo una esfera y el espacio Euclidiano \mathbb{E}^2 , que tienen distinta curvatura, pero que localmente son indistinguibles (topológicamente).

La métrica nos permite hacer un mapeo del espacio T_p al espacio T_p^* , ya que al tomar como argumento solamente un vector la podemos ver como un mapeo lineal que al actuar sobre otro vector nos da un número real. Este mapeo en términos de las componentes respecto a una base $\{e_\mu\}$ y su dual lo expresamos como $X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$, donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes de una matriz simétrica \mathbf{g} que representa al tensor métrico. El que \mathbf{g} sea no degenerada nos permite ver que la matriz \mathbf{g} es no singular y por lo tanto invertible, para esto veamos que

$$g(\mathbf{X}, e_\mu) = \mathbf{g}(X^\mu e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu} X^\mu = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad X^\mu = 0 \quad \forall \mu,$$

de ahí que todas las columnas de la matriz g sean linealmente independientes y su determinante sea distinto de cero ($\det g \neq 0$). Esto nos permite definir un tensor $(2, 0)$ con componentes $g^{\mu\nu}$ tal que $g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu} = \delta^\sigma_\nu$ y que hace el mapeo inverso, es decir, del espacio T_p^* al espacio T_p , en componentes $X^\mu = g^{\mu\nu}X_\nu$. A la acción de estos mapeos les llamamos bajar y subir índices. Al ser una matriz simétrica siempre podemos encontrar una transformación que nos lleve a una matriz diagonal $g' = \text{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$ a la que llamamos la forma canónica del tensor métrico, donde los $+1$ corresponden a los eigenvalores positivos de la matriz g y los -1 a los negativos. La base en la cual el tensor métrico tiene esta forma es una base ortonormal, es decir, $g(e_\mu, e_\nu) = \pm\delta_{\mu\nu}$.

A la suma de los elementos de la diagonal de la matriz métrica en su forma canónica le llamamos la signatura de la métrica, así una métrica positiva definida tiene signatura n , donde n es la dimensión de la variedad \mathcal{M} . Si es indefinida y tiene signatura $(n-2)$ (un eigenvalor negativo) decimos que es una métrica de Lorentz, esta métrica en un espacio de dimensión $n=4$ es lo que llamamos la métrica de Minkowski, que es el espacio plano de la Relatividad Especial.

En un espacio con una métrica de Lorentz podemos clasificar a los vectores distintos de cero en tres tipos: si $X \in T_p$ es un vector que $g(X, X) > 0$ se dice que es de tipo espacial o simplemente espacial, si $g(X, X) < 0$ es de tipo temporal y si $g(X, X) = 0$ se le llama vector nulo o tipo luz. Éstos últimos en un espacio tres dimensiones los podemos visualizar como vectores que forman el cono de luz separando a los temporales, adentro del cono, de los espaciales afuera de él.

Si tenemos que S es una subvariedad de dimensión s encajada en una variedad \mathcal{M} de dimensión m por medio del encaje $\psi: S \rightarrow \mathcal{M}$, decimos que $\psi(S)$ es una hipersuperficie en \mathcal{M} , este nombre es común cuando $s < m$. Como ya vimos el mapeo ψ tiene asociado un mapeo entre los espacios tangentes $\psi_*: T_p \rightarrow T_{\psi(p)}$, la imagen del espacio tangente en p bajo este mapeo $\psi_*(T_p) = V_{\psi(p)}$ es un espacio tangente de dimensión s , o expresado de otra forma, es un subespacio vectorial de $T_{\psi(p)}$. Dada una base para los vectores en el punto p , y escogiendo un campo de m -formas ω distinto de cero, tenemos que $\omega(x^1, \dots, x^m)$ tiene un valor positivo o negativo; si podemos encontrar una base para la cual este valor sea positivo (negativo) de forma continua para todos los puntos se dice que la variedad es orientable y está orientada de forma positiva (negativa). Una subvariedad S se puede orientar a partir de este campo de m -formas ω escogiendo $m-s$ vectores (N_1, \dots, N_{m-s}) linealmente independientes en p que no sean tangentes a S , de manera que la s -forma s resultante de contraer a éstos con ω , es decir $\omega(N_1, \dots, N_{m-s}) = s$, sea mayor que cero para una base vectorial dada en todos los puntos. Siendo $\{x^1, \dots, x^m\}$ coordenadas para un subconjunto abierto, alrededor de p , de la variedad orientable \mathcal{M} , la subvariedad o hipersuperficie S queda caracterizada por $x^1 = \dots = x^{m-s} = 0$, de modo que (x^{m-s+1}, \dots, x^m) son coordenadas para la hipersuperficie.

En el caso de que la subvariedad \mathcal{S} sea de dimensión $m - 1$, la imagen del mapeo del espacio tangente en p , bajo ψ_* , $V_{\psi(p)} \subset T_{\psi(p)}$ es un espacio tangente de dimensión $m - 1$. Podemos encontrar una uno-forma $\mathbf{n} \in T_{\psi(p)}^*$ distinta de cero tal que para cualquier vector $\mathbf{X} \in T_p$, su contracción sea cero $\langle \mathbf{n}, \psi_* \mathbf{X} \rangle = 0$. Esta uno-forma la definimos unitaria y salvo el signo es única. A la hipersuperficie la podemos caracterizar localmente como $f = 0$ con $df \neq 0$, así podemos tomar a \mathbf{n} como df , al menos localmente para $V_{\psi(p)}$. Si \mathcal{M} es una variedad orientable, existe un conjunto abierto alrededor de p con coordenadas $\{x^i, i = 1, \dots, m\}$, a partir de las cuales se puede expresar a la hipersuperficie $\psi(S)$ con la ecuación $x^1 = 0$ y $\mathbf{n} = df > 0$, siendo (x^2, \dots, x^m) coordenadas locales para la hipersuperficie $\psi(S)$.

El encaje ψ se puede extender a un mapeo $\psi^* : T_1^0(\mathcal{M}) \rightarrow T_1^0(S)$, en particular vamos a tener a la métrica ψ^*g de \mathcal{S} relacionada con la métrica g de \mathcal{M} de la siguiente forma

$$\psi^*g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|_p = g(\psi_*\mathbf{X}, \psi_*\mathbf{Y})|_{\psi(p)} \quad \text{con } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p.$$

Como ya vimos, existe el mapeo inverso de g , esto nos permite mapear las uno-formas a vectores, así podemos encontrar el vector $N^\nu = g^{\mu\nu}n_\mu$ asociado a la uno-forma \mathbf{n} . Este vector es ortogonal a los vectores tangentes a la hipersuperficie encajada en \mathcal{M} , es decir, a los vectores del subespacio $V_{\psi(p)} \subset T_{\psi(p)}$. Si (e_2, \dots, e_m) es una base para T_p , entonces para $T_{\psi(p)}$ la base estará compuesta por los m vectores linealmente independientes $(\mathbf{N}, \psi_*e_2, \dots, \psi_*e_m)$, resultado de mapear a los vectores base de T_p e incluir al vector \mathbf{N} que no es tangente a ellos. La métrica g representada como la matriz de componentes respecto a esta base es

$$g = \begin{pmatrix} g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g(\psi_*e_2, \psi_*e_2) & g(\psi_*e_2, \psi_*e_3) & \dots & g(\psi_*e_2, \psi_*e_m) \\ 0 & g(\psi_*e_3, \psi_*e_2) & g(\psi_*e_3, \psi_*e_3) & \dots & g(\psi_*e_3, \psi_*e_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g(\psi_*e_m, \psi_*e_2) & \dots & \dots & g(\psi_*e_m, \psi_*e_m) \end{pmatrix}$$

que si tomamos esta base como una ortonormal, esto se reduce a

$$g = \begin{pmatrix} g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g(\psi_*e_2, \psi_*e_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g(\psi_*e_3, \psi_*e_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & g(\psi_*e_m, \psi_*e_m) \end{pmatrix}$$

de forma más compacta escribimos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) & 0 \\ 0 & g(\psi_*e_\mu, \psi_*e_\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) & 0 \\ 0 & \psi^*g(e_\mu, e_\mu) \end{pmatrix}.$$

De esto podemos ver que si la métrica g es positiva definida, entonces la métrica ψ^*g también debe de ser positiva definida para que todos los eigenvalores sean positivos, pero si g es una métrica de Lorentz entonces ψ^*g puede ser

- (i) Lorentz si $g(N, N) > 0$, debido a que la matriz de componentes de g debe de tener un eigenvalor negativo que está incluido en la parte que corresponde a las componentes de la métrica ψ^*g . Decimos que la hipersuperficie $\psi(S)$ es temporal o de tipo tiempo.
- (ii) Positiva definida si $g(N, N) < 0$ y como éste es el eigenvalor negativo, la parte que corresponde a ψ^*g solamente incluye eigenvalores positivos. La hipersuperficie es espacial o de tipo espacio.
- (iii) Degenerada si $g(N, N) = 0$, esto lo podemos ver si consideramos a N como un vector tangente a la hipersuperficie, así existe $X \in T_p$ distinto de cero tal que $\psi_*X = N$, de forma que al ser g degenerada $g(N, \psi_*Y) = 0$ para toda $Y \in T_p$, por lo tanto, $\psi^*g(X, Y) = 0$, lo que significa que ψ^*g es degenerada. Se dice que la hipersuperficie es nula.

Este vector N lo podemos visualizar como el vector normal a la hipersuperficie, de forma que si es temporal los vectores tangentes a la hipersuperficie serán de tipo espacio, si es espacial estos vectores serán tipo tiempo y si es nulo serán vectores nulos, de ahí que se clasifique de esta manera a las hipersuperficies.

Si el tensor métrico g es invariante bajo un difeomorfismo ψ , entonces decimos que este mapeo es una isometría. Así la métrica ψ_*g es igual a g en todos los puntos. Esto significa que la isometría preserva el producto escalar o por decirlo de alguna forma preserva 'distancias'

$$g(X, X)|_p = \psi_*g(\psi_*X, \psi_*X)|_{\psi(p)} = g(\psi_*X, \psi_*X)|_{\psi(p)}.$$

Cuando el grupo de difeomorfismos de un parámetro $\psi_{\Delta t}$ definido por un campo vectorial K es un grupo de isometrías, es decir, el mapeo $\psi_{\Delta t}$ es una isometría para toda t , entonces decimos que el campo vectorial K es un campo vectorial de Killing. Se puede definir este campo vectorial en una variedad semi-Riemanniana diciendo que la derivada de Lie del tensor métrico es cero $L_K g = 0$ o también lo podemos expresar de forma que se vea explícitamente que es invariante bajo el difeomorfismo de un parámetro

$$L_K g = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi_{-\Delta t} g - g}{\Delta t} = 0.$$

En un sistema coordenado podemos expresar esta derivada de Lie en componentes

$$(L_K g)_{\mu\nu} = K^\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + g_{\mu\sigma} \frac{\partial K^\sigma}{\partial x^\nu} + g_{\sigma\nu} \frac{\partial K^\sigma}{\partial x^\mu} = 0. \quad (1.4)$$

Si en un sistema de coordenadas $\{x^\mu, \mu = 0, \dots, n-1\}$ se cumple que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0 \quad \text{entonces } g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i) \quad \text{donde } i = 1, \dots, n$$

las componentes de la métrica son independientes de la coordenada x^0 , así el vector base de esta coordenada $\frac{\partial}{\partial x^0}$ es un vector de Killing. Un campo tensorial es invariante bajo un campo vectorial si su derivada de Lie respecto a éste es cero. Los vectores de Killing están asociados a cantidades conservadas, ya que éstos representan las direcciones en que el espacio tiene una simetría.

1.2. Conexión y Curvatura

Cuando hablamos de la curvatura de una superficie podemos hacerlo partiendo de la idea de que está encajada en otro espacio de dimensión mayor, al abordarlo de esta forma estamos trabajando sobre la curvatura extrínseca de la superficie, mas si estudiamos la curvatura de la superficie sin considerar un espacio en donde esté encajada estamos hablando de la curvatura intrínseca de la superficie.

Una forma de caracterizar esta curvatura es por medio del transporte paralelo de vectores a lo largo de curvas en la variedad. Lo que tenemos es que uno no puede saber cómo es que dos vectores, en distintos puntos, son paralelos; debemos definir lo que es el transporte paralelo.

Uno puede intuitivamente pensar en el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva como un vector que siempre apunta en la misma dirección, al hacerlo a lo largo de una curva cerrada en un espacio plano nos deja un vector igual a aquél con el que arrancamos el recorrido. Para una superficie curva, como el caso de una esfera, la situación es distinta, el vector generalmente no es el mismo cuando regresa al punto de partida. Para esto necesitamos una regla, algo que nos diga cómo llevar a cabo este transporte paralelo, y esto con la estructura diferencial de la variedad no lo podemos tener debido a que vectores en distintos puntos p y q pertenecen a espacios distintos T_p y T_q .

Esto nos permitirá definir la diferenciación covariante, que a diferencia de la de Lie, solamente dependerá de la dirección del campo vectorial respecto a la cual se hace la operación y no de las curvas integrales de los dos campos involucrados. A esto que nos dice cómo hacer el transporte paralelo le llamamos la conexión afín en \mathcal{M} . Esta conexión ∇ en un punto $p \in \mathcal{M}$ asigna a cada campo vectorial \mathbf{X} un operador diferencial $\nabla_{\mathbf{X}}$ que mapea a un campo vectorial diferenciable \mathbf{Y} en un campo vectorial $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$. La conexión aplicada al campo vectorial \mathbf{Y} la podemos ver como un tensor de tipo (1,1) que al tomar a \mathbf{X} como argumento nos da el vector $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, así éste debe de cumplir que

$$\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Z}}\mathbf{Y} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + g\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y},$$

donde f y g son funciones y $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ campos vectoriales. Además el mapeo $\nabla_{\mathbf{X}}$ debe ser lineal

$$\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) = a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Al ser un operador diferencial debe cumplirse la regla de Leibniz

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\nabla_{\mathbf{X}}f)\mathbf{Y} + f(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}) = X(f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$$

para cualquier función f diferenciable.

Si tenemos una base $\{e_{\mu}\}$ $\{e^{\mu}\}$ y un campo vectorial \mathbf{Y} podemos escribir el campo tensorial $\nabla\mathbf{Y}$ de tipo $(1, 1)$ en términos de sus componentes como

$$(\nabla\mathbf{Y})^{\mu}_{\nu} = Y^{\mu}_{;\nu} e^{\nu} \otimes e_{\mu}.$$

De la misma forma para un vector base tenemos que

$$\nabla e_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} e_{\alpha} \otimes e^{\nu},$$

donde α y ν son los índices para las componentes del tensor y μ es solamente una etiqueta para identificar a qué vector nos referimos; a los símbolos Γ los llamamos los símbolos de Christoffel. Este campo tensorial al contraerlo con un vector base nos da como resultado un campo vectorial

$$\nabla e_{\nu}(e_{\mu}) = \nabla_{e_{\mu}} e_{\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} e_{\alpha},$$

donde $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ es la componente α del vector $\nabla_{e_{\mu}} e_{\nu}$ y éste al contraerlo con una uno-forma base nos da los números $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$\nabla_{e_{\mu}}(e^{\alpha}; e_{\mu}) = \langle e^{\alpha}, \nabla_{e_{\mu}} e_{\nu} \rangle = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \langle e^{\alpha}, e_{\alpha} \rangle = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

a partir de los cuales puedo encontrar las componentes para la uno-forma

$$\nabla_{e_{\mu}} \langle e^{\alpha}, e_{\nu} \rangle = \langle \nabla_{e_{\mu}} e^{\alpha}, e_{\nu} \rangle + \langle e^{\alpha}, \nabla_{e_{\mu}} e_{\nu} \rangle = \nabla_{e_{\mu}} \delta^{\alpha}_{\nu} = 0,$$

así entonces

$$\langle \nabla_{e_{\mu}} e^{\alpha}, e_{\nu} \rangle = -\langle e^{\alpha}, \nabla_{e_{\mu}} e_{\nu} \rangle = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

donde el índice de la componente es ν .

La derivada covariante de \mathbf{Y} respecto a \mathbf{X} es

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= \nabla_{X^{\mu}e_{\mu}}(Y^{\nu}e_{\nu}) = X^{\mu}(\nabla_{e_{\mu}}Y^{\nu})e_{\nu} + X^{\mu}Y^{\nu}\nabla_{e_{\mu}}e_{\nu} \\ &= X^{\mu}Y^{\nu}_{;\mu}e_{\nu} + X^{\mu}Y^{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}e_{\alpha} \\ &= X^{\mu}(Y^{\nu}_{;\mu} + Y^{\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha})e_{\nu}. \end{aligned}$$

Así podemos ver que las componentes del campo tensorial $\nabla\mathbf{Y}$ son

$$Y^{\mu}_{;\nu} = Y^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}Y^{\alpha}. \quad (1.5)$$

Si tenemos una base coordenada $\{e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ y su dual $\{e^\mu = dx^\mu\}$ entonces $Y^\mu{}_{;\nu} = \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu}$.

La derivada covariante se puede extender a campos tensoriales de tipo (l, m) tomando en cuenta que la derivada del campo tensorial \mathbf{T} \mathbf{C}^r es un tensor $\nabla\mathbf{T}$ de tipo $(l, m + 1)$, la conexión es lineal en sus argumentos, conmuta con las contracciones y sigue la regla de Leibniz $\nabla(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}') = \nabla\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}' + \mathbf{T} \otimes \nabla\mathbf{T}'$.

Con esto la derivada covariante de un campo de uno-formas ω es un campo tensorial $\nabla\omega$ de tipo $(0, 2)$ con componentes

$$(\nabla\omega)_{\mu\nu} = \omega_{\mu;\nu} = \omega_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\omega_\alpha, \quad (1.6)$$

y para un campo tensorial \mathbf{T} de tipo (l, m) tenemos el campo tensorial $\nabla\mathbf{T}$ de tipo $(l, m + 1)$ con componentes

$$\begin{aligned} (\nabla\mathbf{T})^{\mu\dots\nu}{}_{\alpha\dots\beta\sigma} &= T^{\mu\dots\nu}{}_{\alpha\dots\beta;\sigma} = T^{\mu\dots\nu}{}_{\alpha\dots\beta,\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\gamma}T^{\gamma\dots\nu}{}_{\alpha\dots\beta} \\ &+ (\text{índices superiores}) - \Gamma^\gamma{}_{\sigma\alpha}T^{\mu\dots\nu}{}_{\gamma\dots\beta} - (\text{índices inferiores}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si \mathbf{Y} es un campo vectorial definido a lo largo de una curva $\lambda(t)$ con vector tangente $\mathbf{X} = \frac{d}{dt}$, decimos que \mathbf{Y} es transportado paralelamente si $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = 0$. Si tenemos coordenadas $\{x^\mu\}$ para la curva podemos expresar a $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ en términos de sus componentes

$$Y^\nu{}_{;\mu}X^\mu = X^\mu(Y^\nu{}_{;\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}Y^\alpha),$$

donde $X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ y denotando a $Y^\nu{}_{;\mu}X^\mu$ como $D_t Y^\nu$ tenemos

$$D_t Y^\nu = \frac{dY^\nu}{dt} + \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}Y^\alpha \frac{dx^\mu}{dt}$$

Una curva geodésica la definimos como la curva que transporta paralelo a su propio vector tangente $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = 0$

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}X^\nu X^\alpha = 0$$

o de la siguiente forma

$$X^\mu{}_{;\nu}X^\nu = \frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0,$$

donde a t lo llamamos el parámetro afín para la curva. Esto nos dice que dado un valor inicial de x^μ y de $\frac{dx^\mu}{dt}$ siempre existe una única curva geodésica a través de p con vector tangente $\mathbf{X}|_p$. Esto nos permite, dado un elemento de T_p , asociar a este vector en p con un punto a una distancia $\Delta t = 1$ sobre la curva geodésica. A este mapeo, que localmente es un difeomorfismo que mapea un elemento de T_p a un punto sobre la variedad \mathcal{M} a una distancia unitaria $\Delta t = 1$ se le llama el mapeo exponencial. Si este mapeo está definido para toda

la variedad, es decir, para todos los valores del parámetro t , entonces se dice que es una variedad geodésicamente completa. Con este mapeo y una base para T_p , uno puede encontrar coordenadas normales para una vecindad del punto p , lo cual se traduce en que $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$ en p .

