

01180

1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MEXICO



Facultad de Ingeniería
División de Estudios de Posgrado

Inyección de Nitrógeno en un Yacimiento
Petrolífero: Caso Cantarell

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctor en Ingeniería Mecánica

P r e s e n t a :

Erick Emanuel Luna Rojero

Director de tesis: César Treviño Treviño



México, D. F.

2003

A

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS
CON
FALLA DE
ORIGEN**

A mi esposa Luz y a mis hijos Erick y Marco

la Dirección General de Bibliotecas
INAM a difundir en formato electrónico o imp.
contenido de mi trabajo
NOMBRE Erick Emanuel
Luz Rojas
FECHA: 16/05/2003
FIRMA: Erick F. Luna R

Quien cree poder entenderlo todo, indudablemente está confundido...

1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos

A mi asesor César Treviño, y a los miembros del jurado: Jaime Cervantes, Fernando Samaniego, Federico Méndez, Francisco Solorio, Alejandro Rodríguez y Fernando Rodríguez de la Garza por sus valiosos comentarios y las aportaciones a este trabajo.

Al grupo de trabajo de recuperación de hidrocarburos del Instituto Mexicano del Petróleo: Hernán Flores, Manuel Serrano, Ricardo Islas, Raymundo Ángeles, Armando Pineda, Luis Hernández, Rosa Amador, Juana Cruz, Santiago Rivas, Fausto Sánchez, Melesio Sánchez, especialmente a Abraham Medina y Candelario Pérez. Al grupo de trabajo de transferencia de calor y masa de la Facultad de Ciencias de la UNAM: Pepe, Irais, Toño, Jorge, Federico y César.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, especialmente al programa de yacimientos naturalmente fracturados, al subcomité de seguimiento al proceso de mantenimiento de presión al yacimiento, mediante la inyección de nitrógeno del proyecto Cantarell, al proyecto Cantarell y al activo Cantarell.

A los proyectos: D.00100, D.02100 y D.02101 del Instituto Mexicano del Petróleo, NC-24 del CONACYT y PAPIIT IN104301 de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al CONACYT por su apoyo a través de la beca doctoral 90404.

2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice de figuras

1-1. Ubicación geográfica de Cantarell	16
1-2. Complejo Cantarell	17
1-3. El nitrógeno se produce en tierra y se lleva a los pozos inyectoras a través de una red de tuberías de más de 200 Km.	19
1-4. El nitrógeno se inyecta en la parte superior del casquete de gas.	19
1-5. El modelo geométrico para describir al yacimiento es un cilindro de altura H, y radio R.	19
1-6. El nitrógeno es inyectado en la zona central de la cara superior del yacimiento	20
2-1. Modelo físico del proceso de inyección para un casquete de gas de un yacimiento homogéneo.	23
2-2. Flujos de calor en la zona de influencia de la temperatura.	33
2-3. Concentración de nitrógeno en el casquete. Sin inyección.	39
2-4. Concentración de nitrógeno en el casquete de gas cuando la extracción es mayor que la inyección. El nitrógeno es atraído hacia las esquinas inferiores del casquete hasta que se acumula suficiente nitrógeno para que los efectos gravitacionales cobren importancia.	40
2-5. Concentración de nitrógeno en el casquete de gas cuando la extracción es menor que la inyección. En este caso dominan los efectos gravitacionales y aparecen inestabilidades en forma de dedos.	40
2-6. Concentración de nitrógeno en el casquete de gas cuando la extracción es igual a la inyección. Los efectos gravitacionales y de convección forzada son del mismo orden. Este sería el caso más parecido a lo que ocurre en Cantarell.	41

3-1. Medio poroso saturado bajo un gradiente vertical de temperatura.	43
3-2. Convección natural por gradientes de temperatura horizontales.	45
3-3. Dispersión debida al movimiento de la línea del contacto gas aceite.	47
3-4. Concentración másica Y como función del tiempo y la posición. Las unidades de posición son metros y de tiempo años.	49
3-5. Zona contaminada con N_2 medida a partir del CGA ($Pe = 2 \times 10^{-2}$).	50
3-6. Estimación del efecto de la dispersión de N_2 en un pozo productor.	51
3-7. Efecto de la dispersión de N_2 en la producción de un pozo.	52
4-1. En yacimientos fracturados la inyección de gas es más conveniente que la de agua.	55
5-1. Modelo físico para estimar el efecto de la inyección sobre la temperatura.	57
5-2. Gracias a las simetrías del sistema el problema se reduce a la zona delimitada por las líneas punteadas.	58
5-3. Evolución temporal de los campos de temperatura en la región de estudio.	63
5-4. La temperatura media del bloque decae linealmente.	64
5-5. Evolución temporal de la isoterma $T/T_0 = 0.97$, sobre la fractura.	65
5-6. Cuando la inyección se interrumpe, las variaciones de temperatura en la zona de inyección pueden servir para calcular α	66
6-1. Fractura única en una placa sólida.	68
6-2. Esquema del experimento. Se muestran la placa, los dos baños térmicos y las conexiones.	69
6-3. Vistas de frente y superior o inferior de la placa metálica.	70
6-4. Vistas laterales de la placa incluyendo detalles de las zonas de recirculación.	71
6-5. El conjunto de transformadas definido por 6.39-6.41, convierten a la matriz en un par de cuadrados de lado unitario.	77
6-6. Distribución de temperaturas para $Ra\Gamma \rightarrow 0$. Arriba teoría, abajo, imagen de la cámara térmica.	80
6-7. Gráfica del cociente $u / \frac{\text{sen} \Phi[\theta_{s2}(x) - \theta_{s1}(x)]}{Pr}$. El resultado es válido para cualquier vñgulo.	81
6-8. Solución universal para Υ_1 (izquierda), y Υ_2 (derecha) utilizando BIEM.	83

6-9. Campo de temperaturas, θ_i , para un sistema de una fractura con $\Phi = \pi/4$, y $\Gamma/\kappa = 0.01$	83
6-10. Se comparan los resultados del experimento con PIV y la teoría. $Ra = 3.62$	84
7-1. Modelo físico para una fractura porosa bajo gradientes de temperatura.	86
7-2. Solución universal para Υ_1 (izquierda), y Υ_2 (derecha) utilizando BIEM.	93
7-3. Campo de temperaturas, Θ_i , para un sistema de una fractura porosa con $\Phi = \pi/4$, y $\Gamma/\kappa = 0,01$	93
7-4. Velocidad $u/(\Gamma \cos \Phi [\frac{1}{\kappa} - 1])$ dentro de la fractura porosa.	94
8-1. Modelo físico para el estudio de la difusión en una fractura.	96
8-2. El nitrógeno se transporta en la fractura debido a los fenómenos de convección y difusión.	98
8-3. Se muestra, en diferentes tiempos, la concentración adimensional promedio de nitrógeno \bar{Y}	101
8-4. Concentración \bar{Y} a orden Γ^2 en una fractura para diferentes longitudes de fractura y a los dos años de iniciado el proceso.	102
8-5. Modelo físico para el estudio de la dispersión en fracturas porosas.	103
8-6. Se muestra, en diferentes tiempos, la concentración adimensional promedio de nitrógeno \bar{Y}	106
8-7. Concentración \bar{Y} a orden Γ^2 para una fractura porosa de diferentes longitudes después de dos años.	107
10-1. La frontera del dominio se discretiza en n puntos.	112
10-2. Modelo físico de convección natural bajo gradientes térmicos horizontales.	122

Índice general

1. Planteamiento del problema	14
1.1. Antecedentes	14
1.2. El complejo Cantarell	16
1.3. El proceso de inyección	17
1.4. Modelo geométrico	18
1.5. Definición del problema	18
I Inyección de nitrógeno en un yacimiento homogéneo	21
2. Dinámica del casquete de gas	22
2.1. Modelo matemático dimensional	22
2.1.1. Ecuaciones	23
2.2. Modelo matemático adimensional	29
2.2.1. Ordenes de magnitud	30
2.2.2. Ecuaciones adimensionales	35
2.3. Resultados	38
2.3.1. Sin inyección ni extracción	38
2.3.2. Con inyección y extracción	39
3. Convección en la zona de aceite	42
3.1. Convección por gradiente geotérmico vertical	43
3.2. Convección por gradiente geotérmico horizontal	44
3.3. Convección forzada en la línea de contacto gas aceite	47

3.3.1. Resultados	49
II Inyección de nitrógeno en un yacimiento naturalmente fracturado	53
4. Introducción	54
5. Transferencia de calor matriz-fractura	56
5.1. Modelo matemático	58
5.1.1. Ecuaciones	58
5.1.2. Condiciones de frontera e iniciales	60
5.1.3. Ecuaciones adimensionales	61
5.1.4. Solución	61
5.2. Resultados	63
5.2.1. Determinación de κ	64
6. Convección natural en vórgulos y fracturas libres	67
6.1. Definición del problema	68
6.2. Experimento	69
6.3. Modelo matemático	69
6.3.1. Ecuaciones en la fractura	69
6.3.2. Ecuaciones en la matriz	72
6.4. Ecuaciones adimensionales	73
6.4.1. Ecuaciones adimensionales en la cavidad	73
6.4.2. Ecuaciones adimensionales en la Matriz	74
6.5. Caso $\kappa \ll \Gamma \ll 1$ y $Ra \rightarrow 0$: vórgulos	75
6.5.1. Modelo en la matriz	76
6.5.2. Modelo en el vórgulo	77
6.5.3. Resultados de temperatura para un vórgulo	79
6.6. Caso $\kappa > \Gamma$ y $\Gamma \ll 1$: fracturas	79
6.6.1. Método asintótico	80
6.6.2. Resultados	83

7. Convección natural en fracturas porosas	85
7.1. Modelo físico	85
7.2. Ecuaciones	86
7.2.1. Ecuaciones para fracturas largas	87
7.2.2. Condiciones de frontera	88
7.2.3. Adimensionalización	89
7.2.4. Solución asintótica	90
7.3. Solución general	92
7.4. Resultados	93
8. Dispersión y difusión de nitrógeno en fracturas	95
8.1. Difusión en fracturas libres	96
8.1.1. Ecuación de difusión	97
8.1.2. Solución y resultados	98
8.2. Dispersión en fracturas porosas	100
8.2.1. Ecuación de dispersión	101
8.2.2. Solución y resultados	103
9. Conclusiones	108
9.1. Yacimiento homogéneo	108
9.2. Yacimiento naturalmente fracturado	110
10. Apéndices	111
10.1. Apéndice A: BIEM	111
10.2. Apéndice B: Método numérico en la zona de gas	114
10.3. Apéndice C: Problema de Horton-Rogers-Lapwood	117
10.4. Apéndice D: Convección natural por gradiente térmico horizontal	122

Nomenclatura

b : apertura de la fractura
 c_p : capacidad calorífica del fluido
 g : gravedad
 k : permeabilidad del medio poroso
 k_f : conductividad térmica del fluido
 k_s : conductividad térmica del sólido
 k_m : conductividad térmica en la matriz
 h : altura de la columna de gas
 h_0 : altura inicial de la columna de gas
 m_i : gasto másico en las fracturas
 m_T : gasto másico total entrando a las fracturas
 n : normal a la superficie
 p : presión adimensional
 r : coordenada radial
 r_0 : radio de la zona de inyección
 s : definida en ecuación 2.9
 t : coordenada temporal
 t_{cA} : tiempo característico de corrimiento acústico
 t_c : tiempo característico por diferencia de densidades
 $t_{cQ_{ext}}$: tiempo característico de extracción
 t_{cD} : tiempo característico de difusión de especies
 $t_{c\alpha T}$: tiempo característico de difusión térmica
 t_{cN} : tiempo característico de convección natural
 u : velocidad del contacto gas aceite Cap. 3
 u_i : velocidad en la dirección i - ésimas
 w : perturbación de la velocidad
 x, x^* : coordenada vertical
 y, y^* : coordenada horizontal
 z : coordenada vertical

z_i : compresibilidad de la especie i – *ésima*
 C = concentración másica del nitrógeno
 $D = D_{i,j}$: coeficiente de difusión binario de las especies i – *ésima* y j – *ésima*
 D_i : tensor de dispersión para la especie i – *ésima*
 H : altura del yacimiento Cap. 2, altura de la fractura Cap. 6
 H_s : función escalón
 I : tensor identidad
 K : permeabilidad del yacimiento
 \mathbf{K} : tensor de permeabilidad del yacimiento
 L : dimensiones del cubo Cap. 5, longitud de la fractura Cap. 6
 N : número de fracturas
 P_0 : presión hidrostática en el casquete
 P : presión
 Pe : número de Peclet difusivo
 Pe_α : número de Peclet dispersivo
 Q_{ext} : gasto de extracción de aceite
 Q_{iny} : gasto de inyección de nitrógeno
 R : radio del yacimiento
 R_g : constante universal de los gases
 R_r : definida en ecuación 2.9
 Ra : número de Rayleigh
 Re_{eff} : número de Reynolds efectivo. (Ec. 5.3)
 T : temperatura
 T_0 : temperatura del casquete de gas
 T_{iny} : temperatura de inyección del nitrógeno
 T_m : temperatura en el bloque de matriz
 \vec{U} : vector de velocidad
 W_i : peso molecular de la especie i – *ésima*
 Y : concentración másica de nitrógeno
 Y_i : concentración másica de la especie i – *ésima*

Letras griegas

α : autovalores para el problema Horton-Rogers-Lapwood

α_i : coeficiente de dispersividad en la dirección i – *ésima*

α_m : difusividad térmica en la matriz porosa Cap. 5

β : definida en la ecuación 2.55

γ : definida en la ecuación 2.56

ε : definida en la ecuación 2.57

ζ : coordenada vertical adimensional en la matriz

η : coordenada vertical adimensional

θ : temperatura adimensional

κ : definida en ecuación 2.33, cociente de conductividades térmicas Cap. 6

μ : viscosidad dinámica

μ_i : viscosidad dinámica de la especie i – *ésima*

ξ : coordenada radial adimensional

ρ : densidad de la mezcla

ρ_i : densidad de la especie i – *ésima*

σ : tiempo adimensional

τ : tortuosidad de medio poroso

ϕ : porosidad efectiva

χ : coordenada horizontal adimensional

\varkappa : parámetro definido en la ec. 5.23

Θ : temperatura adimensional en la matriz porosa

Γ : razón de aspecto de la fractura

Ψ : función de corriente en la fractura

Υ_i : función definida en la ecuación 6.84

Resumen

Se analiza la inyección de nitrógeno, como método de mejorar la extracción de hidrocarburos de un yacimiento, partiendo de las leyes físicas que rigen el comportamiento de los fluidos. Se estudian dos tipos de yacimiento: homogéneo y naturalmente fracturado. El objetivo principal es estudiar la dinámica de los procesos convectivos y difusivos y como éstos afectan al proceso de inyección.

