

41126  
79



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**ENEP A R A G Ó N**

**MODELACIÓN CINEMÁTICA DE POSICIONAMIENTO  
DE UN ROBOT PARALELO PLANAR TIPO RRR  
USANDO UNA VARIANTE DE LOS  
NÚMEROS COMPLEJOS**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA**  
**( Á R E A M E C Á N I C A )**  
**P R E S E N T A:**  
**PEDRO AGUSTÍN JOJEDA ESCOTO**

**ASESOR: M. en I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ**

**México,**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**2003**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**PAGINACION  
DISCONTINUA**

---

# Agradecimientos

## **A DIOS**

Por concederme inmerecidamente de tus bendiciones, permitirme vivir esta experiencia y hacer día con día mi vida maravillosa.

## **A MIS PADRES**

Porque gracias a su apoyo y consejo, que es el más grande pilar de mi vida, he llegado a realizar la más grande de mis metas. La cual constituye la herencia más valiosa que pudiera recibir. Gracias papas, sin ustedes no sería lo que soy, ni intentaría llegar más lejos. Deseo de todo corazón que mi triunfo profesional lo sientan como suyo. Con todo mi amor, admiración y respeto.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### **A MI HERMANA**

Por todo el apoyo moral y estímulos brindados con infinito amor y confianza y por infundir en mi ese camino que inicio con toda la responsabilidad que representa el término de mi carrera profesional. Gracias por enseñarme a vivir feliz con lo que tengo, por darme tu apoyo y ayuda y cuidarme siempre. Con todo mi amor y admiración.

### **A MIS HERMANOS**

Por apoyarme en esos momentos difíciles en los que más los necesite. Y como muestra de que las metas que uno se fija se pueden lograr. Ustedes cuentan con una gran capacidad para superar todos los obstáculos que se les presenten en esta vida. Sigam siempre hacia adelante.

TESIS CON  
FALLA DE CONTENIDO

### **A ERIKA**

Por darme tu amor durante todo este tiempo, hacer mi vida más feliz y otorgarme toda clase de motivación y apoyo. Gracias por enseñarme a ver el lado bueno y bonito de las cosas malas y a sacar fuerza de mis debilidades. Y para quien, las palabras nunca me serán suficientes para demostrarle todo el amor que siento por ella. Te amo bebe.

### **A MI UNIVERSIDAD**

Por acogerme en tu seno y hacer que perdure en mi tu espíritu libre y soberano con el que me forjaste profesionalmente. Sin olvidar que tenemos la obligación moral de retribuirte en todos los sentidos lo que nos diste: educación y libertad por el conocimiento.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### **A MI TUTOR**

Por ser pieza fundamental en todo el desarrollo y culminación de la presente investigación, pero sobre todo por ser una gran persona. Gracias por inculcar en mi ese espíritu de superación. Con todo mi respeto y admiración.

### **A MIS COMPAÑEROS Y AMIGOS**

Por compartir esta experiencia conmigo, por todos los consejos y apoyo. Y por todo lo que aprendimos y convivimos durante toda nuestra formación profesional. Gracias al Ing. Francisco Cuenca por su valiosa colaboración para la culminación de esta investigación.

Gracias a todas las personas que no menciono y que fueron fundamentales en la elaboración de esta investigación, y dentro de mi vida personal y profesional.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Índice

<b>PRÓLOGO</b>	<b>V</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>VII</b>
<b>OBJETIVOS</b>	<b>VIII</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>XIII</b>
<b>Capítulo 1 Aplicaciones de los robots paralelos</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes del robot paralelo Delta	2
1.1.1 Aplicaciones en la industria	4
1.1.2 Aplicaciones en la Medicina	8
1.1.3 Aplicaciones en máquinas-herramientas	10
1.2 Aplicaciones en la medicina de la plataforma de Stewart	13
<b>Capítulo 2 Modelación cinemática de posicionamiento del robot paralelo: formulación del problema inverso en la configuración no deformada</b>	<b>16</b>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

2.1	Arquitectura del robot paralelo	16
2.2	Caracterización del robot paralelo por medio de cadenas independientes	18
2.3	Caracterización del área de trabajo	20
2.4	Análisis cinemático del robot Rp en la configuración de referencia	22
2.4.1	Configuraciones de análisis de Rp	22
2.4.2	Ecuaciones de posición en la configuración no deformada	23
2.4.3	Sistemas de referencia locales y global	27
2.4.4	Ecuaciones de posición en términos de la base inercial fija	29
2.4.5	Ecuaciones de norma unitaria	30
2.4.6	Relaciones geométricas	31
2.4.7	Relaciones cinemáticas en la plataforma PL	32
2.4.8	Formulación del problema cinemático inverso en la configuración no deformada	34

### **Capítulo 3 Modelación cinemática de posicionamiento del robot paralelo: formulación del problema directo en la configuración no deformada**

**35**

3.1	Algunas consideraciones sobre el problema directo	35
-----	---	----

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

3.2 Ecuaciones de posición de lazo cerrado	36
3.3 Ecuaciones de posición en términos de las bases locales	38
3.4 Ecuaciones de posición en términos de la base canónica	40
3.5 Algunas consideraciones cinemáticas sobre la plataforma PL	40
3.6 Formulación del problema cinemático directo en la configuración no deformada	42

## **Capítulo 4 Análisis del problema cinemático inverso en la configuración deformada**

**43**

4.1 La configuración deformada del robot Rp	43
4.2 Vectores de posición en la configuración deformada	45
4.3 Sistemas de referencia locales en la configuración deformada	47
4.4 Ecuaciones de posición en términos de la base inercial fija	49
4.5 Ecuaciones de norma unitaria	51
4.6 Relaciones geométricas	51
4.7 Relaciones cinemáticas en la plataforma PL	52
4.8 Formulación del problema inverso en la configuración deformada	54

TESIS 0014  
 FALLA DE ENTREN

<b>Capítulo 5</b>	<b>Análisis del problema cinemático directo en la configuración deformada</b>	<b>55</b>
5.1	Ecuaciones de posición de lazo cerrado en la configuración deformada	55
5.2	Ecuaciones de lazo en términos de las bases locales	57
5.3	Ecuaciones de posición en términos de la base canónica	58
5.4	Formulación del problema cinemático directo en la configuración deformada	60
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>61</b>
	<b>APÉNDICE A</b>	
	<b>PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO (ROTACIÓN DERIVADA DE LA OPERACIÓN</b>	
	$\otimes : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	
	<b>63</b>	
	<b>APÉNDICE B</b>	
	<b>PROGRAMA DE SIMULACIÓN Y CONTROL</b>	
	<b>78</b>	
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>91</b>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Prólogo

Este trabajo de tesis tiene el propósito de generar conocimiento escrito para las futuras generaciones de la Ingeniería Mecánica, interesadas en el modelado cinemático de robots paralelos.

Los robots son máquinas altamente especializadas utilizadas para realizar diversas actividades tales como: manejo de materiales, operaciones de soldadura, operaciones médicas, en la industria aeroespacial, actividades submarinas, etc.

Una de las áreas de especialización actual en la robótica es la "robótica de estructuras paralelas" o también conocidos como "robots paralelos". Éstas máquinas superan en ciertas tareas a los manipuladores antropomórficos, pues son considerados "mecanismos – robots", lo cual hace que su estructura sea más rígida y los errores de control sean mínimos.

La gran precisión de los robots paralelos hace que puedan ser aplicados en tareas como: simuladores de vuelo, operaciones médicas y en los procesos de manufactura entre otras.

La modelación cinemática y dinámica de los robots paralelos es más compleja que la modelación de los robots tipo seriales o antropomorfos; esto es debido a la gran cantidad de eslabones que poseen las primeras a su estructura tipo "conjunto de cadenas cerradas".

Recientemente, en un trabajo publicado por (Reyes A., 1998) se han sistematizado y parametrizado cuatro estructuras algebraicas en el espacio vectorial de los números complejos; es decir, dos rotaciones y dos reflexiones. Dichas estructuras algebraicas se usan para modelar la cinemática de multi-cuerpos rígidos.

En el trabajo desarrollado por (Pérez A., 2001) se ha aplicado la rotación usual definida en el espacio de los números complejos, para modelar el problema de posicionamiento de un robot paralelo planar tipo RRR. En este trabajo de tesis se modela el mismo robot usando una rotación variante sistematizada en dicho espacio vectorial.

El objetivo es demostrar que los modelos de posición del robot generados con la rotación variante, son equivalentes con los modelos generados por la rotación usual.

Este trabajo de tesis forma parte de la línea de investigación: "Cinemática y dinámica de sistemas mecánicos" desarrollada en la Sección Mecánica de la DEPMI; División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM y pertenece al acervo bibliográfico – científico del laboratorio de Mecatrónica localizado en dicha sección.

Finalmente, se agradece a todas aquellas personas que contribuyeron a la realización de este trabajo.

TESIS CON  
FALLA DE ORDEN

# Resumen

En este trabajo de tesis se modela el problema de posición de un robot paralelo planar tipo RRR. Para generar el modelo, se utilizó una rotación variante parametrizada y sistematizada en el espacio vectorial de los números complejos. Fueron analizadas dos configuraciones del robot: 1) la no deformada y 2) la deformada. En ambas configuraciones se formularon los problemas cinemáticos directo e inverso. El sistema de ecuaciones para el caso de los problemas directos fue de  $10 \times 10$  y para los problemas inversos fue de  $12 \times 12$ . Se demostró que los modelos del robot generados por la rotación usual y la variante son equivalentes en el sentido cinemático (es decir las configuraciones del robot son las mismas usando las dos rotaciones). Finalmente la programación de los modelos fue realizada en el paquete de cálculo formal Mathematica.

**Palabras clave:** Robots paralelos, cinemática, números complejos, rotaciones.

# Objetivos

A través del presente trabajo de tesis se cumplirán los objetivos siguientes:

- 1) Modelar las ecuaciones de posición de un robot paralelo tipo RRR planar usando una rotación variante de los números complejos.
- 2) Formular los problemas directo e inverso del robot estudiado en las configuraciones no deformada y deformada.
- 3) Probar que las configuraciones del robot obtenidas con la rotación usual de los números complejos son exactamente iguales a las obtenidas con la rotación variante.
- 4) Programar y simular los modelos obtenidos.

En la siguiente tabla se presenta la notación utilizada en este trabajo de tesis:

Nomenclatura	Descripción
$R_p$	Robot paralelo
PL	Plataforma del robot
pot	Punto terminal del robot
$\tau$	Trayectoria de operación
$J_i$	Junta rotacional

$E_i$	Eslabón
T	Tierra del sistema posición de empotramiento de los eslabones
$Ac_i$	Actuador (motor)
$CC_i$	Cadena cinemática
$A_T$	Área de trabajo
k	Punto localizado fuera del área de trabajo
$L_a$	Región del área de trabajo donde se puede definir cualquier trayectoria
$l_i$	Dimensiones principales de los eslabones (medidas de junta a junta)
$C^i$	Circunferencia que caracteriza el rango de acción de una cadena cinemática de robot paralelo
$r_{C^i}$	Radio de la circunferencia $C^i$
$\underline{L}_i$	Vector definido sobre los eslabones
$\underline{\Gamma}_i$	Vector definido sobre los puntos fijos de la base de empotramiento (tierra) y sobre puntos de interés del robot paralelo
$\underline{e}_i$	Sistema inercial o base global sobre la cual se miden las rotaciones de los eslabones
$\underline{e}_i^j$	Base local definida sobre los eslabones que componen el robot
$\theta_i$	Desplazamiento de la configuración no deformada
$\phi_{PL}$	Ángulo fijo de la plataforma medido con respecto de las aristas del triángulo y sus directrices
$\underline{a}_i^j$	Base local deformada definida sobre los eslabones que componen el robot
$\alpha_i$	Desplazamiento de la configuración deformada
$\underline{L}_i'$	Vector definido sobre los eslabones en la configuración deformada

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

$p, q, r, s, t, u, v, w, x$	Números complejos definidos en la configuración no deformada
$P, Q, R, S, T, U, V, W, X$	Números complejos definidos en la configuración deformada
$p_0$	Parámetro del complejo $p$ que relaciona la cantidad de desplazamiento angular
$p_1$	Parámetro del complejo $p$ que relaciona el eje de la rotación
$\alpha_i$	Desplazamiento de la configuración deformada
$R_2(p, q) = \frac{1}{\ p\ } \cdot \overline{p \otimes q}, \forall q \in \mathfrak{R}^2$	Trasformación lineal que representa la rotación variante en el espacio de los números complejos
$\ p\ $	Norma unitaria del complejo (es unitaria puesto que se requiere conservar las distancias principales de los eslabones durante la rotación: condición de rigidez del eslabón)
$\mathfrak{R}^2$	Espacio de números complejos (vistos como parejas ordenadas de números reales)
$\bar{p}$	Conjugado del complejo $p$
$\otimes$	Operación binaria multiplicativa en $\mathfrak{R}^2$
$\bullet$	Operación escalar
$\underline{I}$	Tensor identidad el cual tiene asociada la base canónica
$\underline{w}$	Tensor antisimétrico usado para caracterizar el eje de la rotación.

## Índice de figuras

### Introducción

- I.1 Robot manipulador tipo serie: a) PUMA; b) brazo Stanford.
- I.2 Robot manipulador tipo paralelo: plataforma de Stewart.

- I.3 Diferentes configuraciones del robot totalmente paralelo con tres grados de libertad y cadenas semejantes.
- I.4 Área de trabajo del robot paralelo planar tipo RRR de 3GDL.
- I.5 Robot paralelo tipo RRR planar.

## **Capítulo 1**

- 1.1 Diseño original del robot Delta.
- 1.2 Robot Delta en aplicación.
- 1.3 Instalación Line-Placer de Demareux para el empaquetamiento de bocadillos en una panadería industrial
- 1.4 Ejemplo de aplicación del Triaglidle 5g, para tareas rápidas de manejo. (Se muestra el manejo de pernos para montaje en cabezas cilíndricas ).
- 1.5 Área de trabajo del Triaglidle 5g.
- 1.6 IRB 340 FlexPicker de automatización flexible ABB.
- 1.7 SurgiScope en acción en los Laboratorios Quirúrgicos de Robótica. Humboldt, Universidad de Berlín.
- 1.8 Manipulador esférico Shade de tres grados de libertad.
- 1.9 Robot Hexabot Serie 1.
- 1.10 Hexabot Serie 1. Maquinando una superficie curva.
- 1.11 Robot Crigos en análisis.
- 1.12 Primer prototipo de un robot compacto para la cirugía en huesos (4kg de peso y 6 grados de libertad).
- 1.13 Representación de una cirugía cráneo-encefálica mediante un manipulador paralelo.

## **Capítulo 2**

- 2.1 Arquitectura del robot paralelo.
- 2.2 Cadenas cinemáticas.

- 2.3 Circunferencias en el plano (X, Y).
- 2.4 Configuración de análisis de  $R_p$ .
- 2.5 Vectores de posición asociados con la configuración no deformada.
- 2.6 Sistemas locales y base inercial fija.
- 2.7 Desplazamientos angulares de los eslabones.
- 2.8 Relaciones angulares y de posición definidos sobre la geometría de PL

### **Capítulo 3**

- 3.1 Vectores de posición para la formulación del problema directo.
- 3.2 Bases locales en PL.
- 3.3 Relaciones angulares en PL.

### **Capítulo 4**

- 4.1 Configuración deformada de  $R_p$ .
- 4.2 Vectores de posición en la configuración deformada.
- 4.3 Sistemas locales en la configuración deformada de  $R_p$ .
- 4.4 Desplazamientos angulares en la configuración deformada.
- 4.5 Vectores de posición definidos sobre  $PL'$ .

### **Capítulo 5**

- 5.1 Vectores de posición en la configuración deformada.
- 5.2 Bases locales deformadas sobre  $PL'$ .

# Introducción

Años atrás las máquinas más próximas a lo que hoy en día se entiende como robots, fueron los "teleoperadores", utilizados en la industria nuclear para la manipulación de sustancias radiactivas. Básicamente se trataba de servomecanismos que, mediante sistemas mecánicos, repetían las operaciones que simultáneamente estaba realizando un operador.<sup>1</sup>

Inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial comienzan los primeros trabajos que llevan a la generación de los robots industriales. A finales de los 40 se inician programas de investigación en los laboratorios de *Oak Ridge* y *Argonne National Laboratories* para desarrollar manipuladores mecánicos para elementos radiactivos.<sup>1</sup> Estos manipuladores eran del tipo "maestro-esclavo", diseñados para que reprodujeran fielmente los movimientos de brazos y manos realizados por un operario.

El período comprendido entre 1956 a 1968 se caracterizó por los intentos dirigidos a la búsqueda y modernización de determinados principios generales de la inteligencia (aplicaciones como la traducción automática, la percepción visual, etc.).<sup>2</sup>

A finales de la década de los años 60, los trabajos se encaminaron hacia el desarrollo de sistemas inteligentes de aplicación en la robótica, donde era necesario incorporar una gran cantidad de conocimientos específicos referidos a los problemas que se pretendía resolver con dichas técnicas.<sup>2</sup>

Este proceso marca el inicio del estudio de los llamados sistemas expertos, de cuyo estudio se ocupa la llamada "Ingeniería del conocimiento". Los sistemas expertos se caracterizan fundamentalmente por su capacidad de gestionar conocimientos y constituyen uno de los campos de la Inteligencia Artificial (I.A.) que más desarrollo está teniendo en la actualidad, junto con el tratamiento de los lenguajes y la comprensión de las imágenes.

Los sistemas expertos son capaces de elaborar diagnósticos y extraer conclusiones o dictámenes mediante la aplicación de reglas a partir de hechos que se han introducido como datos. Para abordar el estudio de los problemas planteados por la I.A., ha sido necesario desarrollar una serie de técnicas específicas por ejemplo, representación y modelación del conocimiento.

La I.A. trata temas de estudio que varían con el correr del tiempo y con la maduración de técnicas desarrolladas. Así, por ejemplo, las técnicas que han alcanzado ya un grado suficiente de desarrollo y que se emplean de forma corriente dejan de pertenecer al campo de estudio de la I.A.

A finales de los años 70 se produjo un nuevo giro en el campo de la investigación relacionada con la Inteligencia Artificial: la aparición de robots. Los robots experimentales creados para estos efectos eran automatismos (máquinas automáticas) capaces de recibir información procedente del mundo exterior (sensores, cámaras de televisión, etc.), así como órdenes de un manipulador humano.<sup>2</sup>

De este modo el robot determinaba un plan y ejecutaba las órdenes recibidas mediante el empleo de un modelo del entorno en el que se encontraba. Era, incluso, capaz de prever los resultados de sus acciones y evitar aquellas que luego le resultarían inútiles o perjudiciales.

Estos primeros robots experimentales eran incluso bastante más inteligentes que los robots industriales, y lo eran porque tenían un grado mucho mayor de percepción del entorno.<sup>2</sup>

La idea más ampliamente aceptada de robot está asociada con la existencia de un dispositivo de control digital que, mediante la ejecución de un programa almacenado en memoria, va dirigiendo los movimientos de un brazo o sistema mecánico.

La robótica unida al campo de la automatización ha permitido hacer más eficientes los modernos sistemas de producción. Para logra producir artículos con elevados estándares de calidad, reducir los tiempos de manufactura y lograr altas tasas de producción, es necesario integrar robots industriales en las líneas de producción.<sup>3</sup>

Un robot industrial es un manipulador automático reprogramable y multifuncional, que posee ejes capaces de sujetar materiales, objetos, herramientas mecanismos especializados a través de operaciones programadas para la ejecución de una variedad de tareas.<sup>3</sup> Esta definición se ajusta a la mayoría de las aplicaciones industriales de robots, salvo para las aplicaciones de inspección y para los robots móviles (autónomos) o robots personales.

Actualmente los robots manipuladores son herramientas indispensables en la industria de alta tecnología. El campo de la robótica se enfoca en creación de robots autónomos. Los robots autónomos son programados para lograr un objetivo específico, el cual requiere el procesamiento de cierto conjunto de tareas con diversos niveles de habilidad y conocimiento.<sup>4</sup> Básicamente existen dos tipos de robots manipuladores: el tipo serie y el tipo paralelo.

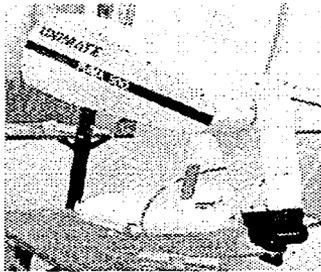
Un robot manipulador tipo "serie" (RMS) es una cadena cinemática abierta cuyos eslabones mecánicos están conectados en serie. Los RMS generalmente tienen un

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

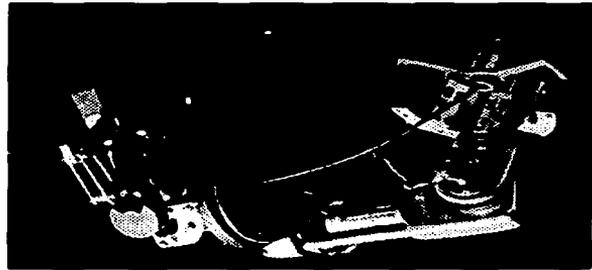
gran alcance, un amplio espacio de trabajo y son capaces de entrar en pequeños espacios debido a su compactibilidad.

Sin embargo, dichos robots tienen una baja rigidez y características dinámicas indeseables, especialmente a alta velocidad y grandes cargas mecánicas; (principalmente debido a su estructura cantiliver).

Si un manipulador integra cadenas abiertas y cerradas es llamado "compuesto".<sup>5</sup> Ejemplos de ambos tipos son: el brazo PUMA y el IRB 2400 ABB como manipuladores seriales; y el Cincinnati Milacron T3 y Bendex MASIO como manipuladores compuestos. En la figura I.1 se ilustran dos ejemplos de RMS.



a)



b)

Figura I.1 Robot manipulador tipo serie: a) PUMA; b) brazo Stanford

Además, la distribución no uniforme de sus actuadores causan que los RMS tengan bajas relaciones esfuerzo/peso. Finalmente, los errores acumulados a través de sus eslabones serie resultan relativamente en grandes errores posicionales en su órgano en terminal.

Un manipulador serial posee gran flexibilidad para realizar diversas tareas, así como un área de trabajo mayor que los robots paralelos. Sin embargo, en operaciones de

maquinado tales como esmerilado y taladrado en las cuales, se requiere de una rigidez alta, los robots seriales no pueden ser aplicados debido a que su estructura está en cantiliver, en cambio, un robot paralelo si puede proporcionar la rigidez necesaria para realizar dichas operaciones.<sup>6</sup>

Un robot manipulador tipo paralelo (RMP) es una cadena cinemática cerrada cuyos eslabones mecánicos forman estructuras geométricas cerradas. Un RMP ampliamente utilizado, es la llamada "plataforma de Stewart (PS)", la cual consiste en dos plataformas acopladas por seis actuadores lineales paralelos (ver figura I.2).

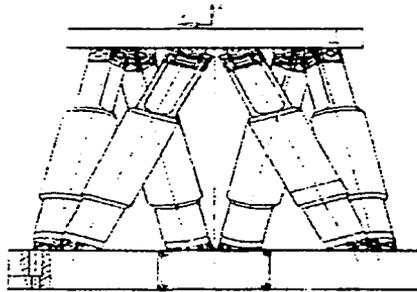


Figura I.2 Robot manipulador tipo paralelo: plataforma de Stewart

El desarrollo de las PS fue propuesto por Stewart en el diseño de simuladores de vuelo y fue motivado por las desventajas que sufren las convencionales antropomórficas cadenas cinemáticas abiertas.<sup>7</sup> Este tipo de cadenas antropomórficas (término referente al brazo y mano con que dichas cadenas son idealizadas) son llamados manipuladores de cadena abierta.

Las PS, cuyos mecanismos son paralelos, han probado ser capaces de posicionarse con gran precisión debido a su estructura altamente rígida y no acumula errores a través de sus elementos. Mas aún, los enlaces de las PS están arreglados de tal

manera que la mayor fuerza suministrada por sus seis actuadores se suman, dando una mucho mayor razón esfuerzo/peso que muchos RPS.

Los robots RMP tipo PS pueden realizar diversas tareas, tales como: corte de metales, manejo de materiales, rectificación de superficies, orientación de antenas parabólicas, simuladores de vuelo y de vehículos terrestres, entre otras.

Un manipulador en el cual, el primero y último eslabón están conectados por un número finito de subcadenas cinemáticas (combinación de cadenas abiertas y/o cerradas), es conocido como "parcialmente paralelo". Si cada subcadena es activada por rotación o traslación de un solo actuador, entonces, el manipulador es llamado "totalmente paralelo".<sup>6,7</sup>

Sin embargo, a diferencia de los RPS, las leyes de control utilizadas no tienen un fuerte fundamento teórico y muchas veces son del tipo heurístico y son más bien algoritmos computacionales; esto se debe a su mayor complejidad de sus modelos dinámicos.

