

00323



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

28

FACULTAD DE CIENCIAS

"INTRODUCCION A LA TERMODINAMICA DE AGUJEROS NEGROS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

ALEJANDRO GONZALEZ SAMANIEGO



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ALEJANDRO GONZALEZ GIL



2003

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

I

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
 "Introducción a la Termodinámica de Agujeros Negros"

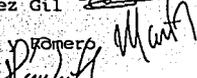
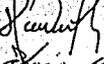
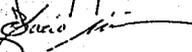
realizado por González Samaniego Alejandro

con número de cuenta 9653331-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

**A t e n t a m e n t e**

Director de Tesis  
 Propietario

- Propietario Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil 
- Propietario Dr. Rodolfo Patricio Martínez Romero 
- Suplente Dr. Hector Vucetich Widemann 
- Suplente Dr. Darío Núñez Zúñiga 
- Suplente Dr. Hugo Morales Técotl 

**Consejo Departamental de Física**

  
 DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE  
 Coordinadora de Licenciatura

**Introducción a la Termodinámica de Agujeros Negros**

por

**Alejandro González Samaniego**

**Tesis entregada para satisfacer parcialmente los  
requisitos para obtener el título de**

**Físico**

**en la**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**de la**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**Comité de tesis:**

- Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil**
- Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero**
- Dr. Hector Vucetich Widemann**
- Dr. Darío Núñez Zúñiga**
- Dr. Hugo Morales Técolt**

**2003**

*A mis padres,  
porque gracias a ellos el mundo es mejor.*

# Índice General

<b>Índice de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Formación de Agujeros Negros</b>	<b>4</b>
2.1 Colapso Gravitacional . . . . .	4
2.2 Solución de Kerr-Newman . . . . .	9
2.2.1 Métrica de Kerr-Newman . . . . .	9
2.2.2 Proceso de Penrose . . . . .	14
2.2.3 Conjetura de la Censura Cósmica . . . . .	15
<b>3 Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros</b>	<b>17</b>
3.1 Antecedentes . . . . .	17
3.2 Formalismo de Horizontes de Killing . . . . .	18
3.2.1 Ley Cero de La Mecánica de Agujeros Negros . . . . .	19
3.2.2 Primera Ley de la Mecánica de Agujeros Negros . . . . .	21
3.2.3 Segunda Ley de la Mecánica de Agujeros Negros . . . . .	23
3.3 Formalismo de Horizontes Aislados . . . . .	26
3.3.1 Horizontes Aislados . . . . .	27
3.3.2 Ley Cero y Primera Ley de la Mecánica de Agujeros Negros . . . . .	27
<b>4 Termodinámica de Agujeros Negros</b>	<b>31</b>
4.1 Leyes de la Termodinámica . . . . .	32
4.2 Termodinámica de Agujeros Negros . . . . .	35
4.3 Radiación de Hawking . . . . .	38
4.4 Discusión . . . . .	41
<b>5 Segunda Ley Generalizada de Agujeros Negros</b>	<b>43</b>
5.1 Antecedentes . . . . .	43
5.2 Formulación . . . . .	44
5.3 Cotas a la Entropía . . . . .	49
<b>6 Discusión Final</b>	<b>54</b>

**Bibliografia**

## Índice de Figuras

2.1	<i>Gráfica que relaciona la masa y el radio de una estrella enana blanca. La aproximación no-relativista esta representada por la curva discontinua; la curva continua nos muestra el resultado obtenido por Chandrasekhar.</i>	8
2.2	<i>Diagrama de Penrose para el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal.</i>	11
2.3	<i>i) Diagrama de Penrose que representa el Colapso de una estrella de simetría esférica; ii) Representación (en 2 dimensiones espaciales) del Colapso Gravitacional de una estrella libre de presión.</i>	12
2.4	<i>Estructura del Horizonte de Eventos <math>\mathcal{H}</math> y la ergoesfera vía el colapso gravitacional de un objeto con rotación.</i>	14
2.5	<i>Proceso de extracción de energía de un AN mediante el Proceso de Penrose</i>	15
3.1	<i>La superficie <math>\mathcal{H}</math> es una 2-esfera que puede ser considerada como la "frontera" del Agujero Negro.</i>	21
3.2	<i>Para tiempos muy grandes, la porción <math>\Delta</math> del Horizonte está Aislada. El espaciotiempo por estudiar esta representado por la región acotada por <math>\Delta</math>, <math>\mathfrak{S}^+</math>, y una superficie de Cauchy <math>M</math>.</i>	28

## **Agradecimientos**

Quiero expresar mi agradecimiento a todos aquellos que de alguna forma influyeron en mi formación profesional:

A mis Amigos: Laura, Ernesto, Hector, Roberto y, especialmente, a Verónica, sin cuyo apoyo nunca hubiera podido seguir adelante, pero sobre todo, por su franca y estimulante amistad.

Muchos profesores participaron directamente en mi formación como Físico. Mi agradecimiento sincero a todos ellos. Permitaseme mencionar, sin embargo, a la M. en C. Virginia Abrín y al Dr. Luis Fernando Magaña, de ellos aprendí mucho más que matemáticas y física; y a ellos debo, además de gratitud y respeto, una profunda admiración.

A mis Hermanos: Guadalupe, Arcadio, Ignacio, Octavio, César y Carmen, por su comprensión e incondicional apoyo durante todo este tiempo.

A los Drs. Rodolfo P. Martínez, Hector Vucetich, Darío Núñez y Hugo Morales, por su disposición para revisar este trabajo, así como por sus comentarios hechos al mismo.

De manera muy especial, quiero agradecer al Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil, quien, en los momentos más difíciles, con infinita paciencia y mucho más talento, estimuló en mí el gusto por seguir aprendiendo. Este trabajo no hubiera sido posible sin su apoyo, gracias Alejandro.

Finalmente, mi reconocimiento a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Ciencias Nucleares de la Universidad Nacional Autónoma de México, cuya infraestructura y ambiente, me permitieron disfrutar enormemente mi formación como físico.

**Alejandro González Samaniego**

México, D.F., Junio de 2003.

# Capítulo 1

## Introducción

En los inicios del siglo pasado fue desarrollada una teoría que determinó de manera importante la evolución de la Física Contemporánea, me refiero a la *Teoría de la Relatividad General*. Esta teoría, desarrollada por Albert Einstein, le da características peculiares a la geometría del espacio-tiempo, es por esto que la Relatividad General se puede entender como una teoría geométrica de la Gravitación (Geometrodinámica). Así, la Relatividad General implica una gran variedad de fenómenos físicos que a pesar de que fueron planteados desde tiempos muy remotos, aún nos resultan difíciles de entender. El *Colapso Gravitacional* de una estrella representa uno de ellos. El estudio termodinámico de los constituyentes de una estrella ha permitido, hasta cierto punto, conocer los "límites" que deben tener ciertas variables termodinámicas (presión, densidad, temperatura, etc.) para mantener a una estrella como tal. Así, es natural preguntarse sobre las consecuencias de que las variables termodinámicas en cuestión pasen los "límites" que permiten a la estrella mantenerse bajo una configuración estable. Es entonces que nos encontramos con el estudio termodinámico de un objeto que empieza a colapsarse. Teóricamente se ha encontrado que, dependiendo de las características particulares del objeto estelar en cuestión y de la evolución del mismo, el fenómeno descrito puede dar lugar a la formación de distintos tipos de objetos compactos: estrellas de neutrones o *Agujeros Negros*, siendo estos últimos los más probables de ocurrir. Así, en el capítulo 2 estudiamos tanto el *Colapso gravitacional* de una estrella, como las soluciones esféricamente simétrica (Agujero de Schwarzschild) y de simetría axial (Agujero de Kerr-Newman) a las ecuaciones de Einstein.

Desde el punto de vista del formalismo matemático, los *Agujeros Negros* se presentan como soluciones particulares a las ecuaciones de campo de Einstein. Es así como se "entiende" a la Geometría Diferencial, como la herramienta matemática natural para describir a los *Agujeros Negros*. Con base en esto, se ha encontrado que los principales parámetros que caracterizan la descripción matemática de los *Agujeros Negros* son la masa ( $M$ ), la carga ( $Q$ ), el momento angular ( $J$ ) y el área del horizonte

del *Agujero Negro*. El estudio de dichos parámetros ha tenido como resultado fundamental la formulación de las *Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros*. La primera de ellas establece la manera en que los parámetros característicos del *Agujero Negro* pueden variar al pasar de una situación inicial a otra. Matemáticamente esta dada por

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ.$$

Esta es la Primera Ley para un *Agujero Negro* de Kerr-Newman. Los términos  $\kappa$ ,  $\Omega_H$  y  $\Phi_H$ , representan funciones características del Horizonte. La Segunda Ley nos dice que el área del horizonte de un *Agujero Negro* nunca decrece en el tiempo, no importando el fenómeno físico al que se vea sometido el mismo. Se expresa matemáticamente por

$$\Delta A \geq 0.$$

Estas leyes, planteadas en primera instancia por Bardeen, Carter y Hawking[1], determinan de manera importante la manera en la que pueden evolucionar los *Agujeros Negros* bajo distintas circunstancias físicas. Originalmente su descripción matemática necesitaba del *Formalismo ADM* (Arnowitt, Deser, Misner, 1962). La motivación del mismo tiene que ver con el poder plantear una formulación Hamiltoniana de la *Relatividad General*, lo cual además de mostrarnos de una manera un poco más clara el contenido dinámico de las ecuaciones de Einstein, nos permite ver el como es que las cantidades conservadas se expresan en infinito. Sin embargo, el Formalismo ADM nos introduce a la vez un problema, que tiene que ver con la incapacidad de poder definir parámetros característicos del *Agujero Negro* de manera que concuerden, tanto como sea posible, con la interpretación clásica que tenemos de ellos. Lo anterior surge del hecho de que para definir a un *Agujero Negro* en términos de este formalismo, necesitamos conocer la totalidad del desarrollo futuro de un espacio-tiempo dado. Con el propósito de salvar estos problemas, es que Ashtekar y un grupo de colaboradores, han desarrollado un formalismo alterno, el de los *Horizontes Aislados*. Este formalismo permite definir de una manera más satisfactoria -sin necesidad de recurrir a la estructura de campos de Killing- cantidades como la masa, la carga y el momento angular de un *Agujero Negro*. Más aún, se han podido plantear las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros. El tercer capítulo de este trabajo cubre el análisis de las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros en ambos formalismos.

Clásicamente, podemos entender a un *Agujero Negro* como un objeto que absorbe toda la energía que le llega y, sin embargo, "no emite nada". Así, desde el punto de vista de la Termodinámica, la temperatura de éste en la Relatividad General Clásica es cero. Siguiendo con el análisis termodinámico de los *Agujeros Negros* es fácil ver que, al menos en sus expresiones matemáticas, existe una gran analogía entre las Leyes de la Mecánica de *Agujeros Negros* y las Leyes Ordinarias de la Termodinámica. Lo anterior se ve de manera clara, en el gran parecido entre la

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Ley del Incremento del área para *Agujeros Negros*, "...el área de la superficie de un *Agujero Negro* nunca decrece..." y la Ley del Incremento de la Entropía para sistemas termodinámicos, "...el cambio en la entropía de un sistema siempre es mayor o igual que cero...", esta analogía parece indicar que  $S \sim A$  y  $\kappa \sim T$ , pero existe una aparente paradoja con el hecho de que clásicamente  $T_{AN} = 0$ . Fué gracias al descubrimiento de Hawking que mostró que efectos cuánticos en las vecindades de un *Agujero Negro* resulta en la emisión de partículas con un espectro característico de cuerpo negro, con una temperatura  $T = \frac{hc}{2\pi}$ , aunado a lo anterior, se ha identificado una cantidad asociada con los *Agujeros Negros* -conocida como  $A/4$  en la Relatividad General, con  $A$  representando el área de la superficie del *Agujero Negro*- que juega el papel matemático de la entropía. Esto se trata con mayor profundidad en el capítulo cuatro del presente trabajo.

En el contexto de la *Gravedad semi-clásica*, donde los efectos de la gravitación son tratados por las ecuaciones de campo de Einstein, pero los campos de materia son tratados como campos cuánticos propagándose en el espacio-tiempo descrito por la *Relatividad General*, se identifica a la cantidad  $A/4$  con la entropía física de un *Agujero Negro*, siempre y cuando reconozcamos que existe una conexión física entre las leyes de la mecánica de *Agujeros Negros* y las leyes de la Termodinámica. Sin embargo, se ha encontrado (Bekenstein) que tal definición de entropía implicaría la invalidez de la Segunda Ley de la termodinámica de *Agujeros Negros* para ciertos experimentos pensados. Es así, que se ha propuesto (Bekenstein) una formulación alternativa para dicha ley, conocida como la Segunda Ley Generalizada de *Agujeros Negros* (SLG): *la entropía total, dada por*

$$S' = S + A_H/4$$

donde  $S$  y  $A_H/4$  representan la entropía de la materia en el exterior de *Agujero Negro* y la entropía del *Agujero Negro* respectivamente, nunca decrece en el tiempo.

A partir de esto, ha surgido una amplia discusión sobre la necesidad de imponer cotas a la entropía, como requisito para la validez de la SLG -Bekenstein, entre otros- o sino es necesaria dicha condición -Wald-. En el capítulo 5 se discute sobre las posibles condiciones y especificaciones que se espera sean requeridas para que, habiendo definido la entropía del sistema físico descrito anteriormente, pudiera demostrarse la validez de la SLG.

El objetivo de este trabajo, es el de presentar una revisión al día de los temas aquí tratados, de tal forma que el lector encuentre en este, una exposición clara y concisa que le introduzca al estudio de la *Termodinámica de Agujeros Negros*.



## Capítulo 2

# Formación de Agujeros Negros

### 2.1 Colapso Gravitacional

Los fenómenos relacionados con la presencia de objetos estelares en el Universo, han sido ampliamente estudiados desde mucho tiempo atrás. En particular, se han planteado varios modelos que tratan de explicar el cómo una estrella logra mantenerse en una cierta configuración estable. Ahora sabemos que todos estos modelos estelares, por distintos que parezcan, tienen algo en común, es la conclusión de que, para estrellas cuyo radio sea menor a  $9/4$  de su masa, se necesitan presiones infinitas al interior de la misma para mantenerla en un estado de equilibrio, en este caso estamos suponiendo la utilización de unidades geométricas, en las cuales  $c = G = \hbar = 1$  y donde la expresión que relaciona masa y longitud es tal que  $R \sim \frac{1}{M^2} (\frac{M}{G})^{1/2}$ . Esto es conocido como el *Teorema de Buchdahl*[2]. Es decir, si se construyera una estrella con densidad constante y radio  $R = 9/4M$ , y después se le comprimiera un poco, esta no tendría otra opción más que colapsarse. Según los astrofísicos, es factible que lo mencionado anteriormente pueda ocurrir; la justificación física se encuentra dentro de las teorías que existen de la evolución estelar.

De manera genérica, podemos definir a una estrella, como un cuerpo que se encuentra acotado por su propia gravedad, y que además radia energía suministrada por una fuente interna. La fuente de radiación es generalmente energía nuclear cedida por reacciones de fusión que tienen lugar en el interior de la estrella. Por lo tanto, al haber una pérdida paulatina de la energía producida internamente, necesariamente ocurrirán cambios en su estructura interna o composición, o ambos; es decir, la estrella se encuentra en constante evolución. Así, en algún momento de dicha evolución, cuando las reservas originales de hidrógeno contenidas en el núcleo de la estrella han sido ya convertidas en helio, su fuente de energía se agota, hasta que se alcanzan energías tan altas que se empiezan a generar elementos más pesados, con la consecuente disminución de energía y la pérdida de estabilidad en sí misma. Es cuando la evolución de la estrella depende de manera importante, pero no única,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

de su masa. Si una estrella pierde suficiente masa, su subsecuente evolución deberá de ser lenta, como la esperada para nuestro Sol. Pero es de esperarse que no todas las estrellas sigan esta ruta. En algún punto en el Ciclo Nuclear pueden pasar una de dos cosas: la estrella evoluciona de una manera no-explosiva, y lo que queda del núcleo, luego de que la estrella se ha expandido para formar una nebulosa planetaria, resulta ser una enana blanca; esto ocurre para estrellas de hasta  $1.4M_{\odot}$ . Por otra parte, las estrellas de neutrones nacen en enormes explosiones de Supernova, las cuales ocurren en los últimos momentos en la evolución de estrellas cuyas masas van desde  $1M_{\odot}$  hasta  $3.7M_{\odot}$  aproximadamente. Sólo si la estrella en cuestión excede la masa límite para estrellas de neutrones, es que se obtiene lo que conocemos como Agujero Negro.

Dentro del análisis que se hace del *Colapso Gravitacional*, una de las sutilezas a estudiar es el hecho de que un objeto estelar pierda su estabilidad hidrostática. Este punto puede ser atacado aplicando los fundamentos básicos de la Mecánica Cuántica a los constituyentes del objeto en cuestión. A continuación discutiremos de una manera elemental, pero no por ello poco ilustrativa, las implicaciones que tiene el considerar aspectos cuánticos, con una aproximación no-relativista, en un sistema astrofísico como el que nos ocupa.