Los modelos matemáticos aquí discutidos están basados en una combinación de las ecuaciones de estado, de conservación de masa, momento y energía, para fluidos en espacios libres y medios porosos. Los métodos de solución que se utilizaron fueron: análisis de órdenes de magnitud, análisis asintótico, ecuación integral de frontera, mapeo a sistemas coordenados no ortogonales, teoría de funciones ortogonales y diferencias finitas.

Así, los resultados principales fueron:

Para yacimientos homogéneos:

1. Obtención del campo de distribución de la concentración másica del nitrógeno en el casquete de gas, como función del tiempo y el espacio.
2. Determinación del comportamiento convectivo de la zona de aceite bajo gradientes geotérmicos verticales y horizontales.
3. Comportamiento de la dispersión de nitrógeno producida por la convección forzada en la zona de aceite.

Para yacimientos fracturados:

1. Estimación del comportamiento térmico del yacimiento durante la inyección de nitrógeno a baja temperatura.
2. Cálculo de los procesos de convección natural de tres tipos de estructuras idealizadas: vórgulos, fracturas libres y fracturas porosas.
3. Cálculo de los procesos de difusión y dispersión en fracturas libres y porosas.

Finalmente, las principales conclusiones del trabajo de tesis son:

Yacimiento homogéneo

- *El nitrógeno inyectado se precipita hacia la zona inferior del casquete de gas debido a la convección forzada y a la diferencia de densidades entre el nitrógeno y el gas natural.*
- *La convección natural (térmica) no desempeña un papel importante en el transporte de nitrógeno dentro de la zona de aceite o en el casquete de gas.*
- *La convección forzada por extracción produce que el nitrógeno se disperse en el aceite. Sin embargo, la zona contaminada alcanza un tamaño fijo a corto plazo. El tamaño de dicha zona depende del número de Peclet dispersivo.*
- *Los resultados para la distribución de nitrógeno en las zonas de gas y aceite coinciden con lo observado en Cantarell aunque no se trate de un yacimiento homogéneo.*

Yacimiento fracturado

- *Bajo gradientes geotérmicos, las fracturas inclinadas, ya sean libres o porosas, siempre producen convección natural.*
- *El nitrógeno se incorpora a la zona de aceite por las fracturas en un proceso dispersivo o difusivo. Para tiempos característicos de explotación se puede considerar que el aceite no se contamina a través de las fracturas, aún cuando exista convección natural en las fracturas libres o porosas.*
- *Los resultados para la distribución de nitrógeno en las fracturas de la zona de aceite coinciden con lo observado en Cantarell, al menos para fracturas no conectadas.*

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Antecedentes

La inyección de nitrógeno como método de mantenimiento de la presión en un yacimiento petrolífero supergigante, se ha utilizado por primera vez a nivel mundial en el complejo Cantarell. Este es el yacimiento aguas adentro más grande del mundo. La presión original de referencia del yacimiento (a 2300 metros bajo el nivel del mar) era de $2.647 \times 10^7 Pa$, al momento de iniciar la inyección alcanzaba los $1.0 \times 10^7 Pa$. Un yacimiento depresionado tiene un factor de recuperación bajo ($< 20.8\%$ para Cantarell [1]), además su tiempo de explotación es muy largo y sus costos de producción se incrementan significativamente por lo que es muy importante evitar que se despresurice.

Después de dos años de iniciado el proyecto de inyección los resultados han sido favorables, logrando revertir el proceso de despresurizamiento del yacimiento. Con esto, y un programa de bombeo neumático y perforación de nuevos pozos, se ha conseguido incrementar significativamente la producción, ascendiendo desde 1400 MBPD (miles de barriles de petróleo por día) hasta más de 2100 MBPD, a pesar de que la planta productora de nitrógeno no ha funcionado al 100% de su capacidad.

La presencia de nitrógeno en el aceite es un factor que debe considerarse, ya que un alto nivel de este elemento en el aceite es sinónimo de petróleo de baja calidad. Sin embargo, el porcentaje de N_2 al día de hoy, se encuentra por debajo del límite permitido, (3% Mol normas nacionales y 5% Mol normas internacionales). De hecho, la concentración de nitrógeno en el

aceite mantiene sus niveles originales.

Las ventajas de inyectar nitrógeno son muchas:

- Es una tecnología limpia, ya que cualquier problema en la planta generadora o el sistema de distribución tiene un efecto ambiental nulo.
- Existe una disponibilidad prácticamente infinita de aire para producir nitrógeno.
- El nitrógeno es un fluido inerte y no corrosivo, excluyendo la posibilidad de combinarse químicamente con los fluidos del yacimiento.
- El precio promedio de inyectar nitrógeno es bajo, comparado con los costos de la inyección de gas natural y CO_2 .
- Se puede considerar que mejora la recuperación de hidrocarburos, ya que modifica los comportamientos de fase de la mezcla (gas natural, petróleo y N_2) y favorece la evaporación de componentes intermedios del petróleo en la matriz porosa del casquete de gas.

Existen algunos antecedentes de inyección de nitrógeno en pequeños campos petrolíferos homogéneos como es el caso de Chunchula en Mobile Alabama, Estados Unidos, en donde se han estado inyectando alternadamente nitrógeno y gas natural. A la fecha existen algunos estudios con el fin de utilizar inyección de nitrógeno, es el caso de Oman [2], Colombia [3], Venezuela [4], Oklahoma, Mar del Norte y México, etc.. Por otro lado, la inyección de otros gases a un yacimiento se ha utilizado en técnicas de recuperación mejorada, como la combustión *in situ* y la inyección de vapor de agua, de gas natural o CO_2 . En el caso de los métodos térmicos (vapor y combustión *in situ*) la inyección se realiza lateralmente (no desde arriba como en el caso de nitrógeno) por lo que la física del problema es completamente diferente. La recuperación térmica de hidrocarburos esta revisada en los libros de Lake, White y Moss, Prats y Hong [5]-[14]. La inyección de gas natural o CO_2 se ha estudiado y utilizado únicamente en yacimientos homogéneos. Los efectos de estos gases sobre el yacimiento son muy diferentes a los producidos por el nitrógeno, por ejemplo, en la inyección de gas natural no aparecen fenómenos de convección natural por diferencia de concentraciones.

Los simuladores de yacimiento que se utilizan en la industria petrolera, no toman en cuenta los efectos convectivos, difusivos y dispersivos, por lo que resulta muy difícil modelar la dinámica

de la inyección de nitrógeno. Manceau *et al* [15] han realizado esfuerzos para implementar los fenómenos convectivos en un simulador de yacimiento, *ATHOS™* [16]. Mungan [17] por su parte hace un análisis para la inyección de nitrógeno en un yacimiento cuya presión está por arriba de su punto de burbuja, pero deja a un lado los efectos dispersivos y convectivos. Tiwari and Suresh [18] realizan un estudio composicional para evaluar la factibilidad de usar nitrógeno como gas de recemplazo para la explotación del casquete de gas de un yacimiento supergigante (Gandhar). Ellos estudian el caso cuando el gas natural es más denso que el nitrógeno y presentan resultados para el avance de nitrógeno en el casquete de gas. No explican que método utilizaron, ni si toman en cuenta a la convección gravitacional y a la difusión.

1.2. El complejo Cantarell

El complejo Cantarell se encuentra ubicado en la plataforma continental del Golfo de México, frente a las costas de Tabasco y Campeche, a 85 Km al norte de Ciudad del Carmen (ver figura 1-1). Los tirantes de agua están entre 35 y 50 metros. El complejo está formado por los campos: Nohoch, Chac y Akul.

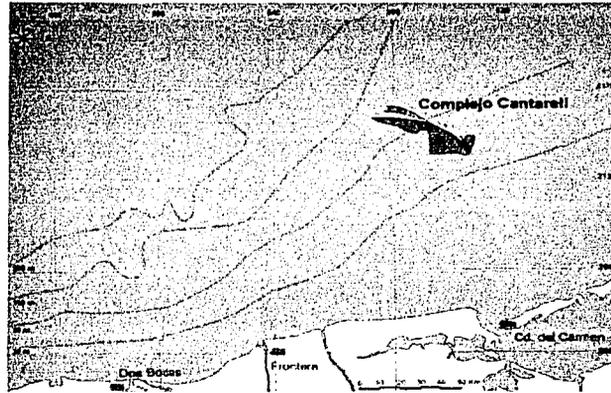


Figura 1-1: Ubicación geográfica de Cantarell

La ubicación geológica de Cantarell es la provincia marina de Coatzacoalcos. La matriz es una brecha de clastos de caliza dolomitizados del Cretácico Superior y Paleoceno Inferior, y carbonatos dolomitizados del Cretácico Medio e Inferior y Jurásico Superior. Los yacimientos del complejo se encuentran en trampas de tipo estructural y con espesores netos de hasta 980 metros. Cantarell tiene una extensión de 162 kilómetros cuadrados, con 205 pozos de desarrollo y más de 7 pozos inyectoros de nitrógeno [19]-[21].

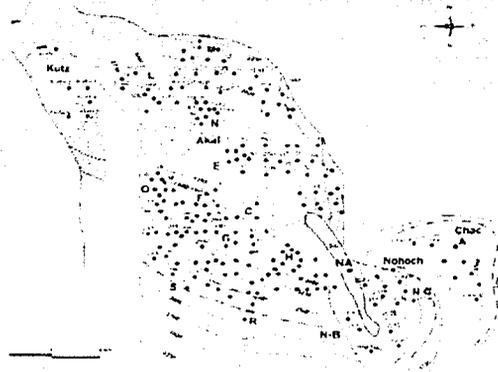


Figura 1-2: Complejo Cantarell

1.3. El proceso de inyección

El proceso de inyección comienza en una planta generadora de nitrógeno situada en tierra. La planta está construida en cuatro módulos independientes. Dichos módulos toman el nitrógeno del aire a través de un proceso de liquefacción, llegando a producir en conjunto hasta 34 millones de metros cúbicos de nitrógeno por día. El nitrógeno viaja en tuberías de 91.4 centímetros de diámetro por más de 200 Km hasta llegar a las plataformas de inyección. La figura 1-3 muestra un diagrama del proceso de distribución del nitrógeno .

Una vez que el nitrógeno llega a la zona de inyección, los pozos inyectoros lo depositan en la parte superior del casquete de gas (ver figura 1-4). Las condiciones físicas del nitrógeno gaseoso

al momento de entrar al yacimiento son: temperatura, de 308.5 K y presión entre 8.826 MPa y 10.8 MPa, con un gasto constante total de $6.5 \text{ m}^3/\text{seg}$. En el casquete de gas, el nitrógeno se mezcla con el gas del yacimiento generando fenómenos de transporte de tipo difusivo y convectivo. El aporte másico al yacimiento y la expansión térmica del nitrógeno provocan que la presión suba y como consecuencia la producción se incremente.

1.4. Modelo geométrico

Con frecuencia, la geometría de un yacimiento es considerada como un cilindro muy corto, ya que las longitudes características horizontales (radio) son mucho mayores a las verticales (altura). En este trabajo se considera que un yacimiento es un cilindro delgado, cuyo eje está alineado con la gravedad y que la superficie de contacto gas aceite es horizontal. El cilindro tiene radio R y altura H siendo $H \ll R$. La figura 1-5 muestra lo antes descrito.

1.5. Definición del problema

Considérese un yacimiento (fracturado o no) con casquete de gas y geometría cilíndrica. Al principio, la temperatura, presión, densidad y concentración del yacimiento, son variables conocidas. Se inicia un proceso de inyección de un gas a gasto constante. La inyección tiene lugar en un disco sobre el centro de la cara superior del casquete de gas como se muestra en la figura 1-6. El gas inyectado entra a condiciones de temperatura, densidad y composición química conocidas. Durante el proceso de inyección, la interfaz gas-aceite se mueve hacia abajo debido a la continua extracción de aceite a gasto constante.

Se requiere encontrar la evolución temporal de los campos de presión y concentración en el yacimiento, con el fin de entender la dinámica de los procesos y así predecir y optimizar el proceso de inyección.

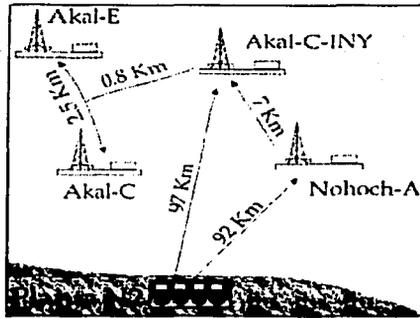


Figura 1-3: El nitrógeno se produce en tierra y se lleva a los pozos inyectores a través de una red de tuberías de más de 200 Km.

