



00550
6

**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

INSTITUTO DE GEOFÍSICA.

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
DE LA TIERRA**

**“MODELACIÓN 1D DIRECTA E INVERSA DE
DATOS DE RADAR DE PENETRACIÓN
TERRESTRE”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (EXPLORACIÓN)

P R E S E N T A:

OSCAR DÍAZ MOLINA.

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. RENÉ E. CHÁVEZ SEGURA**



CIUDAD UNIVERSITARIA. MÉXICO D. F. 2003

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria.

A mi Madre y Hermano, quienes me han dado todo sin contemplaciones. Por quienes anhelo ser digno del ejemplo que me han brindado. A quienes amo con todo el corazón, y por quienes, en todo momento, son mi inspiración en la vida. Y quienes, junto con mi padre, nunca dejaran de ser parte de mi vida.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

In memoriam.

A mis abuelos.

Cuando muera no quiero recordar,
ni reír, ni llorar, ni sentir.
Mi latir dejará de sonar, por fin,
mi sonrisa de iluminar y...
ya nunca me verán vagando sin lugar.

El miedo me dejará en paz
en mi cuerpo no cabe un alma,
porque lejano él mío volará.
Te llevaste lo que más quería, Muerte, sin piedad.
temerosos días ¿Quién la arrancará?
La melancolía que se apodera de mis entrañas,
esa alegría en el rostro que se lleva la nostalgia.

Hoy al alba, siento que morir no es nada,
apaguese mi vida como de un soplo una vela fundida,
donde ya nada araña el pellejo de esperanza que quedaba.
Muerte! Aprisioname y no me dejes aquí en la vida.
Llevame donde los sentimientos ya no sientan
déjalos que lentamente me cierren sus puertas.

Natalia

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos.

Por medio de estas líneas quiero agradecer a todos aquellos que de alguna forma contribuyeron a la realización de éste trabajo, así como a mi formación profesional y personal.

Al Dr. René E. Chávez Segura, por su confianza en la dirección de esta tesis, así como por su dedicación y ante todo por su amistad en todos estos años.

Muy en especial a la Dra. Leticia Flores Márquez y al Dr. Andrés Tejero Andrade por sus múltiples sugerencias durante el desarrollo de esta tesis. A mis sinodales Dr. Oscar Campos Enríquez, Dr. Carlos Mortera Gutiérrez y Dra. Dora Carreón Freyre, por sus comentarios y tiempo dedicado en la revisión de este trabajo.

Al Departamento de Exploración y Geomagnetismo del Instituto de Geofísica, por los recursos prestaos en la elaboración de este proyecto. Al personal del mismo, en especial a los Mtros. Gerardo Cifuentes Nava y Francisco Correa Mora. Así como al Dr. Enrique Cabral Cano por haberme ayudado, en todo momento, en mi formación profesional y por brindarme su amistad en todo este tiempo.

A mis amigos Edgar, Misael, Guillermo, Ricardo, Enrique, Selene y Adriana por brindarme su ayuda y amistad en todo momento. A la familia López que a pesar de la lejanía, siempre estarán en mi corazón. A Rocío por enseñarme otra forma de ver la vida. A mis compañeros y maestros del Posgrado con quienes he compartido.

A mis tíos y primas con quienes he compartido tanto, esperando que siga fortaleciéndose nuestra familia.

Gracias al CONACYT por proporcionarme los recursos económicos mediante la beca con registro 165581, y a la beca parcial de DGEP (of. DGEP/SPIAP/PBN/937/2001) para la realización de esta maestría.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione.

John von Neumann (1903-1957)

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Índice.	
Resumen.	2
1. Introducción.	3
2. Radar de Penetración Terrestre (GPR).	6
2.1. Antecedentes.	6
2.2. Modelado.	8
3. Ecuaciones del Campo Electromagnético.	10
3.1. Ecuaciones de Maxwell.	10
3.2. Relaciones Constitutivas.	11
3.3. Condiciones de Frontera.	11
3.4. Propiedades Eléctricas de la Materia.	12
3.5. Corrientes Eléctricas.	18
3.6. Ecuaciones de Maxwell para Medios Homogéneos.	21
3.7. Propagación de las Ondas Electromagnéticas.	22
3.8. Propagación de las Ondas Planas en Medios Dieléctricos Perfectos.	35
3.9. Propagación de Ondas Planas en Medios Disipativos.	37
4. Modelo Directo.	50
4.1. Teoría.	50
4.2. Resultados.	56
4.3. Aproximación para un Medio Dieléctrico Disipativo.	62
4.4. Casos Especiales.	66
5. Modelo Inverso.	69
5.1. Teoría.	69
5.2. Resultados.	79
5.3. Aproximación para un Medio Dieléctrico Disipativo.	88
6. Discusión y Conclusiones.	95
7. Bibliografía.	97
Apéndices.	100
A. Campos Oscilatorios.	100
B. Concepto de Onda Plana.	102
C. Modelos Simplificados.	104
D. Polarización TE y TM.	106
E. Índices de Reflexión y Refracción.	108

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Resumen.

En la prospección electromagnética se tienden a usar modelos aproximados para determinar el comportamiento de las ondas electromagnéticas en el subsuelo. En general la propagación de las ondas electromagnéticas caen en dos extremos: el de dieléctricos perfectos y buenos conductores. Para el rango de frecuencias en las que opera el Radar de Penetración Terrestre (GPR), las corrientes de conducción son pequeñas ante las corrientes de desplazamiento, pero no despreciables. Por lo que los materiales geológicos tienden a comportarse como dieléctricos disipativos.

Para analizar la forma en la que los materiales se comportan ante el incremento de las frecuencias, se analiza la relación que existe entre las corrientes de conducción y de desplazamiento (Tangente de pérdida). Este comportamiento se clasifica en tres regiones: conductores, dieléctricos disipativos y dieléctricos perfectos. Mediante un análisis de la atenuación, fase, velocidad y profundidad de penetración se determinan las ecuaciones que describen la propagación de la onda electromagnética en cada una de las regiones. De esta forma se comparan los rangos de frecuencia del GPR, con las regiones de validez de las aproximaciones de los medios como conductores y dieléctricos disipativos. De esta forma se determinan las frecuencias de transición en las interfaces de las diferentes regiones y las ecuaciones correspondientes para modelar un medio mediante aproximaciones válidas para el rango de frecuencias, y de esta forma usar las ecuaciones adecuadas para la prospección del GPR.

El modelo directo del GPR se resuelve mediante el cálculo del campo eléctrico en superficie mediante una fórmula de recurrencia para un medio estratificado unidimensional, en el que se hacen variar las propiedades eléctricas del medio. Las constantes de amplitud del campo eléctrico se determinan, en cada una de las capas, por la aplicación de condiciones de frontera en cada límite de capas y estableciendo condiciones iniciales para un frente de onda plano y una polarización transversal eléctrica (TE). El problema se resuelve en el dominio de las frecuencias y una vez determinado el campo eléctrico en superficie se acopla un pulso de Ricker; finalmente se lleva este resultado al dominio del tiempo para obtener el radargrama sintético característico del modelo propuesto.

El problema inverso del GPR se resuelve mediante un proceso de linealización basado en las derivadas de Fréchet del campo eléctrico en superficie, respecto de cada una de las propiedades magnéticas y eléctricas (μ , σ y ϵ). Mediante este procedimiento se separan las contribuciones que cada propiedad tiene en el campo eléctrico. A través del uso de las aproximaciones para dieléctricos disipativos el cálculo de las derivadas del campo eléctrico se obtienen con mayor facilidad. De esta forma el problema inverso requiere el cálculo de las constantes de amplitud del campo eléctrico en cada capa mediante el problema directo, para de esta forma evaluar las derivadas de Fréchet y poder aislar las contribuciones de cada propiedad, que representan las incógnitas. Finalmente se utiliza el método de Descomposición del Valor Singular para poder estimar dichas propiedades.

1. Introducción.

El Radar de Penetración Terrestre (GPR), es una técnica de prospección geofísica basado en la emisión de pulsos electromagnéticos, que se propagan en el subsuelo mediante una antena en la superficie. El pulso electromagnético es reflejado y dispersado por las estructuras geológicas, y por las características anómalas presentes en el subsuelo. La señal reflejada es registrada por otra antena (en un sistema mono-estático una sola antena transmite y registra), donde se genera una serie de registros espacio-tiempo de características similares a los registros sísmicos. Al desplazar la(s) antena(s) sobre la superficie se registra el conjunto de reflexiones producidas, con lo que se obtiene una imagen bidimensional de las señales electromagnéticas bajo el perfil de radar.

La forma en el que las ondas electromagnéticas se transmiten por el medio está regida por la Ecuación de onda de Maxwell, que determina los efectos de transmisión, reflexión, atenuación y dispersión. Los parámetros magnéticos y eléctricos (permeabilidad magnética, permitividad y conductividad eléctrica) de los materiales del medio a investigar son los que controlan la propagación de la señal. Por lo que la propagación de las ondas electromagnéticas depende de dos factores: de la naturaleza del medio (μ , ϵ y σ) y de la naturaleza de la onda electromagnética (ω).

Desde el punto de vista de la naturaleza del medio, la propagación de la onda electromagnética muestra dos extremos, el de un dieléctrico perfecto y el de un conductor perfecto. Sin embargo el comportamiento de la mayoría de las rocas se encuentra dentro de un rango intermedio, el de dieléctricos disipativos. Desde la naturaleza de la onda, en los campos variables, la propagación puede darse también en dos extremos: los modelos cuasiestacionarios y ondulatorios. En el primero los campos electromagnéticos varían muy poco respecto del tiempo, es decir a frecuencias bajas; para el otro caso los campos electromagnéticos dependen grandemente del tiempo esto se refiere a altas frecuencias. Para el caso del GPR el rango de frecuencias (1- 1000 MHz) se encuentra dentro de una región intermedia, la de dieléctricos disipativos.

Según Davis y Annan (1989), la permitividad eléctrica es suficiente para caracterizar las propiedades eléctricas de los materiales a altas frecuencias, dado que las propiedades de polarización dominan a las propiedades conductivas para muchos materiales geológicos. Sin embargo, a pesar de que las secciones típicas de GPR muestran una multiplicidad de reflejos en la señal cuyo origen es relacionado solamente a variaciones en la permitividad eléctrica, existe la posibilidad de que algunas de estas reflexiones puedan relacionarse a variaciones en conductividad eléctrica, que es comúnmente excluida con base a la frecuencia de operación del GPR, los cuales están diseñados para responder a variaciones en permitividad eléctrica (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996).

En general, la conductividad eléctrica es considerada un parámetro irrelevante en la producción de reflexiones, excepto en el caso de objetos metálicos que tienden a reflejar toda la energía incidente, e impiden la transmisión y recuperación de energía en regiones mas profundas. Por otro lado, es bien conocido que junto con la dispersión geométrica, la

conductividad eléctrica es la responsable de la mayoría de las atenuaciones de las señales de GPR en el terreno (Turner, 1992; Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996).

Turner (1992) muestra cómo la conductividad eléctrica, y en particular la conductividad dependiente de la frecuencia, afectan los patrones de radiación de las antenas y la reflexión y propagación de las ondas, e ilustra cómo el conocimiento de estos efectos puede ser usado para mejorar la adquisición de datos, su procesamiento e interpretación. Las variaciones de permeabilidad magnética, por otro lado, son comúnmente excluidas debido a que en la mayoría de las situaciones afectan la velocidad mucho menos que la permitividad eléctrica.

En este trabajo de investigación se realiza un análisis de la forma en la que las propiedades eléctricas y magnéticas afectan la propagación de las ondas electromagnéticas: es decir de la atenuación (profundidad de penetración) y fase (velocidad y longitud de onda). Se determinan los diferentes comportamientos que los materiales presentan ante el incremento de la frecuencia, y de esta forma determinar las ecuaciones que caracterizan dicho comportamiento. Este análisis se realiza mediante el estudio de las corrientes de conducción y de desplazamiento, es decir de la tangente de pérdida; que cuantifica la proporción de estos dos tipos de corriente ante el incremento de las frecuencias. Se determinan las frecuencias de transición entre dieléctricos disipativos y buenos conductores, y se comparan con la región de frecuencias del GPR, para determinar cuales son las ecuaciones adecuadas, para modelar un medio geológico en particular. Mediante el análisis anterior se simplifican las ecuaciones que describen la propagación de la onda, y es mediante estas simplificaciones que se resuelve el problema directo.

El problema directo plantea el problema de determinar un radargrama característico de un modelo estratificado unidimensional, en el que se hacen variar las tres propiedades eléctricas y magnéticas (ϵ , σ y μ). Por lo que para resolver el problema se requiere el cálculo del campo electromagnético en la superficie del modelo estratificado. Para ello es necesario obtener la solución a la ecuación de onda en el dominio de las frecuencias. Esto se resuelve considerando que un frente de ondas planas incide normalmente sobre el modelo estratificado, con las condiciones de frontera correspondientes a la continuidad de los campos en los límites de capas. Mediante el procedimiento propuesto por Wait (1970) se obtiene una relación de recurrencia para la determinación de las constantes de amplitud de los campos en cada capa.

El cálculo del campo electromagnético en superficie se realiza mediante una solución analítica, en el dominio de las frecuencias. A esta solución se acopla un pulso de Ricker, y mediante la transformada de Fourier se transforma este resultado al dominio del tiempo, para la obtención del radargrama sintético característico del medio estratificado (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996). Esta transformación se realiza mediante la integración numérica.

El problema inverso plantea la solución de ecuaciones no lineales, pues las derivadas de estos campos están en función de las propiedades que se pretenden estimar (ϵ , σ y μ). Para ello se aplica un proceso de linealización mediante el cálculo de las derivadas de Fréchet del campo eléctrico en superficie (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996). Estas indican

la forma en que cada propiedad afecta a el campo eléctrico en superficie. Es decir la linealización del problema implica la separación de las contribuciones que cada propiedad tiene sobre el campo eléctrico. El problema comprende de esta forma el cálculo, en cada capa, de las derivadas del campo eléctrico respecto de cada propiedad.

Para la optimización del sistema se requiere el planteamiento de un modelo inicial, en donde por medio del método de Descomposición del Valor Singular se estiman los parámetros. Lo que nos permite encontrar la solución al problema inverso mediante un proceso iterativo, lo que implica el cálculo de las constantes de amplitud del campo eléctrico a través del método directo.

Simplificando las ecuaciones para medios dieléctricos disipativos y considerando que los materiales geológicos presentan valores de permeabilidad magnética iguala a la del vacío, se facilita el cálculo de las derivadas de Fréchet. Con lo que los parámetros a estimar se reducen a solo dos: la conductividad y la permitividad eléctrica. Finalmente el planteamiento del parámetro a estimar, requiere del conocimiento de la otra propiedad.

En resumen, en el segundo capítulo se plantea la forma en que el GPR registra la información; así como las características a considerar para la simplificación del problema. En el tercer capítulo se hace un análisis de las constantes de propagación, y del comportamiento de los materiales geológicos ante el incremento de la frecuencia, estableciendo las frecuencias de transición de un dieléctrico disipativo y un buen conductor. A demás del planteamiento de la solución a la ecuación de onda par poder resolver el problema directo. En el capítulo cuarto se plantea el problema directo del GPR para un medio estratificado unidimensional, y en donde se comparan los resultados obtenidos entre las aproximaciones de dieléctricos disipativos y conductores.

En el quinto capítulo se plantea el problema inverso, en donde se discuten las contribuciones que cada propiedad tiene sobre el campo eléctrico, así como de las implicaciones que el modelo inicial tiene en el proceso de optimización, y en el que al igual que en el método directo se simplifican las ecuaciones mediante las aproximaciones de dieléctricos disipativos. En el sexto capítulo se discuten los resultados y conclusiones de este trabajo de investigación. Finalmente se añaden una serie de apéndices que aclaran algunos aspectos relacionados con la conceptualización de las ecuaciones.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2. Radar de Penetración Terrestre (GPR).

2.1. Antecedentes

El método de georadar inicia su aplicación en los años 70, con el propósito de determinar espesores de hielo y glaciares (Annan y Davis, 1976). La técnica de GPR puede ser aplicada en la exploración de minerales conductivos y definir la geología alrededor de estructuras de interés económico (Ulriksen, 1982).

En arqueología es posible detectar estructuras relacionadas con antiguas edificaciones y restos de civilizaciones de interés arqueológico, para el incremento en la eficiencia de las excavaciones (Butler et al., 1994). En ingeniería civil algunos de los objetivos pueden ser evaluación de fracturas, cavidades, localización de tuberías, cables subterráneos y espesores de muros; esta técnica es sumamente útil pues se evita la destrucción de las estructuras existentes (Ulriksen, 1982; Tejero et. al., 2002).

Debido a la sensibilidad de la técnica de GPR a la presencia de agua, esta técnica puede ser aplicada en geohidrología: para determinar mantos freáticos y efectuar estudios en la distribución y contaminación de fluidos (Brewster and Annan, 1994). En geología estructural permite la localización y continuidad de fallas, y correlacionar formaciones estratigráficas (Doolittle and Asmussen, 1992; Fisher et al., 1992; Stevens et al., 1995). La técnica de GPR puede aplicarse en la evaluación y monitoreo de sitios ambientales, detección de fluidos de lixiviados, plumas contaminantes y rellenos.

Los pulsos electromagnéticos empleados en la técnica GPR se encuentran en el intervalo de frecuencia de 1MHz a 1.2 GHz. El sistema del GPR genera una diferencia de voltaje que varía con el tiempo (un pulso de voltaje), con una duración muy corta y con un rango de frecuencia adecuado (frecuencia central). Las antenas del GPR se encargan de transformar la señal de voltaje en una onda electromagnética que es irradiada al subsuelo. La onda electromagnética es reflejada por el medio y estas reflexiones son captadas mediante otra antena, que traduce dicha información en una señal de voltaje que es registrada en función del tiempo (Annan, 1992; Annan and Chua, 1992).

Las antenas son dispositivos capaces de radiar y recibir ondas electromagnéticas que mediante un transmisor adapta la entrada de la señal de voltaje al medio (Figura 2.1), y que mediante un receptor adapta las reflexiones a una señal de voltaje de salida (Peterson et. al., 1998; Taflove, 1998).

La forma de relacionar las señales de entrada y de salida está dado por el factor de eficiencia del sistema Q ; este factor es una medida de la proporción (en decibeles) de la energía generada P_{TX} y de la energía registrada con ruido P_{RX} (Annan, 1992; Annan and Chua, 1992):

$$Q = \left[\frac{P_{TX}}{P_{RX}} \right]$$

2.1

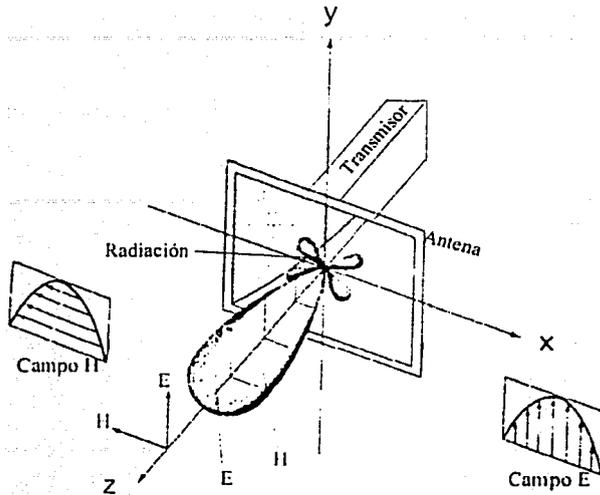


Figura 2.1.- Modo de radiación de las antenas, en un sistema GPR (modificado de Peterson et. al., 1998 y Taflove, 1998).

Para entender este factor de eficiencia es necesario referirse a la ecuación del Radar (Annan, 1992; Annan and Chua, 1992):

$$P_{RX} = \frac{\xi_{TX} \xi_{RX} G_{RX} G_{TX} g \Sigma A e^{-4\alpha a}}{(4\pi r^2)^2} P_{TX} \quad 2.2$$

Para el caso de un dipolo:

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad 2.3$$

La ecuación del radar describe como los parámetros del sistema se combinan con parámetros del medio para determinar el nivel de energía que el sistema registra; de ésta forma el factor de eficiencia determina la región en la que el GPR puede ver y detectar a anomalías de ciertas características (Annan, 1992).

La energía que es pasada del transmisor a la antena presenta pérdidas, estas pérdidas son referidas mediante la eficiencia del Transmisor (ξ_{TX}). Esta energía es irradiada al subsuelo mediante el patrón de direccionalidad de la antena, generalmente llamado directividad de la antena o ganancia directiva (G_{TX}). La energía se propaga a través del medio y es atenuada por pérdidas eléctricas y por la dispersión esférica del frente de onda, además de que parte de la energía es dispersada por el medio ($e^{-2\alpha h}/4\pi h^2$). La energía que es reflejada depende del objetivo y de la función de ganancia (ΣA y g). Además la energía reflejada sufre una atenuación por la divergencia esférica y por las propiedades del medio ($e^{-2\alpha h}/4\pi h^2$). Finalmente la señal adquirida por el receptor depende de la direccionalidad de la antena y

el área efectiva (G_{RX}) y finalmente ésta señal es reducida por el factor de eficiencia (ξ_{RX}) de la antena receptora (Annan, 1992; Annan and Chua, 1992).

Como puede verse el modelar datos del GPR, implica mucho más de solo la forma en la que la onda electromagnética se propaga en el medio. Pues para tomar todas las variables del sistema implica el conocer los parámetros del mismo (ξ_{TX} , G_{TX} , G_{RX} , ξ_{RX} , etc.) para poder aislar la forma en la que la onda electromagnética es modificada por el medio.

2.2. Modelado.

El modelado en electromagnetismo involucra la solución de las ecuaciones electromagnéticas bajo ciertas condiciones. Estas soluciones se plantean a través de un sistema de ecuaciones diferenciales, que en casos muy simples se pueden integrar mediante funciones conocidas. La solución analítica es para cualquier problema la mejor solución posible. Es decir que nuestra solución es exacta. Debido a esto es que una solución analítica permite el estudio de cualquier aspecto de la geometría del medio, de los campos y de las interacciones entre ellos. Esta solución ideal sólo es posible obtenerla en ciertos casos; sin embargo, en la mayoría de ellos es demasiado compleja (Sadiku, 2001).

Los mejores métodos conocidos son aquellos que se basan en la solución directa de ecuaciones diferenciales parciales por separación de variables. En estos métodos las ecuaciones, de los campos electromagnéticos, son reformulados en forma de una ecuación diferencial parcial de segundo orden mediante cambios de variable. Dependiendo de la Ecuación esta puede ser resuelta rápidamente por la integración directa o por la definición de las variables. Una vez establecidas las variables, éstas se integran sobre un dominio dado, en el que se introducen las condiciones de frontera que completan el proceso (Sadiku, 2001).

En la mayoría de los casos la solución de las ecuaciones tipo Laplace y Poisson están basadas en la separación de variables; estas soluciones normalmente ocurren en términos de funciones armónicas, para el caso de coordenadas cartesianas.

Los métodos analíticos aunque son extremadamente poderosos, son limitados a un pequeño grupo de casos. Estos incluyen problemas unidimensionales, así como casos bidimensionales con alta simetría y algunos casos tridimensionales. Aunque son muy pocos casos en los que podemos encontrar una solución analítica, estos tienen una gran importancia para la verificación de los métodos numéricos y el entendimiento del fenómeno analizado (Jarem and Banerjee, 2000)

En el caso de la propagación de onda es, en muchos casos, de mayor utilidad la solución en una dimensión; esto desde el punto de vista de su simpleza, además de que provee información de todos los aspectos de la propagación de ondas. A diferencia de la solución completa que provee de poca información adicional sin contar de lo complicado del proceso de solución (Sadiku, 2001).

Aunque en muchos casos prácticos no es posible obtener una solución analítica, y se necesite de aproximaciones numéricas para encontrar una solución. El encontrar soluciones que satisfagan dichas ecuaciones requiere el uso, en la mayoría de los casos, de combinaciones de métodos analíticos y numéricos, para realizar las integraciones.

El modelado de los datos del Radar de Penetración Terrestre (GPR), puede darse mediante tres modelos (Annan and Chua, 1992):

- ❖ Ecuación del radar (Q)
- ❖ Radargramas sintéticos
- ❖ Sistema de rayos

El modelado de la ecuación del radar implica simplificar considerablemente las características del subsuelo, y el conocer los parámetros del sistema; es decir conocer el diseño de las antenas, de los transmisores y receptores. Por su parte el método de sistema de rayos implica el modelado de la propagación de onda en estructuras con geometrías complejas, pero con mucho tiempo de cómputo. Dentro de los métodos numéricos para resolver dicho problema destacan el método de diferencias finitas y de elemento finito. Este método provee información sobre los tiempos de arribo pero muy poca sobre la amplitud de las reflexiones (Annan and Chua, 1992).

En éste trabajo se aborda el problema del modelado del GPR mediante radargramas sintéticos, el cual se modela mediante un medio estratificado, en el que las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales varían. Este método es de gran utilidad para determinar la forma en la que la naturaleza del medio modifica la propagación de las ondas electromagnéticas.

De ésta manera, el modelado directo para el GPR se resuelve en el sentido de que conocidas las variaciones de conductividad eléctrica (σ) y permitividad dieléctrica (ϵ) en un modelo de capas planas, se puede calcular el campo eléctrico y magnético que generan un radargrama sintético. Como fuente, se considera un frente de ondas planas que inciden verticalmente sobre un medio estratificado unidimensional de n-capas horizontales (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996).

Mediante el procedimiento propuesto por Wait (1970) se resuelve el problema directo, con el que se obtiene el campo eléctrico en la superficie asociado con un modelo estratificado de capas horizontales, cuyas tres propiedades electromagnéticas varían de capa a capa. La solución se obtuvo en la forma estándar de un problema de valores a la frontera considerando ondas planas. Se utiliza la Transformada Inversa de Fourier para incorporar el pulso del GPR (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996).

El modelar datos de GPR es útil cuando es necesario proveer información cuantitativa acerca de las propiedades y de la geometría del subsuelo. El sistema de GPR mide y registra amplitudes del campo eléctrico como una función espacial de la posición y orientación, así como del tiempo.

3. Ecuaciones del Campo Electromagnético.

3.1. Ecuaciones de Maxwell.

La teoría electromagnética comprende el estudio de las leyes de propagación de los campos electromagnéticos en un medio conductor heterogéneo de origen natural o artificial. La base de esta teoría son las ecuaciones de Maxwell, las cuales representan la formulación matemática de las principales leyes del electromagnetismo (Wait, 1970; Chen-To, 1971 y Escobar-Salguero y Cortés-Soto, 2000):

$$\nabla \times E = \text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad 3.1$$

$$\nabla \times H = \text{rot}H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad 3.2$$

$$\nabla \cdot D = \text{div}D = q \quad 3.3$$

$$\nabla \cdot B = \text{div}B = 0 \quad 3.4$$

Donde H es el vector de Intensidad Magnética [A/m].

B es el vector de Flujo Magnético o inducción Magnética [T = Wb/m²].

E es el vector de Intensidad Eléctrica [V/m].

D es el vector de Flujo Eléctrico, o inducción eléctrica [C/m²].

J es el vector de Densidad de Corriente (conducción) [A/m²].

q es la Densidad de Carga [C/m³].

La primera de estas ecuaciones (3.1) relaciona a E con las variaciones de B, y en esencia es la expresión de la ley de la inducción electromagnética de Faraday. Esta ecuación es la ley básica de la inducción, y establece que un campo magnético puede producir una corriente en una trayectoria cerrada si el flujo magnético está variando con el tiempo. El signo negativo de la ecuación está dado por la ley de Lenz, que establece que el voltaje inducido por el flujo del Campo variable B tiene una polaridad tal, que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da lugar a un flujo que se opone al cambio de flujo magnético. Cuando un inductor se mueve a través de un campo estacionario B, la polaridad de la ley de Lenz siempre será tal que el conductor experimenta fuerzas magnéticas que se oponen al movimiento (Escobar-Salguero y Cortés-Soto, 2000).

La segunda Ecuación (3.2) es conocida como la Ley de Ampere, y establece que el campo magnético es generado tanto por corrientes de conducción (J) como por las de desplazamiento ($\partial D/\partial t$).

La tercera Ecuación (3.3) indica que las fuentes del vector de inducción eléctrica (dieléctrica) son las cargas (q), es decir representa la expresión matemática de la ley de Coulomb.

La cuarta Ecuación (3.4) indica la ausencia de fuentes del campo magnético, es decir de las cargas magnéticas. Pues a diferencia del campo de inducción eléctrica (D), las líneas del campo B son continuas y forman curvas cerradas.

3.2. Relaciones Constitutivas.

Las ecuaciones de campo (3.1, 3.2, 3.3 y 3.4) son escritas como ecuaciones diferenciales lineales. Esta importante propiedad de las ecuaciones de campo se define por las interacciones de los campos electromagnéticos con los materiales y les relacionamos una linealidad (Escobar-Salguero y Cortés-Soto, 2000; Sadiku, 2001).

Las ecuaciones 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 están descritas por relaciones vectoriales, y éstas son cuatro cantidades de campo (E, H, D y B). Las primeras dos ecuaciones y las últimas dos no son independientes, es decir podemos escribir a las últimas mediante las primeras dos. Por lo que es necesario incluir relaciones constitutivas para poder completar el sistema de ecuaciones (Nathan Ida, 1995):

$$D = \epsilon E \quad 3.5$$

$$B = \mu H \quad 3.6$$

Donde ϵ es la permitividad eléctrica (F/m) y μ es la permeabilidad magnética (H/m). Además, otra relación que se debe tener en cuenta, es la relación empíricamente establecida, que se cumple en la mayoría de los medios, de la ley de Ohm en forma diferencial, la que establece que la densidad de corriente J es directamente proporcional al vector E (Nathan Ida, 1995):

$$J = \sigma E \quad 3.7$$

Donde σ es la conductividad eléctrica del medio (Siemens).

3.3. Condiciones de Frontera.

En los límites entre las diferentes capas del subsuelo los parámetros ϵ , μ y σ ($1/\rho$) pueden variar bruscamente, lo que a su vez ocasiona que los campos E, D, B y H también varíen bruscamente. Estos cambios están basados en las relaciones constitutivas anteriores.

Si se toma por ejemplo a la relación 3.6, suponemos un campo magnético (H) y asumimos dos materiales de contacto, con diferentes valores de permeabilidad magnética (μ), se tendrán diferentes flujos de campo magnético (B). Es por ello que para obtener el campo electromagnético en la superficie de la Tierra es necesario, además de las ecuaciones de Maxwell, conocer las condiciones de frontera. Es decir los vectores del campo electromagnéticos infinitesimalmente cercanos a la superficie de separación de dos medios con distintas propiedades (Chen-To Tai, 1971).

Para el caso más general, cuando la superficie que separa a los medios (i) y (i+1) es una superficie lisa S, y los parámetros de cada uno de los medios son constantes o cambian gradualmente, son válidas las siguientes relaciones:

❖ Para las componentes normales del campo:

$$\begin{aligned} B_n^{(i+1)} - B_n^{(i)} &= 0 & 3.8 \\ D_n^{(i+1)} - D_n^{(i)} &= q & 3.9 \end{aligned}$$

Donde q es la densidad de la carga eléctrica superficial en la frontera S, igual a la cantidad de carga eléctrica por unidad de superficie. Por lo tanto, la componente normal del campo magnético B es continua al pasar del medio (i+1) al (i), y la componente normal de D varía discontinuamente y esta discontinuidad es igual a la densidad de carga superficial en la interface.

❖ Para las componentes tangenciales del campo:

$$\begin{aligned} H_\tau^{(i+1)} - H_\tau^{(i)} &= J & 3.10 \\ E_\tau^{(i+1)} - E_\tau^{(i)} &= 0 & 3.11 \end{aligned}$$

Donde J es la densidad de corriente eléctrica superficial. La densidad de corriente superficial se diferencia de cero sólo en la superficie de los conductores ideales. Para el caso de un medio homogéneo e isotrópico las ecuaciones (3.9) y (3.10) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_n^{(i+1)} - D_n^{(i)} &= 0 & 3.12 \\ H_\tau^{(i+1)} - H_\tau^{(i)} &= 0 & 3.13 \end{aligned}$$

Donde con el subíndice τ se representa la componente tangencial a la superficie S. Con ayuda de las ecuaciones 3.8 a 3.13 y las ecuaciones de relación 3.5, 3.6 y 3.7, se pueden obtener las relaciones de continuidad para las componentes normal y tangencial de los vectores E, D, B y H (Chen-To Tai, 1971).

3.4. Propiedades Eléctricas de la Materia.

Las propiedades eléctricas y magnéticas de las rocas, suelos y fluidos controlan la velocidad de propagación de la onda electromagnética y sus amplitudes. En la mayoría de los casos, las propiedades eléctricas son mucho más dominantes que las propiedades magnéticas. A determinada frecuencia, las propiedades eléctricas son predominantemente controladas por la densidad del suelo, por la química, distribución y contenido de agua. Las propiedades eléctricas entran en dos tipos básicos, uno que describe la disipación de energía y uno que describe el almacenamiento de energía. En ambos casos el movimiento de cargas está descrito por la Ecuación de difusión (Nathan Ida, 1995).

3.4.1. Conductividad.

La disipación eléctrica viene como el resultado del movimiento de cargas (transporte) llamada corriente de conducción. La conductividad eléctrica es la capacidad de un material para transportar cargas mediante el proceso de conducción. La disipación (pérdida de energía) resulta de la conversión de energía eléctrica a energía térmica, durante las colisiones de las cargas (Nathan Ida, 1995). Este transporte de cargas está definido por la ley de Ohm:

$$J = \sigma E \quad 3.7$$

Donde σ es la conductividad eléctrica. La conductividad eléctrica es el inverso de la resistividad (ρ) y se determina por la relación entre la densidad de corriente y la intensidad de campo eléctrico. se mide en Siemens/ metro (S/m). El mecanismo más dominante de conducción eléctrica es el transporte iónico de cargas a través del agua que llena los poros en las rocas y suelos. En la Tabla 3.1 se muestran los rangos de conductividades eléctricas características de las rocas.

3.4.2. Permitividad.

El proceso en el que una fuerza externa mueve las cargas desde un estado de equilibrio y existe otra fuerza tratando de mover las cargas a su estado original se llama polarización dieléctrica, y está controlado por la permitividad eléctrica o dieléctrica. La permitividad eléctrica es una medida del grado en el cual un medio puede resistir al flujo de carga. Se determina por la relación entre el desplazamiento eléctrico y la intensidad de campo eléctrico que lo produce (Nathan Ida, 1995), se mide en Farads/metro (F/m).