Consideremos a una estrella como una bola de gas de átomos de hidrógeno soportada por una presión  $P$ . Además, asumamos que ésta se encuentra en el instante de su evolución en el que ya ha agotado sus reservas de hidrógeno. En este momento, la estrella se colapsa debido a que la presión del gas ya no es la suficiente como para soportar el empuje de la gravedad; lo que resulta entonces, es una estrella enana blanca. Así, los átomos que forman el gas están completamente ionizados, y ahora la presión que resiste a la gravedad es debida a los electrones; éstos forman un gas de fermiones que se encuentra altamente degenerado <sup>1</sup>. Considerando una aproximación no-relativista para la velocidad del electrón, podemos tomar el límite en el cual se tiene una degeneración extrema de la presión

$$\begin{aligned}
 P(v, T) &= \frac{2k_B T}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \ln(1 + e^{-(\epsilon(k) - \mu(v, T))/k_B T}) d^3 k \\
 &\approx \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} (\epsilon_F - \epsilon(k)) k^2 dk \\
 &= \frac{(2m\epsilon_F)^{5/2}}{\hbar^3 10m\pi^2} = \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $n$  representa la densidad de número,  $m$  la masa del electrón, y definimos a  $k_F$

<sup>1</sup>Decimos que un gas de electrones está degenerado si la temperatura es tan baja y la densidad tan alta, que los efectos cuánticos, en particular el principio de exclusión de Pauli, llegan a ser fundamentales para la descripción del sistema físico en cuestión. En este caso, el potencial químico  $\mu$  se identifica como la *energía de Fermi* ( $\epsilon_F$ ).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

por  $\varepsilon_p = \frac{h^2 k_p^2}{2m}$ .

Por otra parte, sabemos que las estrellas enanas blancas están formadas principalmente de helio, el cual libera dos electrones cuando está completamente ionizado, por lo cual tenemos que la densidad  $\rho$  es

$$\rho = (m_n + m_p)n \approx 2m_p n.$$

Podemos entonces reescribir la ecuación 2.1 de la siguiente manera como  $P = A\rho^{5/3}$ , donde  $A = \frac{3h^2(3\pi^2)^{2/3}}{10m_e} \left(\frac{1}{2m_p}\right)^{5/3}$ .

Pero  $\rho$  también se puede expresar como

$$\rho = \left(\frac{3\phi}{5A}\right)^{3/2}, \quad (2.3)$$

con  $\phi$  representando al potencial gravitacional; el cual sabemos satisface la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + \alpha^2 \phi^{3/2} = 0, \quad (2.4)$$

con  $\alpha^2 = 4\pi G \left(\frac{3}{5A}\right)^{3/2}$ . Haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{\phi}{\phi_0} \quad v = \alpha \phi_0^{1/4} r, \quad (2.5)$$

la ecuación 2.2 queda como

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{2}{v} \frac{du}{dv} + u^{3/2} = 0. \quad (2.6)$$

La ecuación anterior es conocida como la ecuación de Lane-Emden con índice 3/2; ésta se resuelve numéricamente, encontrando valores constantes para  $v|_{u=0}$  y  $-v^2 \frac{du}{dv}|_{u=0}$  (3.6 y 2.7 respectivamente).

Por otra parte, en la superficie de la estrella ( $r = R_*$ ), la fuerza gravitacional está dada por

$$mg = \frac{GM_* m}{R_*^2} = -\frac{d\phi}{dr}|_{r=R_*} \quad (2.7)$$

que en términos de las variables  $u$  y  $v$ , se expresa como

$$M = -\frac{1}{G\alpha} \phi_0^{3/4} \left(v^2 \frac{du}{dv}\right)_{u=0}; \quad (2.8)$$

además, de 2.5 tenemos que

$$R = \frac{1}{\alpha \phi_0^{1/4}} v|_{u=0}. \quad (2.9)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Así, a partir de 2.7 y 2.8, es fácil ver que

$$MR^3 = \text{cte.} \quad (2.10)$$

Por lo tanto, el radio de la estrella enana blanca decrece cuando aumenta su masa; resultado que se observa esquemáticamente en la figura 2.1.

Si ahora tomamos la expresión relativista

$$\epsilon(k) = \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2}, \quad (2.11)$$

y realizamos un análisis similar al anterior, obtenemos que existe una masa límite  $^2M_C$ , tal que, si una estrella logra tener una masa superior a  $M_C$  para un radio  $R_c$  fijo, la presión debida a los electrones que se encuentran en un estado altamente degenerado, ya no podrá resistir a la gravedad, y por lo tanto, continuará colapsándose. Entonces se formará lo que se conoce como una *estrella de neutrones*, la cual logra mantener un cierto estado de equilibrio debido a la presión que ejercen los neutrones que también se encuentran en un estado de degeneración. De igual manera, existe una masa límite a radio constante, para la cual una estrella de neutrones puede seguir manteniéndose bajo una configuración estable. Dicho límite no está bien definido, pero se cree que corresponde a aproximadamente 3 masas solares. Estrellas con masas superiores a este límite continuarán colapsándose hasta formar lo que conocemos como un *Agujero Negro*.

En la actualidad, existe un consenso general en torno a la existencia de Agujeros Negros en la Naturaleza. Hasta ahora, el mejor candidato para un Agujero Negro estelar, es probablemente la supernova de rayos X V404 Cygni, la cual se cree tiene una masa  $M > 6M_\odot$ ; a la vez, el mejor candidato a Agujero Negro supermasivo es el que se encuentra en el centro de la Vía Láctea, cuya masa es de alrededor de  $2.6 \times 10^6 M_\odot$ [3].

---

<sup>2</sup>Este resultado fue obtenido por Chandrasekhar. La masa crítica corresponde, aproximadamente, a 1.44 masas solares.



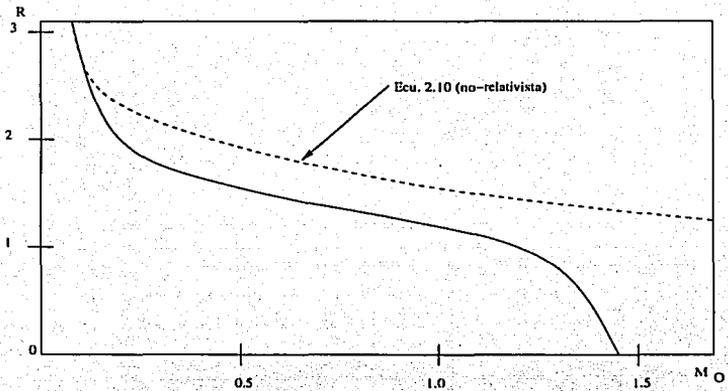


Figura 2.1: Gráfica que relaciona la masa y el radio de una estrella enana blanca. La aproximación no-relativista esta representada por la curva discontinua; la curva continua nos muestra el resultado obtenido por Chandrasekhar.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2.2 Solución de Kerr-Newman

### 2.2.1 Métrica de Kerr-Newman

Dada la discusión planteada en la sección anterior, es evidente que si queremos lograr una descripción más realista de los objetos estelares compactos, tenemos que tomar en cuenta los aspectos relativistas del sistema en estudio. Es así, como de manera natural, la Teoría de la Relatividad General (RG) se muestra como la opción más viable para la descripción de los fenómenos concernientes a la presencia de objetos estelares compactos -en particular los *Agujeros Negros*, (AN)-, en el Universo.

La Relatividad General es una Teoría eminentemente geométrica de la gravedad. Es decir, es una teoría que describe matemáticamente, vía la Geometría Diferencial, a todos los fenómenos físicos en los cuales la interacción gravitacional se manifiesta de manera importante. La RG se sintetiza en un sistema de 10 ecuaciones diferenciales -ecuaciones de campo de Einstein-,

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = 8\pi T^{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

de las cuales sólo 6 son independientes, esto debido a la libertad intrínseca que se tiene para elegir el sistema de coordenadas. En este sentido, para un cierto tipo de materia, representada por el tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  la solución a estas ecuaciones viene dada por la métrica  $g^{\alpha\beta}$ , la cual describe a la geometría del espaciotiempo del sistema físico en cuestión.

Una solución particular a las ecuaciones de campo corresponde a aquella que describe el espaciotiempo en torno a un AN de simetría axial y con rotación. Dicha solución fue planteada en primera instancia por Roy Kerr en 1963[4]. En este caso en particular, los parámetros que caracterizan al AN son: su masa total M, y su momento angular total J. Si además consideramos que la fuente de campo gravitacional esta caracterizada por una carga e, obtenemos lo que se conoce como la solución de Kerr-Newman (KN)[5]; ésta se expresa matemáticamente, en coordenadas de Boyer-Lindquist  $(t, r, \theta, \phi)$ , por

$$ds^2 = -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\ + \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.13)$$

donde  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + e^2$  y  $a \equiv \frac{J}{M}$ . Mientras que  $e = \sqrt{Q^2 + P^2}$ , donde Q y P son la carga eléctrica y magnética respectivamente; con el potencial de Maxwell dado por

$$A = \frac{Qr(dt - a \sin^2 \theta d\phi) - P \cos \theta [adt - (r^2 + a^2)d\phi]}{\Sigma}. \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.13) se pueden inferir las siguientes consideraciones con respecto a la solución de KN:

- La métrica de KN no depende explícitamente de las coordenadas  $t$  y  $\phi$ , por lo cual modela un espaciotiempo estacionario -que no estático-, y de simetría axial.
- El doble cambio de signo  $t \rightarrow -t$  y  $\phi \rightarrow -\phi$  resulta en una isometría.
- Dado lo anterior, y entendiéndose que un campo vectorial de Killing es aquel que genera al grupo de simetrías en la variedad, los campos vectoriales  $\partial_t$  y  $\partial_\phi$  son campos de Killing; y podemos definir un nuevo campo de Killing dado por

$$\chi^a = (\partial_t)^a + \Omega_H (\partial_\phi)^a \quad (2.15)$$

el cual es tangente al Horizonte del AN de KN. La interpretación de  $\Omega_H$  como la velocidad angular del Horizonte será discutida más adelante.

- El espaciotiempo de KN es asintóticamente plano. Cuando la coordenada  $r$  es muy grande, podemos pensar que ésta representa la distancia al AN. Esta interpretación se obtiene al observar que cuando  $r \rightarrow \infty$ , la métrica (2.13) se convierte en una métrica Minkowskiana.
- Si  $e = 0$ , entonces  $A = 0$ , y obtenemos la métrica de Kerr.
- Cuando  $a = 0$ , obtenemos la solución de Reissner-Nordstrom,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right)} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.16)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  nos dice que tenemos una solución esféricamente simétrica.

- Si hacemos  $a = e = 0$ , la ecuación (2.13) se reduce a la métrica de Schwarzschild, figura (2.2),

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.17)$$

que de manera similar al caso de Reissner-Nordstrom, representa una solución con simetría esférica.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

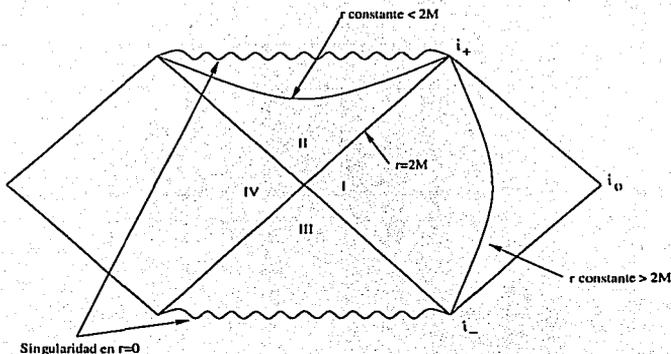


Figura 2.2: Diagrama de Penrose para el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal.

En la Teoría de Einstein-Maxwell, los Agujeros Negros estacionarios (el estado final asintótico después del colapso) están caracterizados únicamente por 3 parámetros: la masa ( $M$ ), el momento angular ( $J$ ), y la carga eléctrica ( $e$ ). Todos los otros grados de libertad ("multipolos") son radiados durante el colapso -coloquialmente se dice que *los Agujeros Negros no tienen pelo*-. Desde el punto de vista de la astrofísica, no se espera que los Agujeros Negros cargados jueguen un papel preponderante, ya que ellos rápidamente atraerían cargas opuestas y se descargarían. Sin embargo, la consideración de la carga nos permite modelar, en un ámbito más general, los fenómenos que involucran a los Agujeros Negros.

Podemos definir burdamente a un Agujero Negro como *una región del espaciotiempo de la cual nada puede escapar hacia el infinito*. Sin embargo, el infinito no es parte del espaciotiempo; pero por otra parte, su estructura causal nos permite "pegarle" "el infinito" al espaciotiempo conforme. Una manera ilustrativa de entender esto es usando un *diagrama de Penrose* para el caso de un objeto con simetría esférica. así, para una estrella colapsándose, la parte relevante del diagrama de Penrose en coordenadas de Kruskal es aquella que es exterior a la estrella, figura 2.3(i). En este caso,  $i_0$  representa el infinito espacial,  $i_{\pm}$  el infinito temporal pasado y futuro,  $\mathfrak{I}^-$  el infinito nulo pasado, y  $\mathfrak{I}^+$  el infinito nulo futuro.  $i_{\pm}$  representan singularidades, las cuales brevemente discutiremos más adelante.  $\mathfrak{I}^{\pm}$  son hipersuperficies nulas. Cada punto en la figura representa una 2-esfera, excepto  $r=0$ ,  $i_0$ , y  $i_{\pm}$ . Esto nos define a grandes rasgos la estructura causal del espaciotiempo, en términos de la cual decimos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

que el Horizonte de eventos  $\mathcal{H}$  del AN esta dado por  $\mathcal{H} = j^-(\mathfrak{S}^+)$ , es decir, es la frontera de la clausura del pasado causal de  $\mathfrak{S}^+$ , y representa una hipersuperficie nula. En este sentido, la singularidad  $r = 0$  alcanzada por el colapso gravitacional se muestra "oculta", en el sentido de que  $\mathfrak{S}^+$  no tiene "pistas" de ella. En la figura 2.3(ii) vemos otra representación del colapso gravitacional. Aquí cada círculo muestra al cuerpo colapsándose, que corresponde a la superficie de una 2-esfera (superficie del cuerpo, considerando sólo 2 dimensiones espaciales), en un instante de tiempo dado, los conos de luz, que en espacio vacío estaban representados por líneas a  $45^\circ$ , se ven modificados conforme cruzamos la superficie  $r = 2M$ .

Así, el Agujero Negro será aquella región del espaciotiempo cuya frontera es  $\mathcal{H}$ . En-

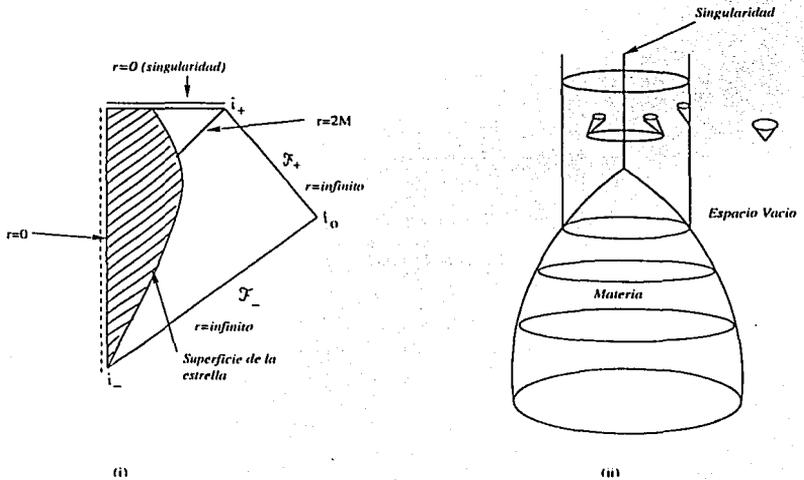


Figura 2.3: i) Diagrama de Penrose que representa el Colapso de una estrella de simetría esférica; ii) Representación (en 2 dimensiones espaciales) del Colapso Gravitacional de una estrella libre de presión.

tonces, podemos asumir que un AN queda determinado por su Horizonte de Eventos  $\mathcal{H}$ . Hay que notar que, de acuerdo con la figura 2.3 y lo expuesto anteriormente, para localizar al Horizonte de Eventos necesitamos conocer la evolución completa del espaciotiempo. Como se discutirá en el siguiente capítulo, esto causa problemas al momento de tratar de describir en forma adecuada la mecánica de Agujeros Negros.

Para la solución de KN,  $\mathcal{H}$  es aquella superficie para la cual  $\Delta = 0$ , es decir,

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2 - e^2)^{1/2}. \quad (2.18)$$

En realidad, la expresión anterior nos define 2 hipersuperficies,  $r_+$  y  $r_-$ ; en efecto,  $r_+$  nos define  $\mathcal{H}$ , con área dada por

$$\begin{aligned} A_{KN} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (r_+^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi = \int_0^{2\pi} 2(r_+^2 + a^2) d\pi \\ &= 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi \left[ 2M^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - e^2} \right] \\ &= 8\pi \left[ M^2 - \frac{e^2}{2} + \sqrt{M^4 - e^2 M^2 - J^2} \right]; \end{aligned} \quad (2.19)$$

así, la región del espaciotiempo que se encuentra entre el límite estático y el Horizonte de Eventos  $\mathcal{H}$  nos define lo que se conoce como la *ergoesfera*, figura 2.4. Aquí, las partículas pueden escapar a infinito de la región I, pero no de la región II. Mientras que la región III contiene a la singularidad de anillo. Lo anterior es una característica particular de las soluciones que representan a AN con rotación.