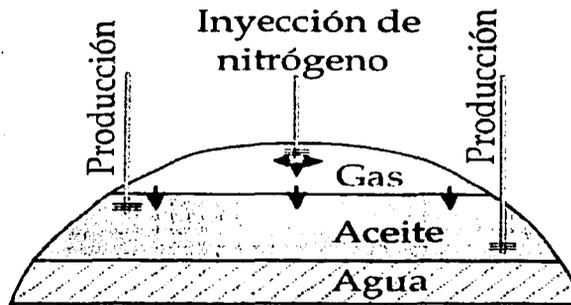


Figura 1-4: El nitrógeno se inyecta en la parte superior del casquete de gas.

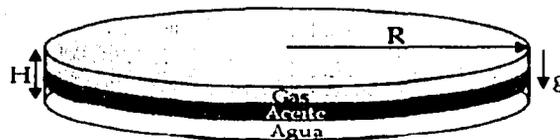


Figura 1-5: El modelo geométrico para describir al yacimiento es un cilindro de altura H, y radio R.

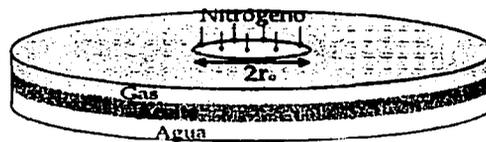


Figura 1-6: El nitrógeno es inyectado en la zona central de la cara superior del yacimiento

Parte I

Inyección de nitrógeno en un yacimiento homogéneo

Capítulo 2

Dinámica del casquete de gas

En este capítulo se estudia el comportamiento del casquete de gas bajo un proceso de inyección en un yacimiento homogéneo. Por simplificación, se considera que la zona de aceite actúa como un pistón rígido que se mueve de tal forma que el volumen desalojado es proporcional al volumen de aceite extraído. Además, no hay transferencia de masa en la interfaz gas-aceite. Es decir, no hay evaporación de hidrocarburos desde el aceite y el nitrógeno no penetra en la zona de aceite. Finalmente, se considera que el yacimiento se encuentra en su totalidad, a una temperatura constante.

Estas aproximaciones son válidas si: 1.- La velocidad a la que se mueve la interfaz gas-aceite es pequeña comparada con las velocidades de caída por diferencia de densidades y de inyección. 2.- El flujo de masa debido a la evaporación y difusión en el aceite, es pequeño comparado con los flujos másicos globales del sistema, esto ocurre si los coeficientes de transporte de masa y de difusión son pequeños. 3.- El yacimiento es isotérmico ya que el hecho de inyectar nitrógeno a diferente temperatura sólo produce un efecto térmico local alrededor de la zona de inyección. Más adelante se explica con detalle el por qué de las últimas afirmaciones.

2.1. Modelo matemático dimensional

Considérese al casquete de gas cilíndrico de la figura 2-1 referido a un sistema de coordenadas cilíndricas, con coordenada vertical, z , medida de arriba hacia abajo, y radial r . El origen está en el centro de la cara superior. El cilindro tiene radio R y altura $h(t)$, donde t es la

coordenada temporal. El medio poroso homogéneo tiene permeabilidad K , porosidad efectiva ϕ y tortuosidad τ . Originalmente, el cilindro está saturado de gas natural de densidad ρ_{gas} y viscosidad μ_{gas} , a temperatura T_0 y presión hidrostática $P_0(z)$.

En la parte superior del casquete, se inicia el proceso de inyección de nitrógeno sobre un disco de radio r_0 . El nitrógeno entra con temperatura, T_{iny} , densidad, ρ_{N_2} , y viscosidad, μ_{N_2} . La inyección se realiza bajo condiciones de gasto constante, Q_{iny} . La cara inferior del cilindro se mueve hacia abajo a velocidad, $\dot{h}(t)$, debido al gasto constante, Q_{ext} , de la extracción de aceite.

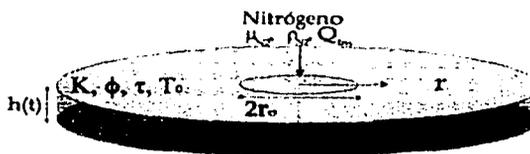


Figura 2-1: Modelo físico del proceso de inyección para un casquete de gas de un yacimiento homogéneo.

2.1.1. Ecuaciones

El modelo matemático está basado en las ecuaciones para medio poroso homogéneo: continuidad para un fluido compresible, ley de Darcy, ecuación de estado y conservación de especies. Las siguientes secciones muestran dichas ecuaciones cuando se considera una simetría axial.

Ley de Darcy

La ley de Darcy, que en un medio poroso relaciona la velocidad del fluido y los gradientes de presión, bajo un campo gravitacional tiene la forma:

$$\vec{U} = -\frac{K}{\mu} (\vec{\nabla}P - \rho \vec{g}), \quad (2.1)$$

donde, $\vec{U} = u_r \hat{i}_r + u_z \hat{i}_z$, es la velocidad a que se mueve fluido, K , es el tensor de permeabilidad del medio poroso, μ es la viscosidad dinámica del fluido, $\vec{g} = g \hat{i}_z$ la gravedad, P es la presión en el fluido, y ρ la densidad del fluido. La ley de Darcy para gases es válida sólo cuando la

velocidad es pequeña o moderada [5]. En el modelo que se propone las velocidades máximas se ubican en la zona de inyección, su valor es tal que $u_{\text{máx}} = Q_{\text{iny}} / (\pi r_0^2) \ll 1$, por lo que Darcy será válido en todo el casquete de gas.

El medio poroso es homogéneo, por lo que el tensor de permeabilidad se reduce a un escalar $K = k$. Por otro lado, la viscosidad del fluido es función de las concentraciones másicas, Y_{N_2} y Y_{Gas} , ($Y_{N_2} + Y_{Gas} = 1$). Un modelo simple para la viscosidad de la mezcla es el de Herning *et al.* [22],[23], que en términos de la concentración másica resulta ser:

$$\mu(r, z, t) = \mu_{N_2} Y_{N_2}(r, z, t) + \mu_{Gas} Y_{Gas}(r, z, t). \quad (2.2)$$

Sin embargo, en este trabajo se considera que la viscosidad no depende de la concentración, lo cual simplifica enormemente al problema. Esta aproximación es válida cuando las viscosidades son parecidas:

$$\left| \frac{\mu_{N_2} - \mu_{Gas}}{\mu_{N_2}} \right| \ll 1. \quad (2.3)$$

Por ejemplo, si el gas natural está compuesto sólo de metano esta relación da:

$$\left| \frac{\mu_{N_2} - \mu_{Gas}}{\mu_{N_2}} \right| \sim 0.3. \quad (2.4)$$

En una primera aproximación, en este trabajo la viscosidad de la mezcla se toma como la media de las viscosidades:

$$\mu = \frac{\mu_{N_2} + \mu_{Gas}}{2}. \quad (2.5)$$

En coordenadas cilíndricas la Ley de Darcy para un medio poroso homogéneo conteniendo a un fluido con viscosidad constante (2.5) queda como:

$$u_r = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (2.6)$$

$$u_z = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) \quad (2.7)$$

Ecuación de estado

La ecuación de estado para una mezcla de dos gases reales, $\rho = \rho(Y_{N_2}, Y_{Gas}, P, T)$, está dada por [24]:

$$\rho = \frac{P}{R_g T (Y_{N_2} z_{N_2} / W_{N_2} + Y_{Gas} z_{Gas} / W_{Gas})}, \quad (2.8)$$

donde, z_i , es coeficiente de compresibilidad de la especie i - *estima*, W_i , es el peso molecular de la especie i - *estima*, R_g , es la constante universal de los gases, T , es la temperatura del fluido, (considerada como constante para este trabajo). En este trabajo también se considera que el coeficiente de compresibilidad es constante en el rango de presiones que aquí se maneja, lo anterior es válido si $|z(P) - z(P + \Delta P)| \ll |z(P)|$. Si se definen:

$$R_r = R_g T z_{Gas} / W_{Gas} \quad \text{y} \quad s = 1 - \frac{\rho_{Gas}}{\rho_{N_2}} = 1 - \frac{W_{Gas} / z_{Gas}}{W_{N_2} / z_{N_2}}, \quad (2.9)$$

y dado que, $Y_{N_2} + Y_{Gas} = 1$, $\rho_{N_2} = P W_{N_2} / R_g T z_{N_2}$ y $\rho_{Gas} = P W_{Gas} / R_g T z_{Gas}$, la ecuación de estado resulta:

$$\rho = \frac{P}{R_r (1 - s Y_{N_2})}. \quad (2.10)$$

Ecuación de conservación de masa

El proceso de inyección en el casquete de gas es un problema de flujo compresible, por lo que en la ecuación de conservación de masa se debe tomar en cuenta el término de acumulación. Lo anterior se debe a que las variaciones características de densidad, $\Delta \rho_c$, y la densidad característica, ρ_c , son tales que:

$$\frac{\Delta \rho_c}{\rho_c} \sim 1, \quad (2.11)$$

es decir, las variaciones de la densidad, son comparables a ella misma, por lo tanto, no es válida la aproximación de Boussinesq. Por ejemplo, para nitrógeno y gas natural de Cantarell a condiciones de yacimiento:

$$\frac{\Delta \rho_c}{\rho_c} = \frac{\rho_{N_2} - \rho_{Gas}}{(\rho_{N_2} + \rho_{Gas}) / 2} \sim 1. \quad (2.12)$$

Por otro lado, si se supone que las variaciones de presión del sistema no afectan la densidad de la roca, entonces la porosidad, tortuosidad y permeabilidad permanecen constantes durante el

proceso de inyección. La suposición anterior es válida si

$$\frac{\Delta \rho_{roca}}{\rho_{roca}} \ll 1. \quad (2.13)$$

Así, la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas para un fluido compresible, dentro de un medio poroso incompresible y completamente saturado es:

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

Conservación de especies

Si se considera que el medio poroso está completamente saturado y el fluido existe sólo en estado supercrítico (no es exactamente un gas, aunque las ecuaciones que lo rigen son idénticas), la ecuación de conservación de especies para flujo compresible es:

$$\phi \frac{\partial Y_i}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla Y_i = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\phi \rho \mathbf{D}_i \cdot \nabla Y_i), \quad (2.15)$$

donde, $i = N2, Gas$, Y_i , es la concentración másica de la especie i -ésima, $\mathbf{D}_i(D_{i,j}, \vec{U}, \mathbf{K}, \phi, \tau)$, es el tensor de dispersión de la especie i -ésima, $D_{i,j}$ es el coeficiente de difusión molecular binario de la especie i -ésima en la j -ésima, \vec{U} , es la velocidad de la mezcla, \mathbf{K} , es el tensor de permeabilidad, ϕ , la porosidad efectiva, y τ , la tortuosidad.

La naturaleza del tensor de dispersión es todavía materia de debates. Experimentalmente se demuestra que el coeficiente de dispersión en zonas de alta velocidad puede ser hasta 10 veces más grande que el coeficiente de difusión molecular. Un modelo propuesto por Bear [25] para medios porosos isotrópicos es el siguiente:

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \frac{D_{i,i}}{\tau} + \frac{\alpha_l u_i^2 + \alpha_t u_t^2}{\phi |\vec{u}|} & \frac{(\alpha_l - \alpha_t) u_r u_z}{\phi |\vec{u}|} \\ \frac{(\alpha_l - \alpha_t) u_r u_z}{\phi |\vec{u}|} & \frac{D_{i,i}}{\tau} + \frac{\alpha_l u_i^2 + \alpha_t u_t^2}{\phi |\vec{u}|} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

donde, α_l y α_t son las dispersividades longitudinal y transversal, respectivamente. Sin embargo, los valores de las α_l y α_t son desconocidos para la mayoría de los materiales, además dependen del tiempo y la escala del problema. Excelentes discusiones del tema se pueden encontrar en

los libros de Lake y Barenbaltt *et al.* [5], [26]. En este trabajo suponemos que el proceso de dispersión es isótropo por lo que el tensor de dispersión se reduce al escalar:

$$D_i = \frac{D}{\tau} \mathbf{I} \quad (2.17)$$

lo cual es válido para materiales en los que $\alpha_l \sim \alpha_t \sim 0$, y/o las velocidades son pequeñas, por lo que este modelo no será del todo válido en la vecindad de la zona de inyección, donde las velocidades no son pequeñas. En la ecuación 2.17, \mathbf{I} es el tensor identidad. En la relación anterior $D (= D_{i,j})$ es el coeficiente de difusión molecular binario de la mezcla.

De este modo, las ecuaciones de conservación de especies para flujo compresible que se utilizaron en este trabajo son:

$$\phi \frac{\partial Y}{\partial t} + u_r \frac{\partial Y}{\partial r} + u_z \frac{\partial Y}{\partial z} \quad (2.18)$$

$$= \frac{D\phi}{\tau} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Y}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right) + \frac{D\phi}{\tau\rho} \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (2.19)$$

$$Y = 1 - Y_{Gas},$$

donde, Y_{N_2} es Y , ya que por comodidad se omite el subíndice.