Los manipuladores paralelos generales pueden definirse de la manera siguiente:<sup>8</sup>

*Un manipulador paralelo generalizado es un mecanismo de cadena cinemática en circuito cerrado cuyo cuerpo rígido está eslabonado a la base, a través de varias cadenas cinemáticas independientes.*

Esta definición de manipuladores paralelos generalizados es muy abierta: incluye mecanismos redundantes por ejemplo con más actuadores que el número de grados de libertad de control del cuerpo rígido, también como manipuladores que trabajan en cooperación.

Las siguientes características son muy comunes en los manipuladores paralelos:

- 1) Por lo menos dos cadenas soportan el cuerpo rígido. Cada una de esas cadenas contiene por lo menos un actuador simple. Hay un sensor apropiado hecho a la medida al valor de las variables asociadas con la actuación (ángulo de rotación o movimiento lineal).
- 2) El número de actuadores es el mismo que el número de grados de libertad del cuerpo rígido.
- 3) La movilidad del manipulador es cero cuando los actuadores están bloqueados.

Este tipo de mecanismo es interesante por las razones siguientes:

- i) Un mínimo de dos cadenas permite distribuir la carga en las cadenas.
- ii) El número de actuadores es mínimo.
- iii) El número de sensores necesario para el control del circuito cerrado del mecanismo es mínimo.
- iv) Cuando los actuadores están conectados, el manipulador permanece en su posición; esto es con toda certeza un aspecto de seguridad importante en las aplicaciones, como la robótica médica.

Los robots paralelos pueden definirse de la manera siguiente:<sup>8</sup>

*Un robot paralelo está compuesto de un cuerpo rígido con "n" grados de libertad, y de una base fija, eslabonados juntos por lo menos por dos cadenas cinemáticas independientes. El movimiento tiene lugar a través de "n" actuadores simples.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Se dice que un manipulador paralelo es simétrico si satisface las condiciones siguientes:

- 1) El número de eslabones es igual al número de grados de libertad de la plataforma móvil.
- 2) El tipo y número de juntas en todos los eslabones se colocan en un patrón idéntico.
- 3) El número y situación de las juntas actuantes en todos los eslabones son el mismo.

Existen diferentes configuraciones de robots manipuladores en base al número de grados de libertad que contenga el mecanismo. Para el caso de esta tesis, se estudiará un manipulador paralelo plano de tres grados de libertad tipo RRR (3GDL).

Considere una plataforma móvil dentro del plano, en donde tres grados de libertad, las dos translaciones a lo largo del eje "x" y del eje "y", y una rotación a través de un ángulo  $\theta$  alrededor del eje z, perpendicular al plano, serán controlados.

El robot debe poseer tres cadenas cinemáticas independientes, manejadas por tres actuadores.

Como cada uno de estas cadenas deben unirse a la tierra y con la plataforma móvil al mismo tiempo, entonces se tendrá tres puntos de acoplamiento a tierra y tres a la plataforma móvil. Uno puede considerar por tanto, todavía en una manera general, un plataforma triangular móvil.

Se hará mención de que bajo las condiciones anteriormente descritas, cada una de las cadenas cinemáticas está constituida por dos cuerpos rígidos eslabonados a través de una junta, y que se tiene un total de tres juntas.

Una cadena puede ser descrita por la sucesión de estas tres juntas de la base hacia arriba. Las cadenas pueden presentar las sucesiones siguientes: *RRR*, *RPR*, *RRP*, *RPP*, *PRR*, *PPR*, *PRP* y *PPP* (figura 1.3).<sup>9</sup> La sucesión *PPP* se excluye puesto que las juntas deben permanecer independientes.

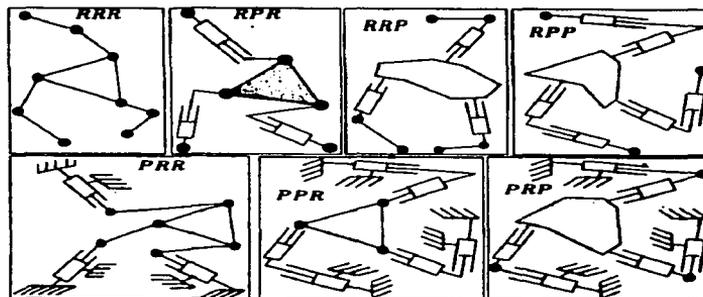


Figura 1.3 Diferentes configuraciones del robot totalmente paralelo con tres grados de libertad y cadenas semejantes

Es notable que con un intercambio simple de la base y la plataforma móvil, los robots de tipo *RRP* presentan equivalencia al *PRR*, y el *RPP* equivalente al *PPR*. Se debe evitar generalmente poner el actuador en el efecto del extremo para aligerar el peso del equipo móvil. También es posible construir robots con tipos diferentes para cada cadena.

El área de trabajo de un manipulador es definida como el volumen de espacio que el extremo final puede alcanzar. Dos diferentes definiciones del área de trabajo son frecuentemente utilizadas.<sup>8</sup>

Una *área de trabajo máxima* es el volumen de espacio dentro del cual cada punto puede ser limitado por el extremo final.<sup>20</sup>

Un *área de trabajo total* es el volumen de espacio dentro del cual cada punto puede ser limitado por el extremo final en todas las posibles orientaciones. Evidentemente, el *área de trabajo total* es un subconjunto del *área de trabajo máxima*.<sup>20</sup>

Los movimientos de los robots paralelos pueden ser limitados por tres diferentes factores: límites mecánicos sobre las juntas pasivas, interferencia entre los eslabones y limitaciones esperadas para los actuadores.

En la figura I.4 se muestra el *área de trabajo* de un robot paralelo planar tipo RRR de 3GDL.

La posición de un robot es usualmente definida por las coordenadas en algún campo de un punto específico del extremo final, llamado *punto de referencia* y junto con un conjunto de parámetros permite definir la orientación del extremo final.<sup>16</sup>

Es posible hablar sobre la *orientación del área de trabajo*, definida como el conjunto de lugares del punto de referencia que quizás pueda ser alcanzado por lo menos por una orientación, entre un conjunto definido por rangos sobre los parámetros de la orientación.<sup>17,19</sup>

Por ejemplo para un robot planar, para el cual la orientación es definida por sólo un ángulo, la orientación del *área de trabajo* de un ángulo determinado será el conjunto de lugares del extremo final, tal que existe por lo menos un ángulo en el rango semejante a la posición definida que puede ser alcanzada por el extremo final.

Otro ejemplo de orientación del *área de trabajo* es el *área de trabajo máxima*: para robots planares el ángulo  $\theta$  será  $\pi$ , mientras que para los robots espaciales la orientación es definida por tres ángulos.<sup>16</sup>

Se definirá la *orientación total del área de trabajo* como el conjunto de lugares del punto de referencia que puede ser alcanzado con todas las orientaciones entre un conjunto definido por rangos sobre los parámetros de la orientación.<sup>17</sup>

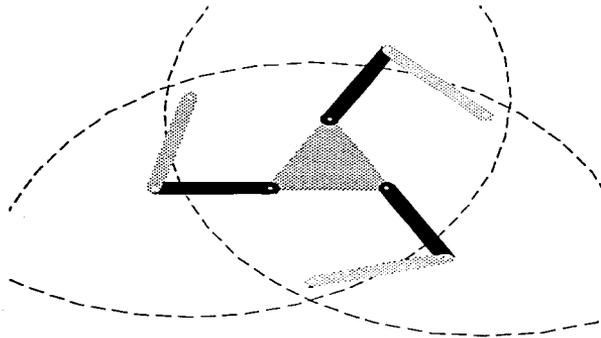


Figura I.4 Área de trabajo del robot paralelo planar tipo RRR de 3GDL

Una clasificación de los robots paralelos puede primero ser hecha de acuerdo con su uso. Generalmente, el volumen del campo de trabajo de los robots serie es mayor que el de los robots paralelos. El volumen del campo de trabajo puede ser incrementado por el uso de dos enfoques:

- 1) El desarrollo de un robot paralelo independiente, posicionado cerca de un robot serie el cual realizaría por sí mismo los movimientos grandes y, si fuera necesario trabajar en cooperación con robot paralelo. En este caso, el manipulador paralelo se llama, por convención, "mano izquierda".

- 2) La asociación de un robot paralelo y un robot serie. A menudo, los últimos tres grados de libertad del robot serie son reemplazados por el robot paralelo que es entonces llamado "muñeca activa".

Ambas soluciones presentan ventajas y desventajas. En el primer caso, la mano izquierda no es considerada para constantes de masa o tamaño, pero los funcionamientos exactos, o aquellos que necesitan el uso de los otros rasgos interesantes del robot paralelo, sólo puede comprenderse dentro de una cierta zona del campo de trabajo.

En el segundo caso, existen importantes condiciones de masa, pero la muñeca activa puede usarse por encima del campo de trabajo entero. Por supuesto, estos dos tipos de uso permiten confiar en la misma arquitectura básica mecánica.

Algunas ventajas y desventajas de los robots seriales y paralelos se enlistan a continuación:

- i) Los robots paralelos poseen una buena rigidez estructural por el hecho de integrar en su arquitectura cadenas cinemáticas cerradas.
- ii) Una consecuencia del punto anterior es la baja inercia que puede ser manejada.
- iii) La precisión de un robot paralelo es mayor que la de un robot serial, pues, los errores sensados no son acumulativos.
- iv) Los robots paralelos poseen áreas de trabajo reducidas debido a dos factores: 1) por interferencia de los propios eslabones en cada movimiento y 2) porque la arquitectura del robot está compuesta de muchas cadenas cinemáticas.

Por otro lado, los modelos cinemáticos de los robots manipuladores seriales difieren de los modelos asociados con los robots paralelos. En los primeros, el planteamiento y solución de la cinemática inversa es relativamente menos complicado que para los segundos. Para el caso del problema directo es lo contrario.

Los robots paralelos requieren de mover sus cadenas para realizar tareas específicas. Para alcanzar un punto por medio del órgano terminal desde una configuración de referencia, los robots paralelos, al igual que los robots seriales, lo pueden hacer moviendo un eslabón o cadena independiente o la totalidad de eslabones.

Cada movimiento tiene diferencias cuantitativas y cualitativas. Por ejemplo, un punto debe ser alcanzado por la activación simultánea de los actuadores, de forma secuencial o por la combinación de ambas. Las regiones de área de trabajo que ocupa el robot para alcanzar el punto, así como las trayectorias que describe el órgano terminal son diferentes para cada clase de movimiento.

Los movimientos de los robots seriales son diferentes a los efectuados por los robots "totalmente paralelos" por las siguientes razones:

- 1) Generalmente los robots seriales integran un actuador por cada eslabón. El movimiento de cada eslabón es controlado de manera independiente.
- 2) Los robots paralelos según su definición dada anteriormente,<sup>8</sup> integran por cada cadena un actuador. Sin embargo, sólo el eslabón conectado al actuador puede ser controlado mientras que el segundo eslabón que compone a la cadena no puede ser controlado.

Dentro de esta tesis se determinarán las ecuaciones referidas a la cinemática directa e inversa del modelo de posicionamiento.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La cinemática inversa consiste en establecer el valor del conjunto articulado correspondiente para la configuración del extremo final. Establecer la cinemática inversa es esencial para el control de la posición de los robots paralelos.<sup>8</sup>

La cinemática directa es la relación que determina la posición del extremo final del robot paralelo para la configuración de su conjunto articulado. Esta relación presenta una obvia y práctica ventaja para el control de la posición del manipulador, pero también, es muy determinante para el control de la velocidad del extremo final.<sup>8</sup>

Determinar la posición del extremo final para el conjunto articulado es equivalente para resolver el sistema de ecuaciones que son obtenidas para la cinemática inversa.

A lo largo del desarrollo de esta tesis se podrá observar que las ecuaciones obtenidas para la cinemática inversa son generalmente más simples que las ecuaciones obtenidas para la cinemática directa.

En esta trabajo de tesis se construyen las ecuaciones de posición de un robot paralelo tipo RRR de movimiento planar como el mostrado en la figura 1.5.

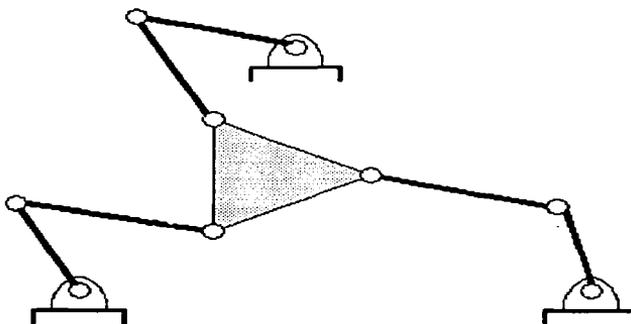


Figura 1.5 Robot paralelo tipo RRR planar

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Para modelar las rotaciones del robot estudiado, se hará uso de una rotación variante definida en el espacio vectorial de los números complejos. Dicha rotación ha sido parametrizada y sistematizada por (Reyes L., 1998).

Son formulados los problemas directo e inverso del robot en dos configuraciones; 1) la no deformada o también conocida como configuración de referencia y 2) la deformada. Esta última configuración es obtenida al rotar rígidamente los eslabones del robot por medio de sus actuadores.

En un trabajo reciente (Jiménez E., 2002) se ha aplicado la rotación variante al modelado de posición de un robot de 2GDL. Se concluyó que las configuraciones de dicho robot obtenidas con dicha variante y con otra rotación generada por la operación usual multiplicación de los complejos en  $\mathfrak{R}^2$ , eran las mismas, o más precisamente dicho, equivalentes.

En otros trabajos (Pérez A., 2001) se ha modelado al robot estudiado en esta tesis usando la rotación usual. El objetivo principal en este trabajo es demostrar que las configuraciones obtenidas al modelar al robot paralelo con la rotación variante son equivalentes a los generados con la rotación usual. Finalmente, los modelos obtenidos serán programados en el paquete de cálculo formal *Mathematica* (Wolfram S., 1992).

El contenido de esta tesis está dividido en 5 capítulos los cuales se resumen a continuación:

En el capítulo 1 se presenta un resumen de las aplicaciones médicas y de manufactura de los robots paralelos.

En el capítulo 2 se modela el robot paralelo en la configuración no deformada y se formula el problema inverso.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En el capítulo 3 se modela el robot paralelo en la configuración no deformada y se formula el problema directo.

En el capítulo 4 se analiza la configuración deformada del robot y se formula el problema inverso.

En el capítulo 5 se modela el robot en la configuración deformada y se formula el problema directo.

Finalmente, se presentan las conclusiones de esta tesis, así como dos apéndices en donde, se describe: 1) la estructura algebraica de la rotación variante de complejos y 2) programas de simulación y control.

# Capítulo 1

## Aplicaciones de los robots paralelos

**Generalidades.** En este capítulo se da una breve descripción de las aplicaciones médicas y de manufactura de los robots paralelos.

Es difícil controlar mecanismos paralelos en tiempo real, como se requiere normalmente, porque la cinemática es más favorable no lineal y, por tanto, no está a menudo en forma cerrada.<sup>21</sup>

Es más, los balanceadores gravitacionales requeridos para el controlador principal presentan una apariencia no visible al usuario. Adelanta el balance estático mediante el control de software, el cual está aumentando la complejidad y el consumo de tiempo del esquema de mando.

Superar estas dificultades, exigen capacidades de hardware rápidas. Alternativamente, pueden usarse sensores extras. Debido al creciente poder de las computadoras disponibles comercialmente, controlar un mecanismo paralelo con eficiencia permite ahora que sus especificaciones puedan ser archivadas y controladas.<sup>22</sup>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La robótica médica es por supuesto, un área de preferencia para los dispositivos paralelos de alto rendimiento. Ellos pueden proporcionarle movimientos libres al cirujano pudiendo controlar la fuerza aplicada, y al terapeuta físico un sistema de rehabilitación confiable.

## **1.1 Antecedentes del robot paralelo Delta**

Fue en la época de los 80's cuando Reymond Clavel (profesor de EPFL, École Polytechnique Fédérale de Lausanne) propone la idea de usar paralelogramos para construir un robot paralelo con tres grados de libertad de translación y uno de rotación.<sup>23</sup>

Contrariamente a opiniones publicadas en otra parte, su inspiración era verdaderamente original y no viene de un mecanismo paralelo patentado por Willard L. Pollard en 1942, quien en ese tiempo no fue conocido por el Profesor Clavel.

El robot Delta es considerado como uno de los robots paralelos que más éxito han tenido en cuanto a su diseño. Varios centenares de este tipo de robot se encuentran en la industria actualmente.

En 1999, el Dr. Clavel es galardonado con el Premio del Robot Dorado, patrocinado por Automatización Flexible ABB, por su innovador trabajo en el robot paralelo Delta.

La idea básica detrás del diseño del robot paralelo Delta (ver figura 1.1) es el uso de paralelogramos. Un paralelogramo ofrece a un eslabón rendimiento para permanecer en una orientación fija con respecto a un eslabón de entrada.

El uso de tales paralelogramos ubica la orientación de la plataforma móvil que sólo permanece con los tres grados de libertad de translación.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Los eslabones de entrada de los tres paralelogramos están montados en palancas de rotación vía juntas de revoluta.

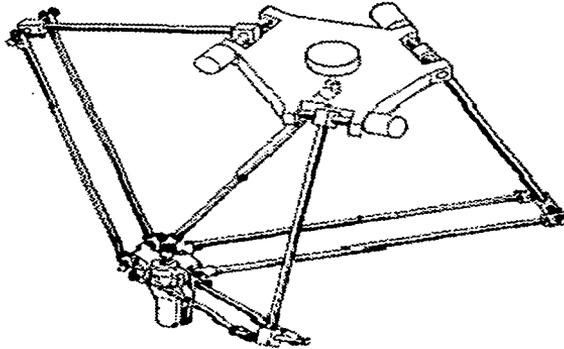


Figura 1.1 Diseño original del robot Delta

Las juntas de revoluta de las palancas de rotación están actuando de dos maneras diferentes: con motores rotatorios (servos de DC o CA) o con actuadores lineales. Finalmente, un cuarto dispositivo se usa para transmitir movimiento rotatorio de la base a un extremo final, montado en la plataforma móvil.<sup>24</sup>

El uso de actuadores de base montados y eslabones de baja masa permite a la plataforma móvil lograr aceleraciones de 50 G en ambientes experimentales y 12 G en aplicaciones industriales.

Esto hace un candidato perfecto al robot Delta para el manejo y operaciones de objetos ligeros. (Figura 1.2).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

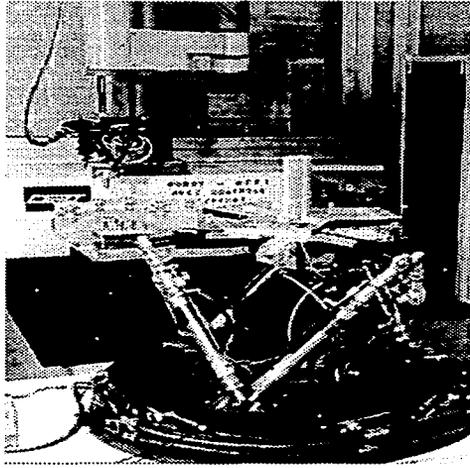


Figura 1.2 Robot Delta en aplicación

### 1.1.1 Aplicaciones en la industria

La historia de mercadotecnia del robot Delta es larga, complicada e intrigante. Todo inició en 1983 cuando los dos hermanos suizos Marc-Olivier y Pascal Demaurex crearon la compañía *Demaurex* basada en la Romanel Sur Lausanne, en Suiza. Después de comprar una licencia para el robot Delta en 1987, su objetivo mayor se convirtió en comercializar el robot paralelo para la industria del empaquetamiento.<sup>25</sup>

Después de varios años, Demaurex tuvo éxito ocupando un lugar mayor en este nuevo y difícil mercado. El producto de la compañía pasó por varias modificaciones. Se comercializaron cuatro versiones de la aplicación bajo los nombres de: Pack-Placer, Line-Placer, Top-Placer y Presto (ver figura 1.3).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

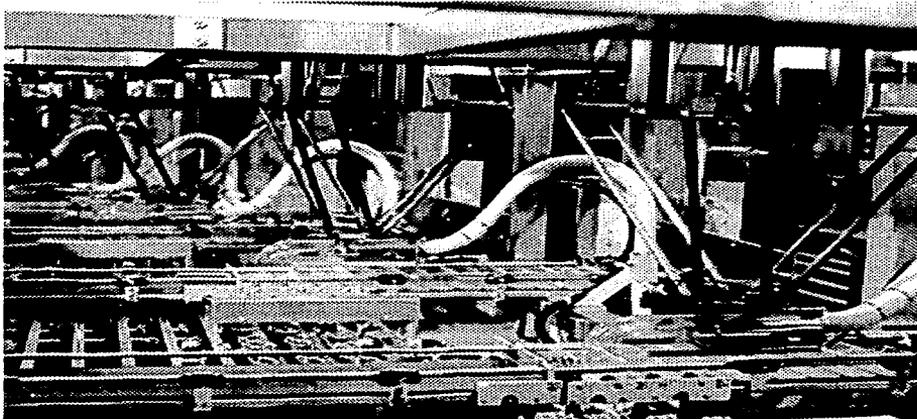


Figura 1.3 Instalación Line-Placer de Demarex para el empaquetamiento de bocadillos en una panadería industrial

Demaurex negoció con la Compañía Alemana GROB-Werke sobre la licencia para producir su modelo propio. El montaje del robot de GROB-Werke GMBH & CO. KG denominado Triaglide 5g basado en la tecnología de la cinemática paralela, permite al robot mejorar su manejo dinámico.<sup>25</sup>

El sistema es básicamente una modificación del diseño del popular robot Delta. La diferencia es que los actuadores son guías de movimiento lineales que están unidos en forma paralela unos de otros. (Figura 1.4).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

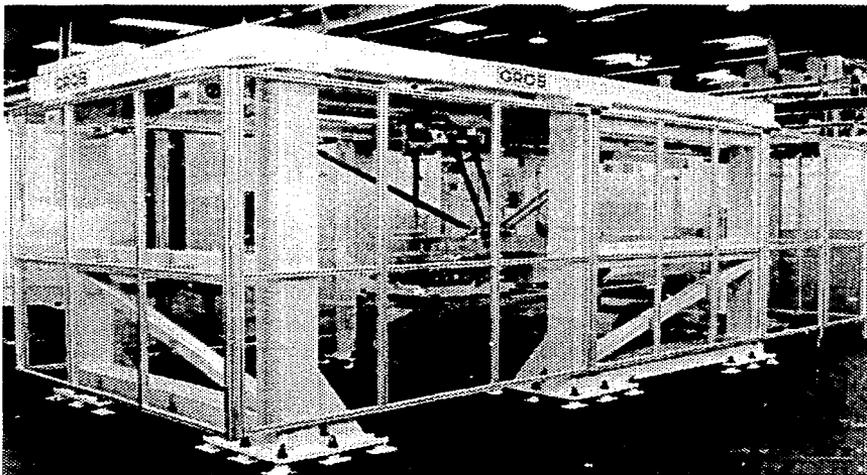


Figura 1.4 Ejemplo de aplicación del Triaglide 5g, para tareas rápidas de manejo.  
(Se muestra el manejo de pernos para montaje en cabezas cilíndricas )

Así, el Triaglide 5g sólo es un manipulador paralelo espacial de tres grados de libertad, sólo para movimientos de translación. Debido a las pequeñas masas movidas, pueden lograrse proporciones sumamente altas de velocidad y aceleración. A continuación se presentan especificaciones básicas de este modelo: <sup>33</sup>

<i>Referencia</i>	<i>Ejes de posición</i>	<i>Cualidad</i>
Viaje del eje	X, Y, Z	2 000, 500, 320 mm
Rango de viaje máximo	X, Y, Z	6 m/s cada eje
Aceleración máxima	X, Y, Z	50 m/s <sup>2</sup> cada eje

Tabla 1.1 Especificaciones básicas del Triaglide 5g.