Las propiedades eléctricas de los dieléctricos son definidas por la polarización de carga contenida en el material, por causa de un campo eléctrico externo. Debido a que las cargas libres en estos materiales son limitadas la conducción es insignificante, pero la polarización de cargas puede ser importante. La polarización incrementa la densidad de flujo eléctrico en el material, por esta razón es que la relación constitutiva que define al vector de desplazamiento eléctrico (3.5) puede escribirse como (Keller, 1989):

$$D = \epsilon_0 E + P \quad 3.14$$

Donde P es el vector de polarización y ϵ_0 es la permitividad para el vacío. El vector de polarización es proporcional al campo eléctrico externo E . La relación 3.14 puede escribirse como:

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E \quad 3.15$$

Donde χ_e es una cantidad adimensional llamada susceptibilidad eléctrica. De ésta se desprende la definición de permitividad compleja:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad 3.16$$

Esta puede escribirse como:

$$\epsilon = \epsilon_R + i\epsilon_I \quad 3.17$$

Sustituyendo ésta permitividad compleja en la Ecuación 3.5 obtenemos:

$$D = \epsilon E \quad 3.18$$

En donde la diferencia con 3.5 es que en 3.18 ϵ es compleja. La parte imaginaria de la permitividad representa a la disipación dieléctrica. En los aislantes se tiene sólo la parte real. Los mecanismos de disipación en los materiales son más fáciles de describir a través del uso de la permitividad compleja, en la que se deben de incluir dos componentes de disipación. Una componente es debida a las corrientes de conducción, la otra es debida al dieléctrico, o disipación por polarización (Nathan Ida, 1995). La permitividad compleja se define como:

$$\epsilon = \epsilon_R - i \left(\frac{\omega \epsilon_I + \sigma}{\omega} \right) \quad 3.19$$

La parte real de la permitividad compleja (ϵ_R) es el término normalmente asociado con los dieléctricos como permitividad relativa. En los materiales aislantes, la parte imaginaria (ϵ_I) es cero. En los materiales disipativos, la parte imaginaria no es nula y posee dos partes, la primera es provocada por la permitividad compleja que es la parte representativa de la disipación dieléctrica mientras la segunda es debido a la conducción o disipación ohmica (Nathan Ida, 1995). El grado con el cual un dieléctrico es disipativo es cuantificado mediante:

$$\tan \alpha = \frac{\omega \epsilon_I + \sigma}{\omega \epsilon_R} \quad 3.20$$

Que se conoce como la tangente de perdida. En muchos dieléctricos, la disipación ohmica es relativamente pequeña mientras la disipación por polarización es pequeña en buenos dieléctricos. En la disipación dieléctrica, a micro frecuencias, domina la disipación por polarización. En materiales altamente conductivos, la disipación Ohmica es la que domina (Nathan Ida, 1995).

En términos generales, al igual que la permitividad la conductividad debe ser expresada en términos complejos. Aunque en la teoría electromagnética se ha tomado en asimilar a la parte compleja de la permitividad con la conductividad y la parte compleja de la conductividad con la permitividad (Keller, 1989; Ward and Hohmann, 1989). Por lo que podemos definir de 3.16 y 3.17 :

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad 3.21$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Donde ϵ_r es la permitividad eléctrica relativa y donde la permitividad del vacío es $\epsilon_0=8.854 \times 10^{-12}$ F/m. En la Tabla 3.1 se muestran los rangos de permitivades eléctricas relativas características de las rocas.

En general de los materiales presentes en el subsuelo, que poseen moléculas dipolares, son el agua y los hidrocarburos; por esta cualidad es que estas sustancias pueden aumentar la polarización de los materiales mediante una contribución en la permitividad (Keller, 1989). En altas frecuencias los rangos de permitividad del agua pueden variar significativamente en ciertas regiones (Figura 3.1).

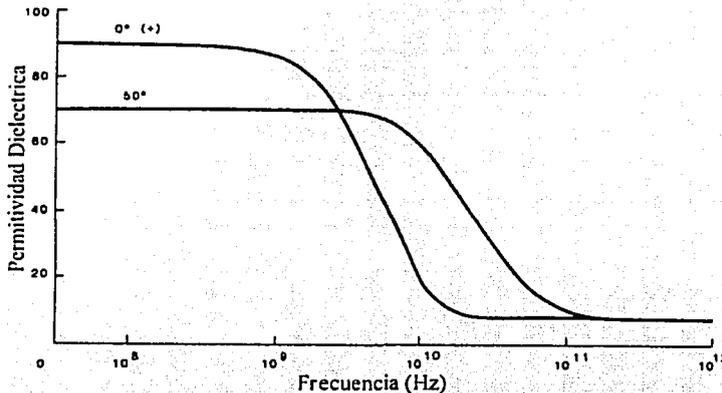


Figura 3.1.-Comportamiento de la permitividad dieléctrica del agua a altas frecuencias (Modificado de Keller, 1989).

Este comportamiento nos muestra que para frecuencias superiores a 3 GHz la permitividad de las rocas, con contenido de agua, se ve afectada.

3.4.3. Permeabilidad.

Las propiedades magnéticas de los materiales son dadas por la interacción de campos magnéticos externos y el movimiento de cargas en los materiales. Pues al igual que las corrientes en las bobinas los campos magnéticos, a escalas atómicas, son generados dentro de los materiales por los electrones en sus orbitas; que equivalen a pequeños magnetos (momentos magnéticos); por lo que en su conjunto los materiales contienen a un volumen de densidad de momento magnético. Es decir la polarización magnética es el resultado del spin de electrón y movimiento en su órbita atómica, y tiene como resultado también la pérdida de la energía y el almacenamiento (Nathan Ida. 1995).

Este campo interno puede ser alineado con el campo externo para incrementar el campo total u oponerse a este y disminuir el total del campo. Si los momentos magnéticos internos se orientan aleatoriamente, como sucede en la mayoría de los casos, el campo total interno es nulo y los materiales tienden a ser como el vacío desde el punto de vista magnético.

En forma general se considera que todo material posee un vector de magnetización M , en la presencia de un campo magnético externo. Usando este vector de magnetización, el vector de densidad magnética puede escribirse como (Keller, 1989):

$$B = \mu_0 H + M \quad 3.22$$

Donde M es el vector de magnetización y μ_0 es la permeabilidad del vacío. La magnetización puede escribirse en términos de la intensidad del campo magnético:

$$M = \mu_0 \chi_m H \quad 3.23$$

Donde $\mu\chi_m$ es la susceptibilidad magnética del material y a partir de ésta se puede escribir a la permeabilidad en forma compleja.

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_R + i\mu_I \quad 3.24$$

Por lo que al igual que para la permitividad, la relación constitutiva del flujo de densidad magnética puede escribirse en función de esta permeabilidad compleja:

$$B = \mu H \quad 3.25$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 3.6, pero con la diferencia de que en la última la permeabilidad es compleja. La parte imaginaria de la permeabilidad compleja representa la disipación provocada por las fuerzas magnéticas entre sí. Dado que no existen corrientes magnéticas, no se puede asignar esta disipación de energía como conducción magnética. La parte real representa materiales sin disipación magnética. En medios geológicos la disipación magnética se desprecia (Keller, 1989; Ward and Hohmann, 1989) Para cuestiones prácticas comúnmente se define a la permeabilidad magnética relativa como:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad 3.26$$

Donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m es la permeabilidad magnética del vacío y μ_r es la permeabilidad magnética relativa, o aptitud de un cuerpo o medio, en relación con el vacío, de dar paso a las líneas de campo magnético. Se determina por la relación entre la inducción magnética en un cuerpo y la intensidad de campo magnético externo.

Las propiedades magnéticas de la mayoría de los materiales geológicos son igual que los del vacío. Pues sólo en casos en los que exista una gran concentración de minerales con valores altos de permeabilidad magnética, es cuando la disipación de energía será importante. En la Tabla 3.2 puede apreciarse el hecho de que los minerales que presentan los valores más altos de permeabilidad magnética son la magnetita, la pirrotita y la ilmenita; mientras que los demás minerales de la lista presentan permeabilidades cercanas a la del vacío. Por lo que para los objetivos del presente trabajo la permeabilidad magnética de las rocas se tomará igual a la del vacío.

MATERIAL	CONDUCTIVIDAD (mS/m)	PERMITIVIDAD ELECTRICA RELATIVA
Aire	0	1
Hielo	0.1-0.01	4-8
Concreto	0.015	6-9
Asfalto	0.0001-0.001	3.8
Cemento	0.01-0.1	16
Suelo arenoso	0.0001-0.001	3-25
Suelo limoso	0.0001-0.01	2.5-19
Suelo arcilloso	0.0001-0.01	2.4-15
Grava cemento	0.01-0.1	13
Conglomerado	0.025	18
Caliche	0.012	4.6
Granito	0.01-1.5	5-7
Caliza	0.5-2	4-8
Arena seca	0.01	4-6
Arena saturada	0.08-1	20-30
Arcilla seca	1.3	5
Arcilla saturada	1000	40
Esquisto	1.3-230	5-15
Basalto húmedo	0.01	8
Limo	1.8-180	10
Sal	0.013-1.32	5
Agua salada	30000	80
Agua dulce	0.5	80
Agua destilada	0.01	80

Tabla 3.1.- Propiedades eléctricas de los materiales (Tomado de Ulriksen , 1982; Davis and Annan, 1989; y Lorenzo, 1994).

Minerales	Permeabilidad Magnética relativa
Magnetita	5
Pirrotita	2.55
Ilmenita	1.55
Hematina	1.05
Pirita	1.0015
Rutilo	1.0000035
Calcita	0.999987
Cuarzo	0.999985
Horblenda	1.00015

Tabla 3.2 Lista de minerales más comunes con permeabilidades muy altas (Telford et. al., 1978).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.5. Corrientes Eléctricas.

La corriente eléctrica superficial de una frontera S puede obtenerse mediante ley de Ampere, que nos dice que la corriente que circula en la frontera S está dada por la integral de superficie del rotacional del campo magnético, la que por medio del teorema de Stokes se convierte a una integral de línea, que es igual a la Intensidad de Corriente (Annan, 1992 y Chen-To Tai, 1971):

$$\iint_S [\nabla \times \mathbf{H}] d\mathbf{s} = \int \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I \quad 3.27$$

Analizando la Ecuación 3.2 se observa que las corrientes totales son la suma de las integrales de superficie del vector de densidad de corriente y del vector del flujo eléctrico:

$$I_T = \iint_S \mathbf{J}_T \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J}_C \cdot d\mathbf{s} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad 3.28$$

De la que se reconocen dos tipos de corrientes:

$$I_C = \iint_S \mathbf{J}_C \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Corrientes de Conducción}) \quad 3.29$$

$$I_D = \iint_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (-i\omega \epsilon \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Corrientes de Desplazamiento}) \quad 3.30$$

La intensidad total de corriente estará dada por la siguiente relación:

$$|I_T| = |I_C| + |I_D| \quad 3.31$$

Las corrientes de desplazamiento permiten mantener la noción de que la corriente es continua a través de los medios no conductores; sin embargo dado que no existe transporte de cargas a través del medio, esto implica que debe existir una corriente I_D en ese espacio del dieléctrico para que se satisfaga el principio de continuidad. Como sabemos es imposible imaginarse una corriente continua sin un campo H , y la corriente de desplazamiento aparece como resultado del proceso de polarización; es decir que a través de un dieléctrico aparecerá una corriente de desplazamiento capaz de crear un campo magnético (Escobar-Salguero y Cortés-Soto, 2000).

Es de observarse la dependencia de las corrientes de desplazamiento ante la frecuencia, y la falta de esta dependencia ante las de conducción (Annan, 1992). De 3.30 puede verse que a grandes frecuencias las corrientes de desplazamiento serán más grandes que las de conducción. A bajas frecuencias las corrientes que predominan serán las de conducción sobre las de desplazamiento (Figura 3.2); éstos casos extremos pueden relacionarse con los modelos simplificados ondulatorio y cuasiestacionario respectivamente (Apéndice C).

En el rango intermedio no pueden despreciarse las corrientes de desplazamiento ni de conducción. El punto medio de esta transición está definido por:

$$\begin{aligned} |J_c| &= |J_D| \\ |\sigma E| &= |\omega \epsilon E| \\ \sigma E &= \omega \epsilon E \\ \omega_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon} \end{aligned} \quad 3.32$$

Esta frecuencia representa el rango, en el que las corrientes de conducción son iguales a las corrientes de desplazamiento, y está definido por el factor de pérdida (Keller, 1989; Annan, 1992):

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = 1 \quad 3.33$$

De este factor se desprende la definición del término de Tangente de Pérdida:

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\sigma E}{\omega \epsilon E} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad 3.34$$

Esta tangente de pérdida representa la razón entre las corrientes de conducción y de desplazamiento (Figura 3.3). Dicha pérdida está en función de la frecuencia de la onda electromagnética (Annan, 1992). Es de notar que esta definición es una simplificación de la ecuación 3.20, pues no se consideran materiales disipativos.

La tangente de pérdida es un parámetro útil en la determinación del tipo de corrientes que predominan. El que un tipo de corrientes predomine sobre la otra puede ser producto de dos factores; la naturaleza del medio (σ , ϵ) y de la naturaleza de la onda electromagnética (ω).

En el caso de que las corrientes de desplazamiento predominan sobre las de conducción, la Tangente de pérdida tendrá valores menores a la unidad. Esto puede ser debido a que el medio es poco conductivo o debido a que la frecuencia de la onda electromagnética es muy grande.

Cuando las corrientes de conducción predominan sobre las de desplazamiento entonces la Tangente de pérdida tendrá valores mayores a la unidad. Esto puede ser debido a que el medio es muy conductivo o debido a que la frecuencia de la onda electromagnética es muy pequeña. Relacionando esta información con los modelos simplificados ondulatorio y cuasiestacionario (Apéndice C), podemos ver a la frecuencia como un parámetro de referencia para modelar los campos electromagnéticos mediante modelos simplificados. Es decir manipulando la frecuencia de oscilación del campo electromagnético podemos aproximar las ecuaciones, que nos describen su propagación, mediante expresiones validas para determinados rangos de frecuencia. Parte de esta concepción se describirá con mayor detalle en las siguientes secciones.

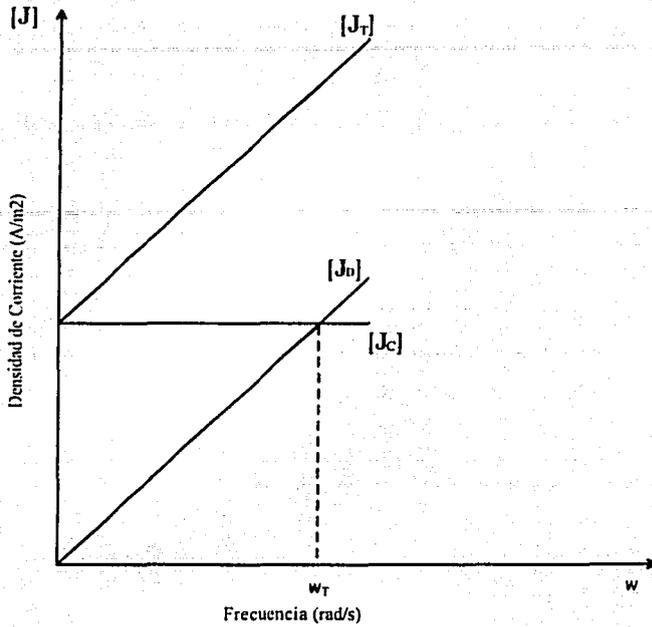


Figura 3.2. - Comparación entre las corrientes de desplazamiento y las de conducción ante el incremento de las frecuencias (Modificado de Annan, 1992).

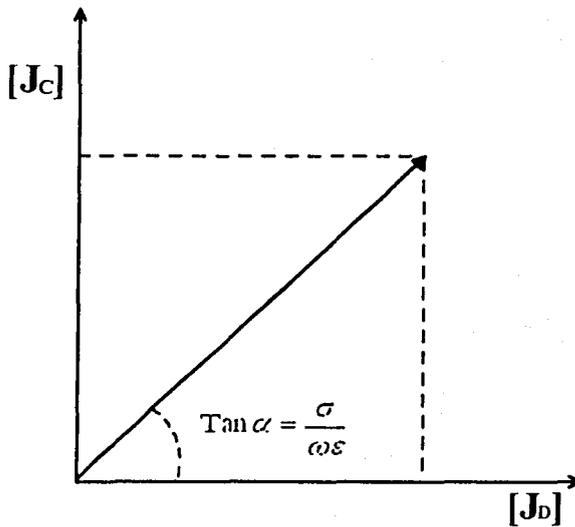


Figura 3.3.-Definición de la Tangente de pérdida (Modificado de Annan, 1992).

3.6. Ecuaciones de Maxwell para Medios Homogéneos.

La resolución de una de los más simples pero al mismo tiempo fundamentales problemas de la prospección electromagnética, es la propagación de las ondas electromagnéticas en un medio homogéneo. Las ecuaciones de Maxwell (3.1, 3.2, 3.3 y 3.4), para el caso de un medio homogéneo e isotrópico, pueden ser sustancialmente simplificadas. Suponiendo que ϵ , μ y σ son constantes, y considerando las relaciones constitutivas 3.5, 3.6 y 3.7 (Straton, 1941 y Orellana, 1974) se tiene:

$$\nabla \times E = \text{rot}E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad 3.35a$$

$$\nabla \cdot H = \text{div}H = 0 \quad 3.35b$$

$$\nabla \times H = \text{rot}H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad 3.35c$$

$$\nabla \cdot E = \text{div}E = 0 \quad 3.35d$$

Una forma de caracterizar a un medio homogéneo es mediante un espacio libre de fuentes; es decir que en un medio conductor homogéneo no pueden acumularse cargas, por lo la densidad de carga eléctrica q es igual a cero. Aplicando a cada miembro de la ecuación 3.35a el rotacional y luego al resultado le sustituimos 3.35c obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times E) + \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad 3.36$$

Análogamente, si aplicamos el rotacional a 3.35c y consideramos 3.35a, obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times H) + \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad 3.37$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial $A \times B \times C = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ y la cuarta ecuación de Maxwell 3.35d, de la relación 3.36 se obtiene:

$$\Delta E - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad 3.38$$

Estas mismas transformaciones se pueden aplicar a la ecuación 3.37:

$$\Delta H - \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad 3.39$$

Las ecuaciones 3.38 y 3.39 son las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético respectivamente. Es decir representan la forma en que cada campo se propaga en función del tiempo y de las propiedades del medio. Para poder facilitar el manejo de las

anteriores ecuaciones se recurre al concepto de campos armónicos (Apéndice A), y de esta forma las ecuaciones 3.38 y 3.39 se escriben como:

$$\Delta E + \mu\epsilon\omega^2 E + i\mu\omega\sigma E = 0 \quad 3.40$$

$$\Delta H + \mu\epsilon\omega^2 H + i\mu\omega\sigma H = 0 \quad 3.41$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\Delta E + \gamma^2 E = 0 \quad 3.42$$

$$\Delta H + \gamma^2 H = 0 \quad 3.43$$

De donde se define a γ como la constante de propagación. Lo que resta, es caracterizar a éstos campos e imponer condiciones de frontera; de esta forma se puede resolver las ecuaciones del campo eléctrico y magnético, mediante el concepto de onda plana (Apéndice B):

$$E_{(x,y)} = E_{0(x,y)} e^{i\gamma z} \quad 3.44$$

$$H_{(x,y)} = H_{0(x,y)} e^{i\gamma z} \quad 3.45$$

Estas ecuaciones representan la solución de las ecuaciones 3.42 y 3.43. para un semiespacio homogéneo e isotrópico.

3.7. Propagación de las Ondas Electromagnéticas.

Para entender la forma en que una onda electromagnética se propaga en un medio con ciertas propiedades eléctricas y magnéticas (ϵ , σ y μ), es necesario de comprender las relaciones que estas propiedades guardan con las características de la onda electromagnética. Es decir, es necesario conocer la forma en la que las propiedades eléctricas y magnéticas modifican la velocidad, la amplitud, la longitud de onda, etc., de la onda electromagnética

3.7.1. Constantes de Fase y Atenuación.

Tomando las ecuaciones 3.42 y 3.43:

$$\Delta E + \gamma^2 E = 0$$

$$\Delta H + \gamma^2 H = 0$$

De donde se define a γ como la constante de propagación. Esta constante de propagación es un vector complejo que puede descomponerse en una parte real y una parte imaginaria. La parte real de esta constante se llama constante de fase (a) y la parte imaginaria (b) de nombre constante de atenuación, determina la amplitud de la onda electromagnética (Orellana, 1974):

$$\begin{aligned} \gamma &= a + ib \\ \gamma^2 &= \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\omega\sigma \end{aligned} \quad 3.46$$

Para poder determinar cada una de estas componentes es necesario desarrollar el binomio de cada una de las componentes y compararlo con la constante definida en la ecuación de onda. Desarrollando el binomio e igualando términos semejantes:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= (a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2 \\ a^2 - b^2 &= \mu\epsilon\omega^2 \end{aligned} \quad 3.47$$

$$2ab = \mu\sigma\omega \quad 3.48$$

Por lo que resolviendo simultáneamente las ecuaciones se tiene para se tiene expresada la constante de atenuación en función de las propiedades del medio (μ , σ y ϵ) y la naturaleza de la onda (frecuencia angular ω):

$$b = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2} \left[\sqrt{(\sigma^2 + \epsilon^2\omega^2)} - \epsilon\omega \right]} \quad 3.49$$

Esta expresión también puede encontrarse en la literatura en función de la tangente de pérdida (3.34) que determinada la relación que guardan las corrientes de desplazamiento y de conducción (Orellana, 1974; Ward, S. H. and Hohmann G. W., 1989):

$$b = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 + 1 \right)} - 1 \right]} \quad 3.50$$

De manera similar podemos relacionar las ecuaciones 3.47 y 3.48 para poder determinar la constante de fase. Siguiendo el mismo procedimiento antes descrito para la constante de propagación, se tiene que la constante de fase (a) está en función de las propiedades del medio (μ , σ y ϵ), y de la naturaleza de la onda (ω):

$$a = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2} \left[\sqrt{(\sigma^2 + \epsilon^2\omega^2)} + \epsilon\omega \right]} \quad 3.51$$

De igual manera ésta puede ponerse en función de la tangente de pérdida:

$$a = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 + 1 \right)} + 1 \right]} \quad 3.52$$

Puede verse que las ecuaciones que describen a la constante de atenuación y la constante de fase (3.50 y 3.52), son directamente proporcionales a la frecuencia. Para poder apreciar la forma en la que ambas constantes dependen de la frecuencia, las ecuaciones 3.50 y 3.52 se grafican variando la frecuencia en un rango de 1×10^{-4} a 1×10^{20} Hz; para conductividades diferentes y suponiendo un medio con permitividad eléctrica 20 veces la del vacío y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.4).

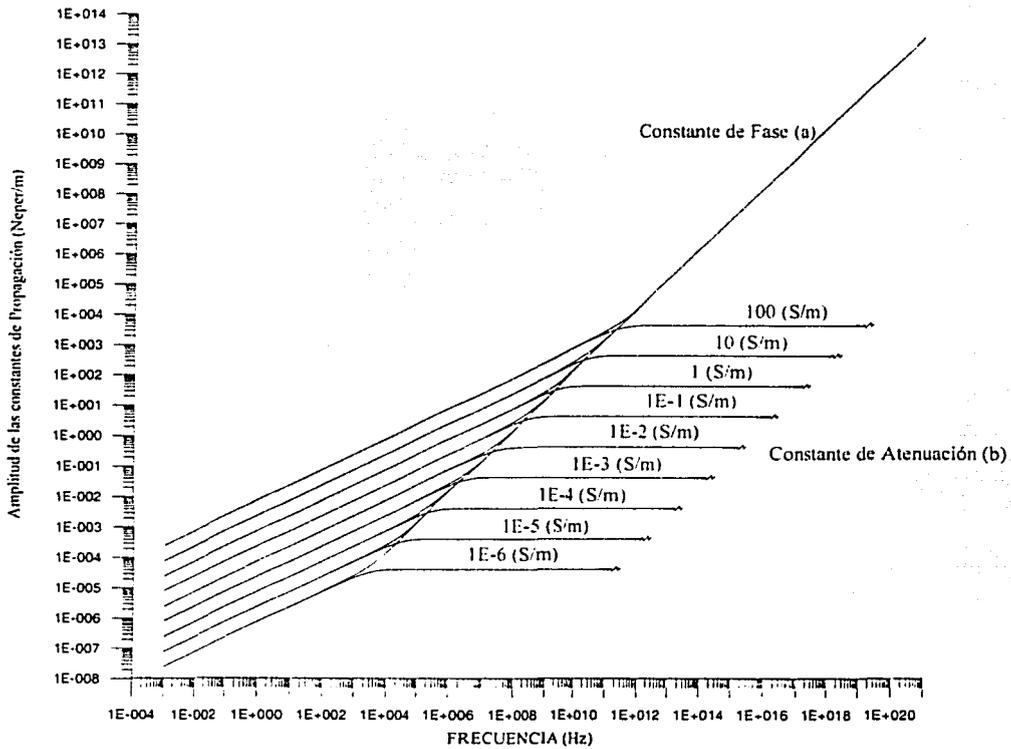


Figura 3.4.- Grafica del comportamiento de las constantes de atenuación y de fase respecto de la frecuencia de oscilación. Para una permitividad 20 veces mayor a la del vacío y una permeabilidad igual a la del vacío.

Se puede observar que las constantes de fase y de atenuación son equivalentes en cierto rango de frecuencias (bajas), en donde se presenta el dominio de validez del modo cuasiestacionario: pues es donde el campo electromagnético varía relativamente poco con el tiempo (Orellana, 1974). Puede verse además que existe una frecuencia en la que las constantes de fase y de atenuación dejan de ser iguales, y está en relación con la tangente de pérdida (3.34).

Mientras que a altas frecuencias la constante de fase tiende hacerse asintótica respecto de la frecuencia; es decir que existe una fase igual para todos los medios (μ , σ y ϵ). Por su parte la constante de atenuación permanece constante para las altas frecuencias.

Es de observarse que ambas constantes son directamente proporcionales a la conductividad, pues ambas constantes aumentan con el incremento de la conductividad del medio.

Analizamos nuevamente el comportamiento de estas constantes, con respecto de la frecuencia, pero ahora variando la permitividad eléctrica, y suponiendo un medio con una conductividad de 1×10^{-3} S/m y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.5).

Tendremos que, existe una región en la que las constantes de fase y de amplitud son iguales, pero a diferencia de la Figura 3.4, este valor es el mismo para cualquier valor de constante dieléctrica. Es decir en la región de las bajas frecuencias las constantes de fase y de atenuación tienden a un mismo valor, que no depende de la permitividad eléctrica.

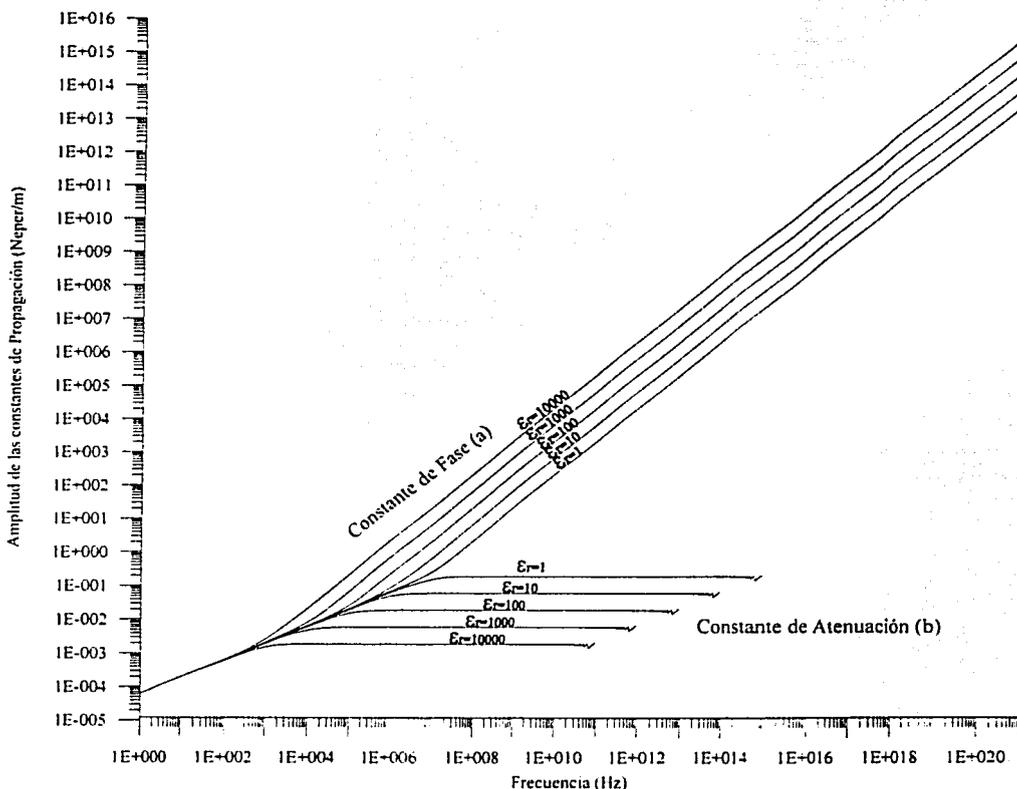


Figura 3.5.- Gráfica del comportamiento de las constantes de atenuación y de fase respecto de la frecuencia de oscilación, variando la permitividad eléctrica. Para una conductividad de 1×10^{-3} S/m y una permeabilidad igual a la del vacío.

Se observa que la constante de fase es directamente proporcional a la permitividad eléctrica en las altas frecuencias. Mientras que la constante de atenuación, al igual que el caso anterior, tiende a hacerse constante para las altas frecuencias, pero a diferencia del caso de la conductividad, ésta es inversamente proporcional a la permitividad dieléctrica.

En ambos casos (Figuras 3.4 y 3.5) se observa que para el caso de la constante de atenuación existe una frecuencia tal que ésta tiende a cero, y esto ocurre de manera abrupta. Esta frecuencia es proporcional a los valores de conductividad e inversamente proporcional a la permeabilidad y un factor de escala: éste factor de escala está dado por un rango de $55 \times 10^6 - 56 \times 10^6$. Este factor de escala puede verse como la tangente de pérdida, y ésta tendría un rango inverso al factor de escala anterior. A partir de ésta frecuencia limite es cuando el material se comporta como un dieléctrico perfecto.

Como puede apreciarse podemos dividir en tres regiones el comportamiento de la constante de atenuación, a diferencia de la constante de fase que sólo presenta dos, respecto de la frecuencia. En las bajas frecuencias ambas tienen el mismo valor y sólo dependen de la conductividad. En altas frecuencias la constante de fase sólo depende de la permitividad eléctrica, y la constante de atenuación permanece invariante ante la frecuencia pero es directamente proporcional a la conductividad e inversamente proporcional a la permitividad eléctrica; además de que ésta región es siempre delimitada por la misma banda de frecuencias. Mientras que en la tercera región, la constante de atenuación es nula, y es ésta región donde el medio se comporta como un dieléctrico perfecto.

Estas regiones sólo están determinadas por los valores de conductividad y permitividad eléctrica del medio. Y es de particular interés, en este trabajo, el rango de frecuencias y características de los medios en los que existe la segunda región.

Para que las expresiones anteriores tengan sentido físico es necesario pasarlas al dominio del tiempo. Por lo que analizando las ecuaciones 3.44 y 3.45 es necesario incluir el factor $e^{-i(\omega - \varphi)}$ en donde φ , es una fase que puede ser establecida según convenga, por lo que puede eliminarse del factor sólo para simplificación de la nomenclatura; sin olvidar que siempre está presente:

$$\text{Re}(H_x e^{-i\omega t}) = \text{Re}(H_{x0} e^{i\varphi} e^{-i\omega t}) \quad 3.53$$

Subrayemos que H_x es también una magnitud compleja, es decir:

$$H_{x0} = H_{0x} e^{i\varphi} \quad 3.54$$

Donde $H_{x0} = |H_{0x}|$ y $\varphi = \arg H_{x0}$

Sustituyendo 3.46 y 3.54 en 3.53 encontramos:

$$\begin{aligned} \text{Re}[H_x e^{-i\omega t}] &= \text{Re}[H_{0x} e^{iaz} e^{-bz} e^{i\varphi} e^{-i\omega t}] = \text{Re}[H_{0x} e^{-bz} e^{i(az + \varphi - \omega t)}] \\ \text{Re}[H_x e^{-i\omega t}] &= H_{0x} e^{-bz} \cos(az + \varphi - \omega t) \end{aligned} \quad 3.55$$

De ésta última expresión se tiene que:

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$$H_{0x}e^{-bz} = f(z) \quad 3.56$$

Es la amplitud del campo magnético y

$$az + \phi x - \omega t = \phi(z) \quad 3.57$$

Es la fase del campo.

3.7.2. Velocidad de la Onda Electromagnética.

Se llama frente de la onda o frente de fase de la onda electromagnética a la superficie que pasa a través de puntos con iguales fases de oscilación. De acuerdo a la Ecuación 3.57:

$$az + \phi x - \omega t = \phi(z) = \text{const.}$$

De donde despejando a la profundidad

$$z = (\omega t - \phi x + \text{const}) / a \quad 3.58$$

Si el tiempo crece también crece z , es decir el frente de onda se mueve de arriba a bajo.

Se llama velocidad de propagación de una onda electromagnética, a la velocidad con la que se propaga su frente de onda (Orellana, 1974). Para obtener la velocidad del frente de onda basta con diferenciar a 3.58 en función del tiempo:

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{a} \quad 3.59$$

Como se aprecia en la Ecuación 3.59, la velocidad es directamente proporcional a la frecuencia e inversamente proporcional a la constante de fase (Figura 3.6). Sustituyendo la Ecuación 3.52 en 3.59:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 + 1} \right) + 1 \right]}} \quad 3.60$$

De la misma forma que en el caso de las constantes de fase y de atenuación, se grafica la expresión de la velocidad (3.60), para conductividades diferentes y suponiendo un medio con permitividad eléctrica 20 veces la del vacío y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.6).

Puede verse que la velocidad de onda tiene un límite para todas las conductividades; es decir en la parte de las altas frecuencias la velocidad es independiente de la conductividad y la frecuencia. En la región de las bajas frecuencias se tiene que la velocidad es inversamente proporcional a la conductividad.

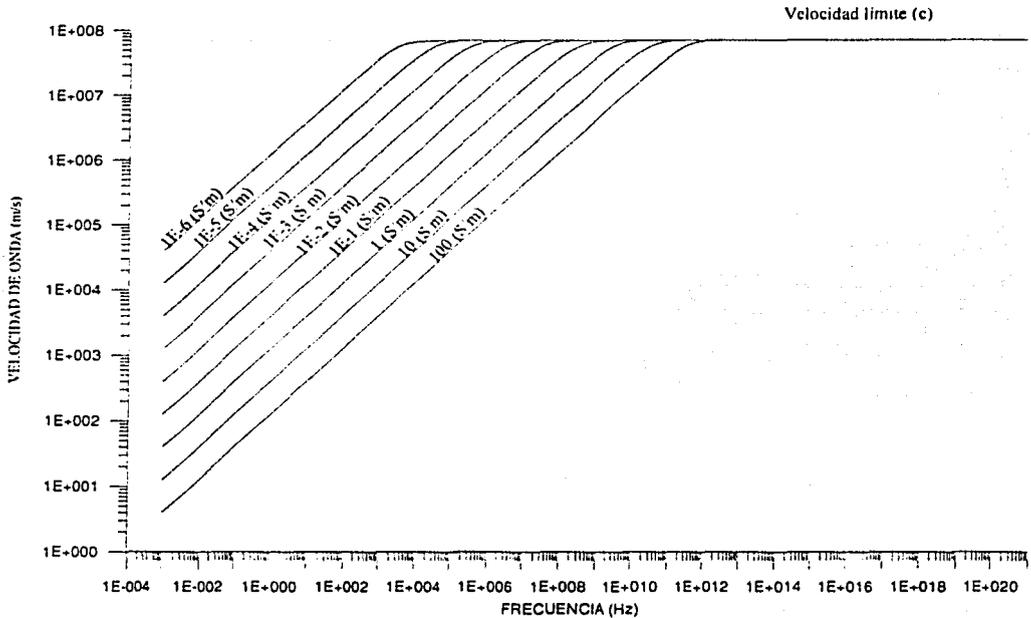


Figura 3.6.- Velocidad de la onda electromagnética con respecto a la frecuencia. Para una permitividad 20 veces mayor a la del vacío y una permeabilidad igual a la del vacío.