Ecuaciones dimensionales

Si se combinan las ecuaciones (2.6), (2.7), (2.10), (2.14) y (2.18), se puede dejar al modelo en términos de la concentración de nitrógeno, Y , y la presión, P de la forma:

$$\begin{aligned} & \phi \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{s}{1-sY} \frac{\partial Y}{\partial t} \right) = \\ & + \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{\tau} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{g}{R_r} \left(\frac{1}{(1-sY)} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{sP}{(1-sY)^2} \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \right) \\ & + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{s}{1-sY} \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (2.20) \\ & + \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{P}{R_r(1-sY)g} \right) \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{s}{1-sY} \frac{\partial Y}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{Pg}{R_r(1-sY)} \right) \frac{\partial Y}{\partial z} \\
= & \frac{D\phi}{\tau} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right) + \\
& \frac{D\phi}{\tau} \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{s}{1-sY} \frac{\partial Y}{\partial r} \right) + \frac{\partial Y}{\partial z} \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{s}{1-sY} \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \right). \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Condiciones de frontera

Las ecuaciones (2.20) y (2.21) se resuelven sujetas a las siguientes condiciones de frontera. El modelo es simétrico respecto a $r = 0$, por lo que las variaciones en r sobre esta línea son cero:

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.22)$$

En $r = R$ las paredes son impermeables, es decir, no hay flujo de masa,

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (2.23)$$

La velocidad perpendicular a la pared es cero, $u_r = 0$, utilizando la Ley de Darcy queda en términos de la presión como:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (2.24)$$

En $z = 0$, la parte superior del casquete, existen dos zonas: $0 < r \leq r_0$ y $r_0 < r < R$ (Figura 2-1). Para la primera de ellas la concentración es conocida, ya que es la zona de inyección del nitrógeno, y la velocidad del fluido está dada por el gasto de inyección. En la segunda zona, la velocidad perpendicular a la pared es cero y la frontera es impermeable:

$$Y = 1 : (0 < r \leq r_0), \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 : (r_0 < r < R), \quad (2.26)$$

$$u_z = H_s(r - r_0) \frac{Q_{iny}}{\pi r_0^2} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right)_{z=0}, \quad (2.27)$$

$$H_s(r - r_0) \frac{Q_{iny}}{\pi r_0^2} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{gP}{R_r(1-sY)} \right)_{z=0}, \quad (2.28)$$

donde, $H_s(r)$ es la función escalón. En $z = h(t)$ la interfaz gas aceite es considerada como impermeable para los gases y fluidos, por lo que:

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial z} \right|_{z=h(t)} = 0. \quad (2.29)$$

Por último, la velocidad del gas en $h(t)$ es la velocidad de la interfaz gas-aceite, producto de la extracción de aceite:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{gP}{R_r(1-sY)} \right)_{z=h(t)} \quad (2.30)$$

Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales del problema se escriben a continuación. Al tiempo igual a cero se supone que no hay nitrógeno en el casquete, esto es,

$$Y(t=0) = 0, \quad (2.31)$$

y la presión es únicamente hidrostática, que para un fluido compresible tiene la forma:

$$P(z) = P_0 e^{gz/R_r}, \quad (2.32)$$

donde P_0 es la presión inicial en la cara superior del casquete.

El conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineal formado por las ecuaciones (2.20 - 2.32) es un sistema cerrado, que describe la inyección de nitrógeno en un casquete de gas homogéneo.

2.2. Modelo matemático adimensional

Para adimensionalizar las ecuaciones, es necesario buscar las escalas correctas desde donde se quiere observar al problema. En la siguiente sección se definen tales escalas y se eligen las más adecuadas para los propósitos de este trabajo.

2.2.1. Ordenes de magnitud

Longitudes características

La longitud característica en la dirección r es el radio del cilindro. En la otra dirección la longitud característica es $h(t)$. Con frecuencia, en la ingeniería de yacimientos se considera que la velocidad de la interfaz gas aceite es constante, es decir,

$$\frac{dh(t)}{dt} = \dot{h} \equiv \text{constante}, \text{ o bien,} \quad (2.33)$$

$$h(t) = h_0(1 + \kappa t), \quad (2.34)$$

donde, $\kappa = \dot{h}/h_0$, y h_0 , es la altura del casquete al tiempo inicial.

Tiempos característicos

El problema de inyección de gas en el casquete, es un problema de escalas múltiples, es decir, aparecen varias escalas temporales, cada una de ellas asociada a algún proceso físico, que es particularmente importante durante esos tiempos. A continuación se hace una descripción breve de cada una de ellas.

Tiempo característico por corrimiento acústico. Es la escala más corta de todas, está relacionada a la onda acústica disipativa que se genera al iniciar la inyección. Para encontrar esta escala es necesario tomar en cuenta los efectos inerciales en una ecuación generalizada de Darcy, que considere las variaciones temporales de la velocidad [9], y las ecuaciones de continuidad y estado:

$$\text{continuidad} : \phi \frac{\Delta \rho_c}{t_{cA}} \sim \frac{\rho_c u_c}{R} \quad (2.35)$$

$$\text{estado} : P_c \sim \frac{\rho_c R_g T}{W} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \text{Darcy generalizado} : \rho_{ca} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu}{k} u \\ &: \frac{\rho_c u_c}{\phi t_{cA}} \sim -\frac{\Delta P_c}{R} - \frac{\mu}{k} u_c, \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde c_a es conocida como el coeficiente de aceleración. (Batchelor [27] propuso un modelo de medio poroso formado por tubos circulares de radio a , y permeabilidad k , y encontró que $c_a = a^2/\lambda_1^2 k$, donde λ_1 es la raíz positiva más pequeña de la función de Bessel del primer tipo de orden cero, $J_0(\lambda) = 0$. Para este problema basta decir que $c_a \sim 1/\phi$). Combinando las ecuaciones 2.35-2.37 obtenemos:

$$t_{cA} \sim \frac{\mu R^2}{c_a 2k P_c} + R \sqrt{\frac{W}{R_g T}} \sqrt{1 + \frac{\mu^2 L^2 R_g T}{c_a^2 4k^2 p_c^2 W}} \sim 5 \text{ horas}$$

En el yacimiento real (Cantarell) los incrementos de presión aparecen en todo el yacimiento a las pocas horas después de iniciado el proceso de inyección.

Tiempo característico gravitacional (diferencia de densidades). De un balance entre los términos de acumulación (temporales) y fuerzas gravitacionales en cualquiera de las ecuaciones 2.20 y 2.21,

$$\phi \frac{1}{P} \frac{\Delta P}{t_c} \sim \frac{k}{\mu} \frac{g}{R_r} \frac{\Delta P}{h} \quad (2.38)$$

podemos obtener el tiempo característico de la flotación.

$$t_c \sim \frac{\mu \phi R_r h}{g k P_c} \sim 1 \text{ mes} \quad (2.39)$$

Para nuestros propósitos este tiempo es el adecuado, pues queremos ver la influencia de la diferencia de densidades en la dinámica del yacimiento.

Tiempo característico de extracción. Los tiempos de extracción dependen del gasto de extracción, Q_{ext} , y el volumen efectivo que se desaloja, esto es,

$$t_{cQ_{ext}} \sim \frac{\phi h \pi R^2}{Q_{ext}} \sim 10 \text{ años.} \quad (2.40)$$

Tiempo característico de difusión. Existen dos tipos de fenómenos difusivos en un yacimiento: la difusión térmica y la difusión másica. Los tiempos característicos de difusión molecular son del orden

$$t_{cD} \sim \frac{\tau R^2}{D} \sim 1000 \text{ años,} \quad (2.41)$$

y los de difusión térmica

$$t_{ca} \sim \frac{R^2}{\alpha_T} \sim 1000 \text{ años.} \quad (2.12)$$

Estos tiempos son muy largos comparados con cualquier otro, lo que permite simplificar al modelo matemático en gran medida. Aquí α_T es el coeficiente de difusión térmica de la matriz (lo anterior se calculó para roca caliza, la cual es típica de Cantarell).

Presión característica

La presión inicial en la cara superior del casquete, P_0 , se toma como la presión característica del sistema, $P_c = P_0$. También existe una diferencia de presión característica, ΔP_c . Para encontrar la relación entre ellas se analizan los órdenes de magnitud en la condición de frontera 2.28, en la zona $r_0 < r < R$,

$$\frac{\Delta P_c}{h(t)} \sim \frac{P_c g}{R_r} \quad (2.13)$$

o bien,

$$\Delta P_c \sim \frac{gh(t)}{R_r} P_c \quad (2.14)$$

Temperatura característica

En este trabajo se considera que la temperatura es constante en todo el yacimiento, a pesar de que el gas de inyección entra al casquete de gas a baja temperatura y enfría a la matriz. Sin embargo, este efecto es local y sólo afecta una pequeña región alrededor de la zona de inyección. El siguiente estudio de órdenes de magnitud da una idea aproximada del tamaño de la región afectada por la temperatura baja.

Considérese la figura 2-2, en ella se muestran los flujos de calor en la zona de influencia de la temperatura. El balance de los flujos de calor está dado por:

$$q_{iny} \sim q_R + q_k, \quad (2.45)$$

donde $q_{iny} = \rho_c Q_{iny} (T_R - T_{iny}) t$ representa el flujo de calor convectivo debido a la inyección del nitrógeno al tiempo t , $q_R = \pi r_0^2 (1 - \phi) \rho_R c_p (T_\infty - T_R) L$ es el cambio de energía interna en la roca, $q_k = 2\pi (1 - \phi) L k_R (T_\infty - T_R)$ el flujo de calor desde el yacimiento a la zona de baja

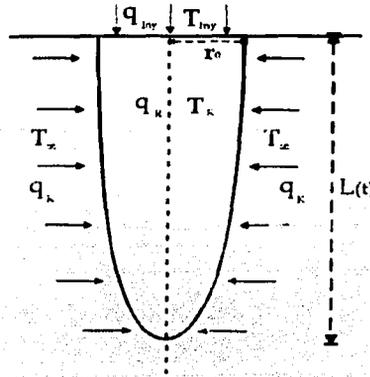


Figura 2-2: Flujos de calor en la zona de influencia de la temperatura.

temperatura, $L(t)$ es la longitud de penetración térmica, ρ_c y ρ_R son las densidades del fluido y la roca respectivamente, c_p capacidad calorífica del gas, T_{iny} es la temperatura de inyección, T_0 es la temperatura inicial del casquete, k_R la conductividad térmica de la roca, ϕ es la porosidad, Q_{iny} es el gasto volumétrico de inyección y α_R es la difusividad térmica de la roca. De este balance se obtiene la siguiente relación para la longitud de penetración térmica y el tiempo:

$$L(t) \sim \frac{\rho_c Q_{iny} c_p (T_R - T_{iny}) (T_\infty - T_R)}{2\pi k_R (1 - \phi) \left(\frac{r_0^2}{2\alpha_R} + 1 \right)} t. \quad (2.46)$$

Si en la relación anterior se tiene que $T_R = 0.9T_0$, es decir, la zona se ha enfriado un 10% en promedio, entonces para un sistema como Cantarell (si fuera homogéneo):

$$L_{[m]} \sim 1.83 \times 10^{-7} t_{[s]}. \quad (2.47)$$

Con este resultado se puede calcular que en un año el frente térmico avanza 5.78 metros. Este análisis permite afirmar que para un sistema como éste la temperatura permanece constante.

Velocidades caracterfsticas por convección natural

En un yacimiento petrolífero existen gradientes de temperatura generados por el calor del subsuelo (gradientes geotérmicos) [82]. Estos gradientes pueden generar movimientos convectivos térmicos en el casquete. Se puede utilizar análisis de órdenes de magnitud para estimar la influencia de dichos movimientos, en este trabajo se estudian dos casos extremos: gradientes horizontales y verticales.

Si se supone que un yacimiento tiene gradientes térmicos horizontales, pero no está sometido a procesos de extracción o inyección. Entonces el sistema estará regido por la ecuación de conservación de masa y la Ley de Darcy. Balanceando los términos dominantes se tiene:

$$v_c \sim \frac{K}{\mu} g \Delta \rho \sim u_c \frac{h}{R}. \quad (2.48)$$

Combinando estas relaciones, suponiendo que $\Delta \rho \sim \rho_0 \beta \Delta T_c$, y usando valores de Cantarell se obtiene:

$$u_c \sim \frac{K g \rho_0 \beta \Delta T_c R}{\mu h} \sim 5.7 \times 10^{-7} \frac{m}{s}. \quad (2.49)$$

En un año un gas con esta velocidad aproximadamente recorre horizontalmente 18 metros. Por otro lado, si el yacimiento tiene gradientes verticales de temperatura el balance de términos en la Ley de Darcy tiene la forma:

$$v_c \sim \frac{K}{\mu} \Delta \rho g \sim \frac{K}{\mu} \rho_0 \beta \Delta T_c g \sim 4.6 \times 10^{-8} \frac{m}{s}, \quad (2.50)$$

donde se usaron datos de Cantarell. Con esta velocidad el gas aproximadamente recorre verticalmente 1.4 metros por año. Finalmente, se concluye que los efectos de la convección natural por gradientes térmicos horizontales y verticales sólo serán importantes para tiempos mayores que 100 años y son despreciables para tiempos de explotación, es decir

$$t_{cN} \sim h_c/v_c \sim L_c/u_c \sim 100 \text{ años}$$

2.2.2. Ecuaciones adimensionales

Utilizando el análisis previo de órdenes de magnitud, es posible adimensionalizar las ecuaciones en las escalas correctas. Cabe mencionar que para la dimensión temporal existen muchas escalas características y en esta investigación sólo se resuelve la escala asociada a la diferencia de densidades (tiempo asociado a la gravedad). Esta solución representa una solución parcial de un problema más general de escalas múltiples. Existen métodos matemáticos que simplifican esta clase de problemas, estas técnicas permiten "dividir" una variable temporal en varias variables temporales independientes, en donde cada una de ellas representa una escala característica del problema. Una excelente revisión del tema se puede encontrar en el libro de Bender y Orzag [83]. Encontrar la solución en todas las escalas, no está en los propósitos de este trabajo de tesis.