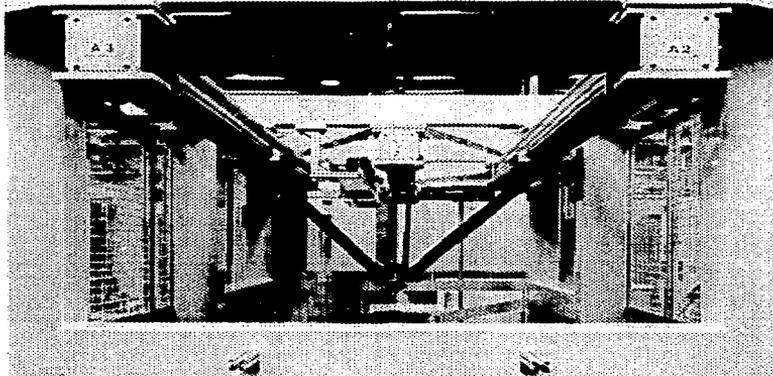


Figura 1.5 Área de trabajo del Triaglide 5g

Automatización Flexible ABB lanzó su robot Delta en 1999 bajo el nombre IRB 340 FlexPicker. Se apuntaron tres sectores de la industria: alimentos, farmacéutica e industrias electrónicas. El FlexPicker está provisto de un sistema integrado de vacío capaz de mover y descargar rápidamente objetos que pesan hasta 1 kg.

El robot es guiado mediante una máquina, con un sistema de visión Cognex y un controlador ABB S4C. Opcionalmente, el robot puede equiparse con un controlador de movimiento y un sistema de visión de Tecnología Avanzada.

Las velocidades logradas son 10 m/s y 3.6 grados por segundo (aproximadamente 150 tomas por minuto); las aceleraciones son arriba de 100 m/s<sup>2</sup> y 1.2 rad/s<sup>2</sup>. (Figura 1.6).

Esta versión del robot está diseñada para tener una gran resistencia a la corrosión en ambientes húmedos y se recomienda su uso especialmente en ambientes altamente limpios.

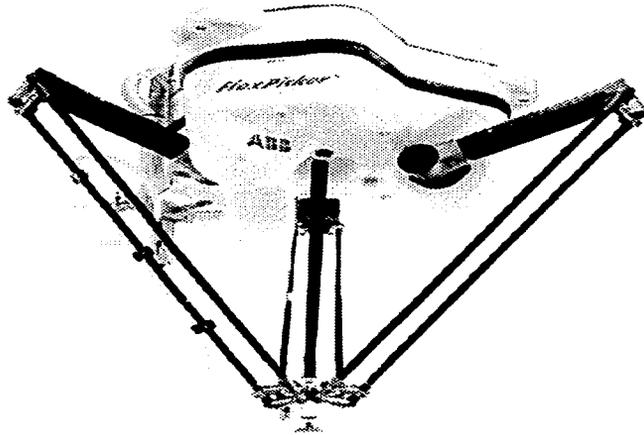


Figura 1.6 IRB 340 FlexPicker de automatización flexible ABB

### 1.1.2 Aplicaciones en la medicina

Dentro de las amplias aplicaciones que se le ha dado al modelo original del robot Delta se encuentra la Industria Médica. La compañía Sueca Elekta, se especializa en el dominio quirúrgico y fabricó un robot Delta que lleva un pesado (20 kg) microscopio (SurgiScope). (ver figura 1.7).<sup>34,35</sup>

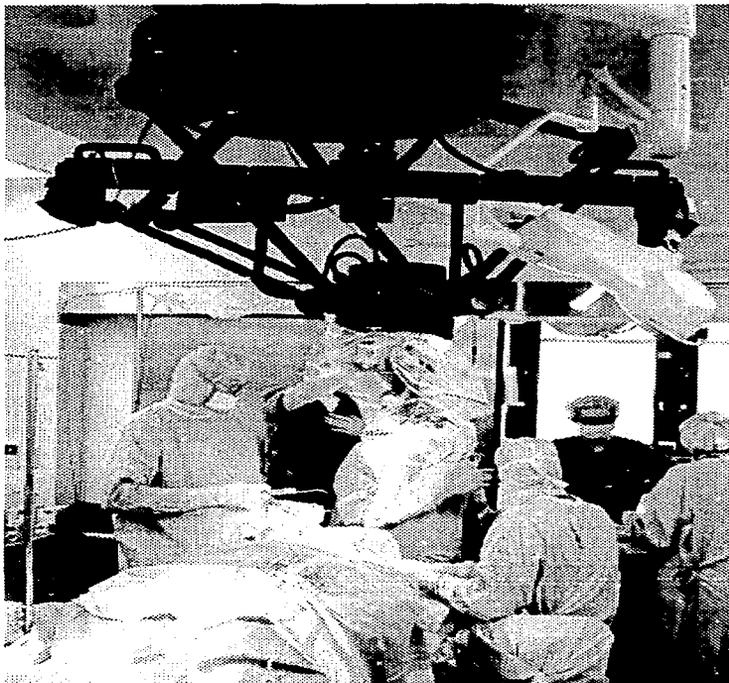


Figura 1.7 SurgiScope en acción en los Laboratorios Quirúrgicos de Robótica.  
Hurnboldt, Universidad de Berlín

Otra posible aplicación de la robótica en la medicina, involucra mecanismos esféricos. Estos presentan la particularidad de tener un punto fijo en su centro que permite colocar la mano del usuario, así pues, se elimina la necesidad del movimiento del brazo.<sup>27</sup>

Es más, los diseños particulares pueden proporcionar rotación ilimitada alrededor de este punto central, permitiendo un área de trabajo muy grande y sólo está limitado

por la baja escala de destreza y las interferencias mecánicas.

Semejante dispositivo se ha probado con éxito en universidades, donde se le conoce con el nombre de Shade (figura 1.8).<sup>28</sup>

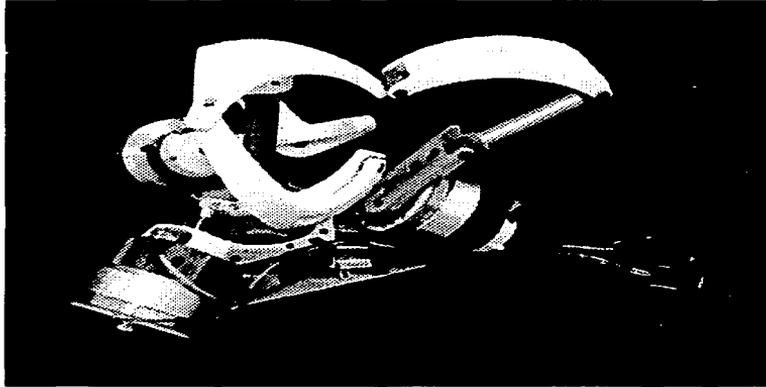


Figura 1.8 Manipulador esférico Shade de tres grados de libertad

### 1.1.3 Aplicaciones en máquinas-herramientas

Dentro de los usos de la robótica en la industria se encuentra la aplicación a las máquinas-herramientas. El dispositivo llamado Hexabot Serie 1 (ver figura 1.9), se puede combinar con un sistema de cabezal rotatorio multiherramientas y puede realizar diversas operaciones de maquinado sobre piezas. El Hexabot, por su facilidad de operación es uno de los manipuladores más usados en la mayoría de las industrias automatizadas (hasta de 5 GDL).<sup>36</sup>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

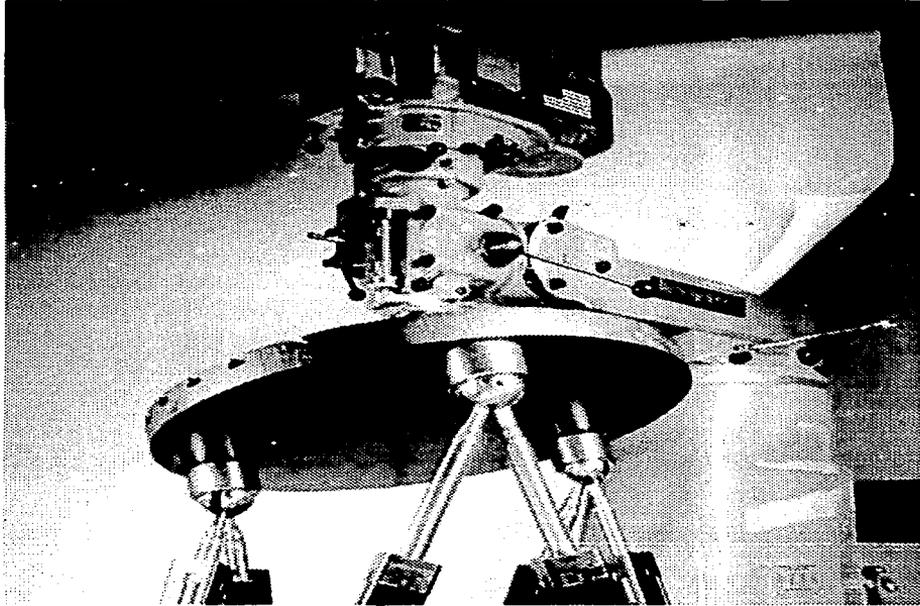


Figura 1.9 Robot Hexabot Serie 1

La estructuración de la programación del robot Hexabot es relativamente simple. Esto permite que se puedan adoptar diversos códigos de control numérico generados bajo el software computacional CAM (Computer Aided Manufacturing) a la programación del robot logrando con esto la fabricación de piezas de alta calidad, mientras que, puede reducirse el número de operaciones requeridas en una máquina de sólo tres ejes (ver figura 1.10).<sup>36</sup>

En lugar de permanecer este dispositivo en un área mayor, se posiciona en un pequeño espacio dentro del área de trabajo. Esto reduce el tiempo, complejidad y

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

errores potenciales de una máquina convencional de cinco ejes.

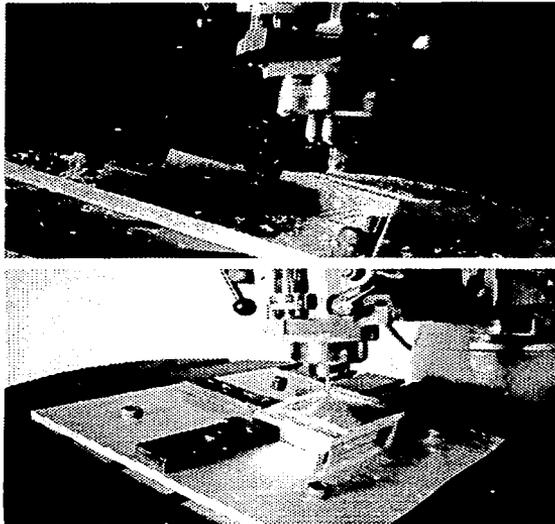


Figura 1.10 Hexabot Serie 1. Maquinando una superficie curva

Esencialmente, el Hexabot ofrece gran velocidad y destreza de un robot a sus usuarios con la exactitud y rigidez de una máquina-herramienta. El Hexabot puede transformarse en un dispositivo más grande o más pequeño dependiendo de la aplicación que se le dará. No se limita a cualquier restricción de peso o de posición. Otras aplicaciones en las que se incluyen el uso de este manipulador son: <sup>36</sup>

- Accesorios flexibles para soldadura.
- Líneas del traslado.
- Posicionamiento de precisión.
- Alta velocidad en aplicaciones de empaquetamiento.

- Maquinado de formas complejas.
- Soldadura programable
- Movimiento para animación, exhibiciones, etc.

## 1.2 Aplicaciones en la medicina de la plataforma de Stewart

Un proyecto europeo, el robot Crigos (ver figura 1.11), una sigla que especifica: Robot Compacto para la guía de imagen en cirugía ortopédica; es básicamente una plataforma de Gough-Stewart que proporciona al cirujano una herramienta de alto rendimiento durante la cirugía en huesos.<sup>37</sup>

Las plataformas de Gough-Stewart también son usadas por el CAIP en la Universidad de Rutgers para crear un sistema de rehabilitación del tobillo para el uso doméstico.

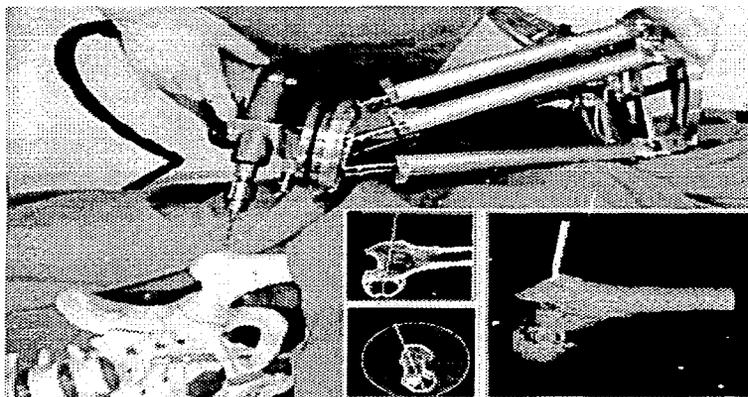


Figura 1.11 Robot Crigos en análisis

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La plataforma de Gough–Stewart es usada también en aplicaciones de manejo de materiales en instalaciones nucleares. La Universidad de Colorado ha utilizado la plataforma de programación del robot Gough–Stewart para generar una interface que permita manejar datos de volúmenes multidimensionales.

Las relaciones exactas y geometrías de la planificación quirúrgica y su reproducción exacta dentro del diseño, juegan un papel muy importante.

Para lograr estos objetivos, se ha hecho común la introducción de dispositivos robóticos para dar otra alternativa a la cirugía exacta (figura 1.12).<sup>37</sup>

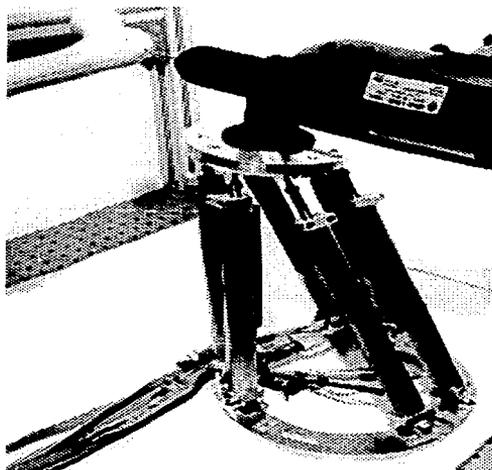


Figura 1.12 Primer prototipo de un robot compacto para la cirugía en huesos (4kg de peso y 6 grados de libertad)

La idea básica de la cirugía asistida por computadora es ayudar a que el cirujano defina una planificación quirúrgica exacta por medio de imágenes y, entonces ayudar a realizar el planteamiento gracias al uso de sistemas guiados por robots.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Los beneficios potenciales de cirugía asistida por computadora son: reducción de errores, mejora de la exactitud en la cirugía, seguridad y confiabilidad de los planteamientos médicos, estandarización, tiempo más corto de intervención y rápido regreso a las actividades normales para los pacientes, así como la reducción de exposición de la radiografía del personal médico.

Sin embargo, la introducción de tecnología de la robótica en la sala de operaciones debe hacerse según las especificaciones médicas exactas (figura 1.13).<sup>38</sup>

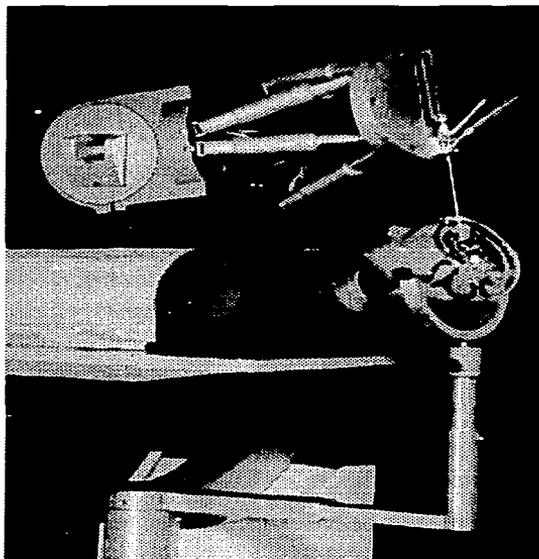


Figura 1.13 Representación de una cirugía cráneo-encefálica mediante un manipulador paralelo

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Capítulo 2

## Modelación cinemática de posicionamiento del robot paralelo: formulación del problema inverso en la configuración no deformada

**Introducción.** En este capítulo se define la arquitectura del robot paralelo motivo de estudio en este trabajo de tesis. Posteriormente, se utilizará la transformación lineal  $R_2 : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en el apéndice A, para modelar el multicuerpo en la configuración de referencia o también conocida como configuración "no deformada". Finalmente, se formula el problema cinemático inverso y se plantea el sistema de ecuaciones e incógnitas con el cual se solucionará el problema inverso.

### 2.1 Arquitectura del robot paralelo

El multicuerpo a modelar en este trabajo de tesis, está compuesto por 8 eslabones rígidos incluyendo la tierra del sistema. Dichos eslabones se articulan entre sí por medio de juntas de revolución como se muestra en la figura 2.1.

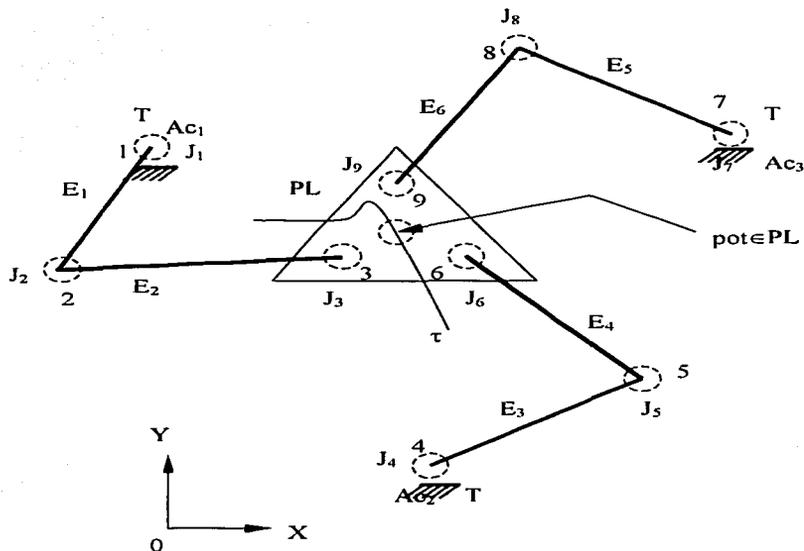


Figura 2.1 Arquitectura del robot paralelo

De acuerdo con la figura anterior, T es el eslabón llamado "tierra del sistema" (eslabón de empotramiento que fija al robot a una base fija) y el multicuerpo en estudio denominado  $R_p$ , está conectado a T por medio de las juntas  $J_1$ ,  $J_4$  y  $J_7$  con los eslabones  $E_1$ ,  $E_3$  y  $E_5$ . Dichas conexiones se pueden representar a través de las siguientes intersecciones:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & J_1 = T \cap E_1 \\
 2) \quad & J_4 = T \cap E_3 \\
 3) \quad & J_7 = T \cap E_5
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por otro lado, los eslabones  $E_2$ ,  $E_4$  y  $E_6$  están articulados con los eslabones  $E_1$ ,  $E_3$  y

$E_5$  por medio de las juntas rotacionales  $J_2$ ,  $J_5$  y  $J_8$ , esto es:

- 1)  $J_2 = E_1 \cap E_2$  (2.2)
- 2)  $J_5 = E_3 \cap E_4$
- 3)  $J_8 = E_5 \cap E_6$

Los eslabones  $E_2$ ,  $E_4$  y  $E_6$  cierran la cadena cinemática al conectarse, por medio de las juntas  $J_3$ ,  $J_6$  y  $J_9$ , con el eslabón PL llamado "plataforma móvil" (ver figura 2.1); esto es:

- 1)  $J_3 = E_2 \cap PL$  (2.3)
- 2)  $J_6 = E_4 \cap PL$
- 3)  $J_9 = E_6 \cap PL$

El multicuerpo  $R_p$  es movido por tres actuadores llamados  $Ac_1$ ,  $Ac_2$  y  $Ac_3$  localizados en las juntas  $J_1$ ,  $J_4$  y  $J_7$  como se muestra en la figura 2.1. Finalmente, el punto  $Pot \in PL$  ubicado en el centroide del eslabón PL, estará obligado a describir una trayectoria  $\tau$  definida en el plano cartesiano.

## 2.2 Caracterización del robot paralelo por medio de cadenas independientes

Un robot paralelo, como el mostrado en la figura 2.1, está compuesto por cadenas cinemáticas independientes movidas por un solo actuador. Para el caso del robot  $R_p$  motivo de estudio, dichas cadenas cinemáticas son las siguientes:

- 1)  $CC_1 = T \cup E_1 \cup E_2 \cup PL$  (2.4)
- 2)  $CC_2 = T \cup E_3 \cup E_4 \cup PL$
- 3)  $CC_3 = T \cup E_5 \cup E_6 \cup PL$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por otro lado, la intersección entre las cadenas  $CC_1$ ,  $CC_2$  y  $CC_3$  asociadas con el robot  $R_p$ , se presenta en el eslabón  $PL$ ; esto es:

$$PL = CC_1 \cap CC_2 \cap CC_3 \quad (2.5)$$

Cada cadena cinemática se mueve independientemente por medio de los actuadores  $Ac_1$ ,  $Ac_2$  y  $Ac_3$ ; es decir:

- 1)  $CC_1 \xleftrightarrow{\mu} Ac_1$
  - 2)  $CC_2 \xleftrightarrow{\mu} Ac_2$
  - 3)  $CC_3 \xleftrightarrow{\mu} Ac_3$
- (2.6)

Aquí,  $\xleftrightarrow{\mu}$  es una relación de movimiento definida sobre las cadenas cinemáticas. La figura 2.2 muestra dichas cadenas.

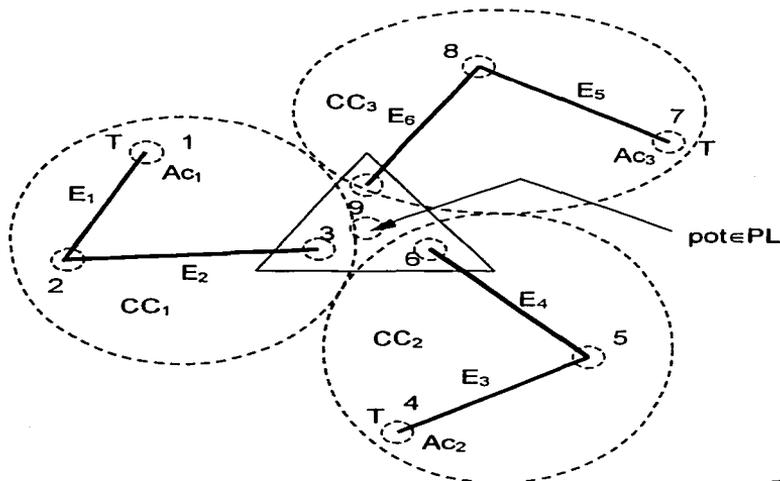


Figura 2.2 Cadenas cinemáticas

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

### 2.3 Caracterización del área de trabajo

En esta sección se caracteriza el área de trabajo llamada  $A_T$  relacionada con el robot paralelo  $R_p$  motivo de estudio.

Considere el sistema cartesiano  $(X, Y)$  mostrado en la figura 2.3. Sean  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8} \in \mathcal{R}^+$  las dimensiones principales (medidas de junta a junta) de los eslabones  $E_1, E_2, E_3$  y  $E_4, E_5$  y  $E_6$ .

Supóngase que la geometría asociada con el eslabón PL es un triángulo equilátero tal que:  $l_{pot,3} \equiv l_{pot,6} \equiv l_{pot,9}$ . Sean  $C^1, C^2$  y  $C^3$  tres circunferencias definidas en  $(X, Y)$  con centro en los puntos (1), (4) y (7), respectivamente.

El radio máximo de dichas circunferencias se definen de la manera siguiente:

- 1)  $r_{c1} = l_{2,1} + l_{3,2} + l_{pot,3}$  (2.7)
- 2)  $r_{c2} = l_{5,4} + l_{6,5} + l_{pot,6}$
- 3)  $r_{c3} = l_{8,7} + l_{9,8} + l_{pot,9}$

La figura 2.3 muestra las circunferencias descritas anteriormente.

El área de trabajo  $A_T$  relacionada con el robot  $R_p$  motivo de estudio se caracteriza de la manera siguiente:

$$A_T = \{ pot \in A_T / (X_{pot}, Y_{pot}) \in C^1 \cap C^2 \cap C^3 \} \quad (2.8)$$

Nótese que el punto  $k \notin A_T$  (ver figura 2.3) y, por tanto, dicho punto no podrá ser alcanzado o superpuesto por el punto  $pot \in PL$ . Cabe señalar que si "La" es el conjunto de lugares geométricos por los cuales el punto  $pot \in PL$  se desplazará, entonces la siguiente relación debe ser satisfecha:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$L_a \subseteq A_T$$

(2.9)

Finalmente, si:

$$M = \lim_{A_T \rightarrow 0} C^1 \cap C^2 \cap C^3$$

(2.10)

entonces  $A_T$  es un punto, y el robot no tendrá movilidad ( $M$ ).

