

01121
6



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**DESARROLLO DE UNA PROPUESTA DE APUNTES PARA
LA MATERIA "TEORÍA GENERAL DE LAS
ESTRUCTURAS" DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL EN LA FACULTAD DE
INGENIERÍA DE LA UNAM Y ELABORACIÓN DE
SOFTWARE EN CALCULADORAS HP-49G COMO
MATERIAL DIDÁCTICO DE APOYO.**

**T E S I S:
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A:

ANGEL GERARDO ALVAREZ TORRES



**DIRECTOR DE TESIS: M.I. MIGUEL ANGEL
RODRÍGUEZ VEGA**

CD. UNIVERSITARIA, MÉXICO

JUNIO 2003

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE GUATEMALA
AV. BOULEVARD
MAYAGÜEZ

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
FING/DCTG/SEAC/UTIT/121/01

Señor
ANGEL GERARDO ALVAREZ TORRES
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. MIGUEL ANGEL RODRÍGUEZ VEGA**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"DESARROLLO DE UNA PROPUESTA DE APUNTES PARA LA MATERIA "TEORÍA GENERAL DE LAS ESTRUCTURAS" DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LA CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNAM Y ELABORACIÓN DE SOFTWARE EN CALCULADORAS HP-49G COMO MATERIAL DIDÁCTICO DE APOYO"

- I. INTRODUCCION
- II. ANTECEDENTES
- III. MÉTODO CLÁSICO DE LAS RIGIDECES
- III. ALGORITMO DEL MÉTODO
- IV. MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES PARA MARCOS PLANOS
- V. MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES PARA ARMADURAS
- VI. DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL SOFTWARE
- VII. EJEMPLOS DE APLICACIÓN
- VIII. CONCLUSIONES
- BIBLIOGRAFÍA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 9 de Julio de 2001.
EL DIRECTOR

M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB/GMP/Intstg

A Ricardo,
Por ser el mejor hermano que la vida puede ofrecer

A Ana,
Por su sonrisa, y todo lo que ha pasado desde entonces

A mi familia,
Por su ayuda

INTRODUCCIÓN	1
I. ANTECEDENTES.	
1.1. Ingeniería Estructural.	1
1.2. Sistemas Estructurales.	4
1.3. Modelado de Estructuras.	8
1.4. Comportamiento Lineal de los Materiales.	11
1.5. No Linealidad Geométrica.	14
1.6. Cargas.	19
1.6.1. Tipos de cargas.	19
1.6.1.1. Cargas Debidas a la Nieve.	21
1.6.1.2. Cargas Debidas al Viento.	21
1.6.1.3. Cargas de Ocupación o Uso.	21
1.6.1.4. Cargas Vehiculares Dinámicas.	21
1.6.1.5. Carga Debida a los Sismos.	22
1.6.1.6. Cargas Hidrostáticas y Presión de Tierra.	22
1.6.1.7. Expansión por Temperatura.	22
1.6.2. Combinaciones de Cargas.	23
1.6.3. Introducción a la Distribución de Cargas.	24
1.7. Equilibrio, Indeterminación y Grados de libertad.	25
1.7.1. Ecuaciones Básicas del Equilibrio.	25
1.7.2. Determinación e Indeterminación Estática de Sistemas.	35
1.7.2.1. Indeterminación Estática de Marcos Planos.	37
1.7.2.2. Indeterminación Estática de Armaduras Planas.	39
1.7.3. Grados de Libertad.	41
1.8. Diagramas de Cuerpo Libre.	47
II. MÉTODO CLÁSICO DE LAS RIGIDECES.	
2.1. Introducción al Método.	49
2.1.1. Indeterminación Cinemática.	57
2.1.2. Concepto Básico.	59
2.1.3. Elemento Estructural Básico.	63
2.1.3.1. Convención de Signos.	63
2.1.3.2. Matriz Básica de Rigideces.	64
2.1.3.3. Matriz Total de Rigideces.	70
2.1.3.4. Transformación de Fuerzas y Desplazamientos.	76
2.2. Formulación del Método de Análisis.	81
III. ALGORITMO DEL MÉTODO.	96
IV. MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES PARA MARCOS PLANOS.	
4.1. Aplicación del Método a Marcos Rígidos.	98
4.2. Ejemplo.	114
V. MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES PARA ARMADURAS.	
5.1. Observaciones Especiales para Armaduras.	119
5.2. Aplicación del Método a Armaduras.	124
5.3. Ejemplo.	142
VI. DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL SOFTWARE.	

6.1. Descripción General del Software.	147
6.2. Descripción del Lenguaje de Programación Utilizado.	149
6.3. Desarrollo del Software.	166
6.3.1. Desarrollo y Aplicación a Marcos Rígidos.	166
6.3.1.1. Diagrama de Flujo.	166
6.3.1.2. Código Fuente.	169
6.3.1.3. Modo de Empleo.	180
6.3.1.4. Ejemplo.	181
6.3.2. Desarrollo y Aplicación a Armaduras.	186
6.3.2.1. Diagrama de Flujo.	186
6.3.2.2. Código fuente.	188
6.3.2.3. Modo de Empleo.	191
6.3.2.4. Ejemplo.	191
6.4. Indicaciones Especiales para la Transferencia del Software.	203
VII. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.	204
CONCLUSIONES.	212
BIBLIOGRAFÍA	214

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende ser un escrito de interés para estudiantes a nivel licenciatura, profesores y profesionistas de Ingeniería Civil en el área de Estructuras. Introduce metodologías modernas para la solución de estructuras, basándose en el uso de una de las herramientas más comunes y prácticas dentro de las escuelas de ingeniería, la calculadora.

La estructura del texto consta de 2 partes. La primera de ellas pretende servir como apuntes a todos aquellos estudiantes interesados en el análisis estructural y está basado fundamentalmente en el programa de estudio de la asignatura "Teoría General de las Estructuras" de "Temas Especiales de Ingeniería Civil I" impartida en la Facultad de Ingeniería de la UNAM; plantea una introducción al análisis de estructuras mediante el Método de las Rigideces haciendo énfasis en el papel que juegan, tanto analistas como máquinas en el modelado, análisis e interpretación de resultados. Mientras que en la segunda parte de este trabajo, se muestra la aplicación de las herramientas de que disponemos al análisis.

El estilo del texto se caracteriza por una gran cantidad de figuras que avalan la obtención de las ecuaciones y se parte siempre de casos particulares para luego generalizar conceptos y aplicarlos en estructuras completas y tan complejas como se desee. Así mismo se presenta la solución de distintos ejemplos que permiten aplicar los conceptos estudiados.

En el primer capítulo se presentan los antecedentes necesarios para ubicarnos, por principio de cuentas, dentro del vasto campo de la Ingeniería Civil y aún dentro del área de las estructuras, se muestran conceptos básicos que permiten al analista modelar correctamente cualquier tipo de estructura esquelética.

En el capítulo II se presentan las hipótesis y teorías a manejar a lo largo de este trabajo. Se pretende transmitir cómo son utilizados los conceptos fundamentales de equilibrio estático, principio de continuidad, que relaciona las deformaciones en los elementos estructurales con los desplazamientos de sus nudos y relaciones entre fuerzas y desplazamientos, para resolver estructuras planas.

El capítulo III resume en un algoritmo simple, la aplicación del método de las rigideces en el análisis de estructuras planas.

En el cuarto y quinto capítulos, se muestra la aplicación del método de las rigideces en el análisis de marcos planos y armaduras, respectivamente. Se incluye la formación de conjuntos válidos de ecuaciones de equilibrio y se relacionan con su descripción matemática en forma de matrices.

En el sexto capítulo se presenta el software, resultado de las formulaciones analíticas estudiadas para el análisis de estructuras. Este software fue realizado en

calculadoras HP serie 49G pensando en su aplicación académica. Esta parte del trabajo tiene como objetivo proveer a los lectores, de herramientas para el aprendizaje de métodos de análisis de estructuras esqueléticas, basadas en algoritmos de gran sencillez y eficiencia.

De estos programas se incluyen los códigos fuente para que el lector pueda realizar modificaciones futuras que mejoren el alcance de los mismos. Se ha desarrollado una interfaz gráfica que permite observar algunos de los resultados del análisis por supuesto en forma gráfica.

El séptimo capítulo presenta algunos ejemplos de aplicación que ilustran el empleo de los programas desarrollados.

Finalmente, el octavo capítulo presenta las conclusiones del trabajo y hace algunas recomendaciones a los lectores , para que tengan un máximo aprovechamiento del material de que disponen.

1. Antecedentes

1.1. Ingeniería Estructural

Antes de discutir los fundamentos subyacentes del análisis estructural, es importante ver en perspectiva la relación del análisis con los objetivos de la ingeniería estructural en su totalidad. En términos simples, la ingeniería estructural consiste en etapas tanto del análisis como del diseño de un sistema estructural. Los objetivos técnicos del proceso de diseño incluyen la selección y el detallamiento de los componentes que conforman el sistema estructural o ambos. Aun cuando estos dos aspectos de la ingeniería estructural se llevan con frecuencia en cursos separados en los planes de estudio de ingeniería, en la práctica son inseparables.

El análisis completo de una estructura formada por barras suele requerir de un conocimiento de los tamaños de todos sus elementos, que están determinados por decisiones de diseño. Estas decisiones de diseño deben basarse en el conocimiento de las fuerzas en la estructura que resultan de un análisis. En forma más clara, para salir de este círculo y empezar el proceso completo, el ingeniero en estructuras debe hacer *estimaciones* iniciales. Esto puede constituir un diseño “preliminar”, el cual define temporalmente el tamaño de las barras. El diseño preliminar a menudo está basado en un análisis más o menos burdo o simple, y está muy influido por la experiencia y el criterio del ingeniero. Habiendo determinado un conjunto inicial de tamaños de las barras, puede hacerse un análisis más detallado para determinar las fuerzas y los desplazamientos. Esto puede entonces conducir a un rediseño y un análisis subsecuente.

Esta situación es típica de la interacción entre el análisis y el diseño. El proceso de ingeniería en su conjunto es claramente cíclico, como se ilustra en la figura 1.1. En ella, *S_i* representa la colección de todos los tamaños de las barras (como el área de la sección transversal y la inercia) para el ciclo de diseño *i*. Las cantidades *F_i*, *Δ_i*, y *σ_i* son, respectivamente, las fuerzas de las barras, los desplazamientos estructurales importantes y los esfuerzos pertinentes en las barras para el ciclo *i*. Los términos $\sigma_{m\acute{a}x}$ y $\Delta_{m\acute{a}x}$ son los esfuerzos y los desplazamientos máximos permisibles, que por lo común están especificados en códigos como los publicados por el Instituto Estadounidense de la Construcción en Acero (AISC, del inglés, *American Institute of Steel Construction*), el Instituto Estadounidense del Concreto (ACI, del inglés *American Concrete Institute*) o el Instituto Estadounidense de la Construcción en Madera (AITC, del inglés, *American Institute of Timber Construction*) en los Estados Unidos, y por el Instituto Mexicano de la Construcción en Acero (IMCA), así como en las Normas Técnicas Complementarias al Reglamento de Construcción en el Distrito Federal (NTC al RCDF) en México. Estos y otros códigos proporcionan orientación para seleccionar las cargas a aplicar en la estructura.

El proceso de análisis y diseño puede en realidad ser considerado como un problema de optimización. Para ilustrar este hecho, se introdujo el término *C_i* en la figura 1.1 para representar el costo del sistema estructural. Sería ideal poder satisfacer todos los requisitos

de esfuerzos y restricciones de desplazamiento (es decir, $\sigma_i < \sigma_{\text{máx}}$ y $\Delta_i < \Delta_{\text{máx}}$), y, al mismo tiempo, minimizar el costo. Bajo ciertas condiciones, el costo puede ser reemplazado por el peso de todos los elementos por diseñar. El proceso de minimizar un costo (es decir, una función objeto) sujeto a algunos criterios de ejecución (restricciones) es un problema matemático típico de optimización. Para estructuras pequeñas o bien sencillas, el diseño óptimo puede por lo general ser encontrado por ensayo y error. Si se intenta una optimización en sistemas estructurales más complejos, será necesario utilizar técnicas bien conocidas, como la programación lineal o no lineal.

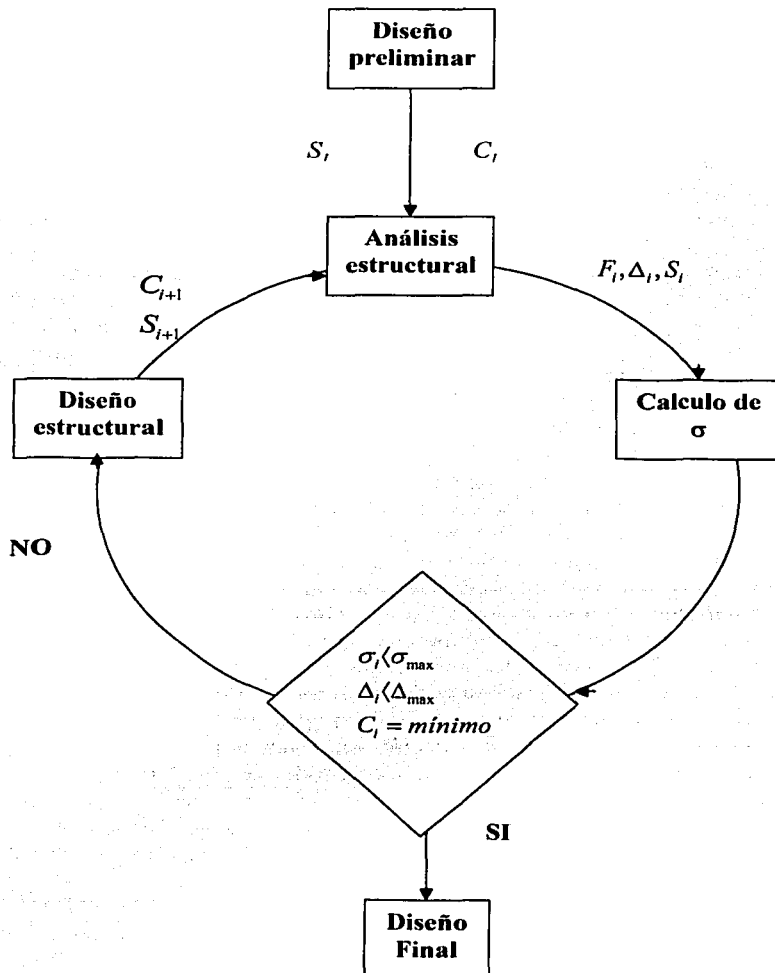


Figura 1.1. Interacción entre Análisis y Diseño Estructurales.

El procedimiento anterior de análisis y diseño es bastante general. En ocasiones hay circunstancias en las que todos esos pasos pueden efectuarse de manera simultánea, pero esto está restringido a las estructuras más simples. Sin embargo, es práctica común diseñar la estructura con base en las fuerzas obtenidas del análisis (es decir, $\sigma_i < \sigma_{\max}$) y revisar los desplazamientos sólo después de haber satisfecho todas las restricciones relativas a los esfuerzos.

En un sentido más amplio, la ingeniería estructural va más allá de la fase del diseño y del análisis. La mayor parte de los proyectos de ingeniería también incluyen fases de planeación general o de conceptualización, estimación de tiempos, fabricación, construcción e inspección de una estructura. El ingeniero en estructuras puede ser requerido para participar en cualesquiera de esos niveles y para utilizar habilidades y juicios analíticos. Es evidente que la discusión anterior acerca del proceso de análisis es sólo una parte de todas las responsabilidades del ingeniero en estructuras. Sin embargo, es un paso muy importante para alcanzar el objetivo final de la ingeniería: una estructura segura y económica. Los errores cometidos en el análisis durante cualquier fase de un proyecto pueden resultar catastróficos en grado extremo, generando quizá una cuota muy alta de pérdida de vidas o de dinero. Es por esta razón que los análisis son revisados y comprobados muy a menudo por diferentes individuos dentro de una empresa. Incluso los aparentemente infalibles resultados de los análisis efectuados por computadora deben ser revisados de modo exhaustivo. Debido a ello, muchos estudiantes perciben a sus instructores como extremadamente meticulosos acerca de detalles como los "errores matemáticos". No hay duda de que el momento para cometer errores es ahora, cuando se está aprendiendo un material como el análisis estructural. Desgraciadamente, existe un gran testimonio acerca de las experiencias dolorosas del aprendizaje a partir de errores cometidos "en el campo".

1.2 Sistemas Estructurales

El método de análisis desarrollado en este texto es directamente aplicable a las estructuras de ingeniería que consisten en un ensamblaje de barras individuales. El ensamblaje total suele denominarse armazón o estructura armada (fig. 1.2) y es utilizado ampliamente en edificios, puentes, torres de transmisión, naves espaciales, aviación y en muchos otros medios (fig. 1.3). Existe otro tipo de sistemas para los que puede no haber una estructura identificable, como cascarones, domos, placas, muros de contención, presas torres enfriadoras y tanques de almacenamiento (fig. 1.4). Estos sistemas se llaman continuos. Aun cuando no se considerará el análisis de estos tipos de estructuras, los principios básicos y algo del método de análisis y procedimientos computacionales de este texto pueden extenderse para analizar también esta clase de estructuras.

La armazón puede concebirse como el esqueleto de la estructura total. Es un sistema de barras conexas que soporta las cargas impuestas por su propio peso y por el peso de materiales fijos (conocidas como cargas muertas) así como las cargas impuestas por la gente, por objetos móviles o por las fuerzas de la naturaleza (denominadas cargas vivas). Es importante reconocer que la armazón por ella misma debe soportar totalmente todas las cargas previstas de manera segura y económica. Las partes más visibles de los edificios, por ejemplo el enladrillado, la mampostería decorativa y otras superficies, por lo general no son hechas para soportar cargas. Aunque estos componentes pueden de hecho reforzar a la estructura, solo son considerados como cargas muertas de la misma.

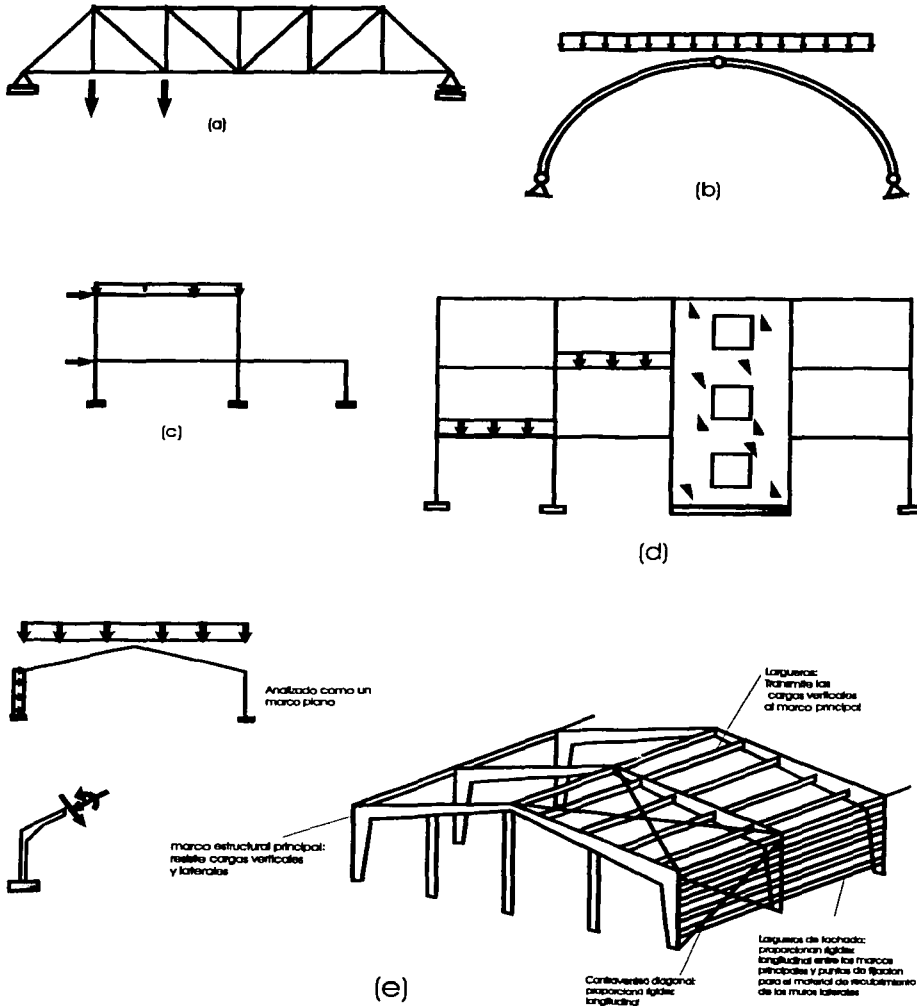
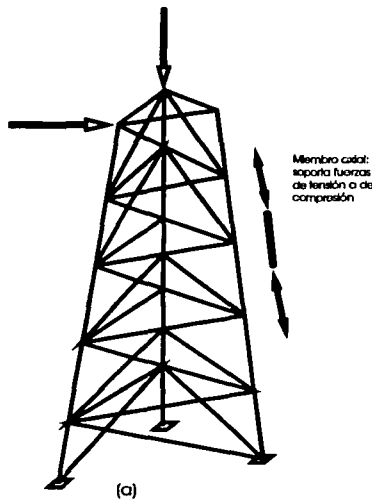
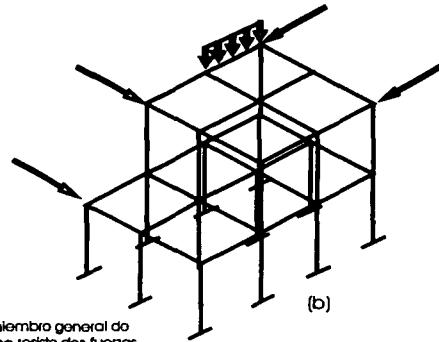


Figura 1.2 Estructuras planas comunes: a) armadura plana, b) arco con tres articulaciones, c) marco plano, d) marco plano y muro de cortante y e) construcción a base de marcos rígidos en una sola planta.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

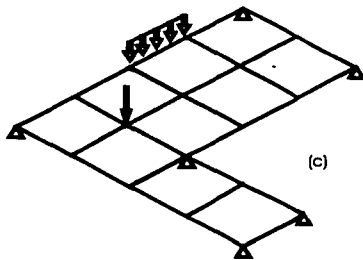


(a)



(b)

Un miembro general de
marco resiste dos fuerzas
cortantes, una fuerza axial,
dos momentos de flexión
y uno de torsión



(c)

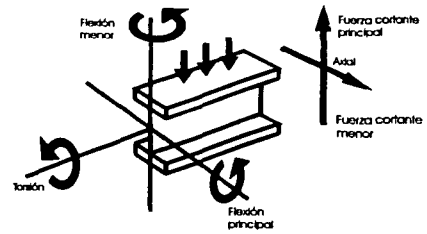
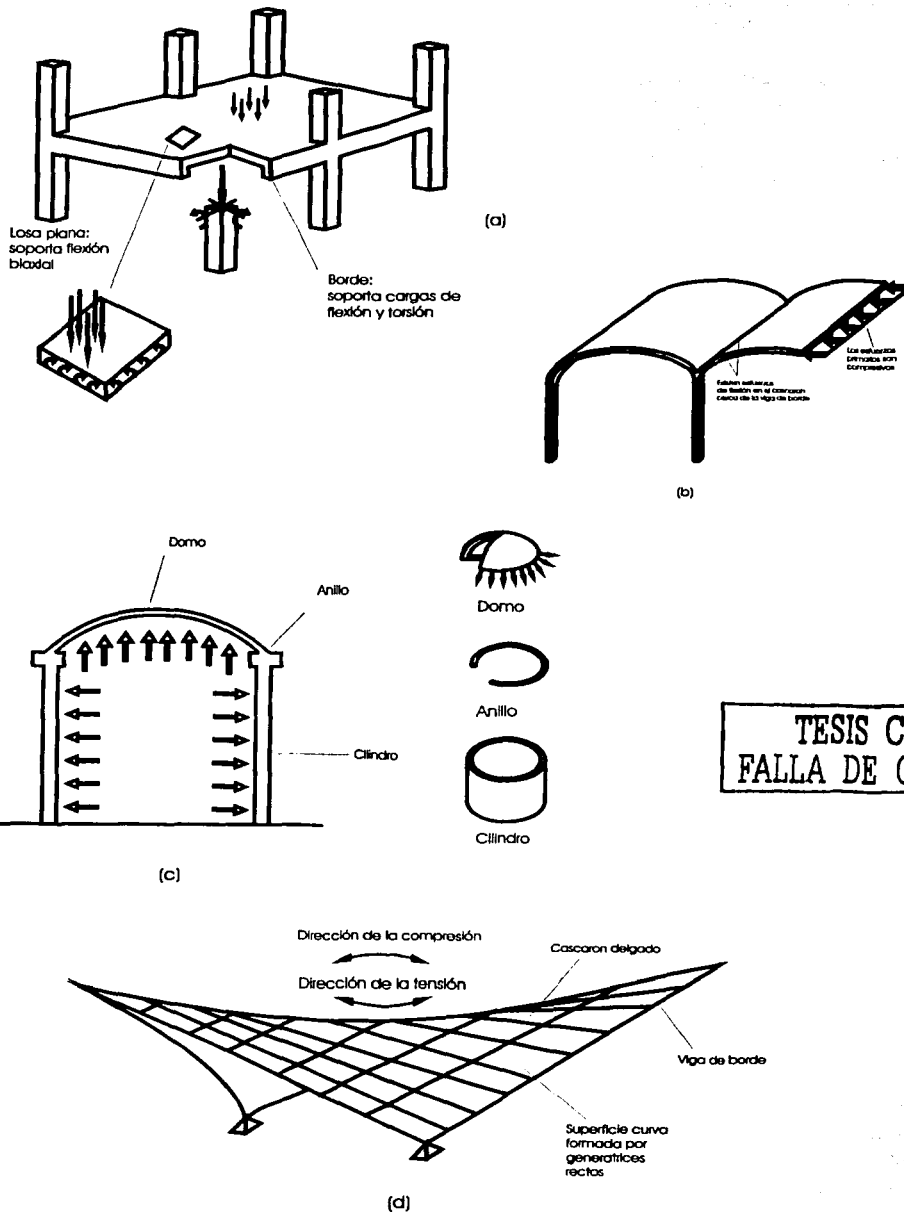


Figura 1.3 Estructuras espaciales comunes: a) armadura espacial, b) marco espacial y c) parrilla

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 1.4 Estructuras de elementos continuos

1.3. *Modelado de Estructuras*

Uno de los pasos más importantes en cualquier análisis es el proceso de formulación de un modelo de la estructura real, susceptible de un tratamiento matemático relativamente sencillo. Este paso consiste en adoptar una cantidad de idealizaciones y simplificaciones con la intención de reducir la complejidad del problema, así como de retener las características "primarias" importantes del comportamiento. Algunas de las idealizaciones tratan directamente con descripciones geométricas de la estructura real; otras tratan acerca del comportamiento material. También es necesario idealizar la forma en que las barras individuales de una estructura están conectados entre sí y cómo están sujetos entre sí los elementos de la frontera a los soportes del sistema. Una vez que se han hecho estas idealizaciones, tanto a nivel de estructura como de elementos, se aplican al modelo los procedimientos de análisis para determinar las fuerzas y desplazamientos deseados.

Para ilustrar algunos de estos puntos, se considerará el marco de la figura 1.5. El marco está hecho de placas de acero soldadas. Todas las secciones transversales tienen forma de I. Las estructuras de este tipo se utilizan comúnmente para crear claros más grandes sin columnas interiores en edificios industriales o áreas deportivas, como canchas de tenis. Para analizar el marco se debe construir primero un diagrama de líneas. Las líneas del diagrama por lo general siguen el centroide de la sección transversal de cada uno de los elementos. En el caso de marcos alusados, estos pueden ser incómodos para los fines del análisis, y el diagrama de líneas sólo aproxima la ubicación del centroide en las regiones alusadas. En las barras con secciones transversales constantes la línea sigue, de hecho, al centroide de la sección. En el caso de las vigas I con patines iguales, el centroide está localizado en el centro de la sección transversal de la barra.

Las propiedades importantes de las barras necesarias para el análisis del marco plano son el momento de inercia y el área. En las barras rectas estas propiedades son constantes, ya que las dimensiones de la sección transversal no cambian. En el miembro alusado cambian, el área y la inercia a lo largo de la longitud de la barra, ya que el peralte varía. Aunque es posible analizar directamente una barra con una sección alusada, una simplificación común es representar esta sección con una o más barras de peralte uniforme, utilizando un área y un momento de inercia "efectivas" para cada segmento. En la figura 1.5b se muestra un diagrama de líneas razonable. Se acostumbra anotar las áreas y los valores del momento de inercia acerca de cada segmento o barra.

Una vez que se ha construido el diagrama de líneas, es necesario idealizar las conexiones de las barras y los soportes. El marco del ejemplo es conocido como un marco rígido, ya que los momentos pueden ser transmitidos a través de los nudos que conectan a las barras. En un soporte, el extremo del elemento columna puede tener rotación libre, estar parcialmente fijo o estar empotrado, dependiendo del tipo de construcción del soporte real. Si se va a analizar el marco por medio de computación manual, el tipo de idealización hecha para los soportes puede influir en el método de análisis que se va a utilizar. Algunos métodos se aplican con más facilidad a una estructura con un gran número de restricciones en el movimiento (de base fija); otros métodos son más aplicables a estructuras con menos restricciones (de base articulada). Si se utilizan métodos con computadoras, se pueden

analizar todas las condiciones en prácticamente la misma cantidad de tiempo de computadora y la preparación de datos. En la figura 1.6, se muestran algunas condiciones para los soportes y conexiones de las barras, así como sus representaciones simbólicas. Para el marco del ejemplo, la construcción de la base en realidad presenta alguna restricción parcial, aun cuando no necesariamente la restricción de un empotramiento (fig. 1.6a). La suposición de una base articulada suele ser utilizada, a menos que se disponga de algunos datos para cuantificar la resistencia rotacional del soporte. El análisis del marco utilizando primero una base articulada y después una base empotrada debe proporcionar cotas para las magnitudes de las fuerzas en todos los barras.

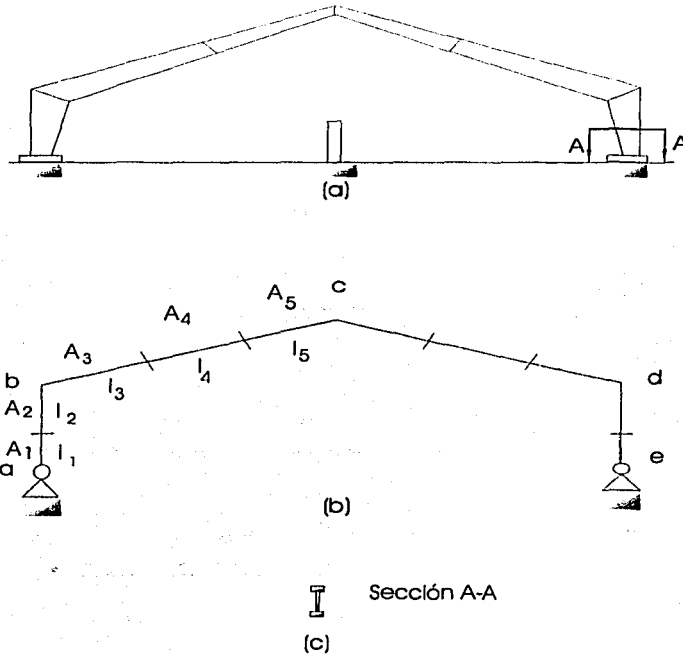


Figura 1.5 Marco rígido de sección variable

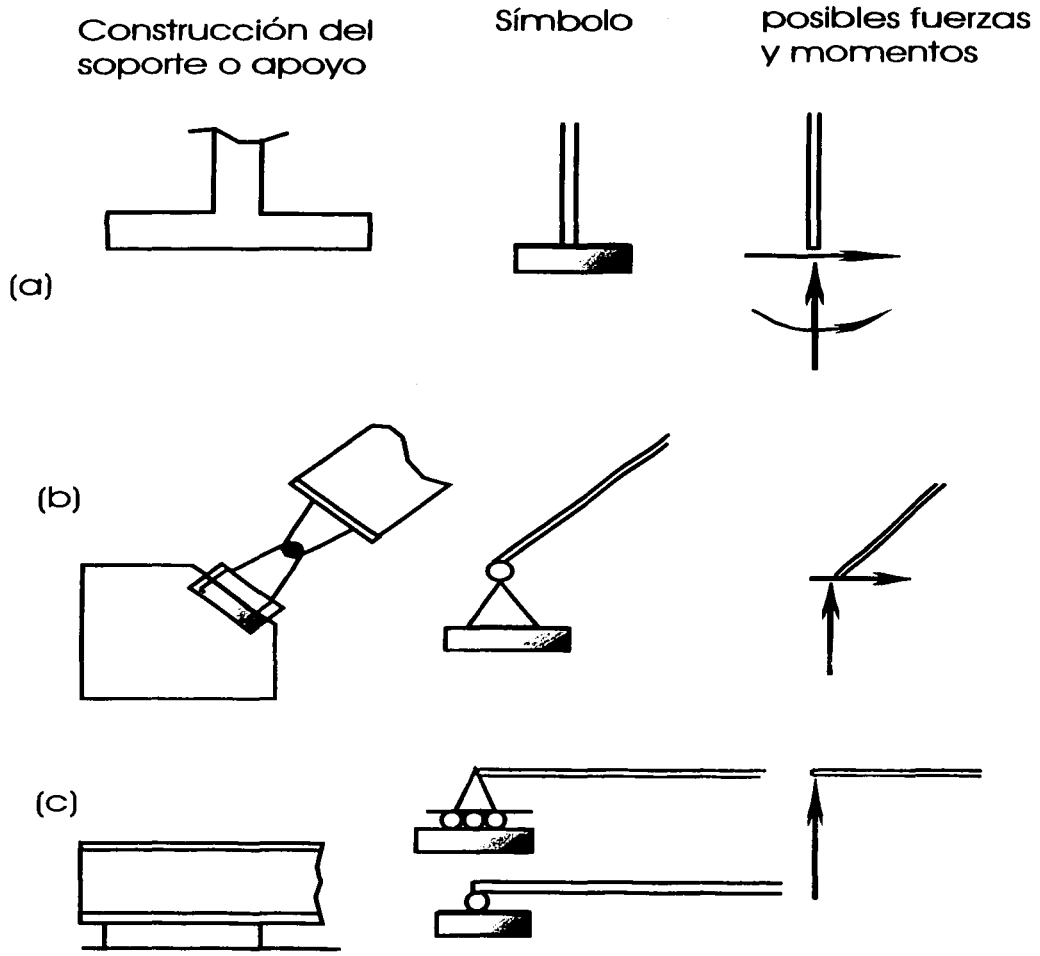


Figura 1.6 Condiciones de soportes típicos: a) fijo, b) articulado y c) de rodillos

1.4. Comportamiento Lineal de los Materiales

Las estructuras se hacen por lo común de madera, concreto o acero. Cada una de ellas tiene diferentes propiedades materiales que deben ser consideradas para el análisis y el diseño. Debe conocerse el módulo de elasticidad E de cada material para cualquier cálculo de desplazamientos. En la figura 1.7, se muestran curvas típicas esfuerzo-deformación para los tres materiales antes mencionados. El módulo de elasticidad E se define como la pendiente de la curva esfuerzo-deformación. Para deformaciones localizadas debajo de las líneas punteadas que se muestran en cada gráfica, la curva es aproximadamente una línea recta. La pendiente es constante y por ello también E lo es. Dentro de esta región, al comportamiento se le denomina *lineal*. Una estructura, para la que todas sus deformaciones se ubiquen en esta región, también será linealmente proporcional a la magnitud de las cargas aplicadas, siempre que los desplazamientos sean pequeños, como se comenta en la siguiente sección. A lo largo de este texto se utilizará la suposición de propiedades lineales del material.

Una consecuencia directa de la suposición del comportamiento lineal es la validez del “principio de superposición” :

“La respuesta de una estructura, debida a un número de cargas aplicadas simultáneamente, se obtiene mediante la suma de las respuestas de las cargas individuales, aplicando por separado cada una de ellas a la estructura.”

La respuesta de una estructura es medida tanto por sus desplazamientos como por las fuerzas internas que desarrolla.

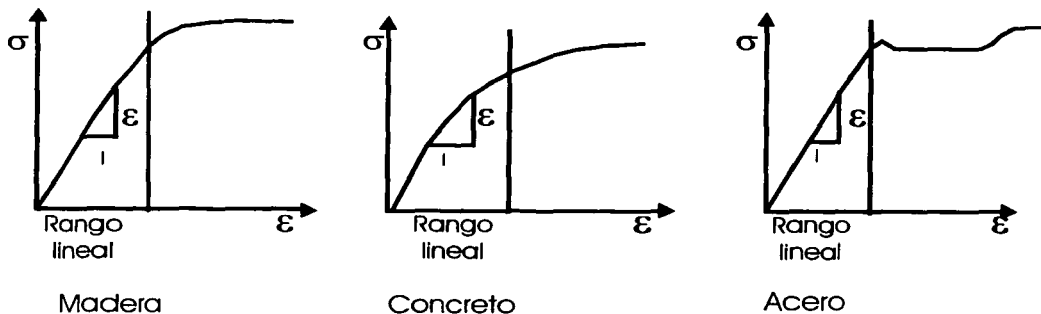


Figura 1.7 Leyes de esfuerzo-deformación

Para ilustrar estas ideas, considérense dos barras axiales sencillas; una que tiene una relación de deformación lineal debido a la carga y otra que actúa de manera no lineal, como se muestra en la figura 1.8. Si se aplica una carga P_1 a la barra lineal, resulta el desplazamiento Δ_1 . El principio de superposición permitiría predecir el desplazamiento que

resultaría debido a una carga de $2P$. Ya que P_1 provocó un desplazamiento de Δ_1 , $2P_1$ debería generar un desplazamiento de $\Delta_1 + \Delta_1$; esto es, se suman o sobreponen las respuestas individuales debidas a cargas aplicadas por separado para obtener la respuesta total (punto b). Ahora, considérese que se aplica una carga de $2P_1$ a la barra que posee una propiedad no lineal. Ahora debería observarse el desplazamiento denominado $\Delta_2 \neq 2\Delta_1$. En el diagrama (punto c). En consecuencia, no es posible sumar o “sobreponer” los desplazamientos provocados por *cargas individuales* para obtener el desplazamiento final debido a la carga total si las propiedades del material son no lineales. Aunque no expresa plenamente el principio, la frase “duplicar la carga duplica el desplazamiento” refleja la esencia del principio de superposición. También aplicar el principio de superposición para encontrar todas las fuerzas internas o reactiva de una estructura sujeta a cargas múltiples.

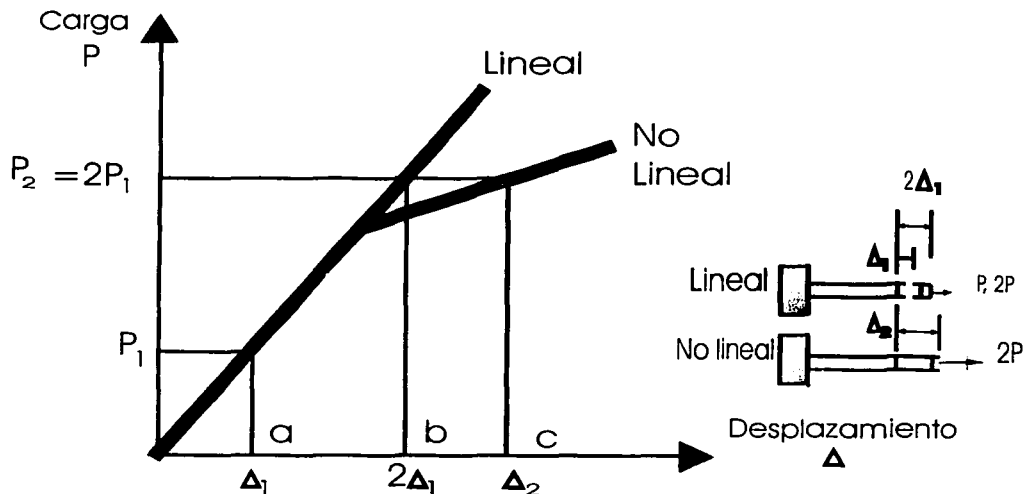


Figura 1.8 Principio de superposición

Otro requisito para que el principio de superposición sea válido es que, al descargar una barra, el desplazamiento debe seguir exactamente la misma trayectoria carga-desplazamiento que tuvo durante el proceso de cargado. Se dice que un material que se comporta de esta forma es elástico; de otro modo, se llama inelástico. Las trayectorias de carga de la figura 1.9 ilustran la naturaleza de varias combinaciones de las propiedades del material. El acero cargado más allá de su punto de fluencia es no lineal e inelástico. El hule es no lineal pero elástico. Algunas estructuras de concreto reforzado que han desarrollado cuarteaduras al ser ciclicamente cargadas muestran un comportamiento casi inelásticamente lineal al aproximarse a su carga máxima. Es evidente que la suposición de material lineal elástico es bastante restrictiva. Las desviaciones de esta suposición son muy a menudo las causales de la discrepancia entre los resultados teóricos y los experimentales. La incertidumbre y la idealización de las propiedades del material desempeñan una función

importante en la determinación de factores de seguridad dentro del diseño de estructuras de ingeniería.

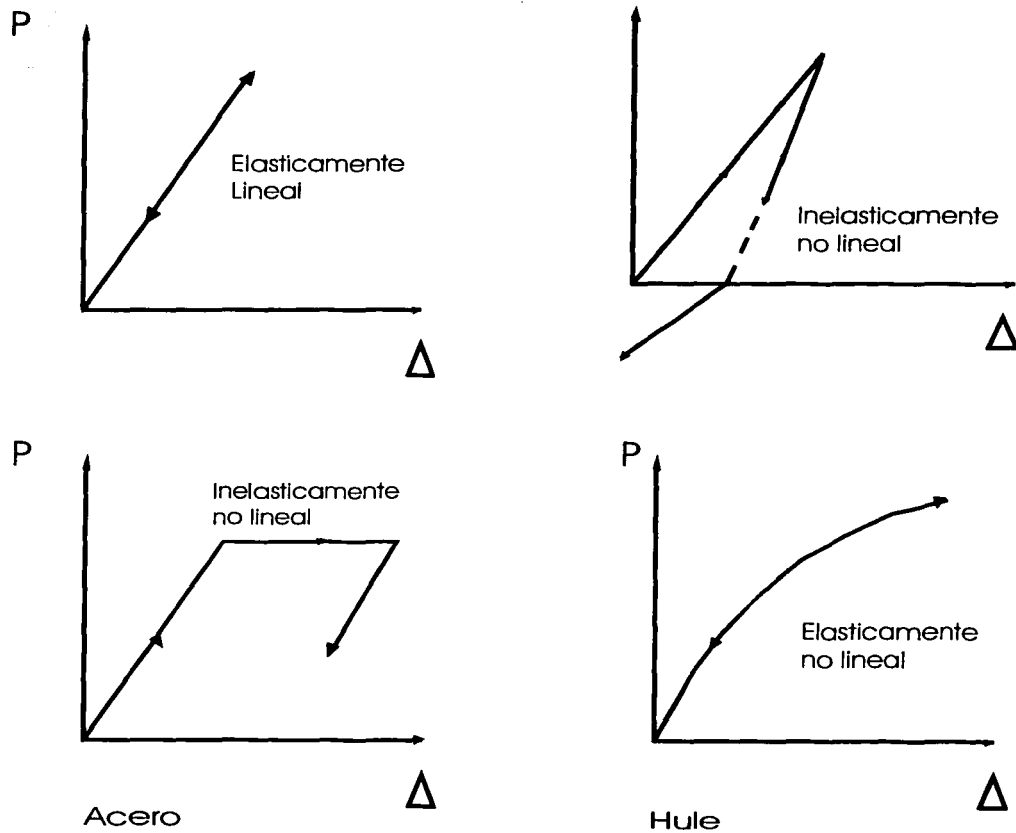


Figura 1.9 Trayectorias de carga

1.5. No Linealidad Geométrica

Además de la no linealidad del material, algunas estructuras pueden comportarse de manera no lineal debido al cambio en la forma de toda la estructura. Esto requiere que la estructura se desplace una cantidad lo suficientemente significativa para afectar las relaciones de equilibrio de la estructura. Cuando esto sucede, se dice que la estructura es “geoméricamente no lineal”. Las estructuras de los cables son susceptibles a este tipo de no linealidad, y el análisis del pandeo está basado en este efecto. Considérese la viga voladiza de la figura 1.10. Si la viga es muy flexible y de verdad se desplaza en la cantidad mostrada en la figura, obsérvese lo que le sucede al brazo de momento de P alrededor del punto a de la base. En la posición original, el momento alrededor de a es $M_a = PL$. En la posición desplazada, el momento debería estar correctamente proporcionado por

$$M = P(L + \Delta).$$

Supóngase que el desplazamiento es cualquier función de la carga, esto es, $\Delta = f(P)$. Sustituyendo la función $f(P)$ por Δ en la ecuación del momento alrededor de A cuando la viga está en la forma desplazada, se obtiene $M = P(L + f(p))$ o $M_a = PL + Pf(P)$. Está claro que el último término es alguna función no lineal de P . Se puede probar el principio de superposición simplemente examinando lo que sucede si P se determina para algún otro valor, por ejemplo $2P$. Ahora, el momento respecto de a es ahora $M_a = 2Pf(2P)$. Se observa que no es posible predecir el momento en a debido a $2P$ (es decir, $M_a = 2PL$) mediante la duplicación del momento que se obtiene de la carga P , debido al término adicional no lineal $2Pf(2P)$.

En consecuencia, la superposición será válida sólo si es posible expresar las fuerzas o los momentos en una estructura por medio de funciones lineales de las cargas. En el ejemplo, el momento en a , $M_a = P(L + \Delta)$ en la posición desplazada, está muy aproximado por $M = PL$ sólo cuando $\Delta \ll L$. Es posible concebir a L como una dimensión característica de la estructura, como su altura, longitud o anchura. Para que la superposición sea válida, los desplazamientos deben ser por lo general uno o dos órdenes de magnitud inferiores a las dimensiones características. No hay un punto límite exacto entre el comportamiento lineal y el no lineal. Puede pensarse que el intervalo $10^{-2}L - 10^{-1}L$ es una región de transición. En la medida es que el desplazamiento se incrementa más allá de este intervalo, no es posible suponer que las cargas actúan en su posición original y por ello deben en realidad ser referidas a la posición deformada de la estructura. Cuando los desplazamientos son menores que valores de este intervalo, el sistema es lineal (siempre que las deformaciones del material están en el rango lineal). Se supondrá que todos los desplazamientos son inferiores a los valores del intervalo citado. Los métodos del análisis desarrollados en este texto se basan en dicha suposición y por lo mismo se dice que están basados en la teoría de los desplazamientos pequeños o en una “teoría de primer orden).

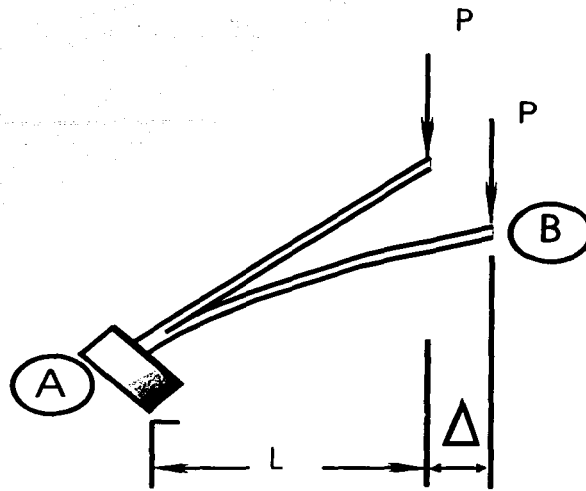


Figura 1.10 No linealidad geométrica

La teoría de los desplazamientos pequeños también proporciona simplificaciones, considérese primero que la forma desplazada del marco ahusado de la figura 1.5 está provocada por una carga concentrada que se aplica horizontalmente en el nudo B. Las formas desplazadas se representan casi siempre con un bosquejo del diagrama de líneas deformado (curva elástica), como se muestra en la figura 1.11.

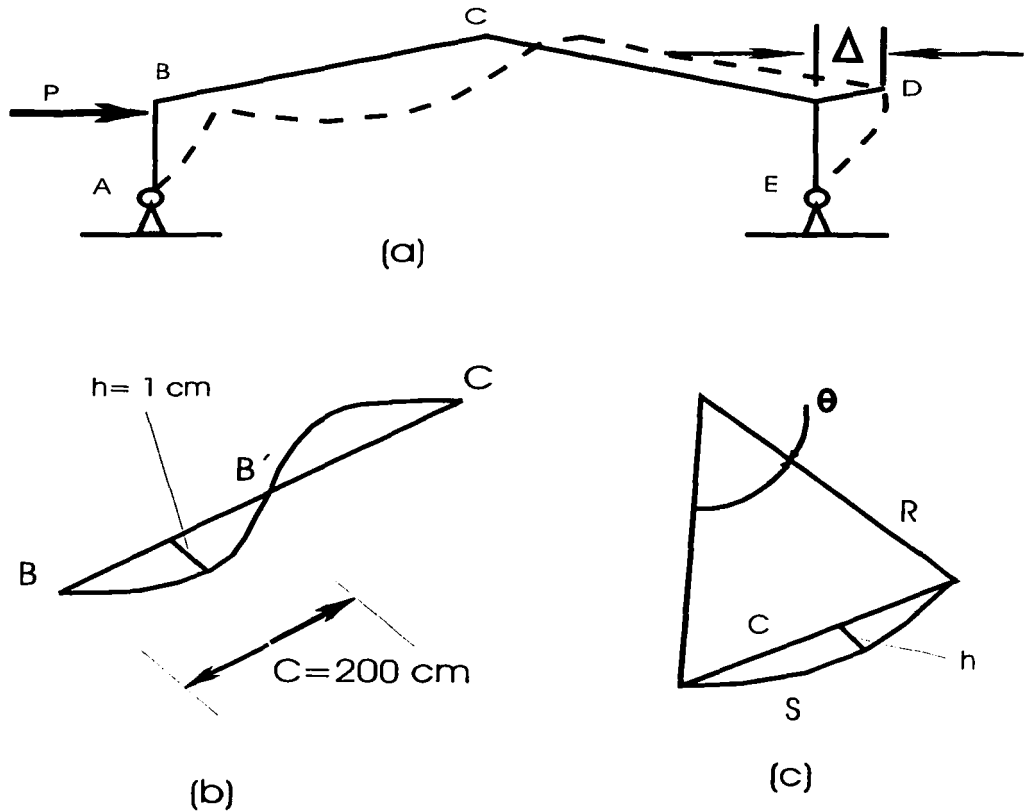


Figura 1.11 Forma desplazada del marco de la figura 1.5

Debido a que es necesario que los desplazamientos verdaderos del marco sean muy pequeños, comparados con las dimensiones características, el desplazamiento Δ debe ser del orden de 1 cm. Ya que Δ es el desplazamiento máximo de la estructura para esta carga, todos los otros desplazamientos deben ser menores que 1 cm.

Examínese ahora los desplazamientos de la barra BC , dibujando en el mismo esquema la forma desplazada y la forma no deformada, como se muestra en la figura 1.11b. Si se aproxima mediante un arco circular la curva de B a B' , entonces es posible obtener una expresión para la longitud del arco, $S = BB'$, a partir de las relaciones simples:

$$R = \text{radio} = \frac{C^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

$$\theta = 2 \text{sen}^{-1} \frac{C}{2R}$$

$$S = R\theta$$

donde $C = 200$ cm

$h = 1$ cm

$R = 5000.5$ cm

$\theta = 0.03999866$ rad

$S = 200.0133$ cm

Es claro que el cambio en la distancia entre los puntos B y B' (0.0133 cm) es una cantidad despreciable, comparada con la dimensión de la barra y puede no ser considerada. Aun cuando este argumento es para un ejemplo específico, es aplicable a cualquier análisis estructural basado en la teoría de los desplazamientos pequeños. En términos sencillos, las longitudes de las cuerdas se consideran iguales a las longitudes de los arcos de las curvas elásticas para desplazamientos pequeños. Esto debe ser tomado en cuenta al dibujar las formas desplazadas de vigas y marcos.