Si se definen las variables adimensionales:

$$\text{tiempo} : \sigma = \frac{t}{t_c} \quad (2.51)$$

$$\text{coordenada vertical} : \eta = \frac{z}{h(t)} \quad (2.52)$$

$$\text{coordenada radial} : \xi = \frac{r}{R} \quad (2.53)$$

$$\text{presión} : p = \frac{P - P_c}{\Delta P_c} \quad (2.54)$$

y los parámetros adimensionales:

$$\beta = \frac{gh(t)}{R_r} = \frac{\Delta P_c}{P_c} \quad (2.55)$$

$$\gamma = \frac{t_c D}{\tau h^2(t)} = \frac{t_c}{t_c D} \quad (2.56)$$

$$\epsilon = \frac{h(t)}{R} \quad (2.57)$$

donde β mide los cambios de la presión con respecto a la presión característica; γ compara los

tiempos convectivos y difusivos; ε es la razón de aspecto del casquete de gas, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{(\beta p + 1)} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - \frac{t_c}{t_{cQ_{ext}}} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{s}{1 - sY} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = \\ & \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + (1 + \kappa t)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} - (1 + \kappa t) \left(\frac{\beta}{(1 - sY)} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{s(\beta p + 1)}{(1 - sY)^2} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} \left(\frac{\beta}{(\beta p + 1)} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{s}{1 - sY} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) \\ & + \left((1 + \kappa t) \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\beta p + 1}{(1 - sY)} \right) \left(\frac{\beta}{(\beta p + 1)} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{s}{1 - sY} (1 + \kappa t) \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Y}{\partial \sigma} - \frac{t_c}{t_{cQ_{ext}}} \eta \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \left((1 + \kappa t) \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\beta p + 1}{(1 - sY)} \right) (1 + \kappa t) \frac{\partial Y}{\partial \eta} \\ = & \gamma \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial Y}{\partial \xi} + (1 + \kappa t)^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} \right) + \\ & \gamma \left(\varepsilon^2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \left(\frac{\beta}{(\beta p + 1)} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{s}{1 - sY} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) + (1 + \kappa t)^2 \frac{\partial Y}{\partial \eta} \left(\frac{\beta}{(\beta p + 1)} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{s}{1 - sY} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Estas dos ecuaciones se pueden simplificar si se recuerda que los tiempos característicos de explotación son más largos que los de convección, $t_c/t_{cQ_{ext}} \rightarrow 0$, con lo que:

$$(1 + \kappa t) \sim \left(1 + \frac{t}{t_{cQ_{ext}}} \right) \rightarrow 1, \quad (2.60)$$

es decir, la región temporal de solución del problema está acotada para tiempos tales que $t \ll t_{cQ_{ext}}$. Además, $\beta \ll 1$ para la mayoría de los casos prácticos (las variaciones de presión son pequeñas comparadas con la presión misma). Después de utilizar estos resultados obtenemos para la presión:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{\partial \sigma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{s}{1 - sY} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\beta}{(1 - sY)} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{s}{(1 - sY)^2} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} \left(\beta \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{s}{1 - sY} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) \\ & + \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{1}{1 - sY} \right) \left(\beta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{s}{1 - sY} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (2.61)$$

y para la concentración:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Y}{\partial \sigma} - \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{1}{1-sY} \right) \frac{\partial Y}{\partial \eta} \\ &= \gamma \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} \right) + \\ & \gamma \left(\varepsilon^2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \left(\beta \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{s}{1-sY} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \left(\beta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{s}{1-sY} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.62)$$

con las condiciones de frontera e iniciales:

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = 0, \quad (2.63)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = 0, \quad (2.64)$$

$$Y = 1 : (0 < \xi \leq r_0/R), \quad (2.65)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 : (r_0/R < \xi < 1), \quad (2.66)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\beta p_{\eta=0} + 1}{1-sY_{\eta=0}} - \alpha_{iny} H \left(\xi - \frac{r_0}{R} \right), \quad (2.67)$$

$$\alpha_{iny} = \frac{\mu h_0 Q_{iny}}{k \pi r_0^2 \Delta p_c}, \quad (2.68)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0, \quad (2.69)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{\beta p_{\eta=1} + 1}{1-sY_{\eta=1}} - \alpha_{ext}, \quad (2.70)$$

$$\alpha_{ext} = \frac{h_0 \mu}{k \Delta p_c} \frac{dh}{dt}, \quad (2.71)$$

$$Y(\sigma = 0) = 0, \quad (2.72)$$

$$p(\sigma = 0) = \frac{e^{\beta \eta} - 1}{\beta}, \quad (2.73)$$

donde, α_{iny} y α_{ext} , representan los gastos adimensionales de inyección y extracción. El sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, definido por 2.61-2.73 es del tipo:

$$\begin{aligned} p &= p\left(\sigma, \eta, \xi : \gamma, \beta, s, \varepsilon, \alpha_{iny}, \alpha_{ext}, \frac{r_0}{R}\right), \\ Y &= Y\left(\sigma, \eta, \xi : \gamma, \beta, s, \varepsilon, \alpha_{iny}, \alpha_{ext}, \frac{r_0}{R}\right). \end{aligned}$$

Este sistema se resuelve numéricamente utilizando diferencias finitas y métodos iterativos. En el Apéndice B se explica más detalladamente dicho método numérico.

2.3. Resultados

2.3.1. Sin inyección ni extracción

Para medir la influencia de la diferencia de densidades en la dinámica del yacimiento, se realizó un cálculo suponiendo que la inyección y la extracción son nulas ($\alpha_{ext} = \alpha_{iny} = 0$). Con esto se evita la existencia de movimiento por convección forzada y la única fuerza sobre el sistema es la gravitatoria actuando sobre las diferencias de densidades. La condición inicial cambia de $Y = 0$, a $Y = Y(r, z)$. La concentración inicial se propone como una gaussiana del tipo:

$$Y(\sigma = 0) = e^{-Ar^2 - Bz^2}.$$

En la figura 2-3 se muestran los resultados para una corrida hasta $\sigma = 1$, en este caso el tiempo característico se definió como $t_c = \mu s \phi R_r^2 / (g^2 k P_c)$ (tiempo que tarda el nitrógeno en llegar al fondo del casquete sólo por gravedad). Los valores de los parámetros que se utilizaron son típicos de un yacimiento y son los siguientes: $\beta = 1 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.2$, $\gamma = 4 \times 10^{-3}$ y $s = 0.04$.

De la figura 2-3 se concluye que los movimientos convectivos gravitacionales son importantes para la dinámica general del sistema. El efecto más importante que producen es la precipitación del N₂, que bajo condiciones de yacimiento es más denso que el gas del casquete. Lo anterior se puede comprobar en el complejo Cantarell, donde las mediciones demuestran que existe más nitrógeno por debajo de los pozos inyectoros que a un lado de ellos. Sin embargo, en el caso más general los efectos gravitacionales no están solos. La siguiente sección muestra los resultados cuando se toman en cuenta la extracción y la inyección.

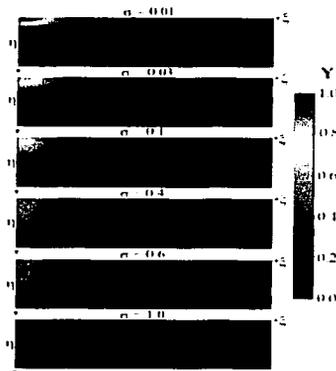


Figura 2-3: Concentración de nitrógeno en el casquete. Sin inyección.

2.3.2. Con inyección y extracción

En la sección anterior se discutió la influencia de la gravedad sobre la dinámica del yacimiento sin inyección ni extracción. En esta sección se incluyen los efectos de la inyección y la extracción. Las figuras 2-4, 2-5 y 2-6 muestran la distribución de nitrógeno en el casquete como función de las coordenadas ξ y η para distintos tiempos y los parámetros $s = 0.04$, $\varepsilon = 0.2$, $\beta = 1 \times 10^{-4}$, $\gamma = 4 \times 10^{-3}$, $r/R_0 = 0.2$. En ellas se puede observar que existe una competencia entre los efectos gravitacionales y de convección forzada. Por un lado, la convección forzada atrae al nitrógeno hacia las esquinas inferiores del casquete. Por el otro, la diferencia de densidades hace que el nitrógeno se deposite en la parte inferior del casquete de gas. Estas distribuciones de nitrógeno concuerdan con lo observado en el campo Akal de Cantarell, donde después de más de dos años de iniciada la inyección, existen zonas de la parte superior del casquete con vecindad a la zona de inyección, sin incremento en la concentración de nitrógeno.

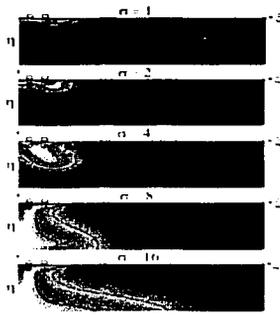


Figura 2-4: Concentración de nitrógeno en el casquete de gas cuando la extracción es mayor que la inyección. El nitrógeno es atraído hacia las esquinas inferiores del casquete hasta que se acumula suficiente nitrógeno para que los efectos gravitacionales cobren importancia.

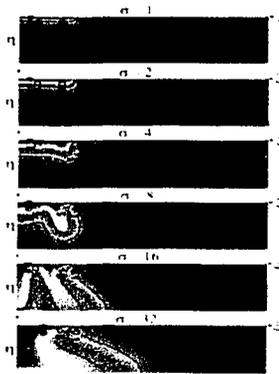


Figura 2-5: Concentración de nitrógeno en el casquete de gas cuando la extracción es menor que la inyección. En este caso dominan los efectos gravitacionales y aparecen inestabilidades en forma de dedos.

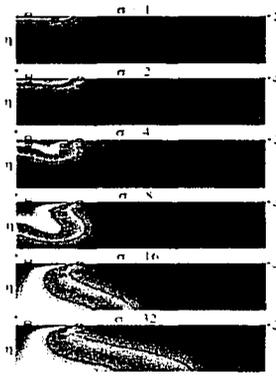


Figura 2-6: Concentración de nitrógeno en el casquete de gas cuando la extracción es igual a la inyección. Los efectos gravitacionales y de convección forzada son del mismo orden. Este sería el caso más parecido a lo que ocurre en Cantarell.

Capítulo 3

Convección en la zona de aceite

En el capítulo anterior se mostró que el nitrógeno del casquete de gas se precipita hacia la zona del contacto gas-aceite, por lo que es importante averiguar si existen corrientes convectivas que pudieran dispersar al nitrógeno en la zona de aceite. Pueden existir dos clases de fenómenos convectivos en la zona de aceite: el forzado, debido a la extracción de petróleo, y el natural, causado por los gradientes geotérmicos de temperatura. El primero de ellos puede desempeñar un papel importante en la dispersión de nitrógeno. Su efecto principal es que la zona contaminada por difusión baja a la misma velocidad que la superficie del contacto gas-aceite, como se verá más adelante. Por otro lado, el segundo de estos efectos generalmente aparece en forma de rollos o celdas de convección. Estas estructuras podrían tener un papel importante en la dispersión, ya que actúan como mezcladoras, transportando al petróleo contaminado desde arriba hacia abajo; y al no contaminado de abajo hacia arriba, donde éste se contaminaría por difusión.

Utilizando la aproximación de yacimiento homogéneo, en este capítulo se muestra que: 1) para gradientes de temperatura verticales los procesos convectivos naturales no ocurren en la zona de aceite, al menos para ciertas regiones del espacio paramétrico; 2) los gradientes horizontales de temperatura siempre generan movimientos convectivos, sin embargo, su magnitud es pequeña respecto a las velocidades producidas por convección forzada; 3) la convección forzada produce dispersión de nitrógeno en la zona bajo el contacto gas-aceite; la magnitud de este fenómeno depende principalmente del valor del número de Peclet dispersivo.

3.1. Convección por gradiente geotérmico vertical

El caso de la convección térmica de un yacimiento homogéneo con gradiente térmico vertical en la zona de aceite, corresponde al problema clásico de Horton-Rogers-Lapwood (1945), equivalente al de Rayleigh-Bénard en fluidos confinados entre dos paredes horizontales, pero ahora en un medio poroso [9], [28] y [29]. Lo anterior es válido si no se toma en cuenta a la convección forzada producida por la extracción, o se estudian zonas alejadas de los pozos productores. El problema consiste en un medio poroso homogéneo completamente saturado por un fluido. El sistema está dentro de un campo gravitatorio y uno de temperaturas con gradiente vertical. El esquema a estudiar se muestra en la figura 3-1.

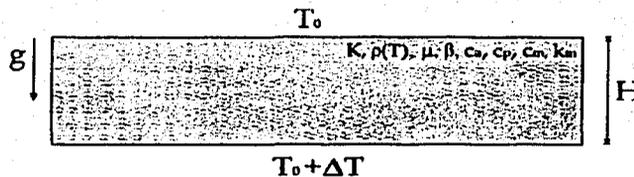


Figura 3-1: Medio poroso saturado bajo un gradiente vertical de temperatura.