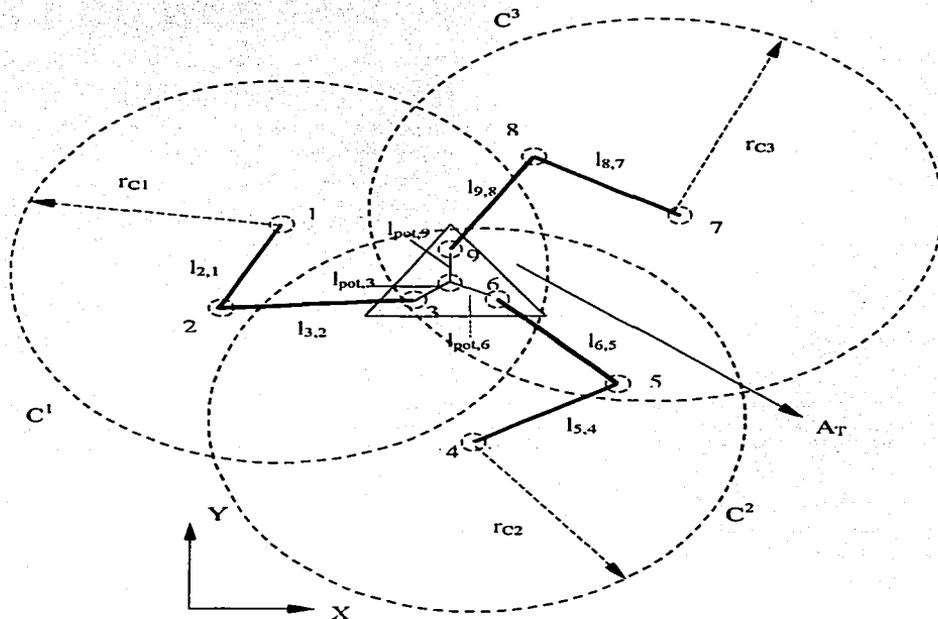


Figura 2.3 Circunferencias en el plano (X, Y)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2.4 Análisis cinemático del robot $R_p$ en la configuración de referencia

En esta sección se analizará la configuración de referencia o también conocida como "configuración no deformada" asociada con el robot  $R_p$  motivo de estudio.

El objetivo es construir las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento que permitan determinar las coordenadas del punto  $pot \in PL$  y la orientación de  $PL$  medidas desde el origen "o" del sistema cartesiano  $(X, Y)$ .

Asimismo, dichas ecuaciones deben integrar los desplazamientos angulares relacionados con las posiciones de los eslabones que componen a  $R_p$ .

### 2.4.1 Configuraciones de análisis de $R_p$

La configuración de referencia es la configuración inicial del robot; es decir, es la posición inicial que guardan los eslabones antes del movimiento de  $R_p$ . Dicha configuración es también llamada tradicionalmente "HOME".

Por otro lado, supóngase que  $R_p$  ha sido movido de la configuración inicial a una nueva configuración por medio de los actuadores  $Ac_1$ ,  $Ac_2$  y  $Ac_3$  (o por cualesquiera de ellos).

La posición que guardan los eslabones de  $R_p$  una vez movido es llamada "configuración deformada". La figura siguiente muestra ambas configuraciones:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

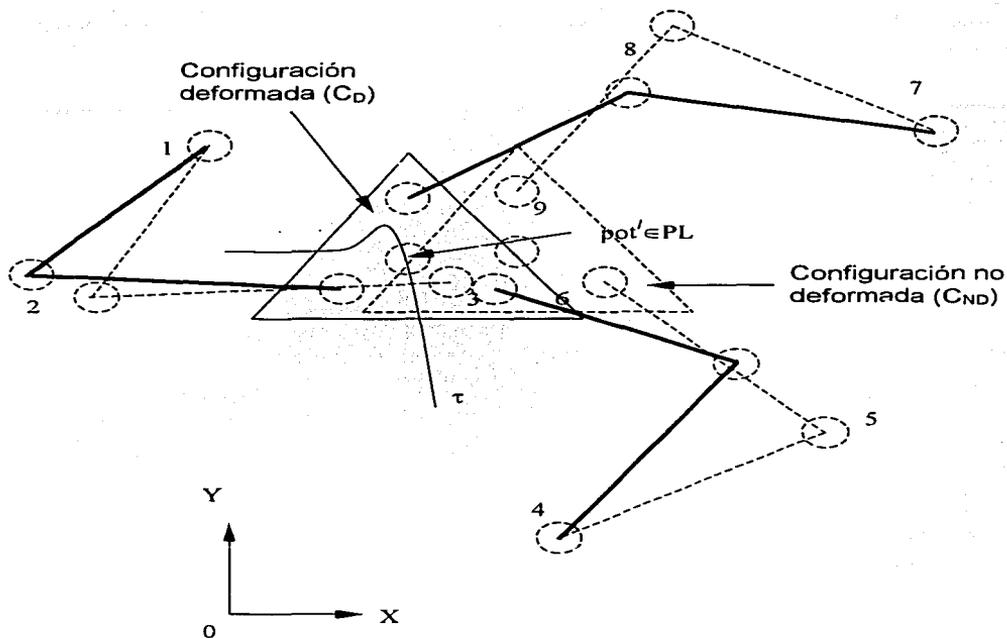


Figura 2.4 Configuración de análisis de  $R_p$

Cabe señalar que en este trabajo de tesis no se analizará la forma en que el robot  $R_p$  alcanza  $C_D$  de  $C_{ND}$ , simplemente se caracterizarán dichas configuraciones.

## 2.4.2 Ecuaciones de posición en la configuración no deformada

El objetivo en esta sección es construir las ecuaciones que permitan determinar las coordenadas del punto  $pot \in PL$  medidas desde el punto "0" mostrado en la figura

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

2.5. Para ello, se asociarán vectores de posición sobre los eslabones que componen  $R_p$  y vectores de posición relativos al punto "0". Dichos vectores se muestran en la figura 2.5.

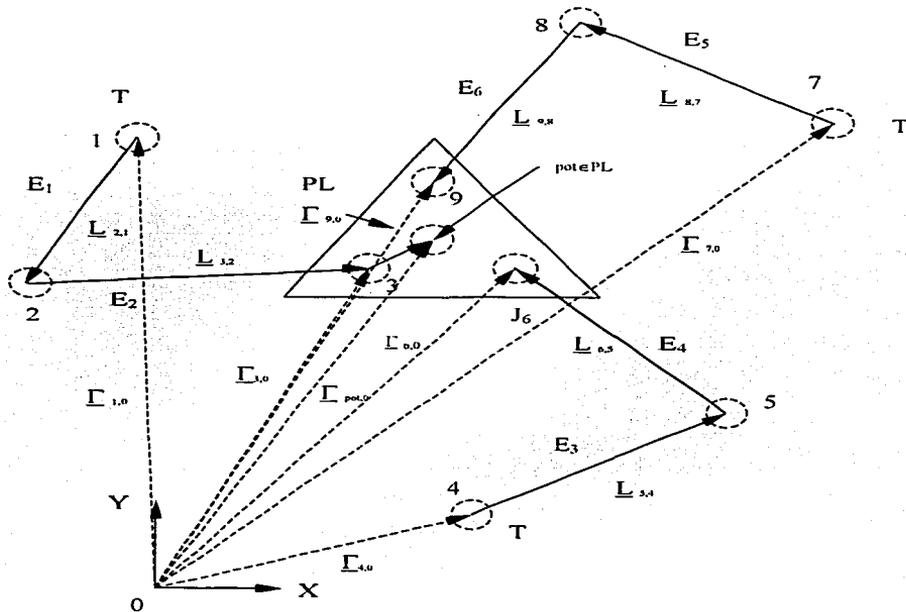


Figura 2.5 Vectores de posición asociados con la configuración no deformada

De acuerdo con la figura anterior, los vectores de posición relacionados con los eslabones de  $R_p$ , al fijar la configuración no deformada en el tiempo, se pueden representar de la manera siguiente:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- 1)  $\underline{L}_{2,1} = (2) - (1)$  (2.11)
- 2)  $\underline{L}_{3,2} = (3) - (2)$
- 3)  $\underline{L}_{5,4} = (5) - (4)$
- 4)  $\underline{L}_{6,5} = (6) - (5)$
- 5)  $\underline{L}_{8,7} = (8) - (7)$
- 6)  $\underline{L}_{9,8} = (9) - (8)$
- 7)  $\underline{L}_{pot,3} = (pot) - (3)$

Por otro lado, los vectores de posición de origen en los puntos "0" y "1" se representan de la manera siguiente:

- 1)  $\underline{\Gamma}_{1,0} = (1) - (0)$  (2.12)
- 2)  $\underline{\Gamma}_{3,0} = (3) - (0)$
- 3)  $\underline{\Gamma}_{4,0} = (4) - (0)$
- 4)  $\underline{\Gamma}_{6,0} = (6) - (0)$
- 5)  $\underline{\Gamma}_{7,0} = (7) - (0)$
- 6)  $\underline{\Gamma}_{pot,0} = (pot) - (0)$
- 7)  $\underline{\Gamma}_{pot,1} = (pot) - (1)$

Las coordenadas del punto  $pot \in PL$  medidas desde "0" se pueden obtener mediante la siguiente expresión vectorial:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} + \underline{L}_{pot,3} \quad (2.13)$$

Sin embargo, dicha ecuación no considera o más precisamente, no relaciona los vectores asociados con los eslabones  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$  y  $E_6$ .

Considere ahora el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\Gamma}_{3,0} &= \underline{\Gamma}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} \\ 2) \quad \underline{\Gamma}_{6,0} &= \underline{\Gamma}_{4,0} + \underline{L}_{5,4} + \underline{L}_{6,5} \\ 3) \quad \underline{\Gamma}_{9,0} &= \underline{\Gamma}_{7,0} + \underline{L}_{8,7} + \underline{L}_{9,8} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nótese que el sistema anteriormente descrito, relaciona todos los puntos de interés definidos en  $R_p$ ; esto es:

- i) Los vectores  $\underline{\Gamma}_{3,0}$ ,  $\underline{\Gamma}_{6,0}$ ,  $\underline{\Gamma}_{9,0} \in \mathcal{R}^2$  localizan desde "0" los puntos donde se conecta PL con los eslabones  $E_2$ ,  $E_4$  y  $E_6$ .
- ii) Los vectores  $\underline{\Gamma}_{1,0}$ ,  $\underline{\Gamma}_{4,0}$ ,  $\underline{\Gamma}_{7,0} \in \mathcal{R}^2$  determinan las coordenadas de los puntos de articulación de  $R_p$  con la tierra "T" del sistema.
- iii) Los vectores  $\underline{L}_{2,1}$ ,  $\underline{L}_{3,2}$ ,  $\underline{L}_{5,4}$ ,  $\underline{L}_{6,5}$ ,  $\underline{L}_{8,7}$ ,  $\underline{L}_{9,8} \in \mathcal{R}^3$  son los vectores de posición asociados con los eslabones  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$  y  $E_6$ .

Es posible afirmar que cada expresión (2.14) está relacionada con el movimiento de una cadena cinemática independiente asociada con el robot  $R_p$  y que todo el sistema de expresiones (2.14) relaciona cinemáticamente, todas las cadenas.

Por otro lado, de acuerdo con (Pérez A., 2001), las siguientes relaciones se satisfacen:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- 1) Conocidos  $\theta_{pot} \in \mathfrak{R}$  y  $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$  se conocen los vectores  $\Gamma_{3,0}$ ,  $\Gamma_{6,0}$ ,  $\Gamma_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$ .
- 2) Conocidos los vectores  $\Gamma_{3,0}$ ,  $\Gamma_{6,0}$ ,  $\Gamma_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$  se conocen  $\theta_{pot} \in \mathfrak{R}$  y  $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$ .

Aquí,  $\theta_{pot} \in \mathfrak{R}$  es la orientación de la plataforma PL relativa al eje X. Las relaciones descritas anteriormente se explicitarán en las secciones posteriores.

### 2.4.3 Sistemas de referencia locales y global

Las expresiones (2.14) solo proporcionan información relativa a las coordenadas de puntos de interés. El objetivo ahora es asociar sistemas locales de referencia sobre los eslabones que componen al robot y estudiar las relaciones angulares entre dichos sistemas y otro llamado "inercial" el cual estará localizado en el origen de coordenadas, según se muestra en la figura 2.6.

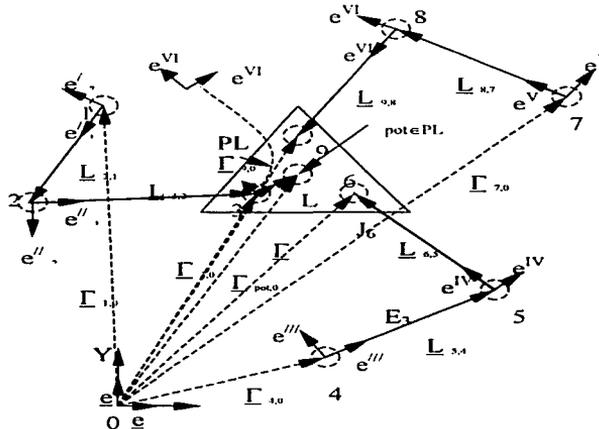


Figura 2.6 sistemas locales y base inercial fija

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Note en la figura anterior que las bases locales  $\underline{e}_1^I, \underline{e}_1^{II}, \underline{e}_1^{III}, \underline{e}_1^{IV}, \underline{e}_1^V, \underline{e}_1^{VI}, \underline{e}_1^{VII} \in \mathfrak{R}^2$  están localizadas sobre las juntas  $J_1, J_2, J_4, J_5, J_7, J_8$  y  $J_3$ . Además, uno de los componentes de dichas bases, está orientado en la misma dirección de los vectores relacionados con los eslabones que componen al robot  $R_p$  motivo de estudio.

De acuerdo con la figura 2.6, los vectores de posición  $\underline{L}_{2,1}, \underline{L}_{3,2}, \underline{L}_{5,4}, \underline{L}_{6,5}, \underline{L}_{8,7}, \underline{L}_{9,8}, \underline{L}_{pot,3} \in \mathfrak{R}^2$  se pueden escribir en términos de las bases locales; esto es:

$$1) \underline{L}_{2,1} = l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I \quad (2.15)$$

$$2) \underline{L}_{3,2} = l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II}$$

$$3) \underline{L}_{5,4} = l_{5,4} \cdot \underline{e}_1^{III}$$

$$4) \underline{L}_{6,5} = l_{6,5} \cdot \underline{e}_1^{IV}$$

$$5) \underline{L}_{8,7} = l_{8,7} \cdot \underline{e}_1^V$$

$$6) \underline{L}_{9,8} = l_{9,8} \cdot \underline{e}_1^{VI}$$

$$7) \underline{L}_{pot,3} = l_{pot,3} \cdot \underline{e}_1^{VII}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Aquí,  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{pot,3} \in \mathfrak{R}^+$  son las distancias principales de los eslabones que componen al robot  $R_p$ . Al utilizar las expresiones (2.15), las ecuaciones de posición (2.14) se representan en términos de las bases locales de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{3,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II} \quad (2.16)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{6,0} = \underline{\Gamma}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \underline{e}_1^{III} + l_{6,5} \cdot \underline{e}_1^{IV}$$

$$3) \underline{\Gamma}_{9,0} = \underline{\Gamma}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \underline{e}_1^V + l_{9,8} \cdot \underline{e}_1^{VI}$$

#### 2.4.4 Ecuaciones de posición en términos de la base inercial fija

Las bases locales asociadas con los eslabones que componen al robot  $R_p$  son, de acuerdo con (Reyes L., 1998), rotaciones rígidas de la base inercial fija  $e_j = \{e_1, e_2\}$  localizada en el origen "0" de coordenadas. Dichas rotaciones se pueden representar por medio de la transformación lineal  $R_2(p, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $p \in \mathfrak{R}^2$  fijo, definida por:

$$R_2(p, q) = \frac{1}{\|p\|} \bullet \overline{p \otimes q}, \quad \forall q \in \mathfrak{R}^2 \quad (2.17)$$

Aquí,  $p, q \in \mathfrak{R}^2$  son dos números complejos de norma unitaria. Dicha transformación, de acuerdo con el apéndice A de este trabajo, es una rotación. Por otro lado, la operación,

$$\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$$

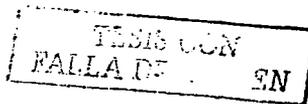
definida por:

$$(a, b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \quad (2.18)$$

es una operación multiplicativa y,

$$\overline{(a, b) \otimes (\alpha, \beta)} = (-a\alpha + b\beta, -a\beta - b\alpha) \quad (2.19)$$

es el conjugado de dicha operación. Por tanto, las rotaciones rígidas de la base inercial  $e_j = \{e_1, e_2\}$  sobre las bases locales se pueden representar por medio de la expresión (2.17); esto es:



$$1) \underline{e}_1^I = R_2(p, \underline{e}_1) = \overline{p \otimes \underline{e}_1} \quad (2.20)$$

$$2) \underline{e}_1^{II} = R_2(q, \underline{e}_1) = \overline{q \otimes \underline{e}_1}$$

$$3) \underline{e}_1^{III} = R_2(r, \underline{e}_1) = \overline{r \otimes \underline{e}_1}$$

$$4) \underline{e}_1^{IV} = R_2(s, \underline{e}_1) = \overline{s \otimes \underline{e}_1}$$

$$5) \underline{e}_1^V = R_2(t, \underline{e}_1) = \overline{t \otimes \underline{e}_1}$$

$$6) \underline{e}_1^{VI} = R_2(u, \underline{e}_1) = \overline{u \otimes \underline{e}_1}$$

$$7) \underline{e}_1^{VII} = R_2(v, \underline{e}_1) = \overline{v \otimes \underline{e}_1}$$

Aquí,  $p, q, r, s, t, u, v \in \mathfrak{R}^2$  son números complejos de norma unitaria relacionadas con las rotaciones de la base inercial. Por tanto, las ecuaciones de posición (2.16) se pueden escribir en términos de la base inercial de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{3,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{\overline{p \otimes \underline{e}_1}\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{q \otimes \underline{e}_1}\} \quad (2.21)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{6,0} = \underline{\Gamma}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{\overline{r \otimes \underline{e}_1}\} + l_{6,5} \cdot \{\overline{s \otimes \underline{e}_1}\}$$

$$3) \underline{\Gamma}_{9,0} = \underline{\Gamma}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{\overline{t \otimes \underline{e}_1}\} + l_{9,8} \cdot \{\overline{u \otimes \underline{e}_1}\}$$

## 2.4.5 Ecuaciones de norma unitaria

De acuerdo con (Reyes L., 1998), los complejos  $p, q, r, s, t, u, v \in \mathfrak{R}^2$  son de norma unitaria; esto es:

$$1) p = \{p_0, p_1\}; \quad p_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } p_1 \in \mathfrak{R}; \quad \|p\| = 1; \quad p_0^2 + p_1^2 = 1 \quad (2.22)$$

$$2) q = \{q_0, q_1\}; \quad q_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } q_1 \in \mathfrak{R}; \quad \|q\| = 1; \quad q_0^2 + q_1^2 = 1$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- 3)  $r = \{r_0, r_1\}$ ;  $r_0 \in \mathfrak{R}$  y  $r_1 \in \mathfrak{R}$ ;  $\|r\| = 1$ ;  $r_0^2 + r_1^2 = 1$
- 4)  $s = \{s_0, s_1\}$ ;  $s_0 \in \mathfrak{R}$  y  $s_1 \in \mathfrak{R}$ ;  $\|s\| = 1$ ;  $s_0^2 + s_1^2 = 1$
- 5)  $t = \{t_0, t_1\}$ ;  $t_0 \in \mathfrak{R}$  y  $t_1 \in \mathfrak{R}$ ;  $\|t\| = 1$ ;  $t_0^2 + t_1^2 = 1$
- 6)  $u = \{u_0, u_1\}$ ;  $u_0 \in \mathfrak{R}$  y  $u_1 \in \mathfrak{R}$ ;  $\|u\| = 1$ ;  $u_0^2 + u_1^2 = 1$
- 7)  $v = \{v_0, v_1\}$ ;  $v_0 \in \mathfrak{R}$  y  $v_1 \in \mathfrak{R}$ ;  $\|v\| = 1$ ;  $v_0^2 + v_1^2 = 1$

Cabe señalar que la norma unitaria del complejo  $p \in \mathfrak{R}^2$  se obtiene de la identidad  $\text{Cos}^2 \theta + \text{Sen}^2 \theta = 1$  (ver apéndice A), y su interpretación física es: "la rotación de norma unitaria preserva distancia y ángulo".

## 2.4.6 Relaciones geométricas

Las relaciones geométricas entre los componentes de los complejos  $p, q, r, s, t, u, v \in \mathfrak{R}^2$  y las rotaciones son, de acuerdo con el apéndice A, las siguientes:

- 1)  $p = \{p_0, p_1\}$ ;  $p_0 = -\text{Cos } \theta_1$ ;  $p_1 = \pm \text{Sen } \theta_1 \bullet (-e_3^I)$  (2.23)
- 2)  $q = \{q_0, q_1\}$ ;  $q_0 = -\text{Cos } \theta_2$ ;  $q_1 = \pm \text{Sen } \theta_2 \bullet (-e_3^{II})$
- 3)  $r = \{r_0, r_1\}$ ;  $r_0 = -\text{Cos } \theta_3$ ;  $r_1 = \pm \text{Sen } \theta_3 \bullet (-e_3^{III})$
- 4)  $s = \{s_0, s_1\}$ ;  $s_0 = -\text{Cos } \theta_4$ ;  $s_1 = \pm \text{Sen } \theta_4 \bullet (-e_3^{IV})$
- 5)  $t = \{t_0, t_1\}$ ;  $t_0 = -\text{Cos } \theta_5$ ;  $t_1 = \pm \text{Sen } \theta_5 \bullet (-e_3^V)$
- 6)  $u = \{u_0, u_1\}$ ;  $u_0 = -\text{Cos } \theta_6$ ;  $u_1 = \pm \text{Sen } \theta_6 \bullet (-e_3^{VI})$
- 7)  $v = \{v_0, v_1\}$ ;  $v_0 = -\text{Cos } \theta_7$ ;  $v_1 = \pm \text{Sen } \theta_7 \bullet (-e_3^{VII})$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Aquí,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7 \in \mathfrak{R}$  son los desplazamientos angulares de los eslabones que componen al robot relativos al eje X y  $\underline{e}_3^I, \underline{e}_3^{II}, \underline{e}_3^{III}, \underline{e}_3^{IV}, \underline{e}_3^V, \underline{e}_3^{VI}, \underline{e}_3^{VII} \in \mathfrak{R}^2$  son los ejes de rotación. La figura siguiente muestra las componentes de las rotaciones.

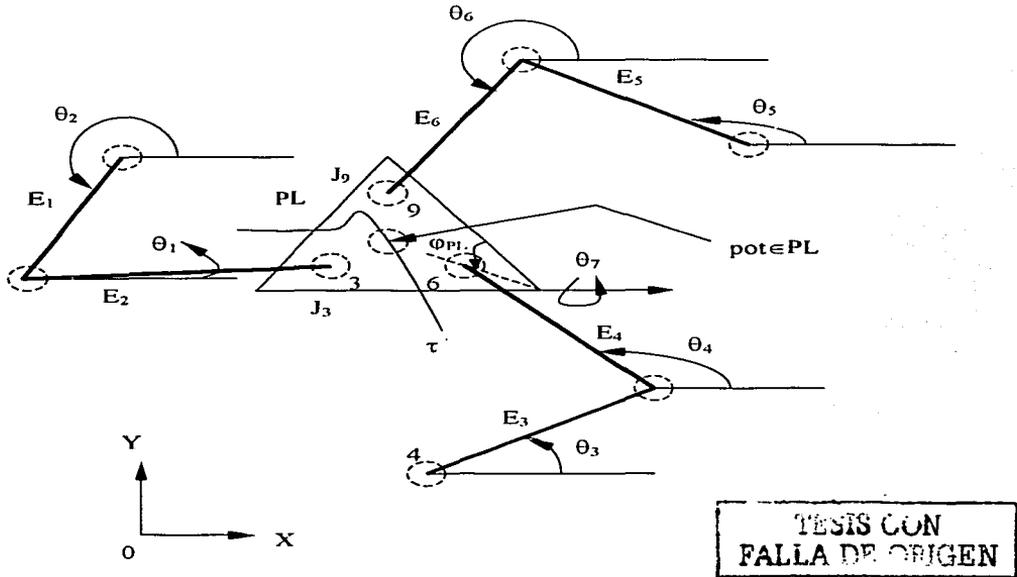


Figura 2.7 Desplazamientos angulares de los eslabones.