En general, la curva elástica no será un segmento circular, pero bien puede ser cualquier número de funciones de la distancia a lo largo de la cuerda original, como se muestra en la figura 1.12. La función $y = f(x)$ ubica la posición de la curva elástica a partir de la posición original. La expresión general para el radio de curvatura R , si una curva está definida por $y = f(x)$, está dado por

$$R = \frac{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}{d^2y/dx^2} \quad 1.1$$

Para desplazamientos pequeños, la pendiente de la curva dy/dx es mucho menor que 1. Para $dy/dx \ll 1$, el radio de curvatura está dado entonces por

$$R = \frac{1}{d^2y/dx^2} \quad 1.2$$

El término "curvatura" se define como el recíproco del radio de curvatura:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad 1.3$$

Para la teoría de los desplazamientos pequeños, la curvatura siempre está dada por la segunda derivada de la ecuación de la curva elástica.

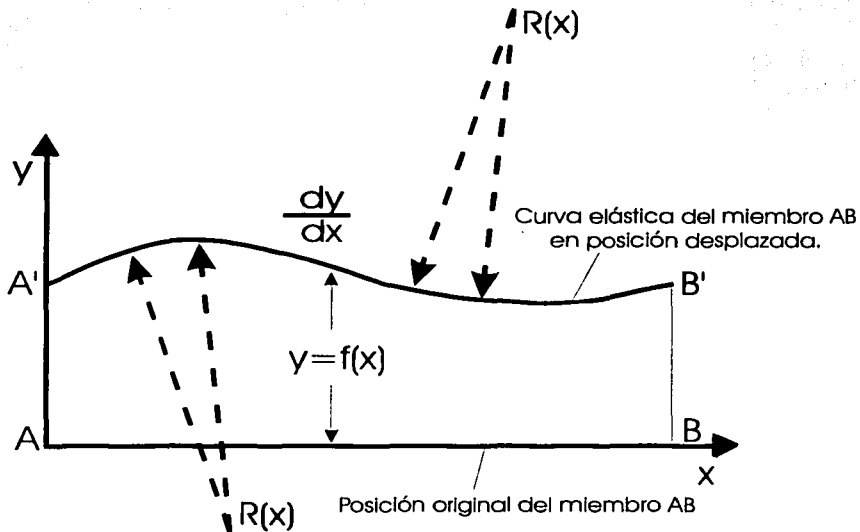


Figura 1.12 Curva elástica

1.6. Cargas

1.6.1. Tipos de Cargas

Cargas muertas.

Las cargas muertas se basan en el conocimiento del peso volumétrico y en las dimensiones del material utilizado para la construcción del sistema estructural. Por ejemplo, la carga superficialmente distribuida en un piso de concreto de 15 cm de espesor se calcula como

$$0.15 \text{ m} \times 2.4 \text{ t/m}^3 = 0.36 \text{ t/m}^2$$

para concreto que pese 2.4 t/m^3 . En forma análoga, una pared de concreto que mide 3 m de altura y 15 cm de espesor puede ser idealizada como una carga lineal en el suelo o en una viga, de tal forma que

$$3 \text{ m} \times 0.15 \text{ m} \times 2.4 \text{ t/m}^3 = 1.08 \text{ t/m}$$

Si se conocen con precisión las dimensiones de los componentes estructurales, entonces la determinación de las cargas muertas es un proceso de un paso. Por desgracia, esto no sucede frecuentemente, ya que un diseño estructural a menudo empieza con una estimación preliminar de los tamaños de las barras estructurales. Por supuesto que estos tamaños pueden modificarse en la medida en que se refina el diseño, y por esta razón cambiará la carga muerta. En el análisis final, sin embargo, la carga muerta de la barra seleccionado debe coincidir con la carga utilizada para el análisis final.

El peso volumétrico de algunos materiales comunes y componentes para la construcción se proporciona en la tabla 1.1. Una vez que se determinan las cargas con base en valores supuestos de dimensiones y pesos volumétricos, pueden ser modificadas para reflejar la incertidumbre en su estimación. La modificación depende de la filosofía del diseño utilizado.

MATERIAL	PESO (lb/pie ³)	PESO (t/m ³)
Aluminio	170	2.72
Ladrillo suave	100	1.6
Ladrillo duro	120	1.9
Ladrillo prensado	140	2.24
Bronce	509	8.15
Concreto	145	2.32
Concreto ligero	105	1.68
Cobre	556	8.91
Granito	165	2.64
Hierro fundido	450	7.21
Plomo	710	11.37
Mármol	170	2.72
Acero	490	7.84
Madera, abeto, pino gigante de california	28-34	0.45-0.54
Madera, pino, roble, arce	40-50	0.65-0.80

Tabla 1.1. Peso volumétrico de algunos materiales.¹

Cargas Vivas

La determinación de la carga viva apropiada para un sistema estructural es complicada debido a dos factores primordiales: 1) la incertidumbre de la magnitud de la carga en sí misma y 2) el lugar sobre el que actúa la carga en cualquier instante dado. Ya que a menudo las fuerzas de la naturaleza son la fuente de las cargas vivas, el ingeniero en estructuras debe familiarizarse con los fenómenos naturales poco usuales que afectarán la estructura. Cuantificar esto de una forma determinista es difícil, y de aquí que estas cargas hayan sido históricamente modificadas mediante la aplicación de factores de seguridad por lo general mayores que los utilizados para las cargas muertas. De nuevo, como se mencionó para las cargas muertas, los medios con los cuales se aborde la incertidumbre dependen de la filosofía de diseño utilizado.

Puesto que se ha determinado la magnitud de la carga viva, con frecuencia es necesario determinar dónde debe colocarse la carga para provocar fuerzas, momentos y desplazamientos máximos, etcétera. ¿Dónde, por ejemplo, deben ubicarse las cargas concentradas de un camión que está en la cubierta de un puente para provocar la fuerza máxima de compresión en una barra específica de la armadura. Es importante observar que la definición completa de una carga viva necesitará inevitablemente esas decisiones, y puede conducir a numerosas condiciones de carga para una estructura dada, en contraposición a condiciones sencillas o sólo a unas pocas condiciones de carga muerta. El problema de ubicación de las cargas vivas en una estructura es un problema de análisis para

¹ Análisis Estructural, Jeffrey Laible, Mc Graw-Hill, México, 1995.

el que ya se han establecido en forma adecuada técnicas al paso del tiempo. Aquí se dan algunas directrices para estimar algunas cargas vivas comunes.

1.6.1.1. Cargas debidas a la nieve

Las cargas debidas a la nieve suelen ser determinadas por las acumulaciones más grandes registradas en un área dada.

1.6.1.2. Cargas debidas al viento

Se asume que las cargas debidas al viento son provocadas por el viento que sopla desde cualquier dirección horizontal. Debido a los efectos aerodinámicos, la carga debida al viento generalmente tiene una distribución más bien compleja. Varios códigos toman en cuenta esto para especificar los coeficientes de presión que se aplican a una presión básica del viento.

1.6.1.3. Cargas de ocupación o uso

La carga de piso que se va a aplicar a un área dada de una construcción depende de su pretendida utilización u *ocupancia*. Estas cargas se deben a los seres humanos, al equipo, al almacenamiento en general, a los automóviles, a la estantería de una biblioteca, etcétera.

Bajo ciertas circunstancias y en ciertas áreas de una construcción, es posible reducir las cargas vivas para considerar la improbabilidad de que una carga distribuida ocurra sobre el área total.

1.6.1.4. Cargas vehiculares dinámicas

Las cargas vivas en las carreteras son especificadas por la Asociación Estadounidense de Funcionarios del Transporte en Carreteras Estatales (AASHTO, del ingl. *American Association of State Highway Transportation Officials*). Sus cargas recomendadas han sido aceptadas como la guía para todos los puentes de carretera construidos por agencias públicas en Estados Unidos.

En la medida en que los vehículos se aproximan y entran a un claro del puente, el efecto dinámico tiende a incrementar la magnitud de la carga. Es difícil estimar este "impacto" en gran detalle, y por esta razón es que se han desarrollado factores de impacto basados en amplias investigaciones para ayudar al diseño de los claros de los puentes. El criterio comúnmente adoptado es la fórmula de la AASHTO:

$$I = \frac{50}{L + 125}$$

donde L = longitud cargada del claro

I = factor de impacto no mayor a 0.3

Expresado como un porcentaje, I es el aumento en la carga que debe utilizarse para calcular los esfuerzos.

1.6.1.5. Carga debida a los sismos

Los sismos hacen que el suelo se acelere en las direcciones horizontal y vertical. Estas aceleraciones se expresan a menudo en términos de g , la aceleración de la gravedad. La aceleración máxima del suelo, proporciona orientación para estimar la aceleración posible de una estructura.

Cuando la base de una estructura se sujeta a una aceleración súbita del suelo, fuerzas de inercia se desarrollan de acuerdo con la segunda ley de Newton, $F = Ma$.

1.6.1.6. Cargas hidrostáticas y presión de tierra.

La presión de un líquido actúa en todas direcciones y por ello ejerce una fuerza en todas las superficies sumergidas en él, de acuerdo con la fórmula

$$P = \gamma h$$

Donde γ = peso volumétrico del líquido
 h = profundidad

La presión lateral exterior sobre una estructura sumergida es, en consecuencia, una carga distribuida con una variación lineal respecto a la dirección vertical.

Debido a la cohesión y a la fricción, la presión lateral de la tierra es menor que la presión vertical. La presión vertical puede encontrarse a partir de $P = \gamma h$, pero la presión lateral se reduce de 40 a 80% dependiendo del tipo de terreno. Cuando la estructura está debajo del nivel de agua freática debe considerarse el efecto combinado de la presión del suelo y la presión del agua debajo del nivel del agua freática.

1.6.1.7. Expansión por temperatura

Cuando varía la temperatura de una estructura o de alguna de sus barras, el material tenderá a extenderse en una forma que por lo común se supone directamente proporcional al cambio de temperatura. Esto se expresa en términos de la deformación inducida por un incremento en la temperatura, o

$$\epsilon = \alpha \Delta T$$

donde ϵ = deformación unitaria

ΔT = cambio en la temperatura

α = coeficiente lineal de expansión térmica

1.6.2. Combinaciones de Cargas

Cualquiera o todas las cargas mencionadas con anterioridad pueden actuar sobre una estructura en un momento dado. Sin embargo, se requiere algún juicio para evitar cargas pesadas excepcionales muy poco probables de suceder. No debería esperarse que existieran en forma simultánea en la estructura un terremoto total y una carga máxima debida al viento. Algunos códigos permiten ya sea una reducción en las cargas o un aumento en el esfuerzo permisible cuando se consideran combinaciones de cargas.

En el caso de cargas muertas más cargas debidas al viento más cargas debidas a sismos, los esfuerzos permitidos son el 133% de los esfuerzos normalmente permitidos.

Ciertas estructuras de alto riesgo requieren de un análisis y diseño para distribuciones de cargas combinadas que representan accidentes. Como un ejemplo, la cubierta de un recipiente nuclear contaminante presurizado debe ser diseñado para resistir una presurización interna total debida a una falla en el sistema de enfriamiento y a un sismo intenso simultáneo. La ocurrencia de tales situaciones parece poco probable, pero la pérdida potencial es tan grande que los incidentes poco probables se traducen en grandes pérdidas humanas y económicas.

Esta noción lleva al campo del análisis de riesgos, que se basa tanto en conceptos económicos como de probabilidad. Los proyectos estructurales más importantes implicarán de manera inevitable una evaluación racional de las posibles combinaciones de cargas, a la luz del riesgo que significa una falla.

1.6.3. Introducción a la Distribución de Cargas.

La determinación de las cargas a ser aplicadas a una estructura es con frecuencia una tarea difícil. Aun cuando existen en códigos y normas muchas guías para la distribución mínima de cargas, son el juicio y la experiencia del ingeniero en estructuras los que desempeñan una función muy significativa para definir las condiciones de la distribución de cargas que debe soportar una estructura. Esto puede requerir a menudo una recolección de datos en el lugar en que se ubicará la estructura, como registros climáticos que cuantifiquen el viento, la nieve y las lluvias. Este tipo de información, junto con los requisitos de todos los códigos aplicables en la construcción, forman la base a partir de la cual el ingeniero en estructuras puede iniciar el modelado de las condiciones de carga.

Por lo general, las cargas son modeladas como cargas puntuales concentradas, cargas lineales o cargas superficiales. Una *carga puntual* (carga actuante sobre un área pequeña) puede, por ejemplo, representar la acción de otro componente estructural que entra en contacto con una barra, el soporte de una pieza pesada de equipo en el suelo o la rueda de un camión en la cubierta de un puente. Las *cargas lineales* son cargas expresadas en fuerza por unidad de longitud, como el peso de una pared divisoria que actúa sobre una trabe de apoyo, o el peso prorrateado de un sistema de piso que actúa sobre una viga de apoyo. Las *cargas superficialmente distribuidas* se dan en términos de fuerza por unidad de área y se suelen transformar a cargas lineales para el análisis de las estructuras. La carga lineal mencionada se debe a una carga distribuida que puede consistir en el peso por unidad de área del sistema de piso y del peso asociado con el pretendido uso del área, por ejemplo un salón de clases, un vestíbulo, una biblioteca o una bodega.

En general, las cargas pueden dividirse en dos grupos. Aquellas que consisten en el peso del sistema estructural por sí mismo se denominan *cargas muertas*. Las cargas que son fuerzas de la naturaleza y no son permanentes o están asociadas con el pretendido uso del área, son *cargas vivas*. Las cargas muertas requieren casi siempre de un cálculo directo pero cuidadoso del peso de todos los componentes; las cargas vivas son significativamente más difíciles de establecer debido a su naturaleza aleatoria.

1.7. Equilibrio, Indeterminación y Grados de Libertad

1.7.1. Ecuaciones Básicas del Equilibrio

Considérese cualquier cuerpo inicialmente en reposo que así permanece en la medida en que se le aplican cargas. Entonces se dice que dicho cuerpo se encuentra en un estado de equilibrio estático. Si ocurre algún movimiento, rectilíneo y con $v=\text{cte}$, puede considerarse que el cuerpo se encuentra en un estado de equilibrio dinámico. En esta ocasión sólo interesa analizar las estructuras que se encuentran en equilibrio estático y por esta razón los comentarios se restringirán a la representación matemática de dicho estado. Un cuerpo en el plano X-Y estará en equilibrio estático si se satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$\Sigma F_x = 0 \quad 1.5$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad 1.6$$

$$\Sigma M_z = 0 \quad 1.7$$

Debido a que casi todos los análisis estructurales se llevan a cabo por medio de una descripción de fuerzas y desplazamientos con respecto a un sistema cartesiano, la forma anterior será muy utilizada. Recuérdese, de la estática, que el equilibrio también puede expresarse vectorialmente como

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad 1.8$$

$$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad 1.9$$

En este caso se expresa cada fuerza y momentos como

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad 1.10$$

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \quad 1.11$$

Donde \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios en el sistema cartesiano x , y y z (figura 1.13). Se adoptará la convención de la regla de la mano derecha, ilustrada en la figura 1.13, cuando se haga referencia a los desplazamientos y acciones absolutos. Cuando sea apropiado, se adoptará alguna convención de signos especial para las fuerzas relativas y para los desplazamientos.

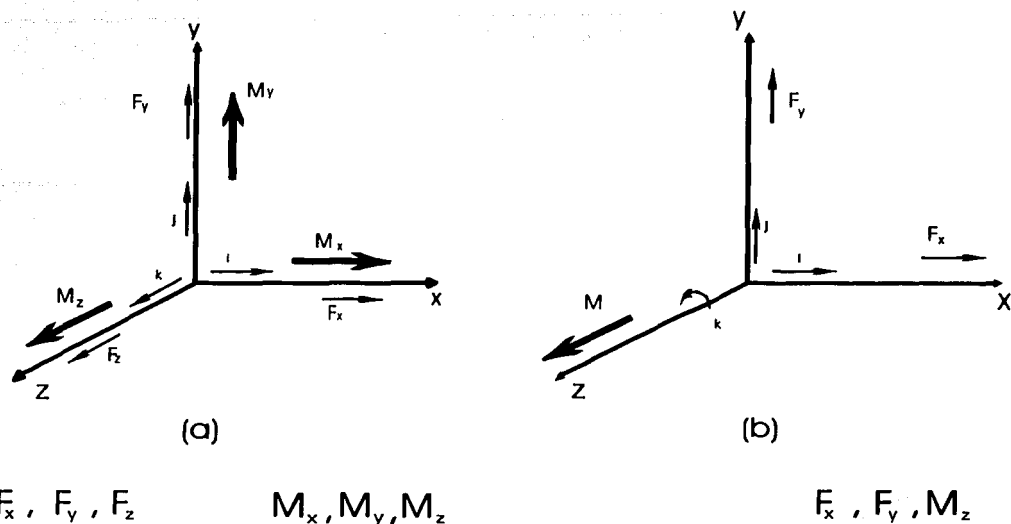


Figura 1.13. a) Fuerzas y momentos tridimensionales generales, b) Fuerzas bidimensionales y momento.

Ecuaciones alternativas de equilibrio

En ocasiones conviene trabajar con un conjunto diferente, pero equivalente, de ecuaciones de equilibrio. En un análisis bidimensional, las ecuaciones (1.5) a (1.6) pueden ser sustituidas por cualesquiera de los siguientes conjuntos de ecuaciones, pero con algunas restricciones.

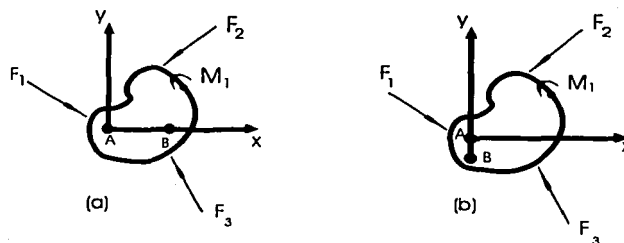


Figura 1.14 a) Puntos válidos A y B para $\Sigma M_A = \Sigma M_B = \Sigma F_x = 0$. b) Puntos inválidos A y B para $\Sigma M_A = \Sigma M_B = \Sigma F_x = 0$

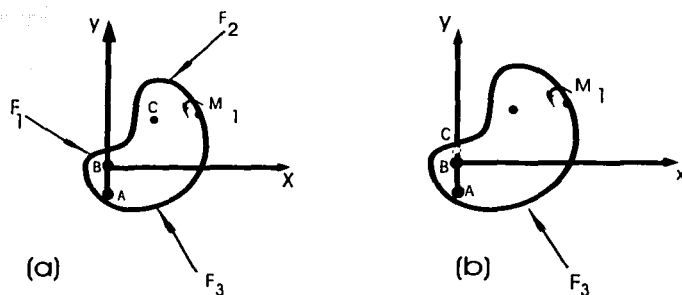


Figura 1.15 a) Puntos válidos A, B y C para $\Sigma M_A = \Sigma M_B = \Sigma M_C = 0$. b) Puntos válidos A, B y C para $\Sigma M_A = \Sigma M_B = \Sigma M_C = 0$.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{o} \quad \Sigma F_y = 0 \tag{1.12}$$

$$\Sigma M_A = 0 \tag{1.13}$$

$$\Sigma M_B = 0 \tag{1.14}$$

o

$$\Sigma M_A = 0 \tag{1.15}$$

$$\Sigma M_B = 0 \tag{1.16}$$

$$\Sigma M_C = 0 \tag{1.17}$$

La restricción en el primer conjunto, ecuaciones (1.12) a (1.13), es que los puntos A y B no están ambos en una línea perpendicular a la dirección de la sumatoria de la ecuación de fuerza.

Ecuaciones independientes y matrices de equilibrio

Un conjunto válido de ecuaciones de equilibrio se conoce como un conjunto independiente. Un conjunto inválido se conoce como un conjunto de ecuaciones dependientes. Es posible demostrar que un conjunto de ecuaciones dependientes no puede ser resuelto para un conjunto único de incógnitas. La dependencia tiene lugar cuando cualquiera de las ecuaciones puede ser escrita como una combinación lineal de algunas o de todas las ecuaciones restantes. Esta condición también puede representar una condición de inestabilidad geométrica. Aquí se puede demostrar esta situación haciendo referencia al cuerpo rígido de la figura 1.16

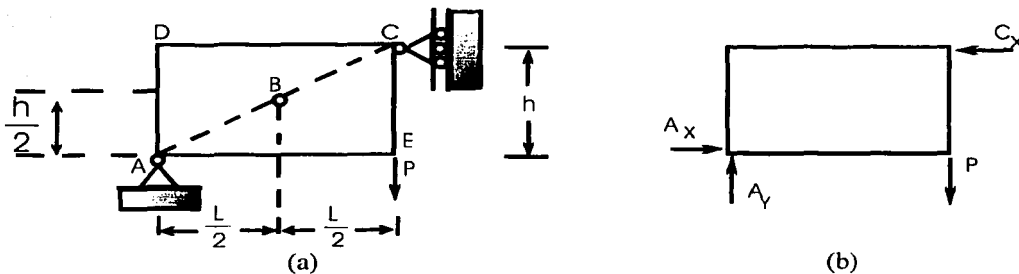


Figura 1.16 Un cuerpo rígido estable

Considérese el conjunto de ecuaciones $\Sigma M_A = \Sigma M_B = \Sigma M_C = 0$ aplicado al cuerpo libre de la figura 1.16a.

$$\Sigma M_A = -PL + C_x h = 0 \quad 1.18$$

$$\Sigma M_B = +\frac{h}{2} A_x - \frac{L}{2} A_y + C_x \frac{h}{2} - P \frac{L}{2} = 0 \quad 1.18b$$

$$\Sigma M_C = h A_x - A_y L = 0 \quad 1.18a$$

Este conjunto de ecuaciones no es resoluble para todas las incógnitas, ya que la segunda ecuación puede escribirse como una combinación lineal de las ecuaciones primera y tercera:

$$\Sigma M_B = \frac{1}{2} \Sigma M_A + \frac{1}{2} \Sigma M_C \quad 1.19$$

En esencia esto quiere decir que la ecuación $\Sigma M_B = 0$ no contiene información adicional alguna sobre el estado de equilibrio más allá del que está contenido en las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_C = 0$. Cualquier intento para resolver las ecuaciones (1.18a) a (1.18c) conducirá finalmente a la identidad $0 \equiv 0$.

Las ecuaciones (1.18a) a (1.18c) también se denominan singulares. Para ilustrar este punto, se describen dichas ecuaciones en un formato matricial.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ \frac{h}{2} & -\frac{L}{2} & \frac{h}{2} \\ h & -L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ C_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL \\ P\frac{L}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.20$$

Un sistema de ecuaciones es singular cuando la matriz de coeficientes de las incógnitas tiene un determinante igual a cero. El método más simple para obtener el determinante de esta matriz es expandirla en el primer renglón. Esto produce:

$$D = 0 \left[-\frac{L}{2} \cdot 0 - \frac{h}{2}(-L) \right] - 0 \left[\frac{h}{2} \cdot 0 - \frac{h}{2}h \right] + h \left[\frac{h}{2}(-L) - h \left(\frac{-L}{2} \right) \right] = 0 \quad 1.21$$

Como el determinante D es igual a cero, se dice que la matriz es singular y que ninguna solución es posible. En esta situación, $D = 0$ debido a una elección deficiente de ecuaciones, lo que no refleja realmente todas las condiciones conocidas acerca del sistema. Sin embargo, la estructura es estable y determinada, y de hecho existe una solución para A_x , A_y y para C_x . Utilizando $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma F_x = 0$, y $\Sigma F_y = 0$, es posible resolver el sistema para estas incógnitas y encontrar la más bien obvia solución $A_x = PL/h$, $A_y = P$, y $C_x = PL/h$.

Estas tres ecuaciones son

$$\Sigma F_x = A_x - C_x = 0 \quad 1.22a$$

$$\Sigma F_y = A_y - P = 0 \quad 1.22b$$

$$\Sigma M_A = C_x h - PL = 0 \quad 1.22c$$

En un formato de matrices, estas ecuaciones son de la forma $[B] \{F\} = \{P\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ C_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ PL \end{Bmatrix} \quad 1.23$$

$$[B] \{F\} = \{P\}$$

El determinante se obtiene ahora expandiendo la columna 1:

$$D = 1 [h(1) - 0(0)] - 0[0(h) - -1(0)] + 0[0(0) - 1(-1)] \quad 1.24$$

$$= h$$

Como $D \neq 0$, esta matriz tiene entonces una inversa. Multiplicando ambos lados por la inversa, se obtiene la solución anotada anteriormente, esto es,

$$[B]^{-1}[B]\{F\} = [B]^{-1}\{P\} \quad 1.25$$

$$\{F\} = [B]^{-1}\{P\}$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{h} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ C_x \end{Bmatrix} = & \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{h} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ PL \end{Bmatrix} \\ \text{inversa} & & & \text{inversa} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ C_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{h} \\ P \\ \frac{PL}{h} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ C_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{h} \\ P \\ \frac{PL}{h} \end{Bmatrix}$$

La matriz que se acaba de utilizar es conocida a menudo como matriz estática o de equilibrio. Esta matriz sólo relaciona las reacciones de la estructura a través de las condiciones de equilibrio con las cargas aplicadas.

Inestabilidad geométrica

Otra condición que conduce a un conjunto singular de ecuaciones es cuando el cuerpo o estructura no está sujeto de manera apropiada en contra del movimiento. Aunque puede haber un número adecuado de restricciones en los soportes, su arreglo o distribución puede ser de tal forma que no puedan resistir el movimiento provocado por una carga arbitrariamente aplicada. Esta condición representa no sólo una elección deficiente de

ecuaciones, sino que también es indicativa de la condición física real del sistema. Para ilustrar esto, considérese el ejemplo anterior, pero con el soporte de rodillos movido hacia el punto E, como se muestra en la figura 1.16. Utilizando el conjunto válido de ecuaciones $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M_B = 0$, se obtienen las relaciones:

$$A_x - E_x = 0 \quad 1.26$$

$$A_y - P = 0 \quad 1.27$$

$$A_x \frac{h}{2} - A_y \frac{L}{2} - P \frac{L}{2} - E_x \frac{h}{2} = 0 \quad 1.27$$

Escribiendo en forma matricial las ecuaciones de equilibrio, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{h}{2} & -\frac{L}{2} & -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ E_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ \frac{PL}{2} \end{Bmatrix} \quad 1.28$$

La forma más sencilla de obtener el determinante de esta matriz estática es expandirla en la segunda columna:

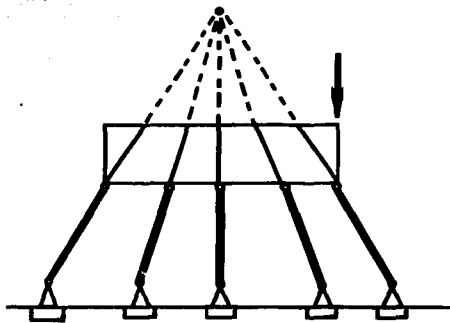
$$D = 0 \left(+ \frac{L}{2} \right) + 1 \left[- \frac{h}{2} - \left(- \frac{h}{2} \right) \right] - \left(- \frac{L}{2} \right) \quad 1.29$$

$$= 0$$

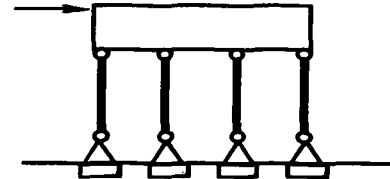
En este caso, el sistema de ecuaciones fue válido, pero la estructura es inestable por sí misma y debido a eso no hay solución posible, como está indicado por $D = 0$. La razón física de esta inestabilidad se explica debido a que en este caso todas las reacciones que actúan sobre el cuerpo rígido concurren en el mismo punto, A. Como consecuencia, el sistema no puede reaccionar contra un momento, que en este caso es provocado por P. Esto resulta obvio si se tratan de sumar los momentos alrededor del punto A. La línea de acción de la fuerza en E también pasa por este punto, y por tanto E_x no puede ofrecer un momento resistente para balancear el momento causado por la fuerza P.

También es importante observar que la inestabilidad de esta estructura se estableció independientemente de las cargas. Esto es, la matriz estática no involucra cargas aplicadas;

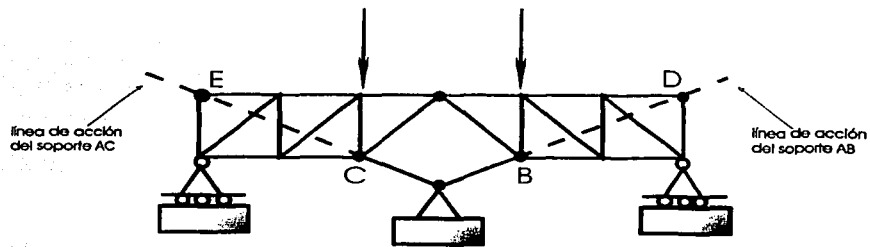
solo refleja la geometría de la estructura y la ubicación y orientación de las fuerzas reactivas.



Las fuerzas concurrentes en el cuerpo rígido no pueden resistir un momento al rededor de O .



Las fuerzas paralelas verticales en el cuerpo rígido no pueden resistir una carga horizontal.



Fuerzas concurrentes en una armadura

Figura 1.17 Condiciones inestables

Con solamente examinar esta matriz es posible determinar el estado de estabilidad bajo cualquier conjunto arbitrario de cargas.

En la figura 1.17 se ilustran otros sistemas especiales de fuerza que son geoméricamente inestables. Si alguna distribución arbitraria de cargas no puede ser resistida por una estructura, entonces la estructura es inestable.

Otra situación que puede considerarse como geoméricamente inestable se muestra en la figura 1.18a y b. Aquí, todas las fuerzas son concurrentes. En esta situación, la carga P de la figura 1.18a no puede ser resistida por las fuerzas en las dos barras, ya que ninguna de ellas puede ofrecer una componente de fuerza en la dirección de la carga aplicada. Este sistema puede volverse estable sólo después de ocurrir algún desplazamiento del punto A, y por esta razón debe considerarse como potencialmente inestable. En la figura 1.18b existe la misma situación. Obsérvese que en este caso cualquier fuerza P tendrá una componente perpendicular a las dos fuerzas paralelas, dando como resultado la misma situación de la figura 1.18a.

Puede expresarse la condición de la figura 1.18b como

$$-F_1 \cos \theta + F_2 \cos \theta + P = 0 \quad 1.30$$

$$-F_1 \sin \theta + F_2 \sin \theta + 0 = 0 \quad 1.31$$

o bien, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} -\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.32$$

El determinante de la matriz de coeficiente es

$$D = -\cos \theta \sin \theta - (-\cos \theta \sin \theta) = 0 \quad 1.33$$

como podría esperarse para una condición inestable.

El único estado de equilibrio para este arreglo de fuerzas ocurre cuando $P = 0$. Esta es, de hecho, una observación útil muy empleada en el análisis de armaduras. Considérese la armadura sencilla que se muestra en la figura 1.18c. Obsérvese la barra vertical conectada en el nudo 4. Como es perpendicular a las barras 4 y 5 y como ningunas otras cargas actúan en el nudo 4, la barra 3 debe tener una fuerza igual a cero. Dicha barra se denomina barra de fuerza nula. Cualquier otro valor de F_3 podría dar como resultado una condición inestable. La figura 1.18d muestra otra armadura con varias barras de fuerza nula para la distribución de cargas ilustrada. La habilidad para identificar a las barras de fuerza nula puede ser una ayuda invaluable en el análisis de armaduras.

La inestabilidad geométrica también se produce cuando no hay un número suficiente de reacciones para resistir las cargas aplicadas. Esta situación se identifica fácilmente al comparar el número disponible de ecuaciones de equilibrio con el número de reacciones desconocidas. Para el ejemplo anterior, las variaciones mostradas en la figura 1.19 son obviamente inestables debido a la falta de sujeciones para prevenir el movimiento. Como hay tres ecuaciones de equilibrio para un cuerpo bidimensional, debe haber por lo menos

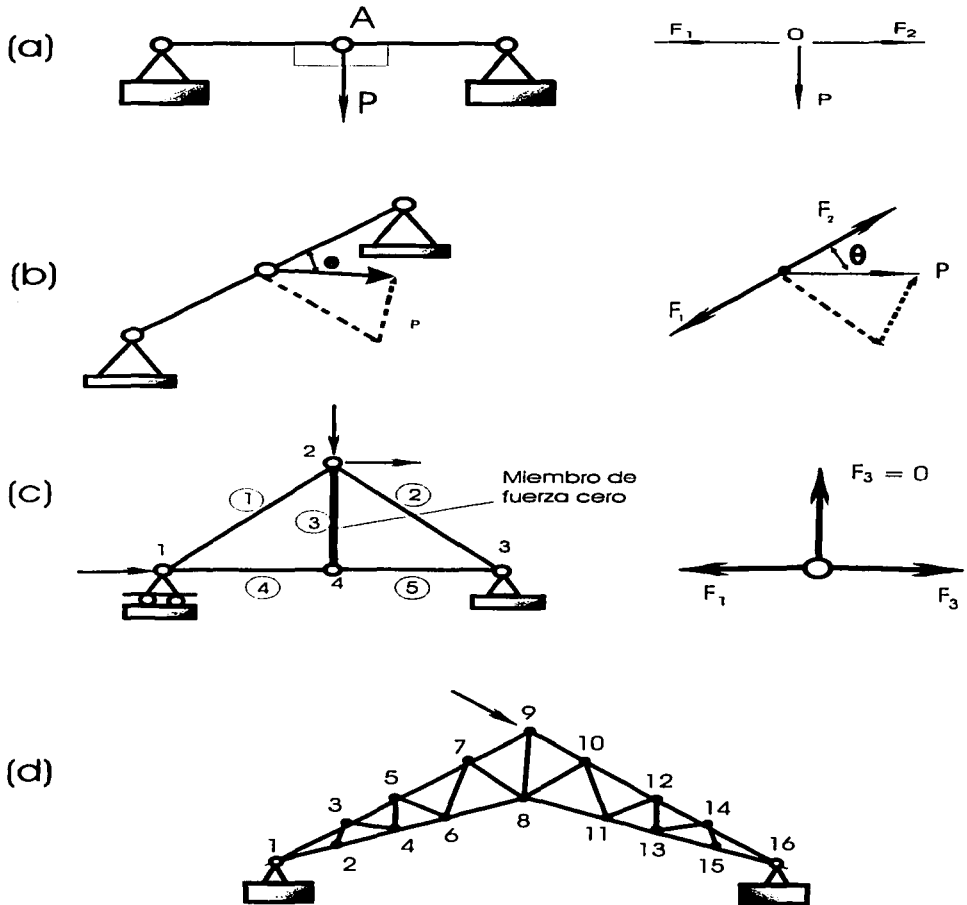


Figura 1.18 a, b) Fuerzas concurrentes geoméricamente inestables. c, d) Barra de fuerza cero.

tres reacciones independientes para prevenir el movimiento. Siempre que el número de incógnitas sea menor que el número disponible de ecuaciones de equilibrio, la estructura será inestable. En la siguiente sección, se considerarán los mecanismos con los que es posible determinar las fuerzas desconocidas y las ecuaciones disponibles para los sistemas estructurales comunes. El resultado de dicha investigación permitirá clasificar el grado de indeterminación del sistema estructural.

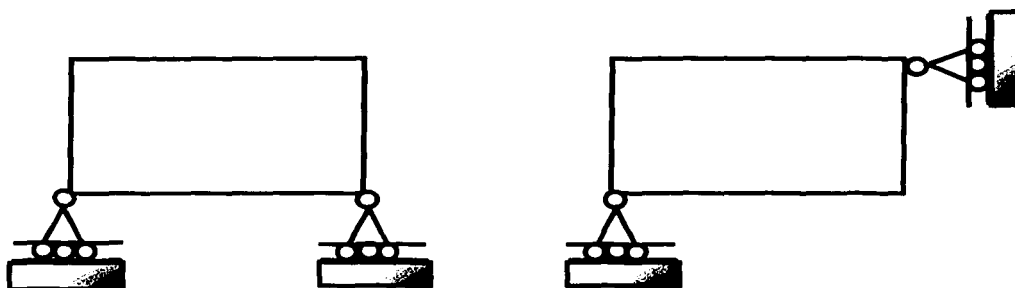
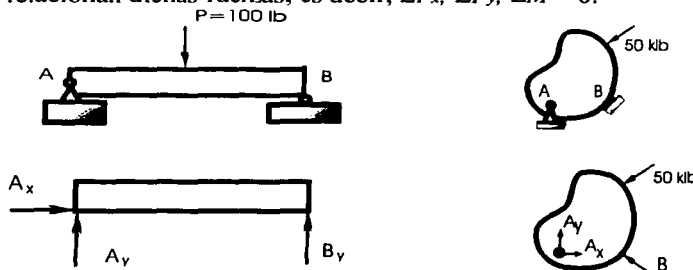


Figura 1.19 Inestabilidad debida a la carencia de soporte

1.7.2. Determinación e Indeterminación estática de sistemas

Los conceptos de equilibrio desarrollados en la sección anterior pueden utilizarse para determinar todas las fuerzas desconocidas que actúan en un cuerpo dado, suponiendo que hay tantas ecuaciones de equilibrio como incógnitas. Cuando existe esta condición, se dice que el sistema es determinado. Los cuerpos de la figura 1.20, por ejemplo, están determinados ya que hay tres fuerzas desconocidas independientes y tres ecuaciones de equilibrio que relacionan dichas fuerzas, es decir, ΣF_x , ΣF_y , $\Sigma M = 0$.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 1.20 Cuerpos estáticamente determinados

Si se utiliza un conjunto válido de ecuaciones de equilibrio, es posible determinar las tres fuerzas desconocidas. Suponiendo que no hay inestabilidades geométricas, habrá solución única. Si se añade un soporte adicional a cada uno de los cuerpos de la figura 1.20, se obtendrían los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 1.21. Aquí se observa que hay cuatro fuerzas desconocidas independientes y sólo tres ecuaciones de equilibrio. Los sistemas de este tipo de llaman indeterminados. Son indeterminados en el sentido de que no es posible encontrar *todas* las fuerzas desconocidas utilizando únicamente los conceptos de equilibrio. Se dice que el ejemplo sencillo de la figura 1.21 es indeterminado en primer grado, puesto que hay una incógnita más que las ecuaciones disponibles de equilibrio. El grado de indeterminación se define siempre como la diferencia entre el número de fuerzas desconocidas y el número disponible de ecuaciones de equilibrio para obtener estas incógnitas. Estas fuerzas adicionales se denominan redundantes. Para el caso de un simple cuerpo, se encuentra con facilidad el grado de indeterminación, es decir, el número de redundantes, al dibujar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo y al definir cada reacción como se hizo en la figura 1.21.

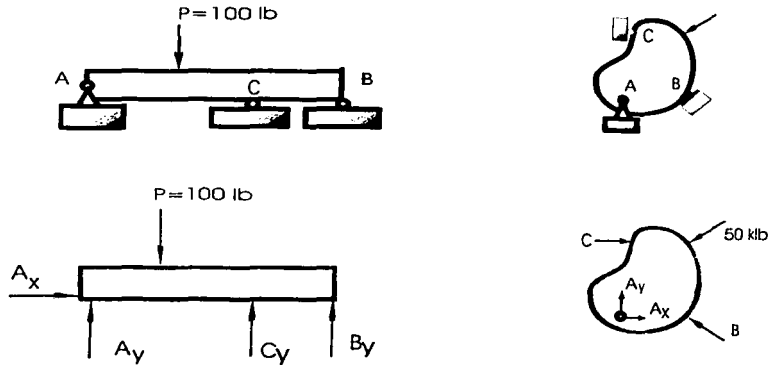


Figura 1.21 Cuerpos estáticamente indeterminados

En general, los sistemas estructurales son mucho más complejos, pero pueden concebirse como una sucesión de cuerpos conectados. Es posible pensar que cada barra y nudo de un marco o armadura es un cuerpo. Los barras están conectadas mutuamente, ya sea por nudos rígidos o de pasador. Ahora se considerará un procedimiento general para determinar el número disponible de ecuaciones de equilibrio y el número de incógnitas para cualquier conjunto de barras conectadas. En un principio los comentarios se limitarán a las estructuras bidimensionales, pero la extensión a tres dimensiones es directa.

1.7.2.1. Indeterminación Estática de Marcos Planos

Cualquier marco puede ser definido por el número de barras (NB), por el número de nudos (NN) y por el número de componentes de reacción externa aportados por los soportes (NR). Estos distintos componentes se muestran en la figura 1.22. Ahora se desarrollará una expresión para el grado de indeterminación en términos de esas cantidades. Para llevar a cabo esto, es necesario determinar el número total de incógnitas y el número total de ecuaciones.

Si la estructura *total* va a estar en un estado de equilibrio, entonces cada cuerpo mostrado en la figura 1.22 debe estar en equilibrio, esto es, cada barra y cada nudo debe estar en equilibrio. Para cada cuerpo bidimensional hay tres ecuaciones de equilibrio.

Por tanto, es posible afirmar que el número total de ecuaciones disponibles (NEQ) está dado por

$$NEQ = 3NB + 3NN \quad 1.34$$

La cantidad de incógnitas del sistema consiste en el número de fuerzas de extremo y en el número de componentes de reacción. Para cada barra del marco hay seis fuerzas extremas. En consecuencia, es posible afirmar que el número de incógnitas (NUK) se puede expresar como

$$NUK = 6NB + NR \quad 1.35$$

La condición de determinación estática requiere que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones de equilibrio. Así pues, la determinación se define como

$$NUK = NEQ \quad 1.36$$

$$6NB + NR = 3NN + 3NB \quad 1.37$$

o

$$3NB + NR = 3NN \quad 1.38$$

Otra forma de ver la última ecuación es reconocer que sólo hay tres fuerzas independientes en los extremos de cualquier miembro para cada barra que está en equilibrio.

Ahora es posible definir el grado de indeterminación como

$$IND = \text{grado de indeterminación} = 3NB + NR - 3NN$$

Como se anotó en la sección anterior, se necesitan tres componentes independientes de reacción si la estructura es estable. Esta condición es necesaria pero no suficiente. El grado de indeterminación es simplemente el número de incógnitas que supera el número de ecuaciones. Para el marco de la figura 1.22, se tiene

$$IND = \text{grado de indeterminación} = 3(3) + 5 - 3(4) = 2$$

La ecuación 1.38 es aplicable a cualquier marco que tenga barras continuas y nudos internos rígidos.

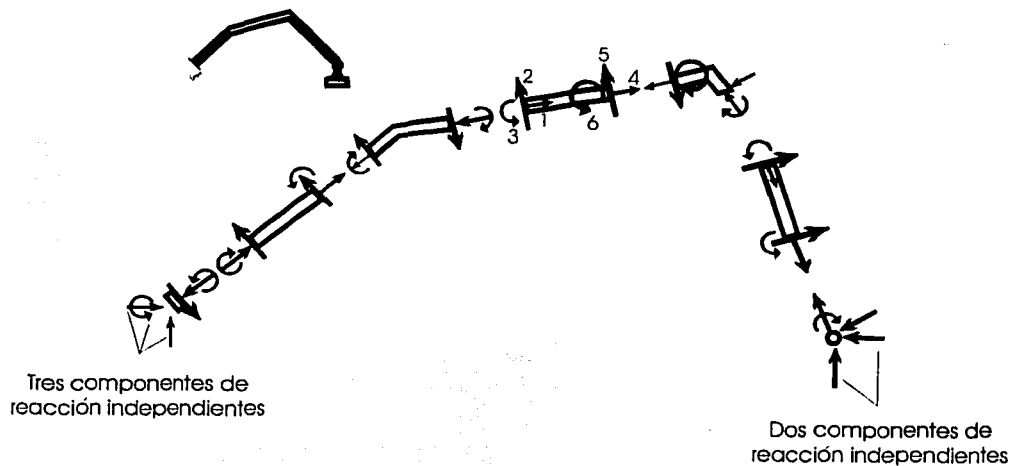


Figura 1.22. Marco de ejemplo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.7.2.2. Indeterminación Estática de Armaduras Planas

Se puede derivar la ecuación para encontrar la indeterminación de una armadura siguiendo las mismas líneas de razonamiento que para un marco. La distinción más notable es que una armadura se idealiza como integrada por barras que soportan solo fuerzas axiales. No hay fuerzas cortantes o momentos en la barra idealizada de la armadura. En la figura 1.23a se muestran los diagramas de cuerpo libre de las barras y los nudos de una armadura bidimensional. Para cada barra de la armadura hay dos fuerzas extremas, pero por equilibrio a lo largo de la barra, estas deben ser iguales y opuestas; de aquí que haya solamente una incógnita independiente para cada barra. La cantidad total de incógnitas consiste en las fuerzas de barra y de los componentes independientes de reacción, lo cual puede expresarse ahora como

$$NUK = NB + NR$$

donde NB = número de barras

NR = Número de componentes de reacción

Además del equilibrio de las barras, se dispone de las ecuaciones restantes de equilibrio de los nudos para resolver NUK incógnitas. Se supone que en cada nudo todas las fuerzas son concurrentes y que no existen momentos, como resultado de ello, hay dos ecuaciones de equilibrio disponibles para cada nudo. En consecuencia, el número de ecuaciones está dado por

$$NEQ = 2NN \quad 1.39$$

Donde NN = número de nudos

La condición de determinación está definida por

$$NEQ = NUK$$

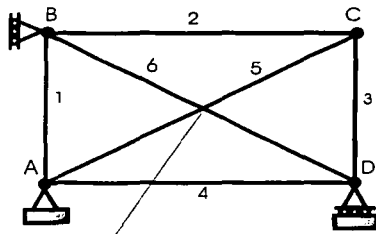
O

$$2NN = NB + NR \quad 1.40$$

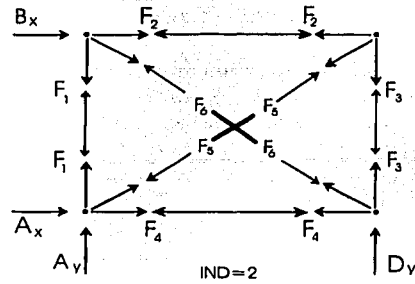
Entonces el grado de indeterminación es

$$IND = NB + NR - 2NN \quad 1.41$$

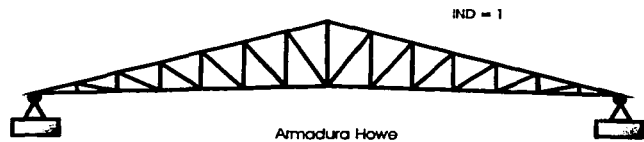
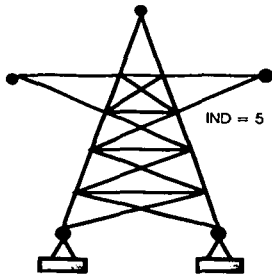
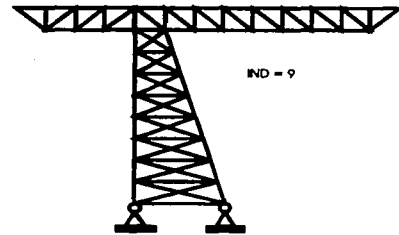
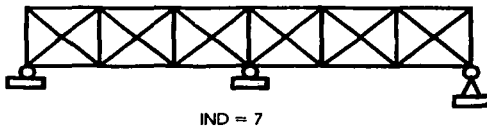
De Nuevo, NR debe ser mayor o igual que 3 para que la estructura sea estable. Esta condición es necesaria pero no suficiente para asegurar la estabilidad.



Los miembros 5 y 6 no están conectados en el centro



(a)



(b)

Figura 1.23 a) Armadura estáticamente indeterminada en dos grados, y b) otras armaduras estáticamente indeterminadas.

1.7.3. Grados de Libertad

Los grados de libertad de una estructura son el número mínimo de parámetros necesarios para describir de manera única la figura deformada de la estructura. Los parámetros pueden ser ciertos desplazamientos y rotaciones en diversos puntos de la estructura. Este es el tipo más común de grados de libertad y es el que se usará aquí. En contraste, la forma desplazada de una barra estructural puede expresarse en términos de una ecuación, por lo general un polinomio. Los coeficientes de la variable independiente (es decir, a , b y c de $y = ax^2 + bx + c$) pueden servir también como los parámetros que definan la posición de la curva elástica y por ello de la forma desplazada. A menudo estos parámetros son referidos como desplazamientos generalizados o grados de libertad generalizados.

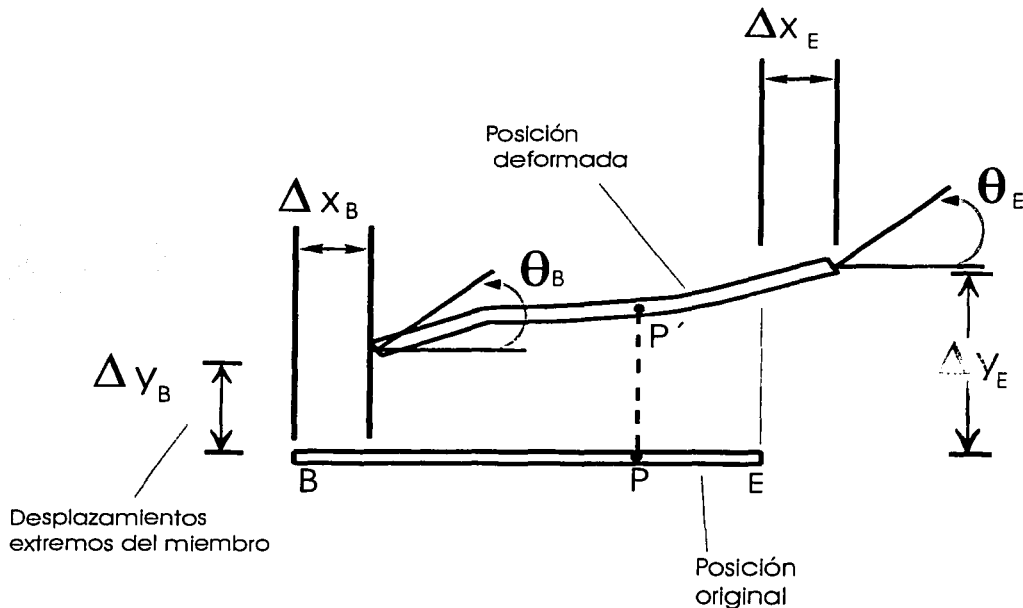


Figura 1.24 Barra de un marco, estado deformado y desplazamientos extremos.

La figura 1.24 ilustra el perfil deformado de una barra de un marco bidimensional. El desplazamiento en todos los puntos de la barra pueden definirse de una manera única si los seis desplazamientos que se muestran están definidos. Los seis desplazamientos constan del desplazamiento independiente en las dos direcciones cartesianas y de una rotación. Si la barra es parte de un marco *rígido*, entonces los tres desplazamientos en los extremos de las barras que se ensamblan en un nudo serán iguales. Es entonces aparente que el número de grados de libertad para un marco rígido estable bidimensional será, cuando mucho,

$$NDOF = (\text{del inglés } \textit{Number of Degrees of Freedom}) \text{ número de grados de libertad} \\ = 3NN - 3 \quad 1.42$$

El -3 en esta ecuación representa el número de sujeciones requerido para prevenir movimientos de cuerpo rígido de la estructura. Por supuesto que los movimientos de cuerpo rígido deben prevenirse si la estructura ha de permanecer estable, como se muestra en la figura 1.25.

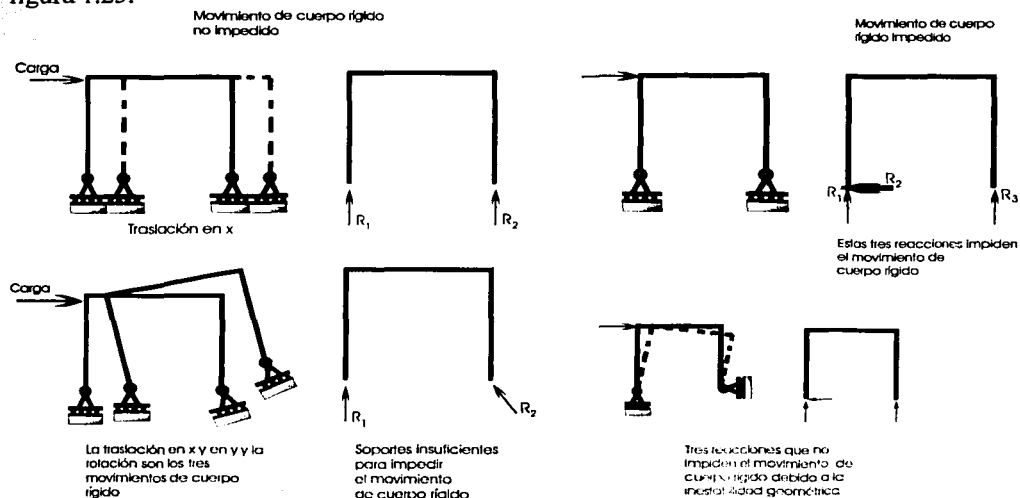


Figura 1.25. Movimientos de un marco rígido.