Existe una solución base en equilibrio, la cual es llamada el régimen de conductividad térmica, donde la velocidad en el sistema es cero y el gradiente de temperaturas es lineal. Cuando se utiliza un análisis de estabilidad lineal, para perturbar la solución base, se obtiene el problema de autovalores:

$$(\nabla^2 - \alpha^2)^2 w = \alpha^2 Ra w, \quad (3.1)$$

con las condiciones de frontera:

$$\left. \frac{d^2 w}{dz^2} \right|_{z=0,1} = w|_{z=0,1} = 0, \quad (3.2)$$

donde, w es la perturbación de la velocidad en dirección vertical, $Ra = \rho_0 g \beta k H \Delta T / (\mu \alpha_m)$ es el número de Rayleigh y α los autovalores del problema. La solución a este problema de valores

propios es:

$$w = \text{sen}(j\pi z), \quad (3.3)$$

donde los autovalores están definidos por la relación:

$$Ra = \frac{(j^2\pi^2 + \alpha^2)^2}{\alpha^2} : j = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

El valor mínimo del número de Rayleigh se obtiene cuando $j = 1$ y $\alpha = \pi$. En conclusión, el sistema permanece estable para $Ra < 4\pi^2$. Esto quiere decir, que para este rango del espacio paramétrico, el sistema es puramente conductivo. En el **apéndice C**, se ha realizado un análisis más detallado para el problema de Horton-Rogers-Lapwood. Diversos estudios de estabilidad no lineal débil han encontrado que para perfiles no lineales de temperatura, medios no homogéneos, asimetrías geométricas y dependencias de las propiedades físicas con la temperatura, la forma de flujo es preferentemente hexagonal [30]-[36].

El número de Rayleigh para campos petrolíferos homogéneos sometidos a un gradiente geotérmico es de orden unitario, por lo que generalmente no presentan convección térmica por gradientes verticales. En el caso de Cantarell el número de Rayleigh es aproximadamente 1.5, entonces si la aproximación de yacimiento homogéneo es válida, Cantarell no presenta convección natural o térmica de este tipo.

Al no haber movimiento convectivo térmico, la única posibilidad para que el nitrógeno se incorpore en el aceite es la difusión. Sin embargo, como antes se mencionó, estos procesos son extremadamente lentos, por lo que prácticamente se puede considerar que el aceite no se contamina con nitrógeno.

3.2. Convección por gradiente geotérmico horizontal

En la sección anterior se demostró que para gradientes verticales de temperatura con bajo número de Rayleigh ($< 4\pi^2$), la convección natural o térmica en el casquete de aceite no se presenta. Sin embargo, para gradientes horizontales de temperatura no es posible definir un Rayleigh crítico y en este caso los movimientos convectivos siempre existen. El problema de un fluido dentro de un medio poroso sometido a gradientes horizontales de temperatura y

bajo aproximación de aguas someras (Figura 3-2), ha sido tratado por Bejan y Tien [37] e independientemente por Walker y Homsy [38]. Ellos demuestran que en la zona central de la cavidad sólo existe flujo horizontal, y en las regiones exteriores existen dos capas límite de tamaño $\delta \sim H Ra^{-1/2}$, donde H es la altura del yacimiento y $Ra = \rho_0 g \beta k H \Delta T / (\mu \alpha_m)$ es el número de Rayleigh.

El sistema que describe al problema de la convección por gradiente geotérmico horizontal se describe a continuación. Suponga a un fluido saturando completamente a una cavidad porosa bidimensional de altura H y longitud L , de tal forma que $L \gg H$ (aguas someras). Existe una diferencia de temperaturas ΔT entre las caras laterales de la cavidad. La figura 3-2 muestra el sistema a estudiar.

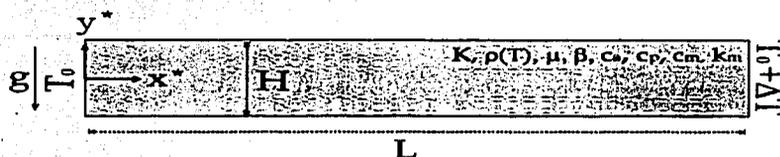


Figura 3-2: Convección natural por gradientes de temperatura horizontales.

El modelo matemático está basado en la ley de Darcy, la conservación de masa y energía y la aproximación de Boussinesq. Si se adimensionalizan las ecuaciones y se utiliza la aproximación de aguas someras ($H^2/L^2 = \gamma \rightarrow 0$) se obtiene el sistema de ecuaciones adimensionales:

$$\gamma Ra \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.7)$$

con las condiciones de frontera de flujo cero en las paredes: $u = 0$ en $x = 0, 1$ y $v = 0$ en $y = \pm 1/2$ y de temperatura conocida en los extremos; $\theta = 0$ en $x = 0$ y $\theta = 1$ en $x = 1$, donde u es la velocidad horizontal y v la vertical, θ es la temperatura, x y y son las coordenadas

horizontal y vertical, respectivamente. El sistema de referencia está ubicado en el centro de la cara lateral izquierda.

Finalmente, la solución para la velocidad horizontal y vertical es:

$$u = \gamma \left(\frac{1}{2} - y \right) + O(\gamma^2) \quad (3.8)$$

$$v = 0 + O(\gamma^2), \quad (3.9)$$

mientras que el resultado para la temperatura es:

$$\theta = x + \gamma Ra \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6} \right) + \theta_A + O(\gamma^2), \quad (3.10)$$

donde θ_A es una constante de acoplamiento que se obtiene al acoplar las soluciones de las capas límite laterales con la solución interna. En el apéndice D se describe con más detalle el método asintótico utilizado para resolver este problema.

La estabilidad de la solución ha sido estudiada desde 1969 por Gill [39]. Sin embargo, los resultados cambian dramáticamente. Por ejemplo, Kwong y Chen [40] (1978) predicen un valor crítico para el número de Rayleigh de 308 para viscosidad constante y de 98 cuando la viscosidad depende de la temperatura. Por otro lado, sus experimentos proporcionan un valor de 66.2 para el número de Rayleigh crítico basado en L (horizontal). La convección horizontal en medios porosos no homogéneos ha sido estudiada en diversas ocasiones [41]-[44], estos trabajos muestran que la convección horizontal se ve favorecida cuando la permeabilidad y/o la conductividad térmica en esta dirección son máximas. En otros estudios cuando las propiedades son variables se concluye que el efecto principalmente es sobre la transferencia de calor (número de Nusselt) [45]-[53].

Si se utiliza la solución anterior se puede estimar lo que ocurre en Cantarell, donde las velocidades máximas dimensionales serían $u^* = 9.4 \times 10^{-9} m/s$, y el avance máximo en dos años por convección natural sería de 60 *cm*. Lo anterior, obviamente, si se considera que Cantarell es homogéneo y tiene la geometría de la figura 3-2. Bajo estas mismas suposiciones la solución sería estable y existiría sólo una celda de convección, ya que para Cantarell se puede calcular un Rayleigh horizontal de 59 que está por abajo del valor experimental 66.2 reportado por Kwong y Chen [40] (valor más pequeño reportado). La geometría del yacimiento desempeña un

papel importante en la dinámica del yacimiento, por lo que podría existir más de una celda de convección; sin embargo, las velocidades probablemente serían del mismo orden de magnitud, por lo que su impacto en la dispersión del nitrógeno sería mínimo.

La dispersión de nitrógeno debido a este tipo de movimiento convectivo es completamente despreciable. Para aclarar esto se puede comparar el avance horizontal del nitrógeno por convección en dos años, 60 cm, contra el avance vertical de nitrógeno por difusión pura en un tiempo igual, $\sqrt{tD} \sim 47$ cm.

3.3. Convección forzada en la línea de contacto gas aceite

En esta sección se analiza el impacto de la convección forzada en la zona de aceite sobre la dispersión de nitrógeno. Supóngase un medio poroso saturado por un líquido y un gas, de tal forma que la columna de gas (nitrógeno) está colocada sobre la del líquido (aceite). La altura original de la columna líquida es h_0 . Debido a que desde la parte inferior del recipiente da inicio un proceso de extracción del aceite a un gasto constante, el nivel de éste empezará a disminuir a una velocidad constante u . Paralelamente al proceso de extracción ocurre otro en la interfaz: las moléculas del gas se difunden en la zona líquida y las del líquido se difunden en la zona de gas.

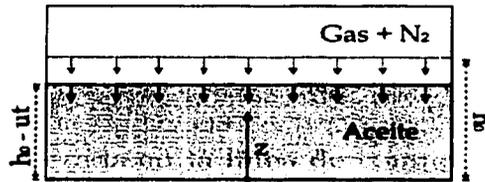


Figura 3-3: Dispersión debida al movimiento de la línea del contacto gas aceite.

Si despreciamos el transporte de moléculas de la zona líquida a la gaseosa, entonces el modelo matemático que describe al proceso anterior, es la ecuación de dispersión en una dimensión en la zona líquida:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial z} = \left(\frac{D\phi}{\tau} + \alpha |u| \right) \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (3.11)$$

donde, ϕ es la porosidad del medio, C la concentración másica de las moléculas del gas en la zona líquida, t es la variable temporal, z la variable espacial con origen en la parte inferior del medio poroso, D es el coeficiente de difusión libre binario entre las moléculas del gas y las del líquido (en la fase líquida), τ la tortuosidad y α el coeficiente de dispersividad.

La concentración original de nitrógeno en el aceite es cero; entonces la condición inicial para resolver la ecuación 3.11 es:

$$C(t=0) = 0. \quad (3.12)$$

Por otro lado, si se supone que la cara inferior del medio poroso es impermeable al nitrógeno, entonces el flujo de éste es cero y de la ley de Fick se tiene que:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (3.13)$$

Por último, en la interfaz móvil el valor de la concentración se conoce:

$$C(z=h(t)) = C_0, \quad (3.14)$$

aquí, $h(t) = h_0 - ut$ para tiempos tales que $h_0 > ut$, y C_0 es una constante siempre menor o igual al valor de saturación del nitrógeno en el aceite.

Para adimensionalizar el modelo se define el conjunto de transformaciones no ortogonal siguiente:

$$Y = \frac{C}{C_0}, \quad \eta = \frac{z}{h_0 - ut} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{t}{h_0/u} \quad (3.15)$$

Finalmente se obtiene la ecuación adimensional:

$$\phi(1-\sigma) \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + (1+\eta\phi) \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{Pe}{(1-\sigma)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2}, \quad (3.16)$$

donde, $Pe = \frac{D\phi}{\tau u h_0} + \frac{\alpha}{h_0}$ es el número de Peclet, que contiene los efectos dispersivos y difusivos. Esta ecuación es válida para tiempos tales que $0 \leq \sigma < 1$ y está sujeta a las condiciones iniciales y de frontera:

$$Y|_{\sigma=0} = Y|_{\eta=1} - 1 = \left. \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0. \quad (3.17)$$

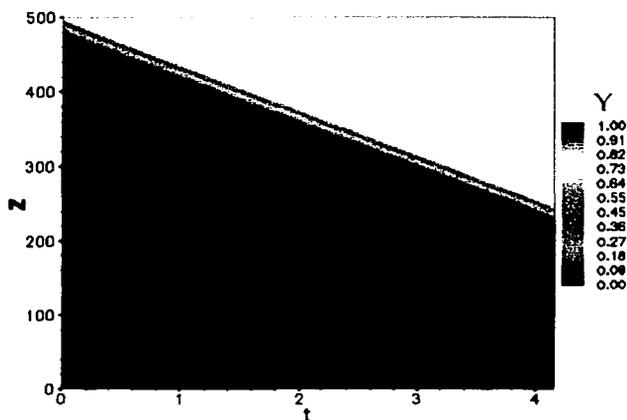


Figura 3-4: Concentración másica Y como función del tiempo y la posición. Las unidades de posición son metros y de tiempo años.

3.3.1. Resultados

El sistema de ecuaciones 3.16 y 3.17 se resolvió utilizando diferencias finitas centradas. Para ello se utilizó una malla de tamaño 9000×9000 , con $\Delta\sigma = \Delta\eta = 1.11 \times 10^{-4}$. Los cálculos se realizaron utilizando los valores siguientes: $\phi = 0.08$, $\alpha = 10$ m, $u = 1.9 \times 10^{-6}$ m/s (60 m/año), $D = 3.5 \times 10^{-9}$ m²/s, $\tau = 1.2$ y $h_0 = 500$ m. Con los datos anteriores el número de Peclet es $Pe = 2 \times 10^{-2}$.

La figura 3-4 presenta la evolución temporal de la concentración de nitrógeno en la zona líquida. En dicha figura se observa que la contaminación de nitrógeno se limita a una zona reducida por debajo de la línea de CGA (contacto gas-aceite). Para observar con más detalle el proceso, la figura 3-5 muestra la distancia medida desde la interfaz hasta el punto en que la concentración de nitrógeno es $0.01C_0$. Aquí se observa que la región contaminada con nitrógeno alcanza su tamaño máximo en poco más de un mes; después de este tiempo, el crecimiento de dicha zona se detiene, abarcando una distancia aproximada de 36 metros.

Este resultado muestra que: la zona afectada por el nitrógeno se estabiliza a corto plazo

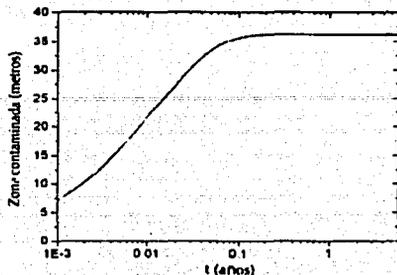


Figura 3-5: Zona contaminada con N_2 medida a partir del CGA ($Pe = 2 \times 10^{-2}$).

y que el tamaño de la zona contaminada depende directamente del número de Peclet y de la velocidad de la interfaz gas-aceite.

Efecto de la dispersión en la salida de un pozo productor

Si se utilizan los resultados anteriores, se puede estimar el efecto de la dispersión de nitrógeno sobre la concentración de nitrógeno a la salida de un pozo productor. Para ello es necesario hacer algunas suposiciones: la razón de producción se supone constante a lo largo del pozo, no existe deformación en la línea del CGA y el campo de velocidades se modifica de manera despreciable y se considera radial.

