

00321

42



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Un modelo de programación lineal para definir las posibilidades de expansión en el sector refinación de petróleo, ante diferentes escenarios de demanda de productos petrolíferos"

La Dirección General de Bibliotecas para difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Martha Hernández Orroa
FECHA: 24/06/2003

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
ACTUARIA
P R E S E N T A
MARTHA HERNANDEZ ORROA

Director de Tesis: M. en C. Benítez Eugenia Rodríguez Fernández



MEXICO, D. F.



2003

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Un modelo de programación lineal para definir las posibilidades de expansión en el sector refinación de petróleo, ante diferentes escenarios de demanda de productos petrolíferos".

realizado por Hernández Orroa Martha

con número de cuenta 07516761-3 , quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
 Propietario M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez Fernández

Propietario M. en C. José Antonio Flores Díaz

Propietario M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes

Suplente Act. Jaime Vázquez Alamilla

Suplente Ing. Jesús Gerardo Berumen García

*Beatriz Rodríguez F.*  
*José Antonio Flores Díaz*  
*María del Pilar Alonso Reyes*  
*Jaime Vázquez Alamilla*  
*Jesús Gerardo Berumen García*

Consejo Departamental de



M. en C. JOSÉ ANTONIO FLORES DÍAZ  
 Coordinador de la Carrera de Actuaría  
 FACULTAD DE CIENCIAS  
 CONSEJO DEPARTAMENTAL  
 DE  
 MATEMÁTICAS

# **Agradecimientos**

**Le dedico esta tesis a mi abuelita Longina**

**A mi sobrina Daniela**

**A mi hermana Consuelo por todo su apoyo y comprensión**

**A mi hermano Juan Marcos**

**A mi madre**

**A la maestra Beatriz Rodríguez por su dirección para hacer este trabajo posible, por su apoyo y dedicación**

**Al Ing. Jesús Berumen por su apoyo y enseñanzas**

**A la Mat. Irma Glintz por sus consejos para titularme**

**A Susanne Rodekhor**

**A Guadalupe Apolonio por haber tenido la paciencia para leer este trabajo, por sus valiosos comentarios y por su amistad**

**A mis amigas**

**Ruth Cabrera Rodríguez**

**Arlette Cisneros**

**Luz Elena Reyes**

**Ma. Teresa Fernández**

**Ma. Luisa Galicia**

**Virginia Ramírez**

# Contenido

	<b>Página</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1 Descripción detallada del problema</b>	<b>3</b>
1.1 La industria de la refinación	3
1.2 La industria de la refinación en México	7
1.3 Economía de la refinación	10
1.4 Problemática de la industria en México	16
1.5 Objetivo	18
<b>Capítulo 2 El problema de programación lineal</b>	<b>20</b>
2.1 Definiciones básicas	20
2.1.1 Supuestos de programación lineal	22
2.1.2 Formatos estándar y canónico	23
2.1.3 Programa lineal en notación matricial	23
2.2 Conjuntos convexos	24
2.2.1 Definiciones básicas	24
2.2.2 Puntos extremos y direcciones extremas de poliedros	26
2.3 Desarrollo del método simplex	27
2.3.1 Puntos extremos y optimalidad	27
2.3.2 Soluciones básicas factibles	28
2.3.3 Correspondencia entre soluciones básicas factibles y puntos extremos	29
2.4 El algoritmo simplex	32
2.5 Simplex revisado	34
2.6 Dualidad	35
2.7 El principio de descomposición	39
2.7.1 El Algoritmo de descomposición	39
2.7.2 Aplicación del método simplex revisado	40
2.7.3 Comentarios al algoritmo de descomposición	43
2.7.4 Cálculo y uso de cotas inferiores	43
2.7.5 Ejemplo	44
<b>Capítulo 3 Descripción del Modelo</b>	<b>54</b>
3.1 Descripción de la función objetivo y del conjunto de restricciones	55
3.2 Descripción de las ecuaciones del problema de programación lineal	57
3.2.1 Función objetivo	58
3.2.2 Caracterización del conjunto de restricciones	59
3.2.2.1 Igualdades	60
3.2.2.1 Desigualdades	67
3.2.2.3 Ejemplos	69
3.3 Metodología utilizada	71

	<b>Página</b>
<b>Capítulo 4 Aplicación del modelo</b>	<b>72</b>
4.1 Obtención y procesamiento de datos	72
4.1.1 Sector eléctrico	73
4.1.2 Restricciones ambientales	74
4.1.3 Especificaciones de productos	75
4.1.4 Demanda de combustibles industriales	76
4.1.5 Inversiones	78
4.2. Limitaciones del modelo	78
4.3 Definición de escenarios	79
4.4 Resumen de resultados	81
4.4.1 Configuración	81
4.4.2 Análisis de rentabilidad	82
4.4.3 Perfil de producción	82
4.4.4 Escenario de demanda baja	84
4.4.5 Escenario de demanda media	87
4.4.6 Escenario de demanda alta	90
4.5 Análisis de sensibilidad	93
<b>Conclusiones</b>	<b>96</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>97</b>
<b>Anexo</b>	<b>98</b>

# Introducción

La industria de la refinación tiene como materia prima básica el petróleo crudo, el cual es procesado para obtener distintos productos de manera simultánea. Los principales productos son las gasolinas, el diesel, la turbosina y el combustóleo. Los rendimientos de estos productos pueden variar en función del tipo de refinería y de la calidad de los crudos procesados. Los refinadores generalmente deben utilizar una gran cantidad de procesos y equipo, a fin de suministrar la mezcla de productos que el mercado demanda. Generalmente, este último esfuerzo minimiza la elaboración de los productos más pesados que son los de menos valor (como por ejemplo el combustóleo residual utilizado como combustible en calderas), a cambio de productos más ligeros de mayor valor (por ejemplo las gasolinas).

El perfil óptimo de inversiones en refinación depende entre otros, de la demanda de combustibles, de la demanda y localización de la oferta de energía eléctrica, de la infraestructura del sistema de refinación, de los precios de los productos en mercados internacionales y del crecimiento económico del país. Para determinar el nivel óptimo de inversión es necesario analizar todos los factores involucrados de manera simultánea; de ahí la necesidad de optimizar el suministro y distribución de combustibles en forma integrada.

El objetivo de este trabajo consiste en presentar una metodología para abordar el problema de asignación de recursos en el sector de refinación de petróleo de manera óptima, en este caso a través de la construcción de una refinería, de tal forma que se garantice el suministro de productos petrolíferos en el país en el mediano y largo plazos a costo mínimo.

A lo largo de mi experiencia profesional en una empresa del sector paraestatal he utilizado y desarrollado diversas herramientas de optimización basadas en las técnicas de programación lineal, que me han permitido proponer diversos esquemas de inversión y de operación para la industria de la refinación, así como evaluar distintos esquemas de proceso y contratos de suministro, entre otros estudios.

Es de mi interés mostrar una aplicación del trabajo desarrollado a lo largo de varios años. Para tal propósito he escogido la utilización de un modelo de programación lineal que tiene incorporadas las restricciones de los sectores de refinación de petróleo, de distribución de productos y del sector eléctrico. El modelo tiene como propósito el suministro de la totalidad de productos petrolíferos a lo largo del país, de forma que sea cubierta la totalidad de la demanda de combustibles y energía eléctrica.

El modelo de optimización planteado en este trabajo, considera de manera simultánea todos los elementos que de una u otra forma afectan las decisiones de inversión en la industria de la refinación de petróleo en México, lo cual permite evitar contradicciones entre los sectores involucrados.

En el primer capítulo se presenta la situación de la industria de la refinación en México, iniciando con un contexto global, a fin de entender la complejidad de la industria, así como los factores que condicionan el comportamiento de la industria, las características del mercado, los jugadores dentro de la industria, el papel de los precios, el comportamiento de la oferta y demanda entre los principales elementos.

En el segundo capítulo se proporcionan las bases teóricas de la técnica de programación lineal, iniciando con la definición de un problema lineal, algunas definiciones de conjuntos convexos y poliedros y se enuncia el teorema de Representación. Después se muestran el algoritmo del simplex, simplex revisado y dualidad, a fin de presentar al final del capítulo el principio de descomposición que es un algoritmo para resolver modelos de gran escala, ya que el modelo construido es considerado de gran escala por sus dimensiones.

En el tercer capítulo se describe de manera detallada el modelo. Por ser un modelo de gran escala, se caracterizaron las variables por bloques de acuerdo con la función que desempeñan, ya que el modelo cuenta con cerca de trece mil variables. De igual forma se presentan de manera simplificada la función objetivo y el conjunto de restricciones. Hacia el final del capítulo se menciona la metodología utilizada para llevar a cabo el análisis.

Finalmente en el cuarto capítulo se describen los supuestos utilizados en el modelo para evaluar la conveniencia de incrementar la capacidad de refinación, los escenarios de demanda considerados, las restricciones, así como los resultados obtenidos, su análisis e implicaciones.

# Capítulo 1

## Descripción detallada del problema

El presente trabajo tiene como objetivo determinar cuáles son las inversiones requeridas en capacidad adicional de refinación en una nueva ubicación, a fin de poder suministrar la totalidad de la demanda de productos petrolíferos en el país con el mínimo costo. Para llevar a cabo lo anterior, es importante considerar todos los elementos que de una u otra forma afectan las decisiones de inversión en este sector.

Por este motivo se requiere conocer el contexto en el cual se desarrolla la industria de la refinación, las restricciones inherentes a la misma, los competidores, el tipo de demanda, entre otros. En las siguientes secciones se analiza esta industria, partiendo de un contexto global, para después ver con detalle la problemática a la cual se enfrenta la industria en México.

### 1.1 La industria de la refinación

A nivel mundial, la industria de la refinación es un negocio altamente fragmentado y complejo, compuesto por un gran número de compañías y refinerías de complejidad variada. Es una industria de alta intensidad de capital, lo cual genera de manera natural barreras tanto a la entrada para nuevos participantes como a la salida, dados los altos costos de abandono. Las barreras a la entrada de nuevos participantes han favorecido en los últimos años las expansiones en lugar de nuevas refinerías, mientras que los altos costos de abandono de la industria, conducen a que los productores con altos costos de operación no salgan del mercado o bien lo hagan de manera muy lenta.

Los mecanismos de precios de productos están basados en costos marginales competitivos con lo cual se ha favorecido la integración vertical, esto es, integrar el negocio de la extracción de crudo con la refinación de petróleo, ya que los precios de los insumos en el mercado de referencia tienen un margen oligopólico<sup>1</sup> dado el carácter de la industria extractiva de petróleo crudo, cuyos principales participantes ejercen un poder de mercado que les permite obtener un precio del petróleo crudo superior al de un mercado competitivo.

---

<sup>1</sup> Cuando existe un número reducido de oferentes de un producto y éstos se agrupan para fijar cuotas de producción que les permiten obtener precios más altos para su producto, se dice que se forma un oligopolio como es el caso de la Organización de Países Exportadores de Petróleo (OPEP) y la diferencia entre el precio obtenido menos el precio que se hubiera obtenido en ausencia del oligopolio se denomina margen oligopólico.

En cuanto a la demanda hay pocas posibilidades de diferenciación de productos debido a que la calidad de los productos está ligada a las tecnologías existentes que utilizan estos productos, por ejemplo, el tipo de gasolina que un automóvil requiere está caracterizada por ciertas especificaciones que los productores de automóviles fijan para el buen desempeño del mismo. Las variaciones en la demanda de productos refinados depende en mayor medida del desempeño económico.

Debido a la cercanía de México con la Costa Norteamericana del Golfo de México (CNGM) que es uno de los mercados más importantes a nivel mundial y a la facilidad para intercambiar productos, este mercado ha sido el mercado spot de referencia para México. Este mercado es altamente competitivo y con productos poco diferenciados.

Para entender la industria es necesario conocer los productos que se producen, los jugadores dentro de la misma, así como los procesos utilizados para refinar el petróleo crudo. En la tabla 1.1 se muestra de manera simplificada los principales productos obtenidos por la refinación de petróleo, así como sus principales usos. Los precios generalmente son más altos para las gasolinas y destilados intermedios y menores para el gas licuado y el combustóleo

La refinación de petróleo se requiere para convertir el petróleo crudo en productos terminados. Este proceso consta de tres pasos principales: separación, conversión y mezclado. En la separación se obtienen productos que destilan a distintas temperaturas (ver tablas 1.1 y 1.2). La conversión consiste en transformar las propiedades y proporciones de las corrientes. En el mezclado se conjuntan las diversas corrientes; con el fin de satisfacer las especificaciones requeridas de la forma más rentable posible y sus precios están en línea con la demanda y productos existentes en el mercado.

La industria de la refinación está caracterizada por ser producción conjunta, esto es, por cada barril de crudo procesado se obtienen todos los productos señalados en la tabla 1.1. Los rendimientos de estos productos están en función del tipo de crudo procesado (ligero versus pesado) y de la complejidad (entendida como los procesos disponibles) de la refinería. En cuanto a las ganancias, éstas presentan un comportamiento cíclico en función de la demanda.

Los crudos ligeros suelen tener mejores propiedades que se reflejan en la calidad y rendimientos de los productos obtenidos, producen una mayor proporción de productos ligeros (gasolinas y diesel) por cada unidad procesada, con menos contaminantes (azufre y metales), mientras que los crudos pesados generalmente tienen mayores concentraciones de azufre y metales y producen una mayor cantidad de combustóleo y menos gasolinas y destilados que los crudos ligeros. Estos rendimientos pueden ser modificados en función de la cantidad de procesos disponibles en la refinería. Entre mayor sea el número de procesos con que se cuente mayor será la complejidad de la misma y por ende requerirá más inversión.

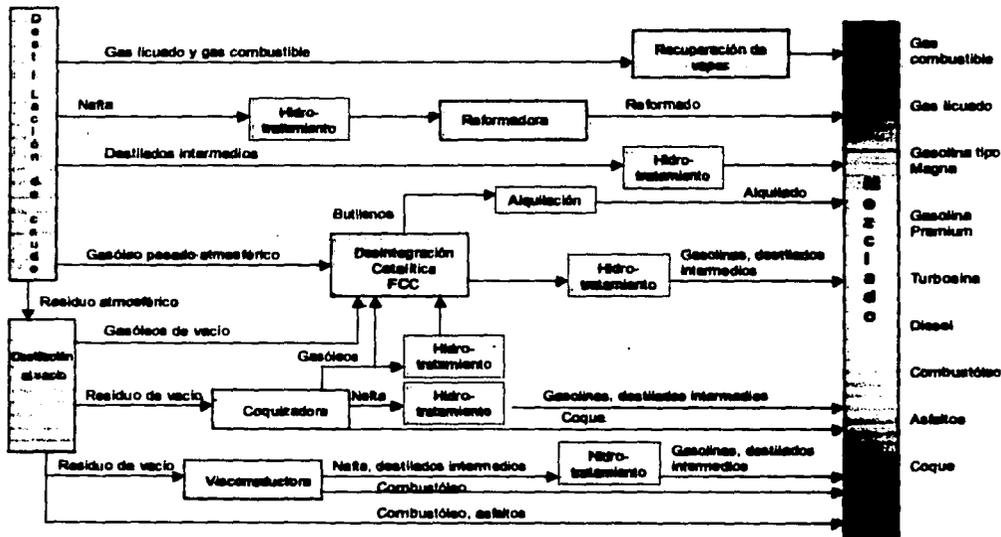
La tabla 1.1 muestra el esquema de una refinera compleja, la cual incluye algunos procesos de conversión de residuales.

Tabla 1.1 Principales productos refinados

	Temperatura de ebulición (*F)	Producto	Usos finales	Precios (Dls/b)*
<b>Petróleo crudo</b> <b>\$18 Dls/b</b>	<80	Gas licuado	Calefacción, uso doméstico, transporte	9.94
	150-350	Gasolina	Transporte	23.10
	350-525	Turboquina / kerosina	Transporte, calefacción	21.40
	525-650	Diesel	Transporte de carga, uso industrial	21.00
	650-1000	Gasóleos	Lubricantes, producción de gasolinas	20.00
	1000+	Asfalto, combustóleos	Pavimentación, esteras, combustible para barcos, para generación de electricidad	14.00

\* Dls/b: dólares por barril (medida comúnmente utilizada en la industria de la refinación y equivale aproximadamente a 159 litros por un barril)

Tabla 1.2 Principales procesos de refinación en una configuración de coquización

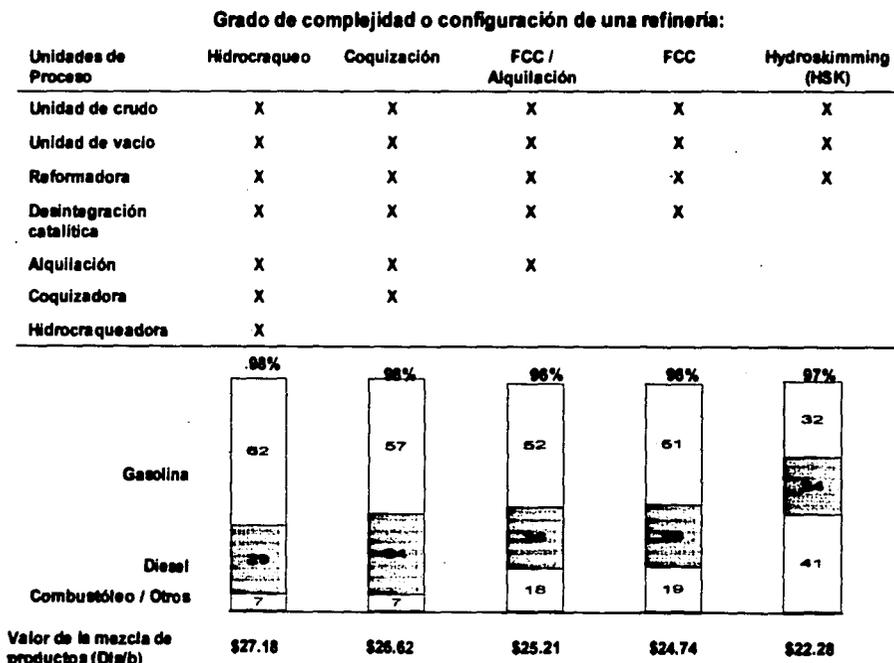


TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La tabla 1.3 muestra para un crudo típico, cual sería el rendimiento aproximado de productos de una refinería, de acuerdo a su grado de complejidad, a lo cual generalmente se le denomina *configuración* de la refinería. Se puede notar que entre mayor es la complejidad de una refinería, mayor la producción de gasolinas y destilados que son los productos que dan mayor valor a los procesos de refinación, por tener precios más elevados. El valor de la mezcla de productos se determina multiplicando el precio de cada producto por el rendimiento del mismo. Cuando a este valor se le resta su costo variable de producción y el costo de la materia prima (precio del crudo), se obtiene lo que se denomina *margen de refinación*.

Por este motivo, el desarrollo tecnológico de esta industria ha enfocado sus esfuerzos principalmente a lo que se ha denominado la conversión del fondo de barril y en mejorar la calidad de los combustibles obtenidos.

**Tabla 1.3: Complejidad de una refinería y valor de la mezcla de productos obtenida**



Nota: Los volúmenes mostrados no suman 100, debido a pérdidas dentro del proceso

## 1.2 La industria de la refinación en México

Esta industria está caracterizada por ser un monopolio estatal desde su expropiación en 1938. Desde ese entonces había operado como una empresa completamente integrada, en el sentido de que incluía los procesos de extracción de aceite crudo y gas natural, pasando por los procesos de refinación de petróleo, petroquímica, así como de la distribución de los productos finales en todo el territorio nacional. Es a partir de 1992 que el Gobierno Federal, decide segmentar la empresa en cuatro organismos, a fin de dar transparencia a las transacciones entre organismos y medir la rentabilidad de cada uno de ellos.

La industria de refinación está sujeta a regulación gubernamental y tiene como misión el suministro de los productos petrolíferos que el mercado demande, con la calidad establecida por los órganos correspondientes. Dentro de las restricciones a que está sujeta esta industria, se tiene que el mecanismo de precios productor al que se enfrenta simula un mercado competitivo, a pesar de ser un monopolio.

El sistema nacional de refinación está conformado por seis refinerías ubicadas en Cadereyta, Nuevo León; Cd. Madero, Tamaulipas; Minatitlán, Veracruz; Salamanca, Guanajuato; Salina Cruz, Oaxaca; y, Tula, Hidalgo. Se tiene una capacidad instalada de procesamiento de crudo del orden de los 1555 miles de barriles<sup>2</sup> diarios (mbd). Dependiendo de la configuración<sup>3</sup> de cada refinería se tiene un perfil de rendimientos por cada barril de crudo procesado. Las configuraciones de Tula, Salamanca y Salina Cruz corresponden al tipo FCC/Alquilación, la de Minatitlán es una configuración FCC y se espera que en el transcurso de este año, Cadereyta y Madero cuenten con una configuración de coquización.

El sistema nacional de refinación procesa crudos mexicanos exclusivamente. Dentro de los más conocidos están el crudo Maya y el crudo Istmo. Actualmente, la proporción que se procesa en la industria de la refinación en México es más bien ligera con un porcentaje de crudo Maya de aproximadamente, 33 por ciento.

Esta mezcla obedece principalmente a factores técnicos, ya que para poder procesar crudos pesados con alto contenido de azufre como el Maya, se requiere en primer lugar de ciertas plantas para disminuir el contenido de azufre de cada corriente y dependiendo del perfil de productos que se espera obtener se requerirá de determinado equipo. Por ejemplo, en la gráfica 1.1 se puede observar que el crudo Maya tiene un alto contenido de residuales<sup>4</sup> y menor contenido de gasóleos. Si lo que se desea maximizar es la producción de gasolinas, se requerirá de procesos de conversión para transformar los residuales en productos ligeros, tales

---

<sup>2</sup> Medida comúnmente utilizada en la industria de refinación y equivale a 159 litros aproximadamente.

<sup>3</sup> Grado de complejidad en las plantas que la conforman (ver Tabla 1.3)

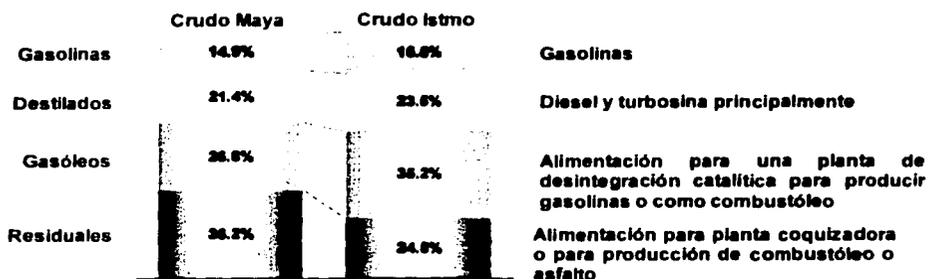
<sup>4</sup> Como el combustóleo

como gasolinas y diesel, mientras que si se procesa crudo Istmo, se requerirá de una configuración más sencilla.

## Oferta

Como ya se señaló, se requiere de la refinación de petróleo para producir productos terminados. En México, los principales productos son las gasolinas – Pemex Magna, Pemex Premium–, destilados intermedios –Turbosina y Pemex Diesel– y Combustóleo.

Gráfica 1.1. Rendimientos típicos de crudos mexicanos (miles de barriles diarios)



Las gasolinas se utilizan en general para vehículos automotores, la turbosina para los aviones y el diesel que se consume tanto en el sector transporte, como en motores, para calefacciones, entre otros. El combustóleo se utiliza como combustible para barcos, para calderas en la industria en general y para generación de energía eléctrica en plantas de vapor.

La producción de estos combustibles para el periodo 1993 – 2000, se muestra en la gráfica 1.2. En esta gráfica se muestra como ha ido evolucionando la oferta de gasolinas. De producir mayormente gasolinas con menor calidad como la gasolina Nova, se incrementa de manera importante la producción de gasolinas con características similares a las producidas en Estados Unidos.

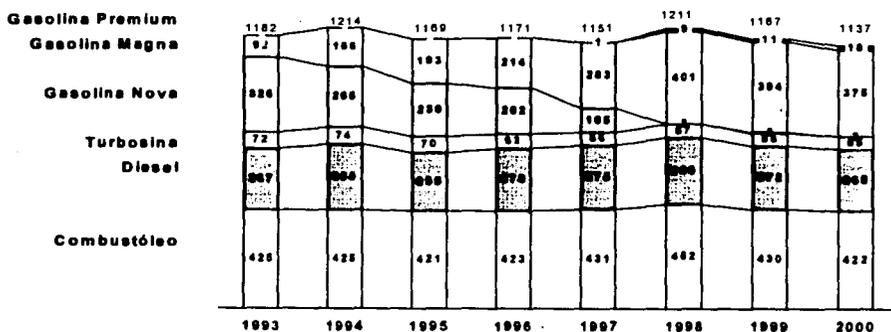
## Demanda

El crecimiento y la estructura de la demanda de productos petrolíferos, depende por un lado, del crecimiento económico del país y por otro de factores tales como el tipo de industria, de las tecnologías utilizadas tanto para los vehículos de transporte como en la industria en general.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

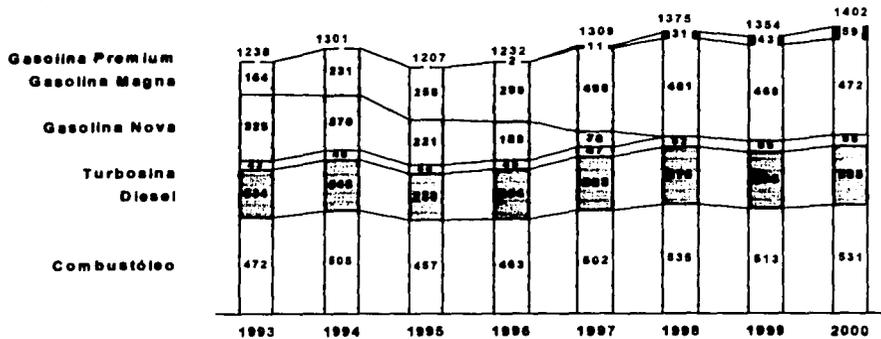
Por ejemplo, en Los Estados Unidos de América la estructura de la demanda está orientada hacia un mayor consumo de gasolinas, ya que los vehículos que circulan en ese país tienen motores a gasolina, mientras que si analizamos el caso de Europa está más orientado al consumo de diesel. El consumo en México en cuanto a destilados, es más parecido al perfil de Estados Unidos, pero no así en el caso de los residuales. En Los Estados Unidos, el consumo de combustóleo es muy reducido, mientras que en México representó alrededor del 40 por ciento de la demanda de combustibles en el año 2000, debido a que una parte importante lo consume la Comisión Federal de Electricidad para la generación de energía eléctrica.

Gráfica 1.2. Estructura de la oferta interna de petrolíferos  
(Miles de barriles diarios)



La evolución de la demanda en México, se muestra en la gráfica 1.3. En esta gráfica se puede apreciar como se ha ido modificando el perfil de productos demandados. Por ejemplo, se observa la desaparición de la gasolina tipo Nova como resultado de la disminución en la oferta de este producto. También puede observarse una caída importante en el consumo de combustibles en el año 1995 a consecuencia de que se presentó una de las crisis más severas sufridas en el país. La recuperación de la demanda ocurre hasta el año 1997 en el cual mostró un nivel muy similar al que tenía en 1994.

