UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

FREGE Y LA SEMÁNTICA DE LOS NUMERALES

TESINA

PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Licenciado en Filosofía

PRESENTA:

Raúl Saucedo Ceballos

Asesor: **Dr. Mario Gómez Torrente**
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

MÉXICO, D.F., CD. UNIVERSITARIA, 2003

Contenidos

Esta tesina es en gran parte un producto de un seminario de posgrado sobre Logicismo y Neo-logicismo que tomé en el departamento de filosofía de la Universidad de California, Berkeley, en el otoño del 2002, llevado conjuntamente por los profesores John MacFarlane y Paolo Mancosu. La sesión en la que MacFarlane ofreció una discusión exhaustiva sobre las secciones 57-61 de los *Fundamentos de la aritmética* de Frege fue de hecho lo que motivó buena parte de la investigación y la reflexión que se han cristalizado en mucho de lo aquí expuesto. A los participantes en dicho seminario y a MacFarlane en particular agradezco por la tan rica discusión filosófica que dio lugar a este proyecto.

Asimismo, quiero agradecer inmensamente a mi asesor, Mario Gómez Torrente. Su cuidadosa revisión de varias versiones este texto y sus comentarios ayudaron a clarificar y mejorar notablemente tanto la estructura como el contenido de la tesina. Aprovecho la ocasión para agradecerle también por todo el apoyo que me ha brindado a lo largo de los últimos tres años. Igualmente, quisiera dar gracias a los miembros de mi jurado, Axel Barceló, Maite Ezcurdia, Salma Saab y Lourdes Valdivia por haber padecido versiones preliminares de este escrito. A Mario y a ellos agradezco enormemente su paciencia y apoyo en esta parte del proceso de titulación.

Estoy también en deuda con mi madre, Lucía, con mi tía, Bety, y, en particular, con mi hermana, Rocío. Sin su tiempo y ayuda mi título de licenciatura simplemente no hubiera visto la luz en el tiempo adecuado. A mi amigo Rodrigo Ortiz también le debo mucho en este sentido, aunque igualmente en muchos otros. Nuestras pláticas y, en general, nuestra amistad a lo largo de la licenciatura me han nutrido mucho más de lo que puedo mencionar en un par de líneas. Asimismo, a mi amiga Ana Álvarez debo mucho más de lo que es posible decir aquí. Su incisiva agudeza y su espíritu creativo más de una vez me han dejado perplejo al sugerir nuevas e interesantes maneras de entender las cosas. Finalmente, quisiera dar gracias a June Gruber por todo su apoyo a lo largo de este último año y medio. Sin su paciencia, cariño y compañía hubiera sido casi imposible sobrellevar los tan accidentados tiempos que me han tocado vivir últimamente.

En esta tesina presento un análisis crítico de los argumentos de Frege a favor del sustantivismo como la única estrategia satisfactoria para ofrecer una semántica adecuada de los numerales. Me concentro principalmente en los argumentos que para tal propósito Frege ofrece en las §§55-61 de su *Fundamentos de la aritmética* y en la prueba de que los números son infinitos que da más adelante en el mismo texto. Como resultado de este análisis sugiero dos cosas. Primero, que la posición de Frege tiene que hacer frente a al menos tres muy serias y bien conocidas complicaciones: la del conocimiento, la referencia y la identificación de los objetos particulares que, en un marco sustantivista, han de ser la referencia de los numerales. Segundo, que a pesar de que su postura debe enfrentar tales graves dificultades, Frege tiene un argumento sumamente fuerte para defenderla, uno que ha sido bastante poco tomado en cuenta en la literatura pertinente y que creo que vale la pena considerarse seriamente.

Dada la encrucijada en que nos deja el que la posición de Frege tenga serios problemas que enfrentar y, a un mismo tiempo, un poderoso argumento a su favor, insinúo que hasta el momento no puede adoptarse una postura concluyente sobre la semántica de los numerales. Pienso, contrario a lo que muchos sostienen, que no es obvio que el sustantivismo esté refutado y que el adjetivismo sea una opción viable, así como tampoco que toda versión del adjetivismo esté de antemano cancelada y que sea posible defender satisfactoriamente al sustantivismo de los problemas que se le han puesto enfrente. Sostengo, pues, que en la semántica de los numerales el campo aún está abierto para una investigación seria y creativa.

En nuestro uso cotidiano del lenguaje empleamos numerales todo el tiempo[1]. Sin embargo, generalmente no los usamos de manera uniforme. Considérense los siguientes ejemplos: "Lucy tiene 2 hijos", "Hay 2 libros sobre la mesa", "2 es la suma de 1 más 1" y "2 es el sucesor de 1". Como puede notarse, en algunas ocasiones los empleamos como adjetivos y en otras como sustantivos o términos singulares. El que hagamos estos dos usos de los numerales sugiere preguntas interesantes sobre cómo ha de analizárselos semánticamente. En primer lugar, ¿podemos ofrecer análisis independientes de sus dos usos sin dar cuenta de cómo están relacionados, o debemos más bien dar una semántica "unificada", una que muestre cómo ambos usos están conectados? Segundo, si debemos dar un análisis unificado, ¿diremos que los usos de los numerales como sustantivos son los primarios desde una perspectiva semántica, y que sus usos como adjetivos han de reconstruirse en términos de estos, o sostendremos más bien que sus usos adjetivistas son los primarios, y que sobre la base de estos ha de darse cuenta de sus usos sustantivistas? En otras palabras, ¿diremos que los numerales han de ser concebidos como términos singulares genuinos, es decir, como términos que refieren a objetos auto-subsistentes, o defenderemos más bien que su función no es referencial o designativa, sino aquella con la que cumplen en casos como "Hay 2 libros sobre la mesa"?

[1] Con numerales me refiero a cosas como '2' y '4', así como a palabras del lenguaje natural como 'dos' y 'cuatro'. La diferencia entre estos dos tipos de expresiones no es relevante para nuestros propósitos.

En esta tesina exploro y examino algunas ideas de Frege sobre estas cuestiones. Frege está interesado en un análisis semántico de los numerales que sea apropiado para "los propósitos de la ciencia"[2]. Él sostiene que una semántica adecuada para tales propósitos debe ofrecer una reconstrucción de los numerales que unifique sus dos principales usos. Esto quiere decir, por un lado, que un análisis semántico satisfactorio de los numerales debe dar cuenta de cómo sus dos usos están relacionados, y, por otro, que no es necesario que tal análisis sea descriptivo; basta con una semántica artificial o idealizada que dé cuenta de manera unificada de los usos sustantivistas y adjetivistas de los numerales que son significativos para la ciencia. Frege toma en consideración dos estrategias alternativas a partir de las cuales dicha reconstrucción unificada podría darse. Estas estrategias no son otras que las que sugerimos al final del párrafo anterior: una defiende que los usos sustantivistas de los numerales son los primarios desde una perspectiva semántica, y que a partir de ellos hemos de reconstruir sus apariciones adjetivistas. La otra, por contraste, defiende que sus usos adjetivistas son los primarios, y que los sustantivistas han de reconstruirse en términos de estos. En la literatura filosófica se ha llamado "sustantivista" o "sustantivismo" a la primera estrategia, y "adjetivista" o "adjetivismo" a la segunda.

Frege sostiene que sólo la primera de estas estrategias es satisfactoria. Mi objetivo en esta tesina es presentar un análisis crítico de sus argumentos a favor de esta idea. En este texto examino, pues, los argumentos centrales de Frege a favor del

[2] Frege (1884), §57. Todas las traducciones de títulos en inglés son mías.

sustantivismo como la única vía satisfactoria para ofrecer una reconstrucción semántica adecuada de los usos sustantivistas y adjetivistas de los numerales que son significativos para la ciencia. Como resultado de este análisis, quiero indicar dos cosas. En primer lugar, que la posición de Frege tiene que hacer frente tres muy serios problemas: el del conocimiento, el de la referencia y el de la identificación de los objetos particulares que, desde una perspectiva sustantivista, han de ser la referencia de los numerales. En segundo, que a pesar de que su postura debe enfrentar tales graves dificultades, Frege tiene un argumento sumamente fuerte para defender el sustantivismo. Tal argumento es uno que ha sido bastante poco tomado en cuenta en la literatura relevante, y quiero dirigir nuestra atención al hecho de que vale la pena tomarlo seriamente en consideración. Ofreciendo una prueba de que los números son infinitos, el argumento a que me refiero defiende que si los números son infinitos han entonces de ser concebidos como objetos y, en consecuencia, que debemos pensar a los numerales como términos singulares genuinos que refieren a objetos, los números mismos. Dado que el sustantivismo parece tener serios problemas que enfrentar y, al mismo tiempo, un poderoso argumento a su favor, acabo sugiriendo que aún falta mucho por investigar para ofrecer una respuesta satisfactoria a la cuestión de la semántica de los numerales.

Intento alcanzar mi objetivo en tres pasos, los cuales corresponden a las tres partes en que mi texto está organizado. En la primera distingo un poco más en detalle los usos sustantivistas y adjetivistas de los numerales, indico por qué Frege piensa que una semántica adecuada de los numerales debe dar cuenta unificadamente de estos dos usos y esbozo las estrategias a partir de las cuales dicho análisis unificado podría en principio ser dado, a saber, el sustantivismo y el adjetivismo. En la segunda parte presento un análisis crítico de los argumentos centrales que Frege ofrece en las §§55-61 de los *Fundamentos de la aritmética* para dar apoyo a la estrategia sustantivista. Me concentro aquí en los tres más serios problemas que le han sido planteados a la idea de que hemos de concebir a los números como objetos auto-subsistentes sin una ubicación espacio-temporal y a los numerales como términos singulares que refrieren a ellos. En la tercera y última parte esbozo el argumento de importancia central que Frege aduce más adelante en los *Fundamentos* a favor de su posición, y, en el marco del análisis dado, sugiero que no podemos tomar este argumento como evidencia conclusiva a favor del sustantivismo y en contra de la estrategia adjetivista, así como tampoco a esta última como una alternativa adecuada. Una vez expuestas estas tres partes, ofrezco mis conclusiones.

Preliminares

1.1 Dos usos de los numerales

Como notamos en la introducción, no usamos los numerales de manera uniforme. Los empleamos más bien de dos modos aparentemente bastante distintos. Consideremos los ejemplos antes mencionados:

(1) Lucy tiene 2 hijos
(2) Hay 2 libros sobre la mesa
(3) 2 es la suma de 1 más 1
(4) 2 es el sucesor de 1

En (1) y (2), '2' tiene una función gramatical similar a la de un adjetivo, tal como 'bueno' y 'amable'. Podemos decir cosas como, por ejemplo, "Lucy tiene buenos hijos" o "Lucy tiene amables hijos", pero no cosas como "Lucy tiene Saddam Hussein hijos" o "Lucy tiene el hombre más malvado sobre la tierra hijos". De manera similar, podemos decir cosas como "Hay grandes libros sobre la mesa", pero no cosas como "Hay Bagdad libros sobre la mesa". Y aunque 2 es de hecho el número de álbumes que los Beatles sacaron en 1967, tampoco podemos decir cosas como "Lucy tiene el número de álbumes que los Beatles sacaron en 1967 hijos". Por contraste, en (3) y (4) '2' parece funcionar como un sustantivo, o, mejor dicho, como un término singular, como 'Saddam Hussein', 'Bagdad, 'el hombre más malvado sobre la tierra' y 'el número de álbumes que los Beatles sacaron en 1967'. Podemos perfectamente decir cosas como "El número de álbumes que los Beatles sacaron en 1967 es el sucesor de

PAGINACIÓN DISCONTINUA

2". Y parece que también podemos decir, al menos desde una perspectiva gramatical, cosas como "Saddam Hussein es la suma de 1 más 1", aunque esto, ciertamente, suena extraño. En cualquier caso, es claro que la función de '2' en (1) y (2) es muy distinta de aquella que tiene en (3) y (4). Dada esta distinción, digamos que en los dos primeros casos se hace un uso adjetivista de '2', y que en los dos últimos se hace un uso sustantivista de él.