Si un pozo productor está ubicado en el intervalo $z_2 - z_1$ (ver figura 3-6), entonces la concentración másica instantánea, C_p , a la salida del pozo se puede calcular por medio de:

$$C_p(t) = \frac{1}{z_1 - z_2} \int_{z_1}^{z_2} C(z, t) dz, \quad (3.18)$$

ésto es válido cuando el pozo aún no se ha invadido por el casquete de gas, $t \leq (h_0 - z_2)/u$. En

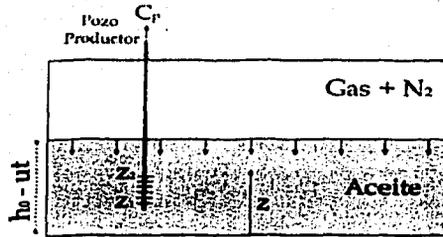


Figura 3-6: Estimación del efecto de la dispersión de N_2 en un pozo productor.

términos de las variables adimensionales se obtiene:

$$Y_p(t) = \frac{(1-\sigma)h_0}{z_1 - z_2} \int_{\frac{z_1}{(1-\sigma)h_0}}^{\frac{z_2}{(1-\sigma)h_0}} Y(\eta, \sigma) d\eta, \quad (3.19)$$

para tiempos tales que $\sigma \leq 1 - z_2/h_0$. Por ejemplo, si el intervalo de producción de un pozo se encuentra entre los 400 y 200 metros ($z_1 = 200$, $z_2 = 400$) y se utilizan los datos anteriores, entonces la concentración másica a la salida del pozo se muestra en la figura 3-7. Aquí se puede observar que el incremento de la concentración de N_2 es mínima, al menos hasta antes de que el pozo se invada. No se debe olvidar que este resultado no se obtuvo de manera estricta pues las simplificaciones que se han hecho son importantes. Sin embargo, puede dar idea de lo que realmente pasa en el yacimiento.

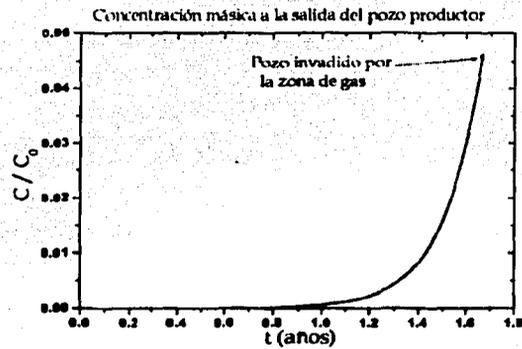


Figura 3-7: Efecto de la dispersión de N_2 en la producción de un pozo.

Parte II

Inyección de nitrógeno en un yacimiento naturalmente fracturado

Capítulo 4

Introducción

Como se mencionó previamente, la explotación de un yacimiento petrolífero produce una disminución de la presión original. En yacimientos homogéneos la caída de presión se compensa inyectando agua (salmuera) en la zona de agua. Sin embargo, en un yacimiento naturalmente fracturado (YNF), este proceso puede ser muy delicado, pues el agua se puede filtrar por las fracturas alcanzando la zona de producción, elevando así la razón agua/aceite. Este fenómeno podría ser la explicación de los incidentes ocurridos en Abkatún, Pol y Chuc. Esto se debe a que el agua en la fractura tiene más movilidad que el aceite. Una forma de evitar estos fenómenos es inyectar un gas inerte desde el casquete. En el caso del complejo Cantarell la manera de resolver el problema del mantenimiento de la presión fue mediante la inyección de nitrógeno.

En el casquete de gas el nitrógeno y el gas natural pueden mezclarse con relativa facilidad, aunque hay zonas en que esto ocurre difícilmente, como se mostró en el capítulo 2.

Una pregunta inmediata después de la discusión de la dinámica del casquete de gas es: ¿Qué fenómenos ocurren en la zona de aceite?. Existen principalmente dos mecanismos que pueden causar que el nitrógeno se mezcle con el aceite del yacimiento:

- **Difusión:** La difusión molecular de nitrógeno en el petróleo es, como todos los procesos difusivos, muy lenta. Para procesos de difusión en líquidos, el orden de magnitud característico para el coeficiente de difusión libre es $D \sim 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$. Además, este proceso se retarda aún más dentro de una matriz porosa. Generalmente el proceso de difusión en medios porosos no actúa solo, si no que es parte de un proceso más complejo llamado

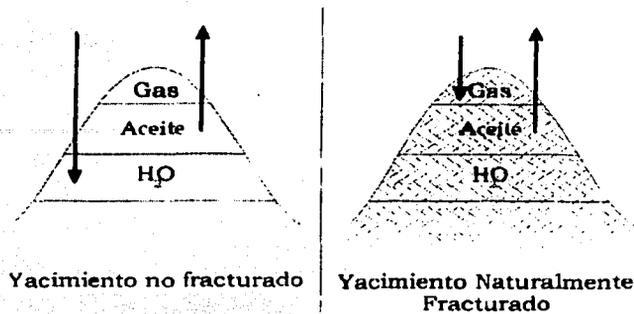


Figura 4-1: En yacimientos fracturados la inyección de gas es más conveniente que la de agua.

dispersión. La dispersión surge cuando las velocidades macroscópicas de una mezcla en un medio poroso son diferentes de cero. La existencia de estas velocidades incrementa el ritmo de mezclado de los componentes. Cuando las velocidades son altas, la dispersión llega a ser 10 veces más grande que la difusión molecular [5].

- **Convección:** Aún no se ha podido medir directamente si hay o no convección natural en un YNF. Si la convección natural existe debe ser en zonas alejadas de los pozos productores, donde la convección forzada no es dominante. La convección natural, en caso de existir, debe ser el mecanismo más importante de transporte de N_2 dentro de un YNF después de la convección forzada. Existen varios datos que hacen sospechar que este tipo de comportamiento ocurre:
 - La composición original del petróleo a lo largo del pozo es altamente uniforme, cosa que no ocurre en yacimientos homogéneos.
 - Los gradientes de temperatura en el pozo son mucho más pequeños en un YNF que en yacimientos no fracturados.

En los capítulos siguientes se estudia el comportamiento físico básico de un sistema fracturado, del cual dependerá el comportamiento dinámico global de un YNF.

Capítulo 5

Transferencia de calor matriz-fractura

Durante el proceso de inyección de nitrógeno, ocurren fenómenos de transferencia de calor. Esto se debe a que el nitrógeno entra al casquete de gas aproximadamente a 308 K, mientras que la temperatura promedio en la zona de gas es de 358 K. Es muy importante estimar los cambios de temperatura ya que estos pueden generar fenómenos de condensación y convección térmica. En este estudio no se toman en cuenta los procesos de condensación. Sin embargo, en un primer intento de entender el problema se utilizará esta aproximación.

El problema de la transferencia de calor entre una roca y un fluido ha sido estudiado por la geotermia y en los métodos de recuperación mejorada de petróleo con vapor caliente o combustión *in situ*. Existen excelentes revisiones de los métodos de recuperación mejorada con vapor: Lake [5], White y Moss [6], Prats [7] y Hong [8]. La principal diferencia de este trabajo con estas referencias, es que en ellas el vapor es inyectado en medios homogéneos y aquí se analizan medios fracturados. Este hecho modifica completamente la física del problema. En la práctica se usan modelos simplificados analíticos o semianalíticos para estimar y predecir los efectos térmicos durante la inyección de vapor. Estos modelos están basados en el método de Marx y Langenheim [55] y se usan dependiendo de las características del yacimiento. Algunos de ellos son: el método de Boberg-Lantz para arenas finas, el de Towson-Boberg para yacimientos de baja presión, etc. [56]-[63].

En este trabajo se utilizó un modelo simplificado tipo Warren & Root [64] en una dimensión. El sistema físico a estudiar es una secuencia lineal de cubos de lado L , difusividad térmica α_m y conductividad térmica k_m . Dichos cubos están separados por una fractura de grosor $b = 2d \ll L$. La cara superior de los cubos es adiabática, mientras que la inferior tiene temperatura T_∞ . Los cubos están contenidos entre dos placas verticales, adiabáticas e impermeables. Un fluido de densidad ρ , capacidad calorífica c_p , viscosidad dinámica μ y conductividad térmica k_f , se inyecta al sistema de fracturas desde arriba, a un gasto másico constante \dot{m}_T . El fluido con temperatura T_{iny} entra a las fracturas a un gasto másico \dot{m} igual para todas (por simetría), de tal forma que:

$$\dot{m}_T = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i = N\dot{m} \quad (5.1)$$

en donde N , es el número de fracturas. La figura 5-1 representa el modelo a estudiar, donde además se muestra la ubicación del sistema coordenado de referencia, colocado en el punto central superior de una fractura arbitraria.

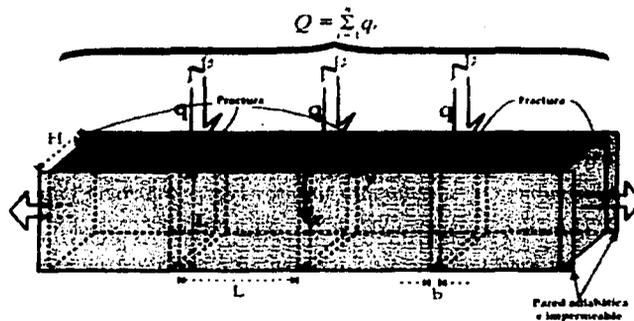


Figura 5-1: Modelo físico para estimar el efecto de la inyección sobre la temperatura.

La coordenada x mide la posición vertical en dirección hacia abajo y la coordenada y , la posición horizontal de izquierda a derecha. La coordenada z , no tiene papel alguno en el sistema, ya que por simetría el problema no depende de ella. Lo anterior es válido excepto en zonas cercanas a las placas contenedoras, donde los términos convectivos son del orden de los

difusivos $\rho u \frac{du}{dx} \sim \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$. Con un análisis de orden de magnitud se puede estimar el tamaño l de estas zonas:

$$\frac{l}{L} \sim Re_{eff}, \quad (5.2)$$

en donde Re_{eff} es el número de Reynolds modificado, definido por:

$$Re_{eff} = \frac{\rho U d^2}{\mu L} \ll 1. \quad (5.3)$$

Dado que $l \ll L$, el efecto es local; por lo tanto, se puede considerar que el sistema es simétrico en z . Existen dos simetrías más en el sistema: una que divide al cubo en dos parte iguales, y la otra que parte a la fractura en dos; ambas pertenecientes a la familia de planos xz . Las dos simetrías se muestran en la figura 5-2; gracias a ellas el problema completo se puede estudiar utilizando la mitad de una fractura y una matriz.

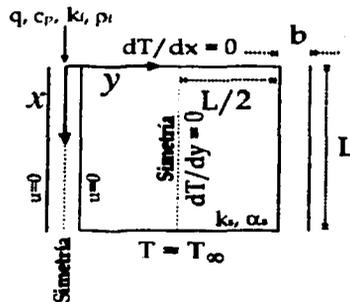


Figura 5-2: Gracias a las simetrías del sistema el problema se reduce a la zona delimitada por las líneas punteadas.

5.1. Modelo matemático

5.1.1. Ecuaciones

Para este estudio se considera a la matriz porosa como un sólido. Esto es válido si las velocidades dentro de ella son pequeñas comparadas con las velocidades de inyección, lo cual

deja de ser cierto cuando la permeabilidad matricial es alta. Bajo la suposición anterior, la única ecuación que modela a la matriz es la conservación de energía dada por

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \alpha_m \left(\frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} \right), \quad (5.4)$$

donde, T_m es la temperatura en la matriz, t es la coordenada temporal, α_m y k_s son la difusividad y conductividad térmicas efectivas de la matriz, respectivamente, y finalmente, x y y son las coordenadas espaciales

Por otro lado, en la fractura la ecuación de balance de cantidad de movimiento se supone dada por:

$$\mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{dP}{dx} - \rho g, \quad (5.5)$$

donde, U es la velocidad en dirección x , g la aceleración de la gravedad y P la presión. Esta ecuación se obtiene de las ecuaciones de Navier-Stokes y es válida cuando se tiene flujo completamente desarrollado, es decir, las velocidades transversales a la fractura son mucho menores que las longitudinales. Esta ecuación no es válida en una región cercana a la entrada de la fractura, cuyo orden de magnitud es $d \text{Re}_d \ll L$, ($\text{Re}_d = \rho U d / \mu$). En general esta cantidad es pequeña comparada con lo largo de la fractura, por lo que la ecuación anterior es una buena aproximación.

La ecuación de conservación de energía para una fractura delgada es:

$$\rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x} = k_f \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (5.6)$$

donde se considera un flujo completamente desarrollado. El término $\partial^2 T / \partial x^2$ es pequeño comparado con $\partial^2 T / \partial y^2$ debido a la esbeltez de la fractura ($d \ll L$), por lo que no aparece en la ecuación 5.6. De igual manera, el término temporal $\partial T / \partial t$ no aparece en la ecuación ya que los tiempos convectivos en la fractura U/L , son muy cortos comparados con los difusivos en la matriz L^2/α_m . Esta aproximación cuasiestacionaria es frecuentemente utilizada en problemas de transferencia de calor conjugada, dada la diferencia de escalas temporales entre procesos difusivos y convectivos.

La ecuación de conservación de masa en la fractura tiene la forma:

$$\int_{-d}^d \rho U dy dx = \dot{m}. \quad (5.7)$$

La relación anterior supone que no hay transferencia de masa entre la fractura y la matriz.

Finalmente, para que el sistema sea cerrado, es necesario incluir una relación de estado. Para ello se utiliza la ecuación de estado de un gas real:

$$\rho = \frac{P}{R_r T},$$

donde, $R_r = R_g z_{N_2} / W_{N_2}$, W_{N_2} es el peso molecular del nitrógeno, z_{N_2} es la compresibilidad del gas y R_g la constante universal de los gases. Para simplificar este problema se supone que la compresibilidad del gas permanece constante ante los cambios de presión y temperatura del sistema.