Para apreciar la forma en la que se comporta la velocidad ante la permitividad, se grafica la Ecuación 3.60 variando la permitividad eléctrica y suponiendo un medio con una conductividad de 1×10^{-3} S/m y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.7).

De la misma forma, para frecuencias altas la velocidad es inversamente proporcional a la permitividad eléctrica; y es constante a la frecuencia. Mientras que para frecuencias bajas la velocidad es independiente de la permitividad eléctrica.

En resumen podemos decir que tenemos dos regiones. En la región de las bajas frecuencias, la velocidad es inversamente proporcional a la conductividad e independiente de la permitividad; y es en esta región donde la velocidad es directamente proporcional a la frecuencia. En la segunda región, las altas frecuencias, la velocidad es inversamente

proporcional a la permitividad e independiente de la conductividad eléctrica; y esta permanece constante a la frecuencia.

Como es sabido la velocidad más alta que puede alcanzar una onda electromagnética es cuando la permitividad y conductividad eléctrica alcancen su mínimo, es decir los valores del vacío; o en el caso en que la frecuencia sea muy grande.

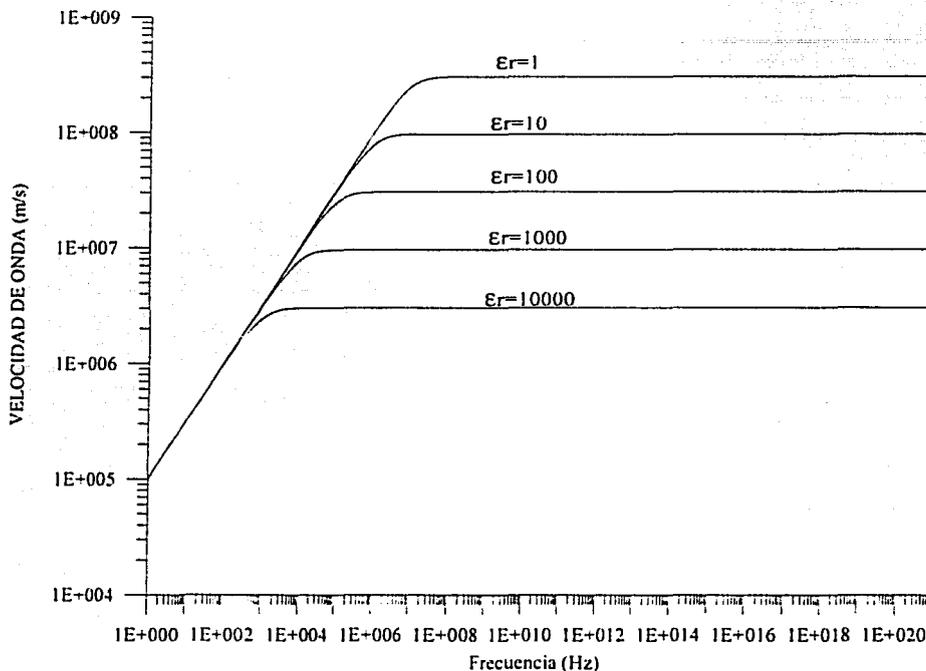


Figura 3.7.- Grafica del comportamiento de la velocidad respecto de la frecuencia de oscilación, variando la permitividad eléctrica relativa. Para una conductividad de 1E-3 S/m y una permeabilidad igual a la del vacío.

3.7.3. Longitud de Onda

La longitud de onda es la distancia espacial a través de un periodo o ciclo de la propagación de la onda electromagnética. La longitud de onda es la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el material dividida entre su frecuencia. Es decir se llama longitud de onda λ a la distancia que atraviesa el frente de onda en un periodo de tiempo T (Orellana, 1974):

$$v = f\lambda$$

Por lo que:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{a} \quad 3.61$$

Sustituyendo finalmente esta constante de fase se tiene:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 + 1} \right) + 1} \right]}} = \frac{1}{f \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 + 1} \right) + 1} \right]}} \quad 3.62$$

Para apreciar la forma en la que la longitud de onda varia con la frecuencia, se grafica la Ecuación 3.62 para diferentes conductividades, para ello se supone un medio con permitividad eléctrica 20 veces la del vacío y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.8).

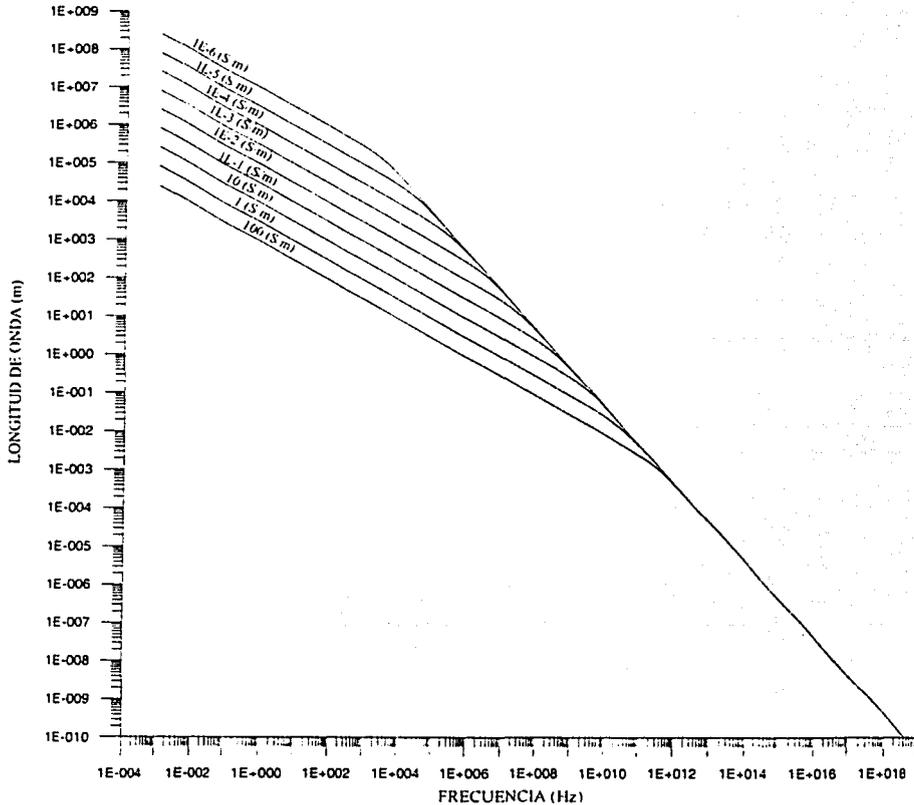


Figura 3.8.- Longitud de la onda electromagnética con respecto a la frecuencia. Para una permitividad 20 veces mayor a la del vacío y una permeabilidad igual a la del vacío.

A bajas frecuencias la longitud de onda es inversamente proporcional a la conductividad. Mientras que en la región de las altas frecuencias ésta no depende de la conductividad. Para ambas regiones, altas y bajas frecuencias, la longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia. Para analizar el comportamiento de la longitud de la onda electromagnética con respecto de la permitividad eléctrica, se grafica 3.62 variando la permitividad eléctrica, se supone un medio con una conductividad de 1×10^{-3} S/m y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.9). Observemos que en la región de las bajas frecuencias, la longitud de onda es independiente de la permitividad. Mientras que en las altas frecuencias la longitud de onda es inversamente proporcional a la permitividad eléctrica.

Resumiendo en las bajas frecuencias la longitud de onda es inversamente proporcional a la conductividad e independiente de la permitividad. A altas frecuencias la longitud de onda es inversamente proporcional a la permitividad e independiente de la conductividad eléctrica. En ambas regiones es inversamente proporcional a la frecuencia; con la única diferencia de ser más susceptible en la región de las bajas frecuencias.

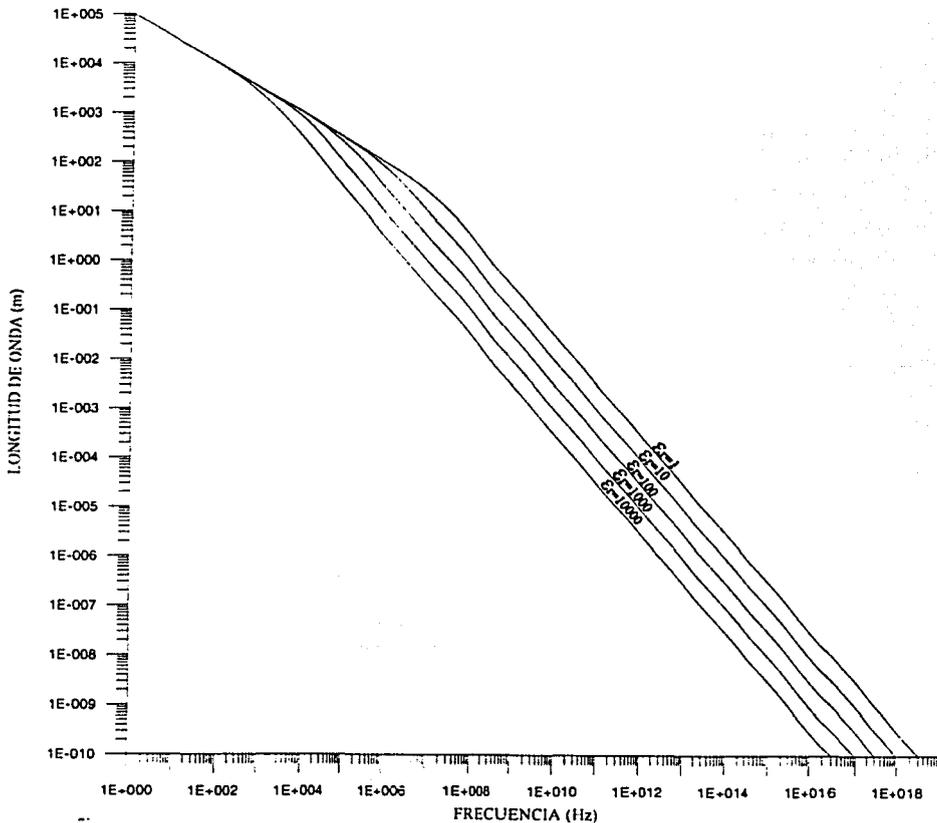


Figura 3.9.- Comportamiento de la longitud de onda respecto de la frecuencia de oscilación, variando la permitividad eléctrica relativa. Para una conductividad de $1E-3$ S/m y una permeabilidad igual a la del vacío.

3.7.4. Profundidad de Penetración.

Como vemos, en cada momento del tiempo la función $H_{0x}e^{-bz}$ (3.56) se amortigua en forma exponencial y oscila en forma cosenoidal, con periodo espacial b , de tal manera que entre mayor sea b mayor es el amortiguamiento del campo (Orellana, 1974).

Para poder definir este amortiguamiento es necesario establecer un parámetro que nos indique, de manera cualitativa, la profundidad de penetración del campo electromagnético. Para este fin se ha definido a la profundidad de penetración (δ_c) a la distancia en la cual la amplitud de la onda $f(z)$ disminuye e veces:

$$\frac{f(z)}{f(z + \delta_c)} = e \quad 3.63$$

Sustituyendo 3.56 en 3.63:

$$e = \frac{H_{0x} e^{-bz}}{H_{0x} e^{-b(z+\delta_c)}} = \frac{e^{-bz}}{e^{-b(z+\delta_c)}} = e^{b\delta_c}$$

$$\delta_c = \frac{1}{b} \quad 3.64$$

Por lo que

$$\delta_c = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 + 1} - 1 \right]}} \quad 3.65$$

La atenuación describe como la energía se pierde o disipa. La pérdida de energía ocurre como una transformación de un tipo de energía a otra. Es decir la energía electromagnética puede convertirse en energía térmica (calor), también la pérdida puede ser explicada como el costo de mover algo, como son las cargas o partículas. La pérdida siempre resulta de una dependencia con la frecuencia y las propiedades del medio en diferentes velocidades.

Una importante consecuencia que surge de la Ecuación 3.65, consiste en que la profundidad de penetración también depende del periodo T de la oscilación del campo (o de lo que es lo mismo de ω). Entre mayor es T , o menor es ω , mayor es la profundidad de penetración. Por ello se grafica la profundidad de penetración, con respecto a la frecuencia, para conductividades diferentes y suponiendo un medio con permitividad eléctrica 20 veces la del vacío y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.10).

Puede verse que la profundidad de penetración es inversamente proporcional a la conductividad, en la región de las bajas y altas frecuencias. A frecuencias bajas la

profundidad de penetración es inversamente proporcional a la frecuencia; mientras que para las altas frecuencias la profundidad de penetración es constante.

A demás si graficamos la longitud de onda variando la permitividad eléctrica y suponiendo un medio con una conductividad de 1×10^{-3} S/m y una permeabilidad magnética igual a la del vacío (Figura 3.11), observaremos que en la región de las bajas frecuencias, la profundidad de penetración es inversamente proporcional a la frecuencia e independiente de la permitividad eléctrica. Por su parte en la región de las altas frecuencias la profundidad de penetración es directamente proporcional a la permitividad y constante a la frecuencia.

Al igual que en el caso de la constante de atenuación existe una tercera región que analizar. Esta región es el caso inverso de la constante de atenuación; puesto que existe una frecuencia límite, o de transición, entre la segunda y la tercera región. En la tercera región la profundidad de penetración tiende al infinito. Es decir se comporta como un dieléctrico perfecto y no existe atenuación de la señal, es decir se propaga infinitamente. La frecuencia que limita ésta región esta en función de los mismos parámetros expuestos anteriormente; es decir de la conductividad, la permeabilidad y de un factor de escala. Pues el ancho de banda en el que se presenta la segunda región, tiene las mismas características que para el caso de la constante de atenuación.

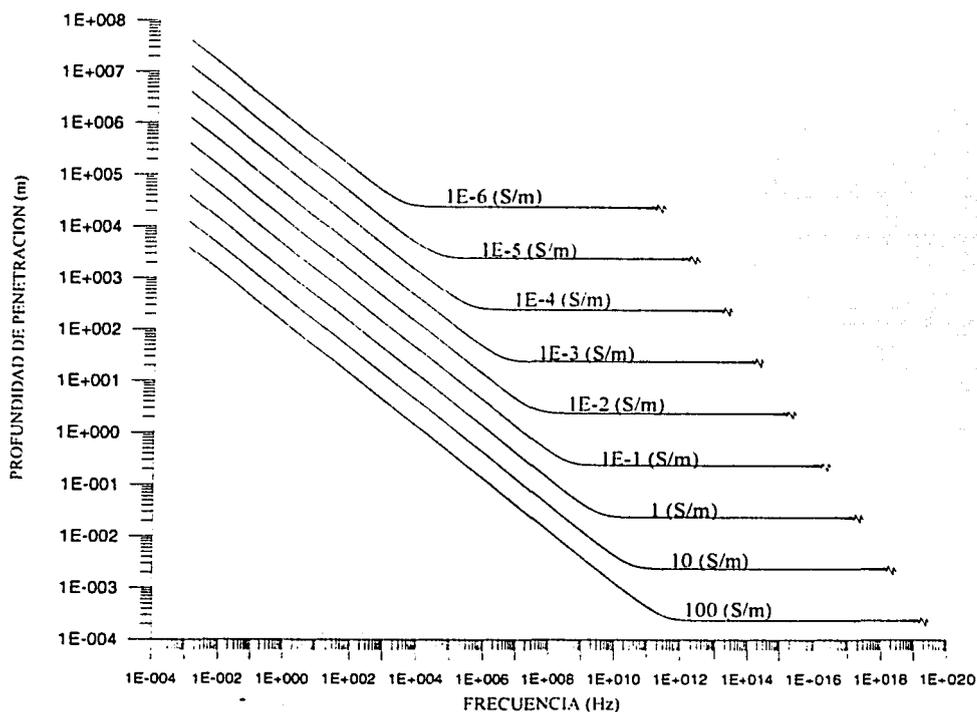


Figura 3.10.- Profundidad de penetración de la onda electromagnética con respecto a la frecuencia. Para una permitividad 20 veces mayor a la del vacío y una permeabilidad igual a la del vacío.

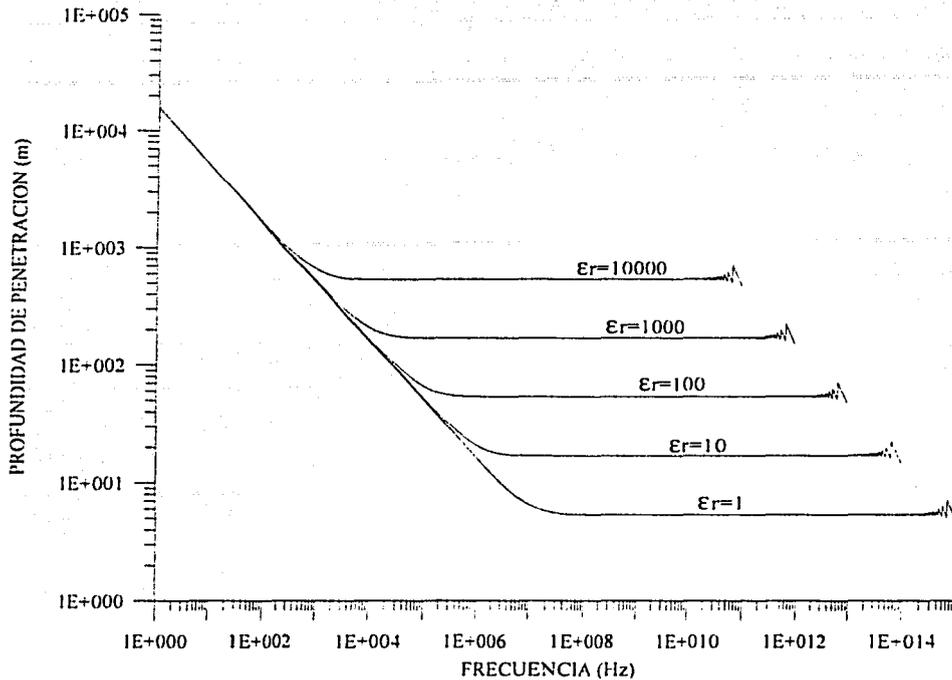


Figura 3.11.- Comportamiento de la profundidad de penetración respecto de la frecuencia, variando la permitividad eléctrica relativa. Para una conductividad de 1E-3 S/m y una permeabilidad igual a la del vacío.

3.7.5. Impedancia

Para medir la relación que guardan los campos eléctrico y magnético recurrimos al concepto de impedancia. Cuando se habla de la razón de los campos fasoriales E y H, para una onda plana electromagnética transversal en un medio no limitado, se habla de impedancia intrínseca.

$$Z = \frac{E}{H} \tag{3.66}$$

Para el caso en el que se tome la razón de una componente de campo eléctrico E a una componente de campo magnético H en el mismo punto de la onda, esta toma el nombre de impedancia de onda.

Tomando la Ecuación 3.35a y estableciendo un modo de propagación de tipo TE (Apéndice D) se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\mu\omega H_x \quad 3.67$$

Tomando los conceptos respecto a la solución de la ecuación de onda, mediante el concepto de onda plana (3.44 y 3.45), se tiene:

$$-i\gamma E_y = i\mu\omega H_x$$

$$-\gamma E_y = \mu\omega H_x$$

Despejando a la razón entre los campos se tiene:

$$\frac{E_y}{H_x} = Z_{yx} = -\frac{\mu\omega}{\gamma} \quad 3.68$$

La cual se llama impedancia de onda (Z_{yx}). Esta impedancia es un número complejo en el mayor de los casos. Para este caso es necesario sustituir el valor de la constante de propagación:

$$Z_{yx} = -\frac{\mu\omega}{\gamma} = -\frac{\mu\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1+i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} = -\frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1+i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}}$$

$$Z_{yx} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1+i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} e^{i\pi} \quad 3.69$$

3.8. Propagación de Ondas Planas en Medios Dieléctricos Perfectos.

Los medios dieléctricos perfectos se caracterizan por su conductividad de $\sigma=0$, con lo que las ecuaciones que describen su propagación están dadas por las mismas ecuaciones que al modelo ondulatorio simplificado (Apéndice C):

$$\Delta \mathbf{E} + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad 3.70$$

$$\Delta \mathbf{H} + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{H} = 0 \quad 3.71$$

Bajo esta consideración se establece que la constante de propagación es igual a:

$$\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 \quad 3.72$$

Por lo que las relaciones la constante de propagación es igual a:

$$\gamma = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad 3.73$$

Para éste modo se establece que la constante de atenuación (b) es igual a cero; es decir que no existe pérdida de energía por medio de la conducción, por lo que la onda electromagnética puede propagarse infinitamente. Recurriendo al concepto de la profundidad de penetración (3.64):

$$\delta_c = \frac{1}{b} \approx \infty \quad 3.74$$

En un buen conductor, sucede lo contrario, δ_c tiende a cero. Mientras que la constante de fase es igual:

$$a = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad 3.75$$

Donde a tiene unidades de rad/m. Para el caso del vacío, la permeabilidad magnética y permitividad eléctrica serán:

$$a_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad 3.76$$

La velocidad para este modelo está dada por la Ecuación 3.59, en donde se sustituye la función de a :

$$v = \frac{\omega}{a} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad 3.77$$

El término de $\mu\epsilon$ tiene unidades de $(s/m)^2$, esta velocidad es conocida por la velocidad de fase. La velocidad es controlada por la habilidad del material para almacenar energía por medio de resistirse a una fuerza externa. Esta particularidad es descrita por medio de la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, es decir por las propiedades de polarización. Tomando las constantes para el vacío se tiene que la velocidad de una onda electromagnética está dada por la velocidad de la luz ($c \approx 299795637.69$ km):

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad 3.78$$

La velocidad con la que se propaga la onda electromagnética es descrita por la velocidad de la luz en el material. La velocidad de la onda electromagnética es siempre más lenta que en el vacío. En materiales no magnéticos la velocidad de propagación en el material es igual a la velocidad de la luz en el vacío, c , dividida por la raíz cuadrada de la permitividad eléctrica relativa.

De igual manera para la longitud de onda, se tiene que ésta puede establecerse en función de la velocidad y de la frecuencia. De la definición de la longitud de onda se tiene (3.61):

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} \quad 3.79$$

Al igual que el ejemplo anterior se tiene que para el caso del vacío la longitud de onda está dada por:

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{f\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{f} \quad 3.80$$

La impedancia de onda (3.68) para este modelo de propagación queda como:

$$\begin{aligned} Z_{yx} &= -\frac{\mu\omega}{\gamma} \\ Z_{yx} &= -\frac{\mu\omega}{\gamma} = -\frac{\mu\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\ Z_{yx} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} e^{i\pi} \end{aligned} \quad 3.81$$

La impedancia de onda, en este caso también intrínseca, para el vacío tiene la siguiente forma:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \quad 3.82$$

3.9. Propagación de Ondas Planas en Medios Disipativos.

Para tomar en cuenta la disipación de energía debemos tomar en cuenta las partes imaginarias de las propiedades eléctricas. Por lo que debemos tomar en cuenta la definición de la tangente de pérdida en función de las partes imaginarias de la permitividad (Sección 3.4.2). Tomando la definición de la constante de propagación (3.46):

$$\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\omega\sigma$$

Que puede ser escrita en función de la tangente de pérdida:

$$\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\omega\sigma = \mu\omega(\epsilon\omega + i\sigma) = \mu\omega^2\epsilon\left(1 + i\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right) = \mu\omega^2\epsilon(1 + i\tan\alpha) \quad 3.83$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Es de notar que para el caso de un dieléctrico perfecto la tangente de pérdida toma el valor de cero, por lo que la Ecuación 3.83 toma la expresión de la constante de propagación para el caso del modo simplificado ondulatorio (Apéndice C).

Cuando se tiene el caso de un dieléctrico disipativo es necesario introducir las expresiones complejas de la permitividad, con el fin de tomar en cuenta las pérdidas de energía (Nathan Ida, 1995). Por lo que se deben de tomar los conceptos desarrollados en la Sección 3.4.2, referentes a la tangente de pérdida (3.20):

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\omega \epsilon_1 + \sigma}{\omega \epsilon_R}$$

Sustituyéndola en la constante de propagación de la Ecuación 3.42 para el campo eléctrico queda como sigue:

$$\Delta E + \mu \omega^2 \epsilon (1 + i \text{Tan } \alpha) E = 0 \quad 3.84$$

De donde se tiene a la constante de propagación como:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \mu \omega^2 \epsilon (1 + i \text{Tan } \alpha) \\ \gamma &= \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 + i \text{Tan } \alpha} \end{aligned} \quad 3.85$$

Tomando esta ecuación, y haciendo un procedimiento similar a la de la Sección 3.7.1 es posible encontrar las expresiones para las constantes de atenuación (b) y de fase (a):

$$b = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{(\text{Tan } \alpha)^2 + 1} - 1 \right]} \quad 3.86$$

$$a = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{(\text{Tan } \alpha)^2 + 1} + 1 \right]} \quad 3.87$$

Es importante remarcar la diferencia de estas ecuaciones con las ecuaciones 3.50 y 3.52, esta consiste básicamente en que las constantes de propagación poseen términos complejos, producto de la disipación, por lo que cuidadosamente deberán tomarse en cuenta sus partes reales e imaginarias de las constantes (se añade el superíndice ' para diferenciarlas de las otras):

$$a' = a_R + ia_I \quad 3.88a$$

$$b' = b_R + ib_I \quad 3.88b$$

Aplicando las consideraciones hechas en la Sección 3.4.2 se toma al término $\omega \epsilon_1 + \sigma$ como una aproximación de la conductividad (σ), mientras que la parte real de la permitividad ϵ_R se considera como una aproximación de la permitividad (ϵ); por lo que la Ecuación 3.20 se puede escribir como (Nathan Ida, 1995; Keller, 1989; Ward and Hohmann, 1989):

$$\tan \alpha = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad 3.89$$

Esta ecuación es igual a la definición dada a partir de las corrientes de conducción y de desplazamiento (3.34), pero en este caso es deducida considerando la disipación por medio de las permitividades y conductividades complejas. Por lo que la constante de propagación puede escribirse como:

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\left(1 + \frac{i\sigma}{\omega \epsilon}\right)} \quad 3.90$$

3.9.1. Propagación de Ondas Planas en Dieléctricos Disipativos.

En las frecuencias altas del radar, el almacenamiento de la energía está dado por el dieléctrico y la polarización magnética crea la propagación de onda. Los materiales dieléctricos disipativos están definidos por la tangente de pérdida, esto es cuando éste parámetro es mucho menor a 1, es decir $\tan \alpha \ll 1$. Donde las corrientes de desplazamiento son mucho mayores que las de conducción, pero estas últimas no pueden despreciarse. Dado que existe una disipación de la energía por las partes complejas de la permitividad y estas se asignan a la parte real de la conductividad, ésta no puede despreciarse. Tomando en consideración lo anterior, la constante de propagación puede aproximarse mediante una expansión en series de Taylor de la constante de propagación (3.90):

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\left(1 + \frac{i\sigma}{\omega \epsilon}\right)}$$

Para poder determinar cada una de las constantes atenuación y de fase hacemos uso del teorema del binomio de Newton

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad 3.91$$

Donde $|x| \ll 1$ y $x = i \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)$ y $n = 1/2$

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + i \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2 + \dots \right] \quad 3.92$$

Tomando hasta el primer segundo término de la expansión se tiene que la aproximación de la constante de propagación es:

$$\gamma \cong \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + i \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right] \cong \omega \sqrt{\mu \epsilon} + i \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad 3.93$$

De donde se puede ver claramente que las constantes de fase y de atenuación son como sigue:

$$a \cong \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad 3.94$$

$$b \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad 3.95$$

Es importante señalar que la Ecuación 3.94 es idéntica a la Ecuación 3.75 con la diferencia de que la primera se trata de una aproximación. Es decir que podemos manipular la frecuencia de oscilación para poder incrementar las corrientes de desplazamiento con respecto de las de conducción y de esta manera asimilar un medio no muy conductivo.

Es también de señalar que para este caso la atenuación no depende de la frecuencia de oscilación. es decir que a frecuencias muy grandes la atenuación de la onda electromagnética tiende a hacer constante; esto es lo que puede ser visto en las Figuras 3.4 y 3.5. Por su parte la constante de fase aumenta con la frecuencia y se hace asintótica para cualquier rango de conductividades.

Dadas estas ecuaciones puede verse que la velocidad de la onda electromagnética estará dada por la Ecuación 3.59:

$$v = \frac{\omega}{a} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad 3.96$$

Que es idéntica a la expresión 3.77 pero con las diferencias de ser una aproximación para un rango de frecuencias muy grandes. Haciendo uso de las definiciones de permitividades y permeabilidades relativas se tiene:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad 3.97$$

Tomando en cuenta que las permeabilidades magnéticas de las rocas son aproximadamente igual a la del vacío se tiene (Sección 3.4.3):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad 3.98$$

Haciendo uso de la Ecuación 2.78, la velocidad de la onda en medios dieléctricos disipativos estará dada por:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad 3.99$$

La velocidad con la que se propaga la onda electromagnética es descrita por la velocidad de la luz en el material. La velocidad de la onda electromagnética es siempre más lenta que en el vacío. En materiales no magnéticos la velocidad de propagación en el material es igual a la velocidad de la luz en el vacío, c , dividida por la raíz cuadrada de la permitividad eléctrica relativa (Annan, 1992).

De la misma manera la longitud de onda estará dada por la Ecuación 3.61:

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} \equiv \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \quad 3.100$$

Que es idéntica a la expresión 3.79 pero con las diferencias de ser una aproximación para un rango de frecuencias muy grandes. Al igual que el ejemplo anterior se tiene que para el caso del vacío la longitud de onda está dada por la Ecuación 3.80:

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{f\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{f}$$

Haciendo uso de las definiciones de permitividades y permeabilidades relativas, la ecuación 3.100 puede ser escrita como:

$$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad 3.101$$

Por otro lado la Profundidad de penetración esta dada por la Ecuación 3.64, sustituyendo en ella la constante de atenuación (3.95):

$$\delta_c = \frac{1}{b} \equiv \frac{1}{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \equiv \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad 3.102$$

De la que podemos apreciar la independencia de la profundidad de penetración ante frecuencias grandes. Haciendo uso de las definiciones de permitividad y permeabilidad relativa, y de la definición de impedancia intrínseca (3.82):

$$\begin{aligned} \delta_c &\equiv \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\mu_0\mu_r}} \equiv \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\mu_0}} \\ \delta_c &= \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{\sigma Z_0} \end{aligned} \quad 3.103$$

Para el caso de la impedancia de onda se tiene:

$$Z_{ys} = -\frac{\mu\omega}{\gamma} \cong -\frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}\left[1+i\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right]} \cong -\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}\left[1+i\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right]} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{i\pi}}{\left[1+i\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right]} \quad 3.104$$

Recurriendo a la definición de impedancia intrínseca (3.82):

$$Z_{ys} \cong Z_0 \frac{e^{i\pi}}{\left[1+i\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right]} \quad 3.105$$

3.9.2. Propagación de la Onda Electromagnética en Conductores.

En medio muy conductor las pérdidas por disipación son muy altas, esto es que la tangente de pérdida es mayor a la unidad; o de otra forma que las corrientes de desplazamiento serán muy pequeñas respecto a las de conducción. Por el hecho de que sea una alta conductividad no tiene que ser un conductor perfecto, a frecuencias bajas y pérdidas altas, las ecuaciones reducen a la Ecuación de la difusión y se llama inducción electromagnética (Apéndice C). De la Ecuación 3.90 se tiene que:

$$\gamma = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\left(1+i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}$$

De donde para el caso en el que la tangente de pérdida aumenta, debido a la frecuencia de operación, su valor se puede aproximar mediante:

$$\gamma \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\frac{i\sigma}{\omega\epsilon}} \quad 3.106$$

Se puede observar que:

$$\gamma \cong \sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\sigma} \quad 3.107$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \quad 3.108$$

Sustituyendo 3.108 en 3.107, obtenemos:

$$\gamma \equiv (1+i)\sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}} \quad 3.109$$

De donde se puede observar que las constantes de fase y de atenuación tienen la misma expresión:

$$a \equiv b \equiv \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad 3.110$$

Nótese que este resultado también se obtiene si se toma el modo simplificado cuasiestacionario (Apéndice C), es decir que podemos aproximar la propagación de la onda electromagnética en un medio conductor si manipulamos la frecuencia a regiones bajas.

Para poder determinar la velocidad de la onda electromagnética es necesario tomar a la Ecuación 3.59:

$$v = \frac{\omega}{a} \equiv \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} \equiv \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad 3.111$$

Puede verse que la velocidad de la onda electromagnética aumenta con la frecuencia, y que si se combinan este factor con medios muy resistivos la velocidad de la onda electromagnética sería infinita. Es claro que el límite que la velocidad muestra en las Figuras 3.6 y 3.7. nos marcan que la expresión 3.111 sólo es válida para la primera región descrita en las Secciones 3.7.1, 3.7.2, 3.7.3 y 3.7.4.

La longitud de onda estará dada por la Ecuación 3.61:

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} \equiv \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} \equiv 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad 3.112$$

La atenuación de esta onda estará dada por la Ecuación 3.64:

$$\delta_c = \frac{1}{b} \equiv \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad 3.113$$

La impedancia de onda estará dada por la Ecuación 3.68:

$$Z_{yx} = -\frac{\mu\omega}{\gamma}$$

Que para este caso será:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$Z_{yn} = -\frac{\mu\omega}{\gamma} \equiv -\frac{\mu\omega}{\sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\sigma}} \equiv \sqrt{\omega\mu\rho} e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)} \quad 3.114$$

3.9.3. Transición de dieléctricos disipativos y Buenos conductores.

Es aquí donde debemos analizar los dos casos anteriores (3.9.1 y 3.9.2). Estas expresiones deben tener continuidad entre ellas, es decir cuando un medio puede aproximarse a un dieléctrico disipativo y un buen conductor. Para esto es preciso establecer la frecuencia a la que un medio deja de ser disipativo para pasar a ser conductivo y viceversa. Por lo que igualando, por ejemplo, las expresiones de la velocidad (3.96 y 3.111):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\omega_D}{\mu\sigma}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \\ \frac{2\omega_D}{\mu\sigma} &= \frac{1}{\mu\epsilon} \\ \omega_D &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \end{aligned} \quad 3.115$$

Esta frecuencia representa la transición entre la aproximación de un medio dieléctrico disipativo y un medio conductor; por lo que es necesario tenerla en cuenta para el uso correcto de las ecuaciones. Para frecuencia menores a ω_D se tiene la región de validez de los buenos conductores. Mientras que para frecuencias mayores a esta se tiene la región de validez de las aproximaciones referentes a medios dieléctricos disipativos.

Esta frecuencia es evidente en las Figuras 3.4 a 3.11, como ya se dijo básicamente existen dos regiones de frecuencias, que están descritas por las ecuaciones de las anteriores secciones. La primera región, descrita en la Sección 3.7, representa la región de los buenos conductores; mientras que la segunda región representa a los dieléctricos disipativos (Tabla 3.3).

En las secciones 3.7.1 y 3.7.4, se muestra que existe una tercera región; pero esta región sólo resalta en la constante de atenuación y en la profundidad de penetración. Esta región es la que corresponde a los dieléctricos perfectos, y están descritos en la sección 3.8. Es en estas ecuaciones donde se observa el por qué las constantes de fase, velocidad y longitud de onda, no muestran la transición de la segunda a la tercera región (Tabla 3.3).