Naturalmente que puede haber cualquier cantidad de sujeciones, de tal forma que la ecuación general para el número de grados de libertad puede escribirse como

$$NDOF = 3NN - NR \quad 1.43$$

donde $NR \geq 3$ para un marco rígido estable bidimensional. En una estructura tridimensional esta ecuación se transforma en

$$NDOF = 6NN - NR \quad 1.44$$

donde $NR \geq 6$ para un marco estable. En cada nudo de esta estructura hay seis posibles grados de libertad independientes, como se muestra en la figura 1.26. También hay seis posibles movimientos de cuerpo rígido.

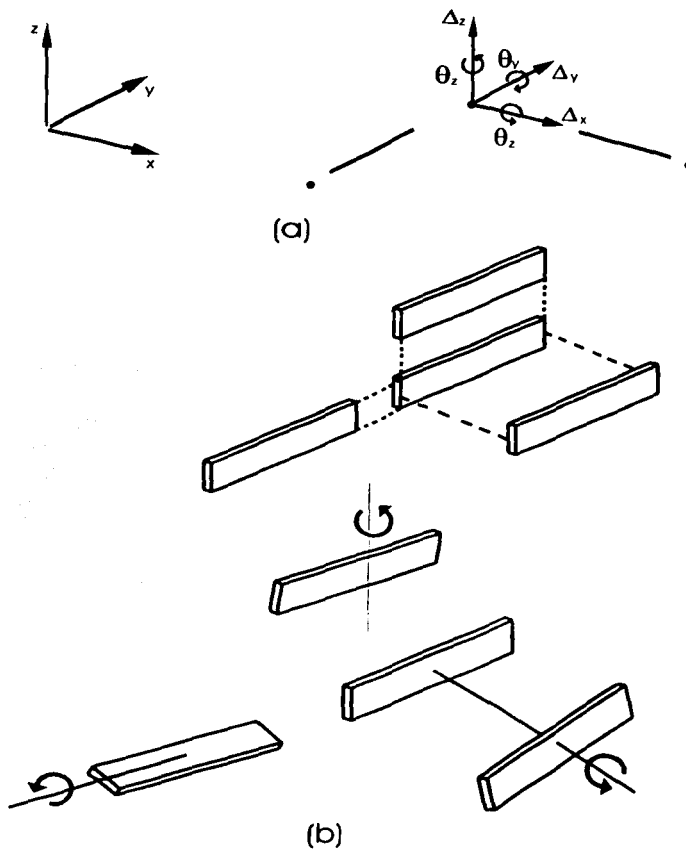


Figura 1.26. Seis grados de libertad independientes.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Las armaduras representan un tipo especial de estructura, en el que únicamente existen fuerzas axiales. Como no hay deformaciones de flexión, todas las barras permanecen rectas y el perfil desplazado total de la barra de la armadura puede definirse con los cuatro desplazamientos que se muestran en la figura 1.27. En cada nudo de pasador, los desplazamientos de los extremos de las barras comunes al nudo tendrán los mismos desplazamientos x y y . Así, el número de grados de libertad es

$$NDOF = 2NN - NR$$

$$NR \geq 3$$

$$1.45$$

Para armaduras tridimensionales, la ecuación se transforma en

$$NDOF = 3NN - NR \quad NR \geq 6$$

1.46

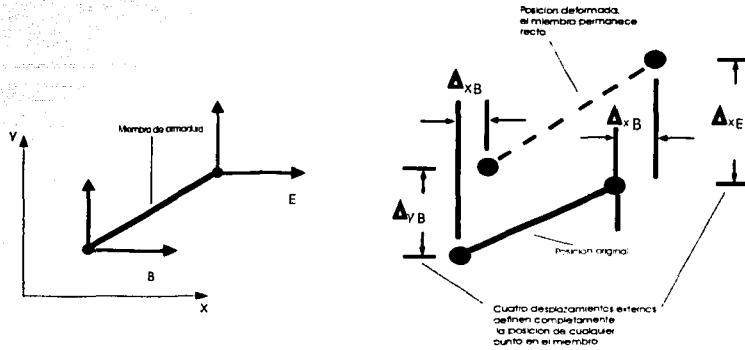


Figura 1.27. Desplazamientos independientes para una barra de armadura.

La figura 1.28 ilustra los grados de libertad de varios marcos y armaduras.

Es importante recordar que la definición de los grados de libertad afirma que los parámetros requeridos son el mínimo número necesario para definir completamente el perfil desplazado. En general, puede pensarse que toda estructura tiene una cantidad infinita de desplazamientos. Por lo común se requiere trabajar con el menor número posible de parámetros desconocidos y por ello, como se definieron aquí, los grados de libertad representan este número mínimo de incógnitas.

A lo largo de este texto se utilizará el término “grados de libertad” en un sentido más general, para significar *todos* los desplazamientos posibles de los nudos de una estructura.

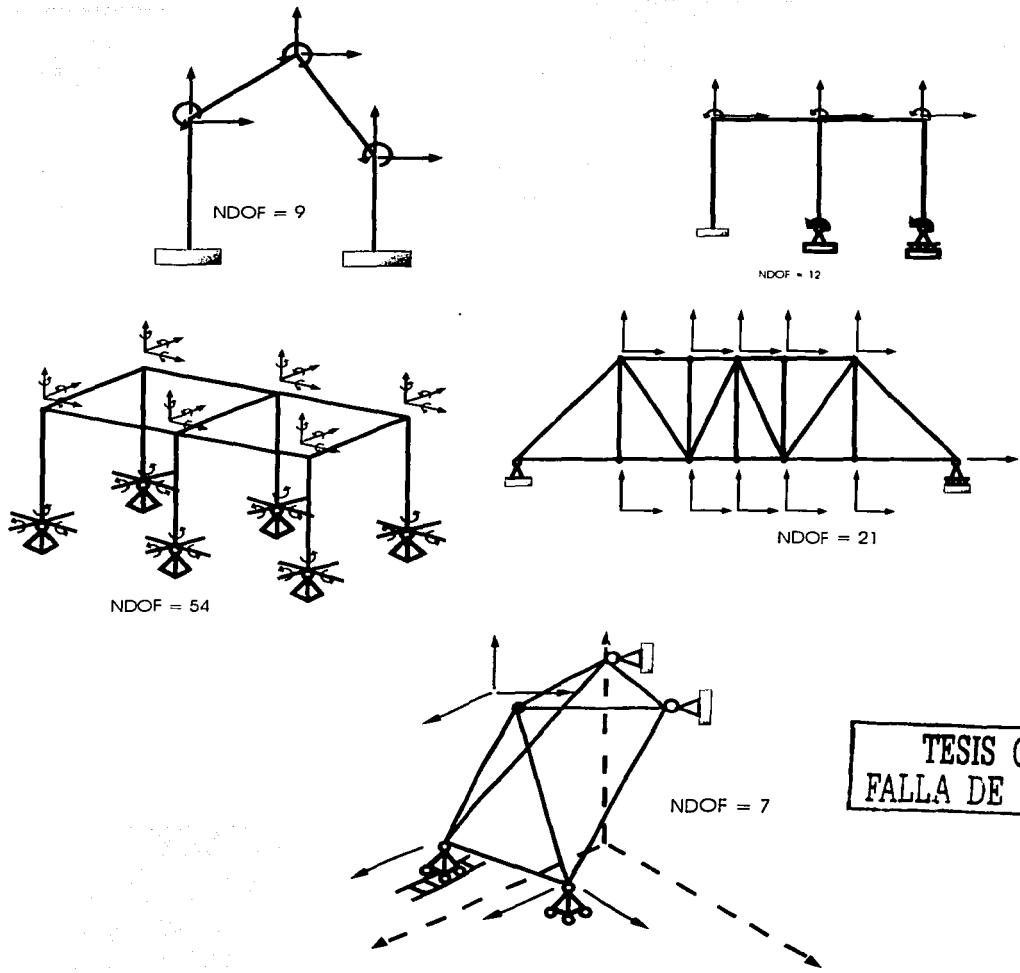


Figura 1.28 Grados de libertad en marcos y armaduras

Algunos de estos movimientos estarán restringidos y se denominarán *desplazamientos prescritos* o *fijos*. Los desplazamientos restantes serán referidos como *desplazamientos libres* (véase la fig. 1.29).

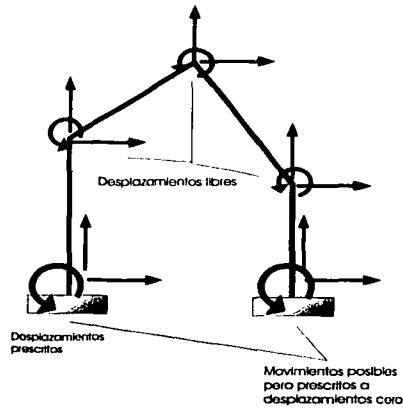


Figura 1.29 Grados de libertad libres y prescritos

1.8. Diagramas De Cuerpo Libre.

Probablemente la herramienta más útil disponible para el análisis de una estructura es el diagrama de cuerpo libre, por ejemplo: la figura 1.30 muestra una parte de un sistema estructural que ha sido separado para su análisis. Cuando se realiza un diagrama de cuerpo libre de una porción de un sistema completo no solo las fuerzas externas actuantes son mostradas sino también la influencia de esa parte del sistema sobre el mismo.

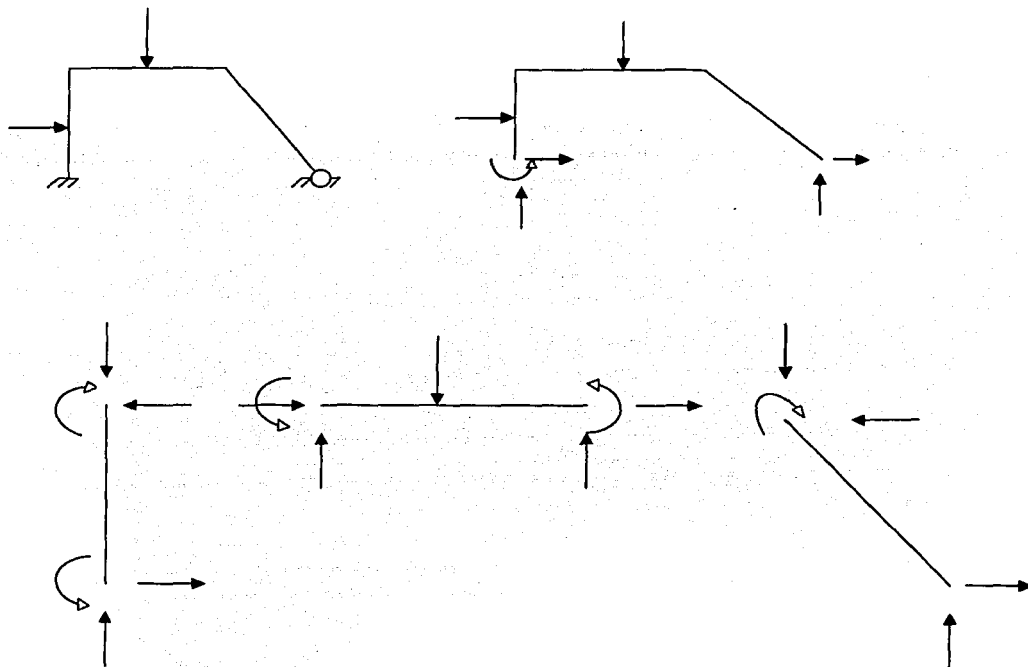


Figura 1.30 Diagrama de cuerpo libre

Si una estructura como la mostrada en la figura 1.30 es separada por los soportes, entonces las acciones de restricción de los mismos, llamadas reacciones, son mostradas en el diagrama de cuerpo libre actuando en la estructura como ilustra la figura. Cuando un segmento particular de la estructura es separado, la influencia de los segmentos adyacentes sobre él es indicada por acciones internas equivalentes actuando en los extremos. Es importante hacer notar que cuando un elemento de una estructura es cortado por una línea

imaginaria en el proceso de aislamiento de un segmento de la estructura, las acciones correspondientes aparecen en ambas caras de corte y tienen la misma magnitud pero sentidos opuestos. Esto debe ser siempre bien recordado, cuando se realice un diagrama de cuerpo libre, debe cumplirse tanto el equilibrio externo como el interno.

Inicialmente, cuando se realice un diagrama de cuerpo libre de una estructura o de un segmento de la misma solo se conocen el punto de aplicación y la línea de acción de las fuerzas correspondientes a las reacciones o a las acciones equivalentes internas; la magnitud y dirección de estas fuerzas es siempre desconocida. De cualquier forma es siempre necesario suponer una dirección para estas fuerzas a fin de completar el diagrama de cuerpo libre. Si suponemos una dirección incorrecta para alguna o algunas de las fuerzas el mismo análisis del diagrama (siempre y cuando se cumpla el equilibrio) nos mostrará nuestro error.

El correcto uso de los diagramas de cuerpo libre será de gran ayuda en el análisis de estructuras y será también muy valioso para evitar y prevenir graves errores en el proceso.

2. Método Clásico de las Rigideces.

2.1. Introducción al Método.

El método básico de la rigidez deriva su nombre del hecho de que tanto las relaciones de fuerza-desplazamiento de las barras como de la estructura se expresan en términos de la rigidez. Iniciando con la relación de rigidez entre las fuerzas de una barra estructural y sus desplazamientos, se utilizan las relaciones de equilibrio y compatibilidad del sistema para generar un conjunto de N ecuaciones con N desplazamientos estructurales o grados de libertad desconocidos. Estas ecuaciones finales son de la misma forma que las relaciones fuerza-desplazamiento en el elemento; esto es, algún conjunto de fuerzas es equivalente al producto de la rigidez de la estructura y los desplazamientos de la estructura. Una vez formadas estas ecuaciones, pueden resolverse para los desplazamientos de la estructura. Estos valores pueden entonces sustituirse en las relaciones entre fuerza y desplazamientos y de compatibilidad para encontrar todas las fuerzas y deformaciones de la barra.

Para definir el procedimiento paso a paso de este método, primero se adoptarán las siguientes notaciones:

Δ = desplazamientos de la estructura en sus nudos (desplazamientos externos)

e = deformaciones de barra (desplazamientos internos)

P = fuerzas de la estructura o de los nudos (fuerzas externas)

F = fuerzas de las barras (fuerzas internas)

Los desplazamientos de la estructura pueden todavía dividirse en dos clases:

Δ_r = desplazamientos en dirección de un grado de libertad (desplazamientos libres)

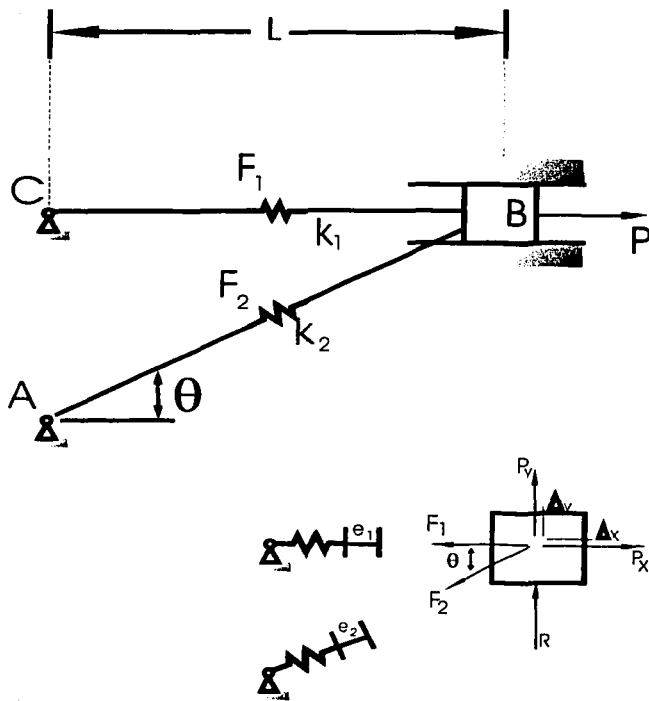
Δ_i = desplazamientos que son prescritos o impuestos

En forma análoga, las fuerzas de la estructura pueden dividirse en dos grupos:

P_r = fuerzas en dirección de los grados de libertad

P_i = fuerzas en dirección de los desplazamientos prescritos o impuestos

Las negritas se utilizan aquí para indicar que, en general, cada una de esas cantidades realmente representa un conjunto o colección de fuerzas o desplazamientos. Para el modelo estructural se definen estos términos en la figura 2.1.



$$\Delta = \Delta_x, \Delta_y$$

$$\mathbf{P} = P_x, P_y, R$$

$$\mathbf{e} = e_1, e_2$$

$$\mathbf{F} = F_1, F_2$$

$$\Delta \mathbf{f} = \Delta_x$$

$$\mathbf{P} \mathbf{f} = P_x$$

$$\Delta \mathbf{t} = \Delta_y$$

$$\mathbf{P} \mathbf{t} = R, P_y$$

Figura 2.1 Definición de las fuerzas estructurales y desplazamientos. Definición de las fuerzas de las barras y desplazamientos.

Pasos del método clásico de las rigideces

Los pasos del método clásico de las rigideces pueden plantearse como sigue:

PASO 1 Formar las ecuaciones de equilibrio, y de compatibilidad de fuerza-desplazamiento.

$$\mathbf{P} = f(\mathbf{F}), \mathbf{e} = f(\Delta), \mathbf{F} = f(\mathbf{e})$$

PASO 2 Sustituir las relaciones de compatibilidad en las relaciones entre fuerzas y desplazamientos para obtener un sistema de ecuaciones que relacione las fuerzas \mathbf{F} de las barras con los desplazamientos Δ .

$$\begin{array}{c} \mathbf{e} = f(\Delta) \\ \downarrow \\ \mathbf{F} = f(\mathbf{e}) = f(\Delta) \end{array}$$

PASO 3 Sustituir las fuerzas de las barras, ahora en términos de Δ , en las ecuaciones de equilibrio para obtener un sistema de ecuaciones que relacione las fuerzas estructurales \mathbf{P} con los desplazamientos Δ .

$$\begin{array}{c} \mathbf{F} = f(\Delta) \\ \downarrow \\ \mathbf{P} = f(\mathbf{F}) = f(\Delta) \end{array}$$

PASO 4 Resolver las ecuaciones del paso 3, que están escritas en las direcciones de los grados de libertad para los desplazamientos libres Δ_f .

PASO 5 Resolver aquellas ecuaciones del paso 3 que estén escritas en la dirección de los desplazamientos prescritos Δ_r para las fuerzas en la dirección de los desplazamientos prescritos \mathbf{P}_r .

PASO 6 En el paso cuatro se define completamente a Δ . Estos desplazamientos pueden sustituirse ahora en las ecuaciones que resultan del paso 2, es decir, $\mathbf{F} = f(\Delta)$ para definir las fuerzas de las barras.

Ahora se ilustrarán estos pasos para el modelo de la figura 2.1.

PASO 1 Las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y de fuerza desplazamiento para el modelo de resortes repetido en la figura 2.1 se escriben como:

$$-F_1 - F_2 \cos \theta + P_x = 0 \quad 2.1$$

equilibrio

$$P_y - F_2 \operatorname{sen} \theta + R = 0 \quad 2.2$$

$$e_1 = \Delta_x \quad 2.3$$

compatibilidad

$$e_2 = \cos \theta \Delta_x + \operatorname{sen} \theta \Delta_y \quad 2.4$$

$$F_1 = k_1 e_1 \quad 2.5$$

fuerza-desplazamiento

$$F_2 = k_2 e_2 \quad 2.6$$

Como se muestra en la figura 2.1, se incluyó una fuerza aplicada P_y en la segunda ecuación de equilibrio. Se verá que esta fuerza es absorbida completamente por la reacción. Un valor de $P_y = -mg$ podría, por ejemplo, representar el peso del bloque.

PASO 2 La sustitución de las relaciones de compatibilidad en las ecuaciones de las fuerzas de desplazamiento produce

$$F_1 = k_1 \Delta_x \quad 2.7$$

$$F_2 = k_2 (\cos \theta \Delta_x + \operatorname{sen} \theta \Delta_y) \quad 2.8$$

PASO 3 Ahora se sustituyen las fuerzas del paso 2 en las ecuaciones de equilibrio:

$$-k_1 \Delta_x - k_2 (\cos \theta \Delta_x + \operatorname{sen} \theta \Delta_y) \cos \theta + P_x = 0 \quad 2.9$$

$$P_y - k_2 (\cos \theta \Delta_x + \operatorname{sen} \theta \Delta_y) \operatorname{sen} \theta + R = 0 \quad 2.10$$

PASO 4 Ahora se resuelven las ecuaciones escritas en la dirección del grado de libertad 2.9 para el desplazamiento libre Δ_y . En este caso, $\Delta_y = 0$ es un desplazamiento restringido y Δ_x es el desplazamiento libre. Resolviendo 2.9 se obtiene

$$\Delta_x = \frac{P_x}{k_1 + k_2 \cos^2 \theta} \quad 2.11$$

Si se requiere la guía para desplazar verticalmente una cantidad, es posible fijar Δ_y a este valor impuesto y resolver 2.9 para obtener

$$\Delta_x = \frac{P_x - k_2 \Delta \cos \theta \sin \theta}{k_1 + k_2 \cos^2 \theta} \quad 2.12$$

PASO 5 Suponiendo $\Delta_y = 0$, ahora se resuelven las ecuaciones escritas en la dirección del desplazamiento restringido 2.10 para la reacción R .

Obsérvese que para este paso se necesita el resultado del paso 4 (es decir, Δ_x).

Sustituyendo Δ_x en 2.10 y resolviendo para la reacción R , se obtiene

$$R = \frac{P_x k_2 \cos \theta \sin \theta}{k_1 + k_2 \cos^2 \theta} - P_y \quad 2.13$$

Obsérvese que si se aplica una carga P_y en el nudo B , es absorbida completamente por el soporte, como se indica con $-P_y$ en la ecuación 2.13.

PASO 6 Para determinar las fuerzas de las barras, ahora se sustituyen los desplazamientos en los resultados del paso 2:

$$F_1 = \frac{k_1 P_x}{k_1 + k_2 \cos^2 \theta} \quad 2.14$$

$$F_2 = \frac{k_2 P_x \cos \theta}{k_2 + k_2 \cos^2 \theta} \quad 2.15$$

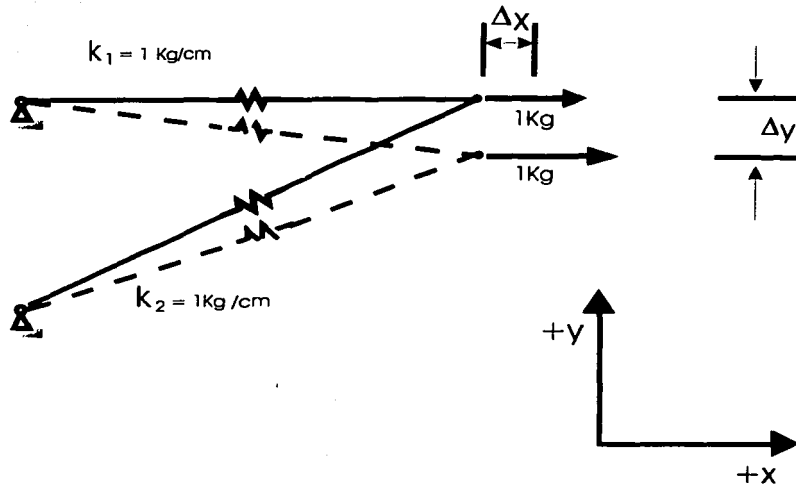


Figura 2.2. Definición de desplazamientos

Las ecuaciones 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 y 2.15 resultan para cuando el desplazamiento impuesto Δy es cero. Empezando con la ecuación 2.12 es posible seguir los mismos pasos y encontrar con facilidad los resultados para un desplazamiento dado (impuesto) de la guía.

Ahora se harán algunas observaciones acerca de los pasos anteriores, con los que se demostró el método de la rigidez. Los primeros tres pasos producen un conjunto de ecuaciones que deben resolverse para los desplazamientos libres Δy . En el ejemplo sólo hay un grado de libertad y por ello sólo hay un desplazamiento libre.

Por esta razón, se dice que la estructura es *cinemáticamente indeterminada* para el primer grado. Si no existe en absoluto la guía en B , entonces B estaría libre de movimiento en la dirección y y el desplazamiento Δy también sería un desplazamiento libre. Ahora, la estructura tiene dos grados de libertad y se deben resolver en forma simultánea para Δx y Δy las ecuaciones 2.9 y 2.10. En este caso, no existiría la reacción R . El paso 4 del procedimiento podría entonces producir los desplazamientos.

$$\Delta x = \frac{1}{k_1} P_x - \frac{1}{k_1} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_y \tag{2.16}$$

$$\Delta_y = \left(-\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \frac{1}{k_1} \right) P_x + \left(\frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{1}{k_2} + \frac{1}{\tan^2\theta} \frac{1}{k_1} \right) P_y \quad 2.17$$

Los desplazamientos (véase la figura 2.2) pueden sustituirse ahora en las ecuaciones 2.7 y 2.8 para obtener las fuerzas

$$F_1 = P_x - \frac{P_y}{\tan\theta} \quad 2.18$$

$$F_2 = \frac{P_y}{\text{sen}(\theta)} \quad 2.19$$

Una característica muy atractiva del método de la rigidez es que siempre habrá tantas ecuaciones como grados de libertad. Ya que por lo general es fácil visualizar los posibles movimientos en los nudos de un sistema estructural, es una cuestión relativamente simple identificar las ecuaciones de equilibrio que deben escribirse.

Para el ejemplo, ahora con dos grados de libertad, las ecuaciones se resuelven por una simple sustitución. La mayor parte de las estructuras reales tendrán cientos e incluso miles de grados de libertad, y un número igual de ecuaciones. La construcción y solución de estas ecuaciones se maneja mejor mediante una formulación matricial. Para la mayor parte de las estructuras, el esfuerzo computacional primordial del análisis total es a menudo el tiempo gastado durante los procedimientos de resolución de las ecuaciones, como la eliminación gaussiana. Así, es importante desarrollar métodos de solución por computadora que sean eficientes tanto desde el punto de vista del tiempo de corrida como desde el punto de vista de almacenamiento. También deben diseñarse para tomar en cuenta las dificultades asociadas con la precisión numérica.

Recapitulación del método de la rigidez

Se ha visto que la estrategia de solución por medio de la rigidez finalmente produce todas las fuerzas y desplazamientos desconocidos. La característica clave del método es que primero se resuelve para los desplazamientos y después para las fuerzas. Esto podría parecer, en principio, un camino ineficiente para llegar a la meta principal, que es diseñar una estructura, sobre todo cuando se considera que el diseño se basa esencialmente en criterios de resistencia. El ingeniero en diseño suele dimensionar las barras de manera que éstos tengan la resistencia para soportar las fuerzas de las mismas. Los desplazamientos se comprueban sólo después de que se han encontrado todos los esfuerzos. Por supuesto que las fuerzas son las cantidades de mayor interés para este propósito, y el paso intermedio de

encontrar primero los desplazamientos puede verse como un enfoque inconveniente. Para estructuras pequeñas con un número pequeño de barras esto puede ser verdad, pero para una estructura más grande se verá que el enfoque de la rigidez tiene muchas ventajas computacionales significativas sobre el método alternativo de la flexibilidad para una clase mucho más amplia de estructuras. La estrategia de la flexibilidad comprende la solución de un sistema de ecuaciones que produce primero las fuerzas, después de lo cual se calculan los desplazamientos. Esta característica es, por supuesto, compatible con el proceso de diseño basado en los criterios de resistencia y ha sido con frecuencia citada como una ventaja del método de la flexibilidad. Ciertamente, hay algunas estructuras que pueden resolverse de manera más efectiva con el enfoque de la flexibilidad, aunque el método de la rigidez es más popular, sobre todo para el desarrollo de programas con propósitos generales.

Una de las principales razones de la eficiencia del enfoque de la rigidez es que los dos primeros pasos del procedimiento subrayado aquí pueden programarse con eficiencia permitiendo una formulación "directa" de las ecuaciones del paso 3. Esto se conoce como el método de la rigidez directo. Por otra parte, el método básico de la flexibilidad, no tiene un método directo de la flexibilidad correspondiente si las ecuaciones se escriben en términos de cantidades de fuerza. Como resultado de ello, las ventajas computacionales del método de la rigidez directo no son equivalentes en una forma análoga, sin embargo, es posible formular un método de la flexibilidad directo cuando se reemplazan las fuerzas por cantidades de esfuerzo o por funciones de esfuerzo. Por desgracia, este procedimiento está restringido al medio continuo y no es fácilmente aplicable a estructuras reticuladas.

2.1.1. Indeterminación cinemática.

Para utilizar el método de las rigideces en el análisis de una estructura primero es necesario conocer el *grado de indeterminación cinemática* (GIC) del sistema. Esto determina el número de componentes independientes de desplazamientos de nudos no restringidos de la estructura y que deben ser evaluados en el curso del análisis.

Para una estructura en dos dimensiones, el desplazamiento de un nudo no restringido es descrito usualmente en términos de dos componentes ortogonales de desplazamiento lineal aunadas a un giro con respecto a un eje perpendicular al plano de la estructura. El número total de componentes independientes de desplazamiento de nudos no restringidos define el grado de indeterminación cinemática. Al definir el grado de indeterminación cinemática de un marco plano es importante saber si la Deformación Axial (DA) de los elementos componentes será considerada o no. Por ejemplo, el marco de la figura 2.3 inciso a) tiene un grado de indeterminación cinemática (GIC) igual a 7 cuando consideramos deformación axial de los elementos, pero si despreciamos la DA de los elementos entonces el GIC es igual a 4 como ilustra el inciso b). Cuando una estructura tiene todos sus nudos restringidos contra cualquier desplazamiento, como en la viga empotrada mostrada en la figura inciso c) se dice que la estructura es cinemáticamente determinada.

Cuando analizamos una armadura, la rotación de los nudos es indefinida ya que se asume que todos están articulados. Es por esto que solamente consideramos las traslaciones lineales de los nudos para determinar el GIC en armaduras.

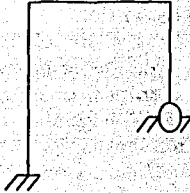
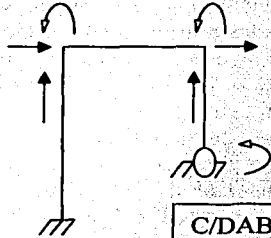
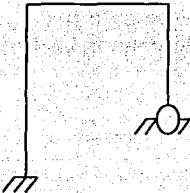
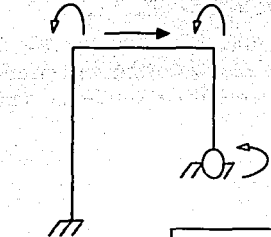
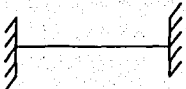
Estructura	Desplazamiento de nudos	GIC
 <div style="text-align: right; margin-right: 20px;">a</div>	 <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">C/DAB</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">7</div>
 <div style="text-align: right; margin-right: 20px;">b</div>	 <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">S/DAB</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">4</div>
 <div style="text-align: right; margin-right: 20px;">c</div>		<div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">0</div>

Figura 2.3. Grado de indeterminación cinemática para tres cuerpos distintos

2.1.2. Concepto básico.

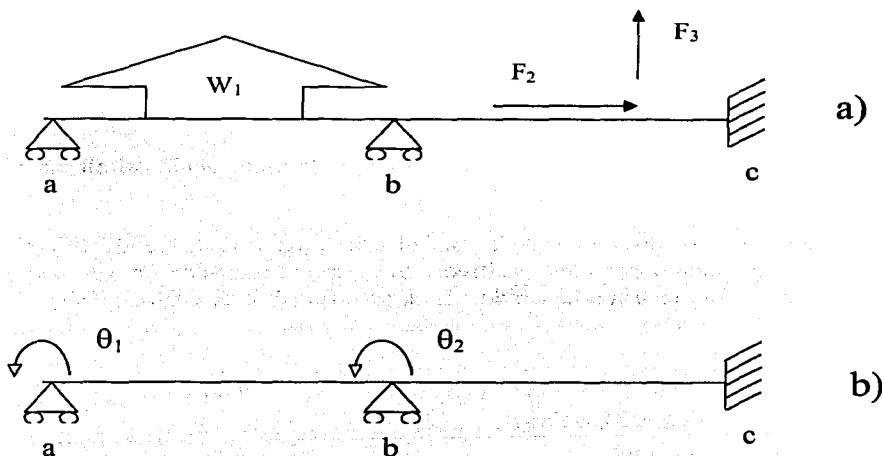
El análisis de una estructura por el método de las rigideces se realiza combinando varios análisis de una estructura equivalente cinemáticamente determinada para satisfacer las condiciones estáticas del equilibrio y compatibilidad de deformaciones requeridas por la estructura original. La estructura equivalente cinemáticamente determinada se crea restringiendo *artificialmente* aquellos nudos que en la estructura original son libres de desplazamiento; esta estructura equivalente es llamada *la estructura restringida*. Para llegar a una solución la estructura restringida es analizada en dos formas diferentes:

- 1) La aplicación de las fuerzas o cargas actuantes originales y
- 2) La libertad individual de cada una de las restricciones artificiales en los nudos.

Para ilustrar la idea básica del método de las rigideces considere la viga continua de la figura 2.4. El primer paso en cualquier análisis es definir claramente el modelo estructural y su geometría, condiciones de apoyo, propiedades de los materiales y condiciones de carga.

Ya que los desplazamientos de los nudos serán incógnitas en la formulación de ecuaciones, los componentes de los desplazamientos de nudos no restringidos por condiciones externas deben ser identificados, para poder establecer el GIC de la estructura. Despreciando la deformación axial de los elementos estructurales existen solo dos componentes de desplazamiento de nudos no restringidos a ser considerados: la rotación en los nudos a y b. De esta manera el GIC es igual a 2.

La estructura restringida puede ser creada restringiendo artificialmente los nudos a y b contra el giro. La estructura restringida se define en el inciso c) de la figura 2.4.



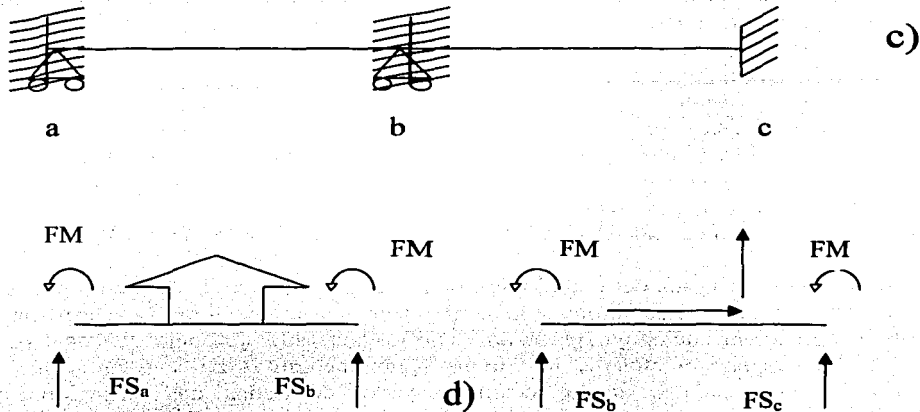


Figura 2.4. Diagramas: a) Aplicación de cargas a la estructura original, b) Grados de libertad, c) Estructura restringida, d) Fuerzas en los extremos de las barras por carga original

Una vez definida la estructura restringida, debe ser analizada para la condición de carga impuesta a la estructura original. Las reacciones resultantes en los extremos son simplemente aquellas acciones necesarias para contener los desplazamientos en los nudos. En cada nudo las reacciones son iguales a la suma de :

- a) Las correspondientes acciones en los extremos que son requeridas para contener los extremos del elemento contra los desplazamientos debidos a las fuerzas externas aplicadas a los elementos y
- b) La correspondiente acción igual y opuesta en sentido a una acción similar aplicada al nudo.

Las fuerzas en los extremos resultantes de la condición de carga original se identifican en la figura inciso d) suponiendo sentidos positivos. Sin cargas aplicadas en los nudos las reacciones de la estructura restringida debido a la carga original se evalúa como sigue:

$$R_{1L} = FM_{ab} \quad 2.19 (a)$$

$$R_{2L} = FM_{ab} + FM_{bc} \quad 2.19 (b)$$

$$R_{3L} = FS_{ab} \quad 2.19 (c)$$

$$R_{4L} = FS_{ab} + FS_{bc} \quad 2.19 (d)$$

$$R_{5L} = FP_{cb} \quad 2.19 (e)$$

$$R_{6L} = FS_{cb} \quad 2.19 \text{ (f)}$$

$$R_{7L} = FM_{cb} \quad 2.19 \text{ (g)}$$

Recordemos que la deformación axial de los elementos es despreciada por lo que solo existe una componente horizontal en las reacciones de los apoyos, R_{5L} , y debe resistir todas las componentes de fuerzas horizontales actuantes.

Además de ser analizada por la condición normal de carga actuante, la estructura restringida debe ser analizada por los desplazamientos resultantes al liberar las restricciones artificiales en los nudos. Ya que la magnitud requerida y, tal vez, la dirección de estos desplazamientos en la estructura original son desconocidos, es conveniente analizar la estructura restringida por la aplicación individual con un valor unitario de cada uno de estos desplazamientos. Este grupo de ecuaciones expresa la suma de las reacciones en los apoyos de la estructura restringida que corresponde a los desplazamientos en los nudos artificialmente restringidos, resultantes de la condición de carga actuante y los desplazamientos individuales en los nudos. Resolviendo este grupo de ecuaciones, la magnitud y dirección de los desplazamientos en los nudos no restringidos pueden ser evaluadas. Una vez que estos desplazamientos son conocidos, los elementos mecánicos en los elementos pueden ser evaluados.

Tomando en cuenta los desplazamientos positivos de la figura 2.4 y sus reacciones, así como el caso de las reacciones debidas a la aplicación de las fuerzas actuantes originales en la estructura restringida podemos establecer dos ecuaciones lineales combinando estos casos.

$$R_{1L} + r_{11}\theta_1 + r_{12}\theta_2 = 0 \quad 2.20$$

$$R_{2L} + r_{21}\theta_1 + r_{22}\theta_2 = 0 \quad 2.20 \text{ (a)}$$

Escritas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{1L} \\ R_{2L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.21$$

Y sustituyendo

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -FM_{ab} \\ -(FM_{ba} + FM_{bc}) \end{bmatrix} \quad 2.22$$

En general esta ecuación dice que, por cada componente de desplazamiento de nudo no restringido, Δ_m , de la estructura original, la suma de:

- la correspondiente fuerza de restricción artificial R_{mi} requerida para mantener la estructura restringida bajo la acción de las cargas originales y
- las correspondientes fuerzas de restricción artificial $r_{mn}\Delta_n$ requeridas para mantener la estructura restringida en equilibrio cuando es sometida a los desplazamientos individuales en los nudos, es igual con cero.

Una vez que las magnitudes y direcciones de los componentes de los desplazamientos de los nudos no-restringidos han sido determinados, cualquier otra acción o desplazamiento de la estructura original puede ser evaluada superponiendo la acción correspondiente o el desplazamiento de la estructura restringida resultante de la aplicación de las cargas o acciones originales y del desplazamiento del nudo artificialmente restringido.

Por ejemplo, las reacciones finales en los apoyos pueden ser determinadas con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} R_3^0 \\ R_4^0 \\ R_5^0 \\ R_6^0 \\ R_7^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{3L} \\ R_{4L} \\ R_{5L} \\ R_{6L} \\ R_{7L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{31} & r_{32} \\ r_{41} & r_{42} \\ r_{51} & r_{52} \\ r_{61} & r_{62} \\ r_{71} & r_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad 2.23$$

Donde R_{p_2} es la reacción en el apoyo de la estructura restringida, que corresponde a la reacción R_p^0 de la estructura original; r_{pq} es la reacción correspondiente de la estructura restringida causada por la aplicación de un desplazamiento unitario en el nudo Δ a la estructura restringida.

La Estructura Restringida

Al analizar un sistema estructural por el método de las rigideces, la primera tarea es analizar una estructura equivalente cinemáticamente determinada para:

- 1) Las cargas originales y
- 2) La aplicación de desplazamientos unitarios en los nudos

Esta estructura equivalente cinemáticamente determinada se establece asumiendo que los componentes de desplazamiento no-restringidos en los nudos son artificialmente restringidos; esta estructura se conoce como la estructura restringida.

2.1.3. Elemento estructural básico.

Cuando se analiza un sistema estructural por el método de las rigideces, la estructura restringida debe ser analizada por la aplicación de valores unitarios de desplazamientos en los nudos.

De cualquier forma, antes de estudiar la respuesta de la estructura restringida en conjunto por la aplicación de estos desplazamientos, es importante primero, investigar la respuesta de un elemento estructural individual, con sus extremos restringidos, a valores unitarios de desplazamientos en dichos extremos.

En esta parte la flexión y deformación axial del elemento estructural serán considerados.

2.1.3.1. Convención de signos.

El elemento típico i es colocado en un sistema de ejes ortogonales, x_e y y_e llamados ejes locales de la barra, con el origen en el extremo izquierdo del elemento. El eje x_e positivo se dirige al extremo derecho del elemento y el y_e positivo está orientado 90° en contra del giro de las manecillas del reloj con respecto al x_e positivo; el plano $x_e - y_e$ define el plano de flexión del elemento. La sección transversal del elemento es simétrica con respecto al plano de flexión; el centroide y el centro de cortante coinciden. El elemento tiene una longitud L_i ; un área de sección transversal A_i , un momento de inercia I_i , y un módulo de elasticidad E_i ; A_i , I_i y E_i pueden variar a lo largo de la longitud.

El elemento típico i se muestra en una posición horizontal en la figura 2.5, el extremo izquierdo del elemento se designa como el extremo j y el derecho se denota como el extremo k .

La siguiente convención de signos será usada en la investigación de la relación fuerza-desplazamiento de un elemento estructural típico en un sistema plano:

1. Los momentos extremos actuantes en contra del giro de las manecillas del reloj, son positivos.
2. Los giros extremos en contra del giro de las manecillas del reloj, son positivos.
3. Componentes de fuerzas actuando en la dirección de los ejes locales de los elementos $x_e - y_e$ son positivos.
4. Componentes de desplazamientos en los extremos en dirección de los ejes globales $x_e - y_e$ son positivos.

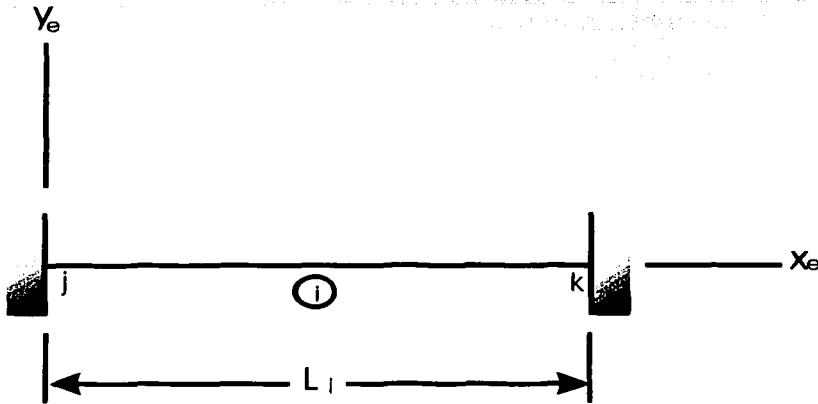
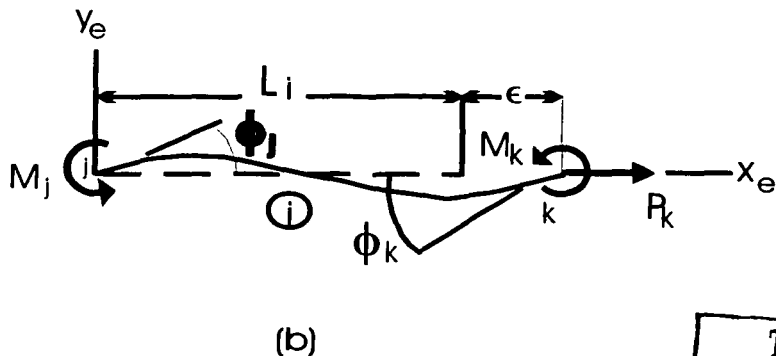
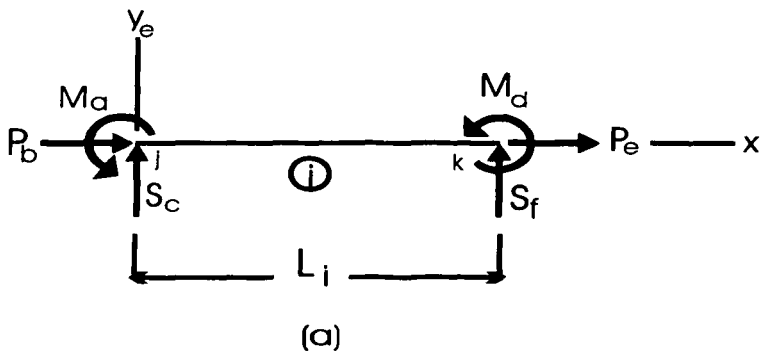


Figura 2.5. Ejes locales del elemento i.

2.1.3.3. Matriz Básica de Rigideces.

Cuando un elemento es aislado de un sistema estructural plano, el estado de esfuerzos de cada extremo del elemento puede ser descrito en términos de tres fuerzas internas (una fuerza axial, fuerza cortante y un momento flexionante) como se muestra en la figura 2.6(a). En nuestro caso la posibilidad de un momento torcionante no será considerada; de cualquier forma puede ser considerada en el análisis sin demasiada dificultad.

Para determinar el estado de esfuerzos dentro de cualquier sección a lo largo del elemento, al menos tres de las seis posibles fuerzas en los extremos deben conocerse. Luego, considerando el equilibrio estático, las fuerzas internas en cualquier sección pueden ser calculadas. Los momentos extremos en j y k y la fuerza axial en k serán tomadas como las tres fuerzas básicas para evaluar las otras fuerzas internas asociadas con el elemento. Lo anterior puede observarse en la figura 2.6(b).



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 2.6. Elemento i: a) Fuerzas internas, b) Tres fuerzas básicas.

Existe una relación definida entre las fuerzas básicas en los extremos requeridas para mantener el elemento en una configuración deformada y sus correspondientes desplazamientos básicos a los extremos. Esta relación se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \theta_j \\ \theta_k \\ \varepsilon \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \theta_{jj} & \theta_{jk} & 0 \\ \theta_{kj} & \theta_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{kk} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} M_j \\ M_k \\ P_k \end{bmatrix}_i$$

2.24

$$\{De\}_i = [fe]_i \{Ae\}_i \quad 2.25$$

Donde $[fe]$ representa la matriz de flexibilidades del elemento i . Los elementos con que se forma esta matriz son llamados coeficientes de flexibilidad.

Esta relación entre las fuerzas básicas y sus correspondientes desplazamientos puede ser reescrita para definir las fuerzas en términos de los desplazamientos:

$$\{Ae\}_i = [fe]_i^{-1} \{De\}_i \quad 2.26$$

Así $[fe]_i^{-1} = [ke]_i \{De\}_i$

La matriz $[ke]$ es denominada la matriz básica de rigideces del elemento. Los elementos de la matriz son llamados los coeficientes básicos de rigideces; son las fuerzas básicas en los extremos que resultan cuando los desplazamientos unitarios se aplican en los extremos restringidos del elemento. Evaluando el inverso de la matriz de flexibilidades $[fe]$, la matriz de rigideces puede ser reescrita como:

$$[K_e]_i = \begin{bmatrix} m_{jj} & m_{jk} & 0 \\ m_{kj} & m_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & p_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_{kk}}{\theta_{jj}\theta_{kk} - \theta_{jk}\theta_{kj}} & -\left(\frac{\theta_{jk}}{\theta_{jj}\theta_{kk} - \theta_{jk}\theta_{kj}}\right) & 0 \\ -\left(\frac{\theta_{kj}}{\theta_{jj}\theta_{kk} - \theta_{jk}\theta_{kj}}\right) & \frac{\theta_{jj}}{\theta_{jj}\theta_{kk} - \theta_{jk}\theta_{kj}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i$$

2.27

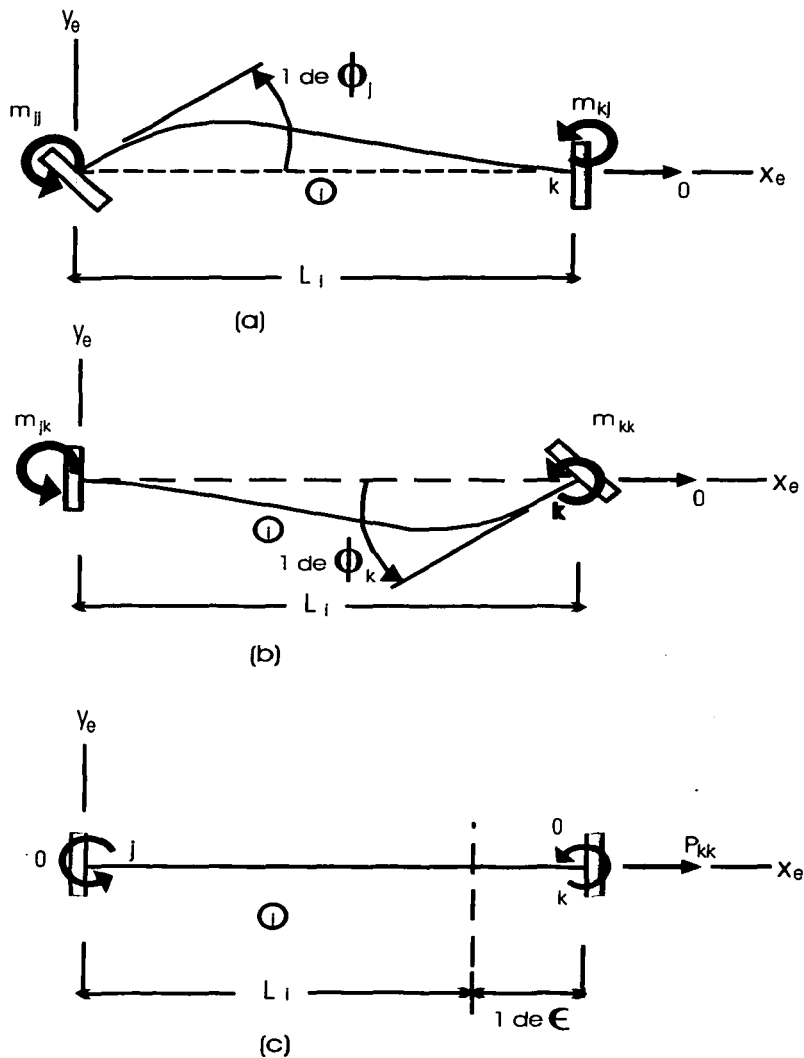


Figura 2.7. Coeficientes básicos de rigideces.

Los coeficientes básicos de rigideces se muestran en la figura 2.7: M_{jj} y M_{kj} son los momentos de empotramiento en los extremos j y k respectivamente, resultantes del giro unitario en el extremo j ; M_{jk} y M_{kk} son los momentos en los extremos j y k respectivamente como resultado de la rotación unitaria en K ; y P_{kk} es la fuerza axial desarrollada en el extremo K del elemento restringido por un desplazamiento unitario del extremo K en la dirección X_e . Note que la rigidez rotacional y la axial de un elemento típico restringido no se mezclan.

La relación entre la matriz de flexibilidades y la de rigideces puede ser verificada considerando el análisis de un elemento restringido sujeto a cada uno de los desplazamientos básicos en los extremos.

Para este análisis, una viga simplemente apoyada, hecha liberando aquellas restricciones en los extremos del elemento restringido que se relacionan con las fuerzas básicas, es seleccionada como la estructura liberada. La viga simple será analizada por la aplicación de un momento unitario en K (Fig. 2.8(b)) y por la aplicación de una fuerza axial unitaria en K (Fig. 2.8(c)). Los coeficientes de flexibilidad asociados con estas cargas en la estructura liberada como las rotaciones en ambos extremos y el desplazamiento longitudinal del

extremo K pueden ser evaluados: θ_{jj} y θ_{kj} representan la rotación de los extremos j y k

respectivamente, resultantes de la aplicación de un momento unitario en j ; θ_{jk} y

θ_{kk} representan las rotaciones en j y k respectivamente resultantes de la aplicación de un

momento unitario en K ; y δ_{kk} denota el desplazamiento longitudinal del extremo K debido a una fuerza axial unitaria aplicada en K .