Gráfica 1.3. Estructura de la demanda interna de petrolíferos  
(Miles de barriles diarios)



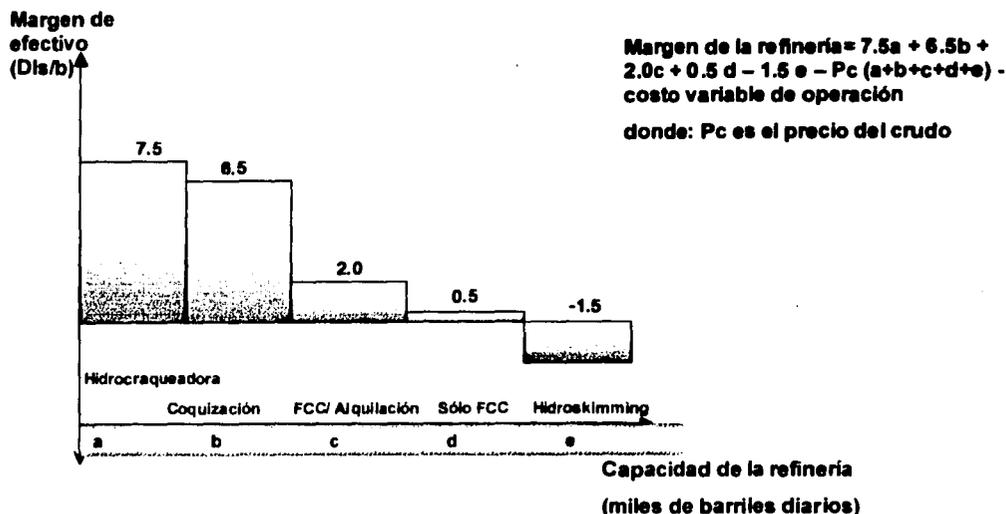
### 1.3 Economía de la refinación

La rentabilidad de la industria de la refinación depende de varios elementos que caracterizan a la misma. Se dice que es una industria de márgenes ya que su rentabilidad es medida por su margen variable de operación. Esto se explica debido a que no es común calcular el costo de producción de un barril de un producto específico como por ejemplo la gasolina, porque por cada barril de crudo procesado se obtienen varios productos.

El petróleo crudo y su precio afectan la producción de productos petrolíferos, por lo que se tiene que analizar en forma conjunta: producción, materia primas, precios y configuración de la refinería disponible.

El costo de producción con refinerías complejas es mayor que en las refinerías más sencillas, pero a su vez los productos obtenidos son los de mayor precio. Un refinador decidirá procesar un barril adicional de crudo, siempre y cuando el margen variable obtenido sea mayor o igual a cero. Es importante señalar que aún cuando una refinería sea compleja, puede estar operando como si tuviera un configuración sencilla, al no utilizar las plantas de conversión de residuales o bien conforme se vaya llenando la capacidad de estas plantas.

Gráfica 1.4. a. Curva de márgenes de una refinera compleja



Por ejemplo, conforme incrementa su capacidad de procesamiento de crudo, puede operar los primeros (a+b) barriles con una configuración de coquización, hasta que complete la capacidad de su planta coquizadora (ver gráfica 1.4.a.), los siguientes (c+d) barriles con una configuración FCC y finalmente los restantes con una configuración Hidroskimming.

De igual forma la inversión requerida para una refinera compleja es superior al de una refinera relativamente sencilla y es sólo cuando el margen de refinación obtenido es lo suficientemente amplio<sup>5</sup> que la inversión es recuperable. Sin embargo, como se verá más adelante, los precios de los productos varían de manera significativa, por lo que no resulta tan simple garantizar la recuperación de la inversión.

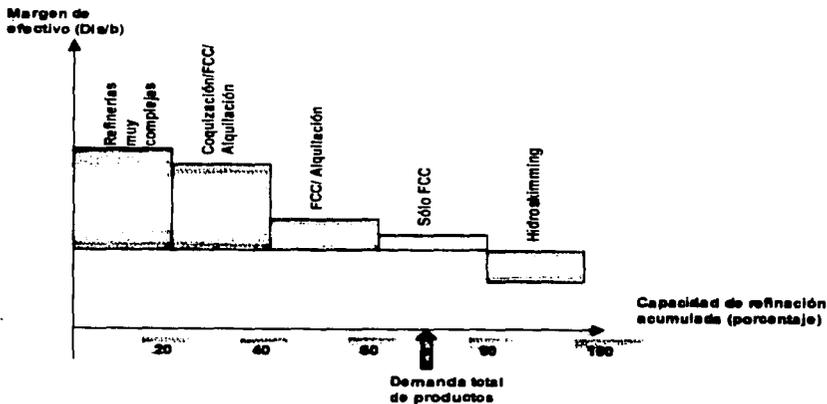
Entonces para entender la rentabilidad en la industria de la refinación, se deben analizar aquellos factores que determinan los márgenes de refinación. Los tres elementos que los explican son: la configuración marginal de refinación, los diferenciales de precios de productos ligeros a pesados y la relación entre centros de refinación.

<sup>5</sup> Se calcula que con un margen de refinación de 8 dls/b sostenido durante 20 años es suficiente para generar el valor para recuperar la inversión en una refinera nueva.

La configuración marginal es aquella configuración de equipos en refinería que presenta un margen variable nulo en la curva de margen de la industria, donde esta última es el resultado de agregar las curvas individuales de cada refinador dentro de la industria. La gráfica 1.4.b representa la curva de margen de la industria y correspondería a la suma de curvas individuales, como la mostrada en la gráfica 1.4.a. La configuración marginal ocurre cuando la oferta iguala a la demanda (en la gráfica corresponde a una configuración FCC). Si la demanda disminuyera, en primer lugar se observaría un exceso de oferta, lo cual llevaría a que los precios de los productos disminuyeran y en consecuencia la configuración marginal correspondería a una más compleja (e.g. FCC/Alquilación), con lo cual aquellos productores con una configuración más sencilla obtendrían márgenes negativos, disminuyendo en consecuencia su producción.

De esta manera, el refinador marginal deberá encontrar el punto en el cual recupere al menos su costo de operación. Si los márgenes son positivos, los refinadores aumentarán la utilización de su planta y este incremento llevará a bajas en los precios. Por el contrario, si los márgenes son negativos, los refinadores reducirán la utilización de su planta y este decremento provocará un aumento en los precios. Así, el refinador marginal presenta un comportamiento cíclico donde el equilibrio es roto una vez que los incrementos de demanda incentivan incrementos de capacidad que generen excesos de oferta.

Gráfica 1.4. b. Curva de márgenes de la industria, según su grado de complejidad

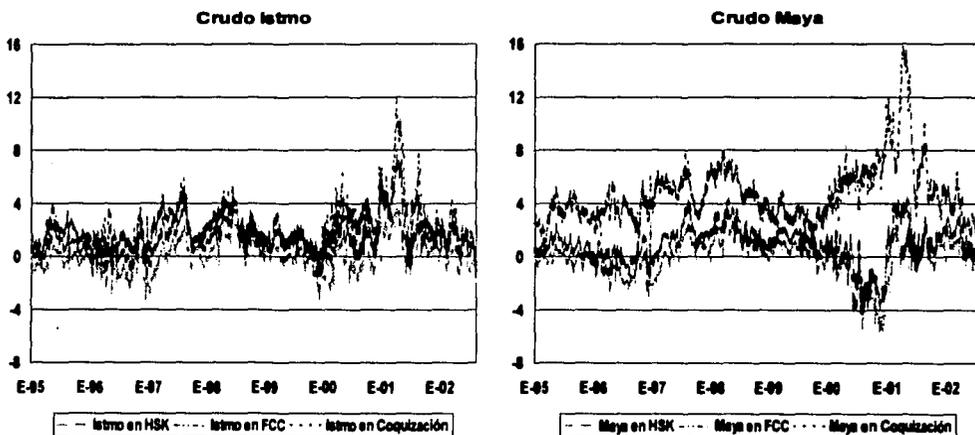


En las gráficas 1.5 y 1.6 se presentan los márgenes de refinación de los crudos Istmo y Maya para los últimos siete años. En la primera se puede observar una mayor amplitud de los márgenes del crudo Maya entre las diferentes configuraciones. Estos tienden a ser negativos o muy cercanos a cero para las

configuraciones más sencillas (HSK y FCC) y muy atractivos para configuraciones complejas (coquización), esto indica que si se tiene una refinería con una configuración compleja, en los periodos con márgenes amplios conviene procesar este tipo de crudo, a fin de maximizar las ganancias. Por el contrario, si la configuración de la refinería es relativamente sencilla, sería preferible procesar crudos más ligeros como el Istmo, ya que la curva de márgenes con diferentes configuraciones no muestra la mayor amplitud del crudo Maya, razón por la cual cuando se tienen periodos con márgenes amplios las ganancias no son tan atractivas.

La gráfica 1.6 muestra básicamente la misma información que la 1.5, sólo que se presenta el promedio anual y únicamente para las configuraciones HSK<sup>6</sup> y FCC, a fin de ejemplificar la configuración marginal promedio de cada año. Así podemos ver que para el crudo Istmo la configuración HSK fue la configuración marginal (aquella con el margen de efectivo más cercano al cero) para todos los años con excepción del año 1996, al igual que para el crudo Maya, con excepción de los años 1996 y 2000.

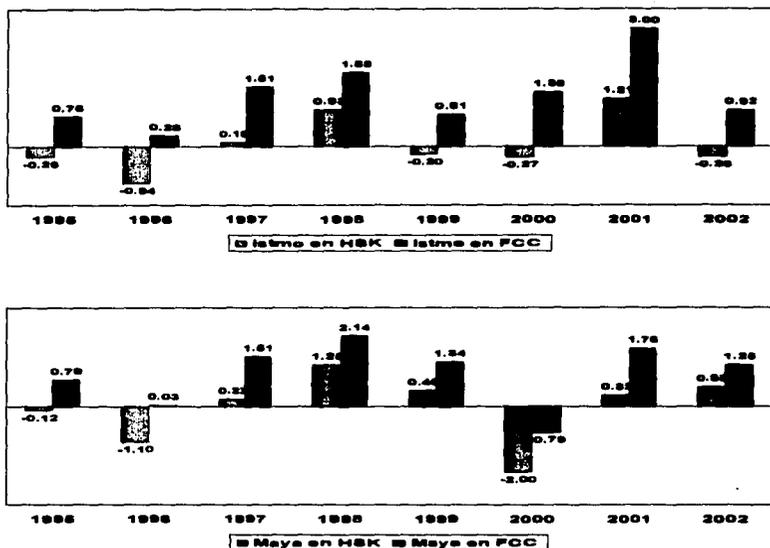
Gráfica 1.5. Márgenes de refinación de crudos mexicanos (dólares por barril)



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<sup>6</sup> Ver Tabla 1.3. para definición de estas configuraciones.

**Gráfica 1.6. Márgenes de efectivo para refinerías con crudos mexicanos (dólares por barril)**

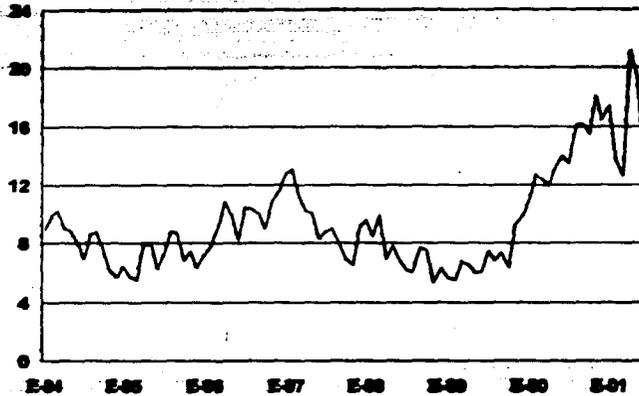


Otro elemento importante son los diferenciales de precios de productos ligeros respecto a los pesados<sup>7</sup>, los cuales obedecen al carácter marginal de la industria de la refinación, así como al balance oferta-demanda de residuales, según se muestra en la gráfica 1.7. De esta manera, un refinador con una configuración compleja, podría decidir entre destinar el residuo para la producción de combustóleo, cuando los diferenciales son estrechos o bien destinarlo como alimentación a una planta coquizadora cuando éstos son amplios.

Para un refinador con una configuración sencilla, le permitiría decidir entre procesar un crudo ligero o uno pesado. Por ejemplo, cuando los diferenciales son estrechos un crudo pesado proporciona mayor rentabilidad, mientras que cuando son amplios un crudo ligero proporciona una mayor producción de productos ligeros, incrementando la rentabilidad.

<sup>7</sup> La definición de diferencial ligeros a pesados es:  $(\text{Precio de gasolina} + \text{Precio del diesel}) \div 2 - \text{Precio del combustóleo de alto azufre en el mercado SPOT}$ . En este caso están referidos a la CNGM.

Gráfica 1.7. Diferenciales de precios ligeros a pesados (dólares por barril)

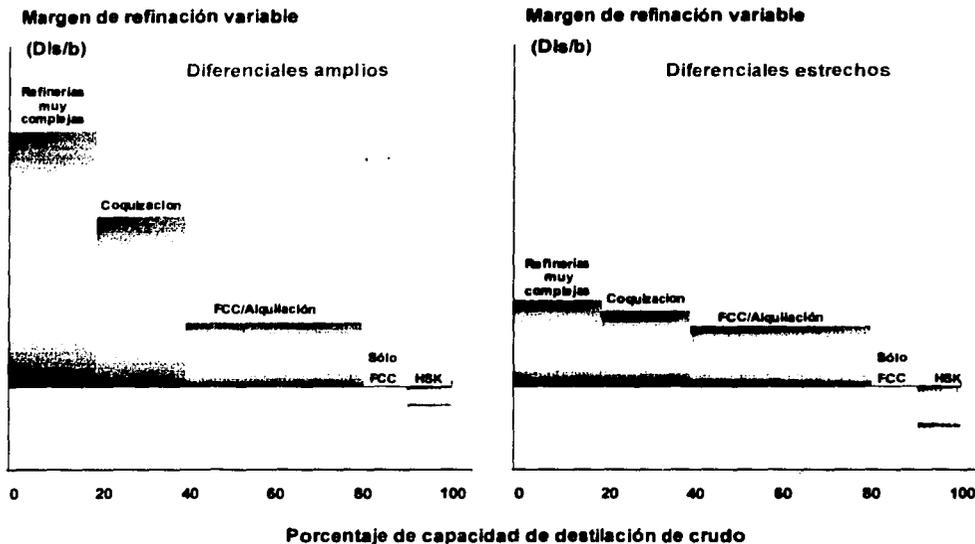


Nota: La definición de diferencial ligero a pesados es: (Precio de gasolina + Precio del diesel) - Precio del combustible de alto azufre.

De acuerdo con lo anterior, la determinación de precios se da conforme a costos variables de operación del productor marginal. En periodos de márgenes altos suelen darse inversiones generalizadas, lo cual conduce a exceso de capacidad en la industria. La tendencia en la industria es hacia una mayor complejidad de las refinarias, a fin de satisfacer calidades más exigentes, así como una mayor rentabilidad. En la gráfica 1.8, se puede observar la forma en que influyen los diferenciales de precios de ligeros a pesados sobre los márgenes de refinación.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Gráfica 1.8. Impacto de los diferenciales de precio en los márgenes de refinación - CNGM



Finalmente, la ubicación de los centros de refinación influye en la rentabilidad de la industria, ya que están regidos por el balance de oferta y demanda local, así como por el costo de transporte de productos del petróleo.

## 1.4 Problemática de la industria en México

Dentro de las principales desventajas de la industria de refinación de México respecto a cualquier refinador internacional, se pueden enumerar las siguientes:

- i. Debe abastecer la totalidad de la demanda de petrolíferos, ya sea con producción nacional o por importación
- ii. El sistema de refinarias está ubicado mayormente, cercano a las fuentes de crudo y lejano de mercados internacionales que determinan los costos de oportunidad para el sistema
- iii. El petróleo crudo se compra a precio de exportación del mercado marginal. Esto es, en las mismas condiciones que un refinador internacional.
- iv. Las gasolinas se evalúan a un precio de desplazamiento de importaciones, los destilados intermedios se evalúan a precio de paridad y el combustóleo a un precio de importación y/o paridad

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- v. Se tiene una alta proporción de la demanda ubicada tierra adentro, concentrada en 3 zonas metropolitanas, lejos de las fuentes de crudo, por lo que se incurre en altos costos de transporte
- vi. El perfil de la demanda está concentrado hacia una alta proporción de combustóleo que es un producto de bajo valor
- vii. Especificaciones similares a las de productos internacionales, pero con limitaciones en los recursos para invertir en equipo adecuado para mejorar la calidad de los productos
- viii. Creciente déficit de gasolinas de alto octano
- ix. Falta de recursos propios para invertir

Sin embargo, la industria nacional dispone de ventajas estructurales en refinación que deberían permitir invertir rentablemente para abastecer la demanda futura.

Actualmente la industria de la refinación en México enfrenta serios problemas. Al establecerse especificaciones más estrictas en un contexto de baja inversión, en las últimas décadas las importaciones se han incrementado de manera considerable, sobre todo aquellas de gasolinas terminadas y de componentes que se utilizan para mejorar la calidad de las gasolinas producidas internamente (ver gráfica 1.9). De darse los crecimientos esperados en el Producto Interno Bruto, se esperaría un incremento importante hacia finales de la presente década en la demanda de gasolinas, diesel y turbosina principalmente.

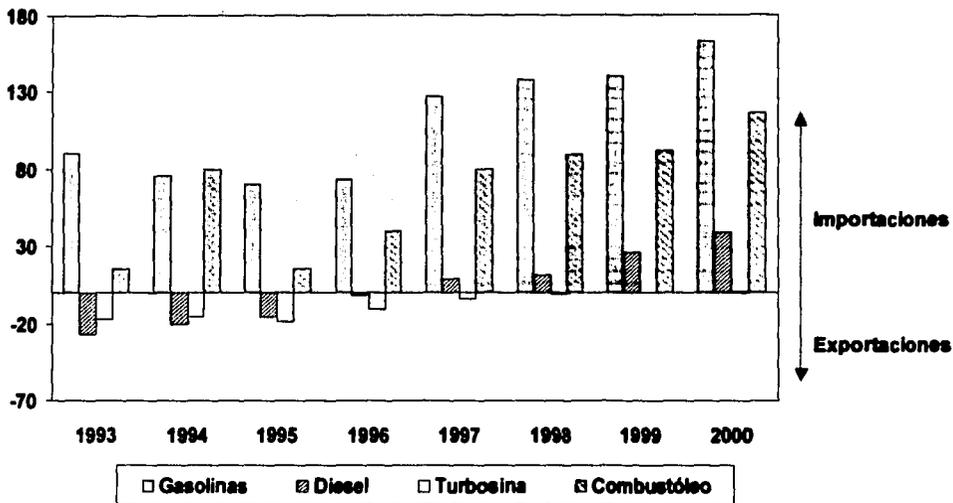
En lo que se refiere a los productos residuales como el combustóleo, se puede señalar que la industria eléctrica mexicana basó su expansión en las décadas de los setenta y ochentas en plantas de vapor, las cuales utilizan como combustible el combustóleo que es un producto de bajo valor en el mercado y se producía en grandes cantidades en el país. Esta política funcionó en su momento, ya que las restricciones ambientales eran laxas y se pudo generar energía eléctrica a bajo costo.

En ese entonces, la industria de refinación mexicana, enfocó sus esfuerzos a producir la mayor cantidad de ese combustible, a pesar de no obtener ganancias sustanciales, por lo que ni siquiera se planteó la posibilidad de hacer más compleja la industria de la refinación en México. Es hasta la década de los noventa que dicha política ha venido modificándose de manera radical y la industria eléctrica ha preferido fundar su crecimiento en plantas de ciclo combinado que utilizan gas natural como combustible. Sin embargo, debido a que la oferta de gas natural ha sido insuficiente no se ha logrado una sustitución importante de combustóleo hacia gas natural, con el consecuente incremento en las importaciones de este combustible. (ver gráfica 1.9)

Un elemento importante es el cambio a nivel mundial en los estándares de calidad de los combustibles, el cual se ha visto reflejado en los productos que se elaboran en México.

A pesar de lo anterior, se espera un cambio del perfil de la demanda, enfocada hacia productos destilados, teniendo una disminución importante en la demanda de combustóleo hacia finales de la década, el cual se espera sea sustituido eventualmente por el gas natural, según se señaló anteriormente.

Gráfica 1.9. Comercio exterior de principales productos petrolíferos 1993 - 2000



## 1.5 Objetivo

Como ya se mencionó, el objetivo central de este trabajo, consiste en determinar cuáles son las inversiones requeridas en capacidad adicional de refinación en una nueva refinería, a fin de suministrar la demanda de productos petrolíferos en el país a mínimo costo. El suministro de los productos se puede hacer ya sea con producción nacional o bien con importaciones, lo que resulte más económico.

Para lograr este objetivo se plantearon tres escenarios de demanda basados en diferentes escenarios de crecimiento del PIB. Se consideró un pronóstico de largo plazo para los precios de referencia en el mercado spot. Cabe señalar que no se considerará una restricción presupuestal para estas inversiones, es decir, suponemos que hay recursos ilimitados.

Es importante considerar todos los elementos que de una u otra forma afectan las decisiones de inversión. Por un lado, tenemos la infraestructura existente, el mercado de referencia de los insumos y productos, los crudos disponibles para procesamiento, el gas natural disponible, las restricciones ambientales que imponen especificaciones más estrictas a los productos, así como límites en las emisiones de óxidos de nitrógeno (NOx) y óxidos de azufre (SOx) que conducen a considerar tecnologías alternas para la reducción de estos contaminantes. Por otro lado, se requiere hacer supuestos acerca del perfil esperado de la demanda, de la reducción esperada en la demanda de combustóleo en respuesta tanto a cuestiones tecnológicas del sector eléctrico, como a cuestiones ambientales.

Para poder considerar todos estos elementos de forma conjunta, se desarrolló un modelo de programación lineal, el cual tiene como función objetivo la minimización del costo de suministro de energía en el país y el conjunto de restricciones comprende las restricciones tecnológicas de los principales procesos de refinación, la generación de energía eléctrica, la distribución de productos, las restricciones ambientales y las diferentes posibilidades de suministro de la demanda, a nivel de agencia de ventas.

Este modelo de programación lineal está hecho en base promedio diario, esto es, calcula la producción para suministrar la demanda de un solo día, por lo que para llevar los resultados a base anual, bastaría con multiplicar los resultados por 365 días. Sin embargo, en la industria de la refinación es común el manejo de información en base diaria. El año que se tomó como referencia para el análisis fue 2007, ya que de llevarse a cabo inversiones en una refinería se requieren de al menos cuatro años, uno para todos los trámites previos a su construcción y tres para su construcción.

El modelo constituye una herramienta que permite principalmente, determinar las inversiones en refinación, analizar cuando una inversión es mejor a otra, verificar si una inversión sigue siendo rentable al modificarse la demanda o los precios esperados, determinar la estrategia de mínimo costo ante cambios en las restricciones ambientales o en las especificaciones de productos.

La calidad de los resultados depende de la calidad de la información que le sea suministrada al modelo.

Una vez que se determine si se requiere de una refinería nueva en el país, habrá que verificar que se trata de una inversión rentable, para lo cual se aplicarán las técnicas convencionales del valor presente neto y de la tasa de interna de retorno, para cada uno de los escenarios considerados.

# Capítulo 2

## El problema de programación lineal

La programación lineal se concentra en la optimización (minimización o maximización) de una función lineal a la vez que satisface un conjunto de ecuaciones lineales y/o restricciones lineales con desigualdades. El algoritmo simplex para la solución del problema de programación lineal fue desarrollado primero por George B. Dantzig alrededor de 1947 y en 1949 fue publicado el método simplex para la resolución de programas lineales.

En este capítulo se introduce el problema de programación lineal, se presentan algunas definiciones básicas de programación lineal, así como de la región de soluciones factibles, después se presenta una sección de conjuntos convexos y teoría de poliedros, a fin de caracterizar la región de soluciones factibles y mostrar las condiciones necesarias y suficientes para que una solución óptima exista. Después se presenta el método simplex para la solución de problemas de programación lineal, tanto en su forma básica como en formato de *tableau*.

De manera adicional se introduce el método simplex revisado y los conceptos de dualidad, los cuales sirven de base para finalmente presentar una sección donde se muestra el algoritmo de descomposición, que es un algoritmo desarrollado especialmente para la solución de problemas de gran escala, ya que como se verá en el siguiente capítulo, el problema que se presenta en este trabajo es de este tipo.

### 2.1 Definiciones básicas

Considere el siguiente problema de programación lineal

*Minimizar*  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

*Sujeto a:*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Aquí  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  es llamada la *función objetivo* que va a minimizar y será denotada por  $z$ . Los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son conocidos como los *coeficientes de costo* y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las *variables de decisión* (niveles de actividad) que se van a determinar. La desigualdad  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$  denota la restricción  $i$ -ésima. Los coeficientes  $a_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  son llamados *coeficientes tecnológicos*. Estos coeficientes tecnológicos, forman la matriz de restricciones  $\mathbf{A}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El vector columna cuyo componente  $i$ -ésimo es  $b_i$ , se refiere como el *vector derecho* y representa los requerimientos mínimos. Las restricciones  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  son *restricciones de no negatividad*. Un conjunto de variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que satisface todas las restricciones es llamado *punto factible* o *vector factible*. El conjunto de tales puntos constituye la región de soluciones factibles o el espacio factible.

Usando la terminología expuesta, el problema de programación lineal puede enunciarse como sigue: entre todos los vectores factibles, encuentre uno que minimice (o maximice) el valor de la función objetivo.

### Ejemplo 2.1

Considere el siguiente problema lineal

*Minimizar*  $2x_1 + 5x_2$

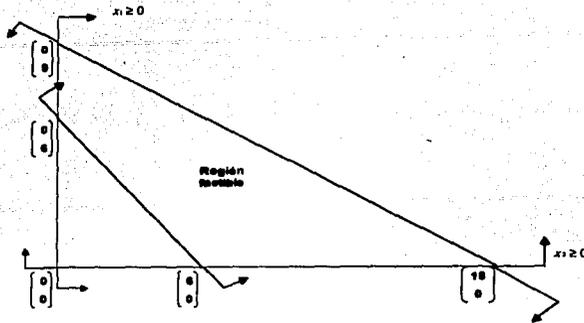
*Sujeto a:*

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En este caso se tienen dos variables de decisión. La función objetivo que se quiere minimizar es  $2x_1 + 5x_2$ . Las restricciones y la región factible se ilustran en la gráfica 2.1. El problema de optimización consiste en encontrar un punto en la región factible con el valor de la función objetivo más pequeño.



Gráfica 2.1 Ilustración de la región factible

## 2.1.1 Supuestos de programación lineal

Para representar un problema de optimización como un problema de lineal, se requiere de varios supuestos que están implícitos en la formulación de la programación lineal discutida previamente y que a continuación se enuncian:

1. Proporcionalidad. Dada una variable  $x_j$ , su contribución al costo es  $c_j x_j$  y su contribución a la  $i$ -ésima restricción es  $a_{ij} x_j$ . Esto significa que no hay ahorros (o costos adicionales) al utilizar más de la actividad  $j$ , esto es, no hay economías de escala o descuentos. Tampoco hay costos adicionales de arranque por iniciar la actividad.
2. Aditividad. Este supuesto garantiza que el costo total es la suma de los costos individuales, y que la contribución a la  $i$ -ésima restricción es la suma de las contribuciones individuales de las actividades individuales. En otras palabras, no hay efectos de sustitución o interacciones entre las actividades.
3. Divisibilidad. Este supuesto asegura que las variables de decisión se pueden dividir en cualquier fracción, de tal forma que se permiten valores no enteros.
4. Determinístico. Los coeficientes  $c_j$ ,  $a_{ij}$  y  $b_i$  se conocen de forma determinística. Se supone que cualquier elemento probabilístico o estocástico inherente a la demanda, costos, precios disponibilidad de recursos, utilizaciones, etc. es aproximado para estos coeficientes a través de algún equivalente determinístico.