MEDIO	CONSTANTE DE FASE	CONSTANTE DE ATENUACIÓN	VELOCIDAD	LONGITUD DE ONDA	PROFUNDIDAD DE PENETRACIÓN	IMPEDANCIA
Conductores	$a = \omega \sqrt{\frac{\mu r}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 + 1} \right) + 1} \right]}$	$b = \omega \sqrt{\frac{\mu r}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 + 1} \right) - 1} \right]}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu r}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 + 1} \right) + 1} \right]}}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{\mu r}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 + 1} \right) + 1} \right]}}$	$\delta_s = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\mu r}{2} \left[\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 + 1} \right) - 1} \right]}}$	$Z_{in} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}} e^{-a}$
Buenos conductores (Primera Región)	$a \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$	$b \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$	$v \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}$	$\lambda \cong 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$	$\delta_s \cong \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$	$Z_{in} \cong \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{-\sqrt{2} a}$
Dieléctricos Disipativos (Segunda Región)	$a \cong \omega \sqrt{\mu r}$	$b \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$v \cong \frac{1}{\sqrt{\mu r}}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu r}}$	$\delta_s \cong \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$	$Z_{in} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right]^{\frac{1}{2}}$
Vacío (Tercera Región)	$a_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$	$b \cong 0$	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$	$\lambda_0 = \frac{c}{f}$	$\delta_s \cong \infty$	$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73$

Tabla 3.3. –Resumen de las características de cada región.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Para poder establecer la región sobre la cual el modelo dieléctrico disipativo es válido, es necesario tomar en cuenta los rangos de frecuencia en los que estas aproximaciones son válidas. En la Ecuación 3.115, se describe una frecuencia de transición entre las aproximaciones de un buen conductor y de un medio dieléctrico disipativo; esta frecuencia se presenta cuando la tangente de pérdida es igual a 2. Dicha frecuencia nos muestra que es directamente proporcional a la conductividad eléctrica e inversamente proporcional a la permitividad, por un factor de escala. En la Tabla 3.4 se muestran los rangos de las frecuencias de transición para los materiales de la Tabla 3.2.

Debido a que los diferentes materiales muestran un rango de propiedades eléctricas, se tienen entonces límites de las frecuencias de transición de estos para poder ser modelados mediante una u otra aproximación.

MATERIAL	Frecuencia máxima (MHz)	Frecuencia Mínima (MHz)
Aire	0.0000	0.0000
Hielo	0.7070	0.0354
Concreto	0.0707	0.0471
Asfalto	0.0074	0.0007
Cemento	0.1768	0.0177
Suelo Arenoso	0.0094	0.0001
Suelo limoso	0.1131	0.0001
Suelo arcilloso	0.1178	0.0012
Grava cemento	0.2175	0.0218
Conglomerado	0.0393	0.0236
Caliche	0.0738	0.0738
Granito	8.4842	0.0404
Caliza	14.1403	1.7675
Arena Seca	0.0707	0.0471
Arena Saturada	1.4140	0.0754
Arcilla Seca	7.3529	7.3529
Arcilla Saturada	707.0136	707.0136
Esquisto	1300.9050 *	2.4510
Basalto Húmedo	0.0354	0.0354
Limo	509.0498	5.0905
Sal	7.4661	0.0735
Agua salada	10605.2036 *	10605.2036 *
Agua dulce	0.1768	0.1768
Agua destilada	0.0035	0.0035

Tabla 3.4.- Rango de frecuencias de transición de un modelo conductivo y dieléctrico disipativo.

*Frecuencias que sobrepasan la región del GPR.

Comparando el rango de frecuencias que se obtiene de esta tabla, con la del rango de frecuencias que se utiliza en GPR; puede apreciarse que sólo el agua salada sobrepasa el rango de frecuencias del GPR. Mientras que, en ciertos rangos el esquisto, la arcilla saturada y el limo, pueden sobrepasar el rango de frecuencias del GPR (Figura 3.12). Esto indica que el rango de frecuencias usadas en GPR es mayor, para la mayoría de los materiales, que la frecuencia de transición entre un dieléctrico disipativo y un conductor. Por ello es que el usar las aproximaciones de dieléctricos disipativos en GPR es válida para la mayoría de los casos.

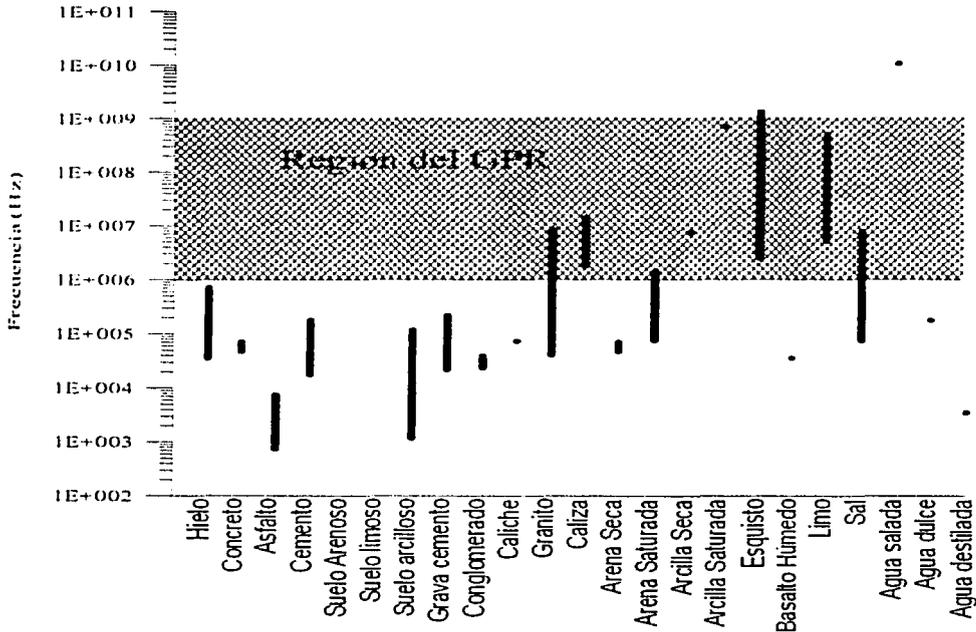


Figura 3.12- Rangos de frecuencia del GPR y la transición de dieléctrico disipativo a conductor.

Como se describió en las secciones 3.7.1, 3.7.2, 3.7.3 y 3.7.4 los materiales ante el incremento de las frecuencias, describen tres distintas regiones. La primera región corresponde a las aproximaciones de buenos conductores; la segunda región corresponde a los materiales que se comportan como dieléctricos disipativos, y la tercera región donde los materiales se comportan como dieléctricos perfectos. Estas tres regiones están descritas por dos frecuencias de transición.

La primera de estas frecuencias, que divide la región de los dieléctricos disipativos y los buenos conductores, ya ha sido analizada en los párrafos anteriores. Para el caso de la segunda frecuencia está dada sólo para un rango de frecuencia, que es siempre igual para todos los materiales; y la segunda frecuencia de transición es directamente proporcional a la

conductividad del medio, y a un factor de escala de 56×10^6 e inversamente proporcional a la permitividad eléctrica del medio (Tabla 3.5 y Figura 3.13). Aunque es importante mencionar que para el rango de frecuencias >3 GHz debe de tomarse en cuenta la disipación de energía causadas por las partes complejas de la propiedades eléctricas (Sección 3.4.2), que en este caso no se consideran, por lo que esta última frecuencia de transición debe tomarse con reservas.

MATERIAL	Frecuencia máxima (MHz)	Frecuencia Mínima (MHz)
Aire	0.00E+00	0.00E+00
Hielo	1.58E+08	7.92E+06
Concreto	1.58E+07	1.06E+07
Asfalto	1.67E+06	1.67E+05
Cemento	3.96E+07	3.96E+06
Suelo Arenoso	2.11E+06	2.53E+04
Suelo limoso	2.53E+07	3.33E+04
Suelo arcilloso	2.64E+07	2.64E+05
Grava cemento	4.87E+07	4.87E+06
Conglomerado	8.80E+06	5.28E+06
Caliche	1.65E+07	1.65E+07
Granito	1.90E+09	9.05E+06
Caliza	3.17E+09	3.96E+08
Arena Seca	1.58E+07	1.06E+07
Arena Saturada	3.17E+08	1.69E+07
Arcilla Seca	1.65E+09	1.65E+09
Arcilla Saturada	1.58E+11	1.58E+11
Esquisto	2.91E+11	5.49E+08
Basalto Húmedo	7.92E+06	7.92E+06
Limo	1.14E+11	1.14E+09
Sal	1.67E+09	1.65E+07
Agua salada	2.38E+12	2.38E+12
Agua dulce	3.96E+07	3.96E+07
Agua destilada	7.92E+05	7.92E+05

Tabla 3.6.- Rango de frecuencias de transición de un modelo dieléctrico disipativo y un dieléctrico perfecto.

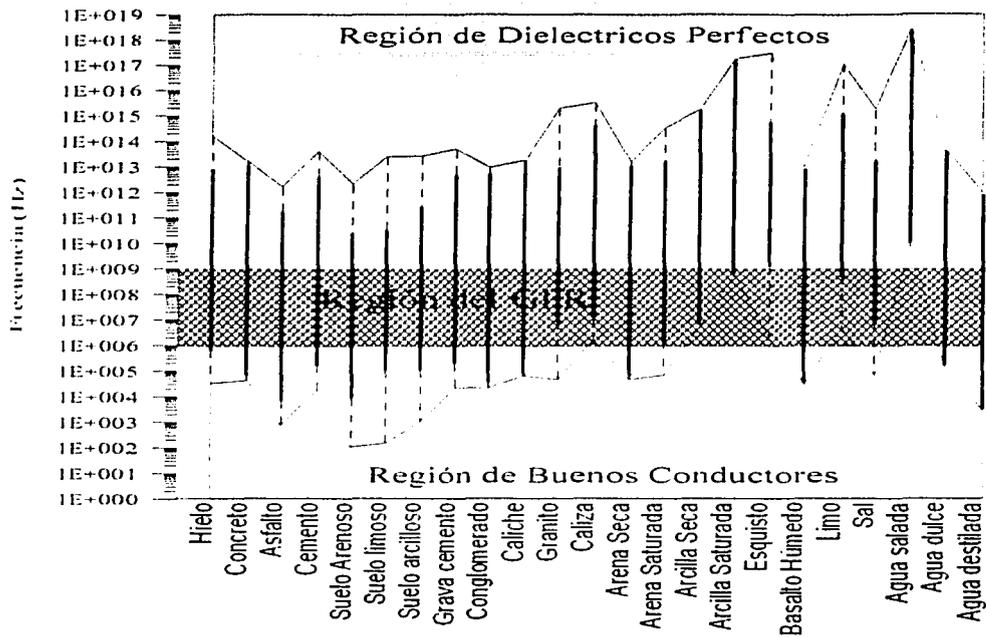


Figura 3.13- Rango de frecuencias del GPR y las tres regiones con sus frecuencias de transición.
 Zona de Transición ----- Región de Dieléctricos Disipativos —————

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

4. Modelo Directo

4.1. Teoría.

Consideraremos una onda plana incidiendo normalmente sobre un modelo estratificado del terreno de n-capas cuyas tres propiedades electromagnéticas (ϵ , μ , σ) varían de capa a capa. La onda plana se propaga hacia abajo en la dirección positiva z (Figura 4.1):

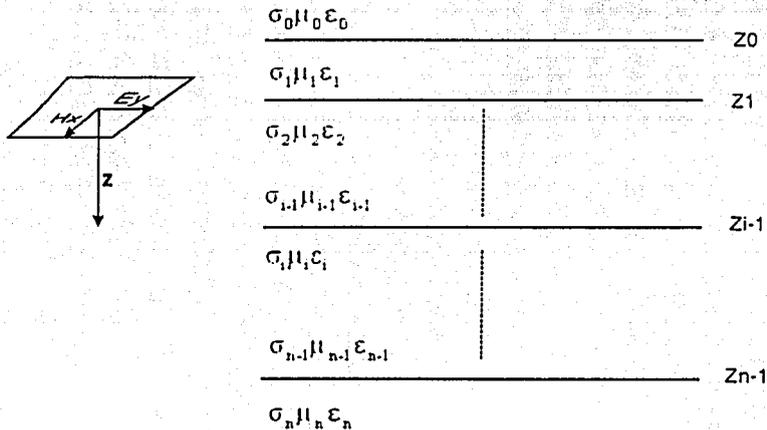


Figura 4.1.- Modelo de una tierra estratificada homogénea e isotrópica en una dimensión.

Cada capa o región es homogénea por lo que podemos utilizar las ecuaciones 3.42 y 3.43. Aplicando a estas ecuaciones una polarización TE (Apéndice D) se tienen las siguientes ecuaciones del campo electromagnético:

$$\frac{d^2 E_{yi}}{dz^2} + \gamma_i^2 E_{yi} = 0 \quad 4.1a$$

$$\frac{d^2 H_{xi}}{dz^2} + \gamma_i^2 H_{xi} = 0 \quad 4.1b$$

Donde el índice i indica que existe una ecuación para cada capa. En las ecuaciones 4.1 definimos a la constante de propagación para el caso de un medio conductor (3.46) para un medio estratificado:

$$\gamma_i = (\omega^2 \mu \epsilon_i + i \omega \mu \sigma_i)^{1/2} \quad 4.2$$

En base al concepto de onda plana, la solución de ecuaciones con la forma de 4.1 tiene la siguiente forma (Apéndice B):

$$E_{yi} = A_i e^{i\gamma_i z} + B_i e^{-i\gamma_i z} \quad 4.3a$$

$$H_{xi} = C_i e^{i\gamma_i z} + D_i e^{-i\gamma_i z} \quad 4.3b$$

De donde es necesario establecer los valores de las constantes de amplitud de cada Ecuación. Aplicando la condición de que los campos no pueden propagarse infinitamente a las anteriores ecuaciones, obtenemos la solución de los campos eléctrico y magnético en la última capa (Apéndice B):

$$E_{yn} = A_n e^{i\gamma_n z_n} \quad 4.4$$

$$H_{xn} = C_n e^{i\gamma_n z_n} \quad 4.5$$

Dado que existe una relación directa entre los campos eléctrico y magnético, se utiliza la Ecuación 3.67, para determinar la relación entre los campos eléctrico y magnético:

$$-\frac{\partial E_{yn}}{\partial z} = i\mu\omega H_{xn}$$

$$H_{xn} = -\frac{\gamma_n}{\mu\omega} (A_n e^{i\gamma_n z_n}) \quad 4.6$$

De la misma forma para el caso de las ecuaciones 4.3 se tiene:

$$H_{xi} = -\frac{\gamma_i}{\mu\omega} (A_i e^{i\gamma_i z_i} - B_i e^{-i\gamma_i z_i}) \quad 4.7$$

Dado que para el problema del Radar de Penetración terrestre sólo nos interesa conocer el campo eléctrico en superficie, debemos determinar los valores de las constantes de amplitud A y B. Es claro que si nos interesara conocer el campo magnético sólo debemos aplicar la Ecuación 4.7. Necesitamos ahora establecer la continuidad de los campos electromagnéticos en los límites de las fronteras, es decir en los límites entre estratos. Para ello aplicamos las condiciones de frontera para las componentes tangenciales (Sección 3.3), pues se trata de una onda con frente de onda plano (3.11 y 3.13):

$$E_{\tau}^{(i+1)} - E_{\tau}^{(i)} = 0$$

$$H_{\tau}^{(i+1)} - H_{\tau}^{(i)} = 0$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.7 y 4.3a, para el límite de la capa i con i+1, en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$A_i e^{i\gamma_i z_i} + B_i e^{-i\gamma_i z_i} = A_{i+1} e^{i\gamma_{i+1} z_i} + B_{i+1} e^{-i\gamma_{i+1} z_i} \quad 4.8$$

Mientras que para el campo magnético:

$$\gamma_i (A_i e^{i\gamma_i z_i} - B_i e^{-i\gamma_i z_i}) = \gamma_{i+1} (A_{i+1} e^{i\gamma_{i+1} z_i} - B_{i+1} e^{-i\gamma_{i+1} z_i}) \quad 4.9$$

Despejando el lado izquierdo de la anterior Ecuación de la constante de propagación se tiene:

$$A_i e^{i\gamma_i z_i} - B_i e^{-i\gamma_i z_i} = \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} (A_{i+1} e^{i\gamma_{i+1} z_i} - B_{i+1} e^{-i\gamma_{i+1} z_i}) \quad 4.10$$

Restando las ecuaciones 4.10 menos 4.8 se tiene:

$$B_i = \frac{A_{i+1}}{2} e^{i(\gamma_{i+1} + \gamma_i) z_i} \left(1 - \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} \right) + \frac{B_{i+1}}{2} e^{-i(\gamma_{i+1} - \gamma_i) z_i} \left(\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} + 1 \right) \quad 4.11$$

Que representa al valor de la constante B en capa i-esima, en función de las constantes de las capas siguientes. Del mismo modo sumando las ecuaciones 4.8 y 4.10 se establece que para el coeficiente A se tiene:

$$A_i = \frac{A_{i+1}}{2} e^{i(\gamma_{i+1} - \gamma_i) z_i} \left(\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} + 1 \right) + \frac{B_{i+1}}{2} e^{-i(\gamma_{i+1} + \gamma_i) z_i} \left(1 - \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} \right) \quad 4.12$$

Finalmente se tiene una expresión de las constantes que definen a la amplitud del campo eléctrico en función de las constantes de la capa inferior. Haciendo un cambio de variable para facilitar el manejo de las ecuaciones.

$$\theta_1^{i+1} = (\gamma_{i+1} + \gamma_i), \theta_2^{i+1} = (\gamma_{i+1} - \gamma_i), \phi_1^{i+1} = \left(\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} + 1 \right) \text{ y } \phi_2^{i+1} = \left(1 - \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} \right) \quad 4.13$$

Por lo que las ecuaciones 4.11 y 4.12 pueden escribirse como sigue:

$$A_i = \frac{A_{i+1}}{2} e^{i\theta_2^{i+1} z_i} \phi_1^{i+1} + \frac{B_{i+1}}{2} e^{-i\theta_1^{i+1} z_i} \phi_2^{i+1} \quad 4.14$$

$$B_i = \frac{A_{i+1}}{2} e^{i\theta_1^{i+1} z_i} \phi_2^{i+1} + \frac{B_{i+1}}{2} e^{-i\theta_2^{i+1} z_i} \phi_1^{i+1} \quad 4.15$$

Puesto que en la última capa B_n es igual a cero, para poder satisfacer el hecho de que la onda no puede propagarse infinitamente, las expresiones 4.14 y 4.15 se reducen:

$$A_{n-1} = e^{i\theta_2^{n-1} z_{n-1}} \phi_1^n A_n \quad 4.16$$

$$B_{n-1} = e^{i\theta_1^{n-1} z_{n-1}} \phi_2^n A_n \quad 4.17$$

Para poder determinar las amplitudes, se condiciona que el campo inicial A_0 es igual a 1. De esta forma es posible encontrar el campo eléctrico normalizado en cada capa. Por lo que el campo eléctrico en la superficie, en el dominio de las frecuencias, estará dado por (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996):

$$E_{y0} = 1 + B_0 \quad 4.18$$

Por lo que el problema se resuelve encontrando la constante de amplitud B_0 . Es importante decir que esta constante está en función de las constantes de amplitud de todas las capas del modelo, así como de las constantes de propagación de cada una de las capas. Es decir esta constante de amplitud contiene la información de las características del modelo estratificado. Mediante el procedimiento propuesto por Wait (1970), se pueden encontrar una relación de recurrencia para poder encontrar la constante de amplitud B_0 . Tomando el cociente de las ecuaciones 4.15 y 4.14:

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{e^{i\theta_1^{i+1}z_i} \phi_2^{i+1}}{e^{i\theta_2^{i+1}z_i} \phi_1^{i+1}} \left[\frac{1 + \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}} e^{-i\theta_1^{i+1}z_i} \phi_1^{i+1}}{1 + \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}} e^{i\theta_1^{i+1}z_i} \phi_2^{i+1}} \right] = e^{iz_i(\theta_1^{i+1} - \theta_2^{i+1})} \frac{\phi_2^{i+1}}{\phi_1^{i+1}} \left[\frac{1 + \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}} e^{-iz_i(\theta_2^{i+1} - \theta_1^{i+1})} \phi_1^{i+1}}{1 + \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}} e^{-iz_i(\theta_1^{i+1} - \theta_2^{i+1})} \phi_2^{i+1}} \right]$$

$$\frac{B_i}{A_i} = e^{i2\gamma_i z_i} \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{\gamma_i + \gamma_{i-1}} \frac{1 + \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}} e^{-i2\gamma_{i+1} z_i} \frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{\gamma_i - \gamma_{i-1}}}{1 + \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}} e^{-i2\gamma_{i+1} z_i} \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{\gamma_i + \gamma_{i-1}}} \quad 4.19$$

Tomando las definiciones de constante de reflexión (Apéndice E) se tiene:

$$\frac{B_i}{A_i} = e^{i2\gamma_i z_i} \left[\frac{R_{i,i+1} + \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}} e^{-i2\gamma_{i+1} z_i}}{1 + R_{i,i+1} \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}} e^{-i2\gamma_{i+1} z_i}} \right] \quad 4.20$$

$$B_i = A_i \left[e^{i2\gamma_i z_i} \frac{R_{i,i+1} + e^{-i2\gamma_{i+1} z_i} \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}}}{1 + R_{i,i+1} e^{-i2\gamma_{i+1} z_i} \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}}} \right] \quad 4.21$$

Haciendo uso del hecho de que el campo incidente es igual a la unidad esta ecuación puede ser simplemente escrita como:

$$B_0 = e^{i2\gamma_0 z_0} \frac{R_{0,1} + e^{-i2\gamma_1 z_0} \frac{B_1}{A_1}}{1 + R_{0,1} e^{-i2\gamma_1 z_0} \frac{B_1}{A_1}} \quad 4.22$$

Expandiendo la anterior ecuación para un modelo de n capas. B_0 tendrá la siguiente expresión:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$B_0 = e^{i2\gamma_n z_n} \frac{R_{0,1} + e^{i2\gamma_1(z_1 - z_n)}}{1 + R_{0,1} e^{i2\gamma_1(z_1 - z_n)}} \frac{R_{1,2} + e^{-i2\gamma_2 z_1}}{1 + R_{1,2} e^{-i2\gamma_2 z_1}} \dots \frac{R_{n-2,n-1} + e^{i2\gamma_{n-1}(z_{n-1} - z_{n-2})} R_{n-1,n}}{1 + R_{n-2,n-1} e^{i2\gamma_{n-1}(z_{n-1} - z_{n-2})} R_{n-1,n}} \quad 4.23$$

Como vemos la constante de amplitud B_0 está en función de las propiedades de todas las capas inferiores. Sustituyendo la Ecuación 4.23 en la Ecuación 4.18, podemos obtener finalmente la ecuación del campo eléctrico en superficie. El siguiente paso es el acoplar un pulso al campo eléctrico de la Ecuación 4.18; para este caso es el pulso de Ricker:

$$S(f) = \frac{f^2}{f_c^2} e^{-\frac{f^2}{f_c^2}} \quad 4.24$$

Donde f es la frecuencia y f_c es la frecuencia nominal o central de oscilación (Ricker, 1977). Las características del pulso de Ricker con una frecuencia central de oscilación de 100 MHz, se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3.

Para acoplar el campo eléctrico con el pulso de Ricker recurrimos al concepto de convolución, que en el dominio de las frecuencias se define como (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996):

$$Rw = Ex(f)S(f) \quad 4.25$$

Por lo que resta es aplicar la transformada inversa de Fourier al producto del campo eléctrico y el pulso de Ricker. Para esto el campo eléctrico se puede descomponer en su parte real e imaginaria:

$$Rw = q + ik \quad 4.26$$

Aplicando a ésta última expresión la transformada Inversa de Fourier, de acuerdo al Apéndice A, se tiene:

$$Rt(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R\omega e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R\omega [\text{Cos}(\omega t) + i\text{Sen}(\omega t)] d\omega$$

$$Rt(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [q + ik] [\text{Cos}(\omega t) + i\text{Sen}(\omega t)] d\omega$$

$$Rt(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [q\text{Cos}(\omega t) + ik\text{Cos}(\omega t) + iq\text{Sen}(\omega t) - k\text{Sen}(\omega t)] d\omega \quad 4.27$$

Tomando a la parte real como par y la imaginaria como impar, podemos asegurarnos de que la información que obtendremos en el dominio del tiempo sea real, que será el radargrama para el modelo estratificado:

$$Rt(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [q\text{Cos}(\omega t)] d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k\text{Sen}(\omega t)] d\omega \quad 4.28$$

Finalmente el proceso consiste en aplicar integrales numéricas de la forma coseno y seno a las partes real e imaginaria respectivamente.

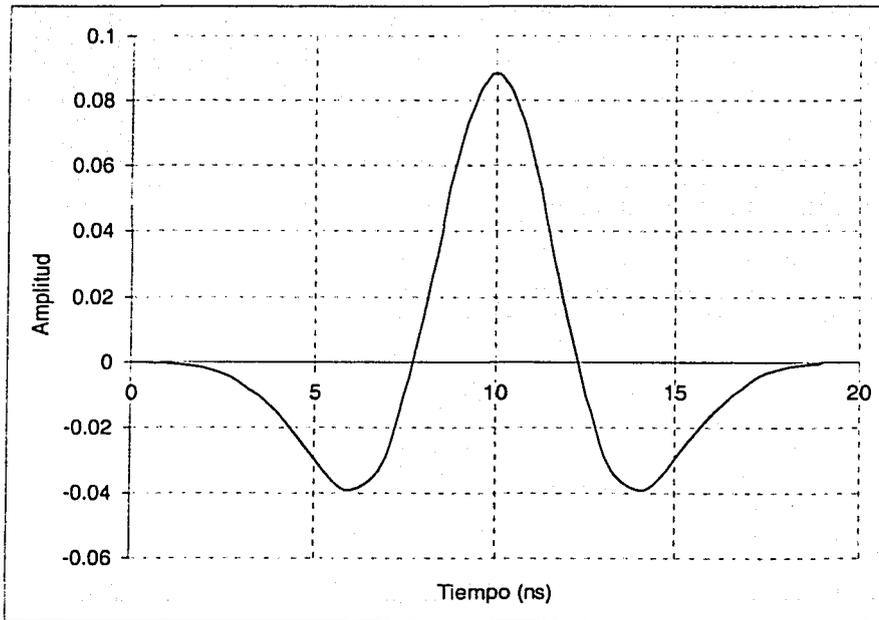


Figura 4.2.- Pulso de Ricker con una frecuencia nominal de 100 MHz, en el dominio del tiempo.

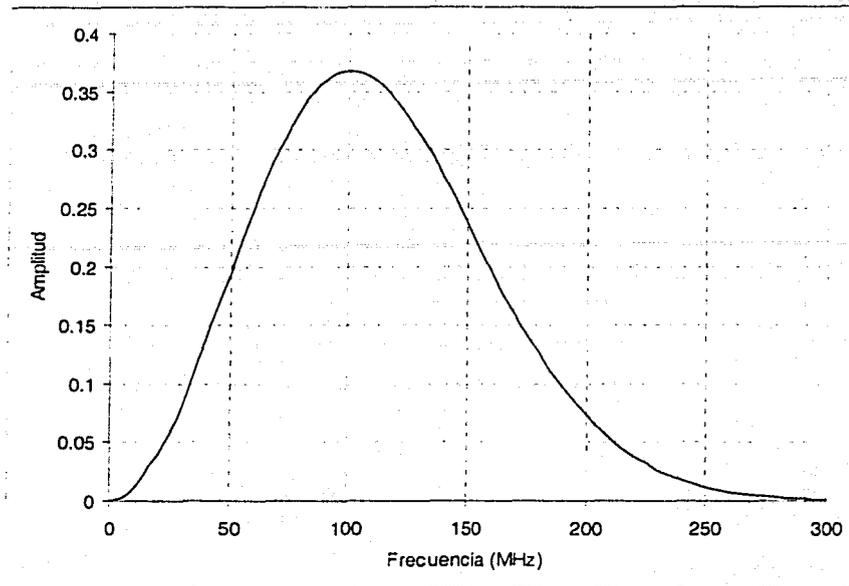


Figura 4.3.- Pulso de Ricker con una frecuencia nominal de 100 MHz, en el dominio de las frecuencias.

4.2. Resultados.

Para calibrar el modelo directo se reproduce el radargrama sintético de Annan (1992), con las siguientes características:

Capa	Material	Profundidad (m)	Permeabilidad Magnética	Conductividad Eléctrica (S/m)	Permitividad Eléctrica
1	Caliza	0	μ_0	0.002	$6\epsilon_0$
2	Aire	4	μ_0	0	ϵ_0
3	Caliza	6	μ_0	0.002	$6\epsilon_0$

Tabla 4.1. Características del modelo sintético de Annan P. (1992).

Se calcula el radargrama con una ventana de muestreo de 200 ns, y 1024 muestras por registro. Tomando los parámetros de la Tabla 4.1 se calcula el campo eléctrico en superficie (4.18):

$$E_{y0} = 1 + B_0$$

Las características del campo eléctrico normalizado obtenido se muestran en las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6.

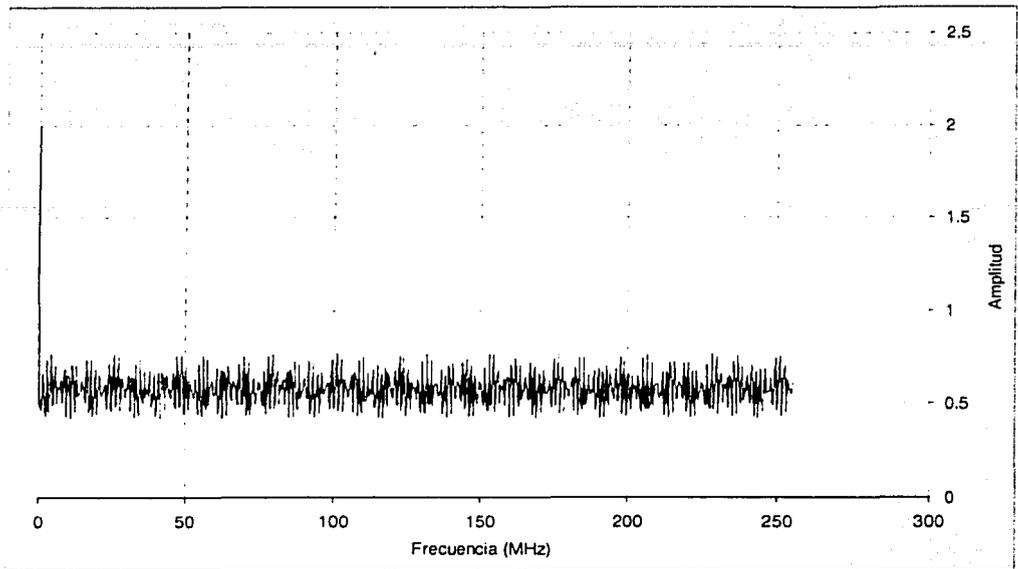


Figura 4.4.- Parte real del campo eléctrico normalizado en superficie.

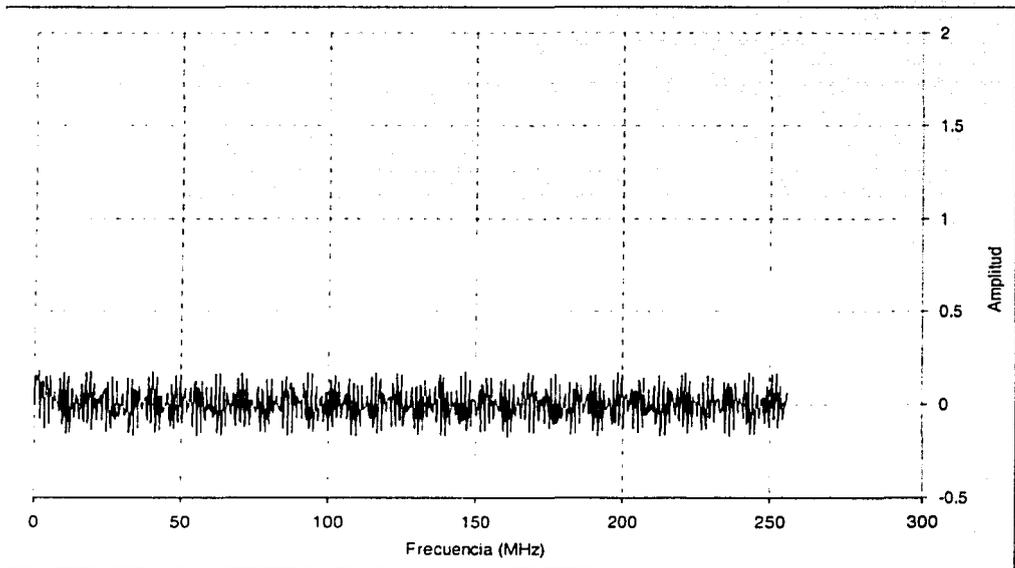


Figura 4.5.- Parte imaginaria del campo eléctrico normalizado en superficie

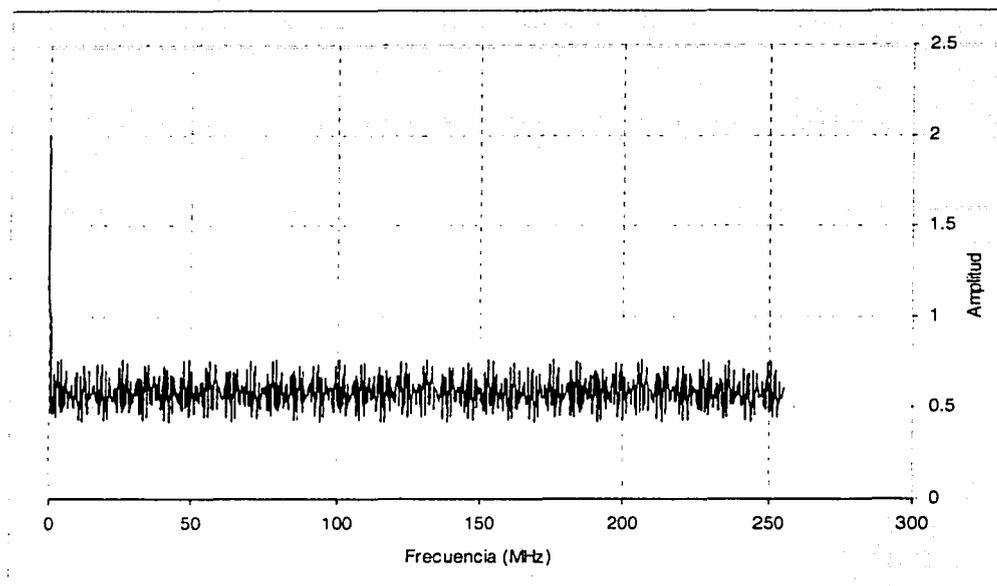


Figura 4.6.- Espectro de amplitud del campo eléctrico normalizado en superficie.

El campo eléctrico obtenido mediante la Ecuación 4.18 es la señal que contiene la información sobre el modelo de la Tabla 4.1. Para que éste campo tenga sentido físico es necesario llevarlo al dominio del tiempo. Por lo que aplicando la transformada de inversa de Fourier al campo eléctrico en superficie (4.18), obtenemos la representación física del campo eléctrico normalizado en superficie (Figura 4.7).