Dado lo anterior, se define a  $\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt}$  como la velocidad angular coordenada, que en  $\mathcal{H}$  (para KN) es

$$\Omega_{\mathcal{H}} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (2.20)$$

Así, la solución de Kerr-Newman, ecuación (2.13), exhibe la característica de que el campo de Killing  $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$  se hace tipo-espacio ( $\xi^a \xi_a \leq 0$ ) en una cierta región exterior al Agujero Negro. Para el AN esféricamente simétrico, esto ocurre sólo al interior del Horizonte de Eventos. Esta región es conocida como la ergoesfera, que como ya mencionamos, esta caracterizada por

$$r_+ \leq r \leq M + \sqrt{(M)^2 - a^2 \cos^2 \theta - e^2}. \quad (2.21)$$

Como el campo de Killing  $\xi^a$  genera traslaciones temporales en el infinito asintótico, su naturaleza tipo-espacio en la ergoesfera significa que un observador ahí, tendría que viajar con una velocidad mayor que la de la luz para seguir una órbita de  $\xi^a$ ; por lo tanto, éste no podría mantenerse en una situación estática y estará forzado a rotar con el Agujero Negro. Considerando la ecuación (2.15) y lo señalado anteriormente, al parámetro  $\Omega_{\mathcal{H}}$  lo podemos entender como aquel que nos dice con que velocidad rota el AN.

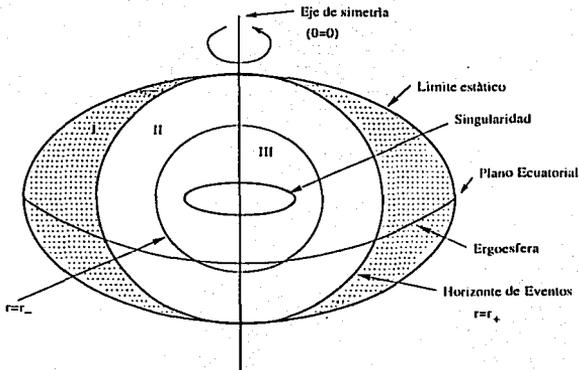


Figura 2.4: Estructura del Horizonte de Eventos  $\mathcal{H}$  y la ergoesfera vía el colapso gravitacional de un objeto con rotación.

### 2.2.2 Proceso de Penrose

Como vimos en la sección anterior, la descripción de AN con rotación resulta en la existencia de la región que llamamos ergoesfera. La presencia de esta, sugirió a Penrose [6] proponer un mecanismo, conocido como *proceso de Penrose*, mediante el cual se podría extraer energía de un AN. El proceso consiste en lo siguiente: Supongamos que una partícula se aproxima a un Agujero Negro a lo largo de una geodésica. Si  $p$  es su 4-momento, podemos identificar la constante de movimiento

$$E = -p \cdot \xi \quad (2.22)$$

como su energía, ya que  $E = p^0$  en infinito, esto se tratará con mayor detalle en la sección 3.2, utilizando el formalismo de Horizontes de Killing. Ahora supongamos que la partícula decae en otras dos partículas, una de las cuales cae al interior del Agujero Negro, mientras la otra escapa a infinito, figura 2.5. Por conservación de energía  $E_2 = E - E_1$ , pero  $E_1 = -p_1 \cdot \xi$ , que no necesariamente es positivo en la ergoregión, ya que ahí  $\xi$  debe ser tipo-espacio. Por lo tanto, si el decaimiento tiene lugar en la ergoregión, debemos de tener que  $E_2 \geq E$ . Lo anterior nos proporciona

un verdadero proceso de extracción de energía de un AN.

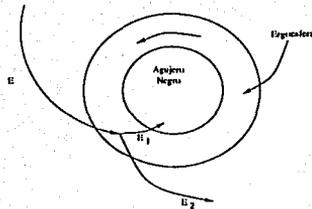


Figura 2.5: Proceso de extracción de energía de un AN mediante el Proceso de Penrose

Sin embargo, el proceso descrito anteriormente tiene un límite físico para la extracción de energía, el cual está determinado por el parámetro  $J$  del AN, ya que la existencia de momento angular es la que da origen a la ergoesfera, que es el lugar donde se lleva a cabo parte importante del proceso de Penrose. Por lo tanto, dicho proceso sólo se puede realizar hasta el momento en que  $J = 0$ , que es cuando desaparece la ergoesfera. Otra forma de marcar el límite para la extracción de energía es usando el hecho de que la variación del área de un AN es siempre no-negativa,  $\Delta A \geq 0$ , que como veremos en el siguiente capítulo, no es más que la 2a. Ley de la Mecánica de Agujeros Negros.

### 2.2.3 Conjetura de la Censura Cósmica

Por último, discutiremos brevemente una característica propia de los AN: esta tiene que ver con el hecho de que la formación de ANs vía el Colapso Gravitacional, lleva consigo, de manera natural, la formación de singularidades [7, 8], donde por singularidades nos referimos a aquellos lugares del espaciotiempo donde no sabemos nada de la física que aplica ahí. Matemáticamente, las entendemos como aquellos lugares donde el escalar de Kretschmann diverge. Así, para la solución de Schwarzschild, ecuación (2.17), la superficie  $r = 2M$  y  $r = 0$  representan posibles singularidades.

Sin embargo, es fácil ver que  $r = 2M$  no representa una singularidad física real, sino una singularidad de coordenadas, llamada así porque es debida a una mala elección de coordenadas. La solución de Schwarzschild está representada en el diagrama de Penrose de la figura 2.2. En este, cada punto representa una 2-esfera, excepto los puntos  $r = 0$ ,  $t_0$  y  $t_{\pm}$ . Las trayectorias nulas se mues-

ven a  $45^\circ$  de  $\mathfrak{S}^-$  a través de  $r = 0$  y después salen a  $\mathfrak{S}^+$ .  $\mathfrak{S}^\pm$  son hipersuperficies nulas.

Hasta aquí hemos mencionado que si un AN se forma, entonces necesariamente se forma una singularidad. Pero el hecho de que existan singularidades físicas reales, nos hace suponer que estas pudieran existir sin la presencia de un horizonte que nos impida verlas, tales singularidades son conocidas como singularidades desnudas. Cabe señalar que la existencia de estas se relaciona de manera natural con el estado final del colapso gravitacional, y dado que no conocemos las características genericas del colapso, no tenemos herramientas suficientes para poder analizar con detalle la formación de estas singularidades. Por otra parte, la sola formación de singularidades desnudas, implicaría la producción de radiación de intensidad infinita, que tendría consecuencias catastróficas para el Universo, Penrose y Hawking, (1970)[9].

Dado que el problema en particular esta lejos de ser resuelto, se han propuesto varias conjeturas que tienen que ver con el colapso gravitacional. La más aceptada hasta el momento es la propuesta por Penrose [6], conocida como *Conjetura de la Censura Cósmica*. Esta plantea que las singularidades del espacio-tiempo están encerradas por un horizonte de eventos y no pueden ser vistas por observadores externos, es decir, que no existen singularidades desnudas. Sin embargo, para ciertos modelos de materia, tales como fluidos perfectos, se han encontrado soluciones a las ecuaciones de campo que permiten la existencia de singularidades desnudas. A pesar de esto, y de no haber sido probada hasta el momento la Conjetura de la Censura Cósmica, esta sigue siendo muy aceptada, ya que se cree que los posibles contraejemplos que se han encontrado, no corresponderían a modelos físicamente realistas que resulten de un Colapso Gravitacional. Así, la validez de dicha conjetura se basa más en un requerimiento de la física, que en una rigurosa demostración matemática. Este es uno de los problemas abiertos de la Relatividad Matemática, (para una revisión ver [10]).

## Capítulo 3

# Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros

### 3.1 Antecedentes

Hasta ahora, se ha planteado de manera breve, la justificación física de la existencia de AN, y la descripción matemática de la solución de Kerr-Newman. El siguiente paso es el de discutir los aspectos relacionados con la Mecánica de Agujeros Negros. Esto se concreta en la formulación de tres resultados conocidos como las *Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros*. Éstas fueron descritas por Bardeen, Carter y Hawking [1]- alrededor de los años 70.

La formulación de las leyes de la mecánica de AN puede realizarse vía dos formalismos distintos: el primero lo reconoceremos como *Formalismo de Horizontes de Killing* (HK), el cual supone que el Horizonte es de Killing y hace uso de la representación Hamiltoniana de la RG, el segundo es el planteado por la escuela de A. Ashtekar en [11], el cual denominaremos por *Formalismo de Horizontes Aislados* (HA).

Más que en la utilización de distintas herramientas matemáticas, la principal diferencia se encuentra en los conceptos básicos -definición de parámetros del AN como la masa  $M$ , el momento angular  $J$ , etc.- a partir de los cuales se trata de lograr una adecuada descripción del AN. Esto quedará de manifiesto una vez que hayan sido descritos ambos formalismos, lo cual es el objetivo del presente capítulo; basta señalar por el momento, que el formalismo de HA, a diferencia del HK, trata y logra describir situaciones más realistas, con respecto a lo que se espera desde el punto de vista de la física, de los Agujeros Negros.

### 3.2 Formalismo de Horizontes de Killing

El formalismo ADM (R. Arnowit, S. Deser, C.W. Misner) no es nada más que una formulación de la Relatividad general que nos permite ver de manera clara el contenido dinámico de esta. Dentro de este contexto, se pueden definir cada uno de los parámetros característicos de un AN  $(M, J, Q)$ , y a partir de esto, derivar las *Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros*. Antes de esto, presentaremos brevemente la estructura matemática en la cual se basa la formulación de dichas leyes, que es la de los campos de Killing.

Decimos que  $\xi^\mu$  es un campo vectorial de Killing, si para  $\phi_t : M \rightarrow M$ , que representa un grupo uniparamétrico de simetrías,  $\phi_t^* g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ,  $\xi^\mu$  genera  $\phi_t$ . Es decir,  $\xi^\mu$  será un campo vectorial de Killing, si este es tal que

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1)$$

Es fácil identificar los campos de Killing asociados con una solución particular de las ecuaciones de Einstein, para esto notemos que, dado cualquier campo vectorial  $\xi^\mu$ , se pueden encontrar coordenadas locales tales que  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ , donde  $\alpha$  representa a cada una de las coordenadas. Así, en dicho sistema coordenado la derivada de Lie será

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \alpha}. \quad (3.2)$$

Por lo tanto, de la definición (3.1), vemos que para el sistema coordenado en cuestión  $\xi$  representará un campo vectorial de Killing si la métrica correspondiente  $g_{\mu\nu}$  es independiente de  $\alpha$ .

Una propiedad importante de los campos de Killing está relacionada con las líneas mundo de partículas en el espaciotiempo. Sabemos que en la Relatividad General estas últimas se mueven sobre geodésicas; así tenemos que, para una geodésica  $\gamma$  con tangente  $v^\mu$ , y un campo vectorial de Killing  $\xi^\mu$ , la cantidad  $\xi_\mu v^\mu$  es constante a lo largo de  $\gamma$ . Recordemos también que la definición (3.1) nos dice que el campo de Killing  $\xi^\mu$  está asociado con una simetría de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , la cual además, da lugar a una cantidad conservada para las partículas que se mueven sobre geodésicas en el espaciotiempo. Entonces, de acuerdo con lo mencionado en la sección 2.2.1, para la solución de KN, los campos  $\partial_t$  y  $\partial_\phi$  son ejemplos de campos de Killing.

Finalmente, presentaremos a los Horizontes de Killing. Dado un campo vectorial de Killing  $\xi$ , una hipersuperficie nula  $K$  será un Horizonte de Killing si, en  $K$ ,  $\xi$  es normal a  $K$ . Las estructuras geométricas que hemos definido hasta ahora, están relacionadas de manera directa con las propiedades de las ecuaciones de campo de la Relatividad General, en particular, con las soluciones que dan lugar a AN y sus respectivos Horizontes de Eventos. Dicha relación está basada en un resultado obtenido

por Hawking [8], el cual nos dice que en la RG, el Horizonte de Eventos de cualquier AN estacionario debe ser un Horizonte de Killing. Recordemos que un Agujero Negro es estacionario si existe un grupo uniparamétrico de simetrías -definidas en el espaciotiempo asintóticamente plano  $(M, g_{\mu\nu})$ - generadas por un campo de Killing  $\xi^a$  tipo-tiempo y unitario en el infinito. La forma más general para este tipo de solución es

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x})dt^2 + 2g_{0i}(\vec{x})tdx^i + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j. \quad (3.3)$$

Por ejemplo, el campo de Killing  $\partial_t$  para el AN de Schwarzschild debe ser normal al HE. Para el AN de Kerr-Newmann, existe un campo de Killing dado por la ecuación (2.14), tal que es normal a su HE.

### 3.2.1 Ley Cero de La Mecánica de Agujeros Negros

Sea  $\xi^a$  el campo de Killing normal asociado con un Horizonte de Killing K, entonces, como  $\nabla^b(\xi^a \xi_a)$  también es normal a K, tenemos que  $\xi^a$  y  $\nabla^b(\xi^a \xi_a)$  deben de ser proporcionales entre si, por lo cual, existe una función  $\kappa$  definida en K, tal que

$$\nabla^b(\xi^a \xi_a) = -2\kappa \xi^a. \quad (3.4)$$

Dicha función  $\kappa$  es conocida como la gravedad superficial de K. Partiendo de esta definición mostraremos que, para un espaciotiempo con materia que satisface la condición de energía dominante,  $T_{ab}\xi^a \xi^b \geq 0$ ,  $\kappa$  debe de ser constante en cualquier Horizonte de Killing. Primero notemos que por ser  $\xi^a$  un campo de Killing, entonces la ecuación (3.4) se puede reescribir como

$$\kappa \xi_a = \xi^b \nabla_b \xi_a. \quad (3.5)$$

Ahora, si a esta ecuación le aplicamos  $\xi_{[d} \nabla_{c]}$  y utilizamos el hecho de que  $R_{abc}{}^d \xi_d = \nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c$ , tendremos que

$$\xi_a \xi_{[d} \nabla_{c]} \kappa + \kappa \xi_{[d} \nabla_{c]} \xi_a = (\xi_{[d} \nabla_{c]} \xi^b)(\nabla_b \xi_a) - \xi^b R_{ba[cd]} \xi_e. \quad (3.6)$$

Pero como  $\xi^a$  es normal al Horizonte del Agujero Negro, y por el Teorema de Frobenius sabemos que la condición necesaria y suficiente para que  $\xi^a$  sea una hipersuperficie ortogonal es que  $\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0$ , entonces se puede ver que en el Horizonte

$$\xi_c \nabla_a \xi_b = -2\xi_{[a} \nabla_{b]} \xi_c. \quad (3.7)$$

entonces

$$\begin{aligned} (\xi_{[d} \nabla_{c]} \xi^b)(\nabla_b \xi_a) &= -\frac{1}{2} \kappa \xi_a \nabla_d \xi_c \\ &= \kappa \xi_{[d} \nabla_{c]} \xi_a. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por lo cual, la ecuación (3.6) queda como

$$\xi_a \xi_{[d} \nabla_{c]} \kappa = \xi^b R_{ab|c}{}^e \xi_{d]} \xi_e. \quad (3.9)$$

Entonces, de aplicar  $\xi_{[d} \nabla_{c]}$  a la ecuación (3.7), y utilizando la ecuación (3.9) podemos obtener, después de algunos pasos algebraicos, que

$$\xi_{[d} \nabla_{c]} \kappa = -\xi_{[d} R_{c]}{}^f \xi_f. \quad (3.10)$$

Por otra parte, tenemos que para un Horizonte de Killing K se cumple que

$$R_{ab} \xi^a \xi^b = 0. \quad (3.11)$$

Esto se puede ver fácilmente en la ecuación de Raychaudhuri

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c\xi^d, \quad (3.12)$$

ya que se puede demostrar que para un Horizonte de Killing K, el tensor  $\hat{B}_{ab} \equiv \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab} = 0$  y  $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$ . Entonces, de las ecuaciones de Einstein y la condición de energía dominante se sigue que

$$T_{ab}\xi^a\xi^b = 0, \quad (3.13)$$

con  $T_{ab}$  el Tensor de energía-momento. Así, utilizando nuevamente las ecuaciones de Einstein tenemos

$$\xi_{[d} R_{c]}{}^f \xi_f = 0. \quad (3.14)$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.10) llegamos a

$$\xi_{[d} \nabla_{c]} \kappa = 0, \quad (3.15)$$

lo cual nos dice que  $\kappa$  es constante en el Horizonte. Es así que podemos formular lo que se conoce como la *Ley Cero de la Mecánica de Agujeros Negros* [1]:

“Para cualquier solución de AN estacionario a las ecuaciones de Einstein que satisfaga la condición de energía dominante, la gravedad superficial  $\kappa$  debe de ser constante sobre su Horizonte de Eventos”.

Cabe mencionar que la ecuación (3.3) nos define a la gravedad superficial  $\kappa$  de un Agujero Negro, sólo para cuando este es estacionario y su Horizonte de Eventos es un Horizonte de Killing. Así, la ley cero es válida únicamente para soluciones estacionarias a las ecuaciones de Einstein. Es entonces que se considera que muy cerca del Agujero Negro, el estado final de un colapso gravitacional será muy parecido a un espaciotiempo estacionario.

### 3.2.2 Primera Ley de la Mecánica de Agujeros Negros

La *Primera Ley de la Mecánica de Agujeros Negros* está planteada por una expresión que nos muestra la manera en que se relacionan los parámetros del AN ( $M$ ,  $J$ ,  $Q$ ), cuando este se ve perturbado de alguna forma. Para ver como es dicha relación, necesitamos primero definir los parámetros involucrados en esta ley.

Para situaciones estacionarias, la energía total  $E$  en un espaciotiempo asintóticamente plano, la podemos definir como una integral de superficie en el infinito, ya que  $\partial_t$  es un campo de Killing global en dicho espaciotiempo,

$$E_\infty = M_\infty \equiv -\frac{1}{8\pi G} \oint_{\infty(\partial\Sigma)} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \ell^\nu, \quad (3.16)$$

donde  $\Sigma$  representa una hipersuperficie tipo-espacio,  $\partial\Sigma$  un elemento de área en  $\Sigma$ ,  $\ell^\nu$  un campo de Killing y  $\nabla_\mu$  la derivada covariante definida en el espaciotiempo en cuestión. En esta misma ecuación hemos usado el hecho de que la energía en el infinito corresponde con la masa  $M$ . Esta se conoce como la masa de Komár.