1.2 La necesidad de una semántica unificada

De acuerdo con Frege, cualquier semántica satisfactoria de los numerales debe de alguna manera dar cuenta de sus dos usos. Su idea básica para defender la necesidad de una semántica unificada es la siguiente: explicar de manera independiente los usos sustantivistas y adjetivistas de los numerales no sería suficiente para dar cuenta del hecho de que las proposiciones aritméticas son aplicables y al mismo tiempo justificables independientemente de cualquier apelación a la experiencia. Piénsese en casos en los cuales empleamos los numerales sustantivista y adjetivistamente de manera conjunta, como en las aplicaciones de la aritmética en las ciencias empíricas. Si no se les da un análisis semántico uniforme, sería un misterio cómo premisas matemáticas pueden combinarse con premisas sobre el mundo físico para resultar en consecuencias verificables por las ciencias empíricas. Siguiendo el ejemplo de Dummett, si no damos una semántica que vincule ambos usos de los numerales, "no podríamos apelar a la ecuación '5 + 2 + 0 = 7' para justificar inferir que hay 7 animales en el campo del hecho de que hay allí 5 borregos, 2 vacas y ningún otro animal"[3].

[3] Dummett. (1991), p.99.

La razón principal, pues, que Frege aduce para sostener la necesidad de una semántica unificada de los numerales es que análisis semánticos independientes y no relacionados de sus dos usos no permitirían dar cuenta de la aritmética como un cuerpo de conocimiento *a priori* y aplicable a un mismo tiempo. Consecuentemente, esta razón está vinculada con las críticas de Frege a teorías filosóficas de la aritmética que explican sólo proposiciones de la aritmética pura (en las cuales los numerales son generalmente usados de manera sustantivista), sin tomar en consideración usos de los numerales en contextos aplicados (en los cuales los numerales son por lo general usados adjetivistamente).

La razón de Frege para sostener la necesidad de un análisis unificado supone, pues, que la aritmética es tanto aplicable como *a priori*. Este supuesto ha sido debatido en la literatura en distintos momentos. Pienso, sin embargo, que es difícil ponerlo en cuestión de manera radical. Por un lado, a pesar de que la cuestión del conocimiento *a priori* en general ha sido muy discutida, y de manera particular en el caso de las matemáticas, es difícil negar que al menos algunas proposiciones aritméticas pueden justificarse independientemente de cualquier apelación a evidencia empírica, como, por ejemplo, mediante una prueba. '2+2=4' es una proposición intuitivamente verdadera independientemente de que la justifiquemos apelando al hecho de que 2 peras y 2 manzanas tomadas conjuntamente son 4 piezas de fruta, y, en general, de que 2 pares de objetos cualesquiera no son sino 4 objetos tomados en conjunto. Por otro lado, sería bastante poco intuitivo sostener que las proposiciones de la aritmética no son aplicables. Quien negase que del que haya 2 peras y 2 manzanas y ninguna otra fruta en el frutero podemos concluir que hay allí 4 piezas de fruta sobre la base de que 2+2+0=4 tendría que dar cuenta de muchas cosas. Pienso, pues, que es difícil negar radicalmente que las proposiciones aritméticas son aplicables y *a priori* a un mismo tiempo. Sin embargo, no me comprometeré aquí a posición alguna sobre este tema. Para poder hacerlo tendría que ofrecerse una discusión detallada al respecto, y ello nos desviaría demasiado de nuestro objetivo. Sólo he querido indicar la razón por la cual Frege defiende que es necesario que una semántica adecuada de los numerales explique las conexiones entre sus dos principales usos, y sugerir que dicha razón es una buena razón, al menos intuitivamente.

1.3 Dos estrategias

Hemos mencionado ya que hay dos estrategias obvias que parecerían poder ofrecer en principio un análisis semántico unificado de los numerales: la sustantivista y la adjetivista. Como dijimos también, la primera consistiría en dar cuenta de los usos sustantivistas de los numerales, y reconstruir sus usos adjetivistas en términos de ellos. La segunda explicaría los usos adjetivistas, y reconstruiría los sustantivistas a partir de ellos.

De acuerdo, pues, con la estrategia sustantivista, '2' en nuestros ejemplos tiene la función semántica de un término singular, y (1) y (2) han de ser reconstruidas como "2 es el número de hijos que Lucy tiene" y "2 es el número de libros sobre la mesa", respectivamente. El adjetivismo, por contraste, analiza las apariciones sustantivistas de los numerales en términos de expresiones adjetivistas como "Hay exactamente *n* *F*s" o, en palabras del propio Frege, "el número *n* pertenece al concepto *F*"[4]. (2), por ejemplo, puede parafrasearse

[4] Como Dummett nota, la formulación fregeana de los cuantificadores numéricamente definidos es deficiente, pues en ella los numerales aparecen sustantivistamente. Cf. Dummett (1991), p. 100

como “Hay exactamente 2 x tales que x es un libro sobre la mesa”. Nótese que en este tipo de construcciones los numerales son analizados más allá de su forma gramatical superficial, quedando, pues, sin una función referencial o, contrario a lo que podría pensarse, predicativa. Esto puede verse claramente cuando las analizamos con los recursos de la lógica predicativa de primer orden. Por ejemplo, (2) en notación formal es:

$$(2') \ \exists x \exists y \, (Fx \wedge Fy \wedge x \neq y \wedge \forall z \, (Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$$

En palabras de Quine, estamos cuantificando sólo sobre F’s. Cualquier apelación a ‘2’ como un término singular o como un predicado queda disuelta.

La función de expresiones del tipo “Hay exactamente n F’s” es similar a la de un cuantificador, y es por eso que han sido llamados “cuantificadores numéricamente definidos” en la literatura. Podemos definir a los cuantificadores numéricamente definidos del siguiente modo:

1. $\exists_0 x Fx \Leftrightarrow \forall x \sim Fx$
2. $\exists_1 x Fx \Leftrightarrow \sim\forall x \sim Fx \wedge \forall x \forall y \, (Fx \wedge Fy \rightarrow x = y)$
3. $\exists_{n+1} x Fx \Leftrightarrow \exists x (Fx \wedge \exists_n y \, (Fy \wedge y \neq x))$

Siguiendo el patrón de la tercera definición, podría definirse cualquier cuantificador numéricamente definido sólo con recursos de primer orden.

Consecuentemente, siguiendo el ejemplo de Hodes, la estrategia adjetivista reconstruiría (3) en nuestros ejemplos del siguiente modo[5]:

$$(3') \ \forall X \forall Y((\exists_1 x Xx \wedge \exists_1 x Yx \wedge \sim \exists x(Xx \wedge Yx)) \rightarrow \exists_2 x(Xx \vee Yx))$$

O, lo que es lo mismo, "Si hay exactamente 1 *F* y 1 *G*, y los *F*'s y los *G*'s no coinciden, entonces hay exactamente 2 cosas que son o bien *F* o *G*". En el caso de (4) se haría uso de recursos de más alto orden. (4) se reconstruiría como "hay un cuantificador numéricamente definido *Q* que es el sucesor* del cuantificador numéricamente definido *R*", en donde "sucesor*" puede ser definido, como John MacFarlane nota, de la manera siguiente: si *Q* y *R* son cuantificadores numéricamente definidos, *R* es sucesor de *Q* sólo si

$$\exists F[RxFx \wedge \exists y(Fy \wedge Qx(Fx \wedge x \neq y))]$$

Es importante hacer algunas aclaraciones sobre los objetivos y limitaciones de estas estrategias. La motivación detrás del sustantivismo y del adjetivismo es dar un análisis semántico de los numerales que no respete su forma gramática superficial, y ofrecer reconstrucciones adecuadas de los usos de los numerales que son significativos para la ciencia. En otras palabras, estas dos estrategias no buscan dar una semántica descriptiva, fiel al lenguaje natural y que agote todos los usos adjetivistas o sustantivistas de los numerales que en él hacemos. Su propósito es más bien ofrecer una reconstrucción apropiada de ciertos usos en términos de los otros, aunque dicha reconstrucción sea artificial o idealizada y

[5] Hodes (1984), p. 140

su alcance esté limitado a los usos de los numerales relevantes para la aritmética y sus aplicaciones. La cuestión es qué usos han de ser tomados como primarios desde una perspectiva semántica en este sentido no-descriptivista y limitado a usos de los numerales significativos para la ciencia, y cuáles han de ser reconstruidos en términos de los otros, independientemente de la función gramatical que tengan superficialmente en el lenguaje natural[6]. Es importante hacer explícito también que no hay intención revisionista alguna detrás de estas estrategias. El sustantivismo y el adjetivismo son sólo estrategias de análisis semántico: el punto no es hacer una reforma del lenguaje natural tal que los numerales sean usados sólo de manera sustantivista o adjetivista. Si, por ejemplo, el análisis adjetivista resultase ser el único adecuado, ello no querría decir que nadie puede jamás volver a decir '2=1+1' en vez de 'Si hay exactamente 1 *F* y 1 *G*, y los *F*s y los *G*s no coinciden, entonces hay exactamente 2 cosas que son o bien *F* o *G*'. Querría decir sólo que no debemos concebir a '2' y '1' en '2=1+1' como términos singulares genuinos que refieren a objetos auto-subsistentes.

[6] Es claro que la estrategia adjetivista arriba esbozada no tiene los recursos suficientes para poder reconstruir todos los usos sustantivistas significativos para la ciencia. Piénsese en casos como '2 es par'. No he querido sugerir que la traducción de casos como estos puede hacerse sólo con los recursos arriba ofrecidos, ni tampoco que es sencilla o directa. Mi interés ha sido solamente indicar el modo general de proceder de esta estrategia.

2.1 La estrategia sustantivista de Frege

Hemos sugerido por qué Frege piensa que debemos dar cuenta unificadamente de ambos usos de los numerales. Hemos esbozado también las dos estrategias alternativas a partir de las cuales parecería en principio posible dar dicha reconstrucción unificada. Veremos ahora cómo Frege defiende que sólo el análisis sustantivista puede ofrecer "un concepto de número usable para los propósitos de la ciencia". En las §§55-61 de *Los fundamentos de la aritmética*, Frege presenta dos razones para dar apoyo a su posición:

(i) Los numerales son términos singulares genuinos que refieren a objetos auto-subsistentes.

