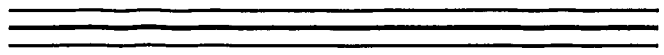


00324



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



13

FACULTAD DE CIENCIAS

LA COMBINATORIA DE CINCO PUNTOS EN EL PLANO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

NATALIA GARCÍA COLÍN

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JAVIER BRACHO CARPIZO



2003

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

a.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **PAGINACION DISCONTINUA**



Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.  
 NOMBRE: Natalia García Collín

FECHA: 02/Junio/2003

FIRMA: [Signature]

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
 Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias  
 Presente

Comunicamos a Usted que hemos revisado el trabajo escrito:

**"La combinatoria de cinco puntos en el plano"**

realizado por Natalia García Collín con número de cuenta 9632224-6

quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

**Atentamente**

Director de Tesis  
 Propietario

Dr. Javier Bracho Carpizo

Propietario

Dr. Luis Montejano Peimbert

Propietario

Dr. Jorge Arocha Pérez

Suplente

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Suplente

M. en C. Ricardo Strausz Santiago

**Consejo Departamental de**



ACULTAV  
 CONSEJO DE  
 MATEMÁTICAS

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**

b

*Para Aldo, Alf, Balu y Diana.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

C

La ciencia es para los que estudian; la poesía,  
para los que saben.

J. Roux

*A Jorge Ize, Arocha, Luis, Roli, Dino y Toño  
por enseñarme a rimar.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Friendship is unnecessary, like philosophy, like art...  
It has no survival value; rather is one of those things  
that give value to survival.

C.S. Lewis

Los de las bicis	Beto
Los hijos de Alcántara.	Jaime
El intelectual	Legna
Hermanito	Toño.
Guionista	Daniel
Musicalización	Canek
Cerebro 2	Isaac
Changos	Charcos
Apoyo Técnico	Ehes
Café	Dians
Boina boy	Mix.
Favores	George
La chica uruguaya	Rigel
El pesimista	Gus
El hedonista	Carito
El físico	Ramito
El gourmet	Emiliano
El elfo	Mané
El Dr.	Octavio
La güera	Damián
La bailarina	Labadie
Ma	Ferrán.
La que viene de regreso	Amanda
La loren-za	Isa
La chef	Aisha
Banda	Zaloren
	Adriana
	Galo
	Alejandro
	Lau
	Ro
	Victor

# La combinatoria de 5 puntos en el plano

Natalia García Colín

Mayo 2003

III



# Índice General

0.1	Introducción . . . . .	vii
<b>1</b>	<b>Espacios Afines</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1	Conjuntos afines . . . . .	1
1.2	Transformaciones afines . . . . .	4
1.2.1	El plano afín . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Conjuntos Convexos</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1	Convexidad . . . . .	7
2.2	Politopos . . . . .	9
2.3	Separoides . . . . .	10
2.4	Separoides de puntos . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Espacios de Configuraciones</b> . . . . .	<b>15</b>
3.1	Configuraciones de 4 puntos en el plano ( $A_4^2$ ) . . . . .	16
3.2	El caso general $A_{d+2}^d$ . . . . .	19
3.3	Configuraciones de 4 puntos en la línea $A_4^1$ . . . . .	19
3.4	Cinco puntos en el plano proyectivo ( $P_5^2$ ) . . . . .	21
3.5	Grassmannianas . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Cinco Puntos en el Plano</b> . . . . .	<b>25</b>
4.1	Celdas de dimensión 4 . . . . .	25
4.1.1	¿Cómo se pintan 5 puntos en el plano? . . . . .	25
4.1.2	Tipo 0 . . . . .	26
4.1.3	Tipo 1 . . . . .	27
4.1.4	Tipo 2 . . . . .	27
4.2	Celdas de dimensión 3 (Combinatoria) . . . . .	28
4.2.1	tipo L . . . . .	29
4.2.2	tipo Y . . . . .	30

4.2.3	tipo X . . . . .	31
4.2.4	tipo T . . . . .	32
4.3	Celdas de dimensión 3 (Geometría) . . . . .	33
4.3.1	Geometría de la celda tipo L . . . . .	36
4.3.2	Geometría de la celda tipo Y . . . . .	37
4.3.3	Geometría de la celda tipo X . . . . .	38
4.3.4	Geometría de la celda tipo T . . . . .	39
4.4	Nueces . . . . .	40
4.5	Geometría de la frontera de la nuez. . . . .	43
4.6	Las celdas de dimensión 3 restantes. . . . .	48
4.6.1	Collar de a 4. . . . .	48
4.6.2	Collar de a 6. . . . .	51
4.7	Intersección de las nueces. . . . .	52
4.8	Conclusión . . . . .	54

# Introducción.

El resultado de esta tesis es una descripción combinatoria y geométrica completa de la Grassmanniana de planos en  $\mathbb{R}^4$  ( $G(2, 2)$ ). Mediante el estudio del orden parcial combinatorio del espacio de configuraciones de cinco puntos en el plano afín  $\mathbb{A}_\mathbb{R}^2$  llegamos a subdividir a  $G(2, 2)$  en doce celdas de dimensión 4 correspondientes a cada una de las 12 coloraciones cíclicas de cinco puntos, éstas se intersectan en un objeto de dimensión tres si cumplen cierta relación entre sus ordenes cíclicos, proporcionando así un mapa completo de su geometría.

El estudio de los espacios de configuraciones ha sido fructífero en diversos aspectos, tal vez el más remarcable sea el desarrollo de la teoría de separoides.[3] Esta teoría es una extensión muy natural del concepto de separación entre conjuntos convexos. Los separoides y el teorema de Radon, que estudiamos con más profundidad en el capítulo dos, nos han proporcionado las herramientas para caracterizar combinatoriamente muchos de los espacios de configuraciones de puntos en el espacio afín. Sin embargo un problema no del todo resuelto es la geometría de  $\mathbb{A}_{d+3}^d$ , el espacio de  $d + 3$  puntos en  $\mathbb{A}^d$  del cual sólo se conoce una descripción combinatoria.[11] Por otra parte se tienen resultados definitivos para espacios de configuraciones de puntos en espacios proyectivos  $\mathbb{P}_n^d$  y líneas en espacios afines  $\mathbb{A}_n^d$ .

Los primeros capítulos de esta tesis establecen los cimientos sobre los cuales se construyen los espacios de configuraciones. El capítulo uno estudia las principales características de los espacios afines, por ser este espacio sobre el que se encuentra nuestro objeto de estudio. El capítulo dos es un breve repaso a las propiedades y teoremas importantes en conjuntos convexos, que

están profundamente relacionados con la descripción final. También remarkamos definiciones fundamentales en la teoría de politopos, que sólo se usan como referencia para motivar el estudio politopal de la estructura de  $A_5^2$ , mismo que creemos puede resultar interesante. Y finalmente se introduce la teoría de separoides y algunos de sus teoremas fundamentales. En el tercer capítulo se define nuestro objeto de estudio y se resumen los resultados obtenidos en configuraciones de puntos en el afín.[10] Además en este capítulo describimos a grandes rasgos el espacio de configuraciones de cinco puntos en el plano proyectivo, el cual jugará un papel fundamental en nuestro caso. Y demostramos el teorema que asocia los espacios de configuraciones de puntos con las grassmannianas y que nos enseña las características topológicas de estos espacios.

Por último, en el capítulo final de esta tesis es donde se desarrolla con cuidado la descripción combinatoria y geométrica de  $A_5^2$  que, por el desconocimiento del caso general, esperamos contribuya a desembarañar la madeja de los espacios de configuraciones.

# Capítulo 1

## Espacios Afines

La noción de un espacio de configuraciones está íntimamente ligada con las propiedades de los espacios afines. En este capítulo estudiamos algunos resultados conocidos de álgebra lineal y geometría afín los cuales resultarán importantes en los capítulos posteriores.[7] Esta teoría es análoga a la de los espacios vectoriales y en la mayoría de los casos indistinguible.

### 1.1 Conjuntos afines

**Definición 1.1.1** Una línea por  $x_1$  y  $x_2 \in \mathbb{R}^d$  es el conjunto:

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

**Definición 1.1.2** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^d$  es un *subespacio afín* si siempre que contiene 2 puntos, también contiene la línea entre ellos. Si además  $\vec{0} \in A$ , le llamamos *subespacio lineal*.

Ya que los subespacios afines juegan un papel importante en el desarrollo de la teoría de conjuntos convexos, necesitamos analizar algunos resultados en este respecto que posteriormente también garantizarán la congruencia del concepto de los espacios de configuraciones.

**Teorema 1.1.3** La traslación  $A+u$  de un subespacio afín  $A$ , es un subespacio afín.

*Demostración.* Sean  $x, y \in A + u$  y  $\lambda + \mu = 1$  entonces existen  $a, b \in A$  tales que  $x = a + u$  y  $y = b + u$  por lo cual

$\lambda(a+u) + \mu(b+u) = \lambda x + \mu y = \lambda a + \mu b + u \in A + u$  entonces  $A + u$  es un subespacio afín. ■

**Teorema 1.1.4** Sean  $x_1, \dots, x_m \in A \subset \mathbb{R}^d$   $m$  puntos en un subespacio afín  $A$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ . Entonces  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \in A$ .

*Demostración.* Sea  $a \in A$ , entonces los puntos  $x_1 \square a, \dots, x_m \square a \in A \square a$  que es un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^d$ , por tanto

$\lambda_1(x_1 \square a) + \dots + \lambda_m(x_m \square a) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \square a \in A \square a$  si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ , entonces  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \in A$ . ■

Este último teorema motiva una caracterización de los puntos de un subespacio afín.

**Definición 1.1.5** Un punto  $x$  es *combinación afín* de  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$  si existen escalares  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$  tales que  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ .

**Definición 1.1.6** Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ , el *generado afín*  $\text{aff}(\mathcal{P})$  es el conjunto de todas las combinaciones afines de puntos en  $\mathcal{P}$ . De hecho  $\text{aff}(\mathcal{P})$  es el subespacio afín más pequeño que contiene a  $\mathcal{P}$ .

**Observación 1.1.7** Si  $\mathcal{P}$  es subespacio afín entonces  $\text{aff}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ .

**Definición 1.1.8** Un conjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  es *afínmente dependiente* si existe  $x \in \mathcal{P}$  tal que  $x \in \text{aff}(\mathcal{P} \setminus x)$ . Un conjunto  $\mathcal{P}$  es *afínmente independiente* si no es afínmente dependiente.

**Teorema 1.1.9**  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  es afínmente dependiente si y sólo si existen  $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{P}$  puntos distintos y  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  no todos cero tales que:  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{P}$  es afínmente dependiente, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que existe  $x_1 \in \mathcal{P}$  tal que  $x_1 \in \text{aff}(\mathcal{P} \setminus x_1)$ . Por tanto, existen distintos puntos en  $\mathcal{P} \setminus x_1$  y escalares  $\mu_2, \dots, \mu_m$  tales que  $x_1 = \mu_2 x_2 + \dots + \mu_m x_m$ ,  $\mu_2 + \dots + \mu_m = 1$ . Si  $\lambda_1 = \square 1$ ,  $\lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_m = \mu_m$  tenemos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  no son todos cero y  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$

Ahora supongamos que existen puntos distintos  $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{P}$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  no todos cero tales que:  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\lambda_1 \neq 0$  entonces  $\frac{\square 1}{\lambda_1}(\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m) = x_1$  y  $\frac{\square 1}{\lambda_1}(\lambda_2 + \dots + \lambda_m) = 1$ , por lo cual  $x_1$  es combinación afín de  $x_2, \dots, x_m$  y  $x_1 \in \text{aff}(\mathcal{P} \setminus x_1)$ . ■

**Corolario 1.1.10** Sea  $\{x_1, \dots, x_m\}$  un conjunto afinmente independiente entonces para todo  $x \in \text{aff}(\{x_1, \dots, x_m\})$  existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  únicos tales que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = x$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ .

*Demostración.* Lo único que hay que demostrar es la unicidad de los coeficientes, sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  y  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$ , tales que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = x$  y  $\lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_m x_m = x$ , entonces  $(\lambda_1 \square \lambda'_1) + \dots + (\lambda_m \square \lambda'_m) = 0$  y  $(\lambda_1 \square \lambda'_1)x_1 + \dots + (\lambda_m \square \lambda'_m)x_m = 0$ . llamamos a  $(\lambda_i \square \lambda'_i) = \mu_i$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Si  $\mu_i \neq 0$  para algún  $i$ , por el teorema anterior  $\{x_1, \dots, x_m\}$  es afinmente dependiente, lo cual es una contradicción por tanto  $\mu_i = 0$  para todo  $i$ , lo que implica que los coeficientes son iguales ■

**Definición 1.1.11** Una *base afin* para un subespacio afin en  $\mathbb{R}^d$  es cualquier conjunto afinmente independiente cuyo generado afin sea tal subespacio.

De forma análoga a los espacios vectoriales un conjunto afinmente independiente de  $\mathbb{R}^d$  no puede contener más de  $d + 1$  elementos linealmente independientes, de la misma forma se puede demostrar que todas las bases tienen la misma cardinalidad. Las dos analogías motivan la definición de dimensión de un espacio afin.

**Definición 1.1.12** Definimos para un subespacio afin  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  la *dimensión* como la cardinalidad de una base de  $\mathcal{P}$ .

Ahora es momento de introducir otro concepto que por ahora no se utilizará pero que necesitaremos más adelante.

**Definición 1.1.13** Sea  $\mathcal{P} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto de  $m$  puntos distintos, decimos que  $\mathcal{P}$  está en *posición general* si todo subconjunto de a lo más  $d + 1$  puntos es afinmente independiente.

Es fácil ver que posición general es una condición suficiente para que el conjunto genere afinmente el espacio.

**Teorema 1.1.14** Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  entonces  $\mathcal{P}$  contiene una base afin para  $\text{aff}(\mathcal{P})$ .

*Demostración.* Consideramos la familia no vacía de todos los subconjuntos afinmente independientes de  $\text{aff}(\mathcal{P})$  que contienen a  $\mathcal{P}$ . Como ningún conjunto afinmente independiente de  $\mathbb{R}^d$  contiene más de  $d + 1$  puntos, existe un miembro  $\mathcal{C}$  de la familia que no está propiamente contenido en ningún otro miembro de ella. Como  $\mathcal{C}$

es un subconjunto de  $\text{aff}(\mathcal{P})$ , tenemos que  $\text{aff}(\mathcal{C}) \subset \text{aff}(\mathcal{P})$ . Pero  $\text{aff}(\mathcal{C}) = \text{aff}(\mathcal{P})$  por que, como  $\text{aff}(\mathcal{P})$  es el conjunto más pequeño que contiene a  $\mathcal{P}$ , no es posible que  $\mathcal{P} \subsetneq \text{aff}(\mathcal{C})$ , por lo cual existe un punto de  $\mathcal{P}$  que no está contenido en  $\text{aff}(\mathcal{P})$ , pero entonces  $\mathcal{C} \cup x$  pertenece a la familia y contiene propiamente a  $\mathcal{C}$ , lo cual es una contradicción. ■

**Definición 1.1.15** Sea  $\{x_1, \dots, x_m\}$  una base para un subespacio afín  $A \subset \mathbb{R}^d$ , por el corolario anterior todo punto  $x$  en  $A$  puede ser expresado de manera única como  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = x$ , con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ , a los escalares  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  se les llama *coordenadas baricéntricas* de  $x$ .

## 1.2 Transformaciones afines

Para definir las clases de equivalencia de  $n$   $\square$  *adas* de puntos en  $\mathbb{R}^d$  en la construcción de un espacio de configuraciones, se usa fuertemente el concepto de transformaciones afines y de la existencia de transformaciones adecuadas entre distintos conjuntos de puntos.

**Definición 1.2.1** Un mapeo  $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  es llamado un *mapeo afín* si  $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^d$  con  $\lambda + \mu = 1$ .

Antes de pasar al siguiente teorema vale la pena mencionar que un mapeo afín “saca escalares” para cualquier suma finita de puntos. Omitiremos la prueba (inducción).

**Teorema 1.2.2** Sea  $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una transformación afín, y sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ . Entonces  $T(\text{aff}(\mathcal{P})) = \text{aff}(T(\mathcal{P}))$ . Si  $\mathcal{P}$  es un subespacio afín entonces  $T(\mathcal{P})$  también lo es.

*Demostración.* Un punto  $x$  está en  $T(\text{aff}(\mathcal{P}))$  si y sólo si existen  $x_1, \dots, x_s \in \mathcal{P}$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  tales que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$  las cuales cumplen que  $x = T(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 T(x_1) + \dots + \lambda_s T(x_s)$ . Esto sucede si y sólo si  $x \in \text{aff}(T(\mathcal{P}))$ . Finalmente si  $\mathcal{P}$  es un subespacio afín, entonces  $\text{aff } T(\mathcal{P}) = T(\text{aff}(\mathcal{P})) = T(\mathcal{P})$ . ■

Es importante observar que si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , son las coordenadas baricéntricas de  $x$  con respecto al conjunto  $\{x_1, \dots, x_m\}$ , entonces también son las coordenadas baricéntricas de  $T(x)$  con respecto a  $\{T(x_1), \dots, T(x_m)\}$ .



**Teorema 1.2.3** Sean  $\{x_1, \dots, x_m\}$  y  $\{y_1, \dots, y_m\}$  ( $m \leq n$ ) un par de conjuntos distintos afinmente independientes en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces existe una transformación  $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $T(x_i) = y_i$  para todo  $1 \leq i \leq m$

*Demostración.* Podemos extender los conjuntos  $\{x_1, \dots, x_m\}$  y  $\{y_1, \dots, y_m\}$  respectivamente a bases afines  $\{x_1, \dots, x_d\}$  y  $\{y_1, \dots, y_d\}$ . Entonces cada  $x$  se puede escribir de manera única como  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$  con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_d = 1$ , definimos el mapeo  $T(x) = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_d y_d$ , este mapeo es biyectivo y afin. ■

### 1.2.1 El plano afin

Finalmente, como el resultado de esta tesis tiene que ver con puntos en el plano remarcaremos las propiedades de esta sección y algunas nuevas, no exclusivas a él. A partir de las definiciones y teoremas anteriores podemos deducir los siguientes resultados en el caso de planos.

1. Si una transformación afin deja fijos dos puntos distintos, entonces deja fijo todo punto en su línea.
2. Si una transformación afin deja fijos tres puntos no colineales, entonces debe ser la identidad.
3. Dadas dos ternas de puntos  $x, y, z$  y  $x', y', z'$  afinmente independientes existe una única transformación afin tal que  $T(x) = x'$ ,  $T(y) = y'$ , y  $T(z) = z'$ .



# Capítulo 2

## Conjuntos Convexos

A pesar de que el estudio de los conjuntos convexos no había adquirido formalidad sino hasta mediados del siglo veinte, implícitamente siempre han tenido presencia en el desarrollo de la matemática, por supuesto la combinatoria y en particular los espacios de configuraciones no son la excepción.

### 2.1 Convexidad

En esta sección aparecen las nociones usuales de convexidad[8], seguidas de la relación que guardan con los espacios de configuraciones, en particular con la teoría de separoides.

**Definición 2.1.1** Un conjunto  $C$  es *convexo* si para todo par de puntos  $x, y \in C$ , el segmento  $\{\lambda x + \mu y \mid \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0\}$  está contenido en el conjunto.

**Definición 2.1.2** Un punto  $x$  es una *combinación convexa* de los puntos  $x_1, \dots, x_m$  si pertenece al conjunto:

$$\{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0\}.$$

**Teorema 2.1.3** Sean  $x_1, \dots, x_m \in C$  convexo contenido en  $\mathbb{R}^d$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$  con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ , entonces  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \in C$ .

*Demostración.* (Por inducción sobre  $m$ ). El caso  $m = 1$  es trivial, supongamos que el teorema se cumple para un entero positivo  $k$ . Sea  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}$ , donde  $x_1, \dots, x_{k+1} \in C$  y

$\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$  con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1} = 1$ , al menos un  $\lambda_i < 1$  digamos que  $i = k+1$ . Consideramos entonces  $x' = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1, \dots, \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k$ , donde  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \square \lambda_{k+1} > 0$ , por hipótesis de inducción  $x' \in C$ . Como  $C$  es convexo  $x'$  y  $x_{k+1} \in C$  tenemos que  $x = \lambda x' + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in C$ . ■

**Teorema 2.1.4** Sean  $C, B \subset \mathbb{R}^d$  convexos, entonces  $\alpha C$  y  $B+C$  son convexos.

*Demostración.* Sean  $\lambda, \mu \geq 0$  tales que  $\lambda + \mu = 1$ , como  $B$  y  $C$  son convexos  $\lambda B + \mu B \subseteq B$  y  $\lambda C + \mu C \subseteq C$ , por tanto  $B+C \supseteq (\lambda B + \mu B) + (\lambda C + \mu C) = \lambda(B+C) + \mu(B+C)$  y de aquí se sigue que  $B+C$  es convexo. Por otra parte  $\lambda(\alpha C) + \mu(\alpha C) = \alpha(\lambda C + \mu C) \subseteq \alpha C$ . ■

**Teorema 2.1.5** Sea  $T$  una transformación afín y  $C \subset \mathbb{R}^d$  convexo, entonces  $T(C)$  es convexo.

*Demostración.* Sean  $\lambda, \mu \geq 0$  tales que  $\lambda + \mu = 1$ . Si  $x$  y  $y \in T(C)$  tenemos que  $x = T(x')$  y  $y = T(y')$  para  $x', y' \in C$ , por ser este último conjunto convexo  $\lambda x' + \mu y' \in C$ , como  $T$  es afín  $T(\lambda x' + \mu y') = \lambda T(x') + \mu T(y') = \lambda x + \mu y \in T(C)$ . ■

**Definición 2.1.6** El caso convexo de un conjunto  $C$ ,  $\langle C \rangle$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de  $C$ .

**Teorema 2.1.7 (Radon)** Sean  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$  puntos ( $m \geq n+2$ ), entonces el conjunto  $\{1, \dots, m\}$  se puede partir en dos subconjuntos  $I, J$  tales que  $\langle \{x_i \mid i \in I\} \cup \{x_j \mid j \in J\} \rangle \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Consideramos el caso no trivial cuando  $x_1, \dots, x_m$  son distintos, por tanto existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , no todos cero tales que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$ . Algunas de las  $\lambda_i$  son positivas y otras negativas. Sea  $I = \{i \mid \lambda_i \geq 0\}$  y  $J = \{j \mid \lambda_j < 0\}$  entonces

$$\frac{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i} = \frac{\sum_{j \in J} \square \lambda_j x_j}{\sum_{j \in J} \square \lambda_j} = x$$

de lo cual  $x$  es una combinación convexa de  $\{x_i \mid i \in I\}$  y  $\{x_j \mid j \in J\}$ , por lo cual  $x \in \langle \{x_i \mid i \in I\} \cup \{x_j \mid j \in J\} \rangle$ . ■

## 2.2 Polítopos

Los polítopos fueron de hecho de los primeros conjuntos convexos estudiados, las propiedades de puntos, líneas, polígonos y poliedros fueron profundamente discutidas en los elementos de Euclides que datan del siglo 300<sub>BC</sub>. Además estos objetos no dejan de tener importancia en áreas como la geometría combinatoria. En esta tesis tienen una utilidad básica pues nuestro principal propósito es describir en términos simples  ${}_0A_5^2$ , sin embargo dentro de este ejemplo existen aún muchas preguntas abiertas que involucran directamente los conceptos que exhibimos.

Un *polítopo convexo* es el casco convexo de un número finito de puntos. Bajo esta definición la *dimensión  $r$  de un polítopo convexo* es la dimensión del espacio afín generado por los puntos que lo definen. Se llama  *$r$ -polítopo* a un polítopo de dimensión  $r$ . Un  *$r$ -simplejo* es el casco convexo de un conjunto de  $r + 1$  puntos afinmente independientes al cual denotamos  $\Delta^r$ .

Una forma equivalente o dual de ver un polítopo es considerarlo como la intersección compacta de una familia finita de semiespacios cerrados, de manera que, una cara de un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^d$  es la intersección de éste con algunos de los hiperplanos que lo definen. Todo polítopo en  $\mathbb{R}^d$  tiene solamente un número finito de caras y cada una de estas caras es un polítopo.

Si en  $\mathbb{R}^d$  tenemos una colección finita de polítopos convexos de diversas dimensiones los cuales se intersectan siempre en caras comunes obtenemos un *complejo politopal*.

Todas estas descripciones son producto de una manera clásica y puramente convexa de ver a los polítopos. Sin embargo McMullen y Schulte han introducido una definición abstracta de la noción de complejo politopal o polítopo abstracto que incluye a las anteriores.[6]

Varias de las poliedrizaciones de las configuraciones que manejaremos en el *Capítulo 4* no son complejos politopales bajo la visión clásica, pero sí bajo la de McMullen-Schulte. En esta tesis por razones de brevedad y ya que sólo se mencionan como motivación para un futuro estudio del objeto tratado, no estudiaremos detenidamente este tema.

## 2.3 Separoides

El siguiente teorema de separación entre conjuntos es de los más básicos en convexidad. La definición de separoide, que fue motivada por el estudio de los espacios de configuraciones y generaliza el concepto de separación, constituye el eslabón entre la convexidad, la geometría y dichos espacios.

**Definición 2.3.1** Un conjunto *se separa* de otro por un hiperplano  $H$  si cada uno de estos está contenido en uno de los dos distintos semiespacios definidos por  $H$ .

**Teorema 2.3.2** Dos conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$  se separan si y sólo si sus cascos convexos no se intersectan.

**Definición 2.3.3** Una *separoide* es una relación  $|$  en la familia de subconjuntos de un conjunto dado  $C$ , que cumple las siguientes propiedades:

- $\square A | B \Rightarrow B | A$
- $\square A | B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
- $\square A | B \text{ y } A' \subseteq A \Rightarrow A' | B$

Cuando dos subconjuntos están relacionados se dice que se separan, a las separaciones del conjunto vacío se les llama triviales. Un separoide es acíclico si el conjunto vacío se separa del total.

El complemento de las separaciones son las no separaciones, que denotamos  $A \nmid B$ . Es importante notar que un separoide se puede caracterizar ya sea por sus separaciones maximales o por sus no separaciones minimales.

## 2.4 Separoides de puntos

A partir de las definiciones precedentes un conjunto de puntos  $\mathcal{P}$  tiene una estructura de separación natural como sigue[11]:

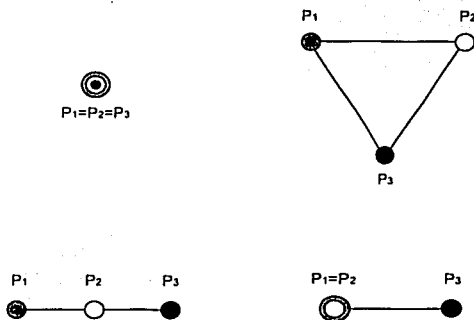
Dado  $C = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , decimos que dos subconjuntos  $A, B \subset \mathcal{P}$  se separan ( $A | B$ ) si  $\langle A \rangle$  y  $\langle B \rangle$  se separan como conjuntos. A partir de 2.3.2 y 2.3.3 podemos concluir la siguiente observación.

**Observación 2.4.1**  $A \nmid B$  si  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \emptyset$

La siguiente definición introduce notación útil para los resultados posteriores.

**Definición 2.4.2** Cuando tenemos que un subconjunto de  $r + 1$  puntos con  $r \geq k$  genera un subespacio afín de dimensión  $k$ , llamamos a este arreglo de puntos una  $k$ -aglomeración de  $r + 1$  puntos.[10]

Para visualizar lo último estudiemos el separoide de 3 puntos distintos en  $\mathbb{R}^2$ . En el plano 3 puntos pueden adoptar las siguientes posiciones:



Damos sus separoides en términos de los subíndices.

- 0-aglomeración de 3 puntos. Ningun punto se separa de ningún otro.  $1 \nmid 2, 2 \nmid 3, 3 \nmid 1$
- Posición general. Cada punto se separa de cualquier pareja restante, y por tanto de cualquier otro.
- 0-aglomeración de 2 puntos. Hay dos que nunca se separan.  $1 \nmid 2, 2 \mid 3, 3 \mid 1$
- 1-aglomeración de tres puntos. El de en medio nunca se separa de la pareja restante, los otros dos sí.  $1 \mid 2, 2 \mid 3, 2 \nmid 13$

El siguiente teorema proporciona un primer nexo entre los separoides y la teoría desarrollada hasta ahora.

**Teorema 2.4.3** Un conjunto de puntos  $C \subset \mathbb{R}^d$  es afinmente independiente si y sólo si todo subconjunto propio de  $C$  se separa de su complemento.

*Demostración.* Sea  $C = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto afinmente independiente y sea  $C' = \{x_1, \dots, x_m\}$  la extensión de  $C$  a una base afin de  $\mathbb{R}^d$ . Sea  $A \subset C$  (no vacío), definimos a  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  como la extensión lineal de:

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in A \\ 0 & \text{si } x_i \in C \setminus A \\ 0 & \text{si } x_i \in C' \setminus C \end{cases}$$

por linealidad  $\varphi^{-1}(0)$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^d$  y que separa a  $A$  de su complemento.

Inversamente, supongamos que todo subconjunto propio  $A \subset C$  es un subconjunto que se separa de  $A^c$  y que  $C$  es afinmente independiente. Entonces  $\langle A \rangle \cap \langle A^c \rangle = \emptyset$  para todo subconjunto de  $C$  por el teorema 2.1.7, lo cual contradice el Teorema de Radon. ■

En términos de separoides si  $P$  es un conjunto de puntos y  $S(P)$  es su separoide asociado,  $P$  genera afinmente  $\mathbb{R}^d$  si y sólo si la cardinalidad del máximo subconjunto de puntos afinmente independientes en él es  $d + 1$ . Por otra parte el Teorema de Radon tiene una versión más fuerte, útil para la caracterización posterior de los espacios de configuraciones.

**Teorema 2.2.3 (Radon Fuerte)** Para todo conjunto de  $d + 2$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  que generan afinmente existen dos subconjuntos disjuntos y únicos tales que sus cascos convexos se intersectan en un único punto en su interior.

*Demostración.* Sean  $x_1, \dots, x_{d+2}$  distintos, por tanto existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2}$ , no todos cero tales que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{d+2} x_{d+2} = 0$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{d+2} = 0$ .

Algunas de las  $\lambda_i$  son positivas y otras negativas. Definimos los siguientes conjuntos



$A = \{i \mid \lambda_i > 0\}$ ,  $B = \{i \mid \lambda_i < 0\}$  y  $C = \{i \mid \lambda_i = 0\}$  entonces
 
$$\sum_{i=1}^{d+2} \lambda_i x_i = \sum_{i \in A} \lambda_i x_i + \sum_{i \in B} \lambda_i x_i + \sum_{i \in C} \lambda_i x_i = 0, \quad \frac{\sum_{i \in A} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{d+2} \lambda_i} = \frac{\sum_{i \in B} \square \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{d+2} \square \lambda_j} = x$$
 $\Rightarrow x$  es una combinación convexa de  $\{x_i \mid i \in B\}$  y  $\{x_i \mid i \in A\}$ , por lo cual

$$x \in \langle C \rangle (\{x_i \mid i \in A\}) \cap \langle C \rangle (\{x_i \mid i \in B\})$$

Para ver que los conjuntos son únicos supongamos sin pérdida de generalidad que  $x_1, \dots, x_{d+1}$  generan afinmente  $\mathbb{R}^d$ , entonces
 
$$x_{d+2} = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i x_i \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i = 1, \text{ y por otra parte } x_{d+2} = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{\square \lambda_i x_i}{\lambda_{d+2}}$$
 $\Rightarrow$  por la unicidad de coordenadas baricéntricas  $\mu_i = \frac{\square \lambda_i}{\lambda_{d+2}}$  entonces los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son únicos. ■



# Capítulo 3

## Espacios de Configuraciones

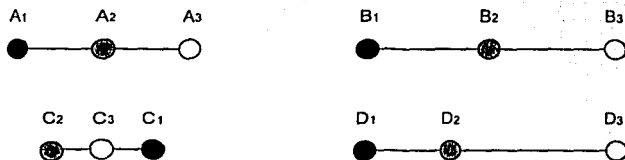
Entramos en materia. En este capítulo ya estudiamos los fundamentos de los espacios de configuraciones y desarrollamos con cuidado algunos de los casos especiales que sirven como introducción a la descripción de  $A_5^2$ .

**Definición 3.0.1** Tomemos un conjunto de  $n$  puntos coloreados u ordenados en  $\mathbb{R}^d$  y supongamos que estos puntos generan afinmente el espacio, llamamos a este conjunto una *configuración*. Decimos que 2 *configuraciones son afinmente equivalentes* si existe una transformación afín  $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que la primera es la imagen de la segunda preservando su coloración (u orden).

Esta asociación es una relación de equivalencia entre las configuraciones de puntos, consecuencia de las propiedades de las transformaciones afines que estudiamos previamente. De este momento en adelante sólo consideraremos transformaciones afines que preserven la coloración.

**Definición 3.0.2** Llamamos *espacio de configuraciones* de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ , al conjunto de todas las configuraciones de  $n$  puntos en dicho espacio, módulo afinidades y lo denotamos  $A_n^d$ .

Por ejemplo consideremos las siguientes configuraciones en la recta donde puntos con el mismo subíndice tienen el mismo color:



Las configuraciones  $A$ ,  $B$  y  $D$  tienen separoide marcado por sus subíndices  $1 \mid 2, 1 \mid 3, 2 \mid 3, 2 \uparrow 13$ , sin embargo la configuración  $C$  tiene separoide  $1 \mid 2, 1 \mid 3, 3 \mid 2, 1 \uparrow 23$  lo cual hace que cualquier transformación afín que mande la configuración  $T(A_1)$  en  $C_1$  y  $T(A_3)$  en  $C_3$  deja al punto  $T(A_2)$  entre  $C_1$  y  $C_3$ , como consecuencia de la preservación de coordenadas bariocéntricas derivada del Teorema 2.2.2 esto implica que  $A$  y  $C$  no pueden ser afinmente equivalentes. Por esto mismo, como las configuraciones  $A$  y  $B$  tienen al punto con subíndice 2 en su punto medio, la imagen bajo cualquier transformación de ellas va a conservar el punto 2 a la mitad, lo cual las hace afinmente equivalentes entre ellas y distintas a la configuración  $D$ .

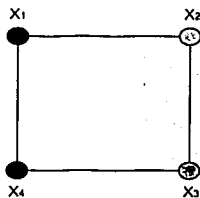
De este ejemplo podemos inferir que dos configuraciones pertenecen a una clase de equivalencia afín distinta si las posiciones relativas de sus puntos con respecto a puntos coloreados de igual forma son distintas, es decir si tienen coordenadas bariocéntricas distintas con respecto a puntos de una base de los mismos colores equivalente bajo una transformación afín.

Ahora estudiaremos algunos ejemplos que serán de utilidad para la descripción de nuestro objeto de interés.

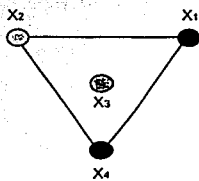
### 3.1 Configuraciones de 4 puntos en el plano $(\mathbb{A}_4^2)$

Consideremos las configuraciones de 4 puntos coloreados distintas en términos de su separoide y en posición general. [10]

### 3.1 CONFIGURACIONES DE 4 PUNTOS EN EL PLANO ( $A_3^2$ )<sup>17</sup>



B



A

- A tiene a la no-separación minimal  $124 \nmid 3$ , entonces de acuerdo con las distintas posiciones relativas que puede guardar el punto interior con la misma terna exterior tenemos el conjunto

$$\{x \mid x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0\} = \Delta^2$$

donde cada punto representa la configuración para la cual el punto interior tiene coordenadas baricéntricas relativas a los tres restantes  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Entonces para cada una de las 4 distintas combinaciones de colores de los puntos en el exterior tenemos asociado un  $\Delta^2$ .

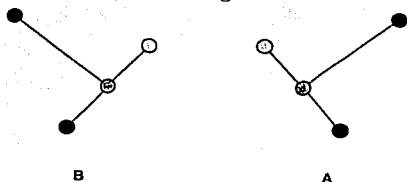
- B este caso tiene no separaciones con subíndices  $13 \nmid 24$ , por el teorema de Radon Fuerte si tomamos las parejas  $\{x_1, x_3\}$  y  $\{x_2, x_4\}$  existen coordenadas únicas  $(\lambda_1, \lambda_3)$  y  $(\lambda_2, \lambda_4)$ , con  $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_2 + \lambda_4 = 1$  y  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_4 \geq 0$  tales que  $\lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3 = \lambda_2 x_2 + \lambda_4 x_4$ , entonces si a cada configuración con intersección  $x = \overline{x_1 x_3} \cap \overline{x_2 x_4}$  le asociamos las coordenadas del punto  $x$   $(\lambda_1, \lambda_3)$ ,  $(\lambda_2, \lambda_4)$ , puesto que

$$\{(\lambda_1, \lambda_3) \mid \lambda_1 + \lambda_3 = 1, \lambda_1, \lambda_3 \geq 0\} = \Delta^1$$

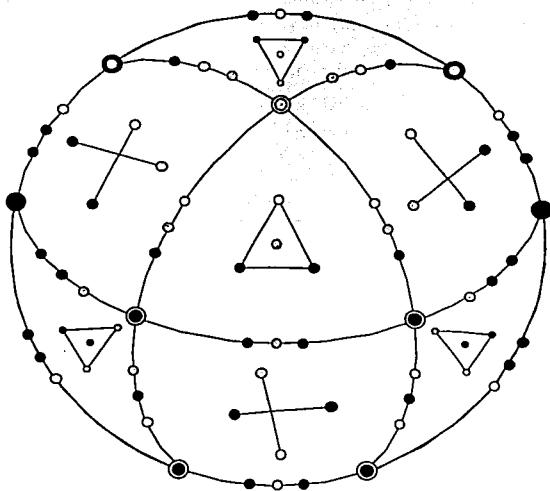
tenemos que cada una de las tres combinaciones distintas de puntos de colores en el cuadrilátero parametrizan  $\Delta^1 \times \Delta^1$ .

Sin embargo esta información no proporciona una descripción completa de  $(A_3^2)$  pues las características que conocemos las hemos obtenido como unidades independientes; para saber su relación estudiamos ahora sus intersecciones.

Si en A y en B tomamos los subconjuntos con  
 $\lambda_1 = 0 \{x \mid x = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0\} = \Delta^1$   
 tenemos los siguientes tipos de configuraciones:



Ambas parametrizan el mismo  $\Delta^1$ , por lo que cada configuración cuadrangular comparte un lado con una configuración triangular e inversamente cada triángulo se intersecta con tres cuadrados en una arista lo que junto resulta el siguiente plano proyectivo:



### 3.2 El caso general $A_{d+2}^d$

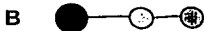
Si  $C$  es una configuración en  $A_{d+2}^d$  por el teorema de Radon Fuerte existen conjuntos disjuntos de puntos  $A$  y  $B \subset C$  tales que  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \{x\}$ .

**Definición 3.2.1** Definimos el *orden parcial de Radon* de rango  $n$  como  $R_n = \{(A, B) \mid A, B \subset C, A \cap B = \emptyset, A \neq B \neq \emptyset\}$  donde  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $\{0, 1, \dots, n\}$  en este conjunto identificamos la pareja  $(A, B)$  con la  $(B, A)$  y lo ordenamos por la relación  $(A', B') \leq (A, B)$  si  $A' \subseteq A$  y  $B' \subseteq B$ . A cada clase de  $R_n$ , le corresponde una única pareja  $(A, B)$  correspondiente a su *no separación de Radon*.

Si  $a = \#A$ ,  $b = \#B$ , entonces se puede ver que cada clase de  $R_n$  con separación de Radon  $(A, B)$  parametriza la celda  $\Delta^{a-1} \times \Delta^{b-1}$ , como en el caso  $A_4^2$  pegamos estas "celdas máximas" por sus intersecciones para formar el objeto correspondiente a  $A_{d+2}^d \setminus \{10\} \setminus \{11\}$

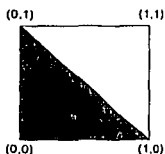
### 3.3 Configuraciones de 4 puntos en la línea $A_4^1$

Dentro del estudio de los espacios de configuraciones este es el primer ejemplo del tipo  $A_{d+3}^d$  y del único que se conoce por completo su combinatoria y geometría. En términos de su separoide de configuraciones existen cuatro tipos generales:

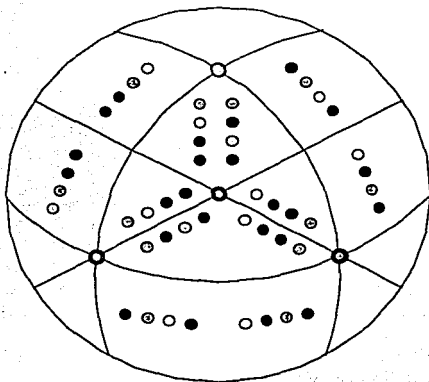


- En el caso **A** cualquier configuración con una 0-aglomeración de 3 puntos y uno libre es equivalente a otra con la misma coloración. Por lo que cada configuración coloreada de este tipo parametriza un sólo punto.
- En el caso **B** como en  $A_4^2$  las distintas configuraciones coloreadas de este tipo parametrizan segmentos.

- El caso **C** es análogo al **A**, salvo que son dos 0-aglomeraciones de 2 puntos.
- El último caso, **D**, es en el que los puntos se encuentran en posición general, y es el único de dimensión dos, contiene dos degeneraciones del tipo **A** y una del tipo **C**. Para ver que objeto parametrizan observamos que si llamamos  $x_1 x_2 x_3 x_4$ , consecutivamente a los puntos  $\bullet \bullet \odot \oplus$  tenemos  $x_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_4 x_4$ ,  $x_3 = \mu_1 x_1 + \mu_4 x_4$  con  $\lambda_1 + \lambda_4 = \mu_1 + \mu_4 = 1$  y  $\lambda_1 \geq \mu_1$ ,  $\lambda_4 \leq \mu_4$  asociándole entonces a cada configuración la pareja  $(\lambda_1, \lambda_4) \times (\mu_1, \mu_4)$  tenemos que el conjunto de estas parejas parametriza la mitad inferior del cuadrilátero:



Poniendo junta esta información para las distintas coloraciones de los tres tipos anteriores de celdas obtenemos:

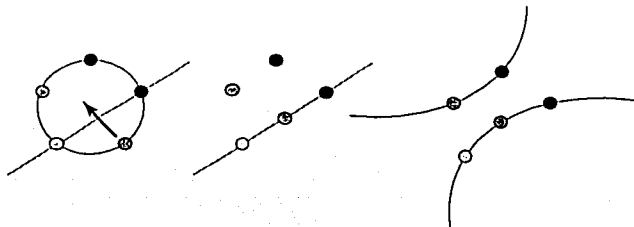




3.4 Cinco puntos en el plano proyectivo ( $\mathbb{P}_5^2$ )

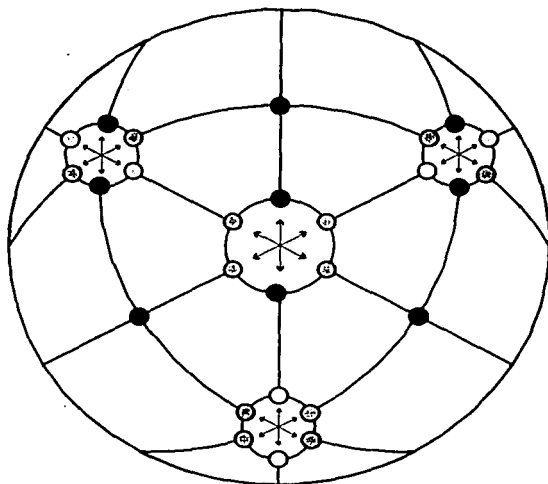
Como se mencionó en la introducción, dentro del estudio de los espacios de configuraciones de puntos llevados a cabo recientemente no sólo se han analizado los casos en el plano afín, y uno de los espacios obvio para ser estudiado por ser "primo" del afín es el proyectivo. Sin introducir teoría procederemos a dar una descripción intuitiva de  $\mathbb{P}_5^2$ , debido a que tiene una asociación directa al caso que nos atañe.[4][9]

Para tener una configuración de puntos en  $\mathbb{P}^2$  necesitamos que estén en posición general y, como en el caso afín, los tomaremos módulo proyectividades, por ello al menos tres puntos deben ser distintos. Entonces podemos pensar que tres de los puntos están fijos y los otros dos moviéndose en  $\mathbb{P}^1$  esto es, tenemos dos grados de libertad lo que implica que lo que generen debe ser de dimensión dos. Por otra parte se sabe que si 5 puntos están en posición general en el plano proyectivo, entonces existe una única cónica que pasa por los cinco.[5] Debido a esto consideramos como celdas maximales a los distintos órdenes cíclicos de 5 puntos. Además como la reflexión es una proyectividad, tenemos 12 distintas celdas de dimensión dos que corresponden a los distintos órdenes cíclicos. Tomemos el orden cíclico [12345] = ● ● ⊕ ○ ⊕ y consideremos el caso cuando el punto 3 se mueve hacia la línea 24 (como se muestra en la figura). La configuración con 2, 3 y 4 alineados es una degeneración de la configuración con [12345] en posición general y también de [14325], por lo cual estas dos configuraciones se pegan por esta celda de dimensión 1.



Cada orden cíclico con todos sus puntos distintos tiene cinco distintas degeneraciones de este tipo, como en el plano proyectivo siempre existe una

transformación entre dos cuartetos distintas de puntos en posición general, tenemos un grado de libertad para el tercero de los puntos alineados esto es, estas celdas son de dimensión uno. Lo que nos lleva a concluir que cada orden cíclico parametriza un pentágono. Por otra parte dos ordenes cíclicos se pegan si difieren por una permutación (en el caso visto  $[12345] = (24)[12345] = [14325] = (15)[12345]$ ). El resultado de pegar esto se dibuja en el plano proyectivo con 4 agujeros que se identifican antipodalmente como sigue:



### 3.5 Grassmannianas

A pesar del poco conocimiento geométrico y combinatorio que tenemos de los espacios de configuraciones, su asociación con las grassmannianas nos aporta un enorme conocimiento de su estructura algebraica y topológica.[1]

**Definición 3.5.1** Una *grassmanniana* es el conjunto de subespacios de dimensión  $k$  de  $\mathbb{R}^d$  la cual denotamos  $G(k, n)$ .

Ya que a cada subespacio  $V$  de dimensión  $k$  le podemos asociar biunivocamente su ortogonal  $V^\perp$ , esta asociación es de hecho un isomorfismo entre  $G(k, n)$  y  $G(n - k, n)$ .

**Teorema 3.5.2**  $\mathbb{A}_{n+1}^d \approx G(n - d, n)$ .

*Demostración.* Sea  $C = \{x_0, \dots, x_n\}$  una configuración en  $\mathbb{A}_{n+1}^d$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x_0$  está en el origen, por que si no podemos trasladar por  $\square x_0$  toda la configuración sin que modifique sus propiedades (casco convexo generado, posición relativa de sus puntos, etc.)

Sea  $F_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  la extensión lineal de  $F_c(e_i) = x_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces definimos  $\Gamma : \mathbb{A}_{n+1}^d \rightarrow G(n - d, n)$  como  $\Gamma(C) = \ker F_c$ ,  $\Gamma$  esta bien definida por la linealidad de  $F_c$ , como  $C$  genera afinmente  $\mathbb{A}_{n+1}^d$ , entonces  $\{x_1, \dots, x_n\}$  generan linealmente  $\mathbb{R}^d$ , por tanto  $F_c$  es suprayectiva  $\Rightarrow \dim(\ker F_c) = n - d$ .

Ahora queremos demostrar que  $\Gamma$  es isomorfismo.

1. P.D.  $\Gamma$  es suprayectiva. Sea  $V \in G(n - d, n)$  y consideremos  $V^\perp$  cuya dimensión es  $d$ , definimos la proyección ortogonal única  $\Pi_V : \mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp \rightarrow V^\perp$  y observamos que puesto que  $\Pi_V$  es suprayectiva el conjunto  $\{0, \Pi_V(e_1), \dots, \Pi_V(e_n)\}$  genera  $V^\perp$ , por lo cual es una configuración. Ahora sea  $T : V^\perp \rightarrow \mathbb{R}^d$ , cualquier isomorfismo lineal entre estos dos espacios. De manera que la imagen bajo  $T$  de cualquier configuración en  $V^\perp$ , será una configuración en  $\mathbb{R}^d$ .

Afirmación: si  $\{0, T(\Pi_V(e_1)), \dots, T(\Pi_V(e_n))\} = C_V$  entonces  $\Gamma(C_V) = V$ , pero por definición  $(C_V) = \ker F_{C_V}$  con  $F_{C_V}(e_i) = T(\Pi(e_i))$ ,  $\Rightarrow \ker F_{C_V} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \Pi_V(u) = 0\} = V$ .  $\Gamma$  es suprayectiva.

2. P.D.  $\Gamma$  es inyectiva. Sean  $C = \{x_0, \dots, x_n\}$  y  $C' = \{x'_0, \dots, x'_n\}$  dos configuraciones en  $\mathbb{A}_{n+1}^d$ , tales que  $\Gamma(C) = \Gamma(C')$  sin pérdida de generalidad podemos tomar  $x_0 = 0 = x'_0$  y considerar que los primeros  $d$  puntos de ambas configuraciones son una base lineal de  $\mathbb{R}^d$ . Sea  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una transformación afín tal que  $g(x_i) = x'_i$  para todo  $i = 1, \dots, d$ , lo que falta ver es que  $g(x_j) = x'_j$  con  $j \geq d + 1$ .

Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  tales que  $x_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i$  para algún  $j \geq d+1$  por la definición de  $F_e, F_c(e_j) = \sum_{i=1}^d \lambda_i F_c(e_i)$ , entonces  $F_c(e_j) \square \sum_{i=1}^d \lambda_i F_c(e_i) = 0$  de donde  $F_c\left(e_j \square \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i\right) = 0$  lo que implica que  $e_j \square \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \in \ker F_c = \Gamma(C) = \Gamma(C') = \ker F_{c'} \Rightarrow F_{c'}(e_j) \square \sum_{i=1}^d \lambda_i F_{c'}(e_i) = 0$  y  $x'_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i x'_i = \sum_{i=1}^d \lambda_i g(x_i) = g\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right) = g(x_j)$ . Entonces  $C$  y  $C'$  están en la misma clase de equivalencia afín, por lo que  $\Gamma$  es inyectiva. ■

Del teorema anterior y las propiedades de las grassmannianas se sigue que  $\mathbb{A}_{n+1}^{n \square d} \approx G(d, n) \approx G(n \square d, n) \approx \mathbb{A}_{n+1}^d$  resultado que habla de una importante dualidad entre estos espacios.

Sin embargo como ya habíamos mencionado el propósito de esta tesis es estudiar más a fondo las propiedades combinatorias y geométricas de los espacios de configuraciones, para ello tomamos uno de los ejemplos más pequeños del caso  $\mathbb{A}_{d+3}^d$ , puesto que en estos capítulos previos se ha desarrollado con cuidado la herramienta necesaria para hacer demostraciones rigurosas en respecto a la geometría de los espacios de configuraciones, el desarrollo de la descripción de  $\mathbb{A}_3^2$  será más informal, sobre todo con el fin de no agotar la atención en la notación y por que de hacerlo detenidamente llenaría más espacio del disponible.

## Capítulo 4

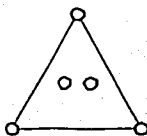
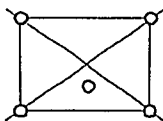
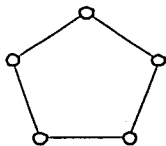
### Cinco Puntos en el Plano

Finalmente, en este capítulo, estudiamos el objeto combinatorio que nos interesa  $A_5^2$  es decir, el espacio de configuraciones de 5 puntos que generan al plano afín, de este objeto sabemos por el *Teorema 3.5.2* que es isomorfo a la grassmaniana de planos en  $\mathbb{R}^4$ , como consecuencia de ello es de dimensión 4. Pero el objeto de esta tesis, como ya habíamos mencionado es dar una descripción tanto combinatoria[11] como geométrica más detallada de él; para lo anterior daremos saltos entre lo combinatorio y lo geométrico a través de su orden parcial. Empezamos por las celdas de dimensión más alta.

#### 4.1 Celdas de dimensión 4

##### 4.1.1 ¿Cómo se pintan 5 puntos en el plano?

Anteriormente ya habíamos hablado de pintar una colección de puntos en el plano, y llegado a la conclusión de que para nuestros propósitos nos son suficientes las 5-adas de puntos que se encuentran en posición general, de manera que tenemos las tres siguientes configuraciones distintas:

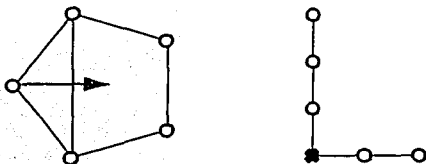


Ahora, al dar nombres (en este caso colores) a cada uno de los 5 puntos podemos tener distintas configuraciones del mismo tipo. De la configuración con casco convexo pentagonal, la cual llamamos *Tipo 0*, dependiendo del orden cíclico no-orientado de la coloración que demos a este arreglo, tenemos 12 distintas. Análogamente de *Tipo 1* tenemos 60 coloraciones distintas dependiendo del color del punto que queda dentro del casco convexo, el orden cíclico del cuadrado exterior y el "cuadrante" en el que se encuentra dicho punto. De *Tipo 2* también tenemos 60 distintas opciones correspondientes a las distintas formas en que se pueden poner un par de puntos de manera paralela a los lados del triángulo exterior. Haciendo cuentas descubrimos que hay un total de 132 celdas de dimensión 4 a considerar.

Ya que sabemos cuántas son pasemos a ver cómo son, enfocandonos en el análisis de sus celdas de dimensión tres subyacentes, pero para esto primero necesitamos saber cuáles son estas celdas.

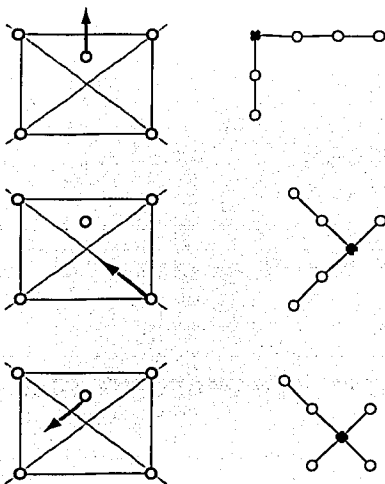
#### 4.1.2 Tipo 0

Esta celda tiene una degeneración general a una celda de dimensión 3 consistente en alinear uno de los puntos del casco convexo con sus adyacentes. Llamamos a esta nueva celda *tipo L*.



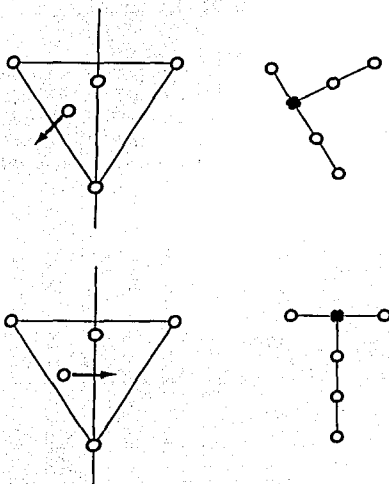
## 4.1.3 Tipo 1

Existen tres diferentes degeneraciones de este tipo de celda, dos corresponden a las dos distintas formas de alinear el punto interior al cuadrado con pares de puntos en la frontera sin cambiar de "cuadrante", (una de ellas es la ya conocida celda *tipo L*) a la otra la llamamos *tipo X*. La tercera degeneración corresponde a que el casco convexo se haga triangular y la llamamos *tipo Y*.



## 4.1.4 Tipo 2

De este tipo de celda de dimensión cuatro hay dos degeneraciones en celdas de dimensión 3 conforme a las opciones para alinear 1 punto con el segmento interior al triángulo. La primera es la ya conocida *tipo Y* y a la segunda la llamamos *tipo T*.



## 4.2 Celdas de dimensión 3 (Combinatoria)

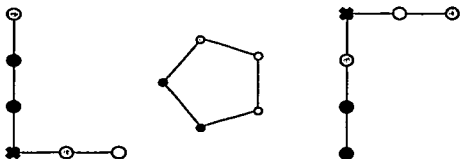
Como vimos en la sección precedente tenemos 4 tipos de celdas de dimensión 3 ( $L, X, Y$  y  $T$ ) cuya característica común es tener una sola alineación de tres puntos, éstas tienen sus degeneraciones respectivas, las cuales trasladadas a la geometría y pegadas resultan el objeto geométrico al que están asociadas.

Entonces, si las anteriores celdas fueron originadas ocasionando una sola degeneración, podemos seguir de la misma forma moviendo los puntos de las configuraciones hasta ocasionar un acomodo con nuevas alineaciones o aglomeraciones de puntos, las alineaciones se pueden hacer de dos formas: ya sea alineando 4 puntos o causando dos alineaciones de 3 puntos.

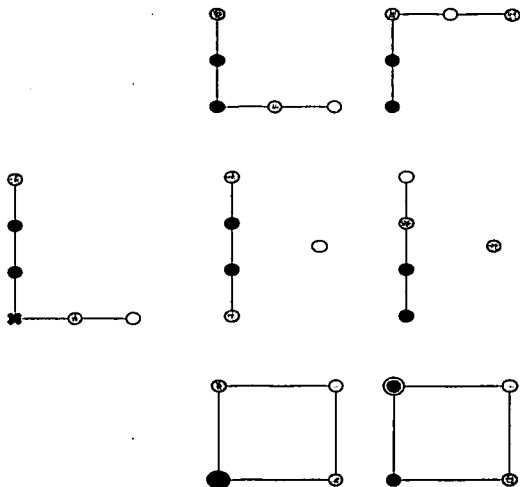


## 4.2.1 tipo L

Cabe mencionar que esta notación es un poco ambigua porque según la definición los siguientes arreglos son iguales, sin embargo puesto que uno se puede deformar en el otro sin cambiar de celda de dimensión tres, es decir están en la misma clase de equivalencia, los consideramos el mismo.



Tenemos seis degeneraciones de esta celda de acuerdo con las posibilidades anteriores.

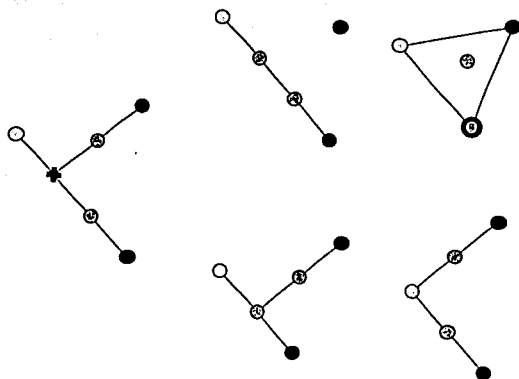


- Dos 1-aglomeraciones dobles de tres puntos. Cada una de ellas representa un cuadrilátero ( $\Delta^1 \times \Delta^1$ ), debido a que en la construcción de  ${}_0A_4^2$  vimos que la 1-aglomeración de 3 puntos representa un segmento ( $\Delta^1$ ).
- Dos 1-aglomeraciones de 4 puntos. La 1-aglomeración de 4 puntos parametriza un triángulo ( $\Delta^2$ ) como se vió en la sección 3.3.
- Dos 0-aglomeraciones de 2 puntos que, como vimos en la construcción de  ${}_0A_4^2$ , representan un cuadrilátero.

#### 4.2.2 tipo Y

En este caso hay cuatro distintas degeneraciones; dos 1-aglomeraciones dobles de tres puntos, una 1-aglomeración de cuatro puntos y una 0-aglomeración de dos puntos.

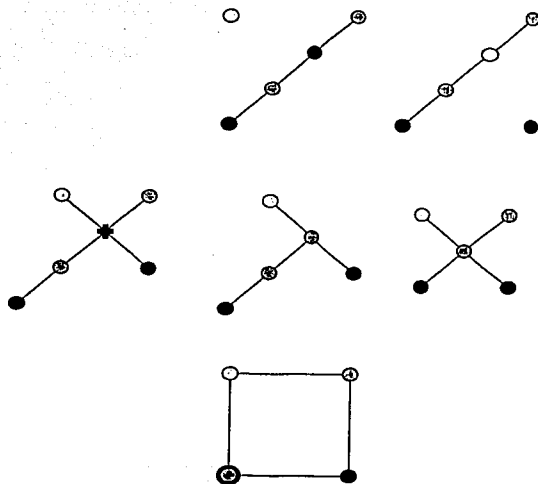
- La 1-aglomeración de cuatro puntos,  $\Delta^2$ .
- La 0-aglomeración de 2 puntos de este caso, como vimos en la construcción de  ${}_0A_4^2$ , parametriza un triángulo ( $\Delta^2$ ).
- Cada una de las 1-aglomeraciones de tres puntos de estas celdas parametrizan un segmento ( $\Delta^1$ ), de manera que para cada una de las 1-aglomeraciones dobles de tres puntos tenemos un cuadrilátero ( $\Delta^1 \times \Delta^1$ ).



### 4.2.3 tipo X

Para este tipo sus celdas de dimensión dos son: dos 1-aglomeraciones dobles de tres puntos, dos 1-aglomeraciones de cuatro puntos y una 0-aglomeración de dos puntos.

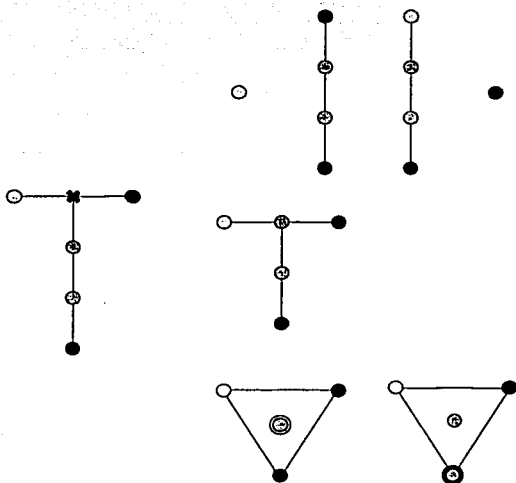
- Las 1-aglomeraciones de cuatro puntos parametrizan triángulos ( $\Delta^2$ ).
- Como en el caso anterior las 1-aglomeraciones dobles de tres puntos parametrizan cuadriláteros ( $\Delta^1 \times \Delta^1$ ).
- La 0-aglomeración de 2 puntos de este caso representa un cuadrilátero ( $\Delta^1 \times \Delta^1$ ).



#### 4.2.4 tipo T

Y por último, la celda tipo T tiene las siguientes degeneraciones: dos 1-aglomeraciones de cuatro puntos, una 1-aglomeración doble de tres puntos y dos 0-aglomeraciones de dos puntos.

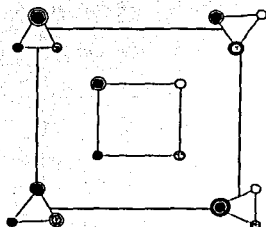
- Las dos 1-aglomeraciones de 4 puntos son  $\Delta^2$ .
- La 1-aglomeración doble de tres puntos es  $\Delta^1$ .
- Y las dos 0-aglomeraciones de 2 puntos son  $\Delta^2$ .



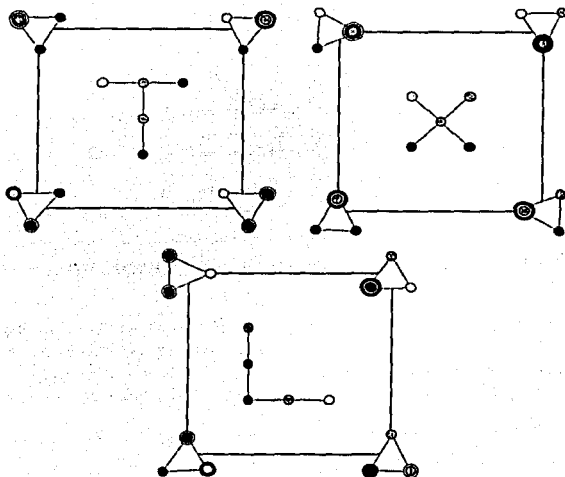
### 4.3 Celdas de dimensión 3 (Geometría)

Para saber a qué objetos geométricos de dimensión tres corresponden las celdas tipo L, Y, X y T, procedemos a pegarlas de regreso. ¿Cómo lo hacemos? es una pregunta con varias respuestas, pero nosotros hemos preferido usar como gufas de pegado los vértices de cada una de las celdas. Vamos por partes.

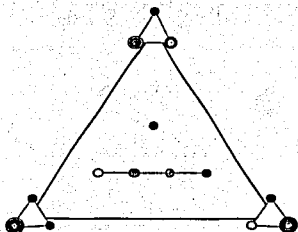
- Para la 0-aglomeración con casco convexo cuadrangular tenemos el cuadrado etiquetado:



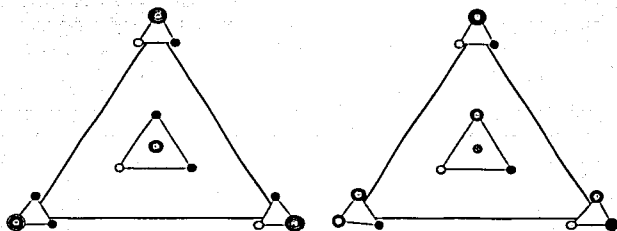
□ Para los tres distintos tipos de 1-aglomeraciones dobles de tres puntos tenemos las siguientes listas de vértices, junto con su correspondiente geométrico.



□ El único tipo de 1-aglomeración de cuatro puntos tiene los siguientes vértices, que asociándolos a la geometría resultan en:

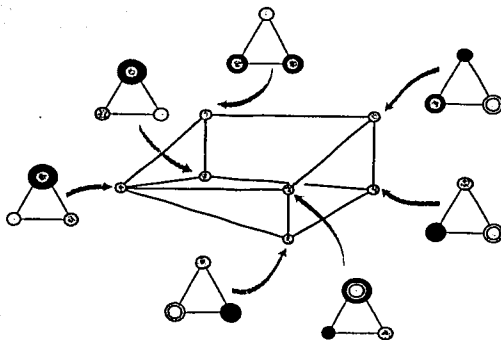


□ Finalmente, para los dos tipos generales de 0-aglomeraciones de dos puntos con casco convexo triangular, tenemos los triángulos etiquetados:

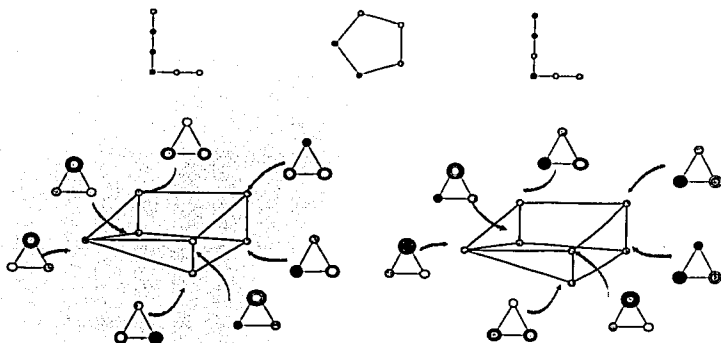


Armando el rompecabezas obtenemos para cada celda de dimensión tres distintos poliedros etiquetados:

## 4.3.1 Geometría de la celda tipo L

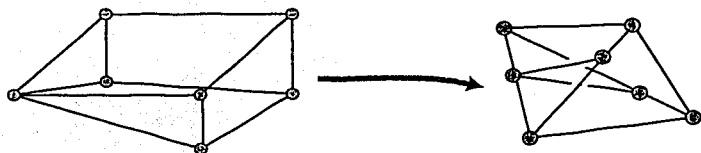


Una observación importante respecto a la geometría de este tipo de celdas es derivada de que al aglomerar dos de ellas correspondientes a la misma celda Tipo 0 se pegan en dos caras, como se puede observar en el siguiente esquema, donde las áreas sombreadas corresponden a caras compartidas.



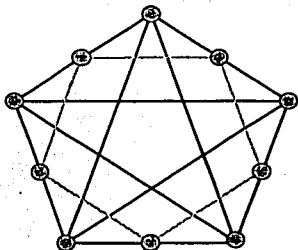


De forma que cada uno de estos cubos truncados en realidad juega como un tetraedro ( $\Delta^2$ ) con tres vértices falsos junto con las dos aristas entre ellos.



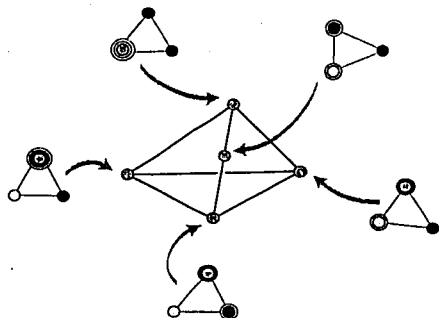
### Geometría de la celda Tipo 0

Al proceder con el pegado de las celdas tipo L de manera consecutiva (aplicando sucesivamente el orden cíclico correspondiente a la coloración) obtenemos un  $\Delta^4$  con 5 vértices extra y el ciclo entre ellos (resultado del pegado de 5  $\Delta^3$ ), que es el objeto asociado a la celda Tipo 0.



### 4.3.2 Geometría de la celda tipo Y

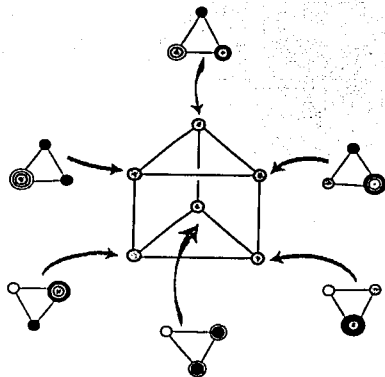
Análogamente tomamos las caras de dimensión dos correspondientes a la celda tipo Y, que pegadas son:



Aquí cabe mencionar que este objeto no es un complejo poliedral, pues dos de sus caras no son polítopos, pero por lo pronto lo dibujaremos convexo, lo cual nos obliga a alinear 3 de sus puntos.

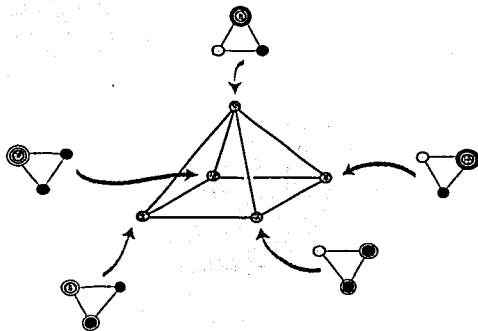
### 4.3.3 Geometría de la celda tipo X

Al pegar las 5 caras pertenecientes a la celda de tipo X tenemos:



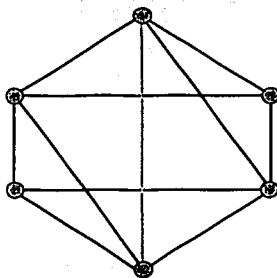
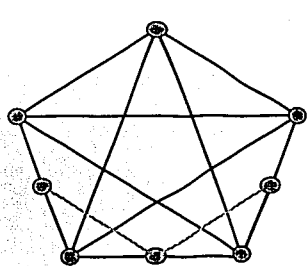
## 4.3.4 Geometría de la celda tipo T

Finalmente, el objeto geométrico asociado a la celda tipo T, de acuerdo con sus caras de dimensión 2 es:



## Geometría de las celdas Tipo 1 y 2.

Al pegar las celdas correspondientes, para obtener los objetos geométricos asociados a las celdas de dimensión 4 de Tipos 1 y 2 obtenemos:

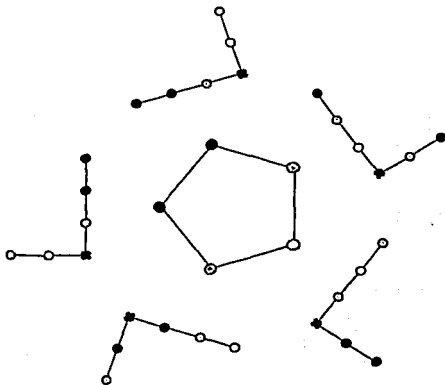


En el primer caso la celda Tipo 1 está asociada nuevamente a un  $\Delta^5$ , pero esta vez el simplejo solo tiene 3 vértices extra y la "trayectoria entre ellos", sin embargo la segunda al estar formada por cosas que no son complejos poliedrales, no es un complejo poliedral. En la figura ésta última tiene la arista verde en su interior.

#### 4.4 Nueces

Hasta ahora hemos hablado de las celdas 0, 1, y 2, como unidades separadas, sin embargo, como es de suponerse hay muchas relaciones entre ellas, empezaremos por las más manejables que son sus caras comunes de dimensión 3. En el análisis particular de cada una de estas celdas ya nos hemos podido percatar de ciertas afinidades por ejemplo, entre las celdas Tipos 0 y 1 hay celdas tipo L comunes, y entre las celdas Tipo 1 y 2 hay celdas tipo Y, veamos cómo nos ayudan a la descripción estas relaciones.

1. Tomemos la celda Tipo 0 con el orden cíclico [12345]=  $\bullet \bullet \textcircled{2} \circ \textcircled{5}$ , sus celdas tipo L como son



cada una de estas también corresponde de forma única a una celda Tipo 1. Esta correspondencia es fácilmente observada en la "película" de

transformación de la configuración Tipo 0 a la Tipo 1, de ella podemos inferir que los ordenes cíclicos de los puntos en el casco convexo de las celdas Tipo 1 asociadas una celda Tipo 0 son todos distintos, es decir cada celda Tipo 0 esta asociada de forma biunívoca con 5 celdas Tipo 1.

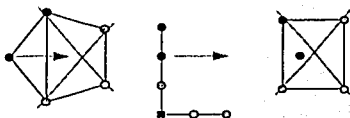


Figura 4.1

Aplicando sucesivamente la permutación (12345) a esta información dibujamos el siguiente esquema:

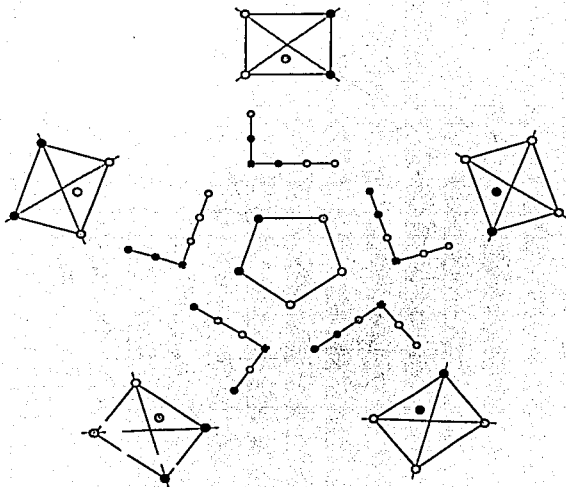
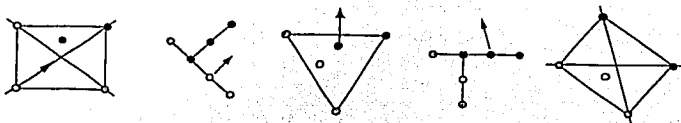


Figura 4.2

2. Considerando una celda Tipo 1 y una de sus celdas tipo Y, que a su vez se asocia con una celda Tipo 2, la cual tiene una segunda celda tipo Y que tiene asociada una celda Tipo 1, de manera que si aplicamos sucesivamente la permutación (12345) sobre la unión de las celdas mostradas a continuación,



obtenemos un "ciclo" con 5 unidades de este tipo, que nos permite completar la *figura 4.2* así:

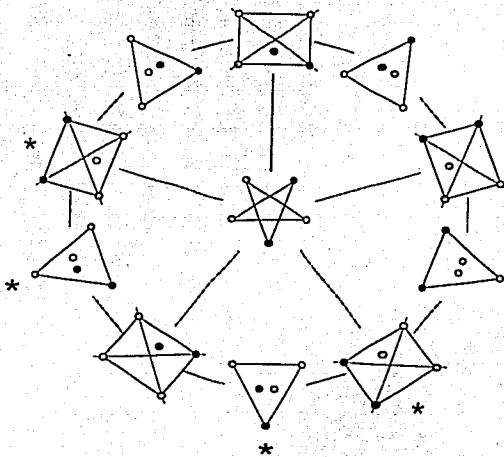


Figura 4.3

Donde el orden cíclico de la celda Tipo 0 asociada está ahora determinado por la gráfica (no por el orden "convexo"). Como antes, degenerar la celda Tipo 0 a una Tipo 2 es igual a empujar 2 puntos de la siguiente forma:

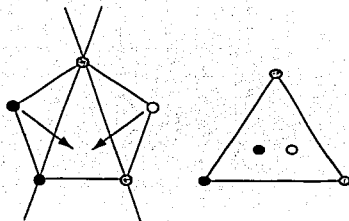


Figura 4.4

Entonces las celdas Tipo 2 asociadas a este orden cíclico siempre tienen una triada distinta en el exterior.

A esta estructura cuyo *corazón* es una celda Tipo 0, y cuya cáscara es la unión consecutiva de 10 celdas de Tipo 1 y 2 le llamamos *nuez*. Puesto que una nuez está completamente determinada por el orden cíclico de su corazón, el problema de analizar la estructura de 132 celdas de dimensión 4 independientes se reduce a estudiar 12 nueces equivalentes.

## 4.5 Geometría de la frontera de la nuez.

Una vez que hemos agrupado 11 celdas combinatoriamente queremos ver a qué objeto geométrico están asociadas como nuez. Ya sabemos que el corazón de la nuez es un  $\Delta^4$ , pero lo que necesitamos es la geometría de lo que está "alrededor" del corazón, a esto es a lo que llamamos la *frontera*. La primera simplificación de esta descripción consiste en descartar las caras de dimensión tres que ya han sido pegadas dentro de la nuez, esto es, las tipo Y y L, al hacer esto nos quedan 5 celdas tipo X y 5 celdas tipo T. Para estudiarlas nos es suficiente considerar un fragmento de la forma (Tipo 1)-(tipo Y)-(Tipo 2)-(Tipo 2)-(tipo Y)-(Tipo 1) (marcado con asteriscos en la *figura 4.3*) como sigue:

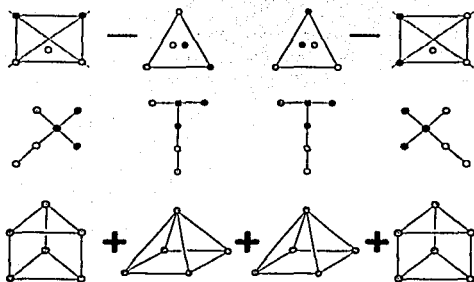


Figura 4.5

Al pegar estas celdas por todas sus caras de dimensión 2 comunes, obtenemos la 3-bola que llamamos *diamante*. Este diamante tiene como exterior a las dos siguientes mitades de una esfera cuya forterera se identifica por traslación, más cuatro caras interiores (por donde se pegó) que no se muestran en el dibujo.

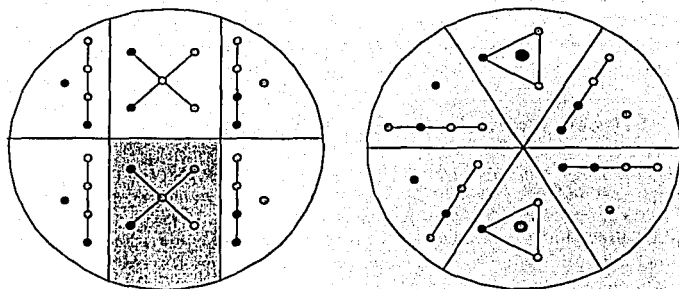
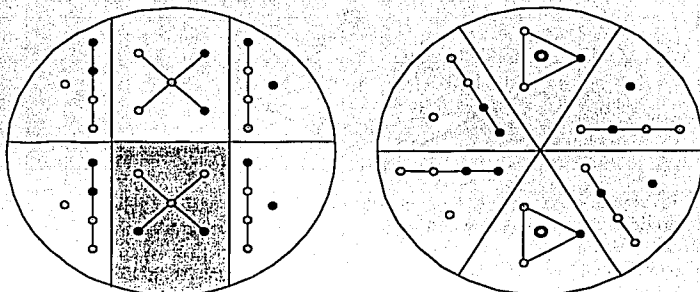


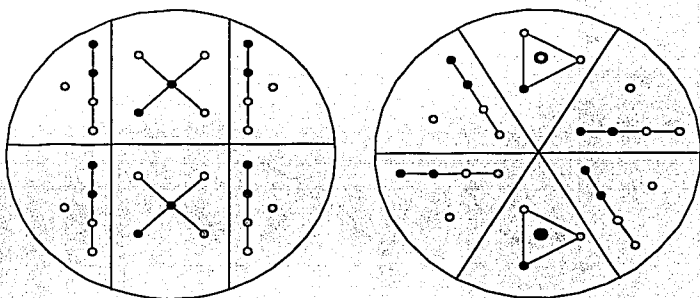
Figura 4.6

Al aplicar una vez la permutación (12345) obtenemos el diamante:



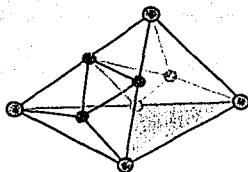


cuya parte sombreada es igual a la cara sombreada del mismo color del diamante anterior. Ahora aplicamos  $(12345)^2$ , para obtener un diamante con 5 caras iguales a las del diamante de la *figura 4.6*.



Por simetría se puede ver que el pegado del diamante al resultante de aplicar la permutación  $(12345)^{-1}$  es como el primero y, el resultante de aplicar  $(12345)^{-2}$  es como el segundo.

Tomando en cuenta los pegados resulta que se puede pensar al diamante como el siguiente simplejo falso, donde las caras sombreadas corresponden a la frontera del mismo diamante de la *figura 4.6*:



Entonces si cada uno de los cinco diamantes resultantes es representado por uno de estos simplejos, y cada uno se pega a otro en exactamente 1 cara, la nuez resulta ser nuevamente un  $\Delta^4$ , con vértices, aristas y caras extra.

Cada uno de los diamantes de nueve vértices tiene siete 0-aglomeraciones de tres puntos, de los cuales 3 juegan como vértices falsos y cuatro más como generadores del simplejo, como se muestra en la siguiente figura.

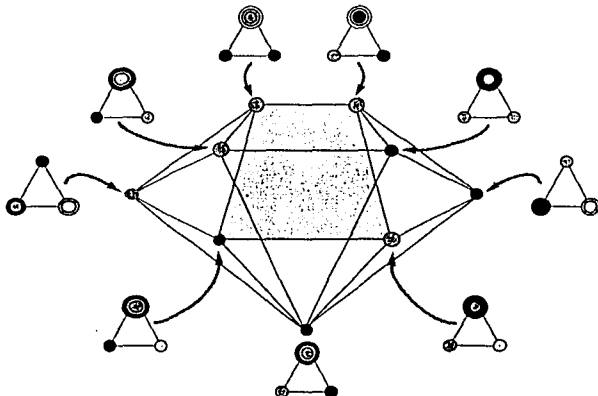


Figura 4.7

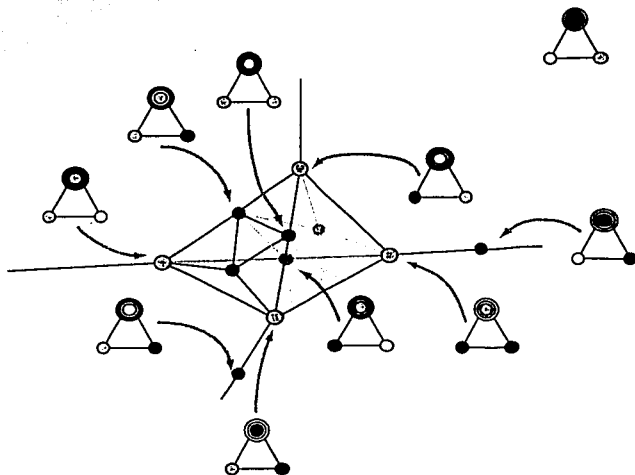
Pero no hay una razón combinatoria para esta distinción, lo que sucede es que esta estructura simplicial es artificial y depende de la nuez en la que estamos. Es decir al cambiar de nuez el papel falso o verdadero que juegan las 0-aglomeraciones de tres puntos también varía. Por ejemplo en la nuez

#### 4.5 GEOMETRÍA DE LA FRONTERA DE LA NUEZ.

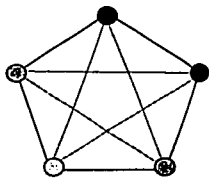
47

con corazón con orden cíclico  
tres puntos se posicionan así:

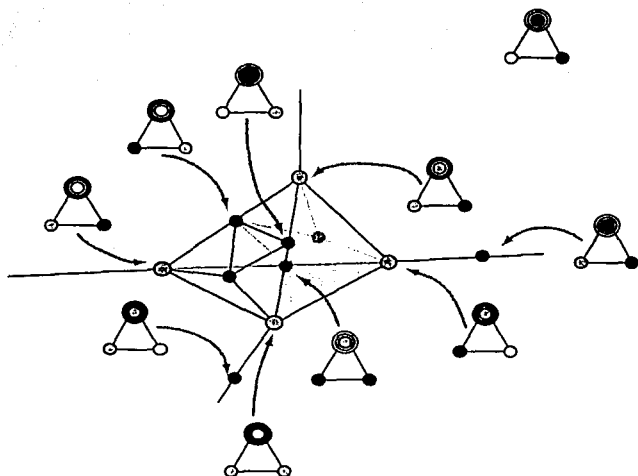
● ● ⊕ ○ ⊖ las 0-aglomeraciones de



Donde sus vértices no-falsos corresponden a las distintas 0-aglomeraciones posibles tomando tres puntos del ciclo negro conectados por aristas negras en la figura y los falsos corresponden a tomar puntos conectados por aristas grises.



Sin embargo para la nuez con corazón ● ⊕ ⊖ ● ○ tenemos el siguiente esquema para el cual los papeles de los vértices se invierten:



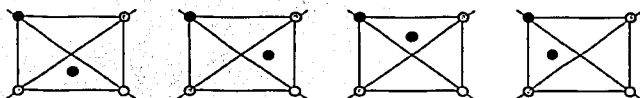
## 4.6 Las celdas de dimensión 3 restantes.

Una vez que el problema geométrico está resuelto para las nueces necesitamos una guía para pegarlas de manera que podamos terminar la descripción. En este punto no nos queda más que volver atrás a descubrir las relaciones entre las piezas que dejamos sueltas, que son las que tienen que ver con la frontera de la nuez: las celdas tipo X y tipo T. Como en todo lo anterior la respuesta es simple: se pegarán las que tienen el mismo orden cíclico en el exterior.

### 4.6.1 Collar de a 4.

Para las celdas Tipo 1 tener el mismo orden cíclico en el exterior digamos  $[2345] = \bullet \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$  y ser distintas significa que el punto interior se encuentra en distintos cuadrantes, pero sólo hay cuatro maneras de colocar este punto obtenidas aplicando a la configuración inicial la permutación  $(2345)$ ,

de manera que tenemos una concatenación por celdas de Tipo X de cuatro celdas de dimensión tres. A esta concatenación es a lo que llamamos *collar de a 4* y lo ilustramos en la figura siguiente:



Además sabemos que el paso de la celda Tipo 1 a Tipo 0 es empujar el punto interior al cuadrado por la arista exterior del cuadrante donde se encuentra (como en la *figura 4.1*), de manera que este collar pega las nueces con corazones con ordenes cíclicos [12345], [21345], [23145] y [23415]. Equivalentemente puesto que  $(2345)[12345] = (12)[12345]$ ,  $(2345)^2[12345] = (12)(13)[12345]$ ,  $(2345)^3[12345] = (12)(13)(14)[12345]$  y  $(2345)^4[12345] = (12)(13)(14)(15)[12345]$  podemos obtener estos ciclos aplicando consecutivamente a [12345] las permutaciones (12), (13), (14), (15). Hay 15 collares de Tipo 1. Si a cada nuez le asociamos la cara del dodecaedro hiperbólico con vértices coloreados de la misma forma que el orden cíclico de su nuez, un collar de a 4 toma las celdas marcadas en el dibujo de la página siguiente.

De forma que los collares de a 4 corresponden a los vértices del dodecaedro hiperbólico, en este caso el vértice 1, debido a las permutaciones que se tienen que aplicar.

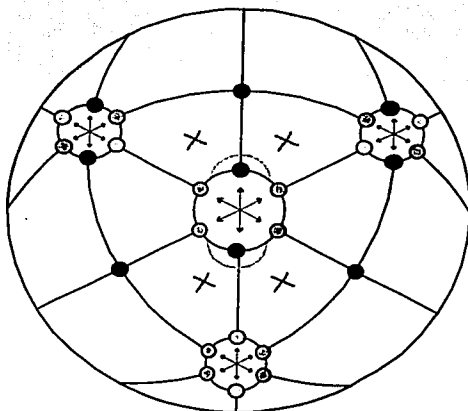
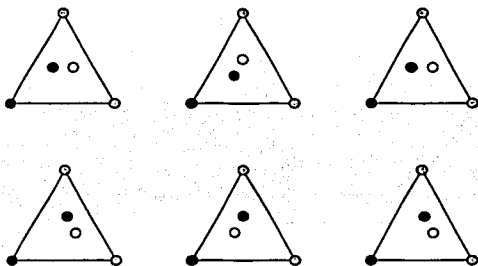


Figura 4.1:

## 4.6.2 Collar de a 6.

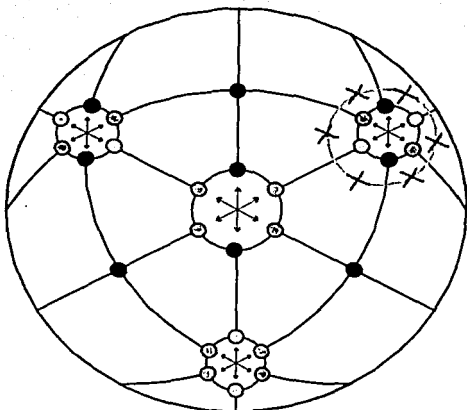
En el caso de las celdas Tipo 2, la relación arroja 6 distintas celdas de dimensión tres con el mismo orden cíclico exterior, dependiendo del lado y la orientación con la que el segmento formado por los dos puntos interiores es "paralelo" a uno de los lados.



Para obtenerlos aplicamos las distintas combinaciones de potencias del tri-ciclo (134) con la permutación (25), en el orden siguiente: (134)(25), (134)<sup>2</sup>(25), (134), (134)<sup>2</sup>(25). Si "jalamos" los puntos interiores del primero como en la *figura 4.4* para obtener el corazón de la nuez en la cual se encuentra este Tipo 2 obtenemos el ciclo (12345), a éste le podemos aplicar las operaciones anteriores para obtener las nueces que se pegan en este collar

$$\begin{aligned} (134)(25)[12345] &= (23)[12345], & (134)^2[12345] &= (23)(15)[12345] \\ (25)(12345)[12345] &= (23)(15)(24)[12345], \\ (134)[12345] &= (23)(15)(24)(53)[12345] \\ \text{y } (134)^2(25)[12345] &= (23)(15)(24)(53)(12)[12345]. \end{aligned}$$

Hay 10 *collares de a 4*. Haciendo la misma asociación al dodecaedro hiperbólico, tenemos las celdas marcadas:

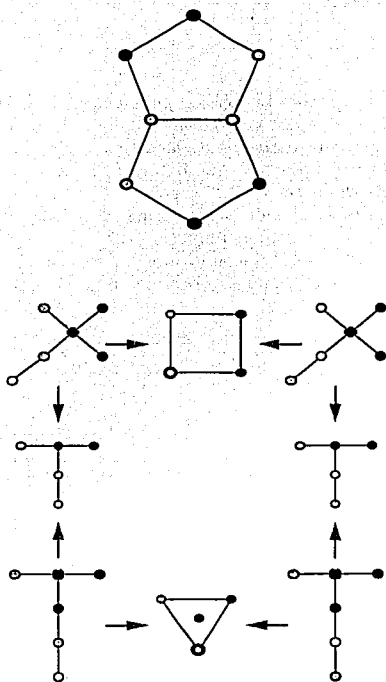


Así que si pegamos los corazones de las nueces según los distintos collares en los que se encuentran por medio de las aristas con las permutaciones adecuadas obtenemos el dodecaedro hipérbolico con vértices coloreados que está asociado a  $\mathbb{P}_5^2$ . En él los pentágonos cuyos lados están en una misma línea, están en un mismo collar de a 4, y los 4 pentágonos que comparten un mismo vértice, están en un collar de a 6.

#### 4.7 Intersección de las nueces.

Para que este resulte un instructivo adecuado de pegado necesitamos conocer las características de la intersección de 2 nueces, para ello tenemos que ver si las 2 celdas tipo X y las celdas tipo T que comparten 2 nueces se intersectan en caras. Si tomamos las nueces adyacentes con coloraciones cíclicas  $\bullet \bullet \odot \circ \oplus$  y  $\bullet \bullet \oplus \oplus \circ$  tienen 4 celdas de dimensión tres comunes, pegadas entre si como sigue:

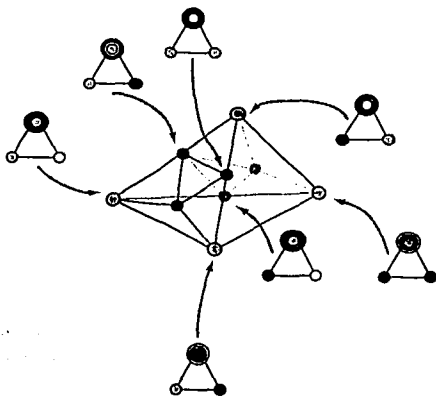


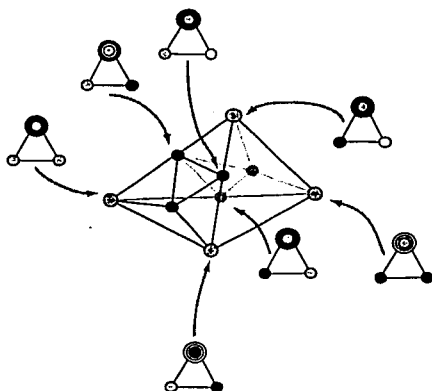


A partir de ello sabemos que la intersección es conexa, además las 4 celdas de dimensión tres tienen una arista en común, lo cual elimina la posibilidad de que haya hoyos en la intersección. Pero este pegado ya lo habíamos estudiado en la sección 4.4 (*figura 4.5*), resulta un  $\Delta^3$  falso.

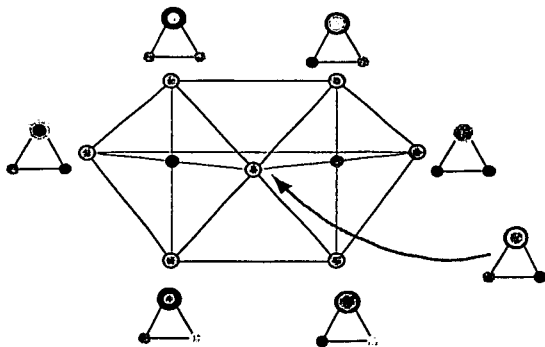
## 4.8 Conclusión

De la estructura geométrica de las nueces podemos decir que internamente la frontera de una nuez es un  $\Delta^4$  con subdivisiones adicionales en sus caras, formado por cinco tetraedros correspondientes a sus intersecciones con otras nueces (Sección 4.5). Sin embargo la estructura tetraédrica de una de estas intersecciones depende de la nuez de referencia es decir, no podemos afirmar formalmente que las intersecciones tengan estructura de tetraedro globalmente. Por ejemplo las nueces con ordenes cíclicos [12345] = ● ● ⊗ ○ ⊗ y [12354] = ● ● ⊗ ⊗ ○ tienen la intersección de la figura 4.7, pero su estructura es distinta como se puede observar en las siguientes figuras:





En estos tetraedros los vértices  $2 = 3 = 4$  y  $1 = 4 = 5$  intercambian papel con  $1 = 2 = 4$  y  $2 = 3 = 5$ . Por ello representamos este tetraedro falso como el siguiente poliedro con 4 caras cuadrangulares y dos triangulares, que llamamos *hexadrita*, donde los vértices verdes y sus aristas incidentes están en la misma cara pues en la intersección siempre se pegan juntas.



De manera que el politopo de dimensión 4 asociado a cada nuez con orden cíclico fijo, el cual llamamos *pentóide* está formado por 5 hexadritas.

Lo que podemos decir de la estructura combinatoria de la grasmaniana de planos en  $\mathbb{R}^4$  es que tiene una subdivisión natural en 12 pentóides de dimensión 4 correspondientes a los distintos órdenes cíclicos de 5 elementos, que se intersectan en un hexadrita si sus órdenes cíclicos difieren por una transposición. Es importante recalcar que en esta descomposición no se pueden reducir los hexadritas a tetraedros y los pentóides a pentaedros por el papel cambiante que juegan los vértices en nueces distintas.

## Bibliografía

- [1] Javier Bracho, Luis Montejano y Deborah Oliveros. *The Topology of the space of transversals through the space of configurations*. Topology and Appl. 120, 93-103 (2002).
- [2] Jorge Arocha, Javier Bracho, Luis Montejano, Deborah Oliveros y Ricardo Strausz. *Separoids, their categories and a Hadwiger type theorem for transversals*. Discrete Comput. Geom. 27, 387-393 (2002).
- [3] Javier Bracho y Ricardo Strausz. *Separoids and a characterization of linear uniform oriented matroids*. Preimpresión.
- [4] Jorge Arocha, Javier Bracho y Luis Montejano. *On configurations of flats I: Manifolds of points in the projective line*. Preimpresión.
- [5] H.S.M. Coxeter. *Projective geometry, 2nd edition*. Springer-Verlag (1974).
- [6] Peter McMullen y Egon Schulte. *Abstract Regular Polytopes*. Cambridge University Press (2002).
- [7] Patrick J. Ryan. *Euclidean and non-euclidean geometry, an analytical approach*. Cambridge University Press (1986).
- [8] Roger Webster. *Convexity*. Oxford Science Publications (1994).
- [9] Isabel A. Hubard Escalera. *Poliedros coloreados con órdenes cíclicos*. Tesis de Licenciatura, Fac. Ciencias, UNAM (2001).
- [10] Madinina Mauvois Romero. *Espacios de configuraciones*. Tesis de Licenciatura, Fac. Ciencias, UNAM (2001).

- [11] **Ricardo Strausz Santiago.** *Separoides: el complejo de Radon.* Tesis de Maestría, Fac. Ciencias, UNAM (2001).