Así, consideremos una hipersuperficie tipo-espacio  $\Sigma$  en el exterior de un AN estacionario, con fronteras en  $\mathcal{H}$ , el Horizonte de Eventos, y otra frontera en  $t_0$ , ver figura (3.1).

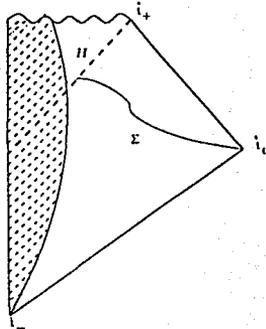


Figura 3.1: La superficie  $\mathcal{H}$  es una 2-esfera que puede ser considerada como la "frontera" del Agujero Negro.

Aplicando la Ley de Gauss a la ecuación (3.16) obtenemos

$$M_{\infty} = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Sigma} dS_{\mu} R^{\mu}{}_{\nu} \ell^{\nu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \ell^{\nu}. \quad (3.17)$$

Si usamos el hecho de que  $\chi^{\alpha}$  representa un campo de Killing para la solución de KN tal que

$$\chi = \xi + \Omega_{\mathcal{H}} \phi, \quad (3.18)$$

además de que  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , entonces

$$R^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} = -2T^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} + T \xi^{\mu}, \quad (3.19)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} M_{\infty} &= \int_{\Sigma} dS_{\mu} (-2T^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} + T \xi^{\mu}) - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} (\nabla^{\mu} \chi^{\nu} - \Omega_{\mathcal{H}} \nabla^{\mu} \phi^{\nu}) \\ &= \int_{\Sigma} dS_{\mu} (-2T^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} + T \xi^{\mu}) - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} (\nabla^{\mu} \chi^{\nu}) \\ &\quad + \frac{\Omega_{\mathcal{H}}}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} (\nabla^{\mu} \phi^{\nu}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si ahora consideramos que  $T_{\mu\nu}$  es tal que corresponde al tensor de esfuerzos del campo electromagnético  $\mathcal{F}$ , entonces,  $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(\mathcal{F}) = T(\mathcal{F}) = 0$ , y

$$M_{\infty} = -2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu}(\mathcal{F}) \xi^{\nu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \chi^{\nu} + \frac{\Omega_{\mathcal{H}}}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} (\nabla^{\mu} \phi^{\nu}). \quad (3.21)$$

pero de manera análoga a como se definió la energía total (M) en infinito, la carga total y el momento angular total -medidos en el infinito- están dados por

$$Q \equiv -\frac{2}{\Phi_{\mathcal{H}}} \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu}(\mathcal{F}) \xi^{\nu} \quad (3.22)$$

con  $\Phi = \xi^{\mu} A_{\mu}$ , y  $A_{\mu}$  el potencial eléctrico en el horizonte, tal que  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ . Y

$$J_{\mathcal{H}} \equiv \frac{1}{16\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \phi^{\nu}. \quad (3.23)$$

Usando las definiciones (3.22) y (3.23) en la ecuación (3.21) obtenemos

$$M_{\infty} = \Phi_{\mathcal{H}} Q + 2\Omega_{\mathcal{H}} J - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \chi^{\nu}. \quad (3.24)$$

---

<sup>1</sup>Se puede demostrar que, dado un campo de Killing  $\xi$ ,  $\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \xi^{\nu} = R_{\mu\nu} \xi^{\nu}$ .

Por otra parte, se puede demostrar que, si  $\eta \cdot \chi = -1$ , entonces  $dS_{\mu\nu} = (\chi_\mu \eta_\nu - \chi_\nu \eta_\mu) dA$  en  $\mathcal{H}$ . Así

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \chi^\nu &= -\frac{1}{4\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dA (\chi \cdot \nabla \chi)^\nu \eta_\nu \\ &= -\frac{\kappa}{4\pi G} \oint_{\mathcal{H}} dA \cdot \chi \eta \\ &= \frac{\kappa}{4\pi G} A_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $A$  representa el área del horizonte y usamos el hecho de que  $(\chi \cdot \nabla \chi)^\nu = \kappa \chi^\nu$ . Por lo tanto

$$M_\infty = \frac{\kappa}{4\pi} A_{\mathcal{H}} + 2\Omega_{\mathcal{H}} J + \Phi_{\mathcal{H}} Q. \quad (3.26)$$

Que lo podemos identificar fácilmente con la fórmula de Smarr[12] para la masa:

$$M = 2T A_{\mathcal{H}} + 2\Omega_{\mathcal{H}} J + \Phi_{\mathcal{H}} Q, \quad (3.27)$$

donde  $T_{\mathcal{H}}$ ,  $\Omega_{\mathcal{H}}$  y  $\Phi_{\mathcal{H}}$  son constantes en el Horizonte para cualquier Agujero Negro estacionario de simetría axial.

Así, dada la expresión anterior, podemos formular la *Primera Ley de la Mecánica de Agujeros Negros*:

*Para un AN estacionario de masa  $M$ , carga  $Q$ , momento angular  $J$ , y tal que su horizonte de eventos está caracterizado por una gravedad superficial  $\kappa$ , un potencial eléctrico  $\Phi_{\mathcal{H}}$  y una velocidad angular  $\Omega_{\mathcal{H}}$ , al ser perturbado, de manera que alcance un nuevo estado de equilibrio, este cambiará de tal forma que*

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_{\mathcal{H}} dJ + \Phi_{\mathcal{H}} dQ. \quad (3.28)$$

Nuevamente, al igual que para la Ley cero, la primera Ley es válida sólo para Agujeros Negros estacionarios, y por lo tanto, depende de la definición de campos de Killing globales.

### 3.2.3 Segunda Ley de la Mecánica de Agujeros Negros

El área del Horizonte de Eventos  $A_{\mathcal{H}}$  es uno de los parámetros relevantes que intervienen en el estudio de la dinámica de Agujeros Negros. Su importancia se muestra al considerar el cambio de estado estacionario de un AN. Para mostrar como se relaciona el  $A_{\mathcal{H}}$  con la dinámica del AN, consideremos la ecuación de Raychaudhuri para una congruencia de geodésicas nulas, parametrizadas por  $\lambda$ ,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c\xi^d \quad (3.29)$$

donde  $\theta$ ,  $\sigma_{ab}$  y  $\omega_{ab}$  miden la expansión, la distorsión y la rotación de las geodésicas en la congruencia,  $R_{cd}$  representa el tensor de Ricci y  $\xi^c$  el generador de la congruencia.

Si tomamos a  $\xi^c$  como el generador del Horizonte de eventos, entonces, como  $\xi^c$  es normal a la hipersuperficie nula, por el Teorema de Frobenius <sup>2</sup>:  $\xi_{[c}\nabla_a\xi_{b]} = 0$ , pero

$$\begin{aligned}\xi_{[c}\nabla_a\xi_{b]} &= \xi_{[c}B_{ba]} \\ &\equiv \xi_{[c}\omega_{ba]} = \frac{1}{3}(\xi_c\omega_{ba} + \xi_a\omega_{cb} + \xi_b\omega_{ac}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

lo cual nos muestra que  $\omega_{ab} = 0$ . Entonces la ecuación (3.29) se puede reescribir como

$$-\frac{d\theta}{d\lambda} - \frac{1}{3}\theta^2 = \sigma_{ab}\sigma^{ab} + R_{cd}\xi^c\xi^d. \quad (3.30)$$

Assumiendo que las ecuaciones de Einstein con materia que satisface la condición de energía dominante ( $T_{cd}\kappa^c\kappa^d \geq 0$  para todo  $\kappa^c$  nulo), observamos que el lado derecho de la ecuación (3.30) será no negativo. Así

$$\frac{d\theta}{d\lambda} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0, \quad (3.31)$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\theta(\lambda)} \geq \frac{1}{\theta(\lambda_0)} + \frac{\lambda - \lambda_0}{3}. \quad (3.32)$$

De la relación anterior se puede ver que si  $\theta(\lambda_0)$  fuera negativa en el horizonte de eventos, entonces podríamos encontrar alguna  $\lambda$  para la cual  $\theta(\lambda) \rightarrow -\infty$ . Este hecho implicaría la existencia de singularidades desnudas, lo cual estamos descartando de antemano al asumir como válida la Conjetura de la Censura Cósmica. Entonces, la expansión del horizonte tiene que ser no negativa cuando este evoluciona de un estado inicial con  $\theta(\lambda_0)$  a un estado final estacionario con  $\theta(\lambda)$ .

Pero por otra parte, sabemos que la expansión de la congruencia de geodésicas está relacionada con el área  $\mathcal{A}$  que generan estas por

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\lambda} = \theta\mathcal{A} \quad (3.33)$$

lo cual implica que

$$\mathcal{A} = A_0 e^{\theta(\lambda - \lambda_0)}. \quad (3.34)$$

<sup>2</sup> *Teorema de Frobenius*: La condición necesaria y suficiente para que  $\chi^a$  sea una hipersuperficie ortogonal es que  $\chi_{[a}\nabla_b\chi_{c]} = 0$ .

Por lo tanto, como  $\theta$  es siempre no negativo en el horizonte, entonces  $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}_0$ , y así podemos concluir que

$$\Delta\mathcal{A} \geq 0, \quad (3.35)$$

es decir, que el cambio en el área del Horizonte de Eventos que evoluciona a un estado final estacionario será no negativo, siempre y cuando se satisfaga la hipótesis de la Censura Cósmica y la condición de energía dominante para  $T_{\mu\nu}$ . Lo anterior se conoce como la *Segunda Ley de la Mecánica de Agujeros Negros*.

Finalmente, cabe mencionar que la solución de Kerr-Newman es la solución más general de acuerdo con los Teoremas de Unicidad [8] para AN. Esta solución caracteriza a un AN vía 3 parámetros: la masa  $M$ , el momento angular  $J$ , y la carga  $Q$ . La definición de dichos parámetros debe ser tal que nos represente de la mejor manera posible al AN como tal.

Un problema fundamental con el Formalismo de Horizontes de Killing es que este, al medir la masa, la carga y el momento angular, no sólo toma en cuenta las cantidades intrínsecas del AN, sino que al medir en el infinito estas cantidades, considera también contribuciones del medio que lo rodea, en contraste, los otros parámetros que aparecen en la Primera Ley  $-\Omega_H, \kappa, A_H$  y  $\Phi_H$  si representan cantidades propias del Horizonte. En este caso, podemos decir que el Formalismo de Horizontes de Killing nos proporciona una definición poco precisa de los parámetros característicos del AN. Lo anterior tiene su origen en el hecho de que se supone la existencia global del formalismo de Horizontes de Killing.

### 3.3 Formalismo de Horizontes Aislados

El principal objetivo en la formulación de cualquier ley de la naturaleza es el de tratar de representar de la manera más objetiva posible a un cierto fenómeno físico en estudio. En particular, la formulación de las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros, debería ser tal que nos represente hasta cierto punto, una descripción lo más realista posible de la manera como evolucionan los AN en el tiempo. En este sentido, un punto importante a considerar en el estudio de los Agujeros Negros, es el de su propia formación y la manera en que se le describe. Es ampliamente aceptado que, luego del proceso de formación de un AN vía el Colapso Gravitacional, lo que resulta es un AN en estado de equilibrio. El tratar de describir una situación de equilibrio pareciera ser algo muy básico, más sin embargo, dentro del campo de estudio de los AN, esta situación siempre se relacionó con el tomar soluciones estacionarias.

Al pedir que una solución sea estacionaria -en el Formalismo de Horizontes de Killing-, estamos pidiendo que todo el espaciotiempo lo sea también. Esta condición para tratar situaciones en equilibrio es sin duda muy restrictiva. No olvidemos que nuestro sistema en estudio son los Agujeros Negros y la manera en que estos evolucionan de acuerdo con su propia naturaleza y tal vez, la del medio cercano que lo rodea. Así, parece lógico el sólo pedir que el Agujero Negro se encuentre en equilibrio, permitiendo que el entorno, y el resto del espaciotiempo en general, admita una situación distinta.

Dado lo anterior, consideraremos que un Agujero Negro en equilibrio es aquel cuyo flujo de materia o radiación es nulo a través de su Horizonte. Aunque parezca trivial, esta manera de describir las situaciones de equilibrio de AN, es fundamental en el estudio de las Leyes de la Mecánica de AN, su formulación matemática es lo que llamamos *Formalismo de Horizontes Aislados*, el cual fué presentado por A. Ashtekar y colaboradores en años recientes, (para una revisión ver [13, 14, 15, 16]). En este sentido, y de manera contrastante con el Formalismo de Horizontes de Killing presentado en la sección anterior, se estudia al Horizonte aislado, reemplazando esta la noción que teníamos de un Horizonte de Eventos; y a la vez, nos deshacemos de la estructura de campos de Killing, cuyo uso en la descripción del Horizonte de Eventos nos imponía soluciones globalmente estacionarias.

A continuación presentaremos de manera breve, la estructura de Horizontes Aislados y la manera en que a partir de esta, se generan las leyes cero y primera de la mecánica de Agujeros Negros.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.3.1 Horizontes Aislados

Básicamente, un Horizonte Aislado  $\Delta$  es una 3-superficie nula, con la topología de  $S^2 \times \mathfrak{R}$ ; en la cual se cumplen ciertas propiedades que se especifican en la siguiente definición:

Una subvariedad  $\Delta$  de un espaciotiempo  $(M, g_{ab})$  es un *Horizonte Aislado* si:

- (i) Esta es topológicamente como  $S^2 \times \mathfrak{R}$ , nula, con distorsión  $\sigma$  y expansión  $\theta$  nulas.
- (ii) Dada una clase de equivalencia de los vectores normales nulos  $[\ell^a]$  en  $\Delta$ , la conexión definida en el espaciotiempo tiene una simetría en  $[\ell^a]$  de tal forma que

$$[\mathcal{L}_\ell, \nabla_a] \ell^b = 0 \quad (3.36)$$

y el potencial de Maxwell es tal que

$$\mathcal{L}_\ell A_a = 0 \quad (3.37)$$

para cualquier  $\ell^a \in [\ell^a]$ .

- (iii) Se satisfacen las ecuaciones de campo en  $\Delta$ .

Antes que nada, notemos que todas las condiciones son locales para  $\Delta$ . La condición topológica en (i) restringe al Horizonte a tener la topología que se espera surja del Colapso Gravitacional. El hecho de que la expansión  $\theta$  sea nula implica que el área de  $\Delta$  es constante en el tiempo, aquí el área del horizonte  $a$  es tal que

$$a_\Delta = 4\pi R_\Delta^2, \quad (3.38)$$

lo anterior le proporciona a  $\Delta$  la noción de aislado; además, (i) y (ii) implican que la métrica intrínseca y la conexión son independientes del tiempo en  $\Delta$ ; así, recuperamos la noción de un Horizonte en "equilibrio" sin recurrir a los campos de Killing. La condición (iii) simplemente nos especifica que podemos aproximar cualquier solución a las ecuaciones de Einstein en el horizonte. En este momento no abundaremos más sobre esta definición. Todo lo que gire en torno a esta y que necesitemos para la presentación de las leyes de la mecánica de AN, será discutido más adelante.

### 3.3.2 Ley Cero y Primera Ley de la Mecánica de Agujeros Negros

El formalismo de Horizontes Aislados nos proporciona un marco adecuado para describir lo que sucede en el entorno cercano de Agujeros Negros formados por Colapso

Gravitacional. Después de un cierto tiempo, el espaciotiempo contendrá un Horizonte Aislado  $\Delta$ , esto se ve esquemáticamente en la figura (3.2). Para formular las Leyes de la Mecánica de AN, primero necesitamos definir los parámetros que intervienen en dichas Leyes: la gravedad superficial  $\kappa_\Delta$ , la energía  $E_\Delta$  y el momento angular  $J_\Delta$ .

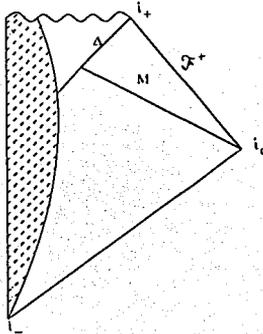


Figura 3.2: Para tiempos muy grandes, la porción  $\Delta$  del Horizonte está Aislada. El espaciotiempo por estudiar esta representado por la región acotada por  $\Delta$ ,  $\mathcal{S}^+$ , y una superficie de Cauchy  $M$ .

Tratando de ser consecuentes con lo presentado hasta ahora, nos limitaremos al caso de Agujeros Negros con simetría axial y con horizontes no-extremos. En este caso los campos asociados con simetrías son de la forma  $\xi^a \doteq B \ell^a + \Omega \phi^a$ , donde  $B$  y  $\Omega$  son constantes y  $\phi^a$  es el vector de Killing asociado con rotaciones en el Horizonte.

Ahora, recordemos que la Ley Cero de la Mecánica de AN nos plantea que la gravedad superficial  $\kappa$  debe de ser constante. Sin embargo, para un Horizonte sin expansión, como es nuestro caso, la gravedad superficial  $\kappa$  no será constante, ya que podemos escalar la normal nula  $\ell$  por una función positiva  $c$  para obtener una nueva normal nula  $\tilde{\ell} = c\ell$ ; y por lo tanto, tendríamos que  $\kappa_{\tilde{\ell}} = c\kappa_{\ell} + \mathcal{L}_{\tilde{\ell}}c$ , lo cual no es necesariamente constante.