Es importante reconocer que si un problema de programación lineal se utiliza para modelar una situación dada, implica que los supuestos anteriores deben satisfacerse o en su caso se pueden hacer simplificaciones o estimaciones que no modifiquen de manera sustancial el problema original.

## 2.1.2 Formatos estándar y canónico

Se puede demostrar que un programa lineal se puede escribir de manera equivalente en diferentes formas a través de diversas manipulaciones. En particular, dos formas serán de utilidad. Éstas son la estándar y la canónica. Un programa lineal se dice que se encuentra en su forma estándar si todas las restricciones son igualdades y todas las variables son no negativas. El método simplex está diseñado para aplicarse sólo después de que el problema se pone en su formato estándar. La forma canónica es también especialmente útil para explotar las relaciones con el dual. Un problema de minimización se encuentra en su forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo mayor o igual. Un problema de maximización se encuentra en su forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo menor o igual.

## 2.1.3 Programa lineal en notación matricial

Un problema de programación lineal se puede enunciar de una forma más conveniente utilizando notación matricial. Considere el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Sea  $\mathbf{c}$  el vector renglón  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  y considere los siguientes vectores columna  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{A}$  una matriz de  $m \times n$ .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces el problema se puede escribir como sigue:

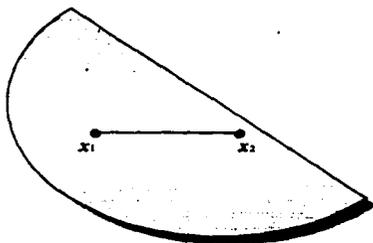
$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

## 2.2 Conjuntos convexos

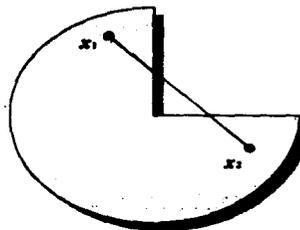
A continuación se presentan algunas definiciones básicas de los conjuntos convexos, a fin de poder dar una caracterización de los poliedros, los cuales constituyen la región de soluciones factibles y son la base fundamental para determinar las condiciones para la existencia de puntos extremos y su correspondencia de estos últimos con las soluciones básicas factibles del problema de programación lineal.

### 2.2.1 Definiciones básicas

Se dice que un conjunto en  $E^n$  es un *conjunto convexo* si dados cualesquiera dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $X$ , entonces  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$  para cada  $\lambda \in [0,1]$ . Nótese que  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$  para  $\lambda \in [0,1]$  representa un punto en el segmento de línea que une a  $x_1$  y  $x_2$ . Cualquier punto de la forma  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$  donde  $0 \leq \lambda \leq 1$  es una *combinación convexa* de  $x_1$  y  $x_2$ . Si  $\lambda \in (0,1)$ , entonces la combinación convexa es llamada *estricta*. Para cada par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $X$ , el segmento de línea que los une, o las combinaciones convexas de los dos puntos deben pertenecer a  $X$ . La gráfica 2.2 muestra un ejemplo de un conjunto convexo y un ejemplo de un conjunto no convexo.



Conjunto convexo



Conjunto no convexo

Gráfica 2.2 Ejemplo de conjuntos convexos y no convexos

## Puntos extremos

La noción de puntos extremos juega un papel especialmente importante en la teoría de la programación lineal. Un punto  $\mathbf{x}$  en un conjunto convexo  $X$  se llama punto extremo de  $X$  si  $\mathbf{x}$  no puede representarse como una combinación convexa estricta de dos puntos distintos en  $X$ . En otras palabras, si  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$  con  $\lambda \in (0,1)$  y  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$  entonces,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ .

## Hiperplanos y Semiespacios

Un hiperplano en  $E^n$  generaliza la noción de una línea recta en  $E^2$  y la noción de un plano en  $E^3$ . Un hiperplano  $H$  en  $E^n$  es un conjunto de la forma  $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}\mathbf{x} = k\}$  donde  $\mathbf{p}$  es un vector no cero en  $E^n$  y  $k$  es un escalar. A  $\mathbf{p}$  generalmente se le denomina el vector normal o el gradiente al hiperplano.

Un hiperplano divide a  $E^n$  en dos regiones llamadas semiespacios. Por lo tanto un *semiespacio* es una colección de puntos de la forma  $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}\mathbf{x} \geq k\}$ , donde  $\mathbf{p}$  es un vector no cero en  $E^n$  y  $k$  es un escalar.

## Rayos y Direcciones

Otro ejemplo de un conjunto convexo es un rayo. Un *rayo* es una colección de puntos de la forma  $\{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d} : \lambda \geq 0\}$ , donde  $\mathbf{d}$  es un vector diferente de cero. Aquí  $\mathbf{x}_0$  es llamado el *vértice* del rayo y  $\mathbf{d}$  es la *dirección del rayo*.

## Direcciones de un Conjunto Convexo

Dado un conjunto convexo, un vector  $\mathbf{d}$  diferente de cero se denomina la *dirección del conjunto*, si para cada  $\mathbf{x}_0$  en el conjunto, el rayo  $\{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d} : \lambda \geq 0\}$  también pertenece al conjunto.

## Direcciones Extremas de un Conjunto Convexo

La noción de direcciones extremas es similar a la noción de puntos extremos. Una *dirección extrema* de un conjunto convexo es una dirección del conjunto que no puede representarse como una combinación positiva de dos direcciones distintas del conjunto. Dos vectores,  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  se dice que son distintos o no equivalentes si  $\mathbf{d}_1$  no puede representarse como un múltiplo positivo de  $\mathbf{d}_2$ .

## Conos convexos

Un cono convexo  $C$  es un conjunto convexo con la propiedad adicional de que  $\lambda \mathbf{x} \in C$  para cada  $\mathbf{x} \in C$  y para cada  $\lambda \geq 0$ . Note que un cono convexo siempre

contiene al origen al dejar  $\lambda = 0$ , y también dado cualquier punto  $x \in C$ , el rayo o medialínea  $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$  pertenece a  $C$ .

### Poliedros y Conos Poliédricos

Los poliedros representan casos importantes de conjuntos convexos y de conos convexos, ya que la región de soluciones factibles es precisamente de este tipo. Un *poliedro* es la intersección de un número finito de semiespacios. Un poliedro acotado es llamado un politopo. Un poliedro puede representarse por  $\{x : Ax \leq b\}$  donde  $A$  es una matriz de  $m \times n$  cuyo  $i$ -ésimo renglón es  $a^i$  y  $b$  un vector columna de  $m$  componentes.

Un caso especial de los poliedros son los *conos poliédricos*. Un cono poliédrico es la intersección de un número finito de semiespacios, cuyos hiperplanos pasan a través del origen. Esto es,  $C$  es un cono poliédrico si puede representarse como  $\{x : Ax \leq 0\}$ , donde  $A$  es una matriz de  $m \times n$ . Note que el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $A$  es el vector normal al hiperplano de definición del  $i$ -ésimo semiespacio.

#### 2.2.2 Puntos extremos y direcciones extremas de poliedros

Se supondrá en lo que sigue, que el poliedro bajo discusión es de la forma:

$$X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (2.1)$$

donde  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $b$  es un vector de  $m$  componentes.

#### Puntos extremos para conjuntos poliédricos

Se dice que un punto  $\bar{x} \in X$  es un *punto extremo* o *punto esquina* o *vértice* de  $X$  si  $\bar{x}$  cae en algún conjunto de  $n$  hiperplanos de definición linealmente independientes de  $X$ . Si hay más de  $n$  hiperplanos de definición que pasan a través de un punto extremo, entonces tal punto extremo es llamado degenerado.

Se puede demostrar que esta definición de puntos extremos es equivalente a decir que  $\bar{x}$  no se puede escribir como una combinación convexa estricta de dos puntos distintos de  $X$ .

## Teorema de Representación para el Caso General

Sea  $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$  un poliedro no vacío que puede representar al conjunto de soluciones factibles del problema de programación lineal. Entonces el conjunto de puntos extremos es no vacío y tiene un número finito de puntos, dígase  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , además, el conjunto de direcciones extremas es vacío si y sólo si  $X$  es acotado. Si  $X$  es no acotado, entonces el conjunto de direcciones extremas es no vacío y tiene un número finito de vectores, dígase  $d_1, d_2, \dots, d_l$ . Además,  $\bar{x} \in X$  si y sólo si éste puede representarse como una combinación convexa de  $x_1, x_2, \dots, x_k$  más una combinación de  $d_1, d_2, \dots, d_l$ , esto es,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, k \\ \mu_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, l\end{aligned}\tag{2.2}$$

## 2.3 Desarrollo del método simplex

Ahora se procederá a presentar el método simplex que como ya se mencionó fue desarrollado por Dantzig en 1947. Se mostrará que si una solución óptima existe, entonces un punto extremo óptimo también existe. Los puntos extremos estarán caracterizados en términos de soluciones básicas factibles. Entonces se describirá el método simplex para mejorar estas soluciones hasta que se alcance su valor óptimo o bien hasta que se concluya que el valor óptimo es no acotado.

### 2.3.1 Puntos extremos y optimalidad

Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & \mathbf{cx} \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_k$  los puntos extremos del conjunto de restricciones  $X$  y sean  $d_1, d_2, \dots, d_l$  las direcciones extremas del conjunto de restricciones. Por el teorema de Representación se sabe que cualquier punto  $x$  tal que  $Ax = b$  y  $x \geq 0$  se puede representar como

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^l \mu_j \mathbf{d}_j$$

donde:

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, l$$

Por lo tanto, el problema de programación lineal se puede transformar en un problema en las variables  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ , resultando en el siguiente programa lineal

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}\mathbf{x}_j) \lambda_j + \sum_{j=1}^l (\mathbf{c}\mathbf{d}_j) \mu_j$$

$$\text{Sujeto a} \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, l$$

Como las  $\mu_j$ 's pueden ser arbitrariamente grandes, el mínimo es  $-\infty$  si para algún  $j$   $\mathbf{c}\mathbf{d}_j < 0$ . Si  $\mathbf{c}\mathbf{d}_j \geq 0$  para toda  $j = 1, 2, \dots, l$ , entonces se puede escoger a  $\mu_j$  como

cero para toda  $j = 1, 2, \dots, l$ . Con el propósito de minimizar  $\sum_{j=1}^k (\mathbf{c}\mathbf{x}_j) \lambda_j$  sobre

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , satisfaciendo  $\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k$  y  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ , simplemente se encuentra el mínimo  $\mathbf{c}\mathbf{x}_r$ , digase  $\mathbf{c}\mathbf{x}_r$  con  $\lambda_r = 1$  y las otras  $\lambda_j$ 's iguales a cero.

### 2.3.2 Soluciones básicas factibles

En esta sección se introducen las soluciones básicas factibles y se muestra como éstas corresponden a puntos extremos.

Considere el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $m \times n$  y  $\mathbf{b}$  es un vector de  $m$  componentes. Suponga que el rango  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{rango}(\mathbf{A}) = m$ . Sea  $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$  donde  $\mathbf{B}$  es una matriz de  $m \times m$  invertible y  $\mathbf{N}$  es una matriz  $m \times (n - m)$ . La

solución  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$  de las ecuaciones  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  y  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$

es llamada una *solución básica* del sistema. Si  $x_B \geq 0$ , entonces  $x$  es llamada una *solución básica factible* del sistema. Aquí  $B$  es llamada *matriz básica* (o simplemente la base) y  $N$  es llamada la *matriz no básica*. Las componentes de  $x_B$  son llamadas *variables básicas* y las componentes de  $x_N$  son llamadas *variables no básicas*. Si  $x_B > 0$ , entonces  $x$  es llamada una *solución básica factible no degenerada* y si al menos un componente de  $x_B$  es cero, entonces  $x$  es llamada una *solución básica factible degenerada*.

### 2.3.3 Correspondencia entre soluciones básicas factibles y puntos extremos

Para la demostración de los teoremas enunciados en esta sección, se puede consultar M. Bazaraa [1] cap. 3 sección 2 y a G. Hadley [4], cap.3 sección 10.

En esta sección se establece que la colección de soluciones básicas factibles y la colección de puntos extremos son equivalentes, esto es, un punto es una solución básica factible si y sólo si es un punto extremo. Lo que esto indica es que si un problema de programación lineal con un valor óptimo finito tiene una solución óptima en un punto extremo, entonces siempre se puede encontrar una solución básica factible óptima para tales problemas.

Cada solución básica factible es equivalente a un punto extremo. Sin embargo, puede existir más de una base que corresponda a la misma solución básica factible o punto extremo. Un caso de este tipo puede ocurrir en presencia de la degeneración.

**Teorema 1.** La colección de puntos extremos corresponde a la colección de soluciones básicas factibles y ambos son no vacíos, ya que la región de soluciones factibles es no vacía.

**Teorema 2.** Suponga que la región de soluciones factibles es no vacía. Entonces existe una solución óptima finita si y sólo si  $d_j \geq 0$  para  $j=1,2,\dots,l$ , donde  $d_1, \dots, d_l$  son las direcciones extremas de la región de soluciones factibles. De otra forma, el valor de la solución óptima es no acotado.

**Teorema 3.** Si existe una solución óptima, entonces existe un punto extremo óptimo.

**Teorema 4.** A cada punto extremo (o solución básica factible) le corresponde una base (no necesariamente única) y de manera inversa, a cada base le corresponde un (único) punto extremo. Además si un punto extremo puede representarse con más de una base, entonces se dice que éste es degenerado.

Esta metodología señala que para encontrar la solución óptima, bastaría con listar todas las soluciones básicas factibles y escoger aquella con el mínimo valor de la función objetivo. Sin embargo, el número de soluciones básicas factibles puede resultar bastante grande y además este método no dice si el problema tiene una solución no acotada o si el conjunto de soluciones factibles es vacío, sino hasta haber extraído  $m$  columnas de las  $n$  de la matriz  $A$  y no poder encontrar una solución básica factible.

El método simplex proporciona un método inteligente que lleva de un punto extremo a otro siempre con un mejor valor de la función objetivo. También descubre si la región factible es vacía y si la solución es no acotada.

La clave del método simplex consiste en reconocer la optimalidad de una solución en un punto extremo basado en consideraciones locales sin tener que (globalmente) enumerar todos los puntos extremos.

Considere el siguiente problema de programación lineal

Minimizar  $\mathbf{c}\mathbf{x}$

Sujeto a:  $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$   
 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $m \times n$  con rango  $m$ . Suponga que se tiene una solución

básica factible  $\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  cuyo valor objetivo  $z_0$  está dado por

$$z_0 = \mathbf{c} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N) \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.3)$$

Donde  $\mathbf{c}_B$  y  $\mathbf{c}_N$  son los coeficientes de costo correspondientes a las variables básicas y no básicas. Sean  $\mathbf{x}_B$  y  $\mathbf{x}_N$  los conjuntos de variables básicas y no básicas para la base dada. Para que sea factible se requiere que  $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$  y que  $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N$ . Multiplicando la última ecuación por  $\mathbf{B}^{-1}$  y reorganizando términos se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in R} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j \\ &= \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in R} (\mathbf{y}_j) x_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $R$  es el conjunto de índices de las variables no básicas,  $\mathbf{a}_j$  representa las columnas de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$  y  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ . Si  $Z$  denota el valor de la función objetivo, se tiene

$$\begin{aligned}
z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\
&= \mathbf{c}_B(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in R} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j) + \sum_{j \in R} c_j x_j \\
&= z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j
\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $z_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$  para cada variable no básica. Utilizando las transformaciones anteriores, el problema de programación lineal puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } z &= z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \\
\text{Sujeto a } \sum_{j \in R} (y_j) x_j + \mathbf{x}_B &= \bar{\mathbf{b}} \\
x_j &\geq 0, j \in R \text{ y } \mathbf{x}_B \geq 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Los valores  $(z_j - c_j)$  son llamados coeficientes de costo reducido. La forma (2.6), en la cual la función objetivo  $z$  y las variables básicas  $\mathbf{x}_B$  se resuelven en términos de las variables no básicas es conocida como la forma explícita del problema de programación lineal. Dado que el segundo término de la función objetivo del problema (2.6) tiene un signo negativo, el resultado clave es el siguiente:

$$\text{Si } (z_j - c_j) \leq 0 \text{ para toda } j \in R, \tag{2.7}$$

entonces la solución factible básica actual es óptima, ya que no hay forma de hacer más pequeño el valor de la función objetivo.

Dada una solución factible y una base, el valor de la función objetivo se puede mejorar si  $(z_k - c_k) > 0$  para alguna variable no básica  $x_k$ , o parar con una solución óptima si  $(z_j - c_j) \leq 0$  para todas las variables no básicas. Si  $(z_k - c_k) > 0$  y el vector  $\mathbf{y}_k = \sum_{j \in R} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$  contiene al menos un componente positivo, entonces el incremento en  $x_k$  será bloqueado por una de las variables básicas actuales, lo cual hace que se vuelva cero y deje la base. Por el otro lado, si  $(z_k - c_k) > 0$  y  $\mathbf{y}_k \leq 0$ , entonces  $x_k$  se puede incrementar de manera indefinida y el valor de la solución óptima es no acotado  $(-\infty)$ . Esto es exactamente lo que el método simplex hace.

Considere el siguiente problema de programación lineal

Minimizar  $\mathbf{c}\mathbf{x}$

Sujeto a:  $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$   
 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $m \times n$  con rango  $m$ .

## 2.4 El algoritmo simplex

Paso inicial

Escoja una solución factible básica con base  $\mathbf{B}$

Principales pasos

1. Resuelva el sistema  $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$  (con solución única  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}$ ). Sea  $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ ,  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  y  $z = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B$ .
2. Resuelva el sistema  $\mathbf{w}\mathbf{B} = \mathbf{c}_B$  (con solución única  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ , (el vector  $\mathbf{w}$  se conoce como el vector de multiplicadores del simplex porque sus componentes son los multiplicadores de los renglones de  $\mathbf{A}$  que se agregan a la función objetivo, a fin de llevarla a su forma canónica). Calcule  $(z_j - c_j) = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$  para todas las variables no básicas. Sea

$$z_k - c_k = \underset{j \in R}{\text{Máximo}} \{z_j - c_j\}$$

donde  $R$  es el conjunto de índices asociados con las variables no básicas. Si  $(z_k - c_k) \leq 0$ , entonces pare con la solución factible básica actual como una solución óptima. De otra forma vaya al paso 3 con  $x_k$  como la variable que entra.

3. Resuelva el sistema  $\mathbf{B}\mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$  (con solución única  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ ). Si  $y_k \leq 0$  entonces pare con la conclusión de que la solución óptima es no acotada a lo largo del rayo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_k \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

donde  $\mathbf{e}_i$  es un vector de tamaño  $n-m$  de ceros excepto para un 1 en la posición  $k$ -ésima. Si  $y_k$  no es menor o igual a cero, vaya al paso 4.

4. Deje que  $x_k$  entre a la base. El índice  $r$  de la variable bloqueada  $x_B$ . La cual deja que la base sea determinada por la siguiente prueba del mínimo radio

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Mínimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

actualice la base  $\mathbf{B}$  donde  $\mathbf{a}_k$  reemplaza a  $\mathbf{a}_{B_r}$ , actualice el conjunto de índices  $R$  y repita el paso 1.

### Teorema de Convergencia finita del método simplex

En ausencia de degeneración (y suponiendo factibilidad), el método simplex se detiene en un número finito de iteraciones, ya sea con una solución factible básica óptima o con la conclusión de que el valor óptimo es no acotado. De igual forma cuando existe degeneración se puede garantizar que el método simplex se detiene en un número finito de iteraciones siempre y cuando se cumplan ciertas reglas que permitan romper la ciclicidad que se genera en presencia de degeneración.

### El método simplex en formato de tableau

Esta forma de expresar el método simplex permite el manejo de toda la información para desarrollar el método iterativo, sin tener que arrastrar con los nombres de las variables, tan sólo con el valor de los coeficientes. A continuación se presenta un resumen del mismo.

#### Paso inicial

Encuentre una solución básica factible con base  $\mathbf{B}$ , forme el siguiente tableau inicial.

	Z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	RHS
Z	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\bar{\mathbf{b}}$

#### Paso principal

Sea  $z_k - c_k = \text{Máximo}\{z_j - c_j : j \in R\}$ . Si  $z_k - c_k \leq 0$ , entonces pare, la solución es óptima. De otra forma examine  $\mathbf{y}_k$ . Si  $\mathbf{y}_k \leq 0$ , entonces pare, la solución óptima es no acotada a lo largo del rayo

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

donde  $\mathbf{e}_k$  es un vector de ceros, excepto por un 1 en la posición  $k$ -ésima. Si  $\mathbf{y}_k$  no es menor o igual a cero, determine el índice  $r$  como sigue:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{Mínimo} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Actualice el tableau al hacer las operaciones de pivotación en  $y_{rk}$ . Actualice las variables básicas y no básicas donde  $x_k$  entra a la base y  $x_B$  deja la base, repita el paso principal.

## 2.5 Simplex revisado

El método simplex revisado es otra forma de expresar el algoritmo simplex. No se trata de otro algoritmo para resolver problemas lineales, sino del mismo descrito anteriormente, sigue los mismos pasos que el método simplex, solamente que guarda la información necesaria en un arreglo de menor tamaño, lo cual reduce el la cantidad de operaciones que se realizan en cada iteración para ciertos valores de  $m$  y  $n$ .

Este método resulta especialmente útil para resolver problemas lineales caracterizados por un gran número de variables o para aquellos en los que no se tienen de manera explícita las  $y_k$ , ya que la versión anterior del simplex incluye todas las variables, aunque en realidad sólo una de ellas es fundamental (aquella que entra a la base), además de que nos servirá de base para desarrollar el algoritmo de descomposición, el cual reviste singular relevancia en este trabajo, ya que el modelo que se presenta es de dimensiones considerables.

El algoritmo del simplex revisado es una nueva versión que primero calcula los costos reducidos y luego genera una única columna de la tabla, aquélla con costo reducido negativo que se desea introducir en la base. Para ello es necesario disponer explícitamente de  $\mathbf{B}^{-1}$ . A continuación se presenta un resumen del método.

Pasos del Método Simplex (Problema de minimización)

Paso inicial

Encuentre una solución básica factible con base inversa  $\mathbf{B}^{-1}$ . Calcule  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$  y forme el siguiente arreglo (llamado el tableau del simplex revisado)

Base inversa	RHS
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Paso principal

Para cada variable no básica, calcule  $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j$ .

Sea  $z_k - c_k = \text{Máximo}\{z_j - c_j\}$ . Si  $z_k - c_k \leq 0$ , entonces pare, la solución es óptima. De otra forma examine  $y_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ . Si  $y_k \leq 0$ , entonces pare, la solución óptima es no acotada. Si  $y_k \neq 0$ , inserte la columna  $\begin{bmatrix} z_k - c_k \\ y_k \end{bmatrix}$  a la derecha del tableau, lo que conduce al siguiente tableau.

Base inversa	RHS
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{b}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{b}$

$x_k$
$z_k - c_k$
$y_k$

Determine el índice  $r$  como sigue:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{\text{Índice}}{\text{Mínimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Hacer las operaciones de pivotación en  $y_{rk}$ . Esto actualiza la tabla. Ahora la columna correspondiente a  $x_k$  se elimina por completo del tableau y se repite el paso principal.

## 2.6 Dualidad

El concepto de dualidad genera una metodología alternativa y complementaria para resolver un problema lineal respecto a la presentada anteriormente. Para cada problema lineal que se resuelve, existe otro problema lineal asociado que se resuelve de manera simultánea. De aquí en adelante, se denominará al problema original de programación lineal como el primal y al problema asociado a este problema, el dual. Este nuevo problema lineal satisface propiedades muy importantes. Se puede usar para obtener la solución al programa original. Sus variables contienen información útil acerca de la solución del problema original. Es particularmente útil para resolver problemas lineales que tienen más restricciones que variables, ya que el número de iteraciones del método simplex está en función del número de restricciones y no en el número de variables.

Hay dos definiciones de dualidad, la canónica y la estándar, las cuales son equivalentes y se muestran a continuación.

### Definición de dualidad: Problema en forma canónica

Suponga que el problema lineal primal está dado en la forma canónica por:

P: Minimizar  $\mathbf{c}\mathbf{x}$   
 Sujeto a  $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$   
 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

entonces el programa lineal dual está definido por:

D: Maximizar  $wb$

Sujeto a:  $wA \leq c$   
 $w \geq 0$

Donde el vector  $w$  corresponde a las variables duales, de tal forma que si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ ,  $x$  será un vector de dimensión  $n \times 1$  y  $w$  será de dimensión  $1 \times m$ . Note que hay exactamente una variable dual por cada restricción primal y exactamente una restricción del dual para cada variable del primal. En términos generales se podría resumir lo siguiente:

- i. Cada restricción en un problema corresponde a una variable en el otro
- ii. Los elementos del lado derecho de las restricciones en un problema son iguales a los coeficientes respectivos de la función objetivo en el otro
- iii. Un problema busca maximizar y el otro minimizar
- iv. El problema de maximización tiene restricciones del tipo menor o igual y el problema de minimización tiene restricciones del tipo mayor o igual.
- v. Las variables en ambos problemas son no negativas.

#### **Definición de dualidad: Problema en forma estándar**

Se puede hacer otra definición equivalente de dualidad cuando el programa lineal primal se encuentra en su forma estándar, tal como se muestra enseguida:

P: Minimizar  $Cx$

Sujeto a  $Ax = b$   
 $x \geq 0$

entonces el programa lineal dual está definido por:

D: Maximizar  $wb$

Sujeto a:  $wA \leq c$   
 $w$  irrestricto

Un resultado importante, lo constituye el siguiente:

#### **Lema 2.6.1**

El dual del dual es el primal.

Lo que indica este lema, es que las definiciones de dualidad, se pueden aplicar en reversa. Este lema es conocido como la propiedad involutoria de la dualidad.

Ejemplo: Considere el siguiente programa lineal y su dual

P: Minimizar  $6x_1 + 8x_2$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 &= 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

D: Maximizar  $4w_1 + 7w_2$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 3w_1 + 5w_2 &\leq 6 \\ w_1 + 2w_2 &\leq 8 \\ -w_1 &\leq 0 \\ -w_2 &\leq 0 \\ w_1, w_2 &\text{ irrestrictos} \end{aligned}$$

Relaciones entre los problemas primal y dual

	Problema de Minimización		Problema de Maximización	
Variables	$\geq 0$	$\longleftrightarrow$	$\leq$	Restricciones
	$\leq 0$	$\longleftrightarrow$	$\geq$	
	Irrestringido	$\longleftrightarrow$	$=$	
Restricciones	$\geq$	$\longleftrightarrow$	$\geq 0$	Variables
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	$\leq 0$	
	$=$	$\longleftrightarrow$	Irrestringido	

Relaciones entre el Primal y el Dual

La definición para el problema dual conduce a varias relaciones importantes entre los programas lineales primales y duales.

## Relación entre los valores de la función objetivo

Considere la forma canónica de dualidad y sean  $x_0$  y  $w_0$  cualesquiera soluciones factibles a los programas primal y dual respectivamente. Entonces  $Ax_0 \geq b, x_0 \geq 0, w_0A \leq c$  y  $w_0 \geq 0$ . Multiplicando  $Ax_0 \geq b$  por el lado izquierdo por  $w_0 \geq 0$  y  $w_0A \leq c$  por la derecha por  $x_0 \geq 0$ , se obtiene

$$cx_0 \geq w_0Ax_0 \geq w_0b$$

lo cual implica

$$cx_0 \geq w_0b$$

Esto se puede resumir en el siguiente lema, que es conocido como la propiedad de la dualidad débil.