Podemos combinar los casos a) y b) de la Fig 2.8 para lograr una función lineal con el objeto de evaluar las redundantes cuando el elemento restringido es sujeto a un giro unitario en j (Fig 2.7(a))

$$M_{jj}\theta_{jj} + M_{kj}\theta_{jk} = 1 \quad \text{y} \quad M_{jj}\theta_{kj} + M_{kk}\theta_{kk} = 0$$

De manera similar podemos combinar los casos a) y b) para determinar las redundantes cuando el elemento restringido es sujeto a un giro unitario en el extremo K (Fig 2.7(b))

$$M_{jk}\theta_{jj} + M_{kk}\theta_{jk} = 0 \quad \text{y} \quad M_{jk}\theta_{kj} + M_{kk}\theta_{kk} = 1$$

Cuando el elemento restringido es sujeto a un desplazamiento lineal unitario como se muestra en la figura 2.7(c) la redundante P_{kk} puede ser evaluada usando el análisis de la estructura liberada

$$P_{kk}\delta_{kk} = 1$$

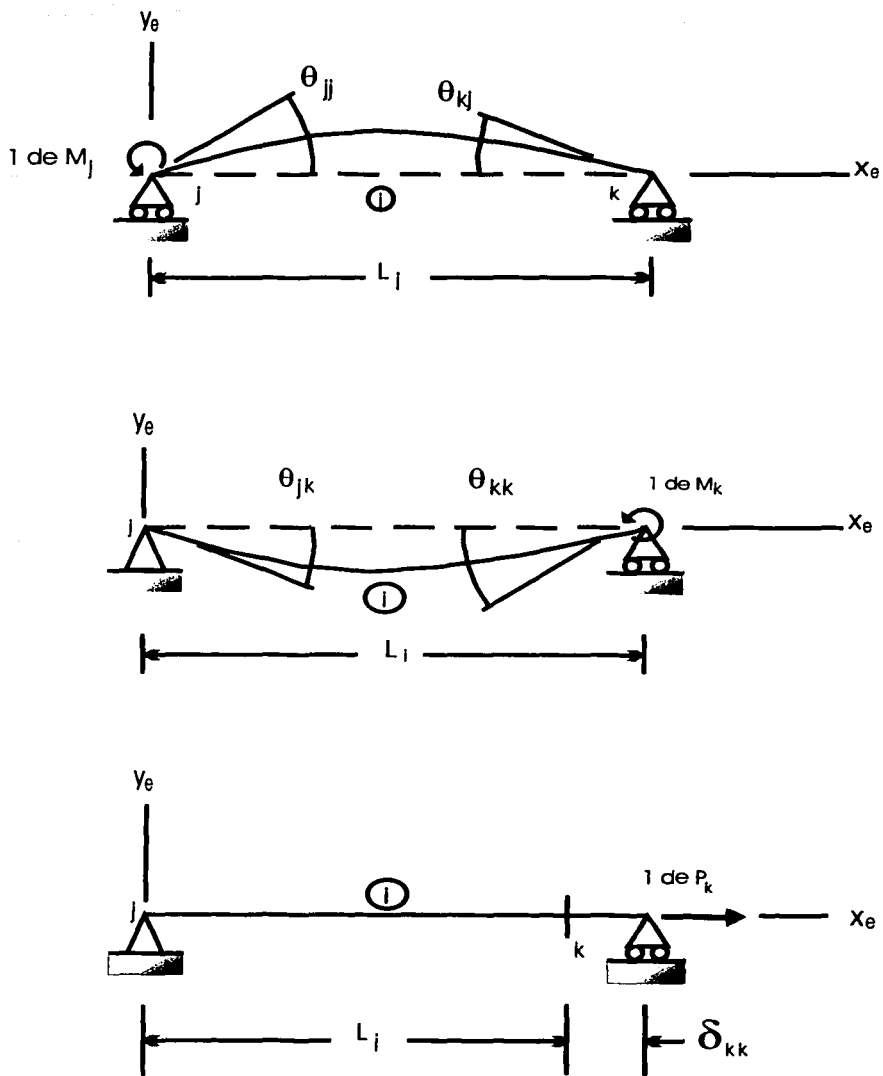


Figura 2.8. Aplicación de momentos y fuerza axial unitarios en los extremos del elemento i .

cuando todas estas ecuaciones son hechas para un elemento particular debemos asignar los signos apropiados a nuestros coeficientes de flexibilidades según nuestra convención. Y expresándolas de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta_{jj} & \theta_{jk} & 0 \\ \theta_{kj} & \theta_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{jj} & M_{jk} & 0 \\ M_{kj} & M_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & P_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.28$$

$$\text{o: } [fe]_i [Ke]_i = [1] \quad 2.29$$

$$[Ke]_i = [fe]_i^{-1}$$

La matriz básica de rigideces del elemento define la relación entre los desplazamientos básicos en los extremos y sus correspondientes fuerzas básicas. Tomando en consideración deformaciones axiales y de flexión.

2.1.3.3. Matriz Total de Rigideces

El desplazamiento general de un nudo rígido en una estructura plana puede ser descrito en términos de un giro y dos desplazamientos lineales ortogonales. Al analizar marcos planos por el método de las rigideces, la estructura restringida debe ser investigada por la aplicación individual de cada una de estos posibles componentes de desplazamiento del nudo, en cada uno de ellos, que se encuentren libres en la estructura original. Por lo tanto es importante saber como responde el elemento estructural individual a la aplicación exclusiva de cada una de estas posibles componentes de desplazamiento en los extremos.

La matriz básica de rigideces de un elemento proporciona una relación útil entre las fuerzas básicas en los extremos y sus correspondientes desplazamientos. Nos sería útil desarrollar una relación similar entre los componentes generales de fuerzas en el elemento y sus correspondientes desplazamientos; esta información puede ser de gran ayuda en el análisis de la estructura restringida.

En la Fig 2.9(a), las componentes de las fuerzas en los extremos de un elemento típico son evaluadas en términos de tres fuerzas básicas (M_j , M_k y P_k), considerando el equilibrio estático; las componentes básicas de los desplazamientos en los extremos aparecen también en la Fig.2.9 Estas posibles componentes de fuerzas se definen en la figura 2.9(b) usando una notación general. Adicionalmente, las posibles componentes de desplazamiento que corresponden a las fuerzas generales en los extremos son también mostradas; además es posible observar los desplazamientos básicos a los extremos.

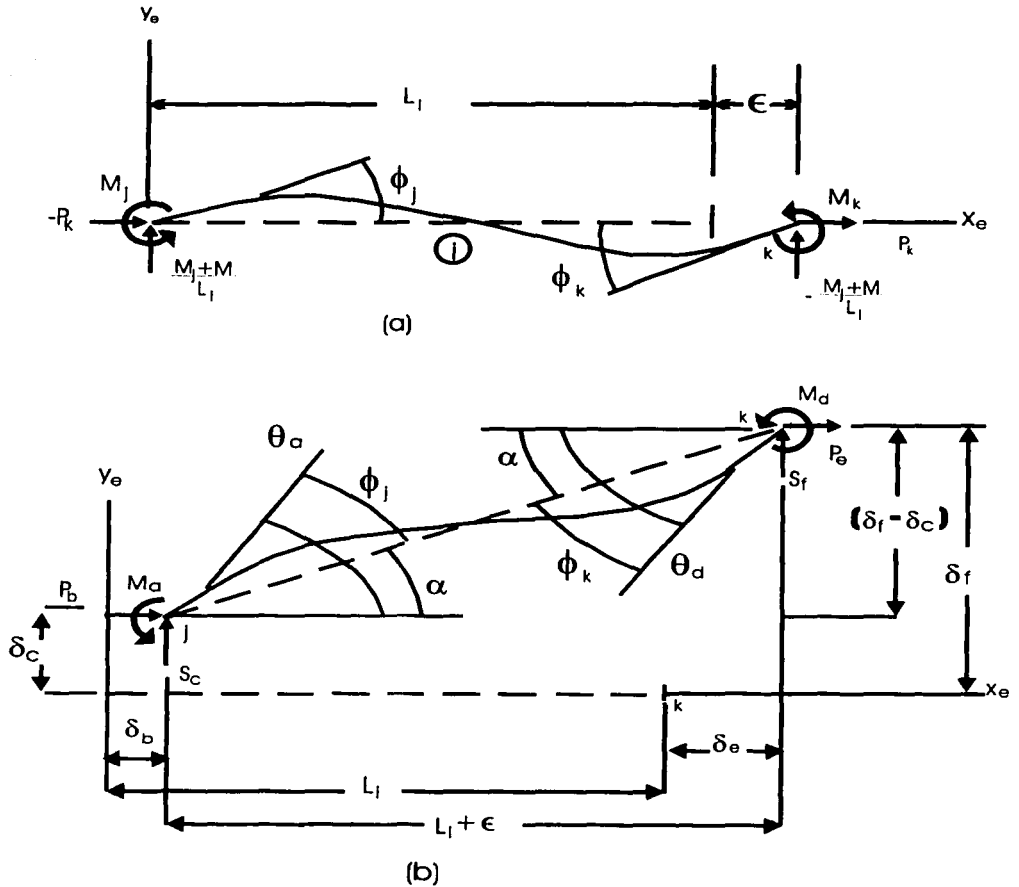


Figura 2.9. Componentes de fuerzas y desplazamientos en los extremos del elemento i .

Note que los componentes de las fuerzas y desplazamientos se definen con respecto a los ejes locales del elemento $X_e - Y_e$.

Note la diferencia entre los giros a cada extremo del elemento: Q_j y Q_k son los giros con respecto a la cuerda que une los extremos, mientras que θ_a y θ_b son los giros en los extremos j y k respectivamente, definidos con respecto a la posición original no-cargada del elemento. Tenga en mente que todos estos desplazamientos en la figura son exagerados y que realmente sus dimensiones son muy pequeñas comparadas con las de la estructura por lo que el análisis se hace tomando en cuenta las dimensiones de la estructura no deformada.

Las fuerzas generales en los extremos resultantes de los desplazamientos generales pueden ser expresados en términos de fuerzas básicas.

En el extremo j :

$$\begin{aligned} M_a &= M_j \\ P_b &= -P_k \\ S_c &= (M_j + M_k) \frac{1}{Li} \end{aligned} \quad 2.30$$

En el extremo k :

$$\begin{aligned} M_d &= M_k \\ P_e &= P_k \\ S_j &= -(M_j + M_k) \frac{1}{Li} \end{aligned} \quad 2.31$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas en forma matricial como:

$$\{M_e\}_i = [TA_e]_i \{A_e\}_i \quad 2.32$$

Donde $\{A_e\}$ define las fuerzas básicas en los extremos resultantes de los desplazamientos en el elemento y $\{M_e\}$ define las fuerzas generales resultantes de desplazamientos generales a los extremos.

Del mismo modo las componentes de los desplazamientos básicos pueden ser expresados en términos de componentes generales:

$$\begin{aligned} Q_j &= \theta_a - \alpha \\ Q_k &= \theta_b - \alpha \\ \varepsilon &= \delta_e - \delta_b \end{aligned} \quad 2.33$$

$$\alpha = \frac{\delta_f - \delta_c}{L_i} \quad 2.34$$

Haciendo las sustituciones apropiadas y escribiendo en forma matricial:

$$O \quad \{D_e\}_i = [TD_e]_i \{\delta_e\}_i \quad 2.35$$

Donde $\{D_e\}_i$ define los desplazamientos básicos en los extremos del elemento y $\{\delta_e\}_i$ define los desplazamientos generales.

Preste atención al hecho de que:

$$[TE_e]_i = [TA_e]_i^T \quad 2.36$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \{A_e\}_i &= [K_e]_i [TD_e]_i \{\delta_e\}_i \\ \{M_e\}_i &= [TA_e]_i [K_e]_i [TD_e]_i \{\delta_e\}_i \\ [K_e]_i &= [TA_e]_i [K_e]_i [TD_e]_i \end{aligned} \quad 2.37$$

Entonces la relación entre las fuerzas generales y sus correspondientes componentes de desplazamiento puede ser escrita como:

$$\{M_e\}_i = [K_e]_i \{\delta_e\}_i \quad 2.38$$

La matriz $[K_e]$ es la matriz total de rigideces del elemento considerando deformaciones axiales y de flexión; está definido con respecto a los ejes locales del elemento $Xe - Ye$.

Ejemplo:

Establecer tanto la matriz básica como la total de rigideces para el elemento estructural con sección transversal constante de área A y momento de inercia I a través de la longitud L_i . Considere deformación axial y de flexión. Asumir un módulo de elasticidad E constante.

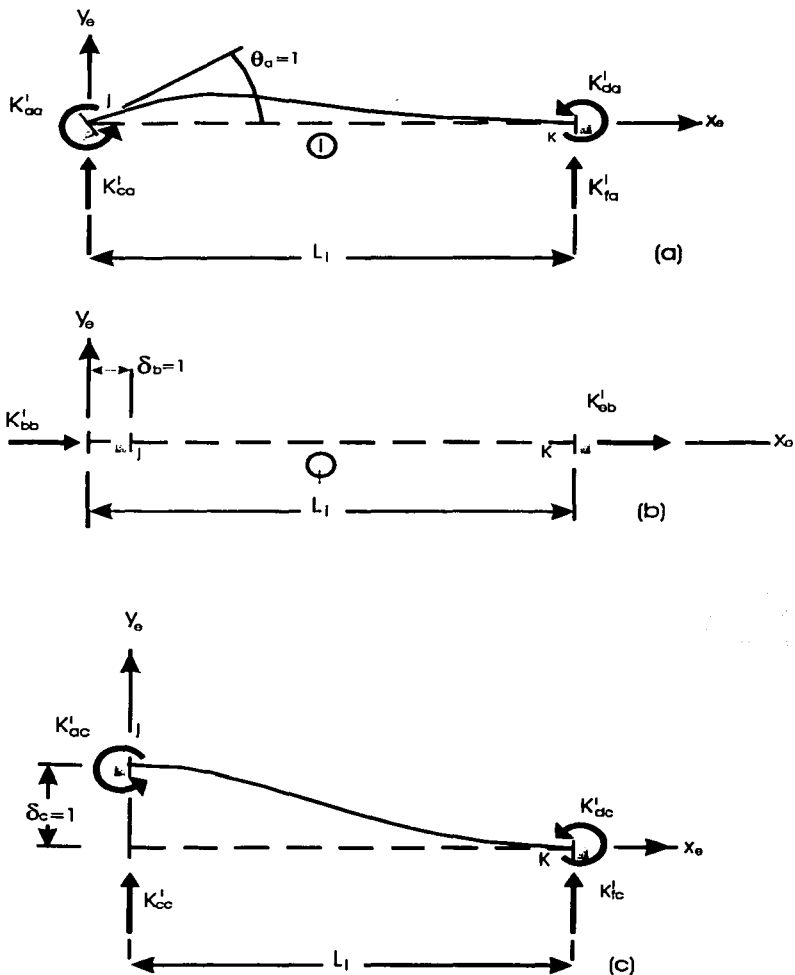


Figura 2.10. Obtención de los coeficientes de rigideces para el elemento i .

La matriz de flexibilidad es :

$$[K_e]_i = [f_e]_i^{-1}$$

$$[f_e]_i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix}_i \quad 2.39$$

Realizando la inversión requerida:

$$[K_e]_i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix}_i$$

2.40

que es la matriz básica de rigideces del elemento. Sustituyendo, la matriz total de rigideces del elemento queda:

$$[K_e]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.41$$

que se reduce en:

$$[K_e]_{if} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix}$$

2.42

2.1.3.4. Transformación de fuerzas y desplazamientos

Hasta ahora las fuerzas y los desplazamientos en los extremos han sido definidos con respecto a los ejes locales del elemento. Después, cuando analicemos la estructura restringida, será necesario definir las fuerzas y desplazamientos en términos de componentes en un sistema ortogonal de coordenadas más general llamado ejes globales. Consideremos ahora los dos grupos de ejes ortogonales mostrados en la figura 2.11. Los ejes $x_e - y_e$ son el sistema local de ejes para un elemento típico y los $\bar{x} - \bar{y}$ son el sistema global de ejes ortogonales. El eje x_e del sistema local forma un ángulo γ con el eje global \bar{x} ; el ángulo γ es medido en contra del giro de las manecillas del reloj a partir del eje \bar{x} .

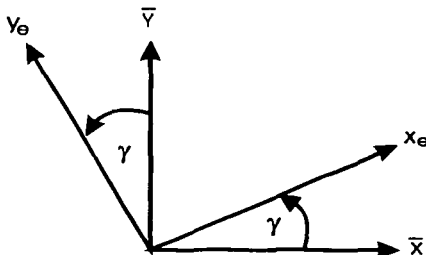


Figura 2.11. Medición del ángulo γ .

Un grupo típico de fuerzas (momento M , fuerza axial P y fuerza cortante S) que deben aparecer a un extremo de un elemento se muestran en la fig. 2.12(a). Los dos componentes de fuerzas podrían ser combinados en un solo vector V y este vector podría ser descompuesto en un grupo de componentes con respecto a un segundo sistema de ejes, como lo es el sistema $\bar{x}-\bar{y}$. Los componentes de fuerza con respecto al sistema global son identificados como \bar{P} y \bar{S} . Es obvio que el momento M es independiente de cualquier sistema de coordenadas. Ahora la fuerza axial P actuante en la dirección del eje Xe puede ser descompuesta con respecto a los ejes globales $\bar{x}-\bar{y}$. La fuerza cortante S actuante en dirección Ye puede también ser descompuesta con respecto a los ejes globales sumando los componentes correspondientes, las fuerzas definidas con respecto a los ejes $\bar{x}-\bar{y}$, pueden ser expresados en términos de las componentes en el sistema local:

$$\bar{P} = P(\cos \gamma) - S(\text{sen} \gamma)$$

$$\bar{S} = P(\text{sen} \gamma) + S(\cos \gamma)$$

2.43

y como se dijo antes $\bar{M} = M$

Estas ecuaciones pueden ser escritas en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \bar{M} \\ \bar{P} \\ \bar{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\text{sen} \gamma \\ 0 & \text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ P \\ S \end{bmatrix}$$

2.44

Considere un elemento típico i posicionado en un marco de ejes globales $\bar{x}-\bar{y}$ como se muestra en la figura 2.12. El eje local Xe forma un ángulo γ con el eje global \bar{x} ; medido en sentido antihorario.

Es necesario observar que el origen de los sistemas no debe coincidir necesariamente con el origen j del elemento. En la figura 2.12(a) se muestran las componentes de las fuerzas extremas. Un segundo grupo de fuerzas definidas respecto al sistema de ejes globales en un sentido positivo supuesto se muestran en la figura 2.12(b).

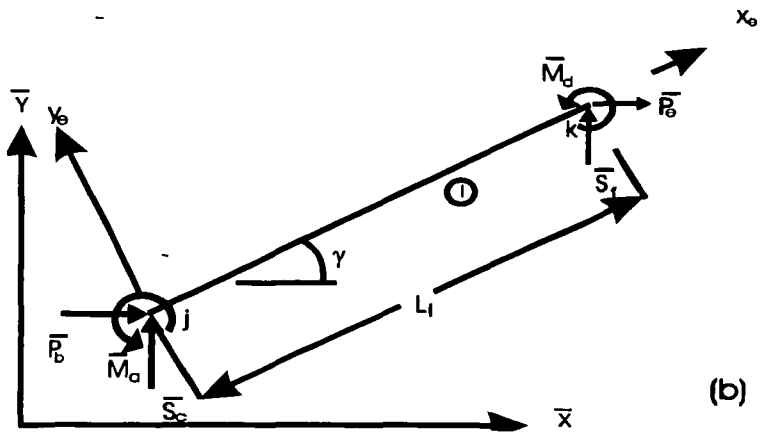
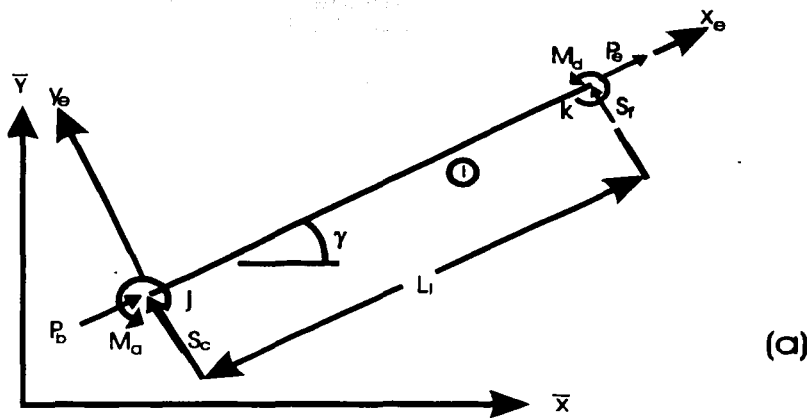


Figura 2.12. Fuerzas extremas del elemento i: a) Respecto e ejes locales, b) Respecto a ejes globales.

Las componentes de las fuerzas extremas definidas respecto a los ejes locales del elemento pueden ser transformadas en un segundo grupo de componentes respecto a los ejes globales

$\bar{x}-\bar{y}$.

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{S}_c \\ \bar{M}_d \\ \bar{P}_e \\ \bar{S}_f \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\text{sen} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & -\text{sen} \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} M_a \\ P_b \\ S_c \\ M_d \\ P_e \\ S_f \end{bmatrix}_i \quad 2.45$$

ó

$$\{\bar{M}_e\}_i = [T_e]_i \{M_e\}_i \quad 2.46$$

Donde $[T_e]_i$ es la matriz de transformación del elemento. La matriz de transformación puede ser escrita como:

$$[T_e]_i = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}_i \quad 2.47$$

Donde

$$[t]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\text{sen} \gamma \\ 0 & \text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad 2.48$$

que es la matriz de transformación de un extremo.

Los desplazamientos generales de los extremos del elemento pueden también ser escritos con respecto a los ejes globales. Las componentes de los desplazamientos con respecto a ambos sistemas de referencia se muestran en la figura 2.13.

Las componentes de desplazamiento con respecto a los ejes locales pueden ser transformadas a un sistema global como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\theta}_a \\ \bar{\delta}_b \\ \bar{\delta}_c \\ \bar{\theta}_d \\ \bar{\delta}_e \\ \bar{\delta}_f \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\text{sen}\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\gamma & -\text{sen}\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \\ \theta_d \\ \delta_e \\ \delta_f \end{Bmatrix}_i \quad 2.49$$

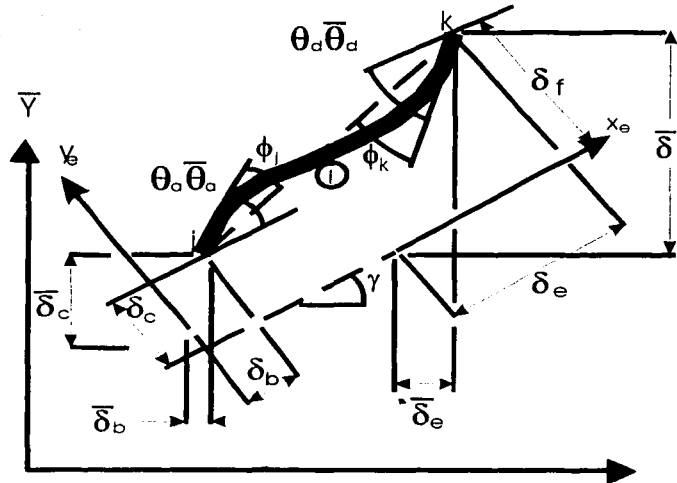


Figura 2.13. Componentes de desplazamiento respecto a sistemas global y local de ejes.

ó:

$$\{\bar{\delta}_e\}_i = [T_e]_i \{\delta_e\}_i$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.50

Esta relación también puede ser expresada como:

$$\{\delta_e\}_i = [T_e]_i^T \{\bar{\delta}_e\}_i \quad 2.51$$

2.2. Formulación Del Método De Análisis

Convención De signos

1. Giros y momentos antihorarios en los nudos son positivos.
2. Componentes de desplazamientos lineales y fuerzas en dirección de los ejes globales son positivos.
3. Giros y momentos antihorarios en los extremos de un elemento son positivos.
4. Componentes de desplazamiento lineal y fuerza para un elemento en dirección positiva de los ejes globales son positivas, así como para los ejes locales.

Ecuaciones para el análisis

La filosofía básica del método de las rigideces ha sido ya descrito. Antes de aplicar este método en el análisis de diversos sistemas estructurales, el procedimiento debe ser organizado en un programa sistemático y las ecuaciones básicas deben ser desarrolladas en términos generales.

Como una forma de hacer esto, considere el análisis del marco plano rígido de la figura 2.14

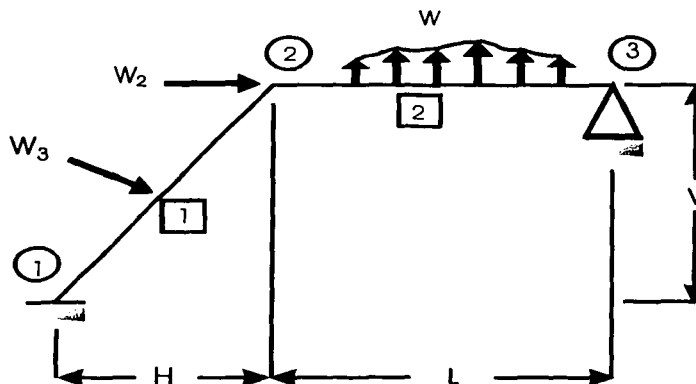


Figura 2.14. Geometría del marco, numeración de barras y nudos y sistema de fuerzas.

Las barras de este marco pueden tener secciones transversales constantes o no al igual que su módulo de elasticidad. Una carga actuante general es aplicada a la estructura como se indica. Los nudos se encierran en círculos y los elementos en cuadros.

Establecemos para esta estructura un sistema de ejes globales con origen en el nudo 1. El sentido positivo del eje \bar{x} es horizontal y el positivo \bar{y} vertical. Al numerar las componentes de desplazamiento en los nudos, numeramos primero aquellas que se encuentren libres en la estructura original y luego aquellas que se encuentren restringidas por condiciones de apoyo. Los nudos j y k de cada elemento son identificados.

Los cosenos directores deben ser calculados y la matriz de transformación $[T_e]_i$ establecida para cada elemento.

La estructura es cinemáticamente indeterminada de 4° grado:

Los desplazamientos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ están libres y los $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9$ restringidos.

La estructura puede ser reducida a un sistema cinemáticamente determinada restringiendo artificialmente los cuatro componentes libres de desplazamiento en los nudos.

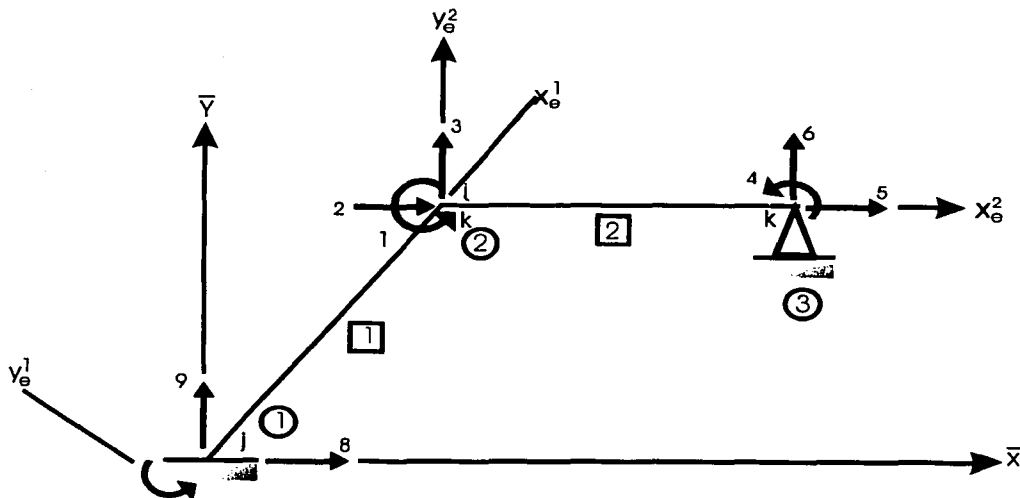


Figura 2.15. Ejes globales y locales, así como componentes de desplazamiento.

La estructura restringida es creada empotrando artificialmente el nudo 2 y restringiendo el 3 contra el giro, figura 2.16.

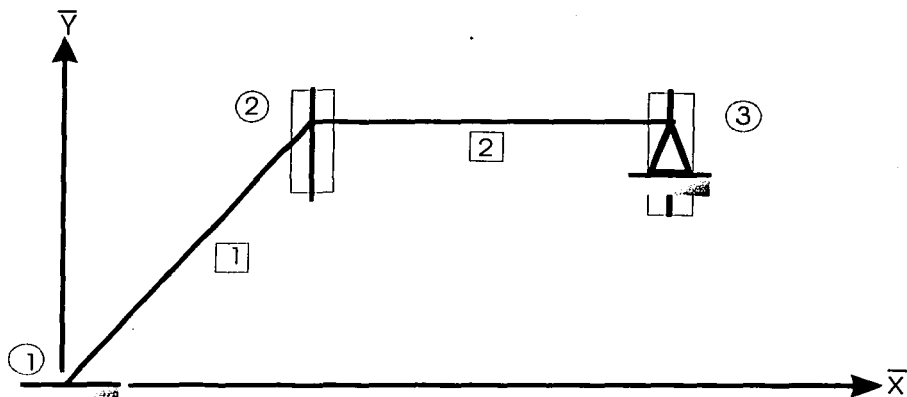


Figura 2.16. Estructura restringida.

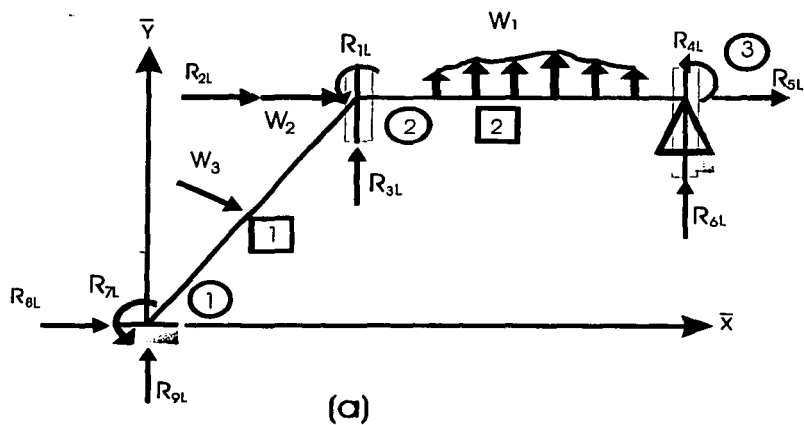


Figura 2.17. Reacciones de la estructura restringida.

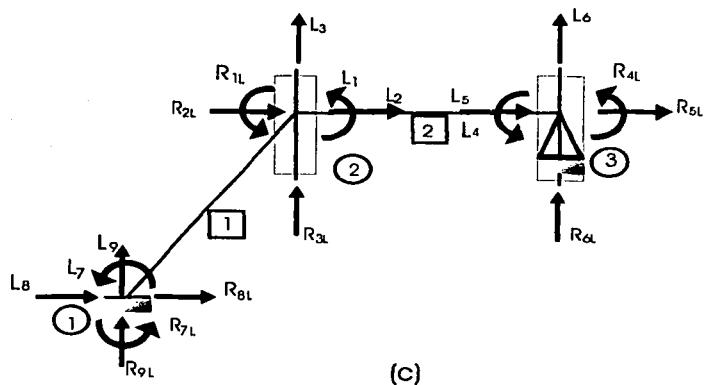
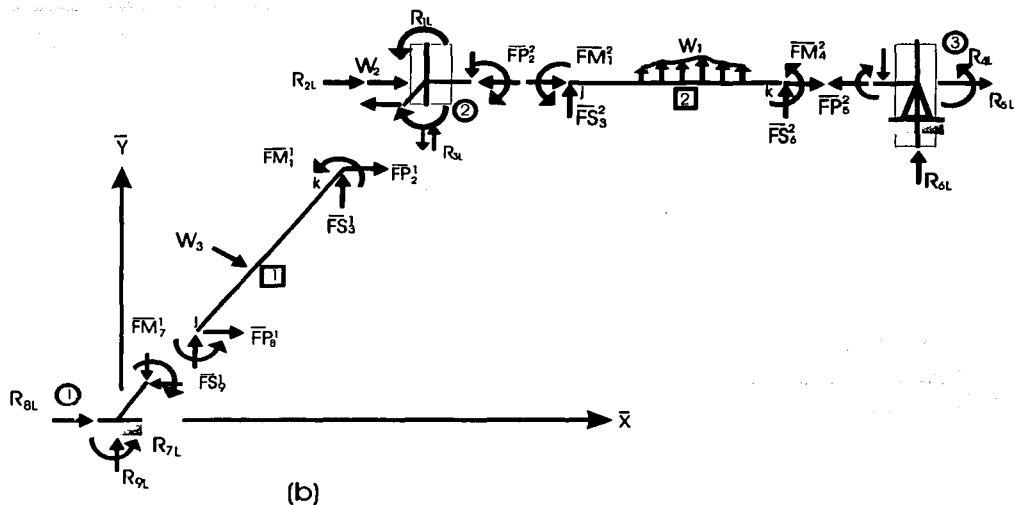


Figura 2.17 (continuación)

El análisis se desarrolla superponiendo las soluciones de la estructura restringida por:

- 1) aplicación de cargas
- 2) desplazamientos individuales en los nudos

El análisis de la estructura restringida por aplicación de cargas se muestra en la figura 2.17.

Las reacciones de la estructura restringida son identificadas en su supuesto valor positivo y pueden verse en la figura 2.17(a).

Estas reacciones se denotan como R_{ML} , donde el subíndice M supone el número del correspondiente desplazamiento de nudo y el L indica que la reacción es debida a una carga aplicada.

Como todos los nudos son restringidos, las fuerzas desarrolladas en los extremos de los elementos por la carga original son simplemente reacciones de empotramiento.

Estas deben ser definidas con respecto a los ejes globales. Ahora, las reacciones de empotramiento que aparecen en los extremos de un elemento, son convertidos en fuerzas actuantes en el nudo adyacente mediante una inversión de dirección.

Los momentos de empotramiento se denotan como \overline{FM}_M^i , las fuerzas en la dirección del eje \bar{x} como \overline{FP}_M^i , y las fuerzas en dirección \bar{Y} como \overline{FS}_M^i . El superíndice i se refiere al elemento que está siendo considerado y el subíndice M nuevamente toma la etiqueta de la componente de desplazamiento.

Considerando el equilibrio estático de cada nudo de la estructura restringida, queda:

$$\begin{aligned}
 R_{1L} &= \overline{FM}_1^1 + \overline{FM}_2^1 = -L_1 \\
 R_{2L} &= \overline{FP}_2^1 + \overline{FP}_2^2 - W_2 = -L_2 \\
 R_{3L} &= \overline{FS}_3^1 + \overline{FS}_3^2 = -L_3 \\
 R_{4L} &= \overline{FM}_4^2 = -L_4 \\
 R_{5L} &= \overline{FP}_5^2 = 0 = -L_5 \\
 R_{6L} &= \overline{FS}_6^2 = -L_6 \\
 R_{7L} &= \overline{FM}_7^1 = -L_7 \\
 R_{8L} &= \overline{FP}_8^1 = -L_8 \\
 R_{9L} &= \overline{FS}_9^1 = -L_9
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

Las reacciones de la estructura restringida resultantes de la aplicación individual de desplazamientos de valor unitario se muestran en la figura 2.18.

Es posible evaluar estas reacciones en términos de coeficientes de rigidez del elemento. Por lo tanto, la matriz transformada de rigideces del elemento, para cada elemento, definidas

respecto al mismo sistema de ejes $\bar{x}-\bar{y}$ deben ser desarrolladas primero. Suponiendo que la matriz total de rigideces ha sido escrita y que los cosenos directores han sido evaluados para cada elemento, podemos evaluar la matriz transformada:

Para el elemento 1:
$$C_x = \frac{H}{(H^2 + V^2)^{1/2}} \quad 2.53$$

$$C_y = \frac{V}{(H^2 + V^2)^{1/2}} \quad 2.54$$

los componentes de la matriz transformada pueden ser definidos como sigue:

$$[\bar{K}_e]_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{k}_{77} & \bar{k}_{78} & \bar{k}_{79} & \bar{k}_{71} & \bar{k}_{72} & \bar{k}_{73} \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad 2.55$$

Donde los desplazamientos al extremo del elemento así como las fuerzas toman las etiquetas de los correspondientes componentes de desplazamiento en los nudos.

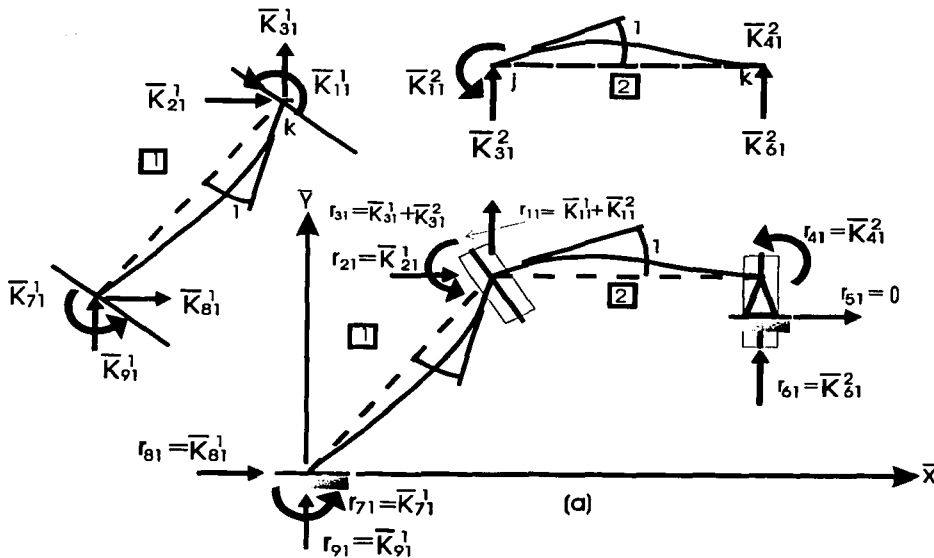
Para el elemento 2:
$$C_x = \frac{L}{L} = 1 \quad 2.56$$

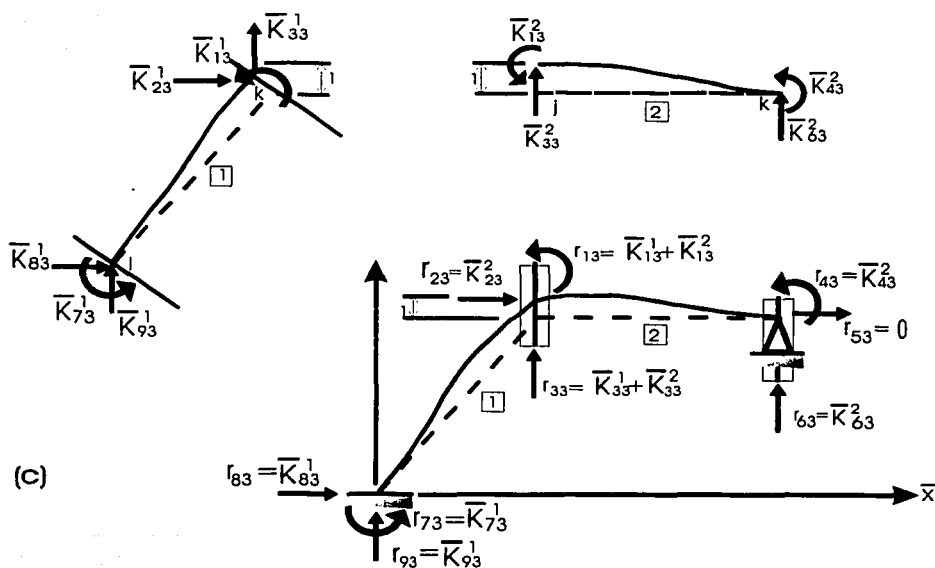
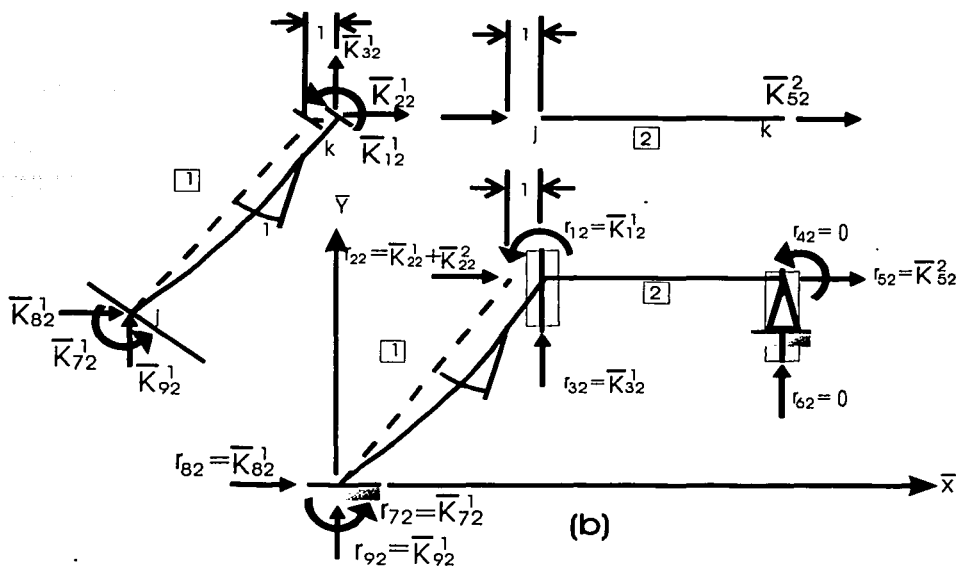
$$C_y = 0 \quad 2.57$$

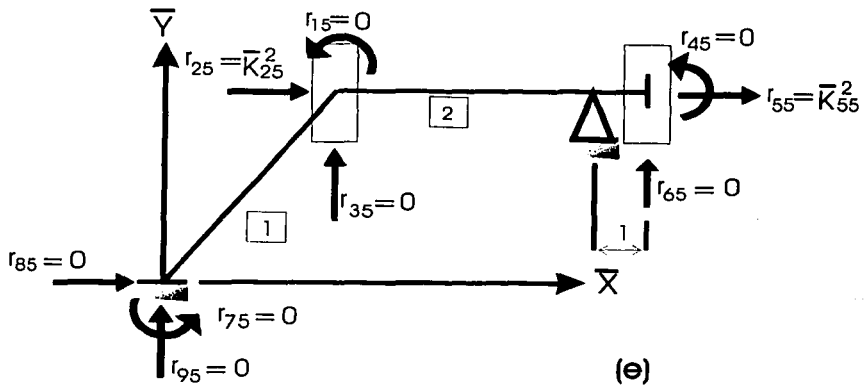
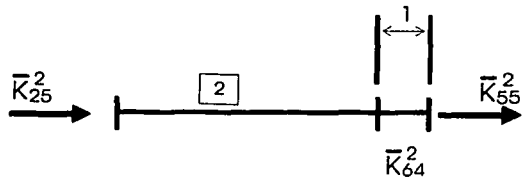
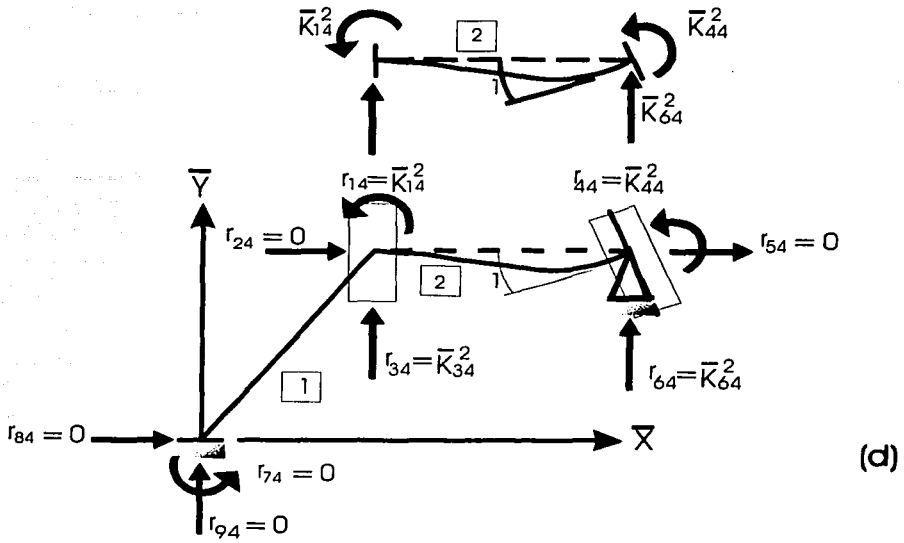
las componentes de la matriz transformada pueden ser identificadas como sigue:

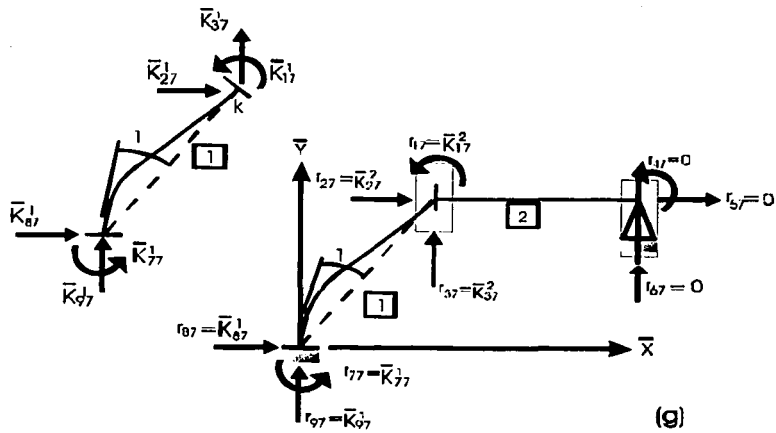
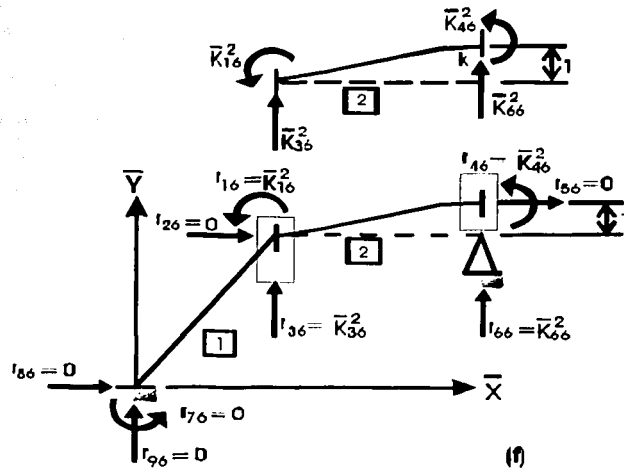
$$[\bar{K}_e]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{k}_{11} \\ 0 \\ \bar{k}_{31} \\ \bar{k}_{41} \\ 0 \\ \bar{k}_{61} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} & 0 & \bar{k}_{16} \\ \bar{k}_{22} & 0 & 0 & \bar{k}_{25} & 0 \\ 0 & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & 0 & \bar{k}_{36} \\ 0 & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} & 0 & \bar{k}_{46} \\ 0 & \bar{k}_{52} & 0 & 0 & \bar{k}_{55} \\ 0 & \bar{k}_{63} & \bar{k}_{64} & 0 & \bar{k}_{66} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

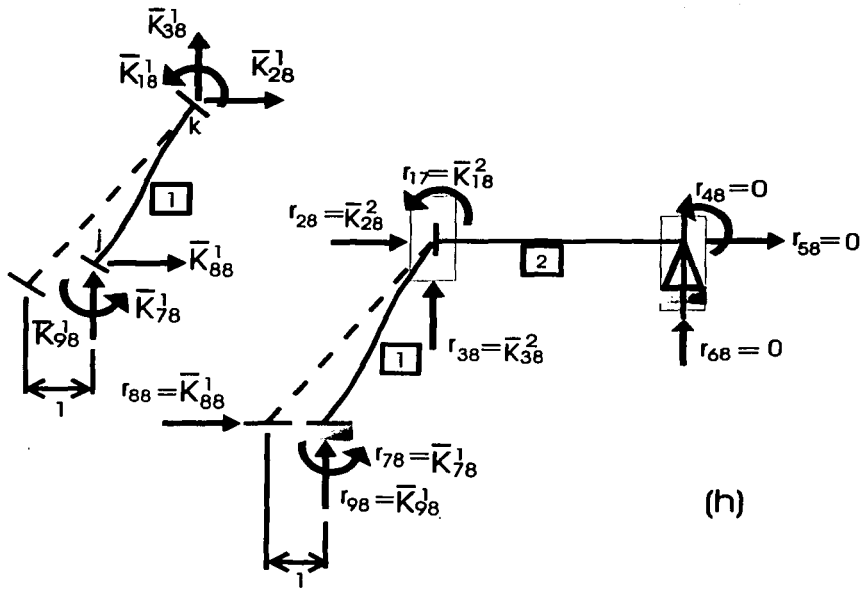
2.58



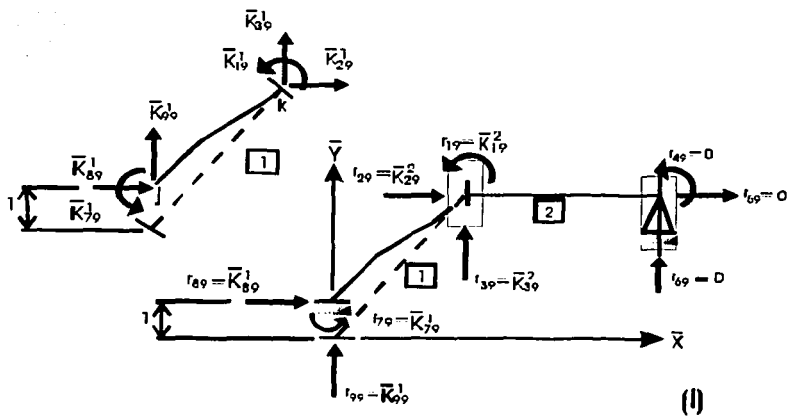








(h)



(l)

Figura 2.18. Aplicación individual de desplazamientos de valor unitario.

Regresando al análisis de la estructura restringida por la aplicación de un desplazamiento unitario (giro en el nudo 2) las reacciones resultantes se muestran en la fig. 2.18 (a). Las fuerzas necesarias para mantener la deformación, así como el equilibrio de cada elemento de la estructura restringida coincidente con el nudo 2 se muestra en 2.18 (a) también. Estas fuerzas están definidas con respecto a los ejes globales $\bar{x}-\bar{y}$. El superíndice denota el elemento al que nos referimos. El primer subíndice se refiere al desplazamiento particular que corresponde a la fuerza restrictiva que se define, y el segundo subíndice se refiere al desplazamiento que ha sido impuesto a la estructura restringida.

Ahora el momento restrictivo requerido en el nudo 2 para mantener la deformación (fig. 2.18a) es igual a la suma de momentos requeridos para girar los extremos de cada elemento coincidente en el nudo, por ejemplo:

$$r_{11} = \bar{k}_{11}^1 + \bar{k}_{11}^2 \quad 2.59$$

esto puede ser verificado considerando el equilibrio estático en el nudo 2 $\Sigma M = 0$. Las otras reacciones de la estructura restringida pueden ser evaluadas de una manera similar:

$$\begin{aligned} r_{21} &= \bar{k}_{21}^1 \\ r_{31} &= \bar{k}_{31}^1 + \bar{k}_{31}^2 \\ r_{41} &= \bar{k}_{41}^2 \\ r_{51} &= 0 \\ r_{61} &= \bar{k}_{61}^2 \\ r_{71} &= \bar{k}_{71}^1 \\ r_{81} &= \bar{k}_{81}^1 \\ r_{91} &= \bar{k}_{91}^1 \end{aligned} \quad 2.60$$

Al identificar las reacciones de la estructura restringida r_{mn} . El primer subíndice denota la fuerza correspondiente al desplazamiento, y el segundo el desplazamiento particular que ha sido liberado.