(ii) La estrategia adjetivista no es viable.

Frege ofrece varios argumentos para defender estas dos tesis. Antes de examinarlos críticamente, veamos cómo establece que la estrategia sustantivista es en principio viable. En la §57 dice que

> ... no debe disuadirnos... el hecho de que en el lenguaje de la vida diaria el número aparece también en construcciones atributivas. A eso siempre puede dársele la vuelta. Por ejemplo, la proposición "Júpiter tiene cuatro lunas" puede ser convertida en "el número de lunas de Júpiter es cuatro".

Dummett sostiene que Frege afirma aquí que oraciones como "Júpiter tiene cuatro lunas" son una versión disfrazada de oraciones de forma "El número de lunas de Júpiter es cuatro", es decir, que sólo difiere su "forma superficial" y no su "estructura profunda"[7]. Pienso que Frege no dice aquí algo tan radical. Siguiendo la lectura sugerida por MacFarlane, parece que Frege está solamente notando la viabilidad de la estrategia adjetivista: los numerales tienen *de hecho* usos adjetivistas, y éstos pueden ser reconstruidos en términos sustantivistas, sin que algo quede fuera de la reconstrucción. En otras palabras, Frege parece decir nada más que podemos ir por el mundo usando los numerales sólo de manera sustantivista, que podemos traducir todas las apariciones adjetivistas de los numerales sin perder poder expresivo. Como dijimos arriba, la intención de Frege es ofrecer una semántica no necesariamente que agote o sea fiel a todos los usos de los númerales en el lenguaje natural, ni tampoco es hacer una reforma de este tal que sólo se haga uso de los numerales como sustantivos. Es sólo que, por así decirlo, "para los propósitos de la ciencia" no hace falta hacer usos adjetivistas de los numerales.

Examinemos ahora los argumentos de Frege para sostener (i) y (ii).

2.2 ¿Son los numerales nombres de objetos?

Para sostener (i), Frege hace dos cosas: primero, ofrece algunas observaciones sobre la gramática de los numerales que, de acuerdo con él, apoyan la idea de que los números son objetos auto-subsistentes y los numerales términos

[7] Dummett (1991) p. 109

singulares genuinos o, como él les llama, "nombres propios", que refieren a tales objetos. En segundo lugar, Frege trata de defender la tesis de que los números son objetos auto-subsistentes de dos objeciones que veremos más adelante. Me concentraré a continuación en la primera de estas maniobras, y después en la segunda.

Las observaciones que, según Frege, evidencian que los numerales son términos singulares genuinos y los números objetos auto-subsistentes son las siguientes[8]:

- Los numerales no expresan propiedades.
- No podemos hablar de los números en plural, del mismo modo en que no podemos hablar en plural de objetos auto-subsistentes.
- Cuando decimos "el número *n*", el artículo definido clasifica a *n* como un objeto.

La primera de estas observaciones es una afirmación justificada. Hemos visto que en oraciones como (1) y (2) en nuestros ejemplos los numerales tienen una función gramatical similar a la de un adjetivo. Es pues, como dice Frege, "...natural preguntar si un debemos pensar a los números individuales...como propiedades."[9] Alguien podría fácilmente dejarse llevar por la forma gramatical de la oración y pensar que tal como en "Hay grandes libros sobre la mesa" el término 'grandes' predica 'es grande' de los libros sobre la mesa, en (2) el término '2' predica 'es dos' o 'doseidad' de los libros sobre la mesa. Esto es un

---

[8] Frege (1884), §57, nota 1 en p. 80, n. 2 en p. 77

[9] Frege (1884), §21

error, pues en el primer caso se atribuye una propiedad a cada uno de los libros sobre la mesa, pero ciertamente no en el segundo. En (2) claramente no se dice que cada uno de los libros sobre la mesa es dos. Alguien podría insistir en el punto de que los numerales expresan propiedades diciendo que '2' predica doseidad de la *clase* de libros sobre la mesa, no de cada uno de ellos. Pero esto parece también ser falso: no decimos que la colección es 2. En el ejemplo que Frege mismo ofrece: "Adscribimos el color verde a cada una de las hojas [de un árbol], pero no el número 1000. Y si llamamos su follaje a todas las hojas de un árbol tomadas en conjunto, entonces su follaje es también verde, pero no 1,000"[10].

Además de estos argumentos, la idea de que los números son propiedades no llega muy lejos si se dispersan las ilusiones gramaticales con un lenguaje formal de primer orden. Como vimos páginas arriba, si formalizamos (2) obtendremos (2'), en donde 'es libro sobre la mesa' es el único predicado que nos queda, y '2' se disuelve, como dice Benacerraf, en "... cuantificadores, funciones de verdad, variables y apariciones de '='..."[11]. Es claro, pues, como Frege señala, que los numerales no son predicados y que los números no son propiedades.

Sin embargo, contrario a lo que Frege sostiene, debemos notar que el que los numerales no sean predicados no respalda la tesis de que son términos singulares que refieren objetos auto-subsistentes. Como vimos, la idea de que '2' es un término singular que refiere a objetos auto-subsistentes se disuelve en (2')

---

[10] *Ibidem*

[11] Benacerraf. (1965), p. 283

de la misma manera en que lo hace la idea de que es un predicado. No es obvio, pues, que del hecho de que la naturaleza de los numerales no sea predicativa pueda inferirse que estos han de ser términos singulares. Por otro lado, esto no quiere decir que debamos pensar que el análisis de '2' en (2') es el correcto, y que no hemos de pensar a este como un término singular genuino, pues lo que está en cuestión es precisamente cómo hemos analizar semánticamente a los numerales. Es sólo que el que Frege note acertadamente que los numerales no son predicados no apoya la idea de que son nombres de objetos auto-subsistentes. Frege necesita dar un argumento "positivo" a favor esta tesis.

Las segunda y tercera observaciones de Frege a favor de (i) enfrentan dos serios problemas. El primero es que muestran sólo que hay usos sustantivistas de los numerales, no que estos son los que debemos tomar seriamente. Es verdad que en ciertos contextos los numerales actúan como nombres de objetos, pero hemos visto que los usamos también con bastante frecuencia en contextos adjetivistas. La cuestión, como hemos dicho en repetidas ocasiones, es cuáles usos son los primarios desde una perspectiva semántica, y cuáles han reconstruirse en términos de los otros. Dirigir nuestra atención al hecho de que pueden ser usados de manera sustantivista no es un argumento a favor de que dichos usos son los primarios; el defensor del adjetivismo, como señala Dummett, simplemente reconstruirá estos usos en términos adjetivistas[12].

El segundo problema es que Frege simplemente no ofrece un argumento a favor de la tesis de que los términos singulares en general refieren de hecho a

[12] Dummett (1991), p. 109

objetos auto-subsistentes. Se han dado muchos ejemplos en la literatura que no lo hacen, como 'Ulises', 'Santa Claus' y 'el rey de Francia'. No porque podamos decir 'el círculo cuadrado' diremos que hay un objeto x tal que x es un círculo cuadrado y que el término 'círculo cuadrado' refiere a él. De manera similar, no porque no podamos pluralizar 'Sherlock Holmes' diremos que Sherlock Holmes es un objeto auto-subsistente. Es importante recordar, como Hodes comenta, que la noción de término simple es sólo una noción sintáctica: decir que un término es un término singular es asignarle un papel sintáctico en el lenguaje. El que los términos singulares tengan generalmente la función semántica de designar objetos particulares no significa que todos de hecho lo hagan. Hay muchos términos de este tipo que, por así decirlo, no hacen su trabajo[13].

Quizás este segundo problema pudiera resolverse de la manera siguiente. Es sabido que Frege sostiene que preguntar cuál es el significado de un término fuera del contexto de una proposición es un error. De acuerdo con él,

> ...debemos siempre considerar una proposición completa. Sólo en una proposición las palabras tienen realmente un significado. Puede ser que figuras mentales floten ante nosotros todo el tiempo, pero no es necesario que éstas correspondan a los elementos lógicos en el juicio. Es suficiente si la proposición considerada como un todo tiene un sentido; es esto lo que les confiere a sus partes su contenido.[14]

---

[13] Hodes. (1990), p. 237 y nota 6.

[14] Frege (1884), §59

Frege postula aquí su tan discutido Principio Contextual. Lo ilustra con el ejemplo de los infinitesimales en cálculo[15]. Si se pregunta por el significado de '*dx*' por sí mismo, no podrá darse una respuesta adecuada. La idea de un segmento cuya longitud no es 0 pero es menor que cualquier otra longitud que pudiera mencionarse parece simplemente incoherente. Sin embargo, puede darse el sentido de toda la proposición "$df(x) = g(x)dx$", y, de acuerdo con Frege, ello es suficiente para conferir a '*dx*' un significado.

Dummett defiende que Frege propone de este modo una nueva manera de entender la noción de objeto. De acuerdo con Dummett, Frege define a un objeto como la referencia de un término singular, en vez de definir a los términos singulares como términos que refieren a objetos[16]. Siguiendo esta lectura, el segundo problema que indicamos quizás quedaría de lado en una interpretación fuerte del Principio Contextual, en la cual preguntas sobre la referencia de los términos quedarían descartadas. Siguiendo esta interpretación, Ulises es un objeto auto-subsistente si 'Ulises' se comporta como un término simple y si hay al menos una oración verdadera en la que dicho término aparece. Sin embargo, para que esta sugerencia pudiera funcionar se requerirían dos cosas. Primero, que se diera un criterio de identificación satisfactorio para términos singulares. En el ejemplo del propio Frege, es necesario que pueda identificarse a '*dx*' como un término simple, pues alguien podría decir que el que pueda darse el sentido de toda la proposición "$df(x) = g(x)dx$" pero no el de '*dx*' por sí mismo muestra no que éste tiene significado sólo en aquella, sino más bien que '*dx*' no es un término singular. Segundo, esta solución requeriría que el valor de verdad de las oraciones estuviera determinado sin que antes tuvieran que encontrarse los referentes de los términos singulares que aparecen

[15] *Ibid.*, §60

[16] Dummett.(1991), pp. 111-112

en ellas. Y esta tesis no es verdadera en ningún sentido obvio. Se requiere un argumento sólido para defenderla.

Las observaciones, pues, que Frege ofrece no dan por sí mismas mucho apoyo a (i) o, indirectamente, al análisis sustantivista de la semántica de los numerales. El hecho de que los numerales no expresen propiedades y el que puedan ser usados sustantivistamente no significa que hemos de concebirlos como términos singulares genuinos, es decir, como términos que refieren a objetos auto-subsistentes.