## 2.4.7 Relaciones cinemáticas en la plataforma PL

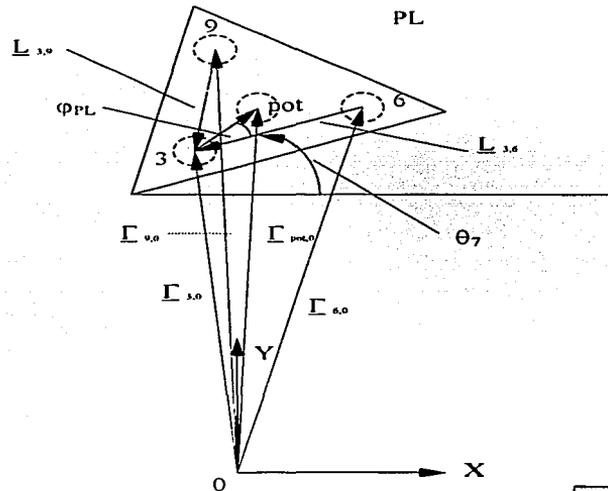
De acuerdo con (Pérez A., 2001), para determinar las coordenadas de los vectores  $\underline{\Gamma}_{3,0}, \underline{\Gamma}_{6,0}, \underline{\Gamma}_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$  usando  $\underline{\Gamma}_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\theta_{PL} \in \mathfrak{R}$  se utilizan las siguientes relaciones:

$$1) \underline{\Gamma}_{3,0} = (\underline{\Gamma}_{3,0,X}, \underline{\Gamma}_{3,0,Y}) = [(pot_{0,X} - l_{pot} \cdot \cos \theta_7), (pot_{0,Y} - l_{pot} \cdot \sin \theta_7)] \quad (2.24)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{6,0} = (\underline{\Gamma}_{6,0,X}, \underline{\Gamma}_{6,0,Y}) = [(\underline{\Gamma}_{3,0,X} + l_{3,6} \cdot \cos (\theta_7 - \varphi_{PL}), \\ (\underline{\Gamma}_{3,0,Y} - l_{3,6} \cdot \sin (\theta_7 - \varphi_{PL}))]$$

$$3) \underline{\Gamma}_{9,0} = (\underline{\Gamma}_{9,0,X}, \underline{\Gamma}_{9,0,Y}) = [(\underline{\Gamma}_{3,0,X} + l_{3,9} \cdot \cos (\theta_7 - \varphi_{PL}), \\ (\underline{\Gamma}_{3,0,Y} - l_{3,9} \cdot \sin (\theta_7 - \varphi_{PL}))]$$

Aquí,  $\theta_{pp} \equiv \theta_7$ ,  $\varphi_{PL} \in \mathfrak{R}$  es el desplazamiento angular constante medido desde la arista inferior de la plataforma al vector  $\underline{L}_{pot,3} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $l_{3,6}$ ,  $l_{3,9} \in \mathfrak{R}^1$  son las magnitudes relacionadas con los vectores  $\underline{L}_{3,6}$ ,  $\underline{L}_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$  mostrados en la figura 2.8.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.8 Relaciones angulares y de posición definidos  
sobre la geometría de PL

## 2.4.8 Formulación del problema cinemático inverso en la configuración no deformada

En esta sección se formula un problema de fundamental importancia en la cinemática de multicuerpos rígidos: el problema inverso. Dicho problema está asociado con la configuración no deformada del robot  $R_p$  mostrado en la figura 2.5.

" Dados  $\Gamma_{3,0}, \Gamma_{6,0}, \Gamma_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\Gamma_{1,0}, \Gamma_{4,0}, \Gamma_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $v = \{v_0, v_1\}$ ,  $\|v\| = 1$ ,  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{pot,3}, l_{3,6}, l_{3,9} \in \mathfrak{R}$ , encuentre:

$p = \{p_0, p_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ ,  $r = \{r_0, r_1\}$ ,  $s = \{s_0, s_1\}$ ,  $t = \{t_0, t_1\}$ ,  $u = \{u_0, u_1\}$ , tal que las expresiones (2.21) sean satisfechas y,

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_1^2 &= 1 & ; & & q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 & ; & & s_0^2 + s_1^2 &= 1 \\ t_0^2 + t_1^2 &= 1 & ; & & u_0^2 + u_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

El problema cinemático inverso relacionado con el robot  $R_p$  motivo de estudio, genera un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.

Cabe señalar que  $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$  y  $v \in \mathfrak{R}^2$  deben ser datos conocidos utilizados para determinar las coordenadas de los puntos (3), (6) y (9) bajo las relaciones (2.24).

Finalmente, con solucionar el problema inverso, será posible obtener los desplazamientos angulares de los eslabones relativos al eje coordenado X, conocidas las coordenadas del punto  $pot \in PL$  y la orientación de la plataforma dada por  $\theta_7 \in \mathfrak{R}$ .

# Capítulo 3

## Modelación cinemática de posicionamiento del robot paralelo: formulación del problema directo en la configuración no deformada

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**Introducción.** En este capítulo se construirán las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento relacionadas con el problema directo del robot  $R_p$  motivo de estudio en este trabajo de tesis. Al igual que en el capítulo anterior, se formulará el problema cinemático directo y se establecerá el sistema de ecuaciones para solucionar dicho problema.

### 3.1 Algunas consideraciones sobre el problema directo

En el capítulo 2 se ha formulado el problema inverso relacionado con el robot  $R_p$  motivo de estudio. Con dicho problema se obtienen los desplazamientos angulares de los eslabones que componen el robot  $R_p$ , conocidos  $\Gamma_{pot,0}$  y  $v \in \mathfrak{R}^2$  o equivalentemente, conocidos los vectores  $\Gamma_{3,0}$ ,  $\Gamma_{6,0}$ ,  $\Gamma_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$ .

En este capítulo se estudiará el siguiente problema:

“ Conocidos  $p, r, t \in \mathfrak{R}^2$ , encuentre  $\Gamma_{\text{pot},0} \in \mathfrak{R}^2$  y  $v \in \mathfrak{R}^2$ ,  $q, s, u \in \mathfrak{R}^2$  “.

Dicho problema es conocido como “el problema directo”.

En otras palabras, el problema definido anteriormente, se puede describir de la manera siguiente:

“ Conocidos los desplazamientos angulares de los eslabones  $E_1, E_2$  y  $E_3$ , encuentre las coordenadas del punto  $\text{pot} \in \text{PL}$  y la orientación de la plataforma  $\text{PL}$ , así como los desplazamientos angulares de los eslabones  $E_2, E_4$  y  $E_6$  “.

Es importante señalar que con las expresiones (2.12) no es posible formular el problema cinemático directo, pues el sistema de ecuaciones e incógnitas no es cuadrado; es decir, se requiere encontrar los valores de 6 incógnitas dadas por  $\Gamma_{3,0}$ ,  $\Gamma_{6,0}$ ,  $\Gamma_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$  más 8 de los complejos  $q, s, u, v \in \mathfrak{R}^2$  y el número de ecuaciones disponibles es: 6 escalares de las expresiones (2.21) más 4 de norma unitaria ( $\|q\| = \|s\| = \|u\| = \|v\| = 1$ ). Es decir, el sistema es de 10 ecuaciones con 14 incógnitas.

Por lo tanto, es necesario establecer nuevas ecuaciones de posición las cuales permitan formular el problema cinemático directo bajo un sistema cuadrado de ecuaciones e incógnitas.

### 3.2 Ecuaciones de posición de lazo cerrado

En esta sección se plantean nuevas expresiones de posición relacionadas con la configuración no deformada del robot  $R_p$  motivo de estudio. Dichas expresiones son

conocidas como "de lazo cerrado". Para tal efecto, se utilizarán los vectores  $\underline{L}_{3,6} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{L}_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$  definidos sobre las aristas de la plataforma PL.

Considere que sobre los eslabones que componen al robot  $R_p$  se asocian vectores de posición como se muestra en la figura 3.1.

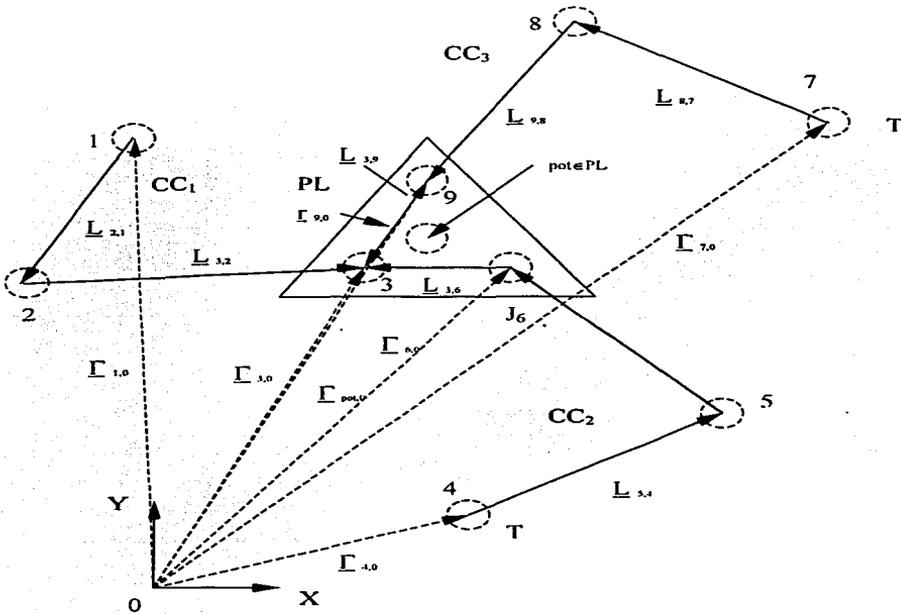


Figura 3.1 Vectores de posición para la formulación del problema directo

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

De acuerdo con la figura anterior, las coordenadas del punto (3)  $\in$  PL se pueden determinar desde el origen de coordenadas "0" a través de las siguientes expresiones:

$$1) \Gamma_{3,0} = \Gamma_{4,0} + L_{5,4} + L_{6,5} + L_{3,6} \quad (3.1)$$

$$2) \Gamma_{3,0} = \Gamma_{7,0} + L_{8,7} + L_{9,8} + L_{3,9}$$

o equivalentemente:

$$1) \Gamma_{1,0} + L_{2,1} + L_{3,2} - [\Gamma_{4,0} + L_{5,4} + L_{6,5} + L_{3,6}] = 0 \quad (3.2)$$

$$2) \Gamma_{1,0} + L_{2,1} + L_{3,2} - [\Gamma_{7,0} + L_{8,7} + L_{9,8} + L_{3,9}] = 0$$

Las expresiones (3.2) son llamadas de lazo. Cabe señalar que también se pueden analizar los puntos (6) y (9) y que las expresiones resultantes serán equivalentes a las ecuaciones (3.2).

Por otro lado, con la siguiente expresión será posible más adelante, formular el problema cinemático directo en la configuración no deformada:

$$\Gamma_{\text{pot},0} = \Gamma_{1,0} + L_{2,1} + L_{3,2} + L_{\text{pot},3} \quad (3.3)$$

### 3.3 Ecuaciones de posición en términos de las bases locales

En esta sección se asocian bases locales sobre la plataforma PL con el propósito de definir los vectores  $L_{3,6} \in \mathfrak{R}^2$  y  $L_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$  en términos de sus longitudes y en la dirección del movimiento. Considere que sobre la plataforma PL se asocian los sistemas referenciales locales  $e_{1,6}^{\text{viii}}$ ,  $e_{1,9}^{\text{ix}} \in \mathfrak{R}^2$  como se muestra en la figura 3.2.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

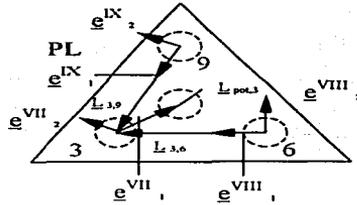


Figura 3.2 Bases locales en PL

De acuerdo con la figura 3.2, los vectores de posición  $\underline{L}_{pot,3}$ ,  $\underline{L}_{3,6}$ ,  $\underline{L}_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$  se escriben en términos de las bases locales de la manera siguiente:

- 1)  $\underline{L}_{pot,3} = l_{pot,3} \cdot \underline{e}_1^{VII}$  (3.4)
- 2)  $\underline{L}_{3,6} = l_{3,6} \cdot \underline{e}_1^{VIII}$
- 3)  $\underline{L}_{3,9} = l_{3,9} \cdot \underline{e}_1^{IX}$

Aquí,  $l_{pot,3}$ ,  $l_{3,6}$ ,  $l_{3,9} \in \mathfrak{R}^+$  son las longitudes de los vectores  $\underline{L}_{pot,3}$ ,  $\underline{L}_{3,6}$ ,  $\underline{L}_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$ .

Por lo tanto, las expresiones (3.2) y (3.3) se pueden escribir en términos de las bases locales descritas por las ecuaciones (2.15) y (3.4) de la manera siguiente:

- 1)  $\underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II} - [\underline{\Gamma}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \underline{e}_1^{III} + l_{6,5} \cdot \underline{e}_1^V + l_{3,6} \cdot \underline{e}_1^{VIII}] = \underline{0}$  (3.5)
- 2)  $\underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II} - [\underline{\Gamma}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \underline{e}_1^V + l_{9,8} \cdot \underline{e}_1^VI + l_{3,9} \cdot \underline{e}_1^{IX}] = \underline{0}$
- 3)  $\underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II} + l_{pot,3} \cdot \underline{e}_1^{VII}$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.4 Ecuaciones de posición en términos de la base canónica

Las rotaciones de la base inercial fija  $\underline{e}_1 \in \mathfrak{R}^2$  sobre las bases locales localizadas sobre la plataforma PL se representan, de acuerdo con el apéndice A, en términos de números complejos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{e}_1^{VII} &= R_2(v, \underline{e}_1) = (\overline{v} \otimes \underline{e}_1) \\ 2) \quad \underline{e}_1^{VIII} &= R_2(w, \underline{e}_1) = (\overline{w} \otimes \underline{e}_1) \\ 3) \quad \underline{e}_1^X &= R_2(x, \underline{e}_1) = (\overline{x} \otimes \underline{e}_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aquí,  $v, w, x \in \mathfrak{R}^2$  son números complejos de norma unitaria. Por tanto, las expresiones de posición (3.5) se pueden escribir en términos de la base canónica, al considerar las ecuaciones (2.20) y (3.6), de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} &+ l_{2,1} \cdot \{\overline{p} \otimes \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{q} \otimes \underline{e}_1\} - [\underline{\Gamma}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{\overline{r} \otimes \underline{e}_1\} + \\ &+ l_{6,5} \cdot \{\overline{s} \otimes \underline{e}_1\} + l_{3,6} \cdot \{\overline{w} \otimes \underline{e}_1\}] = \underline{0} \\ 2) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} &+ l_{2,1} \cdot \{\overline{p} \otimes \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{q} \otimes \underline{e}_1\} - [\underline{\Gamma}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{\overline{t} \otimes \underline{e}_1\} + \\ &+ l_{9,8} \cdot \{\overline{u} \otimes \underline{e}_1\} + l_{3,9} \cdot \{\overline{x} \otimes \underline{e}_1\}] = \underline{0} \\ 3) \quad \underline{\Gamma}_{pot,0} &= \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{\overline{p} \otimes \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{q} \otimes \underline{e}_1\} + l_{pot,3} \cdot \{\overline{v} \otimes \underline{e}_1\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.5 Algunas consideraciones cinemáticas sobre la plataforma PL

En esta sección se analizarán algunas relaciones cinemáticas definidas entre las bases locales  $\underline{e}_1^{VII}, \underline{e}_1^{VIII}, \underline{e}_1^X \in \mathfrak{R}^2$  ubicadas sobre la plataforma PL. Considere la distribución angular mostrada en la figura 3.3.

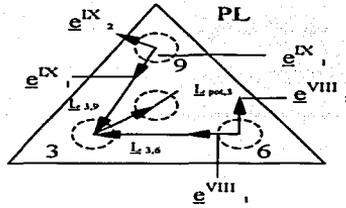


Figura 3.3 Relaciones angulares en PL

De acuerdo con la figura anterior,  $\theta_7 \in \mathfrak{R}$  es el desplazamiento angular medido desde el eje cartesiano X y el vector  $\underline{L}_{pot,3} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{L}_{3,6} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{L}_{pot,3} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{L}_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$ .

Cabe señalar que  $\theta_8 \in \mathfrak{R}$  y  $\theta_9 \in \mathfrak{R}$  son ángulos siempre fijos y, por tanto, las relaciones rotacionales siguientes se satisfacen.

$$1) \underline{e}_1^{VII} = R_2(w, \underline{e}_1^{VII}) = R_2(w, R_2(v, \underline{e}_1)) = \overline{w \otimes v \otimes \underline{e}_1} \quad (3.8)$$

$$2) \underline{e}_1^{IX} = R_2(x, \underline{e}_1^{VII}) = R_2(x, R_2(v, \underline{e}_1)) = \overline{x \otimes v \otimes \underline{e}_1}$$

Es importante señalar que los complejos  $w \in \mathfrak{R}^2$  y  $x \in \mathfrak{R}^2$  son siempre conocidos por el hecho de que la plataforma PL es un cuerpo rígido. Por otro lado, las expresiones (3.7) se escriben en términos de las ecuaciones (3.8) de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{\overline{p \otimes \underline{e}_1}\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{q \otimes \underline{e}_1}\} - [\underline{\Gamma}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{\overline{r \otimes \underline{e}_1}\} + l_{6,5} \cdot \{\overline{s \otimes \underline{e}_1}\} + l_{3,6} \cdot \{\overline{w \otimes v \otimes \underline{e}_1}\}] = \underline{0} \quad (3.9)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{\overline{p \otimes \underline{e}_1}\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{q \otimes \underline{e}_1}\} - [\underline{\Gamma}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{\overline{t \otimes \underline{e}_1}\} +$$

$$+ l_{9,8} \cdot \{ \overline{u \otimes e_1} \} + l_{3,9} \cdot \{ \overline{x \otimes v \otimes e_1} \} ] = 0$$

$$3) \Gamma_{pot,0} = \Gamma_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} + l_{3,2} \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \} + l_{pot,3} \cdot \{ \overline{v \otimes e_1} \}$$

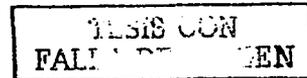
### 3.6 Formulación del problema cinemático directo en la configuración no deformada

En esta sección es formulado el problema cinemático directo asociado con la configuración no deformada de  $R_p$  mostrado en la figura 3.1.

" Dados  $p = \{p_0, p_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ ,  $t = \{t_0, t_1\}$  con  $\|p\| = \|q\| = \|t\| = 1$ ,  $\Gamma_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\Gamma_{4,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\Gamma_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $l_{2,1}$ ,  $l_{3,2}$ ,  $l_{5,4}$ ,  $l_{6,5}$ ,  $l_{8,7}$ ,  $l_{9,8}$ ,  $l_{3,6}$ ,  $l_{3,9}$ ,  $l_{pot,3} \in \mathfrak{R}^t$ ,  $w = \{w_0, w_1\}$ ,  $x = \{x_0, x_1\}$ , encuentre:  $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $v = \{v_0, v_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ ,  $s = \{s_0, s_1\}$  y  $u = \{u_0, u_1\}$ , tal que las expresiones (3.9) sean satisfechas y

$$\begin{aligned} q_0^2 + q_1^2 &= 1 ; & s_0^2 + s_1^2 &= 1 \\ u_0^2 + u_1^2 &= 1 ; & v_0^2 + v_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

El problema directo relacionado con  $R_p$  en la configuración no deformada genera un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas.



# Capítulo 4

## Análisis del problema cinemático inverso en la configuración deformada

**Introducción.** En esta sección se analiza una nueva configuración relacionada con el multicuerpo motivo de estudio. Dicha configuración, llamada “deformada”, es obtenida al accionarse los actuadores  $Ac_1$ ,  $Ac_2$  y  $Ac_3$  localizados sobre las juntas  $J_1$ ,  $J_4$  y  $J_7$  según se muestra en la figura 2.1.

El objetivo es construir las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento relacionadas con la nueva configuración de  $R_p$  y formular, con ellas, el problema cinemático inverso.

### 4.1 La configuración deformada del robot $R_p$

Considere que el robot  $R_p$  ha sido movido de su configuración no deformada por la aplicación de rotaciones rígidas sucesivas efectuadas por sus actuadores. La nueva configuración así obtenida, es llamada “deformada”. La nueva posición del robot  $R_p$  se muestra en la figura 4.1.

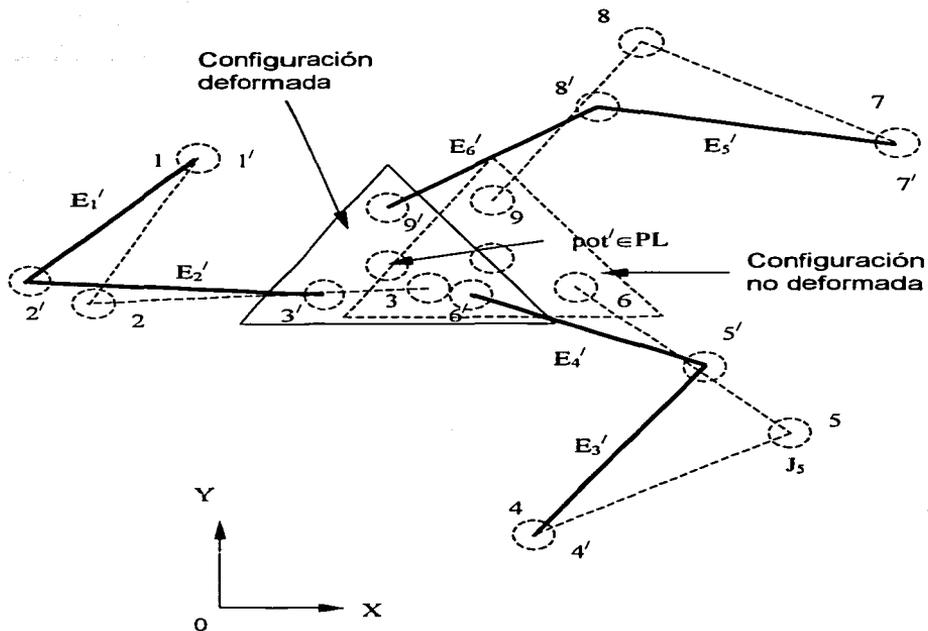


Figura 4.1 Configuración deformada de  $R_p$

De acuerdo con la figura anterior, todos los eslabones que componen al robot  $R_p$  han sido deformados rígidamente y, se supone que el punto  $pot \in PL'$  se encuentra localizado dentro del área de trabajo  $A_T$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Supóngase que la configuración deformada  $R_p'$  se fija en el tiempo, entonces las nuevas configuraciones de las cadenas cinemáticas que componen al robot  $R_p$  se representan de la manera siguiente:

- 1)  $CC_1' = E_1' \cup E_2' \cup PL'$  (4.1)
- 2)  $CC_2' = E_3' \cup E_4' \cup PL'$
- 3)  $CC_3' = E_5' \cup E_6' \cup PL'$

Asimismo, la intersección entre dichas cadenas es la siguiente:

$$CC_1' \cap CC_2' \cap CC_3' = PL' \quad (4.2)$$

Por otro lado, las juntas rotacionales que conectan los eslabones del robot  $R_p$  se representan, en la configuración deformada, en términos de intersecciones; esto es:

- 1)  $J_1' = T' \cap E_1'$ ;       $J_2' = E_1' \cap E_2'$ ;       $J_3' = E_2' \cap PL'$  (4.3)
- 2)  $J_4' = T' \cap E_3'$ ;       $J_5' = E_3' \cap E_4'$ ;       $J_6' = E_4' \cap PL'$
- 3)  $J_7' = T' \cap E_5'$ ;       $J_8' = E_5' \cap E_6'$ ;       $J_9' = E_6' \cap PL'$

El objetivo ahora es construir las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento que permitan determinar las nuevas coordenadas del punto  $pot \in PL'$  y la orientación de la plataforma  $PL$  medidas desde el punto "0" localizado en el origen de coordenadas.