Así, para definir a la gravedad superficial, deberíamos de tener una única clase de equivalencia  $[\ell^a]$  en  $\Delta$ . Pero esta "condición" ya fue tomada en cuenta en la definición de Horizonte Aislado al requerir que  $[\mathcal{L}_{\ell}, \nabla_a] \ell^b \doteq 0$ . Ahora sí tenemos la posibilidad de definir de manera adecuada a la gravedad superficial  $\kappa$  como la aceleración de  $\ell^a$

normalizada de manera correcta; es decir, en  $\Delta$

$$\ell^a \nabla_a \ell^b = \kappa \ell^b. \quad (3.39)$$

Como  $\ell^a \in [\ell^a]$  es normal a  $\Delta$ , entonces no sólo se tendrá expansión y distorsión nulas, sino que también será libre de rotación, lo cual implica la existencia de una 1-forma  $\omega_a$ , intrínseca a  $\Delta$ , que satisface

$$\nabla_a \ell^b \doteq \omega_a \ell^b. \quad (3.40)$$

Esta 1-forma es independiente de la elección de  $\ell^b \in [\ell^b]$  y su contracción con  $\ell^a$  da lugar a la gravedad superficial  $\kappa$ .

Dada la definición para  $\kappa$ , ecuación (3.39), de manera análoga al Formalismo de Horizontes de Killing, se puede demostrar que  $\kappa$  toma el mismo valor en todas las curvas integrales de  $\ell^a$ . Por lo tanto  $\kappa$  es constante en cualquier Horizonte Aislado. Retomando, ahora dentro del Formalismo de Horizontes Aislados, la *Ley Cero de la Mecánica de Agujeros Negros*.

Recordemos que para un espaciotiempo asintóticamente plano, se obtiene expresiones para la masa ADM  $M_\infty$  y momento angular  $J_\infty$  usando un formalismo hamiltoniano. El mismo procedimiento puede ser usado para definir los parámetros en cuestión. Entonces, dadas las condiciones que debe de satisfacer  $\Delta$ , el hamiltoniano ahora será la suma de dos términos superficiales, uno en infinito y otro en  $\Delta$ , estos últimos son los que nos permitirán interpretar la masa y el momento angular del Horizonte Aislado. Por lo tanto, para formular la primera ley, debemos de introducir de inicio la noción de Energías y momento angular en el Horizonte Aislado. Entonces, dentro de este formalismo, el momento angular está dado por

$$J = -\frac{1}{8\pi G} \oint_\infty \phi^a \omega_a - \frac{1}{8\pi G} \oint_\Delta (\phi^a \omega_a + 2\phi^a F_a) + J_c \quad (3.41)$$

donde  $J_c$  representa términos que se pueden eliminar al imponer constricciones en la frontera; entonces podemos considerar que  $J = J_\infty - J_\Delta$ , y por lo tanto, tenemos una forma de definir al momento angular característico del Horizonte Aislado  $J_\Delta$ . En el caso en que el espaciotiempo es vacío y  $\phi^a$  es el vector de Killing asociado a rotaciones, entonces  $J_\Delta = J^{\text{Komar}} = J_\infty$ .

Por otra parte, para definir la energía asociada al Horizonte Aislado, consideremos la simetría  $\xi^a \doteq B\ell^a + \Omega\phi^a$ , la cual genera la evolución temporal en el Horizonte. A partir de esto, se puede generar un campo vectorial  $G_\xi$  -asociado con la simetría en cuestión- que represente una solución a las ecuaciones de campo para cada punto del espacio fase. Se puede ver que existe un hamiltoniano que genera la evolución a lo largo de  $G_\xi$ . Entonces, sabemos que existe una estructura simpléctica  $\Omega$  en el espacio fase que permite generar un isomorfismo entre el espacio vectorial  $G$  y una 1-forma

del espacio cotangente. Resulta ser que la 1-forma asociada con el campo vectorial  $G_\xi$  esta dada por

$$X(\delta) \equiv \Omega(\delta, G_\xi) = \delta E_{ADM} - \left[ \frac{\kappa}{8\pi G} \delta a_\Delta + \Omega \delta J_\Delta + \Phi \delta Q_\Delta \right]. \quad (3.42)$$

Donde  $\Omega$  es la estructura simpléctica en el espacio fase,  $\delta$  una variación arbitraria vista como un vector tangente en el espacio fase y  $X$  la 1-forma definida por la estructura simpléctica. Pero para que la evolución a lo largo del campo vectorial  $G_\xi$  sea hamiltoniana, el segundo término de la ecuación anterior tendrá que representar una diferencial exacta; esto ocurre siempre y cuando

$$\delta E_\Delta = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta a_\Delta + \Omega \delta J_\Delta + \Phi \delta Q_\Delta. \quad (3.43)$$

donde  $E_\Delta$  representa una función definida en el espacio fase, la cual reconocemos como la energía del Horizonte Aislado correspondiente a la simetría  $\xi$ . Por lo tanto, el uso de una representación hamiltoniana, nos permite obtener la *Primera Ley de la Mecánica de Agujeros Negros* que se expresa matemáticamente por la ecuación (3.43). En este caso la función  $E_\xi$  representará a la masa del AN medida en el Horizonte Aislado siempre y cuando  $\xi$  sea canónica; así,  $M_\Delta$  se obtiene al integrar la ecuación (3.43). Para el AN de Kerr-Newman se tiene que

$$M_\Delta = \frac{\sqrt{(R_\Delta^2 + GQ_\Delta^2)^2 + 4G^2 J_\Delta^2}}{2GR_\Delta}. \quad (3.44)$$

Hasta aquí el *Formalismo de Horizontes Aislados* ha probado ser exitoso al describir situaciones de equilibrio de Agujeros Negros, permitiéndonos formular la Ley Cero y la Primera Ley de la Mecánica de AN. Sin embargo, la propia construcción del formalismo nos impide, dentro del mismo, formular la Segunda Ley, ya que al definir al Horizonte, con el objetivo de que fuera aislado, excluimos el flujo de materia o radiación a través de él. En este sentido, esta manera de estudiar a los AN es parcialmente efectiva si lo que se busca es formular las Leyes de la Mecánica de AN mediante un mismo formalismo.

Tratando de superar las limitaciones de los Horizontes Aislados, recientemente, Ashtekar y Krishnan han propuesto [16] un nuevo mecanismo para estudiar a los Agujeros Negros y su evolución temporal. esto es mediante la definición de *Horizontes Dinámicos*; estos son Horizontes que permiten el flujo de radiación a través del mismo y por lo tanto podría conseguir formular la segunda ley de una mejor manera.

## Capítulo 4

# Termodinámica de Agujeros Negros

En el presente trabajo hemos visto como las soluciones a las ecuaciones de Einstein permiten la existencia de Agujeros Negros. Por otra parte, hemos visto en el capítulo anterior, el como su caracterización esta determinada por lo que se conoce como las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros. El siguiente paso es analizar una de las áreas de investigación que se han venido desarrollando en los últimos años, la *Termodinámica de Agujeros Negros*. El estudio del comportamiento termodinámico de los Agujeros Negros fue planteado por Bekenstein a principios de los años 70[17]. Este tiene su origen en la increíble analogía que existe entre las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros y las Leyes de la Termodinámica. Motivado por esto, Bekenstein sugirió que las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros presentadas hasta ahora, deberían de ser las Leyes de la termodinámica aplicadas a un "sistema" que contiene a un Agujero Negro.

Lo anterior ha tenido como resultado que, apartir de entonces y hasta la fecha, la Termodinámica de Agujeros Negros haya surgido como un prometedor campo de investigación, no sólo por el hecho de tratar de entender de mejor manera la naturaleza de los Agujeros Negros, sino porque en la medida en que se avanza en este sentido, se podrá también conocer, hasta cierto punto, la manera en que se relacionan la Termodinámica y la Gravitación. En este capítulo, revisamos brevemente los aspectos básicos de las Leyes de la Termodinámica, la manera en como estas se relacionan con las respectivas Leyes para la Mecánica de Agujeros Negros y el porqué, el proceso de *Radiación de Hawking* nos permite pensar que la analogía es algo más que una curiosidad matemática, dando pie al estudio en sí de la Termodinámica de Agujeros Negros.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 4.1 Leyes de la Termodinámica

El estudio termodinámico de la materia tiene su origen siglos atrás. Este ha tenido como resultado una teoría muy consolidada que ha dado lugar a grandes avances en la Ciencia en general. Esta teoría se fundamenta en ideas aparentemente sencillas, que se plasman en la formulación de las Leyes de la Termodinámica. La relevancia de dichas leyes se manifiesta en el hecho de que la forma básica de estas, no depende del estado microscópico de un sistema en particular, y por lo tanto, para una gran variedad de sistemas físicos, estas leyes tienen validez Universal. En este sentido, la descripción del sistema en cuestión, se realiza mediante la determinación de ciertas variables termodinámicas macroscópicas, las cuales son susceptibles de ser medidas mediante algún proceso físico. El estudio de la termodinámica como tal es por demás extenso, aquí sólo revisaremos las ideas que nos son necesarias para el planteamiento de las Leyes de la Termodinámica de Agujeros Negros.

La descripción termodinámica de un cierto fenómeno físico requiere antes que nada, de la precisa definición del *Sistema* que caracteriza al fenómeno en cuestión. Esto necesariamente conlleva la separación del espacio en dos distintas regiones, la del sistema físico en sí, y por otra parte, la del resto del Universo. Tal sistema puede mantenerse total o parcialmente aislado, permitiendo que exista algún tipo de interacción con el medio que lo rodea, actuando este como fuente de intercambio de energía, partículas, etc.

Una vez definido el sistema por estudiar, especificamos los parámetros termodinámicos que caracterizan tanto al sistema, como al medio que lo rodea. Aquí es donde las sutilezas de la teoría se manifiestan de manera importante; ya que esta nos permite describir termodinámicamente al sistema por medio de unos pocos parámetros macroscópicos, que como tales, representan las contribuciones de los múltiples subsistemas de que puede estar formado el sistema. Aquí distinguimos las variables termodinámicas extensivas como la Energía, de las intensivas como la Temperatura. Las primeras son del orden de magnitud del volumen del sistema y se relacionan entre sí por medio de leyes de conservación, mientras que las segundas son independientes del tamaño del sistema.

Formalmente, la validez de la Termodinámica está restringida por un proceso donde las densidades son definidas como la razón de propiedades extensivas y el volumen ó número de partículas, en el límite cuando cualesquiera de estos últimos tiende a infinito; la base de esto es que todas las cantidades extensivas escalen con el tamaño del sistema. Tal proceso es conocido como el *límite termodinámico*. Lo anterior es un condicionamiento natural, ya que para un sistema finito, no se esperaría tener infinitos en la descripción del mismo; y como consecuencia de esto, los resultados de la Termodinámica solamente están bien definidos en el límite termodinámico.

Por otra parte, desde antes de que la Termodinámica lograra consolidarse como una teoría "completa", se reconoció que esta se basaba de manera importante en dos conceptos, *energía* y *entropía*, que como variables termodinámicas extensivas, caracterizan a cualquier sistema físico de manera tal, que siguen los siguientes principios:

- (a) la entropía de cualquier sistema aislado tiende a un máximo,
- (b) la energía de cualquier sistema aislado permanece constante;

donde la entropía termodinámica del sistema esta definida por

$$S \equiv \ln [Vol(\Sigma_E)] \quad (4.1)$$

con  $Vol(\Sigma_E)$  representando el volumen de la hipersuperficie en el espacio de estados definido por la ecuación  $H = E = cte$ . Así, la entropía del sistema se puede entender como una función en el espacio termodinámico de estados, el cual también esta comprendido por la energía total  $E$  del sistema. En este sentido, la entropía no es sino una medida del número de microestados accesibles al sistema en dicho espacio. La temperatura es otro parámetro de estado y esta definido en términos de los parámetros ya mencionados por

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}. \quad (4.2)$$

Lo señalado anteriormente implica que la manera en que cambian los distintos parámetros termodinámicos del sistema, debe de estar sujeta a los requerimientos planteados por (a) y (b). Esto se concreta en lo que se conoce como las Leyes de la termodinámica. La condición (a) es conocida como la segunda ley de la termodinámica, la cual nos dice que la evolución de un sistema termodinámico es tal que existe una variable que lo caracteriza, llamada entropía, la cual nunca decrece con el tiempo,

$$\Delta S \geq 0. \quad (4.3)$$

La Ley Cero de la Termodinámica nos plantea la manera en que debemos de caracterizar el *equilibrio termodinámico*. Notemos que de acuerdo con la ecuación (4.2), dos sistemas se encontrarán en equilibrio térmico siempre y cuando  $S$  alcance un máximo. Así, la Ley Cero de la Termodinámica aparece como una consecuencia de que si dos sistemas  $A$  y  $B$  se encuentran a diferentes temperaturas y se les pone en contacto, entonces para que  $S$  se incremente y alcance un máximo, de acuerdo con la ecuación (4.2), tiene que haber una transferencia de energía del cuerpo de mayor temperatura al de menor temperatura. Entonces, para que dos sistemas se encuentren en equilibrio térmico es condición necesaria y suficiente que la temperatura sea constante: *Ley Cero de la Termodinámica*. Y por lo tanto, podemos caracterizar a los estados de equilibrio termodinámico como aquellos para los cuales la entropía alcanza un máximo. Ahora, se puede definir el equilibrio

termodinámico sujeto a varias constricciones: constricciones extensivas, energía fija, entropía, volumen, número de partículas, etc.; constricciones intensivas, temperatura fija, presión, potencial químico, etc. En la *mecánica estadística* las correspondientes cantidades asociadas con estas constricciones dan lugar al planteamiento de distintos ensambles estadísticos (microcanónico, canónico y gran canónico).

La condición (b) es conocida como la Primera Ley de la Termodinámica. El origen de esta ley se puede entender de la siguiente manera. Como hemos señalado, la entropía  $S$  es una función en el espacio termodinámico de estados, donde también están definidos la energía y demás parámetros de estado del sistema. Por lo cual, en principio, la diferencial de la función  $S$  estará dada en términos de la mejor aproximación lineal en los cambios del resto de los parámetros de estado; matemáticamente esto se ve como

$$dS = \frac{1}{T} dE + \sum_j X_j d\alpha_j \quad (4.4)$$

con  $S$ ,  $E$ , y  $\alpha_j$  parámetros de estado y de igual forma a como se definió  $T$ ,  $X_j \equiv \partial S / \partial \alpha_j$ . La ecuación (4.4) corresponde, al igual que la condición (b) señalada con anterioridad, a un principio de conservación de la energía.

La Tercera Ley de la Termodinámica ha sido formulada de diferentes maneras, aquí sólo nos referiremos a las que son usadas en mayor medida. La primera es la conocida como el *Principio de Nernst*: un cierto sistema termodinámico no puede alcanzar temperatura cero en un número finito de procesos físicos. La segunda, debida a Planck, nos dice que cuando  $T \rightarrow 0$ , la entropía del sistema tiende a una constante absoluta, que puede ser tomada como cero. Sin embargo, la versión debida a Planck, parece no tener el sentido de universalidad que sí tienen las otras leyes de la Termodinámica, ya que aún en el régimen de la Termodinámica clásica, se han encontrado ejemplos físicos<sup>1</sup> en los que dicha versión de la tercera ley no es válida [18]. Sin embargo, existe controversia en torno a la mayoría de los contraejemplos presentados contra la Tercera Ley en la versión de Planck; además, el hecho de que se halla probado su validez para todos los sistemas estudiados en el laboratorio, nos da evidencia de que la Tercera Ley es válida para todos los sistemas "físicamente razonables".

<sup>1</sup>En [18] R. Wald estudia el caso de un sistema compuesto por partículas con spin cuyo estado base es altamente degenerado, y muestra que este sistema viola la tercera ley en la formulación de Planck.

## 4.2 Termodinámica de Agujeros Negros

Como se planteó en el capítulo anterior, la caracterización de los Agujeros Negros está determinada por lo que se conoce como las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros. De igual manera, como recordamos en la sección anterior, el estudio termodinámico de los sistemas físicos es descrito por las Leyes de la Termodinámica. Ambos conjuntos de leyes, son de naturaleza completamente distinta, mientras que las leyes de la termodinámica tienen un origen totalmente empírico, al surgir como una necesidad de explicar experimentos físicos realistas; las leyes de la Mecánica de Agujeros Negros son el resultado del desarrollo de la geometría diferencial aplicada al estudio de Agujeros Negros, lo cual, en principio, no implica que esto tenga una significación física. A pesar de esto, al comparar la manera en que se expresan matemáticamente ambos conjuntos de leyes, se distingue de forma evidente una clara analogía entre dichas leyes. Esto fue señalado en primera instancia por Bekenstein en 1973 [17]. Analicemos con más detalle la forma en la que se relacionan las Leyes de la termodinámica y las respectivas para la mecánica de Agujeros Negros.

La Ley Cero de la Termodinámica plantea que si las partes de un cierto sistema se encuentran en equilibrio térmico, entonces existe una variable intensiva que nombramos como temperatura, que permanece constante. Por otra parte la Ley cero de la Mecánica de AN nos dice que para AN estacionarios, existe una cantidad, conocida como la gravedad superficial  $\kappa$ , que permanece constante. En este sentido, parece natural identificar de "alguna manera" a la temperatura con la gravedad superficial

$$T \rightarrow \kappa. \quad (4.5)$$

Dejemos por un momento el análisis de lo que entendemos por "alguna manera" y enfoquemonos en los aspectos que están detrás de ambas leyes; basta por el momento señalar que al hacer la comparación para la solución de Schwarzschild, y asumiendo la universalidad de las leyes, la relación debería de ser de proporcionalidad,  $T \propto \kappa$ .