El análisis de la estructura restringida por la aplicación individual de valores unitarios de otras posibles componentes de desplazamiento se muestra en las figuras 2.18(b) a la 2.18(i).

La solución de la estructura indeterminada se logra sumando las soluciones de la estructura restringida:

- 1) sujeta a la carga original con
- 2) sujeta a la aplicación individual de valores unitarios de desplazamiento.

La combinación de estas soluciones de la estructura restringida deben llevar a las verdaderas reacciones en los soportes como se muestra en la fig. 2.19.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
 r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} & r_{19} & \\
 r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} & r_{29} & \\
 r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & r_{38} & r_{39} & \\
 r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} & r_{47} & r_{48} & r_{49} & \\
 r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & r_{58} & r_{59} & \\
 r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} & r_{67} & r_{68} & r_{69} & \\
 r_{71} & r_{72} & r_{73} & r_{74} & r_{75} & r_{76} & r_{77} & r_{78} & r_{79} & \\
 r_{81} & r_{82} & r_{83} & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & r_{88} & r_{89} & \\
 r_{91} & r_{92} & r_{93} & r_{94} & r_{95} & r_{96} & r_{97} & r_{98} & r_{99} &
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
 \bar{k}_{11}^1 + \bar{k}_{11}^2 & \bar{k}_{12}^1 & \bar{k}_{13}^1 + \bar{k}_{13}^2 & \bar{k}_{14}^2 & 0 & \bar{k}_{16}^2 & \bar{k}_{17}^1 & \bar{k}_{18}^1 \\
 \bar{k}_{21}^1 & \bar{k}_{22}^1 + \bar{k}_{22}^2 & \bar{k}_{23}^1 & 0 & \bar{k}_{25}^2 & 0 & \bar{k}_{27}^1 & \bar{k}_{28}^1 \\
 \bar{k}_{31}^1 + \bar{k}_{32}^2 & \bar{k}_{32}^1 & \bar{k}_{33}^1 + \bar{k}_{33}^2 & \bar{k}_{34}^2 & 0 & \bar{k}_{36}^2 & \bar{k}_{37}^1 & \bar{k}_{38}^1 \\
 \bar{k}_{41}^1 & 0 & \bar{k}_{43}^2 & \bar{k}_{44}^2 & 0 & \bar{k}_{46}^2 & 0 & 0 \\
 0 & \bar{k}_{52}^2 & 0 & 0 & \bar{k}_{55}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 \bar{k}_{61}^2 & 0 & \bar{k}_{63}^2 & \bar{k}_{64}^2 & 0 & \bar{k}_{66}^2 & 0 & 0 \\
 \bar{k}_{71}^1 & \bar{k}_{72}^1 & \bar{k}_{73}^2 & 0 & 0 & 0 & \bar{k}_{77}^1 & \bar{k}_{78}^1 \\
 \bar{k}_{81}^1 & \bar{k}_{82}^1 & \bar{k}_{83}^1 & 0 & 0 & 0 & \bar{k}_{87}^1 & \bar{k}_{88}^1 \\
 \bar{k}_{91}^1 & \bar{k}_{92}^1 & \bar{k}_{93}^1 & 0 & 0 & 0 & \bar{k}_{97}^1 & \bar{k}_{98}^1
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 9
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \bar{k}_{19}^1 \\
 \bar{k}_{29}^1 \\
 \bar{k}_{39}^1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \bar{k}_{79}^1 \\
 \bar{k}_{89}^1 \\
 \bar{k}_{99}^1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 9
 \end{array}$$

2.61

Ahora la solución puede ser expresada como sigue:

$$\begin{aligned}
 R_{1L} + r_{11}\Delta_1 + r_{12}\Delta_2 + r_{13}\Delta_3 + r_{14}\Delta_4 + r_{15}\Delta_5 + r_{16}\Delta_6 + r_{17}\Delta_7 + r_{18}\Delta_8 + r_{19}\Delta_9 &= 0 \\
 R_{2L} + r_{21}\Delta_1 + r_{22}\Delta_2 + r_{23}\Delta_3 + r_{24}\Delta_4 + r_{25}\Delta_5 + r_{26}\Delta_6 + r_{27}\Delta_7 + r_{28}\Delta_8 + r_{29}\Delta_9 &= 0 \\
 R_{3L} + r_{31}\Delta_1 + r_{32}\Delta_2 + r_{33}\Delta_3 + r_{34}\Delta_4 + r_{35}\Delta_5 + r_{36}\Delta_6 + r_{37}\Delta_7 + r_{38}\Delta_8 + r_{39}\Delta_9 &= 0 \\
 R_{4L} + r_{41}\Delta_1 + r_{42}\Delta_2 + r_{43}\Delta_3 + r_{44}\Delta_4 + r_{45}\Delta_5 + r_{46}\Delta_6 + r_{47}\Delta_7 + r_{48}\Delta_8 + r_{49}\Delta_9 &= 0 \\
 R_{5L} + r_{51}\Delta_1 + r_{52}\Delta_2 + r_{53}\Delta_3 + r_{54}\Delta_4 + r_{55}\Delta_5 + r_{56}\Delta_6 + r_{57}\Delta_7 + r_{58}\Delta_8 + r_{59}\Delta_9 &= R_5^0 \\
 R_{6L} + r_{61}\Delta_1 + r_{62}\Delta_2 + r_{63}\Delta_3 + r_{64}\Delta_4 + r_{65}\Delta_5 + r_{66}\Delta_6 + r_{67}\Delta_7 + r_{68}\Delta_8 + r_{69}\Delta_9 &= R_6^0 \\
 R_{7L} + r_{71}\Delta_1 + r_{72}\Delta_2 + r_{73}\Delta_3 + r_{74}\Delta_4 + r_{75}\Delta_5 + r_{76}\Delta_6 + r_{77}\Delta_7 + r_{78}\Delta_8 + r_{79}\Delta_9 &= R_7^0 \\
 R_{8L} + r_{81}\Delta_1 + r_{82}\Delta_2 + r_{83}\Delta_3 + r_{84}\Delta_4 + r_{85}\Delta_5 + r_{86}\Delta_6 + r_{87}\Delta_7 + r_{88}\Delta_8 + r_{89}\Delta_9 &= R_8^0 \\
 R_{9L} + r_{91}\Delta_1 + r_{92}\Delta_2 + r_{93}\Delta_3 + r_{94}\Delta_4 + r_{95}\Delta_5 + r_{96}\Delta_6 + r_{97}\Delta_7 + r_{98}\Delta_8 + r_{99}\Delta_9 &= R_9^0
 \end{aligned}$$

2.62

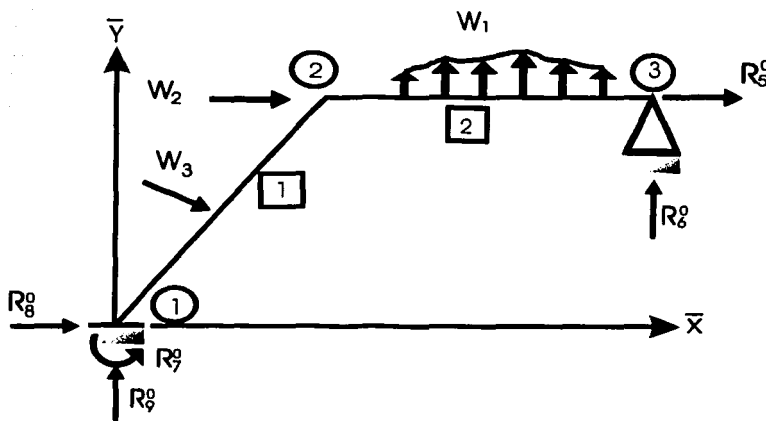


Figura 2.19. Reacciones en los apoyos.

Haciendo las sustituciones requeridas:

$$\begin{bmatrix}
 \overline{FM}_1^1 + \overline{FM}_1^2 \\
 \overline{FP}_2^1 + \overline{FP}_2^2 - W_2 \\
 \overline{FS}_3^1 + \overline{FS}_3^2 \\
 \overline{FM}_4^2 \\
 0 \\
 \overline{FS}_6^2 \\
 \overline{FM}_7^1 \\
 \overline{FP}_8^1 \\
 \overline{FS}_9^1
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 \overline{K}_{11}^1 + \overline{K}_{11}^2 & \overline{K}_{12}^1 & \overline{K}_{13}^1 + \overline{K}_{13}^2 & \overline{K}_{14}^1 & 0 & \overline{K}_{16}^1 & \overline{K}_{17}^1 & \overline{K}_{18}^1 & \overline{K}_{19}^1 \\
 \overline{K}_{21}^1 & \overline{K}_{22}^1 + \overline{K}_{22}^2 & \overline{K}_{23}^1 & 0 & \overline{K}_{25}^1 & 0 & \overline{K}_{27}^1 & \overline{K}_{28}^1 & \overline{K}_{29}^1 \\
 \overline{K}_{31}^1 + \overline{K}_{31}^2 & \overline{K}_{32}^1 & \overline{K}_{33}^1 + \overline{K}_{33}^2 & \overline{K}_{34}^1 & 0 & \overline{K}_{36}^1 & \overline{K}_{37}^1 & \overline{K}_{38}^1 & \overline{K}_{39}^1 \\
 \overline{K}_{41}^2 & 0 & \overline{K}_{43}^2 & \overline{K}_{44}^2 & 0 & \overline{K}_{46}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \overline{K}_{32}^2 & 0 & 0 & \overline{K}_{55}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \overline{K}_{61}^2 & 0 & \overline{K}_{63}^1 & \overline{K}_{64}^1 & 0 & \overline{K}_{66}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 \overline{K}_{71}^1 & \overline{K}_{72}^1 & \overline{K}_{73}^1 & 0 & 0 & 0 & \overline{K}_{77}^1 & \overline{K}_{78}^1 & \overline{K}_{79}^1 \\
 \overline{K}_{81}^1 & \overline{K}_{82}^1 & \overline{K}_{83}^1 & 0 & 0 & 0 & \overline{K}_{87}^1 & \overline{K}_{88}^1 & \overline{K}_{89}^1 \\
 \overline{K}_{91}^1 & \overline{K}_{92}^1 & \overline{K}_{93}^1 & 0 & 0 & 0 & \overline{K}_{97}^1 & \overline{K}_{98}^1 & \overline{K}_{99}^1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta_1 \\
 \Delta_2 \\
 \Delta_3 \\
 \Delta_4 \\
 \Delta_5 \\
 \Delta_6 \\
 \Delta_7 \\
 \Delta_8 \\
 \Delta_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 R_5^0 \\
 R_6^0 \\
 R_7^0 \\
 R_8^0 \\
 R_9^0
 \end{bmatrix}$$

2.63

O en notación más general:

$$[r_{\Delta\Delta}]\{\Delta\} = \{L\} + \{R^0\} \tag{2.64}$$

Donde $[r_{\Delta\Delta}]$ es la matriz de rigideces total de la estructura, $\{\Delta\}$ es la matriz total de desplazamientos en los nudos, $\{L\}$ es la matriz total de cargas en los nudos y $\{R^0\}$ es la matriz total de reacciones.

3. Algoritmo Del Método

El procedimiento general para analizar estructuras por el método de las rigideces es el siguiente:

- Paso 1: Establecer ejes globales de referencia para la estructura ($\bar{X}-\bar{Y}$) y seleccionar el nudo origen para cada elemento y establecer sus ejes locales.
- Paso 2: Identificar las componentes independientes de desplazamiento en los nudos, tanto libres como restringidos, y numerarlos comenzando por los libres.
- Paso 3: Crear la matriz de rigideces total transformada del elemento $[\bar{k}_e]_i$ para cada elemento.

$$\begin{aligned} [k_e]_i &= [f_e]_i^{-1} \\ [k_e]_i &= [TA_e]_i [k_e]_i [TD_e]_i \\ [\bar{k}_e]_i &= [T_e]_i [k_e]_i [T_e]_i^T \end{aligned} \quad 3.1$$

identificando renglones y columnas con respecto a las etiquetas de los componentes de desplazamiento en los nudos a los extremos del elemento.

- Paso 4: Desarrollar la matriz total de rigideces de la estructura sumando los coeficientes de rigideces de cada elemento:

$$r_{pq} = \sum_i \bar{k}_{pq}^i \quad 3.2$$

la matriz total de rigideces de la estructura es seccionada con respecto a las componentes restringidas y libres de desplazamiento y sus correspondientes fuerzas.

- Paso 5: Calcular las fuerzas en los extremos de cada elemento a una carga aplicada y luego las cargas totales en los nudos para la estructura, donde:

$$L_m = -\sum_i \bar{F}A_m^i + \bar{Q}_m \quad 3.3$$

- Paso 6: Componer el sistema básico de ecuaciones

$$[r_{nn}]\{\Delta_n\} = \{L_n\} \quad 3.4$$

y resolverlo para las componentes no conocidas de desplazamiento en los nudos.

Paso 7: Determinar los elementos finales para cada miembro

$$\begin{aligned}\{\bar{M}_e^f\}_i &= [\bar{k}_e]_i \{\bar{\delta}_e\}_i + \{\bar{F}M_e\}_i \\ \{M_e^f\}_i &= [T_e]^T \{\bar{M}_e^f\}_i\end{aligned}\quad 3.5$$

Paso 8: Evaluar las reacciones en los apoyos

$$[r_{ra}] \{\Delta_n\} - \{L_r\} = \{R_r^0\} \quad 3.6$$

4. Método de las Rigideces para Marcos Planos

4.1. Aplicación del Método a Marcos Rígidos

Para ilustrar la aplicación del método de las rigideces a marcos rígidos seguiremos el caso de la estructura siguiente: Los datos necesarios se presentan a continuación:

$A = 15m^2$

$I = 450m^4$

$E = 30,000ksi$

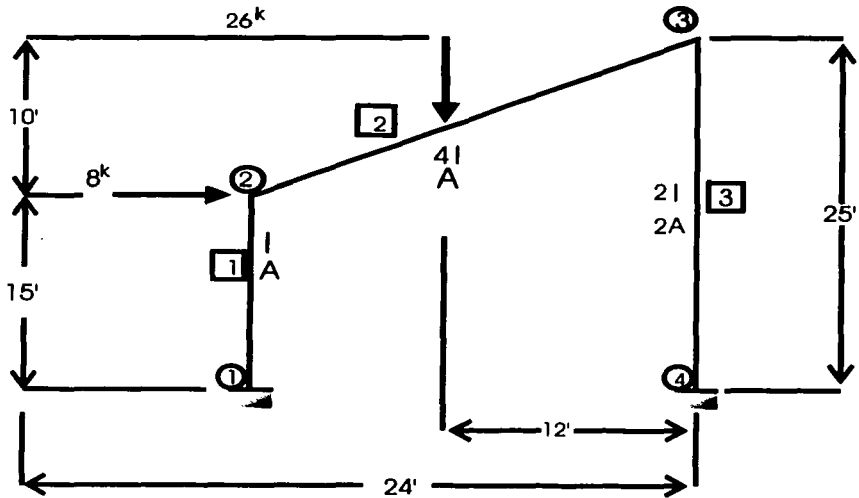


Figura 4.1. Características geométricas del marco y numeración de elementos.

Las etiquetas de los nudos se presentan en un círculo adyacente a los mismos y los miembros son numerados en cuadrados.

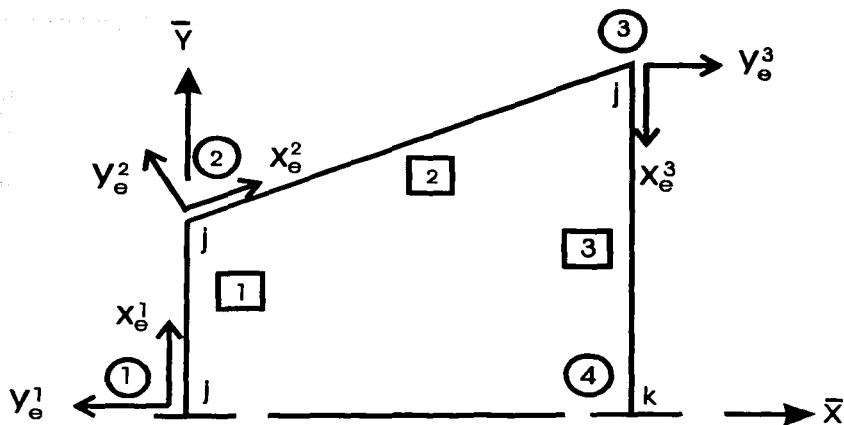


Figura 4.2. Ejes Globales y ejes locales de los elementos.

Información Del Elemento

En la fig. 4.2 los extremos *j* y *k* de cada elemento fueron ya seleccionados y los ejes globales posicionados.

Las coordenadas de los nudos referidos al sistema global se presentan en la tabla 4.1. Los cosenos directores para cada elemento fueron calculados y se presentan en la tabla 4.2 junto con la información de tipo geométrico referente a la sección transversal de los elementos.

Nudos	$X(\bar{x})$	$Y(\bar{y})$
1	0	0
2	0	15
3	24	25
4	24	0

Tabla 4.1. Coordenadas de los nudos

Elemento	j	k	$A(\bar{f}^2)$	$I(\bar{f}^4)$	$L(\bar{f})$	C_x	C_y
1	1	2	0.104	0.0217	15.0	0	1.0
2	2	3	0.104	0.0868	26.0	0.9231	0.3846
3	3	4	0.208	0.0434	25.0	0	-1.0

Tabla 4.2. Propiedades geométricas y cosenos directores.

Matriz De Desplazamientos

Las posibles componentes de desplazamiento definidas respecto a los ejes globales $\bar{x}-\bar{y}$ se definen y numeran en la fig. 4.3

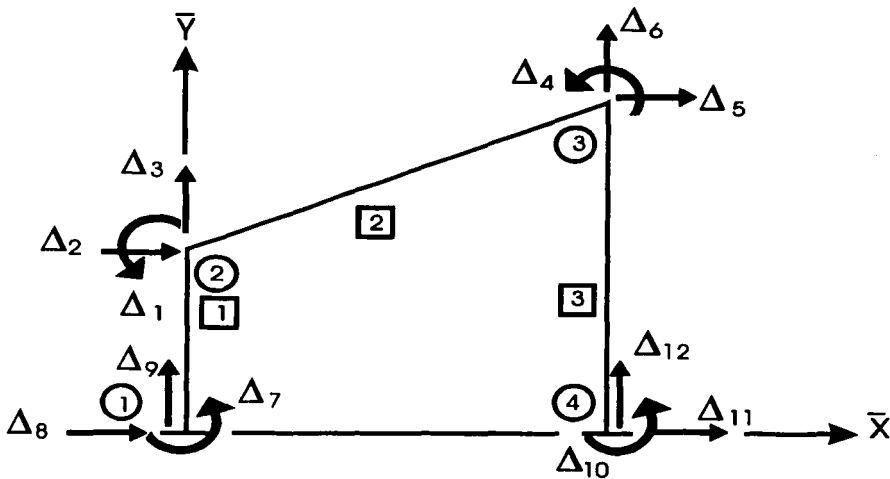


Figura 4.3. Componentes de desplazamiento.

La matriz de desplazamientos puede ser escrita como:

$$\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta_n\} \\ \{\Delta_r\} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

ha sido dividida en componentes restringidas (Δ_r) y libres (Δ_n) .

Matrices De Rigideces De Los Elementos

Los renglones y las columnas de la matriz transformada de cada elemento deben ser preferentemente numeradas según la componente de desplazamiento del nudo conectado al extremo del elemento, definido todo respecto a los ejes globales.

Elemento 1

$$[K_e] = E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 57.867 & 0 & 5.787 & 28.933 & 0 & -5.787 \\ 0 & 69.333 & 0 & 0 & -69.333 & 0 \\ 5.787 & 0 & 0.772 & 5.787 & 0 & -0.772 \\ 28.933 & 0 & 5.787 & 57.867 & 0 & -5.787 \\ 0 & -69.333 & 0 & 0 & 69.333 & 0 \\ -5.787 & 0 & -0.772 & -5.787 & 0 & 0.772 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} \quad 4.2$$

$$[K_e] = E \times 10^{-4} \begin{matrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 57.867 & -5.787 & 0 & 28.933 & 5.787 & 0 \\ -5.787 & 0.772 & 0 & -5.787 & -0.772 & 0 \\ 0 & 0 & 69.333 & 0 & 0 & -69.333 \\ 28.933 & -5.787 & 0 & 57.867 & 5.787 & 0 \\ 5.787 & -0.772 & 0 & 5.787 & 0.772 & 0 \\ 0 & 0 & -69.333 & 0 & 0 & 69.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad 4.3$$

Elemento 2

$$[K_e]_2 = E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 133.538 & 0 & 7.704 & 66.769 & 0 & -7.704 \\ 0 & 40.000 & 0 & 0 & -40.000 & 0 \\ 7.704 & 0 & 7.704 & 7.704 & 0 & -0.593 \\ 66.769 & 0 & 133.538 & 133.538 & 0 & -7.704 \\ 0 & -40.000 & 0 & 0 & 40.000 & 0 \\ -7.704 & 0 & -7.704 & -7.704 & 0 & 0.593 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} \quad 4.4$$

$$[\bar{K}_e]_2 = E \times 10^{-4} \begin{matrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} & \overline{e} & \overline{f} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 133.538 & -2.963 & 7.112 & 66.769 & 2.963 & -7.112 \\ -2.963 & 34.172 & 13.990 & -2.963 & -34.172 & -13.990 \\ 7.112 & 13.990 & 6.422 & 7.112 & -13.990 & -6.422 \\ 66.769 & -2.963 & 7.112 & 133.538 & 2.963 & -7.112 \\ 2.963 & -34.172 & -13.990 & 2.963 & 34.172 & 13.990 \\ -7.112 & -13.990 & -6.422 & -7.112 & 13.990 & 6.423 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad 4.5$$

Elemento 3

$$[K_e]_b = E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 69.440 & 0 & 4.166 & 34.720 & 0 & -4.166 \\ 0 & 83.200 & 0 & 0 & -83.200 & 0 \\ 4.166 & 0 & 0.333 & 4.166 & 0 & -0.333 \\ 34.720 & 0 & 4.166 & 69.440 & 0 & -4.166 \\ 0 & -83.200 & 0 & 0 & 83.200 & 0 \\ -4.166 & 0 & -0.333 & -4.166 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} \quad 4.6$$

$$\begin{matrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} & \overline{e} & \overline{f} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \end{matrix}$$

$$[\overline{K}_e]_b = E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 69.440 & 4.165 & 0 & 34.720 & -4.166 & 0 \\ 4.166 & 0.333 & 0 & 4.166 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 83.200 & 0 & 0 & -83.200 \\ 34.720 & 4.166 & 0 & 69.440 & -4.166 & 0 \\ -4.166 & -0.333 & 0 & -4.166 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & -83.200 & 0 & 0 & 83.200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \quad 4.7$$

$$[r_{uu}] = E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 19405 & 2824 & 7.112 & 66769 & 2963 & -7.112 & 28933 & -5787 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2824 & 34944 & 13990 & -2963 & -34172 & -13990 & 5787 & -0772 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.112 & 13990 & 75755 & 7.112 & -13990 & -6422 & 0 & 0 & -69333 & 0 & 0 & 0 \\ 66769 & 75755 & 7.112 & 202978 & 7.129 & -7.112 & 0 & 0 & 0 & 34720 & -4.166 & 0 \\ 2963 & 7.112 & -13990 & 7.129 & 34505 & 13990 & 0 & 0 & 0 & 4.166 & -0333 & 0 \\ -7.112 & -13990 & -6422 & -7.112 & 13990 & 89623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -83200 \\ 28933 & 5787 & 0 & 0 & 0 & 0 & -57867 & -5787 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5787 & -0772 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5787 & 0772 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -69333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 69333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 34721 & 4.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 69440 & -4.166 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.166 & -0333 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.166 & 0333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -83200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 83200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \quad 4.8$$

Matriz De Rigideces De La Estructura

La matriz total de rigideces se desarrolla sumando elementos de varias matrices transformadas de elementos

$$r_{11} = \bar{k}_{11}^1 + \bar{k}_{11}^2 = 0.0191405 E$$

$$r_{12} = \bar{k}_{12}^1 + \bar{k}_{12}^2 = 0.0002824 E \quad 4.9$$

etc.

La matriz total de rigideces de la estructura ya seccionada se muestra a continuación:

$$[r_{uu}] = E \times 10^{-4} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 191.405 & 2.824 & 7.112 & 66.769 & 2.963 & -7.112 \\ 2.824 & 34.944 & 13.990 & -2.963 & -34.172 & -13.990 \\ 7.112 & 13.990 & 75.755 & 7.112 & -13.990 & -6.422 \\ 66.769 & -2.963 & 7.112 & 202.978 & 7.129 & -7.112 \\ 2.963 & -34.172 & -13.990 & 7.129 & 34.505 & 13.990 \\ -7.112 & -13.990 & -6.422 & -7.112 & 13.990 & 89.623 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 4.10$$

$$[r_{uv}]^1 = \frac{1}{E} \times 10^4 \begin{bmatrix} 0.00669 & -0.02904 & -0.00051 & -0.00156 & -0.02939 & 0.00042 \\ -0.02904 & 1.10806 & 0.00318 & -0.01329 & 1.10497 & -0.00265 \\ -0.00051 & 0.00318 & 0.01441 & -0.00061 & 0.00916 & 0.00001 \\ -0.00156 & -0.01329 & -0.00061 & 0.00580 & -0.01468 & 0.00051 \\ -0.02939 & 1.10497 & 0.00916 & -0.01468 & 1.135665 & -0.00763 \\ 0.00042 & -0.00265 & 0.00001 & 0.00051 & -0.00763 & 0.01201 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad 4.11$$

Matriz de Cargas En los Nudos

Antes de que la matriz de cargas en los nudos pueda ser desarrollada, la carga aplicada a lo largo del elemento 2 debe ser convertida en un grupo de cargas equivalentes en los nudos. Las fuerzas de empotramiento con respecto a los ejes locales pueden ser escritas como sigue:

$$\{FM_e\}_2 = \begin{bmatrix} 78.0 \\ 5.0 \\ 12.0 \\ -78.0 \\ 5.0 \\ 12.0 \end{bmatrix}_2 \quad 4.12$$

Para el elemento 2 la matriz de transformación es:

$$[T_e]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9615 & -0.3846 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3846 & 0.9615 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9615 & -0.3846 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3846 & 0.9615 \end{bmatrix}_2 \quad 4.13$$

Las fuerzas de empotramiento pueden ser transformadas de ejes locales a globales de acuerdo con (b) que deja:

$$\{\overline{FM}_e\}_2 = [T_e]_2 \{FM_e\}_2 \quad 4.14$$

$$\{FM_e\}_2 = \begin{bmatrix} \overline{FM}_1 \\ \overline{FP}_2 \\ \overline{FS}_3 \\ \overline{FM}_4 \\ \overline{FP}_5 \\ \overline{FS}_6 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 78.00 & 1 \\ 0.00 & 2 \\ 13.00 & 3 \\ -78.00 & 4 \\ 0.00 & 5 \\ 13.00 & 6 \end{bmatrix} \quad 4.15$$

La carga aplicada horizontalmente en el nudo de $8.0k$ en el nudo 2 asume la etiqueta del desplazamiento correspondiente Δ_2 , de este modo $Q_2 = 8.0k$.

Sumando las componentes correspondientes la matriz total de cargas en los nudos queda:

$$\{L\} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -78.00 \\ 8.00 \\ -13.00 \\ 78.00 \\ 0 \\ -13.00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{L_u\} \\ \{L_r\} \end{bmatrix} \quad 4.16$$

Esta matriz es también seccionada con respecto a los desplazamientos restringidos y libres.

Calculo De Los Desplazamientos En Los Nudos

El grupo básico de ecuaciones es:

$$[r_{uu}]\{\Delta_u\} = \{L_u\} \quad 4.17$$

Que puede ser resuelto para los desplazamientos desconocidos

$$\{\Delta_u\} = [r_{uu}]^{-1} \{L_u\} \quad 4.18$$

Sustituyendo la información adecuada nos queda el siguiente grupo de ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \times 10^4 \begin{bmatrix} 0.00669 & -0.02904 & -0.00051 & -0.00156 & -0.02939 & 0.00042 \\ -0.02904 & 1.10806 & 0.00318 & -0.01329 & 1.10497 & -0.00265 \\ -0.00051 & 0.00318 & 0.01441 & -0.00061 & 0.00916 & 0.00001 \\ -0.00156 & -0.01329 & -0.00061 & 0.00580 & -0.01468 & 0.00051 \\ -0.02939 & 1.10497 & 0.00916 & -0.01468 & 1.13565 & -0.00763 \\ 0.00042 & -0.00265 & 0.00001 & 0.00051 & -0.00763 & 0.01201 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -78.00 \\ 8.00 \\ -13.00 \\ 78.00 \\ 0 \\ -13.00 \end{Bmatrix} \quad 4.19$$

Que se reduce en:

$$\{\Delta_u\} = \frac{1}{E} \times 10^4 \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.87465 \\ 10.08609 \\ -0.16982 \\ 0.46906 \\ 9.96725 \\ -0.17044 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00202 \text{ rad} \\ 0.02335 \text{ ft} \\ -0.00039 \text{ ft} \\ 0.00109 \text{ rad} \\ 0.02307 \text{ ft} \\ -0.00039 \text{ ft} \end{bmatrix} \quad 4.20$$

Fuerzas Finales

$$\{\overline{M}_e^f\} = [\overline{K}_e] \{\overline{\delta}_e\} + \{\overline{FM}_e\} \quad 4.21$$

Las fuerzas finales definidas con respecto a los ejes globales pueden ser establecidas para cada elemento como sigue:

$$\{M_e^f\}_i = [T_e]_i^T \{\overline{M}_e^f\}_i \quad 4.22$$

Las fuerzas finales pueden ser establecidas con respecto a los ejes locales para cada elemento:

Elemento 1:

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_7^f \\ \overline{P}_8^f \\ \overline{S}_9^f \\ \overline{M}_1^f \\ \overline{P}_2^f \\ \overline{S}_3^f \end{bmatrix} \quad 4.23$$

$$= E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 57.867 & -5.787 & 0 & 28.933 & 5.787 & 0 \\ -5.787 & 0.772 & 0 & -5.787 & -0.772 & 0 \\ 0 & 0 & 69.333 & 0 & 0 & -69.333 \\ 28.933 & -5.787 & 0 & 57.867 & 5.787 & 0 \\ 5.787 & -0.772 & 0 & 5.787 & 0.772 & 0 \\ 0 & 0 & -69.333 & 0 & 0 & 69.333 \end{bmatrix} \frac{1}{E} \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.87465 \\ 10.08609 \\ -0.16982 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_7^f \\ \overline{P}_8^f \\ \overline{S}_9^f \\ \overline{M}_1^f \\ \overline{P}_2^f \\ \overline{S}_3^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.06 \text{ ft} - k \\ -2.72k \\ 11.77k \\ 7.75 \text{ ft} - k \\ 2.72k \\ -11.77k \end{bmatrix}$$

Y:

$$\begin{bmatrix} M_a^f \\ P_b^f \\ S_c^f \\ M_d^f \\ P_e^f \\ S_f^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33.06 \\ -2.72 \\ 11.77 \\ 7.75 \\ 2.72 \\ -11.77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.06 \text{ ft} - k \\ 11.77k \\ 32.72k \\ 7.75 \text{ ft} - k \\ -11.77k \\ -2.72k \end{bmatrix} \quad 4.24$$

Elemento 2:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1^f \\ \bar{P}_2^f \\ \bar{S}_3^f \\ \bar{M}_4^f \\ \bar{P}_5^f \\ \bar{S}_6^f \end{bmatrix}_2 = E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 133.538 & -2.963 & 7.112 & 66.769 & 2.963 & -7.112 \\ -2.963 & 34.172 & 13.990 & -2.963 & -34.172 & -13.990 \\ 7.112 & 13.990 & 6.422 & 7.112 & -13.990 & -6.422 \\ 66.769 & -2.963 & 7.112 & 133.538 & 2.963 & -7.112 \\ 2.963 & -34.172 & -13.990 & 2.963 & 34.172 & 13.990 \\ -7.112 & -13.990 & -6.422 & -7.112 & 13.990 & 6.423 \end{bmatrix}_2 \frac{1}{E} \times 10^4 \begin{bmatrix} -0.87465 \\ 10.08609 \\ -0.16982 \\ 0.46906 \\ 9.96725 \\ -0.17044 \end{bmatrix}_2$$

$$+ \begin{bmatrix} 78.00 \\ 0.00 \\ 13.00 \\ -78.00 \\ 0.00 \\ 13.00 \end{bmatrix}_2$$

4.25

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1^f \\ \bar{P}_2^f \\ \bar{S}_3^f \\ \bar{M}_4^f \\ \bar{P}_5^f \\ \bar{S}_6^f \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -7.83 ft - k \\ 5.27k \\ 11.78k \\ -74.11 ft - k \\ -5.27k \\ 14.22k \end{bmatrix}_2$$

Y:

$$\begin{bmatrix} M_a^f \\ P_b^f \\ S_c^f \\ M_d^f \\ P_e^f \\ S_f^f \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9231 & 0.3846 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3846 & 0.9231 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9231 & 0.3846 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3846 & 0.9231 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} -7.83 \\ 5.27 \\ 11.78 \\ -74.11 \\ -5.27 \\ 14.22 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -7.83 ft - k \\ 9.40k \\ 8.85k \\ -74.11 ft - k \\ 0.60k \\ 15.15k \end{bmatrix}_2$$

Elemento 3:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_4^f \\ \bar{P}_5^f \\ \bar{S}_6^f \\ \bar{M}_{10}^f \\ \bar{P}_1^f \\ \bar{S}_{12}^f \end{bmatrix} = E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 69.440 & 4.166 & 0 & 34.720 & -4.166 & 0 \\ 4.166 & 0.333 & 0 & 4.166 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 83.200 & 0 & 0 & -83.200 \\ 34.720 & 4.166 & 0 & 69.440 & -4.166 & 0 \\ -4.166 & -0.333 & 0 & -4.166 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & -83.200 & 0 & 0 & 83.200 \end{bmatrix} \frac{1}{E} \times 10^4 \begin{bmatrix} 0.46906 \\ 9.96725 \\ -0.17044 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_4^f \\ \bar{P}_5^f \\ \bar{S}_6^f \\ \bar{M}_{10}^f \\ \bar{P}_1^f \\ \bar{S}_{12}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.10 ft - k \\ 5.27k \\ -14.18k \\ 57.81 ft - k \\ -5.27k \\ 14.18k \end{bmatrix}$$

4.26

Y:

$$\begin{bmatrix} M_a^f \\ P_b^f \\ S_c^f \\ M_d^f \\ P_e^f \\ S_f^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 74.10 \\ 5.27 \\ -14.18 \\ 57.81 \\ -5.27 \\ 14.18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.10 ft - k \\ 14.18k \\ 5.27k \\ 57.81 ft - k \\ -14.18k \\ -5.27k \end{bmatrix} \quad 4.27$$

Las fuerzas finales para cada elemento se muestran en la fig. 4.4 el hecho de que algunas fuerzas no estén exactamente en equilibrio en los nudos se debe a errores de redondeo en los cálculos; la magnitud de los errores es pequeña comparada con la magnitud de las fuerzas y no es de consecuencias.

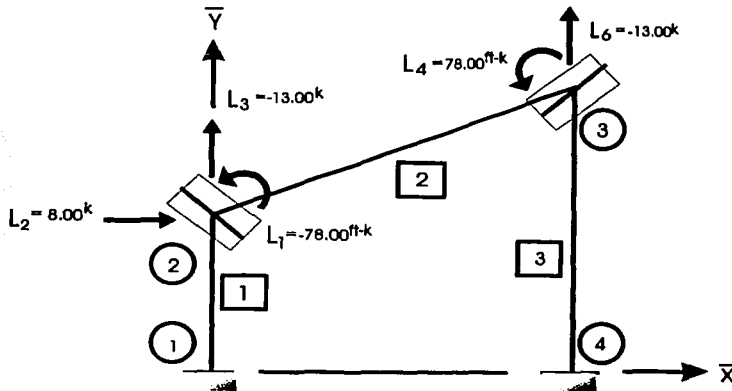
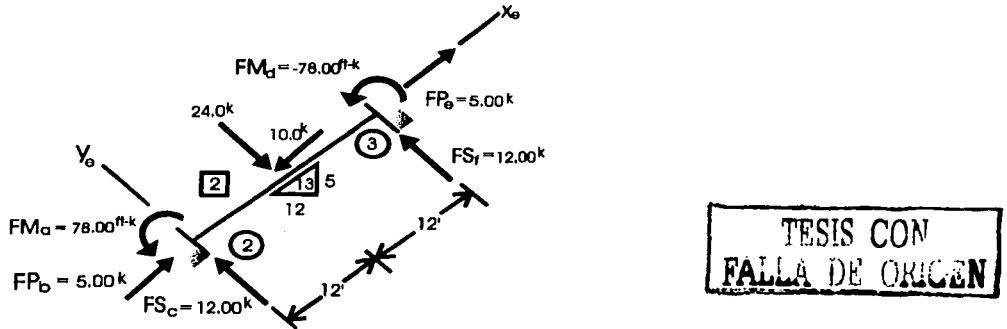


Figura 4.4. Fuerzas finales.

Reacciones En Los Apoyos

Las reacciones en los apoyos para la condición de carga dada puede ser evaluada como sigue:

$$[r_{ru}]\{\Delta_u\} - \{L_r\} = \{R_r^0\} \tag{4.28}$$

$$E \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 28.933 & 5.787 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.787 & -0.772 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -69.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 34.721 & 4.166 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.166 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -83.200 \end{bmatrix} \frac{1}{E} \times 10^4 \begin{bmatrix} -0.87466 \\ 10.08609 \\ -0.16982 \\ 0.46906 \\ 9.96725 \\ -0.17044 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_7^0 \\ R_8^0 \\ R_9^0 \\ R_{10}^0 \\ R_{11}^0 \\ R_{12}^0 \end{bmatrix}$$

4.29

$$\begin{bmatrix} R_7^0 \\ R_8^0 \\ R_9^0 \\ R_{10}^0 \\ R_{11}^0 \\ R_{12}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.06 \text{ ft} - k \\ -2.72k \\ 11.77k \\ 57.81 \text{ ft} - k \\ -5.27 \\ 14.18k \end{bmatrix}$$

4.30

El diagrama de cuerpo libre de la estructura total se muestra en la fig. 4.5

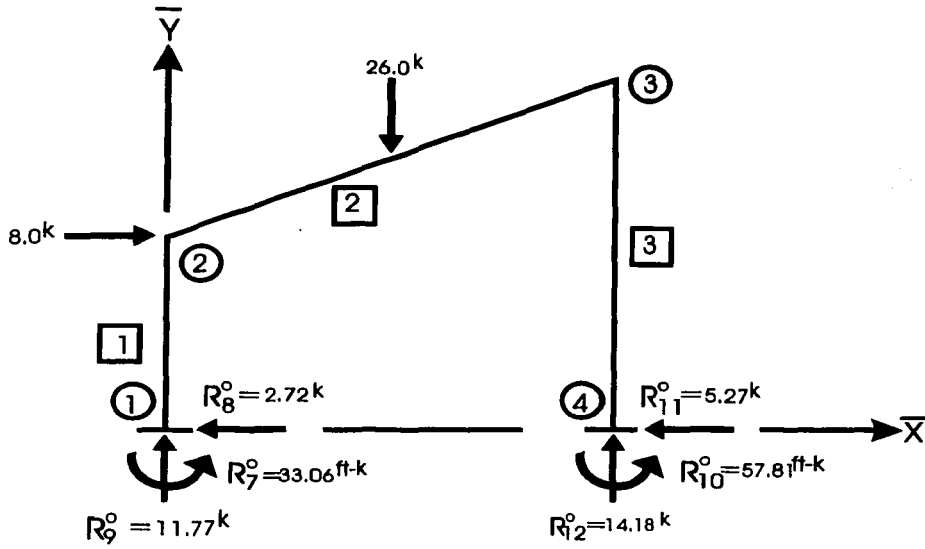


Figura 4.5. Reacciones de la estructura.

4.2 Ejemplo

Calcularemos los elementos mecánicos en los extremos de los elementos componentes de la estructura mostrada en la figura 4.6 utilizando el método de las rigideces. El valor del módulo de elasticidad es constante en toda la estructura ($E=cte$); los valores de los momentos de inercia (I) y el área (A) para los distintos grupos de elementos (columnas, traveses y diagonales) se muestran en la tabla 4.3.

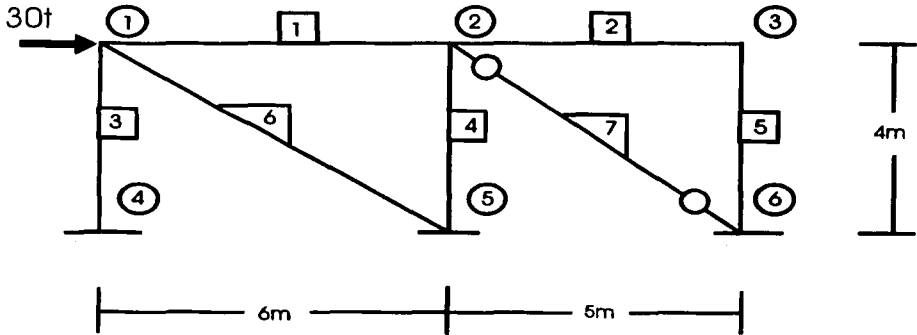
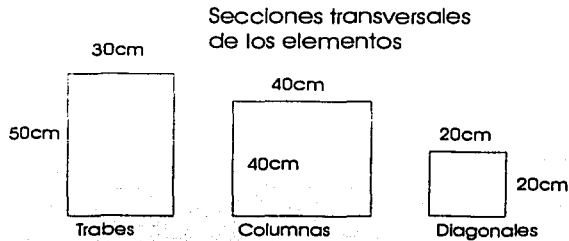


Figura 4.6. Geometría y numeración de elementos.



Elemento tipo	$I(m^4 \times 10^{-3})$	$A(m^2 \times 10^{-3})$
Columnas	2.133	160
Traveses	3.125	150
Diagonales	0.133	40

Tabla 4.3. Propiedades geométricas de las barras.

Todos los nudos en la estructura de la figura 4.6 han sido numerados en círculos y los elementos en cuadrados, las longitudes se encuentran en metros y las fuerzas en toneladas.

La matriz de rigideces simplificada se muestra a continuación:

$$K = \begin{matrix} & \delta x_1 & \delta y_1 & \phi_1 & \delta x_2 & \delta y_2 & \phi_2 & \delta x_3 & \delta y_3 & \phi_3 \\ \begin{matrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum M_1 \\ \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum M_2 \\ \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum M_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2924133 & -2558 & -8085 & -25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2228 & 418836 & -5336 & 0 & -17361 & -5208 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8085 & -5338 & 42906 & 0 & 5208 & 10416 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 0 & 592091 & -30473 & -8 & -30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -174 & 5208 & -30473 & 4291061 & -2292 & 0 & -3 & -75 & 0 \\ 0 & -521 & 104166 & -80 & -2292 & 67166 & 0 & 75 & 125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 304 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 75 & 0 & 403 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 125 & -8 & 75 & 4633 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matriz para las reacciones en la estructura restringida por carga actualmente es:

$$\sum \phi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matriz por cargas en los nudos es:

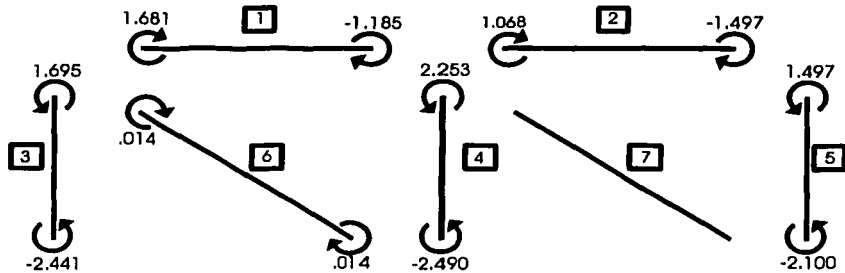
$$F_e = \begin{Bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matriz de desplazamiento:

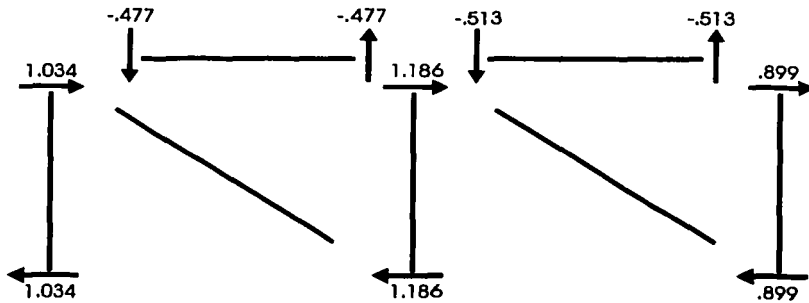
$$\delta = \begin{Bmatrix} 3.983 \times 10^3 \\ 2.559 \times 10^2 \\ 6.985 \times 10^2 \\ 3.410 \times 10^3 \\ 2.457 \times 10^2 \\ 2.222 \times 10^2 \\ 3.380 \times 10^3 \\ -1.283 \times 10^1 \\ 5.654 \times 10^2 \end{Bmatrix} / E$$

A continuación se muestran todos los elementos mecánicos para cada uno de los elementos de la estructura (figura 4.7)

(a)



(b)



(c)

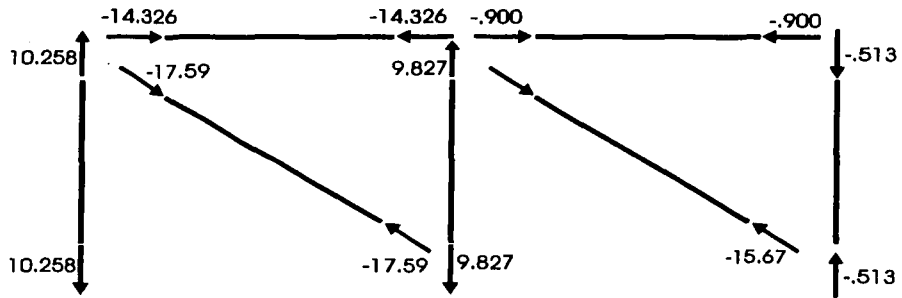


Figura 4.7. Fuerzas resultantes en los extremos de las barras.

En la figura 4.7(a) se muestran los momentos flexionantes en los extremos de los elementos; en la figura 4.7(b) las fuerzas cortantes y en la figura 4.7(c) las fuerzas axiales.

5. Método Matricial De Las Rigideces Para Las Armaduras

5.1. Observaciones Especiales Para Armaduras

En una armadura los nudos son conectados simplemente; por consecuencia los elementos individuales resisten desplazamientos relativos de los nudos únicamente por fuerzas axiales. Por lo tanto los extremos de los elementos con conexiones simples en los nudos son libres de girar independientemente, el concepto de un giro en un nudo ya no es válido. El desplazamiento de un nudo simplemente conectado puede ser descrito en términos de dos componentes de desplazamiento independientes.

Matriz De Transformación

Las dos componentes independientes de fuerza a cada extremo del elemento i de la armadura pueden ser definidos como una fuerza axial P y una fuerza cortante S como se muestra en la fig. 5.1.

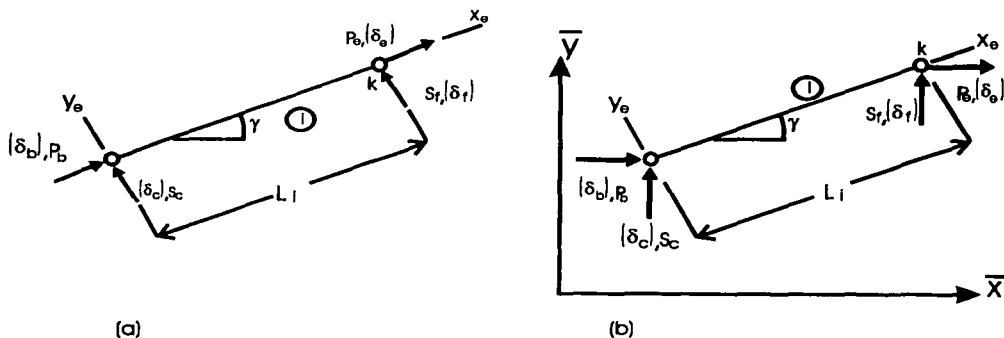


Figura 5.1. Componentes independientes de fuerza a cada extremo del elemento i .

Estas están definidas con respecto a los ejes locales del elemento. Con respecto a los ejes globales, las dos componentes de fuerza independientes a cada extremo pueden ser definidas como una fuerza \bar{P} actuando en la dirección \bar{x} y una fuerza \bar{S} actuando en la dirección \bar{y} como se muestra en la figura 5.1(b).

En la fig. 5.1 las posibles componentes independientes de desplazamiento que están relacionadas con estas fuerzas se indican también.

La relación entre estos dos grupos de fuerzas puede ser expresada como:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_b \\ \bar{S}_c \\ \bar{P}_e \\ \bar{S}_f \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 \\ C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & -C_y \\ 0 & 0 & C_y & C_x \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} P_b \\ S_c \\ P_e \\ S_f \end{bmatrix}_i \quad (5.1)$$

$$\{\bar{P}_{Te}\}_i = [T_{Te}]_i \{P_{Te}\}_i \quad (5.2)$$

De igual manera :

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_b \\ \bar{\delta}_c \\ \bar{\delta}_e \\ \bar{\delta}_f \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 \\ C_x & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & -C_y \\ 0 & 0 & C_y & C_x \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_e \\ \delta_f \end{bmatrix}_i \quad (5.3)$$

$$\{\bar{\delta}_{Te}\}_i = [T_{Te}]_i \{\delta_{Te}\}_i \quad (5.4)$$

Donde $[T_{TE}]_i$ es la matriz de transformación del elemento armadura.

Matrices de Rigideces De Los Elementos De La Armadura

Como suponemos que el elemento resiste los desplazamientos relativos de sus extremos por fuerza axial únicamente el desplazamiento básico con respecto a los ejes locales del miembro, es un desplazamiento axial en el extremo k , \mathcal{E} , como se muestra en la fig. 5.2.

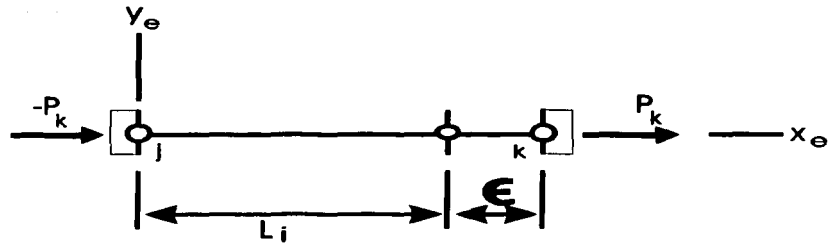


Figura 5.2. Desplazamiento axial en el extremo k.

La matriz básica de rigideces de un elemento estructural de este tipo está dada por:

$$[K_{Ae}]_i = (p_{kk})_i = \left(\frac{1}{\delta_{kk}} \right)_i \quad (5.5)$$

Las relaciones entre las fuerzas básicas entre los extremos y los desplazamientos de este tipo de elementos pueden ser escritas como:

$$(P_k)_i = [K_{Ae}]_i (\epsilon)_i \quad (5.6)$$

En la fig. 5.2 se definen las fuerzas y desplazamientos con respecto a los ejes locales del elemento. Las fuerzas generales pueden ser definidas en términos de fuerzas básicas \$P_k\$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} P_b \\ S_c \\ P_e \\ S_f \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (P_k)_i \quad (5.7)$$

$$\{P_{Te}\}_i = \{TA_{Te}\}_i (P_k)_i \quad (5.8)$$

Los desplazamientos básicos en los extremos pueden ser expresados en los extremos de desplazamientos generales como:

$$(\varepsilon)_i = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]_i \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_e \\ \delta_f \end{bmatrix}_i \quad (5.9)$$

$$(\varepsilon_i) = [TD_{Te}]_i \{\delta_{Te}\}_i \quad (5.10)$$

Los desplazamientos se suponen pequeños comparados con la longitud original del elemento; así que cualquier cambio en longitud, resultante de alguno de estos desplazamientos (en dirección de y_e) será despreciado.

$$\varepsilon'_i = \sqrt{L_i^2 + (\delta_f - \delta_c)^2} - L_i \approx 0 \quad (5.11)$$

$$(P_k)_i = [k_{Ae}]_i [TD_{Te}]_i \{\delta_{Te}\}_i \quad (5.12)$$

$$\{P_{Te}\} = \{TA_{Te}\} [k_{Ae}]_i [TD_{Te}]_i \{\delta_{Te}\}_i \quad (5.13)$$

$$[K_{Te}]_i = \{TA_{Te}\} [k_{Ae}]_i [TD_{Te}]_i \quad (5.14)$$

Donde $[K_{TE}]$ es la matriz total de rigideces del elemento armadura, definida con respecto a los ejes locales, puede ser escrita como:

$$\{P_{Te}\}_i = [K_{Te}]_i \{\delta_{Te}\}_i \quad (5.15)$$

Haciendo las sustituciones pertinentes y las operaciones matriciales correspondientes, la matriz de rigideces del elemento armadura queda:

$$[K_{Te}]_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} K_{bb} & 0 & K_{be} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{eb} & 0 & K_{ee} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} P_{kk} & 0 & -P_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P_{kk} & 0 & P_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.16)$$

Recordando que la matriz de transformación $[T_{TE}]_i$ es una matriz ortogonal, la relación entre las fuerzas y desplazamiento en los extremos del elemento pueden ser desarrollados como:

$$\{\bar{P}_{Te}\}_i = [\bar{K}_{Te}]_i \{\bar{\delta}_{Te}\}_i \quad (5.17)$$

Donde la matriz total transformada del elemento se define como:

$$[\bar{K}_{Te}]_i = [T_{Te}]_i [K_{Te}]_i [T_{Te}]_i^T \quad (5.18)$$

Haciendo las sustituciones adecuadas y las operaciones matriciales correspondientes tenemos:

$$[\bar{K}_{Te}]_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_x^2 K_{bb} & C_x C_y K_{bb} & C_x^2 K_{be} & C_x C_y K_{be} \\ C_x C_y K_{bb} & C_y^2 K_{bb} & C_x C_y K_{be} & C_y^2 K_{be} \\ C_x^2 K_{eb} & C_x C_y K_{eb} & C_x^2 K_{ee} & C_x C_y K_{ee} \\ C_x C_y K_{eb} & C_y^2 K_{eb} & C_x C_y K_{ee} & C_y^2 K_{ee} \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.19)$$

Fuerzas Finales A Los Extremos

Superponiendo las soluciones de la estructura restringida por cargas aplicadas y desplazamientos en los nudos, las fuerzas finales por un elemento típico de armadura pueden ser evaluadas con la ecuación:

$$\{\bar{P}_{Te}^f\}_i = [\bar{K}_{Te}]_i \{\bar{\delta}_{Te}\}_i + \{\bar{FP}_{Te}\}_i \quad (5.20)$$

Donde:

$$\{\bar{P}_{Te}^f\}_i = \begin{bmatrix} \bar{P}_b^f \\ \bar{S}_c^f \\ \bar{P}_e^f \\ \bar{S}_f^f \end{bmatrix}, \{\bar{\delta}_{Te}\}_i = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_b \\ \bar{\delta}_c \\ \bar{\delta}_e \\ \bar{\delta}_f \end{bmatrix}, y \{\bar{FP}_{Te}\}_i = \begin{bmatrix} \bar{FP}_b \\ \bar{FS}_c \\ \bar{FP}_e \\ \bar{FS}_f \end{bmatrix}_i \quad (5.21)$$

$$\{P_{Te}^f\}_i = [T_{Te}]_i^T \{\bar{P}_{Te}^f\}_i$$

5.2. Aplicación Del Método A Armaduras

Para ejemplificar y entender claramente la aplicación del método de las rigideces a armaduras planas, seguiremos la solución del caso mostrado en la figura 5.3, en donde es necesario analizar el sistema armadura para los dos siguientes casos:

- 1) La condición de carga indicada
- 2) Cuando el elemento 5 es fabricado 0.5in más largo

Cada elemento de la armadura tiene una sección transversal constante a lo largo de su longitud; el valor de área correspondiente a cada elemento se muestra a un lado del mismo.

$A = 2in^2$ El módulo de elasticidad para toda la estructura es constante $E = 30,000ksi$.

Las etiquetas en los nudos se muestran en círculos adyacentes a los mismos, y para los elementos encuadrados.

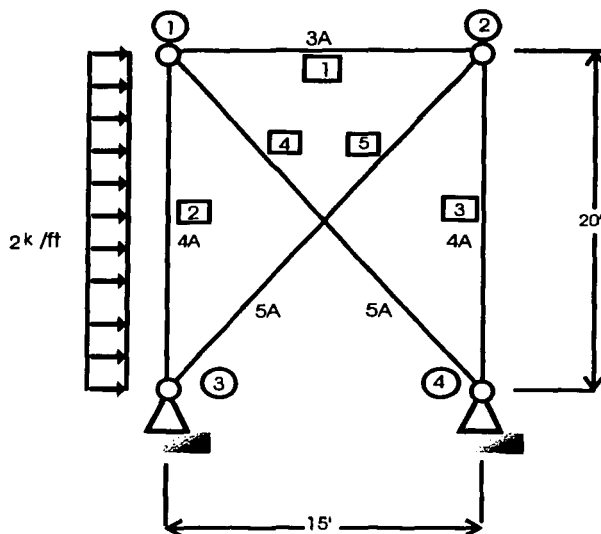


Figura 5.3. Geometría, numeración de barras y nudos, y aplicación de cargas.

Información De Los Elementos

En la figura 5.4, el extremo j para cada elemento es mostrado, de este modo se establecen los ejes locales para cada miembro, además de posicionarse los ejes globales para la estructura. Las coordenadas de los nudos de la armadura con respecto a los ejes globales se muestran en la tabla 5.1.

En la tabla 5.2, la información de los elementos y los cosenos directores han sido calculados para cada miembro.

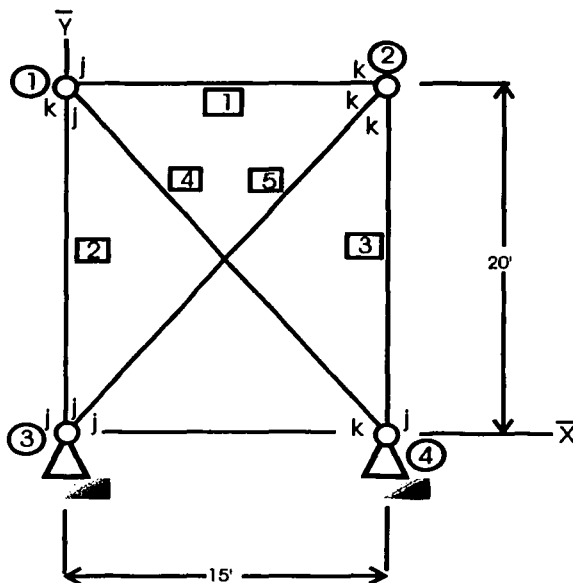


Figura 5.4. Nodos de inicio y final para cada barra.

Coordenadas		
Nodos	$X(ft)$	$Y(ft)$
1	0	20.0
2	15.0	20.0
3	0	0
4	15.0	0

Tabla 5.1. Coordenadas.

Nodos			Cosenos directores				
Elemento	j	k	Area(in ²)	Longitud(ft)	$L(ft)$	C_x	C_y
1	1	2	6.0	15.0	15.0	1.0	0
2	3	1	8.0	20.0	20.0	0	1.0
3	4	2	8.0	20.0	20.0	0	1.0
4	1	4	10.0	25.0	25.0	0.6	-0.8
5	3	2	10.0	25.0	25.0	0.6	0.8

Tabla 5.2. Cosenos directores.

Matriz De Desplazamiento De Los Nudos

En la fig. 5.5 se identifican y etiquetan todas las posibles componentes de desplazamiento en los nudos referidos respecto a los ejes globales.

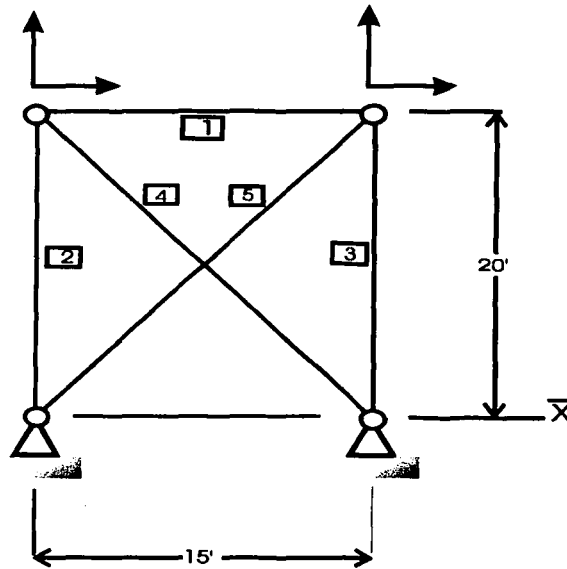


Figura 5.5. Componentes de desplazamiento.

La matriz total de desplazamientos en los nudos es:

$$[\Delta^2] = \begin{bmatrix} \Delta_1^1 & \Delta_1^2 \\ \Delta_2^1 & \Delta_2^2 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 \\ \Delta_4^1 & \Delta_4^2 \\ \Delta_5^1 & \Delta_5^2 \\ \Delta_6^1 & \Delta_6^2 \\ \Delta_7^1 & \Delta_7^2 \\ \Delta_8^1 & \Delta_8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \Delta_u^1 \right\} & \left\{ \Delta_u^2 \right\} \\ \left\{ \Delta_r^1 \right\} & \left\{ \Delta_r^2 \right\} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Matriz De Rigideces Del Elemento

Como los elementos de la armadura tienen una sección transversal constante en toda su longitud:

$$(P_{kk})_i = \left(\frac{AE}{L} \right)_i \quad (5.23)$$

Las matrices de los elementos con respecto a los ejes globales y locales, pueden ser escritas como sigue:

Elemento 1:

$$[K_{Te}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{6E}{15(12)} & 0 & -\frac{6E}{15(12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6E}{15(12)} & 0 & \frac{6E}{15(12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} \quad (5.24)$$

$$[\bar{K}_{Te}]_1 = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$[\bar{K}_{Te}]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{6E}{15(12)} & 0 & -\frac{6E}{15(12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6E}{15(12)} & 0 & \frac{6E}{15(12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.25)$$

$$[\bar{K}_{Te}]_2 = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$[\bar{K}_{Te}]_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{8E}{20(12)} & 0 & -\frac{8E}{20(12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8E}{20(12)} & 0 & \frac{8E}{20(12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(5.26)

$$[K_{Te}]_b = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 4:

$$[K_{Te}]_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.27)$$

$$[K_{Te}]_4 = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 & -0.36 & 0.48 \\ -0.48 & 0.64 & 0.48 & -0.64 \\ -0.36 & 0.48 & 0.36 & -0.48 \\ 0.48 & -0.64 & -0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 5:

$$[K_{Te}]_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{0.4E}{12} \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.28)$$

$$[K_{Te}]_k = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Matriz De Rigideces de La Estructura

La matriz de rigideces de la estructura puede ser ensamblada de acuerdo con la relación

$$r_{pq} = \sum_i K_{pq}^i \quad (5.29)$$

$$[r_{\Delta\Delta}] = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 1.36 & -0.48 & -1.00 & 0 & 0 & 0 & -0.36 & 0.48 \\ -0.48 & 1.64 & 0 & 0 & 0 & -1.00 & 0.48 & -0.64 \\ -1.00 & 0 & 1.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.48 & 1.64 & -0.48 & -0.64 & 0 & -1.00 \\ 0 & 0 & -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 & 0 & 0 \\ 0 & -1.00 & -0.48 & -0.64 & 0.48 & 1.64 & 0 & 0 \\ -0.36 & 0.48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.36 & -0.48 \\ 0.48 & -0.64 & 0 & -1.00 & 0 & 0 & -0.48 & 1.64 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Ahora

$$[r_{uu}]^{-1} = \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 2.503 & 0.733 & 2.052 & -0.601 \\ 0.733 & 0.824 & 0.601 & -0.176 \\ 2.052 & 0.601 & 2.503 & -0.733 \\ -0.601 & -0.176 & -0.733 & 0.824 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (5.30)$$

Matriz De Cargas En Los Nudos

Para la condición de carga 1, el elemento 2 está sujeto a una carga uniformemente repartida de $2k/ft$.

Las fuerzas en los extremos para esta carga en la estructura restringida que tiene articulaciones en ambos extremos son cortantes simples; por ejemplo:

$$\{\overline{FP}_{Te}^1\}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20.0 \\ 0 \\ 20.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b \\ c \\ e \\ f \end{matrix} \quad (5.31)$$

Estas fuerzas de empotramiento pueden ser transformadas en componentes en los ejes globales de acuerdo con la expresión

$$\{\overline{FP}_{Te}\}_i = [T_{Te}]_i \{FP_{Te}\}_i \quad (5.32)$$

Que queda:

$$\{\overline{FP}_{Te}^1\}_2 = \begin{bmatrix} -20.0 \\ 0 \\ -20.0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad (5.33)$$

Estas fuerzas en los extremos se muestran en la fig. 5.6, así como las correspondientes fuerzas en los nudos.

Para la condición de carga 2, el elemento 5 ha sido fabricado $0.5in$ más largo de lo que debería.

Cuando este elemento en la estructura restringida y forzado a asumir la longitud requerida para entrar entre los nudos 2 y 3, las fuerzas resultantes en los extremos son:

$$\{FP_{Te}^2\}_5 = \begin{bmatrix} \frac{(0.5)(10)(30,000)}{25(12)} \\ 0 \\ -\frac{(0.5)(10)(30,000)}{25(12)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500.0 \\ 0 \\ -500.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Con respecto a los ejes globales, las fuerzas del elemento 5 son:

$$\{FP_{Te}^2\}_5 = \begin{bmatrix} 300.0 \\ 400.0 \\ -300.0 \\ -400.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (5.35)$$

Estas fuerzas se muestran en la figura 5.6 junto con las correspondientes fuerzas en los nudos.

Para estas dos condiciones de carga, la matriz total de cargas en los nudos puede ser ensamblado de la siguiente forma:

$$[L^2] = \begin{bmatrix} 20.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 300.0 \\ 0 & 400.0 \\ 20.0 & -300.0 \\ 0 & -400.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad (5.36)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1^1 & \Delta_1^2 \\ \Delta_2^1 & \Delta_2^2 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 \\ \Delta_4^1 & \Delta_4^2 \end{bmatrix} = \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 2.503 & 0.733 & 2.052 & -0.601 \\ 0.733 & 0.824 & 0.601 & -0.176 \\ 2.052 & 0.601 & 2.503 & -0.733 \\ -0.601 & -0.176 & -0.733 & 0.824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 300.0 \\ 0 & 400.0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

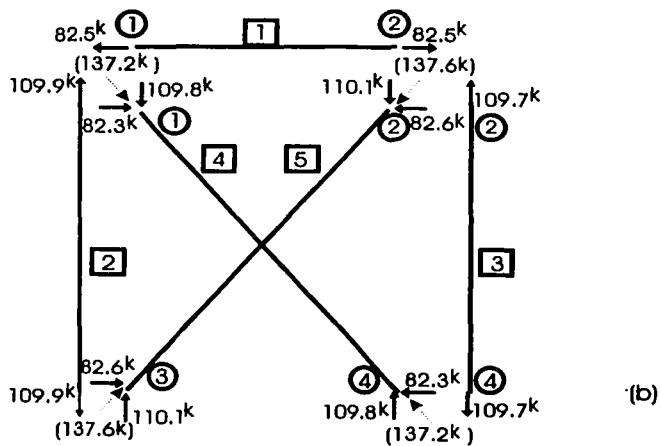
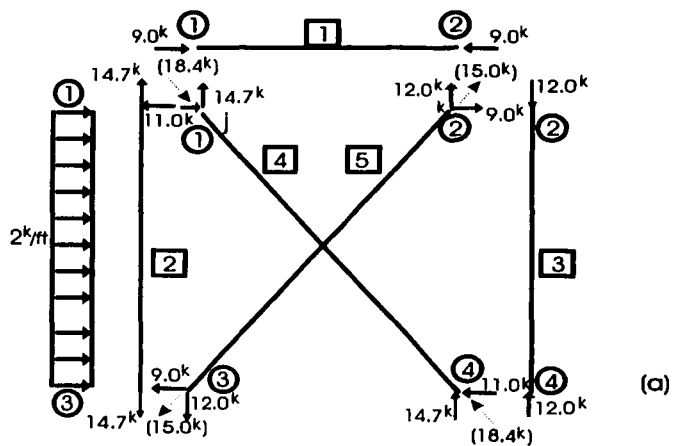


Figura 5.6. Fuerzas en las barras para las dos condiciones de carga.

$$\begin{bmatrix} \Delta_1^1 & \Delta_1^2 \\ \Delta_2^1 & \Delta_2^2 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 \\ \Delta_4^1 & \Delta_4^2 \end{bmatrix} = \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 50.06 & 375.20 \\ 14.66 & 109.90 \\ 41.04 & 457.7 \\ -12.02 & 109.70 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Con E en k_{si} y desplazamientos en pulgadas.

Fuerzas Finales En Los Extremos

Elemento 1:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1^{f1} & \bar{P}_1^{f2} \\ \bar{S}_2^{f1} & \bar{S}_2^{f2} \\ \bar{P}_3^{f1} & \bar{P}_3^{f2} \\ \bar{S}_4^{f1} & \bar{S}_4^{f2} \end{bmatrix} = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 50.06 & 375.20 \\ 14.66 & 109.90 \\ 41.04 & 457.70 \\ -12.02 & 109.70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1^{f1} & \bar{P}_1^{f2} \\ \bar{S}_2^{f1} & \bar{S}_2^{f2} \\ \bar{P}_3^{f1} & \bar{P}_3^{f2} \\ \bar{S}_4^{f1} & \bar{S}_4^{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_b^{f1} & P_b^{f2} \\ S_c^{f1} & S_c^{f2} \\ P_e^{f1} & P_e^{f2} \\ S_f^{f1} & S_f^{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.0k & -82.5k \\ 0 & 0 \\ -9.0k & 82.5k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.39)

Elemento 2:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_5^{f1} & \bar{P}_5^{f2} \\ \bar{S}_6^{f1} & \bar{S}_6^{f2} \\ \bar{P}_1^{f1} & \bar{P}_1^{f2} \\ \bar{S}_2^{f1} & \bar{S}_2^{f2} \end{bmatrix}_2 = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}_2 \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5006 & 37520 \\ 14.66 & 10990 \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} -200 & 0 \\ 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_2$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_5^{f1} & \bar{P}_5^{f2} \\ \bar{S}_6^{f1} & \bar{S}_6^{f2} \\ \bar{P}_1^{f1} & \bar{P}_1^{f2} \\ \bar{S}_2^{f1} & \bar{S}_2^{f2} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -200k & 0 \\ -14.7k & -1099k \\ -200k & 0 \\ 14.7k & 1099k \end{bmatrix}_2$$

Y

(5.40)

$$\begin{bmatrix} P_b^{f1} & P_b^{f2} \\ S_c^{f1} & S_c^{f2} \\ P_e^{f1} & P_e^{f2} \\ S_f^{f1} & S_f^{f2} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} -200 & 0 \\ -147 & -1099 \\ -200 & 0 \\ 147 & 1099 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -147k & -1099k \\ 200k & 0 \\ 147k & 1099k \\ 200k & 0 \end{bmatrix}_2$$

Elemento 3:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_7^{f1} & \bar{P}_7^{f2} \\ \bar{S}_8^{f1} & \bar{S}_8^{f2} \\ \bar{P}_3^{f1} & \bar{P}_3^{f2} \\ \bar{S}_4^{f1} & \bar{S}_4^{f2} \end{bmatrix}_3 = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}_3 \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 41.04 & 45770 \\ -1202 & 10970 \end{bmatrix}_3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_3$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_7^{f1} & \bar{P}_7^{f2} \\ \bar{S}_8^{f1} & \bar{S}_8^{f2} \\ \bar{P}_3^{f1} & \bar{P}_3^{f2} \\ \bar{S}_4^{f1} & \bar{S}_4^{f2} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 120k & -1097k \\ 0 & 0 \\ -120k & 1097k \end{bmatrix}_3$$

Y

$$\begin{bmatrix} P_b^{f1} & P_b^{f2} \\ S_c^{f1} & S_c^{f2} \\ P_e^{f1} & P_e^{f2} \\ S_f^{f1} & S_f^{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 120 & -1099 \\ 0 & 0 \\ -1202 & 1097 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 120k & -1097k \\ 0 & 0 \\ 120k & 1097k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_3$$

(5.41)

Elemento 4:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1^{f1} & \bar{P}_1^{f2} \\ \bar{S}_2^{f1} & \bar{S}_2^{f2} \\ \bar{P}_7^{f1} & \bar{P}_7^{f2} \\ \bar{S}_8^{f1} & \bar{S}_8^{f2} \end{bmatrix}_4 = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 & -0.36 & 0.48 \\ -0.48 & 0.64 & 0.48 & -0.64 \\ -0.36 & 0.48 & 0.36 & -0.48 \\ 0.48 & -0.64 & -0.48 & 0.64 \end{bmatrix}_4 \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 50.06 & 37520 \\ 14.66 & 10990 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_4$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1^{f1} & \bar{P}_1^{f2} \\ \bar{S}_2^{f1} & \bar{S}_2^{f2} \\ \bar{P}_7^{f1} & \bar{P}_7^{f2} \\ \bar{S}_8^{f1} & \bar{S}_8^{f2} \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} 11.0k & 82.3k \\ -14.7k & -1098k \\ -11.0k & -82.3k \\ 14.7k & 1098k \end{bmatrix}_4$$

Y

$$\begin{bmatrix} P_b^{f1} & P_b^{f2} \\ S_c^{f1} & S_c^{f2} \\ P_e^{f1} & P_e^{f2} \\ S_f^{f1} & S_f^{f2} \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 11.0 & 82.3 \\ -14.7 & -1098 \\ -11.0 & -82.3 \\ 14.7 & 1098 \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} 18.4k & 137.2k \\ 0 & 0 \\ -18.4k & -137.2k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_4$$

(5.42)

Elemento 5:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_5^{f1} & \bar{P}_5^{f2} \\ \bar{S}_6^{f1} & \bar{S}_6^{f2} \\ \bar{P}_3^{f1} & \bar{P}_3^{f2} \\ \bar{S}_4^{f1} & \bar{S}_4^{f2} \end{bmatrix}_5 = \frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix}_5 \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 41.04 & 45770 \\ -1202 & 10970 \end{bmatrix}_5 + \begin{bmatrix} 0 & 3000 \\ 0 & 4000 \\ 0 & -3000 \\ 0 & -4000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_5^{f1} & \bar{P}_5^{f2} \\ \bar{S}_6^{f1} & \bar{S}_6^{f2} \\ \bar{P}_3^{f1} & \bar{P}_3^{f2} \\ \bar{S}_4^{f1} & \bar{S}_4^{f2} \end{bmatrix}_5 = \begin{bmatrix} -9.0k & 82.6k \\ -120k & 1101k \\ 9.0k & -82.6k \\ 120k & -1101k \end{bmatrix}_5$$

Y

$$\begin{bmatrix} P_b^{f1} & P_b^{f2} \\ S_c^{f1} & S_c^{f2} \\ P_e^{f1} & P_e^{f2} \\ S_f^{f1} & S_f^{f2} \end{bmatrix}_5 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}_5 \begin{bmatrix} -9.0 & 82.6 \\ -120 & 110.1 \\ 9.0 & -82.6 \\ 12.0 & -110.1 \end{bmatrix}_5 = \begin{bmatrix} -15.0k & 137.6k \\ 0 & 0 \\ 15.0k & -137.6k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_5$$

(5.43)

Los diagramas de cuerpo libre para cada elemento de la estructura y para las dos condiciones de carga se muestran en la fig. 5.6.

Reacciones En Los Apoyos

Haciendo las sustituciones adecuadas en las ecuaciones

$$[r_{ru}][\Delta'_u] - [L'_r] = [R'_r] \quad (5.44)$$

Resulta en el sistema de ecuaciones

$$\frac{0.4E}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.36 & 0.48 \\ 0 & -1.00 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & 0.48 & 0 & 0 \\ 0.48 & -0.64 & 0 & -1.00 \end{bmatrix} \frac{12}{0.4E} \begin{bmatrix} 5006 & 37520 \\ 1466 & 10990 \\ 41.04 & 45770 \\ -1202 & 10970 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200 & -3000 \\ 0 & -4000 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_5^1 & R_5^2 \\ R_6^1 & R_6^2 \\ R_7^1 & R_7^2 \\ R_8^1 & R_8^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_5^1 & R_5^2 \\ R_6^1 & R_6^2 \\ R_7^1 & R_7^2 \\ R_8^1 & R_8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29.0k & 82.6k \\ -26.7k & 0.2k \\ -11.0k & -82.3k \\ 26.7k & 0.1k \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Examinando las reacciones en el caso de carga 2, las reacciones horizontales deberían ser de la misma magnitud y las verticales 0.

También las fuerzas en los elementos 2 y 3 y en los elementos 4 y 5 deberían ser de la misma magnitud.

Las discrepancias que aparecen son debidas a errores de redondeo en los cálculos; la solución cae dentro de un rango aceptable.

El diagrama de cuerpo libre de esta estructura se muestra en la fig. 5.7, para cada condición de carga.

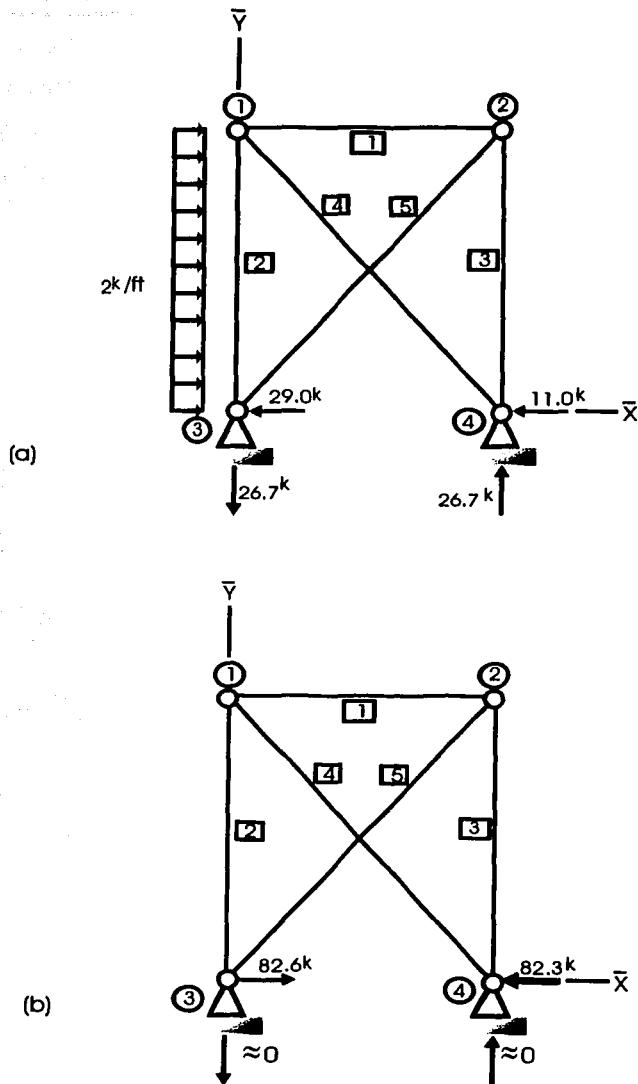


Figura 5.7. Reacciones en los apoyos para las dos condiciones de carga.

5.3. Ejemplo

Calcularemos las fuerzas axiales de cada una de los elementos componentes de la armadura mostrada en la figura 5.8 la rigidez lineal K para todos los elementos es de 2 t/cm

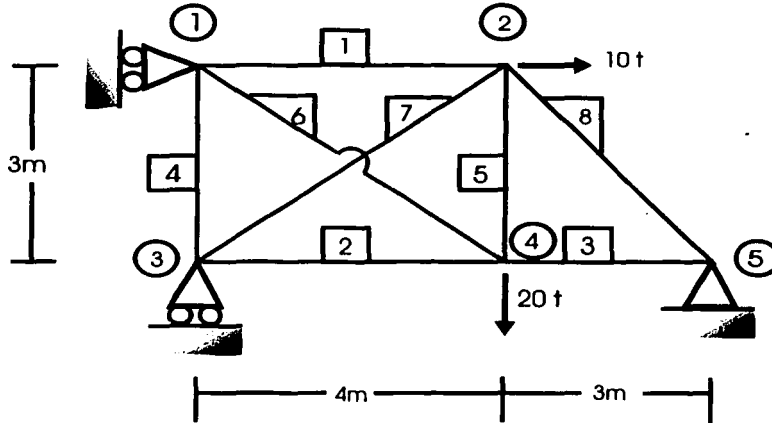


Figura 5.8. Geometría de la armadura, numeración de elementos y aplicación de cargas.

Todos los nudos en la estructura han sido numerados en círculos y los elementos en cuadrados, las longitudes se encuentran en metros y las fuerzas en toneladas.

La matriz de continuidad para nuestra armadura es la siguiente:

$$\begin{matrix}
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 [A] = \begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 -0.8 & .6 & 0 & 0 & 0 & 0 & .8 & -0.6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & .8 & .6 & -0.8 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -0.7071 & .7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & .7071 & -0.7071
 \end{bmatrix}
 \end{matrix} \tag{5.46}$$

Las columnas marcadas son las que eliminaremos para obtener la matriz modificada. La matriz de rigideces de las barras es la siguiente:

$$K = \begin{bmatrix}
 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200
 \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

Siguiendo con las operaciones:

$$[K] = [Am]^T [K] [Am] \tag{5.48}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 272 & 0 & 0 & 0 & 96 & -72 \\ 0 & 428 & -4 & -128 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 372 & -96 & 0 & -200 \\ 0 & -128 & -96 & 328 & -200 & 0 \\ 96 & 0 & 0 & -200 & 528 & -96 \\ -72 & 0 & -200 & 0 & -96 & 272 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} -.031 \\ .002 \\ -.117 \\ -.066 \\ -.053 \\ -.187 \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\{e\} = [Am]\{\delta\}$$

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} .0026 \\ .0125 \\ .0533 \\ -.0306 \\ .0694 \\ .0510 \\ -.0157 \\ -.0848 \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\{P\} = [K]\{e\}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} .5118 \\ 2.5080 \\ 10.6715 \\ -6.1225 \\ 13.8775 \\ 10.2042 \\ -3.1352 \\ -16.9654 \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

Las fuerzas axiales resultantes se muestran en la figura 5.9.

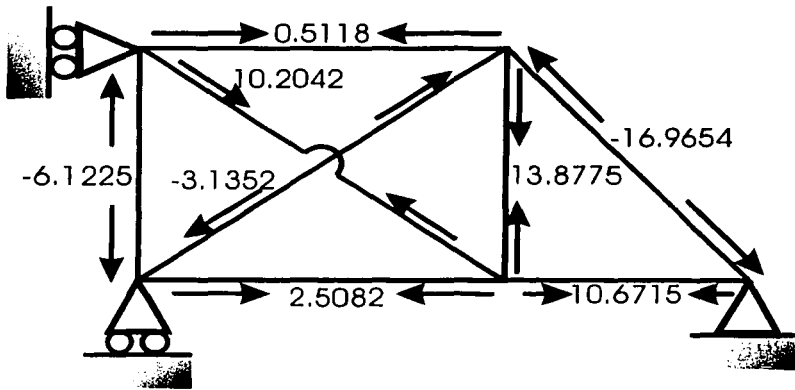


Figura 5.9. Fuerzas axiales resultantes.

6. Descripción y Desarrollo del Software

6.1 Descripción General del Software

El software desarrollado en este trabajo es una herramienta muy poderosa y útil para el análisis de estructuras planas esqueléticas y no reticulares, cualquier forma, condiciones geométricas y de apoyo, son consideradas dentro de él.

La paquetería consta de dos programas básicos de análisis, el primero de ellos es una simplificación del método de las rigideces para el análisis de armaduras en el plano (la figura 6.1 muestra algunos ejemplos que permiten visualizar el tipo de estructuras que pertenecen a este grupo) estas estructuras no aceptan cargas en las barras ni actuantes fuera del plano, supone que los miembros trabajan únicamente por carga axial, por lo que los giros y momentos quedan fuera de consideración.

Como ya se mencionó el programa se utiliza para el análisis del método matricial de rigideces por lo que cualquier armadura susceptible de ser analizada por este método entrará sin problemas sus datos geométricos y de materiales para la obtención de sus fuerzas axiales resultantes.

Los resultados arrojados, una vez realizado el análisis son, además de las fuerzas axiales de los miembros, todos los datos utilizados en los pasos más importantes y representativos del método, como son: La matriz de continuidad $[A]$, la matriz de continuidad modificada $[Am]$, el vector de deformaciones en las barras $[e]$, el vector de desplazamientos $\{\delta\}$, el vector de fuerzas axiales $\{P\}$ y la matriz de rigideces de las barras $[K]$, por lo que podemos analizar para la misma estructura varias condiciones de carga en un solo análisis.¹



¹ Revisar el método matricial de las rigideces (Capítulo V) para recordar la forma más sencilla de hacerlo.

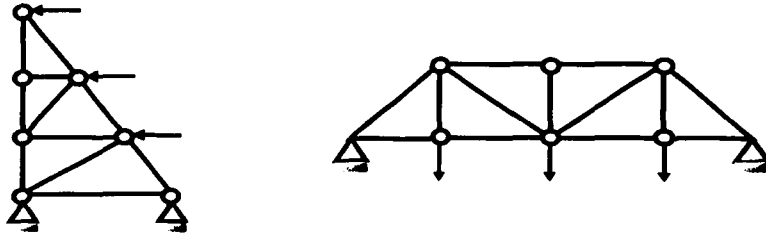


Figura 6.1. Ejemplos de armaduras.

Ambos programas han sido desarrollados en calculadoras HP49 y pueden ser adaptados para trabajar en modelos anteriores de serie 48, como HP48GX y HP48G+ solo que en estos modelos la capacidad de la memoria puede resultar insuficiente; si se cuenta con el KIT de conexión para PC es posible también trabajar con el emulador² en una PC cualquiera.

La interpretación de los resultados en el caso de la versión para armaduras es muy sencilla ya que en el vector de fuerzas axiales aparecen los valores numéricos en magnitud y sentido (dado por el signo) para cada barra en el mismo orden en que fueron numeradas al inicio.

El segundo de los programas analiza (también utilizando en método de las rigideces) cualquier tipo de marco rígido y considera articulaciones en los miembros por lo que se pueden incluir dentro de su campo de acción combinaciones de marcos y armaduras.

Los miembros aceptan varios tipos de carga, y al igual que en el primer programa, los nudos pueden ser cargados, con la diferencia que este programa considera, por supuesto, giros y momentos.

Los miembros trabajan a momento flexionante y fuerzas axial y cortante. La figura 6.2 muestra algunos casos de marcos considerados por este programa.



Figura 6.2. Marcos rígidos.

² Ver apartado 6.4



Figura 6-2 (continuación)

Los resultados arrojados son, además de una matriz que organiza los elementos mecánicos para cada uno de los miembros, el valor de estado cero $\{\epsilon_0\}$, la matriz de rigideces de la estructura $[K]$, el vector de fuerzas externas aplicadas en los nudos $\{F_e\}$, el vector de desplazamientos $\{\delta\}$ y una subrutina GRAFI capaz de graficar para cada miembro cualquiera de sus elementos mecánicos.

6.2. Descripción del Lenguaje de Programación Utilizado.

Introducción

La HP 49G le permite trazar gráficos de ecuaciones y datos estadísticos y analizar las características matemáticas de las funciones representadas.

Se encuentran disponibles quince tipos de gráficos. Éstos son:



- *Function* (función)
- *Parametric* (paramétrico)
- *Polar* (polar)
- *Conic* (cónico)
- Ecuaciones diferenciales
- *Truth* (verdadero)
- *Slopefield* (campo de pendientes)
- *Wireframe* (estructura lineal)
- *Pseudo-contour* (seudo contorno)
- *Y-slice* (corte-Y)
- *Grigmap* (mapa de red)
- *Parametric surface* (sup. Param)
- *Scatter* (dispersion)
- *Bar* (barras)
- *Histograms* (histogramas)

Representaciones Gráficas Básicas


Las aplicaciones gráficas de la HP 49G le permite representar ecuaciones y datos estadísticos. Usted puede crear las ecuaciones o la matriz de datos que desee representar antes de iniciar la aplicación, o una vez abierta. (Una matriz de datos contiene los datos de un gráfico estadístico).


Usted puede representar cualquier cantidad de ecuaciones al mismo tiempo; sin embargo, sólo puede trazar un gráfico estadístico por vez; aunque puede superponer un gráfico estadístico nuevo sobre otro previamente trazado.

Para crear un gráfico:


1. Pulse  

Aparece la pantalla *Plot Functions*, listando las últimas ecuaciones o matrices de datos que han representado gráficamente.



2. Para borrar todas las ecuaciones o matrices listadas, pulse  para seleccionar CLEAR (DESPEJAR).


3. Para eliminar una ecuación o matriz en especial, pero mantener las demás, utilice las teclas flecha para resaltar la ecuación o matriz y pulse  para seleccionar DELET (BORRAR).

4. Para cambiar una ecuación o matriz de datos:

- Utilice las teclas flecha para resaltar la ecuación o matriz.
- Pulse  para seleccionar EDIT (MODIFICAR). Una ecuación se visualiza



en *Equation Writer* (escritor de ecuaciones) y una matriz en *Matriz Writer* (escritor de matrices).

Puede también modificar una ecuación o matriz en la línea de comandos. Para copiar la ecuación o matriz a la línea de comandos pulse  .

- Modifique la ecuación o matriz.
- Pulse . Si hubiera estado utilizando *Equation Writer* o *Matrix Writer*, dicha aplicación se cierra.

La ecuación o matriz modificada reemplaza a la ecuación o matriz que eligió modificar.

5. Para agregar otra ecuación a la lista *Plot Functions*:


- Pulse  para seleccionar ADD (AGREGAR). Se inicia *Equation Writer*.
- Introduzca la ecuación.
- Pulse  para cerrar *Equation Writer*. La ecuación se copia a la

pantalla *Plot Functions* como una nueva ecuación.





También puede agregar una ecuación o matriz creada anteriormente: si se encuentra

en la historia pulse **HIST** utilice las teclas flecha para seleccionarla y pulse **ENTER**.
La ecuación o matriz se copia a la lista *Plot Functions*.

Puede también seleccionar una ecuación o matriz que ha archivado como variable. Pulsando  **F** Se muestra un árbol directorio de archivos y variable. Seleccione la variable que desea y pulse **ENTER** para copiar sus contenidos a la lista *Plot Functions*.

6. La HP 49G tiene una serie de configuraciones por defecto que determinan características como por ejemplo la parte del gráfico a visualizar, su escala, etc. Estas configuraciones pueden visualizarse pulsando:


-  **WI** Para ver la plantilla de entrada *Plot Window*.
-  **2D/3D** Para ver la plantilla de entrada *Plot Setup*.

Las configuraciones listadas en cada una de estas plantillas de entrada varían de acuerdo al tipo de gráfico que está trazando. Usted puede cambiar los valores por defecto o los actuales, antes de representar la(s) ecuación(es) o matrices de datos.

7. La HP 49G mantiene un registro de su último gráfico, lo que le permite dibujar una nueva ecuación, conjunto de ecuaciones o matriz de datos por sobre una de éstas mismas realizada anteriormente. Si no desea incluir el gráfico anterior, pulse **F** para seleccionar ERASE (BORRAR).

8. Para trazar la(s) ecuación(es) o matriz pulse **F** para seleccionar DRAW (DIBUJAR).

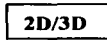


Usted puede representar las ecuaciones o matriz de datos actualmente listada en la pantalla *Plot Functions* sin necesidad de primero visualizar dicha pantalla. Simplemente pulse  **F** para seleccionar comando *Graph* (gráfico).

Las ecuaciones o matriz es representada gráficamente. Los parámetros actuales de las plantillas de entrada *Plot Window* (Ventana Plot) y *Plot Setup* (Configuración Plot) se utilizan para determinar la apariencia del gráfico.

Tipos De Gráfico

Se proveen los parámetros *plot window* y *plot setup* para cada tipo de gráfico. Las plantillas de entrada para configurar estos parámetros se visualizan pulsando



Respectivamente.



y

Graficos Function (Función)


El tipo de gráfico por defecto de la calculadora es Función que traza ecuaciones que devuelven el único $f(x)$ por cada valor de x ; por ejemplo, $f(x)=x \sin(x)$.

Al introducir una función para ser representada, asegúrese que es de la forma $y=f(x)$. por ejemplo, una ecuación de la forma $9x + y - 7 = 0$ debe introducirse como $-9x + 7$.

Parámetros ventana Plot

- | | |
|---------------|--|
| H-View | El rango de visualización horizontal, con el valor horizontal mínimo en el primer campo y el máximo valor horizontal en el segundo. |
| V-View | El rango de visualización vertical, con el valor vertical mínimo en el primer campo y el máximo valor vertical en el segundo.
Los campos V-View no están disponibles si selecciona la opción AUTOESCALE (AUTOESCALA). Vea AUTO. |
| Low | El menor valor de la variable independiente que desea representar gráficamente. |
| High | El valor mayor de la variable independiente que desea representar gráficamente. |
| Step | Determina la resolución del gráfico. Es la distancia horizontal (en unidades o pixels/puntos) entre dos puntos trazados. Pasos mayores significan gráficos más rápidos pero muestran menos detalle. Pasos menores resultan en más detalle pero llevan más tiempo para dibujarse. (Para funciones, el paso por defecto es de 0.2 unidades). Vea PIXELS. |
| Pixels | Cuando este campo tiene una tilde, el valor STEP (PASO) se mide en puntos. Cuando no tiene tilde (configuración por defecto) el valor STEP se mide en unidades. |
| Auto | El rango de visualización vertical que puede ser medida automáticamente. El rango de visualización se mide en escala para que incorpore solo los valores correspondientes a la variable independiente que se grafica. |

Parámetros de configuración Plot

Type	El tipo de gráfico (en este caso <i>Function</i>).
	El campo de unidades angulares que indican las unidades en las cuales deben interpretarse los argumentos angulares: grados sexagesimales, radianes, o grados centesimales.
EQ	La ecuación o lista de ecuaciones que desea representar. Su valor por defecto es/son la(s) ecuaciones listadas en la plantilla de entrada <i>Plot Functions</i> pero puede cambiarse en la de <i>Plot Setup</i> .
Indep	El nombre de la variable independiente.
Connect	Al tildarse, (configuración por defecto) los puntos de la representación se conectan para formar una línea o curva; al no tener tilde, solo se muestran los puntos representados gráficamente.
Simult	Al tildarse, cada ecuación listada en la plantilla de entrada <i>Plot Function</i> es representada simultáneamente; al no tener tilde (configuración por defecto), la ecuación es trazada completamente antes de comenzar a representar la siguiente.
H-Tick	La cantidad de unidades (o puntos/ <i>pixels</i>) entre marcas sobre el eje horizontal. La configuración por defecto es una marca cada 10 puntos. Si se están utilizando unidades o puntos depende del estado del campo <i>Pixels</i> . Este campo sólo está disponible si usted ha elegido mostrar los ejes. Pulse <input type="checkbox"/> F para incluir o excluir ejes.
V-Tick	La cantidad de pixels o unidades entre marcas en el eje vertical. La configuración por defecto es una marca cada 10 puntos. Si se están utilizando unidades o puntos depende del estado del campo <i>Pixels</i> .
Pixels	Al tildarse (configuración por defecto), los valores de los campos H-Tick y V-Tick se interpretan como puntos/pixels. Cuando no tiene tilde se interpretan como unidades. Este campo sólo está disponible si usted ha elegido mostrar los ejes. Pulse <input type="checkbox"/> F para incluir o excluir ejes.

Introducción a la Programación

Introducción

Este Capítulo describe cómo crear y ejecutar programas con la HP 49G.




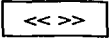
La HP 49G ofrece un ambiente propicio para la programación. Los programas pueden oscilar en complejidad desde una tarea simple tal como realizar una serie de operaciones aritméticas a un proceso complejo que requiere entrada de datos, procesamiento intensivo y resultados con salida en formato gráfico.

Este capítulo enfoca la creación y ejecución de programas en modo algebraico solamente.

Para comenzar

Esta sección contiene un ejemplo sobre como crear un programa simple para calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, utilizando el teorema de Pitágoras. Al iniciar el programa usted suministra las longitudes de los lados conocidos en forma de argumentos.

Este programa es un ejemplo de un simple calculo algebraico, utilizando los argumentos utilizados por usted. Dentro del programa el cálculo se encierra entre comillas simples


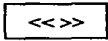


( ) para delimitarlo como un objeto algebraico. Si necesita realizar un procedimiento intensivo que incluya bucles o bifurcaciones, necesitara un procedimiento anidado ( ) para delimitarlo desde los argumentos.

El programa realiza lo siguiente:

- Reúne las longitudes de los lados conocidos como argumentos y los almacena como variables locales, es decir aquellas que solo existen mientras el programa se encuentran en ejecución.
- Utiliza las variables para calcular la longitud de la hipotenusa y devuelve los resultados a la historia.




Como Crear, Archivar y Poner en Ejecución un Programa



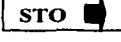



Un programa es un objeto que puede almacenarse en una variable. Es decir, usted crea un programa, le asigna un nombre y lo archiva en un directorio.


- Para crear un programa pulse   . Aparecen en la línea de comandos los delimitadores de programa listos para que introduzca cifras, al tiempo que el anunciador PRG aparece en la parte superior de la pantalla para indicar que está en modo de programa. Para crear el programa, utilice las funciones del teclado y las teclas de operación y seleccione los comandos del menú de programación. A medida que selecciona las teclas de función y operación, las funciones y operaciones aparecen en el programa. Utilice ; para separar funciones y cálculos dentro de un procedimiento anidado. Para introducir ; pulse y mantenga pulsada , y pulse .


Para facilitar la lectura, puede utilizar   para incorporar cortes de renglón.

Para incorporar comentarios a su programa:

- Para toda una línea de comentarios, comience la misma con un carácter @ (  ).
- Para un segmento comentado dentro de un código, encierre el mismo entre caracteres @.

- Para archivar el programa:
 - a. pulse   para trasladar el cursor pasando el final del mismo.
 - b. Pulse   para insertar el símbolo  pasado el programa.
 - c. Introduzca un nombre para el programa y pulse .

- Para poner en ejecución un programa , se accede simplemente al directorio donde éste reside y : o introduce el nombre del programa en la línea de comandos o pulsa  Y lo selecciona del menú.



Al seleccionar el programa del menú , la HP 49G lo reconoce como tal e inserta su nombre en la línea de comandos, con paréntesis vacíos listos para que usted introduzca los argumentos. Después de hacerlo, pulse  para ejecutar el programa.

El menú de programación

El menú de programación contiene los comandos que puede utilizar en un programa. Seleccione una categoría para mostrar los comandos para incluirlos en el programa. El

menú de programación es sólo una ayuda para escribirlos; necesita conocer la sintaxis de los comandos y cómo utilizarlos en el programa.

Examinar el menú de programación servirá para tener una idea de los tipos de operaciones programáticas disponibles a la HP 49G.

- Para visualizar el menú de programación, pulse  

Modos Algebraicos Y Rpn

En el modo RPN, la HP 49G utiliza intensamente la pila. Al programar en modo RPN se utiliza la pila para:

- Proveer los datos que utiliza el programa
- Construir los comandos utilizados por el programa
- Mantener la salida generada por el programa

En el modo algebraico la pila no se encuentra disponible. Se utilizan otros métodos para construir el programa e incorporarle datos.

Cómo utilizar funciones que requieren argumentos

Al utilizar una función que requiere argumentos:

- En el modo RPN, se ubican los argumentos en la pila antes de invocar la función.
- En modo algebraico, usted suministra los argumentos entre paréntesis, después de invocar la función. Por ejemplo, puede utilizar el comando INPUT para requerir datos. Los siguientes segmentos codificados muestran cómo utilizar el comando INPUT para reunir datos en modo RPN y algebraico.
- En modo RPN el siguiente segmento codificado requiere entrada de datos, los reúne en forma de cadena y los convierte en un número. Al final del proceso, los datos se encuentran en el nivel 1 de la pila:

```
<<"ENTER A NUMBER"  
""  
INPUT  
OBJ →>>
```
- En modo algebraico, el siguiente segmento codificado lleva a cabo la misma operación. Al final del proceso, los datos se almacenan en una variable global, NUM 1, listos para ser utilizados en el programa. Observe que al utilizar una variable global y no local, puede continuar la expresión variable con una función.

```
<< INPUT (ENTER A NUMBER,"") ► NUM 1;  
OBJ → (NUM) ► NUM 1>>
```

Manejo De Datos

Esta sección describe brevemente cómo puede suministrar datos a sus programas y cómo puede hacer salir los datos que el mismo produce.

Entrada de datos

Puede utilizar uno de los siguientes métodos para especificar los datos que desea que su programa utilice:

- Como argumentos al poner en ejecución el programa
- Como variables que crea usted en la memoria antes de poner en ejecución el programa
- Pidiendo datos para entrar durante la ejecución del programa
 - Al utilizar una función tal como INPUT para reunir datos numéricos mientras se ejecuta el programa, los datos se devuelven en forma de cadena. Necesitará convertirlo en un número utilizando una función como OBJ.

Salida de datos

Los datos que salen en modo algebraico se escriben en la historia.

Observe los siguientes puntos:

- Al completarse el programa, la historia muestra solamente la última salida en el nivel 1. Para retener salidas creadas durante el procesamiento, puede hacer escribir la salida a una variable global u variables locales a medida que el programa progresa. Este método le da la flexibilidad de dar formato a la salida de datos y de agregar comentarios para mejorar la claridad.
- Algunas funciones resultan en valores múltiples. Para esas funciones, los valores se escriben a una lista y, a menos que los haga salir a una variable, la lista aparecerá en la historia.


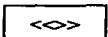
Cómo Fluye un Programa

Los programas de la HP 49G tienen un punto de entrada (el principio del programa) y uno de salida (el final del programa). No existe un programa como el GOTO que puede utilizar para saltar a un punto dentro del programa sino que se utilizan estructuras bucle y bifurcaciones como la IF THEN para controlar el orden de las operaciones.

Desde dentro de los programas usted puede ir ejecutando otros, de esta forma, puede crear programas modulares.

Procedimientos anidados

Si utiliza variables locales para reunir argumentos de entrada, necesita utilizar procedimientos anidados si desea realizar bifurcación y bucle. No puede llevar a cabo bifurcación ni bucle desde dentro de un objeto algebraico.

Para introducir un nuevo procedimiento anidado a su código pulse  ) para introducir los delimitadores. Ingrese el código de procedimiento entre ellos.



Por ejemplo, en el siguiente segmento programático, los argumentos ingresados se asignan a variables A y B. El objeto algebraico, un cálculo que suma las variables, necesita estar entre comillas simples ya que continua inmediatamente a la definición de variable local. Este ejemplo devuelve la suma de A y B a la historia.

```
<< → A B 'A+B' >>
```

En el siguiente segmento programático usted utiliza un procedimiento anidado ya que el procedimiento involucra más que un cálculo simple. Este ejemplo compara A y B, realiza cálculos basados en la comparación. Los resultados de los cálculos se almacenan en variables globales C y D.

```
<< → A B
      << IF A > B
          THEN A-B ► C; A^2 - B^2 ► D
          ELSE B-A ► C
          END
      >>
>>
```



Observe que, dentro de un procedimiento anidado, necesita utilizar ; para separar los cálculos. Para insertar el carácter; pulse y mantenga pulsada  y pulse .

Cómo Trabajar con Variables

Se utilizan las variables para mantener datos dentro de los programas. Existen dos tipos de variables dentro del medio programático de la HP 49G.

- Usted crea variables locales dentro de su programa, éstas contienen los valores establecidos por los argumentos que utiliza cuando invoca el programa. Un programa sólo puede acceder una variable local dentro del procedimiento anidado en el que fue creado y cualquiera que contenga.
- En un programa, puede crear variables globales o utilizar las existentes.
 - Las variables globales están disponibles en cualquier lugar dentro de un programa.
 - Para eliminar una variable global utilizando un código, utilice el comando PURGE (borrar).
 - Si utiliza variables globales en su programa, deben estar ubicadas en el mismo directorio o más arriba, que el programa.

Cómo utilizar variables locales

Hay ciertas limitaciones con las variables locales que debe tener en cuenta, estas son:



- Inmediatamente después de una expresión variable local, el código programático debe contener ya sea:
 - Un cálculo algebraico encerrado entre comillas simples
 - Un procedimiento anidado, encerrado por << >>
- Se encuentra disponible una variable local en el procedimiento anidado donde fue creada, y en todos los procedimientos anidados que contiene.
- Puede crear una variable local con el mismo nombre que una variable global existente, (o sea una variable en el mismo directorio del programa). Los comandos con el nombre de la variable utilizarán el valor de la variable local en lugar del global.

Cómo configurar variables

Por lo general, usted asigna variables a las entradas o a los resultados de los procesos y cálculos que realiza su programa. Puede utilizar variables locales para almacenar resultados intermedios que quiere volver a utilizar en subsecuentes procedimientos anidados dentro del programa.

Utilice las variables globales para almacenar datos para un acceso más amplio.

Cómo configurar variables locales para contener argumentos de entrada

1. En la línea de comando, ubique el cursor inmediatamente a la derecha de símbolo << de apertura.
2. Pulse   para introducir el símbolo →

3. Introduzca el nombre de una variable local para cada argumento de entrada utilizado por su programa, separándolos con una SPC.

Después del valor, pulse ↩ → para introducir el símbolo →, e ingresar el nombre de la variable local.

Por ejemplo:

Para hacer que la variable local G contenga 9.81, la aceleración de la gravedad, la variable se crea como sigue:

↩ <<>> 9.81 ↩ → ALPHA G <<9.81 → G >>

Cómo asignar una variable local al resultado de un cálculo

Aquí se muestra como asignar una variable local al resultado de un cálculo y utilizar el resultado en un cálculo subsecuente. El programa acepta dos argumentos de entrada y los utiliza en los cálculos.

1. En la línea de comandos inserte los delimitadores de programa y especifique las variables locales que contendrá los argumentos de entrada.

↩ <<>> ↩ → ALPHA A SPC ALPHA B SPC

<< → A B >>

2. Comience otro procedimiento anidado y defina el cálculo inicial.

↩ <<>> ALPHA A + ALPHA B

<< → A B
<< A + B >>

3. Almacene los resultados del cálculo en la variable local C.

↩ → ALPHA C

<< → A B
<< A + B → C >>

4. Abra un nuevo procedimiento anidado e introduzca un cálculo que utilice los resultados del cálculo inicial.



ALPHA << → A B

<< A + B → C
 << C + √(A-B) >>
 >>
 >>

Cómo utilizar variables globales

Usted puede utilizar las variables globales existentes en sus programas; estas son diferentes a las locales por lo siguiente:

- Las variables globales están disponibles a todo el programa, independientemente de los procedimientos anidados.
- En un procedimiento anidado, a diferencia con las variables locales, usted puede crear más de una variable global.

Dentro de un programa, se utiliza la tecla **STO ⇒** para definir una variable global. La tecla **STO ⇒** produce un símbolo ► en la línea de comandos.

Bucles y Bifurcaciones

Esta sección introduce la utilización de bifurcaciones y bucles condicionales dentro de un programa. Las estructuras condicionales evalúan al 0 como falso y a cualquier otro valor como verdadero.

Funciones comparativas

La HP 49G brinda funciones de comparación que puede utilizar conjuntamente con las estructuras condicionales y de bucle, pudiendo accederse a las mismas desde el menú *Programming Test* (Prueba de programación). Por ejemplo, para analizar A en relación a B, utilice lo siguiente:

$A=B$	Resulta verdadera si A es igual a B
$A \neq B$	Resulta verdadera si A no es igual a B
$A < B$	Resulta verdadera si A es menor que B
$A > B$	Resulta verdadera si A es mayor que B
$A \leq B$	Resulta verdadera si A es menor o igual que B
$A \geq B$	Resulta verdadera si A es mayor o igual que B
SAME (A,B)	Resulta verdadera si A es exactamente el mismo objeto que B.

Estructuras condicionales y bucles

Están disponibles los siguientes comandos condicionales y de bucle:

- **IF (SI) comparación THEN (ENTONCES) código END (FIN)**
Si la *comparación* resulta verdadera, o sea que se trata de un valor distinto de cero, se ejecuta *code* (código).
- **IF comparación THEN código-1 ELSE código-2 END**
Si la *comparación* resulta verdadera, ejecuta *código-1*. Si la *comparación* resulta falsa, ejecuta *código-2*.
- **CASE expresión-1 THEN código-1 END**
Expression-2 THEN código-2 END
...
expression-n THEN código-n END
END
Ejecuta el código correspondiente a la primera expresión en la estructura que resulte verdadera.
- **START (inicio, final) código NEXT**
Ejecuta *código*, incrementa inicio. Repite hasta que *inicio > final*. El *código* se ejecuta siempre por lo menos una vez.
- **START (inicio, final) código STEP (incr)**
Ejecuta *código*, incrementa inicio por el número especificado por *incr*. (*incr* puede ser una expresión.) Repite hasta que *inicio > final*. El *código* se ejecuta siempre por lo menos una vez.
- **FOR (var, inicio, final) código NEXT**
Ejecuta *código*, asigna *var* a *inicio*. Incrementa *var*; y lo repite hasta que *var > final*. Es similar a **START... NEXT** excepto que usted puede utilizar *var* en su *código*.
- **FOR (var, inicio, final) código STEP (incr)**
Ejecuta *código*, incrementa *var* por el número especificado por *incr*. (*incr* puede ser una expresión.) Repite hasta que *inicio > final*. Es similar a **START... NEXT** excepto que puede utilizar *var* en su *código*.
- **DO código UNTIL comparación END**
Ejecuta *código*, luego prueba para ver si *comparación* evalúa como verdadera. Finaliza si resulta así. Repite *código* si no es así. El *código* siempre se ejecuta por lo menos una vez.
- **WHILE comparación REPEAT código END**

Verifica si *comparación* lo evalúa como verdadera . Ejecuta el *código* si es así. Lo repite hasta que la prueba resulte falsa. Es similar a **DO ... UNTIL** excepto que el *código* no se ejecuta si *comparación* evalúa como falsa la primera vez.

Ejemplo

El ejemplo siguiente procesa una lista de valores numéricos almacenados en una variable llamada **MARKS**. Realiza lo siguiente:

- Determina el número de elementos de la lista.
- El programa compara cada elemento de la lista con el valor a superar.
- a. Si el elemento es mayor o igual que el valor a superar, inserta “*Pass*” (supera) después del valor.
- b. Si el elemento es menor que el valor a superar, inserta “*Fail*” (fracasa) después del valor: Observe que esto convierte el valor en una cadena.
- Reemplaza el valor original con la cadena.

```

<< @ Utiliza la variable local S
    @ para almacenar el número de pasos.
    @ Pasa de 1 al tamaño de la lista.
FOR (S, 1, SIZE (MARKS))
    @ Extrae el elemento de la lista
      GET (MARKS, S) → E
    @ Lo compara con el valor a superar, enmienda y
    @ reemplaza con el nuevo valor.
      << IF E ≥ 50 THEN
          E + “Pass” → E
        ELSE
          E + “Fail” → E
        END
      REPL ( MARKS, S, E )
    >>
NEXT
>>

```

Cómo Detectar Errores

Por defecto un programa se interrumpe cuando encuentra un error. Si desea que algunas secciones del programa se ocupen del error en lugar de interrumpir el programa, debe incluir estas secciones dentro de estructuras de detección de errores. Puede entonces especificar que acción tomar, en lugar de una interrupción, cuando el programa encuentre errores. Se encuentran disponibles las siguientes estructuras de detección de errores.

- **IFERR código THEN código-error END**
Si el programa encuentra un error mientras se encuentra ejecutando *código*, se saltea el código que resta y se ejecuta *código-error*. Si no se encuentran errores en *código*, no se ejecuta *código-error*.
- **IFERR código THEN código-error ELSE código-error END**
Si el programa encuentra un error mientras se encuentra ejecutando *código*, se saltea el código que resta y se ejecuta *código-error*. Si no se encuentran errores en *código*, se ejecuta el *código-no error*.

Ejemplo

El siguiente ejemplo crea una lista de marcas. Si se introduce un valor no numérico, el programa advierte con un mensaje de error. El programa lleva a cabo lo siguiente:

- Establece un bucle para recolectar 20 valores.
- Requiere la entrada de un valor.
- Intenta convertir el valor de una cadena a un número (todo lo reunido mientras se ejecuta un programa se encuentra en forma de cadena).
- Si el intento de conversión fracasa, el error resultante es detectado y aparece un mensaje de error requiriendo un valor numérico.

<<

@ Creación de una lista vacía

{ } ► MARKS

@ Establezca un bucle para 20 entradas.

WHILE SIZE (MARKS) < 21 REPEAT

@ Comience con la rutina de verificación de errores.

IFERR

INPUT ("Enter a number", "") → N

@ Intenta convertir la entrada a un número.

@Esto genera un error si no es numérico.

<< OBJ → (N) → N

@ Si no hay error, adjunte lo ingresado a la lista.

<< MARKS + N ► MARKS >>

>>

THEN

@Si lo ingresado no es numérico aparece lo siguiente:
MSGBOX ("Invalid entry. Try again.")

END

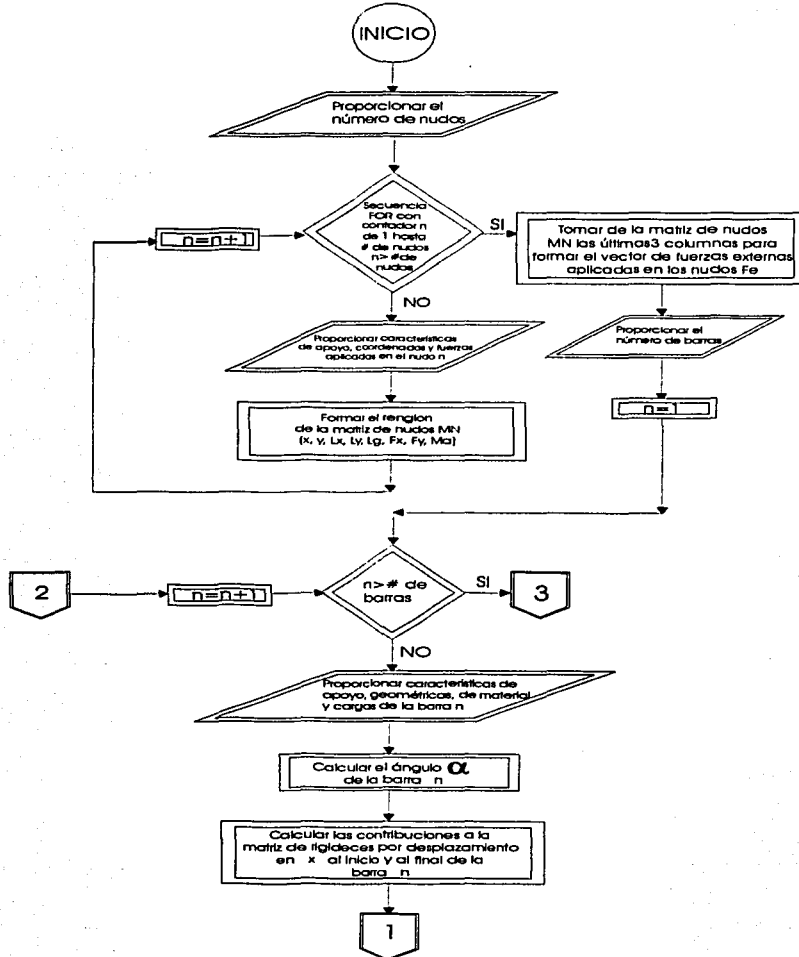
END

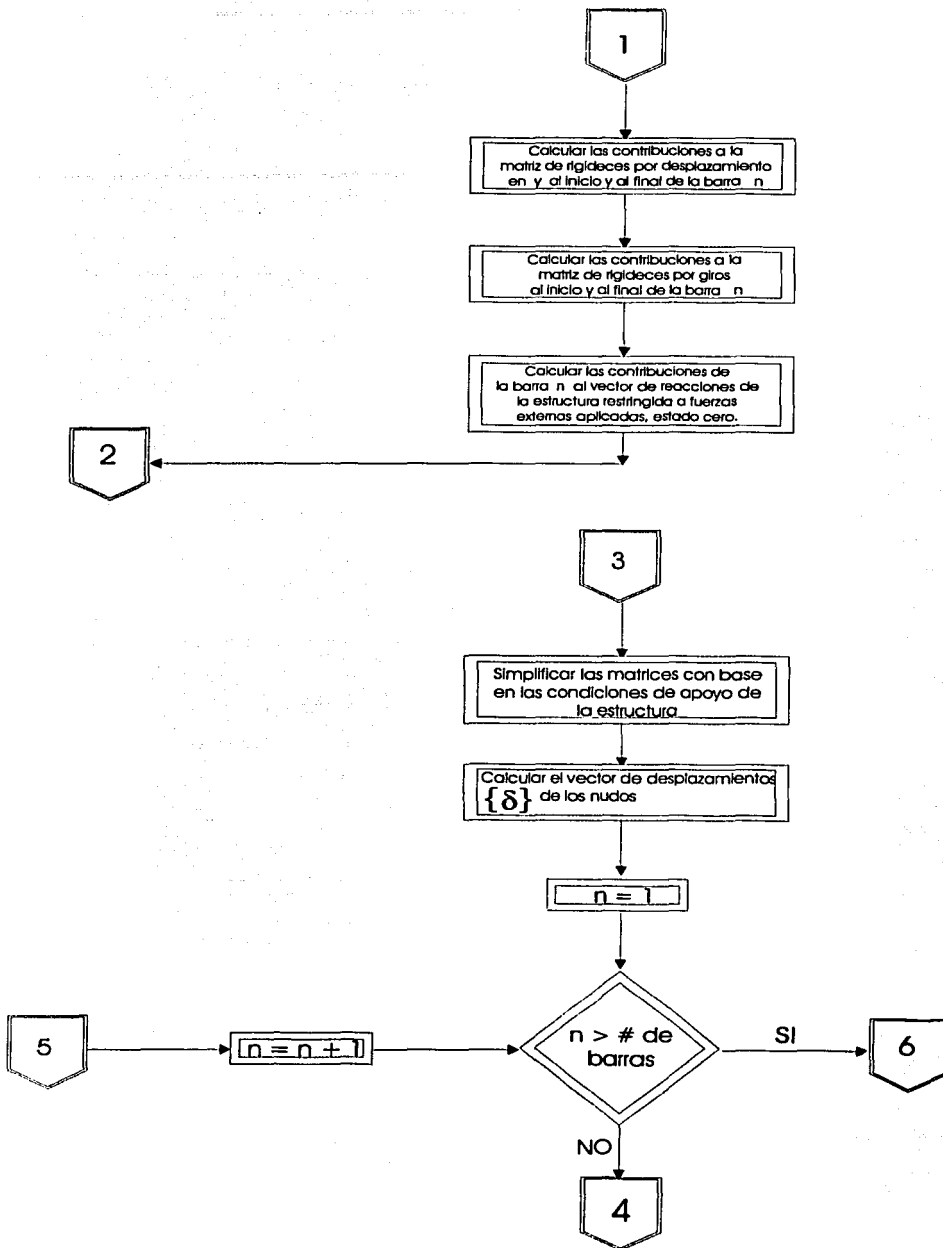
>>

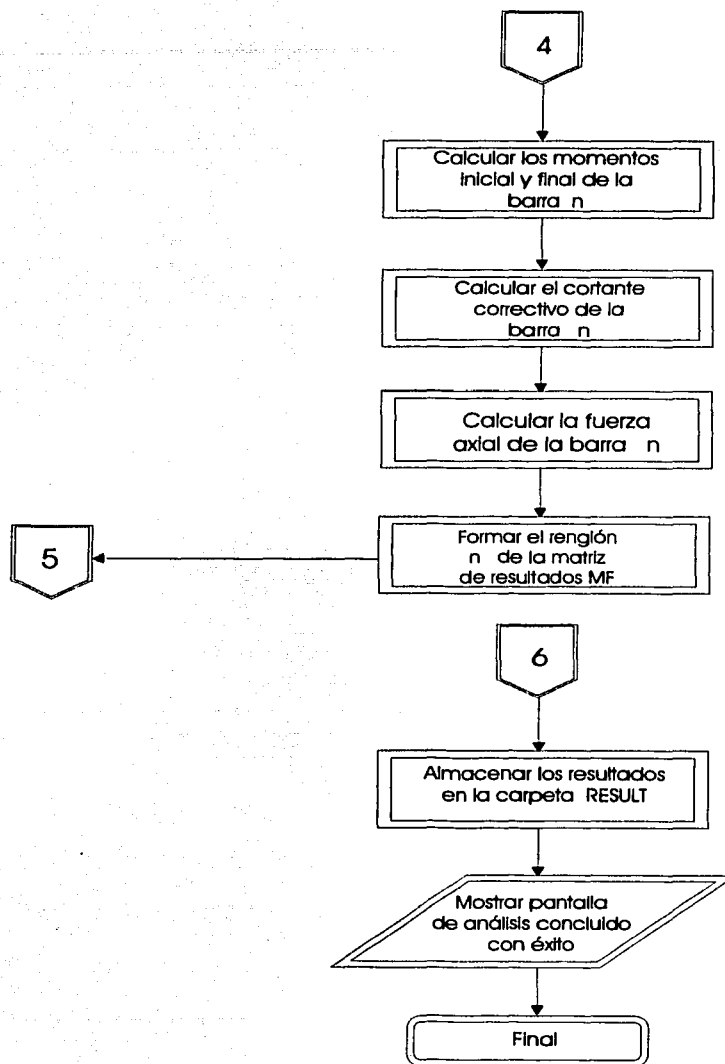
6.3. Desarrollo Del Software.

6.3.1. Desarrollo y Aplicación a Marcos Rígidos.

6.3.1.1. Diagrama de Flujo.







6.3.1.2. Código Fuente.**CODIGO FUENTE**

```

<<RESULT CRDIR RESL ERASE :1:
ALGTN RCL 1. ANIMATE {PPAR}
PURGE
    <<UPDIR {RESULT} PGDIR
    >>↑ STO {} MU STO {} Fe STO
{} Lr STO {} Lc STO "NUDOS"
{{ "Número de nudos"
"Proporcione el número de nudos"
}} {1.1.}{NOVAL}{NOVAL
}INFORM DROP OBJ → DROP Nn STO
Nn 3. x DUP 2 → LIST 0. CON K
STO 1. Nn
    FOR n "NUDO" n + {{ "X="
"Escriba la coordenada X en (m)"
}} { " y = "
"Escriba la coordenada Y en (m)"
}} { "Lx"
"Libertad en X Si = 1 No = 0" }}
"Ly" "Libertad en Y Si = 1 No = 0"
}} { "Ly"
"Libertad de giro Si = 1 No = 0" }}
"Fx" "Fuerza en X en (t)" }}
"Fy" "Fuerza en Y en (t)" }}
"Ma"
"Momento aplicado en (t x m)"}
{2.1.}{NOVAL NOVAL 1.1.1.
0.0.0.}{NOVAL NOVAL 1.1.
1.0.0.0.} INFORM DROP OBJ →
→ ARRY 6. GETI Fe + {Fe} PURGE
Fe STO GETI Fe + {Fe} PURGE Fe
STO GETI Fe + {Fe} PURGE Fe
STO DROP 3. GETI Lc + {Lc}
PURGE Lc STO GETI Lc + {Lc}
PURGE Lc STO GETI Lc + {Lc}
PURGE Lc STO DROP
    NEXT Lc REVLIST {Lc} PURGE
Lc STO Nn ROW → MN STO LC REVLIST
OBJ → 1. SWAP
    FOR n

```

```

IF 0. ==
  THEN Lr n + {Lr} PURGE Lr
STO

ELSE
  END
NEXT Fe REVLIST OBJ →→ ARRAY {
Fe } PURGE Fe STO Lr SORT OBJ →
1. SWAP
  FOR N Fe SWAP COL-DROP {Fe}
PURGE Fe STO
  NEXT 3. Nn x 1. 2. → LIST 0.
CON E0 STO 0. E STO 0.
A STO "BARRAS" {{
"Número de Barras"
"Proporcione el número de barras"
}} { 1. 1. } {NOVAL} {NOVAL
} INFORM DROP OBJ → DROP Nb STO
Nb 2. 2. → LIST 0. CON ε OS STO 1.
Nb
  FOR n "Barra" n + {{ "Ni"
"Nudo inicial" }} { Nf
"Nudo final" }} { "E="
"Módulo elástico" }} { "I="
"Momento de inercia" }} { "A="
"Area" }} {"Art i"
"Articulación al origen 0=No 1=Si"
}} {"Art f"
"Articulación al final? 0=No 1=Si"
}} { "P ="
"Carga concentrada en Y local" }
{ "dP ="
"Distancia de p al inicio" }} {
"W ="
"Carga uniforme en Y local" }}
{ 3. 1. } {NOVAL NOVAL} E + 1
+ A + { 0. 0. 0. 0. } + DUP
INFORM DROP OBJ →→ ARRAY Ri STO {
E I A } PURGE Ri 3. GETI E STO
GETI I STO GET A STO Ri 1. GETI
ni STO GET nf STO MN {} nf + 1
+ GET MN {} ni + 1. + GET-DUP
DUP
CASE 0. ==
  THEN MN {} nf + 2. + GET

```

```

MN {} ni + 2. + GET -
    IF 0. >
    THEN
    ELSE Ri 1. 2. RSWP 6. 7.
RSWP {Ri} PURGE Ri STO ni nf {
ni nf } PURGE ni STO nf STO
    END 90. α STO DROP DROP
    END 0. >
    THEN MN {} nf + 2. + GET
MN {} ni + 2. + GET - MN {} nf
+ 1. + GET MN {} ni + 1. + GET
- / ATAN α STO DROP
    END 0. <
    THEN ni nf { ni nf } PURGE
Ni STO nf STO MN {} nf + 2. +
GET MN {} ni + 2. + GET - MN {
} nf + 1. + GET MN {} ni + 1. +
GET - / ATAN α STO Ri 1. 2. RSWP
6. 7. RSWP {Ri} PURGE Ri STO
    END
    END MN {} nf + 2. + GET MN
{} ni + 2. + GET - SQ MN {} nf
+ 1. + GET MN {} ni + 1. + GET
- SQ + √ L STO E A x L / N STO N
α COS DUP x x DUP DUP DUP K ni
1. - 3. x 1. + DUP
    << 2. → LIST DUP 3. ROLLD GET
ROT + K 3. ROLLD PUT {K} PURGE
K STO
    >> RUT STO RUT K nf 1. - 3. x
1.+ DUP RUT NEG SWAP NEG K nf
1. - 3. x 1. + ni 1. - 3. x 1. +
RUT K ni 1. + ni 1. - 3. x 1. +
3. x 1. + RUT N α SIN DUP x x
DUP DUP DUP K ni 1. - 3. x 2. +
DUP RUT K nf 1. - 3. x 2. + DUP
RUT NEG SWAP NEG K nf 1. - 3. x
2. + ni 1. - 3. x 2. + RUT K ni
1. - 3. x 2. + nf 1. - 3. x 2. +
RUT N α SIN α COS x x DUP DUP
DUP DUP DUP DUP K ni 1. - 3.
X 2. + ni 1. - 3. x 1. + RUT K
ni 1. - 3. x 1. + ni 1. - 3. x
2. + RUT K nf 1. - 3 x 2 + nf
1. - 3 X 1 + RUT K nf 1. - 3.

```

```

x 1. + nf 1. - 3. x 2. + RUT NEG
K nf 1. -3 x 1. + ni 1. -3. x
2.+ RUT NEG K nf 1. -3. x 2.+
ni 1. - 3. x 1.+ RUT NEG K ni
1. -3. x 2. + nf 1. - 3. x 1.+
RUT NEG K ni 1. -3. x 1. + nf
1. - 3. x 2. + RUT Ri 6. GETI 3.
ROLLD GET 2. →LIST DUP DUP DUP
    IF { 1. 1. } ==
        THEN DROP DROP DROP
        ELSE
            CASE { 0. 0. } ==
                THEN DROP DROP 12. E x I
x L 3. ^ / 16. NDUPN DROP 6. E x
I x l 2. ^ / 16. NDUPN DROP 4. E
x I x L / DUP 2. / DUP DUP 2. x
    END { 1. 0. } ==
        THEN DROP 3. E x I x L
3. ^ / 16. NDUPN DROP 0. 0. 0.
0. 3. E x I x L 2. ^ / DUP DUP
DUP 0. 0. 3. E x I x L 2. ^ /
DUP 0. 0. 3. E x I x L 2. ^ /
DUP 0. 0. 0. 3. E x I x L /
    END { 0. 1. } ==
        THEN 3. E x I x L 3. ^ /
16. NDUPN DROP 3. E x I x L 2. ^
/ DUP DUP DUP 0. 0. 0. 0. 3. E x
I x L 2. ^ / DUP 0. 0. 3. E x I
x L 2. ^ / DUP 0. 0. 3. E x I x
L / 0. 0. 0.
    END
    END K nf 1. -3 x 3. x 3. +
DUP RUT K nf 1. - 3. x 3. + ni
1. - 3. x 3. + RUT K ni 1. - 3.
X 3. + nf 1. - 3. x 3. + RUT K
Ni 1. -3 x 3. + DUP RUT α COS
X K nf 1. - 3. x 3. + nf 1. - 3
X 2. + RUT α SIN x NEG K nf 1. -
3. x 3. + nf 1. - 3. x 1. + RUT
α COS x K ni 1. - 3. x 3 + nf
1. - 3. x 2. + RUT α SIN x NEG K
ni 1. - 3. x 3. + nf 1. - 3. x
1. + RUT α COS x NEG K nf 1. -
3. x 3. + ni 1. - 3. x 2. + RUT
α SIN x K nf 1. - 3. x 3. +

```

1. - 3. x 1. + RUT α COS x NEG K
 ni 1. - 3. x 3. + ni 1. - 3. x
 2. + RUT α SIN x K ni 1. - 3. x
 3. + ni 1. - 3. x 1. + RUT α COS
 x K nf 1. - 3. x 2. + nf 1. - 3.
 x 3. + RUT α COS x NEG K ni 1. -
 3. x 2. + nf 1. - 3. x 3. + RUT
 α SIN x NEG K nf 1. - 3. x 1. +
 nf 1. - 3. x 3. + RUT α SIN x K
 ni 1. - 3. x 1. + nf 1. - 3. x
 3. + RUT α COS x K nf 1. - 3. x
 2. + ni 1. - 3. x 3. + RUT α SIN
 x NEG K nf 1. - 3. x 3. +
 RUT α SIN x K ni 1. - 3. x 1. +
 ni 1. - 3. x 3. + RUT α COS DUP
 x x K nf 1. - 3. x 2. + nf 1. -
 3. x 2. + RUT α COS α SIN x x
 NEG K nf 1. - 3. x 1. + nf 1. -
 3. x 2. + RUT α COS DUP x x NEG
 K ni 1. - 3. x 2. + nf 1. - 3. x
 2. + RUT α COS α SIN x x K ni 1.
 - 3. x 1. + nf 1. - 3. x 2. +
 RUT α COS DUP x x NEG K nf 1. -
 3. x 2. + ni 1. - 3. x 2. + RUT
 α COS α SIN x x K nf 1. - 3. x
 1. + ni 1. - 3. x 2. + RUT α COS
 DUP x x K ni 1. - 3. x 2. + ni
 1. - 3. x 2. + RUT α SIN α COS x x
 NEG K nf 1. - 3. x 2. + nf 1. -
 3. x 1. + RUT α SIN DUP x x K nf
 1. - 3. x 1. + nf 1. - 3. x 1. +
 RUT α SIN α COS x x K ni 1. - 3
 x 2. + nf 1. - 3. x 1. + RUT α
 SIN DUP x x NEG K ni 1. - 3. x
 1. + nf 1. - 3. x 1. + RUT α SIN
 α COS x x K nf 1. - 3. x 2. + ni
 1. - 3. x 1. + RUT α SIN DUP x x
 NEG K nf 1. - 3. x 1. + ni 1. -
 3. x 1. + RUT α SIN α COS x x
 NEG K ni 1. - 3. + 2. + ni 1. -
 3. x 1. + RUT α SIN DUP x x K ni
 1. - 3. x 1. + ni 1. - 3. x 1. +
 RUT

END Ri 8 GETI Pp STO GETI
 dP STO GET Ww STO Ri 6. GETI 3.

```

ROLLD GET 2. → LIST DUP DUP DUP
  CASE {0. 0.} ==
    THEN E0 'Ww x L x SIN (α) / 2. + Pp
x (L - dP) ^ 2. x (3. x dP + (L - dP)) x SIN (α)
/ L ^ 3.' → NUM E0 ni 1. - 3. x 1. +
GET + ni 1. - 3. x 1. + SWAP PUT
'- Ww x L x COS (α) / 2. - Pp x (L - Dp) ^ 2. / L ^
3. x (3. x dP + (L - dP)) x COS (α)' → NUM
E0 ni 1. - 3. x 2. + GET + ni 1.
- 3. x 2. + SWAP PUT 'Pp x dP x (L -
dP) ^ 2. / L ^ 2. + Ww x L ^ 2. / 12.' → NUM
DUP EOS SWAP n 1. 2. → LIST SWAP
PUT {EOS} PURGE EOS STO E0 ni
1. - 3. x 3. + GET + ni 1. - 3.
X 3. + SWAP PUT 'Ww x L x SIN (α) / 2. +
Pp x dP ^ 2. / L ^ 3. x (dP + 3. x (dP + 3. x (L - dP))) x SIN
(α)' → NUM E0 nf 1. - 3. x 1. +
GET + nf 1. - 3. x 1. + SWAP PUT
'- Ww x L x COS (α) / 2. - Pp x dP ^ 2. x (dP + 3.
x (L - dP)) x COS (α) / L ^ 3.' → NUM E0 nf
1. - 3. x 2. + GET + nf 1. - 3.
X 2. + SWAP PUT '- Pp x dP ^ 2. x (L - dP
) / L ^ 2. - Ww x L ^ 2. / 12.' → NUM DUP EOS
SWAP n 2. 2. → LIST SWAP PUT {
EOS} PURGE EOS STO E0 nf 1. -
3. x 3. + GET + nf 1. - 3. x 3.
+ SWAP PUT {E0} PURGE E0 STO
DROP DROP DROP
  END {1. 1.} ==
  THEN E0 'Ww x L x SIN (α) / 2. Pp
x (L - dP) x SIN (α) / L' → NUM E0 ni 1.
- 3. x 1. + GET + ni 1. - 3. x
1. + SWAP PUT '- Ww x L x COS (α) / 2. -
Pp x (L - dP) x COS (α) / L' → NUM E0 ni
1. - 3. x 2. + GET + ni 1. - 3.
x 2. + SWAP PUT 'Ww x L x SIN (α) / 2. +
Pp x dP x SIN (α) / L' → NUM E0 nf 1. -
3. x 1. + GET + nf 1. - 3. x 1.
+ SWAP PUT '- Ww x L x COS (α) / 2. - Pp x
dP x COS (α) / L' → NUM E0 nf 1. - 3.
x 2. + GET + nf 1. - 3. x 2. +
SWAP PUT {E0} PURGE E0 STO
DROP DROP
  END {1. 0.} ==

```

```

THEN E0 '3. x Ww x L x SIN (α) / 8
+ Pp x (L - dP) ^ 2. / 2. / L ^ 3. x (dP + 2. x L) x
SIN (α)' → NUM E0 ni 1. - 3. x 1.
+ GET + ni 1. - 3. x 1. + SWAP
PUT '- 3. x Ww x L x COS (α) / 8. - Pp x (L - dP
) ^ 2. / 2. / L ^ 3. x (dP + 2. x L) x COS (α)'
→ NUM E0 ni 1. - 3. x 2. + GET +
ni 1. - 3. x 2. + SWAP PUT '5. x
Ww x L x SIN (α) / 8. + Pp x dP / 2. / L ^ 3. x (3.
x L ^ 2. - dP ^ 2.) x SIN (α)' → NUM E0 nf
1. - 3. x 1. + GET + nf 1. - 3.
x 1. + SWAP PUT '- 5. x Ww x L x COS (α)
/ 8. - Pp x dP / 2. / L ^ 3. x (3. x L ^ 2. - dP ^ 2.
) x COS (α)' → NUM E0 nf 1. - 3. x
2. + GET + nf 1. - 3. x 2. +
SWAP PUT '- Ww x L ^ 2. / 8. - Pp x dP x (L -
dP) / 2. / L ^ 2. x (dP + L)' → NUM DUP EOS
SWAP n 2. 2. → LIST SWAP PUT {
EOS } PURGE EOS STO E0 nf 1. -
3. x 3. + GET + nf 1. - 3. x 3.
+ SWAP PUT {E0} PURGE E0 STO
DROP

```

```

END { 0. 1. } =

```

```

THEN E0 '5. x Ww x L x SIN (α) / 8.
+ Pp x (L - dP) / 2. / L ^ 3. x (3. x L ^ 2. - (L -
dP) ^ 2.) x SIN (α)' → NUM E0 ni 1. -
3. x 1. + GET + ni 1. - 3. x 1.
+ SWAP PUT '- 5. x Ww x L x COS (α) / 8. -
Pp x (L - dP) / 2. / L ^ 3. x (3. x L ^ 2. - (L - dP
) ^ 2.) x COS (α)' → NUM E0 ni 1. - 3.
x 2. + GET + ni 1. - 3. x 2. +
SWAP PUT 'Ww x L ^ 2. / 8. + Pp x dP x (L - dP
) / 2. / L ^ 2. x (L - dP + L)' → NUM DUP EOS
SWAP n 1. 2. → LIST SWAP PUT {
EOS } PURGE EOS STO E0 ni 1. -
3. x 3. + GET + ni 1. - 3. x 3.
+ SWAP PUT '3. x Ww x L x SIN (α) / 8. + Pp
x dP ^ 2. / 2. / L ^ 3. x (L - dP + 2. x L) x SIN (α
)' → NUM E0 nf 1. - 3. x 1. + GET
+ nf 1. - 3. x 1. + SWAP PUT '-
3. x Ww x L x COS (α) / 8. - Pp x dP ^ 2. / 2. / L
^ 3. x (L - dP + 2. x L) x COS (α)' → NUM E0
nf 1. - 3. x 2. + GET + nf 1. -
3. x 2. + SWAP PUT { E0 } PURGE

```


E0 STO

END

```

END Ri OBJ → OBJ → DROP → LIST
α + L + OBJ → → ARRY MU SWAP + {
MU } PURGE MU STO { dP Ww Pp Ri
ni nf α L RUT N } PURGE
NEXT {A I E} PURGE Lr SORT
OBJ → 1. SWAP
FOR n DUP K SWAP COL - DROP
SWAP ROW - DROP { K } PURGE K STO
NEXT Lr SORT OBJ → 1. SWAP
FOR n E0 SWAP ROW - PROP { E0 }
PURGE E0 STO
NEXT E0 OBJ → OBJ → DROP DROP
→ ARRY { E0 } PURGE E0 STO K INV
Fe E0 - x δ STO MU OBJ → ROW → {
MU } PURGE MU STO δ δr STO Lr
SORT REVLIST OBJ → 1. SWAP
FOR n δr SWAP 0. SWAP ROW + {
δr } PURGE δr STO
NEXT 1. Nb
FOR n MU n ROW - SWAP DROP 1.
GETI ni STO GETI nf STO GETI E
STO GETI I STO GETI A STO GETI
3. ROLLD GETI 3. ROLLD GETI P
STO GETI dP STO GETI W STO GETI
α STO GETI L STO DROP DROP 2.
→ LIST ART STO EOS n 1. 2. → LIST
GETI MIO STO GET MZO STO δr ni
1. -3. x 1. + GETI δ X 1 STO GETI
δ Y 1 STO GETI θ1 STO DROP nf 1. -
3. x 1. + GETI δ X Z STO GETI δ Y 2
STO GETI θ2 STO DROP DROP 'E x A / L
x ( COS (α) x (δ X 2 - δ X 1) + SIN (α) x (δ Y 2 -
δ Y 1))' → NUM AX STO ART DUP DUP
DUP
CASE { 0. 0. } =
THEN ' MU + 6. x E x I / L ^ 2. x (SIN
(α) x (δ X 1 - δ X 2) + COS (α) x (δ Y 2 - δ Y 1)) +
E x I / L x ( 4. x θ1 + 2. x θ2 )' → NUM Ma STO
'M20 + 6. x E x I / L ^ 2. x (SIN (α) x (δ X 1 -
δ X 2) + COS (α) x (δ Y 2 - δ Y 1)) + E x I / L x ( 2.
x θ1 + 4. x θ2 )' → NUM NEG Mb STO DROP
DROP DROP

```

```

END { 1. 1. } ==
THEN 0. Ma STO 0. Mb STO
DROP DROP
END { 1. 0. } ==
THEN 0. Ma STO 'M20 + 3. x E x I
/ L ^ 2. x ( SIN ( α ) x ( δ X 1 - δ X 2 ) + COS ( α ) x (
δ Y 2 - δ Y 1 ) ) + 3. x E x I / L x θ 2 ' → NUM NEG
Mb STO DROP
END { 0. 1. } ==
THEN 0. Mb STO 'M10 + 3. x E x I
/ L ^ 2. x ( SIN ( α ) x ( δ X 1 - δ X 2 ) + COS ( α ) x (
δ Y 2 - δ Y 1 ) ) + 3. x E x I / L x θ 1 ' → NUM Ma
STO
END
END Mb Ma - L / V STO Ma Mb
V AX L P dP W 8. → ARRAY { V Mb Ma
AX θ 2 δ Y 2 δ X 2 θ 1 δ Y 1 δ X 1 ART L α
W dP P A I E nf ni M10 M20 }
PURGE
NEXT Nb ROW → MF STO
<< "GRÁFICAS" {{
" Barra número "
"¿ Qué barra deseas ver ?" }}
" Momento flex."
"¿ Graficar momento flexionante?"
}} "Fza. Cortante"
"¿ Graficar fuerza cortante?"
"Fza Axial"
"¿ Graficar fuerza axial?" }} {
1. 1. } { NOVAL N N N } { NOVAL
N N N } INFORM DROP REVLIST OBJ →
DROP MF SWAP ROW - SWAP DROP 1.
GETI Ma STO GETI Mb STO GETI V
STO GETI AX STO GETI L STO GETI
P STO GETI dP STO GETI W STO 3.
→ LIST REVLISTA GRF STO Ma ABS ' W x
L ^ 2. / 8. ' → NUM ABS + Mb ABS ' W x L ^
2. / 8. ' → NUM ABS + V ABS ' P x dP / L '
→ NUM ABS + V ABS ' P x ( L - dP ) / L '
→ NUM ABS + AX ABS MAX MAX MAX
MAX DUP NEG 0. SWAP R → C SWAP L
SWAP R → C 2. → LIST x 0. 0. 0. R → C
3. → LIST + { FUNCTION } + Y +
PPAR STO
<<

```

```

CASE 'X < 0.'
  THEN 0.
  END 'X ≥ 0.' 'X < dP' → NUM
  THEN 'V - P x (L - dP) / L - W x (L /
2. - X)' → NUM
  END 'X ≥ dP' → NUM 'X < L'
  THEN 'V + P x dP / L - W x (L / 2. - X
) ' → NUM
  END 'X ≥ L' → NUM
  THEN 0.
  END
  END
  >> V V STO
  <<
CASE 'X < 0.'
  THEN 0
  END 'X ≥ 0.' 'X < dP' → NUM
  THEN 'Ma + (Mb - Ma) / L x X - W x X
/ 2. x (L - X) + P x (L - dP) / L x X' → NUM
  END 'X ≥ dP' → NUM 'X < L'
  THEN 'Ma + (Mb - Ma) / L x X - W x X
x (L - X) / 2. + P x dP x (L - dP) / L - P x dP / L x X
  → NUM
  END 'X ≥ L' → NUM
  THEN 0.
  END
  END
  >>
  <<
CASE 'X < 0.'
  THEN 0.
  END 'X ≥ 0.' 'X < dP' → NUM
  THEN 'AX' → NUM
  END 'X ≥ dP' → NUM 'X < L'
  THEN 'AX' → NUM
  END 'X ≥ L' → NUM
  THEN 0.
  END
  END
  >> AA STO
CASE GRF {S N N} =
  THEN 'MM' ROL

```

```

    END GRF { N S N } ==
    THEN 'V V' RCL
    END GRF { N N S } ==
    THEN 'A A' RCL
    END GRF { S S N } ==
    THEN 'M M' RCL 'V V' RCL 2.
→ LIST
    END GRF { S S S } ==
    THEN 'M M' RCL 'V V' RCL
'A A' RCL 3. → LIST
    END
    END EQ STO { AA MM VV }
PURGE ERASE DRAX 81 MENU HALT {
PPAR GRF W dP P L AX V Mb Ma EQ
} PURGE
    >> GRAFI STO { δr MU EOS Nb Lr
MN Lc Nn } PURGE DROP DROP
“Los resultados
se muestran en
la carpeta RESULT
use ↑ para salir”
MSGBOX
“
Realizado por:
Angel Alvarez
”
MSGBOX { PPAR } PURGE
“
Para ver gráficas usa la función GRAFI
”
MSGBOX { GRAFI E0 K Fe δ MF ↑ }
ORDER
>>

```

6.3.1.3. Modo de Empleo

Por principio de cuentas debemos visualizar el marco rígido y las cargas actuantes externas, lo más conveniente es realizar un esquema del mismo, donde sea fácil identificar propiedades geométricas y de materiales, así como la magnitud de cada una de las cargas, su punto de aplicación y sentido. Una vez que contamos con esta herramienta gráfica podemos identificar cada uno de los nudos y barras para numerarlos, se recomienda que la numeración sea de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo para los nudos; para las barras de manera similar, solo que, se comienza con las horizontales, luego las verticales y por último las diagonales.

Las etiquetas deben ser distintas, por ejemplo: Los nudos en círculos y las barras en cuadrados.

Ya numerados nudos y barras e identificadas las fuerzas, se puede iniciar con la ejecución del programa; para lo cual es necesario entrar a la librería :0: donde ha sido instalado,

y ejecutar la función aparece la pantalla de presentación del programa,

misma que desactivamos con la tecla , se introduce luego el número de nudos (debe incluir aquellos nudos en los que se encuentra apoyada la estructura), las pantallas siguientes sirven para introducir los datos geométricos y de apoyo, además de las fuerzas aplicadas en cada uno de los nudos; una vez hecho esto, aparece una pantalla en la que se debe proporcionar el número de barras para luego, en las siguientes pantallas, introducir todos los datos de las barras. En seguida, la máquina realiza prácticamente todo el trabajo numérico y queda al diseñador la tarea de interpretar correctamente los resultados.

El programa cuenta con una subrutina capaz de graficar los elementos mecánicos de cualquiera de las barras componentes de la estructura, basta con ejecutar la función

proporcionar el número de la barra que se desea ver gráficamente y colocar una "s" en el o los elementos mecánicos que se van a graficar en ella.

En la siguiente pantalla solo se debe dar la orden y la gráfica aparece automáticamente en pantalla.

Es posible, además, encontrar valores exactos para máximos, mínimos e intersecciones en cero, con algunas ayudas en la barra de funciones. Para regresar a la pila solo se presiona



Para tener una visión clara del manejo de este programa se tiene el siguiente ejemplo:

6.3.1.4. Ejemplo

Consideraremos el ejemplo que aparece en el capítulo IV para ilustrar la forma correcta de utilizar el software referente a marcos rígidos.

En la figura 6.3 se muestra la geometría de la estructura de seis nudos y siete barras, todos numerados, en círculos los primeros y cuadrados los segundos. La numeración se hace en nudos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo; y en barras de forma similar pero comenzando siempre por las horizontales, luego las verticales y por último las diagonales. Lo anterior se hace por comodidad y por que es mas sencillo introducir datos al programa si numeramos de esta forma ya que la máquina está programada para almacenar datos geométricos y de los materiales en memoria y si consideramos que normalmente los grupos de barras con las mismas propiedades son columnas, vigas y diagonales nos ahorramos tiempo al introducir datos.

Además podemos interpretar de mejor manera los resultados ya que nuestra memoria de calculo es más ordenada y corremos menos riesgo de cometer errores.

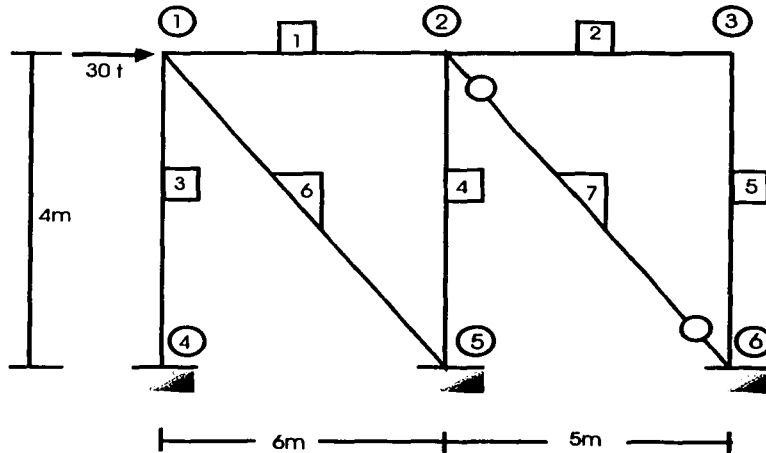


Figura 6.3. Geometría de la estructura y numeración de elementos.

Las propiedades de los elementos se muestran en la tabla 6.1. El módulo de elasticidad E se considera cortante en todas las secciones.

Elemento tipo	Sección	$I(m^4 \times 10^{-3})$	$A(m^2 \times 10^{-3})$
Columnas	40x40	2.133	160
Trabes	30x50	3.125	150
Diagonales	20x20	0.133	40

Tabla 6.1. Geometría de las barras.

A continuación encontraremos e indicaremos la dirección de los ejes X locales para todos los miembros (figura 6.4(a)) y posicionaremos el sistema de ejes globales (figura 6.4(b)).

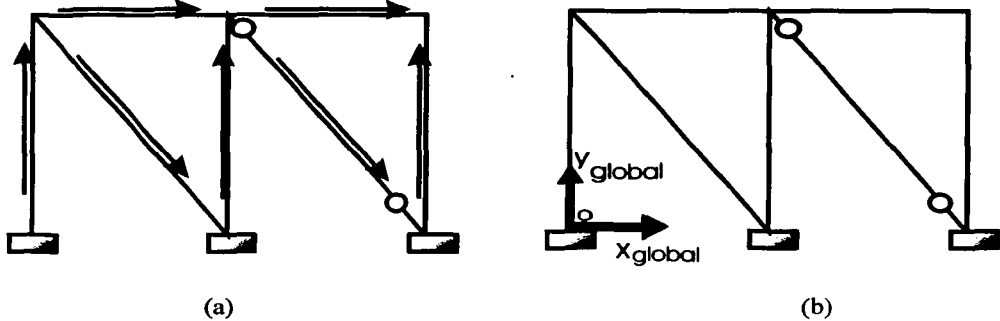


Figura 6.4. a) Ejes locales X, b) Ejes globales.

Estamos ya en condiciones de ejecutar el programa para lo cual entraremos primero en la librería cero de la siguiente manera:

LIB y luego aparece el gráfico de presentación, mismo que podemos desactivar con la tecla

a continuación se debe proporcionar el número de nudos, en nuestro caso

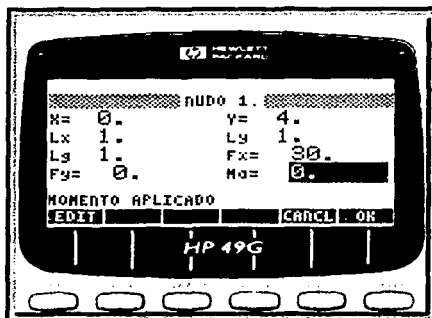


TESIS CON FALLA DE ORIGEN

La siguiente pantalla de entrada de datos muestra las celdas donde se deben escribir los datos del nudo uno, de la siguiente forma:

- $X=$ Coordenada X global del nudo
- $Y=$ Coordenada Y global del nudo
- Lx En caso de que el nudo se encuentre restringido contra desplazamiento en dirección X global, cambiar el valor predeterminado (1) por cero.
- Ly En caso de que el nudo se encuentre restringido contra desplazamiento en dirección Y global, cambiar el valor predeterminado (1) por cero.
- Lg En caso de que el nudo se encuentre restringido contra giro, cambiar el valor predeterminado (1) por cero.
- Fx Proporcionar el valor de la fuerza en dirección X global aplicada en el nudo.
- Fy Proporcionar el valor de la fuerza en dirección Y global aplicada en el nudo.
- $Ma=$ proporcionar el valor del momento aplicado en el nudo.

De modo que para nuestro ejemplo, la pantalla queda como sigue:



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Hacemos lo mismo para los nudos restantes.

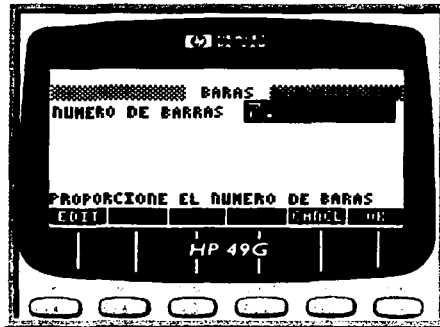
Hemos resumido los valores de entrada para los nudos, todos ellos en la tabla 6.2.

Nudo	X	Y	Lx	Ly	Lg	Fx	Fy	Ma
1	0	4	1	1	1	30	0	0
2	6	4	1	1	1	0	0	0
3	11	4	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0	0	0
6	11	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 6.2. Datos de entrada para los nudos.

La siguiente pantalla nos indica que debemos proporcionar el número de barras que componen la estructura, en nuestro caso:

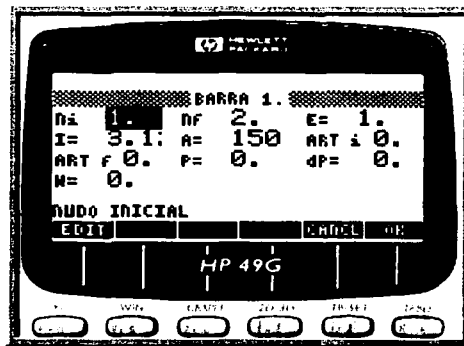




Aparece a continuación la pantalla de entrada de datos de la barra 1, los datos que se deben proporcionar son:

- N_i Nudo inicial
- N_f Nudo final
- E Módulo de elasticidad
- I Momento de inercia de la sección transversal
- A Área de la sección transversal
- Art_i Si la barra está articulada al inicio 1, si no lo está 0
- Art_f Si la barra está articulada al final 1, si no lo está 0
- P Proporcione el valor de la carga concentrada actuante sobre la barra. Es importante tener especial atención en el signo.
- dP Es la distancia desde el origen de la barra hasta el punto de aplicación de la carga P medida en dirección del eje X local.
- W El valor de la carga uniformemente repartida a lo largo de la barra.

De este modo la pantalla completa queda:



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Para las demás barras los datos han sido resumidos en la tabla 6.3

Barra	N_i	N_f	E	$(m^4 \times 10^{-3})$ I	$(m^2 \times 10^{-3})$ A	Art_i	Art_f	(t) P	(m) dP	(t/m) W
1	1	2	1	3.125	150	0	0	0	0	0
2	2	3	1	3.125	150	0	0	0	0	0
3	4	1	1	2.133	160	0	0	0	0	0
4	5	2	1	2.133	160	0	0	0	0	0
5	6	3	1	2.133	160	0	0	0	0	0
6	1	5	1	0.133	40	0	0	0	0	0
7	2	6	1	0.133	40	1	1	0	0	0

Tabla 6.3. Datos de entrada para las barras.

Una vez proporcionados todos los datos aparecen un par de mensajes, que se pueden desactivar con la tecla **ENTER** o la función **OK**

Todos los resultados son mostrados en una carpeta etiquetada como **RESULT** y son los siguientes:

- EO** Es el vector de reacciones de la estructura restringida a carga actuante (estado cero).
- K** Matriz de rigideces de la estructura.
- Fe** Vector de fuerzas externas en los nudos.
- δ** Vector de desplazamientos.
- MF** matriz de resultados. Esta matriz muestra por columnas los resultados de la siguiente forma:

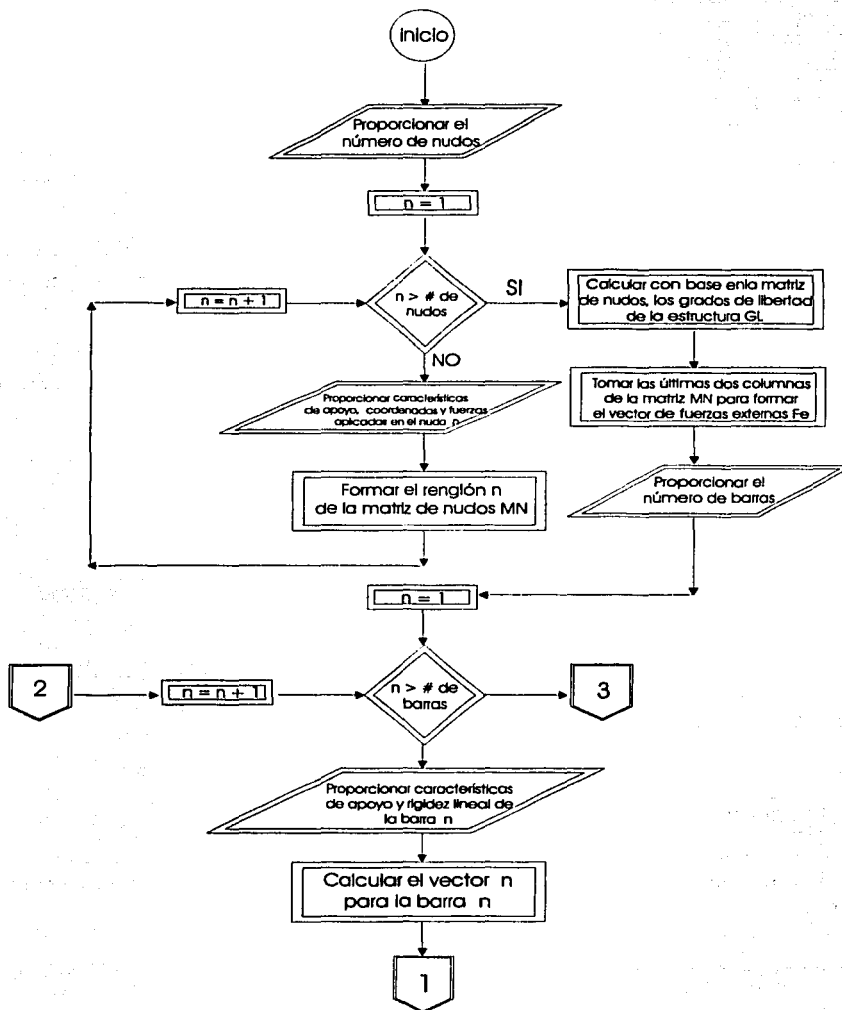
- Columna 1: Momento flexionante al inicio de la barra.
- Columna 2: Momento flexionante al final de la barra.
- Columna 3: Cortante correctivo.
- Columna 4: Fuerza axial.
- Columna 5: Longitud.

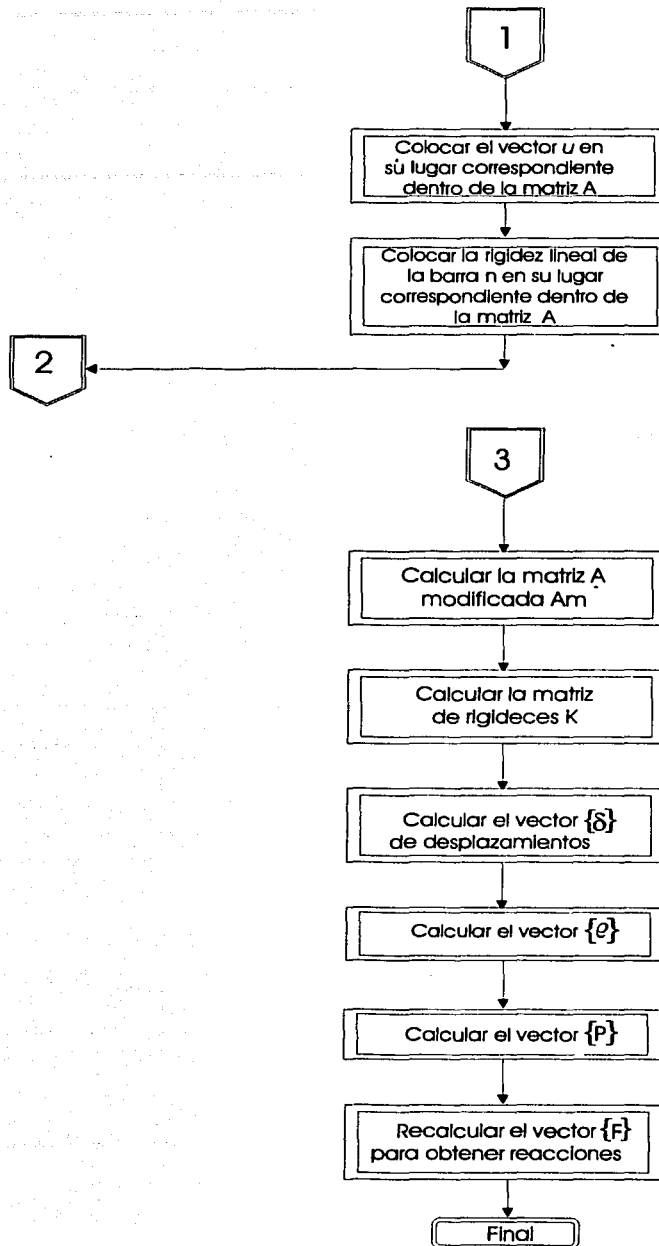
La función **GRAFI** la utilizamos para graficar los resultados por barra.

Al interpretar la matriz de resultados **MF** podemos visualizar los elementos mecánicos en cada miembro.

6.3.2. Desarrollo y Aplicación a Armaduras.

6.3.2.1. Diagrama de Flujo.





6.3.2.2. Código Fuente.

```

<< RESULT CRDIR RESULT ERASE : 1 :
ALGTA RCL 1. ANIMATE { PPAR }
PURGE
    << UPDIR { RESULT } PGDIR
    >> ↑ STO "NUDOS" { {
"Número de Nudos"
"Proporcione el número de nudos"
} } { 1. 1. } { NOVAL } { NOVAL }
} INFORM DROP OBJ → DROP Nn STO
1. Nn
    FOR n "NUDO" n + { { "X="
"Escriba la coordenada X en (m)"
} { "Y="
"Escriba la coordenada Y en (m)"
} { "Lx"
"Libertad en X Si = 1 No = 0" } {
"Ly" "Libertad en Y Si = 1 No = 0"
} { "Fx" "Fuerza en X en (t)"
} { "Fy" "Fuerza en Y en (t)"
} } { 2. 1. } { NOVAL NOVAL 1.
1. 0. 0. } { NOVAL NOVAL 1. 1.
0. 0. } INFORM DROP OBJ → → ARRY
    NEXT Nn ROW → MN STO "BARRAS"
{ { "Número de barras"
"Proporcione el número de barras"
} } { 1. 1. } { NOVAL } { NOVAL }
INFORM DROP OBJ → DROP Nb STO
0. rl STO { } Nb + Nb + 0. CON K
STO { } Nb + 2. Nn X + 0. CON A
STO 1. Nb
    FOR n "BARRA" n + { {
"Nudo inicio"
"En qué nudo inicia la barra?" }
{ "Nudo final"
"En qué nudo acaba la barra?" }
{ "K =" "Rigidez lineal (t/m)" }
} { 1. 1. } { NOVAL NOVAL } rl +
{ NOVAL NOVAL } rl + INFORM DROP
OBJ → DROP { rl } PURGE rl STO K
{ } n + n + rl PUT { K } PURGE K
STO nf STO ni STO MN { } nf + 1.
+ GET MN { } ni + 1. + GET - DUP

```

```

DUP
  CASE 0. ==
    THEN DROP DROP MN { } nf +
2. + GET MN { } ni + 2. + GET -
    IF 0. >
      THEN [ 0. 1.] u STO
      ELSE ni nf { ni nf }
PURGE ni STO nf STO [ 0. 1.] u
STO
      END
      END 0. >
      THEN DROP MN { } nf + 1. +
GET MN { } ni + 1. + GET - MN {
} nf + 2. + GET MN { } ni + 2. +
GET - SWAP / ATAN DUP COS SWAP
SIN 2. → ARRY u STO
      END 0. <
      THEN ni nf { ni nf } PURGE
ni STO nf STO MN { } nf + 1. +
GET MN { } ni + 1. + GET - MN {
} nf + 2. + GET MN { } ni + 2. +
GET - SWAP / ATAN DUP COS SWAP
SIN 2. → ARRY u STO
      END
      END u NEG OBJ → DROP 2. ni 1.
- x 2. + { } n + SWAP + A SWAP
ROT PUT { A } PURGE A STO ni 1.
-2. x 1. + { } n + SWAP + A
SWAP ROT PUT { A } PURGE A STO u
OBJ → DROP nf 1. - 2. x 2. + { }
n + SWAP + A SWAP ROT PUT { A }
PURGE A STO nf 1. - 2. x 1. + {
} n + SWAP + A SWAP ROT PUT { A
} PURGE A STO { nf ni u } PURGE
      NEXT { } CAX STO MN 3. COL -
OBJ → OBJ → DROP → LIST REVLIST
OBJ → 1. SWAP
      FOR n
        IF 0. ==
          THEN CAX n + { CAX } PURGE
CAX STO
        ELSE
          END
      NEXT { } CAY STO MN 4. COL -
OBJ → OBJ → DROP → LIST REVLIST

```

```

OBJ → 1. SWAP
      FOR n
          IF 0. =
              THEN CAY n + { CAY } PURGE
CAY STO
      STO
      ELSE
      END
      NEXT DROP DROP CAX 1. - 2. x
1. ADD CAY 1. - 2. x 2. ADD +
SORT DUP CAT STO OBJ → A SWAP 1.
SWAP
      FOR n SWAP COL - DROP
      NEXT Am STO CAT SIZE Nn 2. x
SWAP - GL STO { } Lf STO MN 5.
COL - SWAP DROP MN 6. COL - SWAP
DROP 2. COL → Mt STO 1. Nn
      FOR n Mt n ROW - SWAP DROP Lf
SWAP OBJ → DROP 2. → LIST + { Lf }
PURGE Lf STO
      NEXT Lf OBJ → → ARRY { Lf }
PURGE Lf STO CAT OBJ → Lf SWAP 1.
SWAP
      FOR n SWAP COL - DROP
      NEXT F STO { Lf Mt CAT CAY CAX
Nb MN Nn rl } PURGE F OBJ → 1. +
→ ARRY { F } PURGE F STO Am TRN K
x Am x K STO K INV F x δ STO Am
δ x ε STO K ε x P STO A TRN P X
FF STO
“Los resultados
se muestran
en la carpeta
RESULT
Use ↑ para salir”
MSGBOX
“
Realizado por :
Angel Alvarez
”
MSGBOX { PPAR } PURGE { GL A Am
k K F δ ε P FF } ORDER DROP DROP
>>

```

6.3.2.3. Modo De Empleo

Este apartado muestra la forma en que debe ser utilizada la versión para el análisis de armaduras planas.

Al igual que su Homónimo para marcos rígidos, este programa se ejecuta después de haber realizado ciertas actividades en papel. Identificar y numerar nudos y barras es el primer paso, luego se define la dirección del eje X local para cada barra y se posiciona el sistema de ejes globales.

Para ejecutar esta aplicación se debe entrar a la librería y luego se presiona la función , aparece la pantalla de presentación de esta versión , misma que se

desactiva con . Se introduce el número de nudos, incluyendo aquellos que apoyan

la estructura, y en las pantallas subsecuentes los datos de cada uno de ellos. Se proporciona el número de barras y los datos relacionados con ellas.

Queda ahora solamente interpretar de manera correcta los resultados.

A continuación, y con el fin de comprender claramente el uso de este paquete, se muestra un ejemplo detallado paso a paso.

6.3.2.4. Ejemplo.

Comenzaremos entonces con el caso mostrado en la figura 6.5; se trata de una armadura plana con once miembros y siete nudos los cuales han sido ya numerados, procuramos por comodidad hacer la numeración de la siguiente forma:

1. Numeramos los nudos de arriba abajo y de izquierda a derecha, y la etiqueta la encerramos en círculos.
2. Numeramos las barras horizontales en primer lugar de izquierda a derecha y de arriba abajo, seguimos con las verticales de la misma forma y por último las diagonales.

Hacemos de esta forma la numeración ya que generalmente las propiedades geométricas y del material como el área, el momento de inercia y a veces el módulo de elasticidad se presentan por grupos (columnas, traveses y diagonales) y los programas facilitan la entrada de datos manteniendo en estas tres propiedades el último valor proporcionado, con la opción, por supuesto, de modificarlo.

Tenemos para el caso de esta armadura dos condiciones de carga distintas las cuales se muestran en la figura 6.6. La rigidez lineal K en este ejemplo se supone igual en todos los miembros e igual a $1.5 t/cm$.

El siguiente paso es encontrar la dirección del eje X local para cada una de las barras, esto se hace de la siguiente forma:

- a) En barras horizontales la dirección es de izquierda a derecha.
- b) En barras verticales la dirección es de abajo a arriba.
- c) En barras inclinadas de izquierda a derecha.

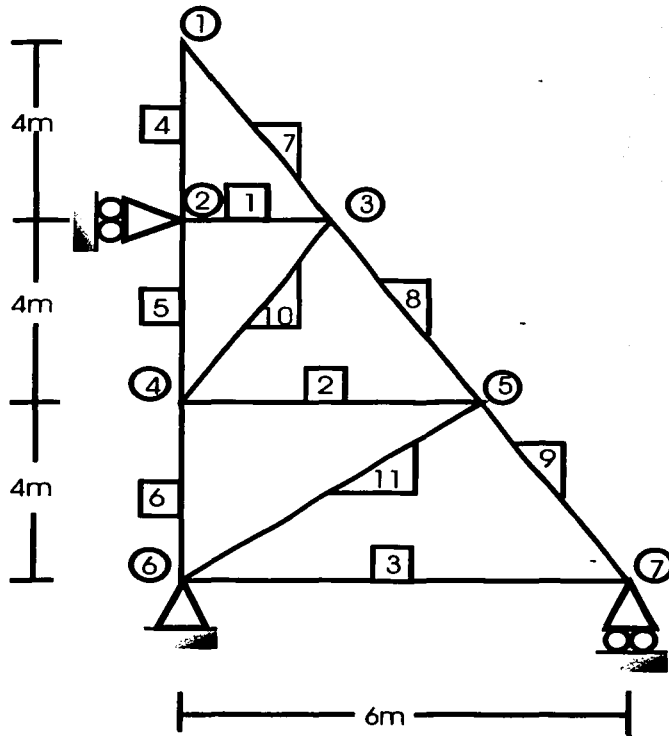


Figura 6.5. Geometría de la armadura y numeración de elementos.

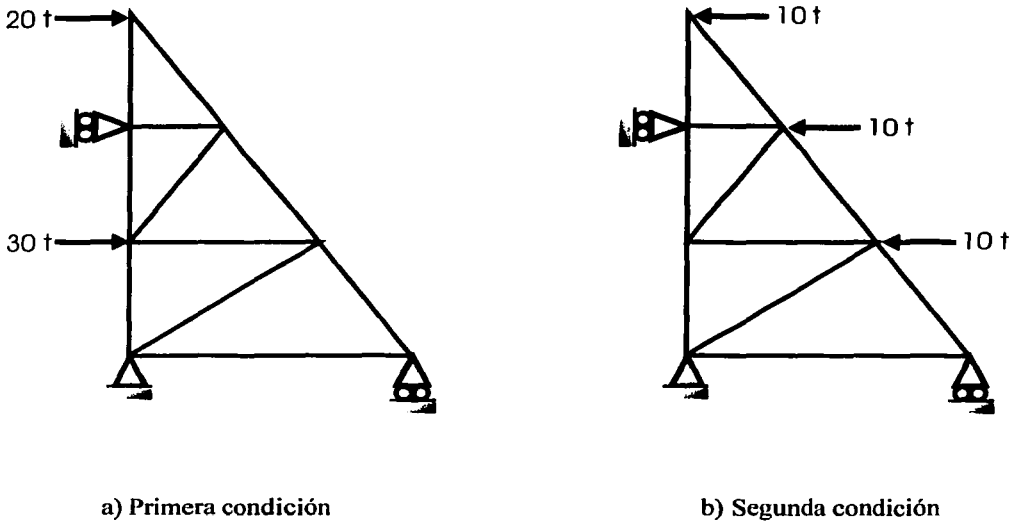
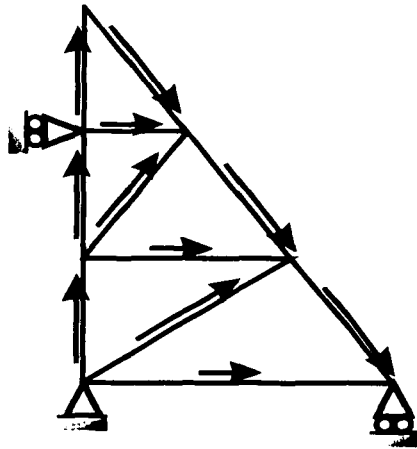


Figura 6.6. Condiciones de carga.

La dirección del eje X local para las barras se muestra en la figura 6.7



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 6.7. Ejes locales X de las barras.

Determinaremos ahora la posición y dirección de los ejes globales; el origen, por

comodidad, lo colocaremos coincidente en el nudo **6** y la dirección del eje X global será totalmente horizontal por tanto el Y positivo será vertical, es importante hacer esto antes de continuar ya que el siguiente paso es la ejecución del programa y todas las coordenadas de los nudos serán basadas en los ejes globales. La posición de los ejes globales se muestra en la figura 6.8.

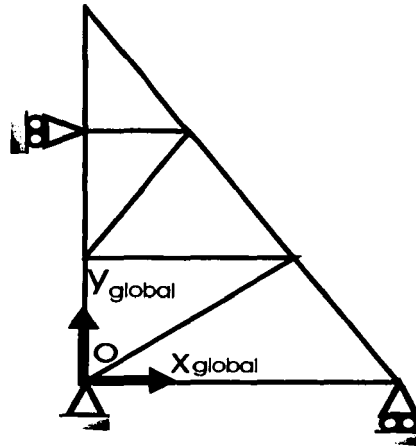






Figura 6.8. Ejes globales.

Note que no es sino hasta después de haber hecho lo anterior que aremos uso del software. Lo anterior se debe a que de este modo reducimos al máximo la posibilidad de errores y hacemos más eficiente el proceso de análisis, además de que podremos interpretar los resultados de manera correcta, ya que llevamos una memoria ordenada y en este momento tenemos una idea más clara de la geometría y dimensiones de las cargas, lo que nos permite suponerse forma cualitativa los resultados, es decir, sabemos de manera aproximada los valores en magnitud y dirección de algunas reacciones y/o elementos mecánicos resultantes del análisis.

Comencemos pues con la ejecución del software. En este caso, por tratarse de una armadura, usaremos obviamente la versión simple para armaduras. Esto se hace entrando a la librería **:0**: usando las teclas  **LIB** y la función  **:0**: luego  **ARMAND**

aparece el gráfico de presentación, el cual desactivamos con la tecla , enseguida aparece la primera pantalla de entrada de datos en la que se nos pide el número de nudos (aquí debemos incluir aquellos nudos apoyados, no importando de que tipo de apoyo se trate).



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como en nuestro caso tenemos siete nudos presionamos

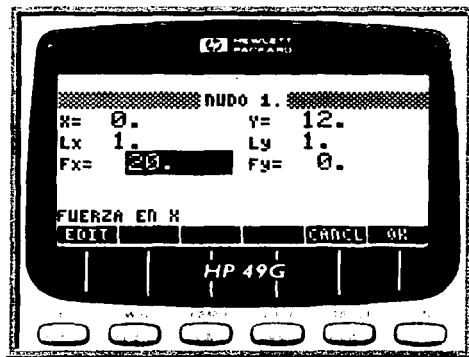


La siguiente pantalla muestra las celdas de entrada de datos del nudo 1; en el primer

campo debemos proporcionar la coordenada X con respecto a los ejes globales, en el segundo la coordenada Y , el campo Lx se refiere a la posibilidad de desplazamiento del nudo en dirección del eje X global; si esta libertad existe dejaremos el valor predeterminado 1, y si el nudo se encuentra restringido es esa dirección lo cambiaremos por 0 (cero), lo mismo sucede con el campo Ly .

Los campos Fx y Fy se refieren a fuerzas externas aplicadas en el nudo en las direcciones de los ejes globales X y Y respectivamente.

De esta forma para nuestro ejemplo la pantalla queda como sigue:



Hacemos lo mismo para los nudos restantes.

Hemos resumido los valores de entrada para los nudos, todos ellos en la tabla 6.4

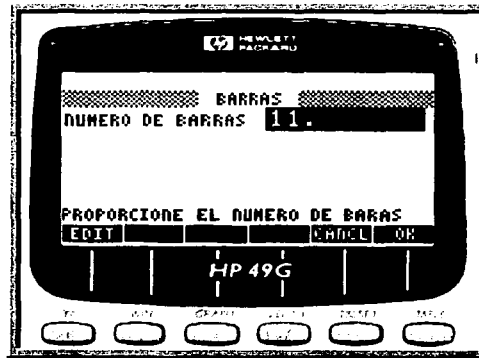
NUDO	X	Y	Lx	Ly	Fx	Fy
1	0	12	1	1	20	0
2	0	8	0	1	0	0
3	2	8	1	1	0	0
4	0	4	1	1	30	0
5	4	4	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	6	0	1	0	0	0

Tabla 6.4. Datos de entrada para los nudos.

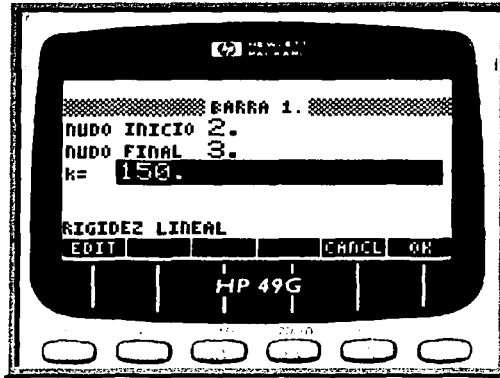
Note que hemos considerado solo la primera condición de carga (figura 6-5(a)) esto es por que los resultados para la segunda condición podemos calcularlos con los resultados que arroje el primer análisis fabricando únicamente el vector de fuerzas en los nudos para la segunda condición.

La pantalla que aparece a continuación nos pide que proporcionemos el número de barras de las que consta la estructura. En nuestro caso esto lo hacemos con:

1 1 ENTER ENTER



Vemos ahora la imagen que pregunta por los datos de la barra 1. Nudo inicial, que en el caso de la barra 1 es el nudo (2) y el final que es el (3), la rigidez lineal de 150 quedando la pantalla como sigue:



La tabla 6.5 muestra los datos por barra:

BARRA	Ni	Nj	K
1	2	3	150
2	4	5	150
3	6	7	150
4	2	1	150
5	4	2	150
6	6	4	150
7	1	3	150
8	3	5	150
9	5	7	150
10	4	3	150
11	6	5	150

Tabla 6.5. Datos de entrada para las barras.

Una vez proporcionados todos los datos aparecen un par de mensajes, los cuales se pueden desactivar después de leerlos, con la tecla

ENTER

Para visualizar los resultados del análisis tecleamos

VAR

y aparecen las siguientes funciones en pantalla:

- GL → Indica los grados de libertad de la estructura.
- A → Es la matriz de continuidad completa.
- Am → Es la matriz de continuidad modificada
- K → Es la matriz de rigideces de las barras.
- K → Es la matriz de rigideces de la estructura.
- F → Vector de fuerzas externas en los nudos.
- δ → Vector de desplazamientos.
- ε → Vector de deformaciones de las barras

- P → Vector de fuerzas axiales en las barras.
- FF → Vector de fuerzas externas y reacciones en apoyos.

Analizando el vector P podemos dibujar las fuerzas axiales en la estructura, las cuales se muestran en la figura 6.9

$$P = \begin{Bmatrix} 31.2 \\ -14.4 \\ 9.2 \\ 40 \\ 40 \\ 8.8 \\ -44.72 \\ -9.84 \\ -20.57 \\ -34.88 \\ 13.57 \end{Bmatrix}$$

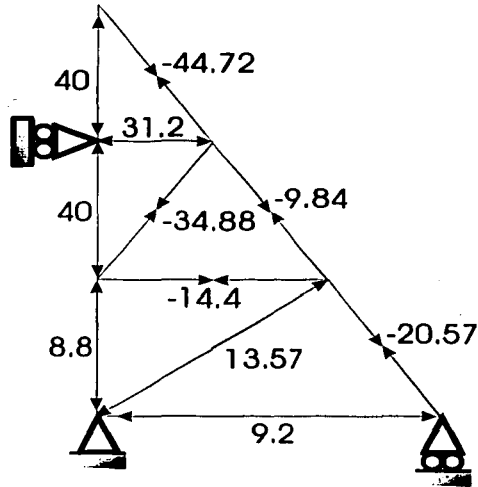


Figura 6.9. Fuerzas axiales resultantes.

Si analizamos el vector FF podemos encontrar las reacciones en los apoyos las cuales se muestran en la figura 6.10.

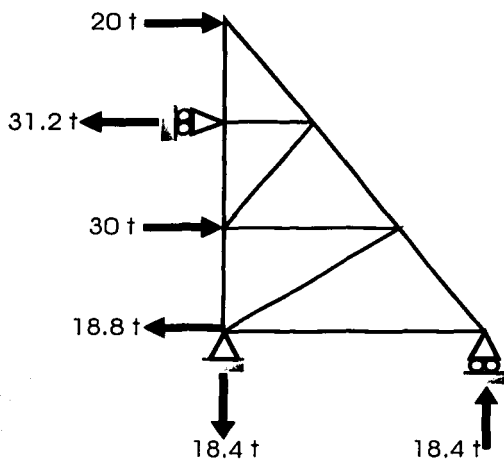


Figura 6.10 . Reacciones.

$$FF = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \\ -31.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18.8 \\ -18.4 \\ 0 \\ 18.4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \\ Fx_5 \\ Fy_5 \\ Fx_6 \\ Fy_6 \\ Fx_7 \\ Fy_7 \end{Bmatrix}$$

Para la segunda condición de carga solo debemos fabricar el vector de fuerzas externas y realizar todas las operaciones que aparecen en el capítulo V con las matrices que arroja como resultado el primer análisis en la calculadora. De esta manera se obtienen los vectores P y FF y se interpretan de la misma forma como se hizo para la primera condición de carga.

$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -1.312 \\ -.319 \\ -.186 \\ -.148 \\ .096 \\ -.053 \\ -.052 \\ -.093 \\ .058 \\ -.035 \end{Bmatrix}$$

$$\{e\} = [Am] \{\delta\}$$

$$\{P\} = [K] \{e\}$$

$$\{F\} = [A]^T \{P\}$$

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} -.148 \\ -.040 \\ -.035 \\ -.133 \\ -.133 \\ -.052 \\ .149 \\ .058 \\ .078 \\ .090 \\ -.025 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} -22145 \\ -6.072 \\ -5.236 \\ -20 \\ -20 \\ -7.854 \\ 22361 \\ 8.782 \\ 11.710 \\ 13580 \\ -3.703 \end{Bmatrix}$$

$$FF = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 22.145 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 7.854 \\ 10.473 \\ 0 \\ -10.473 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas axiales y reacciones se muestran en la figura 6.11

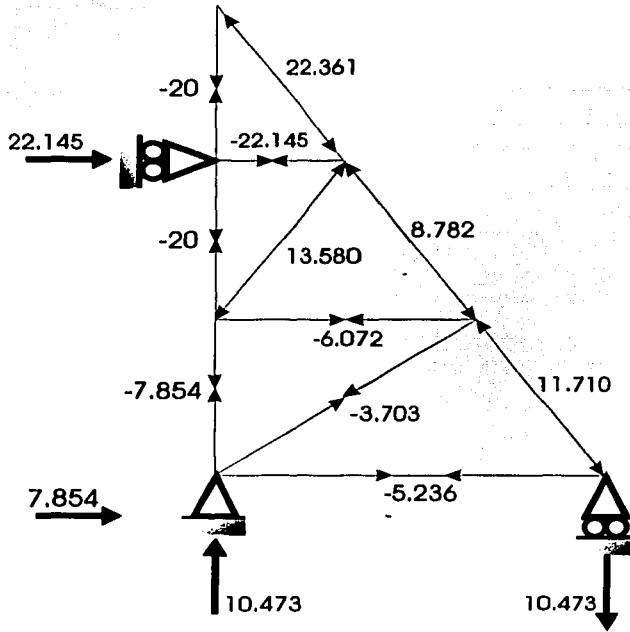


Figura 6.11. Fuerzas axiales y reacciones.

6.4. Indicaciones Especiales para la Transferencia del Software.

Cómo transferir objetos entre calculadoras

Usted puede transferir objetos simples entre calculadoras o enviar archivos múltiples y directorios.



- Se utiliza la herramienta de manejo de archivos *Filer* (archivador) para seleccionar los objetos a transferir entre calculadoras.
- Se utiliza el cable provisto con la HP 49G para conectar las calculadoras y transferir objetos entre ellas.

Cómo conectar calculadoras






Se conecta el cable seriado a los puertos serie ubicados en la parte superior de las calculadoras.

- Inserte un extremo del cable seriado en el puerto de cada una de las calculadoras.

Transferencia de datos

1. Asegúrese que las calculadoras se encuentren conectadas correctamente.
2. En ambas calculadoras pulse   para iniciar *Filer*.

Aparece el árbol directorio consistente en una lista de todos los directorios (y puertos) de su HP 49G.

3. En la calculadora receptora:
 - a. Navegue al directorio donde quiera almacenar los datos a recibir.
 - b. Pulse  para mostrar la lista de opciones *Input/Output* (entradas y salidas).
 - c. Seleccione RECEIVE (RECIBIR) y pulse . La calculadora queda en espera para recibir los datos.
4. En la calculadora emisora, navegue hacia el puerto o directorio que contiene los datos a enviar.
5. Seleccione los objetos a enviar utilizando las teclas flecha para seleccionarlos y pulse . Aparece un número al lado de cada objeto, indicando el orden de envío.
6. Una vez seleccionados los objetos a enviar, pulse  para visualizar la lista de opciones *Input/Output* (entradas y salidas).
7. Seleccione SEND (ENVIAR) y pulse . La calculadora envía los objetos.

7. Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1:

Obtener fuerzas axiales y reacciones de la armadura mostrada en la figura 7.1. La rigidez lineal para todos los elementos es igual a 2 t/cm. Las longitudes en metros y las cargas en toneladas.

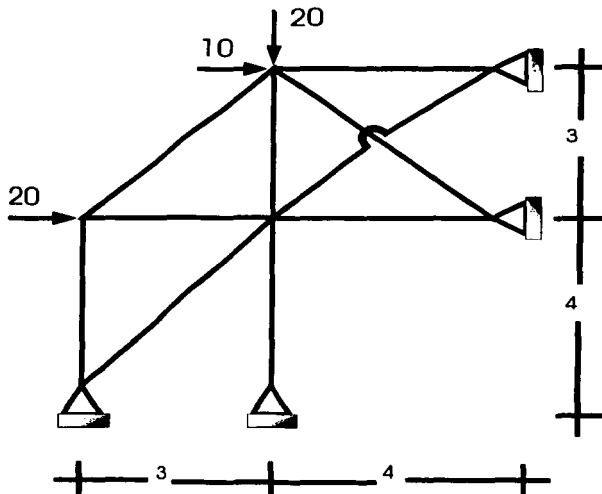


Figura 7.1. Geometría de la armadura y cargas impuestas a la misma.

Resultados:

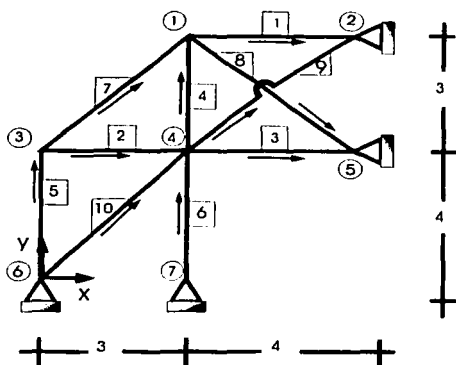


Figura 7.2. Ejes globales, numeración de elementos y ejes locales x de los mismos.

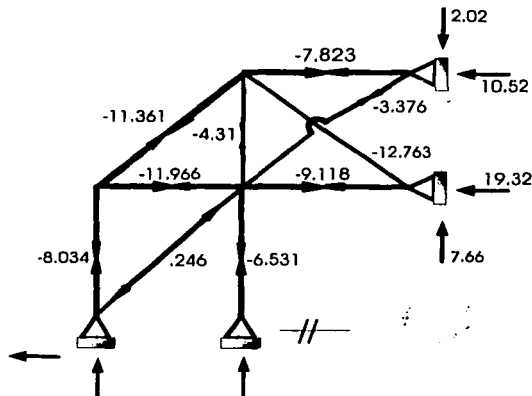


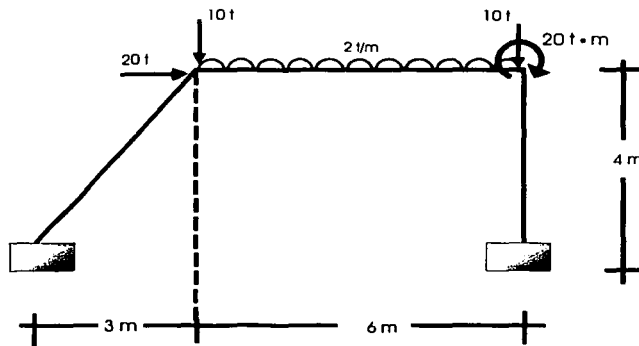
Figura 7.3. Fuerzas axiales resultantes.

Ejemplo 2:

Obtener los diagramas de momento flexionante de cada uno de los miembros del marco presentado en la figura 7.4.
Las propiedades geométricas y de materiales se muestran en la tabla 7.1.

ELEMENTO	SECCIÓN (cm)	I ($m \times 10^{-3}$)	A ($m \times 10^{-3}$)	E (t/m^2)
Diagonal	40 x 40	2.133	160	2.21×10^6
Columna	30 x 30	0.675	90	2.21×10^6
Trabe	40 x 55	5.546	220	2.21×10^6

Tabla 7.1. Propiedades geométricas de los elementos.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 7.4. Geometría del marco y cargas impuestas al mismo.

Solución:

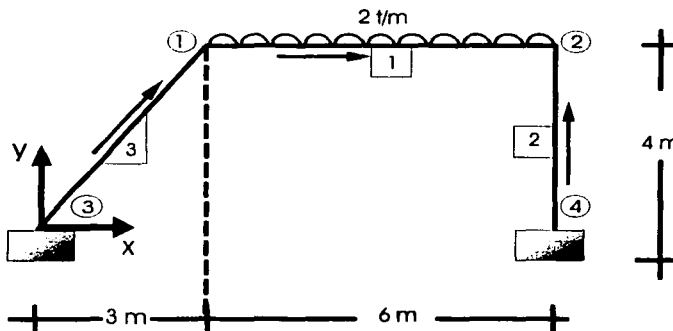


Figura 7.5. Numeración de nudos y barras.

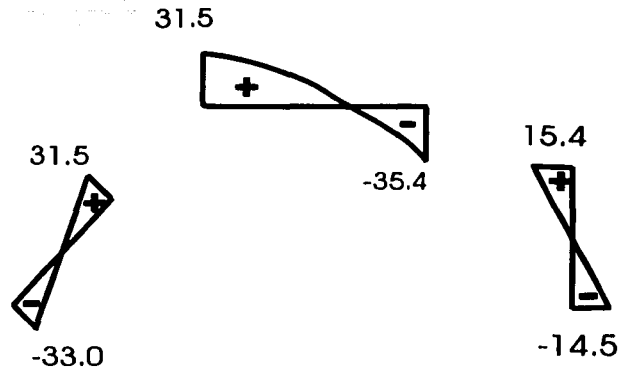


Figura 7.6 diagramas de momento flexionante

Ejemplo 3:

Obtener los diagramas de elementos mecánicos de cada uno de los miembros del marco de la figura 7.7.

El módulo E es igual a $2.2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$.

ELEMENTO	A (m ² x 10 ⁻³)	I (m ⁴ x 10 ⁻³)	E (t/m ²)
20 x 50	100	2.083	2.21×10^6
40 x 40	160	2.133	2.21×10^6

Tabla 7.2. Propiedades geométricas de las barras.

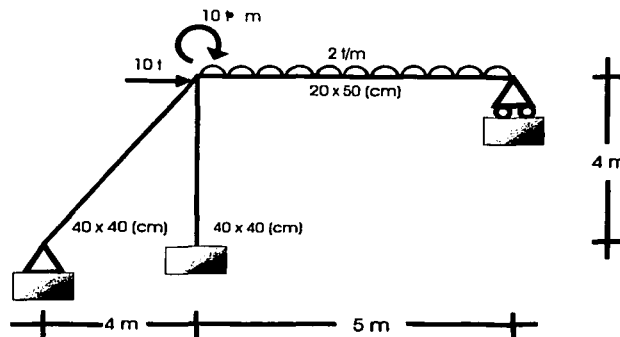


Figura 7.7. Geometría del marco y cargas.

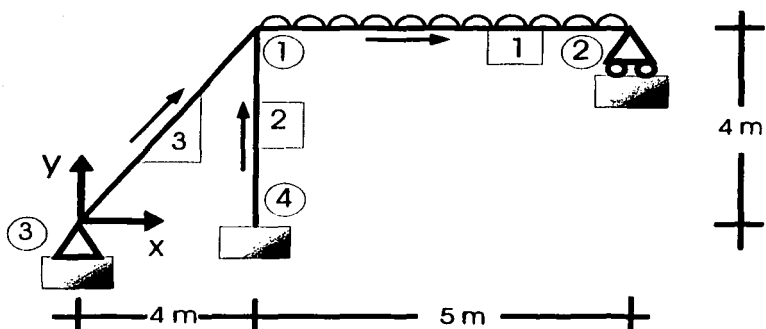


Figura 7.8. Ejes globales, ejes locales X, numeración de barras y nudos.

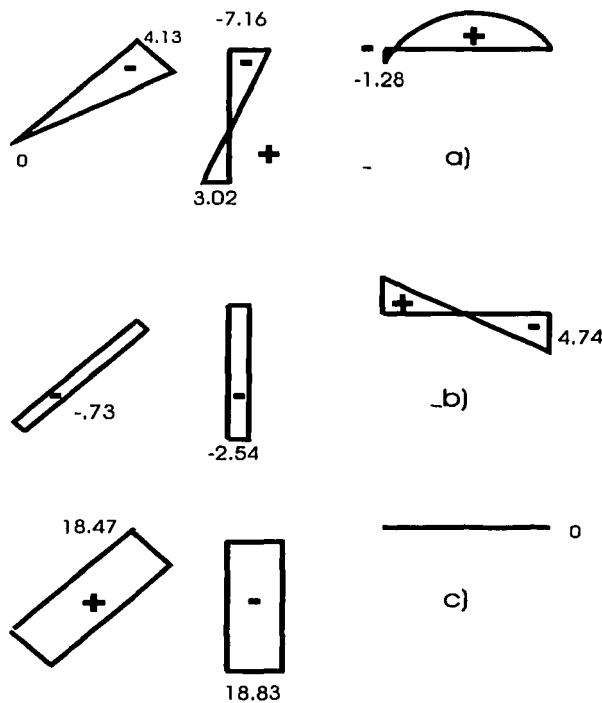


Figura 7.9. Elementos mecánicos resultantes. a) Momentos flexionantes, b) Fuerzas cortantes, c) Fuerzas axiales

Ejemplo 4:

Obtener los diagramas de elementos mecánicos del marco presentado en la figura 7.10.
 El valor del módulo elástico E es igual en todos los elementos y constante en toda la longitud de cada uno de ellos.

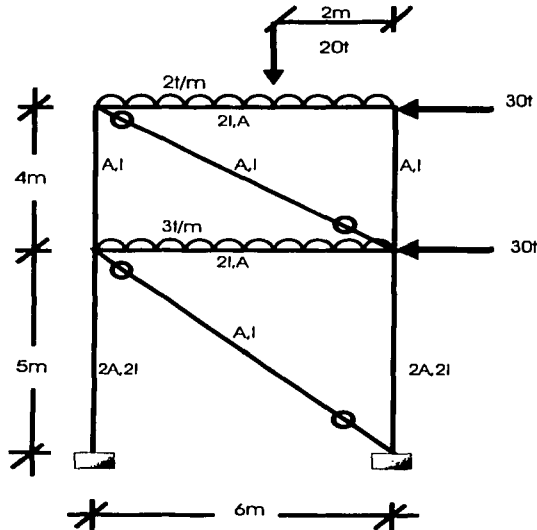


Figura 7.10. Geometría de la estructura, propiedades geométricas de los elementos y cargas impuestas.

Solución:

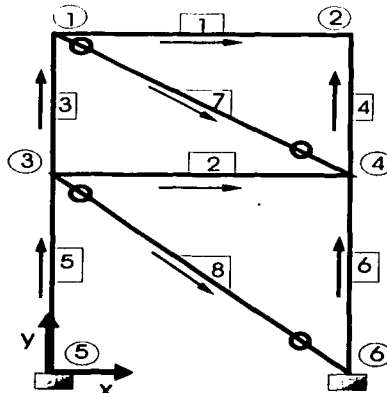


Figura 7.11. Ejes globales y numeración de barras y nudos.

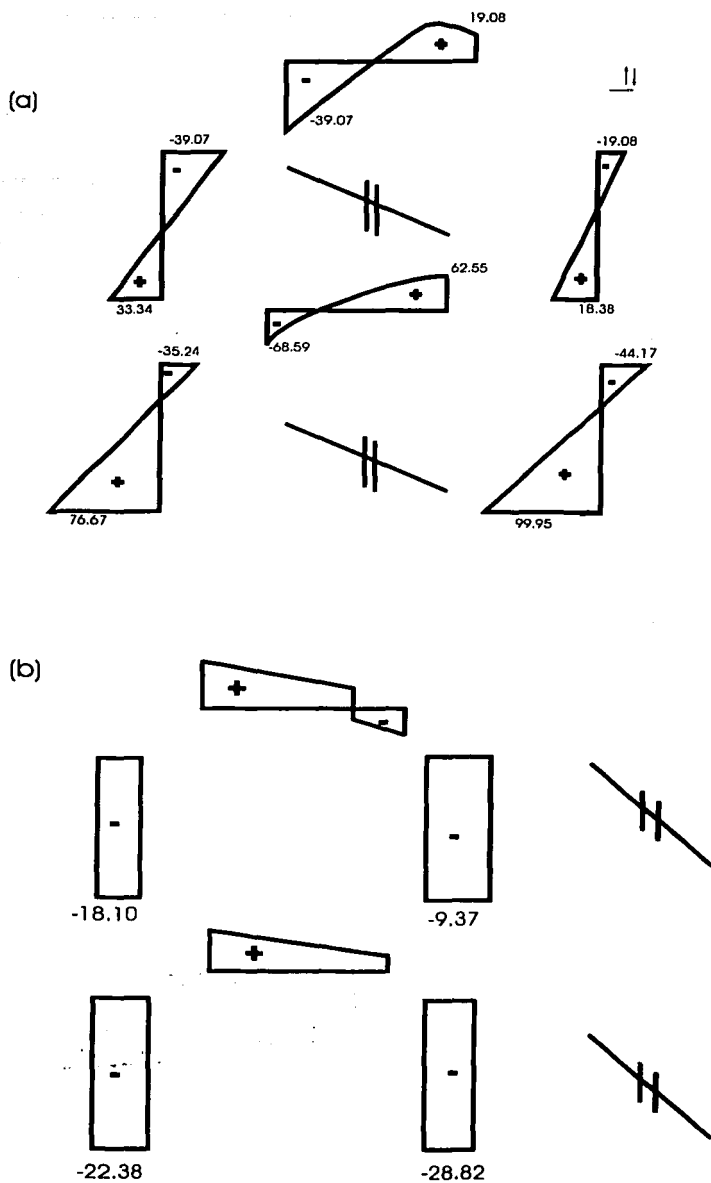


Figura 7.12. Elementos mecánicos resultantes.

(C)

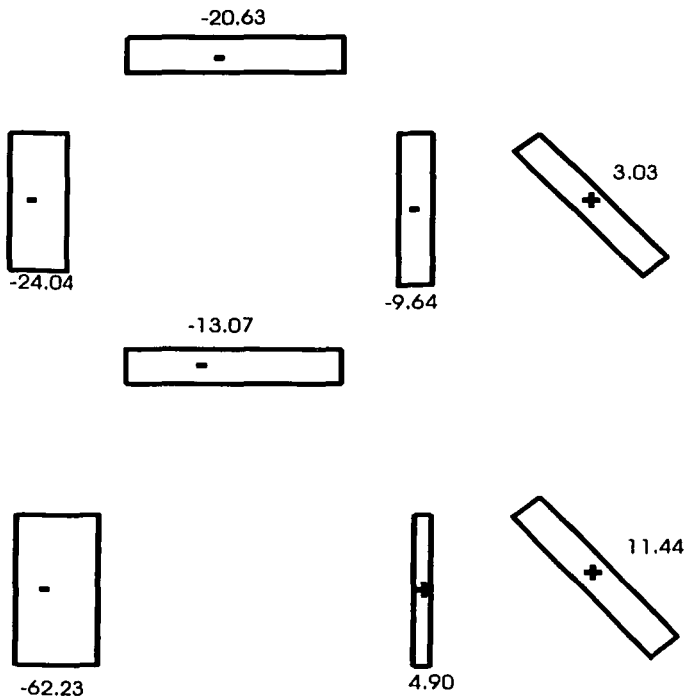


Figura 7.12 (continuación)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Ejemplo 5:

Obtener las fuerzas axiales de cada uno de los elementos componentes de la siguiente armadura. La rigidez lineal para todos los miembros es de 200 t/m.

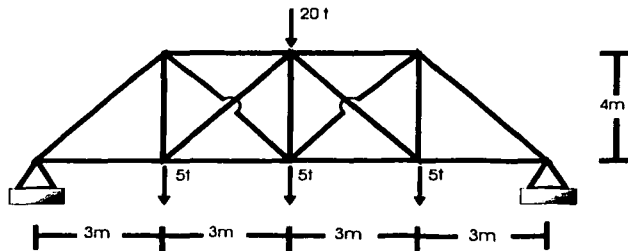


Figura 7.13. Geometría de la armadura y cargas impuestas.

Solución:

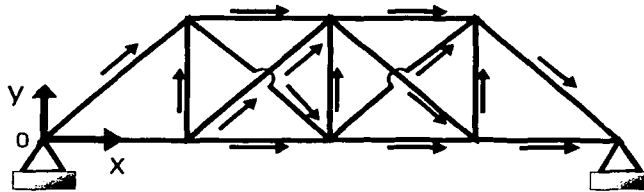


Figura 7.14. Ejes globales y locales X.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

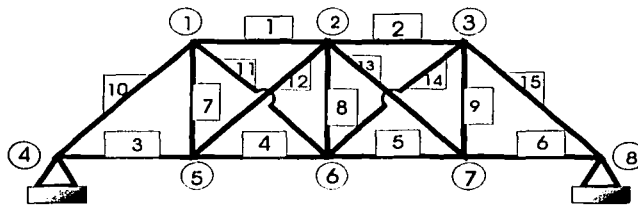


Figura 7.15. Numeración de barras y nudos.

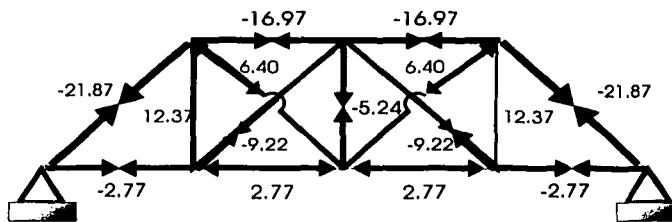


Figura 7.16. Fuerzas axiales resultantes.

CONCLUSIONES.

Una conclusión evidente a la que se llega en este trabajo, es que, es relativamente sencillo programar algoritmos bien definidos y sistemáticos como lo es el método de las rigideces para la solución de estructuras planas, particularmente el método matricial. El desarrollo matricial del método de las rigideces es una herramienta muy poderosa en el cálculo de estructuras debido a su gran sencillez.

La facilidad que se tiene en la actualidad para utilizar equipos de cómputo de cualquier tipo, permite que cualquier persona posea las herramientas técnicas suficientes para hacer el análisis de estructuras de una manera más eficiente y reduce al máximo la posibilidad de cometer errores de cálculo durante el proceso.

Los programas presentados en este trabajo, se elaboraron en forma didáctica, tratando de presentar en sus archivos de salida las variables representativas de los modelos de análisis considerados en cada caso. Se presentan también los códigos fuente de cada uno de ellos ya que el estudiante interesado en el análisis estructural cuenta con equipos de muy diversas clases en los que los lenguajes de programación pueden variar sustancialmente. El estudiante de Estructuras se ve posibilitado con el código fuente a hacer variaciones y modificar cualquiera de los programas para adecuarlo a sus necesidades.

Al hacer comparaciones de los resultados obtenidos con los programas desarrollados en este trabajo y los obtenidos con paquetes de cómputo especializados se puede observar que la diferencia en magnitudes es prácticamente nula, además, al realizar algunos ejemplos manualmente (la sencillez del problema lo permitía) se observó que los resultados son idénticos a los obtenidos con el software desarrollado. Lo anterior nos muestra la confiabilidad de los programas y hace evidente la eficiencia de la solución de problemas didácticos ya que el tiempo necesario para analizar un marco puede reducirse considerablemente en comparación con la solución manual. Esto no significa una reducción en la calidad de la enseñanza como podría pensarse, ya que el software solamente reduce el tiempo necesario para cálculos matemáticos, sistemáticos y repetitivos que en la enseñanza del análisis estructural no juegan ningún papel de importancia.

Reitero que el desarrollo de los algoritmos de los programas que se presentan en esta tesis, fue enfocado para fines didácticos, sin perder de vista su aplicación práctica y solo se requieren unos pequeños ajustes para optimizarlos.

Una de las ventajas que se tienen con este tipo de programas de análisis en calculadoras, es que se puede hacer uso de ellos en cualquier lugar en cualquier momento, y no son necesarios equipos de apoyo de ningún tipo, ni se requieren instalaciones eléctricas y cableado ni ningún aditamento extra; es necesaria solamente la calculadora, tan común como la de casi cualquier estudiante de Ingeniería e incluso de bachillerato. Los programas no requieren más del 1% de la capacidad de memoria de la calculadora y su tamaño puede modificarse contando con el código fuente.

Es de gran importancia mencionar que el uso adecuado de estos y de otros programas es responsabilidad de la persona que los maneja, ya que si no se cuenta con los conocimientos teóricos necesarios en la materia, se corre el riesgo de obtener información errónea o de interpretar de manera equivocada los resultados poniendo en riesgo muchos intereses.

Si bien es cierto que este trabajo muestra la realización y aplicación de herramientas de cómputo para la solución de problemas de ingeniería estructural, también es cierto que nunca se pretende desplazar o eliminar el buen juicio y criterio del ingeniero en el manejo, operación e interpretación de los resultados obtenidos, la intención de este trabajo es más bien, motivar al ingeniero para que utilice y aproveche al máximo las herramientas de que dispone para ser, de este modo, un profesional más eficiente y productivo mejorando paulatina pero sustancialmente la calidad de la Ingeniería en nuestro país.

- Análisis de Estructuras, H.H. West, CECSA, Primera Edición, México, 1984.
- Análisis Estructural, Jeffrey Laible, Mc Graw Hill, México, 1995.
- Análisis Estructural, Jack McCormac, Harla, Tercera Edición, México, 1983.
- Basic Concepts of Structural Análisis, Fred W. Beaufait, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1977.
- Mecánica de Materiales, Ferdimand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., Mc Graw Hill, Segunda Edición, Santa Fé de Bogotá Colombia, 1993.
- Mechanics of Materials, Gere y Timoshenko, PWS-KENT, Tercera Edición, United States of America, 1990.
- Métodos Numéricos para Ingenieros, Steven Chapra, Mc Graw-Hill, México, 1988.
- Introducción al comportamiento de los materiales, Demeneghi, Magaña y Sanginés, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1986.
- www.hp.com/calculators/hp-49
- Temario de la asignatura: “Teoría general de las estructuras” del plan de estudios de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.
- Apuntes de la asignatura: “Teoría general de las estructuras” del plan de estudios de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, Impartida por el Ing. Miguel Angel Rodríguez Vega.