Se puede definir, dada una conexión ∇ C^r , un tensor \mathbf{T} de tipo (1,2) llamado el tensor de torsión

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$$

con \mathbf{X} y \mathbf{Y} campos vectoriales C^r . Una conexión es simétrica si $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$, esto es, $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Esto en términos de componentes respecto a una base coordenada se traduce en $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$. Así podemos escribir la derivada de Lie de \mathbf{Y} con respecto a \mathbf{X} en términos de la derivada covariante

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X},$$

en componentes

$$(L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^{\mu} = Y^{\mu}_{;\nu}X^{\nu} - X^{\mu}_{;\nu}Y^{\nu},$$

y para tensores de tipo (l, m)

$$(L_{\mathbf{X}}\mathbf{T})^{\mu\dots\nu}_{\alpha\dots\beta} = T^{\mu\dots\nu}_{\alpha\dots\beta;\sigma}X^{\sigma} - T^{\lambda\dots\nu}_{\alpha\dots\beta}X^{\mu}_{;\lambda} - (\text{índices sup.}) + T^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\beta}X^{\rho}_{;\alpha} + (\text{índices inf.}). \quad (1.8)$$

Con este resultado, podemos encontrar la ecuación de Killing a partir de la derivada de Lie de la métrica respecto a un vector de Killing en términos de la derivada covariante

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0, \quad (1.9)$$

donde hemos usado la condición $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$ para una conexión simétrica en la variedad.

Al hacer el transporte paralelo de un vector \mathbf{X} alrededor de una curva cerrada $\lambda(t)$, generalmente no obtenemos el mismo vector al regresar al punto de partida p . Esto lo podemos relacionar al hecho de que la derivada covariante, aplicada sucesivamente, en general no conmuta. El tensor de Riemann o de curvatura nos da una medida de esto. Si \mathbf{X} , \mathbf{Y} son dos campos vectoriales definimos el tensor de Riemann como el tensor tipo (1,1)

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = [\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{Y}}] - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]},$$

tal que al operar sobre un campo tensorial \mathbf{Z} nos da el campo vectorial $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$. Este mismo tensor lo puedo ver como uno de tipo (1,3) que al actuar sobre los tres campos \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} , nos da el campo vectorial

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = [\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{Y}}]\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z},$$

o como

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}.$$

En componentes

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} Z^{\nu} &= (Z^{\mu}_{;\beta} Y^{\beta})_{;\alpha} X^{\alpha} - (Z^{\mu}_{;\alpha} X^{\alpha})_{;\beta} Y^{\beta} \\ &\quad - Z^{\mu}_{;\beta} (Y^{\beta}_{;\alpha} X^{\alpha} - X^{\beta}_{;\alpha} Y^{\alpha}), \end{aligned}$$

esto, renombrando los índices mudos en el último término se reduce a

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} Z^{\nu} = (Z^{\mu}_{;\beta\alpha} - Z^{\mu}_{;\alpha\beta}) X^{\alpha} Y^{\beta}, \quad (1.10)$$

y finalmente la no conmutatividad de la segunda derivada covariante de \mathbf{Z} queda expresada en función del tensor de Riemann

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} Z^{\nu} = Z^{\mu}_{;\beta\alpha} - Z^{\mu}_{;\alpha\beta}. \quad (1.11)$$

Sus componentes respecto a una base son $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \langle e^{\mu}, \mathbf{R}(e_{\alpha}, e_{\beta})e_{\nu} \rangle$ y si es una base coordenada tenemos

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\nu,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}. \quad (1.12)$$

Se puede comprobar que el tensor de Riemann tiene las siguientes propiedades de simetría

$$R^{\mu}_{\nu(\alpha\beta)} = 0 \quad \text{es decir} \quad R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = -R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} \quad (1.13)$$

y la que llamamos identidad de Bianchi

$$R^{\mu}_{[\nu\alpha\beta]} = 0,$$

que en coordenadas normales es fácil de comprobar y en general la escribimos como

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}_{\beta\nu\alpha} + R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} = 0, \quad (1.14)$$

y también se cumple que

$$R^{\mu}_{\nu[\alpha\beta;\sigma]} = 0. \quad (1.15)$$

Además podemos definir un tensor $(0, 2)$ simétrico al contraer el primer índice con el tercero en el tensor de Riemann

$$R_{\nu\beta} = R^{\mu}_{\nu\mu\beta} \quad (1.16)$$

éste se llama el tensor de Ricci.

Al hacer el transporte paralelo en un espacio plano a lo largo de una curva cerrada obtenemos el mismo vector al finalizar el recorrido, por lo que el tensor de Riemann es igual a cero $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = 0$, ya que $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ y de esta forma la derivada covariante se convierte en la derivada parcial usual. Entonces decimos que el espacio tiene una conexión plana.

Si la variedad tiene un tensor métrico \mathbf{g} , decimos que éste y la conexión ∇ son compatibles si se preserva el producto escalar definido por \mathbf{g} , esto significa que la derivada covariante de \mathbf{g} es cero $\nabla\mathbf{g} = 0$, es decir, $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$. Esto nos permite obtener una expresión para los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\nu\alpha,\mu}),$$

o utilizando \mathbf{g} para subir un índice

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\alpha} + g_{\sigma\alpha,\nu} - g_{\nu\alpha,\sigma}). \quad (1.17)$$

El hecho de que la conexión sea compatible con la métrica y la tengamos expresada por la ecuación (1.17), nos hace observar fácilmente propiedades adicionales. En una vecindad de p con coordenadas normales usando una base ortonormal, la métrica en p tendrá componentes $g_{\mu\nu} = \pm\delta_{\mu\nu}$ y $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ en p .

En estas coordenadas normales en el punto p , con la conexión definida por la métrica, tendremos el tensor de Riemann escrito como

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma}R^{\sigma}_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\nu\alpha} - g_{\mu\alpha,\nu\beta} + g_{\nu\alpha,\mu\beta} - g_{\nu\beta,\mu\alpha}),$$

y podemos ver que tiene las siguientes propiedades de simetría

$$R_{(\mu\nu)\alpha\beta} = 0 \quad \text{entonces} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (1.18)$$

y además

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1.19)$$

de donde podemos ver que el tensor de Ricci es simétrico como ya dijimos. La contracción del tensor de Ricci nos da un escalar llamado el escalar de curvatura

$$R = g^{\beta\nu}R_{\nu\beta} = R^{\beta}_{\beta}. \quad (1.20)$$

Podemos contraer la identidad de Bianchi (1.15) de la forma en que contraemos para el tensor de Ricci

$$g^{\mu\sigma}[R_{\sigma\nu\mu\beta;\lambda} + R_{\sigma\nu\lambda\mu;\beta} + R_{\sigma\nu\beta\lambda;\mu}] = 0,$$

y obtenemos

$$R_{\nu\beta;\lambda} - R_{\nu\lambda;\beta} + R^{\mu}_{\nu\beta\lambda;\mu} = 0 \quad (1.21)$$

tomando en cuenta que como $\nabla \mathbf{g} = 0$ podemos meter y sacar a $g_{\mu\nu}$ de las derivadas covariantes, es decir, subir y bajar índices conmuta con la diferenciación covariante. Si volvemos a contraer en los índices ν, β obtenemos

$$g^{\nu\beta} [R_{\nu\beta;\lambda} - R_{\nu\lambda;\beta} + R^{\mu}_{\nu\beta\lambda;\mu}] = 0,$$

ó

$$R_{;\lambda} - R^{\nu}_{\lambda;\nu} - R^{\mu}_{\lambda;\mu} = 0, \quad (1.22)$$

que después de renombrar el índice mudo en el segundo término $\nu = \mu$ podemos escribir como

$$(2R^{\mu}_{\lambda} - \delta^{\mu}_{\lambda} R)_{;\mu} = 0. \quad (1.23)$$

Éstas son las identidades de Bianchi contraídas dos veces. Si definimos un tensor simétrico

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.24)$$

podemos ver que $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ es equivalente a (1.23). Este tensor es llamado el tensor de Einstein.

Con estas propiedades de simetría nos damos cuenta de que $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ tiene $\frac{1}{3}n^2(n^2 - 1)$ componentes algebraicamente independientes y que $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ tiene $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$.

1.3. Ecuaciones de Einstein

El espacio-tiempo tiene como modelo una variedad en 4 dimensiones con una métrica de Lorentz definida en ella, es decir una variedad semi-Riemanniana, así los eventos en el espacio-tiempo son el conjunto de puntos en la variedad. La métrica pedimos que sea diferenciable de orden k , pero podemos pedir que sea C^{∞} sin tener ningún problema. La métrica determina una conexión en la variedad, ésta nos permitirá tener un operador diferencial, la diferenciación covariante.

La materia que existe en el espacio-tiempo puede ser representada de forma matemática por campos que existen en nuestra variedad que sirve de modelo para el espacio-tiempo. Las únicas relaciones que existen en la variedad son las que hay entre tensores, de esta forma estos campos se relacionarán por medio de expresiones en las que estén involucrados tensores en la variedad y todas las derivadas respecto a la posición en el espacio-tiempo serán las derivadas covariantes definidas por la conexión simétrica que se desprende de la métrica.

Los campos que existen en la variedad \mathcal{M} cumplen ciertas ecuaciones que deben seguir dos postulados en la Relatividad. Éstos son, la conservación local de la energía-momento y la causalidad local.

La causalidad local lo que nos dice es que si p y q son dos puntos que representan un par de eventos en el espacio-tiempo y que están en una vecindad \mathcal{U} de la variedad donde tenemos coordenadas normales, éstos deben estar conectados por medio de una curva cuyo vector tangente en todos los puntos de la curva sea un vector de tipo tiempo o nulo distinto de cero para decir que están relacionados causalmente, es decir, que el mandar una señal de un punto a otro es sólo posible si estos dos puntos están conectados por una curva de este tipo. A estas curvas se les llama curvas no-espaciales. Esto se puede visualizar como un cono de luz con origen digamos en el punto p , en cuyo interior o en su superficie se encuentran los puntos que están conectados causalmente con él mediante las curvas no-espaciales.

El postulado de conservación local de energía-momento nos dice que existe un tensor simétrico $T^{\mu\nu}$ el cual depende de la métrica, de los campos de materia y de sus derivadas covariantes, y que cumple que: (i) es cero en una región del espacio-tiempo si y sólo si todos los campos de materia son cero, y (ii) sigue la ecuación de conservación de energía y momento, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, esto nos da información sobre el comportamiento de la materia. En el espacio-tiempo plano, donde existen simetrías representadas por 10 vectores de Killing y que dan cantidades conservadas de flujos de energía, momento lineal y momento angular, se cumplen las ecuaciones de conservación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ en el espacio-tiempo. Estos flujos se asocian a los diez vectores de Killing que corresponden a cuatro traslaciones y seis 'rotaciones' en el espacio-tiempo. Al proyectar el tensor sobre la dirección de los vectores de Killing tenemos un flujo de esa cantidad en esa dirección, y mediante el teorema de Gauss podemos integrar sobre una región del espacio y ver que esa cantidad es cero, esto es, integrando sobre \mathcal{V} a la divergencia de $P^\mu = T^{\mu\nu} K_\nu$ siendo \mathbf{K} un vector de Killing. Si dv representa una medida del volumen del espacio \mathcal{V} , definida con respecto a la métrica del espacio usando la n -forma canónica η (ver apéndice A) y $\partial\mathcal{V}$ es la frontera orientable de \mathcal{V} y da_σ es una medida del volumen definida por η para la subvariedad $\partial\mathcal{V}$, entonces tenemos que

$$\int_{\partial\mathcal{V}} P^\sigma da_\sigma = \int_{\mathcal{V}} P^\sigma{}_{;\sigma} dv = 0$$

ya que

$$P^\mu{}_{;\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} K_\nu + T^{\mu\nu} K_{\nu;\mu} = 0.$$

En una métrica que no sea plana y que, en general, no tenga ningún vector de Killing no se cumplirá con la ecuación de conservación al integrar sobre el espacio, pero uno puede introducir en un punto p coordenadas normales de manera que las componentes de la métrica sean $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y además $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$, entonces en una vecindad alrededor de este punto la métrica y los Christoffel son distintos en una cantidad despreciable a los valores que tienen en p , por lo que las cantidades en los integrandos serán suficientemente pequeñas en la región \mathcal{V} lo que podemos considerar de forma aproximada como una conservación local de energía-momento.

Hemos postulado la conservación de la energía y momento y esto ha sido expresado como $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, pero no hemos mencionado cómo encontrar este tensor. Esto lo podemos hacer a partir de una densidad lagrangiana que dependa de los campos de materia, su derivada covariante y la métrica, variando la acción S debido a cambios en la métrica $g_{\mu\nu}(\xi, q)$ en el interior de una región \mathcal{D} de la variedad \mathcal{M} , donde $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $q \in \mathcal{D}$. Estos cambios en la métrica dejan invariante a los campos de materia $\mathcal{C}_{(i)}^{\mu\dots\nu}{}_{\alpha\dots\beta}$ y la variación de la acción la podemos escribir como [3]

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} T^{\mu\nu} \Delta g_{\mu\nu} d\nu. \quad (1.25)$$

Los efectos de la gravedad los podemos representar por medio de la curvatura del espacio-tiempo, es decir, por la métrica de la variedad. Hay que encontrar ecuaciones que relacionen la métrica con la presencia de materia en el espacio, éstas deben ser ecuaciones tensoriales que involucren al tensor $T^{\mu\nu}$. Sabemos que estas ecuaciones deben de reproducir la teoría de Newton en cierto límite, lo que nos permite determinarlas. Para la teoría de Newton la fuente del campo gravitacional es la densidad de masa, y esto lo expresa con la ecuación

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (1.26)$$

donde ρ es la densidad de masa. Lo que queremos es una teoría que sea independiente del sistema de referencia y del sistema de coordenadas usado, por lo que no podemos usar a la densidad de masa ρ como la fuente de campo gravitacional, ya que ésta es solamente una componente del tensor de energía-momento y lo que queremos es involucrar a todos los campos de materia. Por lo tanto, debemos utilizar el tensor de energía-momento \mathbf{T} para representar la fuente de campo gravitacional. De esta forma la generalización de la ecuación (1.26) debe ser

$$\mathbf{D}(\mathbf{g}) = k\mathbf{T},$$

donde \mathbf{D} es un operador diferencial de segundo orden que al actuar sobre el tensor métrico nos da un tensor de tipo $(0, 2)$, y que involucra combinaciones de $g_{\mu\nu, \alpha\beta}$, $g_{\mu\nu, \alpha}$ y $g_{\mu\nu}$. En principio el tensor de Ricci satisface estas condiciones, pero al analizar la conservación de la energía y el momento tenemos que esto implicaría que $R^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ y por la ecuación (1.24) tendríamos que $R_{;\nu} = 0$, de manera que R sería constante en todo el espacio, así como $T = T^{\nu}_{\nu}$, lo que es una restricción no conveniente en la distribución de materia en el espacio. Pero esto se resuelve si en lugar del tensor de Ricci consideramos el tensor de Einstein (1.24) más otro término que involucra la métrica y una constante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.27)$$

el valor de $k = 8\pi$ se obtiene observando el límite newtoniano.

Las ecuaciones también se puede obtener al variar la acción y pedir que ésta sea estacionaria bajo cambios de la métrica $g_{\mu\nu}$

$$S = \int_{\mathcal{D}} (A(R - 2\Lambda) + L) dv, \quad (1.28)$$

donde L es la densidad lagrangiana de materia dada por (1.25) y A es una constante a determinar. Así al variar la acción respecto a la métrica tenemos

$$\begin{aligned} \Delta((R - 2\Lambda)dv) &= \Delta((g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\Lambda)dv) \\ &= \Delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\Lambda)dv + (R - 2\Lambda)\Delta dv \\ &= R_{\mu\nu}\Delta g^{\mu\nu}dv + g^{\mu\nu}\Delta R_{\mu\nu}dv + (R - 2\Lambda)\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Delta g_{\mu\nu}dv \\ &= ((R - 2\Lambda)\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Delta g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\Delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Delta R_{\mu\nu})dv \end{aligned}$$

con $\Delta dv = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Delta g_{\mu\nu}dv$ (A.3, ver apéndice A). El último término se puede escribir como

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\Delta R_{\mu\nu}dv &= g^{\mu\nu}((\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} - (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})_{;\nu})dv \\ &= (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}g^{\mu\sigma})_{;\alpha}dv, \end{aligned}$$

esto lo podemos obtener a partir de (1.12) utilizando un sistema de coordenadas normales donde $\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = 0$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu,\nu},$$

así su variación queda como

$$\begin{aligned} \Delta R_{\mu\nu} &= \Delta(\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu,\nu}) \\ &= (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})_{;\alpha} - (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu})_{;\nu}, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\Delta R_{\mu\nu} &= (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu})_{;\alpha} - (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu})_{;\nu} \\ &= (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu})_{;\alpha} - (\Delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}g^{\mu\alpha})_{;\alpha} \\ &= (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \Delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}g^{\mu\alpha})_{;\alpha}. \end{aligned}$$

Al integrar esto sobre $\partial\mathcal{D}$ nos da cero debido a que en la frontera $\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$.

Así tenemos que

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \int_{\mathcal{D}} \left[A \left(\left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right] \Delta g_{\mu\nu} dv = 0$$

con $\Delta L_{\text{mat}} = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \Delta g_{\mu\nu}$ y como $\left. \frac{\partial S}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ para toda $\Delta g_{\mu\nu}$ y con $A = \frac{1}{16\pi}$ tenemos

$$\frac{1}{16\pi} \left[\left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{1}{16\pi} \left[\left(\Lambda - \frac{1}{2} R \right) g^{\mu\nu} + R^{\mu\nu} \right] = \frac{1}{2} T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu},$$

o en la forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Éstas forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales acopladas independientes, ya que ambos lados de la igualdad son simétricos lo que nos deja con diez ecuaciones independientes y se cumple que $(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$ lo que significa que hay cuatro ecuaciones para cada valor de μ entre las diez anteriores.

Capítulo 2

Espacios de curvatura constante

Un espacio de máxima simetría tiene el mayor número posible de vectores de Killing, éstos son generadores de las isometrías que tiene la métrica, es decir, es equivalente determinar estos vectores a encontrar las isometrías de la métrica. Podemos relacionar los vectores de Killing de un espacio de máxima simetría con su curvatura, lo que nos llevará a descubrir qué son espacios de curvatura constante, de éstos estudiaremos el espacio de *de Sitter* y el espacio de *anti de Sitter*.