El campo eléctrico normalizado en superficie muestra las reflexiones, provocadas por los cambios en las propiedades eléctricas, en una escala de tiempo (Figura 4.7). Estas reflexiones se presentan con impulsos, que nos indican las amplitudes de los contrastes del campo eléctrico en cada capa, además de los cambios de fase que se tienen. Puede verse en la Figura 4.7 los tres primeros arribos referentes a las tres fronteras que se tienen en el modelo (Tabla 4.1). Se aprecian otros impulsos que son referentes a los múltiples que se tienen producto de la cavidad, del modelo, y de los límites de cada capa.

De esta forma el siguiente paso es el de acoplar, mediante el proceso de convolución el pulso de Ricker al campo eléctrico. Recurriendo a la propiedad de la convolución en el dominio de las frecuencias, se multiplican en las expresiones complejas del campo eléctrico normalizado en superficie y el pulso de Ricker, mediante la Ecuación 4.25. En la Figura 4.8 se muestra el espectro de amplitud de dicho producto. Puede verse que como el contenido de frecuencia del pulso de Ricker ha sido modificado por el contenido de altas frecuencias del campo eléctrico.

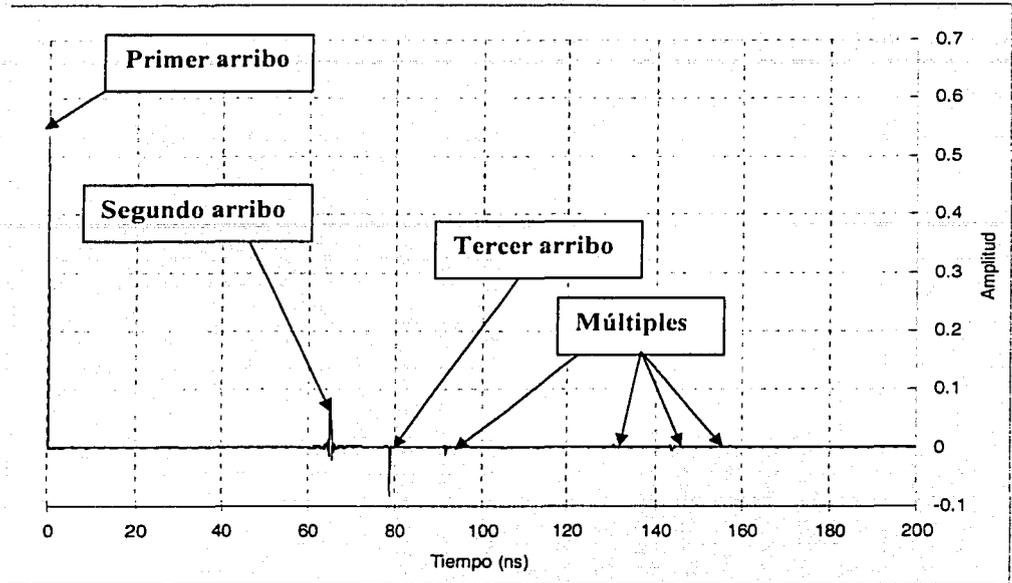


Figura 4.7.- Campo eléctrico normalizado en superficie en el dominio del tiempo.

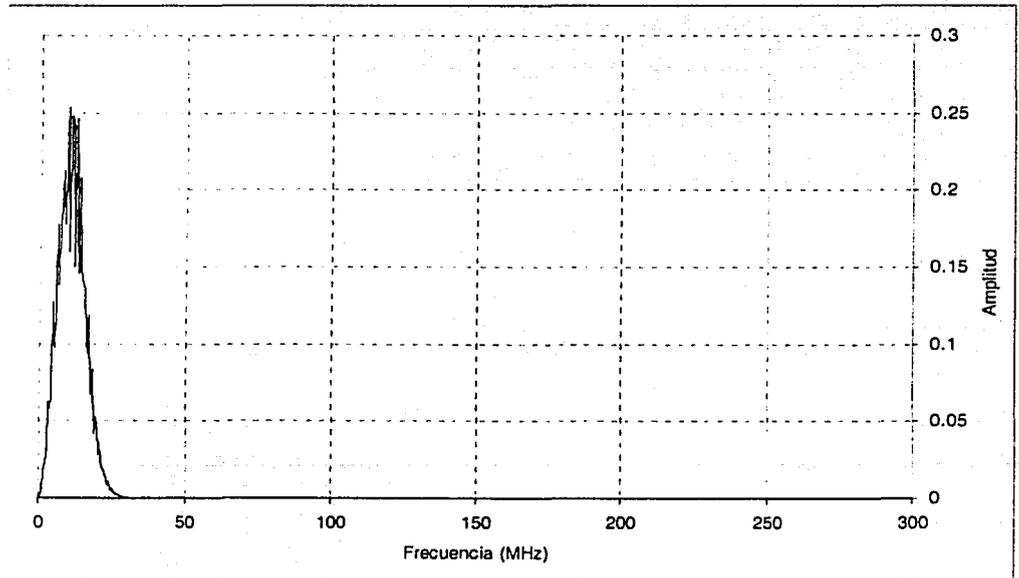


Figura 4.8.- Espectro de amplitud del radargrama normalizado ($R\omega$).

Finalmente el producto, en el dominio de las frecuencias, del campo eléctrico normalizado obtenido en superficie y el pulso de Ricker, es llevado al dominio del tiempo, para poder obtener su representación física. Por lo que aplicamos la Ecuación 4.28, para establecer las integrales, que se resuelven numéricamente.

De esta forma se obtiene el radargrama característico del modelo (Tabla 4.1), mediante un pulso de Ricker con una frecuencia central de 100 MHz (Figura 4.9). En la Figura 4.9, se pueden apreciar básicamente las mismas características de la Figura 4.7. Pues se aprecian los tres primeros arribos referentes a las fronteras de las capas; además de los múltiples asociados a la cavidad y los primeros arribos.

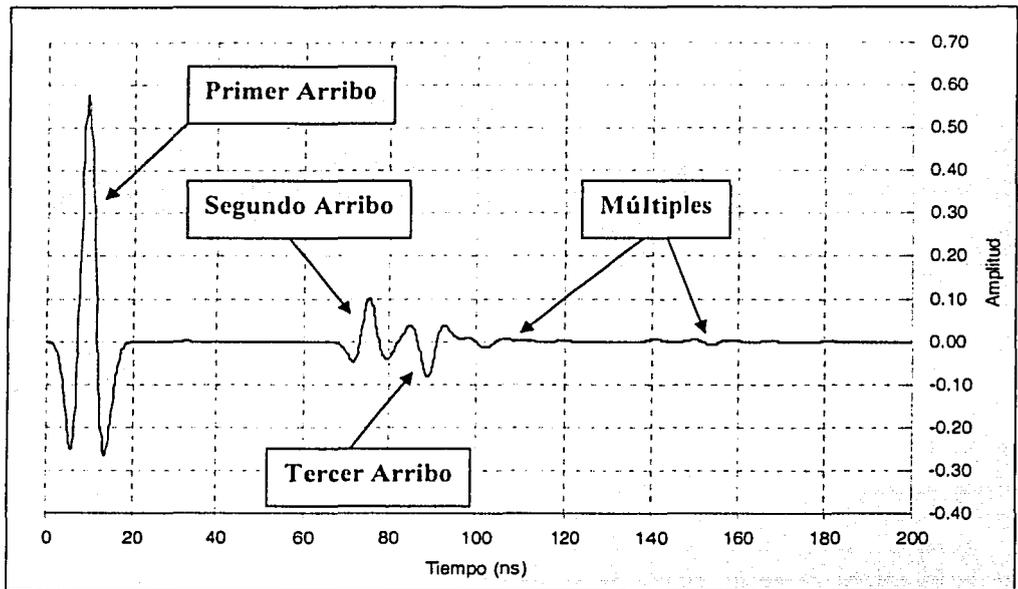


Figura 4.9.- Radargrama normalizado (R_t) en el dominio del tiempo, para el modelo estratificado propuesto.

Con el fin de comparar la eficiencia de este modelo se compara éste último con el radargrama calculado por Annan (1992). Para ello se le agrega una función de ganancia lineal al radargrama para poder comparar los últimos arribos, incluyendo los múltiples. Se observa que los tiempos de los arribos en la Figuras 4.7 y 4.9 son correctos y coinciden con los de Annan; pero estos radargramas sintéticos muestran una gran diferencia en la forma del pulso (Figura 4.10).

Esto es por que el radargrama obtenido por Annan presenta un pulso electromagnético con características diferentes a las de un pulso de Ricker. Esto nos dice que el problema de comparar radargramas sintéticos con reales, será el de poder conocer las características de los pulsos electromagnéticos. Esto es evidente si para el caso anterior (Tabla 4.1), se calcula nuevamente el radargrama pero con un pulso diferente al de Ricker.

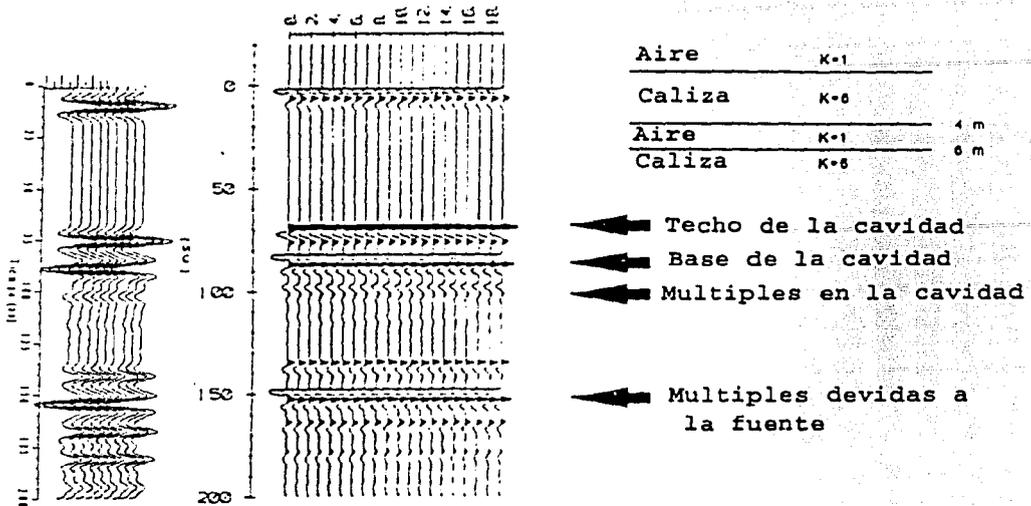


Figura 4.10.- Comparación del radargrama normalizado (Izquierda) con el radargrama de Annan (1992). Al radargrama normalizado se le agregó una función de ganancia lineal.

Por ejemplo un pulso Gaussiano con una frecuencia central de 100 MHz (Figura 4.11). Convolucionando dicho pulso con el campo eléctrico calculado en superficie (Ecuación 4.18) y comparando los radargramas obtenidos con los diferentes pulsos electromagnéticos, podemos ver que existen claras diferencias entre ambos (Figura 4.12).

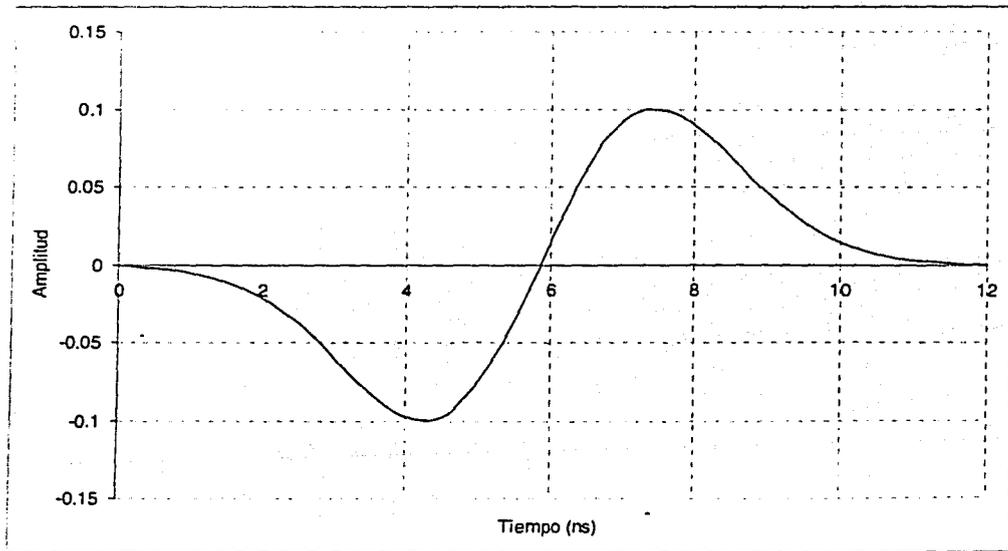


Figura 4.11.- Pulso Gaussiano con frecuencia central de 100 MHz.

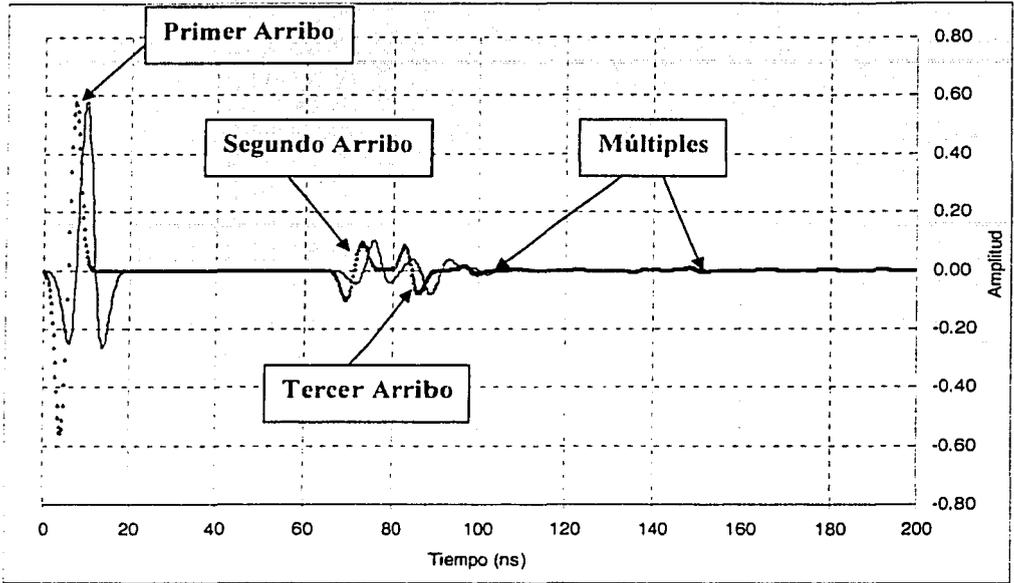


Figura 4.12. – Radargramas normalizados calculados mediante diferentes pulsos electromagnéticos.
 Pulso de Ricker — Pulso Gaussiano ▲

Estas diferencias existen solo en la forma del pulso, y la duración del mismo. Pues en ambos radargramas se muestran los mismos tiempos de arribo de las reflexiones. De esta forma es claro que para poder comparar radargramas, es necesario en primera instancia que los radargramas a comparar tengan el mismo pulso.

4.3. Aproximación para un medio dieléctrico disipativo.

Ahora consideremos el caso de un medio dieléctrico disipativo, con el fin de poder simplificar las ecuaciones que nos describan el proceso de propagación de la onda electromagnética en un medio estratificado. Se toma la definición para la constante de propagación, en un medio dieléctrico disipativo (3.93), y aplicándola a una Tierra estratificada:

$$\gamma_i \equiv \omega \sqrt{\mu \epsilon_i} + i \frac{\sigma_i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_i}} \quad 4.29$$

Para obtener el campo eléctrico en la superficie, sólo es cuestión de sustituir la Ecuación 4.29 dentro del modelo directo para poder obtener la Ecuación 4.18. Dado que 4.29 es una aproximación de la constante de propagación, deben de existir diferencias entre los radargramas calculados de un medio dieléctrico disipativo y un medio conductor. Para cuantificar estas diferencias se usa la ecuación del rms (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 2000):

$$\text{rms}[\%] = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [Rt_c - Rt_D]^2}{\overline{Rt}^2}} 100 \quad 4.30$$

$$\overline{Rt} = \sqrt{\sum_{i=1}^N Rt_c^2} \quad 4.31$$

Donde Rt_c es el radargrama obtenido mediante el modelo conductivo y Rt_D es el radargrama obtenido mediante el modelo dieléctrico disipativo. Como se observa en la Ecuación 4.30 el rms se normaliza respecto al promedio definido en la Ecuación 4.31; dado que en la mayoría de los radargramas existen valores de Rt iguales a cero para muchos tiempos t_i (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 2000).

Para comparar ambos radargramas se utiliza el modelo de la Tabla 4.1. El radargrama calculado mediante la aproximación de un dieléctrico disipativo se muestra en la Figura 4.13. Es de apreciarse que no presenta diferencia alguna con respecto del calculado en la Figura 4.9.

Usando el esquema de Ecuación 4.30 se tiene que el rms entre los dos modelos es de 0.48%. Este error nos habla de la buena aproximación que los modelos dieléctricos disipativos, a grandes frecuencias, tienen respecto a los modelos conductores. Es importante aclarar que si tomamos en sentido estricto la definición del rms, éste sería de 0.005%. Por lo que el usar el esquema de 4.30, para el cálculo del rms, resulta en un dato más apropiado. De esta forma es que los modelos de dieléctricos disipativos pueden considerarse adecuados para la modelación del Radar de Penetración Terrestre.

De la Figura 4.13 puede verse además que la longitud del pulso apenas puede identificar las interfaces de los estratos; es decir que la frecuencia central de los pulsos apenas es la correcta para evitar que los pulsos se sumen y se puedan distinguir los arribos de cada reflexión.

Esto es parte del concepto de resolución del GPR, que nos muestra la dimensión de los objetos, en este caso espesores de capa, que la onda electromagnética puede detectar. Esto puede verse más claramente en la ecuación 3.100, que nos muestra como la longitud de la onda es modificada por la frecuencia. A mayor frecuencia la longitud de la onda disminuye, lo que significaría que podría detectar capas más delgadas. Mientras que a frecuencias más bajas la longitud de la onda aumenta, y por lo tanto la onda electromagnética es susceptible de detectar estratos con mayor espesor (Figura 4.14).

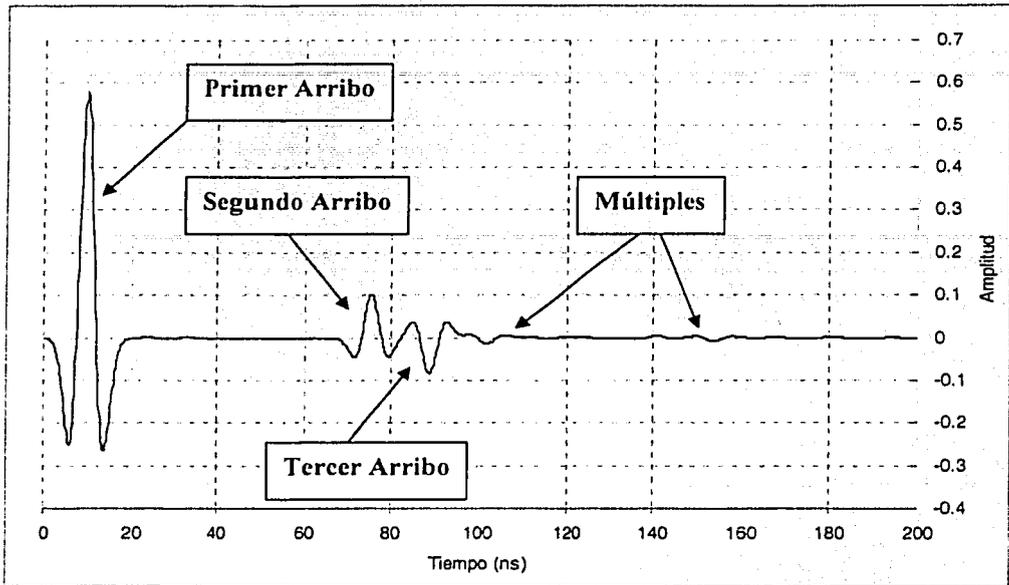


Figura 4.13. – Radargrama normalizado obtenido mediante un modelo dieléctrico disipativo, de la Tabla 4.1

Por lo que es necesario tomar este factor en cuenta para evitar que se empalmen los pulsos, en este caso de Ricker, y se enmascaren los inicios de arribo en los radargramas. En la Figura 4.14 se comparan los radargramas sintéticos para el modelo de la Tabla 4.1, con pulsos de Ricker para diferentes frecuencias centrales de oscilación.

Puede observarse que a una frecuencia de 200 MHz, el pulso de Ricker es más corto en tiempo, por lo que la longitud de onda permite detectar con claridad el segundo y tercer arribo; pues no tenemos problemas por empalme de los pulsos. Por otro lado para una frecuencia central de oscilación de 50 MHz, la longitud de la onda electromagnética es demasiado grande para poder diferenciar el segundo y el tercer arribo, dado que los pulsos correspondientes a éstos arribos se han sumado. Para el caso de 100 y 150 MHz, la longitud de onda se encuentra en un punto intermedio a los anteriores.

Para evitar este fenómeno es necesario tomar en cuenta la resolución del GPR, mediante su frecuencia central de oscilación, pero lo que debe tomarse en cuenta las ecuaciones 3.100 y 3.101; de donde despejando la frecuencia de oscilación, y tomando en cuenta el modelo de la Tabla 4.1, la frecuencia mínima para evitar el empalme de información debe ser de 150 MHz.

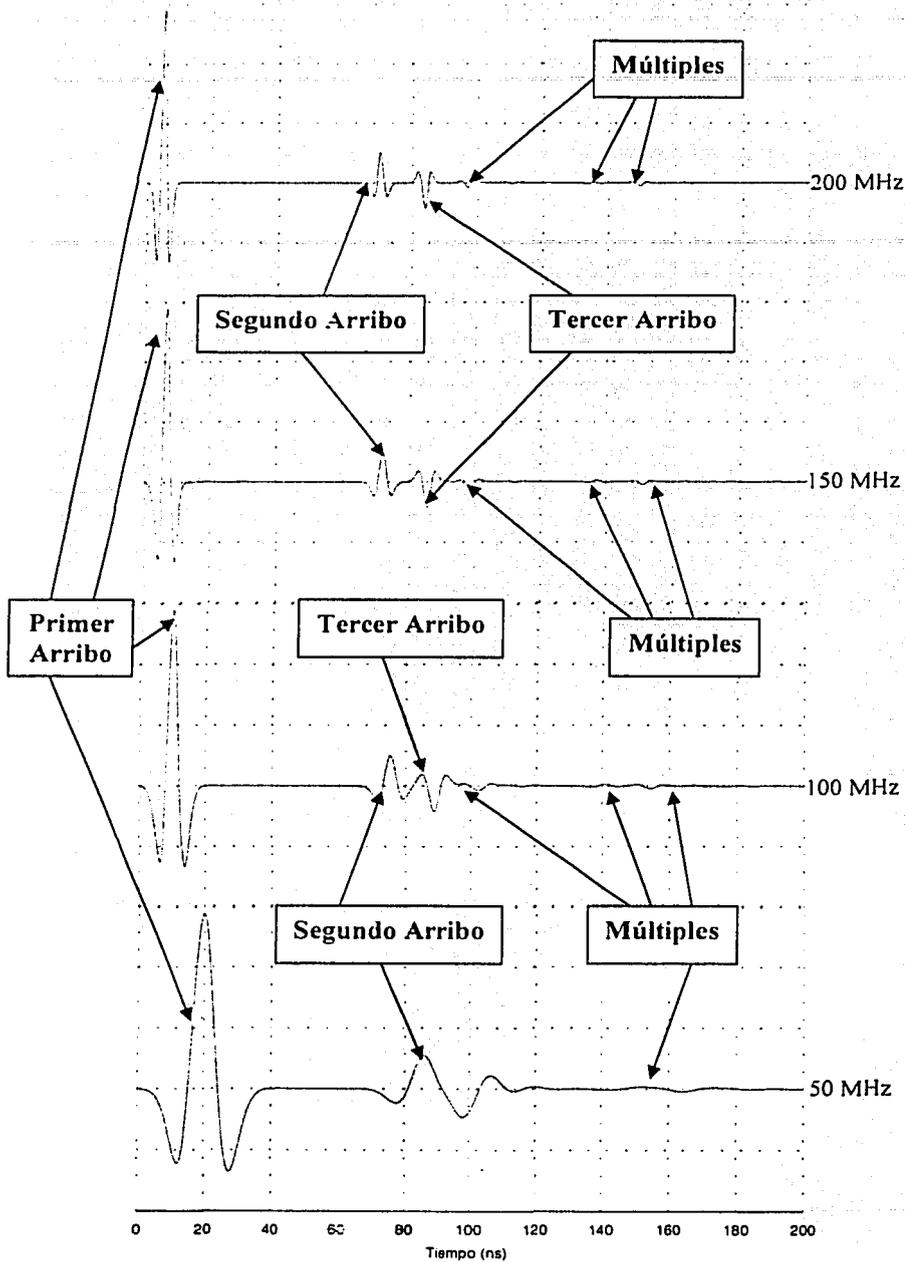


Figura 4.14. Comparación de los radargramas obtenidos, para el modelo de la Tabla 4.1, con pulsos de Ricker con frecuencias centrales de 50, 100, 150 y 200 MHz.

4.4. Casos especiales.

Modelo de dos capas.

Consideremos un modelo estratificado de dos capas (Figura 4.15), y veamos la sensibilidad del modelo ante dos casos fundamentales: cuando el espesor de la capa es muy grande respecto la longitud de la onda electromagnética, y el caso contrario.

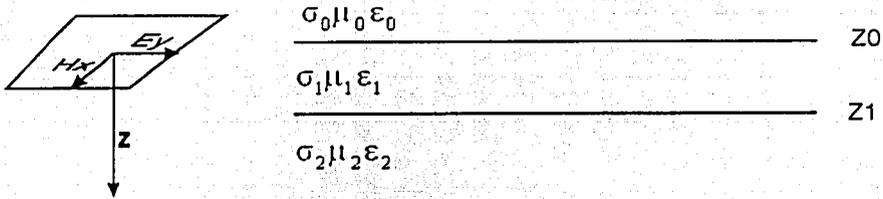


Figura 4.15.- Modelo estratificado de dos capas.

Por lo que adecuando la Ecuación 4.23 para el modelo de dos capas, en donde se hace la siguiente simplificación $Z_1 - Z_0 = h_1$:

$$B_0 = \left[\frac{R_{0,1} + e^{i2\gamma_1 h_1} R_{1,2}}{1 + R_{0,1} e^{i2\gamma_1 h_1} R_{1,2}} \right] \quad 4.32$$

Sustituyendo 4.32 en 4.18 se tiene que el campo eléctrico en superficie está dado por:

$$E_{y,0} = \frac{(T_{0,1}) (1 + e^{i2\gamma_1 h_1} R_{1,2})}{1 + R_{0,1} e^{i2\gamma_1 h_1} R_{1,2}} \quad 4.33$$

❖ Cuando el termino γh es mayor que la unidad.

Para éste caso se tiene que el término $e^{i2\gamma_1 h_1}$ es muy pequeño, por lo que la Ecuación 4.33 se encuentra dentro de la región de los campos cercanos. Por lo que el espesor de la primera capa es mucho más grande que la profundidad de penetración y la longitud de la onda electromagnética; de ésta forma las corrientes no logran penetrar considerablemente. Por ésta razón es que el campo eléctrico en superficie no presenta información de la segunda capa. es decir que lo considera como un semiespacio con la primera capa:

$$E_{y,0} = T_{0,1} \quad 4.34$$

❖ Cuando el término γh es menor a la unidad.

En el caso opuesto se tiene cuando se considera que el espesor de la capa es significativamente más pequeño que la profundidad de penetración y la longitud de onda; para éste caso el término $e^{i2\gamma h}$ es cercano a la unidad. Siguiendo ésta consideración la Ecuación 4.33 se simplifica en la siguiente forma:

$$E_{y,0} = \frac{(T_{0,1})(1 + R_{1,2})}{1 + R_{0,1}R_{1,2}} = T_{0,2} \quad 4.35$$

Es decir se tiene que el campo eléctrico observado es el equivalente a un semiespacio con características de la segunda capa, pues tanto la longitud de onda como la profundidad de penetración no pueden ver a la primera capa y sólo consideran a la segunda capa.

Modelo de tres capas.

Consideremos un modelo estratificado de tres capas, en donde se propaga un campo electromagnético con un frente de onda plano (Figura 4.16).

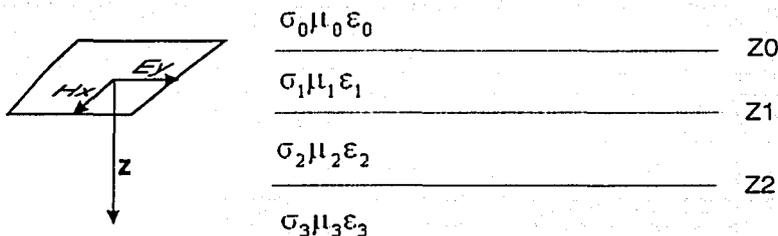


Figura 4.16.- Modelo estratificado de tres capas.

Adaptando a la Ecuación 4.23 para el caso de tres capas, y en la que se toma a $Z_1 - Z_0 = h_1$ y $Z_2 - Z_1 = h_2$:

$$B_0 = \left[\frac{R_{0,1} + e^{i2\gamma_1 h_1} \frac{R_{1,2} + e^{i2\gamma_2 h_2} R_{2,3}}{1 + R_{1,2} e^{i2\gamma_2 h_2} R_{2,3}}}{1 + R_{0,1} e^{i2\gamma_1 h_1} \frac{R_{1,2} + e^{i2\gamma_2 h_2} R_{2,3}}{1 + R_{1,2} e^{i2\gamma_2 h_2} R_{2,3}}} \right] \quad 4.36$$

Sustituyendo la Ecuación 4.36 en la Ecuación 4.18, se tiene el campo eléctrico en superficie:

$$E_{y0} = \frac{T_{0,1} + R_{1,2} e^{i2\gamma_2 h_2} R_{2,3} (T_{1,2}) + R_{1,2} e^{i2\gamma_2 h_2} (T_{0,1}) + e^{i2\gamma_2 h_2} e^{i2\gamma_2 h_2} R_{2,3} (T_{0,1})}{1 + R_{1,2} e^{i2\gamma_2 h_2} R_{2,3} + R_{1,2} R_{0,1} e^{i2\gamma_2 h_2} - e^{i2\gamma_2 h_2} e^{i2\gamma_2 h_2} R_{0,1} R_{2,3}} \quad 4.37$$

❖ Cuando el termino γh es mayor que la unidad.

Para éste caso se tiene que el término $e^{i2\gamma_2 h_2}$ es muy pequeño por lo que la Ecuación 4.37 se encuentra dentro de la región de los campos cercanos. Para éste caso se tiene que el espesor de la capa de en medio es mucho más grande que la profundidad de penetración y la longitud de la onda electromagnética, por lo que las corrientes no logran penetrar considerablemente, por esta razón es que el campo eléctrico en superficie no presenta información de la tercera capa, es decir que lo considera como un modelo de dos capas:

$$E_{y0} = \frac{T_{0,1} (1 + R_{1,2} e^{i2\gamma_2 h_2})}{1 + R_{1,2} R_{0,1} e^{i2\gamma_2 h_2}} \quad 4.38$$

Es decir las ecuaciones se reducen a un modelo de dos capas, entre la primera y segunda capa, donde la última oculta a la tercera capa. Por lo que el campo eléctrico en superficie no contiene información de dicha capa.

❖ Cuando el termino γh es menor a la unidad.

En el caso de que el espesor de la capa de en medio sea significativamente más pequeño que la profundidad de penetación y la longitud de onda, el término $e^{i2\gamma_2 h_2}$ es cercano a la unidad. Siguiendo ésta consideración la Ecuación 4.37 se simplifica en la siguiente forma:

$$E_{y0} = \frac{R_{1,2} R_{2,3} \frac{T_{1,3}}{T_{2,3}} + e^{i2\gamma_2 h_2} R_{1,3} T_{0,1} + \frac{T_{1,3} T_{0,1}}{T_{1,2} T_{2,3}}}{1 + e^{i2\gamma_2 h_2} R_{0,1} R_{1,3}} \quad 4.39$$

$$E_{y0} = \frac{R_{1,2} R_{2,3} \frac{T_{1,3}}{T_{2,3}} + T_{0,1} \left(\frac{T_{1,3}}{T_{1,2} T_{2,3}} + e^{i2\gamma_2 h_2} R_{1,3} \right)}{1 + e^{i2\gamma_2 h_2} R_{0,1} R_{1,3}}$$

En donde a pesar de que intervienen los coeficientes de reflexión y transmisión entre la capa de en medio y las capas superiores, el espesor de ésta ya no es significativo ante la longitud de onda, por lo que se reduce a un modelo de dos capas. Es decir, el campo eléctrico observado es el equivalente a un modelo de dos capas.

5. Modelo Inverso

5.1. Teoría.

El proceso de inversión, llamado también optimización o estimación de parámetros, consiste en buscar un conjunto de parámetros ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N; \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_N$) que minimizan la diferencia entre los datos observados en campo R_{tO} y los datos calculados R_{tC} . Es decir minimizan la suma de los errores cuadráticos entre la respuesta del sistema a un modelo estimado y las observaciones (Lines y Treitel, 1984; McGillivray and Oldenburg, 1990). Para este caso el número de observaciones serán, el número de muestras a un intervalo de muestreo dt del radargrama. Los datos observados, para un modelo estratificado, estará representado por el siguiente vector columna:

$$d = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_N) \quad 5.1$$

Mientras que la respuesta del modelo estará representado por:

$$y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) \quad 5.2$$

y el vector de los parámetros estimados será:

$$p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_M) \quad 5.3$$

Sea y_i^0 un modelo inicial con parámetros p_i , y sea y^0 la respuesta del sistema al modelo inicial. Una perturbación de la respuesta sistema puede expresarse mediante una expansión en series de Taylor, ignorando los términos de orden alto:

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^p \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \quad 5.4$$

Donde se define a la perturbación $\delta p_i = p_i - p_i^0$ 5.5
Que en forma matricial se define como:

$$y = y^0 + Z\delta p \quad 5.6$$

Donde Z es el Jacobiano de transformación. Las perturbaciones en los datos observados puede verse como:

$$\delta y = y - y^0 \quad 5.7$$

Por lo que la ecuación resulta en:

$$\delta y = Z\delta p \quad 5.8$$

En el que de obtener dicha perturbación, el nuevo parámetro estará dado por:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$p_i = p_i^0 + \delta p_i \quad 5.9$$

De acuerdo a McGillivray y Oldenburg (1990) la Ecuación 5.8 puede escribirse como:

$$\delta y_i = \int K_i(z, p_i) \delta p_i(z) d^3z \quad 5.10$$

Donde $K_i(z, p_i)$ es el Kernel de Fréchet asociado a la i -ésima observación. Este Kernel establece la relación entre las perturbaciones en el modelo y el correspondiente cambio en el dato y_i .