## 4.2 Vectores de posición en la configuración deformada

Para construir las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento en la configuración deformada de  $R_p$ , es necesario, al igual que en la sección 2.4.2 del capítulo 2, asociar vectores de posición sobre los eslabones de  $R_p$ , así como vectores que localizan puntos de interés para el análisis. Dichos vectores se muestran en la figura 4.2.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

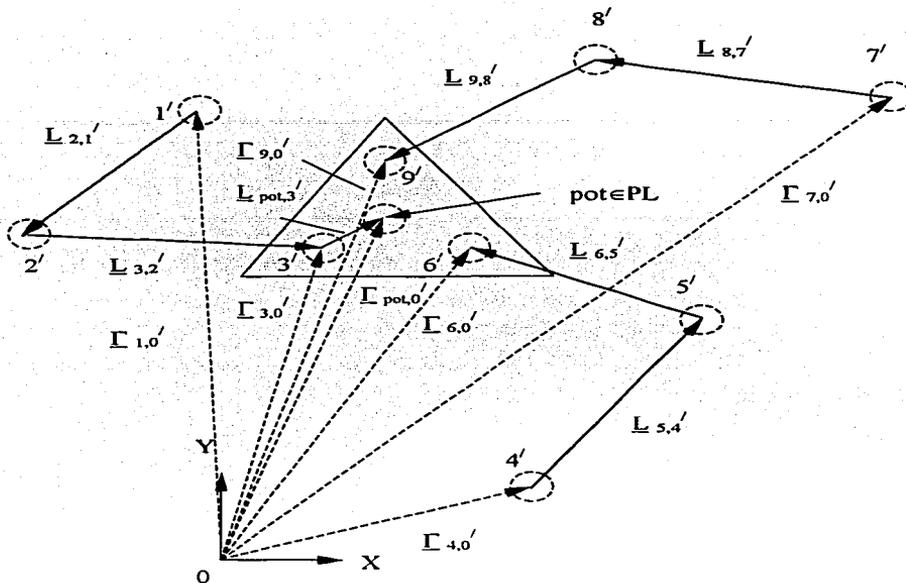


Figura 4.2 Vectores de posición en la configuración deformada

De acuerdo con la figura anterior, las nuevas coordenadas de los puntos (3)', (6)' y (9)' se pueden obtener por medio de las expresiones siguientes:

$$1) \quad \underline{\Gamma}_{3,0}' = \underline{\Gamma}_{1,0}' + \underline{L}_{2,1}' + \underline{L}_{3,2}' \quad (4.4)$$

$$2) \quad \underline{\Gamma}_{6,0}' = \underline{\Gamma}_{4,0}' + \underline{L}_{5,4}' + \underline{L}_{6,5}'$$

$$3) \quad \underline{\Gamma}_{9,0}' = \underline{\Gamma}_{7,0}' + \underline{L}_{8,7}' + \underline{L}_{9,8}'$$

Nótese que los puntos (1)', (4)' y (7)' no cambiarán de posición. Por tanto,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\underline{\Gamma}_{1,0}' \equiv \underline{\Gamma}_{1,0} ; \quad \underline{\Gamma}_{4,0}' \equiv \underline{\Gamma}_{4,0} ; \quad \underline{\Gamma}_{7,0}' \equiv \underline{\Gamma}_{7,0} \quad (4.5)$$

Por otro lado, las coordenadas del punto  $\text{pot} \in \text{PL}'$  se obtienen de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}_{\text{pot},0}' = \underline{\Gamma}_{1,0} + \underline{L}_{2,1}' + \underline{L}_{3,2}' + \underline{L}_{\text{pot},3}' \quad (4.6)$$

Es importante señalar que, al igual que en la sección 2.4.2, las relaciones cinemáticas siguientes se satisfacen:

- i) Conocidos  $\underline{\Gamma}_{3,0}' \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{6,0}' \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{9,0}' \in \mathfrak{R}^2$  son también conocidas  $\underline{\Gamma}_{\text{pot},0}' \in \mathfrak{R}^2$  y la orientación de la plataforma PL.
- ii) Conocidas  $\underline{\Gamma}_{\text{pot},0}' \in \mathfrak{R}^2$  y la orientación de la plataforma en la configuración deformada, son también conocidos los vectores de posición  $\underline{\Gamma}_{3,0}' \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{6,0}' \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{9,0}' \in \mathfrak{R}^2$ .

Dichas relaciones serán explicitadas en las secciones posteriores.

### 4.3 Sistemas de referencia locales en la configuración deformada

Para poder determinar las rotaciones de los eslabones que componen el robot motivo de estudio en la configuración deformada, es necesario, al igual que en la sección 2.4.3 del capítulo 2, asociar sistemas de referencia locales sobre los eslabones, de tal forma que roten con ellos. Dichos sistemas referenciales se muestran en la figura 4.3.

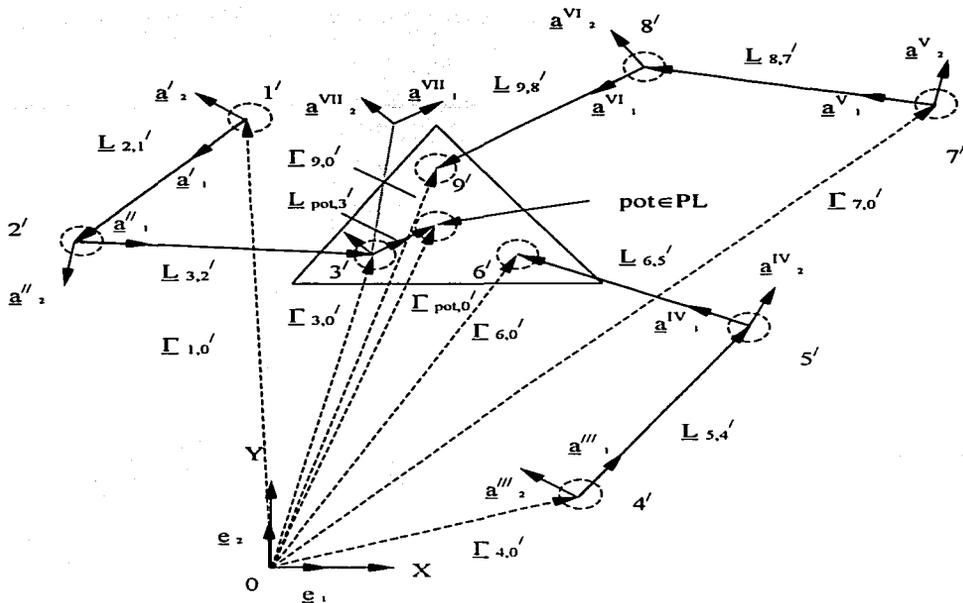


Figura 4.3 Sistemas locales en la configuración deformada de  $R_p$

De acuerdo con la figura anterior, los vectores de posición definidos sobre los eslabones de  $R_p$  se pueden escribir en términos de los sistemas locales de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{L}_{2,1}' &= l_{2,1}' \cdot \underline{a}_I'; & \underline{L}_{3,2}' &= l_{3,2}' \cdot \underline{a}_{II}'' \\
 2) \quad \underline{L}_{5,4}' &= l_{5,4}' \cdot \underline{a}_{III}'''; & \underline{L}_{6,5}' &= l_{6,5}' \cdot \underline{a}_{IV}^{IV} \\
 3) \quad \underline{L}_{8,7}' &= l_{8,7}' \cdot \underline{a}_V^V; & \underline{L}_{9,8}' &= l_{9,8}' \cdot \underline{a}_I^{VI}
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

TESIS CON  
FALLA DE ... EN

$$4) \underline{L}_{pot,3}^{\prime} = \underline{l}_{pot,3}^{\prime} \bullet \underline{a}_1^{VII}$$

Note que al ser los eslabones rígidos, entonces se satisfacen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} 1) \underline{l}_{2,1}^{\prime} &\equiv \underline{l}_{2,1}; & \underline{l}_{3,2}^{\prime} &\equiv \underline{l}_{3,2}; & \underline{l}_{5,4}^{\prime} &\equiv \underline{l}_{5,4} \\ 2) \underline{l}_{6,5}^{\prime} &\equiv \underline{l}_{6,5}; & \underline{l}_{8,7}^{\prime} &\equiv \underline{l}_{8,7}; & \underline{l}_{9,8}^{\prime} &\equiv \underline{l}_{9,8}; & \underline{l}_{pot,3}^{\prime} &\equiv \underline{l}_{pot,3} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Las expresiones (4.4) se pueden escribir en términos de las bases locales; esto es:

$$\begin{aligned} 1) \underline{\Gamma}_{3,0}^{\prime} &= \underline{\Gamma}_{1,0} + \underline{l}_{2,1} \bullet \underline{a}_1^I + \underline{l}_{3,2} \bullet \underline{a}_1^{II} \\ 2) \underline{\Gamma}_{6,0}^{\prime} &= \underline{\Gamma}_{4,0} + \underline{l}_{5,4} \bullet \underline{a}_1^{III} + \underline{l}_{6,5} \bullet \underline{a}_1^{IV} \\ 3) \underline{\Gamma}_{9,0}^{\prime} &= \underline{\Gamma}_{7,0} + \underline{l}_{8,7} \bullet \underline{a}_1^V + \underline{l}_{9,8} \bullet \underline{a}_1^{VI} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Asimismo, la ecuación (4.6) se escribe en términos de las bases locales de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}_{pot,0}^{\prime} = \underline{\Gamma}_{1,0} + \underline{l}_{2,1} \bullet \underline{a}_1^I + \underline{l}_{3,2} \bullet \underline{a}_1^{II} + \underline{l}_{pot,3} \bullet \underline{a}_1^{VII} \quad (4.10)$$

#### 4.4 Ecuaciones de posición en términos de la base inercial fija

De acuerdo con (Pérez A., 2001), las bases locales definidas en la configuración deformada representan las rotaciones rígidas de las bases locales definidas en la configuración no deformada y, éstas a su vez, son las rotaciones rígidas de la base inercial fija localizada en el origen de coordenadas. Dichas rotaciones se representan de la manera siguiente:

$$1) \underline{a}_1^I = R_2(P, \underline{e}_1^I) = R_2(P, R_2(p, \underline{e}_1)) = \overline{P \otimes p} \otimes \underline{e}_1 \quad (4.11)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- 2)  $\underline{a}_1^{\text{II}} = R_2(\underline{Q}, \underline{e}_1^{\text{II}}) = R_2(\underline{Q}, R_2(\underline{q}, \underline{e}_1)) = \overline{\underline{Q} \otimes \underline{q} \otimes \underline{e}_1}$
- 3)  $\underline{a}_1^{\text{III}} = R_2(\underline{R}, \underline{e}_1^{\text{III}}) = R_2(\underline{R}, R_2(\underline{r}, \underline{e}_1)) = \overline{\underline{R} \otimes \underline{r} \otimes \underline{e}_1}$
- 4)  $\underline{a}_1^{\text{IV}} = R_2(\underline{S}, \underline{e}_1^{\text{IV}}) = R_2(\underline{S}, R_2(\underline{s}, \underline{e}_1)) = \overline{\underline{S} \otimes \underline{s} \otimes \underline{e}_1}$
- 5)  $\underline{a}_1^{\text{V}} = R_2(\underline{T}, \underline{e}_1^{\text{V}}) = R_2(\underline{T}, R_2(\underline{t}, \underline{e}_1)) = \overline{\underline{T} \otimes \underline{t} \otimes \underline{e}_1}$
- 6)  $\underline{a}_1^{\text{VI}} = R_2(\underline{U}, \underline{e}_1^{\text{VI}}) = R_2(\underline{U}, R_2(\underline{u}, \underline{e}_1)) = \overline{\underline{U} \otimes \underline{u} \otimes \underline{e}_1}$
- 7)  $\underline{a}_1^{\text{VII}} = R_2(\underline{V}, \underline{e}_1^{\text{VII}}) = R_2(\underline{V}, R_2(\underline{v}, \underline{e}_1)) = \overline{\underline{V} \otimes \underline{v} \otimes \underline{e}_1}$

Aquí, se han utilizado la transformación lineal (2.17) y  $P, Q, R, S, T, U, V \in \mathfrak{R}^2$  son números complejos de norma unitaria relacionados con las rotaciones de las bases locales definidas en la configuración no deformada, sobre las bases locales de la configuración deformada.

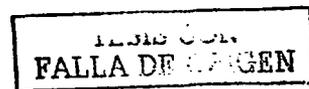
Por tanto, las expresiones (4.9) se pueden escribir en términos de la base inercial de la manera siguiente:

- 1)  $\underline{\Gamma}_{3,0}^{\prime} = \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{\overline{\underline{P} \otimes \underline{p} \otimes \underline{e}_1}\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{\underline{Q} \otimes \underline{q} \otimes \underline{e}_1}\} \quad (4.12)$
- 2)  $\underline{\Gamma}_{6,0}^{\prime} = \underline{\Gamma}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{\overline{\underline{R} \otimes \underline{r} \otimes \underline{e}_1}\} + l_{6,5} \cdot \{\overline{\underline{S} \otimes \underline{s} \otimes \underline{e}_1}\}$
- 3)  $\underline{\Gamma}_{9,0}^{\prime} = \underline{\Gamma}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{\overline{\underline{T} \otimes \underline{t} \otimes \underline{e}_1}\} + l_{9,8} \cdot \{\overline{\underline{U} \otimes \underline{u} \otimes \underline{e}_1}\}$

Asimismo, la expresión (4.10) se escribe en términos de la base inercial fija; esto es:

$$\underline{\Gamma}_{\text{pot},0}^{\prime} = \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{\overline{\underline{P} \otimes \underline{p} \otimes \underline{e}_1}\} + l_{3,2} \cdot \{\overline{\underline{Q} \otimes \underline{q} \otimes \underline{e}_1}\} + \quad (4.13)$$

$$+ l_{\text{pot},3} \cdot \{\overline{\underline{V} \otimes \underline{v} \otimes \underline{e}_1}\}$$



## 4.5 Ecuaciones de norma unitaria

De acuerdo con el apéndice A de este trabajo, los números complejos  $P, Q, R, S, T, U, V \in \mathfrak{R}^2$  asociados con la configuración deformada son de norma unitaria; esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad P &= \{P_0, P_1\}; & P_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } P_1 \in \mathfrak{R}; & \quad \|P\| = 1; \quad P_0^2 + P_1^2 = 1 & \quad (4.14) \\
 2) \quad Q &= \{Q_0, Q_1\}; & Q_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } Q_1 \in \mathfrak{R}; & \quad \|Q\| = 1; \quad Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\
 3) \quad R &= \{R_0, R_1\}; & R_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } R_1 \in \mathfrak{R}; & \quad \|R\| = 1; \quad R_0^2 + R_1^2 = 1 \\
 4) \quad S &= \{S_0, S_1\}; & S_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } S_1 \in \mathfrak{R}; & \quad \|S\| = 1; \quad S_0^2 + S_1^2 = 1 \\
 5) \quad T &= \{T_0, T_1\}; & T_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } T_1 \in \mathfrak{R}; & \quad \|T\| = 1; \quad T_0^2 + T_1^2 = 1 \\
 6) \quad U &= \{U_0, U_1\}; & U_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } U_1 \in \mathfrak{R}; & \quad \|U\| = 1; \quad U_0^2 + U_1^2 = 1 \\
 7) \quad V &= \{V_0, V_1\}; & V_0 \in \mathfrak{R} \text{ y } V_1 \in \mathfrak{R}; & \quad \|V\| = 1; \quad V_0^2 + V_1^2 = 1
 \end{aligned}$$

## 4.6 Relaciones geométricas

Las relaciones geométricas entre las componentes de los complejos  $P, Q, R, S, T, U, V \in \mathfrak{R}^2$  y las rotaciones son, de acuerdo con el apéndice A, las siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad P &= \{P_0, P_1\}; & P_0 &= -\text{Cos } \alpha_1; & P_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_1 \cdot (-\underline{a}_3^I) & \quad (4.15) \\
 2) \quad Q &= \{Q_0, Q_1\}; & Q_0 &= -\text{Cos } \alpha_2; & Q_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_2 \cdot (-\underline{a}_3^{II}) \\
 3) \quad R &= \{R_0, R_1\}; & R_0 &= -\text{Cos } \alpha_3; & R_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_3 \cdot (-\underline{a}_3^{III}) \\
 4) \quad S &= \{S_0, S_1\}; & S_0 &= -\text{Cos } \alpha_4; & S_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_4 \cdot (-\underline{a}_3^{IV}) \\
 5) \quad T &= \{T_0, T_1\}; & T_0 &= -\text{Cos } \alpha_5; & T_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_5 \cdot (-\underline{a}_3^V) \\
 6) \quad U &= \{U_0, U_1\}; & U_0 &= -\text{Cos } \alpha_6; & U_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_6 \cdot (-\underline{a}_3^{VI}) \\
 7) \quad V &= \{V_0, V_1\}; & V_0 &= -\text{Cos } \alpha_7; & V_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_7 \cdot (-\underline{a}_3^{VII})
 \end{aligned}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Aquí,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \in \mathfrak{R}$  son los desplazamientos angulares medidos entre la configuración no deformada y deformada según se muestra en la figura 4.4 y  $\underline{a}_3^I, \underline{a}_3^{II}, \underline{a}_3^{IV}, \underline{a}_3^V, \underline{a}_3^VI, \underline{a}_3^{VII} \in \mathfrak{R}^3$  son los ejes de las rotaciones.

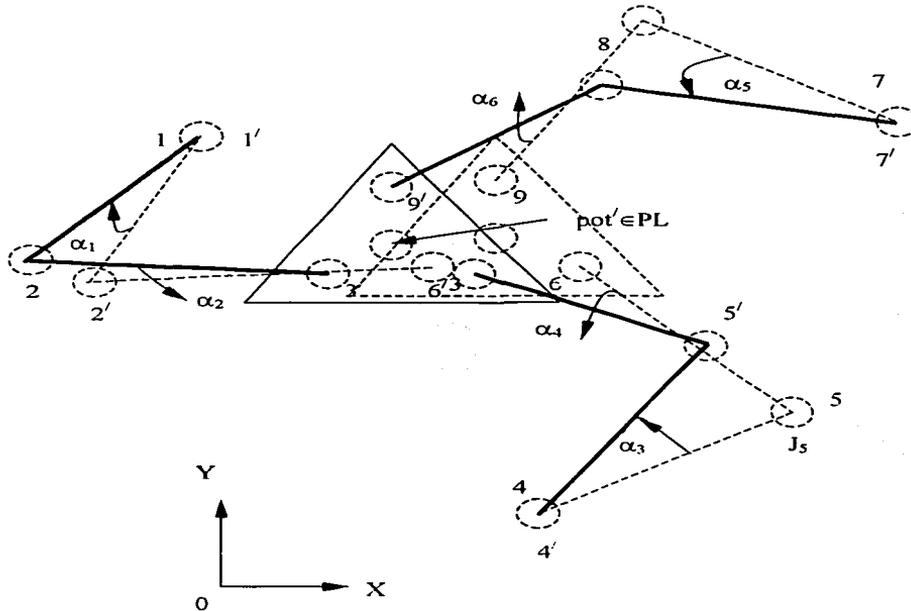


Figura 4.4 Desplazamientos angulares en la configuración deformada

#### 4.7 Relaciones cinemáticas en la plataforma PL'

Considere ahora los vectores de posición  $\underline{L}_{3,6}' \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{L}_{3,9}' \in \mathfrak{R}^2$  definidos sobre la plataforma PL' según se muestra en la figura 4.5.

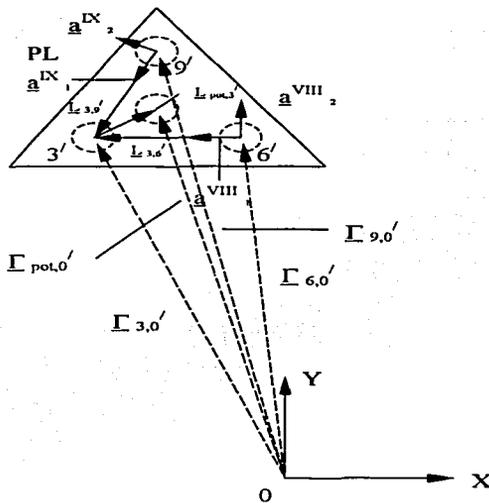


Figura 4.5 Vectores de posición definidos sobre  $PL'$ .

De acuerdo con (Pérez A., 2001), las siguientes relaciones se satisfacen:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{\Gamma_{3,0}}' &= (\underline{\Gamma_{3,0,X}}', \underline{\Gamma_{3,0,Y}}') = (\underline{\Gamma_{pot,0,X}}' - l_{pot} \cdot \cos \alpha_7, \underline{\Gamma_{pot,0,Y}}' - \\
 &\quad - l_{pot} \cdot \sin \alpha_7) \\
 2) \quad \underline{\Gamma_{6,0}}' &= (\underline{\Gamma_{6,0,X}}', \underline{\Gamma_{6,0,Y}}') = (\underline{\Gamma_{3,0,X}}' + l_{3,6} \cdot \cos (\alpha_7 - \varphi_{PL}), \\
 &\quad \underline{\Gamma_{3,0,Y}}' - l_{3,6} \cdot \sin (\alpha_7 - \varphi_{PL})) \\
 3) \quad \underline{\Gamma_{9,0}}' &= (\underline{\Gamma_{9,0,X}}', \underline{\Gamma_{9,0,Y}}') = (\underline{\Gamma_{3,0,X}}' + l_{3,9} \cdot \cos (\alpha_7 - \varphi_{PL}), \\
 &\quad \underline{\Gamma_{3,0,Y}}' - l_{3,9} \cdot \sin (\alpha_7 - \varphi_{PL}))
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Nótese que  $l_{3,6}, l_{3,9} \in \mathfrak{R}^+$  son las longitudes asociadas con los vectores de posición  $\underline{L}_{3,6} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{L}_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$ . Por otro lado, es importante señalar que con las relaciones definidas anteriormente, es posible utilizar las expresiones (4.12) para formular el problema cinemático inverso en la configuración deformada. Esto se hará en la sección siguiente.

#### 4.8 Formulación del problema inverso en la configuración deformada

En esta sección es formulado un problema de fundamental importancia relacionado con la configuración deformada de  $R_p$  mostrada en la figura 4.2. Dicho problema es conocido como el "problema inverso".

" Dados  $\underline{\Gamma}_{3,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{6,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{9,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{4,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{\Gamma}_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$ ;  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{3,6}, l_{3,9}, l_{pot,3} \in \mathfrak{R}^+$ ,  $p = \{p_0, p_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ ,  $r = \{r_0, r_1\}$ ,  $s = \{s_0, s_1\}$ ,  $t = \{t_0, t_1\}$ ,  $u = \{u_0, u_1\}$ ,  $v = \{v_0, v_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = \|v\| = 1$ , encuentre:  $P = \{P_0, P_1\}$ ,  $Q = \{Q_0, Q_1\}$ ,  $R = \{R_0, R_1\}$ ,  $S = \{S_0, S_1\}$ ,  $T = \{T_0, T_1\}$ ,  $U = \{U_0, U_1\}$  tal que las expresiones (4.12) sean satisfechas y

$$\begin{array}{ll} 1) P_0^2 + P_1^2 = 1 & ; \quad Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\ 2) R_0^2 + R_1^2 = 1 & ; \quad S_0^2 + S_1^2 = 1 \\ 3) T_0^2 + T_1^2 = 1 & ; \quad U_0^2 + U_1^2 = 1 \end{array} "$$

El problema cinemático inverso definido en la configuración deformada de  $R_p$  genera un sistema de 12 ecuaciones polinomiales no lineales y 12 incógnitas.

# Capítulo 5

## Análisis del problema cinemático directo en la configuración deformada

**Introducción.** En esta sección se definen nuevos vectores de posición en la configuración deformada del multicuerpo en estudio con el propósito de encontrar el sistema de ecuaciones que permita formular el problema directo. Sobre la plataforma PL se definirán vectores de posición los cuales localizarán el punto (3)' de análisis. Finalmente, se construirán dos ecuaciones de lazo cerrado mediante las cuales, se formulará el problema directo en la configuración deformada.

### 5.1 Ecuaciones de posición de lazo cerrado en la configuración deformada

Considere que sobre los eslabones que componen al robot  $R_p$  motivo de estudio localizados en la configuración deformada se asocian vectores de posición como se muestra en la figura 5.1.

