00324

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

17

FACULTAD DE CIENCIAS

TESELACIONES Y POLIGONOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

HERNANDEZ MENESES RAQUEL

DIRECTOR DE TESIS: MAT. JULIETA DEL CARMEN VERDUGO DIAZ

2003

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1

PAGINACION DISCONTINUA

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"TESELACIONES Y POLIGONOS"

realizado por Hernández Meneses Raquel

con número de cuenta 8519039-7, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis		
Propietario	Mat.	Julieta del Carmen Verdugo Díaz
Propietario	Mat.	Luis Alberto Briseño Aguirre
Propietario	Mat.	Concepción Ruiz Ruiz-Funes
Suplente	Dra.	María de la Paz Alvarez Scherer
Suplente	M. en C.	Francisco de Jesús Struck Chávez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2

A mi familia:

Margarita, Álvaro, Josefina, Carmen y Luis.

A mis amigos en la Facultad de Ciencias:
Fidel, Ursula, Oscar y José.

A
Víctor.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Julieta Verdugo su infinita paciencia, el tiempo que ha dedicado a este trabajo, la formación profesional y personal que me ha dado durante la elaboración de este trabajo, toda la ayuda que me brindó para que me pudiera inscribir a la maestría que ahora curso, y muchas otra cosas más.

Agradezco a mis sinodales, empezando por Luis Briceño porque siguió muy de cerca mi trabajo haciendo recomendaciones y sugerencias, porque me facilitó libros para hacer este trabajo, y porque al igual que Julieta ha impulsado mi desarrollo profesional. Agradezco a Francisco Struck por los cursos que me dio durante mis años de estudiante en la Facultad y porque en uno de ellos me quedé prendida de las teselaciones. Agradezco a Concepción Ruiz, a quién siempre he admirado como persona y matemática, las lecturas y recomendaciones que hizo al trabajo y los comentarios sobre el mismo. Y agradezco a Paz Álvarez, que a pesar de no haber sido su alumna haya aceptado ser sinodal, además le agradezco sus cometarios, sugerencias y tareas.

Quiero dar las gracias a Edgar por los dibujos y sus teselas-sirenas; a Daniel por el material gráfico sobre teselaciones que me ha ayudado a formar; a Juan Manuel por revisar los borradores y marcar correcciones y a Gonzalo Zubieta B, quién me prestó el libro Épsilon de donde saque alguna imágenes.

Gracias a Víctor porque me enseño a usar el escáner de su casa y también me lo prestó, y por todas las cosas que ha hecho y me han apoyado para concluir este trabajo.

ÌNDICE

INTRODUCCIÓN

"... este edificio [la Alhambra] podría conservarse aún como la joya de la nación, y atraería a los curiosos e inteligentes de todos los países durante largas generaciones."
Washington Irving[1], 1829

Las artísticas decoraciones de palacios y templos del mundo islámico que al parecer responden más a mitos religiosos que a otra cosa, difícilmente tendrán un espectador indiferente, un espectador que no quede impresionado ante la belleza de éstas. Seguramente cada visitante, ya sea propio o extraño, de alguno de los edificios del mundo islámico, al ver la decoración o el mosaico de: una pared, un techo, una fachada, una fuente o cualquier otra parte del inmueble, ha quedado convencido que está ante una de las más grandes manifestaciones de la belleza arquitectónica que ha hecho el hombre hasta ahora. Unos más curiosos seguramente se han preguntado ¿cómo le hicieron?, ¿en qué se basaron los arquitectos del antiguo mundo islámico para hacer tales edificios, para hacer tales mosaicos, para hacer tales techos?, ¿qué instrumentos usaron?, ¿hay que saber sobre geometría para hacer algo así?, ¿qué tanto hay que saber?, y algunas otras preguntas más, pretendiendo descubrir las reglas de la armonía y la regularidad de tales prodigios arquitectónicos, en particular la de sus mosaicos. Uno de los visitantes más curiosos que ha tenido la Alhambra, uno de los palacios del mundo islámico, fue el holandés Maurits Cornelis Escher que la visitó en el año de 1926 y, diez años más tarde, en 1936. La Alhambra es uno de los palacios musulmanes que aún hoy en día nos permite vivir el esplendor de la arquitectura islámica, su construcción se prolongó desde fines del siglo XIII hasta el XV de nuestra era.

M. C. Escher hizo sus propios diseños de teselas – lo que serían los azulejos o baldosas para el recubrimiento de paredes y pisos - con formas predominantes de objetos de la naturaleza: humanos, perros, caballos, chinos, lagartijas, mariposas, etc., motivos muy diferentes a los que él encontró en la Alhambra.

El estudio geométrico que realicé, durante la licenciatura, en los seminarios de geometría I y II, estuvo ejemplificado con mosaicos de la Alhambra y estampas y dibujos de M. C. Escher; y mis propios descubrimientos, en la naturaleza, sobre las teselas y las teselaciones (o mosaicos) - por ejemplo: en los cristales, los virus, la sal de mesa, el panal de abejas, y muchos otros; donde claramente podemos distinguir formas hexagonales, cúbicas, triangulares, rectangulares y de paralelogramos - me convenció que la enseñanza y el aprendizaje de los polígonos y las isometrías del plano y sus propiedades pueden tener excelentes motivadores en el arte (la Alhambra y M. C. Escher) y la naturaleza por que creo, como ya lo expresó Comenius, "El conocimiento debe, necesariamente, empezar a través de los sentidos – si es verdad que nada puede ser objeto de comprensión si no ha sido primero objeto de sensación. ¿Por qué entonces empezar la enseñanza con

[1] Irvin (1996), página 45

una exposición verbal de las cosas y no con una observación real de ellas? Solamente cuando esta observación de la cosa haya sido hecha, la palabra podrá intervenir para explicarla con eficiencia."[2]

El propósito de este proyecto es acercar a las personas, que están terminando la secundaria, o ya la han concluido, y a otros interesados, al estudio de algunas de las características de los polígonos regulares y de las isometrías del plano que sirven de base para la creación de la teselaciones regulares como las que decoran edificios públicos en la Haya hechas por el holandés M.C. Escher o las que decoran los muros del palacio musulmán la Alhambra, que se encuentra en Granada.

Este trabajo consta de dos partes, La primera es un cuento con dos personajes principales: una niña llamada Elena, quien ha concluido sus estudios de secundaria, y un hada llamada Dafne; el cuento comienza cuando Elena recibe de sus dos amigos postales de los lugares mencionados arriba y se entusiasma con la idea de decorar las paredes de su habitación de manera semejante. El hada se aparece ante Elena, se ofrece a ayudarla en el cumplimiento de su deseo, y le hace ver que para crear sus propios mosaicos es necesario que estudie (o repase) y conozca algunas cosas sobre teselaciones, polígonos (en particular sobre polígonos regulares) e isometrías. La segunda parte, "Las matemáticas del cuento", no está planeada para todo público, en ella se incluye conceptos y resultados relacionados con las teselaciones regulares.

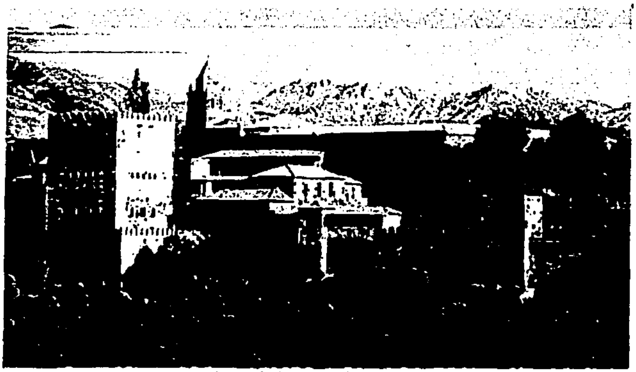
En un principio se pensó ilustrar el cuento, a manera de historieta, pero se tuvo que dejar de lado esa idea, así que bien se puede completar este trabajo ilustrándolo como una historieta.

[2] Castelnuovo, (2001), página 17

CASA 1

Por las mañanas de viernes llegaba el correo a casa de Elena. Sus amigos Fidel y Rosaura prometieron escribirle, así que salió corriendo, aquella mañana de verano, en busca del cartero y recibió, con gran emoción y sorpresa, no cartas sino postales. Entró a la casa se, sentó a la mesa y repasó rápidamente las postales, después se dio a la tarea de mirarlas con calma y leer el contenido de cada una; mientras los padres preparaban el desayuno.

P- Te enviaron postales – Dijo el papá, asomándose por encima del hombro de Elena - ¿De dónde son? ¿Están lindas?
M- ¿Nos puedes compartir su contenido? ¿O es sólo entre amigos?
E- Éstas las envió Fidel, él está en Granada de vacaciones – dijo Elena mostrándoles las postales – Les voy a leer de acuerdo al orden que él mismo les ha dado, la primera dice: "Elenaza: ¿Sabías que el sur de España estuvo bajo el poder musulmán durante casi ocho siglos? De 711 a 1492 de nuestra era (¡El año en que Colón llegó a América!) Aquí en Granada está uno de los palacios más hermosos que existen en el mundo, la Alhambra".



Palacio de la Alhambra, Granada

E- ¡Sí que es hermoso! Va la segunda: "La Alhambra es un palacio musulmán que empezó a construirse en el reinado de Muhammad ben Yusuf, en 1238; sus sucesores hicieron del lugar el mayor centro político y artístico del occidente. Los reyes Yusuf I (1333-1359) y Muhamemmed V (1354-1359, 1362-1369) fueron los que pusieron su granito de arena para darle el aspecto que tiene hoy el palacio. ¿Te imaginas que ahora se tardaran más de 100 años en construir un palacio?".

Baño de Comares

Detalle de una pared del baño de Comares

E- Tercera y última. "Lo más interesante es que para la decoración del palacio, al igual que para los edificios religiosos del Islam, no utilizaron imágenes de personas. Dicen que los geómetras están maravillados por los conocimientos con que contaban los musulmanes y hay por acá algunos matemáticos estudiando no sé que tantas cosas de geometría sobre el palacio. Espero que algunas vacaciones nos la pasemos juntos por acá. Te quiere Fidel".

Los padres de Elena poco a poco fueron rodeándola, se olvidaron de sus quehaceres porque quedaron totalmente prendidos de las postales de la Alhambra; y casi sin exagerar, podríamos decir que se las arrebataron para verlas más de cerca.

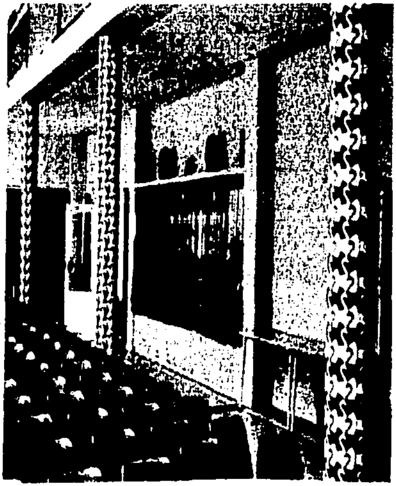
P- Se nota inmediatamente que eran tan buenos en geometría, como yo cuando era estudiante. Mira nada más qué cosas tan chulas hicieron.
M- Sí eras tan bueno, dime ¿qué figuras identificas? – Retó la mamá al papá -.
P- Está fácil; unos cuadrados – Dijo el papá al observar la postal del Baño de Comares.
M- No, esa no; me refiero a la imagen del fondo.
P- O a la postal del detalle que tiene el mismo mosaico. Bueno pues eso es como... como... parece que es... es casi como un triángulo.
M- Yo tengo la misma impresión.

Elena mientras tanto se dedicó a mirar las postales que le había enviado Rox. La madre de Elena codeó a su marido para que volteara a ver. Y como Elena ya había detenido su lectura le preguntó.

P- ¿Ésas no nos las vas a leer?, ¿podemos verlas por lo menos?.
E- Se nota que son amigos - Continuó Elena - Rox también numeró sus postales. Va la primera: "Eleniya, ¡Al fin encontré mi vocación! quiero ser artista gráfico como el holandés Maurits Cornelis Escher (M.C.E.) Aquí en la Haya algunos lugares fueron decorados por él, por ejemplo la Central de Correos de la Haya. Se ve super ¿no crees? ¿te imaginas mis trabajos exhibidos en las oficinas de correos?".


Versión alargada de Metamorfosis II en la central de Correos de la Haya[3].

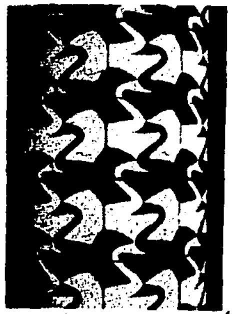
[3]Ernest (1992) p. 60



Tres pilares diseñados por M.C. Escher para el colegio Johanna en Hague, Holanda[4]

E- La segunda: "Este señor sí que me ha fascinado, me refiero a su trabajo y a su vida; Me encantaría seguirle sus pasos porque era un viajero, conoció muchos lugares de Europa, y entre ellos visitó la Alhambra. Sé que Fidel te hablará de ese lugar".

E- Tercera y última: "¿Tú crees que será muy complicado hacer algo así? Te imaginas que nos dejaran en la escuela hacer nuestros propios mosaicos como Escher lo hizo en el liceo de la Haya. Tu amiga que te quiere Rox".



Detalle de la primera columna[5]

La familia tuvo que recalentar el desayuno, mientras siguieron intercambiando sus impresiones sobre las postales. Al finalizar el desayuno Elena lavó los trastes, como siempre, y después se fue a su habitación. Ahí, se dijo a sí misma, que su habitación era su pequeño palacio y que tal vez en estas vacaciones tendría tiempo para decorarlo.

[4] H. S. M. Coxeter (1988) p.98
[5] H. S. M. Coxeter (1988) p.100

PARQUE 1

Por la mañana del día siguiente, camino al parque, Elena encontró a una vendedora de miel la cual llevaba una vitrina que mostraba un corte transversal de un panal para demostrar la legitimidad de su producto; más adelante, estaba un vendedor de elotes y esquites despachando un elote; pasó por otros puestos más, y por último, antes de entrar al parque, se acercó un momento a un puesto de piedras de diferentes colores, formas y tamaños.

Una vez en el parque buscó la sombra de un árbol, se acomodó debajo y sacó las postales del morral que su padre compró a un indígena de la sierra de Querétaro. Las observó una vez más; estaba en ello cuando ruidosamente se acercó a ella un hada, pequeña, con alas grades, vestía un huipil que tenía estampado el grabado "Cielo y Agua" de M.C. Escher.

Cielo y Agua[6]

El hada arrastraba un pizarrón que la superaba por mucho en sus dimensiones; lo acomodó junto al árbol y voló hasta quedar enfrente de Elena.

D- Por fin estás aquí. ¿Te fijaste en los productos que ofrecían los puestos allá afuera?
E- ¡Eh! ¡¿Qué?! – Elena no daba crédito a lo que veía, se talló los ojos, se pellizcó, respiró profundo.

Mientras, el hada buscaba la manera de acomodarse en una de las rodillas de Elena; pero cuando ésta se dio cuenta, trató de matar al hada como a un bicho. Entonces el hada voló muy cerca de la nariz de Elena y le dijo.

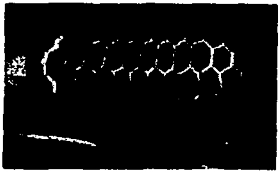
D- Mira querida, solamente he venido a ayudarte pero como estás tan agresiva mejor me voy. Ahí tú verás cómo te las arreglas para la decoración de tu habitación.

Elena recordó que, efectivamente, en eso había estado pensado la tarde de ayer así que con gran esfuerzo, y sin ella misma dar crédito a sus palabras le dijo al hada.

E- ¡No! ¡Espera! No te vayas, discúlpame. Es tan sólo que...
D- Es obvio, nunca habías visto un hada. Estás disculpada. Ahora regresando a lo nuestro veo que traes las postales.
E- Mmm, eh, ¿éstas? -Elena le mostró las postales que le habían enviado sus amigos.
D- Ésas meras. A ver Elena, hagamos primero un repaso por los puestos, ¿qué encontraste?
E- ¿Tenía que encontrar algo? -¿Quién o qué es esta cosa? Ahora además me interroga ¿Qué le pasa?, pensó Elena.
D- Dafne ignorando el rostro de sorpresa de Elena, dijo - Tus postales están relacionadas con los puestos de: elotes, miel, piedras y de algunas plantas.

[6] H. S. M. Coxeter (1988) p.166

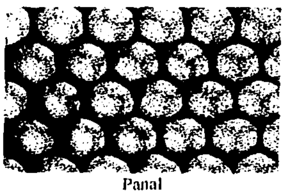
E- En una extraña conexión. ¡Que solamente tú debes de conocer!
D- Cuando encuentres la relación darás un paso hacia tu propósito de decorar tu habitación. – Dijo el hada ignorando el tono de burla en las palabras de Elena.
E- Tal vez sería más fácil entender lo que me quieres decir si tuviera un elote o un panal de abejas o una piedra o una planta en mis manos. – Elena movió sus manos de manera que el hada le pudo colocar en ellas unos vegetales como el siguiente.



Un vegetal

E- ¿De dónde salieron? Tú no tenías...
D- Elena yo soy un hada. Y aprovecharé el momento para presentarme. Soy el hada Dafne, quien se puede permitir ciertas cosas. Además las preguntas aquí las hago yo, por lo menos por ahora.
E- Has dicho por ahora, ya tendré mi oportunidad.
D- Fíjate Elena en el vegetal, y observa cómo en la naturaleza pequeñas unidades dan forma a cosas más grandes.
E- ¿Te refieres a los granos del vegetal que juntos forman todo el vegetal?
D- Sí.
E- Otro ejemplo serían las células animales y vegetales que forman hojas y músculos. - se animó a decir Elena.
D- Entre las células y los granos de este vegetal, hay diferencias, por ejemplo, los granos del vegetal los podemos ver como pequeñas unidades agrupadas alrededor de una estructura, su agrupamiento es de un orden y organización casi perfectos.
E- ¡Si!; las células que he visto en el microscopio están todas como... sin forma muy definida que digamos; y también están todas regadas por acá y por allá al contrario de los granos de este vegetal que hasta parece que están todos formaditos.
D- ¡Exacto! No todas las pequeñas unidades en la naturaleza están agrupadas y ordenadas "perfectamente".
E- ¡Ya entendí! Esto también tiene que ver con el elote y el panal de abejas...

Elena apenas y pudo decir su frase, quedó muda, pues al hablar del panal de abejas, apareció en sus manos un plato con un trozo de éste y despareció el vegetal.



Panal

D- A ver cuéntame lo que entendiste
E- Mira, los pedazos de panal están formados por pequeñas celdas, así como dices, y aquí también las pequeñas celdas están agrupadas y ordenadas; y todas tienen la misma forma, tienen forma de hexágono. Pero y el puesto de las piedras, con eso no hay conexión ¿O, sí?
D- Algunas de las piedras, como la pirita y la selenita.

Cuando Dafne comenzó a hablar, Elena rápidamente buscó un lugar al lado y colocó el plato para esperar con las manos abiertas las piedras que seguramente Dafne le proporcionaría, así fue.

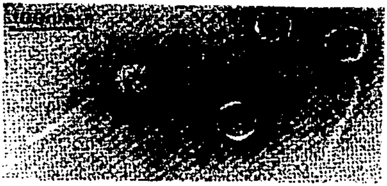

Pirita


Selenita

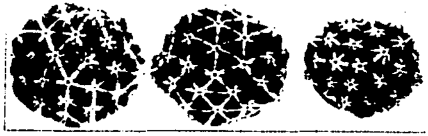
E- ¡Qué piedras tan bonitas! Y tan chistosas. ¿Por qué las venden pulidas?
D- ¡Qué pulidas! ¡Ni que nada! Asómate al interior y observa que...

Dafne empequeñeció tanto, pero tanto, a Elena que la pudo colocar en el interior de uno los minerales. Y le siguió diciendo.

D- Ahora que estás en el interior del mineral, fíjate Elena como sus átomos están tan perfectamente ordenados y agrupados que ello permite que tome la forma que tienen, una forma perfectamente bien definida.
E- ¿Con el cuarzo, pasa lo mismo? – Inmediatamente después de que Elena formuló su pregunta, estaba en su posición original, y tan asombrada y maravillada que le costó un poco de trabajo atender a lo que iba diciendo Dafne.
D- Sí, sus átomos están ordenados de manera que hacen que el cuarzo tenga esa forma hexagonal. Ahora que llegues a tu casa observa granos de sal y mañana me cuentas que forma tienen.
E- ¿La primer tarea?
D- Digamos la primer actividad.
E- Y aparte del vegetal, el panal de abejas, las piedras ¿Hay otras cosas en la naturaleza que estén formadas por pequeñas unidades?
D- Pues tenemos al virus λ.
E- ¡¿Qué?! Esos ni se te ocurra ponerlos en mis manos.
D- No, no lo haré, de nada serviría, porque son tan, pero tan, pequeños, que no los verías.
E- ¡Tampoco planees hacerme al tamaño del virus λ!
D- Está bien traeremos un microscopio electrónico, de los más potentes, modelo portátil, sólo para hadas. Con él obtendremos una foto del virus, que lo agrandará, para que lo puedas ver porque es diez mil veces más chiquito que un milímetro. – Dafne le entregó a Elena las siguientes fotos que arrojó el microscopio.

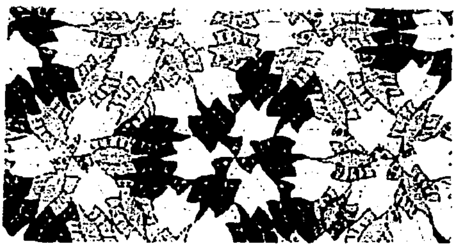


Bacteriófago λ



corte transversal de la protocabeza del bacteriófago λ

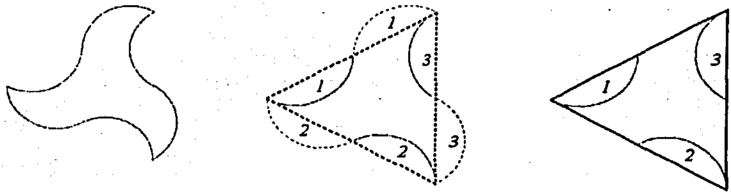
E- ¡Este virus tiene la cabeza en forma de hexágono! – Dijo Elena al observar la foto de la izquierda.
D- En realidad su cabeza tiene la forma de un icosaedro.
E- ¿De un qué?
D- ¿Sabes cuáles son los cubos?
E- Sí, son como esta pirita.
D- Cada uno de los cuadrados que forma la pirita son sus caras.
E- ¡Ah! Y son seis- Contestó rápidamente Elena después de contarlas.
D- Pues en un icosaedro sus caras tienen forma de triángulos equiláteros y son 20.
E- ¿Y esto qué es?
D- Es un corte transversal de la protocabeza del bacteriófago λ, en distintas etapas de formación.
E- Pues todo esto está muy interesante pero ¿y qué tiene que ver con mi propósito de... ?
D- Por ejemplo en esta postal los "renacuajitos" serían las pequeñas unidades que forman el gran mosaico...



D-... Y se podría decir que la geometría detrás del panal de abejas[7] y la de algunos microorganismos es la misma que...
E- ¿¡Qué la de mis postales!?

[7] La simetría hexagonal es la que aparece con mayor frecuencia en la naturaleza. Sin embargo en el desarrollo de plantas y animales está presente la simetría pentagonal. Tomado de G1.

D- ¡Exacto! Vamos a ver un poco de la geometría que hay en las imágenes de tus postales. Comencemos con las de la Alhambra, pues las formas geométricas se distinguen más fácilmente.
E- Sí, mi papá dijo que esto es casi un triángulo - decía Elena mientras señalaba en una de las postales.
D- Permíteme - El hada hizo que Elena extendiera su mano y colocó en ella una figura idéntica a uno de los azulejos de la postal pero más grande y de cartón - Sí, recortemos por aquí y peguemos por acá... lo hacemos dos veces más.- Le decía el hada a Elena, al tiempo que le iba señalando las partes de la figura y, éstas mágicamente, se desprendían de un lado y se acomodaban en otro, como se aprecia en el siguiente dibujo.



E-¡Ah!, ¡un triángulo! . . .¿A poco puedes hacer lo mismo con cada una de las figuras de las otras postales?- inmediatamente, Elena buscó en sus postales y eligió la tercer postal que le había enviado Rox - A ver, dime estos patos ¿En qué figura geométrica se convierten?
D- ¡Inténtalo tú! Y me cuentas mañana- desafió Dafne, antes de desaparecer y dejarle a Elena un pato como los que se podían apreciar en la postal, pero de cartón y más grandes.
E- ¿A qué hora nos vemos? – Se preguntó Elena a sí misma, porque Dafne ya había desaparecido.

Actividades para el lector
Investigue si los granos de sal tienen alguna forma conocida o no.
Investigue en qué polígono se transforma el azulejo de los patos.

PARQUE 2

Llegó Elena a la cita con su problema resuelto, supuso que sería a la misma hora y bajo el mismo árbol.

D-¿Fue difícil lo del pato?

E- Me entretuve un rato en resolverlo.

D- De eso se trata. ¿Traes tus postales?

E- Si, aquí están – Elena le mostró sus postales a Dafne, mientras Dafne se iba acomodando en un hombro de Elena.

D- Observa con atención como, tanto en las postales de la Alhambra, como en las de Escher, la función de los mosaicos es cubrir completamente las paredes o las columnas.

E- Y también puedo observar que estos mosaicos son más bonitos que los que tiene mi tía Chofi, en su cocina, su baño y su fachada. Y que tanto presume.

D- Como puedes ver, muchas personas, al igual que tu tía, usan los mosaicos para decorar las paredes, y de paso, para que no se vean los ladrillos, que son más feos.

E- Yo también quiero decorar mi habitación con un mosaico para que se vea más bonita y sea la envidia de todos mis amigos. Dafne, ¿No te parece que los mosaicos son como rompecabezas?

D- ¿Por qué?

E- Pues se forman de pequeñas unidades, que serían como las piezas del rompecabezas.

D- Esas pequeñas unidades se conocen como azulejos, en el mundo de la construcción; y como *teselas*[8] en el mundo de las matemáticas. ¿Notaste alguna otra similitud o diferencia entre los mosaicos y los rompecabezas?

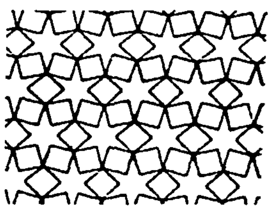
E- Pues que todas las piezas juntas, o sea las teselas como tú dices, están bien pegaditas unas con otras.

D- Sin que queden huecos entre ellas y sin que quede una encima de otra.

E- ¡Eso mismo es otra cosa que vi! Yo creo que la diferencia entre el rompecabezas y el mosaico es que en el mosaico todas las piezas son iguales y en el rompecabezas no.

D- Pues no siempre, mira esta *teselación*[9], o mosaico si prefieres.

Dafne le mostró a Elena el siguiente dibujo.



E- ¡Ésta es de estrellas y cuadrados! Entonces, ¡Hay mosaicos que tengan más de una tesela!

---

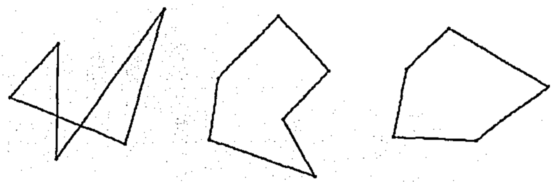
[8] Para la definición de tesela consultar las matemáticas del cuento.

[9] Para la definición de teselación consultar las matemáticas del cuento.

D- Así es.
E- Yo que ya estaba creyendo que todos los mosaicos estaban formados con puros triángulos, cuadrados, rectángulos o hexágonos.
D- ¿Por qué?
E- Porque las teselas de mis postales se transformaron en triángulos o cuadrados, los granos del vegetal y las celdas del panal de abejas tienen forma de hexágono, y los granos del elote tienen forma de rectángulos.
D- Déjame decirte que no hemos revisado en qué se transforman todas las teselas de tus postales. También, debo felicitarte por tus observaciones pues como has notado los *polígonos*[10] son los que están detrás de todo este asunto.
E- ¡Ah! ¡¿No me digas que con cada polígono se puede hacer un mosaico diferente?! ¡¿Todos los polígonos se pueden deformar en una tesela más artística?! ¿Dónde me harán los azulejos para decorar mi habitación?, ¿mis padres lo querrán pagar?. . .
D- ¡Momento! ¿No crees que son muchas preguntas a la vez? - dijo Dafne interrumpiendo a Elena - Primero comencemos por conocer algunas de las características de los polígonos, y después tú misma me dirás si todos los polígonos pueden ser una tesela o no. Segundo, no hay necesidad de mandar a hacer ningún azulejo, eso sería muy costoso, lo que se puede hacer es marcar las teselas en las paredes y después pintarlas.
E- ¡Me tranquilizas! – Elena suspiró y continuó – Aunque te diré que no creo que con todos los polígonos se pueda hacer un mosaico, porque hay unos polígonos muy feos, que dejarían huequitos al ponerlos unos junto a otros, o tal vez se encimarían.
D- Por ejemplo . . .

Mientras Elena pensaba en alguno, Dafne hizo aparecer su pizarrón y plumones de diferentes colores. Elena los tomó e hizo sus trazos.

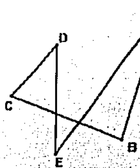
E- Estos:



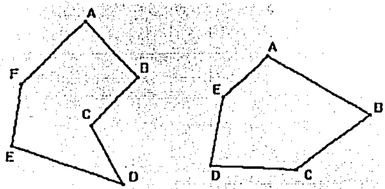
D- Tus polígonos sí que están feos.
E- Pues los hice así porque creo que éstos no se pueden utilizar para formar un mosaico.
D- Para saber si con polígonos como los que dibujaste se puede formar un mosaico o una teselación, tan bonita como las de tus postales, hay que conocer algunas de sus características.
E- Dafne, ¿Una teselación es lo mismo que un mosaico?
D- Para fines prácticos, digamos que sí.
E- ¿Qué vamos a hacer con los polígonos que dibujé?

[10] Para la definición de polígono consultar las matemáticas del cuento.

D- Primero hay que ponerle nombre a los *vértices* del polígono.
E- ¡Ah! A las "esquinas" de los polígonos.
D- A ésas mismas. Lo más usual es usar letras[11] mayúsculas del abecedario, nombrar cada esquina seguida de la anterior y hacerlo de izquierda a derecha.
E- A ver, déjame intentarlo – Elena le puso nombre a los vértices del primer polígono, y éste quedo asl.



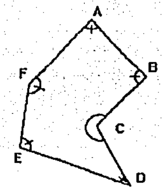
D- Así. Pero esta figura no es un polígono de los que nos interesan porque sus lados se cortan entre ellos.
E- Pero éstos dos sí, porque sus lados no se cortan entre ellos – mientras Elena decía esto iba escribiendo una letra diferente sobre cada uno de los vértices de los otros dos polígonos.

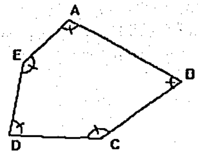


Polígono de la izquierda **Polígono de la derecha**

D- Entre estos dos polígonos hay una diferencia muy notoria ¿Cuál es?
E- El de la izquierda tiene la esquina C "hacia adentro del mismo" y el otro tiene todas sus esquinas "hacia fuera".
D- ¡Exacto! La diferencia está en cómo son los *ángulos interiores*[12] de un polígono y cómo son del otro. En este polígono - Dafne marcó los ángulos interiores del polígono como se ve a continuación - el ángulo en C es mayor a 180°

[11] Por convención a los puntos se le nombra con letras mayúsculas.
[12] Para la definición de ángulo interior de un polígono consultar las matemáticas del cuento.





E- Y sus otros ángulos interiores son menores a 180°.
D- Ahora dime, ¿Cuáles y cómo son los ángulos interiores del otro polígono?
E- Primero los voy a marcar – Elena marcó los ángulos interiores del polígono de la derecha, y cuando terminó dijo - En este polígono no hay ningún ángulo como el ángulo en C del otro polígono, en este polígono todos los ángulos son menores de 180° - dijo Elena señalando la figura de la derecha.
D- Eso mismo que acabas de decir, es la diferencia entre ambos. El de la izquierda es un polígono *cóncavo* y el de la derecha es un polígono *convexo.* Bueno, es hora de desaparecer. Toma este paquete – Dafne le entregó a Elena un paquete de papel de estraza – en él encontrarás dos paquetes: uno de palitos de madera, todos del mismo tamaño, y otro con tachuelas. Tienes que formar todos los polígonos diferentes que puedas usando desde tres hasta... seis palitos. Piensa que cada palito es como el lado[13] de un polígono.
E- Y las tachuelas ¿para qué son?
D- Para que unas los palitos por sus extremos.
E- Está bueno, pues.

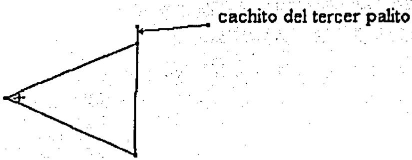
Camino a su casa Elena pensó que la cosa sería bastante sencilla y que acabaría pronto pues todos los palitos eran del mismo tamaño.

[13] Para la definición de lado de un polígono consultar las matemáticas del cuento.

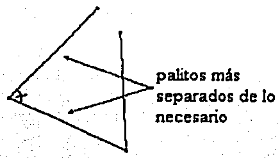
CASA 2

Cuando los padres de Elena llegaron a la casa; ella se encontraba en la mesa de la cocina trabajando con sus palitos. Los papás encontraron una mesa cubierta con polígonos diferentes y a su hija muy concentrada; ello no les sorprendió pues sabían que su hija estaba aprendiendo cosas sobre mosaicos con una "amiga", y que se estaría reuniendo algunas tardes con ella en el parque.

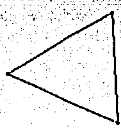
P- ¿Qué haces? - pregunto el papá.
E- Polígonos. Éstos son sus lados - dijo Elena al papá mientras le mostraba unos palitos - Tengo que hacer todos los polígonos diferentes que pueda, desde los que tienen tres lados hasta los que tienen seis.
M- ¿Y cómo vas?
E- Pues con el triángulo, fue fácil solamente se puede hacer uno; pero tuve que encontrar la separación adecuada entre dos palitos para poder acomodar el tercer palito.
P- ¿Qué quieres decir?
E- Pues es que si la separación entre dos palitos es menor de lo necesario sobra un cachito del tercer palito. Así



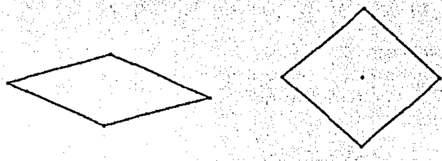
M- Ahí ya está formado un triángulo ¿no?
E- Sí, pero las esquinas de los palitos no coinciden. Tengo que ir separando estos palitos con cuidado...



P- Porque si la separación entre dos palitos es mayor de lo necesario se necesita un palito más grande. – Dijo el papá de Elena, mientras separaba los palitos, dejándolos como se ilustra arriba.
E- ¡Exacto! Pero una vez, encontrada la separación adecuada entre los palitos se puede hacer un triángulo con tres palitos iguales.



E- En cambio con cuatro palitos se pueden formar muchos polígonos diferentes. Por ejemplo si jalamos en estas dos esquinas, es un polígono más alargado; si los pongo derechitos todos se puede formar un cuadrado.



M- ¡Ah! ¡Pues todos estos son rombos[14]! Porque tienen sus cuatro lados iguales.
E- Yo creí que iba a acabar rápido con esto, pero con el pentágono y el hexágono hasta polígonos cóncavos me salen.

Elena explicó a sus padres qué quería decir que un polígono fuera cóncavo o que fuera convexo.

E- Dafne me pidió que hiciera todos los polígonos diferentes que pudiera y parece que no voy a terminar. Porque muevo tantito los palitos y el polígono ya no es el mismo, aunque sea por poquito, pero cambia. Lo único bueno es que Dafne nada más me pidió polígonos de hasta seis lados.
P- ¿Probamos? - Dijo el papá al momento que miraba a su mujer retadoramente.
M- Probamos - Contestó ella aceptando el reto.
P- Elena, ¿podemos usar más de un palito para hacer el lado de un polígono?
E- Pues... Dafne me dijo "... cada palito es como el lado de un polígono".
P- Entonces si no lo prohibió, yo me doy permiso
M- ¿En qué estás pensando? - Preguntó la mamá, a la vez que trataba de adivinar en qué pensaba su marido.

Elena introdujo su mano dentro de la bolsa para sacar los palitos que iba a dar a sus papás y se encontró con palitos del doble, triple y cuádruple del tamaño de los originales, se sorprendió, pero disimuló. Sabía que Dafne estaba detrás de todo ello, y aunque era un gran lío supo como salir adelante.

E- ¡Ay! olvide que lo que Dafne realmente dijo fue que trabajara primero con los palitos del mismo tamaño y por eso no había usado éstos que son de tamaños diferentes. Tomen – Elena dio a cada cual su tanto de tachuelas y de palitos.

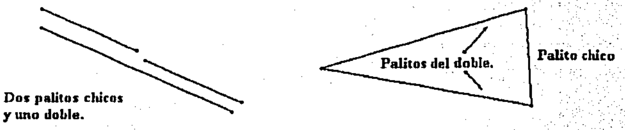
Los papás no tenían que decir mucho, ambos sabían que el reto a vencer era construir polígonos diferentes a los que Elena ya había hecho, y a los que el otro hiciera. Pasado un rato, que Elena consideró prudente, se acercó a su mamá, y le preguntó.

E- ¿Cómo vas?

---

[14] Para la definición de rombo y de otros cuadriláteros consultar las matemáticas del cuento.

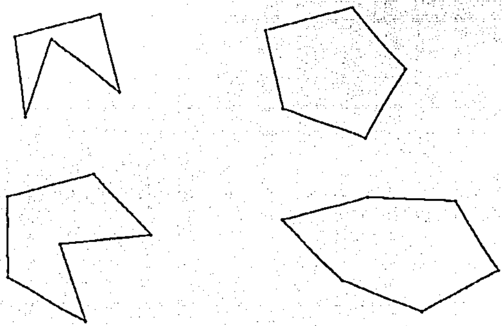
M- Fíjate, para poder hacer un triángulo diferente al tuyo, lo intenté con dos palitos de los más chicos y uno del doble de tamaño, pero no pude hacer nada. Sin embargo, con un palito de los chicos y dos del doble de tamaño - La mamá señaló el lado del triángulo formado por el palito chico – sí se forma un triángulo.
E- Ya veo.



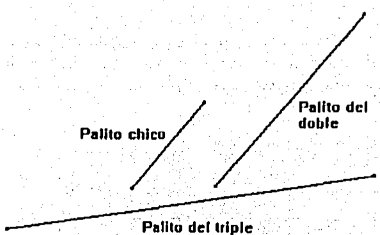
Elena y la mamá se miraron interrogativamente al notar, de reojo, cómo el papá deshacía su triángulo.

M- Con el polígono de 4 lados iguales, no hay mucho que decir es como nos contaste siempre un rombo. Y con los polígonos de 5 y 6 lados, pues también es como nos contaste, hay cóncavos y convexos.

Algunos ejemplos de los polígonos de 5 y 6 lados que hizo la mamá de Elena son los siguientes.

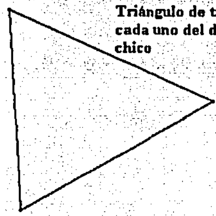


Elena mientras se dirigía a donde estaba su papá le preguntó:
E- ¿Y tú cómo vas?
P- Pues mira, para poder hacer un triángulo que no se parezca ni al tuyo ni al de tu mamá. Hice varios intentos. Trabajando con un palito de los chicos, uno del doble y uno del triple no puede hacer un triángulo, algo así le paso a tú mamá ¿No? – Elena afirmó con la cabeza.

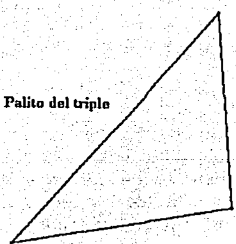


El papá continuó con su relato.

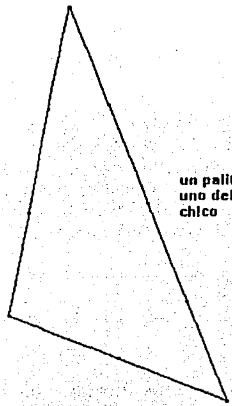
P- Trabajando con tres palitos de tamaño doble se forma un triángulo como el tuyo, pero más grande.



P- Así que probé con dos palitos del doble y uno del triple del más chico, pero se forma un triángulo parecido al que hizo tu mamá.



E- Parece que esta vez no podrás ser original. - Dijo Elena.
P- Pues te equivocas, porque finalmente encontré una solución, basándome en este último triángulo. Un palito de tamaño dos lo cambié por uno de tamaño cuatro. Quedándome un triángulo de un lado formado por...
E- Un palito del doble, uno del triple y uno del cuádruplo del palito más chico. ¡No te dejas vencer!
P- ¡Nop!



Al final, todos estaban hambrientos y querían cenar, pero había toda una exposición de polígonos en la casa de la familia, en el piso de la sala se encontraban los de los papás y en la mesa de la cocina, como ya se sabe, los de Elena. Después de presumirse unos a otros sus polígonos; Elena se dio a la tarea de levantarlos.

E- Bueno, hay que guardarlos. Mamá, ¿me prestas una bolsa para llevármelos?
P- Yo te ayudo a recogerlos - Al momento de levantar los pentágonos y los hexágonos, estos perdieron, fácilmente, la forma que cada cual les había dado.
M- Mejor haz un dibujo de cada uno, y así se los enseñas a Dafne.
E- Sí, ¿verdad?

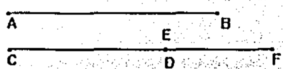
Actividad
¿Cómo seleccionar los palitos apropiados para hacer un triángulo?
¿Cuál es el tipo de cada uno de los triángulos formados en esta parte?

PARQUE 3

Una vez en el parque, Elena le mostró a Dafne los dibujos de los polígonos que hizo su familia y al mismo tiempo le narró lo sucedido; le platicó de las dificultades que surgieron al construir los polígonos.

D- ¡Sí que trabajaron duro! Pero bueno, era de esperarse que tuvieran esos problemas que me has contado, porque te di palitos del mismo tamaño; y lo hice así porque las teselas que vienen en tus postales derivan de polígonos cuyos lados son del mismo tamaño.
E- O sea que todos los lados de esos polígonos son iguales.
D- Así es. Ahora centrémonos en los problemas con los triángulos.
E- Sí, ésos que lata dieron, si no hubiera sido por los palitos que aparecieron..., más bien, que colocaste, después en la bolsa; nadie habría podido construir triángulos diferentes al primero que hice.
D- Con sólo escucharte estoy segura que fácilmente me contestarás algunas preguntillas. Empecemos con ésta ¿De qué medida tienen que ser los palitos para asegurar que se puede construir un triángulo? – Mientras Elena estaba entre recordando y pensando, Dafne apareció un cuaderno sobre las piernas de Elena, en el extremo superior derecho de él estaban dibujados tres segmentos[15] de diferentes tamaños – Supón Elena, que con estos tres lados tienes que hacer un triángulo ¿cómo sabes si lo vas a poder hacer o no?

E- Lo voy a poder hacer si los lados más pequeños, que dibujaste, juntos...

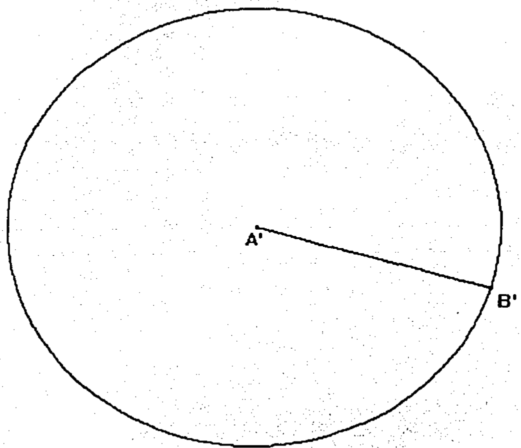


E- Así, ¿ves?, son más que el primero, porque es el lado más grande. - dijo Elena, e hizo un dibujo como el de arriba.
D- Y también tiene que pasar que los dos primeros lados, juntos, sean más que el tercero.
E- Pero eso se nota inmediatamente. También se nota en seguida que el primer y el último palito juntos son más que el del medio.
D- Así es. Si pasan las tres cosas al mismo tiempo, seguro se puede construir un triángulo.
E- Por eso mis papás no pudieron hacer un triángulo cuando los dos palitos más chiquitos juntos eran lo mismo que el más grande.
D- Con eso queda resuelto el problema de que si tienes tres palitos ¿cómo saber si puedes hacer, o no, un triángulo con ellos? Ahora tienes que hacer el triángulo con estos lados- dijo Dafne señalando el dibujo anterior.

---

[15] Para la definición de segmento consultar las matemáticas del cuento.

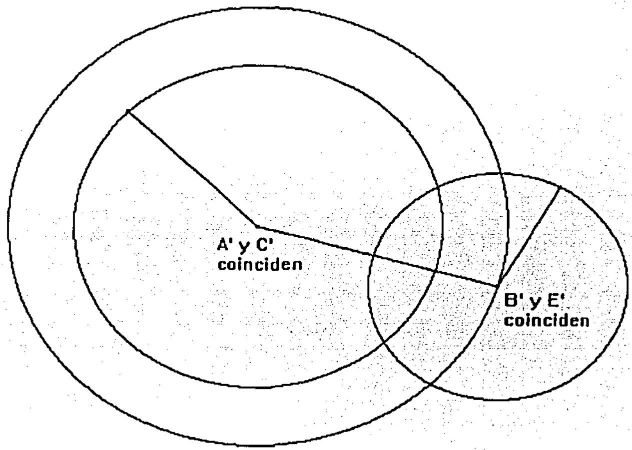
E- Pero ¿Cómo le voy a hacer? Ya no puedo manipular los lados, como con los palitos; a los palitos los podía poner en dónde yo quería.
D- Yo te voy a guiar en la construcción de un triángulo con regla y compás. Extiende tu mano - Elena al extender su mano vio aparecer en ella un compás, una regla y un lápiz.
E- ¡Este compás es de los que me gusta! Solamente tienes que jalarles las patitas para abrirlos o cerrarlos.
D- Por eso es que lo aparecí. Primero coloca la punta de tu compás en el extremo de uno de los lados.
E- O sea ¿En A, B, C, D, E, o F?
D- El que quieras.
E- En A.
D- Ahora abre el compás hasta que coincida con el otro extremo del lado, o sea con B. – Elena hizo lo que se le pidió - Bien, ahora sin abrir ni cerrar el compás, coloca la punta en alguna otra parte del cuaderno y traza una circunferencia. De preferencia hazlo en el centro[16] del cuaderno.



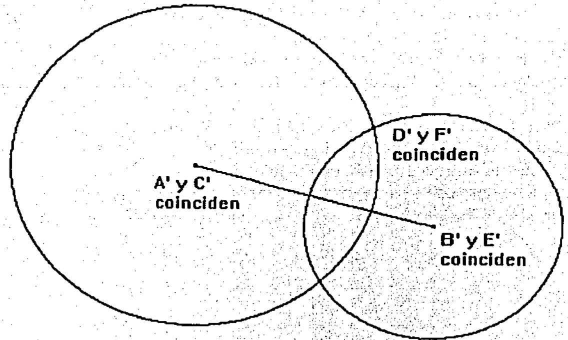
D- Une el centro del círculo con algún punto de la circunferencia.
E- Ya ¿Y ahora?
D- A los extremos del lado que acabas de hacer nómbralos A' y B', para identificar al lado A'B' como la copia del lado AB. Ahora coloca la punta del compás en el extremo de uno de los dos lados restantes.
E- En C. Y abro el compás hasta D y... luego

[16]Para que al hacer los trazos restantes queden dentro de la hoja de papel

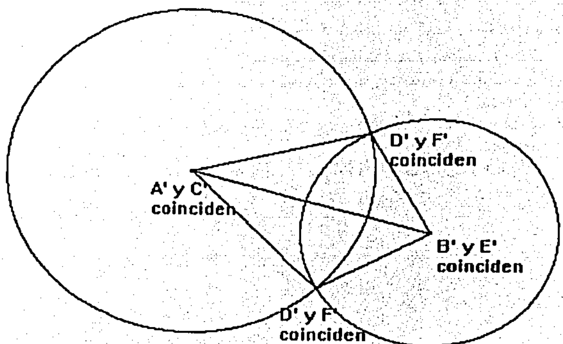
D- Con esa abertura y centro en A', traza otro círculo.
E- Entonces van a ser el mismo punto A' y C' – Dijo Elena refiriéndose al centro de la circunferencia que acababa de trazar y al centro de la circunferencia que estaba trazando.
D- Más bien diremos que A' y C' están en el mismo lugar.
E- Hago lo mismo que en la otra circunferencia ¿no? Elijo un punto sobre la circunferencia y le pongo D'.
D- No. Porque D' va a ser un punto especial. Para encontrarlo, antes tienes que trazar una última circunferencia.
E- ¡Ya sé cuál! Fíjate coloco la punta del compás en E, y lo abro hasta F, con ésta abertura pero con centro en B' marco la última circunferencia. - Al terminar Elena los trazos encontró que la última circunferencia cortaba, a las primeras que hizo, dos veces - Y supongo que ahora D' y F' coinciden, para que se pueda cerrar el triángulo, pero ¿Dónde?



D- Donde se cortan las últimas circunferencias que trazaste.
E- Voy a borrar la primera circunferencia que ya no me sirve.
D- Cuando termines de borrar, traza un lado de A' hasta donde se cortan las circunferencias que quedan.
E- ¡Y el otro lado del triángulo va de B' hasta donde se cortan las circunferencias! – Siguió diciendo Elena mientras, borraba, cuando terminó de borrar se dio cuenta que los círculos que quedaban se cortaban dos veces y por eso preguntó - ¿Por arriba o por debajo de A'B', hago eso que acabas de decir?



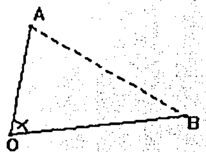
D- Por ambos lados.
E- Pero así me quedan dos triángulos. ¿Cuál es el bueno?, porque son iguales, ¿no?
D- Los dos son buenos, porque los dos triángulos son iguales[17], como ya dijiste. Además porque el triángulo una vez que lo haces no se puede deformar en otro triángulo, cosa que sí sucede con los otros polígonos.[18]



[17] Se usa "igualdad" como sustituto de *congruencia* en geometría.

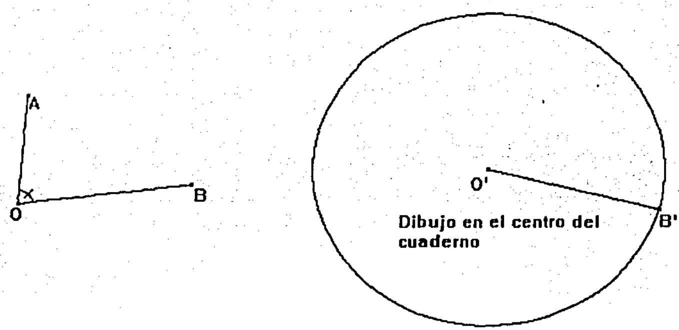
[18] No se olvide que Elena y su familia, en CASA 2, observaron que todos los polígonos se podían deformar menos los triángulos.

D- Pero me decías que al principio tu problema fue determinar el *ángulo*[19] entre dos palitos para poder colocar el tercer palito.
E- ¡Ah! Te refieres a la abertura entre los palitos ¿Verdad? – Dafne afirmó con la cabeza - Tuve que encontrar qué tan separados tenían que estar los palitos para poder hacer embonar el tercero.
D- Ahora vamos a investigar ¿cuántos triángulos diferentes se pueden hacer con un ángulo y la medida exacta de los lados de ese ángulo?
E- ¿Podemos hacer un dibujo como hace rato?
D- Voy a dibujar un ángulo y a marcar sus lados, que también van a ser los lados del triángulo que andamos buscando.

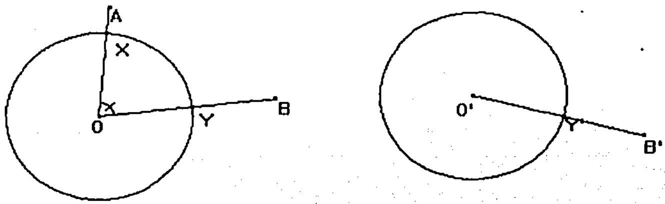


E- Imagino que ahora voy a hacer una copia del ángulo ¿No?
D- Así es.
E- ¿El ángulo no lo puedo cambiar?
D- ¿Cómo cambiarlo?
E- Hacerlo más grande o más chico.
D- No, el ángulo y sus lados forman parte del triángulo que se busca, por eso se quedan así como están.
E- Pues entonces nada más hay de una o de una. Uno A con B y ya se formó el triángulo.
D- Muy bien, entonces no hay nada más que hacer.
E- De todos modos, dime cómo se hace la copia del ángulo, qué tal que encuentro dos soluciones como hace rato.
D- Es lo bueno de ser el hada de niñas tan curiosas – Murmuro Dafne, y continuó - Con centro en O abre tu compás hasta B.
E- Y en el centro del cuaderno coloco la punta del compás. Con la abertura OB, trazo una circunferencia.

[19] Para la definición de ángulo consultar las matemáticas del cuento.

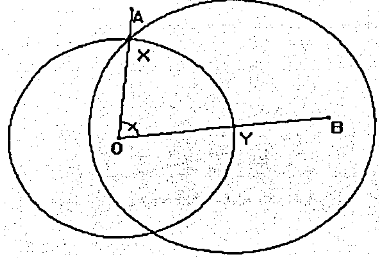


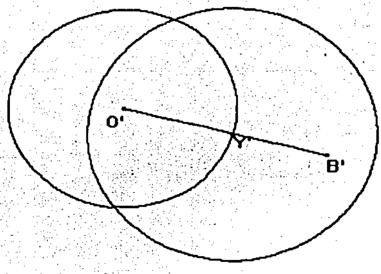
D- Bien, muy bien.
E- Éste va a ser O' – dijo Elena mientras, señalaba el centro de la circunferencia que acababa de trazar – y elijo cualquier punto sobre la circunferencia y lo bautizo como B'.
D- Eso es. Ahora con centro en O, abre tu compás sin que alcances ni a A y ni a B[20], traza una circunferencia, y después traza otra circunferencia con la misma abertura de compás pero con centro en O'.



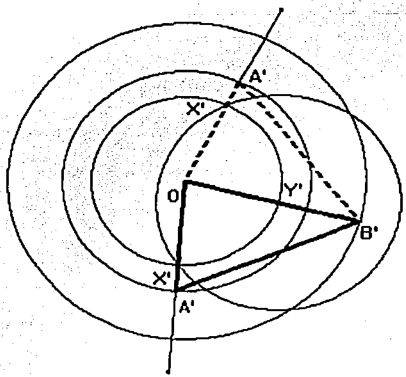
E- ¿Y luego?
D- Llamemos X al punto de intersección de la primera circunferencia con el lado OA, y Y a la intersección con OB.
E- Entonces Y' va a ser el punto de intersección de la segunda circunferencia con O'B'.
D- Ahora centra la punta de tu compás en Y y ábrelo hasta X. Y traza una circunferencia con la misma abertura pero con centro en Y' traza otra circunferencia.
E- Y así encuentro X'. - Una vez que Elena terminó de hacerlo dijo - ¡Otra vez dos soluciones!

[20] Es decir un radio menor a OA y también a OB.



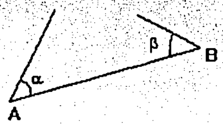


D- ¿Por qué?
E- Porque estas circunferencias se intersecan en dos puntos – dijo Elena mientas señalaba las circunferencias concentro en O' y Y'.
D- ¿Y dónde está A'?
E- Pues uno O' con los puntos donde se cortan las circunferencias.
D- Con eso encontrarías X'. Dibuja O'X' un poco más largo
E- Para que alcance a poner A ¿No?
D- Sí. Por último centra tu compás en O y ábrelo hasta A, después con centro en O' y la misma abertura traza una circunferencia. La intersección de esta circunferencia con...
E- El alargamiento de O'X', es A'.
D- Y como suponías resultaron dos triángulos. ¿Cómo le harías para verificar que son iguales?

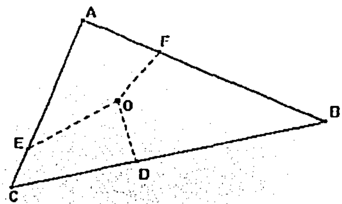


E- En primera sé que son iguales porque todo lo que hice, lo hice igualito para ambos lados de O'B', y en segunda si doblo la hoja por O'B' - Elena, arrancó la hoja del cuaderno e hizo el dobles para mostrarle a Dafne - coinciden totalmente ¿ves?

D- Veo que con esto hemos terminado de revisar las dificultades que se le presentaron ayer a tu familia. Ahora te voy a plantear un reto más. Fíjate en este dibujo, AB es un lado fijo del triángulo y los ángulos marcados también son fijos.

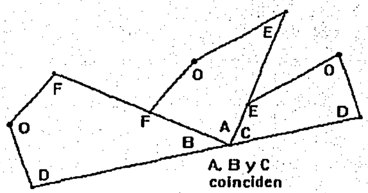


E- Los lados de los ángulos, que no son AB, ¿Son fijos?
D- No
E- La pregunta es... ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar?
D- Esa precisamente es la pregunta que espero que mañana me contestes junto con los trazos correspondientes.
E- Antes de poner fin al día de hoy, aclárame si los triángulos siempre son convexos.
D- Eso querría decir que en un triángulo cada uno de sus ángulos es menor de...
E- 180°.
D- En este momento de lo que estoy segura es de que tendrás una investigación más que hacer.
E- Pero me vas a dar pista, ¿verdad?
D- Esa es mi labor, ayudarte en tu proyecto. Toma este triángulo – En cuanto Elena escuchó la instrucción sabía que podía esperar cualquier cosa, así que colocó las palmas de sus manos hacia arriba y en una de ellas apareció el mencionado triángulo, era de cartón, pero fácil de recortar - Dibuja un punto en el interior del triángulo y desde los tres lados del triángulo corta hacia el punto que dibujaste.



E- Tijeras – Tan pronto pidió Elena el material, éste apareció sobre una de sus piernas.
D- Los tres pedazos que quedan, los vas a colocar "uno pegadito al otro", de modo que las esquinas del triángulo coincidan, sin que queden empalmadas. Sus lados también deben de coincidir.

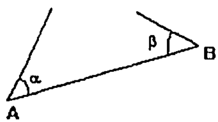
Dafne extrajo, sin tocar, de las manos de Elena los tres pedazos. Unió las piezas recortadas como se ve a continuación y las mantuvo suspendidas enfrente de Elena para que viera como es que las debía colocar.



E- ¿Ésta es la pista?
D- Esto nos va a servir para averiguar cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
E- Pero lo que yo quiero saber es si los triángulos siempre son convexos.
D- Para allá vamos. Dime, vistos así ¿cuánto suman los ángulos interiores de este triángulo?
E- ¿180°?
D- Ni más ni menos.
E- ¡Ah! Entonces cada uno de los ángulos interiores del triángulo es menor a 180°. Y si eso pasa con todos los triángulos, ningún triángulo es cóncavo.
D- Una forma en que podrías comprobarlo es recortando de manera parecida todos los triángulos que traes dibujados, y observar qué pasa.
E- ¿Todos?
D- No te quejes que no son tantos. Es más, también averigua cuánto vale la suma de los ángulos interiores de cada uno de los polígonos que trajiste dibujados. Hasta mañana – Dijo Dafne al esfumarse en el aire.
E- ¡¿Qué!?

Actividades

1. Observe el siguiente dibujo. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar considerando que el lado AB y los ángulos α y β son fijos; es decir, que no se pueden modificar?

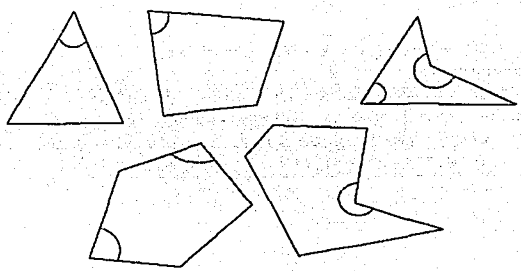


2. Hacer una copia de los triángulos hechos hasta ahora, recortarlos y volverlos a pegar como instruyó Dafne a Elena ¿Qué observa?

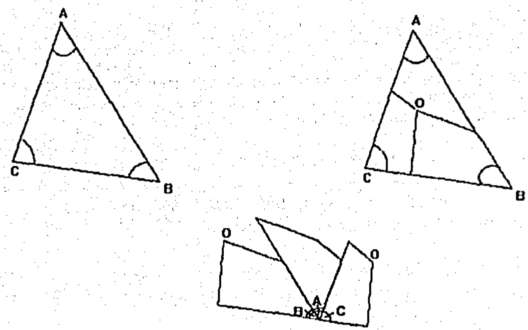
CASA 3

Por segunda ocasión los padres de Elena la hallaron en la cocina, esta vez con un montón de hojas con dibujos y cosas escritas sobre los dibujos; se miraron uno al otro, y después de una corta conversación, el papá propuso comprar a Elena un pizarrón, pues gastaba mucho papel en sus pruebas y ensayos; la mamá estuvo de acuerdo. Procedieron, entonces, con el interrogatorio habitual al llegar a casa por las tardes después de trabajar; aunque ahora más interesados que en otras ocasiones.

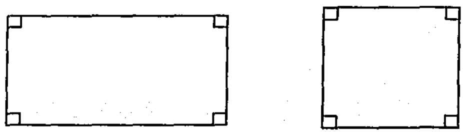
P- Hola preciosa, ¿cómo te ha ido hoy con Dafne?.
E- Hola pa, hola ma.
M- ¿Cómo te va hija? ¿Podemos saber en qué te ocupas ahora?
E- Tengo que averiguar una cosa de los polígonos.
M- ¿Qué cosa?
E- ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de los polígonos que formamos ayer?
P- Los ángulos interiores de un polígono son: ¿los qué se forman en el centro del polígono?
E- Nop. Los ángulos interiores de un polígono son los que se forman con dos lados que estén juntos. Por ejemplo éstos. - Elena tenía los siguientes dibujos, donde estaban marcados algunos de los ángulos interiores de los polígonos.



P- ¡Ah! Sí, sí, ya me acordé.
E- Pues qué bien porque necesito que me ayudes. Hasta ahora sé que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
M- Momento que esto es lento. ¿Por qué, cómo esta la cosa?
E- Recortemos éste triángulo en tres pedazos – Elena dibujó un triángulo, lo recorto y lo pegó, como ya había hecho con todos los triángulos que había dibujado la tarde de ayer, según las indicaciones de Dafne – Así, y ahora peguemos sus tres esquinas una juntito a la otra. ¿Qué notan?

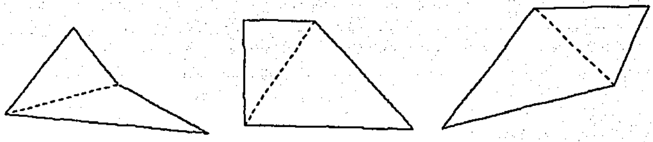


P- Pues que...
E- Los tres ángulos juntos suman . . .
M- ¡Ay, sí! que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Y aquí se nota re-bien.
P- Y es cierto para cualquier triángulo, si no recuerdo mal.
E- Ambos recuerdan muy bien.
M- Superado el triángulo trabajemos con un polígono de cuatro lados, que supongo no necesariamente tiene que ser un cuadrado o un rectángulo, porque en cualquiera de ellos cada uno de sus ángulos interiores es de 90°. Y como cada uno tiene cuatro ángulos interiores, pues es claro que la suma sea 360°, en cada caso.



E- ¿Pero, a ver, cómo le hacen para calcular la suma de los ángulos interiores de éstos?

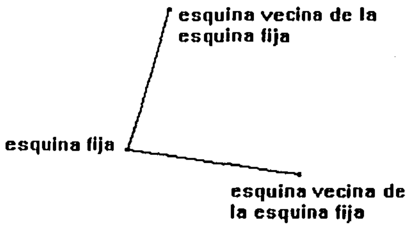
Elena dibujó tres cuadriláteros en una hoja de papel, e inmediatamente que terminó de dibujarlos, su papá tomó la hoja y dibujó una de las dos diagonales de cada cuadrilátero, como se puede ver a continuación.



M- ¡Claro! Trazando una línea de manera que se formen dos triángulos, la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es: 180° de los ángulos interiores de un triángulo más 180° de los ángulos del otro triángulo da 360°.
P- Y con este método podemos saber cuánto vale la suma de sus ángulos interiores de cualquier polígono sin necesidad de saber cuánto vale cada ángulo interior. Dicho lo cual podemos pasar a la cena; he resuelto todo.

Elena y su mamá se miraron mutuamente de manera interrogativa, a ellas no les parecía que todo estuviera resuelto. Entonces Elena dijo.

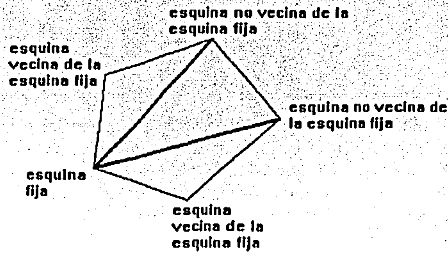
E- Pues si ya descubriste el enigma ¿por qué no nos cuentas? antes de cenar.
P- Pon atención. En cada polígono, si nos fijamos en una de sus esquinas en particular, esa esquina tiene dos esquinas vecinas[21]. Con la esquina fija y las dos vecinas se forman dos lados del polígono.



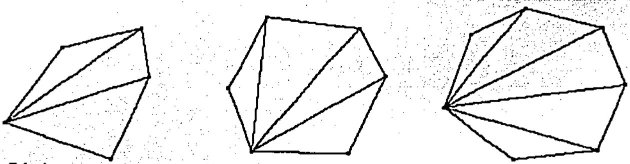
E- En el triángulo para cada esquina fija las otras dos son vecinas.
M- En el cuadrado, cada esquina solamente tiene una esquina no vecina.
E- Y al unir la esquina fija y la no-vecina se forman dos triángulos.
M- Sí, eso es muy claro en el dibujo que acabamos de hacer.
P- Lo interesante es que para tener todos los triángulos posibles dentro de un polígono hay que unir una esquina fija con todas sus esquinas no vecinas.
M- ¡Y teniendo todos los triángulos posibles dentro de un polígono, podemos saber cuanto suman los ángulos interiores de ese polígono!

[21] Matemáticamente se conocen como vértices consecutivos.

E- Vamos a probar con el pentágono – Elena dibujó un pentágono y a uno de sus vértices le llamó esquina fija, como se ve en el dibujo – En este caso tenemos una esquina fija y dos esquinas no vecinas. Y se forman 3 triángulos.



M- ¿Ya se dieron cuenta?, lo que está pasando del triángulo, al cuadrado, al pentágono. Que conforme aumenta en uno el número de lados y esquinas de un polígono...
P- Aumenta en uno el número de esquinas no vecinas de una esquina fija y aumenta en uno el número de triángulos que se forman dentro del polígono. Voy a dibujar un polígono de: 5, 6 y 7 lados para verificarlo.



5 lados
2 esquinas no vecinas de una esquina fija
3 triángulos
Suma de los ángulos interiores
3(180°) = 540°

6 lados
3 esquinas no vecinas de una esquina fija
4 triángulos
suma de los ángulos interiores
4(180°) = 720°

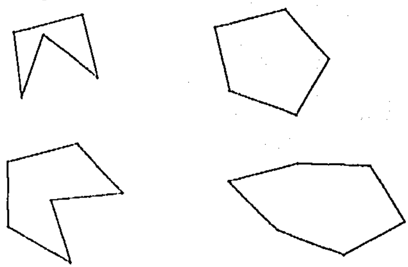
7 lados
4 esquinas no vecinas de una esquina fija
5 triángulos
suma de los ángulos interiores
5(180°) = 900°

M- Pues yo he hecho una tabla. En la que escribí los datos de varios polígonos ¿qué les parece?

Número de lados del polígono	Número de esquinas no vecinas	Número de triángulos	Valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono
3	0	1	180°
4	1	2	360°
5	2	3	540°
6	3	4	720°

P- Tu tabla me ha dado una idea. Podemos hacer una fórmula para saber cuántas esquinas no vecinas tiene cada polígono.
M- Tomando como referencia una esquina en particular de cada polígono - puntualizó la mamá.
E- ¡Suéltala pues de tu ronco pecho!
P- Para determinar el número de esquinas no vecinas en cada polígono, hay que restar 3 al número total de esquinas del polígono. El tres seguramente se debe a la esquina fija y a sus dos esquinas vecinas.
M- ¡Yo tengo otra! Para determinar el número de triángulos que se forman en un polígono hay que restar dos al número de lados de un polígono. Y supongo que es porque junto a cada vértice fijo hay dos lados del polígono.
E- ¡Yo tengo la última! Y debo decirla yo precisamente, porque es lo que Dafne me pidió que averiguara. Para encontrar el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono hay que multiplicar 180° por el número de triángulos que se forma en cada polígono.
P- Punto final. Y vamos a cenar.

Actividad para el lector
Algunos de los polígonos que hizo la mamá de Elena en casa 2 son los siguientes:



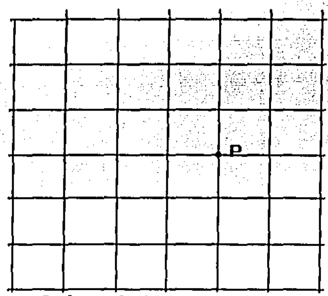
¿Cómo triangularía los dos de la izquierda para encontrar el valor de la suma de sus ángulos interiores? ¿Cuánto vale esa suma?

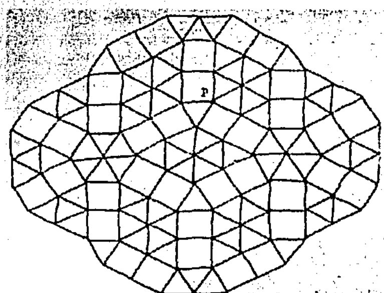
PARQUE 4.

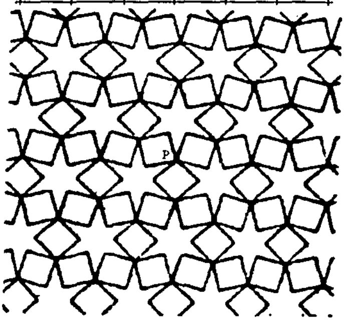
Al verse de lejos Elena y Dafne se saludaron con un gesto. Y al acercarse Elena, Dafne le preguntó.

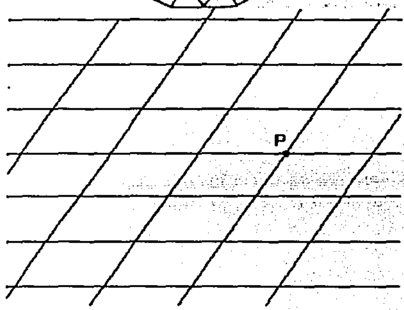
D- ¿Cómo te fue con lo de la suma de los ángulos interiores de los polígonos?
E- Yo creo que rebién, fíjate que mis papás ahora sí se lucieron, porque . . . - Elena le contó detalladamente a Dafne las observaciones que había hecho la familia y las conclusiones a las que habían llegado.
D- ¡Que trabajadores han resultado todos!
E- Así somos en mi familia. ¿Entonces lo qué hicimos está bien? ¿La suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es 180°?
D-Sí, Elena. Tus observaciones, en unos pocos triángulos, te mostraron una característica que se cumple en todos los triángulos.
E- Supongo que todo está relacionado con las teselas y espero que ahora me lo digas porque, como ya te diste cuenta, he trabajado duro la tarde de ayer.
D- Veamos que te parece esto.
E- ¡Que se levante el telón!

Dafne Tenía una cortina sobre su pizarrón, y la corrió, entonces Elena pudo ver cuatro teselaciones, dibujadas en el pizarrón. Y dirigiéndose a Elena le dijo:

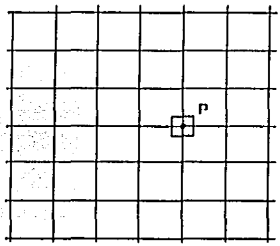








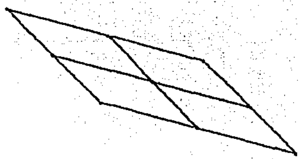
D- Fíjate, que cada una de las teselaciones tiene un punto marcado.
E- Y también veo que hay una "P" junto a cada punto.
D-Es el nombre del punto.
E- Me imagino que es para que podamos hablar de él.
D- Exacto, ahora, fíjate en las cuatro teselaciones y dime, cuánto vale la suma de los ángulos interiores de los polígonos que están alrededor de P.
E- ¿No te parece que esa pregunta es un poco difícil? Porque no sé cuanto vale el ángulo interior de cada polígono.
D- Vamos Elena, selecciona una de las teselaciones – Elena rápidamente eligió la primera porque estaba formada con cuadrados. Y de los cuadrados recordaba bien que cada uno de los ángulos interiores era de 90° - Ahora di ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores, de esos cuatro cuadrados?
E- Pues... 360°, porque los cuatro son de 90°, ya te conté que mi mamá lo recordó ayer.



D- Ahora fíjate en otra teselación y averigua lo mismo...
E- En todas va a pasar como en la primera ¡La suma de los ángulos interiores de los polígonos al rededor del punto P es 360°!
D- ¡Exacto! Como puedes ver en estos cuatro ejemplos, no importa si los polígonos son: cóncavos, convexos, cuadrados, triángulos, paralelogramos, o de cualquier otra forma, lo que importa es que la suma de los ángulos interiores de los polígonos alrededor de P...
E- Sea 360°. Pero, entonces, ¿cómo saber si un polígono te sirve de tesela o no?
D- Creo que con el ejemplo que he preparado, tú misma podrás hallar la respuesta. - Dafne le entregó a Elena, algunos paralelogramos como el siguiente, sabiendo que podía ser una buena tesela. Los paralelogramos tenían un adhesivo en la parte trasera para poderlos fijar en el pizarrón.

D- Trata de acomodar algunas de estas teselas alrededor de un punto, de modo que teselen.
E- ¡Ah esta tesela es un paralelogramo!
D- Así es. Ahora manos a la obra.

El primer intento de Elena quedo así.



E- Lo hice bien ¿No te parece?
D- ¿Esa es toda tú teselación?
E- Yo creo que no es necesario que siga poniendo más paralelogramos – Dafne puso tal cara de pregunta que Elena buscó explicarle – Pues las voy a seguir acomodando de la misma manera, para arriba, para abajo, para un lado y para el otro.
D- Esta bien, te la voy a dar por buena. Pues, como dices, basta con seguir acomodando el polígono de la misma forma para conseguir una teselación completa.
E- Pero aún no puedo decir si todos los polígonos sirven para teselar.
D- Intenta alguna otra forma de acomodar la tesela, y veamos que pasa.

Elena no contestó, se lanzó a probar. Ya acomodaba las teselas de una forma, ya las acomodaba de otra, parecía no creer lo que a sus ojos se mostraba, pues encontró solamente otras dos formas de acomodar las teselas y sin embargo no se cumplía la condición de una teselación.

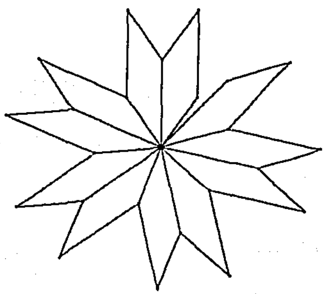


Figura 1

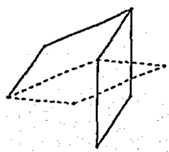
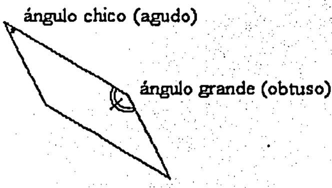
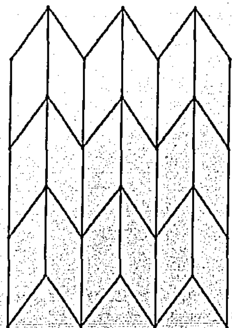


Figura 2

E- ¡No se puede teselar! ¿Qué extraño, no? Con el mismo polígono acomodado de una manera se puede teselar pero en estos dos intentos no pude. Porque o falta un pedacito de tesela o queda encimada una tesela sobre otra.
D- Buen punto. Ya casi resolvemos el enigma.
E- Yo creo que sí necesito saber cuánto vale el ángulo interior del polígono para poder decidir cómo acomodar la tesela sin que me queden huequitos... o se encimen las teselas.
D- Analicemos tu primer intento.
E- Es que ve el paralelogramo, tiene dos ángulos chiquitos iguales y dos ángulos grandotes también iguales



D- Esos ángulos que llamas chiquitos, son agudos y esos que llamas grandotes son obtusos.
E- Pues bueno, si acomodo las teselas de manera que quede alternado un ángulo agudo con un ángulo obtuso se puede teselar.
D- ¿Qué pasa sí acomodas las teselas de manera que no quede alternado un ángulo agudo con un ángulo obtuso pero que queden juntos los cuatro ángulos? – Elena rápidamente se dio a la tarea de acomodar las teselas como se muestra a continuación.



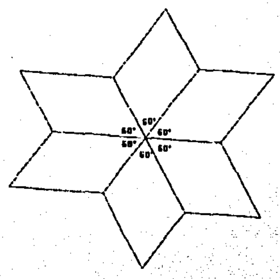
E- ¡También se consigue una teselación!
D- Así es.
E- Pero en los otros dos intentos coloqué la tesela de manera que quedaron todos los ángulos agudos juntos o todos los ángulos obtusos juntos. O sea que . . .
D- ¿Qué, que?

E- Si la suma de todos los ángulos agudos juntos, o la suma de todos los ángulos obtusos juntos, diera exactamente 360° hubiera podido colocar un número exacto de teselas alrededor de un punto, como en el primer intento.
D- Sí el ángulo agudo de este polígono fuera de 60° ¿Te funcionaría?

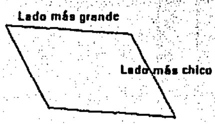
Elena mentalmente calculó la división de 360 entre 60, y entonces contestó

E- ¡Sí! Por que así puedo poner exactamente 6 teselas alrededor de un punto.
D- Curiosamente aquí traigo unos *paralelogramos*, que tiene sus ángulos agudos de 60°. Muéstrame cómo los colocarías.

Elena tomó algunos de los polígonos y los acomodó de la siguiente manera

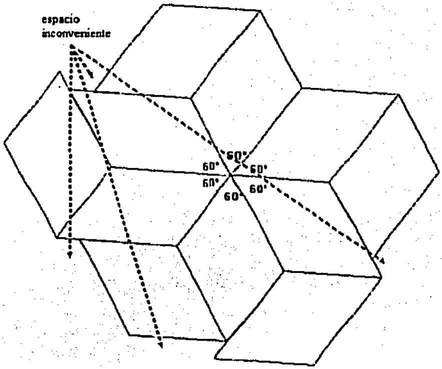


D- Estarás de acuerdo que es importante saber cuanto vale el ángulo interior de un polígono para saber si el polígono servirá como tesela, o no.
E- Parece que si, pero...
D- ¿Pero qué?.
E- La tesela tiene éstos dos lados chicos y éstos dos lados más grandes.

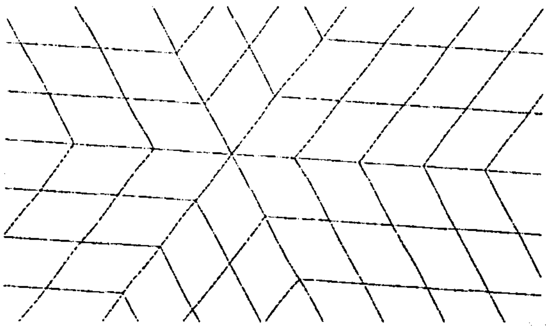


D- ¿Cuál es el problema con eso?
E- Pues que hay que tener cuidado con que lados largos coincidan con lados largos, y lados chicos coincidan con lados chicos. Ve:

Elena agregó más teselas sobre el último arreglo que había hecho.



E- Te quedan espacios donde ya no puedes colocar otro de estos mismos polígonos – Dijo Elena, mientras señalaba uno de los polígonos del dibujo.
D- ¿Y sí las acomodas de manera que no te queden esos espacios? – Elena hizo cambios en las últimas teselas que acomodó. Como Dafne sabía que Elena necesitaría más teselas, se las fue proporcionando hasta que Elena formó un mosaico como el siguiente.



D- ¡Muy bonito tu mosaico!
E- El de mi habitación quedará mejor.
D- Tienes razón. Ahora, como la mayoría de las teselas de tus postales provienen de polígonos equiláteros ¿Recuerdas qué quiere decir que un polígono sea equilátero?
E- Que tiene todos sus lados iguales.
D- Pues con ese tipo de polígonos vamos a trabajar, en tu proyecto.
E- Ay que bueno que me dices eso, ya estaba imaginando que tenía que averiguar cuánto valía el ángulo interior de muchos polígonos, (y lo peor es que estuvieran todos feos), y hasta flojerita me estaba dando.

D- Elena toma estos polígonos regulares, - Dafne le entregó una bolsa que contenía, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos y octágonos regulares. – Los llamo así por que además de ser equiláteros, es decir que tienen todos sus lados iguales, tienen...
E- Todos sus ángulos iguales[22] ¿No? Digo, siguiendo la idea de lo que acabas de decir.
D- Espero que mañana me puedas decir ¿cuánto vale el ángulo interior de cada polígono regular? Y con cuáles de ellos se puede hacer una teselación de un sólo tipo de tesela.
E- Sip, y hasta mañana.

Actividad para el lector

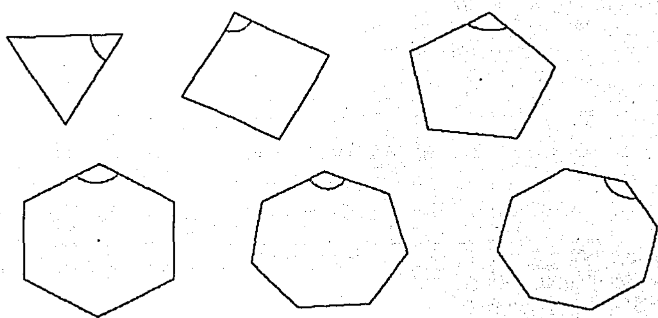
Averiguar el valor de los ángulos interiores en cada una de las teselas de las tres primeras teselaciones.
Intenta otras maneras de acomodar el último paralelogramo, que usó Elena, de manera que se logre teselar
Si el ángulo agudo de un cuadrilátero paralelogramo es de 60°, ¿cuánto vale el obtuso? ¿Qué pasa al colocar alrededor de un vértice un polígono de este tipo, de manera que los ángulos obtusos queden juntos?
¿Qué polígono es equiángulo pero no equilátero?
¿Qué polígono es equilátero pero no equiángulo?

[22] También conocidos como equiangulares.

CASA 4

Los papás de Elena se sorprendieron un poco al entrar a la casa y no encontrarla en la cocina, pero pronto se dieron cuenta que estaba en la sala. Con los polígonos que le había dado Dafne esparcidos por la alfombra.

P- ¿Ahora en qué nos ocuparemos?- Funcionó, pensó Elena, sabía que su papá estaría gustosísimo en colaborar nuevamente en su proyecto, y también sabía que la mamá vendría igualmente dispuesta.
E- Hola pá, hola má
M- Hola hija ¿qué tal tu día?
E- Pues es un día con tareas. Debo averiguar dos cosas.
M- Una por una para que no nos hagamos bolas.
E- La primera, creo que es fácil. A diferencia de ayer ¿Recuerdan que tuvimos que encontrar cuánto valía la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo? Pues ahora, tengo que averiguar cuánto vale el ángulo interior de cada polígono de estos polígonos.

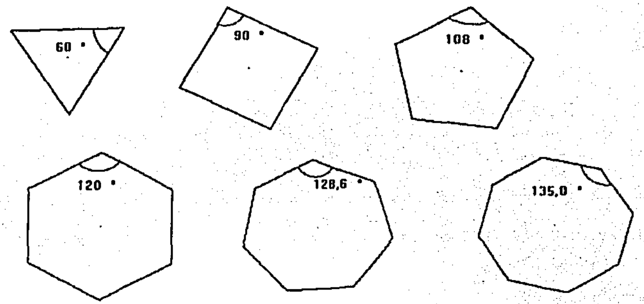


P- Estos polígonos... Se llaman... ¿Cómo se llaman?...
E- ¡Ay! Pá. Ni te acuerdas. Se llaman regulares porque sus lados son iguales y...
M- ¡Sus ángulos también! Yo si me acuerdo.
P- ¡Pues ya está! Usemos la tabla que hicimos ayer
M- ¡Claro! Solamente hay que dividir el valor de la suma de los ángulos interiores de cada polígono entre el número de ángulos, porque en cada uno de estos polígonos los ángulos son iguales.
E- Hasta podemos hacer otra tabla como la que tu hiciste, ma.

La mamá ni tarda ni perezosa, de donde pudo se hizo de papel y tres lápices, a cada quién le dio su papel y lápiz para que hicieran a mano las divisiones necesarias para llenar la nueva tabla. Hizo la tabla con tres columnas: una para el nombre del polígono, otra para el valor de la suma de los ángulos interiores, y otra para escribir el valor del ángulo interior de cada polígono. Le pidió a Elena el resultado de sus divisiones y las comparó con las del papá.

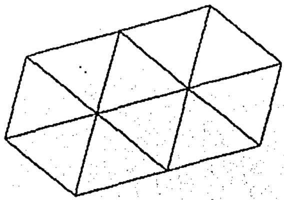
Polígono regular	Valor de la suma	valor de un ángulo
triángulo	180°	180°/3 = 60°
cuadrado	360°	360°/4 = 90°
pentágono	540°	540°/5 = 108°
hexágono	720°	720°/6 = 120°
heptágono	900°	900°/7 = 128.57°
octágono	1080°	1080°/8=135°

P- ¡Uy! Las divisiones no son todas exactas. ¿Importa eso?
E- No sé. Pero supongo que no importa porque, por alguna razón, Dafne solamente me dio polígonos de hasta 8 lados.



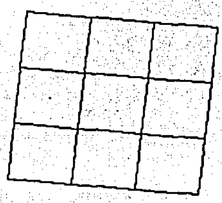
M- Bueno, nos dijiste que había dos cosas por resolver. Ahora dinos ¿Cuál es la segunda?
E- ¿Cuál polígono regular sirve como tesela y cuál no?
M- Más despacio, que no hay prisa.
E- Pues una tesela es... un azulejo como los de la cocina, o como los del baño, o como los del piso de las habitaciones.
P- ¡Ah! Como los azulejos de la casa de mi hermana Chofi, qué bonitos son ¿No?
M- ¡El mosaico de la cocina! Es el que más me gusta.
P- ¿Tiene que ver esto con tus postales?
E- ¡Que olvidadizo eres para mis cosas! Ya te había contado que quiero decorar mi habitación con un mosaico nunca antes visto. Más bonito que los que hay en la Alhambra y en la Haya.
P- Y para ello tenemos entonces que averiguar ¿cuáles de estos polígonos sirven para hacer un mosaico? - Elena afirmó con la cabeza – Hagámoslo de la siguiente manera, me das a mi algunas piezas, a tu má otras y tú té quedas con otras; y cada cual se va a su rincón a trabajar con sus piezas y a ver quién termina primero.
M- Elena ¿podemos usar piezas combinadas?
E- No, solamente podemos usar piezas de un mismo tipo a la vez.
P- Entonces hagámoslo juntos. Ni hay tantos polígonos diferentes como para que trabajemos separados. Empecemos con el triángulo - Se separaron los triángulos de las otras piezas, eran unos 10. La mamá decidió empezar primero y nadie objetó.

M- Hagámoslo sobre la mesa de centro de la sala - y comenzó, una vez que terminó, inquieta la mamá dijo - No veo cuál es la dificultad, se nota que se pueden ir acomodando triángulos[23], sobre toda la mesa, aunque para que quede bien cubierta la mesa habría que cortar algunos triángulos cuando se alcancen las orillas; seguramente con los otros polígonos sucede lo mismo. Ahora ¿nos podemos ir a cenar? ¡Muero de hambre!- El trabajo de la mamá tenía el siguiente aspecto.



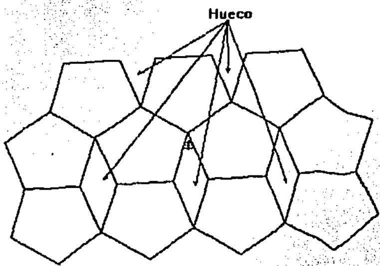
E- Con calma mamá nada más falta que averigüemos qué sucede con los otros cuatro polígonos.
P- ¡Fíjense! Siempre van a quedar 6 triángulos juntos.
E- ¡Y 6 por 60° (el ángulo interior de un triángulo) es 360°!
M- Por eso en cada esquina hay seis polígonos.
E- Porque la suma de los ángulos interiores de los polígonos debe ser exactamente 360° para que en las esquinas los polígonos queden juntitos sin dejar huecos.
P- Podemos saltarnos al cuadrado, hemos visto cientos de baños y cocinas que tienen sus paredes cubiertas por mosaicos de cuadrados.
M- ¡Sí! Están todos bien "acomodaditos" siempre he visto cuatro cuadrados juntos.
P- Pues claro según nuestra tabla el ángulo interior de un cuadrado es 90°, así que con cuatro cuadrados juntos se tienen los 360°

Mientras los papás discutían, Elena se entretuvo colocando los cuadrados, quedando su arreglo con el aspecto siguiente.

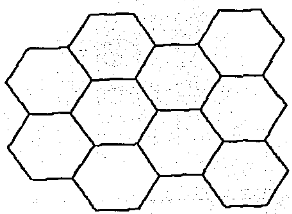


[23] equiláteros

P- ¡Me toca acomodar los pentágonos! – Ya lo intentaba el papá de una forma, ya de otra, parecía que algo no estaba bien, pasados unos segundos dijo - No se puede con un pentágono regular.
M- ¡¿Cómo?!
P- Pues fíjate hace falta un polígono con un ángulo interior más pequeño, para que quepa en estos huecos. - el papá señaló los siguientes "huecos" del dibujo.

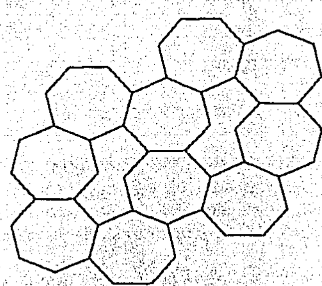


M- ¡Es verdad! No se puede hacer un mosaico con puros pentágonos regulares.
P- ¿Cuánto vale el ángulo interior de un pentágono?
E- 108.
M- ¡Claro! Si pones tres pentágonos juntos, son 108°+108°+108° que es 324°, hace falta un polígono con un ángulo de 36°, para los huecos.
P- Y si quisiéramos colocar cuatro pentágonos, la suma sería 108°+108°+108°+108° que es 432°, eso ya es más de 360°.
M- Me toca probar con los hexágonos. - La mamá tomó sus hexágonos y rápidamente los acomodó, así.

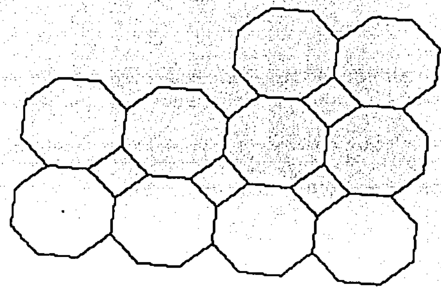


P- Siempre van a quedar 3 hexágonos juntos. Porque el ángulo interior de un hexágono es 120, y con tres hexágonos juntos (120°+ 120°+120°) se alcanzan los 360°.
E- Ni más, ni menos.

M- Con los heptágonos – la mamá ahora acomodó los heptágonos sobre la mesa de la sala y encontró que... - ¡Igual, quedan huecos!



E- Y con los octágonos- Elena acomodó los octágonos sobre la mesa de la sala de la siguiente manera.



P- Estos huecos son claramente identificables, ¡son cuadrados!
M- Vaya, uno podría creer que con cualquier polígono se puede hacer un mosaico.
E- En realidad, todos los polígonos como estos[24] que me dio Dafne, sirven para hacer un mosaico pero por lo visto algunos necesitan piezas extras.
P- ¡Lo encontré!
M- ¿Qué?
P- Por qué algunos polígonos no necesitan piezas extras y otros sí. Los que no necesitan piezas extras es porque su ángulo interior divide exactamente a 360°.
E- ¡Pá estamos pensando lo mismo! Pero yo ya puse mi información en esta tabla. Vean

[24] regulares

Polígono	Valor del ángulo interior	360°/ángulo interior
triángulo	60°	360°/60° = 6
cuadrado	90°	360°/90° = 4
pentágono	108°	360°/108° = no es exacta
hexágono	120°	360°/120° = 3
heptágono	128.57°	360°/128.57° = no es exacta
octágono	135°	360°/135°= no es exacta

E- El número que resulta de la división de 360° entre 60°, 90°, 120°, 218.57° o 135° es el número de polígonos que están juntos en un vértice a la hora de teselar. Seis en el caso del triángulo, cuatro en el caso del cuadrado y tres en el caso del hexágono.
P- Pues yo ya me di cuenta de algo en lo que tú ni siquiera te has fijado.
E- ¿Qué?
P- Conforme aumenta el número de lados de un polígono el valor de su ángulo interior también va aumentando. Así que seguro ya no vamos ha encontrar un polígono regular que sirva él solito para hacer un mosaico.
M- Parece que tienes razón. Y no hay nada más que hacer por hoy. ¡Vamos a cenar me muero de hambre!

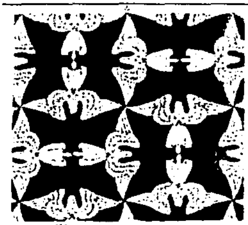
Actividad para el lector.
¿Se puede hacer un mosaico donde las esquinas de los polígonos no coincidan?
¿Cuáles son las características de la "tesela hueco" para una teselación que utiliza pentágonos regulares?
¿Se puede hacer una teselación únicamente con octágonos regulares?
¿Cuánto vale cada uno de los ángulos interiores de la tesela "hueco" para las teselación que hace la familia con heptágonos regulares?

PARQUE 5

Elena sabe que falta poco para el gran momento de la decoración de su habitación. Y ha estado pensando en lo latoso y tardado que será ir colocando y marcando una por una las teselas, hasta que queden cubiertas completamente las paredes de su habitación y... ¿Por qué no?, el techo.

Pobre Elena, pareciera que la tarea a realizar es bastante pesada; por suerte Dafne hoy le hablará de cómo se puede aligerar esa carga.

Al entrar Elena al parque ve desde lejos a Dafne, ambas se reconocen y se saludan, ya de cerca el saludo lo concretan con un abrazo (Esto lo pueden hacer porque a veces Dafne usa sus dimensiones de "adulto normal", sólo por variar) Inmediatamente Dafne ofrece a Elena una postal con la teselación, hecha por M.C. Escher, "Ángeles y Demonios".



Y le pide a Elena:

D- Encuentra el espejo.
E- ¿¡Mmm!? – Elena pone tal cara de admiración y piensa, ¿Cómo que el espejo?.

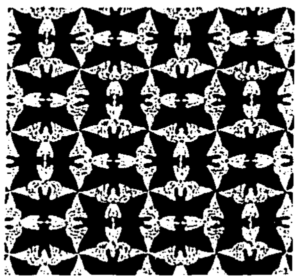
Inmediatamente Dafne reconoce que ha sido un poco brusca y buscando que Elena no se desanime, intenta de nuevo, con la siguiente pregunta:

D- ¿Qué ves en un espejo?
E- Mmm. . . El reflejo.
D- ¿De qué?
E- ¡Hay pues de lo que esté frente al espejo!
D- Justo tienes que buscar en la tarjeta una línea que funcione como espejo, una línea que al doblar la tarjeta sobre ella...
E- ¡Ah! Lo que quieres que busque es el eje de simetría de la tarjeta - Se apuro a decir Elena.
D- Pero en un sentido más amplio del *eje de simetría* entre las partes de una misma figura. El eje de simetría de la tarjeta, o el de una teselación, involucra varias figuras (las teselas) al mismo tiempo.
E- ¿Y entonces?
D- Párate frente a este espejo.

Elena observaba su reflejo en el pizarrón, el cual Dafne había convertido en un espejo. El espejo se encontraba parado muy derechito sobre el piso, sin que nada lo sostuviera.

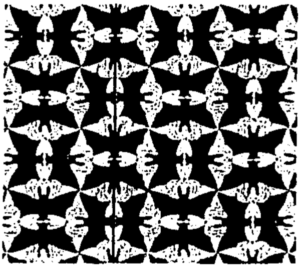
E- Pero... tu no te ves.
D- No, porque las hadas podemos hacer aparecer o desparecer nuestro reflejo.
E- ¡Ah!
D- Elena, ¿Quién está más lejos del espejo, tú o tu reflejo?
E- ¡Ay que pregunta! Yo estoy tan lejos del espejo como mi reflejo.
D- ¿Cómo lo compruebas?
E- ¿Cómo?
D- Imagina que pudieras pasar al otro lado del espejo – De pronto Elena estaba del otro lado del espejo; notó que todo era idéntico, tal y como lo esperaba, y que, además, ahora podía ver cosas que estaban en el lado original y que antes no veía en el reflejo.
E- Hola reflejo.- El reflejo de Elena, ahora junto a Dafne, siguió comportándose como tal. – Hola Dafne.
D- ¿Qué tal se está de aquel lado?
E- No notaría la diferencia, si también hubiera un reflejo tuyo de este lado. Y ahora estoy más convencida de que mi reflejo y yo estamos igual de lejos del espejo.
D- Les tomaré una foto a tu reflejo, al espejo y a ti. – Elena posó para la foto mirando fijamente a su reflejo, y se dio cuenta ya que estaba en su lugar original porque Dafne le habló y estaba junto a ella - ¿Qué te parece la foto?
E- Mala, ni mi reflejo ni yo salimos completas, no veo el espejo y la foto está chueca.
D- ¿Cómo le harías para ubicar al espejo en esta foto "incompleta"?
E- Tendría que doblar la foto de manera que mis pies y mis manos coincidieran totalmente con los de mi reflejo.
D- ¡Exacto!
E- ¿Puedo entonces doblar esta postal como yo quiera?
D- Más bien como convenga. Y mejor toma esta hoja, porque te será más fácil que doblar la postal.

Dafne le entregó a Elena una hoja totalmente cubierta con la teselación "Ángeles y Demonios" Elena, después de mirar unos momentos la hoja, decidió buscar el "espejo", apartada y bajo la sombra de un árbol.



A lo lejos se le veía manipulando la hoja, ya la doblaba por un lado, ya la doblaba por otro; hasta que decidió regresar a donde estaba Dafne, y le dijo:

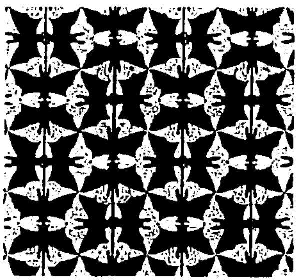
E- Mira, sí doblo aquí, sólo coinciden unos "pedacitos" de la teselación.
D- Es como con la foto. Solamente está una parte del dibujo de uno y otro lado, respecto al espejo.



E- ¡Lo hice bien!
D- Claro, porque la teselación la debes imaginar grande, grande, grande, tan grande que...

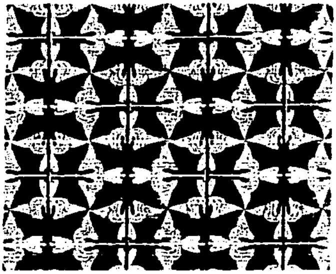
De pronto Elena estaba en un lugar extraño flotando, y vio debajo de sus pies un gran tapete grabado igual a la postal, miró en todas las direcciones y entonces supo como completar la frase de Dafne.

E- No sé puede decir donde empieza y tampoco dónde acaba.
D-Ese "espejo" que encontraste, aunque parezca increíble, hace que coincida toda la teselación consigo misma.
E- Entonces encontré muchos espejos. Porque con estas líneas- Lo que mostró Elena a Dafne tenía el siguiente aspecto.



E- como dices, aunque sea tan sólo un pedazo de teselación del lado derecho del "espejo" coincide con un pedazo del izquierdo.
D- Como ves en una teselación no hay uno sino varios espejos.
P- Pero esos no son todos, encontré... otros, mira.

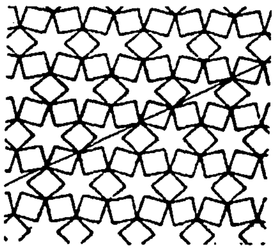
Elena marcó, sobre la misma fotocopia el segundo grupo de espejos.



D- Con razón te tardaste, encontraste todos los espejos de la teselación.
E- Que chistoso ¿No? Unos espejos son horizontales y otros verticales. Por eso forman cuadrados.
D- Muy bien pero... ¡Atención! No siempre pasa así.
E- ¿O sea que los espejos pueden ser... cómo?
D- En está teselación de estrellas y cuadrados- Dafne pasó suavemente su mano por el pizarrón y apareció la reflejo - Encuentra uno de sus espejos que no sea horizontal, ni vertical.

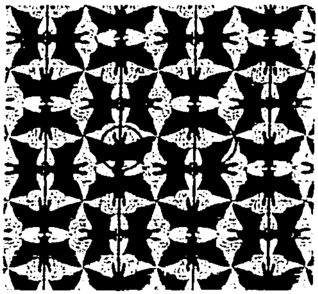
Elena se acercó al pizarrón y después de analizar un momento la imagen trazó una línea que atravesaba el dibujo.

E- Este es un espejo, claramente se ve, que si pudiera doblar sobre la línea una parte de lo de arriba, coincidiría con otra parte de lo de abajo.



D- Ahí hay un espejo ¿Habrá otros?
E- Déjame que lo intente en casa ¿Sí? Porque necesito hacerte unas preguntas que me preocupan.
D- ¿Cuáles?
E- ¿Cuándo voy a iniciar mi decoración y cuándo voy a acabarla?

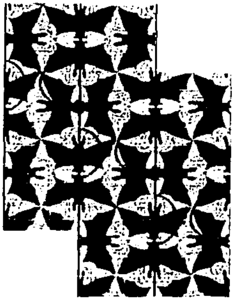
D- Bueno, si diseñas una teselación que tenga "espejos verticales" basta conque identifiques dos espejos para que la parte de la teselación que hay entre ellos, sea estampada en un rollo de papel tapiz, y en una tienda de hadas te lo fabricarán simplemente pidiéndolo como un deseo.
E- ¿Por qué mejor no usas tu magia para decorar toda mi habitación?
D- Porque así no sabe. Cuando hay sudor las cosas se disfrutan más.
E- ¿A poco las hadas sudan? - Dafne comenzó a reír, y conforme se reía el cielo se obscurecía gradualmente, hasta que comenzó a sentirse una brizna.
D- Ése es el sudor de las hadas. - Elena convencida de que tenía que trabajar, preguntó:
E- Pero ¿entre qué espejos elegir para que no se desperdicie mucho papel tapiz?
D- ¿Cómo que entre qué espejos?
E- Fíjate en el "espejo" que pasa por este demonio y en el que pasa por este ángel – Elena marcó un ángel y un demonio en la teselación como se aprecia a continuación.



D- Además de que no hay otro espejo ente ellos ¿En qué quieres que me fije?
E- Si doblo por el espejo que pasa por el demonio, el ángel marcado se empalma con el ángel que está a la izquierda del demonio.
D- De acuerdo.
E- Y si doblo por el espejo que pasa por el ángel, él se empalma consigo mismo.
D- También de acuerdo.
E- Pues creo que si el papal tapiz abarcara la parte de la teselación que queda entre esos espejos, se desperdiciaría mucho papel tapiz.
D- ¿Por qué?

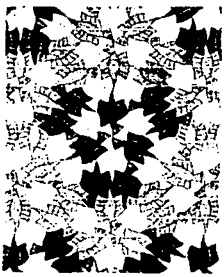
Elena cortó la teselación por los "espejos" donde marcó al demonio y al ángel, cuando terminó tenía varias franjas idénticas, no era de sorprenderse teniendo un hada al lado. Empezó a acomodar las franjas, y encontró, que respecto a una franja, otras dos tenían que ser desplazadas, una hacia arriba (izquierda) y otra hacia abajo (derecha), faltando y sobrando un pedazo por abajo y un pedazo por arriba, para emparejarse con la franja del medio, tal y como había previsto.

El arreglo que hizo Elena tenía el siguiente aspecto.



E- Porque si esto pasa aquí, imagínate cuánto papel tapiz se desperdiciaría al aplicarlo sobre las paredes de mi habitación.
D- Siempre habrá sobrantes de papal tapiz, sobre todo cuando lo colocas en las áreas que están junto a ventanas y puertas. Pero en el mundo de las hadas sabemos cómo reutilizar esos sobrantes y añadírselos a otros rollos que tengan el mismo estampado.
E- Siendo así parece que no hay de qué preocuparse. Y creo que tienes razón, es más divertido "con sudor".
D- Pues por hoy es todo, en estas dos teselaciones, sácales copia en acetatos y busca sus espejos. Hasta mañana – Dijo Dafne mientras se desvanecía en el aire.

Las hojas que Dafne le entrega a Elena tienen impresas las siguientes teselaciones.



E- Sale pues, nos vemos mañana.

Actividades para el lector.
Encuentre todas los espejos de la teselación de cuadrados y estrellas.

PARQUE 6

Dafne desde lo lejos nota a Elena un poco cabizbaja; decide acercarse sigilosamente pero Elena la descubre y sin saludarla le dice.

E- Aquí están los acetatos, nada más que hubo un problema mi papá agujeró este acetato y también la copia. Me acompañó a la papelería para sacar las copias y de regreso se la paso sobreponiendo el acetato en la hoja y dándole vueltas a una y a otra. Al llegar a la casa se fue derechito en busca del costurero, sacó un alfiler y sin más atravesó el acetato y la hoja juntos.

D- ¿Por qué hizo eso?

E- Eso mismo le pregunté. Me mostró cómo, dejando el dibujo fijo y, girando el acetato; el dibujo y el acetato volvían a coincidir aunque no fuera totalmente. Así mira.

A la izquierda se muestra el lugar donde se encajó el alfiler; A la derecha se muestra el acetato girado y encimado sobre el dibujo.

Acetato y dibujo empalmados.

Primer giro del acetato.

D- ¿Para qué necesitó el alfiler?

E- Para que el acetato no se moviera.

D- Pero tú me acabas de decir que giró el acetato ¿Eso no es moverlo?

E- Si no ponía el alfiler antes de girar el acetato todo se movía sin control. Y se necesita que aquí, donde coinciden las patitas de las lagartijas, quede fijo.

D- ¡Elena muy bien! Felicita a tu papá. Ahora sabes que además de espejos las teselaciones tienen giros. Y justamente él se dio cuenta que para hacer un giro se necesita tener un punto fijo.

E- Entonces deja que te cuente que pasó después – En el rostro de Elena se pudo ver el entusiasmo de saber que su papá había actuado adecuadamente - Dejando el alfiler clavado en el mismo lugar, mi papá volvió a girar el acetato. Y aunque, como verás, las lagartijas siguen sin coincidir en el color, una parte del dibujo coincide muy bien con el acetato.

D- Y si giras otra vez ¿Qué pasa?

En el siguiente dibujo a la izquierda se muestra el segundo giro que hizo el papá de Elena, y en el de la derecha se muestra cómo en el tercer giro el acetato y la teselación vuelven a coincidir.

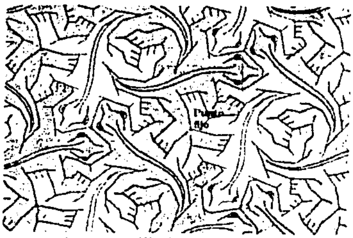
Segundo giro del acetato.

El acetato y el dibujo se empalman nuevamente.

E- ¡Queda todo como al principio! ¡También hay coincidencia en el color! Que chistoso tres giros y el acetato y la teselación vuelven a coincidir.
D- Así es, para dar una vuelta completa, en otras palabras para hacer un giro de 360° y que las cosas queden como estaban, se tuvo que girar tres veces. Pero además esos giros, son iguales, del mismo valor. Entonces, dime querida ¿De cuántos grados fue cada giro?
E- De 360° entre tres, de... 120°.
D- ¡Perfectamente bien contestado! Ahora fíjate en el "cachetito" de esta lagartija – Dafne escribió un "Uno" sobre una lagartija.
E- Tiene que coincidir con el "chachetito" de esta otra – Elena escribió un "Dos" sobre otra lagartija.

En el dibujo están marcadas las lagartijas a las que se refieren Dafne y Elena, "Uno" y "Dos", y el ángulo que hay que girar para que una caiga sobre la otra.

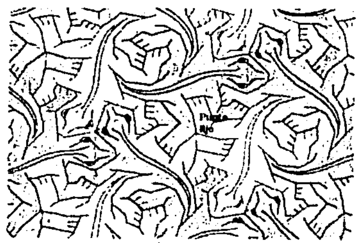
D- Y para que coincidan los "cachetitos" se necesita que el acetato gire...
E- 120°, eso ya lo dijimos.
D-Bien. Ahora dime ¿Podrías colocar el alfiler en otra parte para hacer giros?
E- Pues no sé, tendría que ser como el primero.
D- ¿Cómo tendría que ser?
E- Pues que hubiera las tres mismas cosas de las lagartijas; Por ejemplo donde clavó mi papá el alfiler estaban tres patitas. ¡Ya vi otro que puede servir! Éste, donde están sus tres rodillas.


Acetato y dibujos empalmados.


Primer giro del acetato.

D- Efectivamente ahí hay otro giro.
E- Y es como el anterior, giras tres veces y vuelven a coincidir completamente las lagartijas[25] - A continuación se muestran el segundo y tercer giro del acetato sobre el dibujo.

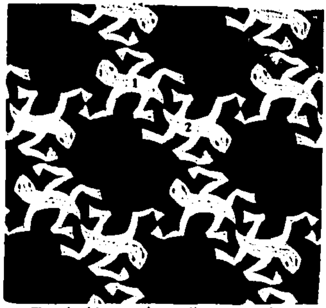

Segundo giro del acetato.


Tercer giro del acetato.
El acetato y el dibujo nuevamente empalmados.

[25] Es decir no solamente en forma sino también en color.

E- ¡A aquí hay otro! Y es como los anteriores – Dijo Elena mientras señalaba un punto donde coincidían tres "cachetitos".
D- Eso parece.
E- Supongo que no siempre haces tres giros y todo vuelve a coincidir.
D- Probemos con otra teselación ¿Te acuerdas de la teselación de ángeles y demonios?
E- Pues claro que si, es con la que trabajamos ayer. ¡Ya sé! Quieres que averigüe cómo son sus giros. Claro, si es que tiene.
D- ¿Por qué lo dices?
E- Porque las teselaciones que me diste ayer, de los bichitos y las lagartijas, no tienen espejos; porque no hay por dónde dobles de manera que una parte del doblez coincida con la otra parte del doblez – Elena se refiere a los dos dibujos que le entregó Dafne en PARQUE 5.
D- ¿Te esforzaste mucho en buscar lo que no había?
E- Más o menos.
D- Bueno, continuemos con los giros. Toma esta otra teselación, el acetato y el alfiler ¿Dónde encajarías el alfiler, para después girar el acetato?


Teselación y acetatos empalmados.

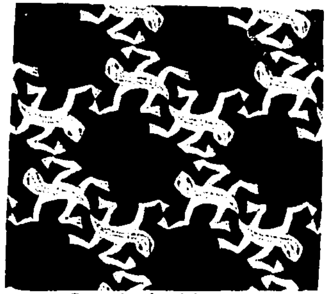


Teselación con lagartijas marcadas.

E- Aquí, donde están los rabos de las lagartijas blancas – Véase en el dibujo de la derecha, las lagartijas a las que se refiere Elena.
D- Marquémoslas con un "1" y un "2". Ahora gira.

Elena realizó un primer giro, e inmediatamente hizo un segundo giro, los cuales se muestran a continuación.

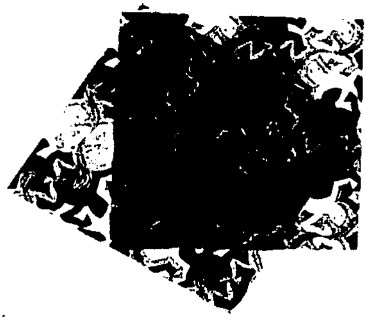

Primer giro del acetato.


Segundo giro del acetato.

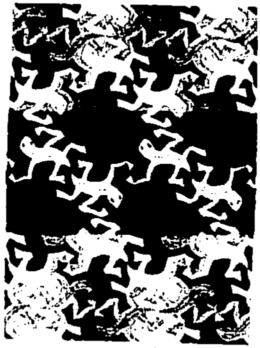
E- ¡Ah! Basta con dos giros para que todo quede como antes.
D- Como fueron necesarios dos giros para hacer una vuelta completa. Podrás decir fácilmente de cuánto es cada giro.
E- De 360° entre dos, de... 180°.
D- ¿Será que en todos los lugares donde puedas encajar el alfiler en esta teselación, basta con dos giros para que las cosas queden como en un principio?
E- Yo creo que... no. Fíjate aquí, si hacemos caso omiso de los colores de las lagartijas, ya que todas lagartijas son iguales, y las numeramos del 1 al 6, giro tantito y la 6 cae sobre la 1, giro un poco más y la seis cae sobre la dos, y así hasta que la seis cae otra vez sobre la seis.

En el dibujo de la derecha está indicado donde va a encajar Elena el alfiler. Los otros dibujos son los giros que realizó para que el acetato y el dibujo se empalmaran nuevamente.


Acetato y teselación empalmados.

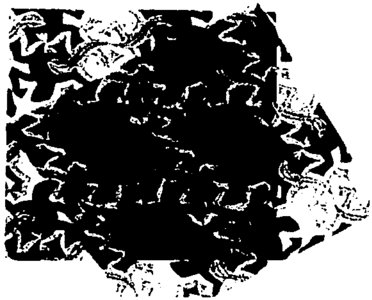

Primer giro.

Segundo giro.



Tercer giro.

Cuarto giro.



Quinto giro.

D- Como has girado 6 veces el acetato para que quede en su lugar original. Se tiene que cada giro fue de...
E- 360° entre 6 rotaciones da 60°, o sea que para ir de una lagartija a otra solamente se tiene que girar 60°.
D- ¿Y para ir de una a otra lagartija blanca?
E- Pues se hacen tres giros de 60°, o un solo giro de 180°.
D- Perfectamente bien contestado.
E- Que teselación tan extraña.
D- ¿Por qué lo dices?
E- Pues porque en la primer teselación todos los giros fueron de 120° y en ésta hay giros de 60° y 180°.

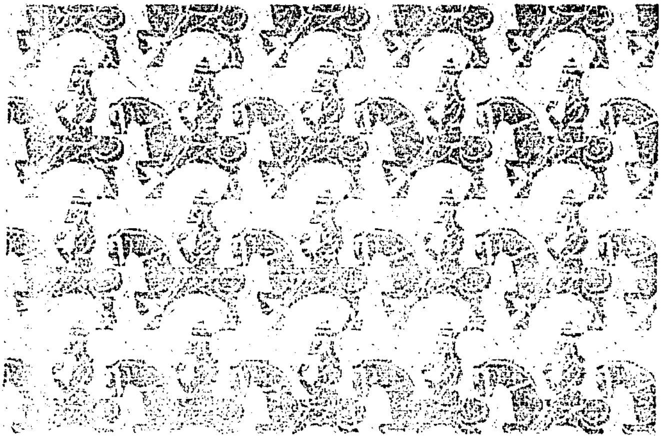
D- Primero, en esta teselación también hay giros de 120°, ¿Qué te parece si pones a tus papás a buscarlas? – Elena, con un movimiento de cabeza, mostró su acuerdo- Segundo, habría que estar seguro de que todos los giros, que se pueden hacer, en la primera teselación son de 120°, ¿Te parece si también lo investigas con la familia? Y tercero, has de saber que, los giros que se pueden hacer tienen que ver con el polígono que se utilizó para hacer la tesela, o sea la lagartija. Pero esto último será contado en otro verano.
E- ¡Ah! ¿Entonces, en la teselación que está hecha de teselas que son triángulos deformados, lo que me mostraste el día que nos conocimos, puedo encontrar giros que tienen relación con el triángulo?
D- Exactamente.
E- Estoy pensando que si yo elijo una teselación, para decorar mi habitación, en la que haya giros el papel tapiz podría venir en... como "rebanadas de pizza".
D- Pues si tu quieres un papel tapiz así, la empresa tapicera del mundo de las hadas te lo podría fabricar.
E- ¿Crees que sería fácil trabajar con un papel tapiz así?
D- Piénsalo y mañana me cuentas.
E- Hasta mañana entonces.

Actividad para el lector:
1. En el dibujo en que el papá de Elena encontró los giros ¿Hay otro punto donde se pueda encajar el alfiler y girar el acetato de manera que se consiga un efecto similar al que Elena le mostró a Dafne?
2. En la segunda teselación que trabajaron, en este parque, Elena y Dafne ¿Hay lugares donde se pueda clavar el alfiler y hacer giros diferentes de 60° y de 180°? ¿Cuáles?

PARQUE 7

Elena y Dafne se encontraban debajo de la sombra de su árbol favorito, se les veía entusiasmadas. Estaban deleitándose con la siguiente teselación y Dafne preguntó a Elena:

D- ¿Qué te parece?



"Jinetes"

E- ¡Ay, caballos! A mí me gustan los caballos. ¡Me encantaría usar teselas de caballos para decorar mi habitación! He montado a caballo pocas veces, una de ellas en el parque de la Marquesa... - Elena no terminó su frase porque mientras, también trataba de descubrir un "espejo" o un giro en la teselación.

D- ¿Qué pasa Elena?

E- ¿Es lo que yo me pregunto?

D- ¿De qué hablas? Digo tal vez si me dices a qué te refieres pueda entender algo.

E- Esta postal que me diste está como que muy rara ¿no?

D- ¿Qué quiere decir que una postal esté rara?

E- ¿La puedo doblar?

D- Adelante.

Elena ya doblaba por aquí ya doblaba por allá. La postal le quedó con muchos dobleces. Y Elena quedó con una expresión en el rostro meditabunda.

D- ¿Qué pasa, querida?

E- Pasa que no le encuentro los "espejos" y, además, ya te la dejé toda maltratada.

D- Por lo maltratada ni te preocupes aquí traigo algunas postales más para que trabajemos hoy. En cuanto a los espejos, así es, algunas teselaciones, como ésta, no tienen.

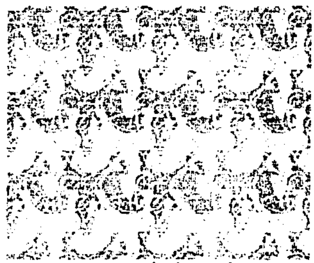
E- ¡Y tampoco tiene rotaciones!

D- ¿Por qué?

E- Bueno si hubiera una rotación de 180° se tendrían caballos y jinetes patas para arriba. ¿Cómo te lo mostraré?... ¿Traerás un acetato de esta teselación?
D- Estas de suerte ¡Eh! – Dafne le entregó a Elena ambas cosas.
E- Así mira...

A la izquierda se muestra la teselación de jinetes y caballos en su posición original y A la derecha el acetato girado 180°.

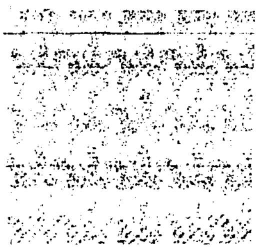
teselación "Jinetes".



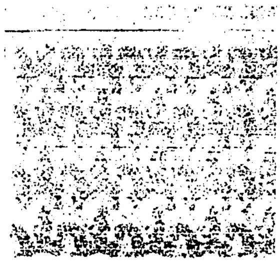
Acetato girado 180°.

E- Y se nota inmediatamente que al empalmar – la teselación de la izquierda y el acetato de la derecha – no hay ningún "pedazo" en que la teselación y el acetato coincidan.
D- ¿Y qué me dices de otros giros?
E- No hay otros giros.
D- Entonces sí que se trata de una "teselación rara", como decías.
E- ¡Ah! Pero tiene un movimiento que también tienen la otras teselaciones. Es un movimiento del cual te he querido preguntar pero siempre se me pasa - Dafne hizo una expresión de sorpresa e interrogación, y preguntó.
D- ¿Sí? ¿Me puedes mostrar cómo es?
E - Primero empalmo el acetato y la hoja. Ahora fíjate que al mover el acetato hacia arriba quedan empalmados caballos y jinetes, gris con gris, blanco con blanco.
D- De acuerdo.
E- Moviendo el acetato hacia abajo vuelven a quedar empalmados teselación y acetato, aunque sea en un pedacito.
D- así es el acetato se puede recorrer hacia arriba y hacia abajo, de manera que se empalme nuevamente con la teselación.
E- También hay empalme del acetato con la teselación, si recorro el acetato hacia adelante o hacia atrás.

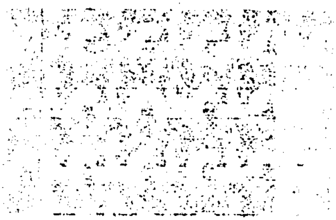
Al momento que Elena hablaba mostraba cada uno de los movimientos del acetato. A continuación se muestran los empalmes que hizo Elena entre el acetato y la postal.



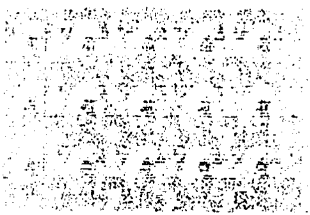
Acetato hacia arriba.



Acetato hacia abajo.

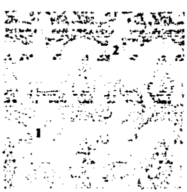


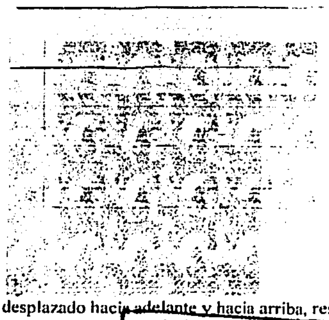
Acetato hacia delante.



Acetato hacia atrás.

D- ¡Muy bien! Ahora fíjate que si deslizas el acetato hacia la derecha y después hacia arriba, esos dos movimientos se pueden hacer en uno solo.
E- Sería deslizar el acetato de manera que el caballo uno – Elena marcó un "1" sobre un caballo del acetato - se encimara en el caballo dos – Elena marcó un "2" sobre un caballo, en el mismo acetato.

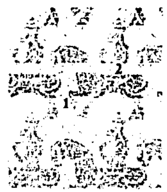




Acetato desplazado hacia adelante y hacia arriba, respecto a la teselación.

D- ¡Ajá! Ahora sabes, que además de espejos y giros, las teselaciones pueden tener desplazamientos.
E- Pero hay algo más misterioso en ésta teselación. – Dijo Elena en voz Baja - ¡Fíjate! Los caballos blancos están, en contraposición a los grises y hasta parecería, de primera impresión, que hay un espejo, que refleja "desviado" y hace coincidir a los caballos blancos con los grises, y viceversa.
D- "Espejo que refleja desviado".
E- ¡Ay! Si yo sé que tú sabes a qué me refiero, pero no me quieres ayudar a resolver este enredo. ¿Cierto o no? Hay una manera de manipular un acetato, como hemos hecho antes, de forma que se empalmen el jinete uno con el dos.

Los jinetes a los que se refiere Elena están marcados a continuación.



D- De hecho sí, y te voy a echar la mano aunque me hayas gritado. Traza una línea que vaya del hombro del jinete uno al hombro del jinete dos.
E- ¿Así?
D- Exacto. Ahora fijémonos en este otro par de jinetes, a este blanco le ponemos "3" y a este gris "4". Trazaré una línea como has hecho tú.

Las marcas que hicieron Elena y Dafne son las siguientes.

D- Dobla la hoja de manera que los extremos de cada una de las líneas coincidan.

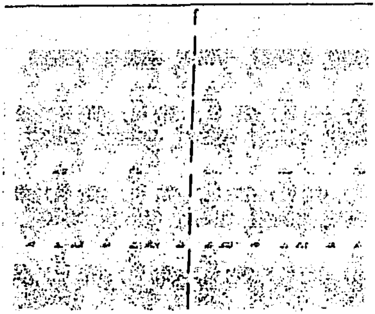
Se le veía batallar a Elena, pues no parecía que fuera posible que con un sólo doblez de la hoja sobre sí misma los extremos de la primer marca coincidieran entre sí, y al mismo tiempo los extremos de la segunda coincidieran entre sí. Entonces Dafne le sugirió que primero se ocupara de los extremos de una marca y después de los de la otra, así Elena pudo terminar.

E- ¿Y ahora?
D- Sobre cada línea va a quedar una marca.
E- Sí justo a la mitad de cada línea.
D- Eso mero. Traza una línea más, que pase por esas dos marcas.

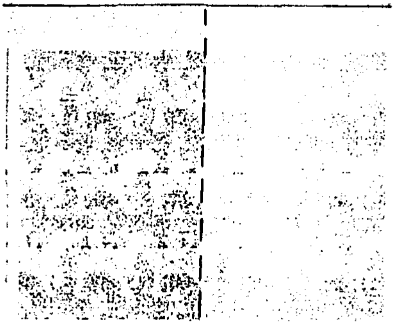
Elena trazó la línea que indicó Dafne, y aunque Elena solamente pensó en empalmar un acetato sobre la hoja, Dafne apareció el acetato sobre la hoja.

Hoja marcada y acetato empalmados tenían el siguiente aspecto.

E- ¿Puedo cortar el acetato?
D- Sí, si es necesario adelante - Dafne hace aparecer unas tijeras en las manos de Elena. - Toma estas tijeras y cuéntame ¿por qué lo quieres cortar?
E- Sobre esta marca cortaré el acetato, –sobre el acetato, Elena marcó, "el espejo raro" que acababa de encontrar, y por la misma lo cortó – quito este pedazo que no me sirve - entonces retiró el pedazo de acetato que quedo del lado derecho de la marca.

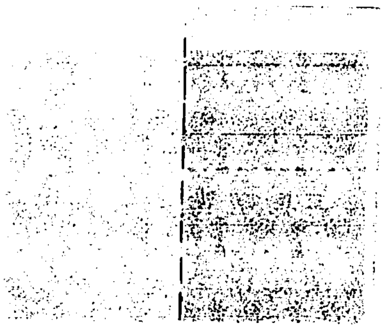


Marca por la que Elena cortó el acetato.

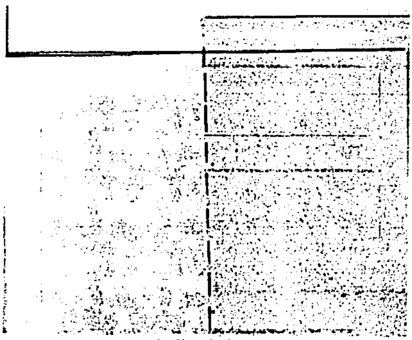


Acetato cortado.

E- Y por último lo paso así – Elena pasó de un lado a otro el pedazo de acetato, como si le diera la vuelta a la hoja de un libro.
D- Parece que no funcionó, pues no se empalman caballos y jinetes.



Acetato "pasado" como se pasa la hoja de libro.



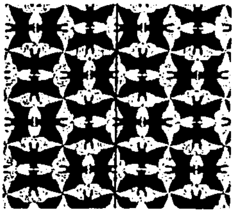
Acetato deslizado hacia arriba.

E- ¡Ah! Es que me falta mover el acetato hacia arriba.
D- ¡Bravo!
E- Ya coinciden caballos y jinetes, aunque sean de diferente color.
D- Elena, ahora sabes que además de espejos, giros y desplazamientos, las teselaciones pueden tener reflexiones-deslizamientos.
E- Esto de reflexiones-deslizamientos no es muy común ¿verdad? No me parece haberlo visto en mis postales.
D- Pues en esta postal- Dafne hizo aparecer la teselación ángeles y demonios en las manos de Elena - ni te imaginas dónde puedes localizar una reflexión-deslizamiento.

Bastaron unos instantes para que Elena exclamara.

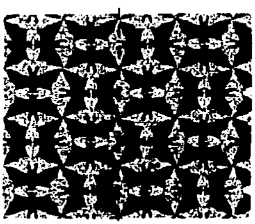
E- ¡Aquí hay un espejo raro!

Elena marcó el espejo al que se refería.

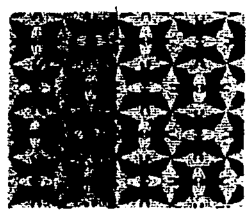


D- ¿Cómo lo compruebas?

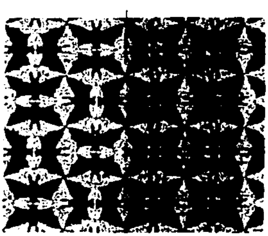
E- Ay pues... empalmo un acetato a esta teselación y le marco el mismo espejo raro – apareció el acetato empalmado y marcado – corto por la marca, retiró este pedazo – Elena retiró la parte del acetato que queda del lado derecho de la marca - hago como si le diera la vuelta a la hoja de un libro- Elena, se refiere a la parte del acetato que queda del lado izquierdo de la marca – Y muevo el acetato hacia arriba. Mira Dafne, ¡hacia abajo también se puede!



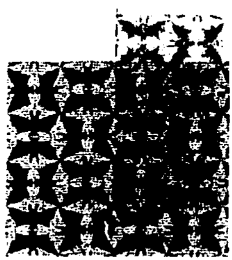
Uno. Teselación y acetato empalmados, con espejo "raro" marcado en ambos.



Dos. Teselación y, mitad izquierda de acetato cortado.



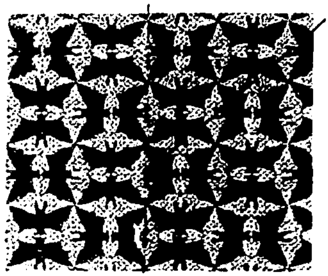
Tres. Pedazo de acetato, pasado de derecha a izquierda como la hoja de un libro.

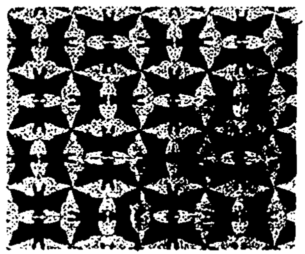


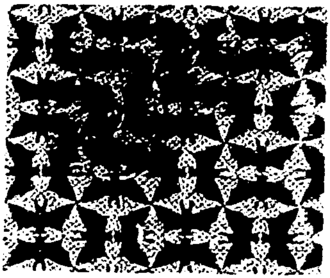
Cuatro. Acetato deslizado hacia arriba respecto a la teselación.

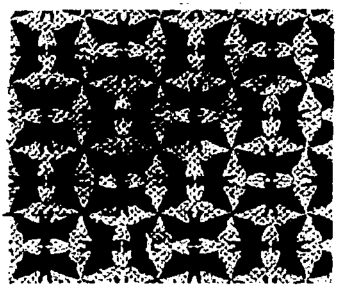
D- Observa aquí Elena - Dafne marcó sobre la teselación otro "espejo raro" -también hay reflexión-deslizamiento.
E- ¿No estarás confundida?, yo no veo nada.
D- ¿Por qué no sigues tu método para comprobarlo?
E- Está bien; lo haré con este pedacito de acetato, para no desperdiciar más acetatos.

Elena repitió el procedimiento que ya había experimentado con los dos espejos "raros" anteriores como se ilustra a continuación.


Uno. Espejo "raro" marcado sobre acetato.


Dos. Parte superior de acetato removida.


Tres. Acetato pasado como una hoja, respecto al espejo "raro" oblicuo.


Cuatro. Acetato desplazado.

E-¿Cómo té quedo el ojo?
D- Lo que me queda claro es que tu método es efectivo.
E- Pues lo que yo tengo claro es que ya quiero trabajar sobre mi diseño de tesela.
D- Empecemos a hablar entonces de diseños.
E- ¿Qué te parece si me invitas un helado y hablamos en el camino? Me lo merezco ¿no?
D- ¿Qué tal si nos tomamos el helado en la Alhambra?
E- ¡Sería fantástico!

Apenas terminó Elena su frase cuando ya se encontraban saboreando su helado por los jardines de la Alhambra. Para este paseo Dafne había tomado su forma de adulto, para no andar espantando gente, como ella decía.

Al despedirse, Elena le recordó a Dafne que al siguiente día sus padres la esperaban a la hora de la comida.

Actividad para el lector.
¿Es verdad lo que dice Elena, que no hay giros en la teselación de "Jinetes", por ejemplo de 60°, de 90° y de 120°?
¿Existe otro movimiento del acetato, que no sea hacia adelante, hacia atrás, hacia arriba o hacia abajo, pero que también haga coincidir la teselación (en la copia) con la del acetato?
¿Hay otros "espejos raros" en la teselación de "Jinetes"?

CASA 5

Los papás de Elena, han preparado un festejo para celebrar el encuentro con Dafne. Para este día, ellos han venido preparando una sorpresa, casi desde el momento en que Elena empezó a pasarse largos ratos con Dafne.

Elena se ha ofrecido a preparar la mesa, sabe que es mejor mantenerse lejos de la cocina, pues el arte culinario en casa lo domina el papá, lo que convierte a la cocina en territorio prohibido para los demás.

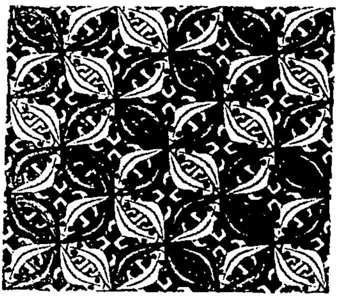
Al sonar el timbre la mamá acude a abrir; al abrir la puerta y ver a Dafne en su forma de hada, se desmaya. Dafne ayuda a Elena a atender a su mamá; cuando la mamá vuelve en sí Dafne ya está en su forma de adulto, entonces Dafne muestra a la mamá una figurilla idéntica a ella, pero con alas, seguidamente le sopla para que la mamá vea que es tan ligera que se puede mantener suspendida, como una pluma. Y se la obsequia, así la mamá queda convencida de que la figurilla fue lo que vio al abrir la puerta.

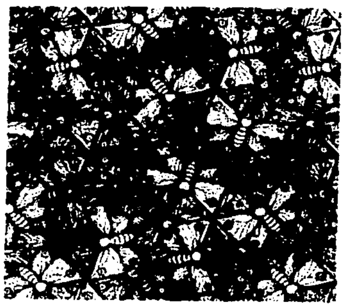
El papá en la cocina no se entera del incidente.

Una vez pasada la alegría y el entusiasmo por haberse encontrado dan paso a la comida y, después, al tema que los ha reunido "la decoración de la habitación de Elena" es en este momento que llega a la mesa la sorpresa preparada por los padres de Elena; ellos estuvieron visitando una y otra librería y así fueron adquiriendo cuanto libro se les atravesó sobre mosaicos artísticos.

La mamá toma la delantera y abre uno de los libros donde se encuentra una de las teselas que más le han gustado.

M- Mira Elena estas lagartijas están hermosas, son de lo que más me ha gustado, aunque he de confesar que estas mariposas de colores me parecen más apropiadas para decorar tu habitación[26].





E- Sí, la teselación de las mariposas a mí también me gusta más. Aunque tal vez con otros colores, para las mariposas; o más bien sin esos círculos como ojos que tienen en las alas; dan escalofríos verlos.

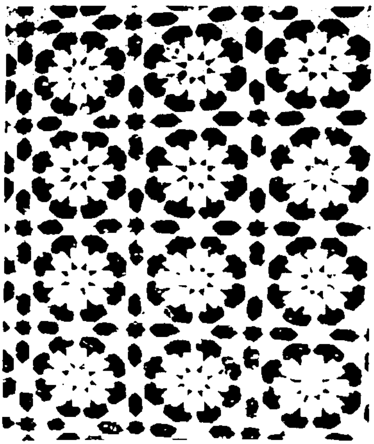
D- Elena, esa es una arma de las mariposas para engañar a sus enemigos.

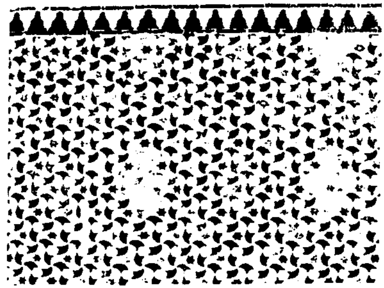
---

[26]Coxeter (1988)

Mientras se discutía la propuesta de la mamá, el papá buscaba en otro libro alguna imagen que les quería mostrar. Al fin la encontró y de la manera más escurridiza se colocó entre Elena y la mamá de modo que ésta tuvo que cerrar su libro.

P- Pero no pueden negar la elegancia de los mosaicos en pisos, paredes y techos en los templos y palacios del mundo islámico. Por ejemplo[27] éstas:





Alcoba lateral del Patio de la Alberca, zócalo norte.

P- ¿No te parece Elena que el arte mudéjar es más elegante y delicado?
M- Considerando que a Elena le gusta tanto la naturaleza podría escoger alguna de las teselaciones de M.C. Escher, que están llenas de motivos de animales o personas, pero sobre todo, de animales. -Intervino la mamá entes de que Elena pudiera contestar.
P- Permíteme insistir amor, pero la decoración en la habitación de Elena luciría como cualquier otra, si utiliza como tesela la imagen de un animal u objeto de la naturaleza; y sin embargo sé que lucirá elegante y única al usar alguna de las teselas que los grandes geómetras de la arquitectura islámica diseñaron. Por ejemplo, ésta. - El papá rápidamente les mostró una imagen en un segundo libro que tenía listo debajo del primero.

[27] Pérez (1995)

Madraza de Qalaun, El Cairo.[28]

E- Papá tienes razón las teselaciones que nos has mostrado son hermosas pero... ¿Crees qué mi habitación lucirá tan única, como dices, si utilizo algo que fue diseñado por otros?
P- Tampoco creo que si utilizas un mosaico escheriano, seas muy original.
E- Pero que tal si es un personaje de fantasía, inventado por mí.
M- En ese caso ¿qué y cómo lo diseñarías?
E- No sé muy bien, tengo algunos personajes en mente. Pero para el cómo...

Inevitablemente todos voltearon a ver a Dafne, quien dijo:

D- Esa es otra "historia" y ya está contada en otro lugar. [29]
E- Pues cuéntame aunque sea un poquito, ni modo que no tenga mi propio diseño.
D- Pero necesitamos papel y lápiz –El papá fue a conseguirlos.

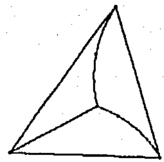
Elena pensó que Dafne se la estaba pasando mal al no poder aparecer lo que necesitaba pero la misma Dafne, de alguna manera, se las ingenió para hacerle saber que no era así.

D- Si tomamos cualquier polígono que sirva de tesela. Lo podemos deformar de diferentes maneras, y seguirá sirviendo como tesela. Les voy a mostrar dos de esas maneras.

La familia estaba muy atenta a lo que Dafne les iba diciendo.

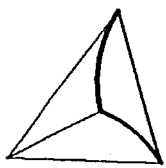
D- Por ejemplo un triángulo.
P- ¿Cualquier triángulo?
D- Si. Por ejemplo en este triángulo, marcamos un punto en su interior. Y desde ese punto trazamos líneas hacia los vértices del triángulo. Así:

[28] Henestrosa (1998)
[29] Acuña (1990)



M- Pero ahí el triángulo aún no está deformado.
D- Para "deformarlo" imaginemos que cada lado del triángulo es un espejo.
P- ¿Entonces estas curvitas se van a reflejar con respecto a este espejo?
D- Sí. Muéstrenos como quedaría el reflejo.

Los trazos de papá quedaron así.



La curva que se va a reflejar está marcada más gruesa que el "espejo" en el que se va a reflejar.

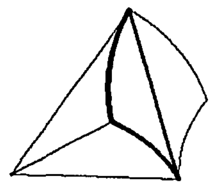
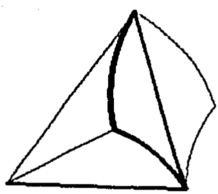


Figura después de que reflejó el papá.

D- Perfecto.
M- Ahora deja que lo intente yo – dijo la mamá mientras jalaba hacia ella el cuaderno. – Para mí, el espejo va a ser este lado del triángulo.



Espejo que eligió la mamá.

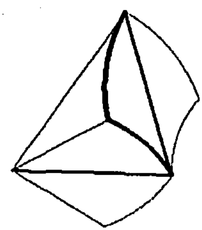


Figura después de que reflejó la mamá.

P- Elena te toca.

Elena tomó el cuaderno, reflejó respecto al lado del triángulo que sobraba, y le pasó el cuaderno a Dafne, quien dijo:

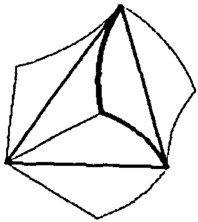


Figura después de que reflejó Elena.

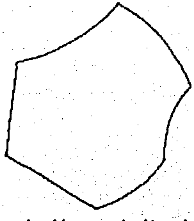
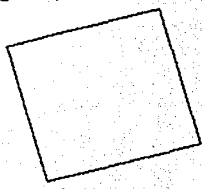


Figura que queda al borrar el triángulo y los trazos de su interior.

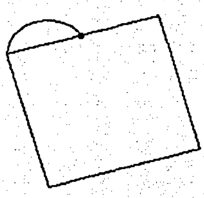
D- Fijémonos nada más... – Dafne borró el triángulo, los trazos que había en su interior y dejó el resto de los trazos, como se muestra arriba a la derecha - en esta figura, ¡tenemos una tesela!
E- Tengo un plan, puesto que ya sé que va a ser mi tesela y creo que este método me va a servir; dejemos esto aquí. Yo me voy a hacer mi tesela y que mis papás averigüen cómo con la tesela que acabamos de hacer se forma un mosaico.
D- Casi estoy de acuerdo contigo. Sé que estas inspirada pero ¿podrías esperar a que te muestre otra manera para diseñar teselas?
E- Está bien.

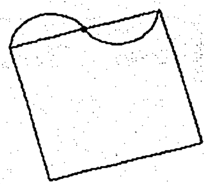
Los papás ni protestaron por la sugerencia que había hecho Elena y que los involucraba, pues también esperaban con curiosidad conocer el segundo método prometido por Dafne.

D- Este método es de "lo que le hace a un lado se lo haces al de enfrente". Por ejemplo en un cuadrado (o cualquier paralelogramo).

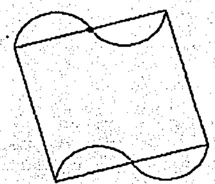


D- Dibujo una curvita en esta mitad, y en la otra mitad, "la dibujo hacia adentro del cuadrado".

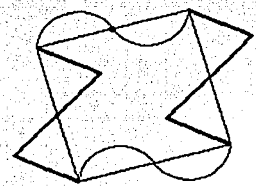




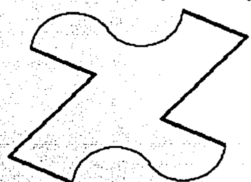
D- Hago lo mismo en el lado opuesto. Así.



D- En los otros dos lados procedemos de manera semejante. Es decir deformamos un lado y el lado opuesto de igual manera. Por ejemplo así:

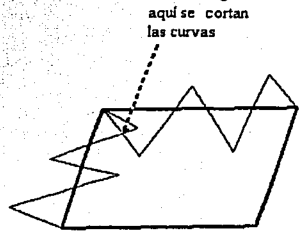


P-¿¡Y con esta figura se puede formar un mosaico!?
D- Si se refiere a esto – Dafne borró el cuadrado dejando lo siguiente – la respuesta es sí.

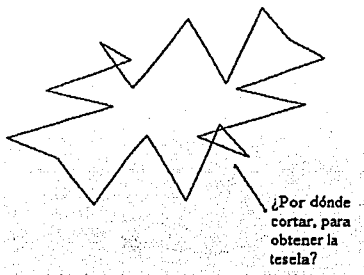


E- Por favor terminemos aquí ya, voy a hacer mi mosaico.
M- Espera Elena quiero saber algo, Dafne ¿es necesario, que las curvas, que se dibujan hacia afuera y hacia adentro de un mismo lado, coincidan en el punto medio del lado?

D- Lo que es necesario es que las curvas que se dibujan en lados contiguos no se crucen. Por ejemplo, con estas deformaciones – Dafne dibujó un paralelogramo y dos curvas sobre lados contiguos que se cortaban, como se muestra enseguida.

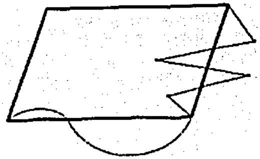


P- Porque las líneas se cortan, la pieza que resulte ¿no serviría para hacer un mosaico? – El papá tomó el cuaderno, deformó los otros dos lados del paralelogramo y borró el paralelogramo, entonces la mamá señaló sobre el cuaderno la misma región que está marcada en el siguiente dibujo, y preguntó...

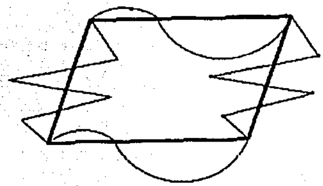


M- Y aquí ¿por cuál orilla cortar?
D- Como ven, trazos como esos generan confusión. Pero, si sobre lados adyacentes hacemos trazos de modo que no se corten unos con otros, por ejemplo...

A continuación se muestran los trazos que hizo Dafne sobre lados adyacentes, sin que se corten los trazos entre sí.

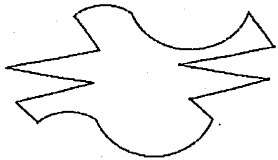


Curvas que no se cortan, trazadas sobre lados adyacentes de un paralelogramo.



Lados opuestos con trazos de curvas idénticos sobre ellos.

M- Ahora sí, no hay confusión por dónde hay que cortar. – dijo la mamá mientras borraba el paralelogramo, y obtenía lo siguiente.



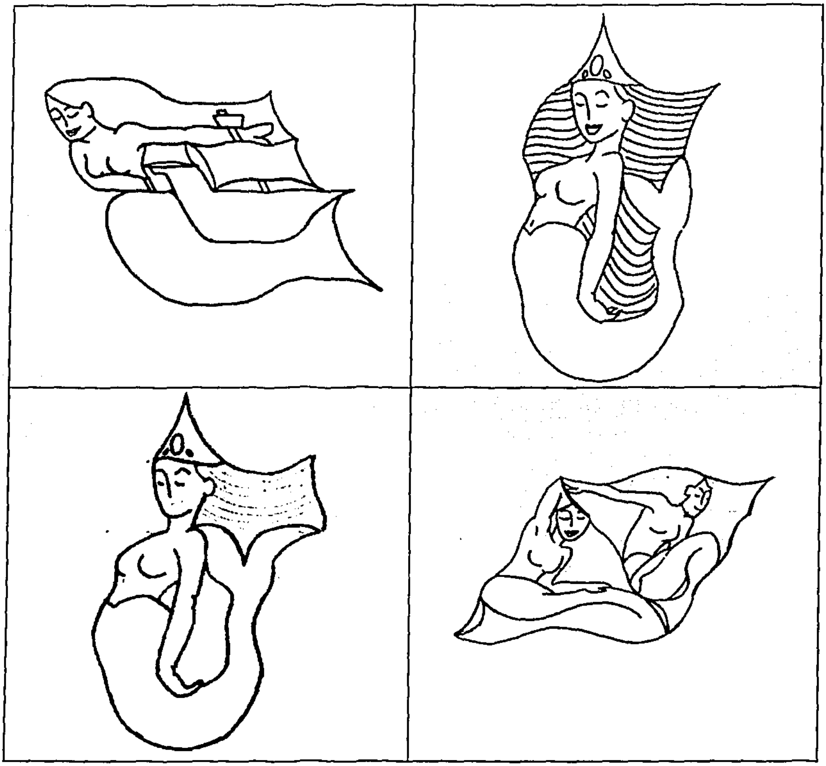
E- ¿Todas sus dudas ya han sido aclaradas?
P- Sí.
M- Sí.
D- ¿Te parece Dafne que nos veamos mañana en el mismo lugar y a la misma hora?

Una vez que Elena y Dafne acordaron su cita, Elena se fue corriendo a su habitación y sus papás despidieron al hada.

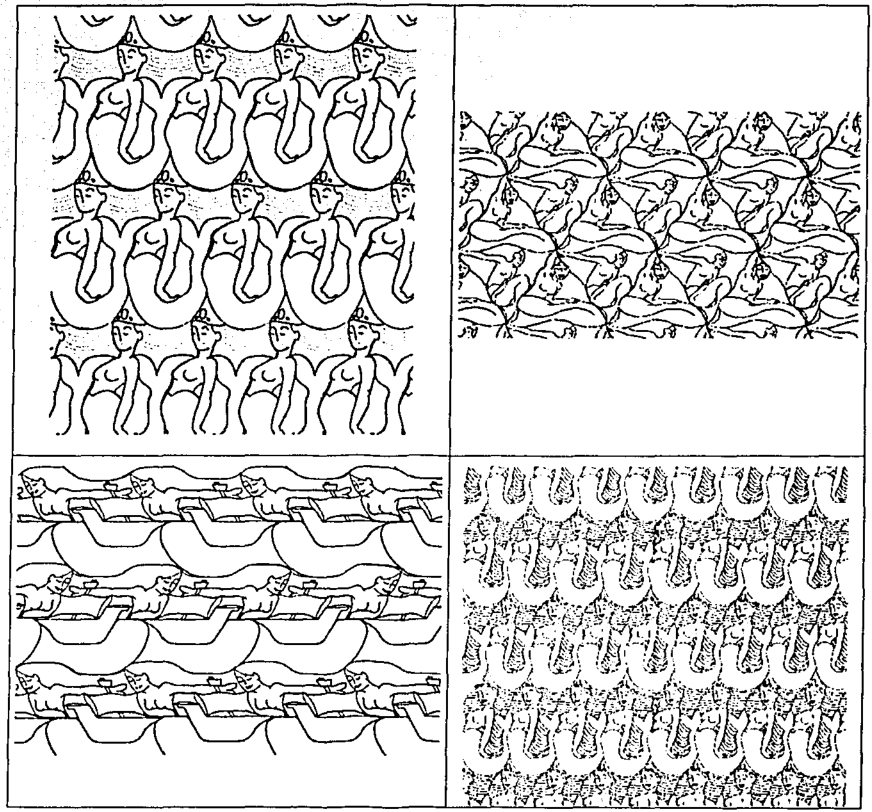
Actividad para el lector.
Construya por lo menos una teselación con las teselas que la familia de Elena ha construido.

PARQUE 8

Elena llegó a la cita de lo más puntual, mientras esperaba a Dafne, que se estaba tardando más de lo usual, decidió sacar sus diseños y hojearlos con calma. Mientras, Dafne estaba suspendida detrás de ella, sin hacer nada de ruido a pesar de que estaba sorprendidísima y maravillada de ver los diseños de Elena, que a continuación se muestran.



En cuanto Dafne notó que Elena se comenzaba a desesperar por la espera, hizo que se desvaneciera el diseño de la hoja y lo sustituyó con una teselación, usando de base el diseño desvanecido. Elena, entendió muy bien que Dafne había estado todo el tiempo ahí detrás, y se dedicó a ver cómo, con sus diseños, se tendría una teselación. A continuación las teselaciones que vio Elena.



LAS MATEMÁTICAS DEL CUENTO

En esta parte, pensada para profesores de nivel medio y medio superior, trataremos algunas cuestiones sobre geometría elemental que han sido mencionados a lo largo del cuento.

Primeramente, definiremos algunos elementos de los polígonos, después, enunciaremos propiedades y teoremas de los polígonos (triángulos y cuadriláteros) que se utilizaron para este trabajo. No todos los teoremas que enunciemos los demostraremos, sin embargo, el lector interesado en las demostraciones que se omiten puede consultar la bibliografía que se proporciona al final.

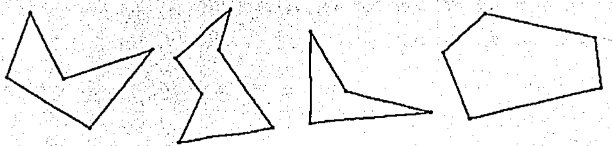
Los primeros teoremas que se enunciarán son sobre triángulos, porque son fundamentales para el estudio de los otros polígonos. Continuaremos con teoremas sobre cuadriláteros convexos.

Después, sobre transformaciones del plano en sí mismo, presentaremos: definiciones, construcciones, y las demostraciones que conservan ángulos y longitudes.

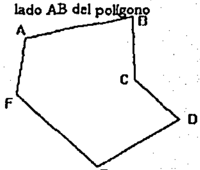
Finalmente presentaremos algunas de las definiciones sobre teselas y teselaciones para poder acotar el término de teselación regular. Y concluiremos con el análisis de una teselación correspondiente a un mosaico de la Alhambra.

POLÍGONOS

"Una curva cerrada simple[1] que consiste en la unión de segmentos se llama *polígono*[2] *simple*[3]" (comúnmente polígono). Ejemplos de polígonos son los siguientes.

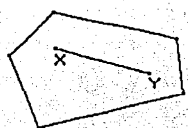


Algunos de los elementos de un polígono se muestran en la siguiente figura.

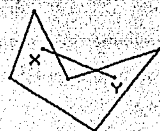


A los segmentos que forman el polígono los llamaremos *lados del polígono*. En la figura de arriba los lados del polígono son AB, BC, CD, DE y EF.

Observemos que al tomar dos puntos X y Y en el interior de un polígono, puede suceder que el segmento rectilíneo XY esté totalmente en su interior, decimos entonces que se trata de un *polígono convexo*; o bien puede suceder que algunos puntos del segmento XY no estén en el interior del polígono, diremos entonces que se trata de un *polígono cóncavo*.



polígono convexo



polígono cóncavo

---

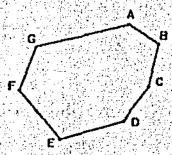
[1] Comienza y termina en el mismo punto sin que ninguno de los segmentos que la forman se corten.

[2] NCTM (1986)

[3] Velasco (1983)

Puesto que a lo largo del cuento solamente se hace referencia a *polígonos convexos* y su relación con las teselaciones, en adelante únicamente nos referiremos a tales polígonos.

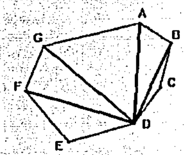
Decimos que dos *vértices son consecutivos* si son los puntos extremos de un mismo lado y son diferentes.



En el polígono anterior, los vértices consecutivos del vértice E son D y F, porque E y D son los extremos del lado DE; y E y F son los extremos del lado EF.

La *diagonal* de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

Las diagonales del polígono, trazadas desde el vértice D son DB, DA, DG y DF.

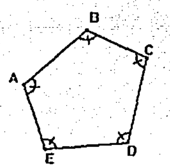


Dos *lados son consecutivos* si comparten un vértice, es decir donde termina un lado comienza el otro.

Por ejemplo el lado EF es consecutivo con el FG porque comparten el vértice F.

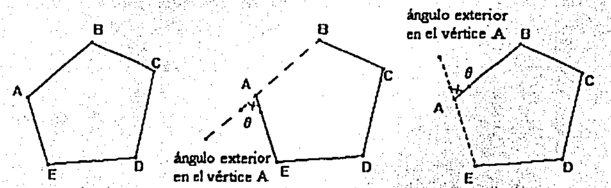
Cada uno de los ángulos determinados en el interior de un polígono por dos lados consecutivos lo llamamos *ángulo interior*.

En el siguiente polígono sus ángulos interiores son $\angle EAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDE$ y $\angle DEA$.

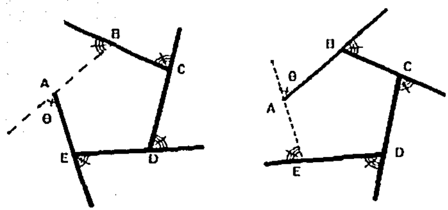


Cada uno de los ángulos interiores de un polígono convexo mide menos de 180°.

Para encontrar los ángulos exteriores de los polígonos convexos, en uno de sus vértices, prolongamos uno de los lados del polígono en ese vértice como se muestra a continuación

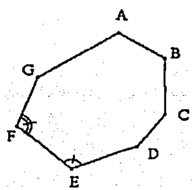


En el ejemplo anterior para encontrar el ángulo exterior en el vértice A no importó si se prolongó el lado AB o el lado EA, pues si prolongamos ambos lados al mismo tiempo encontráremos que esos ángulos son opuestos por el vértice, es decir iguales. Para encontrar los otros ángulos exteriores del polígono hay que prolongar todos los lados en la misma dirección como ilustramos a continuación.



Dos *ángulos son consecutivos* si tienen un lado en común.

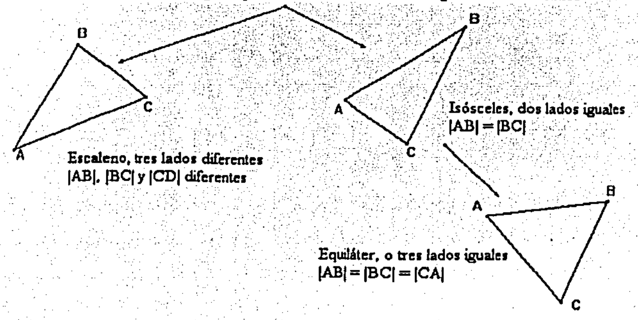
Se puede ver que el ángulo $\angle DEF$ es consecutivo con el $\angle EFG$ porque tienen en común al lado EF.



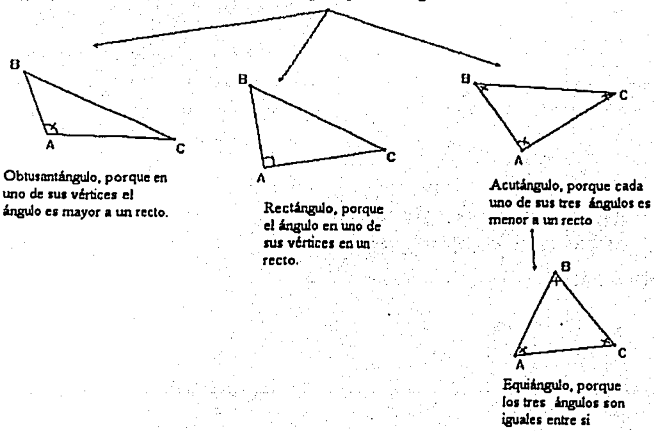
TRIÁNGULOS

Los triángulos podemos clasificarlos por la relación entre las longitudes[4] de sus lados o por la medida de uno, dos o tres de sus ángulos.

Clasificación de triángulos por la relación entre las longitudes de sus lados



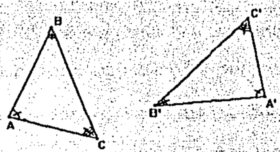
Clasificación de triángulos por sus ángulos



---

[4] Usaremos $|AB|$ para referirnos a la magnitud del segmento AB.

Dos triángulos que tienen sus tres ángulos correspondientes congruentes y sus tres lados correspondientes congruentes se llaman *triángulos congruentes.*



Las partes correspondientes entre triángulos son fáciles de identificar; el contexto da la pauta, ya sea porque están marcadas en un esquema (o dibujo), o porque dentro de un enunciado están especificadas.

En el dibujo anterior, por las marcas en los vértices de los triángulos congruentes y las de los ángulos interiores, podemos suponer que las partes correspondientes son:

Lados correspondientes	**Ángulos correspondientes**
AB con $A'B'$	$\angle CAB$ con $\angle C'A'B'$
BC con $B'C'$	$\angle ABC$ con $\angle A'B'C'$
CA con $C'A'$	$\angle BCA$ con $\angle B'C'A'$

Los teoremas de congruencia para triángulos proporcionan elementos para saber con precisión si, una vez identificadas las partes correspondientes entre dos triángulos, éstos son o no triángulos congruentes, sin tener que utilizar apreciaciones de figuras. Para demostrar dichos teoremas contamos con el axioma de congruencia para triángulos que enuncia Hilbert en *The Fundation of Geometry,*[5]

Axioma (*Congruencia de triángulos*). Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes, respectivamente, a los lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces cada uno de los ángulos restantes del primer triángulo es congruente con cada uno de los ángulos correspondientes del segundo.

[5] Smart (1994)

Teorema. Dos triángulos son congruentes si tienen dos de los lados correspondientes congruentes y el ángulo que subtienden esos lados también congruente.[6]

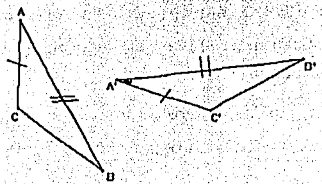
Demostración.

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos, en los cuales por hipótesis

$|CA| = |C'A'|$ porque CA es congruente con $C'A'$

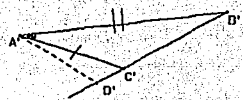
$|AB| = |A'B'|$ porque AB es congruente con $A'B'$

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ porque $\angle CAB$ es congruente con $\angle C'A'B'$



De acuerdo con el axioma de *congruencia de triángulos* $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ y $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$.

Ahora, sólo hace falta demostrar $|BC| = |B'C'|$. Supongamos que $|BC| \neq |B'C'|$, eso querría decir que sobre la semirrecta que inicia en B' y pasa por C' existe un punto D', diferente C', tal que $|BC| = |B'D'|$.



Entonces tenemos que para los triángulos ABC y $A'B'D'$, $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'D'|$ y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, y por el axioma de *congruencia de triángulos* los ángulos opuestos a cada uno de los lados también son congruentes en particular $\sphericalangle CAB = \sphericalangle D'A'B'$ pero por hipótesis $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ entonces $\sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle D'A'B'$ lo cual es imposible. De aquí que la suposición era falsa. Por lo tanto, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes.

Este teorema lo identificaremos con **LAL**.

[6] Se usará el símbolo $\sphericalangle AOB$ para referirnos a la medida del ángulo $\angle AOB$

Teorema. <u>Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos correspondientes congruentes y el lado que comparten esos ángulos también congruente.</u>

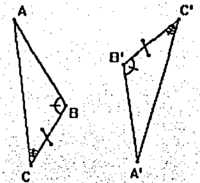
Demostración.

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos en los que por hipótesis

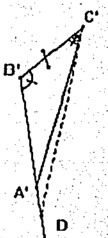
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ porque $\angle ABC$ es congruente con $\angle A'B'C'$

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$ porque $\angle BCA$ es congruente con $\angle B'C'A'$

$|BC| = |B'C'|$ porque BC es congruente con $B'C'$



Demostrando que $|AB| = |A'B'|$ (o que $|CA| = |C'A'|$) podemos concluir, usando el teorema anterior, que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes. Supongamos que $|AB| \neq |A'B'|$, entonces podemos encontrar un punto D, diferente de A', en la semirrecta que inicia en B' y pasa por A', tal que $|AB| = |DB'|$.



Sabemos que $|BC| = |B'C'|$ y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ y como $|AB| = |D$
teorema anterior que los triángulos ABC y $DB'C'$ son congruentes, ento
y sus ángulos correspondiente. En particular $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'D$, pero
aquí que $\sphericalangle B'C'D = \sphericalangle B'C'A'$ lo cual es imposible. De aquí que la sup
tenemos que $|AB| = |A'B'|$ y como $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ y $|BC| = |B'C'|$,
triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes.

Este teorema lo identificaremos con **ALA**.

Antes de demostrar el tercer teorema de congruencia para triángulos enunciaremos otro teorema.

Teorema. <u>Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que dos de sus ángulos adyacentes sean congruentes.</u>

Teorema. <u>Dos triángulos son congruentes si tienen tres lados correspondientes congruentes.</u>

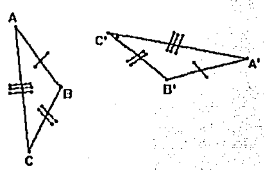
Demostración.

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que:

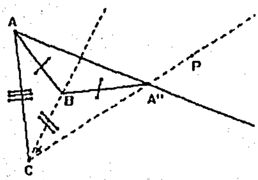
$|AB| = |A'B'|$ porque AB es congruente con $A'B'$ por hipótesis.

$|BC| = |B'C'|$ porque BC es congruente con $B'C'$ por hipótesis.

$|CA| = |C'A'|$ porque CA es congruente con $C'A'$ por hipótesis.



Escojamos cualquier par de lados congruentes, por ejemplo BC y $B'C'$ tales que los vértices C y C' sean opuestos a respectivos lados congruentes. En la región del plano definida por la semirrecta que inicia en C y pasa por B donde no está A podemos trazar una semirrecta que inicia en C y pasa por un punto P, de manera que el ángulo formado por tales semirrectas sea congruente al $\angle B'C'A'$.



Sobre la semirrecta que inicia en C y pasa por P existe un único punto $A"$ tal que $A"C$ es congruente con $C'A'$. Ahora, como $|BC| = |B'C'|$ por hipótesis y, $\angle B'C'A'$ es congruente a $\angle A"CB$ y $C'A'$ es congruente a $A"C$ por el teorema **LAL** los triángulos $A'B'C'$ y $A"BC$ son congruentes. Entonces sus lados y sus ángulos correspondientes también son congruentes, en particular $A''B$ es congruente a $A'B'$, y como $A'B'$ es congruente con AB se tiene que $A''B$ es congruente con AB.

De lo anterior se concluye que los triángulos $A''BA$ y $A''CA$ sean isósceles y por el teorema anterior, aplicado a cada triángulo respectivamente, $\angle AA''B$ es congruente con $\angle BAA''$ y, $\angle AA''C$ es congruente con $\angle CAA''$.

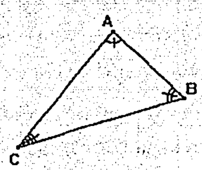
Entonces $\sphericalangle AA''B + \sphericalangle BA''C = \sphericalangle AA''C = \sphericalangle CAA'' = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAA''$ de donde se sigue que $\sphericalangle BA''C = \sphericalangle CAB'$ entonces $\angle BA''C$ es congruente con $\angle CAB'$.

Así tenemos que los triángulos $BA''C$ y BAC son congruentes por el teorema de congruencia para triángulos **LAL.**

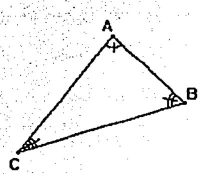
Como los triángulos $A'B'C'$ y $A''BC$ son congruentes y los triángulos $BA''C$ y BAC también son congruentes entonces los triángulos $A'B'C'$ y BAC también son congruentes.

Este teorema lo identificaremos con **LLL.**

Teorema. <u>La suma de los ángulos interiores de un triángulo es dos rectos (180°).</u>



Teorema. *Desigualdad del triángulo.* <u>La suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.</u>



Este teorema nos dice que entre los tres lados de un triángulo necesariamente sucede que:

$$|AB| < |BC| + |CA|$$
$$|BC| < |CA| + |AB|$$
$$|CA| < |AB| + |BC|$$

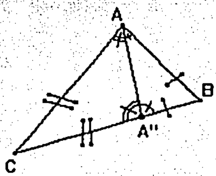
Demostración.

Supongamos que $0 < |AB| \leq |CA| \leq |BC|$ sin perdida de generalidad.

Demostremos una de las tres desigualdades anteriores, por ejemplo que $|BC| < |CA| + |AB|$.

Que la desigualdad no sea cierta querría decir que $|BC| = |CA| + |AB|$ o que $|BC| > |CA| + |AB|$.

Supongamos, primero, que $|BC| = |CA| + |AB|$.



Existe un punto A' en CB tal que AB es congruente con BA' y como $|CA| + |AB| = |BC| = |BA'| + |A'C|$ entonces $A'C$ es congruente con CA.

De lo anterior tenemos que 1) el triángulo ABA' es isósceles y sus ángulos $\angle A'AB$ y $\angle BA'A$ son congruentes, y 2) el triángulo $A'CA$ también es isósceles y sus ángulos $\angle AA'C$ y $\angle CAA'$ son congruentes. Eso quiere decir que:

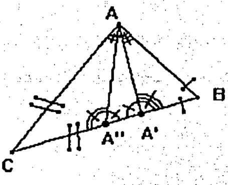
$\sphericalangle BA'A + \sphericalangle AA'C = \sphericalangle A'AB + \sphericalangle CAA'$.

Pero $\sphericalangle BA'A + \sphericalangle AA'C = 180°$ porque B, A' y C son colineales y

$\sphericalangle A'AB + \sphericalangle CAA' = \sphericalangle CAB < 180°$ porque $\angle CAB$ es un ángulo interior del triángulo ABC.

Por lo tanto la suposición $|BC| = |CA| + |AB|$ es falsa.

Supongamos ahora que $|BC| > |CA| + |AB|$. Existen puntos A' y A'' en BC tales que AB es congruente con BA' y $A''C$ es congruente con CA.



A' y A'' no pueden ser los mismos puntos porque caeríamos en el caso anterior.

Tenemos entonces que los triángulos $A''CA$ y ABA' son isósceles, entonces $\sphericalangle AA''C = \sphericalangle CAA''$ y $\sphericalangle A'AB = \sphericalangle BA'A$.

Observemos que $\sphericalangle BA'A + \sphericalangle AA'A'' + \sphericalangle A'A''A + \sphericalangle AA''C = 360°$.

Usando las dos igualdades anteriores $\sphericalangle A'AB + \sphericalangle AA'A'' + \sphericalangle A'A''A + \sphericalangle CAA'' = 360°$.

Como $\angle A'A''A$, $\angle A''AA'$ y $\angle AA'A''$ son los ángulos interiores del triángulo $AA'A''$, entonces $\sphericalangle A'AB + \sphericalangle CAA'' + (180° - \sphericalangle A''AA') = 360°$, de aquí que

$\sphericalangle A'AB + \sphericalangle CAA'' - \sphericalangle A''AA' = 180°$.

Pero $\sphericalangle A'AB + \sphericalangle CAA'' - \sphericalangle A''AA' < \sphericalangle BAC < 180°$ lo cual no tiene sentido.

Por lo tanto $|BC| < |CA| + |AB|$ y la suposición es falsa.

Probemos ahora que $|AB| < |BC| + |CA|$.

Demostración

Como $|AB| < |BC|$, se tiene $|AB| + |CA| < |BC| + |CA|$ porque $0 < |CA|$.

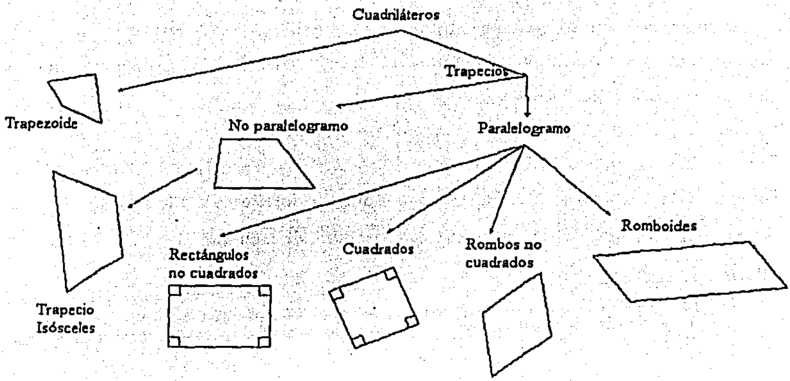
$|AB| < |BC| < |AB| + |CA| < |BC| + |CA|$ porque se acaba de demostrar $|BC| < |CA| + |AB|$.

Por lo tanto $|AB| < |BC| + |CA|$.

De igual manera se prueba que $|CA| < |BC| + |AB|$.

CUADRILÁTEROS

En el siguiente esquema presentamos una clasificación[7] para cuadriláteros, hecha de manera que cada cuadrilátero no cumpla las características de grupos diferentes de cuadriláteros al mismo tiempo.



La definición para cada uno de los cuadriláteros, es la siguiente:

Trapezoide, cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos.

Trapecio, cuadrilátero convexo que tiene (al menos) un par de lados opuestos paralelos.

Trapecio no-paralelogramo, trapecio con exactamente un par de lados opuestos paralelos.

Trapecio Isósceles, trapecio con exactamente un par de lados opuestos paralelos y el otro par de lados iguales.

Paralelogramo, trapecio con los lados opuestos paralelos.

Rectángulos no cuadrados, paralelogramo no equilátero, con sus cuatro ángulos rectos.

---

[7] Tomada de un artículo aún no publicado, escrito por Dr. Otilio B. Mederos Anoceto y el candidato a doctor Aldo M. Ruiz Pérez, el título del artículo es "Aplicación de la operación de conceptos al estudio de los cuadriláteros".

Cuadrado, paralelogramo equilátero con sus cuatro ángulos rectos.

Rombos (no cuadrados), paralelogramo equilátero que ninguno de sus ángulos es recto.

Romboide, paralelogramo no equilátero que ninguno de sus ángulos es recto.

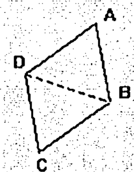
Como esta clasificación para cuadriláteros considera tanto a los lados como a los ángulos del polígono, no se darán dos clasificaciones (una por los lados y otra por los ángulos) como con en el caso de los triángulos.

Ahora presentaremos los teoremas sobre cuadriláteros que fueron referidos a lo largo del cuento.

Teorema. Si en un cuadrilátero los cuatro lados son congruentes, el cuadrilátero es[8] convexo.

Demostración.

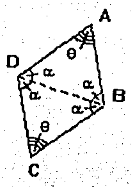
Sea el cuadrilátero de lados congruentes AB, BC, CD y DA.



Tracemos una de sus diagonales, por ejemplo BD, entonces se forman dos triángulos isósceles, el triángulo ABD y el CDB porque por hipótesis $|AD| = |CD|$ y $|AB| = |CB|$ y por identidad $|DB| = |DB|$.

Entonces por el criterio de congruencia LLL los triángulos ABD y el CDB son congruentes y sus ángulos correspondientes también.

[8] Un rombo



Fijémonos en el triángulo ABD, tenemos que $2\alpha + \theta = 180°$ porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

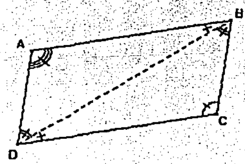
Así que $2\alpha < 180°$ y $\theta < 180°$, porque α y θ son diferentes de cero y cada uno de ellos es necesariamente menor que 180°.

Por lo tanto para cualquier cuadrilátero equilátero sus ángulos interiores son menores a 180°, es decir es convexo.

Teorema. <u>En un paralelogramo pares de ángulos consecutivos son suplementarios.</u>

Demostración.

Sea el paralelogramo $\square ABCD$, entonces los pares de lados opuestos son paralelos.



Veamos cuanto es $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD$.

Observemos que $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC$. Y también observemos que $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDB + \sphericalangle DBC$ porque al trazar la diagonal BD se tiene que $\angle CDB$ y $\angle ABD$ son pares de ángulos alternos internos congruentes ya que AB es paralelo a DC por hipótesis, y DB es una transversal a ambos.

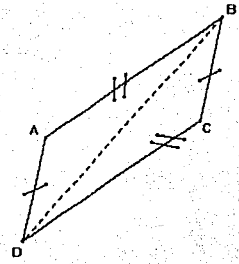
Así que $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDB + \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD = 180°$ por ser estos tres últimos ángulos los ángulos interiores de un triángulo.

Por lo tanto, los ángulos consecutivos de un cuadrilátero paralelogramo son suplementarios.

Teorema. <u>Si en un cuadrilátero los lados opuestos son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.</u>

Demostración.

Sea el cuadrilátero $ABCD$.



Al trazar la diagonal BD, se forman los triángulos ABD y CDB. Afirmamos que son congruentes, porque $|AB| = |CD|$ y $|DA| = |BC|$, en ambos casos la igualdad se cumple por hipótesis. A parte $|BD| = |BD|$ por identidad.

Aplicando el teorema de congruencia para triángulos LLL a los triángulos ABD y CDB, tenemos que son congruentes, eso quiere decir que sus ángulos correspondientes son congruentes, en particular $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$.

Tenemos entonces los segmentos DA y BC son cortados por el segmento BD y con él forman ángulos alternos internos iguales, entonces $\overleftrightarrow{DA} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ porque dos rectas situadas en un mismo plano que forman con una transversal ángulos alternos internos iguales son paralelas.[9] Por lo tanto los segmentos DA y BC son paralelos.

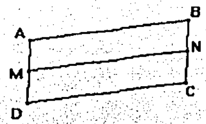
De manera similar se prueba que los segmentos AB y CD son paralelos, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

[9] Wentworth (1983)

Teorema. <u>La línea trazada por los puntos medios de los lados opuestos de un paralelogramo es paralela a los otros dos lados opuestos.</u>

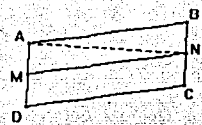
Demostración.

Sea el paralelogramo $ABCD$.



Y sean M y N los puntos medios de los lados DA y BC respectivamente.

Tracemos el segmento de A a N.



Se forman así los triángulos ANM y ANB que afirmamos son congruentes, porque $|AN| = |AN|$ por identidad, $\measuredangle MAN = \measuredangle BNA$ pues son alternos internos por ser BN paralela a AM y AN es transversal a ambas. Además $|MA| = |BN|$ porque M y N son los puntos medios de lados opuestos en un paralelogramo. Entonces, por el criterio de congruencia para triángulos LAL los triángulos ANM y ANB son congruentes.

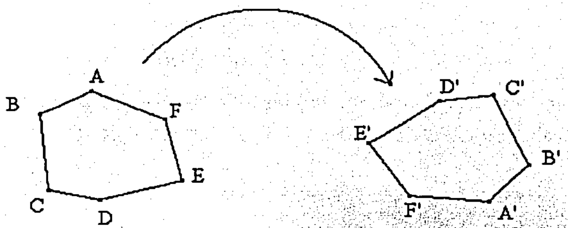
Eso quiere decir que $\measuredangle ANM = \measuredangle BAN$ por ser correspondientes.

Por lo tanto AB **es paralela a** MN ya que son dos rectas cortadas por la transversal AN con la que forman ángulos alternos internos iguales, como AB paralela a DC, por transitividad DC **es paralela a** MN.

ISOMETRÍAS

En esta sección presentaremos las definiciones[10] de las transformaciones isométricas que se mostraron en la parte final del cuento.

Las transformaciones isométricas de un plano S en sí mismo, son *mapeos* (o *transformaciones*), que llevan cada punto P del plano S, en otro punto del mismo plano, éstas se caracterizan porque conservan longitudes y medidas de ángulos; es decir que si a un polígono $ABCDEF$ le aplicamos una transformación isométrica, ésta lo enviará en otro polígono $A'B'C'D'E'F'$ congruente a él.



Supongamos que $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$ son dos polígono congruentes que están en un mismo plano S, para enviar uno en otro, lo podemos hacer mediante una sola transformación, o mediante una sucesión de transformaciones que llamaremos *composición de transformaciones*. El primer momento en que podamos apreciar lo que es una composición de transformaciones será cuando presentemos la transformación deslizamiento-reflexión y el segundo momento será durante el análisis de una teselación, la cual está al final del trabajo.

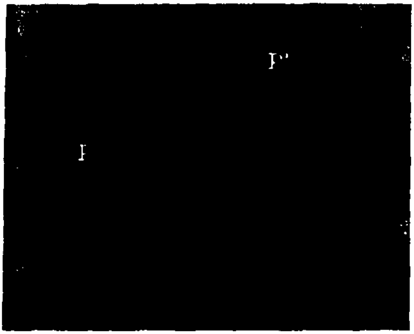
Otra característica importante de las transformaciones, es que envían cada punto A del plano S a un único punto A' del mismo plano S. De manera que si conocemos quien es A', pero no necesariamente A, y también conocemos la transformación que le fue aplicada a A, aplicando la *transformación inversa* a A' encontraremos a A.

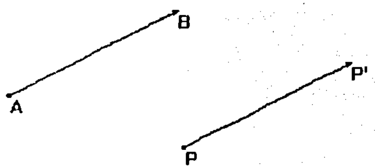
[10] Para tal efecto se consultó Eves (1969).

TRASLACIÓN.

El siguiente dibujo podemos decir que está compuesto de duendes idénticos en forma, a aunque no en color; fijémonos en un par de duendes que sean idénticos tanto en el color gris como en la posición en el dibujo e identifiquemos con P y P' las puntas de sus sombreros, nos fijamos en estos puntos por ser puntos correspondientes.

Vamos a decir que P, es enviado al punto P' mediante la traslación que determina el vector[11] $\overrightarrow{AB}$, si al quitar los dibujos y quedarnos solamente con los puntos P y P' y el vector de traslación $\overrightarrow{AB}$ (derecha), encontramos, por un lado que el cuadrilátero formado por A, B, P' y P es un paralelogramo, lo cual nos diría que AB y PP' son paralelos y de igual magnitud, es decir $|AB| = |PP'|$, y por otro lado, encontramos que el recorrido de P a P' es el mismo que de A a B. De la misma manera, todos los puntos Q del duende de la P, serán llevados a los puntos correspondientes Q', del duende de la P'.





Entendemos por *traslación* $T(\overrightarrow{AB})$ la transformación de S sobre sí mismo que transporta cada punto P del plano al punto P', del mismo plano, tal que $\overrightarrow{PP'}$ sea de la misma magnitud y, del mismo sentido, y paralelo a $\overrightarrow{AB}$. El vector $\overrightarrow{AB}$ se llama *vector* de traslación.

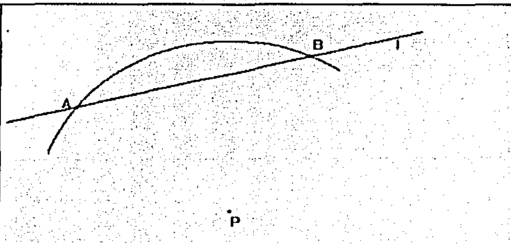
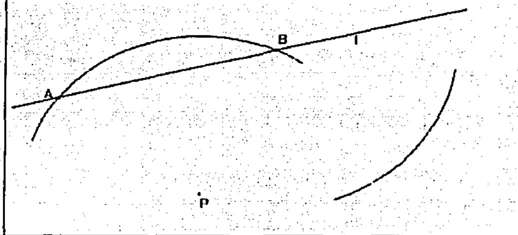
---

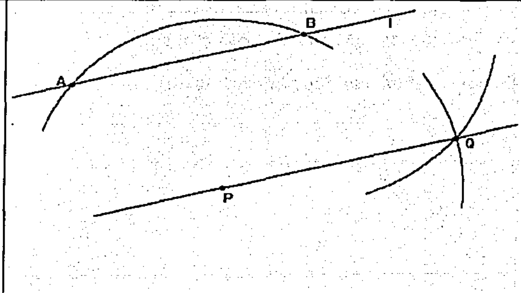
[11] Es decir un segmento que inicia en A y termina en B (sentido), que nos indica hacia dónde (dirección) y cuánto (magnitud) hay que mover un punto P.

Trazos para hacer una traslación, punto a punto.

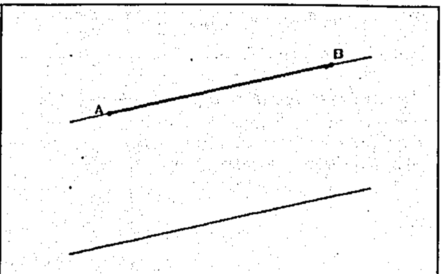
Puesto que para hacer una traslación se necesitan vectores paralelos, iniciaremos con el trazo de rectas paralelas.

Trazar la recta paralela a una recta dada l por un punto P fuera de ella.

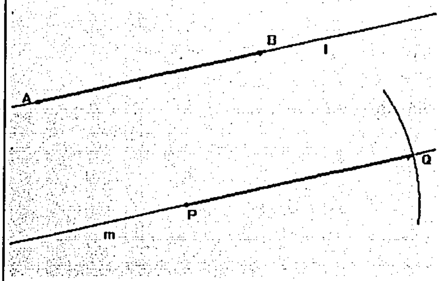
<table>
<tr>
<td>Con centro en P trazar un arco que corte a l en A y B.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Con centro en B y la misma abertura $|PB|$ se traza un arco del lado de l donde está P.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Con centro en P y radio $|AB|$ trazamos un arco que corte al anterior en Q.

La recta que pasa por P y Q es la recta buscada, porque en el cuadrilátero $ABQP$ tenemos que $|PA| = |BQ|$ y $|AB| = |PQ|$ por construcción, que además son pares de lados opuestos entonces tenemos un paralelogramo.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Trazar un segmento paralelo a un segmento AB.

<table>
<tr><td>Trazar una recta m paralela a la recta que pasa por el segmento AB.</td><td></td></tr>
<tr><td>Sobre cualquier punto P de m trazar un arco en la sentido de A a B con radio $|AB|$.

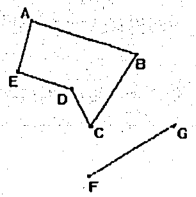
Sea Q el punto de intersección de m con el arco.

El segmento PQ es el segmento buscado.</td><td></td></tr>
</table>

Con estos trazos se lleva el punto P al punto Q, en base al vector $\overrightarrow{AB}$.

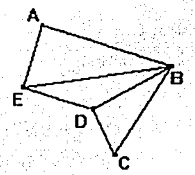
Se cuenta ahora con los elementos para hacer la traslación de un polígono.

Sea un polígono ABCDE, y el vector de traslación $\overrightarrow{FG}$. Hacer la traslación del polígono con respecto al vector.

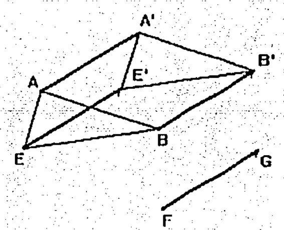


Nos conviene triangular el polígono y mostrar cómo se hace la traslación para el polígono más simple, el triángulo, porque más adelante demostraremos que la traslación, y cada una de las otras transformaciones que establezcamos, es una isometría utilizando los teoremas de congruencia para triángulos.

Una manera de triangular el polígono es, desde B trazar las diagonales, entonces el polígono quedará así:



Traslademos cada uno de los triángulos generados, por ejemplo el EAB.

	1. Se hacen copias del vector $\overrightarrow{FG}$. De manera que cada copia inicie en cada uno de los vértices del triángulo. 2. Se identifican los puntos finales de los vectores que comienzan en E, A y B con las letras E', A', y B' respectivamente. 3. Se unen los puntos E', A' y B'. Y se obtiene así el triángulo $E'A'B'$ que es la traslación del triángulo EAB.

La traslación de los otros triángulos que forman el polígono, se hace de manera semejante.

Para verificar que la traslación es una transformación de un plano S en sí mismo que conserva medidas de segmentos y ángulos, debemos demostrar que los triángulos EAB y $E'A'B'$ son congruentes.

Observemos el cuadrilátero $AA'B'B$, si logramos ver que se trata de un paralelogramo tendríamos que los segmentos AB y $A'B'$ son congruentes.

Teorema. El cuadrilátero $AA'B'B$ es un paralelogramo.

Demostración

$|AA'| = |FG|$

$|BB'| = |FG|$ en ambos casos por construcción.

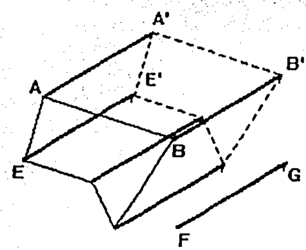
AA' es paralelo a BB', porque AA' y BB' son paralelos a FG.

Por lo tanto $AA'BB'$ es un paralelogramo, porque Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo. De aquí se concluye que AB es paralelo y congruente a $A'B'$.

De la misma manera se puede demostrar que los cuadriláteros $AA'E'E$ y $EE'B'B$ son paralelogramos y entonces: AE es paralelo y congruente a $A'E'$, y EB es paralelo y congruente a $E'B'$. De donde inmediatamente se concluye el siguiente teorema.

Teorema. Si el triángulo $E'A'B'$ es el triángulo trasladado del EAB bajo el vector de traslación $\overline{FG}$, los triángulos son congruentes.

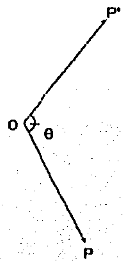
Como los triángulos EAB y $E'A'B'$ son congruentes también lo son sus ángulos correspondientes. Entonces podemos decir que la transformación traslación es isométrica. La traslación del polígono tendría el siguiente aspecto:



ROTACIÓN.

En el siguiente dibujo hemos identificados dos bichos negros, y la punta de la cola de cada uno la hemos identificado con una P y una P', observemos que mediante una traslación no puede ser llevado un bicho en otro, pero veamos como sí mediante una rotación.

Diremos que cada bicho es llevado en el otro si para cada par de puntos correspondientes Q y Q', el ángulo $\angle QOQ'$, donde O es el punto donde coinciden las cabezas de bichos blancos y negros, es de la misma magnitud, tiene el mismo sentido y el mismo vértice que el ángulo $\angle POP'$, y además si la distancia de O a Q es la misma que de O a Q', es decir si $|OQ'| = |OQ|$.

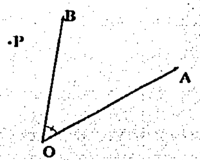


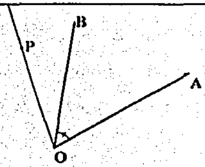
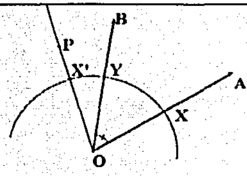
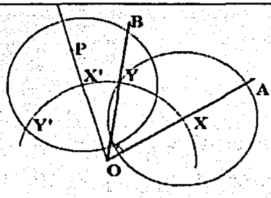
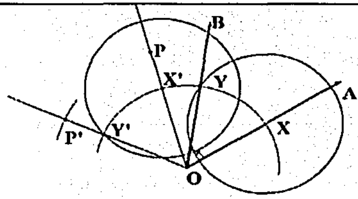
Entendemos por rotación $R(O,\theta)$ la transformación de S sobre sí mismo que lleva cada punto P del plano al punto P' del mismo, tal que $|OP'| = |OP|$ y $\sphericalangle POP' = \theta$, donde O es un punto fijo del plano y θ un determinado ángulo con sentido[12]. El punto O se llama *centro* de la rotación, y θ es el ángulo de la rotación.

[12] Por convención, si el ángulo se generó al girar, uno de sus lados, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, entonces éste es positivo, si no es negativo.

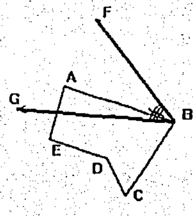
Trazos para hacer una rotación, punto a punto.

Rotar un punto P un ángulo $\sphericalangle AOB$ y centro de rotación el vértice del ángulo.

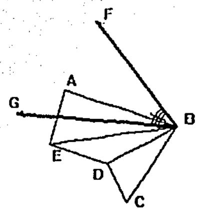


Trazar una semirrecta que inicie O y pase por P.	
Trazar un arco de circunferencia con centro en O que corte a OA, OB y OP en X, Y y X' respectivamente.	
Trazar dos circunferencias de radio $\lvert XY \rvert$ una con centro en X y la otra con centro en X'. Sea Y' el punto de intersección de la segunda circunferencia con el arco.	
Trazar una semirrecta por O que pase por Y'. Por último, trazar un arco con centro en O y radio $\lvert OP \rvert$, de modo que corte a la semirrecta en un punto P'. Los triángulos XOY y $X'OY'$ son congruentes porque por construcción sus lados correspondientes son iguales, entonces los ángulos $\angle AOB = \angle XOY$ y $\angle X'OY'$ son iguales. Y como por construcción $\lvert OP \rvert = \lvert OP' \rvert$. El punto P' es el rotado de P.	

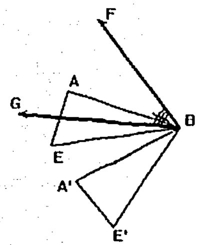
Rotar el polígono $ABCDE$, un ángulo igual a $\sphericalangle FBG$ y centro de rotación el vértice B del polígono.



Aprovechando la triangulación del polígono, hecha para la traslación. Rotemos el triángulo EAB.



Apliquemos los trazos, antes descritos, para la rotación de A y E: sobre B no podemos aplicar la rotación porque es el centro de la rotación. Obtenemos así el triángulo rotado $E'A'B$.



La rotación de los otros triángulos que forman el polígono, se hace de maneara semejante.

Para verificar que la rotación es una transformación de un plano S en sí mismo que conserva medidas de segmentos y ángulos, debemos demostrar que los triángulos EAB y $E'A'B$ son congruentes. Porque si los triángulos ABE y $A'BE'$ son congruentes, también lo son sus lados y ángulos correspondientes.

Teorema. Los triángulos ABE y $A'BE'$ son congruentes.

Demostración.

$|BA| = |BA'|$

$|BE| = |B'E'|$ por construcción de la rotación

Observemos que

$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABA' - \sphericalangle EBA'$

Pero como

$\sphericalangle ABA' = \sphericalangle EBE'$ por ser congruentes $\angle ABA'$ y $\angle EBE'$ al ángulo de rotación

Entonces

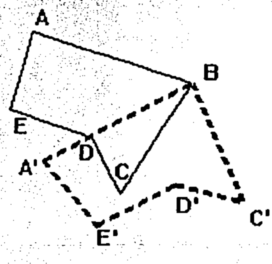
$\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBE' - \sphericalangle EBA'$

$= \sphericalangle A'BE'$

Por lo tanto, por el teorema de congruencia para triángulos **LAL** los triángulos ABE y $A'BE'$ son congruentes.

Como los triángulos ABE y $A'BE'$ son congruentes también lo son sus ángulos correspondientes. Entonces podemos decir que la transformación rotación es isométrica.

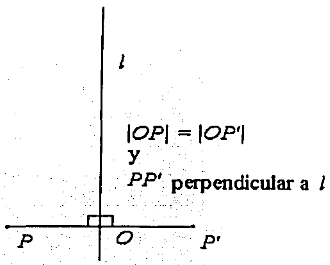
La rotación del polígono tendría el siguiente aspecto

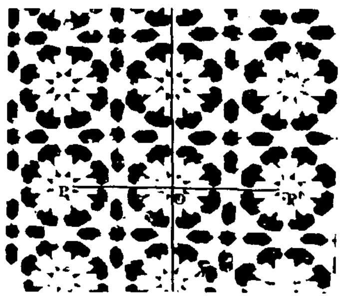


REFLEXIÓN.

Fijémonos en los puntos P y P' marcados en el dibujo siguiente, ellos determinan el segmento PP', tracemos la recta l, perpendicular al segmento por el punto medio del mismo, es decir la mediatríz del segmento PP'. Si para cualquier punto Q de la flor que contiene al punto P, existe un único punto en la flor que contiene al punto P', de manera que la recta l también sea mediatríz del segmento QQ'. Entonces diremos que Q' es el reflejo de Q respecto a l.

En general si Q es cualquier punto del mismo lado donde está P respecto a la recta l, existe un único punto Q', del lado contrario donde está P respecto a l, de manera que la recta l también sea la mediatríz de QQ', diremos entonces que Q' es el reflejo de Q respecto a l.

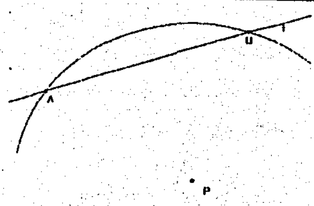
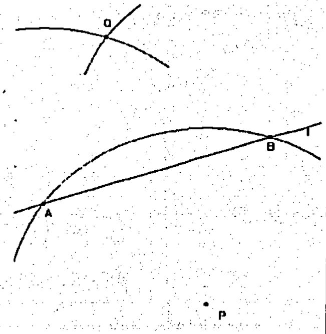
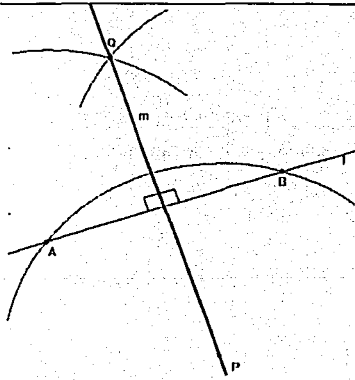




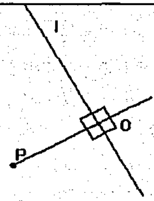
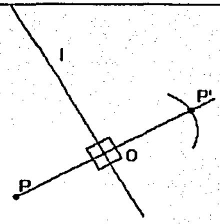
Entendemos por *reflexión R(l) en la recta fija l*, a la transformación de S sobre sí mismo que lleva cada punto P del plano S al P' del mismo plano, de manera que l sea la mediatríz de PP'. La recta l se llama eje de la reflexión.

Trazos para hacer una reflexión, punto a punto.

Trazar la recta perpendicular a una recta dada l por un punto P fuera de ella.

Con centro en P trazamos un arco que corte a l en dos puntos A y B.	
Con centro en A, y luego en B, y con radio $\lvert AP\rvert$ trazar dos arcos, del lado contrario a P respecto a $\overline{AB}$. Sea Q el punto donde se cortan los arcos.	
Trazamos la recta que pasa por P y Q. Observemos que los triángulos BPQ y APQ son congruentes porque por construcción, sus lados correspondientes son iguales, entonces también sus ángulos correspondientes son iguales, en particular $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PQB$. Fijémonos ahora en que el triángulo BPA es isósceles porque por construcción $\lvert AQ\rvert = \lvert QB\rvert$, entonces tenemos que $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle QBA$, de las tres igualdades anteriores tenemos que por el teorema de congruencia para triángulos **ALA**, los triángulos HAQ y BHQ son congruentes, entonces también los son sus ángulos correspondientes, de aquí que $\sphericalangle QHA = \sphericalangle BHQ = 90°$, y $\overleftrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a $\overline{AB}$.	

Hacer la reflexión de un punto P respecto a una recta l.

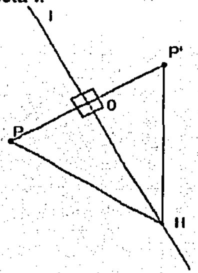
Tracemos una perpendicular a l desde P. Sea O el punto de intersección de l con la recta perpendicular.	
Ahora tracemos un arco de circunferencia con centro en O y radio $\|OP\|$, del lado contrario a donde está P respecto a la recta l, de manera que corte a la recta perpendicular a l en un punto que llamaremos P'. P' es el punto reflejado de P respecto a l.	

Para verificar que la construcción anterior cumple con la definición de reflexión, demostraremos el siguiente teorema, sobre la construcción.

Teorema. <u>La recta l es la mediatriz del segmento PP'</u>

Demostración.

Sea H cualquier punto sobre la recta l.



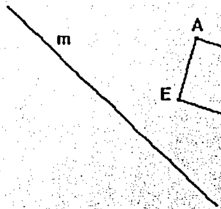
Como $|OP| = |OP'|$ por construcción y $|OH| = |OH|$ por identidad, además los ángulos $\sphericalangle POH = \sphericalangle P'OH = 90°$, porque PP' es perpendicular a l por O, por construcción.

Por lo tanto, por el teorema de congruencia para triángulos **LAL**, los triángulos HOP y HOP' son congruentes. Y también lo son sus lados correspondientes, en particular $|PH| = |HP'|$ y $|PO| = |P'O|$.

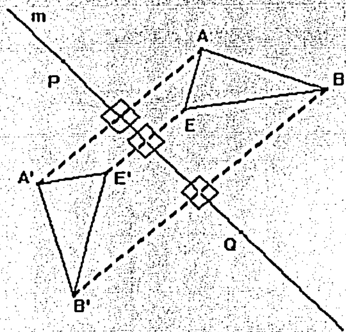
De lo anterior se desprende que siendo H, cualquier punto de l, equidista de P y P' por lo tanto l es la mediatriz de PP'.

Puesto que la construcción anterior cumple con la definición de reflexión, que se dio en un principio, estamos ya en condiciones para hacer la reflexión de un polígono.

Sea un polígono ABCDE, y la recta m. Hacer la reflexión del polígono con respecto a la recta m.



Al igual que en las dos transformaciones anteriores solamente reflejaremos el triángulo EAB. Es decir, hay que encontrar el reflejo de A, E y B respecto a m.

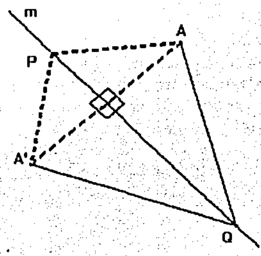


Para verificar que la reflexión es una transformación de un plano S en sí mismo que conserva las propiedades métricas de los polígonos, debemos demostrar que los triángulos EAB y $E'A'B'$ son congruentes. Para lo cual se necesita demostrar antes que los triángulos APQ y $A'PQ$ son congruentes, P y Q son puntos sobre la recta de reflexión.

Teorema. Si A' es el reflejo de A respecto a la recta m, y P y Q son dos puntos de m, entonces los triángulos APQ y $A'PQ$ son congruentes.

Demostración.

Sean A y A' un punto y su reflejo respecto a la recta m, y sean P y Q dos puntos sobre m.



$|PA| = |PA'|$ por estar P sobre la mediatriz de AA'.

$|QA| = |QA'|$ por estar Q sobre la mediatriz de AA'.

$|PQ| = |PQ|$ por identidad.

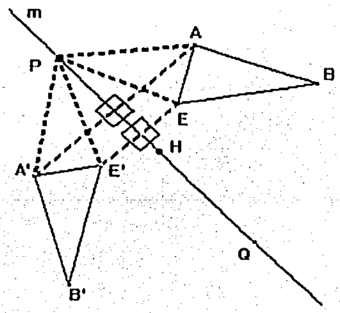
Por lo tanto, los triángulos APQ y $A'PQ$ son congruentes, y entonces los ángulos $\angle APQ$ y $\angle A'PQ$ también son congruentes.

Ahora vamos a demostrar que los segmentos AE y $A'E'$ son congruentes.

Teorema. Si con respecto a la recta m, A' y E' son el reflejo de A y E respectivamente, y P es un punto de m, entonces los triángulos APE y $A'PE'$ son congruentes.

Demostración.

Sea la recta m, y A' y E' el reflejo de A y E respectivamente. Y sean P y H puntos es m



$|PA| = |PA'|$ por estar P sobre la mediatriz de AA'.

$|PE| = |PE'|$ por estar P en la mediatriz de EE'.

$\sphericalangle APH = \sphericalangle A'PH$ se tiene del teorema anterior.

$\sphericalangle EPH = E'PH$ se tiene del teorema anterior.

Entonces $\sphericalangle APH - \sphericalangle EPH = \sphericalangle A'PH - \sphericalangle E'PH$.

De aquí que $\sphericalangle APE = \sphericalangle A'PE'$.

Por lo tanto por el teorema de LAL, los triángulos APE y $A'PE'$ son congruentes y sus lados correspondientes también, en particular AE y $A'E'$.

Por último demostremos el siguiente teorema.

Teorema. Si con respecto a la recta m el triángulo $E'A'B'$ es el reflejo del triángulo EAB entonces los triángulos son congruentes.

Demostración.

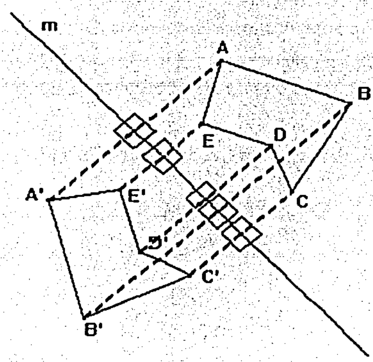
$|EA| = |E'A'|$

$|AB| = |A'B'|$

$|BE| = |B'E'|$ en todos los casos como consecuencia del teorema anterior.

Por lo tanto, por el teorema de congruencia para triángulos **LLL**, los triángulos EAB y $E'A'B'$ son congruentes, y lo mismo sus lados correspondientes.

La reflexión del polígono tendría el siguiente aspecto.

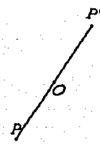


SEMIGIRO.

En el dibujo siguiente, hemos marcado sobre el lomo de una lagartija un punto con una P, y el punto correspondiente de otra lagartija igualita con P', podemos llevar el punto P en el punto P' mediante una rotación de 180°, sin importar si el ángulo es positivo o negativo, el centro de rotación debe ser el punto medio de PP', que como se puede apreciar en el dibujo es el punto marcado con O, donde coinciden los codos de cuatro lagartijas.

Si trazamos los segmentos que unen los puntos correspondientes de las lagartijas, a las que nos referidos, encontraríamos que todos tienen a O como su punto medio.

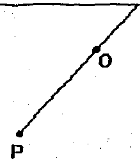
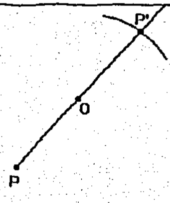
Los trazos para realizar un semigiro, que es una rotación de 180°, son más sencillos que los que hay que hacer para una rotación común, como veremos más adelante.



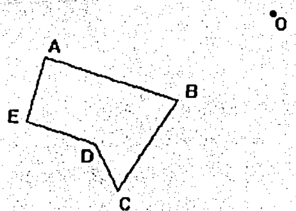
Entendemos por *reflexión (o semigiro) R(O) en el (respecto al) punto fijo O*, del plano S, la transformación de S sobre sí mismo que lleva cada punto P del plano al P' del mismo plano, tal que O sea el punto medio de PP'. O se llama centro de la reflexión.

Trazos para hacer un semigiro (o reflexión respecto a un punto), punto a punto.

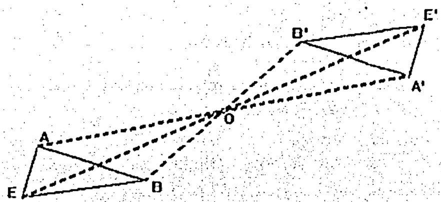
Hacer la reflexión del punto P respecto al punto O.

Trazar una semirrecta que inicie en P en la dirección de O.	
Trazar un arco de circunferencia de radio $\lvert OP\rvert$ con centro en O, del lado contrario donde está P. Sea P' el punto de intersección del arco con la semirrecta. P' es el reflejo de P respecto a O.	

Sean el polígono ABCDE, y el punto O. Hacer el semigiro del polígono con respecto al punto O.



Como se ha venido haciendo se semigirará, respecto al punto O, únicamente el triángulo EAB. De acuerdo a los trazos antes descritos la rotación queda, como se aprecia en la siguiente figura.

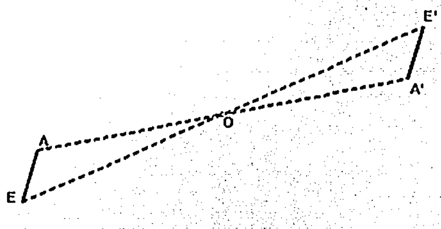


Al demostrar que los lados correspondientes de los triángulos EAO y $E'A'O$ son congruentes, estaríamos en posibilidad de demostrar que dichos triángulos son congruentes por el teorema de congruencia para triángulos LLL. Además, basta con demostrar que un par de lados correspondientes son congruentes, por ejemplo EA y $E'A'$, porque la demostración para la congruencia entre los otros pares de triángulos será igual.

Teorema. <u>Si con respecto al punto O el segmento $E'A'$ es el reflejo del segmento EA, entonces los segmentos EA y $E'A'$ son congruentes.</u>

Demostración.

Sean los segmentos EA y $E'A'$ reflejados respecto al punto O.



Tenemos que

$|AO| = |OA'|$ por definición de reflejo.

$|EO| = |OE'|$ también por definición de reflejo.

Puesto que AA' y EE' se intersecan en O, $\sphericalangle EOA = \sphericalangle E'OA'$ por ser opuestos por el vértice $\angle EOA$ y $\angle E'OA'$.

Por lo tanto, por el teorema de congruencia para triángulos **LAL** los triángulos EAO y $E'A'O$ son congruentes, entonces sus lados correspondientes EA y $E'A'$ también son congruentes, es decir $|EA| = |E'A'|$.

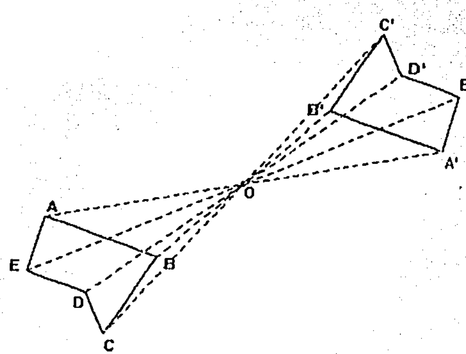
Teorema. <u>Si con respecto al punto O el triángulo $E'A'B'$ es el reflejo del triángulo EAB entonces los triángulos son congruentes.</u>

Demostración.

Sea el punto O, y el triángulo $E'A'B'$ el reflejo del triángulo EAB, respecto a O. Se tiene que $|EA| = |E'A'|$, $|AB| = |B'A'|$ y $|BE| = |B'E'|$ en los tres casos, como consecuencia del teorema anterior.

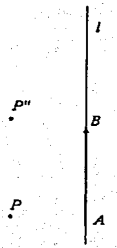
Por lo tanto, por el teorema de congruencia para triángulos LLL, los triángulos EAB y $E'A'B'$ son congruentes.

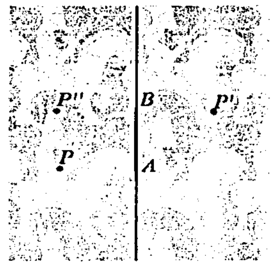
La reflexión del polígono respecto a un punto O tendría el siguiente aspecto.



DESLIZAMIENTO-REFLEXIÓN.

Claramente, en el dibujo de la derecha, cada jinete y su caballo, ya sean de color claro o gris, los podemos llevar en otro jinete y caballo del mismo color mediante una traslación. Pero para llevar un jinete y su caballo de color claro en uno de color gris, o viceversa, es necesario hacer una traslación, porque los jinetes claros y grises están desfasados, pero con la traslación no basta porque cada punto P del jinete claro será llevado a un punto P'' que no es el correspondiente de P, también es necesario hacer una reflexión, para así cambiar el sentido "hacia donde avanza" cada jinete con su caballo.

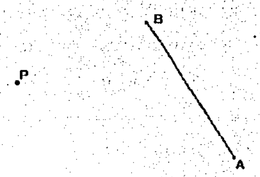




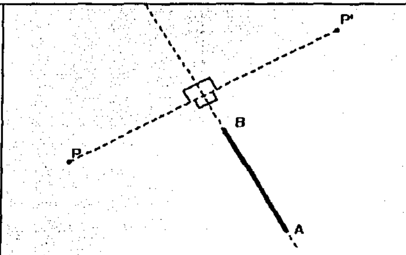
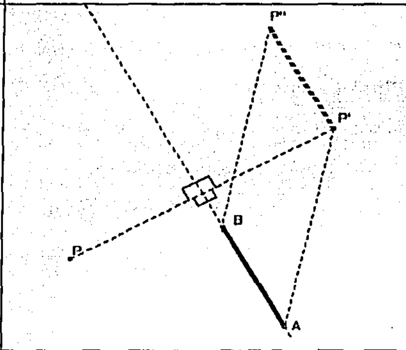
Entendemos por *deslizamiento-reflexión* $G(l,\overrightarrow{AB})$ la transformación de S sobre sí mismo que transporta cada punto P del plano al punto P' del mismo plano, de manera que si P'' es el punto trasladado de P respecto al vector $\overrightarrow{AB}$, P' es el punto reflejado de P'' respecto a una recta fija l, paralela a $\overrightarrow{AB}$. La transformación $G(l,\overrightarrow{AB})$ se puede ver como la composición $R(l)T(\overrightarrow{AB})$ que a cada punto P, de un plano S, le asigna un punto P', del mismo plano, de la manera antes descrita. La recta l se llama eje del deslizamiento-reflexión, y $\overrightarrow{AB}$ *vector* del deslizamiento-reflexión.

Trazos para hacer un deslizamiento-reflexión, punto a punto.

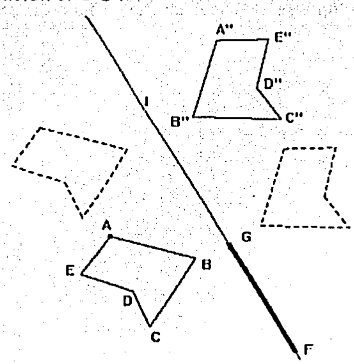
Hacer el deslizamiento-reflexión del punto P respecto al vector $\overrightarrow{AB}$ y la recta l que pasa por A y B.



Como se puede apreciar en la siguiente página, el resultado es el mismo si primero se hace el deslizamiento de un punto P en un plano S y luego la reflexión, o viceversa. Haremos primero la reflexión.

Reflejar el punto P respecto a la recta que pasa por A y B. Sea P' el reflejo de P	
Se traslada el punto P' con el vector $\overrightarrow{AB}$ Sea P'' el punto trasladado de P'. El punto P'' es el deslizamiento-reflexión de P respecto a $\overrightarrow{AB}$ y la recta que pasa por A y B.	

Deslizar-reflejar el polígono $ABCDE$ respecto a la recta que pasa por F y G, y usando como vector de traslación el $\overline{FG}$.



Después de que le aplicamos los trazos antes descritos a cada uno de los vértices del polígono $ABCDE$ obtenemos el polígono $A'B'C'D'E'$.

Únicamente falta demostrar que el deslizamiento-reflejo de un triángulo, es otro triángulo congruente al primero. Y con ello habremos probado que las transformaciones, antes caracterizadas, de un plano S sobre sí mismo, conservan las propiedades métricas de triángulos y por extensión de los polígonos.

Teorema. Si con respecto a un vector $\overline{FG}$ el triángulo $E''A''B''$ es el deslizamiento-reflejo del triángulo EAB entonces los triángulos son congruentes.

Demostración.

Sea el triángulo $E'A'B'$ el trasladado del triángulo EAB, respecto al vector $\overline{FG}$

Entonces los triángulos son congruentes.

Sea el triángulo $E''A''B''$ el reflejo del triángulo $E'A'B'$ respecto a la recta que pasa por F y G.

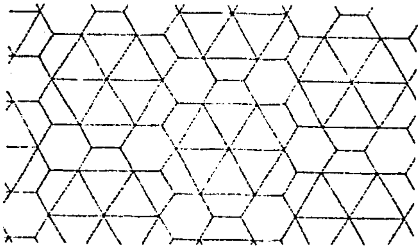
Entonces los triángulos son congruentes.

Por lo tanto, por la transitividad de la congruencia los triángulos EAB y $E''A''B''$ son congruentes.

Con los trazos de cada transformación aplicados sobre algunas figuras planas, podemos crear un mosaico, de estos hay una gran variedad y diversidad, a continuación veremos las características de algunos de ellos.

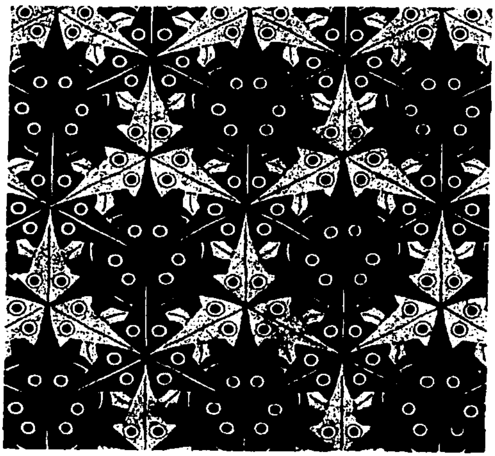
TESELACIONES

Una *teselación* es un ensamblaje de piezas que cubren el plano sin sobre posiciones y sin dejar huecos. A las piezas del ensamblaje se les llama *teselas*.

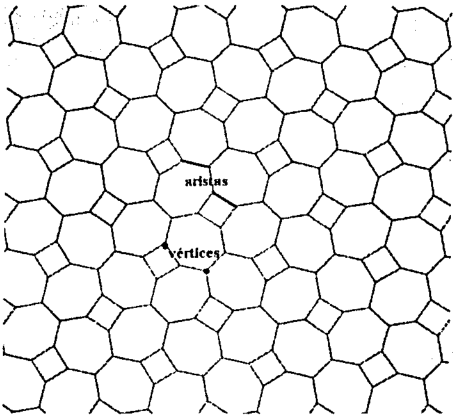


Observemos que la teselación anterior está compuesta por tres teselas diferentes que tienen forma: hexágono, triángulo y trapecio isósceles. Por ello la identificamos como teselación *trihédrica*;

Si una teselación está compuesta por una sola tesela se le llama *monohédria*, y en general, si está compuesta por n teselas diferentes de llama n-hédrica. La teselación siguiente es un ejemplo de monohédrica, aunque la tesela que la forma esté iluminada en diferentes grises.



En una teselación, dadas dos teselas, encontraremos que su intersección puede ser vacía, o puede consistir en un conjunto de puntos de manera que formen una línea o segmento, o puede consistir en un conjunto de puntos aislados. Los puntos aislados los identificaremos como *vértices de la teselación* y los segmentos o líneas como *aristas de la teselación*.



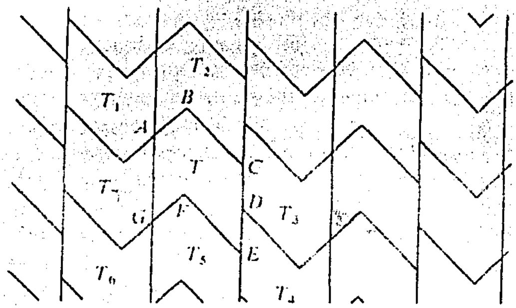
La teselación anterior, es una teselación dihédrica, compuesta por hexágonos equiláteros y cuadrados. En la teselación encontramos dos tipos de aristas, uno tipo de arista es donde se encuentran un hexágono y un cuadrado, y el otro donde se encuentran dos hexágonos. Además encontramos dos tipos de vértices, uno donde se encuentran un cuadrado y dos hexágonos, y otro donde se encuentran tres hexágonos. Los vértices, los aristas y las teselas son los elementos de la teselación.[13]

En la teselación anterior los lados de los polígonos coinciden con las aristas de la teselación, pero esto no necesariamente es así en todas las teselaciones, tampoco necesariamente cada vértice de la teselación coincide con cada vértice de las teselas; como veremos a continuación.[14] Observemos, en la teselación de la página siguiente, que los puntos aislados que resultan de la intersección de la tesela T con las teselas que la

[13] Grünbaum (1987)

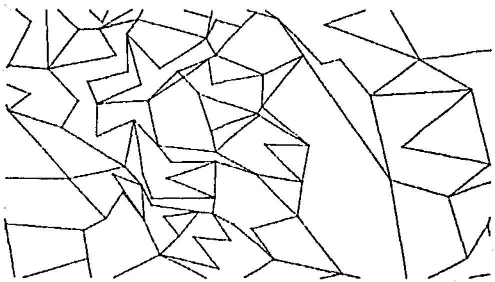
[14] Grünbaum (1987)

rodean son: A, C, D, E y G, éstos son vértices de la teselación; mientras que los vértices de T son A, B, C, E, F y G. Ahora observemos que los segmentos que forman la tesela T son: *AB*, *BC*, *CE*, *EF*, *FG* y *GA*, pero los *aristas de la teselación* alrededor de la tesela T son: *AC*, *CD*, *DE*, *EG* y *GA*.



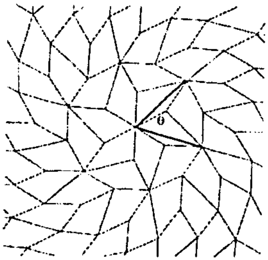
Si a una teselación le podemos aplicar alguna de las transformaciones isométricas entonces diremos que se trata de una *teselación simétrica.* A alguna de las tres teselaciones hasta ahora presentadas se le puede aplicar alguna de las transformaciones ¿cuál?.

En algunas teselaciones como la siguiente:

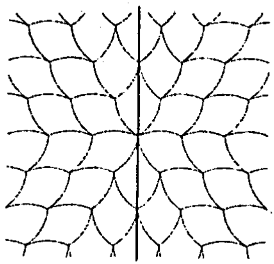


solamente le podemos aplicar la *transformación identidad*, es decir la transformación que envía cada punto, cada arista y cada tesela en ellos mismos. Observemos que en la teselación anterior cada una de sus teselas es un polígono diferente a los otros que la componen. ¿Podría usted hacer una teselación compuesta de una o pocas teselas diferentes pero que solamente admita la transformación identidad?

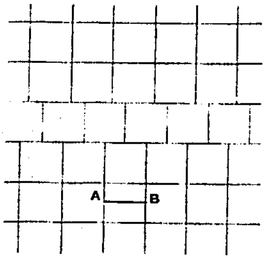
En algunas teselaciones, como las siguientes[15], solamente se puede aplicar una de las transformaciones isométricas.



i



ii



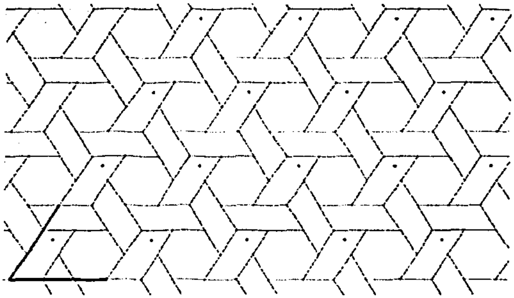
iii

En la teselación **i** solamente se admiten rotaciones con un ángulo θ, en la teselación **ii** solamente se admite una reflexión y una rotación de 120°, y en la teselación **iii** la única isometría que se admite es una traslación.

Si una teselación simétrica admite al menos dos traslaciones no paralelas entonces la teselación será llamada *periódica*; cada teselación periódica tiene asociada una latice. Los puntos de la latice son los vértices de una teselación formada por teselas en forma de paralelogramo, en la cual los vértices de la latice coinciden con los vértices de los

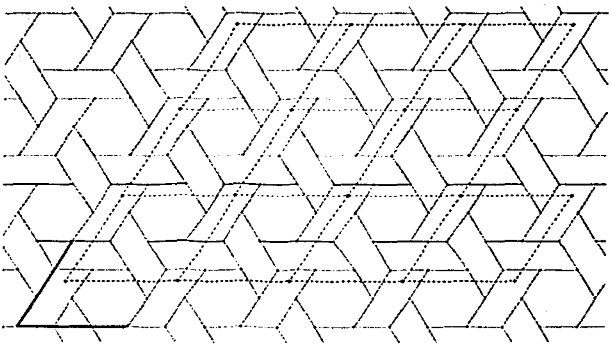
[15] Grünbaum (1987)

paralelogramos y los aristas de la teselación coinciden con los lados de los paralelogramos. Observemos la siguiente teselación[16].



Está formada por hexágonos y paralelogramos congruentes, y algunos paralelogramos están marcados por un punto. Se puede apreciar cómo mediante las dos transformaciones de traslación no paralelas que también están marcadas, se puede llevar cualquier paralelogramo marcado en cualquier otro que también esté marcado dejando a la teselación tal como está.

Para marcar la latice de la teselación anterior uniremos mediante segmentos punteados los puntos que se distinguen dentro de los paralelogramos.



[16] Grünbaum (1987)

Ahora pensemos en una teselación compuesta de polígonos donde se cumplan las siguientes restricciones:

(1) todos los polígonos en son congruentes.

(2) todos los polígonos son regulares.

(3) todos los vértices son congruentes.

Respecto a la condición (1) consideremos solamente aquellas teselaciones simétricas donde con alguna de sus trasformaciones se puede llevar cualquier tesela en cualquier otra, a este tipo de teselaciones se le conoce como *isohédrica*. Podemos observar que cada una de la tres teselaciones de dos páginas atrás está formada por una sola tesela.

Respecto al punto (2) observamos que la teselación **iii** cumple con que todas sus teselas, además de ser congruentes, son polígonos regulares.

En cuanto al punto (3) observemos que en la teselación i hay tres tipos de vértices uno donde coinciden cuatro polígonos, otro donde coinciden tres y otro donde coinciden seis, por ello sus vértices no son congruentes. El punto (3), también se puede entender de la siguiente manera, dada una teselación simétrica, cada punto (o arista) de la teselación puede ser llevado a cualquier otro punto (o arista) de la misma teselación, bajo alguna de las transformaciones que son aplicables en ella, entonces la teselación se conoce como *isogonal* (o *isotoxal*, en el caso de los aristas).

Recordemos que los elementos de una teselación son sus vértices (V), aristas (E) y teselas (T) que simplemente se puede escribir como la terna (V, E, T) llamada también *bandera* de una teselación; si en cada bandera de una teselación se cumplen las tres restricciones anteriores, tenemos una teselación *regular*.

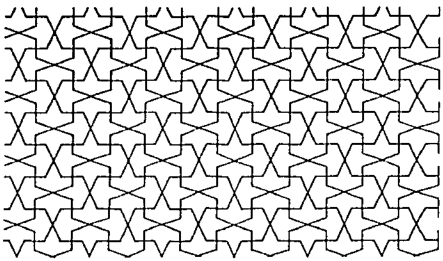
Si en una bandera concurren n aristas y n polígonos congruentes, el ángulo interior de cada uno se esos polígonos será $360°/n$, entonces para tener una teselación regular n solamente puede tomar los valores 3, 4 y 6. Lo cual se demuestra en el siguiente teorema.

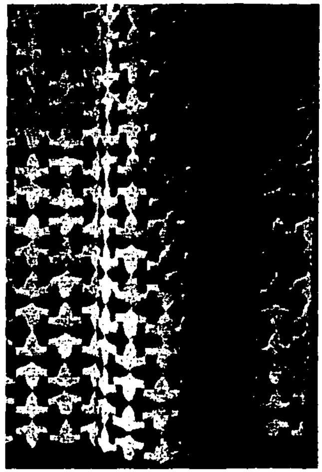
Teorema. Los únicos polígonos que pueden formar una teselación regular son el triángulo, el cuadrado y los hexágono regulares.

Demostración.
Recordemos que *una teselación regular está formada por teselas (polígonos) congruentes (iguales) entre sí.*
Sea X el valor del ángulo interior de un polígono regular
entonces $X \geq 60°$
Y sea n el número de teselas que se deben colocar alrededor de un vértice en una teselación.
Se tiene entonces que $nX = 360°$
luego $n60° \leq nX = 360°$
$n60° \leq 360°$
De esta manera $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ó 6.
Pero n no puede ser 1, 2 o 5 porque no existe un polígono regular cuyo ángulo interior (X)sea 360°, 180° o 72°.
Entonces n solamente puede tomar los valores de 3, 4 o 6, y X los de 120°, 90° y 60°, respectivamente.
Por lo tanto los polígonos regulares con los que se puede hacer una tesela regular son: el triángulo, el cuadrado y el hexágono.

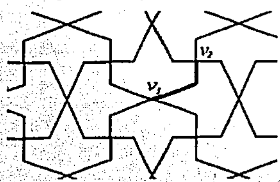
ANÁLISIS DE UNA TESELACIÓN

La siguiente teselación[17] (izquierda) la podemos encontrar como motivo decorativo en la Alhambra (derecha), en el paso de comunicación entre el Mexuar y el pórtico anterior a la sala del Cuarto Dorado.





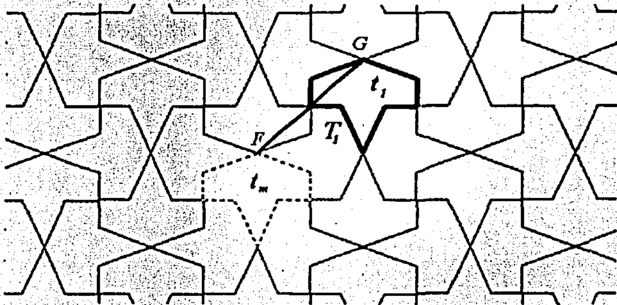
La teselación es monohédrica porque se compone de una sola tesela; en ella encontramos que sus aristas son congruentes, pero no sus vértices.



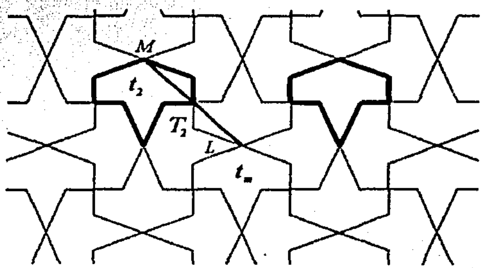
Marcado con línea gruesa, se muestra una de las aristas de la teselación; cada arista se compone de dos segmentos, uno "pequeño" y uno "largo"; en el vértice v_1 concurren cuatro segmentos "largos", mientras que en el vértice v_2 cuatro "pequeños".

[17] Fue hecha en Cabri

Hemos elegido esta teselación para ilustrar todas las trasformaciones que presentamos anteriormente, para ello, tomaremos como referencia una tesela fija t_m y mostraremos a qué tesela t_i es enviada, después de aplicarle alguna transformación. Por ejemplo, para enviar a t_m en t_1

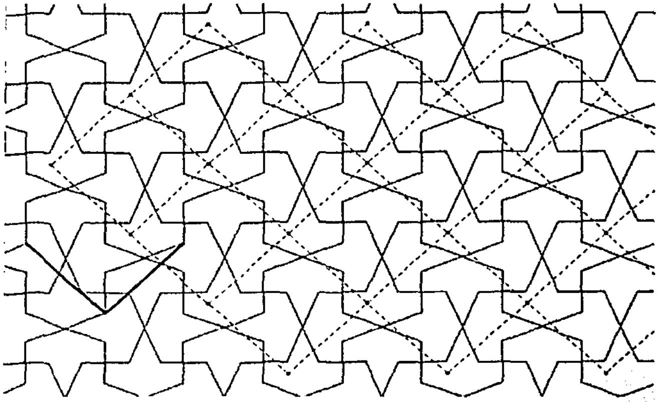


lo hacemos, directamente, mediante la traslación $T_1\left(\overrightarrow{FG}\right)$, cuyo vector de traslación hemos marcado, y que en adelante identificaremos simplemente como T_1. Se puede enviar t_m en t_1 mediante composición de otras transformaciones, ¿cuáles? Para enviar t_m en t_2.



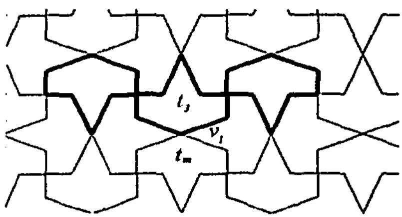
utilizamos una trasformación $T_2\left(\overrightarrow{LM}\right)$ cuyo vector es de la misma magnitud y sentido, pero de diferente dirección, que el usado para T_1, en adelante identificaremos la traslación $T_2\left(\overrightarrow{LM}\right)$ simplemente como T_2. Dado que se admiten las dos traslaciones no paralelas, T_1 y T_2, encontramos que se trata de una teselación periódica.

Marquemos un punto en cualquier parte de una tesela y trasladémoslo, usando T_1 y T_2, hagamos lo mismo con sus puntos trasladados, después unamos con segmentos punteados cada punto con sus trasladados para forma la latice de esta teselación.

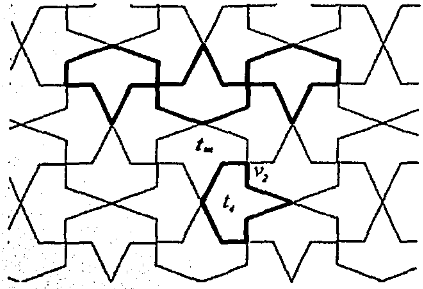


En el dibujo de arriba, hemos marcado los vectores de traslación de T_1 y T_2. Como se puede apreciar los segmentos que unen a los puntos con sus trasladados son paralelos a los vectores de traslación.

Identifiquemos sobre la tesela t_m vértices del tipo v_1 y v_2; primero, veamos que al rotar la tesela t_m en el vértice v_1 un ángulo de 180° es llevada a una tesela t_3.

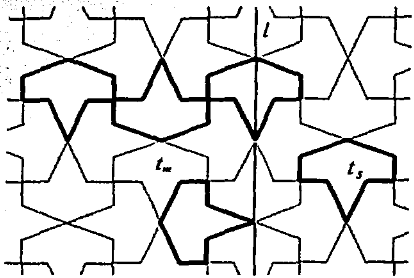


Esta rotación la identificaremos como $R_1(v_1, 180°)$. Y ahora apliquemos una rotación de 90°, en sentido contrario a las manecillas del reloj, en el vértice v_2 a la tesela t_m, como vemos a continuación es enviada a una tesela t_4.



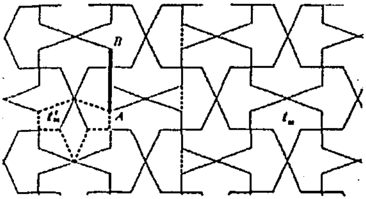
A esta rotación la identificaremos como $R_2(v_2, 90°)$. Observemos que al rotar t_m dos veces en v_1 un ángulo de 180°, y cuatro en v_2 un ángulo de 90°, la tesela vuelve a su posición original, más aún, toda la teselación vuelve a quedar como estaba originalmente.

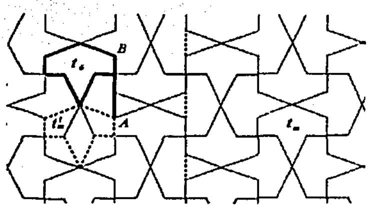
Para enviar t_m en t_5, usando una sola trasformación, usaremos una reflexión.



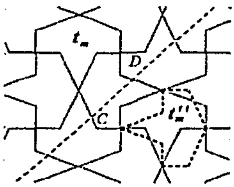
La reflexión la hicimos sobre la recta marcada con una línea continua, esta transformación la identificaremos con $R(l)$. Mediante la sucesión de otras trasformaciones se puede enviar t_m en t_5, ¿cuáles?

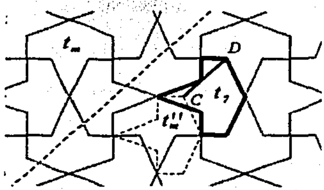
Para hacer notar que cada una de las transformaciones que hemos ido mostrando envía t_m a una t_i diferente a la que la enviaron las transformaciones precedentes, hemos mantenido marcadas las teselas a las cuales ya ha sido enviada t_m, aunque no las mantuvimos identificadas. Sin embargo para mostrar los deslizamiento-reflexión preferimos no mantenerlas marcadas con el fin de buscar claridad en los trazos. Esta teselación cuenta con dos deslizamiento-reflexión diferentes, el más sencillo de ver, es el que envía t_m en t_6.





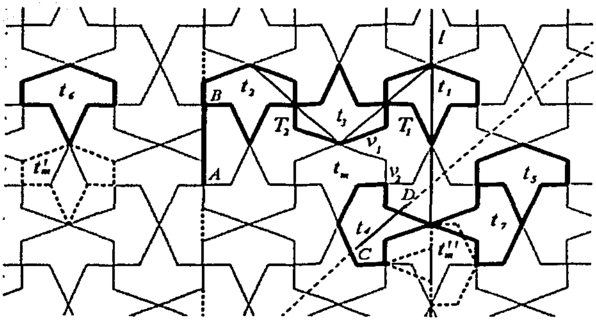
Al reflejar t_m respecto a la línea punteada que pasa por A y B (izquierda), es enviada a t'_m, que no es una tesela de la teselación, entonces es necesario trasladar t'_m, usemos como vector de traslación $\overrightarrow{AB}$, éste la enviará a t_6. A este deslizamiento-reflexión lo identificaremos con $G_1(l,\overrightarrow{AB})$. El otro deslizamiento-reflexión, envía t_m en t_7.



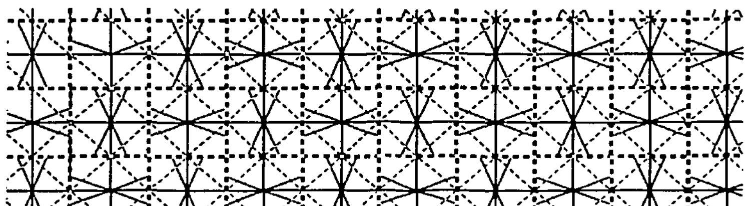


Al reflejar t_m respecto a la línea punteada que pasa por C y D (izquierda), es enviada a t''_m, que no es una tesela de la teselación, entonces es necesario trasladar t''_m, con $\overline{CD}$ como vector será enviada a t_7. A este deslizamiento-reflexión lo identificaremos con $G_2(l,\overline{CD})$.

Cada una de las transformaciones que hemos aplicado sobre la tesela t_m junto con los vectores, los vértices y las rectas que se han utilizado para llevar a acabo éstas, y las teselas t_i a las que fue enviada t_m las mostramos a continuación.



Sobre el pedazo de teselación que mostramos al principio de este análisis, marquemos, con una línea continua, todas las rectas donde se pueda llevar a cabo la reflexión $R(l)$, con líneas punteadas suaves identificaremos las rectas donde se puede llevar a cabo el deslizamiento-reflexión $G_1(l,\overline{AB})$ y, con líneas punteadas gruesas, las rectas donde se puede llevar a cabo el deslizamiento reflexión $G_2(l,\overrightarrow{CD})$, entonces la teselación tomará el siguiente aspecto:



Observemos que:

a) Los puntos de intersección de las líneas continuas también son los vértices del tipo v_1.

b) Los puntos de intersección de las líneas punteadas gruesas son los vértices de la teselación donde se puede llevar a cabo las rotaciones $R_2(v_2, 90°)$.

c) Se han perdido algunos de los lados de las teselas porque han quedado debajo de las rectas donde se puede llevar a cabo el deslizamiento-reflexión $G_1(l, \overrightarrow{AB})$.

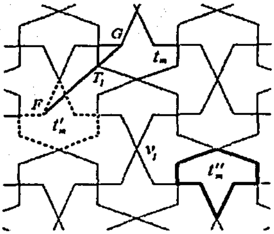
En la segunda parte de este análisis, mostraremos algunos ejemplos de la composición de transformaciones, cada ejemplo consistirá en aplicar primero T_1 sobre una tesela fija t_m y, sobre la tesela t_i resultante, aplicaremos alguna de las otras transformaciones. Para ilustrar los ejemplos mostraremos dos esquemas contiguos, en el de la izquierda encontraremos: primero, de manera explícita las transformaciones aplicadas, un dibujo del aspecto de la composición, y una notación para expresar la composición; en el esquema de la derecha, encontraremos cómo se puede conseguir, el mismo resultado de la izquierda, mediante una o dos transformaciones.

Antes de comenzar, es importante que tengamos presente que: las rotaciones también se pueden llevar acabo en el sentido que avanzan las manecillas del reloj, en los vértices v_2 también se pueden realizar rotaciones de 180° y 270°, y que cualquiera de los vectores de traslación (incluidos los de G_1 y G_2) también los podemos aplicar en el sentido contrario al que se ha ilustrado.

Traslación T_1, seguida de rotación $R_1(v_1, 180°)$

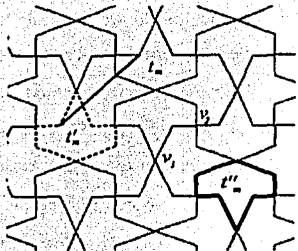
$T_1(t_m) = t'_m$

$R_1(v_1, 180°)t'_m = t''_m$



$\left(R_1(v_1, 180°) \circ T_1\right)t_m = t''_m$

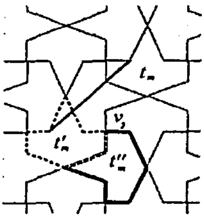
$R_1(v_2, 180°)t_m = t''_m$



Traslación T_1, seguida de rotación $R_2(v_2, 90°)$

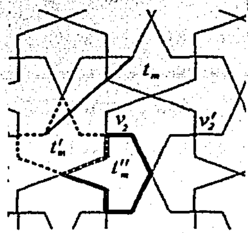
$T_1(t_m) = t'_m$

$R_2(v_2, 90°)t'_m = t''_m$



$\left(R_2(v_2, 90°) \circ T_1\right)t_m = t''_m$

$R_2(v'_2, 90°)t_m = t''_m$

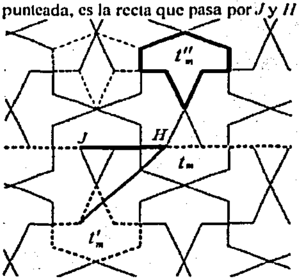


Traslación T_1, seguida del deslizamiento-reflexión $G_1(l,\overline{JH})$.

$T_1(t_m) = t'_m$

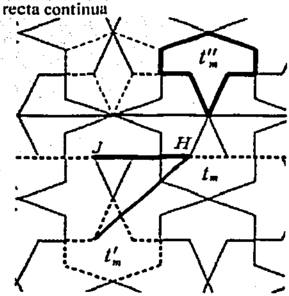
$G_1(l,\overline{JH})t'_m = t''_m$

l, línea punteada, es la recta que pasa por J y H



$R(l)t_m = t''_m$

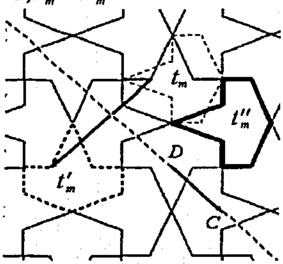
l, es la recta continua



Traslación T_1, seguida del deslizamiento-reflexión $G_2(l,\overline{DC})$.

$T_1(t_m) = t'_m$

$G_2(l,\overline{DC})t'_m = t''_m$

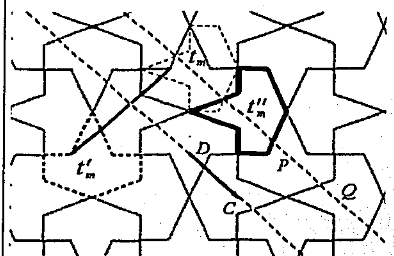


$\left(G_2(l,\overline{DC})\circ T_1\right)t_m = t''_m$

el reflejo de t'_m respecto a la recta punteada, es el marcado con líneas punteadas tenues.

$G_2(l,\overline{DC})t_m = t''_m$

l, línea punteada, es la recta que pasa por P y Q

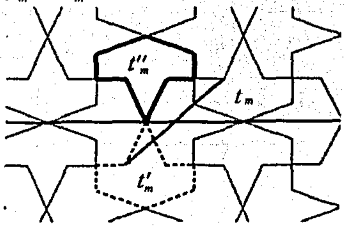


Observemos que el reflejo de t_m con respecto a l es el mismo del esquema de al lado.

Traslación T_1, seguida de la reflexión $R(l)$

$T_1(t_m) = t'_m$

$R(l)t_m' = t''_m$

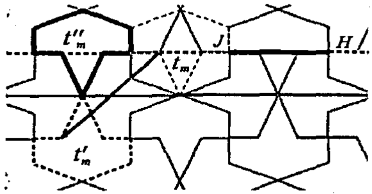


$\left(R(l)\circ T_1\right)t_m = t''_m$

l es la línea que en dibujo parece horizontal.

$G_1(l, \overline{HJ})t_m = t''_m$

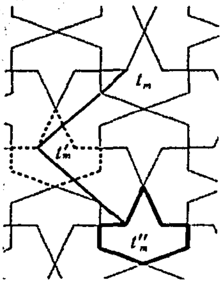
l es la línea que pasa por H y J



Traslación T_1, seguida de la traslación T_2

$T_1(t_m) = t'_m$

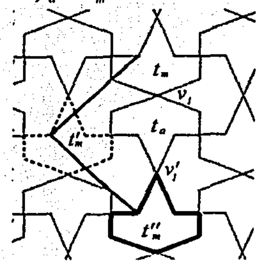
$T_2(t_m') = t''_m$



$(T_2 \circ T_1)t_m = t''_m$

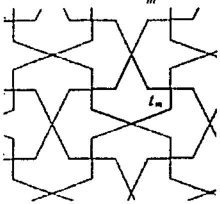
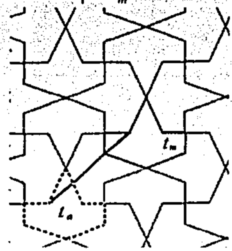
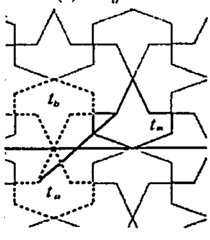
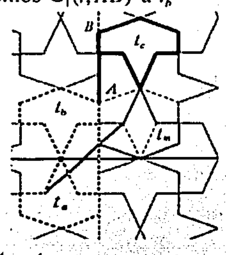
$R_1(v_1, 180°)t_m = t_a$

$R_1(v'_1, 180°)t_a = t''_m$



$\left(R_1(v'_1, 180°)\circ R_1(v_1, 180°)\right)t_m = t''_m$

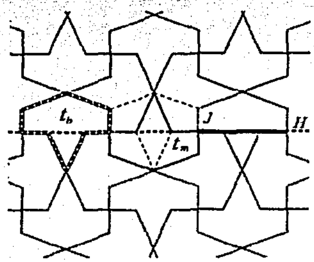
Para terminar esta parte de composición de transformaciones, ilustremos con un ejemplo lo que sucede al aplicar tres transformaciones seguidas a la tesela t_m. Lo haremos con las transformaciones T_1, $R(l)$ y $G_1(l,\overrightarrow{AB})$, la composición de éstas la podemos escribir de la siguiente manera $\left(G_1\left(l,\overrightarrow{AB}\right)\circ R(l)\circ T_1\right)$, a continuación, mostraremos paso a paso el resultado de aplicar sucesivamente las transformaciones.

1) Fijémonos en la tesela t_m 	2) apliquémosle T_1 a t_m  $T_1(t_m)=t_a$
3) apliquemos $R(l)$ a t_a  $R(l)t_a=t_b$	4) apliquemos $G_1(l,\overrightarrow{AB})$ a t_b  $G\left(l,\overrightarrow{AB}\right)t_b=t_c$

Recordemos que habíamos se consigue el mismo resultado al aplicar $\left(R(l)\circ T_1\right)$, que al aplicar $G_1\left(l,\overrightarrow{HJ}\right)$ a t_m, ¿será cierto qué $\left(G_1\left(l,\overrightarrow{AB}\right)\circ G_1\left(l,\overrightarrow{HJ}\right)\right)t_m=t_c$?

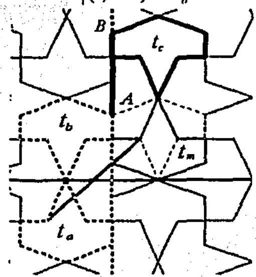
Es importante aclarar que aunque los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{HJ}$ son perpendiculares, las transformaciones $G_1\left(l,\overline{AB}\right)$ y $G_1\left(l,\overline{HJ}\right)$ se consideran del mismo tipo, porque con una rotación R_2 se puede llevar un vector en otro.

1) apliquemos $G_1\left(l,\overrightarrow{HJ}\right)$ a t_m



$G_1\left(l,\overrightarrow{HJ}\right)t_m = t_b$

2) apliquemos $G_1(l,\overrightarrow{AB})$ a t_b



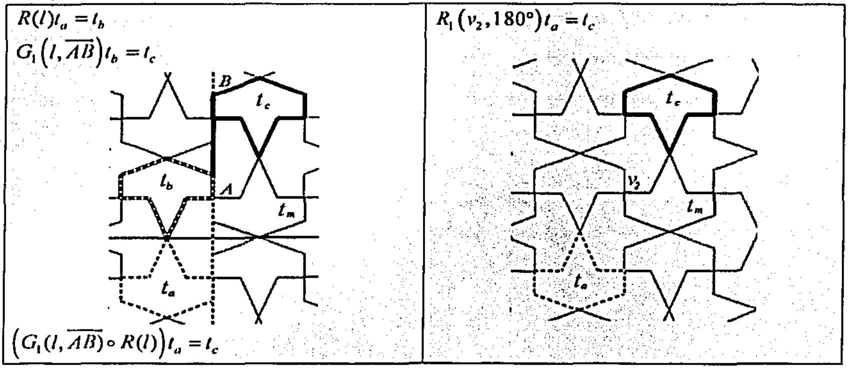
$G\left(l,\overrightarrow{AB}\right)t_b = t_c$

Con lo cual, mostramos que la respuesta es afirmativa; el resultado de esta composición lo podemos rescribir como sigue:

$$\left(G_1\left(l,\overrightarrow{AB}\right)\circ R(l)\circ T_1\right)t_m = \left(G_1\left(l,\overrightarrow{AB}\right)\circ G_1\left(l,\overrightarrow{HJ}\right)\right)t_m = t_c$$

donde $G_1\left(l,\overrightarrow{HJ}\right)t_m = \left(R(l)\circ T_1\right)t_m = t_b$.

Fijémonos, cómo es que, aplicar primero $R(l)$ a t_a y después $G_1(l,\overrightarrow{AB})$ (izquierda), se puede sustituir por una transformación directa (derecha).



Entonces, tenemos que

$$\left(\left(G_1\left(l, \overline{AB}\right) \circ R(l)\right) \circ T_1\right)t_m = \left(R_1\left(v_2, 180\right) \circ T_1\right)t_m = t_c$$

esto es, una vez que se obtiene $T_1\left(t_m\right) = t_a$, simplemente aplicamos $R_1\left(v_2, 180°\right)t_a$ para obtener t_c. Con el ejemplo anterior, hemos mostrado la propiedad transitiva para transformaciones, es decir:

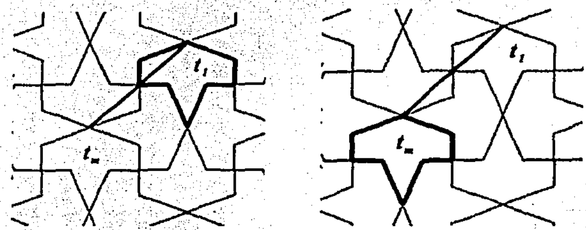
$$\left(\left(G_1 \circ R(l)\right) \circ T_1\right)t_m = \left(G_1 \circ \left(R(l) \circ T_1\right)\right)t_m = t_c$$

Las dos siguientes propiedades, que se cumplen para las transformaciones, tienen que ver con la identidad. Diremos en que consiste la primera, y la segunda la ilustraremos contres ejemplos: uno sobre traslación, otro sobre rotación y el último, un deslizamiento-reflexión.

Aplicar la transformación identidad I a la tesela t_m no es notorio por que cada punto es enviado así mismo; tampoco es notorio cuando aplicamos I, después de haber aplicado cualquiera otra trasformación a t_m, y viceversa; está propiedad del las transformaciones la podemos escribir de la siguiente manera $I \circ T = T \circ I$.

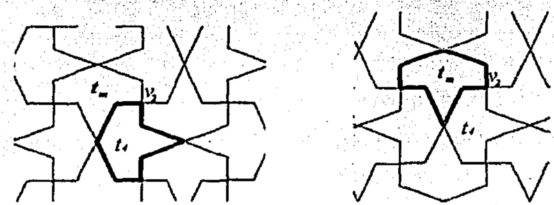
Ahora veamos cómo las transformaciones que hemos ilustrado al principio de esta sección, "aplicadas al revés" sobre la correspondiente t_i, la envían de vuelta a la t_m.

Sabemos que T_1 envía t_m a t_1 (izquierda), ahora bien si al vector de traslación que se uso para T_1 le cambiamos el sentido y se lo aplicamos t_1, tendremos una transformación que enviará a t_1 de regreso a t_m, a ésta la identificaremos como T_1^{-1}.



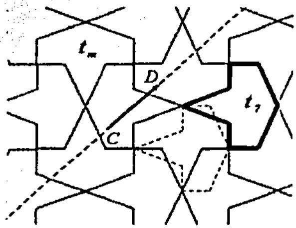
Observemos que conseguimos el mismo resultado al aplicar la composición $T_1^{-1} \circ T_1$ que la composición $T_1 \circ T_1^{-1}$, pues ambas dejan a t_m tal y como estaba, y tal resultado corresponde a simplemente aplicar la transformación identidad a t_m, lo cual escribiremos como $T_1^{-1} \circ T_1 = T_1 \circ T_1^{-1} = I$.

¿Qué pasa al rotar en "sentido contrario"? Recordemos que la transformación $R_2(v_2, 90°)$ envía a t_m en t_4, rotando en un vértice del tipo v_2 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj (izquierda), ahora bien si rotamos en el mismo vértice la tesela t_4, con un ángulo den 90° en el sentido de las manecillas del reloj (derecha) tendremos una transformación tendremos una transformación que enviará a t_4 de regreso a t_m, a ésta la identificaremos como R_2^{-1}.

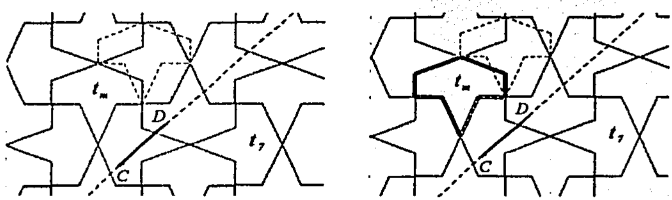


Al igual que en las traslaciones, conseguimos el mismo resultado al aplicar la composición $R_2^{-1} \circ R_2$ que la composición $R_2 \circ R_2^{-1}$, o simplemente la transformación identidad, a la tesela t_m. Tal resultado lo escribiremos como $R_2^{-1} \circ R_2 = R_2 \circ R_2^{-1} = I$.

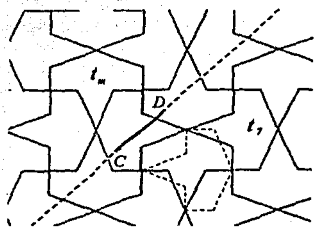
Como habíamos visto la trasformación $G_2\left(l,\overline{CD}\right)$ envía a t_m en t_7.

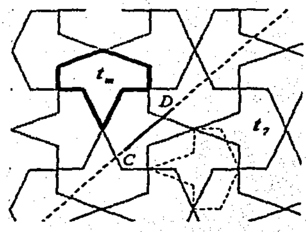


Aplicar $G_2\left(l,\overline{CD}\right)$ "al revés" sobre t_7, significa reflejar t_7 respecto a la línea punteada, y el reflejo, que no es una tesela de la teselación(izquierda), trasladarlo con un vector como el $\overrightarrow{CD}$ pero de sentido contrario, es decir $\overrightarrow{DC}$.



También podemos interpretar "aplicar $G_2\left(l,\overline{CD}\right)$ al revés sobre t_7", como trasladar t_7 con el vector $\overrightarrow{DC}$ (izquierda), y la tesela resultante, que no es una tesela de la teselación, reflejarla respecto a la línea punteada (derecha).





Sin importar si primero reflejamos y después trasladamos, o viceversa, contamos con una trasformación que envía t_7 de regreso a t_m, a ésta la identificaremos como G_2^{-1}. Que al igual que en la traslación, y la reflexión se cumple que $G_2^{-1} \circ G_2 = G_2 \circ G_2^{-1} = I$.

Recordemos que hemos elegido esta teselación porque con ella podíamos ilustrar las transformaciones isométricas, después de hacerlo hemos mostrado la composición de transformaciones; Ahora, si nos fijamos nada más en el conjunto de las transformaciones, hemos visto que 1) una composición de transformaciones puede ser sustituida por otra transformación, 2) la composición de tres transformaciones se realiza aplicando las dos primeras transformaciones y luego la tercera, o bien la primer transformación y luego las dos siguientes, 3) la composición de una transformación con I, no cambia en nada aplicar simplemente la transformación, 4) para cada transformación existe otra transformación de manera que la composición de ambas es lo mismo que aplicar la transformación identidad.

El primer punto se conoce como propiedad de cerradura, el segundo como propiedad asociativa, el tercero como propiedad de la identidad y el cuarto como propiedad del inverso, un conjunto donde al operar entre sus elementos (en este caso la operación es la composición) se cumplen tales propiedades se dice que es un grupo[1].

[1] Smart (1994)

BIBLIOGRAFÍA

La bibliografía está clasificada de la siguiente manera:

A_i Indica libro de apoyo artístico, literario o histórico.

G_i Indica que el libro contiene información sobre conceptos geométricos.

P_i Indica libro de apoyo pedagógico.

T_i Indica que el libro contiene información sobre teselaciones.

Bibliografía Principal

Acuña, Claudia, 1990, *Teselaciones*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México. [T1]

Barnett, Raymond, A, 1998, *Precálculo*, Limusa, México [G1]

Castelnuovo, Emma. 2001, *Didáctica de la matemática moderna*, 2ª ed. [Quinta reimpresión], Trillas, México. [P1]

Collette, Jean Paul, 1986, *Historia de las matemáticas II*, Siglo XXI, México [A1]

Eves, Howard, 1969, *Estudio de las geometrías*, Vol. I, UTEHA, México. [G2]

Ernest, Bruno, 1992, *El espejo Mágico de M. C. Escher,* Tachen, Alemania. [A2]

Grünbaum, Branko and Shaphard, 1987, *Tilings and Patterns*, W.H Freeman and Company, New York [T2]

Gutiérrez, Ángel y Jaime, Adela, 1995, *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática,* Grupo Editorial Iberoaméricana S.A. de C.V., México. [P2]

H. S. M. Coxeter y otros, 1988, *M.C. Escher Art and Science,* North - Holland [Tercera reimpresión], Netherlands. [T3]

National Council of Teacher of Mathematics, 1986, *Geometría Informal,* Trillas, México. [G3]

López, Esther Eunice. *Propuesta para un curso de Geometría Euclideana,* Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México. [G4]

Smart, James R, 1994, *Modern geometries*, 4th ed. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California.

Velasco, Gabriel, 1983, *Tratado de geometría,* Limusa, México. [G5]

Wentworth, Jorge y Smith, David Eugenio, 1983, *Geometría Plana y del Espacio*, Porrúa, México. [G6]

Williams, Robert, *The Geometrical Fundation of Natural Structure,* [A Source Book of Desing], Dover, U.S.A. [T4]

Bibliografía complementaria

De la Peña, José Antonio, 1999, *Álgebra en Todas Partes*, [La ciencia para todos # 166] F. C. E., México. [T5]

Meserve, Bruce E., 1983, *Fundamental concepts of geometry*, Dover, U.S.A [G7]

Henestrosa, Andrés, 1998, Arte mudéjar en México, *Saber ver*, No. 42, pp 40-58 [A3]

Imenes, Luiz Márcio, 1991, *Geometria das dobladuras*, Sciopione, Brasil. [G8]

Imenes, Luiz Márcio, 1988, *Geometria dos Mosaicos*, Sciopione, Brasil. [G9]

Irvin, Washintong, 1996, *Cuentos de la Alhambra*, Espasa Calpe, [Colección Austral], España. [A4]

Nilson, 1988, Polígonos, *Cenopéias e outros bichos*, Scipione, Brasil. [G10]

Pérez, Rafael, 1995, La Alhambra, *Épsilon*, Granada [T6]

Pérez, Teresa, 1997, *Lo mejor del Arte Islámico*, Historia 16 [Tomo 9], España. [A5].