Para el caso del problema inverso del GPR, debemos determinar la forma en la que el campo eléctrico, en la superficie, cambia ante pequeñas perturbaciones del modelo en alguna de sus propiedades. De acuerdo con (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 2000), para resolver el problema inverso del GPR las ecuaciones diferenciales para el campo eléctrico E son transformadas mediante la siguiente ecuación integral:

$$E = \int_V G_{E,\mu} \mu(r') d^3r' - \int_V G_{E,\sigma} \sigma(r') d^3r' - \int_V G_{E,\epsilon} \epsilon(r') d^3r' \quad 5.11$$

Donde se define a $G_{E,\mu}$, $G_{E,\epsilon}$ y $G_{E,\sigma}$ como las derivadas de Fréchet del campo eléctrico respecto a μ , ϵ y σ , respectivamente. Estas ecuaciones no son lineales por estar dependiendo de la permeabilidad magnética, la permitividad y conductividad eléctrica. Por lo que para poder definir estas ecuaciones se deben de integrar sobre una región para medios uniformes a pedazos, por lo que estas derivadas pueden escribirse como (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 2000):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \mu_i} &= \int_V G_{E,\mu} d^3r' \\ \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} &= \int_V G_{E,\epsilon} d^3r' \\ \frac{\partial E}{\partial \sigma_i} &= \int_V G_{E,\sigma} d^3r' \end{aligned} \quad 5.12$$

Por lo que la Ecuación 5.11 puede escribirse como:

$$E = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial \mu_i} \mu_i - \frac{\partial E}{\partial \sigma_i} \sigma_i - \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} \epsilon_i \right) \quad 5.13$$

Esta ecuación es la base de la solución del Problema inverso (1-D) del GPR, pues de esta forma se pueden separar las contribuciones que cada propiedad (ϵ , μ y σ), provocan en el campo eléctrico (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño; 2000).

Para poder formular la Ecuación 5.10 para el caso del GPR (1-D) y llegar a la Ecuación 5.13, se recurre al procedimiento descrito por McGillivray y Oldenburg (1990); para ello es necesario retomar la ecuación del modelo directo. Para éste caso se toman las ecuaciones de Maxwell 3.35a y 3.35c, que definen la ley de Faraday y de Ampere respectivamente:

$$\nabla \times E = \text{rot}E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \text{rot}H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

Aplicando el concepto de campos armónicos (Apéndice A) para eliminar las derivadas, y tomando una polarización TE (Apéndice D) en una tierra estratificada (Figura 5.1); estas ecuaciones pueden escribirse como:

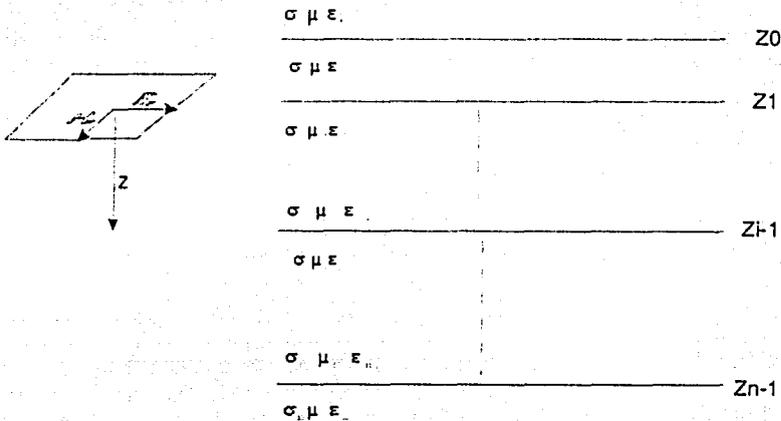


Figura 5.1.- Modelo de una tierra estratificada homogénea e isotrópica en una dimensión.

$$\nabla \times E_{y_i} = i\omega\mu_i H_{x_i} \quad 5.14$$

$$\nabla \times H_{x_i} = (\sigma_i - i\omega\epsilon_i) E_{y_i} \quad 5.15$$

Aplicando el rotacional a la ecuación 5.14 y le sustituimos la ecuación 5.15, obtenemos la ecuación de onda amortiguada para el campo:

$$E''_{y_i} + \gamma_i^2 E_{y_i} = \frac{\mu_i'}{\mu_i} E'_{y_i} \quad 5.16$$

Que representa la ecuación de onda a resolver, en un caso general. Es de ver que si tomamos a la permeabilidad magnética igual a la del vacío para todas las capas, el gradiente

de la permeabilidad será igual a cero; caso que se analizara más adelante. A la Ecuación 5.16 se aplica un cambio de variable:

$$\mu_i = \frac{1}{h_i} \quad 5.17$$

Por lo que la ecuación anterior puede escribirse como:

$$E_{y_i}'' + \gamma_i^2 E_{y_i} = -\frac{h_i'}{h_i} E_{y_i}' \quad 5.18$$

Que puede factorizarse en la siguiente forma:

$$(h_i E_{y_i}') + h_i \gamma_i^2 E_{y_i} = 0 \quad 5.19$$

La perturbación de la respuesta del modelo (δy), debe satisfacer el siguiente problema (McGillivray y Oldenburg, 1990; y Sadiku, 2001):

$$p\delta y + y\delta p = 0 \quad 5.20$$

ó

$$p\delta y = R(z) \quad 5.21$$

Donde $R(z) = -y\delta p$; y δp es el nuevo operador obtenido para la perturbación del modelo. La solución de 5.21 de una observación i , evaluada en $z=0$, representa la derivada de Fréchet par tal observación (i).

De la Ecuación 5.19, modificada de Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño (2000), se necesita perturbar el campo eléctrico respecto de las propiedades del medio. Para esto se siguen las definiciones de perturbación dadas por Sadiku (2001):

$$\begin{aligned} \delta(F_1 \pm F_2) &= \delta F_1 \pm \delta F_2 & \delta(F_1)^n &= n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \\ \delta(F_1 F_2) &= F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2 & \frac{d}{dx}(\delta \delta y) &= \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) &= \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} & \delta \int_a^b y(x) dx &= \int_a^b \delta y(x) dx \end{aligned} \quad 5.22$$

Por lo que perturbando la Ecuación 5.19 respecto del campo eléctrico y las propiedades eléctricas y magnéticas:

$$\delta E_{y_i}'' + \gamma_i^2 \delta E_{y_i} + 2E_{y_i} \gamma_i \delta \gamma_i + \left(\frac{h_i'}{h_i}\right) \delta E_{y_i}' + E_{y_i}' \delta\left(\frac{h_i'}{h_i}\right) = 0 \quad 5.23$$

Separando las perturbaciones del campo eléctrico de las perturbaciones de las propiedades:

$$h_i \delta E_{y_i}'' + h_i \gamma_i^2 \delta E_{y_i} + h_i' \delta E_{y_i}' = -2E_{y_i} h_i \gamma_i \delta \gamma_i - E_{y_i}' h_i \delta \left(\frac{h_i'}{h_i} \right) \quad 5.24$$

Del lado izquierdo de ésta ecuación se encuentran las perturbaciones del campo eléctrico, y del lado derecho las perturbaciones de las propiedades del medio. Esta ecuación, tomando en cuenta a las Ecuaciones 5.20 y 5.21, puede escribirse como:

$$(h_i \delta E_{y_i}') + h_i \gamma_i^2 \delta E_{y_i} = R(z) \quad 5.25$$

y

$$R(z) = -2E_{y_i} h_i \gamma_i \delta \gamma_i - E_{y_i}' h_i \delta \left(\frac{h_i'}{h_i} \right) \quad 5.26$$

Para resolver la Ecuación 5.25 es necesario recurrir a la función adjunta de Green (McGillivray y Oldenburg, 1990):

$$\delta E_{y_0} = \int G(z, z_0) R(z) dz \quad 5.27$$

Mediante esta ecuación es posible obtener la perturbación de respuesta (δE_{y_0}) mediante el cálculo de la función adjunta de Green, para un campo en z , debido a una fuente en z_0 . La función adjunta de Green para un modelo estratificado $G(z, z_0)$, puede sustituirse en la Ecuación 5.25:

$$(h_i G'(z, z_0))' + \gamma_i^2 h_i G(z, z_0) = \delta(z, z_0) \quad 5.28$$

Integrando ésta ecuación entre los límites z_0^- y z_0^+

$$\int_{z_0^+}^{z_0^-} \{ (h_i G') + \gamma_i^2 h_i G \} dz = h_i(z_0^+) G'(z_0^+, z) - h_i(z_0^-) G'(z_0^-, z) = 1 \quad 5.29$$

Esta ecuación se usa para determinar una relación cuantitativa entre el campo eléctrico y la función de Green. El campo eléctrico $E(z)$ será equivalente a $G(z, z_0)$ y se considera el caso de una fuente en la superficie $z_0=0$; pero se debe de considerar un factor multiplicativo que considere las dimensiones físicas y diferencias en la intensidad de la fuente (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 2000):

$$G(z, 0) = E_{y_i}(z) / C \quad 5.30$$

Por lo que sustituyendo 5.30 en 5.29 se tiene:

$$\frac{h_0 E_{y_0}'}{C} \Big|_+ - \frac{h_0 E_{y_0}'}{C} \Big|_- = 1$$

$$h_0 E_{y_0}' \Big|_+ - h_0 E_{y_0}' \Big|_- = C$$
5.31

Por lo que debemos evaluar la derivada del campo eléctrico en la superficie. Tomando la Ecuación 4.3a en superficie:

$$E_{y_0} = A_0 e^{i\gamma_0 z} + B_0 e^{-i\gamma_0 z}$$
5.32

Derivando esta ecuación respecto a la profundidad:

$$E_{y_0}' = \frac{d}{dz} (A_0 e^{i\gamma_0 z} + B_0 e^{-i\gamma_0 z})$$
5.33

Evaluando esta última ecuación en $z=0$ y tomando la condición inicial de $A_0=1$:

$$E_{y_0}' = i\gamma_0 (1 - B_0)$$
5.34

Por lo que el factor de las dimensiones físicas estará dado por:

$$C = h_0 E_{y_0}' = i \frac{\gamma_0}{\mu_0} (1 - B_0)$$
5.35

Finalmente la función de Green tiene la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{E_{y_i}}{C} = \frac{E_{y_i}}{i \frac{\gamma_0}{\mu_0} (1 - B_0)} = \frac{\mu_0 E_{y_i}}{i\gamma_0 (1 - B_0)}$$
5.36

Una vez determinada la función de Green, debemos obtener la perturbación del campo eléctrico en la superficie mediante la derivada de Fréchet. Sustituyendo 5.36 en 5.27:

$$\delta E_{y_0} = \int_0^{\infty} \frac{\mu_0 E_{y_i}}{i\gamma_0 (1 - B_0)} R(z) dz = \frac{\mu_0}{i\gamma_0 (1 - B_0)} \int_0^{\infty} E_{y_i} R(z) dz$$
5.37

Ahora se debe sustituir la Ecuación 5.26, que contiene las perturbaciones de los parámetros del modelo:

$$\delta E_{y_0} = - \frac{\mu_0}{i\gamma_0 (1 - B_0)} \int_0^{\infty} 2E_{y_i}^2 h_i \gamma_i \delta \gamma_i dz - \frac{\mu_0}{i\gamma_0 (1 - B_0)} \int_0^{\infty} E_{y_i}' E_{y_i} h_i \delta \left(\frac{h_i'}{h_i} \right) dz$$
5.38

De la que puede expresarse como:

$$\delta E_{y,0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} 2E_{y_i}{}^2 h_i \gamma_i \delta \gamma_i dz + \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \left[-\left(h_i E_{y_i}{}^2 E_{y_i} \left(\frac{\delta h_i}{h_i} \right) \right) + (-\gamma_i{}^2 E_{y_i}{}^2 + E_{y_i}{}'^2) \delta h_i \right] dz \quad 5.39$$

Evaluando la integral del término de en medio e imponiendo la condición de que las perturbaciones de la permeabilidad son nulas en la superficie, la Ecuación 5.39 se reduce a:

$$\delta E_{y,0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} 2E_{y_i}{}^2 h_i \gamma_i \delta \gamma_i dz + \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \left[(-\gamma_i{}^2 E^2 + E_i'^2) \delta h_i \right] dz \quad 5.40$$

Tomando la ecuación 5.17 se define:

$$\delta h_i = -\frac{\delta \mu_i}{\mu_i^2} \quad 5.41$$

Sustituyendo 5.17 y 5.41 en 5.40:

$$\delta E_{y,0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \frac{2E_{y_i}{}^2 \gamma_i \delta \gamma_i}{\mu_i} dz + \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \left[(-\gamma_i{}^2 E_{y_i}{}^2 + E_{y_i}{}'^2) \left(-\frac{\delta \mu_i}{\mu_i^2} \right) \right] dz \quad 5.42$$

De ésta última sólo falta perturbar la constante de propagación respecto a cada propiedad:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= (i\mu_i \omega \sigma_i + \omega^2 \mu_i \epsilon_i)^{\frac{1}{2}} \\ \delta \gamma_i &= \frac{1}{2} (i\mu_i \omega \sigma_i + \omega^2 \mu_i \epsilon_i)^{-\frac{1}{2}} [(i\omega \sigma_i + \omega^2 \epsilon_i) \delta \mu_i + (i\mu_i \omega) \delta \sigma_i + (\omega^2 \mu_i) \delta \epsilon_i] \end{aligned} \quad 5.43$$

Sustituyendo 5.43 en 5.42:

$$\begin{aligned} \delta E_{y,0} &= -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \frac{2E_{y_i}{}^2 \gamma_i \left[\frac{1}{2} (i\mu_i \omega \sigma_i + \omega^2 \mu_i \epsilon_i)^{-\frac{1}{2}} [(i\omega \sigma_i + \omega^2 \epsilon_i) \delta \mu_i + (i\mu_i \omega) \delta \sigma_i + (\omega^2 \mu_i) \delta \epsilon_i] \right]}{\mu_i(z)} dz \\ &\quad - \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \left[(-\gamma_i{}^2 E_{y_i}{}^2 + E_{y_i}{}'^2) \left(\frac{\delta \mu_i}{\mu_i^2} \right) \right] dz \\ \delta E_{y,0} &= -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \left[\int_0^{\infty} E_{y_i}{}^2 (i\omega \sigma_i + \omega^2 \epsilon_i) \frac{\delta \mu_i}{\mu_i} dz + \int_0^{\infty} E_{y_i}{}^2 i\omega \delta \sigma_i dz + \int_0^{\infty} E_{y_i}{}^2 \omega^2 \delta \epsilon_i dz \right] \\ &\quad - \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \left[(-\gamma_i{}^2 E_{y_i}{}^2 + E_{y_i}{}'^2) \left(\frac{\delta \mu_i}{\mu_i^2} \right) \right] dz \end{aligned} \quad 5.44$$

Que puede simplificarse como:

$$\delta E_{y0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \left[\int_0^{\infty} \frac{E_{yi}{}^2}{\mu_i^2} \delta\mu_i dz + \int_0^{\infty} E_{yi}{}^2 i\omega \delta\sigma_i dz + \int_0^{\infty} E_{yi}{}^2 \omega^2 \delta\epsilon_i dz \right] \quad 5.45$$

Esta expresión es la que nos permite relacionar las perturbaciones del campo eléctrico en la superficie, debido a perturbaciones en las propiedades eléctricas y magnéticas del medio. Comparando ésta última Ecuación con 5.11, podemos deducir las derivadas de Fréchet del campo eléctrico respecto a μ , ϵ y σ ; es decir describir las ecuaciones 5.12:

$$\begin{aligned} G_{E,\mu} &= -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \left(\frac{E_{yi}{}^2}{\mu_i^2} \right) \\ G_{E,\sigma} &= -\frac{E_{yi}{}^2 \mu_0 i\omega}{i\gamma_0(1-B_0)} \\ G_{E,\epsilon} &= -\frac{E_{yi}{}^2 \mu_0 \omega^2}{i\gamma_0(1-B_0)} \end{aligned} \quad 5.46$$

Considerando en la Ecuación 5.45 que únicamente existen perturbaciones en la permeabilidad magnética; se tiene que las perturbaciones del campo eléctrico estarán dadas sólo por:

$$\delta E_{y0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} \frac{E_{yi}{}^2}{\mu_i^2} \delta\mu_i dz \quad 5.47$$

Si únicamente se consideran perturbaciones de la conductividad se tiene que:

$$\delta E_{y0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} E_{yi}{}^2 i\omega \delta\sigma_i dz \quad 5.48$$

Finalmente las perturbaciones del campo eléctrico debido únicamente a las perturbaciones de la permeabilidad magnética estarán dadas por:

$$\delta E_{y0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \int_0^{\infty} E_{yi}{}^2 \omega^2 \delta\epsilon_i dz \quad 5.49$$

Considerando estas últimas ecuaciones, únicamente es necesario sustituir el cuadrado del campo eléctrico y el cuadrado de la derivada del campo eléctrico respecto a la profundidad, para poder evaluar las integrales. Tomando el cuadrado de la Ecuación 4.3a:

$$E_{yi} = A_i e^{i\gamma_i z_i} + B_i e^{-i\gamma_i z_i}$$

$$E_{y_i}^2 = A_i^2 e^{2i\gamma_i z_i} + 2A_i B_i + B_i^2 e^{-2i\gamma_i z_i} \quad 5.50$$

Derivando a 4.3a respecto de z y elevándola al cuadrado:

$$\begin{aligned} E_{y_i}' &= i\gamma_i (A_i e^{i\gamma_i z_i} - B_i e^{-i\gamma_i z_i}) \\ E_{y_i}'^2 &= -\gamma_i^2 (A_i^2 e^{2i\gamma_i z_i} - 2A_i B_i + B_i^2 e^{-2i\gamma_i z_i}) \end{aligned} \quad 5.51$$

Por lo que, tomando en cuenta 5.50 y 5.51, las perturbaciones del campo eléctrico debido a las perturbaciones de las propiedades del medio (5.47, 5.48 y 5.49) se escriben como:

$$\delta E_{y_0} = \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \left(\frac{1}{\mu_i^2} \right) \int_0^{\infty} (\gamma_i^2 A_i^2 e^{2i\gamma_i z_i} - 2\gamma_i^2 A_i B_i + \gamma_i^2 B_i^2 e^{-2i\gamma_i z_i}) \delta \mu_i dz \quad 5.52$$

$$\delta E_{y_0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} (i\omega) \int_0^{\infty} (A_i^2 e^{2i\gamma_i z_i} + 2A_i B_i + B_i^2 e^{-2i\gamma_i z_i}) \delta \sigma_i dz \quad 5.53$$

$$\delta E_{y_0} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} (\omega^2) \int_0^{\infty} (A_i^2 e^{2i\gamma_i z_i} + 2A_i B_i + B_i^2 e^{-2i\gamma_i z_i}) \delta \epsilon_i dz \quad 5.54$$

Para poder evaluar las integrales es necesario, primero definir las derivadas del campo eléctrico respecto a cada una de las propiedades. Para ello es necesario definir a las perturbaciones como incrementos, ordenar los cocientes y determinar el límite de estas cuando tienden a cero. Por lo que la derivada del campo eléctrico respecto de la permeabilidad magnética:

$$\frac{\partial E_{y_0}}{\partial \mu_i} = \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \left(\frac{\gamma_i^2}{\mu_i^2} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} (A_i^2 e^{2i\gamma_i z} - 2A_i B_i + B_i^2 e^{-2i\gamma_i z}) dz \quad 5.55$$

De donde definimos la integral sobre una región a pedazos, definida por los límites de las profundidades de cada capa del modelo estratificado. Evaluando ahora las integrales obtenemos, finalmente, la expresión de la derivada del campo eléctrico respecto a la permeabilidad magnética:

$$\frac{\partial E_{y_0}}{\partial \mu_i} = \frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)} \left(\frac{\gamma_i^2}{\mu_i^2} \right) \left[\frac{A_i^2}{2i\gamma_i} (e^{2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{2i\gamma_i z_i}) - 2A_i B_i (z_{i+1} - z_i) - \frac{B_i^2}{2i\gamma_i} (e^{-2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{-2i\gamma_i z_i}) \right] \quad 5.56$$

Que es la expresión de la derivada del campo eléctrico respecto de la permeabilidad magnética de la i -ésima capa. Es importante decir que ésta expresión es válida para todas las capas del modelo estratificado.

Mediante este procedimiento las derivadas del campo eléctrico, en superficie, respecto de la conductividad y permitividad eléctrica se expresan como:

$$\frac{\partial E_{y0}}{\partial \sigma_i} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)}(i\omega) \left[\frac{A_i^2}{2i\gamma_i} (e^{2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{2i\gamma_i z_i}) + 2A_i B_i (z_{i+1} - z_i) - \frac{B_i^2}{2i\gamma_i} (e^{-2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{-2i\gamma_i z_i}) \right] \quad 5.57$$

$$\frac{\partial E_{y0}}{\partial \epsilon_i} = -\frac{\mu_0}{i\gamma_0(1-B_0)}(\omega^2) \left[\frac{A_i^2}{2i\gamma_i} (e^{2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{2i\gamma_i z_i}) + 2A_i B_i (z_{i+1} - z_i) - \frac{B_i^2}{2i\gamma_i} (e^{-2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{-2i\gamma_i z_i}) \right] \quad 5.58$$

De ésta forma ya podemos aislar las contribuciones que cada propiedad tiene en el campo eléctrico. Es importante recordar que estas derivadas deben de ser consideradas como normalizadas, dado que las constantes de amplitud A_i y B_i son normalizadas. Mediante las Ecuaciones 5.56, 5.57 y 5.58. podemos escribir la Ecuación 5.13:

$$E = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial \mu_i} \mu_i - \frac{\partial E}{\partial \sigma_i} \sigma_i - \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} \epsilon_i \right)$$

De esta forma los parámetros a estimar estarán dados por:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \sigma_i} \sigma_i = -E + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \mu_i} \mu_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} \epsilon_i \quad 5.59$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} \epsilon_i = -E + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \mu_i} \mu_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \sigma_i} \sigma_i \quad 5.60$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \mu_i} \mu_i = E + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \sigma_i} \sigma_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} \epsilon_i \quad 5.61$$

Estas ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$Y=AX \quad 5.62$$

Donde Y es el vector que contiene a los datos del radar y las derivadas parciales de los parámetros que no son considerados como incógnitas. La matriz A contiene las derivadas parciales del campo eléctrico con respecto al parámetro que está siendo considerado como incógnita: y X como el vector de incógnitas (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 2000). Para poder encontrar los parámetros a estimar se usa el método de Descomposición del Valor Singular (SVD). Este método consiste en determinar la pseudo inversa de la matriz A, que contiene a las derivadas del campo eléctrico respecto del parámetro a estimar. Se considera que una matriz A puede ser factorizada como:

$$A=U\Lambda V^T \quad 5.63$$

Donde U contiene a los eigenvectores del producto AA^T y V contiene a los eigenvectores de $A^T A$. Λ es una matriz diagonal que contiene a los valores singulares, y cero en el resto de sus elementos. Los valores singulares son las raíces cuadradas de los eigenvalores de $A^T A$ (Scales and Smith, 1997; Lines y Treitel, 1984). De donde se define la inversa generalizada de A como:

$$A^+ = V^T \Lambda^{-1} U$$

5.64

El proceso de inversión requiere en primer lugar capturar el radargrama a estimar; donde se deben de conocer el intervalo de muestreo así como la ventana de registro. A partir de estos datos se debe proponer un modelo inicial, proponiendo profundidades y propiedades eléctricas y magnéticas. En éste trabajo la permitividad de las rocas se toma igual a la del vacío, por lo que el proceso de inversión solo se aplica a la conductividad y permitividad eléctrica; y para poder estimar una de ellas se deben de conocer las distribuciones de la otra propiedad eléctrica.

Mediante el problema directo (Sección 4) se calculan las constantes de amplitud del campo eléctrico, para cada capa del modelo propuesto. A partir de la cual se calculan las derivadas del campo eléctrico respecto de cada propiedad aplicando 5.56, 5.57 y 5.58. Se adaptan los datos respecto del parámetro a estimar (5.59, 5.60 y 5.61). Se calcula parámetro estimado y el proceso se repite n veces hasta obtener un rms apropiado (Lines y Treitel, 1984).

5.2. Resultados.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tomando como base el modelo de la Tabla 4.1., se calculan las contribuciones que cada propiedad tiene sobre el campo eléctrico normalizado (Figuras 5.2, 5.3 y 5.4).

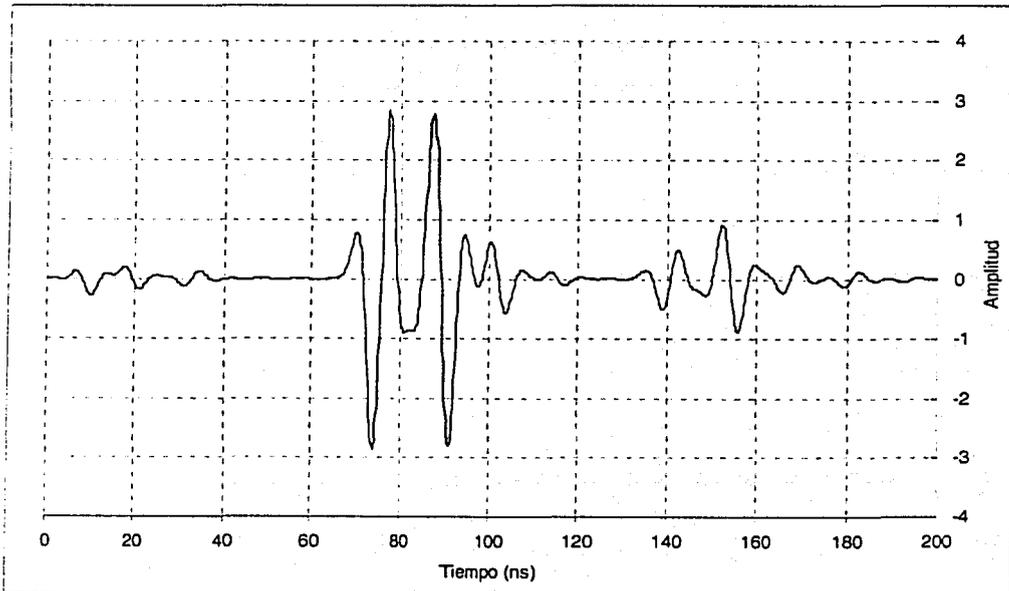


Figura 5.2- Contribución de la permitividad eléctrica sobre el campo eléctrico normalizado en superficie.

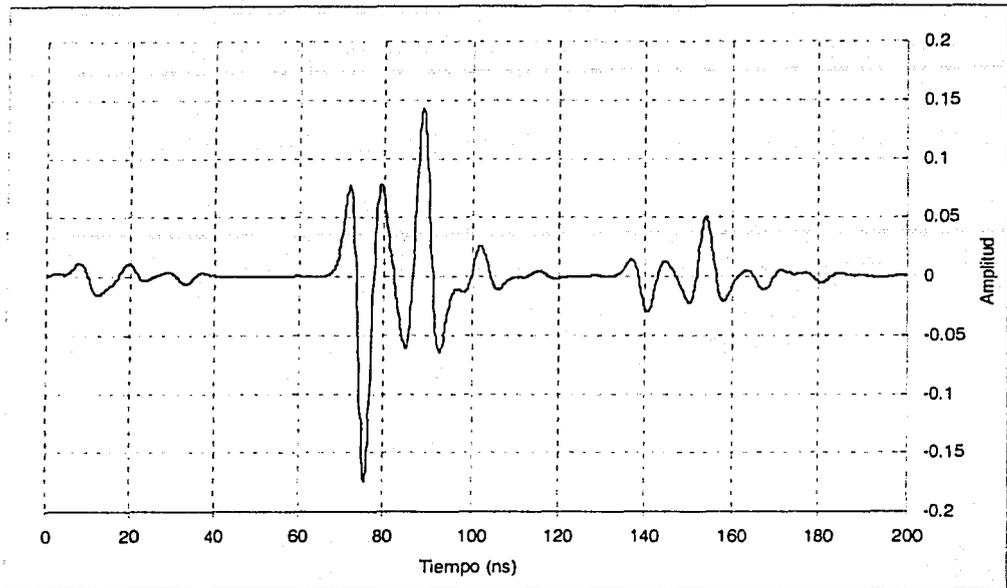


Figura 5.3- Contribución de la conductividad eléctrica sobre el campo eléctrico normalizado en superficie.

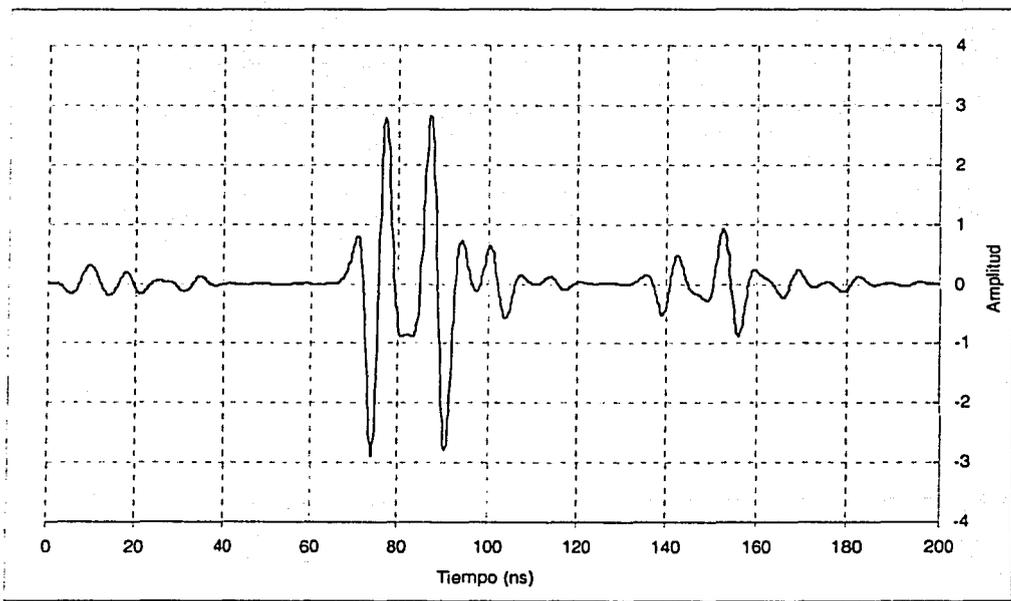


Figura 5.4- Contribución de la permeabilidad magnética sobre el campo eléctrico normalizado en superficie.

Mediante la Ecuación 5.13 obtenemos el radargrama normalizado original (Figura 5.5).

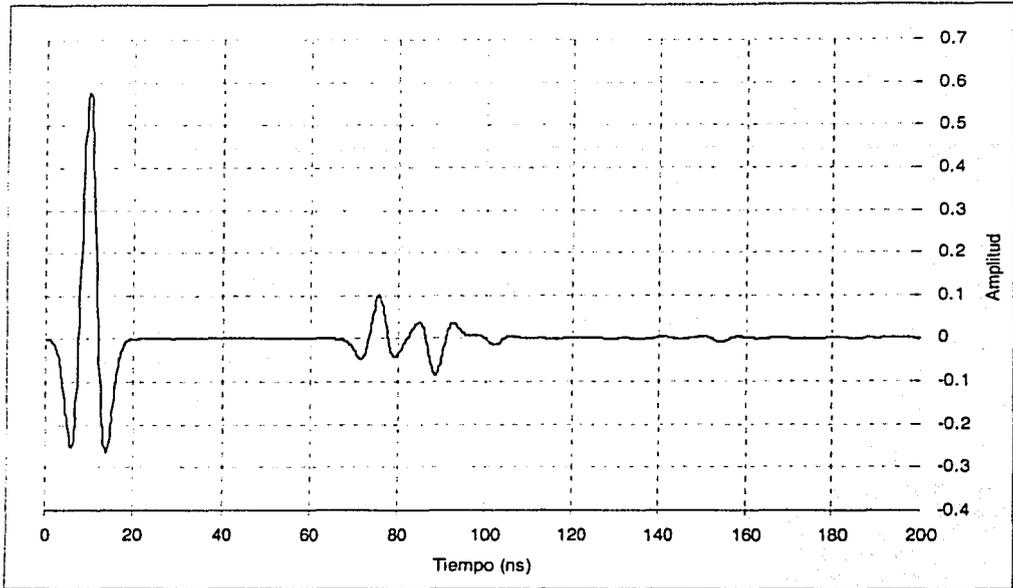


Figura 5.5- Radargrama normalizado recuperado mediante las contribuciones de cada propiedad.

Este radargrama es idéntico al mostrado en la Figura 4.9, pues los residuales entre ambos son prácticamente nulos. De ésta forma es que mediante las derivadas del campo eléctrico en superficie, podemos recuperar la señal original.

De las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4, podemos ver que para este caso las contribuciones más importantes están dadas por la permitividad y permeabilidad. Mientras que la contribución de la conductividad es muy pequeña en relación con las otras propiedades; pero como hemos mencionado ésta contribución, en éste rango de frecuencias, no es despreciable. Esto es evidente si tratamos de recuperar el radargrama sin la contribución de la conductividad (Figura 5.6). Como es de apreciarse, considerando únicamente la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica, puede recuperarse un radargrama equivalente al original, que en los segundos y terceros arribos se encuentran con un cambio de fase, y que de alguna forma puede interpretarse. A pesar de esto es necesario es necesario tomar en cuenta la contribución de la conductividad.

Para la inversión de datos de GPR se deben considerar dos casos fundamentales: Estimación de la conductividad y permitividad eléctrica. La estimación de la conductividad se realiza manteniendo constante a la permitividad eléctrica; y en el caso de la estimación de la permitividad la conductividad eléctrica se mantiene constante. Es importante decir que aunque las ecuaciones nos permiten aislar las contribuciones de la permeabilidad

magnética, no es aplicable su uso por considerar que las rocas poseen permeabilidades equivalentes a la del vacío (Sección 3.4.3).

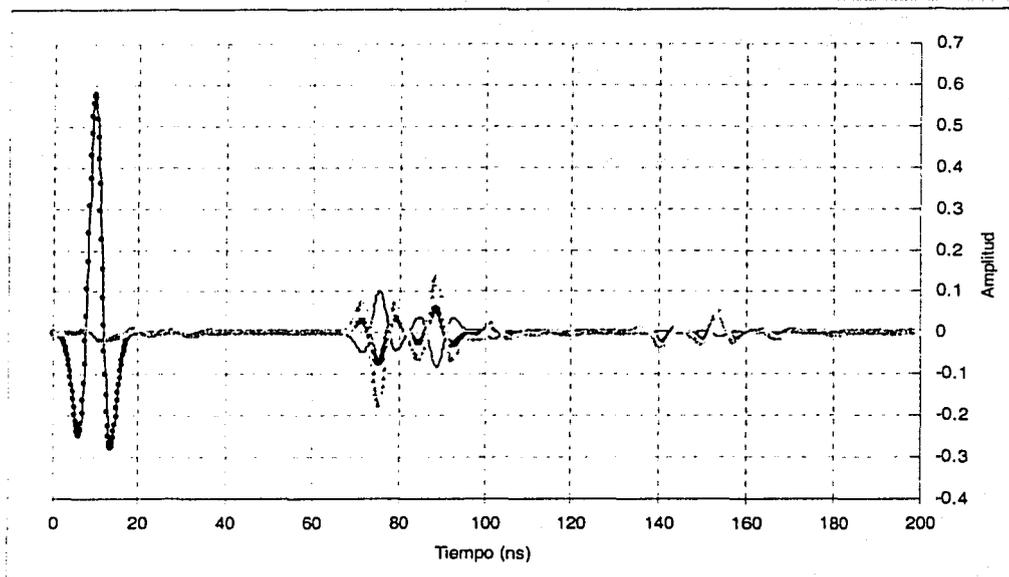


Figura 5.6- Comparación del radargrama normalizado real ———, con la contribución de la conductividad \blacktriangle y el radargrama normalizado recuperado sin considerar la conductividad \bullet .

Estimación de la Permitividad Eléctrica.

Para ello usamos el modelo de la Tabla 5.1, y con permeabilidad magnética igual a la del vacío para todas las capas. En el que se propone un modelo estratificado de tres capas, dado por concreto, arcilla seca y limo; el radargrama normalizado correspondiente, para un pulso de Ricker de 100 MHz, se muestra en la Figura 5.7.