El segundo movimiento que Frege hace para dar apoyo a (i) es defender la idea de que los números son objetos auto-subsistentes de las dos siguientes objeciones:

(a) no podemos formar ideas de ellos
(b) no tienen ubicación espacio-temporal

El punto de (a) puede ser visto más claramente en el caso de números grandes y, quizás mejor, en el de 0, pues alguien podría decir que imagina al 2, por ejemplo, como un par de manzanas, al 3 como una terna de naranjas, etc. Frege piensa que esta objeción sólo es relevante a la luz de una semántica equivocada. De acuerdo con él, imágenes mentales o ideas en nuestras cabezas no median la relación entre nuestras palabras y los objetos. Si la mediación de una idea fuese requerida, Frege explica, no podríamos referirnos a muchos objetos concretos de cuya magnitud no tenemos una idea clara. Nos ofrece el planeta Tierra como ejemplo. Dice que "Nos contentamos, con una pelota de tamaño moderado, que nos sirve como un símbolo de la Tierra, aunque sabemos bastante bien que es muy diferente de ella"[17]. Frege afirma que la irreverencia de sostener que una idea asociada con un término es relevante para su significado es aún más evidente en el caso de palabras como 'sólo', pues, aunque claramente tiene significado, ¿qué imagen mental podría asociarse con ella?

La confusión entre el significado de una palabra y una idea con ella asociada se debe, de acuerdo con Frege, a preguntar cuál es su significado fuera del contexto de una proposición. Como indicamos arriba, su Principio Contextual establece que un término tiene significado sólo en tal contexto. Sin embargo, como sugerimos también, esto es problemático, pues se requiere no sólo que podamos identificar términos singulares, sino también que el valor de verdad de una proposición esté determinado sin primero encontrar los referentes de los términos singulares que aparecen en ella.

En contra de (b), Frege sostiene que asumir que un objeto tiene ubicación espacio-temporal es una petición de principio. A continuación, sólo afirma que es posible que algo sea un objeto sin ser actual, es decir, que algo sea un objeto y no tenga coordenadas espacio-temporales. Me parece que Frege se queda corto con esta objeción, especialmente en el marco de su polémica con Kant. Uno de los puntos centrales del idealismo trascendental kantiano es que sólo los objetos que están en espacio y tiempo nos pueden ser dados. No es suficiente, pues, que Frege observe que (b) supone que todo objeto tiene propiedades espacio-temporales. Debe mostrar por qué esta suposición es errónea, o al

[17] Frege (1884), §60

menos que las razones de Kant para aceptarla no son satisfactorias. Por otro lado, podríamos seguir la idea de Dummett de que Frege propone una nueva manera de entender la noción de objeto. Sin embargo, como vimos ya, esta sugerencia es de poca ayuda si no se ofrece un criterio de identificación adecuado para términos singulares, así como una explicación sobre cómo es posible que el valor de verdad de una oración esté determinado antes de que se encuentren las referencias de los términos singulares que aparecen en ella.

El que Frege acepte la existencia de objetos auto-subsistentes que no tienen una ubicación espacio-temporal es además sumamente problemático tanto desde una perspectiva epistémica como desde una ontológica. Si, siguiendo la tradición, llamamos "platonismo" a la posición que defiende que los números son objetos auto-subsistentes sin coordenadas espacio-temporales, y "objetos abstractos" a dichos objetos, hay dos problemas epistémicos principales que el platonista debe enfrentar: el del conocimiento y el de la referencia a objetos abstractos. Desde un punto de vista ontológico, la principal dificultad a la que debe enfrentarse es la de con cuáles objetos particulares los números han de ser identificados. Indicaré a continuación estas tres conocidas complicaciones que le han sido planteadas al platonista. Me enfocaré primero en las cuestiones del conocimiento y la referencia, y después en la de la identificación de los números con objetos particulares.

El modelo tradicional de conocimiento plantea que un sujeto *S* sabe que *p* si y sólo si *S* cree con verdad y justificadamente que *p*. Ha sido señalado que este modelo de "creencia verdadera y justificada" de conocimiento no especifica todas las condiciones necesarias para que un sujeto *S* sepa que *p*. Considérese el siguiente caso[18]. Supongamos que una persona *S* ve a una persona *X* manejando un Ford, y que *X* ofrece a *S* un aventón. Sobre la base de su experiencia, *S* tiene la creencia *p* que *X* tiene un Ford. *p* es una creencia justificada, pues, después de todo, *X* dio un aventón a *S*, y digamos también que es una creencia verdadera, es decir, que es el caso que *X* tiene un Ford. Supongamos ahora que *X* no tiene *ese* Ford. Digamos que el Ford que *X* tiene esta en el taller, y que el Ford que *S* vio y en el que *X* dio a *S* un aventón es el de la persona *Y*. En este caso, *S* tiene la creencia verdadera y justificada que *p*, pero no puede decirse que *S* sabe que *p*, esto es, que *X* tiene un Ford. No es, pues, suficiente que *S* tenga la creencia verdadera y justificada que *p* para que *S* sepa que *p*.

Para lidiar con casos como estos, se ha sugerido añadir una condición más a la caracterización de conocimiento: para que una creencia verdadera y justificada pueda contar como conocimiento, lo que hace verdadera a la creencia debe también ser la causa de dicha creencia[19]. De acuerdo con esta sugerencia, para que en nuestro ejemplo pueda decirse que *S* sabe que *X* tiene un Ford, el Ford que hace verdadera la creencia de *S* que *X* tiene un Ford debe también ser la causa de dicha creencia en *S*. En la literatura se ha llamado "teoría causal del conocimiento" a la teoría epistémica basada en esta idea. Esta teoría sostiene, pues, que para que una persona tenga conocimiento sobre algún objeto es necesario que dicha persona tenga algún tipo de conexión causal con tal objeto.

[18] Sigo aquí el ejemplo de Maddy (1990), p. 37, aunque debemos la formulación original de este tipo de casos a Gettier (1963).

[19] Véase por ejemplo Goldman (1967)

Si el punto central de la teoría causal del conocimiento es correcto, hay claramente un problema con la idea de que los números son objetos sin una ubicación espacio-temporal. Pues parece que si estos objetos carecen de propiedades espacio-temporales deben ser también causalmente inertes. Si no queremos negar que tenemos algún conocimiento sobre los números, entonces debe ser falso que los números son objetos abstractos. Debemos la formulación original de este problema a Benacerraf[20]. En un muy conocido artículo suyo, Benacerraf presenta el argumento de la manera siguiente: si los números son objetos abstractos y la teoría causal del conocimiento es verdadera, no podemos tener conocimiento aritmético alguno. Asumiendo que tenemos algún conocimiento aritmético, o bien la teoría causal del conocimiento es verdadera o debe ser falso que los números son objetos abstractos. Dado que tenemos buenas razones para creer que la teoría causal del conocimiento es verdadera, tenemos buenas razones para creer que los números no son objetos abstractos. En palabras de Maddy, la objeción de Benacerraf a la tesis platonista es la siguiente: "Lo que hace a '2+2=4' verdadero es la naturaleza de las entidades abstractas 2 y 4 y la operación de la suma; para que yo sepa que '2+2=4', esas entidades deben cumplir con un rol causal apropiado en la generación de mi creencia. Pero ¿cómo pueden entidades que no habitan el universo físico tener lugar en principio una interacción causal?"[21]

El problema de la referencia a objetos abstractos plantea una dificultad muy similar. Es sabido que en "Sobre sentido y referencia" Frege sugiere que un

---

[20] Benacerraf (1973)

[21] Maddy (1990), p. 37

nombre refiere a objeto particular por estar asociado con una descripción (o un conjunto de descripciones) que identifica(n) únicamente a dicho objeto[22]. De acuerdo con Frege, por ejemplo, el nombre 'Juan Pablo II' refiere a Juan Pablo II por estar asociado con una descripción que identifica únicamente a Juan Pablo II, como, por decir algo, 'el hombre más benévolo sobre la tierra'. Kripke puso en cuestión esta idea fregeana[23]. Consideremos el siguiente caso. Supongamos que soy una persona bastante poco informada sobre la historia de la ciencia en general y que con la intención de curar mi ignorancia voy un día a una plática sobre los comienzos de la biología molecular. La plática es un tanto técnica: se habla sobre la estructura molecular de las proteínas, sobre el ADN, se usan términos poco familiares como 'polipéptido', 'hélice-α' y se mencionan nombres como 'Linus Pauling', 'James Watson' y 'Maurice Wilkins'. Haber ido a la platica me deja tan en blanco como estaba antes sobre la historia de la biología molecular, pero digamos que llego a creer sólo una cosa sobre James Watson, a saber, que descubrió la estructura molecular básica de las proteínas. Como es sabido, James Watson no descubrió la estructura molecular básica de las proteínas, pero esta es la única descripción que asocio con su nombre. Si la sugerencia de Frege es correcta, cuando uso el nombre 'James Watson' no me refiero a James Watson, sino al científico que descubrió la estructura molecular básica de las proteínas. Dado que Linus Pauling descubrió la estructura molecular básica de las proteínas, de acuerdo con en el modelo fregeano cuando uso el nombre 'James Watson' me refiero a Linus Pauling, y es sobre este último que tengo una creencia verdadera. Pero esto claramente no es el caso: con el

[22] Frege (1892)

[23] Kripke (1972)

nombre 'James Watson' no me refiero a Linus Pauling, sino a James Watson. Es sólo que tengo una creencia equivocada sobre él.

Dadas estas complicaciones con la idea fregeana, Kripke ofrece una manera alternativa de explicar cómo un nombre refiere a un objeto. De acuerdo con él, cuando uso el nombre 'James Watson' me refiero a James Watson porque existe una cadena causal de comunicación en la que muchos eslabones me conectan con alguien que en algún momento dio el nombre 'James Watson' a James Watson, dicho nombramiento habiendo sido un "bautismo inicial". Según Kripke, una de las formas que este bautismo puede tener es que alguien en algún momento se haya parado frente a James Watson y dicho algo como "este individuo es James Watson". Es claro, pues, que esta explicación de cómo muchos de nuestros términos refieren depende en buena medida de que haya un primer contacto causal entre un bautista y el objeto nombrado, así como de que exista una cadena causal de comunicación que nos lleve a dicho evento. En otras palabras, es una condición necesaria para que un término refiera a algún objeto que haya una cadena causal de comunicación que lleve a un momento en que hubo una relación causal entre ese objeto y quien lo nombró.

Si la sugerencia de Kripke es correcta, hay claramente un problema con la idea de que los números son objetos abstractos. Siguiendo la estrategia de Benacerraf, Lear planteó el siguiente argumento[24]: si los números son objetos abstractos y, por ende, objetos causalmente inertes, y la teoría causal de la referencia es verdadera, no podemos referirnos a ellos. Asumiendo que

[24] Lear (1977)

podemos hablar sobre los números y que la teoría causal de la referencia es verdadera, debe ser falso que los números son objetos abstractos. ¿Pues cómo podría darse un bautismo inicial a un objeto que no interactúa con el mundo físico, ni, en particular, con sujetos humanos?[25]

La idea, pues, de que los números son objetos que no tienen una ubicación espacio-temporal es problemática a la luz de teorías causales del conocimiento y la referencia: si algo es un objeto, podemos saber algo sobre él y referirnos a él en virtud del hecho de que hubo en algún momento un contacto causal entre un sujeto y él. Esta conexión causal está en principio cancelada si un objeto no tiene propiedades espacio-temporales. Dado que sabemos algo sobre los números y podemos hablar sobre ellos, los números no pueden ser objetos abstractos.