Primero notemos que el identificar a  $\kappa$  con  $T$  no es suficiente para que ambos conjuntos de leyes puedan ser interpretadas como una misma ley. Para que esto pueda ser así, necesitamos definir lo que entendemos por que un Agujero Negro se encuentre en equilibrio térmico. En el ámbito de la Relatividad General clásica en su formalismo ADM, el equilibrio térmico del sistema, puede ser recuperado pidiendo que el AN represente una solución estacionaria a las ecuaciones de Einstein. Así, en ambos casos, estamos considerando que el estado final de un sistema -el Agujero Negro- en evolución, sería tal que este último alcance un estado con  $T$  ó  $\kappa$  constante. Y por lo tanto, podemos decir, que en este caso, la gravedad superficial  $\kappa$  representa de "alguna manera" a la temperatura del Agujero Negro.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Recordemos de la sección anterior, que el equilibrio térmico está definido como aquel estado para el cual el sistema alcanzaba un máximo en su entropía. Esto nos lleva a relacionar la Segunda Ley de la Termodinámica con la respectiva para Agujeros Negros. En ambos casos, existe una variable extensiva que en ningún proceso físico decrece en el tiempo. Entonces, las cantidades por relacionar, si queremos suponer que ambas leyes no son sino la misma,

$$\Delta S \geq 0 \longrightarrow \Delta A_{AN} \geq 0, \quad (4.6)$$

son la entropía del sistema termodinámico  $S$  y el área de la superficie del AN  $A_{AN}$ .

Por otra parte, como para todo sistema físico, esperamos que la evolución del mismo sea tal que la energía total del sistema se conserve. Así, el relacionar la primera Ley de la Termodinámica con la primera Ley de la Mecánica de AN, conlleva el hecho de pedir que se cumpla el principio de conservación de la energía. En este caso, el formalismo ADM para las leyes de la mecánica de AN nos permite identificar a la energía total del sistema  $E$  con la masa  $M$  del AN medida en el infinito. Con lo cual, al relacionar las ecuaciones (3.27) y (4.4) tenemos que la primera ley de la termodinámica de AN se expresa matemáticamente, para la solución de Kerr-Newmann, por

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} dS_{AN} + \Omega_{AN} dJ + \Phi_{AN} dQ \quad (4.7)$$

donde  $\Omega_{AN} dJ$  y  $\Phi_{AN} dQ$  representan los términos debido al trabajo sobre el sistema.

Hasta aquí, parece haber una gran analogía matemática entre las Leyes de la Termodinámica para situaciones de equilibrio térmico, con las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros estacionarios. Sin embargo, dicha analogía parece quedar sólo en una simple coincidencia al no existir en la mecánica de AN una Tercera Ley que pueda relacionarse con el principio de Planck (versión para la tercera Ley de la Termodinámica), ya que existen soluciones extremas para un AN en las cuales  $\kappa = 0$  -representaría el cero absoluto de temperatura-, mientras que el Horizonte de eventos tiene área diferente de cero, es decir, tiene entropía diferente de cero, ni tampoco tiende a una constante, de hecho, la entropía para este tipo de soluciones tiene una dependencia funcional del momento angular. Pero por otra parte, la versión de Nerst para la tercera ley parece si tener un análogo en la mecánica de Agujeros Negros [19]. Por lo tanto, esta ambigüedad entre la correspondencia o no de la tercera ley de la termodinámica con la respectiva para AN, nos hace suponer, no que las leyes de la mecánica de Agujeros Negros no sean las leyes de la termodinámica aplicadas a un AN, sino que existe un problema en cuanto a la aplicabilidad en un ámbito Universal, de lo que conocemos como la tercera Ley de la Termodinámica.

En concreto, podemos ver que la relación entre ambos conjuntos de Leyes se basa en:

- (i) Los Teoremas de Unicidad para AN establecen que las soluciones estacionarias -AN en equilibrio- están caracterizados por un número pequeño de parámetros, análogos a los parámetros de estado de la termodinámica clásica.
- (ii) La forma matemática en la que se expresan las respectivas leyes es idéntica, si se relacionan adecuadamente los distintos parámetros involucrados:  $E \rightarrow M$ ,  $T \rightarrow \kappa$ ,  $S \rightarrow A_{AN}$ .
- (iii) El hecho de que la energía  $E$  del sistema termodinámico y la masa del Agujero Negro  $M$ , representen la misma cantidad física, lo cual parece indicar más que una analogía matemática, una verdadera identificación de la física involucrada en el sistema.

A pesar de todo esto, existe un grave problema para poder considerar que en esta analogía hay más que matemáticas, es el hecho de que en la Relatividad General Clásica, la temperatura del AN, al ser este un absorbedor perfecto, debería de ser siempre nula, independientemente del valor que pudiera tener la gravedad superficial para una cierta solución de AN. Por lo tanto, físicamente, en el ámbito de la Relatividad General, no tiene por que existir una relación física entre las leyes de la termodinámica y las respectivas para AN. Sin embargo, el descubrimiento de S. W. Hawking en 1975[20] de que los Agujeros Negros radían, nos permitirá seguir estudiando, pero con bases más firmes, la Termodinámica de Agujeros Negros.

### 4.3 Radiación de Hawking

Como hemos visto, un Agujero Negro es un objeto astronómico que no emite nada, esto es un resultado de la Relatividad General, la teoría que como en este caso, describe los fenómenos donde la gravedad es la interacción predominante. Sin embargo, si consideramos ciertos aspectos cuánticos dentro del estudio de los Agujeros Negros, encontraremos que en realidad, estos objetos no son del todo negros, ya que emiten cierto tipo de radiación, la cual es característica de un cuerpo negro, Hawking, 1975[20]. La idea básica del proceso que da lugar a la *radiación de Hawking* se puede entender de la siguiente manera.

Tomemos la solución de Schwarzschild y consideremos además un fotón de momento angular cero, moviéndose radialmente hacia el Horizonte de Eventos. En este caso, como la ecuación para las órbitas es

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}, \quad (4.8)$$

si  $L = 0$ , tenemos que  $E = \pm p^r$ . Entonces

$$-\vec{P} \cdot \vec{U} = - \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} p^r. \quad (4.9)$$

En consecuencia, a pesar de que el fotón este cayendo hacia el Horizonte de Eventos del AN,  $p^r < 0$ , la ecuación (4.9) no impone ninguna restricción en el signo de  $E$ . En este caso, si las "fluctuaciones del vacío" en el entorno del Agujero Negro producen un par de fotones con energía  $E$  y  $-E$  respectivamente, entonces existe la posibilidad de que en un tiempo no mayor que  $h/E$ , el fotón de energía negativa cruce el Horizonte, y dado que no hay restricciones para el tipo de energía que puede propagarse sobre geodésicas en el interior del AN, el fotón de energía positiva podría, en principio, escapar al infinito. Así, en el infinito, observaríamos la radiación emitida por el Agujero Negro. Es fácil ver que para este caso, la energía que se mide en infinito cuando el fotón llega es

$$E = \frac{h}{4\pi M}, \quad (4.10)$$

donde  $M$  representa la masa del AN de Schwarzschild medida también en infinito. Hay que notar que la ecuación (4.10) no muestra ninguna dependencia de las características del proceso que originó al par de fotones; lo cual nos dice, que independientemente del proceso, la energía que se mide en infinito es una energía característica del Agujero Negro. Así, un observador en infinito verá que el Agujero Negro se encuentra radiando con una energía característica dada por (4.10).

Lo planteado aquí está muy lejos de pretender ser una demostración, sólo representa una manera sencilla de entender el cómo se manifiesta el *Proceso de Radiación de Hawking*. En la derivación original de dicho proceso, Hawking usó el formalismo para calcular la creación de partículas en un espaciotiempo curvado, y encontró como resultado que el Agujero Negro emite radiación con energía característica de un cuerpo negro con temperatura

$$T = \frac{\hbar}{8\pi\kappa_{\text{Boltz}}M}, \quad (4.11)$$

donde  $\kappa_{\text{Boltz}}$  es la constante de Boltzman. Esto corresponde, para el caso de la energía típica de un fotón, a

$$E = \kappa_{\text{Boltz}}T = \frac{\hbar}{8\pi M}. \quad (4.12)$$

Entonces, ahora podemos suponer que

$$T = \frac{\kappa\hbar}{2\pi} \quad (4.13)$$

representa verdaderamente a la temperatura (en unidades donde  $c = \kappa_{\text{Boltz}} = 1$ ); y por lo tanto, adquiere sentido físico el decir que, las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros no son sino las Leyes de la Termodinámica aplicadas a un Agujero Negro. Hay que recordar que en la expresión para la temperatura, ecuación (4.13), aparece de manera explícita la constante de Planck, característica de los fenómenos cuánticos, mostrándonos así la manera en que se manifiestan aspectos cuánticos en la descripción de un fenómeno gravitacional<sup>2</sup>, notando que la temperatura del Agujero Negro es siempre cero en el límite clásico donde  $\hbar \rightarrow 0$ . Es importante el darnos cuenta que la temperatura dada por la ecuación (4.13) representa la temperatura medida por un observador en el infinito. Para cualquier observador que siga una órbita del campo de Killing  $\xi^a$ , normal al Horizonte, la temperatura medida localmente es

$$T = \frac{\kappa\hbar}{2\pi(-\xi^a\xi_a)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.14)$$

Es decir, la temperatura medida localmente a la radiación de Hawking sigue la Ley de Tolman. Y por lo tanto, la expresión presentada arriba "...la temperatura del sistema termodinámico y la gravedad superficial del AN se relacionan de *alguna manera...*", se clarifica al ver que dicha relación no es arbitraria, ya que está determinada

<sup>2</sup>Cuando  $c = 1$ ,  $(G\hbar)^{1/2} = \ell_P = 1.616 \times 10^{-35}m$  es la longitud de Planck. Como este número involucra a las constantes fundamentales de la Relatividad, Gravitación y Teoría Cuántica, se cree que esta magnitud podría jugar un papel importante en una Teoría Cuántica de la Gravedad

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

por la ecuación (4.14). Finalmente, usando la ecuación (4.13) para la temperatura del Agujero Negro, e integrando en la primera Ley, ecuación (4.17), se puede ver que

$$S_{AN} = \frac{A_H}{4Gh}, \quad (4.15)$$

lo cual nos indica que, para que la identificación del área del Horizonte con la entropía del AN tenga sentido, tenemos que tomar en cuenta los aspectos cuánticos que influyen en la evolución del Agujero Negro.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 4.4 Discusión

Si bien se ha logrado analizar aspectos termodinámicos de Agujeros Negros, faltan algunos problemas conceptualmente importantes por aclarar. Por ejemplo, para estudiar la termodinámica de un Agujero Negro, primero tenemos que definir al AN como tal, con parámetros que no representen contribuciones superficiales en infinito, sino que se limite a definir dichos parámetros en el Horizonte, de manera que podamos distinguir sin problemas tanto al Agujero Negro, como al medio que lo rodea, el cual podría en principio, tener características muy distintas a las del AN. En este sentido, el Formalismo de Horizontes de Killing presentado en el capítulo anterior deja de ser efectivo y es necesario adoptar el Formalismo de Horizontes Aislados, para así poder especificar de manera correcta al AN.

Sin embargo, una vez que se logra definir a nuestro sistema, e imponer las debidas constricciones sobre el mismo, es necesario, para poder desarrollar un análisis termodinámico, llevar a cabo los cálculos que nos permitan describir la evolución del Agujero Negro de acuerdo con la interacción que, dado el proceso de radiación de Hawking, se espera tenga con el medio que lo rodea. Así, el formalismo de Horizontes Aislados se ve limitado para describir a tales procesos físicos. Y por lo tanto, es claro que hay mucho por investigar al respecto.

Otro problema tiene que ver con la manera en que definimos a la entropía de un Agujero Negro. No es fácil el interpretar y justificar el como una variable termodinámica, que desde el punto de vista de la Mecánica Estadística, cuantifica el número de microestados accesibles a un cierto estado macroscópico, puede relacionarse con el área del Horizonte, una cantidad de naturaleza netamente geométrica. Porque entonces, podríamos preguntarnos: ¿Cómo definir y qué ensambles estadísticos pueden ser definidos?, y ¿bajo que circunstancias se puede realizar esto? [21, 22]. Estas son preguntas naturales en el ámbito de la Mecánica Estadística que sin embargo, parecen no serlo en el ámbito clásico de los Agujeros Negros. Desde algunos años atrás se han estado desarrollando dos formalismos que pretende explicar la naturaleza de la entropía. Para esto aíslan los grados de libertad microscópicos y calculan la respectiva entropía. Estos cálculos están hechos dentro de la *Teoría de Cuerdas*[23] y *Loop Quantum Gravity*[24]. Así, en principio, se podría aplicar la Mecánica Estadística al estudio de Agujeros Negros.

Finalmente, existe un problema con la validez de la Segunda Ley de la Termodinámica de Agujeros Negros como fue planteada en el presente capítulo. Para ver esto, consideremos un AN estacionario; dejemos caer materia a éste caracterizada por una cierta entropía  $S_{ext}$ . Entonces, para un observador externo al AN, dicha entropía se perdería y por lo tanto, él mediría un decremento de la entropía del Universo. Lo cual está en contradicción con el propio planteamiento de dicha ley. Este último problema

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

fue resuelto por Bekenstein al proponer una nueva versión para la segunda ley, la cual se conoce como la *Segunda Ley Generalizada* para Agujeros Negros. Esta representa el tema por estudiar en el siguiente capítulo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 5

# Segunda Ley Generalizada de Agujeros Negros

### 5.1 Antecedentes

El identificar a las leyes de la Mecánica de Agujeros Negros como las leyes de la Termodinámica aplicadas a un Agujero Negro nos permite avanzar en el conocimiento de este tipo de objetos, pero al mismo tiempo, estudiar el régimen de aplicabilidad de la Termodinámica como tal. Sin embargo, existen varios problemas por resolver en esta área de investigación. En particular, la precisa formulación de una Segunda Ley de la Termodinámica de Agujeros Negros es un aspecto aún por resolver. Esto debido a que dicha ley, como fue planteada en el capítulo anterior, deja de ser válida para ciertos experimentos pensados, en los cuales se lanzaba hacia el Agujero Negro algún objeto caracterizado por una entropía  $S$ , de manera que al cruzar el Horizonte de Eventos, un observador externo al AN, medía un decremento en una cantidad  $S$  de la entropía del Universo. Lo anterior debido a que, aún cuando la interacción de la materia con el Agujero Negro resulta en un cambio en los parámetros de éste último, no es fácil ver el cómo estos cambios se llevan a cabo de una manera única.

El objetivo del presente capítulo es el de presentar y analizar la Segunda Ley Generalizada, ya que si bien su validez nos permite recuperar el sentido físico que tiene estudiar a los Agujeros Negros desde la teoría Termodinámica, su régimen de validez es aún cuestionable; ya que hasta ahora no se ha podido definir, sí, la validez de la SLG requiere, o no, de una cota para la entropía de la materia que interacciona con el Agujero Negro.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 5.2 Formulación

Recordemos que otro de los puntos importantes por definir es el cómo y cuándo asignar una cierta entropía a un Agujero Negro, [21]. Dado el proceso físico de interacción de materia con el Agujero Negro, el tratar de responderse el cómo ocurre esto, fue lo que permitió a Bekenstein encontrar que la entropía por asignar a un Agujero Negro debería de ser proporcional al área del mismo. La constante de proporcionalidad está dada por las constantes universales  $c$ ,  $G$ , y  $\hbar$ , de acuerdo con la ecuación (4.15), lo cual, recordemos, nos muestra como la entropía del Agujero Negro es de naturaleza cuántica.

Con la entropía para un Agujero Negro así definida, y considerando la entropía total que interviene en el proceso físico en cuestión -la del AN y la materia que interacciona con él-, Bekenstein reformuló la Segunda Ley de tal manera que que esta nueva expresión pudiera de inicio, resolver los problemas de validez de dicha Ley en sistemas más generales; así, propuso lo que conocemos como la Segunda Ley Generalizada, (SLG),

*"La suma de la entropía de un Agujero Negro y la entropía ordinaria en el exterior del mismo,*

$$S_{Tot} = S_{ext.} + S_{AN}, \quad (5.1)$$

*nunca decrece en el tiempo."* Entonces, podemos reescribir la analogía entre las Leyes de la Termodinámica y las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros como se muestra en la tabla 5.1.

	Termodinámica	Mecánica de A. N.
Ley Cero:	Equilibrio Térmico $\Rightarrow T = cte.$	$\kappa$ cte. en el Horizonte
Primera Ley:	$dS = \frac{1}{T}dE + \sum_j d\alpha_j$	$dM = \frac{\kappa}{2\pi}dS_{AN} + \Omega_{AN}dJ$
Segunda Ley:	$\Delta S \geq 0$	$\Delta S' = \Delta A_H + S_{ext.} \geq 0$

Tabla 5.1: Analogía entre las Leyes de la Termodinámica y las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Analicemos con detenimiento la SLG. Primero notemos que la Segunda Ley Generalizada así formulada, lleva implícita la suposición de que, dentro del formalismo matemático usado para la descripción del proceso físico planteado, se puede medir de manera precisa, tanto la entropía del AN, como la de la materia externa al mismo. Entonces, si queremos creer que la SLG representa en realidad una Ley para la Termodinámica de Agujeros Negros, tenemos que enfrentarnos al problema de como cuantificar de manera correcta la entropía por asignar a un Agujero Negro, de manera que un observador en el infinito, pueda distinguir a la entropía del AN de la del medio que lo rodea. Esto implica que, dada la identificación que hemos hecho de la entropía de un Agujero Negro con el área de su Horizonte, según la ecuación (4.15), lo que tenemos que lograr en última instancia es medir de "manera correcta" el área del Horizonte del AN. Donde, por "manera correcta", entendemos al hecho de que el área del Horizonte represente una cantidad intrínseca del AN, y no sume contribuciones del medio que lo rodea. Afortunadamente, esto no tiene mayor dificultad, ya que como vimos en el capítulo anterior, independientemente del formalismo usado para describir la Termodinámica de Agujeros Negros, el área siempre representó un parámetro medido en el Horizonte y no en el infinito.

Aquí, el punto por aclarar es el de bajo que circunstancias obtenemos una relación área-entropía. Ya que en principio, esto nos permite definir el régimen de aplicabilidad de la SLG, especificando si se trata de una Ley para soluciones estáticas, estacionarias, con o sin rotación, etc., o para soluciones dinámicas que incluyan a todas las anteriores. Es entonces que tenemos que ser muy cuidadosos al momento de elegir el formalismo matemático que usaremos para describir la forma en que evoluciona el AN.

La estructura de Horizontes de Killing ha sido durante mucho tiempo, el formalismo estándar utilizado en el estudio de Agujeros Negros. Dentro del ámbito de la Relatividad General, esta ha permitido formular las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros estacionarios, logrando así entender en mayor medida la naturaleza de estos. Sin embargo, dentro del campo de estudio de la Termodinámica de Agujeros Negros, y en particular en la SLG, todavía nos encontramos con varios problemas. Dentro de estos, el que nos limita para poder precisar la SLG, es el de la imposibilidad de poder definir a los parámetros del Agujero Negro como cantidades que sólo representen contribuciones del Horizonte; y por lo tanto, no podemos separar nuestro sistema en las dos partes que lo componen, el Agujero Negro y su exterior. Este simple hecho es demasiado restrictivo desde el punto de vista de la física, ya que el pedir que el espaciatiempo sea globalmente estacionario, nos excluye situaciones en las que existe radiación u otro tipo de materia en cualquier parte del mismo; debería ser suficiente el pedir que la geometría propia del Agujero Negro fuera estacionaria, permitiendo que en el exterior al Agujero Negro fuera dinámica. Otro inconveniente que se nos presenta es el hecho de que, para poder determinar a un Agujero Negro, tenemos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

que conocer la historia completa del espaciotiempo, ya que por su propia definición, el Horizonte sólo puede ser construido retroactivamente, después de conocer la evolución completa del espaciotiempo; esto también representa una manera poco práctica de estudiar el fenómeno físico en cuestión. Lo anterior nos muestra el motivo por el cual tenemos que ser muy cuidadosos al elegir algún formalismo que nos describa la mecánica de Agujeros Negros; por ejemplo, dicho formalismo tendría que permitirnos plantear claramente situaciones de Agujeros Negros en equilibrio, algo básico en cualquier análisis Termodinámico de todo proceso físico.

El especificar de manera clara las cantidades que representan tanto al Agujero Negro como a su entorno, nos dá la pauta para poder describir situaciones de equilibrio. El Formalismo de Horizontes Aislados propuesto por A. Ashtekar cumple con este objetivo; ya que nos caracteriza de manera correcta al Agujero Negro, sustituyendo los Horizontes de Killing por Horizontes Aislados, que en su descripción permiten la existencia y determinación de materia y/o radiación en su exterior. Así, tomando como base este formalismo, podemos definir muy bien a la entropía total del proceso físico envuelto en la Segunda Ley Generalizada, como la suma de la entropía del AN y la de su exterior. Sin embargo, otro problema surge cuando una vez que han sido determinadas  $S_{ext}$  y  $S_{AN}$ , y por ende, la entropía total, permitimos que la materia externa al Agujero Negro interactúe con éste. Ya que en este caso, es claro que, partiendo de la propia definición de Horizonte Aislado, carece de sentido el hablar de materia que interactúa con el Agujero Negro.

Ahora parece obvio el camino por seguir para poder formular de manera correcta la SLG. Necesitamos de un formalismo matemático en el que de inicio podamos distinguir entre la entropía de Agujero Negro y la del medio exterior a éste. Es decir, aislar en cierta medida al Horizonte, permitiendo así la posible existencia de materia en su exterior. Pero también, requerimos que dicho formalismo nos describa situaciones en las que existe un flujo de materia o radiación a través del Horizonte. En este sentido, nuestro Horizonte podría representar situaciones de equilibrio, que al ser perturbado de alguna manera, permitiría describir la forma en que sus parámetros característicos cambian con el tiempo, es decir, tendríamos un *Horizonte Dinámico* [16]. Así, en principio, podríamos entender de mejor manera como las Leyes de la Termodinámica se aplican a un Agujero Negro, en particular, la SLG, que es la que nos ocupa en el presente capítulo.

Es importante señalar que aunque lográramos resolver los problemas mencionados anteriormente, estaríamos todavía idealizando el problema real del sistema que contiene a un Agujero Negro, ya que debido al proceso de radiación de Hawking, un Agujero Negro siempre está radiando, lo cual no permite que este alcance un estado de equilibrio. Pero la SLG lleva implícito el que dada una perturbación al AN, éste alcance un estado de entropía máxima después de un cierto tiempo

finito; y por lo tanto, un estado de equilibrio, contradiciendo el resultado obtenido por Hawking. Sin embargo, dicho proceso se justifica dentro del ámbito de estudio de campos cuánticos que evolucionan en un espaciotiempo curvado, es decir, su descripción sale del campo de la Relatividad General Clásica. Esto nos indica, como lo señalamos anteriormente, la naturaleza cuántica de la entropía del Agujero Negro. Entonces, es natural suponer que, el formalismo buscado deberá estar enmarcado en el ámbito de una Teoría Cuántica de la Gravedad, con la cual no contamos aún; pero esto nos indica que el estudio de la Termodinámica de Agujeros Negros puede estar, en cierto sentido, orientado al desarrollo de una *Teoría Cuántica de la Gravedad*.

Así, parece ser que regresamos al problema básico de inicio, que es el de poder definir de manera correcta a la función entropía que nos caracterizará al Agujero Negro. Cuando decidimos estudiar un cierto fenómeno físico a partir de la entropía que lo caracteriza, tenemos dos opciones de inicio, atacar el problema desde la Termodinámica Clásica, o a partir de la Mecánica Estadística. Una de las características más importantes de la Mecánica Estadística es la elegancia de su formalismo, demostrada al describir problemas aparentemente complicados, cuyo resultado manifiesta tener un gran sentido físico real, al estar de acuerdo casi siempre con la parte experimental del mismo. Por otra parte, la gran variedad de problemas físicos, y no físicos, en los que se aplica su formalismo nos da una idea de la fortaleza del mismo. Sin duda lo más importante para nuestro caso, es el hecho de que la función entropía estadística está definida para una mayor cantidad de situaciones físicas de las que la entropía termodinámica nos podría describir; así, esperando obtener leyes lo más generales posibles, nos conduce a adoptar a la Mecánica Estadística como formalismo para estudiar la dinámica de Agujeros Negros.

Es importante recalcar que, desde el enfoque estadístico, la entropía es una función que mide en cierta forma el número de microestados accesibles al sistema; y dada la identificación que hemos hecho en el capítulo anterior de la entropía con el área del Horizonte

$$S_{AN} \longleftrightarrow A_H, \quad (5.2)$$

para definir  $S_{AN}$  necesitamos conocer el número de estados cuánticos a que puede acceder el sistema para una energía dada  $E_{AN}$  ( $M_{AN}$ ); además tenemos que preguntarnos por el número de grados de libertad asociados con el área del AN. Esto nos lleva nuevamente a considerar una teoría cuántica de la gravedad. Por lo tanto, si aceptamos a la Relatividad General como una teoría válida que nos describe la gravedad, y siendo esta una teoría de naturaleza netamente geométrica, tiene cierto sentido el que una cantidad geométrica como lo es el área del Horizonte, represente la función entropía que necesitamos para formular la SLG. Pero dejando de lado el punto anterior, caso particular en la física, tendrá sentido el planteamiento de una geometría cuántica?. Si es así, ¿cuáles serán sus fundamentos básicos y que implica-

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ciones tendrfa en la física en general?, ¿serfan consecuentes dichas implicaciones con la física cuya válidez es ampliamente aceptada?. El encontrar posibles respuestas a esta preguntas nos sugiere nuevas líneas de investigación, cuyo desarrollo nos llevará a comprender de mejor manera la dinámica de Agujeros Negros, en particular, la Segunda Ley Generalizada.

Por otra parte, el adoptar un enfoque termodinámico para estudiar la dinámica de AN, nos limita, irónicamente, a situaciones estacionarias o cuasiestacionarias. Desde este punto de vista, la entropía que es una función de estado, definida sólo para estados de equilibrio, tiene un carácter macroscópico, que si bien representa a los multiples estados microscópicos, estos últimos no son observables para un agente externo al sistema. Dentro de este contexto, la entropía Termodinámica y la entropía del agujero Negro tiene ciertas similitudes importantes:

- ambas son funciones extensivas, escalan con el tamaño del sistema, mientras la entropía termodinámica del espacio fase caracterizado por una energía  $E$ , ecuación (4.1), la entropía del Agujero Negro es directamente proporcional al área de la superficie que acota el volumen del AN.
- los procesos físicos descritos por dichas funciones, son tales que estas nunca decrecen en el tiempo.
- las dos son una medida del número de microestados, de los cuales, ningun observador externo puede tener información en particular, sino sólo a través de la función genérica  $S$ .<sup>1</sup>

Así, tiene sentido el proponer a la entropía termodinámica, aunque restringida a situaciones estacionarias, para ser la que aparezca en la SLG, ecuación (5.1), siendo consientes de la limitación que nos impone el seguir idealizando al Agujero Negro como un objeto que puede aleanzar estados de equilibrio.

<sup>1</sup>Desde el punto de vista estadístico, este argumento podría reescribirse diciendo que ambas entropías representan el número de estados microscópicos indistinguibles del sistema, donde la entropía del AN mide el número de estados causalmente conectados con un observador externo, es decir, aquellos que están asociados al Área del Horizonte[25], ya que independientemente del enfoque estadístico o termodinámico, poco o nada sabemos de los grados de libertad asociados al interior del Agujero Negro.

### 5.3 Cotas a la Entropía

Desde que fué propuesta en los 70's por Bekenstein, la Segunda Ley Generalizada se ha puesto a prueba para una gran variedad de experimentos pensados. En particular, su régimen de validez ha sido motivo de controversia. Principalmente, la discusión la han llevado dos escuelas de pensamiento, las cuales están representadas de manera importante por R. Wald y J. Bekenstein. La discusión ha girado en torno a si se debe de condicionar o no, la validez de la SLG, a la existencia de una cota a la entropía de la materia externa al Agujero Negro que interacciona con éste de acuerdo con

$$S_{AN} \leq \frac{2}{\pi} ERh. \quad (5.3)$$

El desarrollo de esta línea de investigación ha sido orientado por el análisis que se ha hecho de la aplicación de la SLG a un experimento pensado en particular, en el cual, la validez de dicha ley es cuestionada; el proceso físico en cuestión es el siguiente: toma una caja, llénala con materia caracterizada por una entropía  $S_c$ , bájala lentamente hacia el Agujero Negro mediante un cierto dispositivo previamente diseñado para finalmente liberar la materia, de tal manera que esta caiga al Agujero Negro. A pesar de ser este un proceso bastante simple, la física en este ha sido lo suficientemente ilustrativa como para orientarnos sobre el significado físico que hay detrás de la SLG.

Aquí hay varios aspectos por analizar. Primero recordemos que el objetivo es el de poner a prueba la SLG; entonces la cantidad que nos interesa medir es el cambio en la entropía, cuando el sistema pasa de un cierto estado inicial a otro final, que es el resultado de que el proceso señalado haya ocurrido. Por otra parte, es importante el considerar que el hecho de que el Agujero Negro se encuentre radiando energía con una temperatura dada por la ecuación (4.13), resulta en la existencia de una atmósfera térmica, que lejos del Agujero Negro puede ser interpretada como aquella debida a la radiación de Hawking real saliendo del AN; no olvidemos que este es un fenómeno puramente cuántico, y es el resultado tanto del estado cuántico del campo cercano al Horizonte, como del estado de aceleración de las partículas que se mueven en torno a él. Entonces, nuestro sistema está definido por el Agujero Negro, la atmósfera térmica, el dispositivo formado por la cuerda y la caja, y la materia que esta última contiene. Ha sido ampliamente justificado [26, 27] el que los elementos que forman el dispositivo del experimento -la cuerda y la caja-, no contribuyen de manera importante en la medición final del cambio de entropía. En principio, podríamos suponer que bajamos lentamente la caja hasta cierto punto de retorno, suficientemente cercano al Horizonte, donde abrimos la parte inferior de la caja, permitiendo que la materia que se encuentra en su interior sea capturada por el Agujero Negro, para después jalar nuevamente la caja, y así, el cambio neto en entropía y energía en el proceso sería nulo. Por lo tanto, la entropía total del sistema

que es relevante para el caso es

$$S_{Total} = S_{AN} + S_{Atm} + S_{ME}. \quad (5.4)$$

A partir de aquí, parece fácil el verificar la SLG, sólo tenemos que determinar la forma en que se expresan los cambios de un cierto estado a otro en la ecuación (5.4), y ver si son tales que

$$\Delta S_{Total} \geq 0 \quad (5.5)$$

se cumple siempre [25], o si es necesario el pedir que la entropía  $S_{ME}$  esté acotada [26] por

$$S_{ME} \leq 2\pi ER, \quad (5.6)$$

con  $E$  la energía conservada de la materia externa, y  $R$  la distancia propia al horizonte en la cual se deja caer la materia al AN,

$$R = \int_{r_+}^{r_+ + \delta(r)} (g_{rr})^{1/2} dr, \quad (5.7)$$

con  $g_{rr} = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) / \Delta$ , y  $\Delta = (r - r_-)(r - r_+)$ . Centrémonos por el momento en la argumentación dada por Bekenstein para suponer la existencia de cotas a la entropía de la materia externa al Agujero Negro.

Para Bekenstein, la cota a la entropía, ecuación (5.6), es una condición necesaria para la validez de la Segunda Ley Generalizada. En particular, para el experimento pensado que hemos señalado, él considera que el balance en la entropía en el proceso, sólo se deben de incluir las contribuciones a la entropía de la materia contenida en la caja y la propia del Agujero Negro,

$$S_{Total} = S_{AN} + S_{ME}. \quad (5.8)$$

En este caso, se considera que ni la cuerda, ni la caja, ni la radiación térmica en torno al Agujero Negro [27], ni la dinámica del proceso de acercamiento de la caja desde el infinito hasta el Horizonte, contribuyen con el cambio en la entropía que ha de ser considerada en la SLG. Esto debido a que la energía necesaria para acercar "lentamente" la caja sostenida por la cuerda, se compensa con la energía que se requiere para poder retirar la caja y la cuerda, luego de que se ha liberado el contenido de la misma hacia el Agujero Negro. Por lo que respecta a la atmósfera térmica, la entropía que la caracteriza influiría de manera importante, por medio de una cantidad representada por la entropía de la radiación desplazada por la caja, siempre y cuando ésta cumpla con la siguiente relación

$$S_{ME} \leq S_D, \quad (5.9)$$

donde  $S_{ME}$  representa a la entropía contenida en un sistema acotado (caja) de energía  $E$ , y volumen  $V$ ; mientras que  $S_D$  es la entropía asignada a la radiación

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

térmica no confinada, que ocupa un volumen  $V$ . Sin embargo, resulta ser que la desigualdad (5.9) no se cumple para la situación particular en la que las dimensiones de la caja difieren por un orden de magnitud o más; por ejemplo, para una caja delgada. Entonces, según Bekenstein, aunque parece lógico el asumir como válida la desigualdad (5.9), la existencia de un contraejemplo, y el que no haya una demostración que la respalde, nos muestra que la contribución que la entropía de la atmósfera térmica pudiera tener en el balance total de la entropía no será significativo, y por lo tanto, no es necesario el considerarla en el proceso físico que estamos usando para poner a prueba la Segunda Ley Generalizada.

Aquí es importante señalar que, aunque no existe una demostración completa que nos asegure la validez de la desigualdad (5.9), si se ha podido demostrar [28] que dicha desigualdad, aplicada a un sistema completo -la caja más su contenido-, no puede ser violada sin que se viole también la SLG. Por lo tanto, si queremos creer que la SLG es una verdadera ley, la mencionada desigualdad tendrá que ser válida para un sistema completo. Y como consecuencia de esto, el cambio en la entropía de la atmósfera térmica si tiene que ser considerado en una posible demostración de la SLG. Esto no quiere decir que la atmósfera térmica por sí misma favorezca o no la suposición de cotas a la entropía [29]; sólo estamos señalando que la atmósfera térmica deberá jugar un papel importante en el análisis de la entropía de un sistema completo. Recordemos que a la atmósfera térmica la entendemos como la radiación medida por observadores estáticos en torno al Horizonte, y que para alguien en el infinito, esta será el resultado de la Radiación de Hawking. Dicha radiación es un indicativo de la manera en como el sistema, Agujero Negro más su entorno, se encuentra en un estado de no-equilibrio; y por lo tanto, es plausible el que la atmósfera térmica tenga algún tipo de influencia en el análisis que estamos realizando.