Capa	Profundidad (m)	Conductividad Eléctrica (S/m)	Permitividad Eléctrica
1	0	0.000015	$9\epsilon_0$
2	4	0.0013	$5\epsilon_0$
3	8	0.0018	$10\epsilon_0$

Tabla 5.1. Modelo establecido para el caso de la inversión de la conductividad.

Para invertir dicho radargrama, se propone un modelo en el que los valores de conductividad son conocidos y una permitividad eléctrica es igual en todas las capas (Figura 5.8). El proceso de evolución del rms es mostrado en la Figura 5.9.

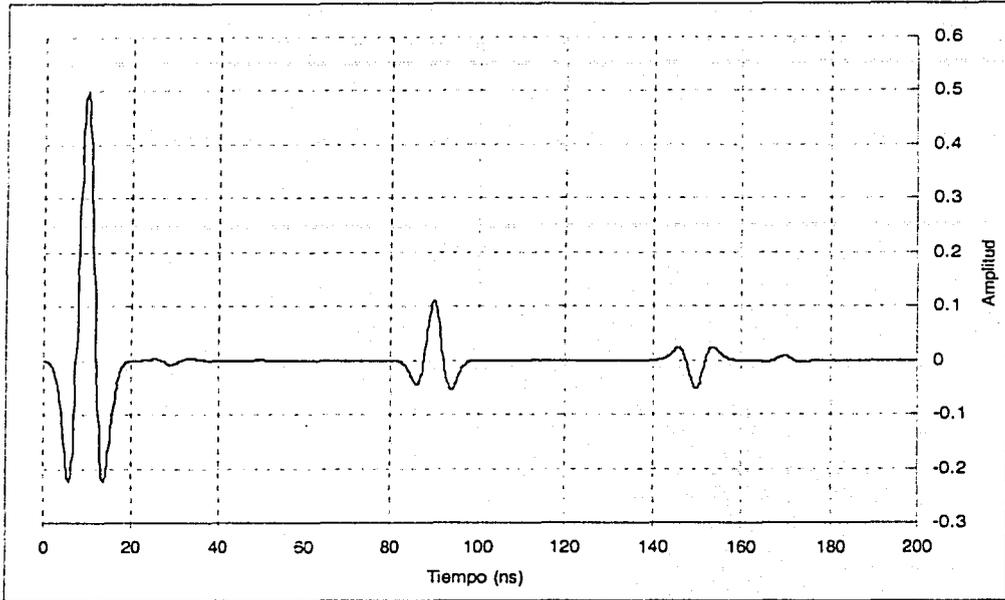


Figura 5.7- Radargrama noramalizado del modelo propuesto en la Tabla 5.1.

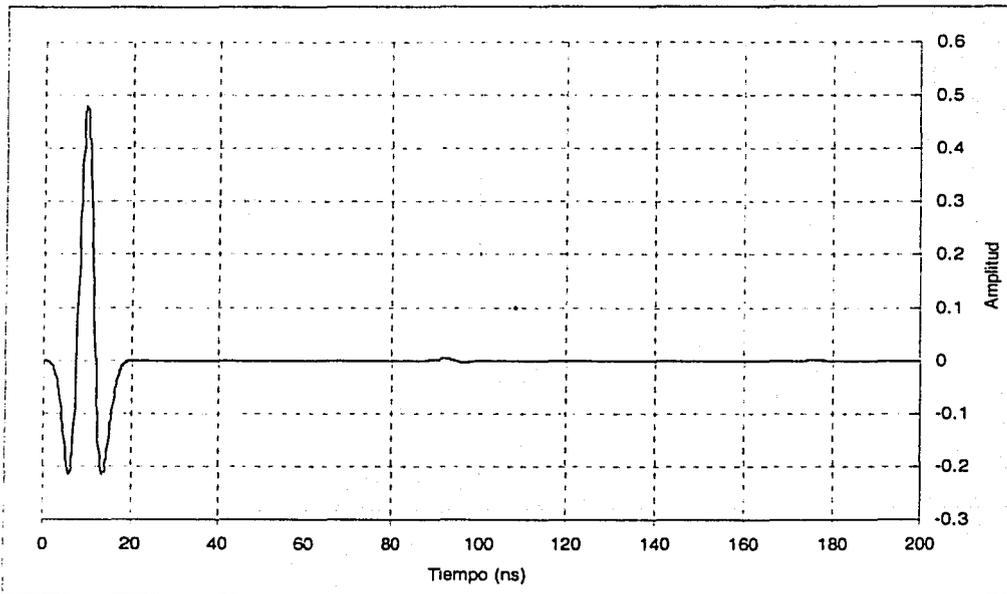


Figura 5.8- Radargrama normalizado del modelo inicial.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

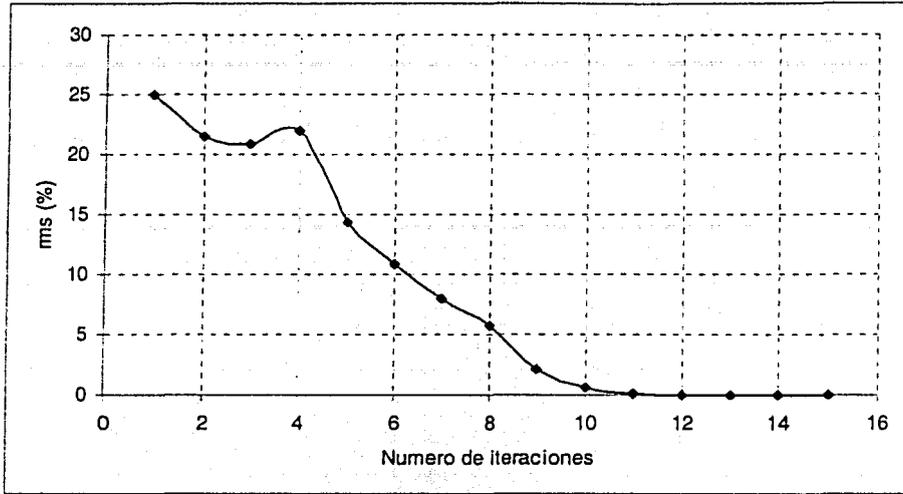


Figura 5.9.- Evolución del rms en cada iteración.

Comparando los resultados obtenidos mediante este proceso y con el modelo real (Figura 5.10), se observa que el mayor error se muestra última capa (Tabla 5.2).

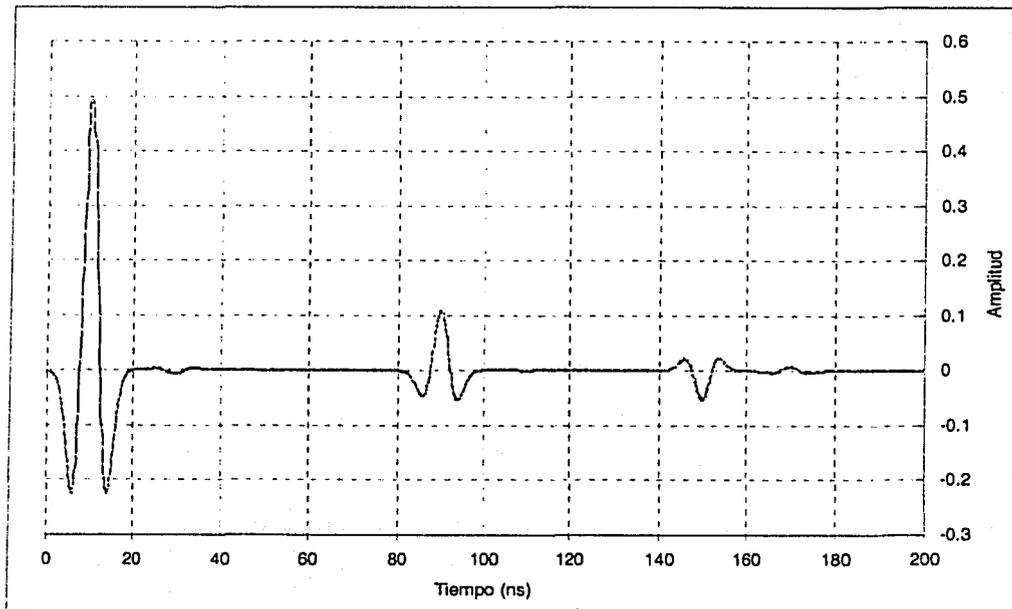


Figura 5.10.- Comparación del radargrama normalizado real — y el radargrama normalizado invertido - - - .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capa	Permitividad Eléctrica Invertida	Permitividad Eléctrica
1	$9.00\epsilon_0$	$9\epsilon_0$
2	$5.00\epsilon_0$	$5\epsilon_0$
3	$9.88\epsilon_0$	$10\epsilon_0$

Tabla 5.2. Comparación de las permitividades eléctricas invertidas con los del modelo real.

Como se observa el mayor error se presenta en la última capa, mientras que las otras capas los valores son prácticamente iguales. De donde el error rms final del proceso de inversión es de 0.003 % para 15 iteraciones. Calculando el error acumulativo del proceso de inversión (Lines y Treitel, 1984), este resulta en $0.292\epsilon_0$, que es bastante bueno.

Estimación de la Conductividad Eléctrica.

Para ello usamos el modelo de la Tabla 5.3, y con permeabilidad magnética igual a la del vacío para todas las capas. En el que se propone un modelo estratificado de cuatro capas; el radargrama correspondiente se muestra en la Figura 5.11.

Capa	Profundidad (m)	Conductividad Eléctrica (S/m)	Permitividad Eléctrica
1	0	0.0005	$6\epsilon_0$
2	5	0.0003	$8\epsilon_0$
3	8	0.0005	$10\epsilon_0$
4	12	0.0002	$15\epsilon_0$

Tabla 5.3. Modelo establecido para el caso de la inversión de la conductividad.

Para invertir dicho radargrama, se propone un modelo en el que los valores de permitividad eléctrica son conocidos y una conductividad eléctrica igual en todas las capas (Figura 5.12). El proceso de evolución del rms es mostrado en la Figura 5.13. Comparando los resultados obtenidos mediante éste proceso con el modelo real, se observa que el mayor error se muestra última capa (Figura 5.14 y Tabla 5.4).

Capa	Conductividad Eléctrica Invertida (S/m)	Conductividad Eléctrica (S/m)
1	0.000501	0.0005
2	0.000290	0.0003
3	0.000454	0.0005
4	0.000143	0.0002

Tabla 5.4. Comparación los valores de conductividad eléctrica invertidos y los del modelo real.

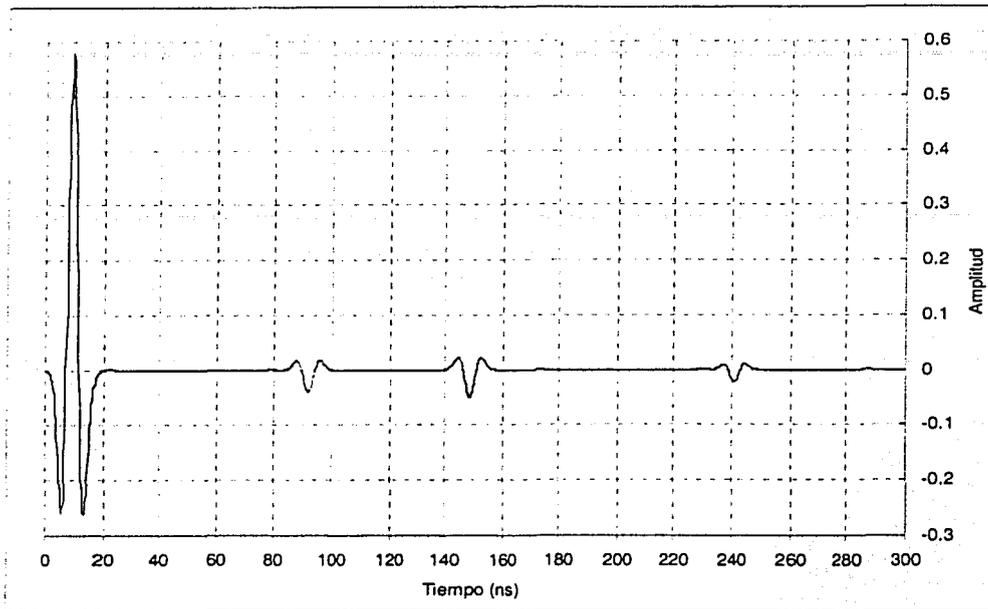


Figura 5.11- Radargrama normalizado del modelo propuesto en la Tabla 5.3.

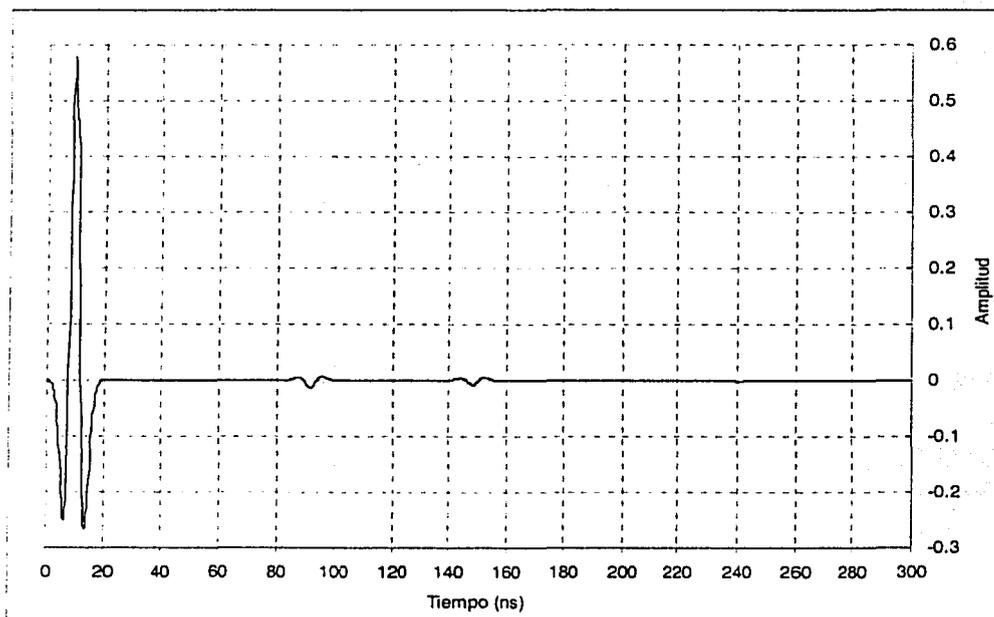


Figura 5.12- Radargrama normalizado del modelo inicial

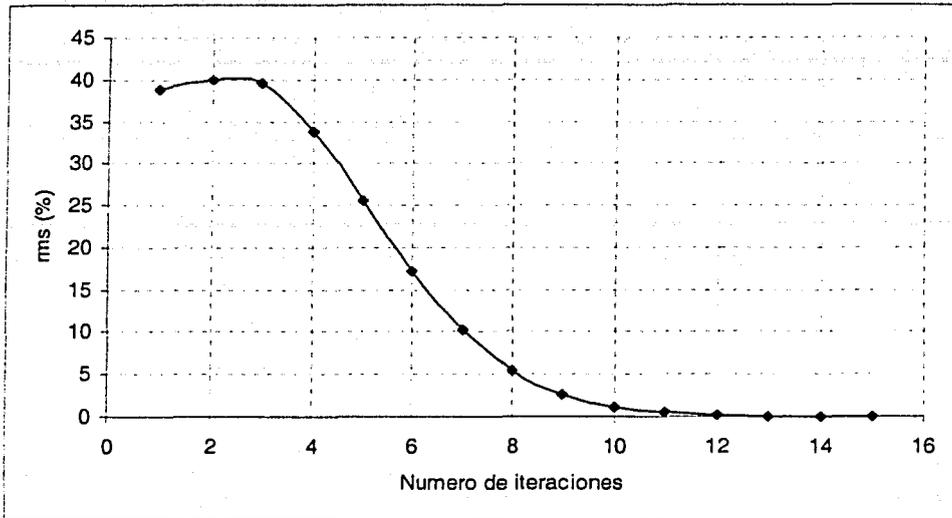


Figura 5.13- Evolución del rms en cada iteración.

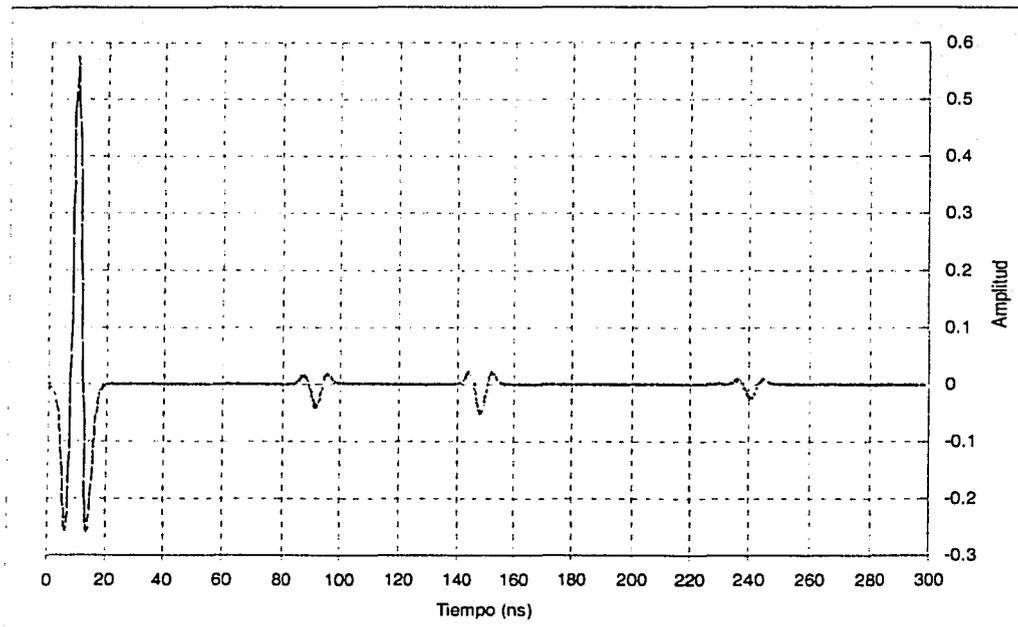


Figura 5.14.- Comparación del radargrama normalizado real — y el radargrama normalizado invertido - -.

En éste caso el error de la conductividad eléctrica estimada aumenta de capa en capa, siendo la última con el mayor error. De donde el error rms final del proceso de inversión es de 0.01 % para 15 iteraciones. Calculando el error acumulativo del proceso de inversión (Lines y Treitel, 1984) éste resulta en 8e-007 S/m. que es bastante bueno.

5.3. Aproximación para un medio dieléctrico disipativo.

Al igual que el en caso del modelo directo. el proceso de inversión puede simplificarse para un modelo dieléctrico disipativo. Bajo éste esquema la constante de propagación estará dada por la Ecuación 4.29:

$$\gamma_i \equiv \omega \sqrt{\mu \epsilon_i} + i \frac{\sigma_i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_i}}$$

Considerando que las permitividades de las rocas es la del vacío, la Ecuación 5.18 se simplifica en la siguiente forma:

$$E_{y_i}'' + \gamma_i^2 E_{y_i} = 0 \quad 5.65$$

Bajo este esquema, y siguiendo el mismo procedimiento de la Sección 5.1, las derivadas de Fréchet quedan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial E_{y_0}}{\partial \mu_i} = \frac{\mu}{i\gamma_0(1-B_0)} \left(\frac{\gamma_i^2}{\mu^2} \right) \left[\frac{A_i^2}{2i\gamma_i} (e^{2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{2i\gamma_i z_i}) - 2A_i B_i (z_{i+1} - z_i) - \frac{B_i^2}{2i\gamma_i} (e^{-2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{-2i\gamma_i z_i}) \right] \quad 5.66$$

$$\frac{\partial E_{y_0}}{\partial \sigma_i} = -\frac{\mu}{i\gamma_0(1-B_0)} \left(i\omega - \frac{\sigma_i}{2\epsilon_i} \right) \left[\frac{A_i^2}{2i\gamma_i} (e^{2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{2i\gamma_i z_i}) + 2A_i B_i (z_{i+1} - z_i) - \frac{B_i^2}{2i\gamma_i} (e^{-2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{-2i\gamma_i z_i}) \right] \quad 5.67$$

$$\frac{\partial E_{y_0}}{\partial \epsilon_i} = -\frac{\mu \left(\omega^2 + \frac{\sigma_i^2}{4\epsilon_i^2} \right)}{i\gamma_0(1-B_0)} \left[\frac{A_i^2}{2i\gamma_i} (e^{2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{2i\gamma_i z_i}) + 2A_i B_i (z_{i+1} - z_i) - \frac{B_i^2}{2i\gamma_i} (e^{-2i\gamma_i z_{i+1}} - e^{-2i\gamma_i z_i}) \right] \quad 5.68$$

Que son las derivadas del campo eléctrico normalizado respecto de la permeabilidad magnética, la conductividad y permitividad eléctrica respectivamente, de la i-esima capa. Es importante decir que esta expresión es valida para todas las capas del modelo estratificado. La característica de las ecuaciones 5.67 y 5.68 es que en ellas aparece el termino de $\sigma_i/2\epsilon_i$, que es la frecuencia de transición de un dieléctrico disipativo y un conductor. en este caso, de la i-esima capa (Sección 3.9.3). Que son comparativamente más simples de obtener y que son equivalentes para las ecuaciones (5.56, 5.57 y 5.58).

Ahora estimemos, mediante estas ecuaciones validas para dieléctricos disipativos, las propiedades eléctricas de los anteriores ejemplos, pero añadiendo ruido aleatorio a los radargramas normalizados a estimar.

Estimación de la Permitividad eléctrica.

Para ello usamos el modelo de la tabla 5.1. En el que se propone un modelo estratificado de tres capas, dado por Concreto Arcilla seca y limo; el radargrama normalizado correspondiente (Figura 5.7) se le añade ruido equivalente al 40% valor promedio del radargrama (Figura 5.15).

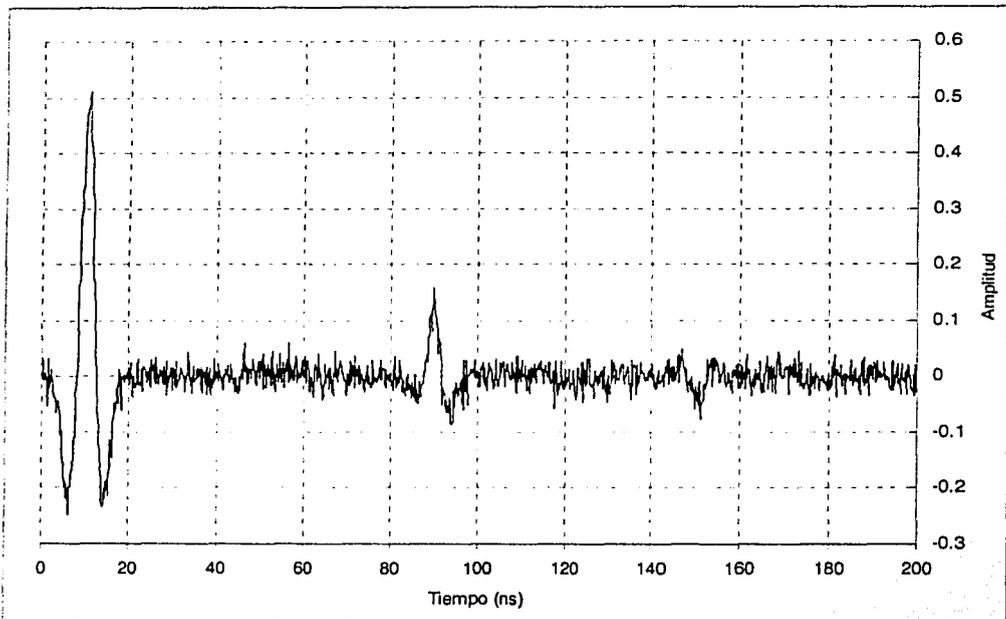


Figura 5.14.- Radargrama normalizado del modelo propuesto en la tabla 5.1 con ruido aleatorio correspondiente al 40% del valor promedio.

Para invertir dicho radargrama, se propone un modelo en el que la distribución de la conductividad se conoce y una permitividad eléctrica igual en todas las capas (Figura 5.15). El proceso de evolución del rms es mostrado en la Figura 5.16.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

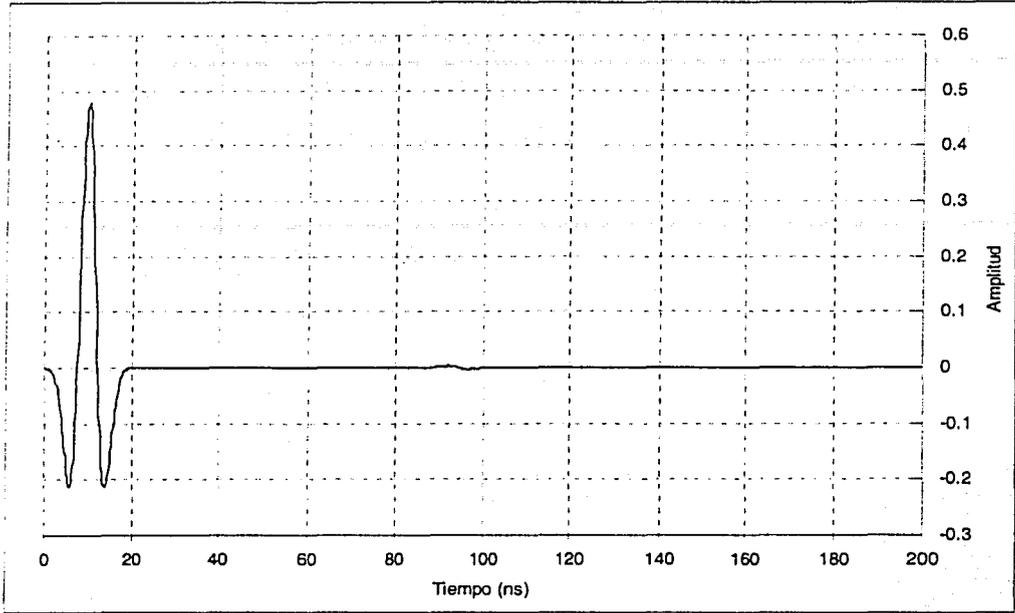


Figura 5.15- Radargrama normalizado del modelo inicial.

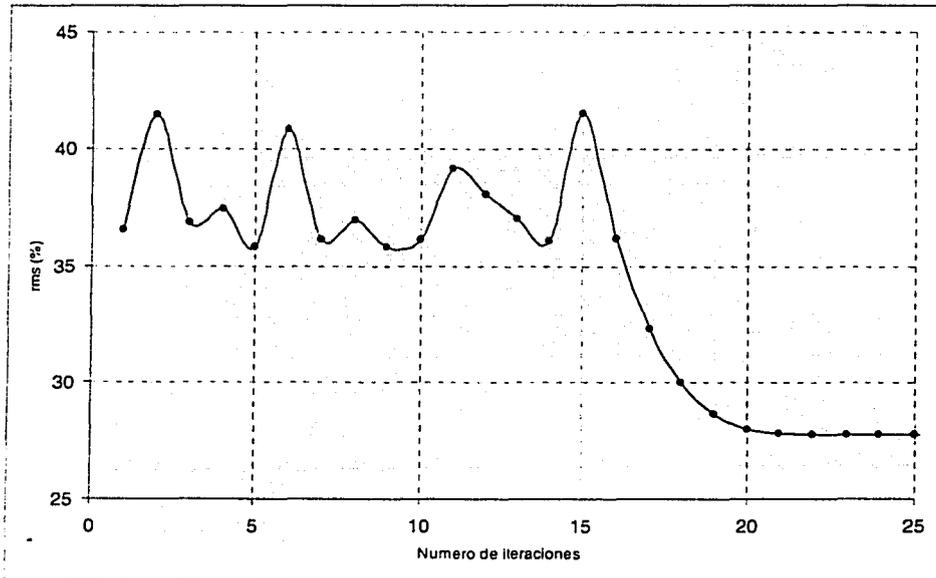


Figura 5.16.- Evolución del rms en cada iteración.

Comparando los resultados obtenidos mediante éste proceso con el modelo real, se observa que el mayor error se muestra última capa (Figura 5.17 y Tabla 5.5). Calculando el error acumulativo del proceso de inversión (Lines y Treitel, 1984), éste resulta en $0.656\epsilon_0$.

En éste caso el error de la permitividad eléctrica estimada aumenta de capa en capa, siendo la última con el mayor error. De donde el error rms final del proceso de inversión es de 27.8 % a partir de la iteración 22. Aunque este error es muy alto comparativamente con el modelo obtenido en la Tabla 5.2, debe tomarse en cuenta que el nivel del ruido es del 40 % respecto del promedio del radargrama normalizado.

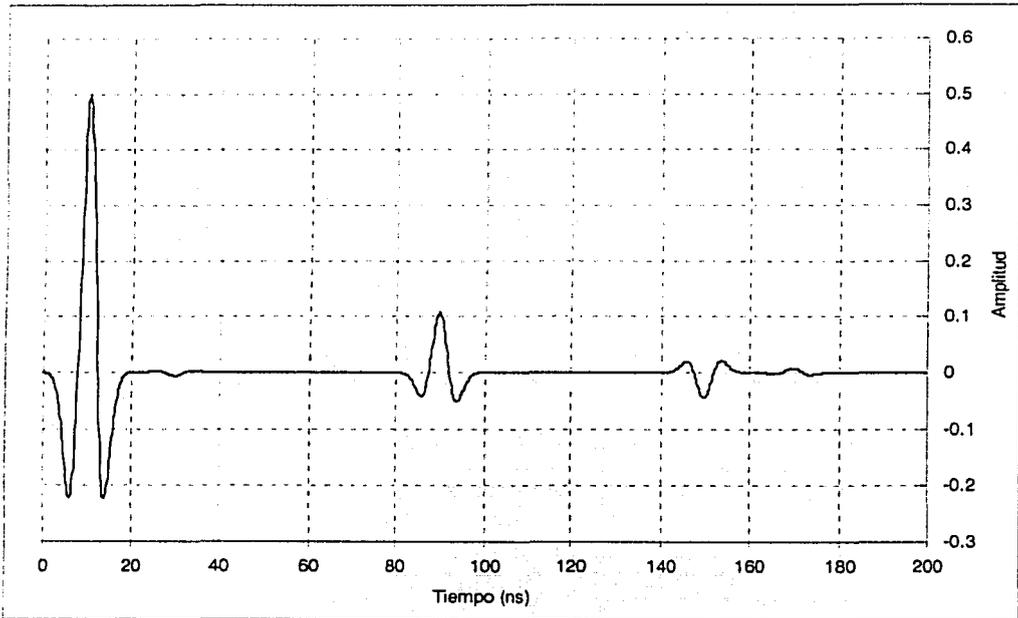


Figura 5.17.- Comparación del radargrama normalizado real — y el radargrama normalizado invertido - - - .

Capa	Permitividad Eléctrica Invertida	Permitividad Eléctrica
1	$8.99\epsilon_0$	$9\epsilon_0$
2	$5.02\epsilon_0$	$5\epsilon_0$
3	$10.1\epsilon_0$	$10\epsilon_0$

Tabla 5.5.- Comparación de los resultados.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Estimación de la Conductividad eléctrica.

Para ello usamos el modelo de la tabla 5.3. En el que se propone un modelo estratificado de cuatro capas; el radargrama normalizado correspondiente (Figura 5.11) se le añade ruido equivalente al 10% valor promedio del radargrama (Figura 5.18).

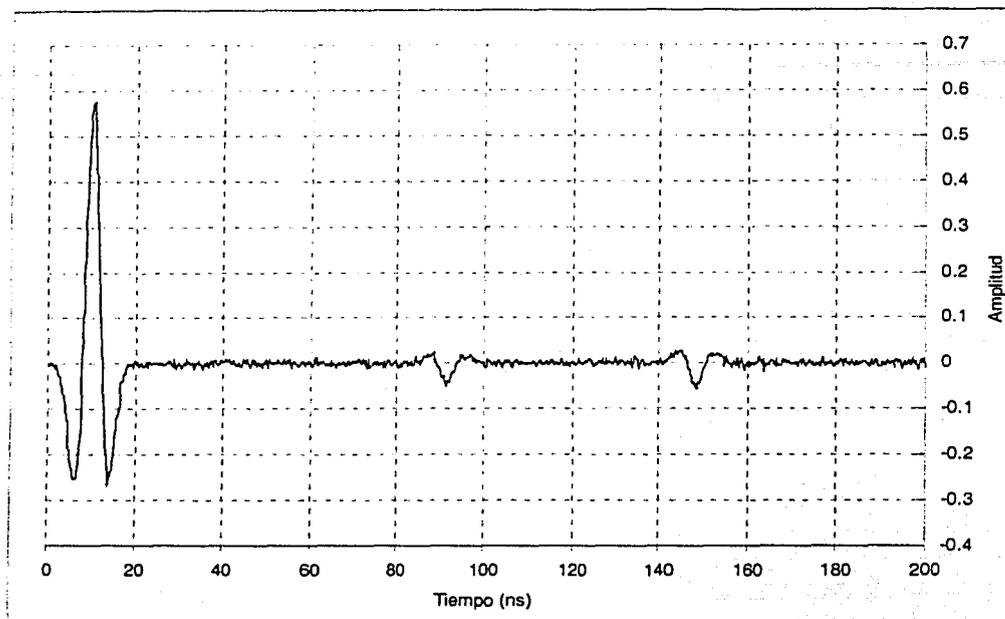


Figura 5.18.- Radargrama normalizado del modelo propuesto en la tabla 5.3 con ruido aleatorio correspondiente al 10% del valor promedio.

Para invertir dicho radargrama, se propone un modelo en el que se conocen las permitividades eléctricas de las capas y una conductividad igual en todas las capas (Figura 5.19). El proceso de evolución del rms es mostrado en la Figura 5.20. Comparando los resultados obtenidos mediante éste proceso con el modelo real, se observa que el mayor error se muestra última capa (Figura 5.21 y Tabla 5.6). Calculando el error acumulativo del proceso de inversión (Lines y Treitel, 1984), este resulta en 0.0322 S/m.

Capa	Conductividad Eléctrica Invertida (S/m)	Conductividad Eléctrica (S/m)
1	0.00045	0.0005
2	0.00033	0.0003
3	0.00073	0.0005
4	0.00239	0.0002

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tabla 5.6. Comparación de los resultados.