Pienso que hay cuatro maneras en que el platonista podría en principio responder a estas dificultades. La primera es simplemente negar que tenemos conocimiento alguno sobre los números y que hablamos sobre ellos. La segunda es postular que tenemos una facultad especial por medio de la cual podemos tener el contacto causal necesario con objetos abstractos. La tercera es

[25] En el marco de la teoría causal de la referencia, Hodes (1984), esp. pp. 134-5 y 142-3, ofrece una discusión sofisticada del problema de la referencia a los números entendidos como objetos abstractos. Hodes pregunta por qué no, si los números son objetos, podría haber gente cuya práctica matemática fuera la misma que la nuestra, es decir, que aceptasen las mismas proposiciones e inferencias, pero cuyo término '5' refiriera al objeto al que nosotros nos referimos con el término '4', y viceversa. Ciertamente podría haber interpretaciones de todos sus predicados matemáticos que hicieran verdaderas sus proposiciones bajo esta suposición. El punto de Hodes está relacionado con el de Putnam (1990), cap. 2: las asignaciones de valores de verdad a todas nuestras proposiciones no determina únicamente los referentes de nuestros términos. Se ha notado que para resolver esta indeterminación podría recurrirse a las relaciones causales que se dan de hecho. Hodes sugiere que no hay algo similar a esto en el caso de los números. Para una discusión extensa sobre el problema de la referencia a objetos abstractos véase Williams (2002).

ofrecer una explicación alternativa de los objetos postulados por el platonista que de algún modo dé cuenta de cómo podemos tener contacto causal con ellos por medio de mecanismos epistémicos estándares. La cuarta es sostener que las teorías causales de la referencia y el conocimiento son falsas.

La primera vía es poco atractiva: simplemente se pierde mucho al decir que no tenemos conocimiento aritmético alguno. Y sostener que los números son objetos pero que los numerales no refieren a ellos raya en lo absurdo. La segunda vía tampoco ha tenido muchos adeptos. Gödel es uno de los principales defensores de la idea de que, además de la percepción sensorial, existe "otro tipo de relación entre nosotros y la realidad"[26]: una facultad de intuición matemática que nos permite tener contacto con los números concebidos como objetos abstractos. De acuerdo con él, esta facultad de intuición tiene en las matemáticas un papel análogo al de la percepción sensorial en las ciencias empíricas: la percepción sensorial nos da acceso a los objetos físicos, así como conocimiento de los hechos simples sobre ellos, y la intuición matemática nos da acceso a las entidades matemáticas, así como conocimiento de los axiomas más básicos sobre ellas. Esta idea ha sido fuertemente criticada en repetidas ocasiones. La línea más común de ataque es que Gödel postula una tesis muy fuerte sin explicarla y defenderla satisfactoriamente[27]. Aunque simpatizantes del platonismo han intentado hacer justicia a la propuesta de Gödel y vindicarla al menos en parte, su idea ha encontrado mucha resistencia[28].

---

[26] Gödel (1947), pp. 484

[27] Véase, por ejemplo, Chihara (1982)

[28] Véase Maddy (1990) pp. 31-35, e *ibid* (1980), pp. 168-171

Las tercera y cuarta vías de respuesta han sido exploradas con un poco más de éxito, aunque no de manera completamente satisfactoria. La tercera es la que adopta Maddy. En vez de postular una "nueva relación entre nosotros y el mundo", Maddy intenta mostrar no sólo que es en principio posible tener conocimiento de entidades matemáticas y referirnos a ellas en un marco platonista, sino también que de hecho tenemos tal acceso a ellas a través de mecanismos epistémicos estándares. A favor de lo primero, Maddy sostiene que si examinamos con más cuidado las teorías causales del conocimiento y la referencia, veremos que la relación causal que tenemos con entidades matemáticas no es en esencia distinta de aquella que tenemos con objetos físicos como manzanas y naranjas[29]. A favor de lo segundo, Maddy intenta explicar la naturaleza de las entidades matemáticas de modo tal que sea posible obtener información sobre éllos con base en la percepción, un mecanismo epistémico del que tenemos explicaciones razonables[30]. La idea central de Maddy es que los conjuntos de objetos físicos tienen propiedades espacio-temporales: 3 naranjas constituyen un conjunto de naranjas, y ese conjunto está localizado donde sus miembros están localizados. De manera similar, afirma que 3 naranjas y 5 peras son un conjunto de orden más alto, que está localizado donde sus miembros están localizados. Con base en esto, Maddy afirma que alguien que ve 3 naranjas percibe un conjunto de 3 naranjas, que alguien que ve 5 vacas percibe un conjunto de 5 vacas, etc. Para Maddy, entonces, el problema de la interacción causal con los objetos matemáticos desaparece, pues concibe a los conjuntos como entidades espacio-temporales a las que tenemos acceso por

---

[29] Maddy (1980), pp. 167-168, e *ibid* (1990), pp. 48-50

[30] Maddy (1990), 51-75

medio de la percepción sensorial y a las cuales podemos dar un bautismo inicial. Su platonismo se concentra, pues, en el caso de los conjuntos, y define a los números como propiedades de estos. Dado que discutir a fondo la propuesta de Maddy nos desviaría demasiado, me limitaré aquí a decir que a pesar de ser hasta el momento uno de los intentos más interesantes para dar una respuesta a los problemas que Benacerraf y Lear plantean, sus esfuerzos han encontrado mucha resistencia en la literatura.[31]

Quienes siguen la cuarta vía alegan que es sabido que la teoría causal del conocimiento ha quedado muy desacreditada en tiempos recientes, y que la teoría de la referencia tiene que dar cuenta de muchas cosas[32]. Esto es cierto. Sin embargo, al menos la objeción de Benacerraf ha sido reformulada con bastante éxito en el marco de otras teorías epistémicas. La propuesta de Hartry Field es un ejemplo interesante. De acuerdo con Field, debemos entender el argumento de Benacerraf como un cuestionamiento de nuestra habilidad para explicar la fiabilidad de nuestras creencias matemáticas[33]. La preocupación es, pues, dar cuenta de los mecanismos que explican cómo nuestras creencias sobre objetos abstractos pueden reflejar tan bien los hechos sobre ellos. Field sostiene que la concepción platonista de las entidades matemáticas como objetos abstractos hace imposible explicar la fiabilidad de nuestras creencias matemáticas. La propuesta de Field ha sido muy debatida. En vez de desviarnos adentrándonos en los detalles de tal discusión, notemos sólo que las preocupaciones de Benacerraf y Lear plantean complicaciones de importancia central para la idea

[31] Véase, por ejemplo, Kitcher (1984), cap. 6, Chihara (1982) y Balaguer (1994)

[32] Véase, por ejemplo, Steiner (1975), cap. 4.

[33] Field (1989)

de que los números son objetos abstractos independientemente de las teorías del conocimiento y la referencia en que se formularon originalmente. Entendidos de manera más amplia, estos argumentos exigen al platonista una explicación satisfactoria de cómo podemos tener conocimiento sobre los números si estos han de ser concebidos como objetos auto-subsistentes y sin propiedades espacio-temporales, así como de cómo podemos hablar sobre ellos. Hacer notar los problemas de las teorías causales del conocimiento y la referencia en cuyo marco originalmente se formularon simplemente no es ofrecer tales explicaciones.

Puede verse, pues, que el que Frege acepte la existencia de objetos abstractos es bastante problemático desde una perspectiva epistémica: debe explicarse cómo podemos tener conocimiento de estos objetos y cómo es posible que nos refiramos a ellos. Por si fuera poco, la idea de que los números son objetos abstractos enfrenta una conocida dificultad más, una de orden ontológico. Debemos su formulación original también a Benacerraf. En otro artículo suyo, Benacerraf plantea lo siguiente[14]: podemos identificar a los números con cualesquiera objetos en una secuencia con propiedades estructurales similares a la de los números naturales. Si los números son objetos, ¿con qué objetos particulares hemos de identificarlos? Indicaré a continuación esta seria complicación para el platonista. Para poder hacerlo, sin embargo, antes mencionaré brevemente algunos detalles sobre la noción fregeana de número, así como algunos puntos básicos de la teoría de conjuntos contemporánea.

[14] Benacerraf (1965)

Frege sostiene que en afirmaciones como (2) en nuestros ejemplos no se hace una adscripción numérica a aquello de que están hechos los libros. La razón que para esto ofrece es que la "masa de materia" que compone a los libros puede dividirse en unidades de maneras muy distintas: 2 libros, 200 páginas, millones de moléculas, un número aún mayor de átomos, billones de partículas subatómicas, etc. Frege sostiene que lo que cambia en los casos en que juzgamos que hay 2 libros o 200 páginas es sólo la sustitución del concepto 'libro en la masa de materia' por el concepto 'página en la masa de materia'. Con base en esto, Frege concluye que "el contenido de una afirmación de número es una afirmación sobre un concepto."[35] Dicho esto, como nota Maddy, el análisis de Frege sugiere que el número es algo que varios conceptos como 'libro sobre la mesa' y 'disco que los Beatles sacaron en 1967' pueden compartir[36]. Sin embargo, Frege sostiene que los números no son propiedades de clases, esto es, conceptos de segundo orden. Frege afirma más bien que los números son objetos, a saber, las extensiones de conceptos como 'libro sobre la mesa' o 'disco que los Beatles sacaron en 1967'. Frege identifica de este modo al número 2 con la extensión del concepto 'equivalente con alguna clase de 2 miembros', al 3 con la extensión del concepto 'equivalente con alguna clase de 3 miembros', etc.[37] En otras palabras, Frege identifica a los números con una clase numéricamente equivalente con una clase dada. Los objetos con los que Frege identifica a los números son, pues, clases enormemente grandes.