En cuanto a la dinámica en el proceso de acercamiento, ya se mencionó que siguiendo un proceso adiabático, acercando la caja lentamente, no habrá cambios en los parámetros involucrados en el sistema, de tal forma que se pudiera producir un cambio en la entropía. Así, dado que para Bekenstein la entropía total del sistema está dada por la ecuación (5.8), el cambio en dicha entropía, cuando el proceso ya se ha llevado a cabo, será

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_{AN} - \Delta S_{ME}. \quad (5.10)$$

Si esto es así, entonces para que la Segunda Ley Generalizada sea válida, se tiene que cumplir que

$$S_{ME} \leq \Delta S_{AN}, \quad (5.11)$$

es decir, existe un límite superior para la entropía de la caja, el cual está determinado por el cambio en la entropía del Agujero Negro. Lo que encuentra Bekenstein es que dicho cambio es sólo función de los parámetros característicos de la materia externa, según la desigualdad (5.6); y no depende en ningún sentido de los paráme-

tros propios del Agujero Negro. Esto lo lleva a concluir que (5.6) representa una cota universal para la entropía de cualquier sistema termodinámico, contenga o no éste a un Agujero Negro. Esto no sólo ha sido estudiado a partir de Agujeros Negros de Schwarzschild, sino también usando sistemas que incluyen rotación[30], obteniendo que

$$S_{ext} \leq \frac{2\pi \sqrt{(RE)^2 - s^2}}{h}, \quad (5.12)$$

donde  $E$  representa la energía de una partícula con espín  $s$  y entropía  $S_{ext}$ , que interactúa con el Agujero Negro cuando este se encuentra a una distancia propia  $R + \delta(R)$  del AN.

Aquí vale la pena detenernos a analizar un poco lo planteado por Bekenstein. Primero recordemos que en su análisis, él desprecia la contribución que pudiera tener la atmósfera térmica. Representa así, un estudio incompleto en su propio planteamiento. Por lo que se refiere al cálculo explícito que ha realizado Hod para obtener la ecuación (5.12), se ha asumido, al igual que en los cálculos hechos por Bekenstein para llegar a la desigualdad (5.6), que la interacción de la caja o partícula, con el Agujero Negro es tal que los cambios en la masa y momento angular de éste, son tales que  $dM = E$ , y  $dL = J$ , con  $E$  y  $J$  la energía y momento angular conservada de la partícula. A partir de esto, sustituyen en la primera Ley, de manera que puedan encontrar el cambio mínimo en el área del Horizonte que les permita saber lo que acota a  $S_{ext}$ . Sin embargo, aunque dentro del contexto en que se maneja, parecen ser correctas las desigualdades propuestas por ellos mismos, estas fallan por el hecho de que  $M$  y  $J$  son cantidades medidas en infinito, y por consiguiente cargan con las dificultades planteadas en el capítulo 3. El que en la cota para la entropía sólo aparezca  $h$  como manifestación directa de la importancia de los aspectos cuánticos que intervienen en el proceso, es otro de los puntos importantes por señalar, ya que parecería lógico el que  $G$  apareciera en el mismo sentido en que lo hace  $h$ . Se esperaría esto porque en el proceso descrito nos encontramos en el régimen de escalas en el que la gravedad es la interacción dominante.

Por otra parte, considerando el mismo proceso físico, en sus mismas etapas, la del acercamiento de la caja y aquella en la que se deja caer la materia al Agujero Negro, R. Wald y S. Gao prueban parcialmente [26] la Segunda Ley Generalizada sin asumir ningún tipo de cota a la entropía externa del Agujero Negro. Por lo que respecta a la etapa de acercamiento cuasi-estático, a diferencia de Bekenstein y Hod, ellos sí consideran en su cálculo a la entropía de la atmósfera térmica. Asumiendo solamente el que ésta se encuentra en equilibrio térmico consigo misma, prueban la validez de la SLG sin hacer referencia a cotas a la entropía. Sin embargo, en el fondo está suponiendo que la caja llega un punto en el cual "flota", el lugar donde la temperatura de la materia en la caja y la temperatura de la atmósfera térmica son iguales, por lo que no existe una "fuerza de flotación" que empuje a la caja. En este

sentido, D. Marolf y R. Sorkin[29], analizando este proceso desde un punto de vista inercial, llegan a las mismas conclusiones sin asumir que la caja "flota". Sin embargo, para ellos, además de la atmósfera térmica, la caja en si, adquiere un papel relevante en el balance final de entropías.

En cuanto a la otra etapa, interacción directa entre la caja y el Agujero Negro, Wald "conjetura" que la SLG es válida siempre y cuando la atmósfera térmica se encuentre en equilibrio con el Agujero Negro, es decir, que no pueda existir un incremento de la entropía del sistema Agujero Negro/atmósfera térmica. Esta es la razón que nos lleva a plantear que su demostración de la SLG es incompleta, ya que si bien es natural el que, al transcurrir del tiempo, dos sistemas en contacto permanente alcancen un equilibrio térmico, en su argumentación parecen concluir lo que ellos mismos se planteaban como suposición, que el estado final del sistema será aquel que maximice la entropía. En el fondo de su argumentación se encuentra la suposición de que la presencia de materia externa, en el momento en que se le suelta, ya forma parte del sistema en cuestión, y por lo tanto, al encontrarse en equilibrio térmico (suposición), no habrá cambios en la energía, momento angular y carga totales del sistema.

Resumiendo, tenemos un mismo proceso físico, estudiado desde puntos de vista distintos. Decimos que son distintos porque, mientras Bekenstein y Hod dejan de lado la contribución de la atmósfera térmica, y como consecuencia no realizan una detallada descripción de la etapa de acercamiento de la caja o partícula al Horizonte, Wald si lo hace. Y por el contrario, mientras Bekenstein y Hod consideran que la presencia de materia en las cercanías del Horizonte si resulta en un cambio no trivial de los parámetros del Agujero Negro, dando como resultado una cota para la entropía, ecuación (5.12), Wald sólo conjetura al respecto y concluye que no es necesario imponer ningún tipo de cota a la entropía para que la SLG sea válida.

Esto nos muestra que, si bien parece plausible el asumir la validez de la SLG, la argumentación que le da sustento a ésta es aún incompleta. Un análisis estadístico del problema podría orientarnos en los pasos a seguir para obtener una posible demostración de la SLG, que a la vez nos permitiría definir de manera correcta el sentido físico que tiene el relacionar temperatura con gravedad superficial, entropía con área, así como aclarar la manera en que se pueden asumir situaciones de equilibrio que nos permitan formular las Leyes de la Termodinámica de Agujeros Negros.

## Capítulo 6

### Discusión Final

En el presente trabajo hemos discutido la estrecha analogía que existe, entre las Leyes de la Termodinámica Ordinaria y las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros. Entonces, nos dimos cuenta de como lo que parecía ser una simple analogía en el ámbito de la Relatividad General Clásica, adquirió un verdadero sentido físico al considerar aspectos cuánticos (radiación de Hawking) en la dinámica del Agujero Negro. Así, un primer punto por recalcar, es el que "Las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros no son sino las Leyes de la Termodinámica aplicadas a un Agujero Negro".

Sin embargo, aunque en general tenga sentido hablar de Termodinámica de Agujeros Negros, en lo particular existen todavía algunos problemas que no han podido definirse con certeza. Dentro de estos, de acuerdo con lo discutido en este trabajo, podemos identificar como los más relevantes los siguientes: la falta de un adecuado formalismo matemático, el cual nos describa la dinámica de Agujeros Negros bajo distintas situaciones físicas; el identificar lo que significará la entropía dentro de este contexto; y el clarificar el "status" de posibles cotas a la entropía.

**Formalismo:** Vimos como, tanto el formalismo de Horizontes de Killing como el de Horizontes Aislados, no logran describir de manera adecuada la dinámica de Agujeros Negros. En este sentido, vale la pena mencionar que, con el afán de extender la validez de las Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros a la más amplia clase de modelos, R. Wald ha mostrado que la primera ley aplica a teorías arbitrarias de la Gravedad que pueden ser derivadas de un lagrangiano covariante. Más aún, dicha derivación de la primera ley ha permitido darle una nueva interpretación a la entropía de un Agujero Negro. De hecho, ésta resulta ser la carga de Noether que esta asociada con la simetría generada por el Horizonte de Killing [38, 39]. Sin embargo, el principal candidato parece ser el formalismo de Horizontes Dinámicos mencionado al final del capítulo 3, ya que este tiene la ventaja de no depender de la estructura de campos de Killing, permitiendo el flujo de materia o radiación a través del "Horizonte Dinámico".

**Entropía:** Es claro que si queremos describir las más diversas situaciones físicas en las que intervengan Agujeros Negros, la entropía estadística tiene que ser la que describa la Termodinámica de estos. Sin embargo, dentro del contexto de este trabajo, sólo tiene sentido el hablar de entropía termodinámica. Aquí nos encontramos con el problema de especificar lo que entenderemos por entropía. Ya que para poder hablar de entropía estadística, necesitamos conocer los microestados accesibles (grados de libertad) del sistema, es decir, del Agujero Negro. Sin embargo poco o nada sabemos de estos, aunque posibles respuestas las podemos encontrar en la Teoría de Cuerdas, o en teorías cuánticas de lazo (loop quantum gravity).

**Cotas a la Entropía:** Este problema surge del poner a prueba la Segunda Ley Generalizada con ciertos experimentos pensados. Aunque el punto por definir no es la validez de ésta, ya que es ampliamente aceptada. Lo que no es claro es si se necesita imponer o no, una cota a la entropía para que la SLG sea válida. Vimos en el capítulo 5 como ambos análisis describían "adecuadamente" un mismo experimento pensado; y sorpresivamente, concluían de manera diferente. Mientras Bekenstein apela por las cotas a la entropía, Wald dice que estas no son necesarias para argumentar la validez de la SLG. Esta aparente contradicción tiene su origen en el hecho de que, si bien ambos parecen describir "adecuadamente" el mismo proceso físico, en realidad sólo lo hacen parcialmente, ya que como se mencionó anteriormente, lo que terminan describiendo correctamente es la fase del proceso que el otro no justifica. Es decir, hasta ahora no existe, cuando menos para este experimento pensado, una descripción completa que nos permita asegurar si las cotas a la entropía son necesarias o no para justificar la validez de la SLG. Sin embargo, de acuerdo con el análisis planteado por Bekenstein, Hod, et. al., parece plausible el que bajo ciertas circunstancias, al menos las específicas del experimento como ellos lo plantean, existan cotas a la entropía de la materia externa que interacciona con el Agujero Negro. Lo cual, esta lejos de representar una Ley Universal para la entropía de cualquier sistema físico, como lo han planteado. Lo que dice dicha cota, es sólo como los cambios (la evolución) en los parámetros de la materia externa, se ven limitados por el respectivo cambio en la entropía del sistema en que evolucionan.

Recientemente, Bousso ha propuesto[40] que la entropía total observable esta acotada por el inverso de la constante cosmológica:

*Para cualquier Universo con constante cosmológica positiva  $\Lambda$ , la entropía observable  $S$  está acotada -en unidades de Planck- por*

$$S = \frac{3\pi}{\Lambda} \quad (6.1)$$

Aquí,  $S$  incluye tanto a la entropía del Horizonte Cosmológico, como la respectiva

de la materia del Universo; y se puede ver que  $S$  corresponde a la entropía de Bekenstein para el espacio de deSitter vacío. Sin embargo, Bousso también demuestra[41] que existen contraejemplos para este tipo de cotas cuando  $D > 4$ . Esto muestra que la mera especificación de una Constante Cosmológica positiva no es suficiente para garantizar entropía observable finita. Nuevamente, el poner a prueba la SLG con respecto de una mayor variedad de experimentos pensados, nos permitirá entender el punto en cuestión.

De lo que podemos estar seguros, es de que nos falta mucho por investigar en cuanto a la *Termodinámica de Agujeros Negros* se refiere. Así, los esfuerzos por aclarar los puntos antes señalados, parecen estar orientados al conocimiento de una Teoría Cuántica de la Gravedad. Ésta nos permitirá entender de mejor manera la Termodinámica de Agujeros Negros. A la vez, el avance en el conocimiento de la mecánica de AN y las leyes que la gobiernan, nos orientará sin lugar a dudas, en el planteamiento de una Teoría Cuántica de la Gravedad.

## Bibliografia

- [1] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking. *The Four Laws of Black Holes Mechanics*. Commun. Math. Phys., 31, 161:170, 1973.
- [2] Buchdahl, H. A.. *Phys. Rev. D116*, 1027, 1959.
- [3] Fré, P., Gorini, V., Magli, G., y Moschela, U.. *Classical and Quantum Black Holes*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1999.
- [4] Kerr, R. P. *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. Phys. Rev. Lett. 11, 237-238; 1963.
- [5] Newman, E.T., Couch, E., Chinnapared, K., Exton, A., Torrence, R., y Prakashand, A.. *Metric of a Rotating Charged Mass*. J. Math. Phys., 6, 918-919, 1965.
- [6] R. Penrose. *Gravitational Collapse: The role of General Relativity*. Rev. del Nouvo Cimento, 1, 252-276, 1969.
- [7] R. Penrose. *Gravitational Collapse and Space-Time Singularities*. Phys. Rev. Lett., 14, 57-59, 1965.
- [8] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis. *The Large Space Estructure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [9] R. Penrose., S.W. Hawking. *The singularities of gravitational collapse and cosmology*. Proc. Roy. Soc. Lond. A314:529-548,1970.

- [10] R. M. Wald. *Gravitational Collapse and Cosmic Censorship* gr-qc/9710068, 1997.
- [11] A. Ashtekar. *Interface of General Relativity, Quantum Physics and Statistical Mechanics: some recent developments*. gr-qc/9910101, 1997.
- [12] Sinarr, Larry. *Mass Formula for Kerr Black Holes*. Phys. Rev. Lett. 30, 2, 71-72; 1973.
- [13] A. Ashtekar, C. Beetle, S. Fairhurst. *Isolated Horizons: a generalization of black hole mechanics*. Class. Quantum Grav., L16, 1999.
- [14] A. Ashtekar, A. Corichi, K. Krasnov. *Isolated Horizons: the classical phase space*. Adv. Theor. Math. Phys., 3, 2000.
- [15] A. Ashtekar, C. Beetle, J. Lewandowski. *Mechanics of Rotating Isolated Horizons*. Phys. Rev. D64:044016; 2001.
- [16] A. Ashtekar, B. Krishnan. *Dynamical Horizons: Energy, Angular Momentum, Fluxes and Balance Laws*. Phys. Rev. Lett. 89:261101, 2002.
- [17] J. D. Bekenstein. *Black Holes and Entropy*. Phys. Rev. D7, 2333-2346, 1973.
- [18] R. M. Wald. *Nerst Theorem and Black Hole Thermodynamics*. Phys. Rev. D56, 110, 6467-6474, 1997.
- [19] W. Israel. *Third Law of Black-Hole Dynamics: a Formulation and Proof* Phys. Rev. Lett., 57, 397-399, 1986.
- [20] S. W. Hawking. *Particle Creation by Black Holes*. Commun. Math. Phys. 43:199-220; 1975.
- [21] A. Corichi, D. Sudarsky. *When is  $S=A/4$ ?* Mod. Phys. Lett. A, 17, 22, 1431-1443, 2002.

- [22] J. D. Bekenstein. *The Limits of information*. gr-qc/0009019v2, 2001.
- [23] A. Strominger, C. Vafa. *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*. Phys. Lett. B379:99-104; 1996.
- [24] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, K. Krasnov. *Quantum Geometry and Black Hole Entropy*. Phys. Rev. Lett. 80:904-907, 1998.
- [25] T. Jacobson. *On the Nature of Black Hole Entropy*. gr-qc/9908031, 2000.
- [26] R. M. Wald, Sijie Gao. *"Physical Process Version" of the First Law and the Generalized Second Law for Charged and Rotating Black Holes*. Phys. Rev. D64:084020; 2001.
- [27] J. D. Bekenstein. Phys. Rev. D30, 1669, 1984.
- [28] W. G. Unruh, R. M. Wald. Phys. Rev. D25, 942. 1982.
- [29] Donald Marolf, Rafael Sorkin. *"Perfect mirrors and the self-accelerating box paradox"*. Phys. Rev. D66:104004; 2002.
- [30] S. Hod. *"Universal entropy bound for rotating systems"*. Phys. Rev. D61, 024018; 1999.
- [31] J. D. Bekenstein, A. E. Mayo. Phys. Rev. D61, 024022, 2000.
- [32] R. M. Wald. *"The Thermodynamics of Black Holes"*. gr-qc // 9912119.
- [33] R. M. Wald. *"General Relativity"*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [34] R. M. Wald. *"Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics"*. University of Chicago Press, Chicago, 1994.

- [35] Bernard, F. Schutz. *"A First Course in General Relativity"*. Cambridge University Press, 1990.
- [36] Misner, C. W., Thorne, K. S. y Wheeler, J. A. *"Gravitation"*. Freeman, San Francisco, 1973.
- [37] Weinberg, S.: *"Gravitation and Cosmology"*. Wiley, New York, 1972.
- [38] R. M. Wald. *"Black Hole Entropy is the Noether Charge"*. Phys. Rev. D48, 8, 3427-3431, 1993.
- [39] Iyer V., Wald, R. M.. *"Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dynamical Black Hole Entropy"*. Phys. Rev. D50, 846-864, 1994.
- [40] Bousso, Raphael. *Bekenstein bounds in the Sitter and flat space*. JHEP 04, 035; 2001.
- [41] Bousso, Raphael. *Unbounded Entropy in Space-Times with Positive Cosmological Constant*. hep-th/0205080.