2.1. El tensor de Riemann para espacios de curvatura constante

La ecuación de Killing (1.9) $K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0$ nos permite determinar los vectores de Killing K_μ dadas las condiciones iniciales K_α y $K_{\alpha;\beta}$ en un punto p . La ecuación (1.11) la podemos expresar de la siguiente forma

$$R^\alpha_{\mu\nu\beta} Z_\alpha = Z_{\mu;\nu\beta} - Z_{\mu;\beta\nu}, \quad (2.1)$$

ésta se cumple para todo vector Z y junto con la ecuación (1.14) podemos obtener una relación para cualquier vector, así tenemos que

$$(R^\alpha_{\mu\nu\beta} + R^\alpha_{\beta\mu\nu} + R^\alpha_{\nu\beta\mu}) Z_\alpha = 0$$

y con la ecuación (2.1) obtenemos

$$(Z_{\mu;\nu\beta} - Z_{\mu;\beta\nu}) + (Z_{\beta;\mu\nu} - Z_{\beta;\nu\mu}) - (Z_{\nu;\beta\mu} - Z_{\nu;\mu\beta}) = 0,$$

reagrupando los términos

$$(Z_{\mu;\nu} - Z_{\nu;\mu});_\beta + (Z_{\beta;\mu} - Z_{\mu;\beta});_\nu + (Z_{\nu;\beta} - Z_{\beta;\nu});_\mu = 0, \quad (2.2)$$

que para el caso de un vector de Killing $Z = K$, el cual cumple la relación de antisimetría (1.9) $K_{\mu;\nu} = -K_{\nu;\mu}$, se tiene

$$K_{\mu;\nu\beta} + K_{\beta;\mu\nu} + K_{\nu;\beta\mu} = 0. \quad (2.3)$$

Si obtenemos las permutaciones cíclicas de (2.1)

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} K_{\alpha} &= K_{\mu;\nu\beta} + K_{\beta;\mu\nu} \\ R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} K_{\alpha} &= K_{\beta;\mu\nu} + K_{\nu;\beta\mu} \\ R^{\alpha}_{\nu\beta\mu} K_{\alpha} &= K_{\nu;\beta\mu} + K_{\mu;\nu\beta} \end{aligned}$$

sumando la segunda y la tercera y restando la primera obtenemos

$$(R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha}_{\nu\beta\mu} - R^{\alpha}_{\mu\nu\beta})K_{\alpha} = K_{\beta;\mu\nu} + K_{\nu;\beta\mu} + K_{\mu;\nu\beta} - K_{\mu;\nu\beta} - K_{\beta;\mu\nu}.$$

De (1.14) tenemos que $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha}_{\nu\beta\mu} = -R^{\alpha}_{\mu\nu\beta}$ y aplicado en la ecuación anterior queda como

$$-2R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} K_{\alpha} = 2K_{\nu;\beta\mu}.$$

Finalmente observando que $K_{\nu;\beta\mu} = -K_{\beta;\nu\mu}$ llegamos a

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} K_{\alpha} = K_{\beta;\nu\mu}. \quad (2.4)$$

Dados K_{α} y $K_{\alpha;\beta}$ esta ecuación nos permite encontrar las derivadas de orden superior, éstas estarán expresadas como combinaciones lineales de K_{α} y $K_{\alpha;\beta}$. Con los valores de K_{α} y $K_{\alpha;\beta}$ en un punto p podemos determinar el campo vectorial de Killing de forma única. Debido a la propiedad de antisimetría $K_{\alpha;\beta} = -K_{\beta;\alpha}$, en un espacio Riemanniano de dimensión n tenemos $\frac{1}{2}n(n+1)$ condiciones iniciales, así por lo tanto tenemos el mismo número máximo de vectores de Killing linealmente independientes. En general no todas las métricas admiten el número máximo de vectores de Killing, para saber si la ecuación (2.4) es integrable dadas las condiciones iniciales debemos de revisar las condiciones de integrabilidad. Una de ellas la obtenemos de la conmutación de las derivadas covariantes [5], de forma que para cualquier vector X tenemos

$$\begin{aligned} X_{\mu;\nu\beta\gamma} &= (X_{\mu;\nu\beta})_{;\gamma} = (X_{\mu;\nu\beta})_{;\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} X_{\sigma;\nu\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} X_{\mu;\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} X_{\mu;\nu\sigma} \\ &= [(X_{\mu;\nu})_{;\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} X_{\alpha;\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} X_{\mu;\alpha}]_{;\gamma} \\ &\quad - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} [(X_{\sigma;\nu})_{;\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} X_{\alpha;\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} X_{\sigma;\alpha}] \\ &\quad - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} [(X_{\mu;\sigma})_{;\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} X_{\alpha;\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} X_{\mu;\alpha}] \\ &\quad - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} [(X_{\mu;\nu})_{;\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} X_{\alpha;\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} X_{\mu;\alpha}], \end{aligned}$$

de forma que nos queda que

$$\begin{aligned}
X_{\mu;\nu\beta\gamma} &= (X_{\mu;\nu})_{,\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\gamma} X_{\alpha;\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\gamma} X_{\mu;\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} (X_{\sigma;\nu})_{,\gamma} \\
&\quad - \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} (X_{\mu;\sigma})_{,\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} (X_{\sigma;\nu})_{,\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} X_{\alpha;\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} X_{\sigma;\gamma} \\
&\quad - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} (X_{\mu;\sigma})_{,\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} X_{\alpha;\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} X_{\mu;\alpha} \\
&\quad - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} (X_{\mu;\nu})_{,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} X_{\alpha;\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} X_{\mu;\alpha}.
\end{aligned}$$

De la misma forma tenemos $X_{\mu;\nu\gamma\beta}$ al intercambiar γ y β en la ecuación anterior, de forma que su resta queda como

$$\begin{aligned}
X_{\mu;\nu\beta\gamma} - X_{\mu;\nu\gamma\beta} &= (\Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}) X_{\alpha;\nu} \\
&\quad + (\Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}) X_{\mu;\alpha} \\
&\quad + (\Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}) X_{\alpha;\sigma} + (\Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} X_{\sigma;\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} X_{\sigma;\beta}),
\end{aligned}$$

como γ y β son índices libres los dos últimos términos se hacen cero y obtenemos una ecuación que se cumple para cualquier vector \mathbf{X} que es la condición de integrabilidad

$$X_{\mu;\nu\beta\gamma} - X_{\mu;\nu\gamma\beta} = R^{\alpha}_{\mu\beta\gamma} X_{\alpha;\nu} + R^{\alpha}_{\nu\beta\gamma} X_{\mu;\alpha}. \quad (2.5)$$

Al ser un vector de Killing debe además cumplir con la condición que se deduce de la ecuación (2.4), es decir

$$K_{\beta;\nu\mu\gamma} = R^{\alpha}_{\mu\nu\beta;\gamma} K_{\alpha} + R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} K_{\alpha;\gamma}$$

y al restarle el término con γ y μ intercambiados tenemos

$$K_{\beta;\nu\mu\gamma} - K_{\beta;\nu\gamma\mu} = (R^{\alpha}_{\mu\nu\beta;\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta;\mu}) K_{\alpha} + R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} K_{\alpha;\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta} K_{\alpha;\mu}. \quad (2.6)$$

Esto lo podemos igualar a la ecuación (2.5) con el cambio de índices correspondiente haciendo notar que es un vector de Killing $\mathbf{X} = \mathbf{K}$

$$(R^{\alpha}_{\mu\nu\beta;\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta;\mu}) K_{\alpha} + R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} K_{\alpha;\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta} K_{\alpha;\mu} = R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma} K_{\alpha;\nu} + R^{\alpha}_{\nu\mu\gamma} K_{\beta;\alpha} \quad (2.7)$$

que podemos escribir como

$$(R^{\alpha}_{\mu\nu\beta;\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta;\mu}) K_{\alpha} + R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} K_{\alpha;\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta} K_{\alpha;\mu} - R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma} K_{\alpha;\nu} + R^{\alpha}_{\nu\mu\gamma} K_{\alpha;\beta} = 0. \quad (2.8)$$

Finalmente podemos agrupar los términos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&(R^{\alpha}_{\mu\nu\beta;\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta;\mu}) K_{\alpha} + \\
&\quad + [R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} \delta^{\sigma}_{\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\nu\beta} \delta^{\sigma}_{\mu} - R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma} \delta^{\sigma}_{\nu} + R^{\alpha}_{\nu\mu\gamma} \delta^{\sigma}_{\beta}] K_{\alpha;\sigma} = 0. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Para un espacio que tiene el máximo número de vectores de Killing, la ecuación anterior no impone ninguna condición sobre los valores de K_α y $K_{\alpha,\sigma}$ [5] por lo que sus coeficientes son cero

$$R^\alpha_{\mu\nu\beta;\gamma} = R^\alpha_{\gamma\nu\beta;\mu} \quad (2.10)$$

así como

$$R^\alpha_{\mu\nu\beta}\delta^\sigma_\gamma - R^\alpha_{\gamma\nu\beta}\delta^\sigma_\mu - R^\alpha_{\beta\mu\gamma}\delta^\sigma_\nu + R^\alpha_{\nu\mu\gamma}\delta^\sigma_\beta = 0. \quad (2.11)$$

Esta última expresión junto con su parte antisimetrizada, que también es cero, la podemos expresar como

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\mu\nu\beta}\delta^\sigma_\gamma - R^\alpha_{\gamma\nu\beta}\delta^\sigma_\mu - R^\alpha_{\beta\mu\gamma}\delta^\sigma_\nu + R^\alpha_{\nu\mu\gamma}\delta^\sigma_\beta &= \\ &= R^\sigma_{\mu\nu\beta}\delta^\alpha_\gamma - R^\sigma_{\gamma\nu\beta}\delta^\alpha_\mu - R^\sigma_{\beta\mu\gamma}\delta^\alpha_\nu + R^\sigma_{\nu\mu\gamma}\delta^\alpha_\beta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si contraemos los índices σ y β obtenemos

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\mu\nu\sigma}\delta^\sigma_\gamma - R^\alpha_{\gamma\nu\sigma}\delta^\sigma_\mu - R^\alpha_{\sigma\mu\gamma}\delta^\sigma_\nu + R^\alpha_{\nu\mu\gamma}\delta^\sigma_\sigma &= \\ &= R^\sigma_{\mu\nu\sigma}\delta^\alpha_\gamma - R^\sigma_{\gamma\nu\sigma}\delta^\alpha_\mu - R^\sigma_{\sigma\mu\gamma}\delta^\alpha_\nu + R^\sigma_{\nu\mu\gamma}\delta^\alpha_\sigma, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ya que $\delta^\sigma_\sigma = n$, donde n es la dimensión de la variedad, y $R^\sigma_{\sigma\mu\gamma} = 0$; la ecuación queda como

$$nR^\alpha_{\nu\mu\gamma} - R^\alpha_{\nu\mu\gamma} - R^\alpha_{\gamma\nu\mu} + R^\alpha_{\mu\nu\gamma} = R^\alpha_{\nu\mu\gamma} - R_{\mu\nu}\delta^\alpha_\gamma + R_{\gamma\nu}\delta^\alpha_\mu.$$

Debido a (1.14) tenemos que $R^\alpha_{\mu\gamma\nu} = -R^\alpha_{\nu\mu\gamma} - R^\alpha_{\gamma\nu\mu}$ y si además consideramos la antisimetría en los dos últimos índices $R^\alpha_{\mu\gamma\nu} = -R^\alpha_{\mu\nu\gamma}$ obtenemos

$$(n-1)R^\alpha_{\nu\mu\gamma} = R_{\gamma\nu}\delta^\alpha_\mu - R_{\mu\nu}\delta^\alpha_\gamma.$$

Ahora bajamos el índice α con $g_{\alpha\sigma}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} (n-1)g_{\alpha\sigma}R^\alpha_{\nu\mu\gamma} &= R_{\gamma\nu}g_{\alpha\sigma}\delta^\alpha_\mu - R_{\mu\nu}g_{\alpha\sigma}\delta^\alpha_\gamma, \\ (n-1)R_{\alpha\nu\mu\gamma} &= R_{\gamma\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\mu\nu}g_{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esta ecuación es antisimétrica en α y ν así que

$$R_{\gamma\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\mu\nu}g_{\alpha\gamma} = -R_{\gamma\alpha}g_{\nu\mu} + R_{\mu\alpha}g_{\nu\gamma},$$

contraemos esta ecuación en los índices α y γ con $g^{\alpha\gamma}$

$$\begin{aligned} g^{\alpha\gamma}R_{\gamma\nu}g_{\alpha\mu} - g^{\alpha\gamma}R_{\mu\nu}g_{\alpha\gamma} &= -g^{\alpha\gamma}R_{\gamma\alpha}g_{\nu\mu} + g^{\alpha\gamma}R_{\mu\alpha}g_{\nu\gamma} \\ R_{\gamma\nu}\delta^\gamma_\mu - R_{\mu\nu}\delta^\gamma_\gamma &= -R_{\gamma\gamma}g_{\nu\mu} + R_{\mu\alpha}\delta^\alpha_\nu \\ R_{\mu\nu} - nR_{\mu\nu} &= -Rg_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= \frac{1}{n}Rg_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finalmente de las ecuaciones (2.14) y (2.15) tenemos que

$$(n-1)R_{\alpha\nu\mu\gamma} = \frac{1}{n}R(g_{\gamma\nu}g_{\alpha\mu} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\gamma})$$

$$R_{\alpha\nu\mu\gamma} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\gamma\nu}g_{\alpha\mu} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\gamma}) \quad (2.16)$$

que es la condición que identifica a los espacios Riemannianos de curvatura constante. Esto se puede observar a partir de la identidad de Bianchi (1.15) $R_{\alpha\nu[\mu\gamma;\sigma]} = 0$, obteniendo de la ecuación (2.16)

$$R_{\alpha\nu[\mu\gamma;\sigma]} = \frac{R_{\alpha[\sigma}}{n(n-1)}(g_{\gamma\nu|\rho}g_{|\rho|\mu} - g_{\mu|\rho}g_{|\rho|\gamma}) = 0, \quad (2.17)$$

donde las barras a los lados de los índices indican que éstos no participan en la conmutación. Así, vemos que la derivada covariante del escalar de curvatura es cero $R_{;\mu} = 0$, pero al ser un escalar, la derivada covariante y la derivada parcial son lo mismo, $R_{,\mu} = 0$, por lo tanto el escalar de curvatura es constante en todo el espacio $R = \text{cte}$.

2.2. Los espacios de de Sitter y de anti de Sitter

Los espacios de *de Sitter* y de *anti de Sitter* son espacios de curvatura constante, es decir, cumplen con (2.16), que en el caso de un espacio de dimensión $n = 4$ es $R_{\alpha\nu\mu\gamma} = \frac{R}{12}(g_{\gamma\nu}g_{\alpha\mu} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\gamma})$. Estos espacios son soluciones de las ecuaciones de Einstein para el espacio vacío con término cosmológico, de esta forma tienen la propiedad de que el tensor de Ricci es proporcional a la métrica y el escalar de curvatura es constante en todo el espacio. Esto lo podemos ver partiendo de las ecuaciones de Einstein (1.27) con $T_{\mu\nu} = 0$, multiplicando por $g^{\mu\nu}$ para obtener el escalar de curvatura

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

$$2g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = -2\Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu},$$

de forma que obtenemos el escalar de curvatura en términos de Λ a la cual se le llama constante cosmológica

$$2R - nR = -2n\Lambda$$

$$R = \frac{2n}{n-2}\Lambda. \quad (2.18)$$

De esta forma encontramos cómo el tensor de Ricci depende de la métrica

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{2} \frac{2n}{n-2} \Lambda - \Lambda \right) g_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} &= \frac{2\Lambda}{n-2} g_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

De esta manera para un espacio de $n = 4$ tenemos que

$$R = 4\Lambda, \tag{2.20}$$

y que el tensor de Ricci es proporcional a la métrica

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.21}$$

El escalar de curvatura de estos espacios es una constante distinta de cero, positiva para el caso de de Sitter $R > 0$, y negativa para el espacio de anti de Sitter $R < 0$. Esto lo podemos expresar, a partir de la ecuación (2.20), de la siguiente manera

$$R = 4\varepsilon|\Lambda| \quad \text{donde} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{de Sitter} \\ -1 & \text{anti de Sitter} \end{cases} \tag{2.22}$$

Así con el valor de ε expresamos los dos casos utilizando el valor absoluto de la constante cosmológica, que para el caso de de Sitter es positiva $\Lambda > 0$ y para anti de Sitter negativa $\Lambda < 0$. La métrica se puede expresar en una forma estática resolviendo las ecuaciones de Einstein (ver apéndice B)

$$ds_4^2 = - \left(1 - \varepsilon \frac{|\Lambda|}{3} r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \varepsilon \frac{|\Lambda|}{3} r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{2.23}$$

Ésta es la métrica de los espacios de de Sitter y anti de Sitter en cuatro dimensiones. Este espacio también lo podemos considerar como una hipersuperficie encajada en un espacio de dimensión $n = 5$, en particular podemos escoger un espacio plano y la definición de la hipersuperficie la expresamos en general como

$$-(x^0)^2 + \varepsilon_1 (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = \varepsilon_2 \alpha^2, \tag{2.24}$$

donde ε_1 y ε_2 pueden tomar los valores de -1 ó 1 aun por determinar para estos dos casos.

Podemos analizar los distintos casos que representan las combinaciones de valores que toman ε_1 y ε_2 , considerando la métrica del espacio donde vamos a encajar a la hipersuperficie como $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \varepsilon_1, 1, 1, 1)$ y observando que la métrica en cuatro dimensiones (2.23) tiene solamente un tiempo. Si tenemos un

par de eventos infinitesimalmente cerca en el espacio-tiempo representado por la superficie (2.24), consideramos los intervalos siguientes en cuatro dimensiones

$$-(x^0)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = \varepsilon_2 \alpha^2 - \varepsilon_1 (x^1)^2 = \Delta s^2.$$

Existen tres posibilidades para el tipo de este intervalo, de manera que con el valor de $\Delta s^2 = \varepsilon_2 \alpha^2 - \varepsilon_1 (x^1)^2$ quedarán determinados los valores de ε_1 y ε_2 :

- (i) Si suponemos que el intervalo es de tipo espacio $\Delta s_4^2 > 0$ tenemos que $\varepsilon_2 \alpha^2 - \varepsilon_1 (x^1)^2 > 0$. Esto se cumple solamente en dos casos: (a) $\varepsilon_1 = -1$ y $\varepsilon_2 = 1$ ó (b) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.
- (ii) Si suponemos que el intervalo es de tipo tiempo $\Delta s_4^2 < 0$ tenemos que $\varepsilon_2 \alpha^2 - \varepsilon_1 (x^1)^2 < 0$. Válido cuando: (a) $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = -1$ ó (b) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.
- (iii) Si suponemos que es nula $\Delta s_4^2 = 0$ tenemos que $\varepsilon_2 \alpha^2 - \varepsilon_1 (x^1)^2 = 0$, lo cual es posible solamente si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

De esta forma vemos que sólo existe la posibilidad de tener $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, y podemos desechar los casos en que tienen distintos valores. Asimismo queda determinada la métrica del espacio en el cual encajaremos a los espacios de de Sitter, teniendo ésta uno o dos tiempos según sea el valor que tome ε_1 y tendremos una definición de la hipersuperficie para cada uno de los casos

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{de Sitter} \\ -1 & \text{anti de Sitter.} \end{cases} \quad (2.25)$$

2.2.1. Encaje de un espacio en otro de dimensión mayor

Una variedad Riemanniana (\mathcal{N}, g') de dimensión n la podemos encajar en otra variedad (\mathcal{M}, g) de dimensión m , donde $m > n$. Si la métrica del espacio-tiempo \mathcal{N} es

$$ds'^2 = g'_{ab} dx'^a dx'^b \quad (2.26)$$

con $a, b = 1, \dots, n$, y la del espacio-tiempo \mathcal{M} es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.27)$$

con $\mu, \nu = 1, \dots, m$, debe existir $x^\mu = x^\mu(x'^a)$ tal que

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} x^\mu_{,a} x^\nu_{,b} dx'^a dx'^b, \end{aligned}$$

donde $x^\mu_{,a} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^a}$ y $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^a} dx'^a$. Así tenemos que se debe de cumplir que

$$g'_{ab} = g_{\mu\nu} x^\mu_{,a} x^\nu_{,b}. \quad (2.28)$$

De la ecuación anterior (2.28) podemos obtener la ecuación correspondiente para los determinantes

$$g' = J^2 g, \quad (2.29)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ y $J = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^a} \right|$ es el Jacobiano de la transformación de coordenadas.

La métrica de \mathcal{N} (2.26) debe ser la métrica de una hipersuperficie encajada en \mathcal{M} , que seleccionamos como el conjunto de puntos tales que

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \epsilon \alpha^2 \quad \text{donde } \epsilon = +1 \text{ ó } -1. \quad (2.30)$$

Como $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\sigma) = g_{\mu\nu}(x^\sigma(x'^a))$ podemos, mediante la regla de la cadena, obtener la derivada de (2.30) respecto a x'^a

$$(g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)_{,a} = (\epsilon \alpha^2)_{,a} = 0,$$

así podemos encontrar condiciones para el encaje

$$g_{\mu\nu,a} x^\mu x^\nu + g_{\mu\nu}(x'^a_{,a} x^\mu + x^\mu x'^a_{,a}) = 0,$$

que podemos escribir como

$$g_{\mu\nu,a} x^\mu x^\nu + 2g_{\mu\nu} x'^a_{,a} x^\mu = 0. \quad (2.31)$$

Si derivamos ahora respecto a x'^b obtenemos otra condición

$$g_{\mu\nu,ab} x^\mu x^\nu + 2g_{\mu\nu,a} x'^b_{,a} x^\mu + 2g_{\mu\nu,b} x'^a_{,a} x^\nu + 2g_{\mu\nu} x'^a_{,ab} x^\mu + 2g_{\mu\nu} x'^a_{,a} x'^b_{,b} = 0,$$

reconociendo que el último término es $2g'_{ab}$ escribimos lo anterior como

$$g_{\mu\nu,ab} x^\mu x^\nu + 2g_{\mu\nu,a} x'^b_{,a} x^\mu + 2g_{\mu\nu,b} x'^a_{,a} x^\nu + 2g_{\mu\nu} x'^a_{,ab} x^\mu + 2g'_{ab} = 0. \quad (2.32)$$

En el caso de que $g_{\mu\nu}$ sea plana, es decir $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, tenemos que (2.31) se reduce a

$$\eta_{\mu\nu} x'^a_{,a} x^\mu = 0, \quad (2.33)$$

y además (2.32) se transforma en

$$g_{ab} = -\eta_{\mu\nu} x'^a_{,ab} x^\mu. \quad (2.34)$$

A partir de la ecuación (2.28) con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ podemos encontrar las condiciones de integrabilidad que debe de cumplir el cambio de coordenadas $x^\mu = x^\mu(x'^a)$

$$g'_{ab,c} = (x'^a_{,ac} x'^b_{,b} + x'^a_{,a} x'^b_{,bc}) \eta_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

2.2.2. El espacio de de Sitter

El espacio de *de Sitter* lo definimos como el espacio de curvatura constante positiva $R > 0$, por lo tanto la constante cosmológica también es mayor que cero. Este espacio lo podemos definir como el conjunto de puntos que cumple con la ecuación de la hipersuperficie

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = \alpha^2, \quad (2.36)$$

esto es, un hiperboloide encajado en un espacio plano \mathbb{R}^5 de dimensión $n = 5$ con métrica

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (2.37)$$

A partir de las ecuaciones (2.28, 2.35) se pueden encontrar distintas transformaciones de coordenadas de forma que es posible expresar la métrica, inducida por el encaje en este espacio, de distintas formas. Podemos introducir coordenadas (t, r, θ, ϕ) en el hiperboloide y obtener la forma de la métrica que es estática (2.23) mediante la transformación [6]

$$x^0 = \alpha \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh(\alpha^{-1}t)$$

$$x^1 = \alpha \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cosh(\alpha^{-1}t)$$

$$x^2 = r \sin \theta \cos \phi$$

$$x^3 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x^4 = r \cos \theta,$$

quedando la métrica como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.38)$$

donde es fácil observar que tiene una singularidad en $r = \alpha$. Cabe mencionar que se trata solamente de una singularidad de coordenadas ya que no existe a nivel de la curvatura. Calculando el escalar de curvatura para esta métrica obtenemos $R = 12\alpha^{-1}$, esto junto con (2.20) nos da la relación entre α y la constante cosmológica Λ

$$\alpha^2 = \frac{3}{|\Lambda|}, \quad (2.39)$$

así la singularidad está en $r = \left(\frac{3}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1}{2}}$, quedando la métrica como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{|\Lambda|}{3} r^2\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{|\Lambda|}{3} r^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.40)$$

que es el caso cuando $\epsilon = 1$ en (2.23) que ya habíamos visto al comienzo de la sección.

También se puede expresar la métrica de este espacio mediante otro cambio de coordenadas [3]

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \alpha \log \frac{x^0 + x^1}{\alpha} \\ \hat{x} &= \frac{\alpha x^2}{x^0 + x^1} \\ \hat{y} &= \frac{\alpha x^3}{x^0 + x^1} \\ \hat{z} &= \frac{\alpha x^4}{x^0 + x^1}, \end{aligned}$$

obteniendo una métrica isotrópica de la forma

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + \exp(2\alpha^{-1}\hat{t})(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2) \quad (2.41)$$

estando definida solamente para la región: $x^0 + x^1 \geq 0$.

Se puede hacer una transformación de coordenadas [3] de forma que el hiperboloide quede representado en las coordenadas (t, χ, θ, ϕ)

$$\begin{aligned} x^0 &= \alpha \operatorname{senh}(\alpha^{-1}t) \\ x^1 &= \alpha \operatorname{cosh}(\alpha^{-1}t) \cos \chi \\ x^2 &= \alpha \operatorname{cosh}(\alpha^{-1}t) \operatorname{sen} \chi \cos \theta \\ x^3 &= \alpha \operatorname{cosh}(\alpha^{-1}t) \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ x^4 &= \alpha \operatorname{cosh}(\alpha^{-1}t) \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \end{aligned}$$

quedando la métrica como

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t)[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.42)$$

La métrica tiene singularidades en 0 y π para χ y θ debido a las coordenadas polares. Las superficies de tiempo constante tienen una métrica

$$ds^2 = \alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t)[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2)],$$

de esta forma vemos que son tres-esferas \mathbb{S}^3 de curvatura constante positiva $\alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t)$, que en la figura están representadas por los círculos que cortan el hiperboloide en planos horizontales. En la figura 2.1 podemos ver cómo las geodésicas normales a estas superficies son líneas que se acercan unas a otras a

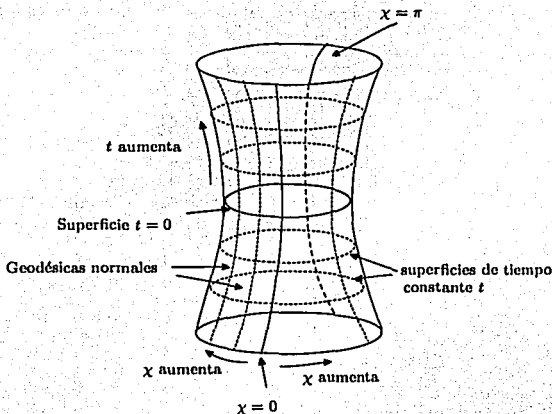


Figura 2.1: Hiperboloide que representa el espacio-tiempo de de Sitter como una hipersuperficie encajada en un espacio plano \mathbb{R}^5 . Las coordenadas θ y ϕ no aparecen en la figura.

medida que aumenta t desde valores negativos, en $t = 0$ llegan a un mínimo de distancia entre ellas y se expanden otra vez después de este valor. Este espacio es una variedad geodésicamente completa.

Para estudiar la estructura del infinito de este espacio analizaremos ahora el diagrama de Penrose correspondiente (ver apéndice C). Para esto introducimos el cambio de coordenada para t' en (2.42)

$$t' = 2 \arctan(e^{\alpha^{-1}t}) - \frac{1}{2}\pi \quad \text{donde} \quad -\frac{1}{2}\pi < t' < \frac{1}{2}\pi$$

así observamos que mientras $t \rightarrow -\infty$ tenemos que $t' \rightarrow -\frac{1}{2}\pi$ y de la misma forma si $t \rightarrow \infty$ entonces $t' \rightarrow \frac{1}{2}\pi$; siendo el espacio de de Sitter conforme a la parte del universo estático de Einstein que corresponde a la región (figura 2.2)

$$-\frac{1}{2}\pi < t' < \frac{1}{2}\pi \quad (2.43)$$

de forma que la métrica es conforme a la métrica dada por (C.6) con factor conforme de $\alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t)$.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t)[(-dt')^2 + dx^2 + \text{sen}^2 \chi(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)] \\ ds^2 &= \alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t) d\bar{s}^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Es fácil de visualizar con la ayuda el diagrama de Penrose para el espacio de de Sitter (figura 2.3) que el espacio tiene singularidades en las coordenadas

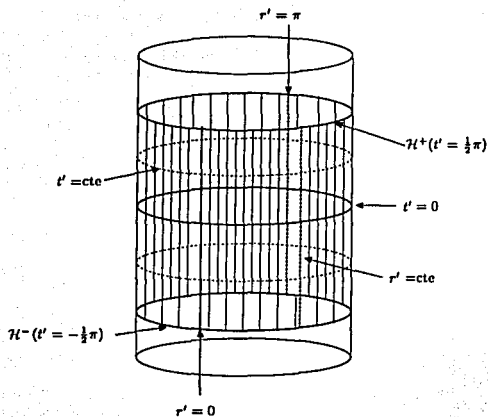


Figura 2.2: El espacio de *de Sitter* es conforme a la región indicada en el cilindro del universo estático de Einstein

$r = 0$ y $r = \pi$, donde podemos ver que los infinitos, tanto futuro como pasado, corresponden a las líneas horizontales \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- respectivamente.

Éstas superficies que vemos como líneas en el diagrama tienen como consecuencia la existencia de horizontes de partículas y eventos. A diferencia del espacio de Minkowski (apéndice C) en el que los infinitos temporales corresponden a puntos y los infinitos nulos a las superficies.

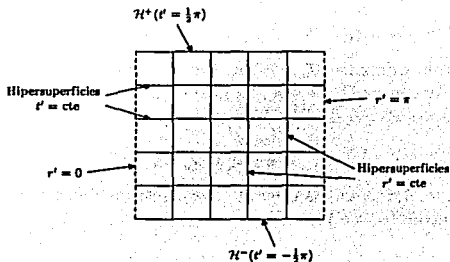


Figura 2.3: Diagrama de Penrose para el espacio de *de Sitter*, las líneas punteadas representan las singularidades en las coordenadas

En la línea de mundo temporal de una partícula P que se mueve en el

espacio-tiempo de de Sitter y que se origina en la superficie espacial \mathcal{H}^- , observamos que para un evento p el cono de luz pasado de este punto va a dividir el espacio en aquellos eventos, pertenecientes a otras partículas, que ha podido observar y que son los que están en la línea de mundo de estas otras partículas que intersectan el cono de luz pasado, y aquellos que no ha podido observar a ese tiempo y que están en las líneas de mundo que van por fuera del cono de luz. A esta división se le llama el horizonte de partículas para la partícula P en el evento p , lo cual se puede representar por la figura 2.4.

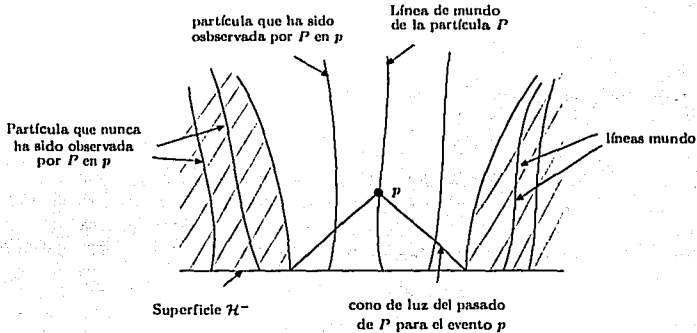


Figura 2.4: Esquema que muestra el horizonte de partículas para un evento p

Un tiempo después P ampliará su horizonte de partículas, es decir, podrá observar las líneas de mundo de más partículas, pero aun así habrá líneas de mundo de otras partículas que nunca observará debido a que hay un futuro que también es una superficie espacial que es la superficie \mathcal{H}^+ . Así tenemos que la parte del cono de luz correspondiente al pasado, desde el evento límite p en \mathcal{H}^+ , divide al espacio en los eventos que nunca podrán ser vistos por P y aquellos que en algún momento observará.

A esta frontera se le llama el horizonte de eventos futuros de la línea de mundo de P (figura 2.5). Por el contrario, el espacio de Minkowski no tendrá este horizonte debido a que su futuro está representado por el punto i^+ y la superficie \mathcal{H}^+ es nula.

En el punto p' se crea el cono de luz para el futuro de la partícula P , los eventos de las líneas de mundo de otras partículas que caen fuera de ese cono constituyen el conjunto de eventos que P no podrá influenciar en ningún tiempo. Esta división es llamada el horizonte de eventos pasados de P ; de la misma forma que para el horizonte de eventos futuros, el espacio de Minkowski carece de esta frontera debido a que su pasado infinito está representado por un punto y sus superficies \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- son nulas.

El evento q en la línea de mundo de la partícula Q , donde se intersecta con el cono de luz pasado de P , en el límite p en \mathcal{H}^+ (en la frontera de eventos

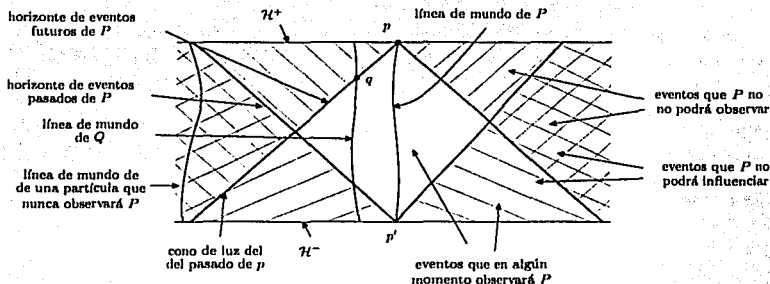


Figura 2.5: Figura que representa el horizonte de eventos futuros para una partícula P en el límite del evento p en \mathcal{H}^+ .

futuros) es un evento después del cual P no logrará ver más eventos sobre la línea de mundo de Q , así el observar este evento q le llevará a P un tiempo infinito; y los eventos antes de q podrán ser vistos por P mientras su cono de luz correspondiente al futuro en algún evento incluya parte de la línea de mundo de Q antes del evento q .

2.2.3. El espacio de anti de Sitter

La solución a las ecuaciones de Einstein para el vacío con término cosmológico menor que cero $\Lambda < 0$ lo llamamos el espacio de *anti de Sitter*, de manera que el escalar de curvatura es una constante menor que cero $R < 0$. Al igual que el espacio de de Sitter lo podemos ver como el hiperboloide

$$-(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = -\alpha^2 \quad (2.45)$$

encajado en un espacio plano de una dimensión mayor con una métrica con dos tiempos

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (2.46)$$

Existen otras definiciones de este espacio como una hipersuperficie en un espacio de dimensión mayor; Hawking y Ellis [3] lo hacen igualando el lado izquierdo de (2.45) a $+\alpha^2$. Rindler [6], con la convención de signos para el espacio de encaje $(+, +, -, -, -)$, utiliza la misma definición que aquí se da (2.45). El hiperboloide lo podemos ver en la figura 2.1 dejando los ejes en esa orientación pero rotando la figura un ángulo recto. El espacio de anti de Sitter tiene la característica de que pueden existir líneas de tipo tiempo o líneas de mundo que son cerradas. La métrica la podemos llevar a la forma estática (2.23) mediante la siguiente transformación

$$\begin{aligned}x^0 &= \alpha \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(\alpha^{-1}t) \\x^1 &= \alpha \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cos}(\alpha^{-1}t) \\x^2 &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi \\x^3 &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\x^4 &= r \operatorname{cos} \theta,\end{aligned}$$

quedando la métrica de la siguiente forma

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\alpha^2}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.47)$$

donde el valor de α en términos de la constante cosmológica es

$$\alpha^2 = \frac{3}{|\Lambda|}. \quad (2.48)$$

De esta forma es fácil observar que para el caso de anti de Sitter, a diferencia del espacio de de Sitter, no existe la singularidad para la coordenada r debido a que la constante cosmológica es menor que cero $\Lambda < 0$, así la métrica la podemos escribir como

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{|\Lambda|}{3} r^2\right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{|\Lambda|}{3} r^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.49)$$

que es la métrica que obtenemos cuando $\epsilon = -1$ en (2.23).

Se puede expresar la métrica con coordenadas en el hiperboloide (t, χ, θ, ϕ) mediante una transformación de coordenadas

$$\begin{aligned}x^0 &= \alpha \operatorname{sen}(\alpha^{-1}t) \\x^1 &= \alpha \operatorname{cos}(\alpha^{-1}t) \operatorname{cosh} \chi \\x^2 &= \alpha \operatorname{cos}(\alpha^{-1}t) \operatorname{senh} \chi \operatorname{cos} \theta \\x^3 &= \alpha \operatorname{cos}(\alpha^{-1}t) \operatorname{senh} \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi \\x^4 &= \alpha \operatorname{cos}(\alpha^{-1}t) \operatorname{senh} \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,\end{aligned}$$

para lo cual obtenemos la siguiente forma de la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \operatorname{cos}^2(\alpha^{-1}t) [d\chi^2 + \operatorname{senh}^2 \chi (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2)]. \quad (2.50)$$

Ésta tiene singularidades en $t = \pm \frac{\pi}{2} \alpha$ y solamente cubre parte del espacio. Para cubrirlo todo es necesario introducir otras coordenadas de forma que la métrica tenga una forma estática y el espacio quede cubierto por superficies de tiempo constante $\{t = \text{cte}\}$, quedando la métrica como en [3]

$$ds^2 = -\cosh^2 r dt^2 + dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.51)$$

La coordenada r toma cualquier valor entre $-\infty$ y ∞ , de forma que para estudiar la estructura del espacio en el infinito se hace un cambio de coordenada más

$$r' = 2 \arctan(\exp r) - \frac{1}{2} \pi \quad \text{donde } r' \text{ toma valores } 0 \leq r' < \frac{1}{2} \pi, \quad (2.52)$$

de forma que la métrica que resulta es conforme a la métrica del universo estático de Einstein (C.6)

$$ds^2 = \cosh^2 r' d\bar{s}^2 = \cosh^2 r' [-(dt')^2 + (dr')^2 + \sin^2 r' (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.53)$$

Así el espacio de anti de Sitter cubierto por las coordenadas (t, r', θ, ϕ) es conforme a la región indicada en (2.52) en el cilindro que representa el universo de Einstein, y la región cubierta por las coordenadas (t, χ, θ, ϕ) es la región en forma de rombo que se muestra en la figura 2.6.

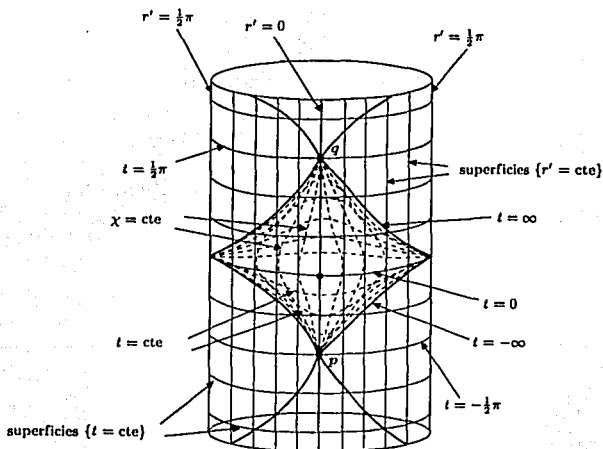


Figura 2.6: El espacio de anti de Sitter conforme a la región indicada en el cilindro del universo estático de Einstein.

El diagrama de Penrose (figura 2.7) nos permite observar que el infinito para las líneas nulas y espaciales es una superficie tipo tiempo \mathcal{H} , también vemos que las líneas tipo tiempo no alcanzan esta superficie y convergen a otro punto, por lo que los infinitos para las líneas temporales los representamos con dos puntos desconexos i^- y i^+ . Las geodésicas ortogonales a las superficies de tiempo constante $\{t = \text{cte}\}$ son líneas con las otras tres coordenadas constantes, estas líneas convergen a un punto cuando están dirigidas al pasado y a otro cuando son dirigidas al futuro, esto debido a la singularidad en la métrica (2.50).

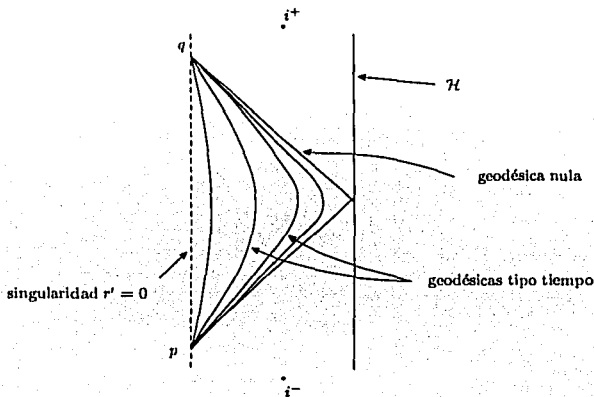


Figura 2.7: Diagrama de Penrose para el espacio de anti de Sitter.

Como consecuencia de que los infinitos para las líneas de tipo tiempo sean superficies temporales tenemos que no existen superficies en las que dadas condiciones iniciales se pueda predecir la evolución de una partícula para todo el espacio, por ejemplo, para una partícula inicialmente en la superficie $\{t = 0\}$ uno no puede predecir más allá de la región cubierta por las coordenadas (t, χ, θ, ϕ) .

Las geodésicas normales a las superficies de tiempo constante $\{t = \text{cte}\}$ provienen de un punto p y se expanden a medida que se acercan a la superficie $\{t = 0\}$, después convergen a otro punto q y de ahí continúan a otra región con forma de rombo donde sucede lo mismo. De esta forma las geodésicas temporales nunca alcanzan la superficie \mathcal{H} , a diferencia de las geodésicas nulas que parten desde el punto p e intersectan a \mathcal{H} formando una frontera para el futuro de una partícula en el evento p . Debido a esto hay regiones en el futuro de una partícula en el evento p que no pueden ser alcanzadas por ninguna geodésica tipo tiempo. La región del futuro que puede alcanzar una partícula en el evento p es aquella comprendida entre las líneas nulas que forman las regiones con forma de rombo, es decir, la región cubierta por las coordenadas (t, χ, θ, ϕ) .

Capítulo 3

Simetrías en espacios con curvatura constante

Existen transformaciones que actúan sobre los espacios Riemannianos y semi-Riemannianos que dejan invariante la métrica, esto tiene como consecuencia que el producto escalar no es alterado por la transformación, es decir, que se preservan distancias y ángulos entre vectores del espacio. También existen otras transformaciones que al actuar sobre la métrica la alteran solamente por un factor que es una función real positiva. Éstas no preservan distancias pero sí el ángulo entre los vectores y las llamamos transformaciones conformes. Para los espacios de de Sitter y anti de Sitter veremos cuáles son sus isometrías, lo cual haremos en el espacio de encaje. Además definiremos una frontera para estos espacios y veremos que el grupo de isometrías de estos espacios sobre la frontera actúa como el grupo conforme. Para el espacio de de Sitter, además del límite cerca del horizonte, estudiaremos algo que llamamos el límite del horizonte y cómo actúa ahí el grupo de isometrías.

3.1. Isometrías y transformaciones conformes

Si tenemos una región U con coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ y otra región V con coordenadas $\{y^1, \dots, y^n\}$, ambas en un espacio Riemanniano de dimensión n , podemos hablar de la transformación de U sobre V si existe un mapeo biyectivo que asocie a cada punto $(y^1, \dots, y^n) \in V$ con un punto $(x^1, \dots, x^n) \in U$ de forma que las funciones $x^\mu = x^\mu(y^1, \dots, y^n)$ y $y^\mu = y^\mu(x^1, \dots, x^n)$ sean continuas y diferenciables en todos los puntos. El que sea biyectiva significa que la matriz $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ es no singular en todos los puntos de V . Si la región es la misma, es decir $U = V = \mathcal{M}$, entonces decimos que es una transformación de la región \mathcal{M} y podemos ver a dicha transformación simplemente como un cambio de coordenadas.

Las transformaciones forman un grupo. Si tenemos un conjunto \mathcal{G} junto con

una operación binaria (\circ) la cual relaciona dos elementos f y g de \mathcal{G} con otro elemento del mismo conjunto y se cumple: i) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$; ii) existe un elemento $1 \in \mathcal{G}$ llamado la identidad tal que $1 \circ g = g \circ 1 = g$ para todo $g \in \mathcal{G}$; iii) y existe un elemento $g^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $g \circ (g^{-1}) = 1$ para todo $g \in \mathcal{G}$, entonces tenemos un grupo. Podemos observar que las transformaciones para una región \mathcal{M} forman un grupo bajo la operación de composición de funciones, así, si las funciones f y g son las transformaciones $x = x(y)$ y $y = y(z)$ respectivamente, tenemos que la composición de ellas $f \circ g$ es la transformación $x = x(y(z))$ y que la transformación inversa f^{-1} está definida por $y = y(x)$.

Si la métrica del espacio Riemanniano \mathcal{M} está dada en función de las coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ como una matriz simétrica no singular $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, \dots, x^n)$, la transformación de la región o el cambio a las coordenadas $\{y^1, \dots, y^n\}$ mediante las funciones $x^\mu = x^\mu(y^1, \dots, y^n)$ con $\mu = 1, \dots, n$ nos deja una métrica $g'_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(y^1, \dots, y^n)$ donde

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

La transformación $x^\mu = x^\mu(y^1, \dots, y^n)$ es una *isometría* si deja invariante a la métrica, por lo tanto se cumple que

$$g'_{\mu\nu}(y^1, \dots, y^n) = g_{\mu\nu}(x^1(y), \dots, x^n(y)). \quad (3.2)$$

De esta forma una isometría deja invariante el producto escalar de dos vectores, es decir, si \mathbf{X} y \mathbf{Y} son dos vectores en el sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ y el mismo par de vectores en las coordenadas $\{y^1, \dots, y^n\}$ es \mathbf{X}' y \mathbf{Y}' el producto escalar es el mismo

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{X}', \mathbf{Y}' \rangle, \quad (3.3)$$

esto lo podemos expresar explícitamente en términos de la métrica como

$$g_{\mu\nu}(x_0^1, \dots, x_0^n) X^\mu Y^\nu = g'_{\mu\nu}(y_0^1, \dots, y_0^n) X'^\mu Y'^\nu, \quad (3.4)$$

donde el subíndice cero indica que es calculado en un punto $p \in \mathcal{M}$. El conjunto de todas las isometrías forma un grupo con la operación de composición de funciones.

Si tenemos un espacio plano de dimensión $n = 2$ hablamos de las transformaciones del plano, éstas pueden o no ser isometrías:

(a) una traslación es una isometría del plano, la transformación la expresamos como

$$x^\mu = y^\mu + \eta^\mu \quad \text{con } \mu = 1, 2, \quad (3.5)$$

donde η^μ son las componentes del vector de traslación $\boldsymbol{\eta}$.

(b) las dilaciones del plano no son una isometría, excepto por la identidad. Una dilación tiene la forma

$$x^\mu = \lambda y^\mu \quad \text{con } \mu = 1, 2, \quad (3.6)$$

siendo λ cualquier número real distinto de cero.

(c) podemos tener la composición de una dilación y de una traslación, ésta al igual que la dilación no es una isometría salvo en el caso de la identidad ($\lambda = 1$)

$$x^\mu = \lambda y^\mu + \eta^\mu \quad \text{con } \mu = 1, 2. \quad (3.7)$$

(d) las transformaciones lineales del plano representadas por

$$x^1 = ay^1 + by^2 \quad (3.8)$$

$$x^2 = cy^1 + dy^2, \quad (3.9)$$

donde a, b, c y d son números reales. Esta transformación la podemos expresar en términos de matrices

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

que podemos escribir de forma compacta como $x = \Lambda y$, donde Λ representa la matriz de entradas reales a, b, c y d y x es el vector con componentes (x^1, x^2) . Esta transformación es invertible si la matriz es no singular en todos los puntos, es decir, si el determinante es distinto de cero ($\det \Lambda \neq 0$). El conjunto de estas transformaciones forman un grupo que es isomorfo al grupo de matrices de 2×2 con entradas reales, el grupo lineal general de grado 2 sobre \mathbb{R} denotado por $GL(2, \mathbb{R})$. La composición de dos transformaciones lineales, Π , la podemos expresar simplemente como el producto de dos matrices $\Pi = \Lambda \Lambda'$, así observamos que éste no es un grupo abeliano.

(e) las transformaciones afines resultan de la composición de una transformación lineal y una traslación

$$x = \Lambda y + \eta. \quad (3.11)$$

Si la métrica definida en nuestro espacio es Euclidiana $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, tanto las transformaciones lineales como las afines deben de cumplir, para ser isometrías del plano, que su matriz de transformación sea una matriz ortogonal, esto es, si g' es la métrica que resulta de la transformación tenemos que sus componentes se transforman de la siguiente manera

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1,2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu}, \quad (3.12)$$

representado con matrices

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

de manera que para tener una isometría debe de cumplirse que $g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, esto es $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ y $ab + cd = 0$. En lenguaje de matrices tenemos que $g' = \Lambda^T \Lambda$, entonces para que sea una isometría se debe de cumplir que $\Lambda^T \Lambda = 1$ que es la definición de una matriz ortogonal. Resolviendo las ecuaciones podemos encontrar una forma explícita para la matriz Λ . De la ecuación $a^2 + c^2 = 1$ obtenemos que $a = \cos \varphi$ y $c = -\sin \varphi$ con un ángulo φ tal que $0 \leq \varphi < 2\pi$. Con esto nos quedan dos posibilidades para b y d :

$$b = \sin \varphi, \quad d = \cos \varphi \quad \text{ó} \quad b = -\sin \varphi, \quad d = -\cos \varphi$$

resultando en dos matrices

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

y

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Esta última la podemos expresar como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

La primera matriz con $\det \Lambda = 1$ representa una rotación de ángulo φ alrededor del origen. La segunda tiene $\det \Lambda = -1$ y representa una rotación de ángulo φ seguida de una reflexión sobre uno de los ejes coordenados, $x^1 = y^1$ y $x^2 = -y^2$. Las primeras forman un subgrupo del grupo de todas las isometrías y se les llama *isometrías propias* o *directas*.

Al igual que en el caso del plano las isometrías del espacio Euclidiano tridimensional son transformaciones afines. Las transformaciones lineales, caso particular de las afines, dejan fijo el origen al no existir una traslación, de éstas queremos saber cuáles son isometrías del espacio. Podemos expresar la transformación lineal de la siguiente manera

$$x = \Lambda y, \quad (3.16)$$

donde Λ es la matriz de transformación y las coordenadas $\{x^\mu\}$ son coordenadas Euclidianas, es decir, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Las componentes de la métrica en términos de las nuevas coordenadas son

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.17)$$

La matriz $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$ es la matriz Jacobiana del cambio de coordenadas y coincide con la matriz Λ , así tenemos que

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \delta_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha=1,2,3} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\alpha{}_\nu \end{aligned}$$

al igual que en el caso del plano. Si queremos que sea una isometría se debe de cumplir que

$$g'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1,2,3} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

$$= \Lambda^1{}_\mu \Lambda^1{}_\nu + \Lambda^2{}_\mu \Lambda^2{}_\nu + \Lambda^3{}_\mu \Lambda^3{}_\nu = \delta_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Esto se puede escribir en notación de matrices como

$$\mathbf{g}' = \Lambda^T \Lambda, \quad (3.20)$$

así, para que la transformación lineal sea una isometría Λ debe ser, necesariamente, una matriz ortogonal, es decir,

$$\Lambda^T \Lambda = 1. \quad (3.21)$$

El determinante de Λ puede ser uno o menos uno, $\det \Lambda = \pm 1$, esto debido a que el determinante de la matriz de transformación es igual al de la matriz transpuesta, $\det \Lambda = \det \Lambda^T$. Esta transformación deja invariante el producto escalar, al igual que el caso $n = 2$.

Se puede probar [7] que las transformaciones lineales dejan invariante al menos una línea recta, ésta puede quedar fija o ser reflejada en el origen por la misma transformación. Sin perder generalidad podemos escoger como la línea invariante a uno de los ejes coordenados. Si nuestras coordenadas $\{x^\mu\}$ son Euclidianas y el eje coordenado invariante es x^3 la matriz de transformación tiene la forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Cuando se trata de una isometría se cumplen las mismas ecuaciones que para el caso $n = 2$

$$\Lambda^T \Lambda = 1 = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd & 0 \\ ab + cd & b^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

así, al ser Λ una matriz ortogonal, la matriz $\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ también es ortogonal, y tenemos las dos mismas posibilidades que en el caso anterior (3.13, 3.14).

Dependiendo del signo del determinante de Λ tendremos dos tipos de transformaciones que dejan fijo el origen:

(a) rotaciones alrededor de un eje, con matriz de rotación tal que $\det \Lambda = 1$ que puede representarse como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

o el caso en el que el ángulo es tal que $\det \Lambda^{(2)} = -1$ y que la componente Λ^3_3 de la matriz Λ es -1 . De esta forma tenemos que

$$\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

que es una rotación de un ángulo π alrededor del eje x^1 .

(b) rotaciones seguidas de una reflexión en el plano normal al eje de rotación. Las matrices de transformación es tal que $\det \Lambda = -1$. Se puede representar con la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Estas matrices ortogonales forman un grupo bajo la multiplicación de dos de sus miembros, éste se denota por $O(3)$. Las matrices que tienen $\det \Lambda = 1$ forman un subgrupo llamado el grupo ortogonal especial $SO(3)$, éstas representan todas las rotaciones posibles alrededor de un eje.

Las isometrías que no dejan fijo el origen son las transformaciones afines con matriz Λ ortogonal $x = \Lambda y + \eta$.

Para la extensión a un espacio de dimensión n se procede como en los dos casos anteriores. Las isometrías que dejan fijo el origen son transformaciones lineales $x = \Lambda y$ con Λ una matriz ortogonal

$$\Lambda^T \Lambda = 1 \quad \text{con} \quad \det \Lambda = \pm 1.$$

Las matrices con $\det \Lambda = 1$ forman el subgrupo llamado el grupo ortogonal especial de grado n , denotado por $SO(n)$; debido a que en el caso $n = 2$ tenemos rotaciones, por analogía decimos que este es el grupo de 'rotaciones' en n dimensiones, siendo éste un grupo conexo. La matriz de transformación la podemos escribir, escogiendo de forma apropiada las coordenadas, de la siguiente forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right) & & & & & \\ & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right) & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

donde $\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \operatorname{sen} \varphi_i \\ -\operatorname{sen} \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$ con $0 \leq \varphi_i < 2\pi$.

En el caso de un espacio semi-Riemanniano podemos proceder de forma análoga. Si tenemos coordenadas Euclidianas $\{x^\mu\}$, entonces la métrica es

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}^* = \operatorname{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{1, \dots, 1}_p) \quad \text{con} \quad q + p = n. \quad (3.28)$$

Las isometrías son transformaciones afines, en particular aquellas que dejan fijo el origen son transformaciones lineales. Esto es

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \delta_{\alpha\beta}^* = - \sum_q \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} + \sum_p \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} = \delta_{\mu\nu}^*. \quad (3.29)$$

Para el espacio de dimensión $n = 2$ con $\delta_{\mu\nu}^* = \operatorname{diag}(-1, 1)$ tenemos

$$\mathbf{g} = \Lambda^T \delta^* \Lambda = \delta^*, \quad (3.30)$$

de manera que $\det \Lambda = \pm 1$. De esta forma, para tener una isometría se deben de cumplir las ecuaciones $c^2 - a^2 = -1$, $d^2 - b^2 = 1$ y $cd - ab = 0$. Si hacemos $\beta = \frac{c}{a}$ entonces $a = d = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $b = c = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Con $\beta = \tanh \varphi$ la matriz de transformación la podemos escribir como

$$\Lambda = \pm \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \pm \operatorname{senh} \varphi \\ \operatorname{senh} \varphi & \pm \cosh \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

De esta forma vemos que el grupo de isometrías que dejan fijo el origen es el grupo de rotaciones hiperbólicas por un ángulo φ . Este grupo lo denotamos como $O(1, 1)$.

En un espacio de n dimensiones tenemos que el grupo de isometrías que dejan fijo el origen es $O(q, p)$ y se le llama transformaciones pseudo-ortogonales. Estas transformaciones dejan invariante el producto escalar pseudo-Euclidiano

$$(\Lambda X, \Lambda Y) = (X, Y) = \underbrace{-X^0 Y^0 - \dots - X^{q-1} Y^{q-1}}_q + \underbrace{X^q Y^q + \dots + X^{n-1} Y^{n-1}}_p. \quad (3.32)$$

Para el espacio de Minkowski de n dimensiones el grupo de isometrías que dejan fijo el origen es $O(1, n-1)$; para $n = 4$ (el espacio-tiempo de Minkowski usual) al grupo de isometrías se le llama el grupo de Poincaré que incluye las traslaciones y a $O(1, 3)$, el grupo de transformaciones pseudo-ortogonales con un 'tiempo'.

Si e^0 es el vector unitario en dirección de la coordenada temporal x^0 del espacio pseudo-Euclidiano, podemos definir una isometría propia o directa como aquella Λ tal que $\det \Lambda = 1$ y $\langle e^0, \Lambda e^0 \rangle = -1$. Esta isometría preserva la dirección del tiempo y además contiene a la identidad, por lo que es un subgrupo del grupo de todas las isometrías que dejan fijo el origen. En analogía con el caso Euclidiano lo denotamos como $SO(1, n-1)$. Si tenemos una métrica pseudo-Euclidiana con más de un 'tiempo', entonces es necesario que $\langle e^i, \Lambda e^i \rangle = -1$ para $i = 0, \dots, q-1$, es decir, que preserve todos los 'tiempos' de la métrica. Este grupo lo denotamos como $SO(q, p)$, y es de dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$ que corresponde al número de matrices de $n \times n$ linealmente independientes.

Existen otras transformaciones de los espacios Riemannianos o semi-Riemannianos que forman un grupo. Estas transformaciones no preservan distancias pero si el ángulo entre dos curvas (o vectores) (1.3). Se les llama transformaciones conformes y son tales que la métrica que resulta de la transformación \hat{g} la podemos expresar como

$$\hat{g} = \Omega^2 g, \quad (3.33)$$

y en componentes

$$\hat{g}_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (3.34)$$

donde $\Omega^2 > 0$ es una función en los reales.

Se dice que las métricas que se relacionan mediante una transformación de este tipo tienen la misma estructura conforme para la región a la que aplicamos dichas transformaciones.

De las transformaciones que hemos visto para espacios Riemannianos o semi-Riemannianos, con métricas Euclidianas o pseudo-Euclidianas respectivamente, las que son transformaciones conformes son :

(a) Las isometrías, es decir, los grupos $O(q, p)$, en particular el subgrupo $SO(q, p)$, y las traslaciones, asimismo la composición de ellas llamadas las transformaciones afines.

(b) Las dilaciones y su composición con las isometrías son transformaciones conformes

$$x = \Lambda \lambda y,$$

donde $\Lambda \in O(q, p)$ ó $SO(q, p)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante.

(c) Las *inversiones* o transformaciones conformes especiales

$$y^\mu = \frac{\frac{x^\mu}{\alpha^2} - x_0^\mu}{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0\right)}, \quad (3.35)$$

donde $x^2 = \langle x, x \rangle = g(x, x)$, y $\left\langle \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0 \right\rangle = g_{\mu\nu} \left(\frac{\alpha^\mu}{\alpha^2} - x_0^\mu \right) \left(\frac{\alpha^\nu}{\alpha^2} - x_0^\nu \right)$ con métrica $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ó $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}^*$. Para definir la transformación de esta manera necesariamente x y x_0 deben ser adimensionales o x_0 tener las dimensiones apropiadas. La transformación no está definida para el punto $\frac{\alpha}{\alpha^2} = x_0$ de forma que podemos usar un punto al infinito en \mathbb{R}^n como su imagen.

Para ver que es una transformación conforme primero observamos que

$$(y^\mu)^2 = \frac{\left(\frac{x^\mu}{\alpha^2} - x_0^\mu\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0\right)^2},$$

de esta manera

$$\begin{aligned} y^2 &= - \sum_{\mu=0}^{q-1} (y^\mu)^2 + \sum_{\mu=q}^{n-1} (y^\mu)^2 \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0\right)^2} \left[- \sum_{\mu=0}^{q-1} \left(\frac{x^\mu}{\alpha^2} - x_0^\mu\right)^2 + \sum_{\mu=q}^{n-1} \left(\frac{x^\mu}{\alpha^2} - x_0^\mu\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0\right)^2} \delta_{\mu\nu}^* \left(\frac{x^\mu}{\alpha^2} - x_0^\mu\right) \left(\frac{x^\nu}{\alpha^2} - x_0^\nu\right) \\ &= \frac{\left\langle \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0 \right\rangle}{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0\right)^2}, \end{aligned}$$

de esta forma tenemos

$$y^2 = \left\langle \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0 \right\rangle^{-1}. \quad (3.36)$$

La transformación (3.35) la podemos escribir como

$$\frac{x^\mu}{\alpha^2} = \left\langle \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0, \frac{\alpha}{\alpha^2} - x_0 \right\rangle y^\mu + x_0^\mu \quad (3.37)$$

que junto con la ecuación anterior (3.36) nos deja la transformación de la siguiente forma

$$\frac{x^\mu}{x^2} = \frac{y^\mu}{y^2} + x_0^\mu, \quad (3.38)$$

y con esto podemos calcular fácilmente las componentes de la matriz de transformación de coordenadas

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial y^\mu}{\partial y^\nu} = \frac{x^2}{y^2} \delta^\mu_\nu = x^2 \left\langle \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0, \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0 \right\rangle \delta^\mu_\nu. \quad (3.39)$$

La transformación de la métrica es

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta} = x^2 \left\langle \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0, \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0 \right\rangle \delta^\alpha_\mu x^2 \left\langle \frac{x^\beta}{x^2} - x_0, \frac{x^\beta}{x^2} - x_0 \right\rangle \delta^\beta_\nu g_{\alpha\beta} \\ &= (x^2)^2 \left\langle \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0, \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0 \right\rangle^2 \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu g_{\alpha\beta} \\ \hat{g}_{\mu\nu} &= x^4 \left\langle \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0, \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0 \right\rangle^2 g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

así vemos que el factor conforme de esta transformación para espacios con métrica Euclidiana ($q = 0$) o para espacios con métrica pseudo-Euclidiana ($q \neq 0$) es $\Omega^2(x) = x^4 \left\langle \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0, \frac{x^\alpha}{x^2} - x_0 \right\rangle^2$. De esta forma tenemos todas las posibles transformaciones conformes para estos espacios Riemannianos o semi-Riemannianos. Para espacios con dimensión $n \geq 3$ se puede probar [7] que cualquier transformación conforme (al menos con cuarta derivada continua) es una composición de isometrías, dilaciones e inversiones. Este grupo tiene dimensión $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ que es la suma de n generadores para las traslaciones, n para las inversiones, $\frac{1}{2}n(n-1)$ para las 'rotaciones' ($O(q,p)$), y un generador para las dilaciones.

Por último encontramos el algebra de Lie del grupo conforme. Esto lo hacemos en términos de un campo escalar $\phi(x)$, con coordenadas cartesianas $\{x\}$. Los generadores los podemos representar de la siguiente forma:

- Traslaciones $P_\mu = -\partial_\mu$, esto aplicado a $\phi(x)$ nos genera el vector por el cual trasladamos α .
- Rotaciones $M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$, aplicado al campo escalar resulta una matriz antisimétrica ω .
- Dilaciones $D = -x^\mu \partial_\mu$, aplicado a $\phi(x)$ lo identificamos con a .
- Inversiones $K_\mu = 2x_\mu(x, \partial) - x^2 \partial_\mu$, esto aplicado a $\phi(x)$ lo identificamos con $x(\beta, x) - x^2 \beta$.

De manera que encontramos que los únicos paréntesis de Lie distintos de cero son:

$$[D, P_\mu] = P_\mu \quad (3.41)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\sigma\mu} P_\nu - g_{\sigma\nu} P_\mu \quad (3.42)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = g_{\beta\nu} M_{\alpha\mu} + g_{\alpha\nu} M_{\mu\beta} + g_{\alpha\mu} M_{\beta\nu} + g_{\beta\mu} M_{\nu\alpha} \quad (3.43)$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\sigma] = g_{\nu\sigma} K_\mu - g_{\mu\sigma} K_\nu \quad (3.44)$$

$$[D, K_\mu] = -K_\mu \quad (3.45)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu} D + M_{\mu\nu}). \quad (3.46)$$

Éstos pueden ser calculados sin mayor dificultad. De manera que con esto tenemos el algebra de Lie de los generadores del grupo conforme.

3.2. Invariancia de la métrica y el grupo conforme para el espacio de de Sitter

Para estudiar las isometrías del espacio de de Sitter es conveniente hacerlo en su espacio de encaje, esto debido a que es un espacio con una métrica pseudo-Euclidiana, de forma que es más sencillo el análisis de los grupos de transformaciones. Anteriormente encontramos la solución al espacio con curvatura constante positiva para cuatro dimensiones ($n = 4$) (2.38 ó 2.40) y también vimos que la métrica del espacio de encaje es $\eta_{dS} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$ en cinco dimensiones ($n + 1 = 5$), con la definición del espacio como una hipersuperficie encajada dada por la ecuación (2.36). En esta ocasión vamos a tratar al espacio de de Sitter en general, es decir, en n dimensiones y a su espacio de encaje en $n + 1$ dimensiones, regresando al caso anterior simplemente tomando $n = 4$.

El espacio de de Sitter en n dimensiones, dS_n , lo podemos ver como una subvariedad encajada en un espacio pseudo-Euclidiano de una dimensión mayor $n + 1$. Este espacio de encaje con coordenadas Euclidianas $\{x^\mu\}$ con $\mu = 0, \dots, n$ tiene una métrica $\eta_{dS_{n+1}} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$, de manera que la distancia al cuadrado está dada por

$$\bar{x}^2 = -(x^0)^2 + \sum_{i=1}^n (x^i)^2. \quad (3.47)$$

En este espacio de encaje definimos al espacio de de Sitter como el conjunto de puntos tal que

$$\bar{x}^2 = \alpha^2, \quad (3.48)$$

esto es, una hipersuperficie de dimensión n encajada en el espacio pseudo-Euclidiano de $n + 1$ dimensiones con un 'tiempo'.

Con esto vemos que el espacio de encaje para el espacio de de Sitter, $\eta_{dS_{n+1}}$, tiene como grupo de isometrías, que dejan fijo el origen y además preservan la dirección del tiempo, a $SO(1, n)$. Si tenemos tres puntos en la subvariedad encajada que representa el espacio de de Sitter, x_0^μ , $x_0^\mu + X^\mu$ y $x_0^\mu + Y^\mu \in dS_n$, y bajo una transformación $\Lambda \in SO(1, n)$ se convierten en $x_0'^\mu$, $x_0'^\mu + X'^\mu$ y $x_0'^\mu + Y'^\mu$ respectivamente, estos tres puntos también están en dS_n . De esta forma tenemos dos vectores X y Y en el espacio tales que

$$\begin{aligned} \langle X', Y' \rangle &= \eta_{\alpha\beta} X'^\alpha Y'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu X^\mu \Lambda^\beta_\nu Y^\nu \\ &= \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} X^\mu Y^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu \\ &= \langle X, Y \rangle. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Así vemos que la métrica g_{dS_n} inducida por el encaje en el espacio de de Sitter, dS_n , a partir de la métrica en el espacio de encaje $\eta_{dS_{n+1}}$, tiene como grupo de isometrías al grupo $SO(1, n)$, cuya dimensión es $\frac{1}{2}n(n+1)$, que es el número de matrices de $(n+1) \times (n+1)$ en $SO(1, n)$ linealmente independientes.

3.2.1. La 'frontera' del espacio de de Sitter

El espacio de de Sitter dS_n tiene una 'frontera' de dimensión $n-1$ que podemos obtener cuando consideramos valores muy grandes para las coordenadas $\{x^\mu\}$, es decir, para puntos muy lejanos $x \in dS_n$ [1]. Para esto introduciremos coordenadas nulas definidas por

$$u = x^0 + x^1 \quad \text{y} \quad v = x^0 - x^1, \quad (3.50)$$

de forma que la definición del espacio (3.48) queda como

$$-uv + x^2 = \alpha^2 \quad \text{donde} \quad x^2 = \sum_{i=2}^n (x^i)^2. \quad (3.51)$$

Si redefinimos a las coordenadas como

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu R \quad u = \tilde{u}R \quad v = \tilde{v}R, \quad (3.52)$$

con $R \in \mathbb{R}$, de manera que la definición del espacio adopta la forma

$$-\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{x}^2 = \frac{\alpha^2}{R}. \quad (3.53)$$

Así cuando tomamos el límite $R \rightarrow \infty$ obtenemos la definición de la variedad que es la frontera del espacio de de Sitter

$$-\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{x}^2 = 0,$$

que es una clase de equivalencia ya que no cambia la definición usando cualquiera de los dos conjuntos de coordenadas $(u, v, x) \sim t(u, v, x)$, con $t \in \mathbb{R}$. De esta manera podemos expresar a la 'frontera' como

$$\tilde{u}\tilde{v} = \tilde{x}^2 = 1. \quad (3.54)$$

Si escogemos a \tilde{u} y \tilde{v} de forma conveniente como

$$\tilde{u} = x'_0 + ix'_1 \quad \text{y} \quad \tilde{v} = x'_0 - ix'_1, \quad (3.55)$$

de manera que

$$x'^2_0 + x'^2_1 = \tilde{x}^2 = 1, \quad (3.56)$$

obteniendo una 'frontera' con topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$. De otra forma podemos escoger el par de coordenadas $u = x_0 + x_1$ y $v = x_0 - x_1$ de manera que $x_0^2 - x_1^2 = \tilde{x}^2 = 1$ y obtener una topología distinta $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$. Si $v \neq 0$ para puntos en la frontera podemos cambiar la escala haciendo $v = 1$ de forma que la 'frontera' queda como $-u + x^2 = 0$ ó $u = x^2$. De esta manera $x = (x^2, \dots, x^n)$ pueden ser vistas como $n - 1$ coordenadas para la 'frontera'.

El grupo de isometrías del espacio de de Sitter dS_n es $SO(1, n)$ con dimensión $\frac{1}{2}n(n+1)$. Por otra parte, la 'frontera' de dS_n en la que estamos interesados está definida por (3.54) con topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$, por lo que su grupo de isimetría debe ser el grupo de Poincaré el cual tiene dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$ que resulta de la suma de $n - 1$ generadores de traslaciones y $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ generadores de 'rotaciones', es decir, el número de matrices de $(n-1) \times (n-1)$ linealmente independientes. Al actuar el grupo de isometrías $SO(1, n)$ sobre esta 'frontera' lo hace de manera especial. La diferencia en el número de generadores entre este grupo y el grupo de Poincaré para este espacio de dimensión $n - 1$ es n . Esto se ajusta al número de generadores para las transformaciones conformes que no son una isimetría del espacio, es decir, las dilaciones y las inversiones o transformaciones conformes especiales. A continuación demostraremos explícitamente que en realidad lo que sucede es que el grupo de isometrías $SO(1, n)$ de dS_n al actuar sobre la 'frontera' lo hace como el grupo conforme.

Una transformación $\Lambda \in SO(1, n)$ al actuar sobre el espacio de de Sitter deja invariante la norma, es decir, si (u', v', y) es el resultado de la acción de la transformación sobre dS_n

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \end{pmatrix},$$

entonces tenemos que $-uv + x^2 = -u'v' + y^2$. Cuando esta transformación actúa sobre la 'frontera' del espacio lo hace sobre (u, v, x) tal que $-uv + x^2 = 0$. La transformación $\Lambda \in SO(1, n)$ la podemos representar por medio de una matriz $\Lambda = \mathbf{1}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1}$, con \mathbf{W}_{n+1} una matriz infinitesimal dada por

$$W = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha^T \\ 0 & -a & -\beta^T \\ -\frac{1}{2}\beta & \frac{1}{2}\alpha & w_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

siendo w_{n-1} una matriz infinitesimal antisimétrica de $(n-1) \times (n-1)$ con componentes w_j^i ($i, j = 2, \dots, n$). Así tenemos que la acción de Λ sobre (u, v, x) nos da como resultado

$$(\mathbf{1}_{n+1} + W_{n+1}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)u + \alpha^2 x^2 + \dots + \alpha^n x^n \\ (-a+1)v - \beta^2 x^2 - \dots - \beta^n x^n \\ -\frac{1}{2}\beta^2 u + \frac{1}{2}\alpha^2 v + (w_2^2 + 1)x^2 + w_3^2 x^3 + \dots + w_n^2 x^n \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}\beta^n u + \frac{1}{2}\alpha^n v + w_2^n x^2 + w_3^n x^3 + \dots + (w_n^n + 1)x^n \end{pmatrix}$$

que podemos expresar de forma compacta como

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a)u + \langle \alpha, x \rangle \\ (1-a)v - \langle \beta, x \rangle \\ -\frac{1}{2}u\beta + \frac{1}{2}v\alpha + x + w_{n-1}x \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

con el escalar a , las componentes de los vectores β^i y α^i y las componentes de la matriz w_j^i , cantidades infinitesimales. De manera que a primer orden

$$u'v' = uv - u\langle \beta, x \rangle + v\langle \alpha, x \rangle,$$

y recordando que $w_j^i = -w_i^j$ tenemos

$$y^2 = x^2 - u\langle \beta, x \rangle + v\langle \alpha, x \rangle.$$

Así se preserva la norma

$$-u'v' + y^2 = -uv + x^2.$$

Como ya vimos escogiendo $v = 1$ tenemos un conjunto de coordenadas x para la frontera. Esto, en general, no se cumple para el resultado de la transformación (3.58), es decir, $v' \neq 1$, pero sí es equivalente a tener $(\frac{u'}{v'}, 1, \frac{y'}{v'})$. Así tenemos que para puntos en la frontera sus coordenadas se transforman como

$$\frac{y}{v'} \rightarrow y = \frac{-\frac{1}{2}u\beta + \frac{1}{2}v\alpha + x + w_{n-1}x}{(1-a)v - \langle \beta, x \rangle},$$

haciendo $v = 1$ y $u = x^2$ tenemos que

$$y = \frac{-\frac{1}{2}x^2\beta + \frac{1}{2}\alpha + x + w_{n-1}x}{1 - a - \langle \beta, x \rangle}, \quad (3.59)$$

desarrollando en serie $[1 - (a + \langle \beta, x \rangle)]^{-1}$ y tomando el resultado hasta términos de primer orden en las cantidades infinitesimales tenemos que la transformación para las coordenadas en la 'frontera' es

$$y = -\frac{1}{2}x^2\beta + \frac{1}{2}\alpha + w_{n-1}x + x(1 + a + \langle \beta, x \rangle). \quad (3.60)$$

De esta manera podemos analizar la transformación para los distintos casos:

Si solamente $\alpha \neq 0$ tenemos que la transformación es una traslación

$$y = x + \frac{1}{2}\alpha. \quad (3.61)$$

Si solamente $w_{n-1} \neq 0$ tenemos que la transformación es una 'rotación'

$$y = x + w_{n-1}x. \quad (3.62)$$

Si solamente $a \neq 0$ entonces tenemos una dilación

$$y = (1 + a)x. \quad (3.63)$$

Y finalmente si solamente $\beta \neq 0$ tenemos las inversiones o transformaciones conformes especiales

$$y = x(1 + \langle \beta, x \rangle) - \frac{1}{2}x^2\beta. \quad (3.64)$$

Para verificar que en efecto esto es una inversión tomamos la transformación de inversión (3.38) y observamos que

$$y^\mu = \frac{y^2}{x^2}x^\mu - y^2x_0^\mu. \quad (3.65)$$

A partir de la ecuación anterior vemos que

$$\begin{aligned} y^2 &= \delta_{\mu\nu}^* y^\mu y^\nu \\ &= y^4 \delta_{\mu\nu}^* \left[\left(\frac{1}{x^2} \right)^2 x^\mu x^\nu + x_0^\mu x_0^\nu - 2 \frac{1}{x^2} x^\mu x_0^\nu \right] \\ &= y^4 \left[\frac{x^2}{x^4} + x_0^2 - \frac{2(x, x_0)}{x^2} \right] \\ y^2 &= \frac{y^4}{x^2} [1 + x^2 x_0^2 - 2(x, x_0)], \end{aligned}$$

de manera que tenemos

$$y^2 = \frac{x^2}{1 - 2(x, x_0) + x^2 x_0^2}, \quad (3.66)$$

sustituyendo esto en la ecuación (3.65) obtenemos

$$y^\mu = \frac{x^\mu - x^2 x_0^\mu}{1 - 2\langle x, x_0 \rangle + x^2 x_0^2}, \quad (3.67)$$

que podemos escribir finalmente como

$$y = \frac{x - x^2 x_0}{1 - 2\langle x, x_0 \rangle + x^2 x_0^2}. \quad (3.68)$$

Desarrollando en serie el denominador $[1 - (2\langle x, x_0 \rangle - x^2 x_0^2)]^{-1}$ y eliminando los términos de orden mayor o igual a 2 en la cantidad infinitesimal x_0 tenemos

$$y = x(1 + 2\langle x, x_0 \rangle) - x^2 x_0. \quad (3.69)$$

Si ahora hacemos $x_0 = \frac{1}{2}\beta$ obtenemos

$$y = x(1 + \langle \beta, x \rangle) - \frac{1}{2}x^2 \beta, \quad (3.70)$$

que es la transformación (3.64), de manera que en efecto ésta es una inversión infinitesimal o transformación conforme especial infinitesimal.

De manera que hemos visto que el grupo de isometrías $SO(1, n)$ del espacio de de Sitter dS_n al actuar sobre la frontera lo hace como el grupo conforme, completando justamente el número de generadores que hacían falta, uno, a , que es para las dilataciones y $n - 1$ x_0^μ , con $\mu = 2, \dots, n$, para las inversiones, teniendo así los n generadores que hacían la diferencia.

3.2.2. El límite del horizonte

El espacio de de Sitter lo encontramos como solución a las ecuaciones de Einstein observando que el tensor de Riemann cumpla con la condición para los espacios de curvatura constante (2.16). Asimismo, vimos que la métrica tiene una singularidad en $r = \alpha = \left(\frac{3}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-2}, \quad (3.71)$$

donde $r^2 d\Omega_{n-2}$ es la métrica de una hipersfera S^{n-2} de dimensión $n - 2$. Esto en un espacio de dimensión $n = 4$ se convierte en la métrica (2.38). Esta singularidad aparente se debe al sistema de coordenadas en que está expresada la métrica $(t, r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2})$. Lo que queremos hacer es analizar la métrica en este límite al que llamamos 'el límite del horizonte'. Ya vimos en el capítulo anterior que el escalar de curvatura para el espacio de de Sitter en n dimensiones es (2.18)

$$R = \frac{2n}{n-2} \Lambda,$$

que con $\Lambda = \frac{3}{\alpha^2}$ lo expresamos como

$$R = \frac{6n}{(n-2)\alpha^2}, \quad (3.72)$$

y en cuatro dimensiones es $R = 12\alpha^{-2}$. Para calcular esta misma cantidad en el límite nos conviene renombrar la coordenada r de forma que podamos trasladar el valor de la singularidad de α a cero. Hay dos formas de acercarse a este límite, dependiendo de como se redefina la coordenada r . Primero hacemos

$$x = r - \alpha \quad \text{ó} \quad r = \alpha + x, \quad (3.73)$$

de esta manera trasladamos la singularidad a $x = 0$ y nos acercamos de forma tal que

$$\begin{aligned} \text{si } x \rightarrow 0^+ & \quad \text{entonces } r \rightarrow \alpha^+ \\ \text{si } x \rightarrow 0^- & \quad \text{entonces } r \rightarrow \alpha^-, \end{aligned}$$

donde los superíndices $+$ y $-$ indican que nos acercamos al punto límite por valores mayores y menores respectivamente. Sin incluir los términos $O(x^2)$ en las dos primeras componentes, la métrica en el límite cerca del horizonte es

$$ds^2 = \frac{2x}{\alpha} dt^2 - \frac{1}{\frac{2x}{\alpha}} dr^2 + (\alpha + x)^2 d\Omega_{n-2}. \quad (3.74)$$

Al tomar el límite de esta forma observamos que cambia la signatura de la métrica para las dos primeras componentes.

La otra forma de tomar el límite es

$$x = \alpha - r \quad \text{ó} \quad r = \alpha - x, \quad (3.75)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \text{si } x \rightarrow 0^+ & \quad \text{entonces } r \rightarrow \alpha^- \\ \text{si } x \rightarrow 0^- & \quad \text{entonces } r \rightarrow \alpha^+, \end{aligned}$$

obteniendo una métrica en el límite

$$ds^2 = -\frac{2x}{\alpha} dt^2 + \frac{1}{\frac{2x}{\alpha}} dr^2 + (\alpha - x)^2 d\Omega_{n-2}. \quad (3.76)$$

En este caso, cuando x tiende al límite con valores mayores que cero, la r se acerca al límite por valores menores que α y de esta forma la signatura de la métrica no cambia respecto a (3.71). En los dos casos las métricas para un espacio de dimensión $n = 4$ son

$$ds^2 = \frac{2x}{\alpha} dt^2 - \frac{1}{\frac{2x}{\alpha}} dr^2 + (\alpha + x)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.77)$$

$$ds^2 = -\frac{2x}{\alpha} dt^2 + \frac{1}{\frac{2x}{\alpha}} dr^2 + (\alpha - x)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.78)$$

Si calculamos el escalar de curvatura para la métrica (3.78) obtenemos

$$R = \frac{2(5\alpha - 6x)}{(\alpha - x)^2 \alpha}, \quad (3.79)$$

así, cuando $x \rightarrow 0$ obtenemos que la curvatura es constante

$$R = 10\alpha^{-2}, \quad (3.80)$$

pero distinta a la calculada para el espacio sin considerar el límite.

Cuando tenemos una transformación conforme $\hat{g} = \Omega^2 g$ cuyo factor es una función constante $\Omega^2(x) = \Omega^2$ se puede ver fácilmente qué sucede con las componentes de los tensores de Riemann y Ricci y con el escalar de curvatura. Las componentes de la métrica son

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \hat{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu},$$

de manera que las componentes de la conexión son

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\sigma} (\hat{g}_{\sigma\beta,\gamma} + \hat{g}_{\sigma\gamma,\beta} - \hat{g}_{\beta\gamma,\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{\alpha\sigma} [(\Omega^2 g_{\sigma\beta})_{,\gamma} + (\Omega^2 g_{\sigma\gamma})_{,\beta} - (\Omega^2 g_{\beta\gamma})_{,\sigma}] \\ \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Omega^{-1} (\delta^{\alpha}_{\beta} \Omega_{,\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma} \Omega_{,\beta} - g^{\alpha\sigma} g_{\beta\gamma,\sigma}). \end{aligned}$$

Debido a que Ω es constante todas las derivadas de ella son cero $\Omega_{,\rho} = 0$, y las componentes de la conexión no cambian bajo la transformación conforme

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

De la misma forma las componentes del tensor de Riemann tampoco se modifican

$$\hat{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = R^{\alpha}_{\mu\beta\nu},$$

pero al contraer los índices para encontrar el escalar de curvatura sí está involucrado el factor conforme

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\sigma\mu\beta\nu} &= \hat{g}_{\sigma\alpha} \hat{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} \\ &= \Omega^2 g_{\sigma\alpha} R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} \\ \hat{R}_{\sigma\mu\beta\nu} &= \Omega^2 R_{\sigma\mu\beta\nu}, \end{aligned}$$

y al contraer el primer índice con el tercero vemos que el tensor de Ricci es invariante

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu} &= \hat{g}^{\sigma\beta} \hat{R}_{\sigma\mu\beta\nu} \\ &= \Omega^{-2} g^{\sigma\beta} \Omega^2 R_{\sigma\mu\beta\nu} \\ \hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Así podemos darnos cuenta que el escalar de curvatura no queda invariante, de forma que lo podemos expresar como

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \hat{g}^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu} \\ &= \Omega^{-2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ \hat{R} &= \Omega^{-2} R.\end{aligned}$$

Esto se cumple en general para un espacio de n dimensiones. De esta forma vemos que el escalar de curvatura que calculamos para el espacio de cuatro dimensiones en el 'límite del horizonte' es igual al escalar de curvatura $R = 12\alpha^{-2}$, excepto por un factor conforme, esto es

$$10\alpha^{-2} = \Omega^{-2} 12\alpha^{-2}, \quad (3.81)$$

así tenemos que

$$\Omega^{-2} = \frac{5}{6} \quad \text{ó} \quad \Omega^2 = \frac{6}{5}. \quad (3.82)$$

Esto nos permite observar que la métrica en el límite cerca del horizonte es conforme a la métrica del espacio de de Sitter, siendo el factor conforme el obtenido en la ecuación anterior, de esta manera escribimos la relación como

$$\hat{g} = \left(\frac{6}{5}\right)g. \quad (3.83)$$

Con este resultado podemos calcular el escalar de curvatura para el espacio de de Sitter de dimensión n en el límite cerca del horizonte a partir del resultado que tenemos para el espacio en general (3.72)

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \Omega^{-2} R \\ &= \Omega^{-2} \frac{6n}{(n-2)\alpha^2} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right) \frac{6n}{(n-2)\alpha^2} \\ \hat{R} &= \frac{5n}{(n-2)\alpha^2}.\end{aligned}$$

De esto podemos inferir que el espacio de de Sitter en el límite cerca del horizonte, además de seguir siendo de curvatura constante, tiene la misma estructura que el espacio en sí, con un factor conforme constante.

El espacio en el límite cerca del horizonte resulta del proceso de hacer tender una de las coordenadas a un valor constante, precisamente aquél donde se presenta la singularidad en la métrica. El espacio de de Sitter dS_n tiene n coordenadas $(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$, o trasladando el valor del límite a cero tenemos $(t, x, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$, en cualquiera de los dos casos la coordenada r ó x tiende al valor límite, de manera que para este espacio tenemos $n - 1$ coordenadas $(t, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$. Por lo tanto podemos aplicar al espacio definido por el 'límite del horizonte' los mismos resultados que obtuvimos para el análisis de la 'frontera' vista como puntos lejanos del espacio de de Sitter. En particular, el grupo de isometría $SO(1, n)$ actúa sobre la 'frontera del límite del horizonte' como el grupo conforme.

3.3. Invariancia de la métrica y el grupo conforme para el espacio de anti de Sitter

Al igual que en el caso de de Sitter, para estudiar las isometrías del espacio de anti de Sitter AdS lo podemos definir como una subvariedad encajada en un espacio pseudo-Euclidiano de una dimensión mayor. En este caso la métrica del espacio de encaje tiene dos 'tiempos', que en n dimensiones expresamos como $\eta_{AdS_{n+1}} = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$, obteniendo el caso que estudiamos en el capítulo anterior cuando $n = 4$. De esta forma, si $\{x^\mu\}$ con $\mu = 0, 1, \dots, n$ son coordenadas Euclidianas en el espacio de encaje de $n + 1$ dimensiones tenemos que la distancia al cuadrado es

$$\bar{x}^2 = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + \sum_{i=2}^n (x^i)^2, \quad (3.84)$$

de manera que la definición del espacio de anti de Sitter, como una hipersuperficie de dimensión n encajada en este espacio de dimensión mayor, es el conjunto de puntos tales que

$$\bar{x}^2 = -\alpha^2. \quad (3.85)$$

Este espacio de encaje para el espacio de anti de Sitter, AdS_{n+1} , tiene como grupo de isometrías, que dejan fijo el origen y además preservan la dirección de los tiempos, a $SO(2, n - 1)$. Si tenemos tres puntos en la hipersuperficie que representa a AdS_n , x_0^μ , $x_0^\mu + X^\mu$ y $x_0^\mu + Y^\mu \in AdS_n$, y bajo una transformación $\Lambda \in SO(2, n - 1)$ se convierten en x_0^μ , $x_0^\mu + X'^\mu$ y $x_0^\mu + Y'^\mu \in AdS_n$ respectivamente, entonces los dos vectores X y Y en este espacio cumplen con lo siguiente

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{X}', \mathbf{Y}') &= \eta_{\alpha\beta} X'^{\alpha} Y'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} X^{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} Y^{\nu} \\
 &= \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \eta_{\alpha\beta} X^{\mu} Y^{\nu} \\
 &= \eta_{\mu\nu} X^{\mu} Y^{\nu} \\
 &= (\mathbf{X}, \mathbf{Y}).
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

La métrica g_{AdS_n} inducida por el encaje en el espacio de anti de Sitter, AdS_n , a partir de la métrica del espacio AdS_{n+1} (espacio de encaje), con métrica $\eta_{AdS_{n+1}} = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$, tiene como grupo de isometrías al grupo $SO(2, n-1)$. Este grupo tiene dimensión $\frac{1}{2}n(n+1)$.

3.3.1. La 'frontera' del espacio de anti de Sitter

La 'frontera' para este caso es un espacio de dimensión $n-1$ que corresponde a puntos lejanos $x \in AdS_n$. Introducimos coordenadas nulas

$$u = x^0 + x^2 \quad \text{y} \quad v = x^0 - x^2, \tag{3.87}$$

así podemos escribir la definición del espacio AdS_n (3.85) como

$$-uv + x^2 = -\alpha^2 \quad \text{donde} \quad x^2 = -(x^1)^2 + \sum_{i=3}^n (x^i)^2. \tag{3.88}$$

De forma análoga al caso de de Sitter podemos escribir la definición del espacio AdS_n en términos de las coordenadas $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x})$ dadas por (3.52), quedando AdS_n como

$$-\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{x}^2 = -\frac{\alpha^2}{R}, \tag{3.89}$$

con $R \in \mathbb{R}$, de forma que cuando $R \rightarrow \infty$ tenemos la definición de la 'frontera' para el espacio de anti de Sitter

$$-\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{x}^2 = 0,$$

que al igual que en el caso de de Sitter, es una clase de equivalencia de forma que podemos describir a la 'frontera' como

$$\tilde{u}\tilde{v} = \tilde{x}^2 = 1. \tag{3.90}$$

De la misma forma se puede proceder para analizar esta 'frontera' y nuevamente veríamos que el grupo de isometrías $SO(2, n-1)$ actúa como el grupo conforme sobre ella. A esta 'frontera' del espacio de anti de Sitter se le conoce como el 'límite cerca del horizonte'.

En este capítulo estudiamos las isometrías de los espacios de curvatura constante y definimos el concepto de 'frontera' como un espacio con una dimensión

menor. Para de Sitter vimos que se pueden definir dos tipos de 'fronteras': La primera corresponde a puntos espaciales 'cerca' del infinito; la segunda es el 'límite del horizonte' y corresponde a la hipersuperficie donde la métrica tiene una singularidad debido a las coordenadas utilizadas. Para el caso de anti de Sitter encontramos una sola 'frontera' cerca del infinito.

Para cada una de estas 'fronteras' demostramos que el grupo de isometrías correspondiente actúa sobre ellas como el grupo conforme. Este resultado particular ha sido de gran importancia en el contexto de teorías de cuerdas hasta llegar a la formulación de la conjetura AdS/CFT, según la cual la 'física' en el espacio-tiempo puede ser analizada mediante la 'física' en la 'frontera' que tiene como simetría intrínseca al grupo conforme.

Conclusiones

Hemos hecho a lo largo de este trabajo un estudio de los espacios de curvatura constante, en particular nos enfocamos al estudio de dos de ellos. Estos espacios que resultan como solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con término cosmológico, tienen como característica principal que son de curvatura constante, los llamamos los espacios de de Sitter. Estudiamos en el marco de la relatividad general estos espacios y sus características físicas, es decir, cómo son sus geodésicas y cómo son las relaciones de causalidad. Primero estudiamos en general a los espacios con curvatura constante y encontramos una condición para el tensor de Riemann que nos permite identificar a estos espacios. Con esto y la restricción de que la métrica sea estática y con simetría esférica obtuvimos la solución para estos espacios. Después distinguimos a estos dos espacios, uno el que es solución a las ecuaciones con constante cosmológica mayor que cero, que debido a nuestra convención en la densidad lagrangiana llamamos el espacio de de Sitter dS con escalar de curvatura mayor que cero, y el espacio de anti de Sitter AdS que corresponde al caso con constante cosmológica menor que cero y por lo tanto, con escalar de curvatura menor que cero. Para los dos casos encontramos distintas maneras de expresar la métrica y escogimos un espacio de encaje de una dimensión mayor donde los espacios se pudieran observar como hipersuperficies encajadas en dicho espacio de encaje. Observamos que para el que llamamos el espacio dS existe una singularidad en la métrica en su forma estática debido al sistema de coordenadas que elegimos, además de la existencia también de un horizonte de eventos y un horizonte de partículas, mientras que para el caso de AdS no se presenta esa singularidad en la métrica estática y además como una característica importante existe la posibilidad de tener geodésicas tipo tiempo que sean cerradas.

Después analizamos las características geométricas de los espacios de de Sitter. Para esto estudiamos primero las isometrías y las transformaciones conformes de los espacios Riemannianos. Encontramos que el grupo de isometrías para el espacio de de Sitter es el grupo $SO(1, n)$. A continuación definimos un espacio que resulta de tomar el límite para puntos muy lejanos de dS_n , y obtuvimos un espacio de una dimensión menor $n - 1$ de manera que le llamamos 'frontera'. Esto no lo definimos topológicamente, de ahí que siempre lo pusimos entre comillas para hacer notar esta cuestión. A esta frontera es lo

que se llama el 'límite cerca del horizonte' [8]. Analizamos la acción del grupo de isometrías $SO(1, n)$ sobre esta 'frontera' y encontramos que actúa como el grupo conforme. Para el espacio de de Sitter, dS , estudiamos lo que llamamos el límite del horizonte, es decir, la región cerca donde la coordenada r tiene la singularidad. Calculamos el escalador de curvatura para este límite y resultó ser de curvatura constante pero distinta, por un factor conforme constante, a la del espacio dS , esto es, $g' = \Omega^2 g$ con $\Omega^2 = \text{cte}$. El espacio de de Sitter dS_n en este límite es un espacio de dimensión $n - 1$ debido a que la coordenada donde se presenta la singularidad la hacemos tender a un valor constante. De esta manera pudimos identificar a este espacio como una 'frontera' y ver que ahí el grupo de isometrías actúa también como el grupo conforme.

Este análisis de las simetrías del espacio de de Sitter y de su simetría conforme, tanto en la 'frontera' como en el 'límite del horizonte', hecho en el presente trabajo es un estudio sobre las características geométricas de este espacio, que servirá como introducción para abordar en un futuro algo que ha tenido vigencia en el contexto de la física contemporánea, el llamado principio holográfico. De una manera conceptual, éste establece que si tenemos un espacio B , sobre el cual, en principio, no se especifica nada acerca de su topología y geometría, y existe un sistema físico en él descrito por uno o varios campos, entonces se pueden relacionar resultados que se obtengan sobre este sistema en el espacio, con resultados que se obtienen sobre la frontera de este espacio. Por ejemplo se puede relacionar el número total de estados de un sistema descrito por campos en un espacio B con el área de la frontera de este espacio ∂B mediante la entropía máxima del sistema. En [9] se puede encontrar una introducción sobre éste tema, además de una referencia sobre los orígenes de estos conceptos. En el caso de campos cuánticos en B , el que más se ha estudiado es el caso de la teoría de cuerdas en el espacio $AdS_5 \times S_5$ que es completamente equivalente a la teoría de Super Yang-Mills en la frontera del espacio de anti de Sitter $\partial B = \partial AdS$. De ahí la importancia de hacer este estudio introductorio sobre las características geométricas de los espacios de de Sitter, dada la relevancia de entender bien lo que significa que la 'frontera' del espacio de de Sitter tenga una simetría conforme (local) cuando actúa sobre ella el grupo de isometrías de este espacio.

Las teorías de campo conforme son de gran relevancia para la física moderna, éstas son básicamente teorías cuánticas de campo Euclidianas que están caracterizadas debido a que su grupo de simetrías incluye tanto a las transformaciones de simetría Euclidianas como a las transformaciones conformes locales. En dos dimensiones esto adquiere una gran importancia, debido a que una teoría de campo conforme de dicha dimensión tiene un número infinito de simetrías conformes, es decir, tiene un álgebra de Lie para el grupo conforme de dimensión infinita, lo que se traduce en una teoría que tiene un número igual de cantidades conservadas, lo que la hace una teoría completamente soluble por consideraciones de simetría [10]. Así este trabajo cumple con ser el primer paso para nuestro entendimiento, en un futuro, de las consecuencias que pueda tener sobre las distintas teorías de campo el que exista esta relación entre las simetrías de un espacio y las simetrías conformes en la frontera.

Apéndice A

El elemento de volumen

En una variedad de dimensión n podemos escoger una n -forma y expresarla en términos de una base $\{e^\mu\}$ como

$$v = n! e^1 \wedge \cdots \wedge e^n.$$

Si $\{e^\mu\}$ es una base y $\{e'^\mu\}$ es otra de forma que $e'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu e^\nu$, la n -forma en esta otra base es

$$v' = n! (\Lambda^1{}'_1 e^1 + \Lambda^1{}'_2 e^2 + \cdots + \Lambda^1{}'_n e^n) \wedge \cdots \wedge (\Lambda^n{}'_1 e^1 + \Lambda^n{}'_2 e^2 + \cdots + \Lambda^n{}'_n e^n),$$

que se puede expresar como

$$v' = n! \epsilon^{i \cdots j} \Lambda^i{}'_1 \cdots \Lambda^j{}'_n e^1 \wedge \cdots \wedge e^n,$$

donde

$$\epsilon^{i \cdots j} = \begin{cases} +1 & \text{si } i \cdots j \text{ es una permutación par} \\ -1 & \text{si } i \cdots j \text{ es una permutación impar} \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

así expresamos que para cualquier n -forma ω tenemos que $\omega \wedge \omega = 0$. Finalmente obtenemos

$$v' = n! \det(\Lambda^\mu{}'_\mu) e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \det(\Lambda^\mu{}'_\mu) v.$$

Si tenemos una métrica definida en la variedad podemos obtener la forma $\eta = |g|^{1/2} v$ con componentes

$$\eta_{\mu \cdots \nu} = n! |g|^{1/2} \delta_{\mu \cdots \nu}^n,$$

donde g es el determinante de la matriz de componentes de la métrica $\det(g_{\mu\nu})$. Esto nos permite, dada una orientación en la variedad, definir una única n -forma η en la variedad llamada la n -forma canónica $\eta = \eta'$

$$\eta' = |g'|^{\frac{1}{2}} v'.$$

La transformación del determinante de g' cancelará el determinante correspondiente a v'

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} g_{\mu\nu},$$

que en términos de matrices

$$g' = \Lambda^T g \Lambda,$$

y por las propiedades de los determinantes tenemos

$$\det(g') = \det(g)[\det(\Lambda)]^2 \quad \text{o de otra forma} \quad g' = g[\det(\Lambda^{\mu'}_{\mu})]^2.$$

Así todas las n -formas resultan idénticas bajo la transformación ya que $\det(\Lambda^{\mu'}_{\mu}) = [\det(\Lambda^{\mu'}_{\mu})]^{-1}$

$$\eta' = |g'|^{\frac{1}{2}} v' = |g|^{\frac{1}{2}} \det(\Lambda^{\mu'}_{\mu}) \det(\Lambda^{\mu}_{\mu'}) v = |g|^{\frac{1}{2}} v = \eta.$$

Esta n -forma canónica la podemos ver como la medida de volumen en una subvariedad \mathcal{U} de dimensión n , de forma que $dv = \frac{1}{n!} \eta$, y el volumen de la subvariedad es $\frac{1}{n!} \int_{\mathcal{U}} \eta$.

Cuando variamos respecto a un parámetro u la métrica $g_{\mu\nu}$, el elemento de volumen también cambia ya que depende de la métrica. Así tenemos que

$$\Delta dv = \frac{\partial(dv)}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u} = \frac{\partial(dv)}{\partial g_{\mu\nu}} \Delta g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

recordando que el elemento de volumen lo puedo escribir como $dv = \frac{1}{4!} \eta$, donde η tiene componentes $\eta_{\alpha\beta\sigma\gamma} = (-g)^{\frac{1}{2}} 4! \delta^1_{\alpha} \delta^2_{\beta} \delta^3_{\sigma} \delta^4_{\gamma}$; el signo menos es debido a que $g_{\mu\nu}$ es una métrica de Lorentz así que $(-g)^{\frac{1}{2}} = |g|^{\frac{1}{2}}$. De esta forma tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta\sigma\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2} (-g)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} 4! \delta^1_{\alpha} \delta^2_{\beta} \delta^3_{\sigma} \delta^4_{\gamma} \\ &= -\frac{1}{2} (-g)^{-\frac{1}{2}} g g^{\mu\nu} 4! \delta^1_{\alpha} \delta^2_{\beta} \delta^3_{\sigma} \delta^4_{\gamma} \\ &= \frac{1}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} 4! \delta^1_{\alpha} \delta^2_{\beta} \delta^3_{\sigma} \delta^4_{\gamma} g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\sigma\gamma} g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}$. Por lo tanto, utilizando el resultado anterior, para el elemento de volumen dv tenemos

$$\frac{\partial(dv)}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{4!} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} dv. \quad (\text{A.2})$$

Es fácil de comprobar que $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}$ si utilizamos la definición del determinante de la métrica $g = \det(g_{\sigma\gamma}) = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijkl} g_{\mu i} g_{\nu j} g_{\alpha k} g_{\beta l}$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial g_{\sigma\gamma}} &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijkl} \left[\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial g_{\sigma\gamma}} g_{\nu j} g_{\alpha k} g_{\beta l} + g_{\mu i} \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial g_{\sigma\gamma}} g_{\alpha k} g_{\beta l} \right. \\ &\quad \left. + g_{\mu i} g_{\nu j} \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial g_{\sigma\gamma}} g_{\beta l} + g_{\mu i} g_{\nu j} g_{\alpha k} \frac{\partial g_{\beta l}}{\partial g_{\sigma\gamma}} \right] \\ &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijkl} \left[\delta^{\mu}_{\sigma} \delta^i_{\gamma} g_{\nu j} g_{\alpha k} g_{\beta l} + g_{\mu i} \delta^{\nu}_{\sigma} \delta^j_{\gamma} g_{\alpha k} g_{\beta l} \right. \\ &\quad \left. + g_{\mu i} g_{\nu j} \delta^{\alpha}_{\sigma} \delta^k_{\gamma} g_{\beta l} + g_{\mu i} g_{\nu j} g_{\alpha k} \delta^{\beta}_{\sigma} \delta^l_{\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Utilizando que $g_{\sigma\gamma} g^{\sigma\gamma} = 4$ ó $\frac{1}{4} g_{\sigma\gamma} g^{\sigma\gamma} = 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial g_{\sigma\gamma}} &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} \epsilon^{\gamma jkl} g_{\nu j} g_{\alpha k} g_{\beta l} \left(\frac{1}{4} g_{\sigma\gamma} g^{\sigma\gamma} \right) + \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} \epsilon^{i\gamma kl} g_{\mu i} g_{\alpha k} g_{\beta l} \left(\frac{1}{4} g_{\sigma\gamma} g^{\sigma\gamma} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\sigma\beta} \epsilon^{i\gamma j l} g_{\mu i} g_{\nu j} g_{\beta l} \left(\frac{1}{4} g_{\sigma\gamma} g^{\sigma\gamma} \right) + \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma} \epsilon^{i j k \gamma} g_{\mu i} g_{\nu j} g_{\alpha k} \left(\frac{1}{4} g_{\sigma\gamma} g^{\sigma\gamma} \right) \\ &= \frac{1}{4} g^{\sigma\gamma} [4 \det(g_{\mu\nu})], \end{aligned}$$

de forma que obtenemos el resultado que utilizamos antes

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\sigma\gamma}} = g g^{\sigma\gamma}.$$

Finalmente podemos escribir la variación del elemento de volumen respecto al parámetro u que obtenemos a partir de las ecuaciones (A.1) y (A.2)

$$\Delta dv = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Delta g_{\mu\nu} dv. \quad (\text{A.3})$$

Apéndice B

Solución a las ecuaciones de Einstein para espacios de curvatura constante

Buscamos una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) con término cosmológico Λ

$$G_{\mu\nu} = -\varepsilon|\Lambda|g_{\mu\nu} \quad \text{donde} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (\text{B.1})$$

$G_{\mu\nu}$ es llamado el tensor de Einstein. Con $\varepsilon = \pm 1$ incluimos los dos casos que existen para el signo de Λ . Se propone una métrica que tenga simetría esférica y que sea estática

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{B.2})$$

de forma que tenemos que las componentes de la métrica son

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Calculando las componentes del tensor de Einstein observamos que solamente existen cuatro distintas de cero

$$G_{tt} = \frac{[(h-1)h + h_{,r}r]f}{h^2r^2} \quad (\text{B.4})$$

$$G_{rr} = -\frac{(h-1)f - f_{,r}r}{fr^2} \quad (\text{B.5})$$

$$G_{\theta\theta} = -\frac{[f_{,r}^2hr + 2h_{,r}f^2 + (h_{,rr} - 2h)f_{,r}f - 2f_{,rr}fhr]r}{4f^2h^2} \quad (\text{B.6})$$

$$G_{\phi\phi} = -\frac{[f_{,r}^2 h r + 2h_{,r} f^2 + (h_{,r} r - 2h) f_{,r} f - 2f_{,rr} f h r] r \operatorname{sen}^2 \theta}{4f^2 h^2} \quad (\text{B.7})$$

Con estas expresiones podemos escribir las ecuaciones (B.1), reconociendo que de las componentes (θ, θ) y (ϕ, ϕ) obtenemos una misma ecuación

$$\frac{(h-1)h + h_{,r} r}{h^2 r^2} = \varepsilon |\Lambda| \quad (t, t) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{(h-1)f - f_{,r} r}{f h r^2} = \varepsilon |\Lambda| \quad (r, r) \quad (\text{B.9})$$

$$f_{,r}^2 h r + 2h_{,r} f^2 + (h_{,r} r - 2h) f_{,r} f - 2f_{,rr} f h r = 4\varepsilon |\Lambda| f^2 h^2 r \quad (\theta, \theta). \quad (\text{B.10})$$

Si a la ecuación (B.8) le restamos la (B.9) obtenemos

$$\frac{h_{,r}}{h^2 r} + \frac{f_{,r}}{h f r} = 0, \quad (\text{B.11})$$

reduciendo la expresión tenemos ($h \neq 0$)

$$-\frac{h_{,r}}{h} = \frac{f_{,r}}{f}, \quad (\text{B.12})$$

que podemos escribir como

$$d \ln \frac{1}{h} = d \ln f, \quad (\text{B.13})$$

así llegamos a una relación entre f y h

$$f = \frac{1}{h} \quad (\text{B.14})$$

La solución más general sería con una constante multiplicativa, pero ésta siempre puede ser absorbida redefiniendo las coordenadas en (B.2). Al sustituir (B.14) en la ecuación (B.10) ésta se reduce a

$$f_{,rr} + \frac{2f_{,r}}{r} = -2\varepsilon |\Lambda|, \quad (\text{B.15})$$

cuya solución general es

$$f(r) = -\frac{\varepsilon|\Lambda|}{3}r^2 - \frac{C_2}{r} + C_1, \quad (\text{B.16})$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Estas constantes las encontramos utilizando la condición para espacios de curvatura constante (2.16), con el escalar de curvatura dado por (2.22) $R = 4\varepsilon|\Lambda|$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\varepsilon|\Lambda|}{3}(g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}). \quad (\text{B.17})$$

De esta manera, al calcular las componentes del tensor de Riemann utilizando la métrica (B.3) obtenemos doce componentes distintas de cero, de las cuales diez nos dan condiciones solamente sobre C_2 y dos de ellas nos determinan ambas constantes. Así, analizando una de estas dos últimas componentes, obtendremos el valor de las constantes de integración.

$$R^{\phi}_{\theta\theta\phi} = -\frac{h-1}{h},$$

bajando el índice

$$R_{\phi\theta\theta\phi} = g_{\phi\phi}R^{\phi}_{\theta\theta\phi} = r^2 \sin^2\theta \left(-1 + \frac{1}{h}\right),$$

utilizando (B.14) en lo anterior

$$R_{\phi\theta\theta\phi} = r^2 \sin^2\theta (-1 + f),$$

sustituyendo la solución para $f(r)$ (B.16) tenemos

$$R_{\phi\theta\theta\phi} = r^2 \sin^2\theta \left(-1 - \frac{\varepsilon|\Lambda|}{3}r^2 - \frac{C_2}{r} + C_1\right). \quad (\text{B.18})$$

Si calculamos esta componente del tensor de Riemann con la ayuda de (B.17) obtenemos el resultado debido a la condición de que es un espacio con curvatura constante

$$\begin{aligned} R_{\phi\theta\theta\phi} &= -\frac{\varepsilon|\Lambda|}{3}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi} \\ &= -\frac{\varepsilon|\Lambda|}{3}r^4 \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Igualando los resultados de (B.18) y de (B.19) eliminando $r^2 \sin^2\theta$ de ambos lados

$$-\frac{\varepsilon|\Lambda|}{3}r^2 = -1 - \frac{\varepsilon|\Lambda|}{3}r^2 - \frac{C_2}{r} + C_1,$$

de donde fácilmente observamos que

$$C_1 = 1 \quad \text{y} \quad C_2 = 0.$$

Así la solución $f(r)$ para espacios con curvatura constante es

$$f(r) = 1 - \frac{\epsilon|\Lambda|}{3}r^2, \quad (\text{B.20})$$

que nos lleva a la métrica para los espacios de de Sitter

$$ds^2 = - \left(1 - \epsilon \frac{|\Lambda|}{3} r^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \epsilon \frac{|\Lambda|}{3} r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

es decir, la métrica de los espacios con curvatura constante.

Apéndice C

El espacio de Minkowski

El espacio de Minkowski

La métrica para el espacio plano de Minkowski η está dada por

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

que en coordenadas polares esféricas es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (C.1)$$

Mediante el cambio de coordenadas a las llamadas coordenadas nulas $t+r = v$ y $t-r = w$ [3] la métrica queda como

$$ds^2 = -dvdw + \frac{1}{4}(v-w)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (C.2)$$

así a partir de estas coordenadas nulas podemos definir nuevas coordenadas [3], las cuales para valores infinitos de v y w tienen valores finitos, $\tan p = v$ y $\tan q = w$ con $-\frac{1}{2}\pi < p < \frac{1}{2}\pi$ y $-\frac{1}{2}\pi < q < \frac{1}{2}\pi$ ($p \geq q$) de manera que la métrica queda como

$$ds^2 = \sec^2 p \sec^2 q (-dpdq + \frac{1}{4} \sin^2(p-q)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (C.3)$$

siendo esta métrica conforme a la dada por

$$d\bar{s}^2 = -4dpdq + \sin^2(p-q)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (C.4)$$

Definiendo

$$t' = p + q \quad y \quad r' = p - q,$$

obtenemos que para la región

$$-\pi < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < \pi \quad y \quad r' \geq 0, \quad (C.5)$$

la métrica (C.3) queda expresada como

$$d\bar{s}^2 = -(dt')^2 + (dr')^2 + \text{sen}^2 r' (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{C.6})$$

la cual es localmente idéntica a la métrica del universo estático de Einstein

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{C.7})$$

que es la métrica de un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico. La región del espacio tiempo (C.5) cubre el espacio de Minkowski con métrica conforme a (C.6)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \text{sec}^2[\frac{1}{2}(t' + r')] \text{sec}^2[\frac{1}{2}(t' - r')] d\bar{s}^2,$$

donde las coordenadas t y r de la métrica de Minkowski en coordenadas polares esféricas están dadas en términos de las coordenadas t' y r' de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 2t &= \tan \frac{1}{2}(t' + r') + \tan \frac{1}{2}(t' - r') \\ 2r &= \tan \frac{1}{2}(t' + r') - \tan \frac{1}{2}(t' - r'). \end{aligned}$$

La métrica del espacio estático de Einstein se puede representar como el cilindro $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ encajado en el espacio de plano de cinco dimensiones con métrica

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (\text{C.8})$$

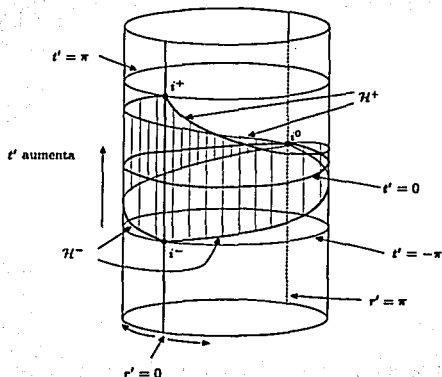


Figura C.1: La región sombreada representa la región conforme al espacio-tiempo de Minkowski sobre el cilindro del universo estático de Einstein

De esta forma el espacio de Minkowski queda representado por la región (C.5) en el cilindro del universo estático de Einstein (figura C.1)

Esta métrica conforme al espacio de Minkowski se introduce para estudiar los infinitos de este espacio de forma que puedan ser representados por diagramas como el de arriba. Así la frontera de la región sombreada y los puntos corresponden a lo siguiente: i^+ es $t' = \pi$, $r' = 0$ siendo $p = \frac{1}{2}\pi$ y $q = \frac{1}{2}\pi$, i^- es $t' = -\pi$, $r' = 0$ que se debe a $p = -\frac{1}{2}\pi$ y $q = -\frac{1}{2}\pi$ y finalmente i^0 es $t' = 0$, $r' = \pi$ que corresponde a $p = \frac{1}{2}\pi$ y $q = -\frac{1}{2}\pi$. En lo que respecta a las hipersuperficies, la que nombramos \mathcal{H}^+ es una hipersuperficie nula con $t' + r' = 2p = \pi$, es decir, que corresponde a $p = \frac{1}{2}\pi$, de esta forma al acercarnos a i^+ por medio de una geodésica temporal lo hacemos a medida que las coordenadas nulas (C.2, C.3) toman valores que divergen a $v \rightarrow \infty$, tan $p = v$, y de la misma forma para \mathcal{H}^- tenemos $t' - r' = 2q = -\pi$ con $q = -\frac{1}{2}\pi$ y a medida que nos acercamos a i^- tan $q = w$ toma valores menores que cero que divergen $w \rightarrow -\infty$. Entonces podemos ver a i^+ y a i^- como los puntos que representan el futuro y el pasado temporal infinito, es decir las geodésicas temporales se originan en i^- y terminan en i^+ . Las geodésicas tipo espacio se originan en i^0 y terminan ahí mismo y las geodésicas nulas se originan en la hipersuperficie \mathcal{H}^- y terminan en \mathcal{H}^+ , representando el pasado y futuro nulo infinito.

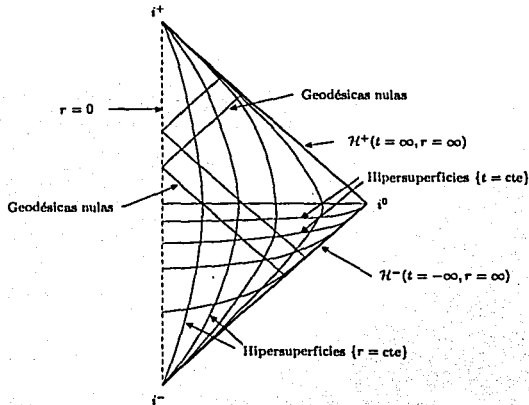


Figura C.2: Diagrama de Penrose para el espacio-tiempo de Minkowski. Las líneas punteadas representan la singularidad de las coordenadas polares en $r = 0$

Otra forma de estudiar los infinitos de los espacios es mediante los llamados diagramas de *Penrose*. Éstos son un diagrama de las coordenadas (t, r) . En estos diagramas representamos con una línea punteada los valores para los cuales la métrica tiene singularidades, las geodésicas nulas están indicadas con las líneas

rectas de pendiente ± 1 y donde se intersectan las líneas $\{t = \text{cte}\}$ y $\{r = \text{cte}\}$ tenemos dos-esferas.

Bibliografía

- [1] J. L. Petersen. Introduction to Maldacena Conjecture on AdS/CFT. *Int. J. Mod. Phys.*, 1999.
- [2] A. Strominger. The dS/CFT Correspondence. *J. High Energy Phys*, 2001.
- [3] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1991.
- [4] Bernard F. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1988.
- [5] Hans Stephani. *General Relativity: An introduction to the theory of the gravitational field*. Cambridge University Press, 1990.
- [6] W. Rindler. *Essential Relativity*. Springer-Verlag, 1977.
- [7] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications, Part I*. Springer-Verlag, 1992.
- [8] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz. Large N Field Theories, String Theory and Gravity. *Phys. Rept.*, 2000.
- [9] L. Patiño, J. Cortez, and H. Quevedo. The Field-to-Particle transition problem. *Proceedings of the First Mexican School on Experimental and Theoretical Physics, Klumer Publishers*, 2002.
- [10] M. R. Gaberdiel. An introduction to Conformal Field Theory. *Rep. Prog. Phys.*, 1999.