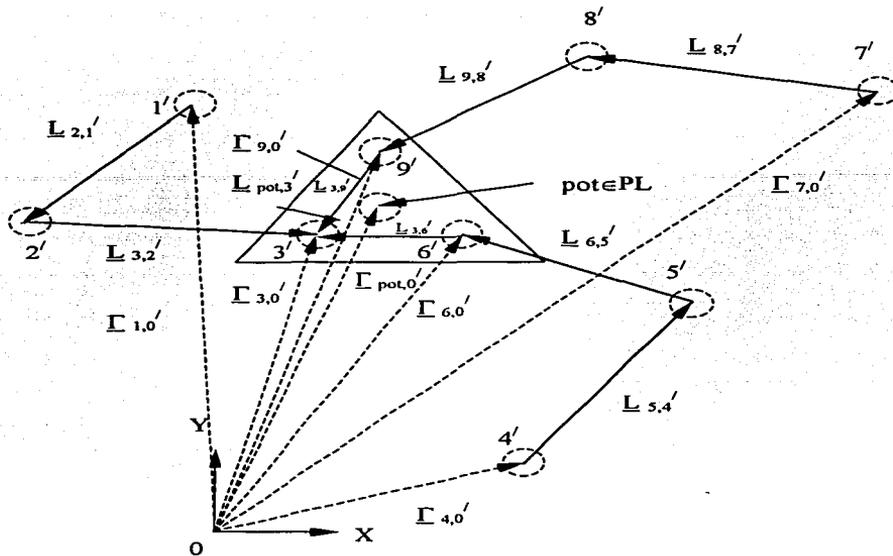


Figura 5.1 Vectores de posición en la configuración deformada

De acuerdo con la figura anterior, las coordenadas del punto  $(3)' \in PL'$  se pueden encontrar desde el origen de coordenadas "o" a través de las expresiones siguientes:

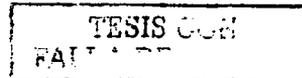
$$1) \quad \underline{\Gamma}_{3,0}' = \underline{\Gamma}_{4,0}' + \underline{L}_{5,4}' + \underline{L}_{6,5}' + \underline{L}_{3,6}' \quad (5.1)$$

$$2) \quad \underline{\Gamma}_{3,0}' = \underline{\Gamma}_{7,0}' + \underline{L}_{8,7}' + \underline{L}_{9,8}' + \underline{L}_{3,9}'$$

o equivalentemente:

$$1) \quad \underline{\Gamma}_{1,0}' + \underline{L}_{2,1}' + \underline{L}_{3,2}' - [\underline{\Gamma}_{4,0}' + \underline{L}_{5,4}' + \underline{L}_{6,5}' + \underline{L}_{3,6}'] = \underline{0} \quad (5.2)$$

$$2) \quad \underline{\Gamma}_{1,0}' + \underline{L}_{2,1}' + \underline{L}_{3,2}' - [\underline{\Gamma}_{7,0}' + \underline{L}_{8,7}' + \underline{L}_{9,8}' + \underline{L}_{3,9}'] = \underline{0}$$



Las ecuaciones (5.2) son denominadas "ecuaciones de lazo cerrado" definidas en la configuración deformada. Note además, que la expresión siguiente permite localizar el punto  $pot' \in PL'$  desde el origen "o":

$$\underline{\Gamma}_{pot,0}' = \underline{\Gamma}_{1,0} + \underline{L}_{2,1}' + \underline{L}_{3,2}' + \underline{L}_{pot,3}' \quad (5.3)$$

## 5.2 Ecuaciones de lazo en términos de las bases locales

En esta sección se definirán sistemas locales deformados sobre la plataforma  $PL'$ . Dichos sistemas se muestran en la figura 5.2.

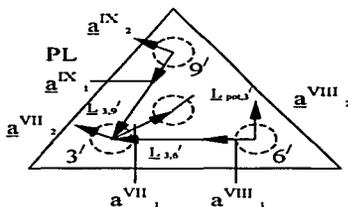
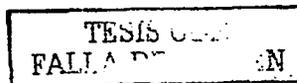


Figura 5.2 Bases locales deformadas sobre  $PL'$

Note en la figura anterior que los vectores de posición  $\underline{L}_{3,6}'$ ,  $\underline{L}_{3,9}'$ ,  $\underline{L}_{pot,3}' \in \mathfrak{R}^2$  se pueden escribir en términos de los sistemas locales deformados de la manera siguiente:

- 1)  $\underline{L}_{3,6}' = l_{3,6} \cdot \underline{a}_1^{VIII}$
- 2)  $\underline{L}_{3,9}' = l_{3,9} \cdot \underline{a}_1^{IX}$
- 3)  $\underline{L}_{pot,3}' = l_{pot,3} \cdot \underline{a}_1^{VII}$



Por tanto, las expresiones (5.2) y la ecuación (5.3) se pueden escribir en términos de las bases deformadas; esto es:

$$1) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II} - [\underline{\Gamma}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \underline{a}_1^{III} + l_{6,5} \cdot \underline{a}_1^{IV} + \quad (5.5)$$

$$+ l_{3,6} \cdot \underline{a}_1^{VIII}] = 0$$

$$2) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II} - [\underline{\Gamma}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \underline{a}_1^V + l_{9,8} \cdot \underline{a}_1^{VI} +$$

$$+ l_{3,9} \cdot \underline{a}_1^X] = 0$$

$$3) \quad \underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II} + l_{pot,3} \cdot \underline{a}_1^{VII}$$

Para generar las expresiones (5.5) han sido utilizadas las ecuaciones (4.6).

### 5.3 Ecuaciones de posición en términos de la base canónica

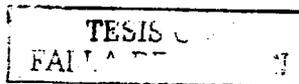
De acuerdo con la sección 3.3 del Capítulo 3, los sistemas locales deformados definidos sobre la plataforma PL' son rotaciones de las bases locales definidas sobre la configuración no deformada y, éstas a su vez, son rotaciones rígidas de la base canónica. Dichas rotaciones se pueden representar en términos de números complejos de la manera siguiente:

$$1) \quad \underline{a}_1^{VII} = R_2(V, \underline{e}_1^{VII}) = R_2(V, R_2(v, \underline{e}_1)) = \overline{V \otimes v \otimes \underline{e}_1} \quad (5.6)$$

$$2) \quad \underline{a}_1^{VIII} = R_2(W, \underline{e}_1^{VIII}) = R_2(W, R_2(w, \underline{e}_1)) = \overline{W \otimes w \otimes \underline{e}_1}$$

$$3) \quad \underline{a}_1^X = R_2(X, \underline{e}_1^X) = R_2(X, R_2(x, \underline{e}_1)) = \overline{X \otimes x \otimes \underline{e}_1}$$

Sin embargo, según la sección 3.4 del capítulo 3, las bases locales  $\underline{a}_j^{VIII} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{a}_j^X \in \mathfrak{R}^2$  son, en realidad, rotaciones de la base deformada  $\underline{a}_j^{VII} \in \mathfrak{R}^2$ , esto es:



$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{a}_1^{VIII} &= R_2(W, \underline{a}_1^{VII}) = R_2(W, R_2(V, \underline{e}_1^{VII})) = & (5.7) \\
 &= R_2(W, R_2(V, R_2(v, \underline{e}_1^{VII}))) = \overline{W \otimes V \otimes v \otimes \underline{e}_1^{VII}} \\
 2) \quad \underline{a}_1^X &= R_2(X, \underline{a}_1^{VII}) = R_2(X, R_2(V, \underline{e}_1^{VII})) = \\
 &= R_2(X, R_2(V, R_2(v, \underline{e}_1^{VIII}))) = \overline{X \otimes V \otimes v \otimes \underline{e}_1^{VII}}
 \end{aligned}$$

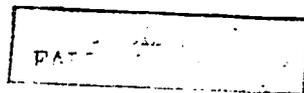
Por tanto, las expresiones (5.5) se pueden escribir en términos de la base inercial de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} &+ I_{2,1} \cdot \overline{\{P \otimes p \otimes \underline{e}_1\}} + I_{3,2} \cdot \overline{\{Q \otimes q \otimes \underline{e}_1\}} - & (5.8) \\
 &- [ \underline{\Gamma}_{4,0} + I_{5,4} \cdot \overline{\{R \otimes r \otimes \underline{e}_1\}} + I_{6,5} \cdot \overline{\{S \otimes s \otimes \underline{e}_1\}} + \\
 &\quad + I_{3,6} \cdot \overline{W \otimes V \otimes v \otimes \underline{e}_1^{VII}} ] = \underline{0} \\
 2) \quad \underline{\Gamma}_{1,0} &+ I_{2,1} \cdot \overline{\{P \otimes p \otimes \underline{e}_1\}} + I_{3,2} \cdot \overline{\{Q \otimes q \otimes \underline{e}_1\}} - \\
 &- [ \underline{\Gamma}_{7,0} + I_{8,7} \cdot \overline{\{T \otimes t \otimes \underline{e}_1\}} + I_{9,8} \cdot \overline{\{U \otimes u \otimes \underline{e}_1\}} + \\
 &\quad + I_{3,9} \cdot \overline{X \otimes V \otimes v \otimes \underline{e}_1^{VII}} ] = \underline{0} \\
 3) \quad \underline{\Gamma}_{pot,0} &= \underline{\Gamma}_{1,0} + I_{2,1} \cdot \overline{\{P \otimes p \otimes \underline{e}_1\}} + I_{3,2} \cdot \overline{\{Q \otimes q \otimes \underline{e}_1\}} + \\
 &\quad + I_{pot,3} \cdot \overline{\{V \otimes v \otimes \underline{e}_1\}}
 \end{aligned}$$

Aquí, se han utilizado las expresiones (4.10) para generar las ecuaciones (5.8). Por otro lado, es necesario hacer notar que:

$$\begin{aligned}
 1) \quad W &= w & (5.9) \\
 2) \quad X &= x
 \end{aligned}$$

pues, la plataforma PL' es rígida.



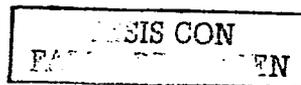
## 5.4 Formulación del problema cinemático directo en la configuración deformada

En esta sección se formula un problema de gran importancia en la cinemática de multicuerpos rígidos: el problema directo. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del robot  $R_p$  mostrada en la figura 5.1.

“ Dados  $P = \{P_0, P_1\}$ ,  $R = \{R_0, R_1\}$ ,  $T = \{T_0, T_1\}$  con  $\|P\| = \|R\| = \|T\| = 1$ ,  $\Gamma_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\Gamma_{4,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\Gamma_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{3,6}, l_{3,9}, l_{pot,3} \in \mathfrak{R}^1$ ,  $p = \{p_0, p_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ ,  $r = \{r_0, r_1\}$ ,  $s = \{s_0, s_1\}$ ,  $t = \{t_0, t_1\}$ ,  $u = \{u_0, u_1\}$ ,  $v = \{v_0, v_1\}$ ,  $w = \{w_0, w_1\}$ ,  $x = \{x_0, x_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$ , encuentre:  $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$   $V = \{V_0, V_1\}$   $Q = \{Q_0, Q_1\}$ ,  $S = \{S_0, S_1\}$ ,  $U = \{U_0, U_1\}$  tal que las expresiones (5.8) sean satisfechas y:

$$\begin{aligned} 1) \quad V_0^2 + V_1^2 = 1 & \quad ; \quad Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\ 2) \quad S_0^2 + S_1^2 = 1 & \quad ; \quad U_0^2 + U_1^2 = 1 \end{aligned}$$

El problema directo asociado con la configuración deformada de  $R_p$  genera un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas.



# Conclusiones

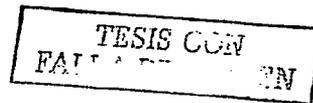
En este trabajo de tesis los objetivos siguientes fueron alcanzados:

- Construir sistemáticamente los modelos de posición de un robot paralelo tipo RRR usando una rotación variante del álgebra de los números complejos.
- Formular los problemas directo e inverso en las configuraciones de análisis asociadas con el robot.
- Programar y simular los modelos resultantes en la plataforma de cálculo formal Mathematica.

En este trabajo de tesis se han construido las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento de un robot paralelo planar tipo RRR usando una rotación variante del álgebra de los números complejos. Fueron analizadas dos configuraciones: 1) la no deformada y 2) la deformada.

En ambas configuraciones se formularon los problemas directos e inversos. Los resultados obtenidos en esta tesis se resumen en los siguientes incisos:

- 1) El sistema de ecuaciones para el problema inverso tanto en la configuración no deformada como en la deformada fue de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.



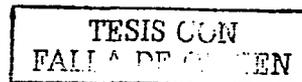
- 2) El sistema de ecuaciones encontrado para resolver el problema cinemático directo fue de 10 ecuaciones con 10 incógnitas en ambas configuraciones.
- 3) Las configuraciones obtenidas del robot, modeladas con la rotación variante son equivalentes a las configuraciones modeladas con la rotación usual (Pérez A., 2001).
- 4) Las diferencias entre ambas rotaciones se presentan en las interpretaciones geométricas.

Cabe señalar que el proceso de modelación usado resulta ser sistemático y se puede utilizar para modelar cualesquiera estructura articulada de cuerpos rígidos. Por otro lado, una conclusión importante derivada de este trabajo, indica que se pueden utilizar cualesquiera de las dos rotaciones para modelar multicuerpos rígidos de movimiento en el plano haciendo uso del punto 4).

Finalmente, futuros trabajos por desarrollar relacionados con esta tesis son los siguientes:

- Modelación cinemática y de trayectoria de un robot paralelo tipo RRR usando una rotación variante del álgebra de complejos.
- Modelación dinámica de un robot paralelo tipo RRR usando una rotación variante.

Modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo tipo RPR usando la rotación usual en  $\mathfrak{R}^2$ .



# Apéndice A

## Parametrización de las rotaciones rígidas en el plano (Rotación derivada de la operación $\otimes : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ )

### A.1 Otra operación binaria multiplicativa.

Considérese entonces la operación  $\otimes : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

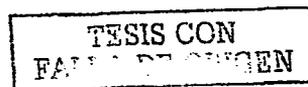
$$(a,b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha). \quad (\text{A.1})$$

Se estudiarán ahora las propiedades de dicha operación a través de los resultados siguientes:

**Teorema A.1.** La operación  $\otimes : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es no asociativa.

Demostración. Sean  $\mathbf{p}=(a,b)$ ,  $\mathbf{q}=(\alpha,\beta)$ ,  $\mathbf{r}=(c,d)$ , entonces,

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) = (a,b) \otimes \{(\alpha,\beta) \otimes (c,d)\}$$



$$\begin{aligned}
&= (a,b) \otimes \{ (-\alpha c + \beta d, \alpha d + \beta c) \} \\
&= (-a(-\alpha c + \beta d) + b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(-\alpha c + \beta d)) \\
&= (a\alpha c - a\beta d + b\alpha d + b\beta c, a\alpha d + a\beta c - b\alpha c + b\beta d) \\
&= (c(a\alpha + b\beta) + d(b\alpha - a\beta), (a\alpha + b\beta)d + (a\beta - b\alpha)c).
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} &= \{ (a,b) \otimes (\alpha,\beta) \} \otimes (c,d) \equiv (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \otimes (c,d) \\
&= (-c(-a\alpha + b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta + b\alpha)) \\
&= (c(a\alpha - b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta - b\alpha)).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) \neq (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r}.$$

**Teorema A.2.** El elemento  $\underline{\mathbf{1}} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba)$ , es tal que si  $\mathbf{p} = (a, b)$ ,

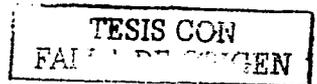
entonces,  $\mathbf{p} \otimes \underline{\mathbf{1}} \equiv \mathbf{p}$ .

**Demostración.** En efecto, sean  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\underline{\mathbf{1}} = (\alpha, \beta)$  tal que  $\mathbf{p} \otimes \underline{\mathbf{1}} \equiv \mathbf{p}$ , esto es:

$$(a, b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b),$$

por tanto,

$$-a\alpha + b\beta = a, \quad a\beta + b\alpha = b.$$



Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$\alpha = -\frac{1}{a}(a - b\beta) \quad , \quad a\beta - \frac{b}{a}(a - b\beta) = b.$$

Por tanto,  $\beta(a^2 + b^2) = 2ba$ . Esto es  $\beta = \frac{2ba}{a^2 + b^2}$ . También,

$$\alpha = -\frac{1}{a}\left(a - \frac{2b^2a}{a^2 + b^2}\right) = \frac{1}{a^2 + b^2}(-a^2 - b^2 + 2b^2) \equiv \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Por tanto,  $\underline{1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 - a^2, 2ba)$ .

**Teorema A.3.** Sea  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces, el elemento  $\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2 + b^2}(a, b)$ , es tal que  $\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}' \equiv \underline{1}$ .

Demostración. En efecto, sea  $\mathbf{p}' \equiv (\alpha, \beta)$  tal que  $\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}' \equiv \underline{1}$ , esto es,

$$(a, b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \equiv \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 - a^2, 2ba).$$

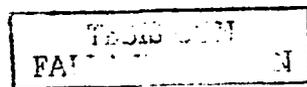
Entonces,

$$-a\alpha + b\beta \equiv \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 - a^2) \quad , \quad a\beta + b\alpha = 2ab.$$

Esto es,

$$\alpha = -\frac{1}{(a^2 + b^2)a}(b^2 - a^2) + \frac{b}{a}\beta.$$

Por tanto,



$$a\beta - \frac{b}{a(a^2+b^2)}(b^2-a^2) + \frac{b^2}{a}\beta = \frac{1}{a^2+b^2} 2ab.$$

Esto es,

$$\left(a + \frac{b^2}{a}\right)\beta = \frac{1}{a^2+b^2}(2ab + \frac{b}{a}(b^2-a^2))$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(ab + \frac{b^3}{a}\right) = \frac{b}{a(a^2+b^2)}(a^2+b^2) = \frac{b}{a}$$

por tanto,

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)\beta = \frac{b}{a},$$

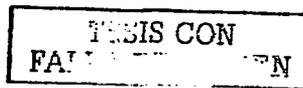
de donde,  $\beta = \frac{b}{a^2+b^2}$ , y

$$\alpha = -\frac{1}{a(a^2+b^2)}(b^2-a^2) + \frac{b}{a}\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{a(a^2+b^2)}\{-b^2 + a^2 + b^2\}$$

$$\equiv \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Por tanto,  $\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2+b^2}(a, b) = \frac{1}{a^2+b^2}\mathbf{p}$ .

■



**Teorema A.4.** Sean  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$ . Entonces, las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}.$$

Demostración. En efecto, sean  $\mathbf{p} = (a, b)$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$  y  $\mathbf{r} = (c, d)$ , entonces

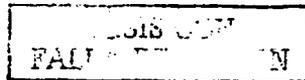
$$\begin{aligned} \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a, b) \otimes (\alpha + c, \beta + d) \\ &= (-a(\alpha + c) + b(\beta + d), b(\alpha + c) + a(\beta + d)) \\ &= (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (-ac + bd, ad + bc) \\ &= (a, b) \otimes (\alpha, \beta) \oplus (a, b) \otimes (c, d) \\ &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} &= (a + \alpha, b + \beta) \otimes (c, d) \\ &= (-c(a + \alpha) + d(b + \beta), d(a + \alpha) + c(b + \beta)) \\ &= (-ca + db, da + cb) \oplus (-c\alpha + d\beta, d\alpha + c\beta) \\ &= (a, b) \otimes (c, d) \oplus (\alpha, \beta) \otimes (c, d) \\ &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}. \end{aligned}$$

**Teorema A.5.** La operación  $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es conmutativa. En efecto si  $\mathbf{p} = (a, b)$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} &= (a, b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, b\alpha + a\beta) = (-\alpha a + \beta b, \alpha b + \beta a) \\ &= (\alpha, \beta) \otimes (a, b) = \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}. \end{aligned}$$



Los siguientes resultados son satisfechos para la operación  $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ .

**Teorema A.6.** Sean  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ . Entonces

$$\text{i) } \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}} \otimes \overline{\mathbf{p}}.$$

$$\text{ii) } \mathbf{p} \otimes \overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{p} = -(a^2 + b^2, 0),$$

$$\text{iii) } \overline{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{q} \oplus \overline{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{p} = -2(a\alpha + b\beta, 0).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}} &= \overline{(a, b) \otimes (\alpha, \beta)} = \overline{(-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha)} = \overline{(-a\alpha + b\beta, -a\beta - b\alpha)} \\ &= (\alpha, -\beta) \otimes (a, -b) = \overline{\mathbf{q}} \otimes \overline{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

También,

$$\mathbf{p} \otimes \overline{\mathbf{p}} = (a, b) \otimes (a, -b) = (-a^2 - b^2, 0) = -(a^2 + b^2, 0).$$

Finalmente, se tiene que:

$$\overline{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{q} = (a, -b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha - b\beta, -b\alpha + a\beta),$$

y

$$\overline{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{p} = (\alpha, -\beta) \otimes (a, b) = (-\alpha a - \beta b, -\beta a + \alpha b),$$

TESIS CON  
FALLA DE ... EN

por tanto,

$$\bar{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{p} = -2(a\alpha + b\beta, 0).$$

Tomando en cuenta la transformación  $T_R : \mathbb{C}_R \rightarrow \mathfrak{R}$ , definida en incisos anteriores, observamos que la siguiente relación es satisfecha:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -\frac{1}{2} T_R \{ \bar{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{p} \}.$$

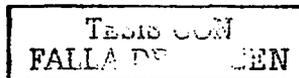
## A.2 Otra parametrización de rotaciones.

Se presenta ahora una transformación lineal  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, que se construirá al tomar el conjugado de la transformación  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida en la sección anterior. Tal transformación resultará ser una rotación, puesto que será ortogonal y su determinante será positivo. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la transformación aquí construida. Sea entonces la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida por:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2. \quad (\text{A.2})$$

Algunas propiedades de la transformación definida anteriormente serán estudiadas a continuación.

**Teorema A.7.** La transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es lineal ortogonal de determinante positivo.



Demostración. En efecto, siendo  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$  y tomando en cuenta la distributividad de la operación  $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , el teorema 1.16 y la conmutatividad de la multiplicación, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r})} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r}} \} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}} \oplus \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}} \} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{q}} \otimes \overline{\mathbf{p}} \oplus \overline{\mathbf{r}} \otimes \overline{\mathbf{p}} \} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{p}} \otimes \overline{\mathbf{q}} \oplus \overline{\mathbf{p}} \otimes \overline{\mathbf{r}} \} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}} \otimes \overline{\mathbf{q}} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}} \otimes \overline{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

También,

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \otimes (\alpha \mathbf{q}) = \alpha \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \alpha \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= -\frac{1}{2} T_R \{ \overline{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \otimes \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \overline{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r})} \otimes \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \} \\ &= -\frac{1}{2} T_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) \oplus (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \right\} \end{aligned}$$

TESIS CON  
FALLA DE CALIFICACION

Al desarrollar esta última expresión se obtiene el resultado buscado pues, siendo  $\mathbf{p} = (a,b)$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha,\beta)$ , y  $\mathbf{r} = (c,d)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) \oplus (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) &\equiv -2 \|\mathbf{p}\|^2 (c\alpha + d\beta, 0) \\ &= -2 \|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{T}_R^{-1} \{ \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle \}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle \equiv \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.$$

Finalmente, al observar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{e}_1) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{(a,b) \otimes (1,0)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-a, -b), \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{e}_2) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{(a,b) \otimes (0,1)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (b, -a), \end{aligned}$$

la matriz de  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , está dada por:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

de donde  $\det \mathbf{M}_{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet)} = 1$ .

**Teorema A.8.** La transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  puede ser representada en la forma siguiente:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a \mathbf{I} - b \mathbf{W}\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I} + b \mathbf{W}\},$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

donde  $\underline{I} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la transformación identidad y la transformación  $\underline{W} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  está dada por

$$\underline{W} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1.$$

**Demostración.** En efecto, es suficiente con observar que la matriz de  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ -a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Obsérvese que la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en esta parte, es el negativo de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ . Para encontrar la representación exponencial de dicha transformación, es necesario, como en el caso de dicha sección, interpretar físicamente los parámetros de la misma en términos de la geometría definida por el producto interno usual en  $\mathfrak{R}^2$ . Para esto, es de fundamental importancia el resultado presentado en el teorema siguiente.

**Teorema A.9.** Sea  $\mathbf{u} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\cos \theta = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} a, \quad \text{Sen } \theta = \pm \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} b,$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ .



Demostración. En efecto, el coseno del ángulo formado por los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Cos } \theta &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \{ \langle (q_0, q_1), \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-aq_0 + bq_1, -aq_1 - bq_0) \rangle \} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{p}\|} \{-aq_0^2 - aq_1^2\} \equiv -\frac{a}{\|\mathbf{p}\|}. \end{aligned}$$

Además, de la relación  $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$ , se obtiene:

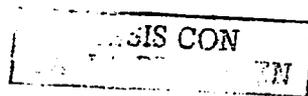
$$\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta = 1 - \frac{a^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \{\|\mathbf{p}\|^2 - a^2\} = \frac{b^2}{\|\mathbf{p}\|^2}.$$

Por tanto,  $\text{Sen } \theta = \pm \frac{b}{\|\mathbf{p}\|}$ .

Al utilizar el teorema anterior, se obtiene la siguiente representación de la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ .

**Corolario A.1.** La transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , admite la siguiente representación:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \text{Sen } \theta \mathbf{W}.$$



Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) &= -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} (a \underline{\mathbf{I}} + b \underline{\mathbf{W}}) = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-\|\mathbf{p}\| \cos \theta \underline{\mathbf{I}} \pm \|\mathbf{p}\| \sin \theta \underline{\mathbf{W}}\} \\ &= \cos \theta \underline{\mathbf{I}} \pm \sin \theta \underline{\mathbf{W}}. \end{aligned}$$

**Teorema A.10.** Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces, la siguiente igualdad es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{q}\|^2 \underline{\mathbf{e}}_3 \equiv (0, 0, -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2).$$

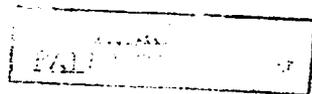
Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv q_0 \{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1\} \underline{\mathbf{e}}_3 \\ &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a q_0 q_1 - b q_0^2 + a q_0 q_1 - b q_1^2\} \underline{\mathbf{e}}_3 \\ &\equiv -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{q}\|^2 \underline{\mathbf{e}}_3 \equiv (0, 0, -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2). \end{aligned}$$

■

**Corolario A.2.** Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces, la igualdad siguiente es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv (0, 0, \pm \sin \theta \|\mathbf{q}\|^2).$$



Demostración. El resultado se obtiene de combinar los teoremas 1.21 y 1.22.

**Observación A.1.** La representación dada en el corolario 2.2 de la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , es la misma que la representación trigonométrica de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en la sección 1.2. Además se observa que la representación exponencial de  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  está dada también por el corolario 1.2, esto es

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n!} \mathbf{W}_0^n,$$

donde  $\mathbf{W}_0 = \theta \mathbf{W}$ .

### A.3 Algunas interpretaciones geométricas.

El objetivo de esta sección es presentar algunos resultados que permitirán encontrar los ángulos formados entre los vectores obtenidos al aplicar las transformaciones  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  al vector  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ . Dichos resultados se resumen en el teorema siguiente.

**Teorema A.11.** Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$  y sean  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in \mathfrak{R}^2$  los vectores definidos por:

$$\mathbf{u}_1 = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{u}_3 = \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

respectivamente, entonces,

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \{ (a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1 \},$$



$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = -\|\mathbf{q}\|^2.$$

**Demostración.** En efecto, es suficiente observar que:

$$\mathbf{u}_1 = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (aq_0 - bq_1, aq_1 + bq_0),$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (aq_0 - bq_1, -aq_1 - bq_0),$$

$$\mathbf{u}_3 = \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-aq_0 + bq_1, aq_1 + bq_0),$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-aq_0 + bq_1, -aq_1 - bq_0),$$

y el resultado buscado se obtiene al realizar el producto interno de los vectores.

**Corolario A.3.** Sean  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  los ángulos formados por los vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$ , respectivamente, entonces,

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\|q\|^2 \|p\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\cos \theta_2 = -\frac{1}{\|q\|^2 \|p\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\cos \theta_3 = -1.$$

**Demostración.** En efecto, utilizando los resultados del teorema anterior, se tiene que:

$$\cos \theta_1 = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \|u_2\|} = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2 \|p\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\langle u_2, u_4 \rangle}{\|u_2\| \|u_4\|} = \frac{\langle u_2, u_4 \rangle}{\|q\|^2} = -\frac{1}{\|q\|^2 \|p\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\langle u_1, u_4 \rangle}{\|u_1\| \|u_4\|} = \frac{\langle u_1, u_4 \rangle}{\|q\|^2} = -1.$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Apéndice B

## Programa de simulación y control

<pre>Rob[p_,q_]:={-p[[1]]*q[[1]]+p[[2]]*q[[2]],-p[[1]]*q[[2]]- p[[2]]*q[[1]]};  Off[General::spell,General::spell1]  ClearAll[q0,q3,q,"p**","r**","s**","t**","u**","v**","w**","x**"]; e1 = {1,0}; e2 = {0,1};  l1 = 150; l2 = 150; l3 = 150; l4 = 150; l5 = 150; l6 = 150; lpot = 86.6025; l = 334.8054; l36 = 150; l39 = 150;</pre>	<p>Operación rotación variante.</p> <p>Limpieza de variables.</p> <p>Dimensionamiento del robot.</p>
--	--

Tetha1 = 16.2\*Degree;  
Tetha2 = 112.9839\*Degree;  
Tetha3 = 135\*Degree;  
Tetha4 = 232.8202\*Degree;  
Tetha5 = 255.6\*Degree;  
Tetha6 = 353.9360\*Degree;  
alfa = 19.9274\*Degree;  
TethaPot = (150+alfa)\*Degree;

L14 = {I Cos[60 Degree], I Sin[60 Degree]};  
L17 = {-I Cos[60 Degree], I Sin[60 Degree]};

P = -{Cos[Tetha1], Sin[Tetha1]}; Q = -  
{Cos[Tetha2], Sin[Tetha2]};  
R = -{Cos[Tetha3], Sin[Tetha3]}; S = -  
{Cos[Tetha4], Sin[Tetha4]};  
T = -{Cos[Tetha5], Sin[Tetha5]}; U = -  
{Cos[Tetha6], Sin[Tetha6]};  
V = -{Cos[TethaPot], Sin[TethaPot]};

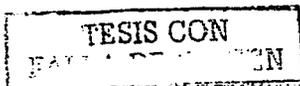
p = {p0,p1}; q = {q0,q1}; r = {r0,r1};  
s = {s0,s1}; t = {t0,t1}; u = {u0,u1};  
v = {v0,v1};

Ángulos en la configuración  
no deformada.

Vectores de posición  
respecto a la tierra del  
sistema.

Definición de complejos en la  
configuración no deformada.

Definición de complejos en la  
configuración deformada.



$m = -\{\text{Cos}[-30 \text{ Degree}], \text{Sin}[-30 \text{ Degree}]\};$   
 $n = -\{\text{Cos}[30 \text{ Degree}], \text{Sin}[30 \text{ Degree}]\};$

(\* Pata No.1 \*)

$e11 = \text{Rob}[p, \text{Rob}[P, e1]];$   
 $e21 = \text{Rob}[p, \text{Rob}[P, e2]];$   
 $e12 = \text{Rob}[q, \text{Rob}[Q, e1]];$   
 $e22 = \text{Rob}[q, \text{Rob}[Q, e2]];$   
 $L1 = l1 * e11; L2 = l2 * e12; R3 = L1 + L2;$

(\* Triángulo \*)

$e17 = \text{Rob}[v, \text{Rob}[V, e1]];$   
 $e27 = \text{Rob}[v, \text{Rob}[V, e2]];$   
 $e18 = \text{Rob}[m, e17];$   
 $e28 = \text{Rob}[m, e27];$   
 $e19 = \text{Rob}[n, e17];$   
 $e29 = \text{Rob}[n, e27];$   
 $Lpot = lpot * e17; L36 = l36 * e18; L39 = l39 * e19;$

(\* Pata No.2 \*)

$e13 = \text{Rob}[r, \text{Rob}[R, e1]];$   
 $e23 = \text{Rob}[r, \text{Rob}[R, e2]];$   
 $e14 = \text{Rob}[s, \text{Rob}[S, e1]];$   
 $e24 = \text{Rob}[s, \text{Rob}[S, e2]];$   
 $L3 = l3 * e13; L4 = l4 * e14; R6 = L3 + L4 + L14;$

Definición de complejos en la configuración deformada sobre la plataforma.

Bases y vectores de posición no deformados y deformados sobre la pata 1.

Bases y vectores de posición no deformados y deformados sobre el triángulo asociado con la plataforma.

Bases y vectores de posición no deformados y deformados sobre la pata 2.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<p>(* Pata No.3 *)  e15 = Rob[t,Rob[T,e1]]; .  e25 = Rob[t,Rob[T,e2]];  e16 = Rob[u,Rob[U,e1]];  e26 = Rob[u,Rob[U,e2]];  L5=l5*e15; L6=l6*e16; R9= L5 + L6 + L17;</p> <p>(* Vector al centroide *)  Rpot = L1+L2+Lpot;</p>	<p>Bases y vectores de posición no deformados y deformados sobre la pata 3.</p> <p>Vector de posición del punto pot sobre la plataforma.</p>
<p><b>Solución de ecuaciones para una recta</b>  (* Definición de HOME *)</p> <p>HOME = {0.205595,195.087};</p> <p>S0={70,250};  S1={70,150};</p> <p>ClearAll[p0,p1,q0,q1,r0,r1,s0,s1,t0,t1,u0,u1,v0,v1, solucion];</p>	<p>Cinemática inversa para el problema de una recta.</p> <p>Coordenadas del "home" del robot (coordenadas del punto pot).</p> <p>Punto inicial y final de la recta</p>

```

i=1;
ip0=-Cos[Tetha1*Degree];ip1=Sin[Tetha1*Degree];
iq0=-Cos[Tetha2*Degree];iq1=Sin[Tetha2*Degree];
ir0=-Cos[Tetha3*Degree];ir1=Sin[Tetha3*Degree];
is0=-Cos[Tetha4*Degree];is1=Sin[Tetha4*Degree];
it0=-Cos[Tetha5*Degree];it1=Sin[Tetha5*Degree];
iu0=-Cos[Tetha6*Degree];iu1=Sin[Tetha6*Degree];

```

(\* Ecuaciones de Lazo \*)

```

f0 = N[R3[[1]]];
f1 = N[R3[[2]]];
g0 = N[R6[[1]]];
g1 = N[R6[[2]]];
h0 = N[R9[[1]]];
h1 = N[R9[[2]]];

```

(\* DESDE HOME A PUNTO INICIAL \*)

```

nstep = 10;
inc=0; inct=1/nstep;
For[Theta = 0;t=0,t<=0.9,Theta += inc;t+=inct,

```

```

    px= HOME[[1]]+(S0[[1]]-HOME[[1]])*t;
    py= HOME[[2]]+(S0[[2]]-HOME[[2]])*t;
    puntop[i]={px,py,Theta};
    v0 = -Cos[Theta Degree];
    v1 = Sin[Theta Degree];

```

Valores iniciales.

Ecuaciones de lazo definidas sobre los puntos de las aristas de la plataforma.

Ángulo de "0" grados de la plataforma.

Punto en movimiento del punto de la plataforma y complejos sobre la plataforma.

```

p3x = N[ px - Lpot[[1]]];
p3y = N[ py - Lpot[[2]]];
p6x = N[ p3x + L36[[1]]];
p6y = N[ p3y + L36[[2]]];
p9x = N[ p3x + L39[[1]]];
p9y = N[ p3y + L39[[2]]];

```

```

solucion[t]=FindRoot[{ f0 == p3x,
f1 == p3y,
g0 == p6x,
g1 == p6y,
h0 == p9x,
h1 == p9y,

```

```

p0^2 + p1^2 == 1,
q0^2 + q1^2 == 1,
r0^2 + r1^2 == 1,
s0^2 + s1^2 == 1,
t0^2 + t1^2 == 1,
u0^2 + u1^2 == 1},

```

```

{p0,ip0},{p1,ip1},
{q0,iq0},{q1,iq1},
{r0,ir0},{r1,ir1},
{s0,is0},{s1,is1},
{t0,it0},{t1,it1},
{u0,iu0},{u1,iu1},

```

Ecuaciones de lazo.

Solución del problema cinemático inverso completo; es decir, todos los lazos en una sola corrida. Modelo del home al punto inicial.

```
MaxIterations->15];
```

```
=p0/.solucion[t];  
=p1/.solucion[t];  
=q0/.solucion[t];  
=q1/.solucion[t];  
=r0/.solucion[t];  
=r1/.solucion[t];  
=s0/.solucion[t];  
=s1/.solucion[t];  
=t0/.solucion[t];  
=t1/.solucion[t];  
=u0/.solucion[t];  
=u1/.solucion[t];
```

```
](*Cierra FindRoot*)
```

```
(* DE PUNTO INICIAL A PUNTO FINAL EN  
LINEA RECTA *)
```

```
nstep = 20;  
inc=0; inct=1/nstep;
```

```
For[Theta = 0;t=0,t<=1,Theta += inc;t+=inct,  
px=S0[[1]]+(S1[[1]]-S0[[1]])*t;  
py=S0[[2]]+(S1[[2]]-S0[[2]])*t;  
punto[i]={px,py,Theta};  
v0 = -Cos[Theta Degree];
```

Solución del problema  
cinemático inverso completo;  
es decir, todos los lazos en  
una sola corrida. Modelo del  
punto inicial al punto final.

```

v1 = Sin[Theta Degree];
p3x = N[ px - Lpot[[1]]];
p3y = N[ py - Lpot[[2]]];
p6x = N[ p3x + L36[[1]]];
p6y = N[ p3y + L36[[2]]];
p9x = N[ p3x + L39[[1]]];
p9y = N[ p3y + L39[[2]]];

```

```

solucion1[i]=FindRoot[{f0 == p3x,
                      f1 == p3y,
                      p0^2 + p1^2==1,
                      q0^2 + q1^2==1},
                    {p0,ip0},{p1,ip1},
                    {q0,iq0},{q1,iq1},
                    MaxIterations->50];

```

```

If[N[Abs[(f0-p3x/.solucion1[i])]<10^-5 &&
Abs[(f1-p3y/.solucion1[i])]<10^-5],
ip0=p0/.solucion1[i];ip1=p1/.solucion1[i];
iq0=q0/.solucion1[i];iq1=q1/.solucion1[i];

```

```

Print["No se-encontró solución1 para Theta =
",Theta];
ip0=.1;ip1=.8;iq0=.5;iq1=.1];

```

(\*pata 2\*)

```

solucion2[i]=FindRoot[{g0==p6x,
                      g1==p6y,
                      r0^2+r1^2==1,

```

TESIS CON  
FALLA DE ... EN

```

s0^2+s1^2==1},
{r0,ir0},{r1,ir1},
{s0,is0},{s1,is1},
MaxIterations->50];

```

```

If[N[Abs[(g0-p6x/.solucion2[i])<10^-5 &&
Abs[(g1-p6y/.solucion2[i])<10^-5],
ir0=r0/.solucion2[i];ir1=r1/.solucion2[i];
is0=s0/.solucion2[i];is1=s1/.solucion2[i],

```

```

Print["No se encontró solución2 para Theta =
",Theta];
ir0=.5;ir1=.8;is0=.5;is1=.8];

```

(\*pata 3\*)

```

solucion3[i]=FindRoot[{h0==p9x, h1==p9y,
t0^2 + t1^2==1, u0^2 + u1^2==1},
{t0,it0},{t1,it1},{u0,iu0},{u1,iu1},
MaxIterations->50];

```

```

If[N[Abs[(h0-p9x/.solucion3[i])<10^-5 &&
Abs[(h1-p9y/.solucion3[i])<10^-5],
it0=t0/.solucion3[i];it1=t1/.solucion3[i];
iu0=u0/.solucion3[i];iu1=u1/.solucion3[i],

```

```

Print["No se encontró solución3 para Theta =
",Theta];
it0=.5;it1=.8;iu0=.5;iu1=.8];

```

<pre> j++; ]; </pre>	
<p><b>Graficación para visualizar la trayectoria seleccionada</b></p> <pre> For[j=1,j&lt;i,j++,solp[j]={p0,p1}/.solucion1[j];   [j]={q0,q1}/.solucion1[j];   solr[j]={r0,r1}/.solucion2[j];   [j]={s0,s1}/.solucion2[j];   [j]={t0,t1}/.solucion3[j];   solu[j]={u0,u1}/.solucion3[j]];  g2 = {};  nstep = 10; inc=0; inct=1/nstep; For[Theta = 0;t=0,t&lt;=.9,Theta += inc;t+=inct,    px= HOME[[1]]+(S0[[1]]-HOME[[1]])*t;   py= HOME[[2]]+(S0[[2]]-HOME[[2]])*t;   puntop[i]={px,py,Theta};   v0 = -Cos[Theta Degree];   v1 = Sin[Theta Degree];   p3x = N[ px - Lpot[[1]]];   p3y = N[ py - Lpot[[2]]];   p6x = N[ p3x + L36[[1]]];   p6y = N[ p3y + L36[[2]]];   p9x = N[ p3x + L39[[1]]];   p9y = N[ p3y + L39[[2]]]; </pre>	<p>Bucle de graficación de los resultados.</p>

```

punto2=N[{L1[[1]],L1[[2]],0}]/.solucion[t];
punto3=N[{R3[[1]],R3[[2]],0}]/.solucion[t];
punto4=N[{L14[[1]],L14[[2]],0}]/.solucion[t];
punto5=N[{L14[[1]]+L3[[1]],L14[[2]]+L3[[2]],0}]/.solucion[t];
punto6=N[{R6[[1]],R6[[2]],0}]/.solucion[t];
punto7=N[{L17[[1]],L17[[2]],0}]/.solucion[t];
punto8=N[{L17[[1]]+L5[[1]],L17[[2]]+L5[[2]],0}]/.solucion[t];
punto9=N[{R9[[1]],R9[[2]],0}]/.solucion[t];
puntoPOT=N[{R3[[1]]+Lpot[[1]],R3[[2]]+Lpot[[2]],0}]/.solucion[t];

g2={Graphics3D[{PointSize[0.01],Point[puntoPOT],
  RGBColor[0,1,0]}],g2};

g3 = Graphics3D[

(* triángulo *)
{{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1],
Line[{punto3,punto6}],
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1],
Line[{punto6,punto9}],
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1],
Line[{punto3,punto9}],
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1],
Line[{punto3,puntoPOT}}],

```

```

(* pata 1 *)
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0],
Line[{{0,0,0},punto2}],
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0],
Line[{punto2,punto3}]},

(* pata 2 *)
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0],
Line[{punto4,punto5}],
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0],
Line[{punto5,punto6}]},

(* pata 3 *)
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0],Line[{punto
7,punto8}]},
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0],
Line[{punto8,punto9}]
};

Show[g3,g2,
>{{-400,400},{-200,600},{0,0}},
>{0,0,4.778}
];

```

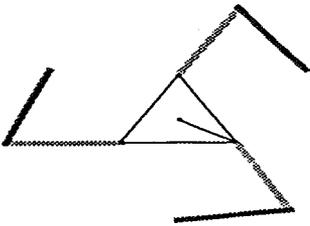
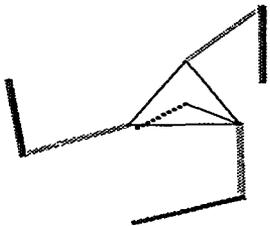
	<p>Salida gráfica de la configuración no deformada</p>
	<p>Salida gráfica de la configuración deformada para el punto extremo de la línea recta.</p>

Tabla B.1 Programación y salida gráfica del modelo del robot paralelo usando una rotación variante del álgebra de complejos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Referencias

- <sup>1</sup> Mark J. Robillard. *Advanced Robot Systems*. Howard Sams and Co. 1984.
- <sup>2</sup> Werner J. Holzbock. *Robotic Technology: Principles and Practice*. Van Nostrand Reinhold Co, 1986.
- <sup>3</sup> Wesley E. Zinder. *Industrial Robots: Computer Interfacing and Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- <sup>4</sup> Latombe, J. C., *Robot motion planning*. Kluwer Academic Publishers. Boston. MA, 1991.
- <sup>5</sup> Charles C. Nguyen, Mo Jamshidi. "Guest Editorial: Parallel Closed Kinematic Chain Manipulator or Devices". *Journal of Robotic System*. 10(s), pp 557-560. 1993.
- <sup>6</sup> Min Ki Lee, Kun Woo Park. "Kinematic and Manipulator for Enlarging Workspace and Avoiding Singularities". *IEEE Transaction on Robotics and Automation* Vol. 15. No. 6. 1999.
- <sup>7</sup> Winsama Khalil, Sebastien Besnard. "Self Calibration of Stewart-Gough Parallel Robots Whitout Extra Sensors". *IEEE Transaction on Robotics and Automation* Vol. 15. No 6. 1999.

- <sup>8</sup> Pierre Merlet, Jean. Parallel Robots: Solid Mechanics and its applications. Vol. 74. Ed. Kluwer Academic Publishers. U.S.A. 2000.
- <sup>9</sup> Long-Wen Tsai. Robot Analysis: The Mechanics of Several and Parallel Manipulators. Ed. Wiley Interscience. 1999.
- <sup>10</sup> James L. Fuller. Robotics "Introduction, Programming and Projects". Maxwell Mac Millan International Editions. U.S.A. 1991.
- <sup>11</sup> Joseph Duffy. Statics and Kinematics with Applications to Robotics. Cambridge University Press. U.S.A. 1996.
- <sup>12</sup> Mohammad Jamshidi, Charles Nguyen, Ronald Lumia. Robotics and Manufacturing. Recent Trends in Research, Education and Applications. Vol. 5. Ed. ASME Press. 1994.
- <sup>13</sup> Richard D. Klafner, Thomas A. Chmielewski, Michael Negin. Robotic Engineering "An Integrated Approach". Prentice Hall. U.S.A. 1989.
- <sup>14</sup> Hunt, K. H., Structural kinematics of parallel actuated robot arms. J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983.
- <sup>15</sup> Kumar, V., Characterization of workspaces of parallel manipulators. ASME J. of Mechanical Design, 1992.
- <sup>16</sup> Pennock, G. R. And Kassner, D. J., The workspace of a general geometry planar three degree of freedom platform manipulator. ASME J. of Mechanical Design, 1993.

- 17 Williams II, R. L. And Reinhoktz, C. F. Closed-form workspace determination and optimization for parellel robot mechanism. In ASME Proc. Of the 20<sup>th</sup> Bional Mechanisms Conf., Kissimmee, Orlando, 25-27 September 1988.
- 18 Ma. O. and Angeles, J., Direct kinematics and dynamics of planar three-dof parallel manipulator. In ASME Design and Automation Conf., Montreal, 17-20 September 1989, Vol. 3.
- 19 Gosselin, C. and Angeles, J., The optimum kinematic design of planar three-degree-of-freedom parallel manipulator. J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1988, 110 (1), 35.
- 20 Kassner, D. J., Kinemetics análisis of planar three-degree-of-freedom platform-type robot manipulator. Master's thesis, Purdue University, Purdue, December, 1990.
- 21 Goertz, R. C., "Fundamentals of General-Purpose Remote Manipulators" Nucleonics, Vol. 10, No. 11, pp. 36-42, 1952.
- 22 Hogan, N., "Impedance Control: An Approach to Manipulation, Part I - II - III," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 107, March 1985.
- 23 Clavel, R., "Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté," Ph.D. Thesis, EPFL, Lausanne, Switzerland, 1991.
- 24 Clavel, R., "Device for the Movement and Positioning of an Element in Space," US Patent No. 4,976,582. December 11, 1990.

- <sup>25</sup> "Demaurex change de mains mais reste suisse," ROBAUT, J'automatise, No. 8, January-February 2000.
- <sup>26</sup> Parallel Kinematic Machines: Theoretical Aspects and Industrial Requirements, C. R. Boër, L. Molinari-Tosatti, and K.S. Smith (Eds), Springer-Verlag, 1999.
- <sup>27</sup> Reboulet, C., Leguay, S., "The Interest of Redundancy for the Design of a Spherical Parallel Manipulator," Recent Advances on Research Kinematics, pp. 369-378, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- <sup>28</sup> Birglen, L., Gosselin, C. M., Pouliot, N., Monsarrat, B., Laliberté T., "SHaDe, A New 3-DOF Haptic Device," to appear in the IEEE Transaction on Robotics and Automation, 2001.
- <sup>29</sup> Reyes, Luis. "Sobre la parametrización de las Rotaciones y Reflexiones de Multicuerpos Rígidos en el plano". Estudios Ocasionales. Universidad Anahuac del Sur. ISBN 968-64-02-08-X (1998).
- <sup>30</sup> Jiménez L. Eusebio. "Sobre la parametrización de las Rotaciones y Reflexiones de Multicuerpos Rígidos en el plano: Modelación Cinemática de un robot de dos grados de libertad". Informe Interno de Investigación No. DEPFI-SME-MME-DMEC-CDMR-01-2002. UNAM, Facultad de Ingeniería (2002).
- <sup>31</sup> Pérez C. J. Alejandro. "Caracterización y prueba de las secuencias simultáneas de un robot paralelo experimental tipo RRR". Tesis de grado de Maestro en Ingeniería Mecánica. DEPFI, UNAM (2001).
- <sup>32</sup> Wolfram Stephen. "Mathematica: A System for doing Mathematics by computer". Addison-Wesley, 1992.

- 33 <http://www.parallemic.org/WhosWho/Companies/Profile001.html>
- 34 <http://www.elekta.com/contentinternational.nsf>
- 35 <http://www.srl-berlin.de/>
- 36 <http://www.hexel.com/hexabot.htm>
- 37 <http://www.hia.rwth-aachen.de/research/cht/indexE.html>
- 38 [http://www.physikinstrumente.com/newsletter/ausgaben\\_e/25/hexapod\\_operation\\_robot.html](http://www.physikinstrumente.com/newsletter/ausgaben_e/25/hexapod_operation_robot.html)