[35] Frege, §46

[36] Maddy (1990), p. 83

[37] Frege §68, y véase también §§69-71

Como es bien sabido, Russell mostró que el principio de comprensión ilimitada que le permite a Frege formar clases tan grandes como aquellas con las que identifica a los números admite también la construcción de colecciones paradójicas[38]. Si en

$$\forall F\, \exists s\, \forall x\, (x \in s \leftrightarrow Fx)$$

se instancia F con '$x \notin x$', se sigue que hay un S tal que $\forall x\, (x \in S \leftrightarrow x \notin x)$. Si se instancia el cuantificador universal con S mismo, se obtiene la paradoja de Russell:

$$S \in S \leftrightarrow S \notin S$$

Sin embargo, el que la teoría de las extensiones de Frege sea inconsistente no significa que su proyecto de identificación de números con clases haya fracasado. De hecho, como Maddy explica, la teoría axiomática de conjuntos permite la identificación de un número n con algún conjunto de n miembros particularmente conveniente. La secuencia de los números naturales 0, 1, 2, 3,...etc. puede ser identificada, por ejemplo, con el conjunto de ordinales finitos de von Neumann:

[38] Como es sabido, la Ley Fundamental V (BLV) de Frege implica tal principio de comprensión ilimitada. Frege da la BLV en la forma de un condicional que putativamente establece condiciones de identidad para 'extensiones' en términos de una relación independiente de 'equivalencia material' sobre conceptos. Siguiendo la explicación de Williams (2001), pp. 8-9, digamos que si $\{x : Fx\}$ es 'la extensión del concepto F', la comprensión ingenua puede expresarse como $\forall F\, \exists y (y = \{x : Fx\}))$. La BLV puede expresarse del siguiente modo: $\forall F \forall G\, ((\{x : Fx\} = \{x : Gx\}) \Leftrightarrow \forall x\, (Fx \equiv Gx))$. A partir de esto puede derivarse la comprensión universal. Dado un concepto arbitrario F, necesitamos sólo considerar la verdad lógica $\forall x\, (Fx \equiv Fx)$. Si ponemos esto en el lado derecho del bicondicional, podemos derivar $\{x : Fx\} = \{x : Gx\}$, de donde viene $\exists y (y = \{x : Fx\}$. LA BLV genera, pues, la paradoja de Russell.

$$\varnothing; \{\varnothing\}; \{\varnothing, \{\varnothing\}\}; \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\};\text{...etc.}$$

De manera similar, podría identificarse con la secuencia de conjuntos propuesta por Zermelo:

$$\varnothing; \{\varnothing\}; \{\{\varnothing\}\}; \{\{\{\varnothing\}\}\};\text{...etc.}$$

Es importante notar que una característica central de estas y muchas otras especificaciones de los números en términos de la teoría de conjuntos es que reflejan, por así decirlo, todas las propiedades matemáticas de los números. Siguiendo a Williams, digamos que un dominio matemático dado refleja todas las propiedades matemáticas de los números si es isomorfo con los números naturales, y que la existencia de isomorfismo entre dos dominios matemáticos es una manera precisa de establecer que dos sistemas matemáticos tienen la misma estructura[39].

Con base en esto, Benacerraf plantea la siguiente dificultad a la idea de que los números son conjuntos. Si los números son conjuntos, deben ser algún conjunto particular de conjuntos. Si los números son algún conjunto particular de conjuntos, entonces debe haber razones para defender dicha identificación como la correcta. Estas razones pueden apelar sólo a propiedades matemáticas de los números, y, dado que tales propiedades son compartidas por sistemas isomorfos, estas razones valen para cualquier sistema isomorfo. Hay, sin

[39] Williams (2002), pp. 13

embargo, más de un conjunto particular de conjuntos isomorfo con los números, de modo que dichas razones no pueden defender una identificación de los números con un conjunto particular de conjuntos sobre otra. Los números no pueden, pues, identificarse con conjunto particular de conjuntos alguno.

Ilustremos esto con el caso de 3. Si 3 es un conjunto, debe ser algún conjunto particular. Si 3 es algún conjunto de particular, debe haber razones para sostener tal identificación como la correcta. Estas razones pueden apelar sólo a las propiedades matemáticas de 3, y 3 tiene tales propiedades en virtud de la relación que tiene con los demás miembros de la secuencia de los números naturales. Sin embargo, 3 puede ser identificado con $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ y con $\{\{\{\emptyset\}\}\}$. Tanto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ como $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ comparten todas las propiedades matemáticas de 3, pues es precisamente por ello que uno y otro pueden ser en principio identificados con 3. Dicho de otro modo, en virtud de las relaciones que tienen con los otros elementos de las secuencias de von Neumann y Zermelo, tanto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ como $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ cumplen, por así decirlo, con el papel con el papel de 3 en dichas secuencias. No hay, pues, razones para preferir una identificación sobre la otra. En consecuencia, 3 no puede ser idéntico a $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ o algún otro conjunto particular.

Extendiendo su argumento del caso de los conjuntos al de los objetos en general, Benacerraf concluye que los números no pueden ser objeto alguno. Esta extensión del argumento funciona de la manera siguiente. Si los números son objetos, entonces los números deben ser, en cada caso, objetos particulares. Si los números son objetos particulares, entonces debe haber razones para defender dicha identificación como la correcta. Estas razones pueden apelar sólo a propiedades matemáticas de los números, y dado que tales propiedades son compartidas por sistemas isomorfos, estas razones valdrían para cualquier sistema isomorfo de objetos. Hay, sin embargo, más de un sistema de objetos isomorfo con los números, de modo que dichas razones no pueden defender una identificación de los números con objetos particulares. Los números no pueden, pues, identificarse con objeto alguno.

Parafraseemos esta extensión del argumento. Supongamos que identificamos una secuencia de objetos cualesquiera apropiada para los propósitos de la aritmética y sus aplicaciones. Digamos que el cuarto elemento de esta secuencia (si empezamos con 0) es el número 3. De acuerdo con Benacerraf, este objeto tiene el papel de 3 en la secuencia en virtud de las relaciones que tiene con otros elementos de la secuencia. Sin embargo, en tanto que es un objeto, este objeto ha de tener otras propiedades: si ha de poder ser identificado independientemente de la secuencia, debe tener propiedades superfluas a su función numérica (tal como las tienen $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ y $\{\{\{\emptyset\}\}\}$). No es necesario, pues, que este sea el objeto identificado con el número 3: cualquier otro objeto que cumpla con el papel de 3 en una secuencia isomorfa con los números naturales serviría para este propósito. ¿Sobre qué base puede entonces identificarse al 3 con *este* objeto y no cualquier otro? No hay razones para escoger uno sobre otro. En consecuencia 3, dada la transitividad de la identidad, 3 no puede ser identificado con objeto alguno.

El argumento de Benacerraf sugiere, pues, consecuencias desastrosas para la tesis del platonista: no es sólo que los números no pueden ser objetos abstractos como los conjuntos, sino tampoco objetos de tipo alguno. La línea de defensa más promisoria para el platonista ha sido indicar que el argumento supone que la caracterización estructural de los números sugerida por Benacerraf ofrece *todas* las propiedades matemáticas necesarias y suficientes de los números naturales. Esta es una suposición que ciertamente no ha sido establecida de manera definitiva. Es posible que en el futuro tengamos un mayor conocimiento sobre los números y que descubramos que tienen otras propiedades relevantes. Sin embargo, es difícil imaginar cuáles podrían ser estas otras propiedades: como nota Schirn, "...al enunciar las propiedades necesarias y conjuntamente suficientes de los números para el estudio de la aritmética, estamos simplemente caracterizando una estructura abstracta"[40]. De seguir esta línea de respuesta, el platonista tendría mucho que explicar, y no lograría refutar inmediatamente el argumento de Benacerraf. En el mejor de los casos, esta línea de respuesta sólo lo cualifica: podemos decir que su argumento tiene toda la fuerza que le permite tener nuestro conocimiento matemático presente.

Hemos visto, pues, no sólo que los argumentos de Frege en contra de (a) y (b) no son completamente satisfactorios, sino también que el que acepte que los números son objetos auto-subsistentes sin una ubicación espacio-temporal es bastante problemático desde un punto de vista epistémico y desde uno ontológico. Sin embargo, el problema más serio con el segundo movimiento de

[40] Shirn (1998), p. 2

Frege a favor de (i) es que defender la tesis de que los números son objetos abstractos de las críticas indicadas no la probaría, aún si la defensa fuese completamente satisfactoria. Si se sostiene que los números son objetos abstractos y que los numerales son términos singulares genuinos que refieren a ellos, no sólo debe explicarse cómo podemos saber algo sobre tales objetos, cómo los numerales refieren a ellos y cómo puede defenderse que son, en cada caso, un objeto particular, es decir, cómo puede sostenerse que un numeral dado refiere a un objeto en particular y no a cualquier otro que cumpla con el mismo papel en una secuencia isomorfa. También hace falta dar un argumento sólido y "positivo" a favor esta ontología, y hasta el momento Frege no ha ofrecido ninguno.

En suma, los argumentos detrás de (i) como una razón para defender que la estrategia sustantivista es la única que puede ofrecer una semántica adecuada de los numerales parecen no ser tan sólidos como Frege supone. Esto, sin embargo, no muestra que Frege fracasa en su proyecto. De hecho, veremos, Frege tiene un muy buen argumento para defender su posición. Por el momento, examinemos su razonamiento en contra del adjetivismo.

2.3 ¿Es la estrategia adjetivista viable?

Analicemos, pues, la segunda razón que Frege ofrece para defender la idea de que sólo la estrategia sustantivista puede dar cuenta satisfactoriamente de la semántica de los numerales. Frege argumenta a favor de (ii) construyendo una estrategia adjetivista que intentará mostrar como en principio no viable. La versión del adjetivismo que Frege construye no es otra que la esbozada en términos generales hacia finales de la primera parte de esta tesina. Esta estrategia analiza, pues, oraciones como (1) y (2) en nuestros ejemplos en términos de cuantificadores numéricamente definidos, que son expresiones de la forma "hay exactamente *n* *F*s", y está basada en las definiciones que dimos páginas arriba.

Frege presenta dos objeciones a esta estrategia. La primera pretende mostrar que este análisis no es viable poniendo en evidencia que sus definiciones no son adecuadas. La segunda sostiene que esta estrategia no es satisfactoria porque no puede hacer generalizaciones sobre los números, esto es, porque no puede expresar propiedades comunes de los números. Examinemos cómo se sostienen estas objeciones.

Sobre la primera objeción, Frege dice en §56 que

> Es sólo una ilusión que hemos definido 0 y 1; en realidad, sólo hemos fijado el sentido de las frases "el número 0 pertenece a", "el número 1 pertenece a"; pero no tenemos autoridad para tomar aquí al 0 y al 1 como objetos auto-subsistentes que pueden ser reconocidos como los mismos otra vez.

Como una objeción a la viabilidad de la estrategia adjetivista, esto parece una petición de principio: presupone la postura fregeana de que los números son objetos auto-subsistentes[41]. Como Dummett nota, esto es precisamente lo que

[41] Esto no quiere decir, por supuesto, que el adjetivista está exento de ofrecer criterios de identidad para los números. Como me hizo notar Axel Barceló, este es un problema básico que una versión completamente desarrollada de la estrategia adjetivista debe suplementar. Es sólo que la manera en que Frege aquí formula su objeción supone la idea de que los números son objetos auto-subsistentes.

niega el adjetivista, y aquello a favor de lo cual Frege no ha dado un argumento convincente[42].

La segunda objeción es independiente del debate de los números como objetos auto-subsistentes. Frege sugiere que la estrategia adjetivista no tiene manera de hacer generalizaciones sobre los números con las definiciones que dimos arriba. Según él, estas definiciones nos permiten definir $\exists_n$ para cualquier número *n*, pero no nos permiten expresar generalizaciones sobre los números. Esta es de hecho una objeción válida. Piénsese, por ejemplo, en la generalización "todo número tiene un sucesor". Para obtener el "todo número" necesitaríamos cuantificar sobre la posición que ocupa '2' en $\exists_2$. Pero nuestras definiciones no nos permiten hacer esto. Como Hodes y Dummett observan, $\exists_2$ está definido, por así decirlo, como una unidad, y no como un compuesto de $\exists$ y 2[43]. Para ilustrar el punto, podríamos decir que '2' pertenece a $\exists_2$ como 'me' pertenece a 'mesa'. Simplemente no podemos generalizar de tal modo: no podemos decir "$\forall n \ldots \exists_n \ldots$" donde *n* no es una variable libre. Ciertamente, pues, como Frege nota, una estrategia adjetivista con cuantificadores numéricamente definidos sólo con recursos de primer orden no puede expresar generalizaciones sobre los números, ni, en consecuencia, ofrecer un análisis adecuado de los numerales.

Sin embargo, una versión de la estrategia adjetivista que usara cuantificación de orden más alto no sería vulnerable a la objeción de Frege. Como Dummett sugiere, podríamos cuantificar directamente sobre cuantificadores

---

[42] Dummett (1991), p. 101

[43] *Ibid*., p. 103 y Hodes (1984), p. 129

numéricamente definidos usando cuantificación de tercer orden[44]. De manera similar a como hicimos paginas arriba, en vez de decir "para todo numero x hay otro numero y que es su sucesor", podríamos decir "para todo cuantificador numéricamente definido Q, hay otro cuantificador numéricamente R que es su sucesor*", en donde "sucesor*" podría definirse de la manera siguiente: si Q y R son cuantificadores numéricamente definidos, R es sucesor de Q sólo si $\exists F[RxFx \wedge \exists y(Fy \wedge Qx(Fx \wedge x{\neq}y))]$. Es, pues, de este modo, que una versión de la estrategia adjetivista que usara recursos de más alto orden sería viable a pesar de la objeción de Frege: es posible hacer generalizaciones sobre los "números" en términos adjetivistas.

En suma, el problema con (ii) es que estas dos objeciones de Frege no logran establecer que el adjetivismo es una estrategia no viable. No ofrecen razones satisfactorias para sostener la idea de que la estrategia sustantivista es la única que puede ofrecer un análisis adecuado de la semántica de los numerales: el adjetivismo parece ser tan viable como el sustantivismo. Hasta el momento, como dice Dummett, Frege sólo ha expresado su preferencia por la estrategia sustantivista, y mostrado cómo podría en principio ser viable[45].

---

[44] *Ibid*, p 103-107

[45] *Ibid.*, p 109

Un argumento sobre el infinito

3.1 Un argumento sobre el infinito

Hemos visto que las razones que Frege ofrece en las §§55-61 de los *Fundamentos* no brindan un apoyo sólido a la estrategia sustantivista como la única vía satisfactoria para ofrecer una semántica adecuada de los numerales. Por un lado, la idea de que los numerales son nombres de objetos auto-subsistentes recibe poco apoyo del hecho de que los números no sean propiedades y los numerales predicados, así como del que hagamos usos sustantivistas de los numerales. De manera similar, la defensa que Frege hace de dicha idea ante la objeción de que los números no tienen una ubicación espacio-temporal no es completamente satisfactoria, y, aún peor, hay al menos tres serias dificultades a que tal idea debe hacer frente. Además, no ha ofrecido hasta el momento un argumento positivo a favor de una ontología platonista. Por otro lado, hemos visto que Frege tampoco ha logrado mostrar que la estrategia adjetivista no es viable. De hecho, no sería una gran sorpresa si alguien dijese que la estrategia adjetivista es, a estas alturas de nuestro análisis, un mejor candidato que su alternativa para ofrecer una semántica adecuada de los numerales. Hasta el momento ha mostrado ser tan viable como el sustantivismo, pero tiene al parecer menos problemas que enfrentar. En otras palabras, la estrategia adjetivista ha mostrado ser hasta ahora apropiada para "los propósitos de la ciencia", y, al dar lugar a menos complicaciones, parecería ser preferible.

Frege, sin embargo, presenta más adelante en los *Fundamentos* un poderoso argumento a favor de la idea de que los números han de ser concebidos como objetos y los numerales como términos singulares genuinos que refieren a ellos, así como de que la estrategia adjetivista es en último término no viable. Es, pues, con este argumento que Frege da un muy fuerte apoyo al sustantivismo como la única vía adecuada para dar una semántica de los numerales apropiada para los propósitos de la ciencia. Indiquemos, en esencia, cuál es este argumento.

La idea básica de Frege es la siguiente: Tenemos el número 0, pues 0 es el número de objetos x tal que $x \neq x$. Pero entonces tenemos también el número 1, pues 1 es el número de objetos tales que $x = 0$. Y, en general, si tenemos un número n, tenemos el número $n + 1$, pues $n + 1$ es el número de números x tales que $x = 0$ ó $x = 1$ ó...ó $x = n$[46]. Entonces cada número tiene un sucesor *ad infinitum*[47]. Tomando a los números como objetos, Frege prueba, pues, que hay una cantidad infinita de objetos, y obtiene de este modo la secuencia infinita de los números naturales. Puede notarse, pues, que la prueba consiste esencialmente en enumerar números, pero –y este es el punto central– los números deben ser objetos si han de poder ser enumerados.

---

[46] Podría también decirse que $n + 1$ es el número de números x tales $x \leq n$, en donde $x \leq n$ si y sólo si $\exists y\,(x + y = n)$, aunque este caso requiere que definamos la adición.

[47] *Ibid.*, p.133

La estrategia sustantivista, como Dummett nota, no contiene supuesto alguno de que hay un número infinito de objetos[48]. Es, pues, consistente con el supuesto de que hay, digamos, sólo 11 objetos. Y esto es claramente sumamente problemático. Siguiendo el modelo de (3'), consideremos la reconstrucción adjetivista '5 + 7 = 11':

$$\forall X \forall Y((\exists_5 x Xx \wedge \exists_7 x Yx \wedge \sim \exists x(Xx \wedge Yx)) \rightarrow \exists_{11} x(Xx \vee Yx)).$$

Es decir: si hay 5 *F*'s y 7 *G*'s, y las *F*'s y las *G*'s no coinciden, hay entonces 11 cosas que son o bien *F* o *G*. Esto debe ser falso. Sin embargo, si hay sólo 11 objetos en el universo, el antecedente no será verdadero y, en consecuencia, todo el condicional será verdadero. Parece, pues, que la estrategia adjetivista tiene una deficiencia fundamental: necesita asumir que hay un número infinito de objetos. Y si el adjetivista debe asumir el axioma del infinito, su proyecto queda seriamente menoscabado.

Este argumento, como puede notarse, es sumamente fuerte. Brinda considerable apoyo a la estrategia sustantivista como la única vía para ofrecer un análisis satisfactorio de la semántica de los numerales. Pues parece mostrar tanto que debemos pensar que los números son objetos y los numerales términos singulares genuinos que refieren a ellos como que el adjetivismo no es viable. Por un lado, ofreciendo una prueba de que los números son infinitos que consiste básicamente en enumerar números, Frege muestra que debemos concebir a los números como objetos, pues sólo así pueden ser enumerados.

[48] *Ibid.*, p. 132

Por el otro, sin el supuesto de que hay un número infinito de objetos, la estrategia adjetivista no puede dar cuenta ni siquiera de las proposiciones más básicas de la aritmética: las reconstrucciones que nos ofrece simplemente no son adecuadas para los propósitos de la ciencia. Las reconstrucciones del sustantivista son, pues, las únicas que parecen ser apropiadas para tales propósitos; dicho de otro modo, sólo si concebimos a los numerales como términos singulares genuinos que refieren a objetos particulares, los números mismos, puede hacerse justicia a los usos de los numerales significativos para la ciencia. Este argumento, pues, da un fuerte apoyo a la idea de que los usos sustantivistas de los numerales son los primarios desde una perspectiva semántica, y que en términos de ellos hemos reconstruir sus apariciones en contextos atributivos.

3.2 Un debate abierto

Hemos sugerido que Frege tiene un argumento sumamente fuerte a favor de la estrategia sustantivista como la única vía satisfactoria para ofrecer una semántica adecuada de los numerales. Sólo las reconstrucciones sustantivistas ofrecen un "concepto de número adecuado para los propósitos de la ciencia". De acuerdo con este argumento, debemos concebir a los numerales como términos singulares genuinos que refieren a objetos auto-subsistentes si hemos de querer que los números sean infinitos y si hemos de poder dar cuenta de las proposiciones más básicas de la aritmética, pues sólo si son concebidos como objetos pueden ser enumerados. La estrategia adjetivista logra evadir otras complicaciones que Frege le plantea, pero las reconstrucciones que nos ofrece simplemente no son apropiadas para la ciencia; y si necesita recurrir al supuesto de que hay una cantidad infinita de objetos, su análisis sencillamente queda seriamente menoscabado.

Por otro lado, indicamos también muy serios problemas a que debe de hacer frente la idea de que los números son no sólo objetos abstractos, sino objetos en general. Quien, como Frege, aceptase que los números son entidades sin una ubicación espacio-temporal debe dar cuenta de cómo podemos saber sobre algo de estos objetos, así como de cómo nos es posible referirnos a ellos. Asimismo, debe explicar qué objetos particulares designan los numerales, es decir, qué objetos particulares los números son.

Dada esta encrucijada, tenemos dos opciones: o bien atenernos a la vía sustantivista de Frege e intentar atajar las dificultades que le han sido planteadas, o buscar alguna manera de resolver las complicaciones del adjetivismo. Sugerimos páginas arriba que las posibles vías de respuesta a los problemas con que se enfrenta la idea de que los números son objetos abstractos no han sido defendidas de manera completamente satisfactoria. Sin poder en entrar en muchos detalles, indicamos que hasta el momento no se han dado razones convincentes a favor de la idea de que no tenemos conocimiento matemático alguno y que no podemos hablar sobre los números. Tampoco se ha defendido adecuadamente que tengamos una facultad especial que nos permite tener acceso a los números entendidos como objetos abstractos y tener así un contacto causal con ellos que explique cómo sabemos algo sobre ellos y cómo los numerales refieren a ellos. Negar que el que exista un vínculo causal con un objeto es necesario para que un sujeto pueda saber algo sobre los números y referirse a ellos no explica cómo tal conocimiento y referencia son posibles. Y, de manera similar, las explicaciones que se han dado sobre cómo podemos tener acceso a los objetos matemáticos por medio de mecanismos epistémicos estándares no han logrado ofrecer un caso convincente. Además, aún no se ha logrado dar una respuesta satisfactoria al problema de la identificación de los números con objetos particulares: apelar a la idea de que las propiedades estructurales de los números no agotan sus propiedades matemáticas pone muchas esperanzas en una agenda de investigación muy ambiciosa en las matemáticas y, en el mejor de los casos, sólo cualifica la objeción.

Por otro lado, los prospectos de una versión del adjetivismo que pueda hacer frente al problema que el argumento de Frege puso en evidencia no son del todo claros. Parecería que la estrategia adjetival necesita asumir que hay una cantidad infinita de objetos. Habría que pensar, sin embargo, si el adjetivismo necesita en realidad de tal supuesto. Me ha sido sugerido que quizás sería suficiente mostrar que hay una cantidad infinita de propiedades de un cierto tipo, a saber, aquellas que son relevantes para el adjetivismo. Esto requeriría, pues, no sólo que se diera tal prueba, sino también que se mostrara que hay una versión del adjetivismo para la cual bastase que hubiera un número infinito de propiedades, esto es, que realmente no requiere del supuesto de que existe una cantidad infinita de objetos. En este texto no haré juicio alguno sobre los prospectos de una propuesta adjetivista tal.

En suma, este es un debate en el que hay mucho por investigar, tanto por la vía fregeana como por su alternativa. No es claro que el sustantivismo esté refutado y que el adjetivismo sea una opción viable, ni tampoco que toda versión del adjetivismo esté de antemano cancelada y que sea posible defender satisfactoriamente la posición de Frege de los problemas que se le han puesto enfrente. El tema de la semántica de los numerales requiere de esfuerzos muy serios de parte del adjetivista y del sustantivista para poder llegar a una propuesta satisfactoria. El presente texto habrá hecho suficiente si con el análisis que presenta motiva una reflexión seria y creativa encaminada a estos esfuerzos.

En esta tesina se ha intentado presentar un análisis crítico de los argumentos de Frege a favor de la estrategia sustantivista como la única vía satisfactoria para ofrecer una semántica adecuada de los numerales. Para ello, trazamos primero una distinción entre sus usos sustantivistas y adjetivistas. Indicamos después que el que Frege considere a la aritmética como un cuerpo de conocimiento *a priori* y aplicable a un mismo tiempo es la razón por la cual sostiene que una semántica que integre ambos usos es necesaria. Esbozamos a continuación cada una de las dos estrategias de análisis para ofrecer dicha semántica, aclarando sus propósitos y alcance.

Comenzamos nuestro análisis indicando que las dos razones que Frege ofrece para defender que sólo las reconstrucciones del sustantivista son adecuadas para los propósitos de la ciencia son, en primer lugar, que los números son objetos auto-subsistentes y los numerales términos singulares genuinos que refieren a ellos, y, en segundo, que el adjetivismo no es en principio viable. Dimos entonces en algún detalle un análisis crítico de los argumentos que Frege ofrece en las §§55-61 de los *Fundamentos de la aritmética* para defender dichas razones. Explicamos que para sostener la primera de ellas Frege afirma que los números no son propiedades, que hay evidencia gramatical a favor de la idea de que los numerales son términos singulares genuinos y que dos objeciones en contra de la tesis de que los números son objetos auto-subsistentes no son válidas. Sugerimos que estos argumentos no apoyan la idea de que los números son objetos-subsistentes designados por los numerales. Notamos, en primer lugar, que el hecho de que Frege afirme válidamente que los números no son propiedades no constituye por sí mismo un argumento a favor de la idea de que son objetos. En segundo, indicamos que el que Frege ofrezca evidencia gramatical a favor de la tesis de que los numerales son términos singulares da muy poco apoyo a tal idea por dos razones: la primera es que el adjetivista tiene también evidencia a su favor, y que simplemente ofrecerá reconstrucciones en términos adjetivistas de tales usos sustantivistas para los que hay evidencia gramatical. La segunda es que Frege simplemente no ofrece un argumento a favor de la idea de que los términos singulares en general refieren a objetos auto-subsistentes. Explicamos entonces que para responder a esta complicación con una interpretación fuerte del Principio Contextual es necesario que Frege ofrezca un criterio de identificación para términos singulares y que explique cómo es que el valor de verdad de las oraciones puede estar determinado antes de encontrar la referencia de los términos singulares que aparecen en ellas.

Explicamos después que el razonamiento de Frege en contra de las objeciones a la tesis de que los números no son objetos auto-subsistentes que él mismo anticipa no es del todo satisfactorio por las siguientes razones. Por un lado, su defensa de la primera objeción, a saber, que los números no pueden ser objetos porque no podemos formar ideas de los números, recurre al Principio Contextual, de modo que no puede ser adecuada si no se provee un criterio de identificación para términos particulares y una explicación de cómo es posible que el valor de verdad de una oración esté determinado antes de encontrar las referencias de los términos que en ella aparecen. Por otro, su defensa de la segunda objeción, a saber, que los números no pueden ser objetos porque no tienen una ubicación espacio-temporal, sostiene sólo que es una petición de principio suponer que todo objeto tiene propiedades espacio-temporales, lo cual no constituye una defensa satisfactoria de que puede haber objetos que carezcan de tales propiedades. Vimos además que el que Frege acepte que hay objetos abstractos es sumamente problemático. Indicamos en algún detalle los tres más serios problemas que le han sido planteados a esta idea: el del conocimiento a estos objetos, el de la referencia a ellos y el de la identificación de los números con ellos. Sugerimos algunas maneras en que se podría dar respuesta a estos problemas para defender la idea de Frege, pero indicamos que hasta el momento ninguna de ellas ha logrado refutar completamente estos problemas o versiones más sofisticadas de ellos. Para concluir nuestro análisis de los argumentos de Frege para dar apoyo a la primera razón que ofrece a favor del sustantivismo, sugerimos que no sólo no da una respuesta adecuada a las objeciones en contra de la muy problemática tesis de que los números son objetos sin una ubicación espacio-temporal, sino que en realidad no ofrece un argumento "positivo" a su favor.

Analizamos entonces los dos argumentos de Frege a favor de la segunda razón que ofrece como evidencia para el sustantivismo. El primero sostiene que la estrategia adjetivista no es viable porque sus definiciones no permiten identificar a los números como objetos auto-subsistentes. Sugerimos que esta es una petición de principio, y que no logra mostrar que el adjetivismo no es viable. El segundo es que el adjetivismo no puede ofrecer reconstrucciones de los numerales en las cuales puedan expresarse propiedades generales de los "números". Indicamos que pesar de que tal es una observación válida, no logra mostrar que el adjetivismo no es viable: una versión del adjetivismo de orden más alto puede expresar tales propiedades. Concluimos, pues, nuestro análisis de estos argumentos diciendo que no dan apoyo a la idea de que la estrategia adjetivista no es viable.

Habiendo notado que los anteriores argumentos no son satisfactorios, esbozamos un tercer argumento de Frege a favor del sustantivismo, uno de mucho mayor poder. Sugerimos que este argumento, probando que los números son infinitos, da apoyo real al sustantivismo. Pues muestra, por un lado, que si los números han de ser infinitos entonces hemos de concebirlos como objetos, y a los numerales como términos singulares genuinos que refieren a ellos. Por otro, muestra que las reconstrucciones del adjetivismo no pueden ser adecuadas para los propósitos de la ciencia si no se asume que hay un número infinito de objetos.

Como resultado de nuestro análisis, sugerimos, pues, por un lado, que la posición de Frege tiene muy serios problemas. La idea de que los números son objetos y los numerales términos singulares que refieren a ellos es muy costosa desde varios puntos de vista: debe explicarse cómo podemos referirnos a tales objetos y cómo podemos tener conocimiento sobre ellos, así como especificarse los objetos particulares que han de ser identificados con los números. Por otro lado, sin embargo, sugerimos que Frege tiene un argumento sumamente fuerte a favor de la estrategia sustantivista como la única vía satisfactoria para ofrecer una semántica adecuada de los numerales. Este argumento debe tomarse más seriamente en la literatura, pues con base en él Frege parece mostrar que sólo aceptando las reconstrucciones sustantivistas puede llegarse a un "concepto de número adecuado para los propósitos de la ciencia": si los números han de ser infinitos y si, en consecuencia, hemos de hacer justicia a las verdades incluso más básicas de la aritmética, debemos concebir a los números como objetos abstractos y a los numerales como términos singulares genuinos. Atrapados entre consideraciones sumamente fuertes a favor y en contra de la posición de Frege y su alternativa, deben abrirse nuevas líneas de investigación, ya sea para atajar las críticas al sustantivismo, o bien buscar un adjetivismo alternativo que pueda ofrecer reconstrucciones satisfactorias de los numerales. El debate entre ambas estrategias aún no puede darse por concluido.

Balaguer, M. (1994), "Against (Maddian) Naturalized Platonism", *Philosophia Mathematica*, 3, pp. 97-108.

Benacerraf, P. (1965), "What Numbers Could Not Be", remipr. en Benacerraf & Putnam (eds.) (1983), pp. 272-294. Publicado originalmente en *Philosophical Review*, 75, pp. 47-73.

Benacerraf, P. (1973), "Mathematical Truth", reimpr. en Benacerraf & Putnam (eds.) (1983), 403-420. Publicado originalmente en *Journal of Philosophy*, 70, pp. 149-180.

Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds.) (1983), *Philosophy of Mathematics*, 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Chihara, C. (1973), *Ontology and the Vicious Circle*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

Chihara, C. (1982), "A Gödelian Thesis Regarding Mathematical Objetcs: Do They Exist? And Can We Conceive Them?", *Philosophical Review*, 91, pp. 211-27.

Dummett, M. (1991), *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Field, H. (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford: Blackwell..

Frege, G. (1884), *The Foundations of Arithmetic*. Trad. J.L. Austin. Illinois: Northwestern University Press (1980). Título original: *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff del Zahl.* Wilhelm Koebner, Breslau.

Frege, G. (1892), "On Sense and Reference", Trad. Max Black, en Ludlow, P., *Readings in the Philosophy of Language*, Cambridge (Mass): MIT Press (1997) Press. Título original: "Über Sinn und Bedeutung" Zeitschr. f. Philos. und

Philos. Kritik, 100.

Gettier, E. (1963), "Is justified true belief knowledge?", *Analysis*, 23, pp. 121-123.

Gödel, K. (1947), "What is Cantor´s Continuum Problem?", en Benacerraf & Putnam (1983), pp. 470-485.

Goldman, A. (1967), "A Causal Theory of Knowing", *Journal of Philosophy*, 64, pp. 357-372.

Hodes, H. (1984), "Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic", en *Journal of Philosophy*, 81, pp. 123-49.

Hodes, H. (1990), "Ontological Commitment. Thick and Thin", en Boolos, G. (ed.) (1990), *Meaning and Method. Essays in Honor of Hilary Putnam*, Cambridge: Cambridge University Press.

Kitcher, P. (1978), "The Plight of the Platonist", *Nous*, 12, pp. 119-136.

Kitcher, P. (1983), *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York, NY: Oxford University Press.

Kripke, S. (1972), *Naming and Necessity*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lear, J. (1977), "Sets and Semantics", *Journal of Philosophy*, 74, pp. 86-102.

Maddy, P. (1980), "Perception and Mathematical Intuition", *Philosophical Review*, 89, pp. 163-196.

Maddy, P. (1990), *Realism in Mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.

Putnam, H. (1990), *Reason, Truth and History*, Cambridge: Cambridge University Press.

Schirn, M. (1998), "Introduction", en Schirn (ed.) (1998), pp. 1-29

Schirn M. (ed.) (1998), *The Philosophy of Mathematics Today*, New York, NY: Oxford University Press.

Steiner, M. (1975), *Mathematical Knowledge*, Ithaca, NY: Cornell University Press.

Williams, R. (2002), *Reference to Mathematical Objects*. B. Phil. Thesis in Philosophy. Oxford University.