### Lema 2.6.2

El valor de la función objetivo para cualquier solución factible al problema de minimización siempre es mayor o igual que el valor de la función objetivo para cualquier solución factible al problema de maximización. De manera similar el valor objetivo de cualquier solución factible al problema de maximización es una cota inferior del objetivo óptimo del problema de minimización.

### Corolario 2.6.1

Si  $x_0$  y  $w_0$  son soluciones factibles a los problemas primal y dual tales que  $cx_0 = w_0b$ , entonces  $x_0$  y  $w_0$  son soluciones óptimas a sus respectivos problemas.

### Corolario 2.6.2

Si alguno de los problemas tiene un valor objetivo no acotado, entonces el otro problema no tiene solución factible.

### Lema 2.6.3

Si uno de los problemas tiene una solución óptima, entonces ambos problemas tienen soluciones óptimas y los valores objetivo óptimos de los dos son iguales.

Los resultados presentados previamente, se pueden resumir en el siguiente:

### Teorema fundamental de Dualidad

Con respecto a los problemas de programación lineal primal y dual, exactamente uno de los siguientes enunciados es cierto.

1. Ambos problemas tienen soluciones óptimas  $x^*$  y  $w^*$  tales que  $cx^* = w^*b$
2. Un problema tiene un valor objetivo no acotado, en cuyo caso el otro problema debe ser infactible
3. Ambos problemas son infactibles

## 2.7 El principio de descomposición

En esta sección se presenta el principio de descomposición sobre el cual están basados varias técnicas de descomposición como la de Dantzig-Wolfe y sus relaciones con el particionamiento de Bender, así como las técnicas de relajación Lagrangianas para tratar con problemas de programación lineal de gran escala o con una estructura especial. No es raro encontrarse con modelos corporativos o con modelos de logística que manejan problemas con miles de restricciones y un número ilimitado de variables, tal como el problema que se presenta en este trabajo. Estas técnicas serán referidas como el principio de descomposición.

El principio de descomposición es un procedimiento sistemático en el cual, las restricciones se dividen en dos conjuntos: restricciones generales y restricciones con estructura especial. De esta manera, la estrategia de este procedimiento consiste en operar sobre dos programas lineales separados: uno sobre el conjunto general de restricciones y otro sobre el conjunto de restricciones especiales. La información de ambos fluye entre los dos programas lineales hasta el punto en que se encuentre una solución al problema original.

El programa lineal sobre las restricciones generales se le llama problema maestro y el programa lineal sobre las restricciones especiales se le llama subproblema. El problema maestro pasa un conjunto nuevo de coeficientes de costo al subproblema y recibe una columna nueva basada en estos coeficientes de costo. Para desarrollarlo se hace uso tanto del algoritmo simplex revisado como del principio de dualidad.

### 2.7.1 El Algoritmo de descomposición

Considere el siguiente programa lineal, donde  $X$  es un poliedro que representa las restricciones de la estructura especial,  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $b$  es un vector de  $m$  componentes.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{cx} \\ \\ \text{Sujeto a:} & \mathbf{Ax=b} \\ & \mathbf{x \in X} \end{array}$$

Para simplificar, suponga que  $X$  es acotado. Como  $X$  es un politopo, entonces por el Teorema de Representación (sección 2.2.2), cualquier punto  $x \in X$  puede representarse como una combinación convexa de un número finito de puntos extremos de  $X$ . Sean esos puntos  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , entonces, cualquier  $x \in X$  puede representarse como

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^t \lambda_j \mathbf{x}_j$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, t$$

Sustituyendo para  $\mathbf{x}$ , el problema anterior de optimización se puede transformar en el llamado problema maestro en las variables  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ .

Minimizar  $\sum_{j=1}^t (\mathbf{c}\mathbf{x}_j) \lambda_j$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^t (\mathbf{A}\mathbf{x}_j) \lambda_j = \mathbf{b}$$

(2.9)

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, t$$

Como  $t$ , el número de puntos extremos de conjunto  $X$ , usualmente es muy grande el intentar explícitamente enumerar todos los puntos extremos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t$  y resolver explícitamente este problema es una tarea muy difícil. En vez de esto, se intentará encontrar una solución óptima al problema sin necesidad de tener todos los puntos extremos.

## 2.7.2 Aplicación del método simplex revisado

Considere resolver el problema anterior con el método simplex revisado. Suponga que se tiene una solución factible básica  $\lambda = (\lambda_B, \lambda_N)$ . Además suponga que la base inversa  $\mathbf{B}^{-1}$  asociada de  $(m+1) \times (m+1)$  es conocida. Denotando las variables duales correspondientes a las ecuaciones (2.9) por  $\mathbf{w}$  y  $\alpha$ , se obtiene  $(\mathbf{w}, \alpha) = \hat{\mathbf{c}}_B \mathbf{B}^{-1}$ , donde  $\hat{\mathbf{c}}_B$  es el costo de las variables básicas con  $\hat{c}_j = \mathbf{c}\mathbf{x}_j$  para cada variable básica  $\lambda_j$ . A continuación se muestran la base inversa, las variables duales, los valores de las variables básicas y la función objetivo, donde

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Base inversa	RHS
$(\mathbf{w}, \alpha)$	$\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

El método simplex revisado al igual que el simplex convencional, es un método iterativo, el cual en cada iteración revisa si la solución actual es óptima o bien si se decide incrementar una variable no básica que mejore el valor de la función objetivo. Esto se hace calculando primero

$$\begin{aligned}
 z_k - \hat{c}_k &= \underset{1 \leq j \leq l}{\text{Máximo}} z_j - \hat{c}_j = \underset{1 \leq j \leq l}{\text{Máximo}} (\mathbf{w}, \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{Ax}_j \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{cx}_j \\
 &= \underset{1 \leq j \leq l}{\text{Máximo}} \mathbf{wAx}_j + \alpha - \mathbf{cx}_j
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como  $z_j - \hat{c}_j = 0$  para las variables básicas, entonces el valor máximo anterior es mayor o igual a cero. Si  $z_k - \hat{c}_k = 0$ , entonces  $z_j - \hat{c}_j \leq 0$  para todas las variables no básicas y la solución óptima está a la mano. Por otro lado, si  $z_k - \hat{c}_k > 0$ , entonces la variable no básica  $\lambda_k$  se puede incrementar.

Sin embargo, determinar el índice  $k$  utilizando directamente la ecuación (2.10) es computacionalmente infactible, porque  $l$  es muy grande y los puntos extremos  $\mathbf{x}_j$ 's correspondientes a las no básicas  $\lambda_j$ 's no son conocidos explícitamente. Por lo tanto se debe buscar un esquema alternativo. Como  $X$  es un politopo, el máximo de cualquier objetivo lineal se alcanza en uno de sus puntos extremos, por lo tanto,

$$\underset{1 \leq j \leq l}{\text{Máximo}} (\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x}_j + \alpha = \underset{\mathbf{x} \in X}{\text{Máximo}} (\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$$

Para resumir, dada una solución factible básica  $(\lambda_B, \lambda_N)$  con variables duales  $(\mathbf{w}, \alpha)$ , resuelva el siguiente subproblema lineal, el cual es "fácil" por la estructura especial de  $X$

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } (\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha \\
 &\text{Sujeto a } \mathbf{x} \in X
 \end{aligned}$$

Note que la función objetivo contiene una constante. Esto se maneja fácilmente al inicializar el valor de RHS para  $z$  en  $\alpha$  en lugar del valor normal de 0. Sea  $\mathbf{x}_k$  una solución óptima del subproblema previo con valor objetivo  $z_k - \hat{c}_k$ . Si  $z_k - \hat{c}_k = 0$ , entonces la solución factible básica  $(\lambda_B, \lambda_N)$  es óptima. De otra forma, si  $z_k - \hat{c}_k > 0$ , entonces la variable  $\lambda_k$  entra a la base. Como en el método simplex revisado, la columna correspondiente  $\begin{pmatrix} \mathbf{Ax}_k \\ 1 \end{pmatrix}$  se actualiza al premultiplicarla por

$\mathbf{B}^{-1}$ , dando  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Ax}_k \\ 1 \end{pmatrix}$ . Note que  $\mathbf{y}_k \leq 0$  no puede ocurrir ya que se supuso

que  $X$  era acotado, produciendo un problema maestro acotado. La columna actualizada  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$  se adjunta al *tableau* del simplex revisado. La variable  $\lambda_h$  que deja la base se determina por la prueba usual del ratio. La base inversa, las variables duales y el RHS se actualizan al hacer la pivotación en  $y_{rk}$ . Después de actualizar, el proceso se repite. Note que el paso maestro proporciona una mejor solución factible del problema global y que el subproblema verifica si  $z_j - \hat{c}_j \leq 0$  para toda  $\lambda_j$ , o de otra forma determina la  $z_k - \hat{c}_k$  más positiva

### Algoritmo de descomposición

#### Paso inicial

Encuentre una solución factible básica del sistema definido por las ecuaciones (2.9). Sea  $\mathbf{B}$  la base y fórmese el siguiente *arreglo maestro*, denotando las variables duales correspondientes a las ecuaciones (2.9) por  $\mathbf{w}$  y  $\alpha$ , se obtiene  $(\mathbf{w}, \alpha) = \hat{\mathbf{c}}_B \mathbf{B}^{-1}$ , con  $\hat{\mathbf{c}}_B$  el costo de las variables básicas y  $\hat{\mathbf{c}}_j = \mathbf{c}_j \mathbf{x}_j$ , para cada variable básica  $\lambda_j$  y  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Base inversa	RHS
$(\mathbf{w}, \alpha)$	$\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

#### Paso principal

1. Resuelva el siguiente subproblema

Maximizar  $(\mathbf{w}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$

Sujeto a  $\mathbf{x} \in X$

Sea  $\mathbf{x}_k$  una solución factible básica con un valor objetivo de  $z_k - \hat{c}_k$ . Si  $z_k - \hat{c}_k = 0$  pare; la solución factible básica del último paso maestro es una solución óptima del problema global. De otra forma vaya al paso 2.

2. Sea  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix}$  y agregue la columna actualizada  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$  al arreglo maestro. Haga las operaciones de pivotación en  $y_{rk}$ , donde el índice  $r$  se determina como:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{Minimo}_{1 \leq i \leq m+1} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Esto actualiza las variables duales, la base inversa y el lado derecho. Después de hacer las operaciones de pivotación, se borra la columna de  $\lambda_k$  y se repite el paso 1.

### 2.7.3 Comentarios al algoritmo de descomposición

1. Se puede demostrar que el algoritmo de descomposición es una derivación del método simplex revisado, por lo que el algoritmo converge en un número finito de iteraciones, dado que una regla preventiva de ciclos se utilice tanto en el paso maestro como en el subproblema cuando haya degeneración.
2. En cada iteración el paso maestro proporciona una nueva solución factible básica del sistema dado por las ecuaciones (2.9), al introducir la variable no básica  $\lambda_k$ , la cual es generada por el subproblema. En cada iteración el subproblema proporciona un punto extremo  $x_k$ , el cual corresponde a una columna actualizada  $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$
3. En cada iteración un vector dual diferente se pasa de un paso maestro al subproblema. Más que resolver el subproblema de nuevo en cada iteración, la base óptima de la última iteración se podría utilizar al modificar el renglón de costo.
4. En cada iteración el subproblema no necesita optimizarse completamente. Sólo es necesario que el punto extremo actual  $x_k$  satisfaga  $z_k - \hat{c}_k = (\mathbf{wA} - \mathbf{c})x_k + \alpha > 0$ . En este caso,  $\lambda_k$  es un candidato a entrar a la base del problema maestro.
5. Si las restricciones del problema maestro son del tipo de desigualdad, entonces se debe checar  $z_k - \hat{c}_k$  para las variables de holgura no básicas, además de resolver el subproblema. Para una restricción  $i$  del problema maestro del tipo  $\leq$  con las variables de holgura asociadas  $s_i$ , se obtiene

$$z_{s_i} - c_{s_i} = (\mathbf{w}, \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = w_i$$

Así para un problema de minimización una variable de holgura asociada con una restricción del tipo  $\leq$  es elegible para entrar a la base si  $w_i > 0$ . Para las restricciones del tipo  $\geq$  el criterio de entrada es  $w_i < 0$ .

### 2.7.4 Cálculo y uso de cotas inferiores

El algoritmo de descomposición se detiene cuando el máximo  $z_k - \hat{c}_k = 0$ . Debido al gran número de variables, continuar el cálculo hasta que esta condición se satisfaga podría consumir mucho tiempo para problemas grandes. Se puede

desarrollar una cota mínima sobre el objetivo de cualquier solución factible del problema global y así una cota inferior sobre el objetivo óptimo. Como el algoritmo de descomposición genera puntos factibles con valores objetivos que no se empeoran vía el problema maestro, se tiene una secuencia de cotas superiores no crecientes. De esta manera el procedimiento se puede finalizar cuando la diferencia entre el valor objetivo del punto factible actual y las cotas mínimas se encuentre dentro de una tolerancia aceptable. Esto tal vez no da el verdadero punto óptimo, pero garantizará unas soluciones factibles aceptables dentro de un rango deseable respecto del óptimo. Considere el siguiente subproblema

$$\text{Maximizar } (\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x}_k + \alpha$$

$$\text{Sujeto a } \mathbf{x} \in X$$

Donde  $\mathbf{w}$  es el vector dual que proviene del paso maestro. Sea el valor objetivo óptimo del subproblema anterior  $z_k - \hat{c}_k$  y sea  $\mathbf{x}$  cualquier solución factible del problema global, esto es  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  y  $\mathbf{x} \in X$ . Por definición de  $z_k - \hat{c}_k$  y como  $\mathbf{x} \in X$ , se tiene que

$$(\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x}_k + \alpha \leq (z_k - \hat{c}_k)$$

Como  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ , entonces esta desigualdad implica que

$$\mathbf{cx} \geq \mathbf{wAx} - (z_k - \hat{c}_k) + \alpha = \mathbf{wb} + \alpha - (z_k - \hat{c}_k) = \mathbf{c}_H \bar{\mathbf{b}} - (z_k - \hat{c}_k)$$

Como esto es cierto para cada  $\mathbf{x} \in X$  con  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ , entonces

$$\text{Mínimo}_{\substack{\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in X}} \mathbf{cx} \geq \mathbf{c}_H \bar{\mathbf{b}} - (z_k - \hat{c}_k)$$

Esto es,  $\mathbf{c}_H \bar{\mathbf{b}} - (z_k - \hat{c}_k)$  es una cota inferior sobre el valor objetivo óptimo del problema global, note que  $\mathbf{c}_H \bar{\mathbf{b}}$  es la mejor cota superior actual. Sin embargo, las cotas mínimas generadas no necesitan ser monótonas y se requeriría mantener la mejor cota inferior.

### 2.7.5 Ejemplo

Con el propósito de ejemplificar el algoritmo de descomposición, a continuación se detalla paso a paso un ejemplo numérico.

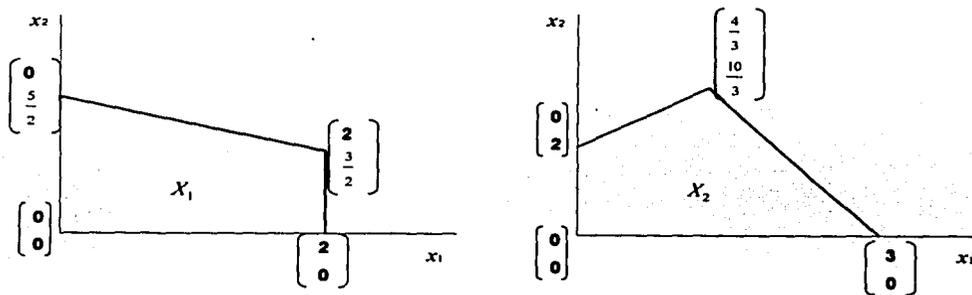
Considere el siguiente problema

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\
 \text{Sujeto a:} &&& x_1 + x_3 \leq 2 \\
 &&& x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 3 \\
 &&& x_1 \leq 2 \\
 &&& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
 &&& -x_3 + x_4 \leq 2 \\
 &&& 2x_3 + x_4 \leq 6 \\
 &&& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Nótese que la tercera y cuarta restricciones involucran sólo a  $x_1$  y  $x_2$ , mientras que la quinta y sexta restricciones involucran sólo a  $x_3$  y  $x_4$ . Si se deja que  $X$  contenga las últimas cuatro restricciones, además de las restricciones de no negatividad, entonces minimizando una función lineal sobre  $X$  se convierte en un simple proceso, ya que el subproblema puede ser descompuesto en dos suproblemas. Por lo tanto, se pueden manejar las primeras dos restricciones

como  $Ax \leq b$ , donde  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  y el resto de las

restricciones como  $X$ . Note que cualquier punto  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  en  $X$  debe tener sus primeras dos componentes y sus últimas dos componentes en los respectivos conjuntos  $X_1$  y  $X_2$  que se muestran en la gráfica 2.3.



Gráfica 2.3 Representación de  $X$  por dos conjuntos

### Paso inicial

El problema se reformula como sigue, donde  $x_1, x_2, \dots, x_t$  son los puntos extremos de  $X$ ,  $c_j = cx_j$  para  $j = 1, 2, \dots, t$  y  $s \geq 0$  es el vector de holgura.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^t c_j \lambda_j \\ \text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^t (\mathbf{A} \mathbf{x}_j) \lambda_j + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ & \sum_{j=1}^t \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, t \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Se necesita una base inicial con  $\mathbf{B}^{-1}$  conocida. Se supone que la base inicial consiste de  $\mathbf{s}$  y  $\lambda_1$  donde  $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0, 0)$  es un punto extremo de  $X$  con  $\mathbf{c} \mathbf{x}_1 = 0$ . Por lo tanto,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector  $(\mathbf{w}, \alpha) = \mathbf{c} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}$ , y  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix}$ . Esto da el siguiente

*tableau*. Note que las primeras tres columnas dan  $(w_1, w_2, \alpha)$  en el renglón 0 y  $\mathbf{B}^{-1}$  en los siguientes renglones.

	Base inversa			RHS
z	0	0	0	0
s <sub>1</sub>	1	0	0	2
s <sub>2</sub>	0	1	0	3
λ <sub>1</sub>	0	0	1	1

Iteración 1

Resolver el siguiente subproblema

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & (\mathbf{w} \mathbf{A} - \mathbf{c}) \mathbf{x} + \alpha \\ \text{Sujeto a} \quad & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

Aquí  $(w_1, w_2) = (0, 0)$  del arreglo anterior. Por lo tanto el subproblema es como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0 \\ \text{Sujeto a} \quad & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

Este problema es separable en los vectores  $(x_1, x_2)$  y  $(x_3, x_4)$  y se puede resolver geoméricamente. Usando la gráfica 2.3 se puede verificar que la solución óptima es  $x_2 = (2, \frac{3}{2}, 3, 0)$  con función objetivo  $z_2 - c_2 = \frac{17}{2} > 0$ , entonces se introduce  $\lambda_2$

correspondiente a  $x_2$ . La cota inferior =  $c_B \bar{b} - (z_2 - c_2) = 0 - \frac{17}{2}$ .

Paso maestro.

$$z_2 - c_2 = \frac{17}{2}$$

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} Ax_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se actualiza al premultiplicar por  $B^{-1}$ . Entonces

$$y_2 = B^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Insertando la columna

$$\begin{bmatrix} z_2 - c_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} \\ 5 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en el siguiente arreglo y llevando a cabo las operaciones de pivotación. Esto conduce a las siguientes dos *tableaux* (la columna  $\lambda_2$  se borra después de pivotar.)

	BASE INVERSA			RHS
Z	0	0	0	0
s <sub>1</sub>	1	0	0	2
s <sub>2</sub>	0	1	0	3
$\lambda_1$	0	0	1	1

$\lambda_2$
17/2
5
7
2
1

	BASE INVERSA			RHS
Z	$-\frac{17}{10}$	0	0	$-\frac{17}{5}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
s <sub>2</sub>	$-\frac{7}{10}$	1	0	$\frac{8}{5}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$

La solución factible mejor conocida del problema global está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \\ &= \frac{3}{5} (0, 0, 0, 0) + \frac{2}{5} (2, \frac{3}{2}, 3, 0) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0) \end{aligned}$$

La función objetivo es  $-\frac{17}{5}$ . También  $(w_1, w_2, \alpha) = (-\frac{17}{10}, 0, 0)$

Iteración 2

Como  $w_1 < 0$ ,  $s_1$  no es elegible para entrar a la base en este momento

Resuelva el siguiente subproblema

Maximizar  $(\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$   
 Sujeto a  $\mathbf{x} \in X$

$$\mathbf{wA} - \mathbf{c} = (-\frac{17}{10}, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2, -1, -1, 1) = (\frac{3}{10}, 1, -\frac{7}{10}, -1)$$

Por lo tanto, el subproblema es

$$\text{Maximizar } \frac{3}{10}x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 - x_4 + 0$$

Sujeto a  $x \in X$

El problema se descompone en dos problemas que involucran a  $(x_1, x_2)$  y  $(x_3, x_4)$ . Utilizando la gráfica 2.3, la solución óptima si  $x_3 = (0, \frac{5}{2}, 0, 0)$  con

función objetivo  $z_3 - c_3 = \frac{5}{2}$ . Como  $z_3 - c_3 > 0$ , entonces se introduce  $\lambda_3$ .

La cota inferior es  $= \hat{c}_H \bar{b} - (z_3 - c_3) = -\frac{17}{5} - \frac{5}{2} = -5.9$ .

Paso maestro

$$z_3 - c_3 = \frac{5}{2}$$

$$Ax_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$y_3 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{10} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Insertando la columna  $\begin{bmatrix} z_3 - c_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$  en el siguiente arreglo y haciendo las operaciones

de pivotación. Esto conduce a las siguientes dos *tableaux* (la columna  $\lambda_3$  se borra después de llevar a cabo las operaciones de pivotación.)

	BASE INVERSA			RHS
Z	$-\frac{17}{10}$	0	0	$-\frac{17}{5}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
$s_2$	$-\frac{7}{10}$	1	0	$\frac{8}{5}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$

$\lambda_3$
$\frac{5}{2}$
0
$\frac{5}{2}$
<b>1</b>

	BASE INVERSA			RHS
Z	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{49}{10}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
$s_2$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{10}$
$\lambda_3$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$

La solución factible del problema global está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 \\ &= \frac{2}{5} \left( 2, \frac{3}{2}, 3, 0 \right) + \frac{3}{5} \left( 0, \frac{5}{2}, 0, 0 \right) = \left( \frac{4}{5}, \frac{21}{10}, \frac{6}{5}, 0 \right) \end{aligned}$$

La función objetivo es  $-4.9$ . También  $(w_1, w_2, \alpha) = \left( -\frac{6}{5}, 0, -\frac{5}{2} \right)$

Iteración 3

Como  $w_1 < 0$ ,  $s_1$  no es elegible para entrar a la base en este momento

Resuelva el siguiente subproblema

Maximizar  $(\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x} + \alpha$

Sujeto a  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$$\mathbf{wA} - \mathbf{c} = \left( -\frac{6}{5}, 0 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2, -1, -1, 1) = \left( \frac{4}{5}, 1, -\frac{1}{5}, -1 \right)$$

Por lo tanto, el subproblema es

$$\text{Maximizar } \frac{4}{5}x_1 + x_2 - \frac{1}{5}x_3 - x_4 - \frac{5}{2}$$

Sujeto a  $x \in X$

Utilizando la gráfica 2.3, la solución óptima si  $x_4 = (2, \frac{3}{2}, 0, 0)$  con función objetivo  $z_4 - c_4 = \frac{3}{5} > 0$ , entonces se introduce  $\lambda_4$ .

La cota inferior está dada por  $c_B \bar{b} - (z_4 - c_4) = -\frac{49}{10} - \frac{3}{5} = -5.4$ .

Paso maestro

$$z_4 - c_4 = \frac{3}{5}$$

$$Ax_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

La columna actualizada  $y_4$  está dada por

$$y_4 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Insertando la columna  $\begin{bmatrix} z_4 - c_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$  en el siguiente arreglo y haciendo las operaciones de pivotación. Esto conduce a las siguientes dos *tableaux* (la columna  $\lambda_4$  se borra después de llevar a cabo las operaciones de pivotación.)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

	BASE INVERSA		RHS	
$z$	$-\frac{6}{5}$	$0$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{49}{10}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{5}$	$0$	$0$	$\frac{2}{5}$
$s_2$	$-\frac{1}{5}$	$1$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{10}$
$\lambda_3$	$-\frac{1}{5}$	$0$	$1$	$\frac{3}{5}$

$\lambda_4$
$\frac{3}{5}$
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{5}$
$\frac{3}{5}$

	BASE INVERSA		RHS	
$z$	$-1$	$-1$	$0$	$-5$
$\lambda_2$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\lambda_4$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{25}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\lambda_3$	$0$	$-1$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$

La solución factible mejor conocida del problema global está dada por:

$$x = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$$

$$= \frac{1}{3} \left( 2, \frac{3}{2}, 3, 0 \right) + \frac{1}{2} \left( 0, \frac{5}{2}, 0, 0 \right) + \frac{1}{6} \left( 2, \frac{3}{2}, 0, 0 \right) = (1, 2, 1, 0)$$

La función objetivo es  $-5$ . También  $(w_1, w_2, \alpha) = (-1, -1, 0)$

Iteración 4

Como  $w_1 < 0$  y  $w_2 < 0$ ,  $s_1$  y  $s_2$  no son elegibles para entrar a la base en este momento

Resuelva el siguiente subproblema

Maximizar  $(wA - c)x + \alpha$

Sujeto a  $x \in X$

$$wA - c = (-1, -1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2, -1, -1, 1) = (0, 0, 0, -3)$$

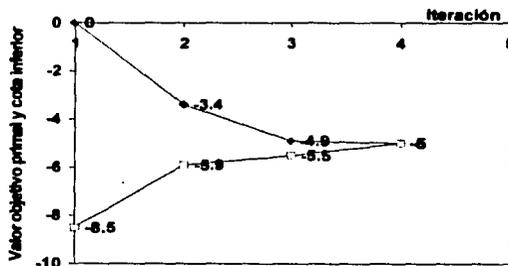
Por lo tanto, el subproblema es

Maximizar  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 0$   
Sujeto a  $x \in X$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Utilizando la gráfica 2.3, una solución óptima si  $x_5 = (0, 0, 0, 0)$  con función objetivo  $z_5 - c_5 = 0$ , lo cual indica el criterio de finalización. También note que la cota inferior está dada por  $c_H \bar{b} - (z_5 - c_5) = -5 - 0 = -5$ , lo cual es igual a la mejor solución conocida, esto es, ese ha encontrado la solución óptima y es igual a  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 0)$ .

El progreso de las cotas inferiores y de los valores objetivo de las soluciones factibles primales generadas por el algoritmo de descomposición se muestran en la gráfica 2.4, el óptimo se alcanza en la cuarta iteración. Si se tuviera interés en una solución aproximada, el procedimiento pudo haber sido detenido en la iteración tres, ya que se tenía una solución factible con un valor objetivo igual a  $-4.9$  y mientras tanto, se aseguraba (por la cota inferior) que no existían soluciones factibles con un valor objetivo menor que  $-5.4$ .



Gráfica 2.4 Progreso del valor objetivo primal y de la cota inferior

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Capítulo 3

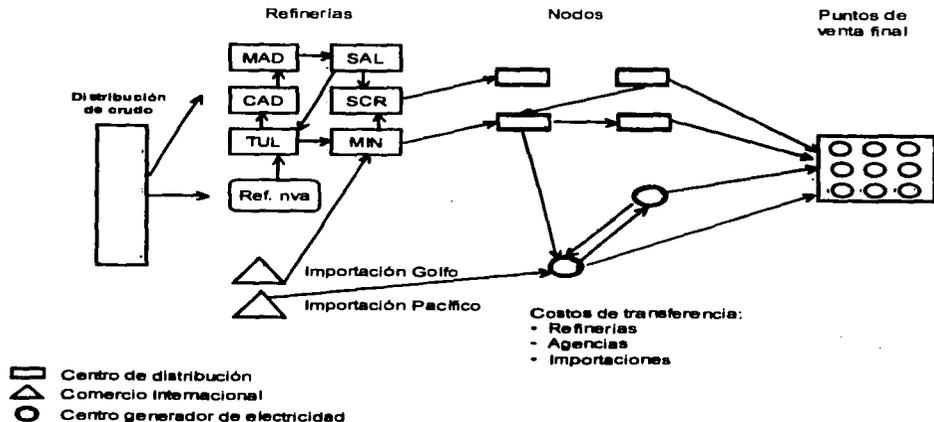
## Descripción del modelo

El perfil óptimo de inversiones en refinación depende entre otros, de la demanda de combustibles, de la demanda y localización de la oferta de energía eléctrica, de la infraestructura del sistema de refinación, de los precios de los productos en mercados internacionales y del crecimiento económico del país. Para determinar el nivel óptimo de inversión es necesario analizar todos los factores involucrados de manera simultánea; de ahí la necesidad de optimizar el suministro y distribución de combustibles en forma integrada, para lo cual se plantea un problema de programación lineal.

El modelo desarrollado, tiene una estructura muy detallada de la oferta de combustibles en México (refinerías existentes, posibilidades de expansión, importaciones), de la infraestructura y costos de la distribución de productos (ductos existentes y de inversión, movimientos por barco o autotanke, costos de transporte), de la demanda (por cliente, producto, demanda de energía, así como de su ubicación) y restricciones (limitaciones ambientales, balanza comercial).

En forma esquemática se podría plantear en la gráfica 3.1, donde el proceso inicia con la compra de crudo por parte de las refinerías, las que a su vez elaboran productos petrolíferos para su venta, algunos de los cuales son utilizados como materia prima para generar energía eléctrica que a su vez es vendida al consumidor final, mientras que el resto de los productos petrolíferos se venden al consumidor final, todo esto cumpliendo con las restricciones de producción disponibilidad de productos, restricciones ambientales, etc.

Gráfica 3.1 : Estructura general del Modelo



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### **3.1 Breve descripción de la función objetivo y del conjunto de restricciones**

El problema de programación lineal considerado tiene una función objetivo que consiste en minimizar los costos para satisfacer la demanda de energía del país y está integrada por los siguientes elementos:

**Sector gas natural:**

Costos de transporte

Costos de inversión en ductos nuevos, aumento de compresión

**Sector refinación:**

Inversión en refinarias adicionales, expansiones, plantas nuevas

Costos de producción

Costos de transporte de insumos y productos

Costos ambientales

**Sector industrial:**

Costo de uso alternativo de combustibles

Costos ambientales

**Sector eléctrico:**

Costos de operación

Inversión en plantas nuevas

Costo de uso alternativo de combustibles

Costo de operación de transmisión de electricidad

Inversión en líneas de transmisión

Costos ambientales

En lo que se refiere a las restricciones, se pueden clasificar como generales: aquellas que aplican, independientemente del sector considerado, y aquellas que son específicas a cada uno de los sectores considerados. Dentro de las primeras se consideran las siguientes:

- Limitaciones ambientales por región y por tipo de cliente
  - Niveles de  $\text{SO}_x^8$  para tres zonas: Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM), Zonas críticas y zonas no críticas, de acuerdo con la norma ambiental NOM-085<sup>9</sup>
  - Niveles de  $\text{NO}_x^{10}$  para dos zonas: ZMVM y el resto del país.
- Niveles de inversión por sector y total

---

<sup>8</sup> Óxidos de azufre

<sup>9</sup> Norma oficial mexicana

<sup>10</sup> Óxidos de nitrógeno

Para el sector refinación:

- Suministro de la demanda de productos petrolíferos en cada agencia de ventas
- Capacidad de cada una de las unidades que integran las refineries
- Limitaciones en el proceso y tipo de crudo
- Configuración de refineries
- Infraestructura y rutas disponibles de transporte: Ducto, autotank, carrotank y buquetank.
- Unidades de proceso
- Generación de energía
- Uso alternativo de combustibles
- Factores ambientales

Para el sector gas natural:

- Suministro doméstico de gas natural
- Capacidad de transporte actual
- Posibilidades de incremento de capacidad de transporte al agregar compresión
- Costo de instalar gasoductos nuevos
- Disponibilidad de importación de gas
- *Demanda de gas natural (sin sector eléctrico)*
- *Demanda incremental potencial de gas natural (sin sector eléctrico)*
  - *Curva de demanda por sitio*
  - *Volumen por sitio*
  - *Costo por conversión*

Y finalmente para el sector eléctrico, se tienen las siguientes restricciones:

- *Suministro de tres tipos de demanda de energía eléctrica: base, pico y base pico por cada nodo*
- Diferentes alternativas tecnológicas para plantas nuevas
- Suministro actual y pronosticado de fuentes que no utilizan combustibles fósiles (i.e., hidroeléctrica, nuclear, geotermia)
- Red simplificada de transmisión de electricidad
- Alternativas y costos de usos de combustibles alternativos
- Alternativas y costos para el cumplimiento de las normas ambientales

El problema de programación lineal considerado tiene

- 8, 326 restricciones
- 12, 942 variables
- 53 puntos de demanda
- 10 refineries (6 existentes, 4 potenciales)
- 25 nodos de generación de energía eléctrica
- 4 nodos de importación y 4 de exportación de productos petrolíferos
- Un nodo de importación de gas natural

El modelo está diseñado en una base promedio diario. Una vez resuelto el problema de programación lineal, el tipo de resultados que se espera encontrar son los siguientes:

**Por refinería**

- Proceso de crudo por refinería
- Composición de mezclas de crudo por refinería
- Volúmenes de producción de petrolíferos
- Utilización de plantas en cada refinería
- Compra y generación de servicios auxiliares

**Para la refinería nueva**

- Unidades construidas
- Monto de inversión requerido
- Configuración de la refinería
- Proceso de crudo y composición de la mezcla
- Elaboración de productos

**Por unidad de generación eléctrica**

- Combustible utilizado
- Costos de uso de combustibles alternativos

**Por agencia de ventas**

- Origen del producto

**Por cliente**

- Oferta de combustible
- Costo ambiental
- Costo por uso de combustibles alternativos

**Costo de servicio**

- Costos variables de operación,
- Importaciones (productos petrolíferos, gas natural)
- Inversión requerida por sector
- Distribución de productos óptima

## **3.2 Descripción de las ecuaciones del problema de programación lineal**

Como ya se mencionó, el modelo considerado consta de 8,326 restricciones y 12,942 variables. Por la magnitud del mismo, se vuelve muy compleja la descripción de la función objetivo, así como de las restricciones que integran el modelo. Por este motivo, se tratará de caracterizar diferentes tipos de variables y

de ecuaciones para mostrar el funcionamiento del modelo tanto para la función objetivo, como para las ecuaciones. Con el propósito de dar algunos ejemplos de cómo realmente se tienen estas restricciones, al final de la sección, se describirán con todo detalle un par de ecuaciones.

El modelo se puede escribir de la manera convencional de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

### 3.2.1 Función objetivo

Existe una nomenclatura básica para definir las variables que intervienen en el modelo, dado el tipo de *software* que se ha utilizado.

Por ejemplo para una refinería, las variables que definen las compras locales, tendrán siete caracteres y su nombre será de la forma *PURCtagm*, *PURC* por sus siglas en inglés se refiere a las compras, *tag* se refiere a la etiqueta del producto en cuestión y *m* al nodo correspondiente, mientras que las variables para compras globales tan sólo tendrán siete caracteres *PURCtag*. Para las transferencias entre plantas se utilizan variables de la forma *Ttagabc*, *T* indica transferencia, *tag* la etiqueta del producto considerado, mientras que *a* y *b* son las plantas origen y destino y *c* el modo de transporte.

Lo mismo aplica para las ventas que son representadas por *SELtagab*, de nuevo por sus siglas en inglés *SEL* se refiere a ventas.

En primer lugar se iniciará con la descripción de la función objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z = & - \sum_{yyy} P_{yyy} (PURC_{yyy}) - \sum_i \sum_{yyy} c_{yyy} (PURC_{yyy}_i) \\ & + \sum_k \sum_{xxx} P_{xxx} (SEL_{xxx}k) - \sum_j \sum_{xxx} c_{xxx} (SEL_{xxx}kj) \\ & - \sum_M \sum_l \sum_j \sum_{xxx} c_{xxx} (T_{xxx}j|lM) \end{aligned} \quad \dots (3.1)$$

Donde

*yyy* se refiere a los insumos nacionales e importados, incluyendo los recursos para invertir, catalizadores, energía eléctrica, materias primas, etc.

*i* representa las refinerías, puntos de importación (nodos de oferta)

$P_{yyy}$  es el precio de *yyy*

$C_{yyy}$  es el costo de transporte que se paga por mover  $yyy$  desde el origen hasta el nodo  $i$

$PURC_{yyy_i}$  representa las compras del insumo  $yyy$  en el nodo  $i$

$PURC_{yyy}$  representa las compras totales de  $yyy$

$k$  representa las agencias de ventas y nodos de exportación

$SEL_{xxxk}$  representa las ventas del producto  $xxx$  en la agencia  $k$

$SEL_{xxxkj}$  representa las ventas del producto  $xxx$  en la agencia  $k$  provenientes del nodo  $j$

$T_{xxxj|lM}$  representa las transferencias del producto  $xxx$  del nodo  $j$  al nodo  $l$  por el medio de transporte  $M$

$C_{xxxj|lM}$  es el costo de transporte del producto  $xxx$  del nodo  $j$  al nodo  $l$  por el medio de transporte  $M$

$M$  = autotanque, carrotanque, ducto y buquetanque.

Lo que indica esta expresión es que se busca minimizar el costo de suministro de productos petrolíferos y energía eléctrica en el país. En el anexo se muestran las listas completas de cada uno de los conceptos considerados, sin embargo a grandes rasgos se puede decir que el primer término de la expresión (3.1) cuantifica los gastos incurridos por compra de materia prima, servicios auxiliares, importación tanto de materias primas como de productos terminados y recursos para invertir, entre los más importantes.

El segundo término contabiliza los costos de transporte en que se incurre por mover de su lugar de origen las materias primas e importaciones a cada una de las refinерías del sistema, mientras que el tercer término de la ecuación calcula los ingresos por venta de productos petrolíferos y energía eléctrica en cada uno de los nodos del sistema. El cuarto y quinto componentes de la función objetivo representan costos incurridos en el transporte, el cuarto se refiere principalmente al costo de transporte incurrido por la exportación de productos, mientras que el último término representa los costos de transporte por mover los productos desde su origen hasta el punto de venta final, de acuerdo con el medio de transporte utilizado o la combinación de ellos.

### 3.2.2 Caracterización del conjunto de restricciones

En esta sección, se procederá a tipificar las ecuaciones que forman el programa de programación lineal bajo estudio, iniciando por las más sencillas. Existe cierta nomenclatura que se maneja en el modelo para caracterizar a las restricciones. Aquellas que inician con una E (por su sigla en inglés) son ecuaciones de igualdad, las que inician con una L (por su sigla en inglés) son del tipo menor o igual y las que inician con una G (por su sigla en inglés) son del tipo mayor o igual. Las que inician con VBAL o WBAL se refieren a ecuaciones de balance de materia y representan igualdades. UBAL se refiere al balance de servicios auxiliares y

también representan igualdades. CCAP se refiere al control de las capacidades de plantas y es del tipo menor o igual.

### 3.2.2.1 Igualdades

A continuación se muestran algunas restricciones. Se iniciará con las llamadas ecuaciones de balance:

#### 1. Compras de insumos:

$$\underbrace{EPURC_{xxx}}_{\text{Nombre de la ecuación}} \quad \underbrace{PURC_{xxx}}_{\text{Nombre de la variable}} = \sum_i PURC_{xxx_i}$$

Donde

$xxx$  representa los insumos nacionales e importados

$PURC_{xxx}$  representa las compras totales del insumo  $xxx$

$PURC_{xxx_i}$  representa las compras del insumo  $xxx$  en el nodo  $i$

$i$ =refinerías y nodos de importación.

Esta ecuación es de las más sencillas y lo que hace es ir agregado las compras de insumos requeridos por cada refinería y su resultado representa las compras totales de un insumo en particular en todo el sistema, por ejemplo si el insumo fuera el crudo Maya, el lado derecho de la ecuación representaría el consumo requerido de crudo Maya en las refinerías de Tula, Salamanca, etc. y el lado izquierdo de la ecuación indicaría el crudo Maya requerido en todo el sistema.

#### 2. Ventas en volumen en las agencias de ventas cuando son suministradas desde nodos diferentes

$$ESEL_{xxxk}: SEL_{xxxk} = \sum_j SEL_{xxxkj}$$

Donde

$xxx$  representa los productos vendidos en agencia de venta

$SEL_{xxxkj}$  representa las ventas del producto  $xxx$  en la agencia  $k$  provenientes del nodo  $j$

$k$ =agencias de ventas

Esta ecuación indica cuánto se vendió del producto en cuestión en una agencia dada y se obtiene al sumar los envíos del producto desde diferentes nodos. Por ejemplo, la agencia  $k$  puede representar un punto de exportación en el área del Golfo de México,  $xxx$  podría referirse al diesel y podría  $j$  ser Minatitlán o Madero, de tal forma que el lado derecho de la ecuación indicaría la suma del volumen exportado de diesel proveniente de la refinería de Minatitlán y del volumen

proveniente de Madero, mientras que el lado derecho indicaría el resultado de la suma, el cual muestra el volumen total de exportaciones de diesel en el área del Golfo de México.

### 3. Ventas en volumen en cada una de las agencias de ventas

$$VBAL_{xxxkl}: SEL_{xxxkl} = \sum_j T_{xxxj|l}M \quad \forall k \in \{Agencias\}$$

Donde

*xxx* representa los productos vendidos en agencia de venta

*VBAL<sub>xxxkl</sub>* representa el balance del producto *xxx* en el nodo *l*

*SEL<sub>xxxkl</sub>* representa las ventas totales del producto final *xxx* en la agencia *k* provenientes del nodo *l*

*T<sub>xxxj|l</sub>**M* representa las transferencias del producto *xxx* provenientes de los nodos *j* hacia el nodo *l* por el medio de transporte *M*

*i*=agencias de ventas

*M*=autotanque, carrotanque, ducto y buquetanque.

Esta ecuación está estrechamente relacionada con la anterior, al ser el lado izquierdo el mismo e indicaría que el producto disponible a ventas en la agencia *k* debería ser igual al volumen que está recibiendo de todos los nodos que están conectados con el nodo *l* por cada uno de los medio de transporte *M* disponibles.

### 4. Producto final disponible en volumen en cada una de las refinerías

$$VBAL_{xxxi}: T_{xxxij}M = BVBL_{xxxi} \quad \forall i \in \{Refinerías\}$$

Donde

*VBAL<sub>xxxi</sub>* representa el balance del producto *xxx* en la refinería *i*

*xxx* representa los productos finales disponibles en la refinería *i*

*T<sub>xxxij</sub>**M* representa las transferencias del producto final *xxx* de la refinería *i* al nodo *j* más cercano a la refinería *i* por el medio de transporte *M*

*BVBL<sub>xxxi</sub>* representa el mezclado del producto final *xxx* en la refinería *i*

*j*=nodos

*M*=autotanque, carrotanque, ducto y buquetanque.

Esta ecuación indica que la producción disponible de la refinería es enviada a la red de transporte. Cabe señalar que generalmente para cada refinería se construye un nodo del mismo nombre, el cual es encargado de distribuir el producto ya terminado hacia la zona de ventas. Por ejemplo el lado derecho de la ecuación podría representar el total de gasolina magna en la refinería Tula, el cual debería ser igual a lo que se transfiriere del nodo refinería Tula al nodo Tula por el medio de transporte ducto o autotanque.

5. Suma de los productos que se transportan de un nodo a otro por el mismo medio de transporte

$$ET...jIM: T...jIM = \sum_{xxx} TxxxjIM$$

Donde

$ET...jkM$  representa la ecuación para sumar el producto que se transporta del nodo  $j$  al nodo  $l$

$T...jIM$  representa la suma de todos los productos que se transportan del nodo  $j$  al nodo  $l$

$xxx$  representa los productos finales

$TxxxjIM$  representa las transferencias del producto  $xxx$  del nodo  $j$  al nodo  $l$  por el medio de transporte  $M$

$M$  = autotanque, carrotanque, ducto y buquetanque.

Esta es una ecuación que acumula el volumen total transportado entre dos nodos por el mismo medio de transporte. Por ejemplo se podría pensar en el volumen de gasolina magna, de diesel y turbosina que se transporta de Cadereyta a Monclova por ducto. El lado derecho se refiere a lo antes expuesto, mientras que el lado izquierdo es el resultado. Esta ecuación es útil cuando existen restricciones de capacidad como en el caso del transporte por ducto, ya que se puede establecer un máximo al volumen transportado.

6. Producto final disponible en volumen en cada una de las refineries

$$EVBLxxx_i: BVBLxxx_i = \sum_{bbb} Bbbbxxx_i$$

Donde

$EVBLxxx_i$  es una ecuación que representa el mezclado del producto  $xxx$  en la refinería  $i$

$xxx$  representa los productos finales obtenidos por mezclado en la refinería  $i$

$BVBLxxx_i$  representa el total del producto final  $xxx$  de la refinería  $i$  obtenido por mezcla.

$Bbbbxxx_i$  representa la cantidad requerida del producto intermedio  $bbb$  que se utilizó en el mezclado del producto final  $xxx$  en la refinería  $i$

Esta ecuación se refiere a la forma en que se obtiene un producto a través del mezclado de varios productos intermedios, ya sean producidos en algún proceso interno de la refinería o bien sean productos importados.

7. Balance de producto final disponible en peso en cada uno de los nodos asociados a una agencia de venta.

$$WBAL_{xxx}l: SEL_{xxx}kl = \sum_{hhh} SIND_{bbb}l$$

Donde

$WBAL_{xxx}l$  representa el balance en peso del producto  $xxx$  en el nodo  $l$

$SEL_{xxx}kl$  representa las ventas del producto  $xxx$  en la agencia  $k$  provenientes del nodo  $l$

$SIND_{bbb}l$  representa indica el tipo de combustible  $bbb$  que se utiliza para satisfacer la demanda de  $xxx$  en el nodo  $l$

Esta ecuación es específica al sector industrial e indica el tipo de combustible que se utiliza para satisfacer la demanda de los productos de este sector. Por ejemplo, para satisfacer la demanda de combustibles industriales ( $xxx$ ) en la agencia Tula ( $k$ ), ésta podría ser satisfecha con gas natural o con combustóleo o con combustóleo utilizando una tecnología que permitiera la reducción de contaminantes ( $bbb$ ) proveniente del nodo  $l$ . La elección dependerá de su ubicación geográfica, de las posibilidades de sustitución de combustibles, así como de los precios relativos de los combustibles.

8. La siguiente ecuación muestra el balance de productos finales producidos en cada refinería del sistema. Indica que la cantidad de producto disponible a ventas no puede ser diferente de la que se obtuvo en el mezclado de productos de cada refinería.

$$VBAL_{xxx}i: SEL_{xxx}ki = BVBL_{xxx}i$$

Donde

$xxx$  representa los productos finales que se venden a puerta de la refinería  $i$

$VBAL_{xxx}i$  representa el balance del producto  $xxx$  en la refinería  $i$

$SEL_{xxx}ki$  representa las ventas del producto final  $xxx$  provenientes de la refinería  $i$  vendidas en la agencia  $k$

$BVBL_{xxx}i$  representa el volumen del producto final  $xxx$  en la refinería  $i$

$i$ =refinerías

$j$ =nodos.

9. Ecuación de balance en peso: destino del producto intermedio  $yyy$  producido en la planta  $aaa$ . Dentro de cada refinería existen diferentes procesos de los cuales se obtienen productos, la mayoría de los cuales requiere mezclarse con otros productos para obtener un producto final. También puede tratarse de un producto intermedio que se utilice para producir dos productos diferentes. En este caso, de

la planta *aaa* se obtienen productos intermedios que se utilizan para producir los productos *xxx*. En otras palabras, la cantidad producida del bien intermedio (lado derecho de la ecuación), no puede ser diferente de los usos que tenga dicho bien.

$$WBAL_{yyyyi}: c_{yyy} \sum_{xxx} B_{yyyyxxxi} = \sum_{hhh} d_{hhh} (Saaabbbi)$$

Donde

*yyy* representa un producto intermedio obtenido de un proceso en la refinería *i*

*xxx* representa los productos finales disponibles en la refinería *i*

*WBAL<sub>yyyyi</sub>* representa el balance en peso del producto *yyy* en la refinería *i*

*B<sub>yyyyxxxi</sub>* representa la cantidad del producto intermedio *yyy* que se mezcla para formar el producto final *xxx* en la refinería *i*

*Saaabbbi* representa las unidades del insumo *bbb* que entran en la planta *aaa* de la refinería *i*

*c<sub>yyy</sub>* es un factor de conversión de peso a volumen

*d<sub>hhh</sub>* es un factor de rendimiento para producir el producto *xxx* que depende del insumo *bbb*

10. Ecuación de balance en peso: Producción y destino del producto intermedio *yyy* producido en la refinería *i*. Esta ecuación es similar a la anterior, con la salvedad de que el producto intermedio no va directamente al mezclado, sino que requiere de uno o más procesos adicionales, antes de incorporarse a un producto final, por ejemplo, una planta coquizadora produce una gasolina que requiere de otro proceso para eliminar el azufre, antes de poder mezclarse como gasolina.

$$WBAL_{yyyyi}: \sum_{yyy} Saaayyyi - \sum_{ccc} \theta_{ddd} (Scccdddi) = 0$$

Donde

*yyy* representa un producto intermedio disponible en la refinería *i*

*WBAL<sub>yyyyi</sub>* representa el balance en peso del producto *yyy* en la refinería *i*

*Saaayyyi* representa las unidades del insumo *yyy* que entran en la planta *aaa* de la refinería *i*

*Scccdddi* representa las unidades del insumo *ddd* que entran en la planta *ccc* de la refinería *i*

*θ<sub>ddd</sub>* es un factor que indica la producción de *yyy* en la planta *ccc* al utilizar el insumo *ddd*

11. Ecuación de balance en peso: destino del producto intermedio *yyy* comprado en el exterior. Generalmente, los insumos intermedios entran directamente al

mezclado para obtener productos finales, esto es, no requieren de otro proceso intermedio. Lo que indica esta ecuación es la forma en que se utilizan estos productos intermedios y se cuida de que no haya sobrantes, esto es, sólo se compra la cantidad que se requiere.

$$WBAL_{yyyi}: c_{yyy} \sum_{xxx} B_{yyyxxxi} = PURC_{yyyi}$$

Donde

$yyy$  representa un producto intermedio comprado en el exterior

$xxx$  representa los productos finales disponibles en la refinería  $i$

$WBAL_{yyyi}$  representa el balance en peso del producto  $yyy$  en la refinería  $i$

$B_{yyyxxxi}$  representa la cantidad del producto intermedio  $yyy$  que se mezcla para formar el producto final  $xxx$  en la refinería  $i$

$PURC_{yyyi}$  representa las compras del insumo  $yyy$  en la refinería  $i$

$c_{yyy}$  es un factor de conversión de peso a volumen

12. Ecuación de balance en peso: requerimiento del servicio auxiliar  $sss$  en la planta  $aaa$ . Se refiere a aquellos servicios auxiliares que no se producen internamente, como pueden ser los catalizadores o inversiones. Cada una de las plantas requiere de determinada cantidad de este servicio y se requiere de comprar la suma de todos los requerimientos, que es precisamente el lado izquierdo de la ecuación.

$$UBAL_{sssi}: PURC_{sssi} = \sum_{aaa} d_{aaa}(Saaabbbi)$$

Donde

$sss$  representa un servicio auxiliar

$PURC_{sssi}$  representa las compras totales del servicio auxiliar  $sss$  en la refinería  $i$

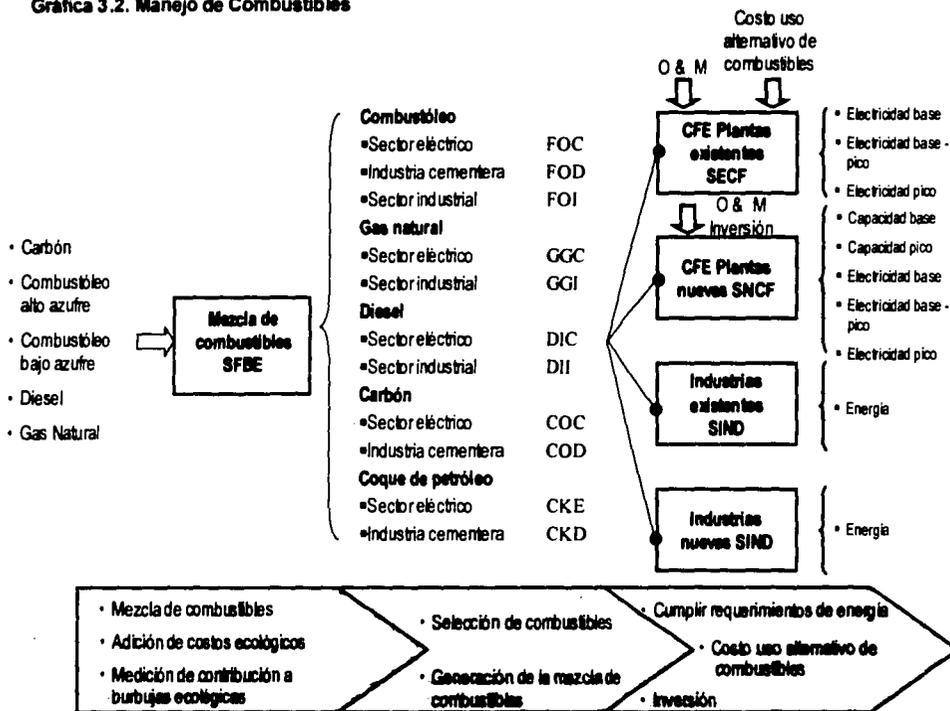
$Saaabbbi$  representa las unidades del insumo  $bbb$  que entran en la planta  $aaa$  de la refinería  $i$

$d_{aaa}$  es un factor que indica el requerimiento del servicio auxiliar  $sss$  en la planta  $aaa$  por unidad de insumo

El siguiente par de ecuaciones, lo que establecen es que la disponibilidad de productos para los sectores industrial y eléctrico (lado izquierdo) debe ser igual a los requerimientos de combustible de estos sectores. La primera ecuación se encuentra en volumen, mientras que la segunda se encuentra en peso, lo cual depende del manejo que se le da en el modelo al combustible que se esté utilizando. Esta mezcla de combustibles utilizados por el sector industrial y eléctrico, se puede ver de manera esquemática en la gráfica 3.2., en la que además se observan restricciones adicionales en cuanto a las cuestiones

ecológicas, las cuales serán tratadas más adelante en la sección de las restricciones del tipo "desigualdades".

Gráfica 3.2. Manejo de Combustibles



13. Combustible industrial en volumen disponible para cada nodo industrial. Muestra los destinos de este combustible.

$$VBAL_{yyyj} : \sum_{aaa} SFBE_{aaaaj} = \sum_{bbb} SIND_{bbbj} + \sum_{ccc} SECF_{cccj} + \sum_{ddd} SNCF_{dddj}$$

Donde:

*yyy* representa el volumen de combustible industrial

*VBAL<sub>yyyj</sub>* representa el balance en volumen del producto *yyy* en el nodo *j*

*SFBE<sub>aaaaj</sub>* asocia cada combustible *aaa* el combustible industrial, de acuerdo a su posible utilización en el nodo *j*

*SIND<sub>bbbj</sub>* suministra el tipo de combustible industrial requerido para satisfacer la demanda del combustible para el sector industrial *yyy* del nodo *j*

*SECFcccj* suministra el tipo de combustible industrial requerido para satisfacer la demanda para la industria eléctrica *yyy* del nodo *j*

*SNCFdddj* suministra el tipo de combustible industrial requerido para satisfacer la demanda para la industria eléctrica de nueva creación *yyy* del nodo *j*

Por ejemplo, *yyy* podría referirse al combustible que se utiliza en el nodo Tula para satisfacer la demanda de CFE y la gran industria. Entonces el lado derecho de la ecuación indicaría los requerimientos de combustible de acuerdo con la demanda que debe cubrir, ya sea para energía en el sector industrial o para generar electricidad base en el sector eléctrico. El lado izquierdo agrega estos consumos, clasificándolos de acuerdo al control de emisiones que se tenga en ese nodo.

#### 14. Combustible industrial en peso disponible para cada nodo industrial

$$WBAL_{yyyj}: \sum_{aaa} SFBE_{aaa}j = \sum_{hhh} c_{hhh} (SIND_{bbb}j) + \sum_{ccc} SECF_{ccc}j + \sum_{ddd} SNCF_{ddd}j$$

Donde:

*yyy* representa la cantidad en peso de combustible industrial disponible en el nodo *j*

*aaa* representa el combustible industrial por tipo de cliente

*bbb* representa el combustible demandado por el sector industrial

*ccc* representa el combustible demandado por el sector eléctrico existente

*ddd* representa el combustible demandado por el sector eléctrico para plantas nuevas

*WBAL\_{yyy}j* representa el balance en peso del producto *yyy* en el nodo *j*

*SFBE\_{aaa}j* representa el combustible industrial requerido para cada tipo de cliente en el nodo *j*

*SIND\_{bbb}j* representa el combustible industrial utilizado para satisfacer la demanda del combustible para el sector industrial *yyy* del nodo *j*

*SECF\_{ccc}j* representa el combustible industrial requerido satisfacer la demanda para la industria eléctrica *yyy* del nodo *j*

*SNCF\_{ddd}j* representa el combustible industrial requerido satisfacer la demanda para la industria eléctrica de nueva creación *yyy* del nodo *j*

*c\_{hhh}* es un factor de conversión de volumen a peso

### 3.2.2.2 Desigualdades

En este caso se mostrarán solamente unos cuantos tipos de desigualdades, con fines ilustrativos. En la mayoría de los casos que manejan disponibilidad de recursos o producción se tienen limitaciones en cuanto al tamaño de planta. En el

siguiente par de desigualdades es precisamente lo que se muestra. La utilización de la planta, expresada en el lado izquierdo de la desigualdad no debe exceder la capacidad de planta.

1. Desigualdades de capacidad en el sector refinación

$$CCAPaaai: \sum_{hhh} r_{hhh}(Saaabbbi) \leq Caaa$$

Donde

*aaa* representa una planta de la refinería *i*

*bbb* representa un insumo para la planta *aaa* de la refinería *i*

*Saaabbbi* representa el insumo *bbb* requerido en la refinería *i*

*r<sub>hhh</sub>* es un factor de rendimiento que depende del insumo *bbb*

*Caaai* representa la capacidad de producción por unidad de insumo (generalmente en miles de barriles diarios)

2. Desigualdades de capacidad en el sector eléctrico

$$CCAPeeek: \sum_{ggg} r_{ggg}(SECFgggk) \leq Ceeek \quad \forall k \in \{\text{Nodos eléctricos}\}$$

Donde:

*eee* representa una tecnología para generación de energía eléctrica en el nodo eléctrico *k*

*ggg* representa una mezcla de combustibles adecuada para la tecnología *eee* del nodo eléctrico *k*

*SECFgggk* representa la cantidad de energía eléctrica generada al utilizar el combustible *ggg* requerido en la refinería *i*

*r<sub>ggg</sub>* es un factor de rendimiento que depende del combustible *ggg*

*Caaai* representa la capacidad de generación de energía eléctrica por unidad generada (kilowatts día/día)

3. Desigualdad para limitar las emisiones totales de óxidos de azufre (ver gráfica 3.2). Lo que indica esta restricción es que de acuerdo a la zona (crítica o no crítica) en que se ubique el nodo se tiene un límite máximo para este contaminante fijado de acuerdo con la normatividad ambiental. Para garantizar que este límite se cumpla, se contabiliza la cantidad de emisiones contaminantes que genera el combustible seleccionado. Esta desigualdad está ligada con las ecuaciones del tipo 13 y 14 planteadas en la sección anterior.

$$LESSBSXk: \sum_{yyy} r_{yyy}(SFBEyyyk) \leq Sox$$

Donde:

*LESSBSX<sub>k</sub>* es una desigualdad que limita las emisiones de óxidos de azufre generadas por el combustible *yyy*  
*SFBE<sub>yyyk</sub>* representa la cantidad del combustible *yyy* utilizada en el nodo *k*  
*r<sub>yyy</sub>* representa un factor que denota la cantidad de libras de óxidos de azufre generados por unidad de combustible *yyy*.

Existen otros tipos de desigualdades y de ecuaciones, incluso algunos que no permiten una tipificación, ya que también es posible que cada usuario diseñe nuevas ecuaciones, lo cual haría muy extenso este trabajo, motivo por el cual sólo se presentan algunos tipos de restricciones, a fin de mostrar la flexibilidad que tiene el modelo.

### 3.2.2.3 Ejemplos

Ahora se procederá a describir de manera muy detallada un par de restricciones relacionadas con la inversión en activos. Primero en el sector refinación y después en el sector eléctrico.

Sector refinación: Esta es una ecuación del tipo (12) mostrada en la sección (3.2.2.1), en la cual se analizan los requerimientos de inversión visto este recurso como un servicio auxiliar.

$$\begin{aligned}
 \text{UBALINZ}_f: & \text{PURCINZ}_f + \text{SINVINY}_f = 9.2 ( \text{SCR1TER}_f + \\
 & \text{SCR1OLM}_f + \text{SCR1ISP}_f + \text{SCR1MAC}_f + \text{SCR1VST}_f + \text{SCR1VSM}_f ) + \\
 & 3.0 \text{SCR1A1}_f + 14.8 ( \text{SCCUBAS}_f + \text{SCCUBA2}_f ) + 5.2 \text{SNHTNTP}_f + \\
 & 5.1 \text{SNHTDCN}_f + 13.8 ( \text{SREFR92}_f + \text{SREFR94}_f + \text{SREFR96}_f + \\
 & \text{SREFR98}_f + \text{SREFR00}_f + \text{SREFR02}_f ) + 4.4 \text{SVBRBAS}_f + 5.9 \\
 & \text{SKHTBAS}_f + 5.5 \text{SDHTBAS}_f + 21.2 ( \text{SALKC3}_f + \text{SALKC4}_f + \\
 & \text{SALKCY}_f ) + 8.0 ( \text{SGHTBAS}_f + \text{SGHTDCD}_f ) + 13.3 \text{SIS5NLH}_f + \\
 & 14.1 \text{SDCKBAS}_f + 29.6 \text{SGHCBAS}_f + 21.0 \text{SRDXBAS}_f + 19.9 \text{SMTBI4}_f + \\
 & + 0.6 \text{SNLHBLD}_f + 5.3 \text{SCHTMX1}_f + 10.5 \text{SIS4NC4}_f + 2.4 \text{STAMTAM}_f
 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación de balance de servicios auxiliares que indica los requerimientos de inversión en cada una de las diferentes plantas, dentro de la nueva refinera. En el lado derecho de la ecuación se tiene en primer lugar la planta *SCR1* que es una planta atmosférica e indica que se requiere de 9.2 dólares diarios de inversión por tonelada de crudo, ya sea que el insumo sea crudo Maya (*MAC*), crudo Istmo (*ISP*), etc. en el nodo *f* (refinería nueva). Después se tiene una planta de desintegración catalítica CSU, la cual tiene dos modos de operación denotados por *BAS* y por *BA2* y por cada tonelada que procese requiere de un pago de inversión de 14.8 dólares. La siguiente es una planta de hidrotreatmento

de naftas *SNTP* e indica que se requiere de 5.2 dólares diarios en el caso que el insumo sea una nafta del crudo (*NTP*) y de 5.1 si es una nafta proveniente de la coquizadora (*DCM*). Para el caso de una reformadora (*SREF*), se requiere de 13.8 dólares diarios por tonelada de insumo, ya sea que la severidad (modo de operación) sea de 92, 94, 96, 98, 100 o 102 octanos. La planta de alquilación *SALK* requiere de 21.2 dólares por unidad de producto, ya sea que el insumo sea Isopropileno (*C3=*), Isobutileno (*C4=*) o una mezcla de butilenos (*CYY*). En el caso de la planta *SGHT* que consiste en hidrotreamiento de gasóleos, se requiere de 8.0 dólares diarios por tonelada de insumo y de manera similar con el resto. El lado izquierdo de la ecuación cuantifica el total de dólares diarios requeridos, esto es, ya considerando la actividad de las variables.

Sector eléctrico:

$$\begin{aligned}
 \text{WBALINC}\{ : \text{PURCINC}\{ = & 9.5 \text{SNCFMFB}\{ + 1.5 \text{SNCFMGB}\{ + \\
 & 10.3 \text{SNCVFB}\{ + 1.6 \text{SNCVGB}\{ + 1.8 \text{SNCFCGB}\{ + 10.5} \\
 & \text{SNCFCDB}\{ + 5.8 \text{SNCFTGP}\{ + 41.8 \text{SNCFTDP}\{ + 27.3 \text{SNCFIFP}\{ \\
 & + 25.3 \text{SNCFIDP}\{ + 12.3 \text{SNCDFB}\{
 \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra en el lado derecho los montos de inversión requeridos en el nodo {. El primer término indica que se requiere de 9.5 dólares diarios por unidad de combustible utilizado por la tecnología de vapor mayor (*MFB*) con combustóleo, de 1.5 dólares diarios en el caso de la tecnología de vapor mayor (*MGB*) con gas natural, de 10.3 para la tecnología de vapor menor (*VFB*) con combustóleo y de 1.6 con gas natural. Para la tecnología de ciclo combinado se requiere de 1.8 cuando el insumo es gas natural (*CGB*) y de 10.5 cuando es diesel el insumo (*CDB*). Para la tecnología de turbogas el costo es de 5.8 con gas natural (*TGP*) y de 41.8 cuando es con diesel (*TDP*). Para la tecnología de combustión interna el costo es de 27.3 cuando el insumo es combustóleo (*IFP*) y de 25.3 cuando es diesel (*IDP*) y finalmente el costo de la tecnología dual utilizando combustóleo (*DFB*) es de 12.3 dólares diarios.

### **3.3 Metodología utilizada**

En esta sección se señala la utilización que se le da al modelo. El objetivo de este trabajo consiste en determinar la mejor alternativa de inversión en el sector refinación, ante diferentes escenarios de demanda de productos petrolíferos. Cabe señalar que para poder tener una propuesta de inversión es necesario hacer varias corridas del modelo, ya que cada una proporciona un elemento que es necesario contrastar con otros, a fin de tener un panorama más amplio.

En primer lugar se procede a construir un escenario básico, donde se asume que no se cuenta con recursos para la construcción de una nueva refinería. A este caso se le denomina caso base y la solución mostraría los costos en que se incurriría si la infraestructura se mantiene sin cambio.

Después se construye un escenario alterno, el cual considera las mismas premisas del caso base, pero se le permite la opción de invertir en una refinería nueva. Se comparan las soluciones de ambos casos y se calcula la diferencia entre ambas, lo cual estará proporcionando el beneficio de contar con esta nueva infraestructura.

Finalmente, se analiza si este beneficio es suficiente como para hacer la inversión en una nueva refinería un negocio rentable, con las técnicas tradicionales del valor presente neto y tasa interna de retorno.

Este procedimiento se repite para cada uno de los escenarios de demanda considerados y después se comparan los resultados obtenidos para los tres escenarios.

El modelo se corre con un software denominado PIMS (Process Industry Modelling System), el cual está diseñado para la industria energética. Utiliza como optimizador el "XPRESS" el cual hace uso de los algoritmos duales, primales y primal-dual.

# Capítulo 4

## Aplicación del modelo

En este capítulo se presentan los supuestos que se utilizaron para llevar a cabo las corridas del modelo, algunos detalles de la modelación, las limitaciones del mismo, la definición de los escenarios analizados, así como la presentación de los resultados y sus implicaciones. Al final del capítulo se presenta el análisis de sensibilidad respecto a los precios observados.

### 4.1 Obtención y procesamiento de datos

Los pronósticos del crecimiento de demanda tanto de productos petrolíferos como de energía eléctrica se tomaron de las prospectivas de petrolíferos y del sector eléctrico 2001 - 2010 que publica la Secretaría de Energía. Los cuales están basados en las siguientes tasas de crecimiento promedio anual del PIB para el período 2002-2011

Bajo	3.4%
Medio	4.5%
Alto	5.6%

Los pronósticos obtenidos son a nivel global, por lo que se hace necesario regionalizar la demanda de petrolíferos, para lo cual, simplemente se consideraron las ventas observadas por agencia (se consideran 50 en el modelo) para cada uno de los productos petrolíferos durante el año 2001 y se aplicó la misma participación porcentual.

En cuanto a los precios de productos petrolíferos y del petróleo crudo se consideró un promedio de precios esperados durante 20 años (2000 – 2019).

Los rendimientos de los crudos se tomaron de información de ensayos técnicos de laboratorio para los crudos considerados. Para los rendimientos por planta y requerimientos de servicios auxiliares, tanto del sector refinación como del sector eléctrico, se consideraron estimaciones teóricas<sup>11</sup>.

Los costos de inversión fueron tomados de diferentes publicaciones<sup>12</sup>. Los costos de transporte por autotank, carrotank, ducto y buquetank, corresponden a los observados durante 2001. Los costos de los servicios

---

<sup>11</sup> Gary

<sup>12</sup> "Hydrocarbon Processing", International edition. November 1996, vol. 75 No.11

auxiliares también se calcularon de acuerdo al promedio observado durante 2001.

Las restricciones ambientales consideradas, están basadas en la norma ambiental NOM-085 "Contaminación atmosférica: fuentes fijas". Las especificaciones de productos petrolíferos corresponden a las vigentes a la fecha, salvo en el caso del contenido de azufre en las gasolinas, para el cual se está suponiendo se ubicará en un promedio de 300 ppm<sup>13</sup> a partir del año 2008. A continuación se presentan algunos de estos elementos de manera más detallada.

#### 4.1.1 Sector eléctrico

En este sector, se tienen plantas cuyos insumos son los combustibles que producen los sectores refinación y gas natural y que se muestran con todo detalle en la tabla 4.1. El insumo depende del tipo de tecnología de que se disponga o en el caso de plantas nuevas dependerá de la combinación de varios factores: de los combustibles disponibles y de su costo, de los costos de operación y mantenimiento, de los costos de inversión, de la localización y tipo de la demanda (base o pico), de la disponibilidad de líneas de transmisión, así como de los factores ambientales que pueden limitar el uso de algún combustible.

Tabla 4.1 :Tecnologías disponibles para generación de electricidad

Tecnologías	Combustibles base	Combustibles alternos
Vapor Mayor	Combustóleo	Gas natural
Vapor Menor	Combustóleo	Gas natural
Combustión interna	Diesel	Gas natural
Ciclo Combinado	Gas natural	Diesel
Dual	Carbón	Combustóleo
Carbón	Carbón	Combustóleo
Turbogas	Diesel	Gas natural
Gasificación	Coque	Combustóleo, Residuos de Vacío
Lecho Fluidizado	Coque	Combustóleo, Residuos de Vacío

La demanda de electricidad tiene dos componentes: una que se denomina demanda base, que se mantiene constante a lo largo de varias horas durante el día y otra denominada pico que se presenta en las horas de demanda de mayor intensidad.

<sup>13</sup> Ppm Partes por millón

## 4.1.2 Restricciones Ambientales

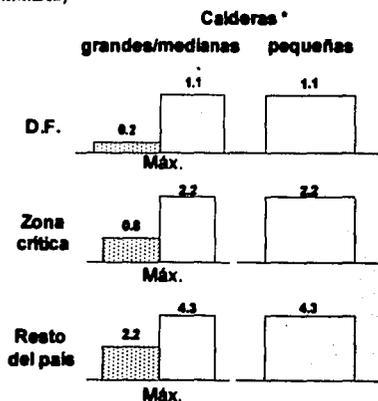
Las limitaciones ambientales incluidas en el modelo, están basadas en la norma ambiental NOM-085. Su aplicación va dirigida a los sectores industrial y eléctrico, ya que aplica solamente para fuentes fijas, por lo cual productos como las gasolinas, diesel o turbosina no son considerados dentro de la misma. Estos últimos son controlados a través de especificaciones directas a los productos.

Los límites máximos se muestran en la gráfica 4.1. Como se observa, estos límites varían de acuerdo al tipo de caldera utilizada y a la ubicación de la industria. En el caso del sector eléctrico, se supuso que todas las plantas para generación de energía eléctrica, corresponden a la categoría de calderas grandes y esto mismo aplica al caso del sector refinación.

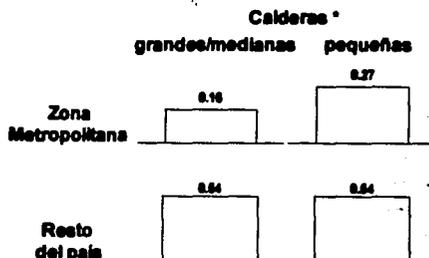
En lo que se refiere al sector industrial, este es un sector más disperso que cuenta con todo tipo de calderas distribuidas en todo el territorio nacional, por lo cual se hace necesario contar dentro del modelo con una segmentación de la demanda industrial que sea sensible a este tipo de consideraciones. Esto se analizará más adelante.

Gráfica 4.1: Escenario de las normas ambientales (Norma 085)

Óxidos de Azufre (Sox)  
(lb/MMBtu)



Óxidos de Nitrógeno (Nox)  
(lb/MMBtu)



\* Grande = calderas de 110,000 Btu/h (31 MW)  
Medio = calderas de 43,000 Btu/h (12 a 31 MW)  
Pequeño = calderas menores a 43,000 Btu/h (12 MW)

Asimismo, se deben considerar las alternativas tecnológicas que se utilizan para reducir dichos contaminantes como las unidades desulfuradoras para reducción de SOx (lavadoras de gases), quemadores de bajo NOx (LNB<sup>14</sup>), urea y reducción catalítica selectiva para reducción de NOx.

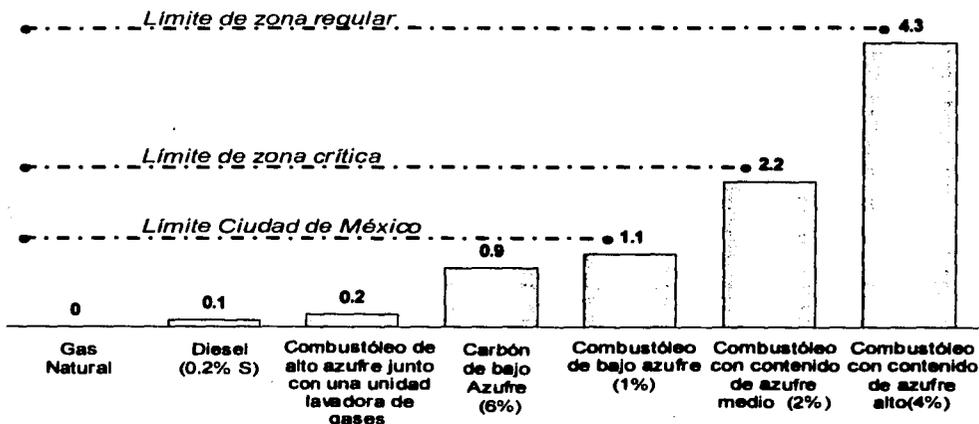
<sup>14</sup> Por sus siglas en inglés (Low Nox Burners)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por otro lado, se hace necesario tomar en cuenta la cantidad de contaminantes que genera cada uno de los combustibles considerados en esta norma ambiental, los cuales se muestran en la gráfica 4.2.

Lo que indica dicha gráfica es que si se utiliza un combustóleo con un contenido de azufre de 4%, se estarían produciendo 4.3 libras por millón de Btu generado, mientras que si utilizamos este mismo combustóleo con una unidad lavadora de gases, se estarían produciendo tan solo 0.2 libras por millón de btu generado, similar al que se generaría si se utilizara diesel.

**Gráfica 4.2 Emisiones de SOx por tipo de combustible Lb/MMBtu**



### 4.1.3 Especificaciones de productos

En la gráfica 4.3 se muestran las principales especificaciones de los productos petrolíferos considerados en este trabajo, las cuales están encaminadas a estandarizar los productos ofrecidos, de tal forma que por un lado cumplan con los requerimientos para el mejor desempeño del vehículo y por otro lado, los contaminantes sean reducidos.

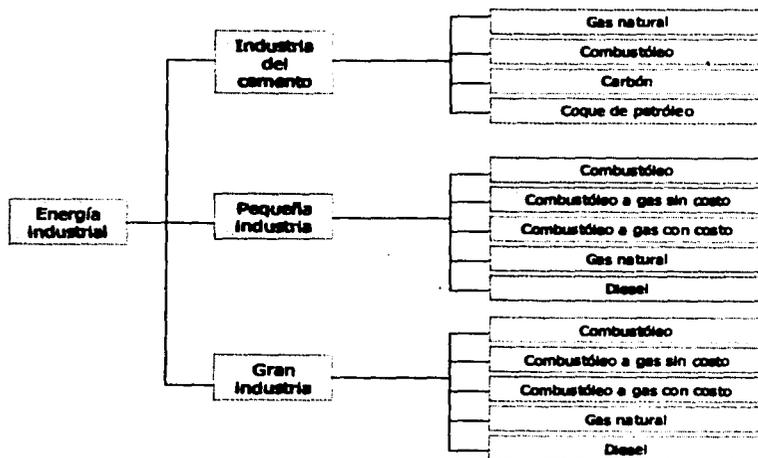
TESIS CON FALLA DE ORIGEN

**Gráfica 4.3: Especificaciones de principales productos petrolíferos**

Especificación	Pemex Magna	Pemex Premium	Pemex Magna reformulada
Octano	87 (R+M)/2	92 (R+M)/2	87 (R+M)/2
Presión de vapor	9.0 psi	7.8 psi	7.8 psi
Oxigenante	No limitado	1 a 2 % peso	1 a 2 % peso
Aromáticos	35 % volumen	25 % volumen	25 % volumen
Olefinas	15 % volumen	10 % volumen	10 % volumen
Benceno	4.9 % volumen	2.0 % volumen	2.0 % volumen
Azufre hasta 2004-2005	1000 ppm	300 ppm	500 ppm
Azufre a partir 2006	300 ppm	50 ppm	300 ppm
	<b>Pemex Diesel</b>	<b>Combustóleo</b>	
Indice de cetano	48 mínimo	No aplica	
Azufre (máx.)	500 ppm	Alto: 4% en peso Medio: 2% en peso Bajo: 1% en peso	

#### 4.1.4 Demanda de combustibles industriales

Debido a las posibilidades de sustitución entre combustibles, es importante contar con una segmentación de la demanda de combustibles industriales, para lo cual se hace necesario el análisis de la industria de acuerdo a su perfil de consumo. En la gráfica 4.4., se observa que se tienen tres grandes consumidores de combustibles: la industria del cemento, la pequeña industria y la gran industria, las cuales tienen disponibles los combustibles que se señalan.



**Gráfica 4.4: Demanda de combustibles industriales**

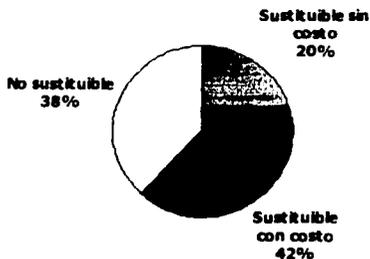
En el caso del gas natural, se consideraron en primer lugar al sector doméstico y al transporte, los cuales no tienen posibilidades de sustitución por alguno de los combustibles industriales aquí considerados. Para el sector industrial, se observó que aproximadamente un 80% corresponde a la gran industria y un 20% a la pequeña industria. Esta distinción entre pequeña y gran industria es importante ya que los límites máximos de emisión de contaminantes, están en función a esta diferenciación (ver gráfica 4.1)

En lo que se refiere al consumo de combustóleo, además de caracterizarlo de acuerdo al tamaño de la industria, se deben establecer las posibilidades de sustitución con otros combustibles, cuando las hay, según se muestra en la gráfica 4.5., considerando para esto también su ubicación.

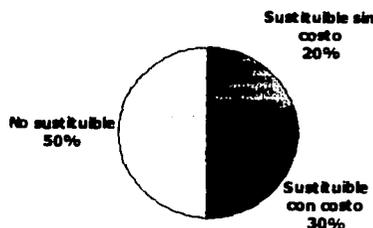
En términos generales, se puede segmentar la demanda de combustóleo en las siguientes categorías:

- **Cemento.** Como el combustóleo es una materia prima y no un combustible para esta industria, el proceso de combustión es directo y por lo tanto no genera contaminantes.
- **Gran industria (sin cemento).** Al igual que en el caso del gas natural, se supone que un 80% de la demanda corresponde a este tipo de industria. También que hay usuarios que pueden sustituir este combustible porque cuentan con quemadores duales, esto es, pueden utilizar ambos combustibles de manera indistinta y no incurrir en gastos adicionales, este segmento constituye el 20% de la gran industria. Asimismo, hay otros usuarios que con pequeñas inversiones pueden sustituir el combustóleo por gas natural, aproximadamente un 42% del total y el restante 38% se supone que no tiene posibilidades de sustitución.
- **Pequeña industria.** Se supone que esta industria consume el 20% de la demanda de combustibles del sector industrial, sin considerar al cemento y al igual que la gran industria se puede segmentar en tres: el consumo que no tiene posibilidades de sustitución sería de aproximadamente 50%, el que puede sustituir sin costo contaría con 20%, mientras que el que lo hace con costo medio sería el 30%.

Gran Industria



Pequeña Industria



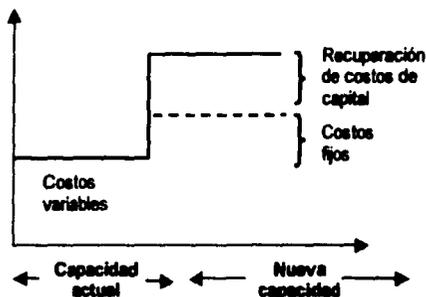
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Gráfica 4.5: Segmentación de la demanda de combustóleo

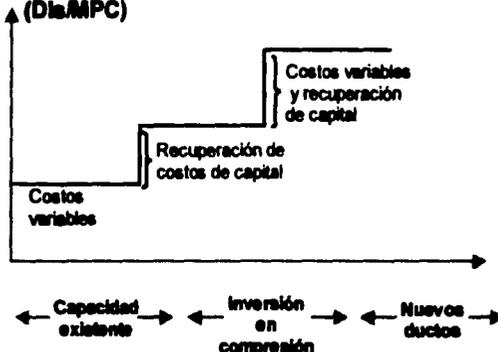
## 4.1.5 Inversiones

Para las plantas existentes, ya sea en el sector eléctrico o petrolero, solamente se consideran los costos variables de operación. Cuando se requiere de algún equipo especial, ya sea para reducir los contaminantes, para incrementar el tamaño de la planta o para agregar una nueva, es necesario "pagar" un costo adicional para poderlo utilizar, el cual deberá cubrir tanto la recuperación de capital como los costos fijos. En el caso de los ductos se presenta una situación similar. De manera esquemática esto se presenta en las gráficas 4.6a y 4.6.b.