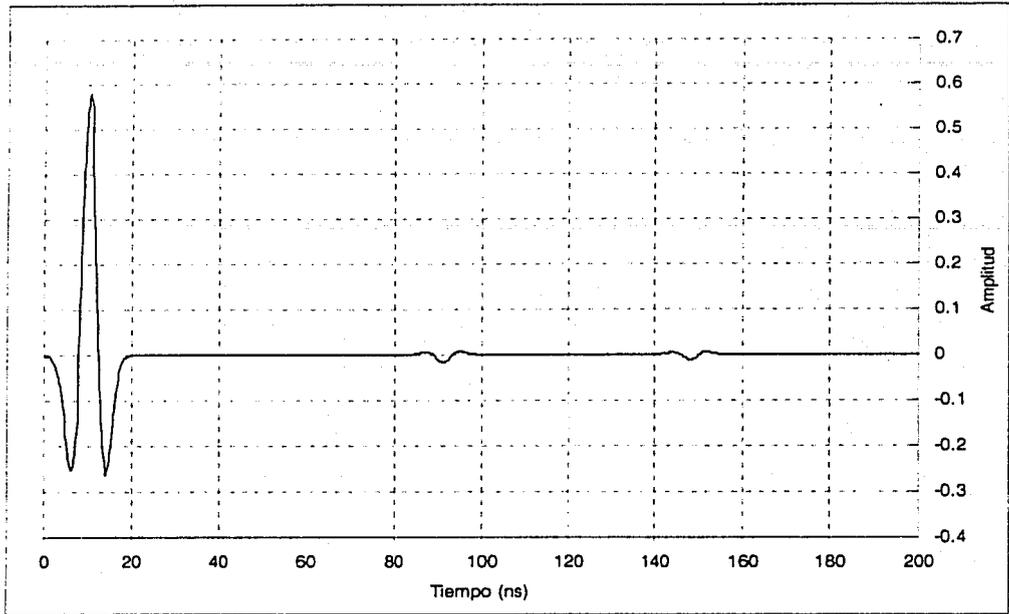


Figura 5.19.- Radargrama normalizado del modelo inicial

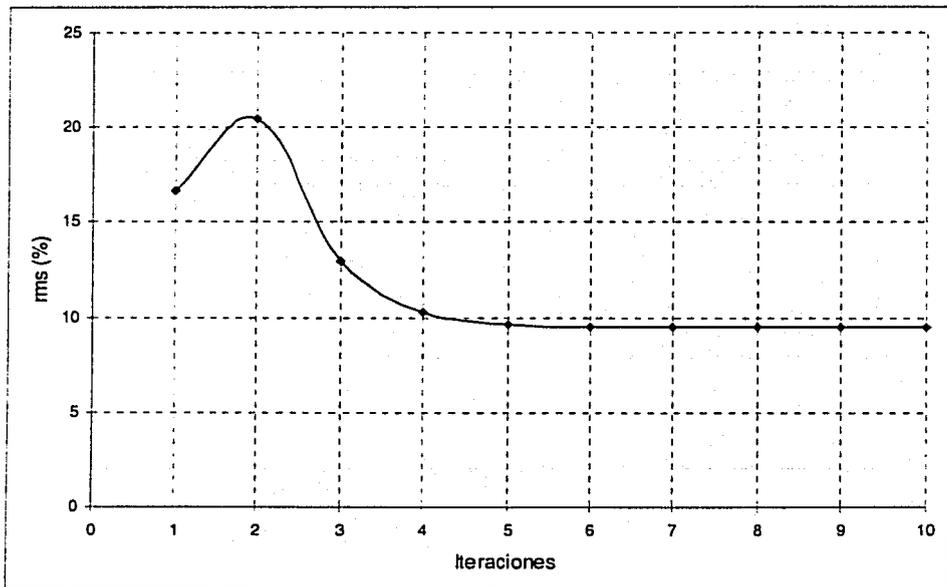


Figura 5.20.- Evolución del rms en cada iteración.

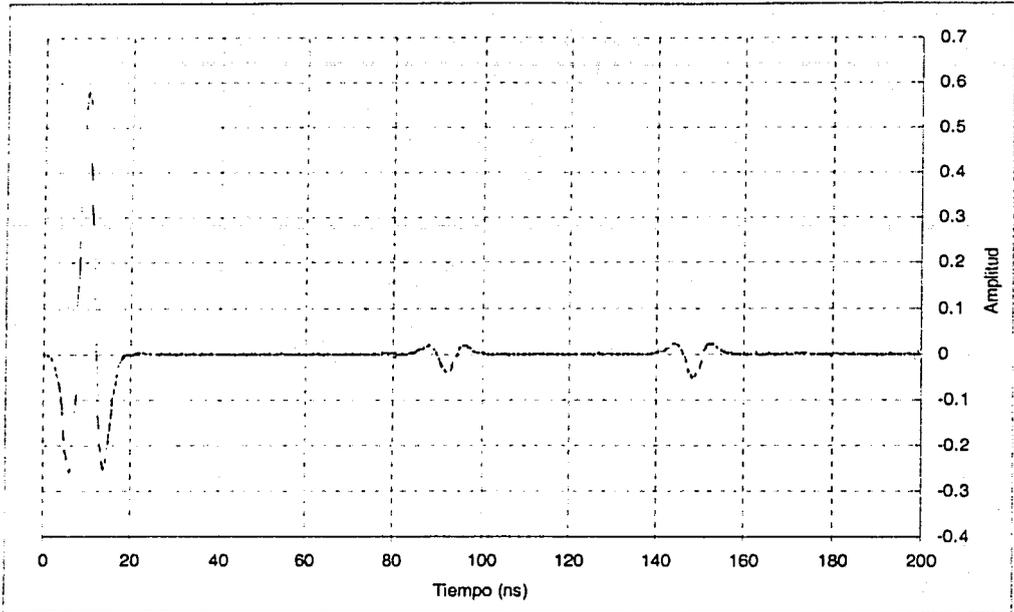


Figura 5.21.- Comparación del radargrama normalizado real ----- y el radargrama normalizado invertido ----- .

El error del rms es de 9.53 % a partir de la séptima iteración, y aunque este error es muy alto comparativamente con el modelo obtenido en la Tabla 5.4, debe tomarse en cuenta que el nivel del ruido es del 10 % respecto del promedio del radargrama normalizado.

De las derivadas de Fréchet podemos ver que el parámetro de mayor importancia, en el proceso de inversión, es la permitividad eléctrica. Pues de esta propiedad depende la ubicación de los reflectores, en la escala de tiempo, así como de las amplitudes de dichas reflexiones. Si embargo el proceso de inversión, presenta mayores problemas para esta propiedad.

El mayor problema del proceso de inversión, en el caso de la permitividad, esta en la estabilidad de la matriz, pues los valores de los parámetros a invertir son muy pequeños. Por lo que el proceso se presenta eficiente en modelos donde la distribución de las permitividades eléctricas no presenta grandes contrastes. Para el caso de la conductividad eléctrica, el proceso de inversión se presenta más estable, en comparación con la permitividad. Para esta propiedad, el proceso de inversión se presenta eficiente en modelos con conductividades bajas.

6. Discusión y Conclusiones.

Para la modelación del Radar de Penetración Terrestre (GPR) es importante, en primer termino, determinar las ecuaciones adecuadas para el medio geológico en que se realice la prospección. Para ello es necesario determinar las frecuencias de transición, entre un conductor y un dieléctrico disipativo, para los materiales del medio geológico. De ésta forma es que, comparando el rango de frecuencias del GPR con las frecuencias de transición, se pueden determinar las ecuaciones adecuadas para la modelación de cierto medio para el rango de frecuencias de la prospección.

Por ello es que se plantea la necesidad de clasificar a los materiales mediante sus frecuencias de transición: es decir de la proporción que guardan la permitividad y conductividad eléctrica. Pues para el rango de las frecuencias del GPR, el cuantificar la proporción de las corrientes de conducción y de desplazamiento resulta imprescindible para la clasificación de los materiales. Pues es claro que la clasificación de los materiales no puede hacerse desde el punto de vista de la conductividad, dado que esta resulta ineficiente para el rango de frecuencias del GPR.

De ésta forma es que las ecuaciones, que describen la propagación de las ondas electromagnéticas, pueden simplificarse; y de esta forma puede optimizarse los procesos de modelado, a demás de arrojamamos información simplificada de cómo las propiedades del medio afectan la propagación de la onda.

De las simplificaciones se desprende que la permitividad eléctrica controla la fase de propagación, es decir longitud de onda y la velocidad de propagación. Esto implica que la permitividad eléctrica controla la posición en tiempo de los reflectores y la resolución vertical del GPR. Por otro lado ésta interviene de manera proporcional la amplitud de la onda electromagnética. Esto explica el porque ésta propiedad es la mas importante en el modelado del GPR.

Por su parte la conductividad eléctrica, solo interviene en la atenuación y lo hace de manera inversa; es decir que la conductividad solo interviene en la amplitud de las reflexiones. Esta propiedad es la que interviene en mayor medida en la atenuación, y que a diferencia de la permitividad ésta no interviene en la fase de propagación. Para el caso de la permeabilidad magnética, ésta interviene tanto en la fase como en la atenuación de la onda; pero dado que los materiales geológicos presentan valores de permeabilidad igual a la del vacío, ésta se presenta con carácter de constante.

El método directo permite obtener radargramas por variaciones verticales de cualquiera de las propiedades eléctricas y magnéticas (σ , ϵ y μ); sin embargo, para el caso de la permeabilidad magnética, en la naturaleza las rocas no presentan variaciones respecto de la del vacío. Debido a que este método se realiza en el domino de las frecuencias permite de manera rápida el calculo de las amplitudes del campo eléctrico en cada capa. De esta forma es que éste método produce información sobre la forma en que la onda electromagnética se

propaga, y de ésta manera es posible modelar el sistema para definir los parámetros adecuados en la adquisición de los datos.

La separación de las contribuciones que las propiedades eléctricas y magnéticas tienen sobre el campo eléctrico, derivadas de Fréchet, muestran que la mayor contribución está dada por la permitividad eléctrica. De ésta forma se confirma que el parámetro más importante en la prospección del GPR es la permitividad eléctrica. Mientras que la conductividad tiene la menor contribución al campo eléctrico, pero se demuestra que ésta contribución no puede ser despreciada. Para el caso de la permeabilidad magnética, ésta tiene una importante contribución en el campo eléctrico.

Sin duda la mayor limitación del proceso inverso se encuentra en su dependencia de la profundidad, pues ésta información es necesaria para poder determinar cualquiera de los parámetros eléctricos. En la mayoría de los problemas inversos del electromagnetismo la inestabilidad de la matriz inversa es una característica. Este problema se acentúa en la permitividad eléctrica, pues los eigenvalores de la derivada de Fréchet, respecto de ésta propiedad, son muy grandes: por lo que la pseudo inversa se comporta de forma inestable, por contener en su diagonal valores muy pequeños, algunos cercanos a cero. Esto provoca que el modelo inicial sea de mayor importancia, pues en mucho depende de este modelo el resultado de la inversión.

Los valores del modelo inicial deben estar, en un margen de tolerancia, cercanos al valor de la primera capa. Este margen de tolerancia se reduce conforme aumenta el nivel del ruido presente en radargrama sintético. Dado que la mayor contribución al campo eléctrico está dada por la permitividad eléctrica, el nivel de ruido con el que se puede invertir ésta propiedad es de más del 40 %. Para el caso de la conductividad ésta tiende a comportarse más estable que para el caso de la permitividad, pero la optimización de éste parámetro sigue dependiendo del modelo inicial. Este parámetro puede ser estimado con mayor eficiencia si el modelo inicial es mucho menor que el valor de la primera capa. Debido a que la contribución de la conductividad al campo eléctrico es muy pequeña; el nivel de ruido con el que se puede invertir ésta propiedad es alrededor del 10 %; muy pequeño si se compara con la permitividad.

Para poder pasar de datos sintéticos a datos reales de GPR, deben darse distintas condiciones. La más importante de ellas es el conocer de manera exacta el pulso del campo electromagnético. Pues el no conocerlo implica a tener un error importante, que se acumulara durante el proceso de inversión y que sumados a los errores propios de la matriz pseudo inversa, conllevaran a obtener resultados erróneos. Además de esto, se deben tener datos sin funciones de ganancia, pues este proceso no considera este hecho.

El siguiente paso de éste problema es, sin lugar a dudas, es la resolución problema bidimensional. Para este caso, debe considerarse que el campo electromagnético cambia respecto a una componente horizontal. Además del gradiente que las propiedades eléctricas y magnéticas tendrán componentes horizontales. Sin lugar a dudas el problema inverso bajo este método se ve complicado. Por lo que es recomendable el uso de diferencias finitas o elemento finito para su resolución en el dominio del tiempo.

7. Bibliografía

- Annan A. P. and Davis J., 1976. Impulse Radar Sounding in Permafrost, Radio Sci., vol 11; pp. 383-394.
- Annan, A. P. 1992. Ground Penetrating Radar, Workshop Notes. Sensor and Software. Ontario Canada. 125 pp.
- Annan, A. P. and Chua L.T. 1992. Ground Penetrating Radar Performance prediction. Ground Penetrating Radar. Geological Survey of Canada. Canada. 5-13 pp.
- Brewster, M. L. and Annan A. P., 1994. Ground Penetrating Radar Monitoring of a Controlled DNAPL Release; 200 MHz Radar, Geophysics. Vol. 59, No. 8, pp.1211-1221.
- Butler, D. K., Simms, J. E. And Cook D, S., 1994, Archaeological Geophysics Investigations of the Wright Brothers 1910 Hangar Site, Geoarchaeology, An. International Journal , vol. 9, No 6, pp.437-466.
- Chen-To Tai. 1971. Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory. Electrical Engineering Monograph Series. Intext Educational Publishers. Scranton-London. 246 pp.
- Davis, J.L. and Annan, A.P. 1989. Ground Penetrating Radar for High Resolution Mapping of soil and rock Stratigraphy. Geophysical Prospecting. 37. 531-551 pp.
- Doolittle, J. A. And Asmussen, L. E, 1992. Ten year of Applications of Ground Penetrating Radar by the United States Department of Agriculture. Pro IV Int. Conf. Ground Penetrating Radar, June 8-13, 1992.
- Escobar-Salguero, L. H. y Cortés-Soto, F. O. 2000. Fundamentos de Teoría Electromagnética. Facultad de Ingeniería. UNAM. México. 243 pp.
- Fisher, E., Mc. Mecham, G. A and Annan, A. P., 1992, Acquisition and Processing of Wide-Aperture Ground Penetrating Radar Data. Geophysics, vol 57; pp. 495-504.
- Jarem, J. M. and Banerjee, P.P. 2000. Computational Methods for Electromagnetic and Optical Systems. Marcel Dekker, Inc. New York-Basel. 182 pp.
- Keller, G. V. 1989. Rock and Mineral Properties. Electromagnetic Methods in Applied Geophysics. Investigations in Geophysics. Society of Exploration Geophysicists. Tulsa OK. Volume 1. 13-51 pp.
- Lázaro-Mancilla, O. and Gómez-Treviño E. 1996. Synthetic Radargrams from Electrical Conductivity and Magnetic Permeability Variations. Journal of Applied Geophysics 34. pp 283-290.

- Lázaro-Mancilla, O. and Gómez-Treviño, E. 2000. Ground Penetrating Radar Inversion in 1-D: an Approach for the Estimation of Electrical Conductivity, Dielectric Permittivity and Magnetic Permeability. *Journal of Applied Geophysics* 43. pp 199-213.
- Lines, L.R. and Treitel, S. 1984. Tutorial: A Review of Least-Squares Inversion and its Application to Geophysical Problems. *Geophysical Prospecting*. Vol. 32 . 2. 159-186 pp.
- Lorenzo, H. C. 1994. *Prospección Geofísica de alta resolución Mediante Geo-radar. Aplicación a Obras Civiles. Tesis Doctoral. Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. Universidad Complutense de Madrid.* 198 pp.
- McGillivray, P. R. and Oldenburg, D. W. 1990. Methods for Calculating Frechet Derivates and Sensitivities for the Non-Linear Inverse Problem: A comparative Study. *Geophysical Prospecting*. 38. 499-524 pp.
- Nathan Ida, 1995. *Numerical Modeling for Electromagnetic Non-Destructive Evaluation.* Chapman&hall. Great Britain. 511 pp.
- Orellana, E. 1974. *Prospección Geoelectrica, por Campos Variables.* Paraninfo. Madrid. 571 pp.
- Peterson, A.F., Ray S.L. and Mitra R. 1998. *Computational Methods for Electromagnetic.* IEEE Press & Oxford University Press. New York-Melbourne. 564 pp.
- Ricker, N. H. 1977. *Transient Waves in Visco-Elastic Media. Developments in Solid Earth Geophysics* 10. Elsevier. Amsterdam-New York. 278 pp.
- Sadiku, M. N. 2001. *Numerical Techniques in Electromagnetics.* CRC Press. Florida. 743 pp.
- Scales, A. J. and Smith, M.L. 1997. *Introductory Geophysical Inverse Theory.* Samizdat Press and New England Research. Colorado-Vermont. 202 pp.
- Stevens, K. M., Lodha, A. L. and Soonawala, N. M., 1995. The Application of Ground Penetrating Radar for Mapping Fractures in Plutonic Rocks Within the Whiteshell Research Area, Pinawa Manitoba, Canada, *Journal of Applied Geophysics*, vol. 33, pp.125-141.
- Straton, J.A., 1941. *Electromagnetic Theory.* McGraw-Hill. New York-London. 615 pp.
- Taflove Allen .1998. *Advances in Computational Electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method.* Artech House. Boston-London. 724 pp.
- Tejero, A., Chávez R.E., Urbieto J. and Flores-Marquez E.L. 2002. Cavity Detection in the Southwestern Hilly Portion of Mexico City by Resistivity Imaging. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*. Volume 7. Issue 3. 130-139 pp.

Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, D.A. and Keys D.A. 1978 Applied Geophysics. Cambridge University Press. London-New York. 860 pp.

Turner. G. 1992. GPR and the Effects of Conductivity. Exploration Geophysics. 23: pp 381-386.

Ulriksen, C.P.1982, Application of Impulse Radar to Civil Engineering; Ph. D. Thesis, Department of Engineering Geology, Lund University of Technology, pp. 175

Wait, J.R. 1970. Electromagnetic Waves in Stratified Media. Pergamon Press. Oxford-New York. 608 pp.

Ward, S. H. and Hohmann G. W. 1989. Electromagnetic Theory for Geophysical Applications. Electromagnetic Methods in Applied Geophysics. Investigations in Geophysics. Society of Exploration Geophysicists. Tulsa OK. Volume 1. 131-311 pp.

Apéndices

A. Campos Oscilatorios.

Cuando los campos electromagnéticos son definidos mediante variaciones con el tiempo en forma armónica, con una frecuencia dada ω , el sistema de ecuaciones pueden ser simplificados considerablemente (Chen-To Tai, 1971). Existen muchas formas de definir estos campos oscilatorios, por ejemplo:

$$H(x,y,z;t)=H_{x0}\cos(\omega t -\varphi_x)i + H_{y0}\cos(\omega t -\varphi_y)j + H_{z0}(\omega t -\varphi_z)k \quad A.1$$

Donde $\omega=2\pi f$ es la velocidad angular del campo; y H_x , H_y , H_z y φ_x , φ_y , φ_z las componentes de amplitud y de fase de la onda electromagnética respectivamente. Las funciones de amplitud y de fase son funciones de posición. Si introducimos el vector complejo:

$$H^*(x,y,z)=H_{x0}e^{i\varphi_x}i + H_{y0}e^{i\varphi_y}j + H_{z0}e^{i\varphi_z}k \quad A.2$$

Sustituyendo la Ecuación A.2 en A.1 queda como:

$$H(x,y,z;t)=\text{Real}[H^*(x,y,z)] e^{-i(\omega t)} \quad A.3$$

Para facilitar la nomenclatura se definen a los campos de la siguiente forma:

$$H(t)=H_0 e^{-i(\omega t-\varphi)} \quad A.4$$

Es importante subrayar que el vector complejo no es un vector en el sentido común de la palabra, dado que los coeficientes de sus bases ortogonales son números complejos. Análogamente se pueden obtener expresiones similares para los vectores complejos B_0 , D_0 , E_0 y la densidad de carga q_0 :

$$\begin{aligned} B(t) &= B_0 e^{-i(\omega t-\varphi)} \\ D(t) &= D_0 e^{-i(\omega t-\varphi)} \\ E(t) &= E_0 e^{-i(\omega t-\varphi)} \\ q(t) &= q_0 e^{-i(\omega t-\varphi)} \end{aligned} \quad A.5$$

Es importante recordar ésta definición, de los campos electromagnéticos, como ecuaciones que contienen magnitudes complejas; por lo que para obtener magnitudes físicas reales es necesario multiplicar los vectores complejos por el factor $e^{-i(\omega t-\varphi)}$; en otras palabras es necesario pasar del dominio de las frecuencias al dominio del tiempo. El uso de los vectores complejos es cómodo porque facilita la derivación de las ecuaciones de Maxwell y consecuentemente la resolución de los distintos problemas.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -i\omega H_0 e^{-i(\omega t-\varphi)} = -i\omega H \quad A.6$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = (i\omega)^2 H_0 e^{-i(\omega t - \varphi)} = (i\omega)^2 H \quad \text{A.7}$$

Si sustituimos las nuevas definiciones de los campos electromagnéticos, en las ecuaciones de Maxwell 3.38 y 3.39, simplificando en ambas partes $e^{-i(\omega t - \varphi)}$ (A.6 y A.7) finalmente obtenemos:

$$\Delta E + \mu\epsilon\omega^2 E + i\mu\omega\sigma E = 0 \quad \text{A.8}$$

$$\Delta H + \mu\epsilon\omega^2 H + i\mu\omega\sigma H = 0 \quad \text{A.9}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

B. Concepto de Onda Plana.

Sea un medio homogéneo e isotrópico con parámetros μ y σ , en el que se propaga un campo electromagnético. Introduzcamos en el medio un sistema rectangular de coordenadas x , y , z ; y dirijamos hacia abajo el eje z . Supongamos que los vectores E y H cumplen con las siguientes condiciones:

1.- En cualquier plano horizontal los vectores E y H son constantes, es decir:

$$E \equiv H \equiv 0, \text{ si } z = \text{constante}$$

2.- El campo tiende a cero cuando z tiende a infinito.

Según la condición uno de la Ecuación (3.42 y 3.43) para los vectores E y H se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \gamma^2 E = 0 \quad \text{B.1a}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \gamma^2 H = 0 \quad \text{B.1b}$$

La solución de estas ecuaciones se escribe de la siguiente forma:

$$E = A e^{i\gamma z} + B e^{-i\gamma z} \quad \text{B.2a}$$

$$H = C e^{i\gamma z} + D e^{-i\gamma z} \quad \text{B.2b}$$

Donde A , B , C y D son vectores constantes complejos, que necesitamos definir. Para eso analicemos los exponentes:

$$e^{i\gamma z} = e^{i(a+ib)z} = e^{-bz} e^{iaz} \quad \text{B.3a}$$

$$e^{-i\gamma z} = e^{-i(a+ib)z} = e^{bz} e^{-iaz} \quad \text{B.3b}$$

Dado que e^{iaz} es una función acotada, es claro que $e^{i\gamma z}$ tiende a cero cuando z tiende a infinito, mientras que $e^{-i\gamma z}$ no tiende a cero. Por lo tanto, para que se cumpla la condición 2 es necesario en B.2 igualar a cero B y D , es decir:

$$B=0, D=0$$

Para que finalmente obtengamos.

$$E = C e^{i\gamma z} \quad \text{B.4a}$$

$$H = A e^{i\gamma z} \quad \text{B.4b}$$

Para poder determinar las constantes C y A es necesario imponen las condiciones iniciales:

en $z=0$



$$A=H_0 \quad \text{y} \quad C=E_0$$

Descomponiendo a los vectores H y E en sus componentes x , y , z de tal manera que se puedan representar en forma escalar:

$$H_x = H_{0x}e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_{0y}e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_{0z}e^{i\gamma z}$$
$$E_x = E_{0x}e^{i\gamma z}, \quad E_y = E_{0y}e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_{0z}e^{i\gamma z}$$

Dada la condición 1, en las ecuaciones B.1 se deduce que:

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{B.5}$$

Sustituyendo B.5 en B.1 y considerando que γ no es igual a cero, obtenemos:

$$E_z=0, \quad H_z=0$$

Por lo que el campo electromagnético, que cae verticalmente sobre una superficie plana, siempre se encuentran en un plano horizontal; dado lo anterior los campos se escriben de la siguiente forma:

$$H_{(x, y)} = H_{0(x, y)}e^{i\gamma z} \quad \text{B.6a}$$

Análogamente para E_x :

$$E_{(x, y)} = E_{0(x, y)}e^{i\gamma z} \quad \text{B.6b}$$

C. Modelos Simplificados.

En la construcción de la teoría de los métodos electromagnéticos de prospección se utilizan ampliamente modelos simplificados de los campos. Los principales son: modelo ondulatorio, cuasiestacionario y estacionario (Orellana, 1974).

a) Modelo Ondulatorio

Este modelo surge cuando el campo electromagnético se propaga en un aislante; es decir cuando $\sigma=0$. Evidentemente de 3.40 y 3.41 se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta E + \mu\epsilon\omega^2 E &= 0 \\ \Delta H + \mu\epsilon\omega^2 H &= 0\end{aligned}\tag{C.1}$$

En el dominio del tiempo estas expresiones pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta E - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta H - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{C.2}$$

Estas ecuaciones tienen el nombre de ecuaciones de onda y describen el proceso de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio aislante. Es decir las corrientes de conducción se desprecian y las corrientes de desplazamiento son las que dominan.

b) Modelo Cuasiestacionario.

En muchos de los métodos de prospección electromagnética se utilizan campos que varían relativamente lentos con el tiempo. Para tales campos, se puede despreciar la segunda derivada en las ecuaciones 3.40 y 3.41:

$$\begin{aligned}\Delta E + i\mu\omega\sigma E &= 0 \\ \Delta H + i\mu\omega\sigma H &= 0\end{aligned}\tag{C.3}$$

En el dominio de las frecuencias estas expresiones son expresadas como:

$$\begin{aligned}\Delta E - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} &= 0 \\ \Delta H - \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{C.4}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Las ecuaciones C.4 son las ecuaciones de difusión, por lo que el modelo electromagnético cuasiestacionario se describe con la ecuación de difusión. En estas ecuaciones las corrientes que predominan son las de conducción, despreciándose las corrientes de desplazamiento.

c) Modelo estacionario.

El campo electromagnético se llama estacionario si este no depende del tiempo. Por lo tanto de 3.40 y 3.41 se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta E &= 0 \\ \Delta H &= 0\end{aligned}\tag{C.5}$$

De tal manera que los campos estacionarios eléctricos y magnéticos cumplen la ecuación de Laplace.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

D. Polarización TE y TM

El tipo de polarización Transversal Eléctrica (TE), se presenta cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, mientras que el campo magnético es paralelo al mismo (Straton, 1941; Ward, S. H. and Hohmann G. W., 1989). Estableciendo estas condiciones a las ecuaciones 3.40 y 3.41, la polarización Transversal Eléctrica tendrá las características señaladas en la Figura D.1.

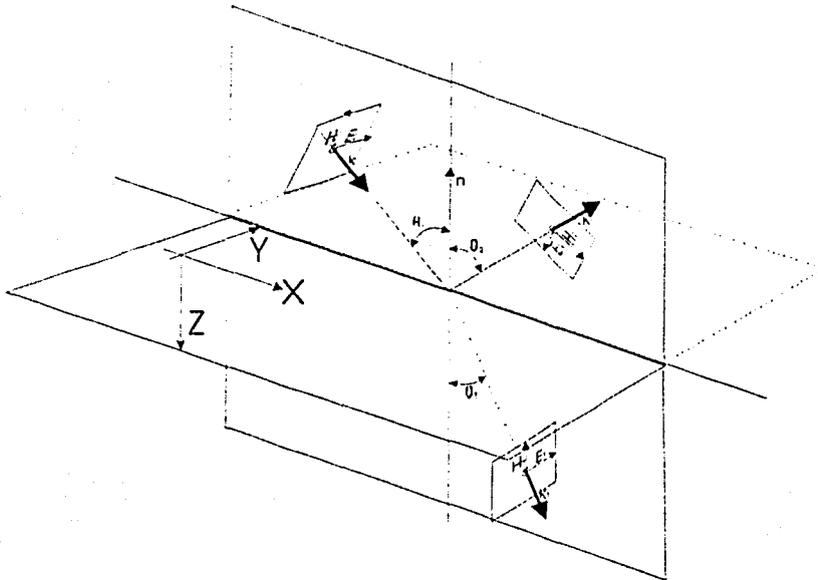


Figura D.1.- Polarización Eléctrica Trasversal TE.

Para el presente trabajo solo se considera la polarización Transversal Eléctrica (TE). Dadas las condiciones establecidas en la Figura D.1, los campos eléctrico y magnético tienen las siguientes componentes: $E=(0,E_y,0)$ y $H(H_x,0,0)$.

En el caso en el que el Campo Magnético sea perpendicular al plano de incidencia, y el campo eléctrico sea paralelo al plano de incidencia, se tiene el modelo de la polarización Transversal Magnética (Straton, 1941; Ward, S. H. and Hohmann G. W., 1989). Este tipo de polarización, con un frente de onda plano, se muestra en la Figura D.2.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

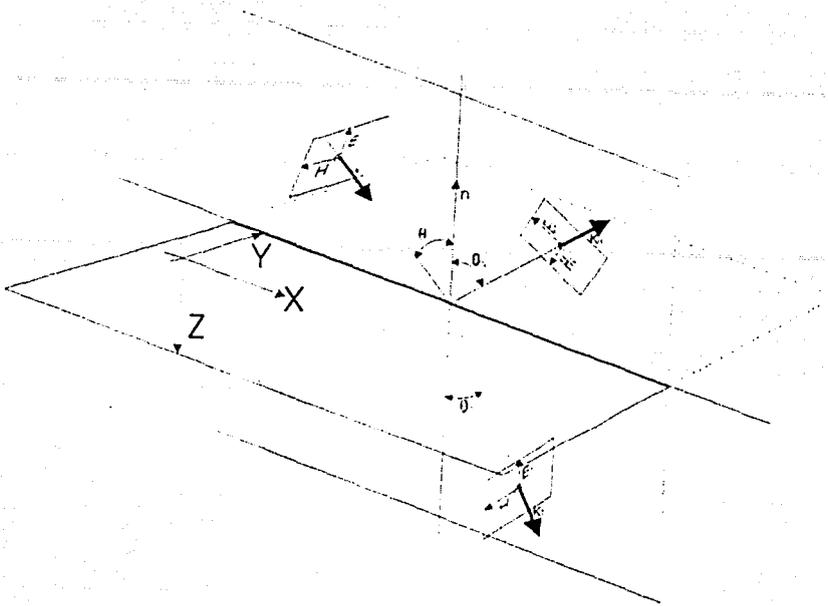


Figura D.2.- Polarización Magnética Trasversal TM.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

E. Índices de Reflexión y Refracción

La Ley de Snell describe la dependencia angular de la dispersión en las propiedades eléctricas y magnéticas. Y esto depende de la polarización de las propiedades eléctricas y magnéticas de la interfase. Considérese una interfase entre dos medios con propiedades $\sigma_1\mu_1\varepsilon_1$ y $\sigma_2\mu_2\varepsilon_2$ en un plano infinito de superficie S , con un vector normal n ; en la que incide una onda electromagnética, con un frente de onda plano, con dirección del vector k_i , con un ángulo de incidencia θ_i , respecto de la normal (Figura E.1). La onda reflejada está en la dirección del vector k_R , con un ángulo θ_R , y cuya transmisión en el segundo medio está dado en la dirección k_T , con un ángulo θ_T (Straton, 1941).

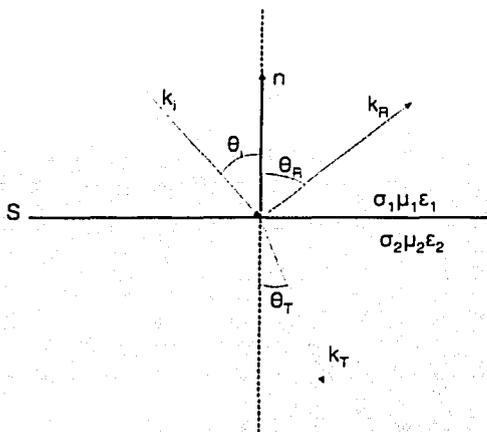


Figura E.1. Incidencia de una onda electromagnética.

Por el teorema del Poyting se tiene, que la dirección de propagación de la onda electromagnética es perpendicular a los campos eléctrico y magnético.

$$E \times H = k \quad E.1$$

Por lo que es necesario establecer el ángulo que los campos E y H formen con el plano de incidencia. Se consideran dos casos tipo: campo eléctrico paralelo al plano de incidencia y campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia. En ambos casos se cumple con la ley de Snell que establece que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión (Ward, S. H. and Hohmann G. W., 1989). El campo eléctrico sobre el plano de incidencia o perpendicular al plano de incidencia; en ambos casos se cumple la ley de la reflexión y de Snell:

$$\theta_i = \theta_R \quad E.2$$

$$k_i \sin \theta_i = k_T \sin \theta_T \quad E.3$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Donde para este caso k_T y k_T representan a los números de onda complejos y escalares para los medios 1 y 2 respectivamente.

El coeficiente de reflexión de Fresnel describe el contraste de las propiedades eléctricas y magnéticas del material. Pues describe la cantidad de energía que se refleja y se transmite cuando se cruza una frontera donde existe un cambio en las propiedades. Considérese que una frontera de dos medios con propiedades $\sigma_1\mu_1\epsilon_1$ y $\sigma_2\mu_2\epsilon_2$ en un plano infinito de superficie S, con un vector normal n: en la que incide una onda electromagnética, con un frente de onda plano, con dirección del vector k, con un ángulo de incidencia θ_i , respecto de la normal. La onda reflejada estará en la dirección del vector k_R con un ángulo θ_R , y cuya transmisión en el segundo medio estará dada en la dirección k_T con un ángulo θ_T (Straton, 1941).

$$E_R = \frac{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i - \mu_1\gamma_2 \cos \theta_T}{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_R - \mu_1\gamma_2 \cos \theta_T} E_i \quad E.4$$

$$E_T = \frac{\mu_2\gamma_1 (\cos \theta_R + \cos \theta_i)}{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_R + \mu_1\gamma_2 \cos \theta_T} E_i \quad E.5$$

En donde sustituyendo la ley de reflexión y de Snell se tiene que:

$$E_R = \frac{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i - \mu_1(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}} E_i \quad E.6$$

$$E_T = \frac{2\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i}{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}} E_i \quad E.7$$

Por lo que los coeficientes de Reflexión (R) y Refracción (T) quedan como sigue:

$$R = \frac{E_R}{E_i} = \frac{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i - \mu_1(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}} \quad E.8$$

$$T = \frac{E_T}{E_i} = \frac{2\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i}{\mu_2\gamma_1 \cos \theta_i + \mu_1(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}} \quad E.9$$

Si la onda electromagnética con frente plano incide de manera normal al plano, entonces se consiguen simplificar las anteriores expresiones haciendo $\theta_i=0$, por lo que se reducen:

$$R = \frac{E_R}{E_i} = \frac{\mu_2\gamma_1 - \mu_1\gamma_2}{\mu_2\gamma_1 + \mu_1\gamma_2} \quad E.10$$

$$T = \frac{E_T}{E_i} = \frac{2\mu_2\gamma_1}{\mu_2\gamma_1 + \mu_1\gamma_2} \quad \text{E.11}$$

Tomando en cuenta la discusión de la Sección 3.4.3, se toma la permeabilidad del vacío para las rocas:

$$R = \frac{E_R}{E_i} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad \text{E.12}$$

$$T = \frac{E_T}{E_i} = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad \text{E.13}$$

Algunas veces es conveniente escribir las ecuaciones de reflexión y refracción en función de las impedancias de onda (3.68):

$$\frac{E_x}{H_x} = Z_{xx} = -\frac{\mu\omega}{\gamma}$$

Los coeficientes de reflexión y refracción pueden escribirse como:

$$R = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \left[1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{\frac{1}{2}}}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \left[1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{E.14}$$

Para una incidencia normal se tiene que el coeficiente de reflexión estará dado por:

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \text{E.15}$$

Es de notar que las ecuaciones E.12 y E.15 son equivalentes.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN