41132
38

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES CAMPUS ARAGON

"CREACION DE UN MODELO DE EDUCACION A DISTANCIA CON LA AYUDA DE UN ANALISIS PEDAGOGICO INFORMATICO, APLICADO AL DESARROLLO DE ESTUDIANTES E INVESTIGADORES DE LA MAESTRA EN ECONOMIA DE LA ENEP ARAGON"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO EN COMPUTACION

P R E S E N T A :

EDGAR EFREN LOPEZ TORRES
ENRIQUE LUCENA MONZON

ASESOR:
LIC. ESTEBAN LOBATO HERRERA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MEXICO 2003

1

Índice

Introducción 4
Justificación 9
Planteamiento del problema 14
CAPÍTULO I: La fundamentación pedagógica y los recursos gratuitos 18

I.1.-Fundamentos pedagógicos 18
I.1.1.-El acercamiento científico a la educación 19
I.1.2.-Qué es la tecnología educativa 21
I.1.3.-Qué es la educación a distancia 25
I.1.3.1-Herramientas de planeación 35
I.1.3.2.-Herramientas de desarrollo 37
I.1.4.-El proceso enseñanza- aprendizaje 39
I.1.4.1.-El proceso de enseñanza 39
I.1.4.2.-El proceso de aprendizaje 54
I.1.5.-Tecnología de la información 58
I.2.-Recursos gratuitos 62
I.2.1.-Descripción y clasificación de los recursos gratuitos 62
I.2.2.-Necesidades de una página web 66
I.2.3.-Soluciones por medio de los recursos gratuitos 74
I.2.4.-Análisis comparativo 75

CAPÍTULO II: Diseño de la página web y el desarrollo de los contenidos 83

II.1.-Diseño de la página web 84
II.1.1-Producto 85
II.1.2.-Determinación de recursos 89
II.1.2.1.-Recursos humanos 91
II.1.2.2.-Recursos técnicos 93
II.1.2.3.-Recursos materiales 95
II.1.2.4.-Recursos financieros 95
II.1.3.-Conclusión de los análisis 96
II.2.-Desarrollo de los contenidos 97

CAPÍTULO III.-La Implementación del sistema y puesta a punto 98

III.1.-Producto final. 98

III.2.-Implantación de la página en un portal 102

Conclusiones 104

ANEXO A: Documentación de los contenidos 108

ANEXO B: Glosario 219

ANEXO C: Autómatas 228

Bibliografía 232

Fuentes de Internet 236

INTRODUCCIÓN

Mucho se ha hablado de las carencias que en el renglón educativo existen en nuestro país; dichas carencias van desde el nivel preescolar hasta el universitario. Sin embargo, pocos recursos humanos y financieros se destinan a la solución de este problema pues existe la urgencia de solucionar aspectos más inmediatos de la vida nacional como son la alimentación y la salud.

Durante los años 2001 y 2002 los autores de esta tesis cubrimos nuestro Servicio Social en la División de estudios de posgrado de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales, campus Aragón, de la UNAM, lo que nos permitió detectar algunas carencias a este nivel; entre ellas, la inexistencia de un vínculo entre los aspirantes a la maestría en Economía y esta institución que no fuera la asistencia a cursos propedéuticos, con sistema escolarizado.

Sin embargo, bien sabemos que muchos de estos aspirantes son egresados que han adquirido compromisos de trabajo y familiares, lo que les impide continuar con su formación profesional a niveles de posgrado por lo que ideamos el modo de vincular a estos profesionistas con la ENEP a través de los recursos más avanzados de la nueva tecnología, es decir, el Internet.

Con ese propósito, planeamos crear una página web cuyos elementos estuvieran diseñados no sólo con tecnología avanzada y recursos gratuitos sino incluyendo también elementos pedagógicos que permitieran alcanzar los objetivos de una manera sistemática, económica y sencilla.

Para tal efecto, revisamos una serie de modelos de la teoría de autómatas, eligiendo uno que se apegara a las necesidades de los estudiantes interesados en esta modalidad; después procedimos a la revisión de diferentes fórmulas pedagógicas que admitieran la combinación con el modelo autómata elegido. De la conjunción de estos elementos surgen los resultados de este trabajo, es decir, una página web que permita la adquisición de conocimientos fundamentales en el área de las matemáticas para ser utilizado a distancia.

Es importante señalar que uno de los obstáculos más frecuentes en el aprendizaje de las matemáticas se debe al poco interés de los educadores para poner en práctica estrategias pedagógicas que faciliten tanto la enseñanza como el aprendizaje en este campo, por lo que hemos procurado planificar este instrumento de aprendizaje de la manera más sencilla y económica.

La tesis que hoy presentamos está dividida en tres capítulos que dan cuenta, paso a paso, de cómo fue construyéndose nuestro proyecto, a saber:

-En el primer capítulo. La fundamentación pedagógica y los recursos gratuitos.- En esta parte hemos procurado presentar, de una manera muy esquemática la forma en que se construye el aprendizaje y cuáles son las mejores herramientas para ello.

-En el segundo capítulo Diseño de la página Web y el desarrollo de los contenidos. En este apartado, como su nombre lo indica, se presenta la forma en que se diseñó el producto así como los recursos utilizados para tal fin.

-En el capítulo último. La implementación del sistema y puesta a punto. Este aspecto se refiere a los resultados finales, es decir, un producto que podrá ser utilizado por cualquier usuario interesado en el tema.

Finalmente, se incluyen en el trabajo varios anexos que complementan la información, tales como, análisis, propuestas y un glosario que podrá ser un buen auxiliar para quien se interese en nuestra propuesta.

El resultado final es el que a continuación presentamos a ustedes, esto es, una página web cuyo objetivo principal está cifrado en la idea de solucionar –como lo señalamos con anterioridad- una parte fundamental para la adquisición, a distancia, de conocimientos en la rama matemática que permitan a los profesionistas interesados a acceder a los estudios de maestría en Economía; de este modo, no sólo se adquirirán fundamentos matemáticos, indispensables en esta rama, sino una formación autodidacta que podrá ser utilizada en otros ámbitos de la vida.

Esperamos que el trabajo y el tiempo invertidos en la elaboración de este material sea capaz de cubrir, aunque sea en parte, alguna de las carencias de esta H. Institución y del país en general ya que nos sentimos comprometidos a restituir en algo lo mucho que hemos recibido.

Los autores.

JUSTIFICACIÓN

De todos es sabido que los avances tecnológicos interfieren de manera directa o indirecta en todas las actividades de los seres humanos incluyendo, evidentemente, la educación.

Actualmente, los modelos de enseñanza-aprendizaje han tenido un gran auge gracias a la aparición de los multimedios que: "Como todas las tecnologías de la información y de la comunicación que aparecen desde fines del siglo XIX [...] el desarrollo actual de la multimedia no puede dejar indiferente al sistema educativo"[1], esto está relacionado con cualquier medio de información masiva, radio, televisión, medios impresos, etc.

[1] CARRIER, Jean Piere, *Escuela y multimedia*, p.7

En México y en el mundo, existe la problemática del alto índice de reprobación en el área de las materias y ciencias relacionadas con las matemáticas. Uno de los factores que más incide en este problema es la falta de una didáctica adecuada en la enseñanza de esta disciplina, además de otros factores como son la alimentación, las condiciones sociales y culturales de los individuos de cualquier población.

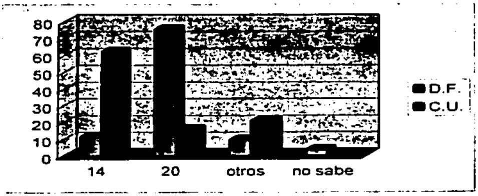
Según José Antonio de la Peña, en su recopilación de datos de la problemática de la educación en matemáticas en México existen tres factores sumamente influyentes, ya mencionados anteriormente, el primero de ellos , es la forma de enseñanza por parte de maestros, quienes transmiten los conocimientos de forma unilateral, de modo que este trabajo de investigación pretende solucionar esta parte de la problemática ya que, por un lado, al sistematizar los conocimientos necesarios sobre estas áreas, se dota a los alumnos de una herramienta que facilitará su aprendizaje y, por otro, el hecho de no tener que invertir tiempo, dinero y esfuerzo ya que el trabajo está encaminado, sobre todo, a los estudiantes que no puedan seguir un programa escolarizado, esto es, acudir de forma sistemática a un salón de clases en donde existe un tutor que enseña y un alumno que aprende.

En la **Gráfica 1** se muestran los resultados obtenidos al aplicar un cuestionario elaborado por investigadores de la Facultad de Ciencias cuya intención es probar el conocimiento de personas en el Distrito Federal (D.F.) y escuelas y facultades de la UNAM acerca de sus conocimiento en Aritmética: suma y multiplicación, este cuestionario tiene únicamente dos preguntas las cuales son muy similares.

Pregunta a: ¿ Cuánto es 2+3*4 ?

Pregunta b: Si una niña compró una paleta de 2$ y 3 chocolates de 4$ ¿cuánto gastó?

Las preguntas a y b, en su desarrollo, son iguales lo único que cambia es la oración de la pregunta b que tiene como respuesta 2+3*4



Grafica 1[2]

[2] PEÑA, Jose Antonio de la *Algunos problemas de la educación en matemáticas en méxico.* , 1ª ed. México, Siglo XXI, p 15.

En ambos casos los resultados son alarmantes; en el D. F. que es la entidad federativa con mayor escolaridad, solo el 11.4% pudieron contestar la pregunta correctamente; en el caso de C. U., donde el menor grado de escolaridad es bachillerato solo el 62.1% dieron la respuesta correcta; esto nos da una idea de la magnitud del problema que enfrentamos por lo cual tenemos la firme creencia de que un buen modelo de educación (PEDAGÓGICO-INFORMÁTICO) ayudará a minimizar este problema.

Dado que no podemos influir en los problemas culturales, sociales o económicos, el único aspecto donde podríamos inferir es en el modo de propiciar la enseñanza de esta disciplina, esto es, a través de la pedagogía; por tal motivo, la presentación de un modelo sencillo –como el que aquí presentamos- contribuirá a facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En otro sentido, la elaboración de este material también cooperará a la formación de investigadores en las diferentes áreas que conforman las disciplinas que confluyen en el área teórico-económica, indispensable para los especialistas en economía financiera.

Por último, como todos sabemos, en años recientes la tecnología de Internet ha invadido todas las esferas de la vida social, política y económica de un gran porcentaje de los seres humanos por lo que esta nueva forma puede ser aprovechada para hacer extensivo el conocimiento básico de las matemáticas con un enfoque económico.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El desarrollo de una ciencia multidisciplinaria como lo es la Economía, requiere de bases fundamentales, entre ellas, la matemática; dicha materia se imparte durante los nueve semestres de la carrera, a saber:

- TALLER DE MATEMÁTICAS
- MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMIA I
- MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMIA II
- MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMIA III,
- ESTADÍSTICA
- MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Estas materias pueden ser sin duda, suficientes para terminar la carrera a nivel licenciatura, pero puede haber lagunas que no ayuden a la continuación de los estudios posteriores, es más, ni siquiera para poder aprobar los exámenes de admisión a estudios de posgrado, para lo cual existen cursos propedéuticos, pero éstos únicamente sirven para acreditar el examen sin ir más allá.

Es, por lo tanto, necesario crear investigadores que puedan desarrollar nuevas teorías y proyectos sustentables con bases matemáticas, para ello se han desarrollado cursos auxiliares de matemáticas para los interesados en estudiar la maestría en Economía, impartida en la Escuela Nacional de Estudios Profesionales, campus Aragón cuyo objetivo primordial es el de adquirir las bases durante el estudio de un posgrado en matemáticas financieras avanzadas.

La creación de contenidos puede ser de gran ayuda *a posteriori*[3], sin embargo el lenguaje rudo y poco amable de las matemáticas, en especial las puras, la abstracción y la forma de explicar con un lenguaje netamente matemático puede complicar su comprensión por parte de los interesados en la adquisición de estos conocimientos.

Existen un sinnúmero de recursos (modelos de autómatas[4], sistemas de información, métodos pedagógicos -pedagogía sistémica, Teoría general de

[3] N.A. Despues
[4] N.A. Parte de la ciencia cibernética que estudia la mecanización de organismos vivos y no vivos.

sistemas y Tecnología educativa-, etcétera) que ayudan a facilitar el aprendizaje de esta ciencia, sin embargo, la mayoría de las veces se aplican de forma pragmática.

El desarrollo de una página web interactiva es, por obviedad más atractiva, que la forma *cuasi* formal con la que están escrita los libros de texto –de esta área en particular- por lo tanto, la importancia de presentar los contenidos de esta manera, reside en que es el modo idóneo para acaparar la atención del usuario puesto que, en la actualidad, se privilegia la imagen visual sobre cualquier otra forma de comunicación.

La administración de la información se vuelve más asequible al estudiante actual, quien, de cualquier forma debe tener una educación informático-computacional.

En los países altamente desarrollados y de alguna u otra manera en México se ponen en marcha sistemas de educación a distancia, como por ejemplo Edusat[5], una dependencia de la secretaría de educación pública (SEP) que en conjunción con la UNAM han desarrollado programas televisivos para

[5] N *B*. Educación satelital tiene programas como telesecundaria . cursos de cómputo . inglés . etcétera. entre otros.

este tipo de educación. Sin embargo, no existe una continuidad directa con el estudiante, por lo cual estos cursos tendrán la opción de asesoramiento directo o indirecto vía e-mail.

Es por esa razón que el presente proyecto tiene como elementos de propuesta, una base pedagógica que describe una tecnología educativa además de un análisis matemático sistemático encaminado a la teoría económica y, por supuesto, el enfoque informático que proporciona las pautas para tener un sistema lo más amigable posible.

Sabemos que conseguir el objetivo de este proyecto es difícil de lograr puesto que en México la enseñanza no tiene un papel primordial y menos aún las matemáticas ya que hay una cierta repulsión de la población hacia esta materia y que la continuidad de los procesos de aprendizaje está mal planeada. Sin embargo, resulta imperativo que los cursos adquieran una estructura de formación graduada de una manera paulatina, con una coherencia lógica que permita la asimilación de cada uno de los temas.

CAPÍTULO I: LA FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA Y LOS RECURSOS GRATUITOS.

1.1 FUNDAMENTOS PEDAGÓGICOS

La creación de un modelo de educación a distancia conlleva a un conjunto de conocimientos estructurados de muchas áreas. A través de nuestro estudios en la carrera de Ingeniería en computación, nos han enseñado cómo crear sistemas desde su inicio hasta su final, hemos aprendido que sin una buena planeación cualquier sistema puede simplemente no servir; para evitar esto, han sido creadas normas, estatutos, estándares, además los cimientos teóricos que dan robustez a cualquier sistema.

En este capítulo realizaremos una conjunción de conceptos teóricos, técnicas, fundamentos, análisis y demás bases, para poder construir un sistema estable y funcional.

Esta parte de la investigación se divide en dos partes: la parte pedagógica por un lado y, por el otro la parte informática, dada la naturaleza de nuestra investigación y los objetivos que ella persigue; así que se dispone de todas aquellas vinculaciones pedagógico-informáticas o informático-pedagógicas para después empezar a describir los conceptos meramente informáticos que cimienten nuestra investigación.

I.1.1.- EL ACERCAMIENTO CIENTÍFICO A LA EDUCACIÓN

Debido a la necesidad de formalizar la educación, se ha recurrido a la utilización del método científico, ya que, como en otras disciplinas, ayuda a resolver algunos de los problemas surgidos en la creación de una metodología sistemática para la aplicación de métodos educativos eficaces. Sin embargo, la introducción de este método ha variado de su forma más común, es decir, el análisis (descomposición de un problema en sus partes más pequeñas) a una forma genérica de los sistemas, llamada *Teoría general de sistemas* (TGS)

En periodos de tiempo establecidos, donde la tecnología se renueva cada vez más rápido, surge una tecnificación en cada una de las ramas del conocimiento sin exclusiones; en la pedagogía se dan de dos formas: la TGS y la tecnificación de la pedagogía, creada por la aplicación de la tecnología a esta ciencia.

La TGS se refiere a la inclusión, es decir "[..] que la tecnología no sólo se acoge al magisterio del método científico y en consecuencia de la Ciencia; tiene en cuenta, tal como hemos visto, la tradición técnica y otros componentes determinantes como el de la inventiva hasta tal punto que, en nuestra época, el tecnólogo ha sido llamado inventor."[6], con estos nos referimos a que es posible renovar la ciencia sin reinventarla, lo cual da pautas para mejor técnicas y métodos de enseñanza aprendizaje.

Ahora bien, una nueva tecnología no sólo se refiere al avance en forma física, como la televisión, la radio, el video, la informática, etcétera, también lo es un conjunto de conocimientos, siempre y cuando cumplan con dos requisitos indispensables, a saber:

[6] CASTILLEJO, J. L. y A. J. Colom. *Pedagogía sistémica*. p. 29

- Ser compatible con la ciencia y estar controlado por el método científico
- Se emplee para controlar, transformar o crear cosas o procesos naturales o sociales

La TGS cumple con estos dos requisitos, pues modifica el método sin dejar de ser compatible con el método científico, ya que tiene un objeto bien definido de estudio (en cada caso) únicamente modificando el algoritmo para estudiarlo y por otra parte tiene como objetivo cambiar la forma de ver los procesos y los sistemas, sociales y naturales; por lo tanto, la creación de la TGS es, sin duda, un avance tecnológico.

I.1.2.-QUÉ ES LA TECNOLOGÍA EDUCATIVA

La evolución de todas las formas de tecnologias habidas y por haber van abriéndose camino en cualquier rama o subrama de las ciencias por muy distantes que parezcan, esto –a su vez- ha permitido que las tecnologías agilicen su crecimiento por lo cual es de suponerse que la relación entre las ciencias es un catalizador de las mismas, entendiendo aquí por catalizador el proceso que acelera un evento.

La descripción dada en el párrafo anterior, nos da las pautas para describir en un modo formal lo que es la tecnología educativa en forma breve y más adelante, en la parte de educación a distancia, se describirá su aplicación formal en este trabajo de investigación.

La tecnología educativa está conformada, por un lado, por el elemento metodológico-tecnológico (M-T) y, por la otra, el didáctico-pedagógico (D-P) en la parte (M-T) se utilizan las denominadas nuevas tecnologías. El concepto de nuevas tecnologías exige plantear los problemas del adjetivo "nuevas". Sobre esta cuestión podemos señalar que el término nuevo es un indicador de temporalidad. Las nuevas tecnologías tienen diferente sentido en las distintas épocas en que surgen. En el siglo XVIII, podrían haber significado una máquina de vapor, en el XIX la imprenta, en el XX la utilización masiva de la energía eléctrica y en la actualidad –posiblemente- sean la informática y las telecomunicaciones. Pero incluso acudiendo a un mismo momento histórico, la velocidad en que se producen los cambios tecnológicos es tan rápida que hace prácticamente imposible distinguir formalmente cuáles son las nuevas tecnologías respecto a las que han dejado de serlo. por lo cual nos limitaremos a decir que las nuevas tecnologías son aquéllas que se incorporan a una rama de estudios; de hecho, Mª Paz Prendes Espinoza, investigadora de la Universidad de Murcia, en España, nos dice: "Más aún, en el campo educativo cuando hablamos de nuevas tecnologías solemos referirnos a tecnologías no tan nuevas como el video o la informática"[7].

Por otra parte, si tomamos como referente el espacio social o cultural en el que surgen, nuevas tecnologías tampoco significarán lo mismo en un país industrializado que en un país en vías de desarrollo o en un contexto industrial que en el ámbito educativo.

De igual forma, en M-T, la introducción de nuevas tecnologías o combinaciones de otras, es una incursión a métodos de enseñanza nuevos, el paso de una enseñanza netamente empírica a una enseñanza sistémica, con la aplicación del método científico experimental, se da a partir de la teoría general de sistemas (TGS), un enfoque tipo teoría de control, donde existe una caja negra, una entrada, una salida y una retroalimentación.

[7] PRENDES ESPINOZA, Ma Paz, *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación especial*, artículo publicado en http: tecnologiaedu.us.es actasedutec.htm

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

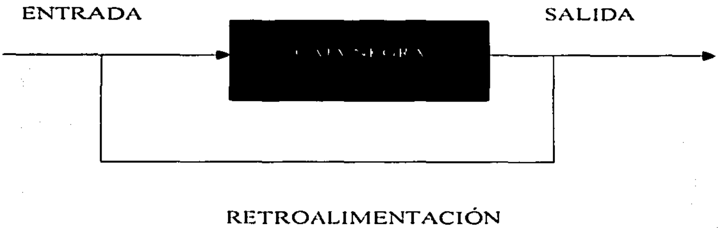


Diagrama 1[8]

En este tipo de sistemas nos importan más los resultados que el funcionamiento del sistema mismo.

Esta caja negra tiene en su interior un conjunto de entes interrelacionados que persiguen un objetivo en común, que nos permite obtener los resultados deseados; la entrada, como lo veremos más adelante, está conformada por un conjunto de conocimientos que a la salida deben ser mayores; dicho aumento es el resultado generado por un efecto del sistema en si.

[8] AGATA, Katsuhiko. *Ingeniería de control moderna* p. 65

I.1.3.-QUÉ ES LA EDUCACIÓN A DISTANCIA

El estudio de la educación a distancia en México no es tan nueva, sin embargo, la estabilización de ésta como un medio de educación efectivo está todavía distante; existe un número casi inconmensurable de materiales multimedios, cursos autodidactas, audio casetes, videocasetes, páginas web interactivas que pretenden generar autoconocimientos; esto puede ser -sin duda- de mucha ayuda pero la creación de conocimientos sin profesor ni tutor, es un proceso largo y progresivo: en otras palabras, sin una dirección adecuada ni una estructura accesible que induzcan al conocimiento en lugar de darlo como tal, es inútil.

Según MOORE, M. en su libro *Contemporary isuess in America a distance education,* citado por Beatriz Fainholc, la educación a distancia "Consiste en todos los arreglos para proveer educación a través de medios de comunicación impresos o electrónicos a personas vinculadas al aprendizaje planeado en lugares y tiempos diferentes al de los instructores"[9] Lo más importante que hay que recalcar en esta definición es la utilización de los medios, es decir, una parte sumamente importante de la educación son los

[9] FAINHOLC, Beatriz. *La interactividad en la educación a distancia.* p 23

medios de comunicación, el lenguaje escrito, hablado, las imágenes, sonidos, etcétera que en educación a distancia son aquellos medios que permitan generar conocimientos sin un contacto directo.

Otra definición, dada por PETER'S O. Dice: "La enseñanza o educación a distancia es un método de impartir conocimientos, habilidades y actitudes de modo racionalizado mediante la aplicación de la división del trabajo y de principios organizativos y el uso extensivo de los medios tecnológicos, lo que hace posible instruir a un gran número de estudiantes a igual tiempo y donde quiera que ellos vivan. Es una forma industrializada de enseñar y aprender"[10] Una de las consecuencias de la aplicación de la tecnología a la educación, es la aparición de modelos sin fronteras físicas del conocimiento y la transmisión en tiempo real de la información, por lo tanto, resulta de suma importancia resaltar que otro de los factores fundamentales de la educación a distancia es lo que llamaremos factor tecnológico, esto es, todas aquellas herramientas tecnológicas que permitan la transmisión virtual de los conocimientos. También debemos destacar el uso de conocimientos racionales; es decir, existe un conjunto infinito de conocimientos, de los cuales no todos tienen una correlación directa entre sí, debemos analizarlos

[10] *Ibidem*, p 24.

sistemáticamente de tal forma que podamos distinguir aquellos que sean realmente relevantes para el estudiante o el objeto de estudio.

Hasta este momento, en base a las definiciones de algunos autores, hemos descrito tres partes substanciales de la educación a distancia, a saber: los medios, el factor tecnológico y la racionalización de los conocimientos, pero este tipo de educación nos da un plusvalor que, en general, no es analizado, éste es la creación de alumnos autodidactas. Por definición, un profesionista es una persona que necesita resolver problemas, para lo cual debe ser una persona analítica, racional y sustanciosa, es decir, autodidacta por lo que se requiere desarrollar en ellos aptitudes y actitudes que le permitan solucionar dichos problemas; lo anterior se debe a que estas características son desarrolladas pues no nos atreveríamos a decir que innatas, por lo que este tipo de formación a distancia ayuda a conformar la metodología apropiada para dichos profesionistas y/o estudiantes.

Por otra parte, ESCOTET, M. en su libro *Tendencias de la educación superior a distancia* y citado en el libro de Beatriz FAINHOLC, nos dice que la educación a distancia "[...]consiste en una educación que se entrega a través de un conjunto de medios didácticos que permite prescindir de asistencia a clases regulares y en la que el individuo se responsabiliza de su propio aprendizaje"[11].

Antes de continuar, debemos diferenciar los medios de comunicación de los medios didácticos; los primeros se refieren a la transmisión y recepción de información y éstos últimos hablan de la forma en que se presentan los conocimientos ya que éstos también forman parte integral de la educación a distancia.

En las definiciones anteriores se habla de las características físicas y técnicas pero existe un factor determinante para cualquier proyecto, sea éste de desarrollo, de investigación, de análisis estadístico o de cualquier otro tipo; esto es, el costo; además de la depreciación del mismo. En este sentido, la educación a distancia "[...] alcanza niveles de costo decreciente luego de coberturas amplias[...]"[12] es decir, que entre mayor sea el alcance menor será el costo y por lo tanto mucho más productivo.

---

[11] *Idem*, p 24.

[12] *Ibidem*.

A continuación se presenta en el **diagrama 2** un cuadro de los factores que permiten la realización de modelos de educación a distancia y que con anterioridad hemos citado por medio de varios autores especialistas en este tema y ubicado en forma de diagrama a bloques.

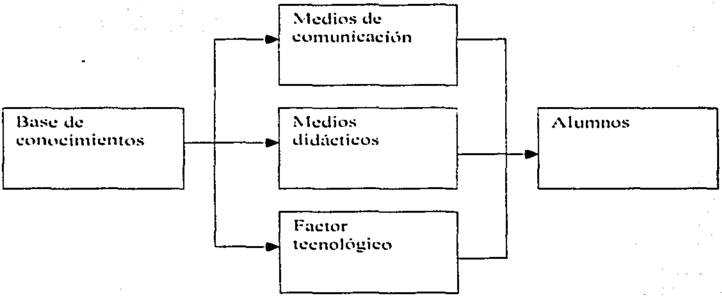


Diagrama 2

Volviendo a los medios de información, éstos proporcionan funciones fundamentales entre los cuales encontramos:

A) FUNCIÓN INFORMATIVA

Una página web se puede utilizar como una fuente de conocimientos, para transmitir nuevos conceptos, mostrar realidades, hacer demostraciones, presentar modelos, ofrecer explicaciones, resumir contenidos y/o introducir ideas para el debate o la reflexión. Las páginas interactivas que cumplan esta función pueden ser utilizados de dos formas:

1.- Se comienza con una presentación del material, en el que se expone brevemente el tema o contenido del programa, sus objetivos y los aspectos a los que hay que atender de modo especial. A continuación se procede al visionado del documento con interrupciones graduadas.

2.- También se puede realizar al inicio una presentación del documento, pero, durante la proyección el sistema educador, utilizando las posibilidades técnicas del medio (retroalimentación, aclaración de dudas etcétera.) crea notas explicativas, comentarios o sugerencias acerca de los temas importantes dentro de los contenidos del archivo.

Dadas las facilidades de uso por personas sin conocimientos técnicos, un documento web es un instrumento ideal para el aprendizaje que posibilita la elaboración de mensajes informativos de temas o realidades más próximos al usuario, ofreciendo una alternativa a los productos ya elaborados que, por lo general, son técnicamente difíciles de manejar y más aún modificar los contenidos. A diferencia de una página web, que constantemente es modificada sin un desperdicio de recursos.

B) FUNCIÓN MOTIVADORA

Una página tipo web también puede ser utilizada como medio para influir en el destinatario con el objeto de alcanzar un determinado tipo de comportamiento. Motivar con ésta, consiste en actuar sobre un grupo con el fin de sensibilizarle en relación a un tema, aprovechando que la imagen suele ser más eficaz que la palabra para provocar sensaciones y sentimientos.

La influencia de los modelos a través de la imagen digital ha sido objeto de diversas investigaciones que subrayan el papel que este medio ejerce, especialmente, en la adquisición de conductas relativas a la agresividad y a los roles sexuales; sin embargo, no todos los medios de comunicación masiva producen ese resultado pues -como lo hemos mencionado anteriormente- la web permite el desarrollo educativo e integral de toda clase de estudiantes.

C) FUNCIÓN EXPRESIVA

Cuando el interés se centra en el emisor de los mensajes o conocimientos incluidos en la página se está privilegiando la función expresiva, que hace referencia a cualquier manifestación de la propia interioridad. Convertirse de receptor habitual a emisor puede ser una experiencia enormemente enriquecedora: el hecho de traducir el entorno físico y humano a la forma de expresión de tipo discusión en foros electrónicos o por medio del e-mail favorece la reflexión personal y desarrolla el sentido crítico ante la realidad y los conocimientos adquiridos.

D) FUNCIÓN EVALUATIVA

La página web cumple esta función cuando la finalidad del uso del medio es la valoración de conocimientos, el juicio de actitudes o el control de destrezas de los usuarios conectados a la página. Es un instrumento válido para la toma de decisiones, la identificación de errores o la valoración de situaciones que en vivo podrían ser interpretadas de modo menos reflexivo o basarse en datos parciales. También es un medio útil para la autoevaluación ya que favorece la toma de conciencia de quienes la usan.

E) FUNCIÓN INVESTIGADORA

El uso de una página web puede servir como instrumento para el análisis de la realidad en diferentes ámbitos (educativo, social, científico, etcétera). La base de conocimientos de ésta puede almacenar información fácilmente accesible al investigador, al docente o al alumno, al mismo tiempo que permite la reproducción reiterada de fenómenos con lo que favorece un análisis más riguroso que el aportado por la observación directa.

F) FUNCIÓN LÚDICA

No podemos olvidar la utilización de internet como medio para el ocio, la diversión, el entretenimiento o el desarrollo de aficiones. El juego es una actividad gratificadora para niños y adultos ya que durante su desarrollo se hace más fácil la creatividad, la relación y el intercambio. Muchas veces el juego no es otra cosa que una anticipación, una simulación de situaciones potencialmente reales, pero que carecen de la ansiedad o tensión que pudieran generar en sus auténticos contextos. El uso de estos medios suele provocar por sí mismos agradables momentos de experimentación.

G) FUNCIÓN METALINGÜÍSTICA

El interés se centra en el uso de los códigos empleados en la elaboración del mensaje informático, es decir, se utilizan los recursos computacionales para explicar, comprender, reflexionar o profundizar sobre el propio lenguaje audiovisual y sus modos característicos de expresión. Es una función necesaria antes de proponer la elaboración y producción de páginas web. Nadie puede hacer una composición escrita si no domina unas técnicas mínimas de expresión verbal, del mismo modo que es imposible crear un conocimiento coherente y legible sin poseer las técnicas básicas de lo que se quiere transmitir.

I.1.3.1.- HERRAMIENTAS DE PLANEACIÓN

Las herramientas de planeación son un producto directo de los tres principales puntos anteriores, TGS, Tecnología educativa y la Tecnificación pedagógica; de estos tres elementos se crean las herramientas de planeación, que son las propuestas de cada uno de los instructores teniendo como base el Método científico y la tecnología (Procesos nuevos o uso de la tecnología computacional) para generar un sistema aplicable a la educación.

Como consecuencia de la TGS se lleva acabo la creación de la tecnología educativa, donde se usan recursos tecnológicos tanto de la ciencia fáctica como de la ciencia práctica, además de incluir el desarrollo de nuevos métodos de enseñanza, esto da como resultado una evolución imparable de formas y modos de enseñar y teniendo, como uno de sus más valiosos productos, la educación a distancia que con la llegada de la gran red de Internet dio un nuevo giro, incluyendo un nuevo concepto "edumática (educación mediante la teleinformática)"[13]; la educación a distancia vía Internet o la www, ya tiene su propio nombre. Ahora bien, nuestra intención

[13] ZAMORA Francisco. *Una experiencia de innovación pedagógica en un curso de "medios de transmisión eléctrica"* en http: cife.uniandes.edu.co nivelacion.htm

inmediata es modificarla al incluir un modelo informático de la cibernética convencional que describiremos posteriormente.

En esta parte de la investigación damos nuestras primeras propuestas, de aquí que una de nuestras observaciones principales sería que una página web tiene elementos suficientes como para aportar una forma de vinculación tutor-alumno, además de contener todas y cada una de las partes necesarias para la realización, implantación y puesta en marcha del modelo propuesto.

Una herramienta tan maleable, como lo es una página web, contiene elementos, como la fácil modificación de sus partes, una forma amigable, no se requiere de grandes conocimientos acerca de computación para poder utilizarla, para el programador tiene una gran cantidad de aplicaciones; en lo referente a costos es muy barata en comparación con otro tipo de sistemas y su mantenimiento es sencillo y rápido.

Concluyendo, la herramienta idónea para la creación de nuestro modelo de educación a distancia es la utilización de Internet y de las utilerías que ofrece este gran sistema mundial.

I.1.1.4.-HERRAMIENTAS DE DESARROLLO

En el punto anterior mencionamos cuál será nuestra herramienta de planeación básica, esto es, Internet. En este punto de la investigación, describiremos las herramientas de Internet que serán las utilizadas para crear el modelo propuesto.

Las herramientas de desarrollo son todas aquellas utilerías, tanto físicas como lógicas, que pueden ser usadas en la creación del modelo en sí; nos basaremos en tres formas fundamentales para desarrollar lo que a partir de este momento serán la herramientas de desarrollo:

- El objetivo: Nuestro objetivo fundamental es la preparación de alumnos e investigadores del posgrado en Economía, impartido en la ENEP Aragón, para dotarlos de un fundamento matemático, para la realización de sus estudios e investigaciones de maestría. La parte física está determinada por todos los usuarios finales, esto es, alumnos de licenciatura que deseen ingresar al posgrado; alumnos que estén siguiendo los cursos propedéuticos y alumnos ya inscritos en la maestría.

- La forma: Con la creación de un modelo de educación a distancia, tomando como base un modelo cibernético (teoría de autómatas) y teniendo éste una fundamentación pedagógica, llevando esta parte sustancial del proyecto a una forma casi tangible y que dará como resultado un conjunto de contenidos o apuntes y una página web con interrelación directa con investigadores de la División de estudios de posgrado.

- El medio: Usando como instrumento, principalmente, la World Wide Web y utilerías creadas para este medio de educación.

Teniendo en cuenta nuestro objetivo, nuestra forma y nuestro medio podemos desarrollar sistemas propios y es además, por esto mismo, que se denominan herramientas de desarrollo.

I.1.4.- EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Para comprender el proceso de enseñanza aprendizaje es necesario hacer una subdivisión de sus partes. En primer lugar describiremos el proceso de enseñanza para, posteriormente, describir los procesos de aprendizaje y por último realizar su vinculación enseñanza-aprendizaje.

I..1.4.1.- EL PROCESO DE ENSEÑANZA

El proceso de enseñanza -desde un punto de vista científico- es la creación de un modelo dado que un fenómeno físico o social reproduce de una manera lógica que funcione de manera análoga al original.

En esta parte del trabajo de investigación, analizaremos los modelos más comunes de este fenómeno de enseñanza-aprendizaje, desarrollados con la teoría de autómatas en la cibernética convencional.

GRENIESWSKI dice que "Cuando por alguna razón, el original no es fácilmente accesible, se estudia en su lugar un modelo"[14], pero en este caso

[14] GRENIEWSKI, Henryk. *Cibernética sin matemáticas*, p. 43.

acondicionaremos el modelo que más se acerque a la realidad; además de que la facilidad de la realización de un modelo nos permite quitar todas las variables de menor importancia, por lo cual se puede hacer énfasis en las partes verdaderamente importantes del sistema.

Existe un factor determinante para la creación de un autómata o modelo basado en la realidad verdaderamente condicionante, éste es el papel de la lógica y la matemática de la que se incluyen:

a) La lógica matemática
b) Las álgebras abstractas
c) La teoría de las funciones
d) El cálculo de las probabilidades
e) La estadística matemática
f) La teoría de juegos[15]

Estas aunque no son las únicas herramientas para la creación de autómatas, son las más socorridas; a continuación se hará la explicación del porqué:

[15] *Idem.* pp. 53-54

La lógica matemática. quizás la más importante de estas herramientas, es la espina dorsal por la cual se basa cualquier proceso es decir no se puede construir una ventana sin antes haber construido la pared. Este tipo de procedimientos tienen una secuencia lógica y se usará de tal forma que permita describir el proceso de enseñanza. el del aprendizaje y el de enseñanza- aprendizaje con un organismo auxiliar.

Las álgebras abstractas directamente relacionadas con la lógica son en si herramientas creadas para el modelaje de parte del modelo real; por lo general se construyen con la finalidad de recrear parte de modelos que con el álgebra común no se pueden modelar; algunos ejemplos de este tipo de álgebras son el álgebra de Boole. el álgebra de bloque o el álgebra relacional, entre muchas otras.

La teoría de funciones, es el manejo de relaciones de una forma estrictamente algebraica. nos ayuda a comprender las relaciones manejadas entre distintos tipos de variables y, sin lugar a dudas, cuando se crea o maneja un modelo basado en la realidad es necesaria la utilización de variables de tipo físico o social.

El cálculo de probabilidades y la estadística matemática son las herramientas más poderosas cuando se realizan modelos de tipo social porque permiten la utilización de variables sociales a variables matemáticas.

La teoría de juegos es, en si, un método que permite observar las reacciones de individuos racionales en condiciones especificas; nos ayuda a reconocer patrones de comportamiento de una manera sumamente sencilla.

Existe, de manera general, una división de los modelos:

1) económicos
2) lógicos
3) praxiológicos
4) biológicos

Analizaremos estos tipos de modelos y de aquí obtendremos el más adecuado a nuestras necesidades:

1) Modelos económicos: Tratan de establecer modelos que describan la producción, el comercio y el consumo. Por lo general, se realiza la

construcción de lenguajes nuevos aplicados a los modelos económicos, "[...] dicho lenguaje nuevo puede ser útil con propósitos de enseñanza, pero no introduce nuevos elementos conceptuales "[16]

Estos nuevos modelos requieren de dos aspectos básicos:

a) La utilidad de los conceptos de sistemas (relativamente aislado y de acoplamiento)
b) La utilidad de los conceptos de sistemas de información y de acoplamiento de información.

2) Modelos lógicos: Estos métodos describen procedimientos, con una secuencia lógica de fenómenos relativamente aislados, además de tener principios estadísticos y probabilísticas, podemos decir que estos métodos se encuentran basados siempre en por lo menos uno de los dos procedimientos que se indican a continuación:

-La recolección de datos simultáneos de diferentes receptores o instrumentos de observación.

---

[16] *Idem*. P 142

-La recolección de datos consecutivos del mismo receptor o del mismo instrumento de observación.

3) Modelos praxiológicos: Son aquellos modelos que ilustran la interacción entre el agente y el medio ambiente o bien la interacción entre agentes individuales.

4) Modelos biológicos: Una de las principales ramas de la investigación de modelos biológicos, se ocupa de la investigación de sistemas técnicos que imitan las manifestaciones de la vida; en este caso en particular, el proceso de enseñanza; debemos tomar en cuenta que un organismo vivo es un sistema relativamente aislado, que está integrado por otros sistemas relativamente aislados, más simples, acoplados en paralelo, en serie y en retroacción.

En relación a estos tipos de modelos debemos basar la investigación en el proceso de aprendizaje. Los modelos biológicos que imitan los procesos de seres vivos de una forma técnica o lógica son aquellos que describen en forma de algoritmos el proceso de enseñanza, por lo cual es el modelo en cual se guiará este trabajo.

Existe un modelo llamado "aprendizaje de imitación"[17] desarrollado en los años 70's[18] con la teoría de autómatas el cual es el más adecuado ya que en lugar de un director, profesor o tutor, se refiere a una guía que desarrolla paso a paso el proceso de inducción al aprendizaje, este modelo, es la base de nuestro modelo propuesto y desarrollado a continuación en el **diagrama 3**.

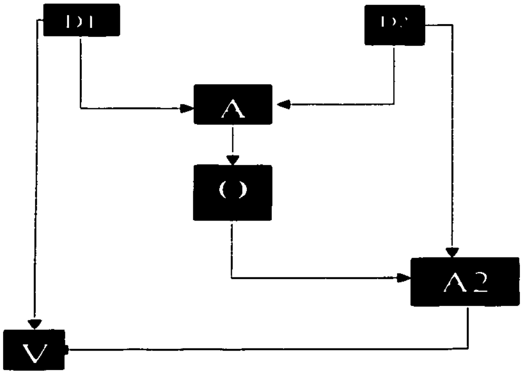


Diagrama 3

[17] GRENIEWSKI, Henryk. *Cibernética sin matemáticas*, pp 55-70 y p502
[18] Véase anexo C

Donde

D1 = Cúmulo de conocimiento del organismo 1(alumno) representado como el vector (d1,a). Donde $d1>0$ y representa el cúmulo de conocimientos del individuo 1 y a es el tiempo que D1 tarda en llegar al siguiente punto.

D2 = Cúmulo de conocimiento del organismo 2 (base de conocimientos) representado como el vector (d2,a). Donde $d2>d1>0$

A = Es la suma de D1 + D2 representado como el vector (d1 + d2 , 2a).

O = Es la diferencial de A (∂ (d1+d2), 0)

$A2 = \lambda(\partial (d1+d2), 0)$: DONDE $0<\lambda<1$

$V = (\lambda \partial (d1+d2) + d1, a)$

Desgraciadamente, para generar o aprender, es necesario tener un conjunto de conocimientos previos, este cúmulo de conocimientos está representado por la función **d1** que -en palabras sencillas- viene dado por el conocimiento previo del organismo 1 (alumno) la constante **a** es el tiempo que lleva al organismo 1 en llegar al punto **A** y por lo mismo es el mismo tiempo que le lleva al organismo D2 llevar a D1 al punto A.

D2 representa el cúmulo de conocimientos o base de conocimientos del organismo 2 o tutor y está compuesto por la cantidad de conocimientos que necesita o debe aprender el organismo 1.

El punto **A** está conformado por la suma de los cúmulos de conocimientos de los dos organismos y la suma de los tiempos que tardaron en llegar a ese conocimiento: en interacciones consecuentes, el valor de **a** tiende a 0; además, este punto representa el conjunto de conocimientos totales por cada tema.

Obviamente, no todo el conocimiento acumulado en **A** será aprendido por el organismo 1, que además no es el objetivo. El objetivo es que lo razone y, posteriormente, pueda deducirlo por lo que es sólo una diferencia de este conocimiento el que se debe llevar este individuo lo que implica una derivada por lo cual, el segundo miembro de nuestro vector se convierte en cero por ser una constante y además de ser congruente pues este proceso no genera un tiempo significativo; todo lo anterior quedará representado por el punto O.

Para punto **A2**, haremos la suposición de que el proceso ha sido inteligible para el organismo 1 y, como lo dijimos anteriormente, sólo una parte del conocimiento es la que debe quedarse en **d1** y estará determinada por un valor escalar entre 0 y 1, el cual da la proporción del contenido memorizado.

El último punto, aparentemente, estará dado por **V**, el cual es la suma de **D1+A2** y por lo tanto $\mathbf{V = (\lambda\ \partial\ (d1+d2) + d1,\ a)}$, el primer miembro del vector conforma los conocimiento que ya tenía el organismo 1 más una proporción de la diferencial o razonamiento de la suma de los cúmulos de conocimiento de los dos organismos.

Pero dada la naturaleza de este proyecto es necesaria una retroalimentación hasta n veces que es cuando d1= d2; es decir el organismo 1 ya no tiene nada qué aprender del organismo 2, como se verá más adelante[19].

---

[19] *Infra* P.37

De tal modo, nuestro modelo propuesto aumentado queda mostrado en el **diagrama 4** de la siguiente manera:

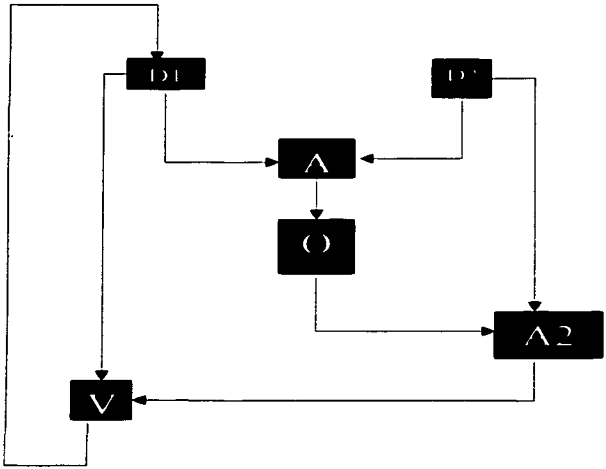


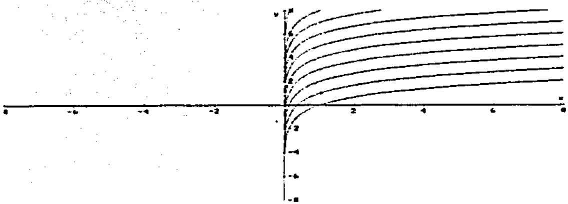
Diagrama 4

De esta nueva forma se crea un modelo interactivo donde la suma del cúmulo de conocimientos del organismo 1 se va incrementando en una escala decreciente hasta que se obtiene el total de conocimientos del organismo 2 (ver **tabla 1**)

ENTRADA	SALIDA
$D1 = (d1,0)$	$(\lambda \partial (d1+d2) + d1,\ a)$
$D1' = (\lambda \partial (d1+d2) + d1,\ a)$	$(\lambda \partial ((\lambda \partial (d1+d2) + d1)+d2) + (\lambda \partial (d1+d2) + d1),\ a+a')$
• • •	• • •
$D1^{n} = (d1^{n}, a+a'+a''+a^{n}) = (d2)$	

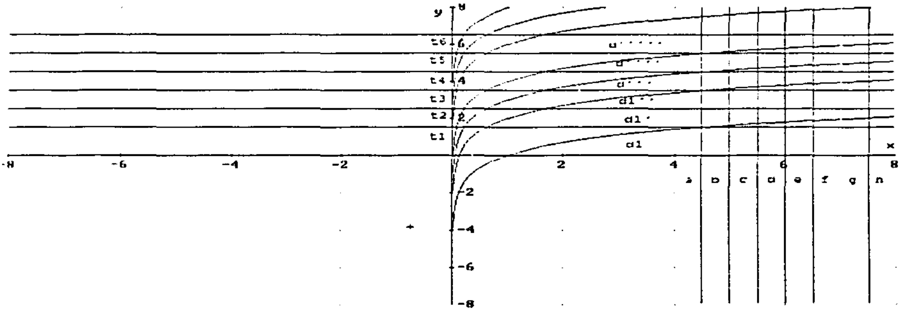
Tabla 1

Por lo descrito en el párrafo anterior gráficamente tendríamos un comportamiento similar al mostrado en **grafica 2**, es decir, dependiendo del nivel de conocimientos y compresión es la velocidad con la que el organismo aprende pero, sin embargo, el nivel de conocimientos al que se llega debe ser igual o similar en cada uno de los casos.



Grafica 2

Realicemos el análisis gráfico mostrado en la **grafica 3**: en el eje de las ordenadas[20] tenemos el tiempo que D1 tarda en llegar a un objetivo, encontrando en el eje de las abscisas[21] y que no se muestra en la gráfica pero que -sin embargo- está determinado por el organismo 1 y que es un valor constate y es igual a d2, además, existen tantos d2 diferentes como posibles niveles de conocimientos existan. Por lo tanto nuestro análisis se basa en dos coeficientes (conocimientos, tiempo) donde el conocimiento es la variable independiente, porque el nivel al que el organismo desea llegar solo estará determinado por el tiempo de dedicación de este mismo.



Grafica 3

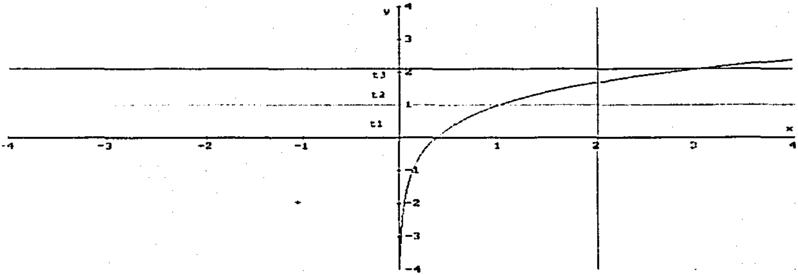
---

[20] N.B. Las ordenadas en el origen o las ordenadas al origen están dadas por el conjunto de elementos incluyentes en el eje vertical.

[21] N.B. Las abscisas en el origen o las abscisas al origen también llamadas raíces están dadas por el conjunto de elementos incluyentes en el eje horizontal.

En la grafica de arriba se muestran los niveles de compresión del individuo d1, d1', d1'', d1''', d1'''', d1''''', el cual puede elegir entre a,b,c,d,e,f,...z niveles de conocimiento, en este caso tomando en cuenta para el nivel de conocimientos a existe un tiempo t_i para cada individuo $d1^{n'}$ del lo cual podemos deducir que el tiempo $t1<t2<t3<t4<...<t_n$

Ahora bien, si realizamos el análisis en forma individual existe una tendencia decreciente en el tiempo de entendimiento del organismo, de forma tal que éste tiende a cero, lo cual se muestra en la **grafica 4**:



Grafica 4

De donde:

$$t1 > t2 > t3 > .... > tn$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t \to n} tn = 0$$

Concluyendo, podemos decir que la función de conocimientos es:

$$f(c) = a \ln (c) + b$$

de donde b es el cúmulo de conocimientos previos del organismo uno (d1)

a es el coeficiente de entendimiento del organismo d1

c es la cantidad de conocimientos deseada a aprender

f(c) es el tiempo en que d1 obtiene cierto nivel de aprendizaje.

I..1.5.1.- EL PROCESO DE APRENDIZAJE

Aprender es mejorar nuestro conocimiento acerca de la estructura de nuestro entorno; esto significa, en particular, mejorar la forma de interactuar en dicho entorno (la forma de realizar una tarea, resolver un problema, comunicar, etcétera).

Un ser humano se enfrenta , por lo general, con el problema del olvido durante los procesos de aprendizaje, por tanto, hay que saber olvidar, es decir olvidar lo irrevelante, lo secundario, sin olvidar lo verdaderamente importante, lo destacable, lo que aporte información y permita enriquecer nuestro conocimiento.

Existen pues 5 niveles de aprendizaje, entre los cuales nos encontramos todos, y para llegar al nivel más alto es necesario pasar por todos los anteriores. Estos niveles de aprendizaje se clasifican de la siguiente manera:

Niveles de Aprendizaje

- Aprendizaje de nivel 0 (aprendizaje programado)
- Aprendizaje de nivel 1 (aprendizaje de memorización)
- Aprendizaje de nivel 2 (aprendizaje estadístico)
- Aprendizaje de nivel 3 (aprendizaje simbólico)
- Aprendizaje de nivel 4 (aprendizaje inductivo)

Nivel 0 ó aprendizaje programado: Un código controla todo lo que debe hacerse, es decir a una acción le corresponde una reacción; este tipo de aprendizaje se establece por lo general en los primeros años de vida, un recién nacido posee un comportamiento reflejo y es curioso por naturaleza; durante toda su vida tiende a adoptar una actitud activa en búsqueda de información.

Nivel 1 ó aprendizaje por memorización: En este caso especifico, todas las situaciones son memorizadas junto con la acción de llevar a cabo, que tienen asociadas, un ejemplo curioso descrito por *EUGENE IONESCO* en un cuento titulado "La lección" nos muestra en forma paródica este tipo de conocimientos:

> Profesor: -¿Cuánto resulta, por ejemplo, de multiplicar tres mil setecientos cincuenta y cinco millones novecientos noventa y ocho mil doscientos cincuenta y uno por cinco mil ciento sesenta y dos millones trescientos treinta y tres mil quinientos ocho?
> Alumna (contestando muy rápido): -resulta diez y nueve trillones trescientos ochenta y nueve mil setecientos quince billones seiscientos veintisiete mil ciento veintiséis millones seis cientos noventa y cuatro mil quinientos ocho...

Profesor (asombrado): -¿Pero, como sabes eso, si no conoces los principios del razonamiento matemático?

Alumna: -Fácil. Como no puedo confiar en mis razonamientos, memoricé todos los resultados de todas las multiplicaciones posibles...[22]

En este ejemplo se describe esta forma de aprendizaje, la cual es muy común entre las personas que tiene como grado de estudio la primaria, secundaria (completa o incompleta), según José Antonio de la Peña.

Nivel 2 ó de aprendizaje estadístico: En el que sistema retiene una clasificación de situaciones, efectuada a partir de la observación de un gran número de casos, es decir el individuo a través de repeticiones aprende procedimientos, técnicas, secuencias, etcétera.

Nivel 3 ó de aprendizaje simbólico: Corresponde a la situación de aprendizaje a partir de ejemplos proporcionados por un profesor. Este tipo de aprendizaje está fuertemente basado en la capacidad de procesamiento

[22] PEÑA, Jose Antonio de la. *Op. Cit.* p. 15

simbólico de conocimientos, es decir, el estudiante a partir del reconocimiento de un símbolo puede asociarlo con varios conocimientos.

Nivel 4 ó de aprendizaje inductivo, es decir, sin profesor, en que el sistema debe ser capaz de descubrir hipótesis nuevas, conceptos nuevos, así como crear situaciones nuevas.[23]

[23] N.B. Observemos que sea cual sea el nivel de aprendizaje, este no se realiza nunca a partir de nada. Es absolutamente necesario, partir de unos conocimientos mínimos para aprender.

1.1.5.-TECNOLOGÍA DE LA INFORMACIÓN

Cada año, cada mes, cada día, se desarrollan nuevas formas de crear información a partir de datos; también nuevas formas de transmitirlas y protegerlas, más aún para alumnos de informática y computación donde la información es un punto clave. Desde el punto de vista pedagógico tiene además un papel fundamental pues en la forma está la clave de llegar a los objetivos planteados para el aprendizaje.

Esta coyuntura entre esta dos ciencias es de suma importancia para nuestra investigación, la forma de escribir, comentar o interpretar la información puede ser la diferencia entre fracasar o lograr éxitos "Muchas personas están demasiado educadas para hablar con la boca llena, pero no se preocupan de hacerlo con la cabeza hueca."[24], es por ello que debemos tener especial cuidado en cómo se hará la transformación de los datos o conocimientos en información inteligible para los usuarios finales.

Tenemos la firme creencia de que el orden y la panorámica es el punto clave, una forma sistemática de donde se pueda buscar cualquier tema desde el

[24] WILLES, Orson, en http: www.pntic.mec.es/

punto hasta como integrar por diversos métodos, y que aunque lleven una secuencia lógica cualquier usuario con cierto tipo de conocimiento pueda tener acceso.

Nuestra propuesta es sencilla pero contundente: reutilizando los modelos de entidad-relación y de la teoría de base de datos relacionales hemos formado un esquema (**Diagrama 5**)con una base de conocimientos y con una entrada recurrente

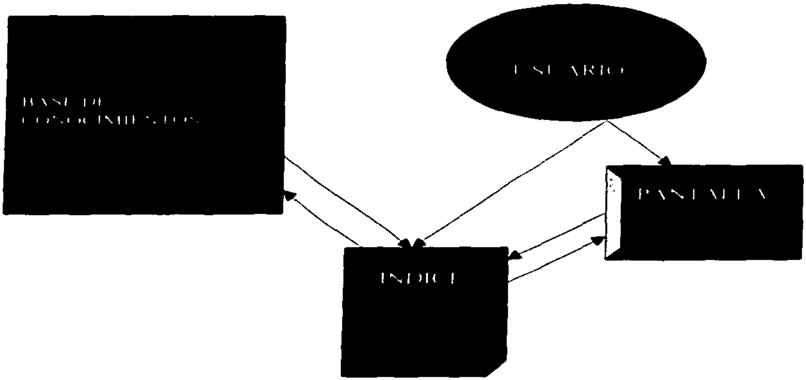


Diagrama 5

La base de conocimientos, como mencionamos anteriormente, es un conjunto de datos en forma ordenada (información) tipo sistemas expertos ya que toda la información fue obtenida de nuestros propios conocimientos, además de expertos en la enseñanza de la matemática y matemática económica así como autores muy reconocidos en este campo.

A esta base de conocimientos puede ingresar cualquier usuario final, a través del índice general y visualizarlo en la pantalla; la pantalla, al utilizar cualquier contenido de la base de conocimiento, utiliza el índice para buscar y visualizar la información.

La información está clasificada por tema genérico, tema particular y un número económico, de esta forma se evita la redundancia de información .

La relaciones de cada uno de los entes están dadas de la siguiente manera:

- Usuario Pantalla (unilateral)
- Usuario Índice 1:N
- Usuario Base (No hay relación)
- Pantalla Índice 1:N

- Pantalla Usuario (unilateral)
- Pantalla Base (No hay relación)
- Base Índice N:1
- Base Pantalla (No hay relación)
- Base Usuario (No hay relación)

Las relaciones 1:1 significa que pueden interactuar de una forma un ente con el otro

Las relaciones 1:N o N:1 significa que pueden relacionarse de N formas diferentes un ente con el otro

Las relaciones unilaterales implican que sólo un ente puede relacionarse con el otro ente y no al revés.

Concluyendo, ésta será la forma de administrar la información en nuestro sistema: de este modo se permite al usuario tener un perfecto control sobre los contenidos que necesite y utilizarlos de una manera gradual y sistemática.

I.2.-RECURSOS GRATUITOS.

Al inicio de este capítulo, que ha quedado dividido en dos partes, hemos incluido –hasta este momento- todas la bases y fundamentos pedagógicos necesarios para la creación de nuestro modelo e incluso algunos conceptos de la cibernética convencional. Pero, a partir de este punto, describiremos los recursos computacionales para alcanzar nuestro objetivo principal y como forma de propuesta a los recursos gratuitos.

I.2.1.-DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS RECURSOS GRATUITOS

En el mundo, el libre mercado generalizó las ventas internacionales ahorrando tiempo y dinero, de modo idéntico, las redes de computadoras lo hicieron: esto provocó no sólo el intercambio de riquezas entre naciones, sino que el tipo y número de productos también se incrementó notablemente; tanto así que se crearon productos cuyo precio era nulo; esto se refiere en términos computacionales al denominado shareware palabra que no tiene traducción al español pero que comúnmente es conocido como software gratis, el cual no tiene nada que ver con el freesoftware y cuya traducción sería –más o menos- software libre aunque esta palabra puede tener otras connotaciones.

Empecemos por hacer una clasificación de los recursos gratuitos:

- Recursos gratuitos
  - Servicios
    - Soporte técnico
    - Recursos de servidor
  - Software
    - Libre
      - Gratuitos
      - Con costo
    - Shareware
      - No libre
      - Regalado
      - Cautivo

Dentro de esta clasificación tenemos dos grandes ramas, una de las cuales es de servicios y otra de software.

Servicios: Se pueden definir como todo aquel recurso (necesariamente no software) que te permita utilizar cualquier sistema de cómputo –ya sea propio o no- sin costo alguno; por ejemplo, algunas compañías ofrecen

Internet gratis, su ganancia va por parte de las empresas que ahí se anuncian, éste es un recurso en el cual se presta el servicio de un LAN MODEM o de un RUTEADOR y tiempo de servidor sin tener costo alguno para el usuario; otro ejemplo serían los portales que te dan servicio de e-mail, o aquéllos que ofrecen espacios para levantar páginas WEB.

A partir de esta subdivisión de servicios, tenemos la gama de recursos gratuitos constituida por los de soporte técnico que es, por lo general, un valor agregado a la compra de un dispositivo tipo hardware o a un servicio como la contratación de Internet.

Los recursos que ofrecen los servidores en redes de tipo global son generalmente de tipo gratuito, pueden ser espacio para páginas, e-mail, conexiones a redes públicas, etcétera. Los servicios de transmisión de información a grandes distancias o VNET son, por lo general, con costo.

La segunda gran rama de los recursos gratuititos es de tipo lógico llamado software; es un tanto más complicado especificar dónde se encuentra lo gratuito de este tipo de recurso. En primer lugar tenemos al software libre, el cual se divide en dos subgrupos: el que tiene costo y el que no lo tiene. El término de software libre (free software) que viene del inglés no es tan objetivo ya que la palabra free significa libre o gratis por lo cual tiende a confundirse. Es libre si tienes la libertad de modificarlo a tus necesidades y, por consiguiente, la aplicación contiene incluido al código fuente, pero no es necesariamente gratuito puesto que algunos software de este tipo tienen un costo, lo que lo clasificaría dentro de recursos gratuitos sería el código fuente el cual -efectivamente- no tiene costo.

El shareware –habitualmente- puede distribuirse y redistribuirse libremente, su característica principal es el objetivo que se persigue detrás de este tipo de software pues se usa como publicidad o como promoción del mismo y tiene tres vertientes: software no libre, regalado y cautivo. El no libre es aquel en el cual no se te da el código y la única libertad que se tiene es la de usarlo. El regalado, tiene candados de seguridad y no puede usarse más que un periodo de tiempo determinado y, por último, el cautivo que es aquel que no contiene el programa o aplicación completa.

I.2.2.-NECESIDADES DE UNA PÁGINA WEB

Cualquier sistema de cualquier índole requiere, para su construcción, de recursos y en especial para un sistema informático; uno de los requisitos indispensables es una plataforma que se adecue a cada una de las necesidades del sistema.

Un caso particular, como la creación de una página web, no es diferente ya que existen aplicaciones que dan un óptimo rendimiento pero, por definición, si el costo de operación y funcionamiento es muy alto no es un sistema de buena calidad.

Una de las bases para la creación de una página web es un lenguaje de programación de tipo etiquetas; la norma general es HTML(Hiper Text Markup Languaje –Lenguaje de marcas de hiper texto-), del cual existe un número muy grande de variantes; ésta es precisamente la plataforma a utilizar y en ello estriba también la importancia de este punto en el trabajo de investigación que presentamos.

A continuación se muestra en el **Diagrama 6** un cuadro que presenta la partes que conforman una página web.

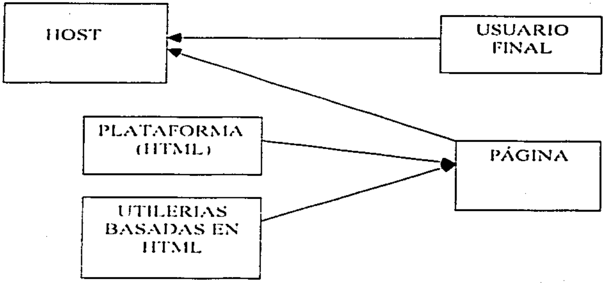


Diagrama 6

ANTECEDENTES DE HTML:

En un principio definiremos a HTML como un lenguaje de programación y también como una norma.

HTML es lenguaje porque tiene varias estructuras con las cuales podemos comunicarnos con un compilador[25] que contiene un analizador léxico, uno sintáctico y uno gramático; este lenguaje recibe el nombre de sus

[25] N.A. Un compilador se puede definir como un traductor de lenguajes, éste traduce un lenguaje formal a uno que pueda entender el procesador.

siglas en inglés (*HyperText Markup Language*) que traducido al español nos dice que es un lenguaje de marcas de hiper texto, como quedó definido en párrafos anteriores. Éste nos permite unir en un sólo documento, que llamaremos página web, textos con propiedades, imágenes, vínculos entre los objetos, etcétera.

Es una norma porque, a pesar de la existencia de otros lenguajes que permiten la creación de páginas web, todos sin excepción alguna usan sentencias de HTML.

HTML, tiene muchas ventajas pero una de las más sobresalientes es que puede revisarse o modificarse el código fuente desde cualquier procesador de texto, además de ser un código bastante fácil de aprender pues no tiene una sintaxis difícil y la estructura de sus funciones tienen una estructura muy sencilla y lógica.

Este lenguaje de etiquetas fue creado por Tim Berners-Lee, ingeniero del CERN (*Conseil Europeen pour la Recherche Nucleaire*), fue creado y desarrollado en otro lenguaje de etiquetas llamado SGML (*Standard Generalized Markup Language*) que es un lenguaje de marcas mucho más amplio que sirve de fundamento para definir otros lenguajes de marcas para propósitos más concretos así como HTML.

Así pues, HTML se puede describir también como una aplicación del estándar ISO 8879:1986 de SGML que fue formalizado en 1990 con la aparición del World Wide Web a nivel público.

VERSIONES Y EXTENSIONES:

Gracias al éxito que ha tenido HTML se han creado distintas versiones de él, las cuales son documentadas en los DTD (*Document Type Definition*) que describen las especificaciones del lenguaje, es decir, sus distintos elementos (en este caso *marcas*) y el modo en que deben ser utilizados.

Con cierta periodicidad, la IETF (*Internet Engineering Task Force*) ha venido emitiendo borradores (*drafts*) de estos DTD con nuevas propuestas para ampliar el lenguaje, ya sea incluyendo nuevos elementos o añadiendo atributos a elementos ya existentes.

Hasta la fecha se han realizado tres versiones del HTML. Sin embargo, algunas empresas de software, propietarias de los navegadores más populares de Internet, han ido añadiendo unilateralmente una serie de extensiones (exclusivas de sus navegadores) que tratan de optimizar las prestaciones del HTML estándar aunque se alejan de él. Éste ha sido el caso de *NETSCAPE* y, recientemente, también de *MICROSOFT* con el Internet explorer.

En mayo de 1996 se cerró el HTML 3.2, que es la integración de las mejores extensiones en el estándar. En esta discusión han participado todas las empresas interesadas (*IBM, MICROSOFT, NETSCAPE, NOVELL, SOFTQUAD, SPYGLASS* y *SUN-MICROSYSTEMS*) en el **cuadro 2** se muestra un cuadro con las extenciones y las versiones de este lenguaje

VERSIONES:	NOTACION:
HTML 2.0	H2
HTML 3.2	H3
EXTENSIONES:	
NETSCAPE NAVIGATOR 1.X	N1
NETSCAPE NAVIGATOR 2.0	N2
NETSCAPE NAVIGATOR 3.0	N3
MS INTERNET EXPLORER 1.0	M1
MS INTERNET EXPLORER 2.0	M2
MS INTERNET EXPLORER 3.0	M3

Cuadro 2

SERVIDORES Y CLIENTES.

Las redes que forman Internet se organizan en Servidores y Clientes. Los primeros, administrados por expertos en informática, son ordenadores conectados permanentemente a Internet y que hospedan sus distintos recursos (páginas web, programas, etcétera) alguno de tipo libre. Los segundos, los clientes, son ordenadores conectados a servidores, y que pueden ser utilizados por usuarios con menos conocimientos informáticos los cuales pueden realizar consultas, downloads[26].

HTTP.

Para la comunicación entre Servidores y Clientes en el WWW se utiliza el HTTP (*HyperText Transfer Protocol*). Su funcionamiento es el siguiente: el Cliente establece una conexión con el Servidor y le envía una petición, éste último le envía la respuesta (una página web), y se cierra la comunicación entre ambos. Aunque el navegador mantenga el documento, la conexión no permanece. Por ello se dice que el HTTP es un protocolo de transmisión *sin*

[26] V B Al proceso de descargar información ya sean datos vos y videos se lo conose con downloads

estado, es decir, no retiene información sobre la conexión una vez que la comunicación haya concluido.

EJECUCIÓN DE APLICACIONES EN EL SERVIDOR: PROGRAMAS *CGI*.

Los *estados* entre cliente y servidor deben ser gestionados para permitir enviar información a los servidores o acceder a bases de datos de forma interactiva y fue el NCSA (*National Center for Supercomputing Applications*), creador del navegador *MOSAIC*, el que desarrolló en sus servidores un interfaz denominado CGI (*Common Gateway Interface*). Gracias a éste, una serie de programas instalados en el servidor podían interactuar con el cliente. Esto fue motivo suficiente para que se revisara el HTML, incorporándose en su versión 2 los Formularios

EL HOST(Anfitrión)

El anfitrión o *Host*. es el servidor donde queda hospedada nuestra Web , existen diversos tipos de hos's algunos dan hospedaje gratuito con la única condición de mostrar publicidad y ofrecen más recursos dependiendo del número de usuarios que visiten la web o con rentas módicas te amplían tus beneficios como usuarios.

Es común la unión de dos web's por falta de espacio y entonces se puede alojar parte de la web en un host diferente o con otra cuenta el mismo.

Todo esto permite que el sistema se pueda crear de una forma barata y muchas veces más eficiente que con la programación lineal o estructurada.

I.2.3.-SOLUCIONES POR MEDIO DE LOS RECURSOS GRATUITOS.

El costo para la creación de un sistema, por lo general es alto, se requiere además de un proceso largo, casi siempre, cuando surge un problema existen tres caminos, a saber:

- Crear un sistema
- Utilizar un programa o sistema ya creado de aplicación especifica
- Contratar a una empresa para que lo cree

Cualquiera que de ellos se escoja es costoso, además de tener la desventaja del costo por licencias; pero en la actualidad, han surgido los recursos gratuitos, que como mencionamos anteriormente pueden ser utilizados sin cobro alguno, y que además se puede realizar aplicaciones con gran calidad.

Un ejemplo muy claro, son los gobiernos de Perú y USA, donde todos los sistemas se realizan con software libre.

Por lo anterior nosotros consideramos una buena opción usar recursos gratuitos para la creación de nuestra página web.

I.2.4.-ANÁLISIS COMPARATIVO

Anteriormente hemos desarrollado lo que son las necesidades de una página web, hasta el momento una de estas necesidades es la plataforma de uso, también hemos desarrollado un punto de recursos gratuitos con la intención de optimizar resultados al reducir costos.

La red de Internet permite la utilización de toda clase de recursos gratuitos, nosotros hicimos una selección preliminar que por su extensión sería un gasto innecesario de recursos introducirlo en este proyecto, pero de esta elección preliminar calificamos por su características a sólo veinticinco, los cuales forman parte de la base estructural de la plataforma de la Página web, entre ellos se encuentran visualizadores y editores de imágenes, clientes FTP (File Transfer Protocol –Protocolo de tranferencia de archivos), editores de página web, creadores de botones y documentos PDF (Archivo de texto e imágenes de poco peso o tamaño), entre otros.

Análisis comparativo de los recursos gratuitos

Editores de imágenes

Nombre: Acdsee3.1
Descripción: Visor y editor de imágenes
Tamaño: 12.988 Kb

Ventajas: Fácil utilización, con gran cantidad de utilerías para la creación de websites.
Desventajas: Es de tipo shareware con 90 días de evaluación

Nombre: Btnmania
Descripción: Programa para la creación de botones animados para websites
Tamaño: 1,622
Ventajas: Poco tamaño, creación de gif's personalizados
Desventajas: Viene en inglés

Nombre: LVIEWP1B
Descripción: Visor y editor de imágenes
Tamaño: 1,170 Kb
Ventajas: Es sencillo de usar
Desventajas: No tiene muchas aplicaciones para editar

Nombre: XnView-win-full
Descripción: Editor y visor de imágenes
Tamaño: 3,959 Kb
Ventajas: Es muy sencillo de usar
Desventajas: No tiene muchas utilerias

Compiladores y editores

Nombre: InstMsiA
Descripción: Compilador Perl
Tamaño: 1,670 Kb
Ventajas: Tamaño pequeño.
Desventajas: Su uso es complicado y viene en inglés

Nombre: Contrt14
Descripción: Programa de creacion tipo web's
Tamaño: 867 Kb
Ventajas: Su tamaño es reducido
Desventajas: Esta muy delimitado, casi no tiene funciones útiles y viene en inglés

Nombre: Cpg27
Descripcion: Programa de creación tipo web's
Tamaño: 2,956 Kb

Ventajas: Permite la creación rápida de una página con el asistente
Desventajas: No se pueden utilizar todas sus aplicaciones en la versión gratuita

Nombre: DataWeb
Descripción: Programa de creación tipo web's
Tamaño: 17,094 Kb
Ventajas: Es muy sencillo de usar
Desventajas: Su tamaño es muy grande y viene muy restringido

Nombre: hotdog65install
Descripción: Programa de creación tipo web's
Tamaño: 12,065 Kb
Ventajas: Tiene un asistente tipo Wizard
Desventajas: Su tamaño es muy grande

Nombre: OCTAVE
Descripción: Editor de HTML
Tamaño: 7,299 Kb
Ventajas: Es completamente libre
Desventajas: Su interfáz es bastante incómoda

Nombre: OptiPerl-Trial
Descripción: Compilador Perl
Tamaño: 4,265 Kb
Ventajas: Es muy fácil de usar y se puede revisar el código sin la necesidad de usar un explorador de internet
Desventajas: Viene en inglés

Nombre: perlbuilderev
Descripción: Compilador perl
Tamaño: 3,571 Kb
Ventajas: La interfáz es amigable
Desventajas: viene en inglés

Nombre: webfacilQ
Descripción: Programa de creación tipo web's
Tamaño: 660 Kb

Ventajas: Su tamaño es pequeño y es muy fácil de usar
Desventajas: Esta muy restringido

Nombre: webpositiongold
Descripción: Programa de creación tipo web's
Tamaño: 5,407 Kb
Ventajas: Fácil creación de paginas
Desventajas: Su tamaño es muy grande

Nombre: webtext10instal
Descripción: Convertidor de texto normal a código Html
Tamaño: 1,326 Kb
Ventajas: Es muy fácil y rapido de usar
Desventajas: Sólo tiene esa función

Laboratorios

Nombre: Derive
Descripción: Laboratorio virtual de matemáticas
Tamaño: 3,126 Kb
Ventajas: Muchas funciones, fácil de usar, permite la exportación de sus productos y contiene un lenguaje de programación propio
Desventajas: Sólo permite una evaluación por 30 días y viene en inglés

Nombre: easypdf
Descripción: Editor de documentos en formato pdf
Tamaño: 4,999 Kb
Ventajas: Es relativamente fácil de usar
Desventajas: Su tamaño es grande y en los documentos agrega propaganda

Nombre: FREE PDF
Descripcion: Editor de documentos en formato pdf
Tamaño: 2,022 Kb
Ventajas: Su uso es sencillo
Desventajas: Tiene muchas restricciones

Gestores de descarga y clientes Ftp

Nombre: dap5200

Descripción: Gestor de descargas
Tamaño: 1,084 Kb
Ventajas: Acelera el proceso de descargas hasta en un 40 %
Desventajas: Viene en inglés y no permite todo tipo de descargas

Nombre: fbps
Descripción: Gestor ftp
Tamaño: 1,416 Kb
Ventajas: Permite subir las páginas en parte
Desventajas: Es algo tardado

Nombre: tblspn
Descripción: Gestor ftp
Tamaño: 91 Kb
Ventajas: Su tamaño es pequeño
Desventajas: Viene en inglés

Nombre: tbftp
Descripción: Gestor ftp
Tamaño: 1,218 Kb
Ventajas: Es rapido y permite la subida de páginas en partes
Desventajas: Su interfáz no es muy amigable

Nombre: ftpvsetup
Descripción: Gestor ftp
Tamaño: 3,144 Kb
Ventajas: La interfáz amigable
Desventajas: Sólo tiene una evaluación de 30 días

Nombre: getrt45d
Descripción: Gestor de descargas
Tamaño: 2,195 Kb
Ventajas: Permite descargas desde direcciones FTP
Desventajas: No es tan rapido

Nombre: netturbo
Descripción: Gestor FTP
Tamaño: 855 Kb
Ventajas: Tamaño pequeño
Desventajas: Se desconecta mucho al subir páginas grandes

Otra de las bases fundamentales de una web es el Host. A continuación se muestra una lista de los hots más usados y calificados de 1 a 10 puntos del cual saldrá el servidor donde se alojará la página.

La forma de calificarlos fue sencilla, se abrió una lista en, yahoo México, preguntando el host que más se prefería y su calificación del 1 al 10, posteriormente, se elaboró un promedio y se muestran los resultados.

http://www.paisvirtual.com

Alojamiento de páginas Webs, ofrece ademas de una extensa clasificación temática, generar nuestra web on-line en menos de 2 minutos.8 Puntos

http://www.ciudad.com.ar

Ciudad es un portal argentino que ofrece 30 mb y una calidad excelente de velocidad de su server ,no muestra banners ,solo abre una ventanita Pop-Up[27] de 40x40 que no molesta en absoluto ,el ùnico contra de este portal es

[27] N.B. Ventana Pop-Up es una ventana que muestra publicidad de pequeño espacio y se abre cada ves que se entra al server

que aùn no permite subir archivos via FTP ,lo debes hacer manual por Upload desde el Panel de Control.9 Puntos

http://www.starmedia.com

Alojamiento de páginas web con 25 mb de espacio en servidor ,también solo muestra una ventana Pop-Up y posee una muy buena calidad de velocidad de server, te permite subir archivos de hasta 3 mb via FTP y te brinda una muy buena cantidad de recursos para webmasters gratuitos. 9 Puntos

http://www.ciudadfutura.net

Te ofrecen 30mb de espacio y si les gusta tu web puedes tener espacio ilimitado. muestra ventanas con publicidad. su server falla algunas veces y el servicio es regular. 7 Puntos

http://www.fortunecity.es

Te ofrecen 100mb para toda la vida. tiene la desventaja de no tener cliente FTP y si no es visitada la página es descargada. además de tener un servicio muy irregular.4 Puntos http://www.freeservers.com

Es uno de los más populares y pionero en el tema del alojamiento gratuito y por algo aún se mantiene, dan 30 mb de espacio y direcciones cortas, siempre están online y su Servidor FTP es rápido. El único inconveniente es la publicidad que insertan de 3 a 4 banner por página. 8.5 Puntos

http://www.civila.com

Te da espacio web sin límites y no pone banners, el espacio disponible es 30 GB. sólo pide que un enlace Gif página , este servicio es casi excelente 9 Puntos.

CAPÍTULO II: DISEÑO DE LA PÁGINA WEB Y EL DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

Hasta el momento hemos desarrollado las bases teóricas que definirán el proyecto, hemos tomado un modelo de educación por imitación de la cibernética convencional modificado, para así crear nuestro propio modelo. También hemos utilizado las bases de la TGS, la tecnología educativa y la tecnificación pedagógica para darle sustento al modelo y por último hemos dado como propuesta el uso de los recursos gratuitos como plataforma de nuestro modelo.

El primer paso para la creación de la página es la realización del producto, que ha sido determinado de la siguiente forma:

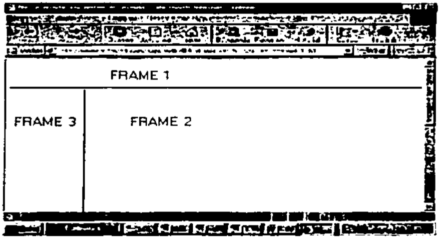
1.- Teoría y explicación

2.- Desarrollo de ejercicios

3.- Ejercicios propuestos

II.1.-DISEÑO DE LA PÁGINA WEB

Hemos decidido que la forma más didáctica y fácil para que el usuario acceda es a través de la utilización de frames[28], esto es, una página dividida en tres frames de la siguiente forma, el motivo principal es el hecho de que esta forma de presentar los contenidos, permite al usuario pasar de una a otra páginas de los contenidos sin tanto esfuerzo.



Grafica 5

En el frame 1 se cuenta con la cabecera

En el frame 2 está localizado el índice general y el particular.

El frame 3 es el visualizador de los contenidos.

[28] N.B. Un frame es una pagina incrustada en otra pagina, éstas por lo general tienen una interrelación directa.

II.1.1-PRODUCTO

En esta parte de la investigación tomamos una muestra, del produto deseado que servira como base del producto final, hemos escogido para muestra el tema de fracciones parciales, cada uno de los temas antecesores y consecuente se guiran de la misma forma

Ejemplo ________.

FRACCIONES PARCIALES

Se tiene un quebrado formado por los polinomios F(x)/G(x) donde esta operación es propia, las fracciones parciales permiten separar este quebrado en N términos (fracciones) cuyo número dependerá de la cantidad de raíces que tenga el polinomio G(x), el hecho de que sea una operación propia significa que al dividir F(x)/G(x) el resultado sea menor o igual a uno: en otras palabras el, polinomio F(x) tiene exponente menor o igual que el polinomio G(x).

En fraccione parciales existen 4 casos

PRIMER CASO:

Podemos separar el polinomio G(x) en terminos de primer grado y ninguno se repite.

Ej.-

Tenemos el polinomio:

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x^2-2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

Al cual lo podemos factorizar en

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)(x)} \text{..........2}$$

Como podemos observar el polinomio G(x) tiene únicamente términos de primer orden y ninguno se repite.

Posteriormente supondremos que la función puede expresarse como una suma de polinomios multiplicados por una constante que no conocemos

$$\text{Ec 1= Ec 2=} \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X+2} + \frac{C}{X} \text{...........3}$$

Resolviendo la suma de polinomios tenemos

$$\frac{A}{X+1} + \frac{B}{X+2} + \frac{C}{X} = \frac{A(X+2)X+B(X+1)(X)+C(X+1)(X+2)}{(x+1)(x+2)(x)} \text{.....4}$$

Como la Ec 4 es igual a la Ec 3 y la Ec 3 es a su vez igual a la Ec 2; podemos igualar la Ec 4 con la Ec 2: con lo cual tendríamos:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)(x)} = \frac{A(X+2)X+B(X+1)(X)+C(X+1)(X+2)}{(x+1)(x+2)(x)} \text{.............5}$$

Podemos observar que los denominadores de ambas funciones son iguales por lo cual podemos eliminarlos quedándonos:

$$x^2+2 = A(X+2)X+B(X+1)(X)+C(X+1)(X+2) \text{ ....6}$$

Desarrollando la parte derecha tendríamos

$$x^2+2 = Ax^2 + 2AX + Bx^2 + BX + Cx^2+3CX+2C \text{..........7}$$

Factorizando la parte derecha del polinomio 7 tenemos

$$x^2+2 = x^2(A+B+C) + X(2A+B+3C) + 2C \text{.................8}$$

Completando la parte izquierda obtenemos:

$$x^2+ 0X +2 = x^2(A+B+C) + X(2A+B+3C) + 2C \text{.................9}$$

Cuando igualamos dos polinomios tenemos que para que cumplan la igualdad los coeficientes de ambos deben ser iguales por lo tanto:

$1 = A + B + C$ 10
$0 = 2A + B + 3C$ 11
$2 = 2C$ 12

De esta forma nos queda un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas por lo cual si tienen solución y se pueden resolver por cualquier método de solución de sistemas de ecuaciones en este caso utilizaremos sustitución directa.

De la Ec 12 despejamos a C y tenemos que

$$C = \frac{2}{2} = 1$$

Como ya tenemos el valor de C lo sustituimos en las Ec 10 y la Ec 11 y obtenemos que

$1 = A + B + 1$ 13
$0 = 2A + B + 3(1)$......14

Despejando tenemos
$0 = A + B$...........15
$-3 = 2A + B$........16
Multiplicamos toda la ec 16 por -1 para que no se afecte y tenemos

$3 = -2A - B$.......17

Sumamos las ecuaciones 17 y 15

$$\begin{array}{l} 0 = A + B \\ \underline{3 = -2A - B} \\ 3 = -A \end{array}$$

Por lo tanto

$A = -3$

De la Ec 15 tenemos que

$B = -A$

Por lo tanto

$B = 3$

Sustituyendo en la ec 3

Sustituyendo en la ec 3

$$\frac{-3}{X+1} + \frac{3}{X+2} + \frac{1}{X}$$

Y con esto ya hemos separado la función original.

Para comprobarlo simplemente resolvemos el quebrado

$$\frac{-3}{X+1} + \frac{3}{X+2} + \frac{1}{X} = \frac{-3(X+2)X+3(X+1)(X)+(X+1)(X+2)}{(x+1)(x+2)(x)}$$

Desarrollando tenemos

$$\frac{-3(X+2)(X)+3(X+1)(X)+((1)(X+1)(X+2)}{x^3+3x^2+2x}$$

Reduciendo tenemos

$$\frac{x^2+2}{x^3+3x^2+2x}$$

Y esta ecuación es completamente igual a la Ec 1

Este ejemplo nos muestra la forma en que estarán los contenidos, se empieza con una introducción explicatoria o teórica para continuar con resolución de ejercicios y por ultimo ejemplos propuestos.

II.1.3.- DETERMINACIÓN DE RECURSOS

El análisis de un sistema –invariablemente- necesita de una determinación de recursos; un análisis comparativo de la situación actual y la situación futura, nos permitirá obtener dos posibles resultados: los recursos son suficientes y necesarios o los recursos son insuficientes.

Existen dos parámetros para la realización de este tipo de análisis, los cuales nos ayudarán a realizar la estimación de costos.

Determinación de recursos

- Objetivo: Es el fin último de todo el proyecto, la o las soluciones deberán estar enfocadas siempre a éste.
- El entorno: Un panorama general de dónde nos encontramos técnicamente en el momento en que se presenta la necesidad

Es necesario aclarar que el objetivo general es crear una página web que ayude a la formación de alumnos con bases fundamentadas.

Existen en general cuatro tipos de recursos que se deben analizar para lograr un resultado óptimo del sistema:

Recursos

- -Recursos Humanos.
- -Recursos Técnicos
- -Recursos Materiales.
- -Recursos Financieros.

Recursos humanos: Es el material humano disponible o necesario para la realización de cualquier proyecto.

Recursos técnicos: Son las características de los recursos informáticos con los que se cuenta o sen deben contar.

Recursos materiales: Son los recursos adicionales como papelería, equipo de oficina, consumibles para equipo de cómputo, entre otros, del que podemos hacer uso para prestar el servicio.

Recursos Financieros. Con esto nos referimos al capital existente que se tiene para la prestación de los servicios. Si éste es deficiente, los servicios y productos que se otorgan pueden presentar deficiencias por falta de inversión en los mismos.

II.1.3.1.-RECURSOS HUMANOS

Desgraciadamente este proyecto de investigación no cuenta con recursos financieros, se trata únicamente de un proyecto de investigación por parte de la división de estudios de posgrado, con apoyo de los materiales disponibles.

Es por ello que los recursos humanos simplemente están dados, en este caso, por únicamente dos personas que desarrollan el proyecto exclusivamente desde la planeación hasta el desarrollo.

Otra parte de los recursos humanos está conformado por investigadores y docentes del área de la división de estudios de posgrado de la ENEP Aragón.

II.1.3.2.-RECURSOS TÉCNICOS

Para este proyecto se cuenta con:

DISPOSITIVOS	CAPACIDAD
PROCESADOR AMD K6	300 MHz
Memoria RAM	128
HDD (DISCO DURO)	4.2 GB
CD-ROM	52X
CD-W	8X4X32

DISPOSITIVOS	CAPACIDAD
PROCESADOR AMD K6	500 MHz
Memoria RAM	128
HDD (DISCO DURO)	40 GB
CD-ROM	52X

DISPOSITIVOS	CAPACIDAD
PROCESADOR AMD DURON	800 MHz
Memoria RAM	128
HDD (DISCO DURO)	20 GB
CD-ROM	52X
CD-W	8X4X32

DISPOSITIVOS	CAPACIDAD
IMPRESORA HP LASSER JET 1100	10 PPM
HP DESK JET 695	8 PPM
LEXMAR Z22	8 PPM

DISPOSITIVOS	CAPACIDAD
GENIUS VIVID COLOR III	1600X800 DPI
GENIUS VIVID COLOR 1000	1600X800 DPI

Otros dispositivos fueron eliminados por su irrelevancia

II.1.3.1.-RECURSOS MATERIALES

Los insumos necesarios para la creación de este proyecto son:

- CARTUCHOS
- TONER
- HOJAS
- C.D. Virgenes
- Disquetes
- COPIAS

Otros insumos fueron eliminados por su irrelevancia

II.1.3.1.-RECURSOS FINANCIEROS

Uno de los problemas más grandes en este tipo de proyectos están dados por las limitantes de los recursos financieros es por ello que se decidió realizarlo con recursos gratuitos.

II.1.5.- CONCLUSIONES DE LOS ANÁLISIS

A través de los análisis realizados en los puntos anteriores y en el trabajo en su totalidad, nos hemos preocupado por reducir al máximo los costos de los recursos conque no contamos y maximizar por medio de la utilización de insumos y factores técnicos los recursos conque sí contamos.

También hemos procurado encontrar la mejor forma de optimizar factores que no están a nuestro alcance, aprovechando los conocimientos acumulados durante nuestra formación profesional, para reducir costos y -por ende- maximizar los beneficios de este trabajo.

Finalmente, llegamos a la conclusión de que el sistema propuesto se puede realizar de una manera altamente satisfactoria a través de las propuestas planteadas a lo largo de nuestro proyecto de tesis, logrando así el objetivo inicial de esta investigación.

II.2.-DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

El desarrollo de los contenidos fue quizás el proceso más largo del trabajo, el tiempo de recolección, análisis y digitalización fue de casi 3 meses, además, solo se encuentra en pruebas beta, la continuación y mantenimiento del sistema continua, hasta la muerte del mismo.

Todos los contenidos de la página se encuentran en el anexo B de esta tesis y en el C.D. que incluye.

Cada uno de los temas fueron desarrollados a través de conocimientos propios, además de bibliografía, que de igual modo se encuentra anexada.

CAPÍTULO III.-LA IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA Y PUESTA A PUNTO

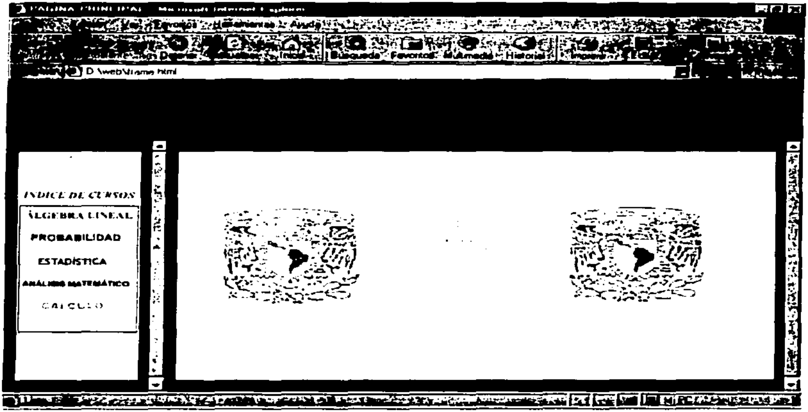
Hasta el momento hemos analizado, elegido y modificado el modelo de aprendizaje de imitación para poder crear nuestro sistema, además de, investigar diversos sustentos pedagógicos e implementarlos en nuestro modelo modificado; también desarrollamos los contenidos de los cuatro cursos mencionados de los cuales los formatos se encuentran en los anexos.

En esta parte del trabajo de investigación se dará una muestra del producto final y como es que se llevo a cabo su implantación en el servidor elegido.

III.1.-PRODUCTO FINAL

Para la elaboración del sistema se requirieron de 576 archivos de los cuales 444 archivos son tipo GIF (archivo de grafico de bajo peso o tamaño), 19 archivos tipo DOC para el texto necesario de la web, 2 archivos tipo BAK, 7 archivos con extensión SWF necesarios para las animaciones y 3 SWI de igual forma para las animaciones. Todo distribuido en 19 carpetas.

La forma de utilizar el sistema es la siguiente



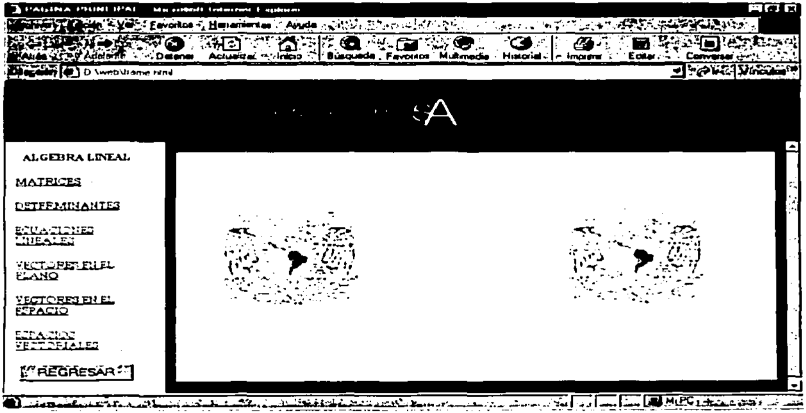
Grafica 6

en el frame2 puede seleccionar el usuario cual quiera de los 5 temas que son, a saber:

- Álgebra lineal
- Probabilidad
- Estadística
- Análisis matemático

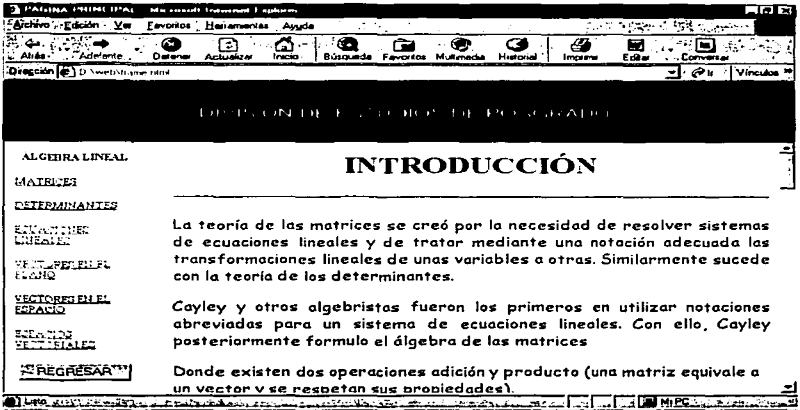
- Cálculo

Cualquiera de las opciones deseadas, como la que se muestra a continuación en la **Grafica 7**



Grafica 7

en el frame2 nos muestra el submenú del cual el usuario puede elegir el que desee



Grafica 8

en el frame3 entonces se muestra la información que desea el usuario; cabe mencionar que cada uno de los temas esta ordenado de una forma sistemática, pero usuarios mas avanzados pueden saltarse temas.

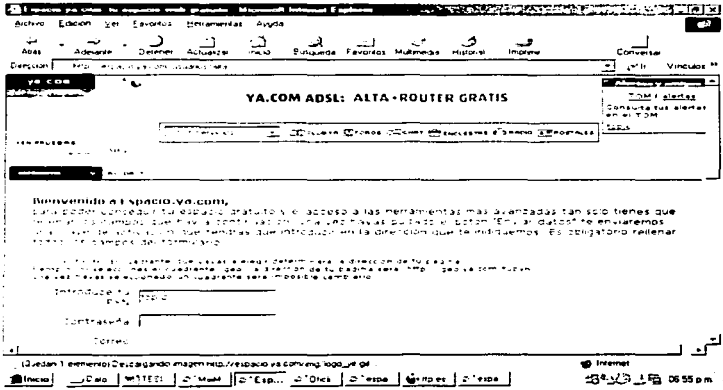
Este es en si el funcionamiento del sistema y una copia del producto final se anexa en el presente trabajo

III.2.-IMPLANTACIÓN DE LA PÁGINA EN UN PORTAL

Para la implantación de la página en un portal, como mencionamos anteriormente realizamos un análisis comparativo la elección que decidimos fue YA.COM en esta parte del trabajo describimos paso a paso como fue que se implanto la página

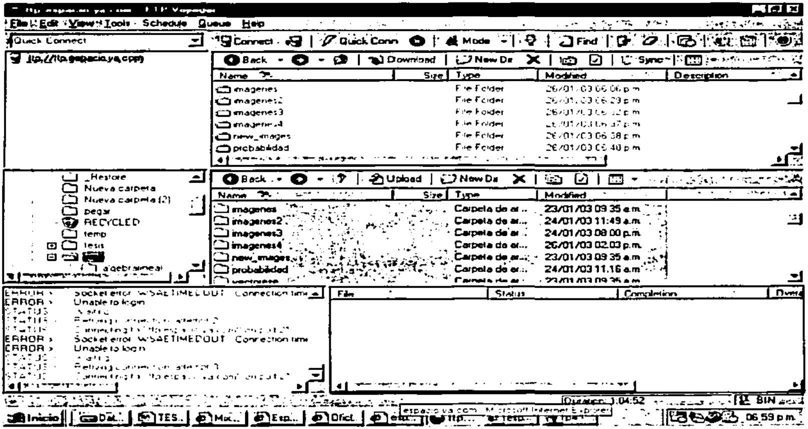
Paso 1. Registro

Se tuvo que llenar un formulario para poder obtener el dominio en el cual se implantara la página



Grafica 9

El siguiente paso fue darla de alta y subirla mediante un cliente ftp:



Grafica 10

Por último se creo la dirección de acceso vía http://sapiens.ya.com/topic/index.html

CONCLUSIONES

Como todos los universitarios sabemos, el trabajo final de nuestra formación profesional concluye con una tesis. Este trabajo tiene como finalidad, primero, demostrar los conocimientos y habilidades adquiridos a lo largo de nuestros estudios y, segundo, retribuir a nuestra *Alma mater* algo de lo que nos ofreció durante nuestra estancia en ella; esta retribución se hace acrecentando su caudal de conocimientos, lo que permitirá que esta honorable Institución cumpla con su cometido, esto es, enseñar, investigar y difundir el conocimiento.

Así pues, para poder cumplir con ese noble compromiso, en este trabajo de investigación nos propusimos alcanzar los siguientes objetivos:

1° Facilitar el acceso a los estudiantes de posgrado a las matemáticas adecuadas para los estudios de la Maestría en Economía.

2° Presentar una vía a esta disciplina a través de un medio idóneo al que se pueda acceder con facilidad sin considerar el horario y la distancia.

3° Presentar la información de manera sencilla, lógica y gradual, de tal modo que el estudiante no requiera de un mentor para aclarar sus dudas y alcanzar sus metas.

Para conseguir los propósitos enumerados arriba, los autores de este trabajo nos propusimos crear un modelo de educación a distancia que – como ya dijimos- ayudará a los alumnos egresados de la licenciatura en Economía a obtener las necesarias bases matemáticas, de una forma amigable y sencilla de entender, para lo cual tuvimos que enfrentar diversos conflictos que solucionados, nos permitieron elegir el mejor camino. La solución consistió en la creación de una página Web, cuya dirección es http://sapiensya.com/topic/index.html.

Es importante señalar que la configuración de esta página se hizo a partir de recursos gratuitos que, como ya explicamos al inicio de este trabajo, son los que más convienen por poseer cualidades tales como su facilidad para acceder a ellos, la simplicidad en su manejo y, obviamente, su gratuidad.

Ahora bien, para organizar el contenido de la página de un modo lógico, simple y gradual recurrimos a la Pedagogía, de la cual tomamos el modelo conocido como Tecnología Educativa pues fue el método que más se apegó a nuestras necesidades y propósitos (aunque modificado y adaptado a nuestros requerimientos), tomando en consideración que resulta plenamente viable reestructurar o transformar las ciencias, los métodos y las técnicas para su mejor aprovechamiento al espacio social y cultural en el que se piensa implementar dicho modelo.

En esta parte nos dimos a la tarea de encontrar la forma en que se aprende, además de la forma en que se debe enseñar, para después articularlo; el resultado es la propuesta que presentamos y que –desde nuestro punto de vista es clara y sencilla; sin embargo, los resultados no podrán ser apreciados en este momento pues se trata de un proyecto a mediano plazo que primero tendremos que probar para poder ir haciendo las modificaciones pertinentes de acuerdo a las necesidades de los usuarios que decidan recurrir a esta herramienta.

Finalmente, deseamos dejar constancia de que –durante la elaboración de nuestro trabajo- siempre tuvimos presente que un profesionista no es aquella persona que sabe mucho, sino aquél cuyos conocimientos sabe aplicar y lleva la consigna de siempre aprender más y más sin la ayuda de otra persona, motivo por el cual esperamos haber contribuido para cumplir con esa expectativa.

Por ultimo, es obligado señalar que sin los conocimientos obtenidos a lo largo de nuestra formación académica, no habríamos podido finalizar este proyecto por lo que deseamos agradecer a todos y cada uno de nuestros profesores la oportunidad de haberlos adquirido.

ANEXO A: DOCUMENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS

MATRICES
INTRODUCCIÓN

La teoría de las matrices se creó por la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones lineales y de tratar mediante una notación adecuada las transformaciones lineales de unas variables a otras. Similarmente sucede con la teoría de los determinantes.

Cayley y otros algebristas fueron los primeros en utilizar notaciones abreviadas para un sistema de ecuaciones lineales. Con ello, Cayley posteriormente formulo el álgebra de las matrices

Donde existen dos operaciones adición y producto (una matriz equivale a un vector y se respetan sus propiedades).

a) Producto de un escalar por una matriz

b) Producto entre matrices

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - - - - - & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & - - - - - & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & - - - - - & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matriz es un arreglo rectangular de números o funciones, sujeta a reglas de operación. Un arreglo de este tipo puede representarse por:

Los números a funciones aij de los arreglos anteriores se llaman elementos de la matriz. Existen diversas formas de representar a las matrices. Nosotros emplearemos la notaci6n siguiente

[aij]

Los subíndices i y j del elemento aij de una matriz nos indican respectivamente, el renglón y la columna en los que está colocado aij. Si no se desea distinguir entre renglón y columna se llaman líneas de la matriz. El subíndice i corre desde 1,2,....m y el. subíndice j corre desde 1,2.. ...n. La matriz (iii) con m renglones y n columnas se conoce como matriz de orden mxn. En ocasiones m=n y de aquí se dice que se tiene una matriz cuadrada de orden n. Cuando (iii) es de orden n. los elementos a11,a22,...ann forman la diagonal principal. Posteriormente daremos con mayor detalle algunos conceptos importantes de las matrices cuadradas. Por otra parte, también se acostumbra representar a (iii) como:

[aij] (m,n)

El siguiente ejemplo permite ver con mayor claridad, la ventaja de emplear notación matricial

1.- Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$4x + 6y - 7 = 0$
$8x - 2y + 3 = 0$

o bien

$4x + 6y = 7$
$8x - 2y = -3$

de aquí obtenemos la matriz de orden 2 la cual es:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

que se le conoce coma matriz de coeficientes del sistema. La matriz 2x3

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

que contiene los coeficientes de x e y y también las constantes se le conoce como aumentada del sistema.

2.- De la siguiente matriz 2x3 identificar sus renglones y sus columnas.

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sus renglones son:
$[2 \quad -6 \quad 7]$
$[5 \quad 0 \quad 4]$

y sus columnas son:
$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

IGUALDAD DE MATRICES

Definición.- Dos matrices del mismo orden [aij] y [bij] son iguales si y sólo si

aij =bij para toda i y j

La igualdad de matrices satisfacen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva del álgebra ordinaria. ejemplos:

1.- si

A = B

entonces $A = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{9} & 2 \\ \frac{6}{2} & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

2.- Si
$C = \begin{bmatrix} x & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Entonces C = D solo cuando x = 6

3.- Si

$E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces $E \neq F$

3.- Si
$A = \begin{bmatrix} x+y & 2z+y \\ x-y & z-w \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

entonces para que A = B se requiere
x + y = 3 ------(1)

$2z + w = 5$ ------(2)
$x - y = 1$.------(3)
$z - w = 4$ ------(4)

donde resolviendo (1) y (3) se tiene que
$x = 2$ $y = 1$

y resolviendo (2) y (4) se tiene que
$z = 3$ $w = -1$

es decir, la solución del sistema es
$x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $w = -1$

sustituyendo estos valores en A

$$A= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 2z+y \\ x-y & z-w \end{bmatrix}$$

por consiguiente A = B

SUMA DE MATRICES

Definición.-. Sean A = [aij] y b = [bij] del mismo orden. La suma de dos matrices está definida por

$A+B = [aij + bij]$

Es decir, la suma de dos matrices del mismo orden se obtiene sumando los elementos correspondientes.

Se dice que dos matrices del mismo orden son conformables para la suma.

Aquí es válida la propiedad de cerradura con respecto a la suma, es decir, puesto que la suma de dos matrices mxn cualesquiera es nuevamente una matriz mxn, se dice que el conjunto de todas las matrices mxn es cerrado con respecto a la suma.

Las matrices también satisfacen las leyes de conmutatividad y asociatividad

La suma de matrices de diferente orden no está definida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (1+7) & (2+0) & (-4+3) \\ (3+6) & (2+5) & (0+8) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Para el caso de la resta de matrices no consideramos necesario ejemplos ya que es evidente el procedimiento

MATRIZ CERO O NULA

Una matriz cuyos elementos sean todos cero se llama matriz cero o nula y se representa por 0. Cuando se necesite destacar el orden se representa par 0n o por 0mxn

Si es del mismo orden que la matriz A[aij] se tiene que

$A + 0 = A$

esto es, la matriz cero satisface la propiedad algebraica de elemento idéntico para la adición.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ----- & 0 \\ 0 & 0 & ----- & 0 \\ 0 & 0 & ----- & 0 \\ --- & --- & ----- & --- \\ 0 & 0 & ----- & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ UNIDAD O MATRIZ IDENTIDAD

Una matriz cuadrada de orden n con unos como elementos de la diagonal principal y ceros como elementos que no están en la diagonal, representada por In se llama matriz unidad ó matriz identidad.

Por ejemplo la matriz unidad de orden 4 es

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

La matriz I es similar al escalar 1. para toda matriz cuadrada de orden n. se tiene que

$AI = IA = A$

La matriz αI, para un escalar α, se llama una matriz escalar. La matriz escalar es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son α y de todas las demás componentes son cero.

$$\alpha I_4 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Es una matriz cuadrada cuyos elementos debajo de la diagonal principal son todos cero

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Es una matriz cuadrada cuyos elementos encima de la diagonal principal son todos cero

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Es una matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son todos cero, es decir, $a_{ij} = 0$ para toda $i \neq j$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

TRAZA DE UNA MATRIZ

La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A se llama la traza de A

MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

La multiplicación de un escalar α por la matriz A, es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por α. Esta multiplicación se representa por αA

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \alpha = 4$$

Entonces

$$\alpha A = 4A = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 12 \\ 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES.

Anteriormente ya describimos como sumar dos matrices y como multiplicar un escalar por una matriz. Observamos que no es muy difícil efectuar tales operaciones del álgebra matricial, en cambio cuando multiplicamos dos matrices veremos que existe una mayor dificultad.

Definición. Sea A una matriz de orden mxp y B una matriz de orden pxn. La multiplicación AB se define entonces como la matriz de orden mxn, cuyo elemento del i-ésimo renglón y la j-ésima columna se obtiene multiplicando los elementos del i-ésimo renglón de A por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de B, sumando después los resultados

Para mayor claridad veamos lo anterior en forma simbólica

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ..a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Observaciones importantes.

a) La matriz que resulta de multiplicar AB. tiene el mismo número de renglones que la matriz A y el mismo número de columnas que la matriz B.

b) El número de columnas de A y el número de renglones de B deben ser iguales si esto no sucede quedarían algunos elementos sin multiplicarse es decir. no podrían multiplicarse con los que le corresponden. De lo anterior se deduce que si el número de columnas de una matriz A es igual al numero de renglones de una matriz B entonces A es conformable con B para la multiplicación.

c) La multiplicación de matrices en general no es conmutativa es decir

$AB \neq BA$

Hay algunos casos. en que si es conmutativa

d) La multiplicación de matrices es asociativa

$(AB)C = A\,(BC)$

donde.

$A = [a_{ij}]$ de grado mxn
$B = [b_{jk}]$ de grado nxp
$C = [c_{kr}]$ de grado pxq

La multiplicación de matrices es distributiva con respecto a la adición. esto

$A\,(B+C) = AB+AC$

Ejemplo:
Multiplicar las siguientes matrices

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1)(1)+(2)(0) & (1)(1)+(2)(2)\\ (3)(1)+(4)(0) & (3)(1)+(4)(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 11\end{bmatrix}$$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ.

La transpuesta de una matriz A."se obtiene intercambiando los renglones por las columnas y se representa por A' Si la matriz A es de orden mxn, entonces A' es una matriz de orden nxm.

Ejemplo.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

la matriz transpuesta es

$$A'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades. Si A' y B' son las transpuestas de A y B y si k es un escalar, entonces

a) $(A')' = A$

b) $(A+B)' = A'+B'$

c) $(AB)' = B'A'$

d) $(kA)'=kA'$

Si A es una matriz cuadrada entonces A' también es una matriz cuadrada.

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad A'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRICES SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS

Matriz simétrica. Una matriz simétrica A es una matriz cuadrada tal que

$$A = A'$$

Lo que quiere decir que A es simétrica si y sólo si. $a_{ij} = a_{ji}$ para todos los pares de subíndices

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$A = A'$

Matriz antisimétrica. Una matriz antisimétrica A es una matriz cuadrada tal que

$A = -A'$

Lo que quiere decir que A es antisimétrica si y sólo si, $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos los pares de subíndices

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = -A'$

Observaciones

1) Para verificar si es una matriz simétrica consideramos la matriz principal y observamos que los elementos de cada lado sean simétricos

2) Para verificar si es matriz antisimétrica, su diagonal principal debe ser cero y sus elementos antisimétricos

Propiedades. Si A es una matriz simétrica y k un escalar entonces

a) kA es simétrica
b) $AA' = A'A$
c) A^2 es simétrica ($(A^2)' = A^2$)

Si A es una matriz antisimétrica y k un escalar entonces

a) kA es una matriz antisimétrica
b) $AA' = A'A$
c) A^2 es simétrica

Por otra parte, una matriz cuadrada A puede expresarse como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica. Además está expresión es única.

MATRICES HERMITIANAS Y ANTIHERMITIANAS

Antes de mencionar que es una matriz hermitiana y antihermitiana, definiremos que es una matriz compleja

Una matriz se le conoce como matriz real si y sólo si, todos sus elementos son reales. En las aplicaciones frecuentemente se presentan las matrices simétricas reales. Hasta ahora hemos tratado con matrices reales pero existen también otras de importancia y son aquellas que contienen elementos complejos. A este tipo se les conoce como matriz compleja. Cuando los elementos de una matriz compleja A son reemplazados por sus conjugados complejos, la matriz resultante se llama matriz conjugada y se representa por A. De esto se observa claramente que una matriz A es real si y sólo si $A = \bar{A}$. La transpuesta de $\bar{A}$ es decir $(\bar{A})'$ es llamada conjugada transpuesta o transjugada de A y se representa por A^*.

Ejemplo

Matriz compleja $A = \begin{bmatrix} 2+i & 4 \\ 3-i & -i \end{bmatrix}$

Matriz conjugada $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 4 \\ 3+i & i \end{bmatrix}$

Matriz transjugada $A^* = \begin{bmatrix} 2-i & 3+i \\ 4 & i \end{bmatrix}$

Propiedades. Si A y B son matrices complejas y su conformabilidad se satisface, entonces

1) $\overline{(\bar{A})} = A$
2) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$
3) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$
4) $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$
5) $(\overline{A'}) = (\bar{A})'$

Propiedades. Si A y B son matrices complejas y su conformabilidad se satisface, entonces

1) $(A^*)^* = A$

2) $(A+B)^* \; A^* + B^*$
3) $(AB)^* = A^* \; B^*$
4) $(cA)^* = cA^*$

Definición. Una matriz compleja es <u>antihermitiana</u> cuando A = A*

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i & 2-i \\ -i & 4 & 2 \\ 2+i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -i & 2+i \\ i & 4 & 2 \\ 2-i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$A^* = \begin{bmatrix} 3 & i & 2-i \\ -i & 4 & 2 \\ 2+i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces A es hermitiana porque A = A*

Observación importante. Para ser una matriz herminitiana debe ser matriz cuadrada y además las componentes de la diagonal principal deben ser elementos reales. Por otra parte, los elementos de uno y otro lado de la diagonal principal, deben ser complejos conjugados

Definición. Una matriz compleja es antihermitiana cuando A = - A*
Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} i & 3+i \\ -3+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -i & 3-i \\ -3-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & -3-i \\ 3-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A^* = \begin{bmatrix} i & 3+i \\ -3+i & 0 \end{bmatrix}$$

entonces A es antihermitiana porque A = - A*

Observación importante. Para ser una matriz antihermitiana debe ser matriz cuadrada y además las componentes de la diagonal principal deben ser elementos imaginarios o ceros.

Propiedades. Si A es una matriz hermitiana, entonces

1) iA y −iA son antihermitianas
2) AA* = A*A
3) A^2 es hermitiana
4) A puede expresarse como A=M+iH donde M es real y simétrica y don de H es real y antisimétrico. Por otra parte está expresión es única

Propiedades. Si A es una matriz antihermitiana, entonces

1) iA y −iA son hermitianas
2) AA* = A*A
3) A^2 es hermitiana
4) A puede expresarse como A=H+iM, donde M es real y simétrica y don de H es real y antisimétrico. Por otra parte está expresión es única

Propiedad. Una matriz compleja cuadrada puede expresarse como la suma de una matriz hermitiana y una matriz antihermitiana. Por otra parte, esta expresión es única

Propiedad. Cada matriz compleja cuadrada S puede expresarse como S=A+iB don de A y B son matrices hermitianas. Por otra parte, esta expresión es única

MATRIZ INVERSA

Definición. Si para una matriz A de orden nxn existe una matriz de orden nxn, representada por A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

entonces A^{-1} es la matriz inversa de A con respecto a la multiplicación

Si una matriz de orden nxn tiene una inversa multiplicativa, entonces esta inversa es única

La relación anterior es simétrica, es decir, si A^{-1} es la inversa de A, entonces A es la inversa de A^{-1}

Por otra parte no todas la matrices tienen matriz inversa

Para distinguir entre matrices que tienen inversas y las que no tienen, utilizaremos la siguiente definición

Definición. Una matriz A de orden nxn se dice invertible (o no singular) si A^{-1} existe y no invertible (o singular) si a no tiene inversa

Ejemplo

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedades

1) Si A y B son del mismo orden y son invertibles entonces $(AB)^{-1}$ existe. Por otra parte

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_q$ son del mismo orden y son invertibles, entonces $(A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_q)^{-1}$ existe. Por otra parte

$(A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_q)^{-1} = A_q^{-1} \ldots\ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$

3) Si a es invertible, entonces A^{-1} es invertible y por otra parte

$(A^{-1})^{-1} = A$

Si conocemos la matriz inversa de una matriz dada, esta puede aplicarse a la resolución de ciertos sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas
AX=B

Si A^{-1} existe, multiplicamos ambos miembros por A^{-1}

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

Asi $A^{-1}B$ es una matriz columna única que nos da los valores de todas las x. s. Con lo anterior hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema. Si A es invertible, entonces el sistema lineal AX=B tiene la solución única
$X = A^{-1}B$

MATRIZ ESCALONADA

Una matriz A es una matriz escalonada si el número de ceros anteriores al primer elemento distinto de cero de una fila crece fila por fila hasta llegar a filas en las que todos los elementos son iguales a cero.

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5 & 0 & 4 & -3 & 8\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Los elementos principales de la matriz escalonada A son los elementos 3, 6 y 8.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Los elementos principales de la matriz escalonada B son los elementos 1 y 8.

PARTICIÓN DE MATRICES O MATRICES POR BLOQUES

En diversas ocasiones es conveniente subdividir o efectuar una partición de una matriz A en varias matrices pequeñas llamadas bloques de A. También a los bloques se les conoce con el nombre de submatrices de la matriz original.

La forma en que debe efectuarse la partición de una matriz se indica por rectas horizontales y verticales punteadas. Por otra parte, una matriz puede ser dividida en bloques o submatrices de diferentes formas.

En el siguiente ejemplo haremos varias particiones para ilustrar de la mejor forma posible lo antes mencionado

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 0 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

La importancia de la partición en bloques resulta de que las operaciones sobre matrices por bloques se pueden obtener efectuando las operaciones con los bloques, como si éstas fueran los elementos de las matrices, esto es, si deseamos tratar estos conjuntos de elementos como matrices, debemos sujetarnos a todas las leyes del cálculo con matrices. Para aclarar lo anterior veamos el siguiente

Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Efectuar el producto AB en bloques

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\end{matrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ORTOGONAL Y MATRIZ UNITARIA

Anteriormente analizamos algunas propiedades de las matrices A para las cuales $A = A'$ y de las matrices A para las cuales A=A*. Ahora describiremos las propiedades de las matrices A para las cuales $A^{-1} = A'$ y para las cuales $A^{-1} = A^*$

Definición. Una matriz es ortogonal si

$$A^{-1} = A^t$$

Para ser ortogonal una matriz deberá ser cuadrada e invertible.

Propiedad. Una matriz A de orden nxn es ortogonal si y sólo si

$$A^t A = I_n$$

Definición. Una matriz A de orden nxn es unitaria si

$$A^{-1} = A^*$$

Propiedad. Una matriz A de orden nxn es unitaria si y sólo si

$$A^* A = I_n$$

Posteriormente cuando describamos como obtener A^{-1} podremos dar algunos ejemplos. Por otra parte, no hay que confundir una matriz unitaria con la matriz unidad.

DETERMINANTES

INTRODUCCIÓN

Gran parte de la teoría de determinantes es muy útil para el estudio del álgebra de matrices.

A toda matriz cuadrada A se le asigna un escalar bien definido llamado el determinante de A. Por lo regular se representa por

1. $\det(A)$
2. $|A|$

Para definir un determinante debemos considerar lo que es una permutación.

PERMUTACIÓN

Si tenemos una serie de enteros positivos diferentes en orden creciente, diremos que tienen un orden natural. Por ejemplo, 1, 2, 3, 4; 2, 5, 7, 9. También se pueden escribir sin comas pero al leerlos si hay que considerarlas.

Los seis conjuntos de enteros

123	213	312
132	231	321

Se llaman permutaciones de los enteros 123. Si cada una de las j1,j2, ..., jn representa uno de los enteros del 1 al n y si cada uno de los enteros de 1 a n aparece una vez, y solamente una, entre las j, entonces llamamos al conjunto de enteros j_1, j_2, ... ,jn permutación de los enteros de 1 a n. Con esto obtenemos el resultado importante: Existen n permutaciones de los enteros positivos. Para tener una mayor descripción veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplos

En 12 hay 2! = 2 * 1 = 2 permutaciones
En 123 hay 3! = 3 * 2 * 1 = 6 permutaciones
En 1234 hay 4! = 4•3•2•1 = 24 permutaciones.

INVERSIÓN

En una permutación de los enteros positivos desde 1 hasta n un entero puede preceder a otro menor. Cuando esto sucede, se dice que la permutación contiene una inversión. El número total de inversiones en una permutación se determina contando el número de enteros menores que siguen a cada entero de la permutación.

Ejemplo.

Consideremos la permutación

614325

está tiene 8 inversiones ya que al 6 le siguen 1, 4, 3, 2 y 5; al 4 le siguen 3 y 2; al 3 le sigue el 2.

Una permutación se define como par o impar si el número total de inversiones en ella es par o impar. El orden natural 1 2 3 . . . n es una permutación par, pues el número de inversiones es el número par cero.

La permutación 4312 tiene cinco inversiones ya que al 4 le siguen 3, 1 y 2; al 3 le siguen 1 y 2, por consiguiente es una permutación impar. Cuando dos permutaciones son pares o impares, se dice que tienen la misma paridad. Cuando una es par y la otra impar, se dice que tienen una paridad opuesta.

SÍMBOLO EPSILON

Para cada permutación j1. j2 . . . jn de los enteros 1 a n. definimos un símbolo épsilon de la siguiente manera.

$$\left(\varepsilon j_1 j_2 \cdots j_n \right) = \begin{cases} 1 \text{ si } j_1 j_2 \ldots j_n \text{ es par} \\ -1 \text{ si } j_1 j_2 \ldots j_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Posteriormente veremos la aplicación del símbolo anterior.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Sea A = [a i j] una matriz cuadrada de orden nxn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Para definir el determinante de A. es: decir. A se consideran n elementos aij de tal forma que uno y sólo uno elemento pertenece a cada renglón y uno y sólo un elemento pertenece a cada columna.

Con estos elementos formamos el producto. conservando los subíndices del renglón en. el orden natural

$$a_{1j1} a_{2j2} \cdots a_{njn} \; [1]$$

esto es. donde los factores pertenecen a renglones sucesivos y. por lo tanto. los primeros subíndices están en él orden natural 1. 2. 3. . . . . n

Por otra parte. como los factores pertenecen a columnas diferentes: la sucesión de los segundos subíndices forma una permutación. Es decir. en el producto [1]. j1j2...jn será una permutación de los enteros 1 hasta n ya que seleccionamos un elemento de cada columna. Esto nos conduce a decir que la matriz A puede formar n! de tales productos.

Ahora nuestro producto [1] puede multiplicarse por ε Esto equivale a multiplicar el producto por 1 si j1j2 es una permutación par y por -1 si es una permutación impar, en consecuencia se tiene.

$$\varepsilon j_1 j_2 \cdots j_n \quad a_{1j1} a_{2j2} \cdots a_{njn}$$

Después de lo anterior, formamos uno a uno dichos términos por cada permutación posible j1 j2 . . .jn y después sumamos los resultados para obtener A

Definición. El determinante de la matriz cuadrada A de orden nxn representado por A, es la suma calculada sobre todas las permutaciones j1j2 . . .jn

$$A = \sum_{(j)} \varepsilon j_1 j_2 \cdots j_n \quad a_{1j1} a_{2j2} \cdots a_{njn}$$

El símbolo (j) significa que la suma debe tomarse solamente sobre las n! permutaciones j1 j2. . .jn de 1, 2, ... n

Se dice que el determinante de la matriz cuadrada A de orden nxn, es de orden nxn y se representa por

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

el determinante es un escalar definido en forma única. Se observara posteriormente que, en el caso de las matrices de orden 2, A tiene inversa si y sólo si, el determinante de A es diferente de cero, esto es

$$A \neq 0$$

Ejemplos para ilustrar la definición anterior:

a) El determinante de una matriz 1x1, A.= [a1 1] es el mismo escalar a1 1

$$A = a_{11}$$

La única permutación es par.

b) Para una matriz donde n=2, se tiene

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

La permutación 12 es par.
La permutación 21 es impar.
Por consiguiente

$$A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

c) Para una matriz donde n=3, se tiene

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= \varepsilon_{123}a_{11}a_{22}a_{33} + \varepsilon_{231}a_{21}a_{32}a_{13} + \varepsilon_{321}a_{31}a_{12}a_{23} + \varepsilon_{213}a_{21}a_{12}a_{33} + \varepsilon_{132}a_{11}a_{32}a_{23} + \varepsilon_{321}a_{31}a_{22}a_{13}$$

Las permutaciones 123, 231 y 312 son pares
Las permutaciones 213,132 y 321 son impares

Por consiguiente

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

Ordenamos

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

d) Ejemplo numérico
Si

$$A=\begin{matrix}1 & -4\\ 3 & -2\end{matrix}$$

determinar

A

demostración

$$A=\begin{matrix}1 & -4\\ 3 & -2\end{matrix}=(1)(-2)-(3)(-4)=2+12=10$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1) Si una matriz B está formada de una matriz A de grado nxn por el intercambio de dos líneas paralelas (renglones o columnas), entonces

$$A=-B$$

2) Los determinantes de una matriz de grado nxn y su transpuesta son iguales, esto es

$$A=A'$$

Esto quiere decir que cuando los renglones y columnas de una matriz se intercambian, el determinante no se altera

3) Si la matriz de grado nxn tiene un renglón o una columna de ceros, entonces

$$A=0$$

4) Si la matriz de grado nxn tiene dos renglones o dos columnas idénticas, entonces

$A = 0$

5) Sea una matriz de orden nxn. Entonces si el determinante de la matriz es multiplicado por un numero complejo c, este afecta solamente a un renglón o a una columna.

   Notar que esto es diferente de la multiplicación de una matriz por un número complejo

6) El determinante de un producto de dos matrices A y B del mismo orden, es igual al producto de sus determinantes, esto es

$AB = A\ B$

MENORES Y COFACTORES

Establecer que significa menores y cofactores nos permitirá tener otro procedimiento para evaluar determinantes.

Definición. El menor de una entrada aij de una matriz cuadrada A con n mayor o igual a 2, es el determinante de la submatriz de A obtenida suprimiendo el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Ejemplo.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

El menor a_{32} es

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{matrix}$$
$$= a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

Definición. El cofactor de una entrada aij de una matriz cuadrada A con n mayor o igual que 2, es el producto de $(-1)^{i+j}$ y el menor de aij. Este cofactor se representa por Aij.

Ejemplo.

Consideremos la matriz de orden 3x3

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

analicemos algunos cofactores

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{matrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{matrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{matrix} = -1(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ahora resolveremos algunos determinantes empleando cofactores.

Esto se resuelve haciendo una expansión sobre un renglón o sobre una columna.

Ejemplos.

1) Evaluar

$$A = \begin{matrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{matrix}$$

expandiendo A. alrededor del segundo renglón:

Demostración.

Primero observamos cuales son los elementos del segundo renglón. En este caso son 3, 2 y 0. Entonces sobre estos elementos efectuaremos la expansión.

$$A = 3(-1)^{2+1} \begin{matrix} 6 & 2 \\ 6 & 4 \end{matrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{matrix} + 0$$
$$= 3(-1)(24 - 12) + 2(1)(4 - 8)$$
$$= -36 - 8 = -44$$

RANGO DE UNA MATRIZ

Los determinantes pueden ser utilizados para definir el rango de una matriz. La matriz puede ser rectangular o cuadrada.

Recordemos que una matriz puede analizarse por submatrices. El determinante de una submatriz de orden r de una matriz dada es frecuentemente llamado determinante de orden r de la matriz. A continuación daremos la definición formal.

Definición.- Se dice que una matriz es de rango r. si y sólo si. tiene por lo menos una submatriz de orden r. pero no tiene submatrices de orden mayor que r. Por otra parte. una matriz es de rango cero. si y sólo si. todos sus elementos. son cero.

La definición anterior puede también expresarse como: El rango de una matriz A es el mayor entero r para el cual A tiene una submatriz de orden r-ésimo cuyo determinante no es cero.

Ejemplos.

Determinar el rango de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

El rango no es 3 puesto que $A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = -18 + 0 - 4 + 0 + 16 + 6 = 0$$

El rango es 2 porque el determinante de al menos una de las submatrices 2x2 no es cero.

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \neq 0$$

CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Ahora con la teoría desarrollada. estamos en posibilidad de tratar con detalle el problema de encontrar la inversa de una matriz cuadrada A. cuando tal inversa existe.

Definición. Sea A = [ai j] una matriz cuadrada donde n es mayor o igual que 2. La matriz cofactor de A, representada por cof A, es la matriz de orden n cuyas entradas en renglones i y columnas j es Aij, el cofáctor de aij en A.

Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces la matriz cofactor de cada elemento es

$$cofA = \begin{bmatrix} +\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} & -\begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} & +\begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ -\begin{matrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} & +\begin{matrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{matrix} & -\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ +\begin{matrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & +\begin{matrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

quedando lo siguiente

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 8 & 4 & 12 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Definición. La matriz adjunta, representada por adj A, de una matriz cuadrada A de orden n mayor o igual a 2 es la transpuesta de cof A.

Ejemplo: Considerando la, matriz del ejemplo anterior tenemos

$$(cofA)^t \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix} = adjA$$

Definición. Para una matriz A de orden nxn, la inversa A^{-1} existe, si y sólo si $A = 0$. Además, si n es mayor y si A^{-1} existe, entonces

$$A^{-1} = \frac{adjA}{A}$$

Ejemplo. Si consideramos el ejercicio anterior se tiene que

$$
|A| = \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} = 8 + 12 = 20
$$

por lo tanto

$$
A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{4}{20} & -\frac{8}{20} & \frac{4}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{4}{20} & -\frac{2}{20} \\ -\frac{6}{20} & \frac{12}{20} & \frac{4}{20} \end{bmatrix}
$$

ECUACIONES LINEALES
INTRODUCCIÓN

Primero daremos algunos conceptos sobre estos sistemas y después aplicaremos la teoría de matrices y determinantes para la resolución de dichos sistemas de ecuaciones lineales.

Definición. Una ecuación lineal es de la siguiente forma

$$
a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)
$$

donde a y b pertenecen al conjunto de números reales y las x_i son las variables o incógnitas. (a_i son los coeficientes de las x_i y b es la constante de la ecuación)

Por otra parte, un conjunto de valores de las incógnitas por ejemplo

$$
x_1 = l_1, x_2 = l_2, \ldots, x_n = l_n
$$

se dice que es una solución de (1) si sustituyendo estos valores satisfacen a (1).

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Sea

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$.......................................$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$
(2)

un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1,.....,x_n$. Aquí nuevamente aij, bij pertenecen al conjunto de los números reales. El sistema se denomina homogéneo si las constantes $b_1,.....,b_m$ son todas ceros.

Una n-upla $v = (l_1,.....,l_n)$ de números reales es una solución si satisface cada una de las ecuaciones; el conjunto de todas las soluciones se llama el conjunto solución o la solución general. El sistema homogéneo siempre tiene una solución, la n-upla cero que es 0 = (0,0,....,0) denominada solución cero o la solución trivial. Cualquier otra solución si existe, se llama una solución distinta de cero o no trivial. El sistema de ecuaciones (2) es un sistema no homogéneo. Además cuando el sistema (2) tiene una o más soluciones, se dice que es consistente de otra forma es inconsistente.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas siempre es consistente por el hecho de que $x_1 = 0, x_2 = 0,..., x_n = 0$ siempre es una solución.

Ahora resolveremos sistemas de ecuaciones empleando determinantes y matrices.

REGLA DE CRAMER

Los determinantes tienen muchas aplicaciones. Una de las mas importantes es la aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas.

Sea

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$.......................................$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$
(3)

un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o bien

$$AX = B$$

La matriz A se llama la matriz de los coeficientes del sistema. El sistema homogéneo de (3) es entonces equivalente a la ecuación matricial

$$AX = 0$$

La matriz A es una matriz de orden nxn. Representaremos por Aj la matriz obtenida de A reemplazando la j-ésima columna de A por la columna de las b. Con estos conceptos damos a continuación la siguiente regla.

REGLA DE CRAMER

Si $A \neq 0$, el sistema (3) tiene exactamente una solución, y ésta es dada por

$$x_j = \frac{A_j}{A} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo.

Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}$$

por expansión de cofactores (1ª columna)

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4(5+1) = 24$$

por expansión de cofactores (2ª columna)

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

por expansión de cofactores (3ª columna)

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4(-2-1) = -12$$

por lo tanto

$$x_1 = \frac{24}{-6} = -4$$

$$x_2 = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$x_3 = \frac{-12}{-6} = 2$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR MEDIO DE MATRICES

Ahora estamos en condiciones de resolver sistemas de ecuaciones lineales empleando el teorema que se dio anteriormente: el cual dice:

TEOREMA Si A es irreversible, entonces el sistema lineal $AX = B$ tiene la solución única

$X = A^{-1}B$

Ejemplos.

Resolver el sistema

$2x + y + z = 0$
$x - y + 5z = 0$
$y - z = 4$

Demostración

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ahora determinamos A^{-1}

$$cofA = \begin{bmatrix} +\begin{matrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{matrix} & +\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ -\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} & +\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ +\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{matrix} & -\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{matrix} & +\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -9 & -3 \end{bmatrix} \qquad adjA = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -9 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{matrix} = 2 + 1 + 1 - 10 = -6 \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{9}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$x = -4 \qquad y = 6 \qquad z = 2$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Existen tres operaciones elementales de renglón aplicables a la representación de un sistema de ecuaciones como matriz aumentada. Estas operaciones son:

(α) Multiplicar o dividir un renglón por un número distinto de cero

(ß) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón

(γ) Intercambiar dos renglones

Con estas tres operaciones tenemos que reducir la matriz aumentada a una matriz en forma escalonada reducida. Esta última nos conducirá a obtener los resultados deseados.

Antes de hacer algunos ejemplos, describiremos por medio de una definición en que consiste una matriz en forma escalonada reducida.

Definición. Se dice que una matriz está en forma escalonada reducida si se satisfacen las cuatro condiciones que a continuación se detallan:

1. Todos los renglones que consisten únicamente de ceros (si existen) aparecen en la parte inferior de la matriz.

2. El primer número en cualquier renglón que no consista de ceros es 1.

3. Si dos renglones sucesivos no consisten únicamente dé ceros, entonces el primer 1 en el renglón inferior está más a la derecha que le primer 1 del renglón superior

4. Cualquier columna que contenga el primer 1 de un renglón tendrá ceros en los demás lugares

El método de eliminación gaussiana consiste en reducir la matriz de coeficientes a la forma escalonada, resolver para la última incógnita y luego usar sustitución hacia atrás para resolver para las otras incógnitas

Ejemplo

Resolver el sistema

$$x + y + z = b$$
$$x + (1 + b)y - z = 2b$$
$$x + y + (1 + b)z = 0$$

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & b \\ 1 & 1+b & 1 & | & 2b \\ 1 & 1 & 1+b & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & b & 0 & | & b \\ 0 & 0 & b & | & -b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

de donde

$$x + y + z = b$$
$$y = 1$$
$$z = -1$$

sustituyendo los valores de y y z en la primera ecuación. se tiene que x = b

VECTORES EN EL PLANO

INTRODUCCIÓN

Para comprender el significado de vector. tenemos que estudiar la parte de la ciencia que recibe el nombre de análisis vectorial. Existen dos formas para tratar éste objetivo la geométrica y la analítica.

Definición. Un vector en el plano es un par ordenado de números reales [x,y]. los números x y y se conocen como las componentes del vector.

La palabra ordenado es muy importante puesto que dos vectores con las mismas componentes escritas en diferente orden no son los mismos. Para hacer clara la notación emplearemos letras minúsculas para representar números reales y letras mayúsculas representar vectores

Existe una correspondencia uno a uno entre los vectores [x, y] en el plano y los puntos (x, y) en el plano por lo que

Definición. El plano es el conjunto de vectores [x, y]. con x y y números reales

En física no se considera al vector como un punto. sino como una cantidad que tiene magnitud y dirección. Geométricamente estas cantidades se representan por un segmento de recta dirigido. El segmento de recta dirigido se define como un segmento de recta que va desde un punto P hasta un punto Q. El punto P recibe el nombre de punto inicial y el punto Q se le conoce como punto terminal. Las dos propiedades importantes de un segmento de recta, dirigido son su magnitud (longitud) y su dirección. por lo que dos segmentos de recta dirigidos son iguales si tienen la misma longitud y la misma dirección. sin importar su ubicación con respecto al origen

Un punto en el plano puede tratarse como un vector que se inicia en el origen y termina en ese punto. Un vector permanece sin cambio si se mueve paralelo a si mismo. La representación particular de un vector, que tenga su punto inicial en el origen se le conoce como representación posicional o vector de posición

El vector $[0,0]$ recibe el nombre de vector cero y lo representamos por 0. Cualquier punto es una representación del vector cero y posee dos características importantes:

1. Tiene magnitud cero

2. No tiene dirección. (Puesto que el punto inicial y el terminal coinciden)

El vector cero es el único vector que no puede estar asociado a ningún segmento en las aplicaciones geométricas.

Puesto que un vector es un conjunto de segmentos equivalentes, definimos a la magnitud de un vector como la magnitud de cualquiera de sus representantes y su dirección como la dirección de sus representantes.

La magnitud del vector X se representa por $\|X\|$. Si X es el vector $[x_1, x_2]$ entonces

$$\|X\| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Observar que $\|X\|$ es un escalar no negativo y no un vector. Por otro lado, $\|0\| = 0$

Definición. La dirección del vector $[x_1, x_2]$ viene dado por el ángulo θ (medido en radianes) que forma el vector con la parte positiva del eje X.

Por comodidad se elige a θ de tal manera que $0 \leq \theta < 2\pi$ $Si\, x_1 \neq 0$, entonces

$$\tan\theta = \frac{x_2}{x_1}$$

$Si \quad x_1 = 0 \quad y \quad x_2 > 0 \quad se \quad tiene \quad \theta = \frac{1}{2}\pi$

$Si \quad x_1 = 0 \quad y \quad x_2 < 0 \quad se \quad tiene \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$

SUMA Y RESTA DE VECTORES

Definición. La suma de dos vectores $X = [x_1, x_2]$ y $Y = [y_1, y_2]$ es el vector X+Y que se define por

$$X + Y = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$$

La suma de dos vectores nos determina un tercer vector, para ello basta sumar las componentes correspondientes. En forma geométrica, la suma de dos vectores X y Y sería colocar el vector Y de tal forma que su origen esté en la punta de X. El vector suma X + Y va del origen de X a la punta de Y. Notar que se satisface Y + X = X + Y, puesto que las dos sumas yacen sobre la diagonal de un paralegramo. Por está razón, la regla para la adición de vectores se llama ley del paralelogramo

Definición. La diferencia de los vectores X y Y, representada por X – Y, es le vector que se obtiene al sumar X al negativo de Y: esto es

$$X - Y = X + (-Y)$$

En términos de las componentes escalares

$$X - Y = [x_1 - y_1, x_2 - y_2]$$

Definición. Si $X = [x_1, x_2]$, entonces el vector $[-x_1, -x_2]$ redefine como el negativo de X y se representa por –X

Notar que X+(-X)=0

El negativo del vector X es un. Vector que tiene la misma magnitud que X pero dirección opuesta.

Refiriéndose a la diferencia de vectores podemos decir que restar un vector es lo mismo que sumar su negativo.

MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

DEFINICIÓN. Si k es un escalar y X es el vector $[x_1, x_2]$, entonces la multiplicación de k por X, representado por kX, es un vector y esta dado por

$$kX = k[x_1, x_2] = [kx_1, kx_2]$$

Observemos que

$$kX = \sqrt{k^2x_1^2 + k^2x_2^2} = K\sqrt{x_1^2 + x_1^2} = k X$$

Lo cual nos dice que multiplicar un vector por un escalar tiene el efecto de multiplicar la magnitud del vector por el valor absoluto de ese escalar.

Existen dos vectores especiales en el plano que nos permiten representar otros vectores, del plano en una forma conveniente. Estos vectores son:

$i = [1,0]$ y $j = [0,1]$

Un VECTOR UNITARIO es un vector de magnitud uno y en consecuencia i y j son Vectores unitarios

Si $X = [x_1, x_2]$ es otro vector del plano entonces, puesto que

$[x_1, x_2] = x_1[1,0] + x_2[0,1]$

podemos escribir

$X = [x_1, x_2] = x_1 i + x_2 j$ ________ (α)

Con esta representación decimos que X está resuelto en sus componentes vertical y horizontal.

La suma de los vectores en el lado derecho de (α) se le conoce como una combinación lineal de i y j

Los vectores i y j tienen dos propiedades

1. Los vectores i y j son linealmente independientes
2. Cualquier vector X se puede escribir en términos de i y j, esto es, X se expresa como una combinación lineal de i y j

Bajo estás dos condiciones se dice que i y j forman una base del plano

Si X es un vector distinto de cero, entonces

$$U = \frac{X}{X}$$

es un vector unitario con la misma dirección de X

En resumen:

Definición. El espacio vectorial de dos dimensiones V_2 es el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales [x,y], conocidos como vectores, sujetos a axiomas de suma de vectores y multiplicación de vectores por escalares.

PRODUCTO ESCALAR

Ahora describiremos la multiplicación de dos vectores

Definición. Si $A = [a_1, a_2]$ y $B = [b_1, b_2]$ son dos vectores en V_2, entonces el producto es calar de A y B, representado por $A \bullet B$, está dado por

$$A \bullet B = [a_1, a_2] \bullet [b_1, b_2] = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

El producto escalar de dos vectores es un escalar. El producto de también se le conoce como producto punto o producto interior.

Propiedades del producto escalar

Si A, B y C son vectores y k es un escalar, entonces

a) $A \bullet A = A^2$

b) $A \bullet B = B \bullet A$

c) $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$

d) $(kA) \bullet B = k(A \bullet B) = A \bullet (kB)$

e) $0 \bullet A = 0$

Puesto que A•B es un escalar, la expresión (A • B) • C no tiene sentido, en consecuencia, no consideramos la asociatividad de la multiplicación escalar

A continuación se dará una definición en la cual observaremos como existe una conexión entre el producto escalar y el ángulo entre dos vectores

Consideraremos dos vectores diferentes de cero. El ángulo θ entre A y B se define como el menor ángulo en $[0, \pi]$ entre los vectores A y B que tienen al origen como sus puntos iniciales. Este ángulo siempre es posible escogerlo como un ángulo positivo en el intervalo $[0, \pi]$

Definición. Sean A y B dos vectores y θ el ángulo entre A y B, entonces el producto escalar A • B se define como

$$A \bullet B = \begin{cases} A\ B \cos\theta & A \neq 0 \ \ y \ \ B \neq 0 \\ 0 & A = 0 \ \ o \ \ B = 0 \end{cases}$$

Está definición afirma que el producto escalar de dos vectores es el producto de las magnitudes de los vectores y el coseno de la medida en radiares del ángulo formado entre ambos.

Se sabe que dos vectores son paralelos si y solo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro. El vector cero es paralelo a cualquier vector. Por medio de la definición del producto escalar podemos establecer lo siguiente:

Definición. Dos vectores A y B diferentes de cero son paralelos si y sólo si la medida en radianes, del ángulo, entre ellos es $\theta = 0$ o $\theta = \pi$

Si A y B son vectores diferentes de cero, también es posible concluir de la definición del producto escalar que

$$\cos\theta = 0 \qquad si \;\; y \;\; sólo \;\; si \quad A \bullet B = 0$$

puesto que $0 \leq \theta \leq \pi$, de este enunciado se concluye que

$$\theta = \frac{1}{2}\pi \qquad si \;\; y \;\; sólo \;\; si \quad A \bullet B = 0$$

bajo estas consideraciones tenemos

Definición. Se dice que dos vectores A y B diferentes de cero, son ortogonales (o perpendiculares) si y sólo si $A \bullet B = 0$

El vector cero es ortogonal a cualquier vector.

VECTORES EN EL ESPACIO

ÁNGULOS COSENOS Y COSENOS DIRECTORES

La dirección de un vector no cero en V_3 está dada por tres ángulos los cuales se conocen como ángulos directores del vector.

Definición. Los ángulos directores de un vector $A = [a_1, a_2, a_3]$ diferentes de cero, son los ángulos α, β, y γ (alfa, beta y gama) comprendidos respectivamente entre los vectores i, j y k y el vector A, los cosenos directores de A son $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$

Teorema. Si α, β, y γ (alfa, beta y gama) son los ángulos directores de un vector $A = [a_1, a_2, a_3]$ diferentes de cero, entonces

$a)$ $\cos\alpha = \frac{a_1}{A}$, $\cos\beta = \frac{a_2}{A}$, $\cos\gamma = \frac{a_3}{A}$

$b)$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$c)$ *Los ángulos directores de* $-A$ *son*

$$\pi - \alpha, \quad \pi - \beta, \quad \pi - \gamma$$

Demostración.

a) Puesto que α es el ángulo entre A e i tenemos por la definición de producto escalar que

$A \bullet i = |A|\,|i| \cos\alpha$

por lo tanto

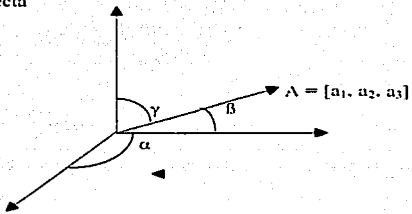
$a_1 = |A| \cos\alpha \quad o \quad \cos\alpha = \frac{a_1}{|A|}$

En forma similar podemos determinar $\cos\beta$ y $\cos\gamma$

b) Elevamos al cuadrado las expresiones que obtuvimos para los cosenos directores en a) y las sumamos por lo que

$$\frac{a_1^2}{|A|^2} + \frac{a_2^2}{|A|^2} + \frac{a_3^2}{|A|^2} = \frac{|A|^2}{|A|^2} = 1$$

c) Se deduce el hecho de que los vectores de posición de A y –A se localizan sobre la misma línea recta



Cualquier vector $A = [a_1, a_2, a_3]$ se puede expresar, considerando a) como

$A = \left[|A| \cos\alpha,\ \ |A| \cos\beta,\ \ |A| \cos\gamma,\right]$

o bien

$A = |A| \left[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\right]$

Si $|A| \neq 0$, *entonces*

$\frac{1}{|A|} A = \left[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\right]$

los cual nos indica que los cosenos directores de a son componentes del vector unitario $\frac{1}{|A|} A$

PRODUCTO VECTORIAL

En las aplicaciones de los vectores en el espacio es útil construir un vector no nulo perpendicular a dos vectores dados A y B. El siguiente producto también conocido como el producto cruz, nos proporciona tales vectores. Este producto sólo está definido en R^3

Definición. Si $A=[a_1,a_2,a_3]$ y $B=[b_1,b_2,b_3]$ entonces el producto vectorial, representado por AxB, está dado por

$$AxB=[a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1]$$

$$o \quad en \quad notación \quad de \quad \det er \min antes$$

$$Axb=\begin{bmatrix} \begin{matrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{matrix}, -\begin{matrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{matrix}, \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}, \end{bmatrix}$$

Una forma sencilla para calcular el producto vectorial es por medio del determinante

$$AxB=\begin{matrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}=[a_2b_3-a_3b_2]i-[a_1b_3-a_3b_1]j+[a_1b_2-a_2b_1]k$$

El resultado del producto vectoriales un vector mientras que el resultado del producto, escalar es un escalar.

Algunas propiedades de este producto son

A x A = 0, 0 x A = 0, A x 0 = 0

El siguiente teorema da una importante relación entre producto escalar y producto vectorial y también demuestra que AxB es ortogonal a ambos A y B

Teorema. Si A y B son vectores en R^3 entonces

a) $A\bullet(AxB)=0 \quad (AxB \text{ es ortogonal a } A)$

b) $B\bullet(AxB)=0 \quad (AxB \text{ es ortogonal a } B)$

c) $AxB^2 = A^2\ B^2-(A\bullet B)^2 \quad$ *identidad de Lagrange's*

Otras propiedades del producto vectorial son

a) A x B = - (B x A) propiedad anticonmutativa
b) (k A) xB= k (AxB)
c) si A y B son paralelos entonces A x B =0. Para los vectores unitarios i, j y k se tiene que

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$
$$i \times j = k,\ k \times i = j,\ j \times k = i$$
$$j \times i = -k,\ i \times j = -j,\ k \times j = -i$$

La identidad de Lagrange' s es importante en la demostración del siguiente teorema. Nos ofrece información acerca de la magnitud de AxB

TEOREMA. Si 0 es el ángulo entre dos vectores A y B, diferentes de cero, entonces

$$AxB = A\ B\,sen\theta$$

Demostración.

Si 0 representa el ángulo entre A y B entonces $A \bullet B = \cos\theta$ y la identidad de La grange's puede escribirse como

$$AxB^2 = A^2\ B^2 - A^2\ B^2\cos^2\theta$$
$$AxB^2 = A^2\ B^2(1-\cos^2\theta)$$
$$AxB^2 = A^2\ B^2 sen^2\theta$$

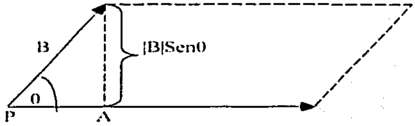
Como $0 \leq \theta \leq \pi$, $sen\theta \geq 0$. *Por consiguiente*

$$AxB = A\ B\,sen\theta$$

Pero $B\,sen\theta$ es la altura del paralelogramo determinado por A y B. El área del paralelogramo está dada por

$$A = (base)(altura) = A\ B\,sen\theta = AxB$$

En otras palabras, la magnitud de AxB es igual al área del paralelogramo determinado por A



Ejemplo

Calcular la magnitud de A=[3,4]

$|A| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

DEFINICIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES

A los conjuntos como R^2 y R^3 se les conoce como espacios vectoriales y como ya hemos descrito poseen propiedades interesantes

Ahora describiremos sistemas abstractos. Este tratamiento tiene la ventaja de que cualquier propiedad que se deduzca de la siguiente definición será verdadera para todo espacio vectorial

Definición. Un espacio vectorial V es un conjunto de elementos denominados vectores para los cuales se han definido dos operaciones, adición y multiplicación por un escalar que satisfacen las siguientes condiciones:

1. *Si* u *y* $v \in V$, *entonces* $u+v \in V$
2. $u+v = v+u$
3. $u+(v+w) = (u+v)+w$
4. *Existe* $0 \in V$ *tal que* $0+u = u+0 = u$ *para toda* $u \in V$
5. *Para cada* $u \in V$, *existe* $-u$ *tal que* $u+(-u) = (-u)+u = 0$
6. *Si* k *es un escalar y* $u \in V$, *entonces* $ku \in V$
7. $k(u+v) = ku+kv$
8. $(k+l)u = ku+lu$
9. $k(lu) = (kl)u$
10. $1u = u$

Existen espacios vectoriales en donde los escalares son números complejos

Ejemplo

Supongamos que V está formado por todos los vectores de V_4 cuya tercera componente es 0 (cero)

Demostración

Los vectores de V son de la forma

$$[x_1, x_2, 0, x_4] \quad entonces$$
$$[x_1, x_2, 0, x_4] + [y_1, y_2, 0, y_4] = [x_1 + y_1, x_2 y_2, 0, x_4 + y_4]$$
$$k[x_1, x_2, 0, x_4] = [kx_1, kx_2, 0, kx_4]$$

esto es, la suma de dos vectores y los múltiplos escalares de los vectores de V son también V. Además todas las leyes de un espacio vectorial se satisfacen

Propiedades. Sea V un espacio, u un vector en V y k un escalar; entonces:

$a)\ \ Ou = O$
$b)\ \ kO = O$
$c)\ \ (-1)u = -u$
$d)\ \ Si\ \ ku = O,\ \ entonces\ \ k = 0\ \ o\ \ u = O$

SUBESPACIOS

Si V es un espacio vectorial, entonces determinados subconjuntos de V constituyen por sí solos espacios vectoriales bajo las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar definidas en V

Definición. Un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si W es por sí solo un espacio vectorial bajo las operaciones de adición de vectores y de multiplicación por un escalar definidas en V

El siguiente teorema proporciona un método conveniente para determinar si un conjunto específico de vectores de un espacio vectorial forman un subespacio

Teorema. Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se satisfacen las condiciones de cerradura:

a) Si u y v son vectores de W, entonces u+v está en W
b) Si k es un escalar y u es un vector en W, entonces ku está en W

Las condiciones dadas para un espacio vectorial V son satisfechas por W por lo que W es un espacio vectorial. En resumen, el teorema nos dice que para probar que W es un subespacio de V, nos vasta con verificar que: u+v y ku están en W, siempre que u y v estén en W y k sea un escalar

Todo espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios. V es un subespacio de sí mismo y el conjunto {0} que consiste únicamente del vector 0 en V es un subespacio. Este último resultado es importante puesto que nos permite de inmediato si un subespacio particular no es un espacio vectorial. Esto es, si un subconjunto no contiene al 0, entonces no es un subespacio

Ejemplo

Demostrar que el conjunto W de todas las matrices 2x2, que tiene ceros en la diagonal principal, es un subespacio del espacio vectorial M_{22} de todas las matrices de 2x2.

Demostración

Sean

$$A=\begin{bmatrix}0 & a_{12}\\ a_{21} & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0 & b_{12}\\ b_{21} & 0\end{bmatrix}$$

dos matrices en W y sea k un escalar. Entonces

$$A+B=\begin{bmatrix}0 & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & 0\end{bmatrix} \qquad y \qquad kA=\begin{bmatrix}0 & ka_{12}\\ ka_{21} & 0\end{bmatrix}$$

Puesto que A + B y kA tienen ceros en la diagonal principal, pertenecen a W, por lo tanto, W es un subespacio de M_{22}

Si V es el espacio de todas las matrices cuadradas nxn, entonces el conjunto W formado por las matrices simétricas es un subespacio de V

COMBINACIÓN LINEAL

Los conceptos de adición y multiplicación por un escalar pueden combinarse para formar una combinación lineal de vectores

Definición. Se dice que un vector w es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2 \ldots\ldots + k_r v_r$ si es posible expresarlo de la forma

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 \ldots\ldots k_r V_r$$

donde $k_1, k_2 \ldots\ldots k_r$ *son escalares*

Ahora en términos de lo que estamos tratando

Definición. Si $v_1, v_2 \ldots\ldots v_r$ son vectores de un espacio vectorial V tales que cada vector v de V puede expresarse como una combinación lineal de $v_1, v_2 \ldots\ldots v_r$, esto es.

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 \ldots\ldots k_r V_r$$

entonces decimos que los vectores $v_1, v_2 \ldots\ldots v_r$ forman un conjunto de generadores de V o bien que V está generado por estos vectores

ejemplo

Obtener otros vectores si tenemos el vector v = (1,3)

Demostración

A partir de la expresión kv se pueden obtener otros vectores. Recordar que k es un escalar

Si k = 2 se tiene que kv = (2,6)

Si k = 1/3 se tiene que kv =(1/3,1)

Si k = -2 se tiene que kv =(-2,-6)

Si k = -1/6 se tiene que kv =(-1/6,-1/2)

Hemos generado un subespacio vectorial con un vector. Por el procedimiento anterior vemos que a partir del vector v podemos obtener una infinidad de de vectores alineados

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

El número de vectores que integran un conjunto de generadores de un espacio vectorial V puede variar.

Definición. Se dice que los vectores $v_1, v_2 ...... v_r$ de un espacio vectorial V son linealmente dependientes si existen escalares $k_1, k_2 .... k_r$ no todos cero, tales que

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 ......, k_r V_r = 0$$

Si el único conjunto de escalares $k_1, k_2 .... k_r$ que hacen que la ecuación vectorial se cumpla es

$$k_1 = k_2 = ... = k_r = 0$$

entonces se dice que los vectores son linealmente independientes

La dependencia o independencia lineal no es una propiedad individual de los vectores sino una propiedad de los conjuntos de vectores

Se puede determinar en forma inmediata si un conjunto de vectores son linealmente independientes escribiendo los vectores como renglones o columnas de una matriz A y calculando el determinante de A. los vectores son independientes si y solo si detA≠0. De otra forma, podemos resolver el sistema homogéneo que se obtiene y ver si hay soluciones no triviales, si las hay, entonces los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo

Determinar si el conjunto de vectores u = (1,1,1), v = (0,1,1), w = (0,0,1) es dependiente o independiente en R^3

Demostración.

$$Sea \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces
$\det A = 1 \neq 0$

entonces el conjunto u, v, w es independiente

BASES Y DIMENSIÓN

Por lo general tenemos conocimiento de que una recta tiene una dimensión, que un plano tiene dos dimensiones y que el espacio que nos rodea tiene tres dimensiones. Por medio de los siguientes conceptos se pretende dar una noción más precisa del significado de dimensión partiremos de lo siguiente:

En R^2 cualquier vector se puede expresar en términos de i = (1, 0) y j = (0, 1)

En R^3 cualquier vector se puede expresar en términos de i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) y k = (1, 0, 0)

Ahora ampliaremos estos conceptos

Definición. Sea V un espacio vectorial. Un conjunto finito de vectores de V tales como $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ constituye una base para V si

a) $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *es linealmente independiente*
b) $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *genera a v*

En R^3 definimos $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$

Los elementos e_i son las columnas de la matriz identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde el determinante es 1. Este conjunto de vectores $\{e_1, e_2, e_3\}$ es linealmente independiente y constituye una base en R^3

Para R^n el conjunto de vectores $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente y constituye una base en R^n

Demostración. Evidentemente estos vectores generan el espacio puesto que para cualquier vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en R^n, se tiene:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

y además son independientes puesto que

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$
$$\textit{implica que} \quad c_1 = c_1 = \ldots c_n = 0$$

Esta base recibe el nombre de base estándar o base canónica para R^n. Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n genera R^n, por lo que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n es una base en R^n

Ejemplo

Sea $v_1(1,2,1)$, $v_2(2,9,0)$ *y* $v_3(3,3,4)$

Demostrar que el conjunto de vectores $Q = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de R^3

Para demostrar que Q genera a R^3, se debe mostrar un vector arbitrario $a = (a_1, a_2, a_3)$ se puede expresar como una combinación lineal $a = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$ de los vectores en Q

En términos de las componentes

$$(a_1, a_2, a_3) = k_1(1,2,3) + k_2(2,0,9) + k_3(3,3,4)$$
$$(a_1, a_2, a_3) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$$

esto es

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \qquad ----------(\alpha) \\ k_1 \qquad + 4k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Para demostrar que Q genera a V, es necesario demostrar que el sistema (α) tiene una solución para cualquier selección de $a = (a_1, a_2, a_3)$. Para demostrar que Q es linealmente independiente, se debe mostrar que la única solución de

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0 \qquad ----------(\beta)$$

es $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

La ecuación (β) expresada en términos de las componentes es

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 \qquad + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Por forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

de donde el sistema homogéneo tiene la solución trivial y en consecuencia v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes

Notar que los sistemas (α) y (β) tienen la misma matriz de coeficientes. Simultáneamente se puede demostrar que Q es linealmente independiente y a la vez generan a R^3 demostrando que la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

en los sistemas (α) y (β) tienen matriz inversa

Puesto que

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

y sabemos que una matriz cuadrada A tiene inversa si y sólo si el $\det A \neq 0$, entonces se concluye que Q es una base para R^3

Como el número de vectores de la base (cuando un espacio vectorial tiene una base) es una característica del espacio que no depende de la base elegida en particular, podemos usar este número para definir la dimensión del espacio vectorial.

Definición. La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores en una base V. Si este número es finito entonces V se le conoce como un espacio vectorial de dimensión finita. si no. se le llama espacio vectorial de dimensión finita. El espacio cero tiene dimensión cero

Por esta definición es claro que la dimensión de R^n es n puesto que la base canónica está formada por n vectores

En un espacio vectorial de dimensión finita n. todo conjunto de m vectores con m>n es dependiente

El siguiente resultado simplifica el estudio de las bases en espacios vectoriales de dimensión finita

En un espacio vectorial de dimensión n. un conjunto de n vectores es una base si:

a) Genera un espacio
b) Es independiente

Dos vectores distintos de cero generan un espacio vectorial de dimensión 2 si son independientes y de dimensión 1 si son dependientes. Para determinar con mayor prontitud lo anterior basta con tomar en cuenta que 2 vectores son dependientes si y sólo si uno es múltiplo del otro.

Otra definición que se emplea para definir dimensión es:

Definición. La dimensión de un espacio vectorial V es igual al máximo número de vectores linealmente independientes contenidos en V

Ejemplo

Determinar que la dimensión del espacio generado por u = (1, -2, 3, -1) y v = (1, 1, -2, 3)

Demostración

Los vectores u y v son independientes por lo que dimV=2

INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades es una de las herramientas matemáticas más socorridas en las ciencias sociales y naturales, esto se da principalmente por la cualidad de transferir un sistema no determinista a uno determinista.

Aunque la incertidumbre no es posible eliminarse el calculo de probabilidades, siempre nos da un acercamiento a la realidad.

Junto con la estadística crean un acercamiento de la realidad en forma analítica, y es en principio lo que da el nacimiento de la información.

En el campo económico, da el sustento necesario de cualquier modelo de esta índole.

Resumiendo podríamos decir que la estadística y la probabilidad, comprenden las ramas descriptivas, la teórica de la probabilidad y la del muestreo.

ANÁLISIS COMBINATORIO

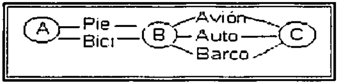
Principio Fundamental

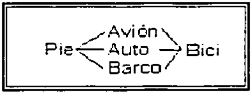
Si un trabajo o evento puede hacerse de a1 maneras diferentes cuando sea hecho puede hacerse un segundo trabajo, independiente de a2 modos diferentes y luego un tercer trabajo a3 maneras diferentes y así sucesivamente entonces el número total de maneras diferentes en que los trabajos se pueden realizar es a1 * a2 * a3 * a4...

Ejemplo:

Suponiendo que una persona tiene 2 modos de ir a la ciudad A a la ciudad B (pie-bicicleta). Una vez que llega a la ciudad B tiene 3 maneras de llegar a la ciudad C (avión, auto, barco).

En cuantos modos puede realizarse el viaje de A a C pasando por B





FACTORIAL.

Es un proceso matemático en el que hay que multiplicar sucesivamente números enteros no negativos.

$n! = n(n-1)!$

Ejemplo:

$(n-1)! = (n-1)(n-2)!$

$(n-2)! = (n-2)(n-3)!$

$(n-3)! = (n-3)(n-4)!$

*** $0! = 1$

El factorial de $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 0! = 120$

PERMUTACIONES.

Es un arreglo ordenado de una parte de los elementos o todos los elementos de un conjunto.

Ejemplo:

Sea un conjunto de letras: o, p, i. Escribir todas las permutaciones empleando las 3 letras cada vez.

Ipo
Opi
Iop
Poi
Pio

n = número total de elementos

r = número de elementos que se toman al mismo tiempo

La condición debe ser r =< n.

Ejemplo:

De cuantas maneras pueden sentarse 5 personas en 5 sillas pero de 3 en 3.

$$\boxed{nPr = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

$$\boxed{5P3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5*4*3*\cancel{2!}}{\cancel{2!}}}$$

Permutaciones con Repeticiones

Se trata de permutaciones de n objetos tomados de n donde n1 son objetos repetibles y no diferenciables.

$$\boxed{nPn = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!}$$

Ejemplo:

Cuantas palabras diferentes se podrán formar con las letras " rara ".

$$\boxed{{}_4P_2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6}$$

COMBINACIONES.

Es un subconjunto de r elementos que se puede formar a partir de un conjunto de n elementos. Dos conjuntos que tienen el mismo número sin importar el orden.

Las permutaciones de todos los elementos del conjunto nPn= n!. Las combinaciones:

$$\boxed{n\,\mathrm{Pr} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Para cada subconjunto r se tiene: rPr= r!

$$\boxed{n\,\mathrm{Pr} = r!}$$

Combinaciones n tomadas de r:

$$\boxed{nCr = \frac{n\,\mathrm{Pr}}{r\,\mathrm{Pr}} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

Ejemplo:

Un entrenador de fútbol tiene un equipo formado por 11 jugadores de los cuales uno es su hijo. Cuantas quintetas de basketball se pueden formar si su hijo siempre debe estar dentro de ella.

n =10

r =4

$$C = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10*9*8*7*6!}{6!4!} = \frac{5040}{24} = 210$$

Si no estuviera:

$$C = \frac{11!}{(11-5)!5!} = \frac{10*9*8*7*6!}{6!5!} = \frac{55440}{120} = 462$$

DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

Existen dos tipos de fenómenos:

Deterministas, que son aquellos cuyos resultados se pueden predecir de antemano, y

Estocásticos o aleatorios, que son los que dependen del azar (no se pueden predecir).
Se llama prueba al proceso mediante el cual se obtiene un resultado. Y se llama experimento aleatorio a todo fenómeno aleatorio.

Se llama **espacio muestral**, universo o población al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, y se representa por **E**.

Se llama **suceso aleatorio** a todo subconjunto del espacio muestral. Se llama **suceso elemental** a un suceso unitario.

Se llama **espacio de sucesos** al conjunto formado por todos los sucesos, y se representa por Ω.

Se llama **suceso imposible** al que no se verificará nunca, y se representa por $\varnothing$. Se llama **suceso seguro** al que se verificará siempre, y se representa por **E**.

PROPIEDADES

Se dice que un subconjunto $A \in \Omega$ se ha realizado o se ha verificado cuando el resultado de la prueba coincide con algún componente del subconjunto A.

Se dice que un suceso A implica a otro B cuando siempre que se verifica A, se verifica B: A B. Diremos que dos sucesos son iguales cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

ÁLGEBRA DE SUCESOS

$\Omega\times\Omega \xrightarrow{\cup} \Omega$ $(A, B) \to A\cup B$	$A \cup B$ es el suceso que se verifica si y sólo si se verifica uno de los dos.
$\Omega\times\Omega \xrightarrow{\cap} \Omega$ $(A, B) \to A\cap B$	$A \cap B$ es el suceso que se verifica cuando se verifican los dos a la vez
$\Omega \xrightarrow{c} \Omega$ $A \to A^c$	A^c, complementario de A es el suceso que se verifica cuando no se verifica A.

PROPIEDADES

Como las definiciones de unión. intersección y complementación de sucesos son idénticas a las de los conjuntos. estas operaciones para sucesos cumplen las mismas propiedades que para los conjuntos.

i) Conmutativa:	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
ii) Asociativa	$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$
iii) Idempotente	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
iv) Simplificación	$A\cup(A\cup B) = A\cup B$	$A\cap(A\cap B) = A\cap B$
v) Distributiva	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$	
vi) Existencia de elemento neutro:	$A\cup\varnothing = A$	$A\cap E = A$
vii) Absorción.	$A\cup E = E$	$A\cap\varnothing = \varnothing$
viii) Complementación:	$E^c = \varnothing$	$\varnothing^c = E$
ix) Involucion	$(A^c)^c = A$	
x) Leyes de Morgan	$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$	$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

FRECUENCIAS

Sea un suceso $A \in \Omega$. Si efectuamos n pruebas de un experimento aleatorio, designaremos por n_A el número de veces que se ha verificado el suceso A. El número n_A se llama **frecuencia absoluta** del suceso A.

Se llama frecuencia relativa del suceso A al cociente entre la frecuencia absoluta y el número de pruebas:

$$fr(A) = \frac{n_A}{n}$$

Como consecuencia de la propia definición, resultan las siguientes propiedades:

- $fr(E) = 1$ y $fr(\emptyset) = 0$

(debido a que $n_{\emptyset} = 0$ y $n_E = n$)

- $\forall\ A \in \Omega,\ 0 \leq fr(A) \leq 1$

(debido a que $0 \leq n_A \leq n$)

- Si A y B son dos sucesos incompatibles, $fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$

(como $A \cap B = \emptyset$, será $n_{A \cup B} = n_A + n_B$)

Probabilidad

La idea intuitiva de probabilidad se basa en la llamada ley de los grandes números, enunciada por Bernoulli:

"La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente".

Es decir, si A es un suceso, podríamos hablar del

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} fr(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}}$$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

La probabilidad de un suceso A se calcula como el número de casos favorables al suceso A, partido por el número de casos posibles del experimento aleatorio:

$$\boxed{p(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}}$$

Definición axiomática de probabilidad: (Axiomas de Kolmogorov)

La probabilidad es una ley que asigna a cada suceso $A \in \Omega$ un número real

$p : \Omega \rightarrow \Re$ y que verifica:

$A \rightarrow p(A)$

i) $p(A) \geq 0, \quad \forall A \in \Omega$

ii) $p(E) = 1$

iii) si A y B son sucesos incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Como consecuencia de estos tres axiomas, se verifican además las siguientes propiedades:

iv) $p(A^c) = 1 - p(A)$

v) $p(\emptyset) = 0$

vi) si $A \subseteq B, \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

vii) $p(A) \leq 1, \quad \forall A \in \Omega$

viii) si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son incompatibles dos a dos, entonces

$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$

ix) si $A, B \in \Omega$ son dos sucesos cualesquiera, entonces

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

En muchas ocasiones, la verificación o no de un suceso se estudia en función de otro suceso de cuya verificación depende o del cual está condicionado.

Se dice probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A, y se representa

$p(B/A)$, al valor $\quad p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$, siempre que $p(A) \neq 0$.

En consecuencia, $p(A \cap B) = p(A)\, p(B/A)$

Dos sucesos $A, B \in \Omega$ se dicen **independientes** si $p(B) = p(B/A)$. Es decir, se cumplirá que $p(A)\, p(B) = p(A \cap B)$

Si A y B son independientes, entonces A y B^c son independientes, A^c y B son independientes, y A^c y B^c son independientes.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Si $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ son un sistema completo de sucesos tal que $p(A_i) \neq 0$, $\forall\ i = 1, \ldots n$, entonces para un suceso B cualquiera se verifica:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)\, p(B/A_i)}{p(A_1)\, p(B/A_1) + p(A_2)\, p(B/A_2) + \ldots\ldots + p(A_n)\, p(B/A_n)}\ .$$

TEOREMA DE BAYES

Si $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ son un sistema completo de sucesos tal que $p(A_i) \neq 0$, $\forall\ i = 1, \ldots n$, entonces para un suceso B cualquiera se verifica:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)\, p(B/A_i)}{p(A_1)\, p(B/A_1) + p(A_2)\, p(B/A_2) + \ldots\ldots + p(A_n)\, p(B/A_n)}\ .$$

y esto para cualquier $i = 1, \ldots, n$.

Introducción a los métodos estadísticos

Etapas de un estudio estadístico:

En el proceso de toda investigación estadística pueden establecerse las siguientes fases:

Planificación

Ejecución

Análisis o Explotación

Divulgación

La fase de planificación se refiere al plan completo de todas las operaciones que hay que realizar junto con los instrumentos y todas las operaciones que son necesarias para ello. La etapa de ejecución abarca desde la recogida de datos hasta su tabulación para obtener las tablas estadísticas necesarias. La fase de análisis o explotación se refiere a los métodos estadísticos para efectuar el análisis que se persigue en la investigación y finalmente la divulgación, consistente en publicar los resultados en beneficio de todos los que estén interesados en su conocimiento.

Vamos a insistir fundamentalmente en aquellos aspectos más importantes en la investigación estadística:

Finalidad u objeto de la investigación:

El conocimiento exacto delos objetivos que se persiguen con la investigación es de importancia capital para el éxito de ella. Dichos fines u objetivos que deben estar explícitamente señalados en el plan. Permiten establecer correctamente las operaciones ulteriores: en particular, son necesarios para determinar la documentación estadística indispensable, los medios de obtenerla y la manera de ordenarla y presentarla.

Es muy frecuente iniciar una investigación estadística habiendo preparado únicamente un cuestionario que incluso no refleja con precisión la finalidad que se persigue con ella.

Después suele ocurrir que muchas de las observaciones obtenidas no son de utilidad y que en cambio se olvidaron otros de interés.

Definiciones:

Muchos de los fracasos de la investigación estadística proceden de definiciones defectuosas, que no permiten tomar decisiones uniformes. Es necesario, pues, definir exacta y correctamente, evitando toda clase de ambigüedades, los aspectos fundamentales y los accesorios de la investigación. En primer lugar definir la población y los elementos que la integran así como los caracteres que van a someterse a estudio.

Hay casos en los que la simple enunciación de la población basta para definirla exactamente, por ejemplo la constituida por los alumnos que un determinado día asisten a clase. Pero otras veces se requieren definiciones mas o menos extensas para delimitar su contenido sin ninguna ambigüedad. Por ejemplo si queremos hacer un estudio sobre los accidentes de circulación, hay que precisar que se entiende por accidente de circulación, junto con el de área geográfica a la que se refiere el estudio, para que la población quede delimitada.

En cuánto a los caracteres, en una población humana se desea estudiar el atributo sexo, éste no precisa de definición, pero si queremos catalogar su vivienda según el número de habitaciones, habrá que definir lo que se entiende por habitación. ¿Lo será el comedor? ¿La cocina?

Tanto la población como los caracteres deben definirse de manera que siempre sea posible su perfecta identificación y separación.

Alcance o cobertura de la enumeración:

En el plan se indicará si la investigación se extiende de una manera exhaustiva a todos los elementos de la población o solamente a una parte. Esta parte puede ser una muestra o una subpoblación, en el caso que sea una subpoblación habrá que dar la característica o características que permitan identificar correctamente sus elementos. En el caso de una muestra, su tamaño y método de selección.

La enumeración u observación de los elementos que han de servir de base para el estudio estadístico posterior ha de procurarse llevarla a cabo de forma que se cumplan los siguientes requisitos:

1º Ningún elemento del conjunto debe escapar a la observación.
2º No debe observarse un elemento más que una sola vez.
3º Ha de evitarse observar elementos que no pertenezcan al conjunto.

Cuestionarios:

El plan debe incluir el cuestionario o los cuestionarios que se requieren para obtener a información que ha de servir de base al análisis estadístico posterior.

El cuestionario o cuestionarios. deben estar redactados de forma clara y precisa, de manera que pueda comprenderse fácil y exactamente lo que se pregunta. A este efecto hay que tener en cuenta el nivel cultural de las personas a la que va destinado. Se procurará que todas las preguntas sean susceptibles de una interpretación única y a ser posible inmediata. Las preguntas indeterminadas y en las que cada informante pueden interpretarlas de modo distinto, son por supuesto otra fuente de errores.

Hay que evitar en general, las preguntas cuyas respuestas no estén dispuestas a darlas todos o parte de los encuestados. Por ejemplo es bastante frecuente que las empresas no quieran declarar sobre sus beneficios o las mujeres de determinada edad no quieran confesar la misma (últimamente también sucede con los hombres), si de todas formas queremos obtener esta información es preferible hacerlo por medios indirectos. Esta muy extendido la opinión de que las estadísticas son falsas, pero esto depende más del estadístico que de los que informan. Un buen estadístico sólo preguntará directamente cuestiones sobre las que espera respuestas correctas. Las otras cuestiones, aquellas en que existe un evidente recelo por parte de los encuestados, o las debe abandonar o buscará otros medios para conseguir resultados más veraces.

También es conveniente evitar aquellas preguntas que requieren cálculos o revisión de archivos para poder dar la respuesta acertada. Naturalmente los cuestionarios deben ir acompañados por cuantas aclaraciones e instrucciones sean necesarias para la correcta interpretación de todas las preguntas.

Métodos de recogida de datos.

La recogida de respuestas, observaciones o datos primarios puede hacerse de varias maneras:

a) Por correo - Cuando se dispone de la lista y direcciones de los elementos de la población que han de ser observados. A cada elemento de la lista se le envía, junto a las instrucciones adecuadas, el cuestionario que ha de devolver contestado. Normalmente se le facilita el franqueo para su reenvío.

b) Por agentes distribuidores - El método anterior es caro si la investigación se refiere a grandes masas de población, como cuando se hace el censo de viviendas, la escritura de todas las direcciones, sobres..... Se abaratan bastante si se tienen agentes distribuidores, que se pasan a llevarlos y posteriormente a recogerlos.

c) Por agentes encuestadores - Ahora personas especializadas y previamente instruidas, recorren los lugares de investigación y ellas mismas formulan las preguntas contenidas en el cuestionario y anotan las respuestas. (pueden hacerlas incluso telefónicamente)

Tablas estadísticas:

En el plan de investigación se indicarán todas las estadísticas (clasificaciones y resúmenes) que se desean obtener de los datos primarios recogidos mediante los cuestionarios. Al mismo tiempo, se dará explícitamente su forma de presentación.

Las tablas constituyen la parte más fundamental de la investigación estadística. Es en las tablas donde queda reflejado los verdaderos fines de la investigación.

Hay que tener en cuneta la forma de clasificación de los resultados, de manera que si se realiza un determinado estudio de los habitantes en los siguientes grupos de edad 0 a 3 años, 4 a 6, de 7 a 9, de 10 a 12 ... etc. y en otra se empleó de 0 a 9 de 10 a 19, de 20 a 29 etc., entonces difícilmente pueden compararse ambas distribuciones.

Junto con las tablas se especificará el modo de obtenerlas. (Manual o medios mecánicos)

Organización y control de operaciones:

Una investigación estadística a gran escala requiere de una organización adecuada.

La organización ha de tener en cuenta las dos etapas siguientes:

La distribución de cuestionarios (hacerlos llegar) La vuelta de dichos cuestionarios para su tabulación.

En este proceso de ida y vuelta hay un conjunto de operaciones que es preciso controlar para que las tablas estadísticas reflejen las características reales del conjunto observado.

El control debe cubrir los siguientes objetivos:

1º Los elementos de la población que se han de observar, deben ser efectivamente observados

2º Las respuestas a los cuestionarios no deben contener errores, o, al menos, que estos no sean significativos.

3º Todos los cuestionarios deben llegar al centro de tabulación.

4º La tabulación debe afectar a todos los cuestionarios y o debe introducir errores.

Otras cuestiones:

En el plan debe incluirse la explotación o análisis a que han de ser sometidos las estadísticas obtenidas, indicando en su caso los instrumentos estadísticos y fórmulas que van a utilizarse.

La investigación estadística puede pensarse en hacerse periódica, esto es, repetirla periódicamente para conocer los cambios en el tiempo: en dicho caso habrá que señalar el período de repetición y las razones que lo justifican. Así nos encontramos que según sea de dinámico el sistema, nos encontraremos con estudios que pueden ser decenal, quinquenal, anual, semestral, trimestral, mensual e incluso diarios según se crea en función del fenómeno elegido.

También debe estar incluido en el plan el medio de divulgar los resultados del estudio realizado. La divulgación puede hacerse mediante una o varias monografías o publicaciones, según se crea conveniente.

Finalmente en el plan se ha de hacer constar el personal necesario para llevarlo a cabvo, distinguiendo, a ser posible, sus distintas categorías y funciones, el tiempo que durará la investigación, el material y equipo que se requiere y e presupuesto de gastos lo suficientemente especificado.

Los errores estadísticos y su posible reducción.

Cuando se realiza un estudio estadístico es imposible obtener siempre unos resultados sin error. Hay una multitud de factores que impiden alcanzar una exactitud total incluso habiendo tomado las precauciones posibles y necesarias. Por tanto el objetivo que debe marcarse un estadístico es que estos errores no sean significativos. Ordinariamente se intenta que dichos errores no difieran de un 5% del verdadero valor desconocido.

El error puede descomponerse en los siguientes grupos:

1º Errores de planteamiento. Debidos a una investigación mal estructurada o planificada, a definiciones ambiguas o incompletas que no permiten localizar bien a los elementos que han de ser observados.

2º Errores de respuesta. Originados por un cuestionario poco pensado, por un método de recogida de datos inapropiado, por agentes mal instruidos o poco entrenados y por no haber previsto el control y depuración de las respuestas.

3º Errores de manipulación: Provocados por la mala organización, perdida de cuestionario...

4° Errores de Tabulación y cálculo.

Las medidas que pueden aplicarse para reducir al mínimo estos errores son:

a) Recabar previamente toda la información que se pueda de la población que se va a investigar.

b) Para asegurarse de que todos los instrumentos de la investigación y la operativa funcionan correctamente, es útil hacer un pequeño estudio previo con el fin de ensayar el mecanismo.

c) Finalmente para tener una medida de confianza sobre los resultados obtenidos, acostumbra a realizarse una encuesta a posteriori, en la que se utiliza a los mejores agentes y que suele referirse a aquellas preguntas del cuestionario de las que se sospeche que las respuestas no sean buenas.

CONCEPTOS DE ESTADÍSTICA

Es el conjunto de procedimientos que nos permiten estudiar los fenómenos aleatorios.

La palabra Estadística se utiliza también como sinónimo de dato o resultado de la elaboración de un conjunto de datos mediante técnicas estadísticas.

OBJETO MATERIAL DE LA ESTADÍSTICA.

Los fenómenos aleatorios.

OBJETO FORMAL: EL MÉTODO ESTADÍSTICO.

Prescinde de lo individual y de los razonamientos de tipo causal, para considerar regularidades o propiedades aplicables a un conjunto de datos e inferir propiedades sobre la totalidad del fenómeno estudiado.

IMPORTANCIA DEL MÉTODO ESTADÍSTICO.

Permite la inducción incompleta. Es decir, permite la obtención de conclusiones acerca de un conjunto sin necesidad de estudiar todos y cada uno de los elementos que lo componen

· El método estadístico permite abordar el estudio de fenómenos abarcan casi todas las áreas del conocimiento y, al tener un carácter genérico, puede incorporarse como parte del método del resto de las ciencias.

ETAPAS DEL MÉTODO ESTADÍSTICO.

PLANIFICACIÓN.

1. Definición de OBJETIVOS.
2. Definición de UNIVERSO y MUESTRA.
3. Definición de TÉRMINOS y UNIDADES de medida.
4. Determinación de los DATOS necesarios.

EJECUCIÓN.

1. Recolección de los datos.

2. Elaboración de los datos.

3. Descripción, análisis e interpretación de los datos.

CONCEPTO DE POBLACIÓN Y MUESTRA.

1. POBLACIÓN O UNIVERSO. Conjunto de elementos que poseen una característica o propiedad común, y que constituyen la totalidad de los individuos de interés para nuestro estudio.

2. MUESTRA. Cualquier subconjunto de la población sobre el que se realizan los estudios para obtener conclusiones acerca de las características de la población.

3. INDIVIDUO. Cada uno de los elementos de la muestra o de la población . No tienen por que ser objetos físicos, el lanzamiento de un dado.

Al realizar un estudio estadístico, no solo es necesario definir la población de referencia y la muestra que se va a utilizar, también hay que especificar qué características aleatorias de los individuos vamos a tener en cuenta. Por ejemplo: intención de voto, resultado de un tratamiento, puntuación de un dado, ...

Las características aleatorias suelen corresponder a variables numéricas y si no es así, siempre pueden codificarse numéricamente. Una característica aleatoria definida numéricamente es lo que denominamos variable aleatoria.

FASES O NIVELES DEL MÉTODO ESTADÍSTICO.

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA. Recopilación y análisis de los datos. Pueden ser datos referentes a toda la población o solo a una muestra, pero en este último caso no se pretende sacar conclusiones acerca de la población a la que pertenece la muestra.

2.ESTADÍSTICA INFERENCIAL O INDUCTIVA. Utiliza la información que se desprende del análisis de una muestra para realizar una estimación de las propiedades de la población de la que se extrajo.

3. TEORÍA DE LA PROBABILIDAD. Es la teoría matemática en la que se basa la posibilidad de realizar inferencias acerca de las propiedades de la población partiendo de la información contenida en la muestra.

Históricamente se desarrollaron por separado la Estadística Descriptiva, que es la parte más antigua (hasta las civilizaciones más primitivas realizaban censos o recuentos de población), y la teoría de la probabilidad, que surgió como un divertimento matemático aplicable al estudio de los juegos de azar. Fue a finales del siglo pasado cuando se aprovechó el ímpetu que alcanzó el formalismo matemático para combinar ambas, obteniendo la posibilidad de realizar inferencias sobre toda una población a partir del estudio de una muestra.

ORGANIZACIÓN DE DATOS

ESCALAS DE MEDIDA.

MEDIDA.

Medida es la asignación de números a los objetos o sucesos según ciertas reglas.

Los fenómenos se presentan en distintas modalidades. Realizar una medida sobre un fenómeno equivale a asociar un valor numérico -y sólo uno- a cada una de las distintas modalidades en las que se puede presentar.

ESCALA DE MEDIDA.

Es una regla o patrón que permite asociar, de forma biunívoca, modalidades y números.

De acuerdo con las relaciones que pueden establecerse entre las distintas modalidades que presenta un fenómeno, tenemos los distintos tipos de escalas de medida que aparecen en el cuadro de la página siguiente.

ESCALAS NUMÉRICAS.

ESCALA NUMÉRICA DISCRETA O DISCONTINUA.

Es aquella en la que entre dos valores de la misma no siempre podemos situar otro. Número de intervenciones quirúrgicas en un día.

Con mayor rigor, es aquella que puede relacionarse mediante una aplicación biyectiva con el conjunto de los números Naturales o con un subconjunto de este.

ESCALA NUMÉRICA CONTINUA.

Es aquella en la que, dados dos valores cualesquiera, siempre podemos encontrar otro intermedio entre ellos. El peso, la estatura Con rigor, es aquella que puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números Reales.

Tipos de escalas de medida

Escala	Operaciones posibles	Requisitos	Estadísticos validos	Ejemplo.
Nominal	Verificar la igualdad de dos modalidades	Posibilidad de permutar modalidades	Frecuencia, Moda	Estado civil, Sexo, nacionalidad
Ordinal	Verificar si una modalidad es mayor que otra	Mantenimiento del orden	Mediana, cuantiles	Gravedad de una lesion.
De intervalo	Comparar las diferencias entre dos modalidades	Unidad constante.	Media aritmética, desviacion tipica	Temperatura
De razon	Establecer razones entre modalidades	Existencia de cero absoluto	Media geometrica, coef. de variacion	Peso, altura...

TABLAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS:

La organización de los datos recogidos en un trabajo estadístico es imprescindible para su aprovechamiento y mejor comprensión. La forma idónea de realizar este proceso es a través de tablas y gráficos. Para ello es preciso tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Gráficos y tablas deberán estar rotulados de forma clara, de modo que se expliquen por sí solos. Si se utilizan códigos o abreviaturas deben explicarse a pie de página. Todas las filas y columnas de las tablas estarán encabezadas, y los ejes de los gráficos rotulados.

2. Siempre que tenga sentido, las filas y columnas de una tabla deberán estar totalizadas.

3.Las unidades de medida han de estar claramente definidas.

4. Se deben evitar las tablas o gráficos excesivamente complejos. Es preferible realizar varias tablas simples antes que una compleja.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

1. FRECUENCIA ABSOLUTA. La frecuencia absoluta de una modalidad es el número de veces que se repite esa modalidad como resultado de un experimento.

2.FRECUENCIA RELATIVA. Es la frecuencia absoluta partida por el número total de observaciones.

3.FRECUENCIA ACUMULADA (Absoluta o relativa). Igual que en cada uno de los anteriores casos pero sumando, no sólo, los resultados de la modalidad de que se trate, sino también los de todas las precedentes. No es válido para datos de escalas nominales, ya que en ellas no existe el orden.

4. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS. Es una disposición organizada de los datos recogidos en un estudio. Contiene un listado de las distintas modalidades del fenómeno considerado, con la frecuencia absoluta, relativa y acumulada de cada una. Cuando el número de modalidades es demasiado grande (esto ocurre siempre con las escalas continuas) se agrupan en clases.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS: REGLAS PRACTICAS.

1. Las clases han de ser excluyentes.

2. Los límites de cada clase deben tener más precisión que las medidas realizadas.

3. Aunque no tiene que ser necesariamente así, es conveniente que la amplitud de los intervalos sea constante.

4. Todos los datos de una clase quedan representados por la marca de clase, que es el valor medio de intervalo que forma la clase. De esta manera, todos los cálculos se realizan como si en lugar de tener N valores distintos en una clase, tuviéramos N veces la marca de clase.

MODELOS DE TABLAS ESTADÍSTICAS

modelo de tabla para variables cuantitativas discretas.				
Variable.	**Frecuencia absoluta.**	**Frecuencia absoluta acumulada.**	**Frecuencia relativa.**	**Frecuencia relativa acumulada.**
X_1	n_1	n_1	$f_1 = n_1/N$	$F_1 = f_1$
X_2	n_2	$n_1 + n_2$	$f_2 = n_2/N$	$F_2 = f_1 + f_2$
...	...	...	...	...
X_i	n_i	$\sum_{j=1}^{i} n_j$	$f_1 = n_i/N$	$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$
...	...	...	...	...
X_n	n_n	$N = \sum_{j=1}^{n} n_j$	$f_1 = n_n/N$	$F_n = \sum_{j=1}^{n} f_j = 1$
	N		1	

modelo de tabla para variables cuantitativas continuas.					
Clases o intervalos	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta.**	**Frecuencia absoluta acumulada.**	**Frecuencia relativa.**	**Frecuencia relativa acumulada.**
$[a_0,a_1)$	$X_1=(a_0+a_1)/2$	n_1	n_1	$f_1 = n_1/N$	$F_1 = f_1$
$[a_1,a_2)$	$X_2=(a_1+a_2)/2$	n_2	$n_1 + n_2$	$f_2 = n_2/N$	$F_2 = f_1 + f_2$
	..	..	...	...	...
$[a_{i-1},a_i)$	$X_i=(a_{i-1}+a_i)/2$	n_i	$\sum_{j=1}^{i} n_j$	$f_1 = n_i/N$	$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$
	...	...	...	...	...
$[a_{n-1},a_n]$	$X_n=(a_{n-1}+a_n)/2$	n_n	$N = \sum_{j=1}^{n} n_j$	$f_1 = n_n/N$	$F_n = \sum_{j=1}^{n} f_j = 1$
		N		1	

VARIABLES CUANTITATIVAS CONTINUAS: NORMAS PARA LA ELABORACIÓN DE TABLAS.

1° Obtener el rango o amplitud de los datos. Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo.

2° Determinar el número de intervalos. Pueden tomarse tantos intervalos como se quiera, pero es aconsejable que sea en torno a 10.

3º Calcular la amplitud de los intervalos, que es igual al rango dividido por el número de intervalos.

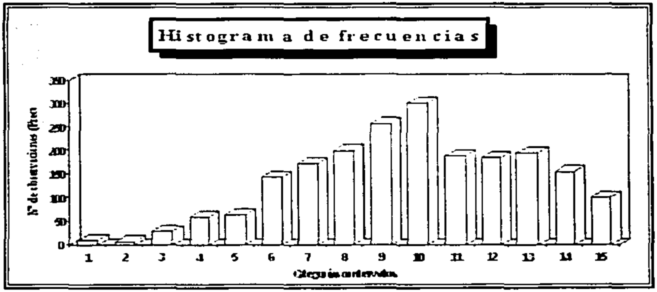
4º Determinar el limite superior del último intervalo y el limite inferior del primero.

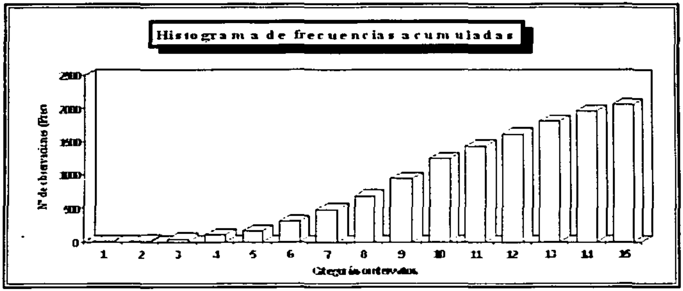
5º Calcular la marca de clase de cada intervalo, que no es otra cosa que el punto medio del intervalo.

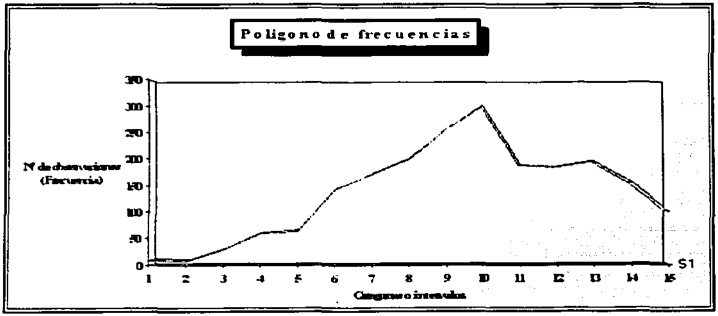
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE DATOS ESTADÍSTICOS.

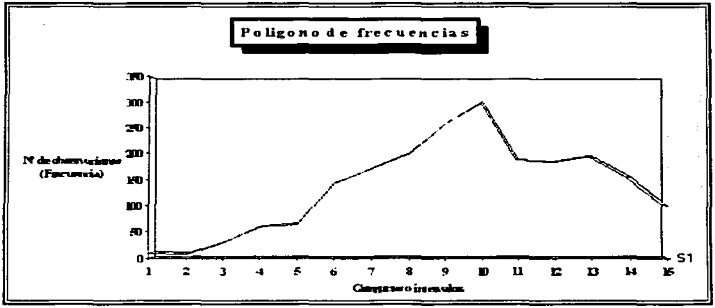
La representación gráfica de datos tiene la ventaja de que es capaz de ofrecer de forma inmediata una perspectiva global de los resultados de un estudio.

A continuación aparecen algunos de los formatos más utilizados




Histograma de frecuencias acumuladas
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
11
12
15


Poligono de frecuencias
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
11
14
S1



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Es importante tener información sobre los valores al centro y los valores al centro y los valores distanciados respecto a estos de los datos de una estadística para obtener deducciones y consecuencias.

1. Medidas de tendencia central : Media. Mediana y Moda

2. Medidas de Dispersión: Varianza. Desviación Estándar y Desviación Media

MEDIA.

Es equivalente al promedio aritmético para su cálculo es necesario conocer como se encuentran los datos.

1. Para datos no agrupados

$$\boxed{\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi}$$

2. Para datos agrupados por frecuencia

$$\boxed{\overline{X} = \frac{1}{n}(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_nx_n)}$$

3. Media cuando se tienen intervalos

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} fxCi$$

Donde Ci= marca de clase.

MEDIANA.

Es el valor tal que la mitad de las observaciones tiene que tener un valor menor a la mediana y la otra mitad mayor a la mediana.

MODA.

Es el valor que se presenta con frecuencia. Ciertas distribuciones presentan mas de una considerando como moda los valores máximos de polígonos de frecuencia.

MEDIA GEOMÉTRICA.

$$\overline{X}_G = \sqrt[n]{X_1 * X_2 * X_3 * X_4 * \ldots}$$

MEDIA ARMÓNICA.

$$\overline{X}_A = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{Xi}}$$

MEDIA CUADRÁTICA.

$$\overline{X}_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X^2_i}{n}}$$

CUARTILES.

Son valores que dividen al conjunto en 4 subconjuntos iguales Q1, Q2, Q3 ó cuartil uno, cuartil dos, etc.

DESCILES.

Son valores que dividen al conjunto en 10 subconjuntos iguales D1, D2, D3, ..., D9.

PERCENTILES.

Son valores que dividen al conjunto en 100 subconjuntos iguales P1, P2, P3, ... P100

CONJUNTOS

Es una colección de objetos bien definidos notación A,B,C Elementos a,b,c,

B={b,a,c}

Pertenencia de elemento a conjunto $b \in B$ $a \in B$ $c \in B$

Formas de definir un conjunto

A) Método por extensión o tabular

B) Método constructivo o por comprensión

A) A = {a,b,c}

B) A= x/x es una de las primeras letras del alfabeto

Conjunto Vació $\varnothing = \{\}$ es subconjunto de todo conjunto. es aquel que no tiene elementos.

Conjunto Universal $\cup = \Omega$ representa la totalidad de elementos para un problema dado.

Subconjunto $\subset$

El conjunto A es el subconjunto de B ($A \subset B$) si todo elemento que pertenece a A también pertenece a B.

Ejemplo: $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3,4\}$

$A \subset B$ (subconjunto)
$B \supset A$ (superconjunto)

Todo conjunto es subconjunto de sí mismo $A \subseteq A$

Subconjunto propio A es subconjunto propio de B, si todo elemento de A pertenece a B y además B tiene otros elementos.

$A \subseteq A$ $A \subset B$

Conjuntos iguales =
A es igual que B si todo elemento que pertenece a A también pertenece a B, y si todo elemento que pertenece a B también pertenece a A.

$A=B \Leftrightarrow A \subset B$ y $B \subset A$

Ejemplo	A=	{2,4,5}	=> A=B
	B=	{2,4,2,5}	

Familias de Conjuntos

Son conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos.

$A = \{\{e\}, A, B\}$ $\quad A \not\subset A$

Conjunto Potencia (es una familia de conjuntos)

Es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. Se denota generalmente como 2 nombre del conjunto.

Ejemplo:	$A=\{2,3\}$
	$B=\{2\}$
	$C=\{3\}$
	$D=\{2,3\}$
	$\varnothing$
	$2^a=\{B,C,D,\varnothing\}$
	$2^a=\{\{2\},\{3\},\{2,3\},\varnothing\}$

Obtener el conjunto potencial del siguiente conjunto, y decir si las siguientes afirmaciones son F o V y XO.

$B=\{0,1,2,\}$
$C=\{0,1,\}$
$D=\{0,2\}$ $\quad 2B=\{C,D,E,F,G,H,I,J\}$
$E=\{1,2\}$
$F=\{\varnothing\}$
$G=\{0,1,2\}$
$H=\{0\}$
$I=\{1\}$
$J=\{2\}$

1)	$0 \subset B$	V
2)	$\{0,1\} \subset B$	V
3)	$\{1\} \not\subset B$	F
4)	$\varnothing \subset B$	V
5)	$\{1,2,0\} \subset B$	V
6)	$\{\{1\}\} \subset B$	F
7)	$\{\{0,1,2\}\} \not\subset 2B$	F

Conjuntos Disjuntos o Ajenos

Los conjuntos A y B son disjuntos si no tienen elementos en común.

Ejemplo: $A=\{a,b,c\}$ $B=\{f,j,k\}$

A y B son ajenos

Conjuntos Comparables

Dos conjuntos A y B son comparables si $A \subset B$ o $B \subset A$

Conjuntos no Comparables

Dos conjuntos A y B son no comparables $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$

Ejemplos:

Decir de los siguientes conjuntos cuales son comparables y cuales no.

A= {3,5,6,7} B= {5,6,7,8} C= {1,2,3,5,6,7} D={3,4,5,6,7,8} E={1,2,9,10}	$A \not\subset B$ $B \not\subset A$	- son no comparables
	$A \subset C$ $C \not\subset A$	- son comparables
	$A \subset D$ $D \not\subset A$	- son comparables
	$A \not\subset E$ $E \not\subset A$	son no comparables, y disjuntos

OPERACIONES CON CONJUNTOS.

Unión $\cup$

La unión de dos o más conjuntos A y B es un nuevo conjunto tal que sus elementos pertenecen a A o a B o a los dos.

$$\boxed{A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}}$$

Intersección $\cap$

La intersección de los conjuntos A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos son aquellos que pertenecen al mismo a los dos conjuntos.

$$\boxed{A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}}$$

Diferencia o Resta –

La diferencia de A-B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto minuendo no al sustraendo.

$$\boxed{A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\} \Rightarrow \in A}$$

Complemento C'

Para hablar de complemento, lo primero que hay que definir es el universo. El complemento de un conjunto es el conjunto formado por todos los elementos que no pertenezcan a A.

$$\boxed{Ac=A'=\{ x/x \notin A\} = \{x/x \in \cup \text{ y } x\notin A\} \quad \cup\text{-}A=A'}$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son: { 0, 1, 2, 3} es un conjunto infinito y se representan en una semirecta.

LOS NÚMEROS ENTEROS Z

Los números enteros son: Z= { - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3} es un conjunto infinito y se representan en una recta.

LOS NÚMEROS RACIONALES Q

Los números racionales son aquellos que pueden expresarse en forma de fracción de dos enteros

$$\boxed{Q=\left\{ x/\ x=\frac{p}{q} \quad p\in Z,\ q\in Z \right\} \text{ es un conjunto infinito y } \mathbf{Z \subset Q} \text{ ya que } -4=\frac{-4}{1}}$$

Se representan en una recta."Los enteros se representan como enteros.

"Los positivos y menores que la unidad: $\frac{3}{5}<1$ se representan entre el 0 y el 1 utilizando el teorema de Tales

" Los positivos y mayores que la unidad $\frac{3}{5}<1$ es un numero comprendido entre el 2 y el 3. Se dibuja:

"Los negativos mayores que - 1: $\frac{12}{5}>1,\qquad 2<\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}<3$ se dibuja:

" Los negativos menores que -1: $-\frac{15}{4} < -1$. $-4 < -\frac{15}{4} = -3 - \frac{3}{4} < -3$

Es un número comprendido entre - 4 y -3. Se dibuja:

EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL.

La expresión decimal de un número racional se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador de su expresión fraccionaria. y los números que se obtienen son:

- Enteros: $\frac{-6}{2} = -3$
- Decimal exacto: $\frac{7}{2} = 3{,}5$
- Decimal infinito periódico.
  - Periódico puro: $\frac{1}{3} = 0{,}333333333\cdots\ 0{,}\overline{3}$
  - Periodico mixto: $\frac{89}{30} = 2{,}96666666\cdots\ 2{,}9\overline{6}$

EXPRESIÓN FRACCIONARIA DE UN NÚMERO DECIMAL

- Entero: $-3 = \frac{-3}{}$
- Decimal exacto $2{,}18 = \frac{218}{100}$ luego se ha de simplificar
- Decimal infinito periódico:
  - Periodico puro: $x = 1{,}\overline{35}$

    $100x = 135{,}353535\cdots\cdots$

    $x = 1{,}353535\cdots\cdots$

    $99x = 135 - 1$ $\quad 99x = 134$ $\quad x = \frac{134}{99}$ $\quad 1{,}\overline{35} = \frac{134}{99}$
  - Periodico mixto: $x = 1{,}3\overline{18}$

    $1000x = 1318{,}181818\cdots\cdots$

    $10x = 13{,}181818\cdots\cdots$

    $990x = 1318 - 13$ $\quad 990x = 1305$ $\quad x = \frac{1305}{990}$ $\quad 1{,}3\overline{18} = \frac{1305}{990}$

LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Son aquellos que no pueden ser expresados en forma de fracción de dos enteros.

La expresión decimal de los números irracionales es infinita no periódica y por lo tanto los números decimales infinitos no periódicos no pueden expresarse en forma de fracción y por tanto son irracionales.

Hay muchos números irracionales, como:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ ......; pi $= 3{,}14159\cdots\cdots$, $e = 2{,}71828\cdots\cdots$

$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$; $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180\cdots\cdots$

LOS NÚMEROS REALES

Los números reales se representan en la recta real (los racionales y los irracionales) y llenan todos los puntos que esta recta tiene

ORDENACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

$a < b$ significa que $b - a > 0$
$a > b$ significa que $b - a > 0$

PROPIEDADES

- Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$
- Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- Si $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

INECUACIONES

Consiste en encontrar todo los números que verifican una desigualdad.

Ejemplo $-3x + 2 < 3$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Para resolverlas se han de aplicar las propiedades de la ordenación de los números reales.

Y se han de seguir los siguientes pasos:

1. Se quitan denominadores si los hubiera.

2. Se aísla la incógnita en el miembro en quede positiva con el sistema de lo que está sumando pasa al otro miembro restando y lo que esta restando pasa al otro lado sumando.

3. Lo que esta multiplicando (que será positivo) pasara al otro miembro dividiendo y lo que está dividiendo (que será positivo) pasa multiplicando.

4. La solución, si existe, se dará en forma de operación de intervalos.

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

El método para resolverlas es la siguiente:

1. Se quitan denominadores si los hubiera.

2. Se ordena en un miembro de la igualdad.

3. Sustituimos el signo de desigualdad por el de igualdad, y se resuelve la ecuación de segundo grado.

4. Los valores obtenidos se representan en la recta.

5. Probamos en cada intervalo con un numero si verifica o no la desigualdad. Si el punto verifica la desigualdad, todo el intervalo es solución.

Ejemplo:- $2x - 3 < x^2$	sol $(1, 3)$

RADICALES DE ÍNDICE ENTERO

La raíz enésima de un número real se define como:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a}$$

n es el índice de la raíz y a es el radicando. Si el índice es n = 2 entonces no se escribe $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Las raíces de índice par tienen dos soluciones o ninguna: $\sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$ $\quad \sqrt[4]{-16}$

Las raíces de índice impar siempre tienen solución y es única: $\sqrt[3]{8} = 2 \quad \sqrt[3]{-8} = -2$

PROPIEDADES

PROPIEDADES	
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot q]{a^{p \cdot q}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$
$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$	

Para sumar y restar radicales han de tener el mismo índice y el mismo radicando. $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Pero no se puede sumar. $\sqrt{2}+3\sqrt{3}$

Para multiplicar y dividir radicales han de tener el mismo índice.

$$\boxed{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{4}=\sqrt[6]{25}\cdot\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{25\cdot 64}=\sqrt[6]{1600}=\sqrt[3]{40}}$$

RACIONALIZAR

Es realizar les operaciones adecuadas para obtener una fracción equivalente que no tenga raíces en el denominador.

CASO 1º Una unica raiz en el denominador.

$$\frac{3}{5\sqrt{2}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{5\cdot 2}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$$

CASO 2º Raiz en el denominador relacionada con sumas o restas con otro número.

$$\frac{3}{5-2\sqrt{3}}=\frac{3}{5-2\sqrt{3}}\cdot\frac{5+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{3(5+2\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})\cdot(5+2\sqrt{3})}=\frac{3(5+2\sqrt{3})}{25-12}=\dots\dots\dots$$

CASO 3º Una unica raiz en el denominador de índice n > 2.

$$\frac{3}{\sqrt[5]{5}}=\frac{3}{\sqrt[5]{5}}\cdot\frac{\sqrt[5]{5^4}}{\sqrt[5]{5^4}}=\frac{3\sqrt[5]{5^4}}{\sqrt[5]{5^5}}=\frac{3\sqrt[5]{5^4}}{5}$$

EXPRESIÓN DE UN RADICAL COMO POTENCIA

Las raíces se pueden expresar como potencias de exponente fraccionario y al revés, las potencias de exponente fraccionario pueden expresarse como raíces. La equivalencia es la siguiente:

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}} \quad \text{y} \quad \text{en general} \quad \sqrt[n]{a^p}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=a^{\frac{p}{n}}}$$

Las potencias de exponente fraccionario tienen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

APROXIMACIÓN: TRUNCAMIENTO Y REDONDEO

Para trabajar con números decimales infinitos o números decimales largos, se les aproximan a otros números mediante el truncamiento o el redondeo (ambas cosas las realizan las calculadoras).

TRUNCAR un número significa suprimir les cifres a partir de una determinada.

REDONDEAR un número es conseguir la mejor aproximación con otro que tenga una cantidad determinada de cifras decimales, y depende de la cifra situada a la derecha de la última no suprimida. H

Si un número lo queremos redondear con n cifras decimales y la cifra decimal n+1 es mayor o igual a 5 entonces la cifra enésima se aumenta una unidad, es decir se redondea por exceso. En caso contrario se deja la que estaba, es decir se redondea por defecto.

Ejemplo:

Número	Nº de cifras decimales de la aproximación	Truncamiento	Redondeo
2,33375689....	3	2,333	2,334
5,67587654.....	3	5,675	2,676
0,01199453....	4		

LEYES DE LOS EXPONENTES

$0^X = 0$ Si $X > 0$			
$a^x > 0$ si $a > 0$			
0^0	$=$	∞	
a^0	$=$	1	
a^{-1}	$=$	$1/a$	si $a \neq 0$
a^{-x}	$=$	$1/a^x$	si $a \neq 0$
$(ab)^x$	$=$	$a^x b^x$	si $b \neq 0$
$(a/b)^x$	$=$	a^x/b^x	si $a,b \neq 0$
$\sqrt[n]{a^m}$	$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$		
$\sqrt[n]{a}$	$= a^{1/n}$ $n \geq 2$		

$$a^{-m/n} = 1/a^{m/n} = 1/a^{m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}$$

LOGARITMOS

Si $a^0 = 1$	$\Rightarrow$	$\log_a 1 = 0$	
Si $a^1 = a$	$\Rightarrow$	$\log_a a = 1$	
Si $a^n = a^n$	$\Rightarrow$	$\log_a a^n = n$	$a^{\log_a n} = n$

Ejemplos

1. $10^{\log_{10} 100} = 100$
2. $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1/2} = 7$ $\Rightarrow$ Respuesta: $\log_{1/49} 7 = -1/2$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ $\Rightarrow$ Respuesta: $\log_{1/3} 3 = -1$
4. $5^{-3} = 125$ $\Rightarrow$ Respuesta: $\log_{1/125} 1/125 = -3$
5. $81^{-3/4} = 1/27$ $\Rightarrow$ Respuesta: $\log_{81} 1/27 = -5/4$

"A" Expresión exponencial

$\log_{10} 1000 = 4 \Rightarrow \quad (10)^4 = 10000$
$\log_{1/5} 25 = -2 \quad \Rightarrow \quad (1/5)^{-2} = 25$
$\log_{(2)^{1/2}} 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2})^2 = 2$
$\log_{10} 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (10)^0 = 1$

Leyes de Logaritmos

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$LOGa\ (x*y) = LOGa + LOG_b\ y$
DEMOSTRACIÓN $\Rightarrow$ $LOG_a X = b \quad \Rightarrow a^b = X$
$LOG_a\ y = c \quad \Rightarrow a^c = y$
$LOG(a^b * a^c) \quad = LOG_a\ a^{b+c} = b + c = LOG_a X + LOG_a\ y$

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$LOG_a\ (x / y) = LOG_a X - LOG_a\ y$
DEMOSTRACIÓN $\Rightarrow LOG_a(x/y) = LOG_a(ab/a^c) = LOG_a\ a^{b-c} = b - c = LOG_a X - Log_a\ y$

SUCESIONES

Conceptos básicos

Definición de límite real de una sucesión.

Diremos que una sucesión tiene por límite el número real L, y escribiremos lim. An=L.

Cuando los términos de la sucesión se aproximen tanto como queramos a L, o sea, cuando dado un entorno de centro L, de radio tan pequeño como queramos siempre existe un término de la sucesión, a partir del cual y todos los que le siguen están dentro del entorno.

El límite real de una sucesión, si existe, es único.

Definición de límite + de una sucesión.

Diremos que una sucesión An tiene por límite +, y escribiremos lim. An =+infinito, si dado un número real positivo H, tan grande como queramos, existe un término en la sucesión, a partir del cual y todos los que le siguen son mayores que H.

Ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6.......

Definición de límite -infinito de una sucesión.

Diremos que una sucesión An tiene por límite - , y escribiremos lim. An = - si dado un número real negativo H, tan pequeño como queramos, existe un término en la sucesión, a partir del cual y todos los que le siguen son menores que H.

Ejemplo: -1, -2, -3, -4, -5, -6........

Definición de sucesión monótona creciente.

Diremos que una sucesión An es monótona creciente cuando cada término de la sucesión mayor o igual que el anterior; es decir:

Ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6.......

Definición de sucesión monótona decreciente.

Diremos que una sucesión An es monótona decreciente cuando cada término de la sucesión es menor o igual que el anterior; es decir:

Ejemplo: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6........

Definición de sucesión acotada superiormente y cota superior.

Dada una sucesión An, diremos que está acotada superiormente, si todos sus términos son menores o iguales que un cierto número real K, que llamaremos cota superior de la sucesión; es decir:

Ejemplo: 4.9, 4.999, 4.999999....... cota superior = 5

Definición de sucesión acotada inferiormente y cota inferior.

Dada una sucesión An, diremos que está acotada inferiormente, si todos sus términos son mayores o iguales que un cierto. número real K, que llamaremos cota inferio de la sucesión; es decir:

Ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6....... cota inferior = 0

Definición de sucesión acotada y ejemplo.

Dada una sucesión An. diremos que está acotada, si lo está a la vez superiormente e inferiormente.

Ejemplo: 4,9, 4,999, 4,9999..cota superior = 5 cota inferior = 3

Casos de indeterminación.

Existen algunos casos de indeterminación que se nos pueden presentar al calcular límites de sucesiones.

Límites de una sucesión que tiene por término general un cociente entre dos polinómios.

	a) si grado P(n) grado Q(n) el limite será +o -
P(n)	b) si grado P(n) grado Q(n) el límite será cero.
Q(n)	c) si grado P(n) = grado Q(n) el límite será el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado

Límite de una sucesión que tiene por término general un polinomio.

Las sucesiones que tienen por término general un polinomio (lim P(n)) serán de límite +o - . según el signo positivo o negativo. respectivamente. del coeficiente del término de mayor grado.

Sucesión (1+1/n)

La sucesión (1+1/n) es monótona creciente y está acotada superiormente. por lo tanto es convergente y su límite es un número irracional. que llamaremos e (e = 2,7182....)

Definición.-Llamamos serie de potencias a toda expresión del tipo

$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$, en donde $a_n \in \mathbf{R}$

Es decir

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Por ejemplo

$$\sum_{0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

en donde todos los a_n valen 1, o

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} x^n + \ldots$$

y todos sus $a_n = \frac{1}{n!}$.

Es interesante saber cuáles son los valores de $x \in \mathbf{R}$ para los que las respectivas series funcionales se convierten en series numéricas convergentes. Por ejemplo si en la primera de las dos series anteriores hacemos $x=0$, $\sum_{0}^{\infty} x^n$ es $1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$, y esta serie es obviamente convergente.

En cambio si $x = 1$, se convierte en $1 + 1 + \ldots + \ldots$ que es divergente.

Pero para $x = 1/2$ es

$$\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots}$$

que es una serie geométrica de razón $q = \frac{1}{2} < 1$ y su suma $S = \frac{1}{1-q} = 2$ con lo que la serie es convergente.

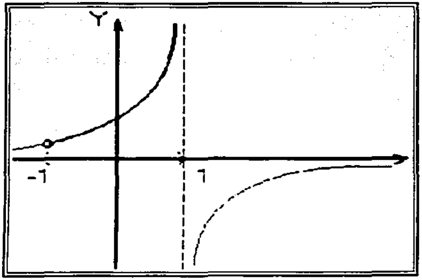
Más aún, $\sum_{0}^{\infty} x^n$ es una serie geométrica de razón x y será convergente si $|x| < 1$, es decir si $x \in I$, siendo $I = \{x \in \mathbf{R} / -1 < x < 1\}$.

Si se cumple esta condición:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

Entonces bajo ciertas condiciones, una serie de potencias describe exactamente a una función. En este caso a $f(x) = \frac{1}{1 - x}$, pero sólo en el intervalo (-1;1).

Gráficamente



$f(x) = \frac{1}{1 - x}$ sólo definida en la parte marcada gruesa por la serie

Si en el segundo ejemplo tomamos x =1, se convierte en

$$\boxed{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e}$$

Intervalo de convergencia.-Se llama intervalo de convergencia I al conjunto de valores reales de x que convierte a la serie de potencias en una serie numérica convergente.

Radio de convergencia.-Lamamos así a la menor de las cotas superiores del conjunto I

En el caso de $\sum_{0}^{\infty} x^n$ se observa que el intervalo de convergencia es I = (-1;1) y el radio de convergencia es R = 1.

Se observa que el intervalo I está centrado en el origen. Siempre es así para el I de $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$.

Cálculo del radio e intervalo de convergencia:

Sea la serie de potencias $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$. Formemos la serie de valores absolutos, es decir

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{0}^{\infty}|a_n x^n| &= |a_0|+|a_1 x|+|a_2 x^2|+\ldots+|a_n x^n|+\ldots= \\ &=|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x^2|+\ldots+|a_n||x^n|+\ldots\end{aligned}}$$

que es una serie de términos positivos que si converge arrastrará la convergencia de $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ que no necesariamente es de términos positivos.

TIPOS DE FUNCIONES

ALGEBRAICAS

Si una función se puede obtener como resultado de sumas, multiplicadores divisiones y potenciaciones de las funciones constante e idéntica.

Constante ==> y=K idéntica ==> f(x) = x

TRASCENDENTE

Si no son del tipo algebraico

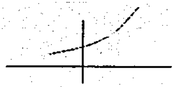
Ejemplo: y = sen x ==> y = log a x

FUNCIONES TRASCENDENTES

Funciones exponenciales y logarítmicas.

Una función $y = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$ y "y" es cualquier número real. Se conoce como exponencial

Funciones exponenciales $y = a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$

Si $a > 0$ la función es creciente ⟶ 

Si $0 < a < 1$ la función decreciente ⟶ 

Las funciones $y = a^x$ pasen por el punto (0.1) El dominio es R y el rango es R+ U {0}

PRODUCTOS NOTABLES

Binomio al cuadrado.

El cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

Binomios Conjugados.

El cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Binomios con un término común.

El cuadrado del primero más la suma o diferencia de los términos no comunes por el término común más el producto de los no comunes.

$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)\,a + bc$

Binomio al cubo.

El cubo del primero más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Productos Notables

$(a + b)^0 = 1$
$(a + b)^1 = a + b$
$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b = (a + b)\,(a + b)$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b)$

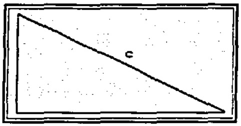
TRIÁNGULO DE PASCAL

$(a + b)^0$							1						
$(a + b)^1$						1		1					
$(a + b)^2$					1		2		1				
$(a + b)^3$				1		3		3		1			
$(a + b)^4$			1		4		6		4		1		
$(a + b)^5$		1		5		10		10		5		1	
$(a + b)^{\circ}$	1		6		15		20		15		6		1

TEOREMA DE PITÁGORAS

Lados adyacentes al ángulo recto, son los catetos, (a y b)

El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa (c)



La suma de los cuadrados de los catetos es igual a el cuadrado de la hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

APLICACIÓN DEL TEOREMA PITÁGORAS

a = x

b =2x – 4

hipotenusa = 12

Encontrar los valores.

$x^2 + (2x-4)^2 = 144$	Se elevan al cuadrado los valores.
$x^2 + 4x^2 - 16x + 16 = 144$	Se hace el cuadrado del segundo término.
$x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 144 = 0$	El 144 pasa al otro lado y se iguala a cero.
$5x^2 - 16x - 128 = 0$	Los valores semejantes se suman.
$a = 5$ $b = -16$ $c = -128$	El valor de a es el término cuadrático. El de b será el del lineal. y de c el independiente.
$x = -(16) \pm \sqrt{\dfrac{-16^2 - 4(5)(-128)}{2(5)}}$	Con los valores de ↑ se sustituyen la ecuación de segundo grado, en su fórmula general.
$x_1 = 6.9$ $x_2 = -3.7$	Se resuelve.

INTRODUCCIÓN

La palabra cálculo proviene del latín *calculus*, que significa contar con piedras. Precisamente desde que el hombre ve la necesidad de contar, comienza la historia del cálculo, o de las matemáticas.

Las matemáticas son una de las ciencias más antiguas, y más útiles. El concepto de matemáticas, se comenzó a formar, desde que el hombre vio la necesidad de contar objetos, esta necesidad lo llevó a la creación de sistemas de numeración que inicialmente se componían con la utilización de los dedos, piernas, o piedras. De nuevo, por la necesidad, se hizo forzosa la implementación de sistemas más avanzados y que pudieran resolver la mayoría de los problemas que se presentaban con continuidad.

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y la teoría de las series. Para el desarrollo de este proceso se contaba con: el álgebra; las técnicas de cálculo; introducción a las matemáticas variables; el método de coordenadas; ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes; problemas de cuadraturas; búsqueda de tangentes... Las causas que motivaron este proceso fueron, en primer término, las exigencias de la mecánica, la astronomía y la física. En la resolución de problemas de este género, en la búsqueda de problemas generales de resolución y en la creación del análisis infinitesimal tomaron parte muchos científicos: Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Walis, Roberval, Fermat, Descartes, Barrow, Newton, Leibniz, y Euler.

LÍMITES

El límite de una función es el valor de un punto acercandolo por la derecha y por la izquierda de la función hay que aclarar que cuando hablamos de límites hablamos de una tendencia.

Idea de límite de una función en un punto : Sea la función y = x*x . Si x tiende a 2 a qué valor se aproxima y :

$x \to 2^-$	1'8	1'9	1'99	1'999
$y \to$	3'24	3'61	3'9601	3'996001

$x \to 2^+$	2'2	2'1	2'01	2'001
$y \to$	4'84	4'41	4'0401	4'004001

Luego cuando x se aproxima a 2 , tanto por la derecha como por la izquierda los valores de y se acercan cada vez más a 4 . Esta idea se suele expresar así :

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \quad \text{(límite lateral por la izquierda)}$$
$$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4 \quad \text{(límite lateral por la derecha)}$$

Cuando el límite por la derecha y por la izquierda existen y son iguales se dice que existe límite en ese punto y es :

Definición matemática de límite : una función f tiene límite l cuando x tiende a x0 si es posible conseguir que f(x) esté tan próximo a l como se quiera al tomar x suficientemente próximo a x0 (tanto como sea necesario) pero siendo x diferente x0 .

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1. El límite de una función en un punto si existe , es único y es igual a los límites laterales .

2. Si una función tiene limite distinto de cero en un punto entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma f tienen el mismo signo que el límite .

3. lim f+g = lim f + lim g ; donde f y g son funciones continuas

4. lim f·g = lim f · lim g ;donde f y g son funciones continuas

5. lim k·f = k · lim f ; donde k es un nº real

6. limf/g = lim f / lim g ; siempre que lim g sea diferente de 0

7. lim f n = (lim f)n : donde n es un nº real

8. lim f g = (lim f)g : donde g es una constante real

9. lim g(f(x)) = g (lim f(x)) : donde g es una constante real

DETERMINACIÓN DE LÍMITES INDETERMINADOS

Cálculo de algunos límites : (Indeterminaciones)

Al aplicar las propiedades de los límites podemos encontrar una de las siguientes indeterminaciones : ∅=()

Es posible determinar estos límites de tres formas diferentes:

1.-Por acercamiento al derecha e izquierda

2.-Por medios algebraicos

3.-Por la regle de LHOPITAL

supongamos:

$$\boxed{\lim_{x\to 3}(X-3)/(X^2-9)) = \lim_{x\to 3}(0/0) = F.I.}$$

Utilizando el primer método (acercamiento por la derecha y por la izquierda

$$\lim_{x\to 2.99}(X-3)/(X^2-9)) = \lim_{x\to 3}(-0.01/-0.0599) = 0.169$$

$$\lim_{x\to 3.01}(X-3)/(X^2-9)) = \lim_{x\to 3}(0.01/0.0599) = 0.169$$

Utilizando el segundo método (por ptoductos notables)

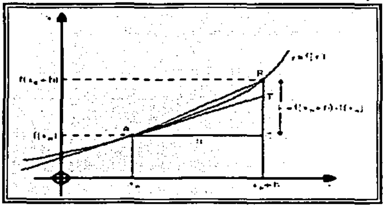
$$\lim_{x\to 3}(X-3)/(X^2-9)) = \lim_{x\to 3}(X-3)/((X+3)(x-3)) = \lim_{x\to 3}(1/(x+3)) = 1/6 = 0.16$$

Utilizando el tercer método (regla de LHOPITAL)

$$\lim_{x\to 3}(X-3)/(X^2-9)) = \lim_{x\to 3}(\partial(X-3))/(\partial(X^2-9)) = \lim_{x\to 3}(1/(2X)) = 1/6 = 0.16$$

DERIVADA

Una derivada se puede definir como la taza de cambio instantanea, o la pendiente de la curva tangente



Cuando h tiende a cero la cuva secante de la curva se convierte en tangente ya que solo pasa por un punto.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{f(x+\Delta x) = f(x)}{x+\Delta x - x}$$
$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow m_s = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Esta es la derivada partiendo de la definición de pendiente, en otras palabras la derivada es la pendiente de la tangente en cualquier punto de la curva

REGLA DE LA CADENA

Esta propiedad asegura que si $y = f(x)$ es una función derivable en un cierto intervalo I

$$f: I \longrightarrow \mathbf{R},$$

y $z = g(y)$ es otra función derivable y definida en otro intervalo que contiene a todos los valores (imágenes) de la función *f*.

$$g : f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

entonces la función compuesta

$$g \circ f : I \longrightarrow f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, es derivable en todo punto x de I y se obtiene

$$(gof)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Criterio de la primer derivada

El criterio de la primer derivada nos ayuda. a obtener loas máximos o mínimos. de una función f(x), en realidad. es un procedimiento

1.-Obtener $f'(x)$
2.-Igualar $f'(x)=0$
3.-Encontrar los puntos críticos
4.-Evaluar a la derecha y a la izquierda de $f'(x)$
5.-Si va de – a + es mínimo: Si va de + a - es máximo

Ejemplo:

Hallar los máximos y mínimos de :

$f(x)=12x^3-30x^2-247x+12$

Como es una ecuación de tercer grado va a tener 2 máximos y/o mínimos. El número de máximos y mínimos que tiene una ecuación está dado por el término de mayor grado menos uno.

Pasos para aplicar el criterio de la primera derivada:

1.-Derivar f(x)

$f'(x)=36x^2-60x-24$

2.-Igualar la derivada con cero (para que m=0 y ahí se cumpla un máximo o un mínimo)

$36x^2-60x-24=0$

3.-Hallar los valores críticos de la ecuación (no son raices solución porque anteriormente derivé la ecuación)

4.-Los pongo en forma de factor (igualar cada uno a cero)

$x-2=0$

$x+0.333=0$

5.-Análisis de los valores críticos:

Para

x=2 voy a tomar un instante antes de 2 y uno después de 2

antes=1.9

después=2.1

1.9-2 (-)

(-)

1.9+.33 (+)

mínimo

2.1-2 (+)

(+)

2.1+.33 (+)

Para

x=-.33 voy a tomar un instante antes y uno después

antes=-.34

después=-.32

-.34-2 (-)

(+)

-.34+.33 (-)

máximo

-.32-2 (-)

(-)

-.32+.33 (+)

INTEGRAL INDEFINIDA

Función primitiva :

Una función $F(x)$ se dice que es primitiva de otra función $f(x)$ cuando $F'(x) = f(x)$

Por ejemplo $F(x) = x*x$ es primitiva de $f(x) = 2x$

Otra primitiva de $f(x) = 2x$ podría ser $F(x) = x*x + 5$, o en general , $F(x) = x*x + C$, donde C es una constante .

Por lo tanto una función $f(x)$ tiene infinitas primitivas . Al conjunto de todas las funciones primitivas se le llama integral indefinida y se representa por $\int f(x)\,dx$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \implies F'(x) = f(x)$$

Propiedades de la integral indefinida

1ª $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Ejemplo : $\int 2x + \cos x\;dx = \int 2x\,dx + \int \cos x\,dx = x^2 + \operatorname{sen} x$

Demostración

Por la definición $\int f(x)\,dx = F(x) + C \implies \left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

Por otro lado , queremos demostrar que $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ es decir , que si derivamos el segundo miembro nos tiene que salir $f(x) + g(x)$, por lo tanto:

$(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx)' = (\int f(x)\,dx)' + (\int g(x)\,dx)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

$$2^a \int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

Ejemplo : $\int 5 \cdot \frac{1}{x}\,dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx = 5 \cdot \mathrm{Ln}x$

Ejemplo : $\int \mathrm{sen}\,4x\,dx = \int \frac{4 \cdot \mathrm{sen}\,4x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int 4 \cdot \mathrm{sen}\,4x\,dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x)$

Demostración :

Queremos demostrar que $(k \cdot \int f(x)\,dx)' = k \cdot f(x)$

$(k \cdot \int f(x)\,dx)' = k \cdot (\int f(x)\,dx)' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Integración por partes :

Puesto que $dy = y' \cdot dx$ las propiedades de la diferencial deben ser las mismas que las de las derivadas , por ejemplo :

$d(u+v) = (u+v)'\,dx = (u' + v')\,dx = u'\,dx + v'\,dx = du + dv$

$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'\,dx = (u'v + v'u)\,dx = u'v\,dx + v'u\,dx = v\,du + u\,dv$

Si nos quedamos con esta última propiedad :

$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv \Rightarrow u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du \Rightarrow \int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$

Puesto que $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x)$ (salvo una constante que se pone al final) entonces :

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Ejemplo:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv}$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow \int dv = v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int\frac{1}{2}e^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

De esta forma se pueden integrar cualquier función que tenga un producto

FRACCIONES PARCIALES

Se tiene un quebrado formado por los polinomios $F(x)/G(x)$ donde esta operación es propia, las fracciones parciales permiten separar este quebrado en N términos (fracciones) cuyo número dependerá de la cantidad de raíces que tenga el polinomio $G(x)$, el hecho de que sea una operación propia significa que al dividir $F(x)/G(x)$ el resultado sea menor o igual a uno: en otras palabras el, polinomio $F(x)$ tiene exponente menor o igual que el polinomio $G(x)$.

En fraccione parciales existen 4 casos

PRIMER CASO:

Podemos separar el polinomio $G(x)$ en terminos de primer grado y ninguno se repite.

Ej.-

Tenemos el polinomio:

$$\frac{x^2+2}{x^3+3x^2+2x} \quad \ldots\ldots\ldots 1$$

Al cual lo podemos factorizar en

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)(x)} \quad \ldots\ldots\ldots 2$$

Como podemos observar el polinomio $G(x)$ tiene únicamente términos de primer orden y ninguno se repite.

Posteriormente supondremos que la función puede expresarse como una suma de polinomios multiplicados por una constante que no conocemos

$$Ec\ 1 = Ec\ 2 = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X+2} + \frac{C}{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

Resolviendo la suma de polinomios tenemos

$$\frac{A}{X+1} + \frac{B}{X+2} + \frac{C}{X} = \frac{A(X+2)X+B(X+1)(X)+C(X+1)(X+2)}{(x+1)(x+2)(x)} \ldots\ldots 4$$

Como la Ec 4 es igual a la Ec 3 y la Ec 3 es a su vez igual a la Ec 2; podemos igualar la Ec 4 con la Ec 2; con lo cual tendríamos:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)(x)} = \frac{A(X+2)X+B(X+1)(X)+C(X+1)(X+2)}{(x+1)(x+2)(x)} \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

Podemos observar que los denominadores de ambas funciones son iguales por lo cual podemos eliminarlos quedándonos:

$$x^2+2 = A(X+2)X+B(X+1)(X)+C(X+1)(X+2) \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

Desarrollando la parte derecha tendríamos

$$x^2+2 = Ax^2 + 2AX + Bx^2 + BX + Cx^2+3CX+2C \ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

Factorizando la parte derecha del polinomio 7 tenemos

$$x^2+2 = x^2(A+B+C) + X(2A+B+3C) + 2C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$$

Completando la parte izquierda obtenemos:

$$x^2 + 0X + 2 = x^2(A+B+C) + X(2A+B+3C) + 2C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9$$

Cuando igualamos dos polinomios tenemos que para que cumplan la igualdad los coeficientes de ambos deben ser iguales por lo tanto:

$$1 = A + B + C \ldots\ldots\ 10$$
$$0 = 2A + B + 3C \ldots\ 11$$
$$2 = 2C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 12$$

De esta forma nos queda un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas por lo cual si tienen solución y se pueden resolver por cualquier método de solución de sistemas de ecuaciones en este caso utilizaremos sustitución directa.

De la Ec 12 despejamos a C y tenemos que

$$C = \frac{2}{2} = 1$$

Como ya tenemos el valor de C lo sustituimos en las Ec 10 y la Ec 11 y obtenemos que

$1 = A + B + 1$ 13
$0 = 2A + B + 3(1)$......14

Despejando tenemos

$0 = A + B$...........15
$-3 = 2A + B$........16

Multiplicamos toda la ec 16 por -1 para que no se afecte y tenemos
$3 = -2A - B$.......17

Sumamos las ecuaciones 17 y 15

$$\begin{array}{l} 0 = \ \ A + B \\ \underline{3 = -2A - B} \\ 3 = -A \end{array}$$

Por lo tanto

$A = -3$

De la Ec 15 tenemos que
$B = -A$

Por lo tanto
$B = 3$

Sustituyendo en la ec 3

$$\frac{-3}{X+1} + \frac{3}{X+2} + \frac{1}{X}$$

Y con esto ya hemos separado la función original.

Para comprobarlo simplemente resolvemos el quebrado

$$\frac{-3}{X+1} + \frac{3}{X+2} + \frac{1}{X} = \frac{-3(X+2)X+3(X+1)(X)+(X+1)(X+2)}{(x+1)(x+2)(x)}$$

Desarrollando tenemos

$$\frac{-3(X+2)(X)+3(X+1)(X)+((1)(X+1)(X+2)}{x^3+3x^2+2x}$$

Reduciendo tenemos

$$\frac{x^2+2}{x^3+3x^2+2x}.$$

Y esta ecuación es completamente igual a la Ec 1

SEGUNDO CASO 2

En este caso existe o existen algunas raices repetidas por lo que al desarrollarlos quebrados para una mayor facilidad los colocaremos en forma creciente o decreciente. aumentando o disminuyendo el grado del exponente. el resto del procedimiento es el mismo.

Ej.-

$$\frac{X}{x^3+4x^2+5x+2}. \ldots\ldots\ldots 1$$

Factorizamos el denominador y tenemos

$$\frac{X}{(X+1)^2(X+2)}. \ldots\ldots\ldots 2$$

Como vemos en este caso X+1 se repite dos veces:

Al igual que en caso anterior suponemos una suma de fracciones pero esta vez tendremos que agotar las potencias.

$$\frac{X}{(X+1)^2(X+2)}. = \frac{A}{(X+1)^2} + \frac{B}{(X+1)} + \frac{C}{(X+2)} \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

Desarrollamos la Ec 3 y tenemos

$$\frac{A(X+2)+B(X+1)(X+2)+C(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

Como la Ec 1 es igual a la Ec 2 y esta a su vez es igual a la Ec 3 y la Ec 3 es igual a la Ec 4 igualamos las Ec 4 y 2 para obtener A. B Y C

$$\frac{X}{(X+1)^2(X+2)}. = \frac{A(X+2)+B(X+1)(X+2)+C(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

Como los denominadores son iguales los eliminamos y tenemos

$$X = A(X+2)+B(X+1)(X+2)+C(X+1)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

Desarrollamos la parte derecha de la Ec 6 y tenemos

$$X = A(X+2)+B(x^2+3X+2)+C(x^2+2X+1) \ldots\ldots\ldots\ldots 6.1$$
$$X = AX+2A+Bx^2+3BX+2B+Cx^2+2CX+C \ldots\ldots\ldots\ldots 6.1$$

Agrupando la parte derecha de la igualdad y completando la parte izquierda

$$0x^2+X+0 = x^2(B+C) + X(A + 3B +2C) + 2A + 2B +C \ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

Igualando términos iguales tenemos

$$0= B +C \ldots\ldots\ldots\ldots 8$$
$$1= A + 3B + 2C \ldots\ldots 9$$
$$0= 2A + 2B + C \ldots\ldots 10$$

De la Ec 8 tenemos que

$$B=-C \ldots\ldots\ldots 8.1$$

Sustituyendo en 9 y 10 tenemos

$$1= A - C \ldots\ldots 11$$
$$0= 2A - C \ldots\ldots 12$$

Por suma y resta tenemos

$$\begin{array}{l} 1= A - C \\ \underline{0= -2A + C} \\ 1=-A \end{array}$$

Por lo tanto

$$A=-1$$

De la Ec 11 tenemos

$$C=A-1$$

Sustituyendo el valor de A

$$C= -1 -1 = -2$$

De la Ec 8.1 obtenemos a B

$$B = -C = -(-2)= 2$$

Sustituimos en la Ec 3

$$\frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{2}{(X+1)} - \frac{2}{(X+2)}.$$

Para comprobarlo simplemente desarrollamos la suma de polinomios

$$\frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{2}{(X+1)} - \frac{2}{(X+2)} = \frac{-1(X+2)+2(X+1)(X+2)-2(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)}$$

$$\frac{-1(X+2)+2(X+1)(X+2)-2(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)}$$

$$\frac{-X-2+2X^2+6X+4-2X^2-4X-2}{X^3+4X^2+5X+2}$$

$$\frac{X}{X^3+4X^2+5X+2}.$$

La cual es exactamente igual a la original

TERCER CASO

En este tercer caso existen raíces complejas en el denominador lo cual significa que dejaremos algunos polinomios en forma cuadrática.

Esta vez en lugar de usar una constante usaremos la forma $AX + B$ y el resto de proceso será igual

Ej.

Tenemos el polinomio

$$\frac{X}{X^3+X^2+X+1} \quad \text{.................1}$$

Como podemos observar el denominador al factorizarlo tiene dos raíces imaginarias y una real

$$\frac{X}{(X^2+1)(X+1)} \quad \text{.................2}$$

Suponemos nuevamente una suma de ecuación que va a separar nuestro polinomio

$$\frac{AX+B}{(X^2+1)} + \frac{C}{(X+1)} \quad \text{.............3}$$

Desarrollamos el quebrado

$$\frac{(AX+B)(X+1) + C(X^2+1)}{(X^2+1)(X+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

Igualamos la Ec 4 con la Ec 2

$$\frac{X}{(X^2+1)(X+1)} = \frac{(AX+B)(X+1) + C(X^2+1)}{(X^2+1)(X+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

Cancelamos los denominadores

$$X = (AX+B)(X+1) + C(X^2+1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

Desarrollamos y completamos

$$0X^2+X+0=AX^2+BX+AX+B+CX^2+C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.1$$

Agrupando términos comunes

$$0X^2+X+0=X^2(A+C)+X(A+B)+B+C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.2$$

Igualando terminos comunes tenemos

$0=A+C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7$
$1=A+B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$
$0=B+C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9$

De la Ec. 7 tenemos

$C=-A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10$

De la Ec 9 tenemos

$C=-B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11$

De la Ec 10 y 11 tenemos que

$A=B \ldots\ldots 12$

Sustituyendo 12 en la 8 tenemos que
$1= 2B$ Por lo tanto

$B=1/2=A=-C$

Despejando en la Ec 3

$$\frac{(1/2)X+(1/2)}{(X^2+1)} - \frac{1/2}{(X+1)}.$$

Para comprobarlo realizamos el polinomio

$$\frac{((1/2)X+(1/2)(X+1))-(1/2)(X^2+1).}{(X^2+1)(X+1)} = \frac{(1/2)X^2+(1/2)X+(1/2)X+(1/2)-(1/2)\ X^2-(1/2)}{(X^2+1)(X+1)}$$

$$\frac{X}{X^3+X^2+X+1}.$$

La ecuación es la original

CUARTO CASO

Para este cuarto caso se repinten el caso 3 y 4 es decir las raices son complejas y se repiten. el procedimiento es el mismo.

Ej

$$\frac{X}{(X^2+1)^2(X+1)}\text{....................1}$$

En este caso el denominador del polinomio ya esta factorizado tiene cuatro raices imaginarias que se repiten y una de primer grado que no se repite así repetimos el procedimiento. propones nuestra ecuación.

$$\frac{X}{(X^2+1)^2(X+1)} = \frac{AX+B}{(X^2+1)^2} + \frac{CX+D}{(X^2+1)} + \frac{E}{(X+1)}\text{..................2}$$

Resolvemos el quebrado

$$\frac{(AX+B)(X+1)+(CX+D)\ (X^2+1)(X+1)+E\ (X^2+1)^2}{(X^2+1)^2(X+1)}\text{......................3}$$

$$\frac{AX^2+BX+AX+B+(CX^3+DX^2+CX+D)(X+1)+E(X\text{^}4+2X^2+1)}{(X^2-1)^2(X+1)}\text{......................3.1}$$

$$\frac{AX^2+BX+AX+B+CX\text{^}4+D\ X^3+CX^2+DX+\ CX^3+DX^2+CX+D+EX\text{^}4+2EX^2+E)}{(X^2-1)^2(X+1)}\text{...........3.2}$$

Igualando Ec 3.2 con la Ec 1 e igualando terminos comunes tenemos

0=C +E.................................4

0=D+C.................................5

$0=A+C+D+2E$.......................6
$1=A+B+C+D$.........................7
$0=B+D+E$...............................8

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos

De la Ec 4 tenemos

$C=-E$

De la Ec 5 tenemos

$C=-D$

De la Ec 6 tenemos

$A=2C$

De la Ec 8 tenemos

$B=2C$

De la Ec 7 tenemos

$C=1/4$

Por lo tanto

$A=1/2$
$B=1/2$
$D=-1/4$
$E=-1/4$

Sustituyendo los valores en la Ec 2 tenemos

$$\frac{(1/2)X+(1/2)}{(X^2+1)^2}+\frac{(1/4)X-(1/4)}{(X^2+1)}-\frac{(1/4)}{(X+1)}.$$

Resolviendo tenemos

$$\frac{((1/2)X+(1/2))(X+1)+((1/4)X-(1/4))(X^2+1)(X+1)-(1/4)((X+1)}{(X^2+1)^2(X+1)}$$

$$\frac{X}{(X^2+1)^2(X+1)}.$$

Y esta ecuación es igual ala original

ANEXO B: GLOSARIO

Algoritmo	Conjunto de instrucciones expreso y preciso que ejecuta una tarea específica, tal como una fórmula matemática o un bloque de instrucciones, el cual puede ser seguido en un programa de computación.
analógico	Describe cualquier dispositivo que representa valores cambiantes de una propiedad física de variación continua, tales como el voltaje en un circuito, la presión fluida, el nivel líquido, y así sucesivamente. Un dispositivo analógico puede manipular un número infinito de valores dentro de su rango. Por contraste, un dispositivo digital sólo puede manejar una cantidad fija de valores posibles. Por ejemplo, un termómetro de mercurio común y corriente es un dispositivo analógico, y puede registrar un número infinito de lecturas a lo largo de su rango. Por otra parte, un termómetro digital sólo puede mostrar la temperatura en una cantidad determinada de pasos individuales.
animación	Método de crear una ilusión de movimiento exhibiendo, muy rápido, una secuencia de imágenes ligeramente diferentes para engañar a la vista y hacer que la persona piense que está viendo un movimiento continuo y uniforme. La animación es uno de los componentes principales de las aplicaciones de multimedios , y se utiliza ampliamente en los juegos de computadora.
Aplicación	Programa de computación diseñado para realizar una tarea específica, tal como contabilidad, análisis científico, procesamiento de texto o autoedición . Por lo general, los programas de aplicación se distinguen del software de sistema (el sistema operativo que hace que la computadora funcione), de los servicios de apoyo del sistema (programas que realizan tareas tales como hacer copias de respaldo (o de seguridad) o recuperar archivos borrados y lenguajes de computación (utilizados para crear nuevas aplicaciones).
Soporte técnico	Extensión de la información técnica, consejos y asistencia para hacerla llegar a los usuarios, de un producto de hardware o software.
GIF	Acrónimo de Graphics Interchange Format [Formato de Intercambio de Gráficos].
Atributo	Un atributo de archivo, es una característica que indica si el archivo es un archivo de sólo lectura, un archivo oculto, un archivo del sistema, o si cambió de algún modo desde la última vez que se respaldó.
Audio	En una aplicación de multimedios, el sonido puede ser generado en cualesquiera de tres formas: por disco compacto de audio digital (CD-DA), por audio de forma de onda, o por la interfaz musical para instrumentos digitales [CD-digital audio, waveform audio y musical instrument digital interface (MIDI o MIDI audio)].
Ayuda	También conocida como on-line help [ayuda en línea]. Información almacenada en el disco a la que puede tener acceso directamente el

	usuario. la cual proporciona ayuda y consejos acerca de cómo ejecutar el programa. La información de ayuda puede ser de naturaleza general o puede que sea sensible al (o que depende del) contexto . y específica para la tarea actualmente entre manos. A pesar de que la mayoría de la ayuda en línea por lo general no es tan completa como la información que contiene el manual. resulta muy útil si se es un usuario ocasional de un programa. o si desea ver una explicación de aquellas características del programa que se utilizan poco.
Barra de desplazamiento	En una interfaz gráfica de usuario. barra vertical u horizontal del lado derecho o a lo largo de la parte inferior de una ventana (electrónica). la cual resulta pequeña para mostrar toda la información necesaria a la vez. En cada extremo de la barra de desplazamiento [scroll bar] existen unas pequeñas flechas que indican la dirección de desplazamiento del contenido [scrolling]. Para desplazarse a lo largo del documento. haga clic [click] en la flecha apropiada. Dentro de la barra de desplazamiento se encuentra un recuadro pequeño. llamado cuadro para desplazamiento [scroll box]. el cual indica la posición del cursor. relativa a los datos que aparecen en la ventana.
Barra de herramientas	En una interfaz gráfica de usuario. característica muy conveniente que representa a los comandos comúnmente utilizados en forma de iconos o de botones de comando. en una fila a lo largo de la pantalla. Para ejecutar uno de estos comandos. simplemente se requiere de hacer clic sobre el icono. en lugar de seleccionarlo desde el tradicional menú de desplegable. También es conocida como task bar
Barras de menú	Fila de nombres de menús desplegables. la cual generalmente aparece en una sola línea a lo largo de la parte superior de la pantalla o de la ventana (electrónica) .
Barras de título	En una interfaz gráfica de usuario. barra horizontal. delgada. ubicada a lo largo de la parte superior de una ventana electrónica. la cual contiene el nombre de la ventana así como el cuadro del menú de Control y los botones maximizar y minimizar. La barra de título de una ventana de una aplicación también contendrá el nombre del archivo o del documento con el que usted está trabajando.
Base de conocimientos	Una base de conocimientos almacena la información acerca de un dominio en particular. Esta información no es la misma colección pasiva de campos y registros que el usuario puede encontrar en una base de datos convencional. sino que contiene representaciones simbólicas de reglas y de la experiencia práctica de un experto en una forma que un mecanismo de inferencia puede procesar.
Boton	En una interfaz gráfica de usuario. elemento de un cuadro de diálogo que permite al usuario seleccionar una opción. Además de tener botones de aplicación específica. casi todos los cuadros de diálogo contienen un botón Cancelar. que permite al usuario abandonar la operación actual. así como un botón SI o Aceptar. que se utiliza para confirmar una selección.

ciberespacio	Término descriptivo de la geografía virtual del mundo en línea. Este término apareció impreso por vez primera en la novela Neuromancer de William Gibson, publicada en 1984, en la que se describe el mundo en línea de las computadoras y los elementos de la sociedad que utilizan estas computadoras.
cibernauta	Viajero del ciberespacio, alguien que utiliza su conexión a Internet para explorar los lugares más recónditos del ciberespacio.
Ciclo de vida del software	Proceso por el cual deben atravesar todos los programas: diseño, codificación, prueba, puesta a punto y, posteriormente, mantenimiento. Cuando un software resulta comercialmente exitoso, el ciclo de vida del software repetirá muchas veces, a medida que aparezcan actualizaciones menores y nuevas versiones importantes.
Código fuente	Versión original de un programa, escrita en un lenguaje de programación en particular --legible por los humanos--, antes de que sea compilada o interpretada en una versión que sólo sea legible por la máquina.
compilador	Programa que traduce un lenguaje de alto nivel tal como C o Pascal a un programa de lenguaje de maquina. Un compilador traduce todo un programa a lenguaje de máquina, y simultáneamente verifica la sintaxis y muestra mensajes de error o de advertencia, según sea apropiado. Por tanto, el programa sólo se puede ejecutar después que este proceso se haya completado, lo cual contrasta con un intérprete, que traduce una línea a la vez e inmediatamente la ejecuta. Los compiladores son específicos para un lenguaje (de computación), razón por la cual sólo pueden compilar o traducir a lenguaje de máquina el código fuente de un lenguaje de programación específico.
Correo electrónico (e-mail)	Uso de una red para transmitir mensajes de texto, memorandos e informes, también llamado electronic mail. Los usuarios pueden enviar un mensaje a una o más personas, a un grupo predefinido, o a todos los usuarios en el sistema. Cuando usted recibe un mensaje, puede leerlo, imprimirlo, reenviarlo, responderlo o borrarlo.
Creación de prototipos	Creación de un sistema de ensayo o de demostración, de modo que los usuarios potenciales puedan evaluar, pulir y comentar el diseño antes que el fabricante comience a trabajar en el producto final. Hay herramientas disponibles para la creación de prototipos tanto de hardware como de software; en efecto, algunas herramientas para la creación de prototipos de software en realidad se pueden utilizar para generar el código definitivo, por ejemplo, una vez que la disposición física de la pantalla haya sido aprobada.
Cuadro de diálogo	En una interfaz gráfica de usuario, cuadro de diálogo que siempre se abre incluso si usted escoge una selección de menú seguida de puntos suspensivos. El cuadro de diálogo se abre cuando, para poder continuar, el programa requiere más información de parte del usuario.
Descargar	En comunicaciones, transferir uno o más archivos de una

	computadora a otra, a través de una red o utilizando un módem. Por ejemplo, es posible descargar un archivo desde un servicio en línea a una computadora personal. En este caso, la computadora personal que solicita la información inicia la descarga y almacena el archivo descargado en el disco, para su procesamiento posterior.
dirección de correo electrónico	Información de direccionamiento requerida para que un mensaje de correo electrónico [e-mail] llegue al destinatario correcto. En algunos servicios en línea , una dirección de correo electrónico es un número exclusivo, mientras que en otros es un conjunto de letras y números (por lo general basados en el nombre de la persona). En Internet, una dirección de correo electrónico incluirá el nombre de dominio de la computadora anfitriona que utiliza, precedido generalmente del nombre de la persona. Por ejemplo: jtamayo@dino.conicit.ve es una dirección completa de correo electrónico de Internet; sin embargo otras direcciones de Internet pueden ser mucho más largas y complejas que este sencillo ejemplo. La mayoria de los servicios en línea incluyen pasarelas a otros sistemas, de manera que usted pueda enviar correo electrónico [e-mail] desde su sistema favorito a cualesquiera de los otros, siempre y cuando usted sepa cómo especificar la dirección de correo electrónico del destinatario.
dirección de Internet	Dirección de IP (Internet Protocol [Protocolo de Internet]) o dirección de dominio que identifica a un nodo específico en Internet.
documentación	Instrucciones, guías de instrucción, especificaciones, consejos acerca de la localización y la solución de problemas, así como las guías de referencia que acompañan a un programa de computación o a un componente de hardware. La documentación puede estar en formato impreso (tal como, un manual o un folleto) o en línea, directamente en la computadora. La primitiva documentación para las computadoras personales a menudo era escrita por programadores e ingenieros y, por lo general, hacía uso profuso del vocabulario técnico. En contraste, hoy día la documentación está mejor escrita y es más fácil de comprender.
e- mail	Ver correo electronico
en prueba alfa	Primer paso en la prueba de un nuevo producto de hardware o de software, generalmente ejecutada por los programadores en el lugar de trabajo. La etapa siguiente en el ciclo de prueba es llamada prueba beta, y por lo general la realiza una muestra seleccionada de usuarios antes de que el producto sea comercializado, o antes de que sea formalmente liberado.
en prueba beta	Proceso de probar, en el campo, un nuevo producto de hardware o de software antes de liberar la versión comercial (la liberación formal del producto). Por regla general, la prueba beta la ejecuta una muestra de usuarios típicos, no sólo los programadores. El propósito de la prueba beta consiste en exponer el nuevo producto a tantas condiciones de operación, de la vida real, como sea posible, para

	hacer salir y (o) arreglar errores restantes. Si las pruebas beta indican una tasa de errores más alta de lo esperado, el diseñador, por lo general, arregla los problemas y envía de nuevo el producto a los usuarios de prueba beta para una nueva ronda de pruebas. Además, durante la prueba beta, también circulan la versiones preliminares de la documentación para su examen.
Formulario para entrada de datos	En un sistema de administración de bases de datos, pantalla o ventana (electrónica) utilizada para hacer la entrada (ingreso) de datos tan fácil como sea posible, mostrando un solo registro a la vez. A menudo, el formulario para entrada de datos está diseñado para que se parezca al impreso de papel del cual se transcribe la información. Cuando usted le añade registros a una base de datos, utiliza un formulario estándar para entrada de datos.
ftp	Abreviatura de file transfer protocol [protocolo de transferencia de archivos]. Protocolo utilizado para tener acceso a un anfitrión de Internet, y posteriormente para transferir archivos entre ese anfitrión y la computadora que se este utilizando. Ftp es, además, el nombre del programa que se utiliza para manejar este protocolo.
Hardware	Todos los componentes electrónicos físicos de un sistema de cómputo, incluyendo los periféricos, tarjetas de circuito impreso, monitores e impresoras.
Hipertexto	Método de presentar la información de manera que la pueda ver el usuario de modo no secuencial, independientemente de cómo fueron organizados los tópicos originalmente. El hipertexto fue diseñado para hacer que una computadora responda a la forma no lineal como pensamos y tenemos acceso los humanos a la información: por asociación, en vez de hacerlo mediante una organización lineal como la que siguen las películas, los libros y el habla. En una aplicación de hipertexto, el usuario puede ojear la información con considerable flexibilidad, eligiendo una nueva ruta cada vez que obtenga acceso a la información. Cuando usted hace clic sobre una palabra destacada, activa un enlace [link] a otro documento de hipertexto, el cual puede estar localizado en el mismo anfitrión [host] de Internet, o en un sistema de cómputo completamente diferente, a miles de kilómetros de distancia. Estos enlaces [links] dependen del cuidado que tuvo quien creó el documento enlazado cuando lo ensambló.
HTML	Abreviatura de Hypertext Markup Language [Lenguaje de Marcación de Hipertexto]. Lenguaje normalizado de hipertexto utilizado para crear páginas de la red mundial World Wide Web y otros documentos de hipertexto. Cuando usted tiene acceso a un documento de Lenguaje de Marcación de Hipertexto (HTML)] de Internet, utilizando un navegador de la red mundial World Wide Web, verá una mezcla de texto, gráficos y enlaces [links] a otros documentos. Cuando haga clic

	en un enlace, se abrirá automáticamente el documento relacionado, sin importar dónde está realmente localizado ese documento en Internet. Normalmente, cuando se visualiza un documento, usted no ve los elementos individuales que conforman el lenguaje de marcación de hipertexto o HTML, aun cuando algunos navegadores disponen de un modo especial que visualiza tanto el texto como el lenguaje de marcación de hipertexto o HTML en un documento. Por lo general, los documentos de hipertexto tienen la extensión de nombre de archivo .html.
http	Abreviatura de Hypertext Transport Protocol [Protocolo de Transporte de Hipertexto]. Protocolo utilizado para manejar los enlaces [links] entre un hipertexto y otro. El protocolo de transporte de hipertexto (HTTP)] es el mecanismo que, cuando usted hace clic en un enlace de hipertexto, abre el documento relacionado sin importar dónde se encuentra --en Internet-- ese documento relacionado.
Icono	En una interfaz gráfica de usuario (GUI)], pequeña imagen que representa un elemento específico que el usuario puede manipular de algún modo en la pantalla. Un icono se selecciona con el ratón [mouse] u otro dispositivo apuntador. El icono puede representar a un programa de aplicación], un documento, objetos incrustados y objetos vinculados, una unidad de disco duro, o varios programas recopilados en un mismo icono que representa a un grupo
inteligencia artificial	Abreviado AI [IA]. Rama avanzada de la ciencia de la computación que estudia cómo piensan los humanos, e intenta aplicar esos conocimientos al hardware y software para dotar a las computadoras de recursos operacionales similares. Las áreas de investigación incluyen el reconocimiento del habla y de patrones de voz, la habilidad de realizar traducciones de un idioma a otro, el procesamiento del lenguaje natural, la habilidad para aprender de la experiencia práctica anterior y la habilidad de razonar bajo condiciones que sólo proporcionan información incompleta. Las aplicaciones prácticas de la inteligencia artificial varían desde diagnósticos médicos hasta la configuración de computadoras e interpretación de la anotación de datos de los pozos de petróleo
Interfaz	Punto donde se efectúa una conexión entre dos dispositivos de hardware, entre un usuario y un programa o el sistema operativo, o simplemente entre dos programas de aplicación. En el hardware, el término interfaz describe las conexiones lógicas y físicas utilizadas, tal como la RS-232-C, y a menudo se le considera sinónimo del término transportar. Una interfaz de usuario consta de mecanismos mediante los cuales un programa se comunica con el usuario, incluyendo la interfaz de línea de comandos, menús, cuadros de diálogo, sistemas de ayuda en línea, y así sucesivamente. Las interfaces de usuario se pueden clasificar

	como: basadas en caracteres, controladas por menú, o gráficas.
Internet	Internet se estableció originalmente para cumplir con las necesidades de investigación de la industria de la defensa de los EE. UU., pero ha crecido hasta convertirse en una inmensa red mundial que presta servicio a universidades, investigadores académicos, empresas comerciales y agencias del. Internet utiliza el Protocolo de control de transmisión/Protocolo de Internet o TCP/IP (TCP)/Internet: además, muchos de los anfitriones de Internet utilizan el sistema operativo UNIX.
Intérprete	Traductor incluido en un lenguaje de programación, el cual convierte el código fuente de un programa de alto nivel --línea por línea-- en enunciados del lenguaje de máquina A diferencia de un compilador, el cual debe traducir el programa completo antes de que pueda comenzar la ejecución, un intérprete traduce y ejecuta cada línea a la vez. Esto significa que, por lo general, un programa interpretado se ejecuta más lentamente que un programa compilado. Por regla general, LISP y APL son lenguajes interpretados. BASIC fue, a menudo, un lenguaje interpretado, aun cuando las versiones más recientes de ese lenguaje utilizan un compilador en lugar de un intérprete ; por su parte, C, C++ y Pascal siempre se compilan [compile].
JPEG	Abreviado JPEG. Norma de compresión de imágenes y formato de archivo desarrollado como un esfuerzo conjunto del Comité Consultivo Internacional de Telefonía y de Telegrafía y la Organización Internacional de Normas y la International Standards Organization (ISO)].
Licencia	Licencia para utilizar un paquete de software, sujeto a ciertas condiciones. Estas condiciones generalmente definen los derechos del comprador y limitan la responsabilidad que asume el editor del programa.
Lugar de prueba beta	Lugar donde se ejecuta la prueba beta antes que un producto de hardware o software sea liberado formalmente para su distribución comercial o libre.
Mecanismo de inferencia o motor de inferencia	En inteligencia artificial, mecanismo de procesamiento de un sistema experto basado en reglas. El mecanismo de inferencia deriva una conclusión de la información que contiene la base de conocimientos, utilizando técnicas especializadas de inteligencia artificial.
Menú	Lista de comandos o de opciones disponibles en el programa que se ve en la pantalla. Usted selecciona una opción del menú tecleando la letra o el número que corresponde al ítem, haciendo clic en él con el ratón , o destacándolo y pulsando la tecla enter.
Multimedios	Tecnología de computación que muestra la información en la pantalla, utilizando una combinación de vídeo de movimiento completo, animación, sonido, gráficos y texto. Los multimedios proporcionan un alto grado de interacción de parte del usuario.

Nemotécnico	Nombre o abreviatura utilizada para ayudar a recordar una instrucción larga o muy compleja. Los lenguajes de programación utilizan muchos mnemotécnicos diferentes para representar las instrucciones complejas.
Puesta a punto	Proceso de encontrar, localizar y eliminar errores lógicos o sintácticos en un programa de computación. Esto puede variar desde simplemente verificar el resultado de los cálculos hasta localizar errores de lógica difíciles de encontrar, y que sólo ocurren bajo condiciones muy específicas.
Red de área global o red de área mundial o www	Abreviado WWW, W3, o simplemente la red mundial Web. Inmensa colección de páginas de hipertexto en Internet. El concepto de la red mundial World Wide Web fue desarrollado en Suiza por el Laboratorio Europeo para Física de Partículas, pero la red mundial Web no es solamente una herramienta para científicos; es una de las herramientas más flexibles e intrigantes que existen para ojear y curiosear a Internet. Los enlaces de hipertexto conectan la información diseminada (texto, gráficos, audio o vídeo) mediante páginas individuales del Lenguaje de marcación de hipertexto o HTML. Se puede explorar estas páginas separadas, localizadas en la misma o en diferentes ubicaciones de Internet, utilizando un navegador (Internet explorer, netscape, opera etcétera) de la red mundial . También se puede tener acceso a un recurso de la red mundial WWW inmediatamente, si especifica el Localizador uniforme de recursos o URL apropiado. El tráfico de la red mundial World Wide Web crece más rápidamente que la mayoría de los otros servicios de Internet. La razón de esto se hace evidente una vez que usted prueba un navegador eficiente de la red mundial Web, pues así resulta muy fácil tener acceso a la información
Shareware	Forma de distribución de software que hace que estén disponibles gratuitamente a título de prueba programas protegidos por derechos de autor; posteriormente, si le gusta el programa y decide usarlo, usted debe hacer registrar su copia y enviar un pequeño aporte económico al creador del programa. Una vez que su copia esté registrada recibirá un manual más completo, acceso al apoyo técnico, acceso al servicio electrónico de información del programador, o información acerca de mejoras o actualizaciones. Usted puede descargar, shareware de muchos servicios electrónicos de información, incluyendo a, y a menudo este software libre del pago de derechos de autor está disponible de los grupos de usuarios locales.
Tcp ip	Abreviatura o acrónimo de Transmission Control Protocol/Internet Protocol [Protocolo de Control de Transmisión/ Protocolo Internet]. Conjunto de protocolos de comunicaciones de computadora a computadora, desarrollado originalmente por la Administración de Proyectos Avanzados de Investigación de Defensa, a finales de la década de los años 70's. El conjunto de protocolos TCP/IP incluye

	acceso a los medios de soporte, al transporte de paquetes, a las comunicaciones de la sesión, a la transferencia de archivos, al correo electrónico y a la emulación de terminal. El TCP/IP recibe apoyo de parte de una gran cantidad de proveedores de hardware y software y está disponible en muchas computadoras diferentes, desde las computadoras personales hasta las macro computadoras [mainframes]. Muchas corporaciones, universidades y agencias del gobierno utilizan el protocolo TCP/IP, el cual es también el fundamento de Internet.
WIZARD	Técnica utilizada por algunas aplicaciones para guiar al usuario inexperto o infrecuente a través de un complejo conjunto de pasos, haciéndole preguntas acerca del documento que está en el proceso de crear (a medida que lo está creando). Los Wizards pueden tomar la forma de cuadros de diálogo con un conjunto de opciones para cada etapa del proceso de creación, o también puede que aparezcan como asistentes animados en la pantalla que ofrecen ayuda de vez en cuando. A un Wizard puede que también se le llame Experto en algunas aplicaciones.
WWW	Véase Red de área global

ANEXO C

El presente anexo está compuesto de dos partes, la primera es un esbozo de la teoría de autómatas y la segunda contiene el modelo en el cual nos basamos para realizar nuestra investigación.

La teoría de autómatas dice que un autómata es un proceso mecanizado, que por lo general contiene respuestas condicionadas a cada uno de los sucesos que ocurren en su medio ambiente; de forma tal que tiene un cierto grado de independencia.

Dentro del estudio de los autómatas, existen clasificaciones, modelos y procesos, los cuales pueden ser estudiados por medio de algoritmos, diagramas a bloque, reogramas, análisis geométrico inductivo o tablas de vectores. En este trabajo, el razonamiento se hizo de tres formas con un análisis de vectores en tablas, con un diagrama a bloques y el análisis geométrico inductivo.

Algoritmos:

Es un conjunto de instrucciones detalladas, que tiene un objetivo final: el algoritmo guía paso a paso al autómata por el camino que debe seguir según las instrucciones dadas.

```
Inicio...
        censor 1 ....
          condición 1 ....
              instrucción 1 ....
                 respuesta 1 ....
        censor 2 ....
          condición 2 ....
              instrucción 2 ....
                 respuesta 2 ....
       *
       *
       *
       *
        censor n ....
          condición n ....
              instrucción n ....
                 respuesta n ....
Fin.
```

Diagramas a bloques:

Es un conjunto de símbolos gráficos que guían el o los caminos de cada uno de los procesos, por el cual debe pasar el autómata, cada uno de los procesos está representado por un cuadro y tiene además una representación gráfica :

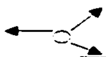
Símbolo	Símbolo en el trabajo	Proceso o interpretación	Representación matemática
Δ_i	D1.D2	Representa al autómata	Se puede representar como un vector en donde se encuentran las variables necesarias
Λ	A.A2	Representa una confluencia de dos o más procesos	Matemáticamente es una suma de factores
O	O	Representa una diferencia o un error	En sistemas continuos es representado como una diferencial. en sistemas discretos como una resta
$\parallel$	Sin representación	Acoplamiento en paralelo	Es representado como el producto de un escalar por un vector
$\mid$	Sin representación	Acoplamiento en serie	Es representado como el producto de un escalar por un vector
$\exists$	Sin representación	Equilibrio	Es una sumatoria con un resultante igual a cero
ψ	Sin representación	Desequilibrio	Es una sumatoria con un resultante diferente a cero
Δ	Sin representación	Inicio	Condiciones iniciales
∇	∇	Final	Condiciones finales

En un diagrama a bloque los procesos están unidos por flechas que representan el flujo de información. cada unión es llamada puente.

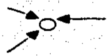
Reogramas:

Los reogramas son otra representación gráfica. basada en la teoría de grafos en donde a partir de un lenguaje formal. con reglas y sintaxis el autómata viaja a través de los nodos hasta llegar a un nodo final o un nodo pozo; en la mayoría de las veces de forma redundante. hasta llegar a un estado final. en este caso especifico es posible tener más de un estado final.

Nodo fuente: Es aquel nodo que sólo tiene salida de información: por lo general el estado inicial es un nodo fuente.

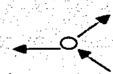


Nodo pozo: Es aquel nodo que solo tiene entradas de información; por lo general el estado final es un nodo pozo.

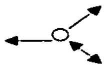


Nodo redundante: Es aquel nodo en el cual un proceso puede repetirse n veces por lo general sirve como un sistema de control

Nodo unidireccional: Es aquel nodo que en el cual los flujos de información solo tienen una dirección.



Nodo bidireccional: Es aquel nodo que en el cual los flujos de información tienen dos direcciones.



Análisis de tablas de vectores: El análisis se puede realizar como una relación entre las entradas y las salidas. además de incluir los tiempos si así se desea.

Entrada 1	Entrada2	Entrada	Entrada n	Salida
Proceso 1	Proceso 2	Proceso	Proceso n	A C C I Ó N

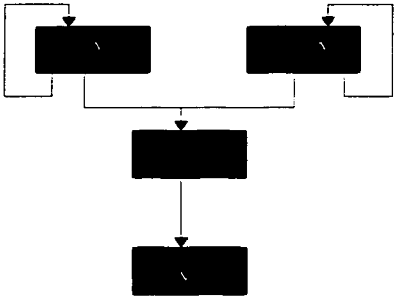
Modelo de enseñanza de imitación.

Supuestos:

a) Consiste en dos organismos vivos
b) El primero de dichos organismos posee la habilidad de tener respuestas condicionadas

c) El segundo organismo tiene la misma capacidad
d) Si el primer organismo es adiestrado de manera suficiente para desarrollar una respuesta condicionada, entonces ya no es necesario adiestrar al otro porque el primero le transmite la respuesta condicionada.

Modelo:



En este sistema existen dos organismos que pueden ser adiestrados hasta aprender respuestas condicionadas, dado que tienen un acoplamiento en paralelo no es necesario adiestrar a los dos para que ambos aprendan.

BIBLIOGRAFÍA

BURNIK, Frank S. *Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales*, 3ª. ed, México, Mc Graw Hill, 1990, 947 pp.

CARRIER, Jean Piere, *Escuela y multimedia*. México, Siglo XXI, 2002, 191 pp.

CASTAÑEDA YÁNEZ, Margarita. *Los medios de comunicación y la tecnología educativa*. México, Trillas, 1979, 183 pp. (Cursos básicos para formación de profesores. Área de lenguaje y comunicación, 6)

CASTILLEJO, J. L. y A. J. Colom. *Pedagogía sistemática*. España, Ediciones CEAC, 1987, 256 pp.

FAINHOLC, Beatriz, *La interactividad en la educación a distancia*. Argentina, Editorial Paidos, 1999, 172 pp.

GARCÍA LLAMAS, J. L. *El aprendizaje adulto en un sistema abierto y a distancia*. España, Narcea ediciones, 1986, 240 pp.

GRANVILLE, William Anthony, *Cálculo diferencial e integral*, 13ª. ed, México, Limusa, 1990, 679 pp.

GRENIEWSKI, Henryk, *Cibernética sin matemáticas*, 2ª. ed,, México, Fondo de Cultura Económica, 1978, 585 pp.

JENKINS, Neil y Stan Schatt. *Redes de área.* Tr. Ricardo de la Barrera Ligadle. México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1996, 309 pp.

McWILLIAMS, Peter. A., *El computador personal en los negocios.* Argentina, Javier Vergara editor, 1986, 285 pp.

MONTES DE OCA, PUZIO, Francisco. *Resolución total de cálculo diferencial e integra.* 2ª. ed. México, Editorial Rodarte, 1988, 131 pp.

__________________________ *Resolución total de funciones.* 2ª. ed México. Editorial Rodarte, 1985, 140 pp.

______________________________________*Resolución total de Álgebra lineal.* 2ª. Ed. México, Editorial Rodarte, 1986, 165 pp.

______________________________________*Resolución total de Probabilidad y estadística.* 2ª. ed. México, Editorial Rodarte, 1984, 160 pp.

______________________________________*Resolución total de Ecuaciones diferenciales,* 2ª. ed México, Editorial Rodarte, 1988, 114 pp.

OGATA, Katsuhiko, *Ingeniería de control moderna.* 3ª. ed. México, Pretencie hall , 1998, 987 pp.

PEÑA, José Antonio de la. *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México.* México, Siglo XXI, 2002, 223 pp.

SCHILDT, Herbert, *Utilización de c en inteligencia artificial.* México, Mc Graw Hill, 1990, 333 pp.

SIGH, Jagjit. *Ideas fundamentales sobre la teoría de la información del lenguaje y de la cibernética.* Madrid, Alianza editorial, 1972, 351 pp.

STONIER, Alfred, *et al., Manual de teoria económica.* España, Aguilar, 1974, 577 pp.

WENTWORTH, Jorge, *et al. Geometría plana y del espació,* 5ª. México, ed. Porrúa, 1977, 461 pp.

FUENTES DE INTERNET

http://calidad.mty.itesm.mx Centro de Calidad del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey división de educación

http://cife.uniandes.edu.co/nivelacion.htm Proyecto Nivelación para la excelencia CIFE - Secretaría de Educación del Distrito

http://iide.ens.uabc.mx/ Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo Su función principal es el realizar investigación y desarrollar tecnología educativa, que incida en el quehacer de la educación superior, así como formar recursos humanos en esta área

http://mte.ruv.itesm.mx/ Centro de Calidad del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

http://www.atei.es/ Centro de Calidad del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

http://www.cairp.org/ Organización científico-educativa

http://www.centrocte.com/ Centro de Tecnología Educativa Características del centro, exposición de los cursos y enlace al campus virtual.

http://www.cosem.net/ Servicios de asesoría e integración de proyectos en tecnología educativa desde preescolar a bachillerato, redes, laboratorios, software y capacitación

http://www.didacticahistoria.com/ Artículos, tecnología educativa y psicología de la educación

http://www.pntic.mec.es/ Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa

http://www.softdownload.com.ar/ Software libre y gratuito Argentina

http://www.softdownload.com.mx/ Software libre y gratuito México

http://www.softdownload.com.es/ Software libre y gratuito España http://www.sabuesoft.es Software libre y gratuito España

http://www.tasisoft.com/ Aplicación de la tecnología a diversas áreas