**Gráfica 4.6.a : Inversiones en refinación (Dls/barril)**



**Gráfica 4.6.b: Ductos de gas natural (Dls/MPC)**



## 4.2. Limitaciones del Modelo

El modelo considerado es un modelo determinístico, por lo cual se hace un corte en el tiempo. El modelo se encuentra formulado en una base diaria, las soluciones que proporciona son consideradas típicas del comportamiento que se espera en ese año en particular. No es un modelo multiperiodo, por lo cual no proporciona soluciones óptimas en el tiempo.

En el sector eléctrico, no optimiza el suministro de electricidad por plantas hidroeléctricas, nucleares y geotérmicas, no cuenta con una red detallada de suministro de electricidad, ni tiene modeladas las curvas de carga de energía eléctrica ni el detalle de operación de unidades.

A pesar de que es un modelo muy detallado del suministro de productos petrolíferos y electricidad, presenta ciertas limitaciones en cuanto al detalle de infraestructura. Por ejemplo, el transporte por ducto de productos petrolíferos supone que las entregas son instantáneas.

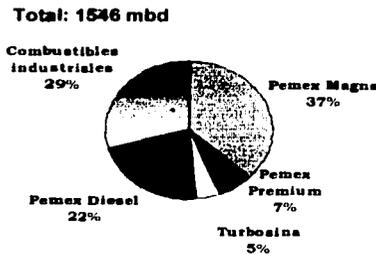
Asimismo, el modelo no puede "ver" ahorros o mayores gastos, derivados de economías o deseconomías de escala. Por ejemplo, cuando la función de costo de construcción de una planta se supone lineal, indica que cuesta exactamente lo mismo las primeras diez unidades que las últimas diez y que cuesta lo mismo construir una planta de 100 mbd que dos de 50 mbd.

### 4.3. Definición de escenarios

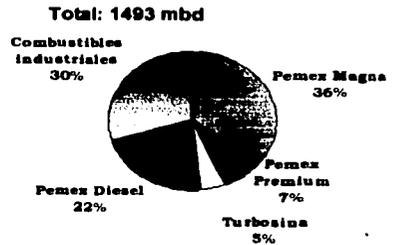
Se supusieron tres escenarios de crecimiento de la demanda, dada la incertidumbre que existe en el comportamiento de ésta. Como ya se señaló, están basados en diferentes escenarios de crecimiento del producto interno bruto. En la gráfica 4.7 se muestran los tres escenarios. Difieren entre ellos en aproximadamente 50 miles de barriles diarios.

Cuando se toman decisiones de inversión, se hace necesario considerar diversas alternativas en cuanto al comportamiento de las principales variables, ya que el tamaño de planta puede resultar ya sea por debajo del nivel requerido o muy por encima, con lo cual se podría tener capacidad ociosa durante varios años.

**Escenario alto**

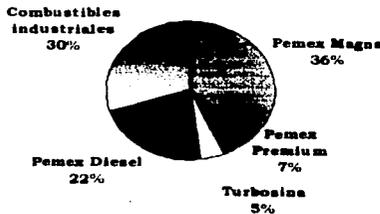


**Escenario medio**



**Escenario Bajo**

**Total: 1446 mbd**



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**Gráfica 4.7: Crecimiento esperado de la demanda, 2007**

En cuanto al sector eléctrico, solamente se supuso un escenario de generación de energía eléctrica, a fin de mantener el centro de nuestra atención sobre los productos petrolíferos. Un aspecto importante son las implicaciones sobre el perfil

ESTA TESIS FUE  
DE LA BIBLIOTECA

de consumo de combustibles de este sector ante diferentes escenarios de demanda de productos petrolíferos, así como el perfil de consumo de combustibles en el sector industrial.

En la tabla 4.2 se muestra el perfil esperado de consumo del sector industrial. En cada uno de los escenarios no se percibe un cambio importante, sin embargo, en la mayoría de los conceptos considerados, existe un potencial de sustitución del combustóleo por gas natural y viceversa.

Si se considera el volumen total de combustibles "sustituibles", se estaría hablando de aproximadamente 68 miles de barriles diarios en el escenario medio, que equivaldrían al volumen disponible a ventas de combustóleo de una refinería como la de Tula.

Ahora bien, para cada escenario se tiene un caso base y un caso con inversiones, en cada uno de los cuales la demanda de productos petrolíferos es la misma y la única variación entre uno y otro es la posibilidad de invertir en una nueva refinería.

Dentro de los resultados más importantes que se espera obtener se encuentran, el costo de suministro (valor de la función objetivo), el monto de inversiones requeridas para cada caso, la configuración de la refinería, el tamaño de las unidades construidas, el tipo de crudo que va a consumir, el perfil esperado de producción, la reducción de importaciones, así como el volumen de combustibles que van a consumir los sectores eléctrico e industrial.

**Tabla 4.2 Perfil de consumo de combustibles en el sector industrial**

(miles de barriles diarios equivalentes a combustóleo)

Sector	Escenario		
	Bajo	Medio	Alto
Industria del cemento	40.3	41.7	43.2
Combustóleo gran industria no sustituible	13.6	13.2	12.8
Combustóleo gran industria sustituible sin costo	7.2	7.0	6.7
Combustóleo gran industria sustituible con costo	15.1	14.6	14.1
Diesel industrial	32.8	33.9	34.9
Combustóleo pequeña industria no sustituible	4.5	4.4	4.2
Combustóleo pequeña industria sustituible sin costo	1.8	1.7	1.7
Combustóleo pequeña industria sustituible con costo	2.7	2.6	2.5
Gas natural gran industria	261.6	269.9	279.5
Gas natural pequeña industria	52.6	54.3	56.3

## 4.4 Resumen de resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en cuanto a la configuración resultante, a la rentabilidad de los proyectos considerados, así como al perfil de producción. En primer lugar se muestran aquellos resultados que son específicos para la refinería resultante. Después se analizan las implicaciones sobre todo el sistema para algunas de las variables relevantes de cada uno de los escenarios.

### 4.4.1 Configuración

El resultado que se obtiene es la construcción de una refinería nueva en los tres escenarios analizados, con una capacidad de procesamiento (tamaño de la planta atmosférica) de 227, 251 y de 287 mbd de crudo Maya (ver tabla 4.3), en los escenarios bajo, medio y alto respectivamente. La configuración resultante fue de coquización en todos los casos. Al no modificarse los precios (diferenciales entre ligeros y pesados), ni la configuración marginal, no se tendría porque suponer que la configuración resultante de esta nueva refinería cambiara de un escenario a otro, a menos que el perfil de demanda entre productos ligeros y pesados se modificara, lo cual tampoco ocurre.

**Tabla 4.3 Refinería nueva. Unidades construidas (miles de barriles diarios)**

Planta	Escenario		
	Bajo	Medio	Alto
Atmosférica	227.1	251.2	287.2
Alquilación	19.4	21.5	24.5
Catalítica	82.6	91.5	104.5
Coquizadora	91.5	101.4	115.0
Hidrotratamiento de naftas	44.8	50.7	59.8
Hidrotratamiento destilados intermedios	82.3	91.1	103.2
Hidrotratamiento gasóleos	66.8	71.6	79.0
MTBE	6.0	6.6	7.6
Reformadora	38.2	43.1	51.3
Isomerizadora	3.3	3.6	3.9

La tabla 4.3 muestra el tamaño requerido para cada una de las plantas que integran esta nueva refinería. Las plantas seleccionadas se podrían clasificar de acuerdo a la función que desempeñan. En primer lugar se encuentran aquellas destinadas a la transformación de corrientes pesadas en ligeras (unidades catalíticas y coquizadoras), después aquellas encaminadas al mejoramiento de la calidad de los combustibles, sobre todo a la reducción de azufre (hidrotratamiento)

y finalmente aquellas que buscan incrementar el octano en las gasolinas (reformadoras y alquiladoras).

#### 4.4.2 Análisis de rentabilidad

A continuación se muestra el resumen de resultados económicos derivados de los casos analizados. En primera instancia, se esperaría que las inversiones resultantes fueran rentables, ya que si no hay una mejora en los resultados cuando se tiene la opción de invertir, se esperaría simplemente que "el modelo" no escogiera esta alternativa, ya que es un modelo que minimiza costos de suministro. En efecto, cuando se verifica que las inversiones resultantes son rentables, también se verifica la solidez del modelo.

Se observa que entre más alta es la demanda de productos petrolíferos, el contar con una refinería es más rentable. Esto ocurre debido a que en ausencia de inversiones, el costo de suministro de una demanda cada vez más grande tiende a crecer de manera exponencial. El costo de suministro incremental del escenario medio, respecto al bajo es de 1,086 miles de dólares diarios, lo cual equivale a 396 millones de dólares por año, mientras que el costo incremental del escenario alto, respecto al medio es de 463 millones de dólares por año.

En la tabla 4.4 se presenta en primer lugar el beneficio esperado de las inversiones. Se calcula como la diferencia en funciones objetivo entre el caso con inversiones (descontando el monto de inversión) y el caso sin inversiones. La inversión requerida es calculada por el modelo. Para el cálculo del valor presente neto y de la tasa interna de retorno, se supuso una tasa de interés del 10% y que se tendrían disponibles un 30% de los recursos de capital para el primer año, un 50% para el segundo y 20% para el tercer año. No supone financiamiento externo.

**Tabla 4.4. Resumen Financiero**  
(millones de dólares)

	Escenario de demanda		
	Bajo	Medio	Alto
Beneficio anual	\$463.32	\$528.40	\$630.32
Inversión requerida	\$2,905.81	\$3,038.94	\$3,264.75
Valor presente neto	\$533.67	\$838.65	\$1,301.70
TIR	12.7%	13.9%	15.5%

#### 4.4.3. Perfil de producción

En la tabla 4.5 se presenta el perfil de producción de la refinería nueva obtenido para los tres escenarios. El gas licuado es vendido a Pemex Gas y Petroquímica Básica para su comercialización. En el caso de las olefinas (principalmente

propileno) pueden ser vendidas a Pemex Petroquímica para su transformación o bien a alguna empresa privada. La disposición del coque de petróleo es un poco más compleja, ya que requiere de instalaciones especiales para su embarque. El destino que se le da en el modelo es para generación eléctrica como se verá más adelante. El resto de los productos petrolíferos es transportado y vendido a los usuarios finales.

Los rendimientos de los productos, se miden generalmente con respecto al crudo procesado y no con respecto a la producción total. En este sentido se puede apreciar como en los tres escenarios el rendimiento de gasolinas es superior al 50% y en el escenario alto, la proporción de gasolina tipo Premium es superior con respecto a los otros escenarios. A este respecto, cabe señalar que a pesar de tener un déficit importante de combustóleo, se prefiere producir gasolinas que combustóleo y adquirir este último combustible en el exterior.

**Tabla 4.5 Refinería nueva. Elaboración de productos petrolíferos (miles de barriles diarios)**

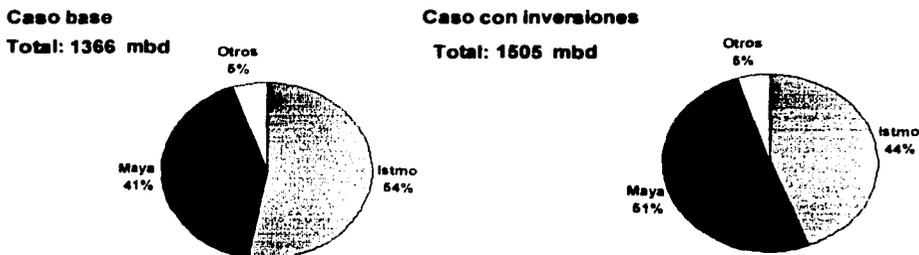
Planta	Escenario		
	Bajo	Medio	Alto
Gas licuado	6.9	7.5	8.3
Olefinas	8.5	9.4	10.8
Gasolinas	118.2	131.1	150.1
Pemex Magna	107.4	119.0	134.1
Pemex Premium	10.8	12.0	15.9
Diesel	70.9	78.5	89.2
Turbosina	11.4	12.6	14.3
Combustóleo	1.3	1.2	2.6
Coque de petróleo (miles de toneladas diarias)	5.0	5.5	6.2

Las implicaciones para el sistema en su conjunto se pueden analizar desde varios puntos de vista. Para cada escenario considerado, se contrasta el caso base respecto al caso con inversiones, a fin de mostrar los beneficios de contar con una nueva refinería para algunas de las variables relevantes como son el crudo procesado, el perfil de producción, la balanza comercial y el consumo de combustibles entre otros. Los resultados que se muestran a continuación se refieren al sistema de refinación en su conjunto.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

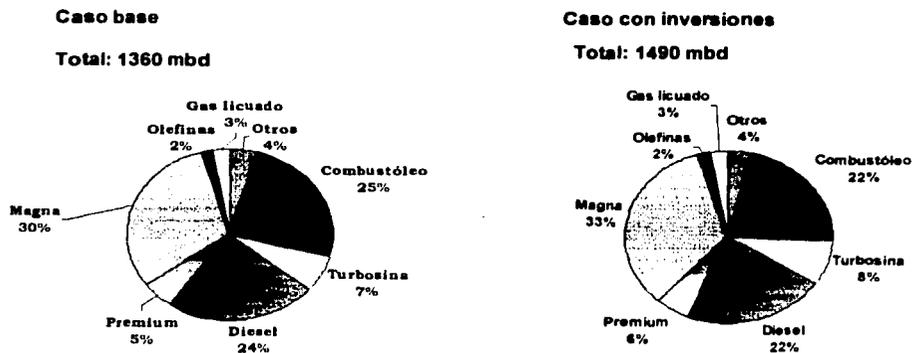
#### 4.4.4 Escenario de demanda baja.

En primer lugar se puede analizar la composición de la mezcla de crudo a proceso en todo el sistema, según se presenta en la gráfica 4.8. Recuérdese que el caso base es aquel en el cual solamente se encuentra funcionando el equipo existente, mientras que el caso con inversiones se tiene una refinería nueva de 227 mbd de capacidad. Se puede observar el cambio en la mezcla de crudos hacia la categoría de más pesados, al pasar de un 42% a un 51% en todo el sistema. También se puede notar que el crudo total procesado no corresponde a la suma del caso sin inversiones y el proceso de la nueva refinería, esto es, no fue aditivo. Al contar con una refinería adicional, el modelo "decide" disminuir su proceso de crudo en algún otro lugar del sistema, en donde sea menos eficiente.



Gráfica 4.8: Proceso de crudo en el SNR: Escenario de demanda bajo, 2007

En lo que se refiere a la composición de la producción, en la gráfica 4.9 se presenta la comparación entre el caso base (sin inversiones) y el caso con inversiones. Como se puede observar con la adición de una refinería relativamente compleja, el perfil de producción de todo el sistema se modifica, aumentando la producción de productos ligeros en aproximadamente 3%.

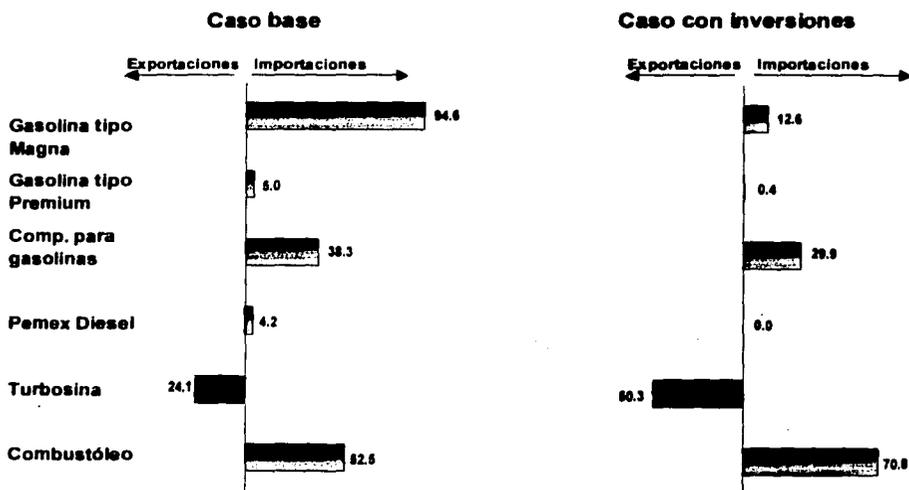


Gráfica 4.9: Elaboración de petrolíferos en el SNR, 2007: Escenario de demanda bajo

Finalmente se podría cuestionar como afectan las nuevas inversiones a la balanza comercial. En la gráfica 4.10 se presenta la balanza comercial, contrastando los casos con y sin inversiones.

En el caso que se decidiera no invertir y se presentara un escenario de demanda pesimista, se estaría incurriendo en importaciones netas del orden de los 169 mbd de productos petroliferos, los cuales se pueden reducir en aproximadamente 100 mbd con las inversiones propuestas.

Como se señaló anteriormente, se tienen importaciones de combustóleo en el caso base del orden de los 50 mbd y se prefiere incrementar dicho déficit hasta más de 70 mbd, antes que producir combustóleo en esta refinería. Si los precios fuesen diferentes, también el perfil de producción podría ser distinto.



Gráfica 4.10: Balanza de petrolíferos en el SNR, 2007: Escenario de demanda bajo

Regresando al tema de los combustibles industriales por sector, se tiene que el sector eléctrico tiene a su disposición una serie de tecnologías tanto para sus plantas existentes, como para sus posibilidades de expansión. De acuerdo con dichas tecnologías se hace la selección de combustibles, dado que tiene que suministrar energía eléctrica al país. Juegan un papel relevante para el sector eléctrico los precios de sus insumos, en particular el precio relativo entre el gas y el combustóleo, las restricciones ambientales y los costos de operación.

En este modelo, el sector industrial no tiene la flexibilidad del sector eléctrico, básicamente porque se trata de un sector con muchos usuarios y para usos diversos que no se tienen identificados y por ende no es posible modelarlos. El

sector que se tiene más identificado es la industria del cemento, por este motivo se le da mayor relevancia. Se sabe que el sector azucarero es también un usuario importante de combustóleo con pocas posibilidades de sustitución por gas natural y del resto se tiene poca información. La tabla 4.6 presenta el resultado de la optimización primero para el caso base y luego para el caso con inversiones.

**Tabla 4.6 Consumo de combustibles industriales por sector**  
(miles de barriles diarios equivalentes a combustóleo)

	Sector industrial	Sector eléctrico existente	Sector eléctrico nuevo	Sector petrolero	Total
<b>Caso base</b>					
Combustóleo	81.9	219.5	12.1	76.1	389.7
Gas natural	317.5	404.3	75.2	26.2	823.1
Diesel	32.8	0.0	0.0	0.0	32.8
Carbón	0.0	62.2	43.6	0.0	105.8
Coque de petróleo	0.0	0.0	26.9	0.0	26.9
<b>Caso con inversiones</b>					
Combustóleo	82.0	219.5	11.1	84.0	396.6
Gas natural	317.3	412.7	66.0	24.9	821.0
Diesel	32.8	0.0	0.0	0.0	32.8
Carbón	0.0	62.2	26.2	0.0	88.4
Coque de petróleo	0.0	0.0	48.5	0.0	48.5

Se puede observar que el sector industrial, prácticamente no modifica su perfil de consumo, permaneciendo en alrededor de 82 mbd, mientras que el sector eléctrico existente lo hace ligeramente, al aumentar su consumo de gas natural en más de 8 mbd, mientras que el sector eléctrico de nueva creación se inclina más hacia coque de petróleo, reduciendo sus consumos de carbón y gas natural en 9 y 17 mbd respectivamente. En cuanto al sector petrolero, el incremento en su consumo para servicios auxiliares lo hace a través de combustóleo.

La tabla 4.7 contiene la información acerca de cómo el sector industrial se abastece de combustibles industriales, para los casos base y con inversiones. Como ya se señaló, el perfil de consumo en este sector no se modifica y tan solo se muestra la información de la selección de combustibles para cada uno de los rubros considerados. Se esperaba alguna sustitución de combustóleo por gas natural o tal vez en la industria del cemento un consumo de carbón o coque de petróleo. Sin embargo, al parecer fueron los costos de sustitución, los que hicieron más caro el consumo de estos combustibles.

**Tabla 4.7 Consumo de combustibles en el sector industrial**  
(miles de barriles diarios equivalentes a combustóleo)

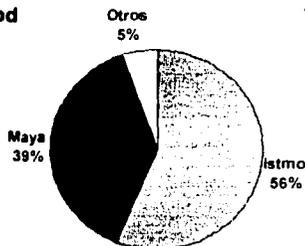
	Combustóleo	Gas	Coque de petróleo	Carbón	Diesel	Total
Industria del cemento	39.4	1.0	0.0	0.0	0.0	40.3
Combustóleo gran industria no sustituible	13.6					13.6
Combustóleo gran industria sustituible sin costo	4.9	2.3				7.2
Combustóleo gran industria sustituible con costo	15.1	0.0				15.1
Diesel industrial					32.8	32.8
Combustóleo pequeña industria no sustituible	4.5					4.5
Combustóleo pequeña industria sustituible sin costo	1.8	0.0				1.8
Combustóleo pequeña industria sustituible con costo	2.7	0.0				2.7
Gas natural gran industria		261.6				261.6
Gas natural pequeña industria		52.6				52.6

#### 4.4.5 Escenario de demanda media.

Al igual que en el caso anterior, se puede analizar la composición de la mezcla de crudo a proceso en todo el sistema, según se presenta en la gráfica 4.9. Si no se invirtiera, la proporción de crudos pesados sería de tan solo 39%, incluso menor que en el escenario de demanda baja, lo cual es indicativo de que a mayor demanda y en ausencia de inversiones adicionales, la proporción de crudos pesados tenderá a disminuir. También en este escenario, el incremento en el proceso de crudo no corresponde a la suma entre el caso sin inversiones y el proceso de la refinería nueva. La disminución en el proceso de crudo debe haber ocurrido en aquellas refinerías con una configuración más sencilla, respecto al caso sin inversiones.

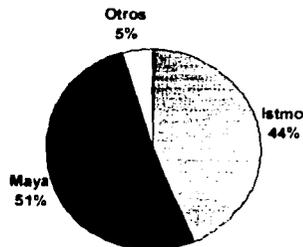
##### Caso base

Total: 1376 mbd



##### Caso con inversiones

Total: 1534 mbd

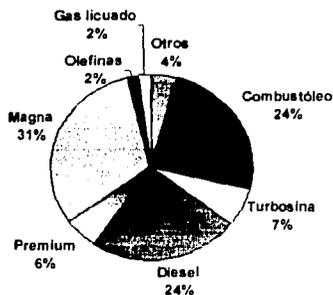


**Gráfica 4.11: Proceso de crudo en el SNR: Escenario de demanda medio, 2007**

Respecto al perfil de producción se tiene un esquema muy semejante al escenario bajo (ver gráfica 4.12), en cuanto a la proporción de productos obtenidos. Un detalle por demás ilustrativo, es que a pesar de haber incrementado la producción sobre todo de gasolinas de una manera sustancial, en ningún caso la importación de este combustible se hace cero. El incremento neto en la elaboración de productos petrolíferos es de poco más de 150 mbd en productos ligeros, esto sin contar el coque de petróleo.

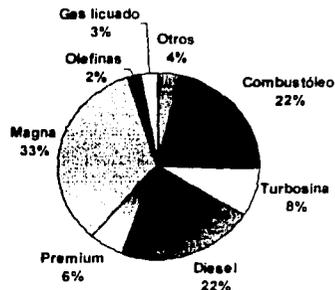
**Caso base**

**Total: 1368 mbd**



**Caso con inversiones**

**Total: 1520 mbd**

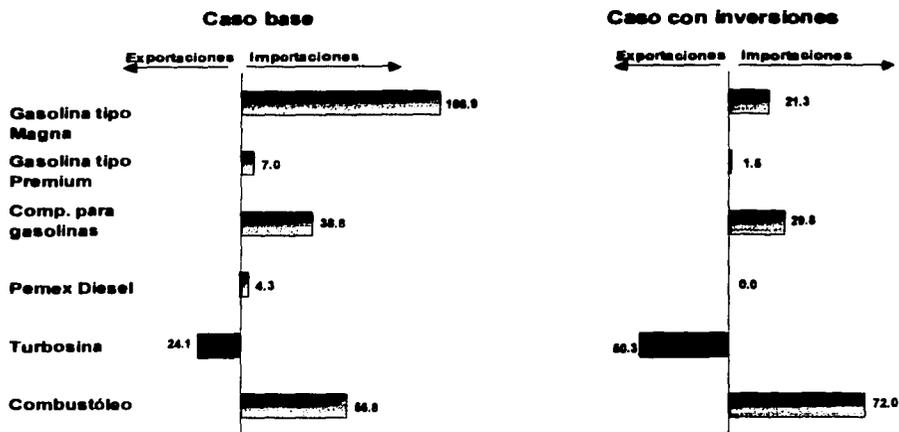


**Gráfica 4.12: Elaboración de petrolíferos en el SNR, 2007: Escenario de demanda medio**

La balanza comercial se presenta en la gráfica 4.13. De nuevo se tiene una reducción considerable de las importaciones de gasolinas, aun cuando no desaparecen por completo, permaneciendo un total importado de aproximadamente 53 mbd de gasolinas. También se incrementan de manera sustancial las exportaciones de turbosina, a pesar de que no resulta sencillo colocar en los mercados internacionales un volumen de esta magnitud.

También es importante señalar la ausencia de exportaciones de diesel. Esto se debe principalmente a que se tiene previsto que en ese tiempo la demanda de diesel tenga unas especificaciones muy estrictas, sobre todo en el contenido de azufre para los mercados más cercanos de la Costa Norteamericana del Golfo de México o bien enviárselo a mercados donde la calidad es inferior a la que se pide en México, en cuyo caso no hay un reconocimiento de la calidad en el precio de este combustible.

Para poder incrementar la oferta de diesel se tendría la alternativa de incrementar el consumo interno con una calidad similar a la actual.



**Gráfica 4.13: Balanza de petrolíferos en el SNR, 2007: Escenario de demanda medio**

En cuanto al consumo de combustibles en este escenario, se tienen apreciaciones similares a las del caso anterior (ver tabla 4.8), aun cuando aquí se observa una ligera sustitución de gas natural por combustóleo del caso base al caso con inversiones en el sector industrial. El sector eléctrico existente muestra un incremento en el consumo de gas natural, que deja de consumir el sector eléctrico nuevo. Este último prefiere crecer con coque de petróleo y disminuir su consumo de carbón, mientras que el sector petrolero crece utilizando combustóleo.

La tabla 4.9 muestra el consumo de combustibles del sector industrial exclusivamente, de acuerdo con el perfil de demanda supuesto y las posibilidades de sustitución de combustóleo, gas natural, coque de petróleo y carbón. El comportamiento es bastante similar al observado para el escenario de demanda baja. Esto es, no hay una sustitución de combustibles en el sector industrial y como ya se señaló es el sector eléctrico de nueva creación el que absorbe el excedente de coque de petróleo que se produce en la refinería nueva, ya que sólo enfrenta los costos de inversión, mientras que la industria existente tendría que pagar por reacondicionamiento del lugar, lo cual, lo hace más caro respecto al uso de los otros combustibles.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**Tabla 4.8 Consumo de combustibles industriales por sector**  
(miles de barriles diarios equivalentes a combustóleo)

	Sector industrial	Sector eléctrico existente	Sector eléctrico nuevo	Sector petrolero	Total
<b>Caso base</b>					
Combustóleo	82.0	219.5	11.7	78.2	391.4
Gas natural	327.5	395.7	80.5	21.2	824.9
Diesel	33.9	0.0	0.0	0.0	33.9
Carbón	0.0	62.2	47.3	0.0	109.5
Coque de petróleo	0.0	0.0	24.8	0.0	24.8
<b>Caso con inversiones</b>					
Combustóleo	83.2	219.5	11.1	86.1	399.8
Gas natural	326.3	411.9	57.5	25.8	821.4
Diesel	33.9	0.0	0.0	0.0	33.9
Carbón	0.0	62.2	35.6	0.0	97.8
Coque de petróleo	0.0	0.0	51.2	0.0	51.2

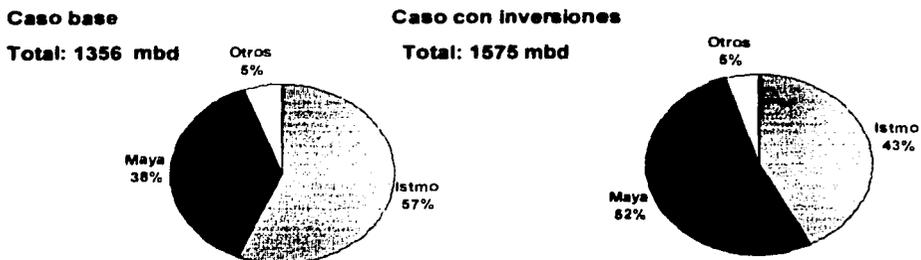
**Tabla 4.9 Consumo de combustibles en el sector industrial**  
(miles de barriles diarios equivalentes a combustóleo)

	Combustóleo	Gas	Coque de petróleo	Carbón	Diesel	Total
Industria del cemento	40.7	1.0	0.0	0.0	0.0	41.7
Combustóleo gran industria no sustituible	13.2					13.2
Combustóleo gran industria sustituible sin costo	4.8	2.2				7.0
Combustóleo gran industria sustituible con costo	14.6	0.0				14.6
Diesel industrial					33.9	33.9
Combustóleo pequeña industria no sustituible	4.4					4.4
Combustóleo pequeña industria sustituible sin costo	1.7	0.0				1.7
Combustóleo pequeña industria sustituible con costo	2.6	0.0				2.6
Gas natural gran industria		269.9				269.9
Gas natural pequeña industria		54.3				54.3

#### 4.4.6 Escenario de demanda alta.

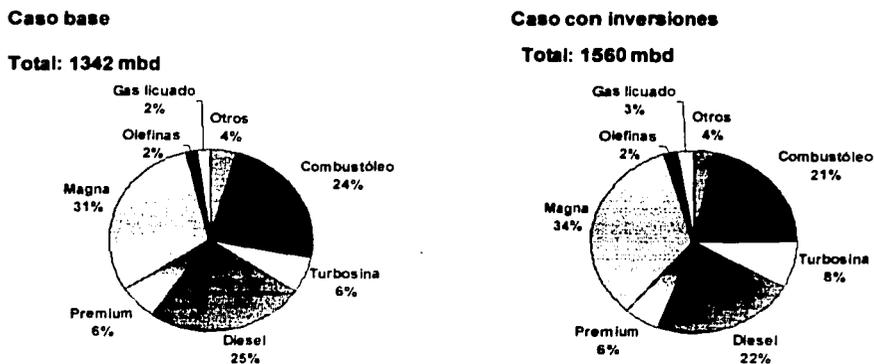
Al igual que en los casos anteriores, se puede analizar la composición de la mezcla de crudo a proceso en todo el sistema, según se presenta en la gráfica 4.14. Si no se invirtiera, la proporción de crudos pesados sería de tan solo 38%, menor que en el escenario de demanda baja o media, lo cual indica que a mayor

demanda de productos ligeros y en ausencia de inversiones adicionales, la proporción de crudos pesados tendería a disminuir. Esto sin mencionar que en este caso, el crudo Maya además de ser un crudo pesado tiene un contenido de azufre superior al del crudo Istmo, por lo que al ser las especificaciones de productos más estrictas se preferirán crudos con menores contenidos de azufre. En este caso el aumento en el proceso de crudo es mayor que en los casos anteriores y se ubica en alrededor de 220 mbd.



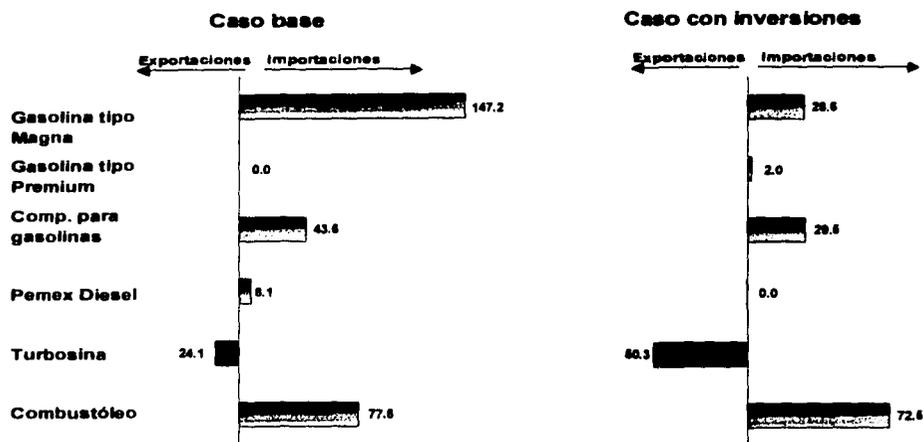
**Gráfica 4.14: Proceso de crudo en el SNR: Escenario de demanda alto, 2007**

De igual manera se incrementa la elaboración de productos ligeros (ver gráfica 4.15). En el total del sistema esto tiene un impacto en la proporción de combustóleo, al mantenerse la oferta de este combustible prácticamente constante en términos absolutos, mientras que la participación de la gasolina Magna en el total de productos petrolíferos, se incrementa en 3 por ciento, la turbosina lo hace en un dos por ciento y la proporción de diesel decrece en un 3 por ciento como consecuencia de las condiciones de mercado de este petrolífero.



**Gráfica 4.15: Elaboración de petrolíferos en el SNR, 2007: Escenario de demanda alto**

Respecto de la balanza comercial (gráfica 4.16), se puede comentar que hay una reducción importante en la importación de gasolinas (más de 130 mbd), mientras que el diesel, al igual que en los casos anteriores mantiene un balance y la turbosina tiene un perfil exportador. En el caso del combustóleo, este se mantiene en déficit, el cual es muy parecido en ambos escenarios.



Gráfica 4.16: Balanza de petrolíferos en el SNR, 2007: Escenario de demanda alto

Tabla 4.10 Consumo de combustibles industriales por sector (miles de barriles diarios equivalentes a combustóleo)

	Sector industrial	Sector eléctrico existente	Sector eléctrico nuevo	Sector petrolero	Total
<b>Caso base</b>					
Combustóleo	82.7	219.5	18.5	76.2	396.8
Gas natural	338.4	395.7	72.9	20.2	827.2
Diesel	34.9	0.0	0.0	0.0	34.9
Carbón	0.0	62.2	48.3	0.0	110.5
Coque de petróleo	0.0	0.0	27.0	0.0	27.0
<b>Caso con inversiones</b>					
Combustóleo	83.2	219.5	11.1	89.1	402.8
Gas natural	337.9	400.7	57.5	25.8	821.8
Diesel	34.9	0.0	0.0	0.0	34.9
Carbón	0.0	62.2	42.2	0.0	104.4
Coque de petróleo	0.0	0.0	54.8	0.0	54.8

En lo que se refiere al consumo por sector de los combustibles industriales, en la tabla 4.10, lo más sobresaliente es la utilización del coque de petróleo por parte

del sector eléctrico, el cual sustituye una parte del carbón utilizado (6.1 mbdce), otra de gas natural (10.4 mbdce) y combustóleo (7.4 mbdce). Los desplazamientos de combustóleo y gas natural son absorbidos principalmente por el sector petrolero.

## **4.5 Análisis de sensibilidad**

Con el propósito de analizar la robustez de las soluciones propuestas, se analizó el perfil obtenido a la luz de diferentes esquemas de precios. Esto se hizo únicamente para el escenario medio, a fin de no complicar demasiado el análisis. En el primer capítulo se señalaba que el comportamiento de los precios en los mercados internacionales obedecía a los ciclos de oferta y demanda, de acuerdo a la configuración marginal de la industria y a la demanda de residuales.

En este sentido se tienen dos configuraciones marginales que son las que han prevalecido en el mercado, las denominadas FCC y HSK (hydroskimming) y diferenciales de precios ligeros a pesados, amplios y estrechos.

Lo que se hizo fue suponer que la refinería se construiría<sup>15</sup> conforme a los resultados obtenidos en el escenario de demanda medio, pero que los precios a los que se enfrentaría resultarían diferentes a los considerados en el análisis. Los precios en el futuro tendrían un comportamiento similar al histórico.

En la gráfica 4.18 se pueden apreciar los diferenciales de precios observados en el mercado internacional (en la CNGM) para un periodo de diez años, donde cada observación fue colocada en un cuadrante de acuerdo con la configuración prevaleciente en el mercado y con los diferenciales de precios (amplios o estrechos). Una vez hecho esto, se calcula la frecuencia de ocurrencia de la serie de datos.

Se observa que los precios que ocurren con mayor frecuencia corresponden a la configuración FCC. También se observa que un 33.3 por ciento corresponde a diferenciales amplios, mientras que un 35.8 corresponde a diferenciales estrechos. Para la configuración HSK, la incidencia es bastante menor. En el caso del conjunto de precios con diferenciales amplios, que es muy atractivo para la construcción de plantas, tienen una frecuencia de ocurrencia de tan solo un 14.2 por ciento, lo cual por sí solo no garantiza la recuperación de las inversiones.

Se considera un conjunto de precios "promedio" de cada cuadrante y se hace una serie de corridas con el modelo para los casos sin inversiones y con inversiones. El caso con inversiones deberá considerar los resultados obtenidos para el escenario medio mostrados en la tabla 4.3., esto es, no se permite una

---

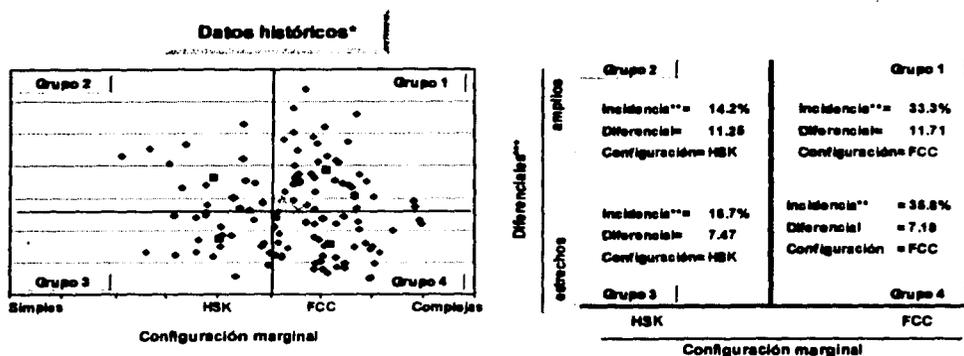
<sup>15</sup> Esto implicaría que no hay que "pagar" un costo adicional por el uso de las nuevas instalaciones, solamente el costo variable de operación.

reoptimización de los tamaños de planta obtenidos previamente. Simplemente se calcula el beneficio de contar con la infraestructura adicional.

**Gráfica 4.18: Determinación de la ponderación marginal**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- ◆ Datos históricos      ▲ Precios de largo plazo
- Promedio del grupo    × Promedio datos históricos



- Grupo 1: Diferenciales amplios y configuración marginal FCC
- Grupo 2: Diferenciales amplios y configuración marginal HSK
- Grupo 3: Diferenciales estrechos y configuración marginal HSK
- Grupo 4: Diferenciales estrechos y configuración marginal FCC

\* Datos históricos 1983-1995 excluyendo segundo semestre de 1990 y primer semestre de 1991 por guerra del Golfo  
 \*\* Se refiere al % de ocurrencia de ese grupo en los datos históricos  
 \*\*\* El diferencial entre productos ligeros y pasados se define (Precio gasolina + Precio diesel)/2 - Precio del combustible

En la tabla 4.11, se muestran los resultados financieros de dichas corridas de manera individual. Las segunda y tercera columnas muestran la rentabilidad de una refinera compleja ante un escenario de precios con una configuración FCC y diferenciales de precios amplios y estrechos y la cuarta y quinta columna con una configuración HSK. Se observa que solamente cuando se presentan diferenciales amplios se puede capturar un beneficio económico, el cual es mayor cuando la configuración es más sencilla (HSK). Cuando se tienen diferenciales estrechos se tienen pérdidas importantes y no hay recuperación de la inversión.

A fin de contar con un panorama de lo que se podría enfrentar en el futuro, se consideró el comportamiento histórico de los precios (ver gráfica 4.18) y se procedió a calcular un beneficio promedio, ponderado por estas cuatro caracterizaciones de precios, tomando en cuenta la frecuencia de ocurrencia. Esto se presenta en la primera columna de la tabla 4.11 en donde se puede observar que el valor presente neto asciende a 123 millones de dólares y la tasa interna de retorno resultante es de 10.6 por ciento. Esto indica que sería posible pagar la inversión realizada en una refinera nueva con una configuración compleja.

**Tabla 4.11. Resumen financiero para el escenario de demanda medio.  
Sensibilidades a precios  
(millones de dólares)**

	Escenario de precios				
	Promedio	FCC		HSK	
		Amplios	Estrechos	Amplios	Estrechos
<b>Beneficio anual</b>	\$417.5	\$486.8	\$263.4	\$707.7	\$363.6
<b>Inversión requerida</b>	\$3,038.9	\$3,038.9	\$3,038.9	\$3,038.9	\$3,038.9
<b>Valor presente neto</b>	\$129.4	\$572.5	-\$856.4	\$1,985.7	-\$215.5
<b>TIR</b>	10.6%	12.7%	5.2%	18.5%	8.9%

# Conclusiones

La utilización de modelos de programación lineal resulta una herramienta fundamental para la resolución de problemas que se presentan en situaciones que involucran la optimización de recursos limitados, los cuales se pueden presentar en prácticamente cualquier actividad que requiera de un proceso de "toma de decisiones". En la industria de la refinación resultan de particular importancia porque facilitan el análisis de la misma, considerando de manera simultánea todos los factores que afectan su desempeño.

Sin embargo, los modelos de programación lineal tienen ciertas características que es importante no soslayar. Se trata de modelos determinísticos, por lo que cualquier elemento de esta naturaleza, como la demanda, precios, disponibilidad de recursos, entre otros, debe ser aproximado por un equivalente determinístico. Son referidos a un momento en el tiempo y no son de carácter predictivo, por lo que la precisión de la información requerida resulta de primordial importancia.

Debido a lo anterior y al carácter estocástico de la demanda futura de prácticamente cualquier producto, en este trabajo se hizo necesario plantear diferentes escenarios de demanda (baja, media y alta), los cuales en gran medida dependen del desempeño de la economía.

Otro supuesto importante que se hizo en este trabajo, fue el hecho de que el futuro tendrá un comportamiento similar al histórico. En particular este supuesto fue considerado para los precios de los productos, lo cual permitió analizar los resultados para diferentes escenarios de precios considerados "típicos", de acuerdo con lo observado históricamente.

Finalmente se puede establecer que los resultados de este trabajo señalan la construcción de una nueva refinería, con una configuración compleja que le permitirá adecuarse al perfil esperado de la demanda, el cual está orientado a gasolinas y destilados intermedios. Se muestra que es posible la recuperación del capital invertido y de ampliarse los márgenes de refinación, situación no prevista desde el punto de vista histórico, se podrían capturar beneficios adicionales.

# Bibliografía

- [1] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali: *Linear Programming and Network Flows*. Ed. John Wiley & Sons, New York, 1990
- [2] A.R. Beckenstein, L.E. Grayson, S.H. Overholt, T.F. Sutherland: *Performance Measurement of the Petroleum Industry*. Ed. Lexington Books, Massachusetts, 1979
- [3] J.H. Gary, G.E. Handwerk: *Petroleum Refining, Technology and Economics*. Ed. Marcel Dekker, New York, 1984.
- [4] G. Hadley: *Linear Programming*. Ed. Addison Wesley, Massachusetts, 1962
- [5] J. Márquez Diez-Canedo: *Fundamentos de Teoría de Optimización*. Ed. Limusa, México, 1987.
- [6] J. Prawda Witenberg: *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones*. Vol. 1 Modelos Determinísticos. Ed. Limusa, México, 1991
- [7] J.J. Salazar González: *Programación Matemática*. Ed. Diaz de Santos, Tenerife, España, 2001
- [8] H.A.Taha: *Operations Research, an introduction*. Ed. Macmillan Publishing Co., Inc. N.Y. 1976.
- [9] R.J. Vanderbei: *Linear Programming, Foundations and Extensions*, Ed. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001
- [10] *Hydrocarbon Processing*, International edition. November 1996, vol. 75 No. 11

## ANEXO

### Descripción de materias primas e insumos requeridos para el proceso de producción:

	<b>Código</b>	<b>Producto</b>	<b>Unidades</b>
1	ISP	Istmo	Barriles
2	MAC	Maya	Barriles
3	VST	Despuntado	Barriles
4	POZ	Pozóleo	Barriles
5	PZC	Pesado Zona Cadereyta	Barriles
6	PZM	Pesado Zona Madero	Barriles
7	OLM	Olmeca	Barriles
8	TER	Terciario	Barriles
9	NCE	No Ceroso	Barriles
10	NC4	Butano	Barriles
11	RIC	Isobutano	Barriles
12	LIQ	Líquidos Del Gas Natural	Barriles
13	MBB	Mezcla Butanos PGPB	Barriles
14	GCS	Gasolinas Naturales	Barriles
15	NCA	Nafta Cangrejera	Barriles
16	GAM	Gasolinas Amorfas	Barriles
17	ISO	Isómero Cangrejera	Barriles
18	MET	Metanol	Toneladas
19	ETL	Etileno Cangrejera	Barriles
20	BE3	Benceno Cangrejera	Barriles
21	REC	Reformado Cangrejera	Barriles
22	ETH	Etanol	Barriles
23	RVC	Reformado	Barriles
24	ULI	Regular Golfo	Barriles
25	DSI	Diesel 0.05% Golfo	Barriles
26	RSI	Combustóleo (2%) Golfo	Barriles
27	LSI	Combustóleo (1%) Golfo	Barriles
28	RI1	Combustóleo (2%) Golfo T1	Barriles
29	RI2	Combustóleo (2%) Golfo T2	Barriles
30	RI3	Combustóleo (2%) Golfo T3	Barriles
31	RI4	Combustóleo (2%) Golfo T4	Barriles
32	UPI	Premium Golfo	Barriles
33	ALI	Alquilado Golfo	Barriles
34	MTB	MTBE Golfo	Barriles
35	JTI	Turbosina Golfo	Barriles
36	JMI	Kerosina Golfo	Barriles
37	DLI	Diesel 0.05% Golfo	Barriles
38	ULM	Regular Pacífico	Barriles
39	DSM	Diesel 0.22 % Pacífico	Barriles

40	RSM	Combustóleo (2%) Pacífico T0	Barriles
41	LSM	Combustóleo (1%) Pacífico	Barriles
42	NVM	Carb 10Ppm	Barriles
43	RM1	Combustóleo (2%) Pacífico T1	Barriles
44	RM2	Combustóleo (2%) Pacífico T2	Barriles
45	RM3	Combustóleo (2%) Pacífico T3	Barriles
46	RM4	Combustóleo (2%) Pacífico T4	Barriles
47	UPM	Premium Pacífico	Barriles
48	GRC	Gas Natural	Pies cúbicos
49	GR1	Gas Natural Delta Costo 1	Pies cúbicos
50	GR2	Gas Natural Delta Costo 2	Pies cúbicos
51	GR3	Gas Natural Delta Costo 3	Pies cúbicos
52	COL	Coal For CFE	Toneladas
53	CTF	Transporte industria local	\$
54	CTC	Transporte local CFE	\$
55	SWC	Costo Conversión CFE	\$
56	SWI	Costo Conversión Industria	\$
57	ECC	Sox CFE	Libras/uc
58	ENC	Nox CFE	Libras/uc
59	EII	Sox Industria	Libras/uc
60	ENI	Nox Industria	Libras/uc
61	EBS	Electricidad Base	Mwh/h
62	EPK	Electricidad Pico	Mwh/h
63	EBP	Electricidad Pico-Base	Mwh/h
64	INX	Inversión Refinación	\$
65	INY	Inversión Refinación Ref. Nueva	\$
66	INC	Inversión CFE	\$
67	OAM	Operación y Mantenimiento CFE	\$
68	BBS	Burbuja Nacional Sox (#/Fu)	Libras/uc
69	BBN	Burbuja Nacional Nox (#/Fu)	Libras/uc

### Descripción de productos finales:

	<b>Código</b>	<b>Nombre</b>	<b>Unidades</b>
1	MAG	Pemex Magna	Barriles
2	MGX	Pemex Magna zonas metropolitanas	Barriles
3	UPR	Pemex Premium	Barriles
4	UPX	Pemex Premium zonas metropolitanas	Barriles
5	DSL	Pemex Diesel	Barriles
6	JET	Turbosina	Barriles
7	FOM	Combustóleo alto azufre	Barriles
8	HSF	Combustóleo medio azufre	Barriles
9	LSF	Combustóleo bajo azufre	Barriles
10	SKK	Autoconsumo de combustóleo en refinerías	Barriles

11	FOC	Combustóleo para sector eléctrico y gran industria	Barriles
12	FOD	Combustóleo para industria de cemento	Barriles
13	FOI	Combustóleo para la pequeña industria	Barriles
14	GGC	Gas natural para sector eléctrico y gran industria	Pies cúbicos
15	GGI	Gas natural para la pequeña industria	Pies cúbicos
16	DIC	Diesel para sector eléctrico y gran industria	Barriles
17	DII	Diesel para la pequeña industria	Barriles
18	COC	Carbón para sector eléctrico	Toneladas
19	COD	Carbón para industria del cemento	Toneladas
20	CKE	Carbón para sector eléctrico	Toneladas
21	CKD	Coque para industria del cemento	Toneladas
22	ECN	Combustóleo pequeña industria no sustituible	Barriles
23	EC0	Combustóleo pequeña industria sustituible sin costo	Barriles
24	EC2	Combustóleo pequeña industria sustituible con costo	Barriles
25	EGN	Gas natural pequeña industria	Pies cúbicos
26	EDS	Diesel industrial	Barriles
27	EFF	Combustóleo industria cemento	Barriles
28	EFN	Combustóleo gran industria no sustituible	Barriles
29	EF0	Combustóleo gran industria sustituible sin costo	Barriles
30	EF2	Combustóleo gran industria sustituible con costo	Barriles
31	EGG	Gas natural gran industria	Pies cúbicos
32	EBS	Energía eléctrica base	MWwh
33	EPK	Energía eléctrica pico	MWwh
34	EBP	Energía eléctrica base-pico	MWwh
35	ASP	Asfalto	Barriles
36	BZN	Benceno	Toneladas
37	PAQ	Polialquilado	Toneladas
38	OTX	Ortoxileno	Toneladas
39	XYN	Mezcla de xilenos	Toneladas
40	TLN	Tolueno	Toneladas
41	EBN	Etilbenceno	Toneladas
42	CXN	Ciclohexano	Toneladas
43	HXN	Hexano	Toneladas
44	HUS	Husos	Toneladas
45	LUB	Lubricantes	Toneladas
46	NEP	Neutro pesado	Toneladas
47	NEU	Neutro	Toneladas
48	TTR	Tetrámero	Toneladas
49	PRF	Parafinas	Toneladas
50	BUT	Mezcla de butanos	Barriles
51	C4Y	Butileno	Barriles
52	LPG	Gas licuado	Barriles
53	PRP	Propileno	Barriles
54	SUL	Azufre	Toneladas

## Descripción de plantas de refinación

SCR1	Unidad de crudo
SVAC	Unidad de vacío
SGHT	Hidrotratador de gasóleos
SCCU	Desintegración catalítica
SNHT	Hidrotratamiento de naftas
SREF	Reformadora
SKHT	Hidrotratamiento de kerosinas
SDHT	Hidrotratamiento de destilados
SISX	Isomerización
SDCX	Coquizadora
SSGP	Planta saturadora de gas
SUGP	Planta desaturadora de gas
SUTL	Generación de servicios auxiliares
SPFS	Utilización de combustibles
SSRU	Recuperación de azufre
SHMP	Planta de Hidrógeno
SKWH	Generación de electricidad
SVBR	Viscorreductora
STRF	Transferencias
SINV	Inversión
SGHX	Hidrotratamiento de gasolina catalítica
SALX	Planta de alquilación
SRDS	H-Oil
SIBU	Fraccionamiento de isobutileno
SMTB	MTBE
SCHT	Planta de hidrotamiento de nafta catalítica
STAM	Planta de TAME
SIAP	Planta de Isoamileno
SNLH	Hidrotratamiento de nafta ligera
SIS4	Isomerización de butanes

## Descripción de tecnologías para generación de energía eléctrica

CNM	Vapor Mayor
CNN	Vapor Menor
BNC	Ciclo combinado
BNT	Turbogas
BNI	Combustión interna
CNO	Carbón
CND	Duales
CKK	Coque

## **Nodos para refineries y puntos de importación de productos petrolíferos**

<b>Código</b>	<b>Nombre</b>
B	Refinería de Tula
C	Refinería de Salamanca
D	Refinería de Salina Cruz
E	Refinería de Minatitlán
F	Refinería de Cadereyta
G	Refinería de Madero
f	Refinería nueva localización
H	Costa Pacifico
I	Costa Golfo

## **Nodos eléctricos**

<i>Código</i>	<i>Nombre</i>
g	Acapulco
U	Aguascalientes
h	Campeche
(	Chihuahua
{	Gómez Palacio
2	Guaymas
0	Juárez
A	Lázaro Cárdenas
<	Madero
Y	Manzanillo
4	Mazatlán
[	Monterrey
d	Naco
8	Puebla
c	Reynosa
1	Rosarito
]	Sabinas
Q	Salamanca
3	Topolobampo
M	Tula
Z	Veracruz

## **Tipos de clientes para combustibles industriales**

<b>Código</b>	<b>Tipo de industria</b>	<b>Tipo de combustible</b>	<b>Control ambiental SOX y NOX</b>
HFB	Grande	Combustóleo alto azufre	SOX y NOX
HFS	Grande	Combustóleo alto azufre	SOX
HFN	Grande	Combustóleo alto azufre	NOX
HFO	Grande	Combustóleo alto azufre	Ninguno
MFN	Grande	Combustóleo medio azufre	NOX
MFO	Grande	Combustóleo medio azufre	Ninguno
LFN	Grande	Combustóleo bajo azufre	NOX
LFO	Grande	Combustóleo bajo azufre	Ninguno
HFC	Cemento	Combustóleo alto azufre	Ninguno
MFC	Cemento	Combustóleo medio azufre	Ninguno
HFI	Pequeña	Combustóleo alto azufre	Ninguno
MFI	Pequeña	Combustóleo medio azufre	Ninguno
LFI	Pequeña	Combustóleo bajo azufre	Ninguno
GGN	Grande	Gas natural	NOX
GGO	Grande	Gas natural	Ninguno
GGI	Pequeña	Gas natural	Ninguno
DDN	Grande	Diesel	NOX
DDO	Grande	Diesel	Ninguno
DDI	Pequeña	Diesel	Ninguno
KKC	Cemento	Coque de petróleo	Ninguno
CCC	Cemento	Carbón	Ninguno