5.1.2. Condiciones de frontera e iniciales

Inicialmente la matriz tiene la temperatura del yacimiento T_0 , es decir:

$$T_m = T_0 \text{ en } t = 0. \quad (5.8)$$

Dado que la matriz se considera un sólido impermeable, no hay transferencia de momento en las paredes de la fractura, por lo que las velocidades son cero:

$$U = 0 \text{ en } y = \pm d. \quad (5.9)$$

El fluido entra a la temperatura de inyección a la fractura, por lo que:

$$T = T_{iny} \text{ en } x = 0. \quad (5.10)$$

En la mitad de la fractura está ubicado un plano de simetría, entonces las variaciones de temperatura en el fluido son cero:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \quad (5.11)$$

La temperatura y el flujo de calor son funciones continuas en las paredes de la fractura por lo que:

$$T = T_m \text{ en } y = \pm d \quad (5.12)$$

$$k_f \frac{\partial T}{\partial y} = k_s \frac{\partial T_m}{\partial y} \text{ en } y = \pm d \quad (5.13)$$

5.1.3. Ecuaciones adimensionales

Si utilizamos las variables adimensionales siguientes en la fractura: $u = U/u_c$, $p = P/P_c$, $\eta = y/d$, $\chi = x/L$ y $\theta = T/T_0$, obtenemos para la conservación de momento la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \alpha \frac{dp}{d\chi} - \frac{p}{\theta} \quad (5.14)$$

donde, $\alpha = R_r T_0 / (gL)$ y se definió $P_c = \mu u_c R_r T_{mat} / (d^2 g)$. La ecuación adimensional para la conservación de energía es:

$$\beta \frac{u p}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (5.15)$$

donde $\beta = \mu u_c^2 c_p / (k_f g L)$. La conservación de masa tiene la forma adimensional

$$\frac{1}{p} = \int_0^1 \frac{u}{\theta} d\eta. \quad (5.16)$$

Por último, la ecuación de la energía en la matriz en función de las variables adimensionales siguientes: $\zeta = (y - d) / (L/2 - d)$, $\chi = x/L$, $\sigma = \alpha_s t / L^2$ y $\theta_m = (T_m - T_{iny}) / (T_0 - T_{iny})$, es de la forma:

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \chi^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \zeta^2} \quad (5.17)$$

donde Γ es un parámetro geométrico de orden unitario, definido como $\Gamma = 2 / (1 - 2d/L) \simeq 2$.

5.1.4. Solución

Debido a lo delgado de la fractura, las variaciones de temperatura a lo largo de η , (transversales), serán muy pequeñas comparadas con las variaciones características del sistema. Esto se puede ver más claramente analizando órdenes de magnitud de los flujos de calor en la fractura

y en la matriz, de donde se obtiene:

$$\frac{\Delta T_f}{\Delta T_c} \sim \frac{k_s}{k_f} \Gamma \ll 1. \quad (5.18)$$

Lo anterior permite integrar las ecuaciones para la conservación de movimiento y masa, lo que resulta en:

$$u = \frac{3\theta}{2p} (1 - \eta^2); \quad (5.19)$$

sustituyendo este resultado en la ecuación de energía para el fluido se obtiene:

$$\frac{3\beta}{2} (1 - \eta^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}. \quad (5.20)$$

Si como antes se mencionó, las variaciones de la temperatura en η son pequeñas, se puede integrar una vez la ecuación 5.20 de la energía para la fractura:

$$\int_0^1 \frac{3\beta}{2} (1 - \eta^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} d\eta = \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} d\eta \quad (5.21)$$

lo que resulta en:

$$\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}, \quad (5.22)$$

después de utilizar este resultado y las condiciones de frontera en la interfaz se obtiene:

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \kappa \frac{\partial \theta_m}{\partial x} \Big|_{\zeta=0}, \quad (5.23)$$

donde, $\kappa = c_p \bar{m} / [4Lk_s (T_0/T_{iny} - 1)]$. En la ecuación 5.23 está contenida toda la información de la fractura que tiene efectos sobre la matriz porosa. Finalmente, después de esta integración en el fluido de la fractura, el sistema resultante para la matriz es:

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \zeta^2}$$

$$\theta_m|_{\sigma=0} = \theta_m|_{\chi=1} = 1, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} = \frac{\partial \theta_m}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \kappa \frac{\partial \theta_m}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}. \quad (5.26)$$

Esta ecuación diferencial y sus restricciones pueden resolverse numéricamente utilizando diferencias finitas centradas. La malla utilizada para estos propósitos fue de 100×100 , mientras que los incrementos en el tiempo adimensional fueron $\Delta\sigma = 5 \times 10^{-4}$.

5.2. Resultados

Los resultados que a continuación se presentan son para $\kappa = 0.5$. Este valor se obtuvo considerando que el tamaño de bloque de la matriz es de 50 metros, un gasto másico en cada fractura es de $2.5 \times 10^{-2} \text{ kg/s}$ y el fluido inyectado es nitrógeno, que no se ha mezclado con el gas del yacimiento. Cabe señalar que existe una gran incertidumbre en los valores de conductividad térmica y capacidad calorífica de la matriz [5], [8] (los valores dependen de la saturación, porosidad, etc.).

La figura 5-3 muestra los cambios en el campo de temperaturas a diferentes tiempos. En estas gráficas la fractura está ubicada al lado izquierdo de los bloques y a la derecha se ubica la condición de simetría.

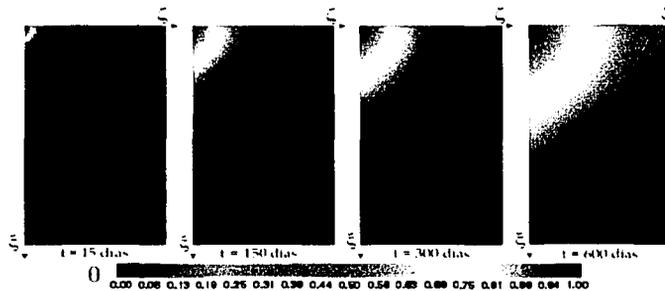


Figura 5-3: Evolución temporal de los campos de temperatura en la región de estudio.

En la figura 5-4 se muestra que la variación de temperatura media de los bloques de matriz decae linealmente. En 2 años la temperatura ha bajado un 5.5 %.

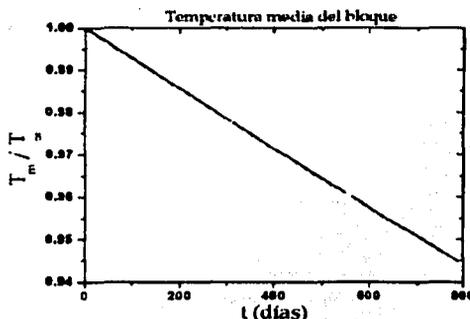


Figura 5-4: La temperatura media del bloque decae linealmente.

En la figura 5-5 se muestra la evolución temporal de la isoterma $T/T_0 = 0.97$ sobre la fractura, es decir, se grafica en el tiempo la posición de la región de la fractura, x_a , que se ha enfriado un 3%. De un análisis adimensional se obtiene que $L \sim D\sqrt{t_c}$. Lo anterior se verifica por el hecho de que la posición de una isoterma a lo largo de la fractura obedece una comportamiento del tipo:

$$x_a = A\sqrt{t}, \quad (5.27)$$

en donde A es función de T/T_0 , y κ .

5.2.1. Determinación de κ

A partir de pruebas de temperatura en el campo se puede determinar fácilmente el valor de κ . La prueba de temperatura que aquí se propone consiste en los siguientes pasos:

- Suspender la inyección de nitrógeno al casquete.
- Monitorear la temperatura de la zona de inyección, $T_{campo}(t)$, (antes zona de disparo), durante un período de tiempo (por ejemplo, 15 días).

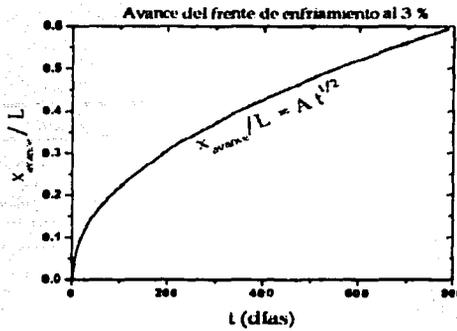


Figura 5-5: Evolución temporal de la isoterma $T/T_0 = 0.97$, sobre la fractura.

- Utilizar un método de optimización para encontrar la x que minimice a la función:

$$\sum_{i=1}^{Datos} (T_{campo}(t_i) - T_{teórica}(t_i))^2, \quad (5.28)$$

por ejemplo, la técnica de Levenberg-Marquardt

- Este método es válido cuando el calor latente de la condensación es despreciable.

Un ejemplo de la función $T_{teórica}(t)$, sobre la que hay que comparar se muestra en la figura 5-6. Durante algunas fallas del sistema de bombeo de nitrógeno en Cantarell, se ha monitoreado la temperatura en un punto cercano a la zona de inyección. El comportamiento que se observa es cualitativamente parecido al de la figura 5-6.

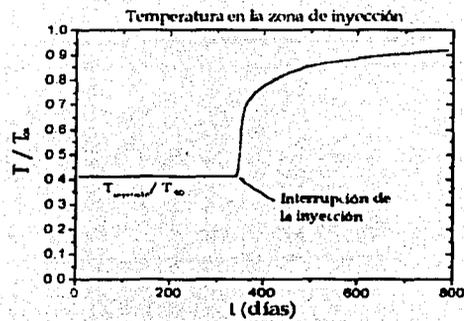


Figura 5-6: Cuando la inyección se interrumpe, las variaciones de temperatura en la zona de inyección pueden servir para calcular α .

Capítulo 6

Convección natural en vóculos y fracturas libres

En esta sección se estudia teórica y experimentalmente la convección natural en una fractura o un vóculo (cavidad). Es muy importante estudiar la convección natural en estos sistemas, ya que ésta puede acelerar los procesos difusivos a través de los mecanismos de dispersión.

Un yacimiento homogéneo bajo gradientes geotérmicos verticales de temperatura, usualmente no presenta convección natural, o ésta es extremadamente pequeña, ya que los números de Rayleigh del sistema, en general, son menores al valor crítico para generar este fenómeno, como se demostró en capítulos anteriores.

Por otro lado, el problema de la convección natural en una cavidad rectangular cerrada horizontal, con gradientes de temperatura hacia abajo, ha sido estudiada en muchas ocasiones, (problema de Rayleigh-Bénard) una excelente revisión se puede encontrar en los libros de Getling [65] y Bejan [66]. En estos trabajos se demuestra que existe un número de Rayleigh crítico para que el flujo se presente $Ra_c = 1708$, y otro para que sea turbulento, $Ra_{cT} = 5830$, (Jeffreys, [67]). En el caso de cavidades horizontales con gradientes de temperatura horizontales, el flujo existe para cualquier número de Rayleigh y en este caso el flujo se vuelve turbulento para $Ra_c = 7300Pr$, (Korpela, [68]), donde Pr es el número de Prandtl. El problema de una fractura infinita inclinada, bajo un gradiente lineal y vertical de temperaturas, fue recientemente estudiado por Woods y Linz [69]. Ellos encuentran que existe flujo para cualquier número de

Rayleigh, pero simplifican la configuración térmica del entorno y como se verá más adelante, el campo de temperaturas es un factor clave en el problema. Luna *et al* [70] y Medina *et al* [71]-[73] resuelven el problema considerando los efectos térmicos en la matriz. Chandrasekhar [77] hace una excelente revisión del problema de estabilidad para un flujo de Rayleigh-Bénard.

En muchos yacimientos naturalmente fracturados, la matriz porosa tiene porosidad y permeabilidad muy pequeñas. Cuando éste es el caso, los flujos másicos dentro de la matriz son muy lentos comparados con los que ocurren dentro de las fracturas. Por ello, en este trabajo se considera a la matriz porosa como un sólido impermeable, pues el interés principal es estudiar los movimientos convectivos en las fracturas.

6.1. Definición del problema

Para estudiar la convección natural en una fractura finita se considera una placa (o matriz sólida) bidimensional, de conductividad térmica k_s , de altura H y longitud $L \gg H$. Dentro de la placa hay una fractura o vóculo inclinados respecto a la horizontal un ángulo ϕ , de longitud h y grosor d . La temperatura de la placa abajo es T_c y arriba T_f de tal forma que $T_c > T_f$, simulando un gradiente geotérmico. La fractura se encuentra llena de un fluido de viscosidad μ , densidad $\rho(T)$ y conductividad térmica k_f . Por comodidad, se han definido tres sistemas de referencia, para las regiones izquierda y derecha de la placa y para la fractura. La ubicación y dirección de los sistemas de referencia se muestran en la figura 6-1.

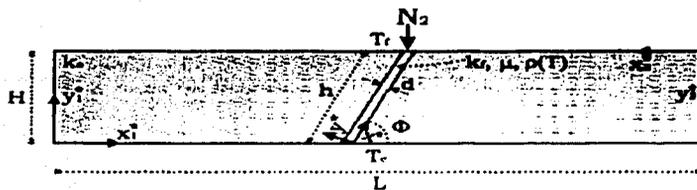


Figura 6-1: Fractura única en una placa sólida.

6.2. Experimento

Se realizaron experimentos en una placa de cobre de 2.54 cm de grueso, que mide 22 cm de alto, (H), y 80 cm de largo, (L). La placa se perforó en la región central para generar una fractura inclinada $\pi/4$ respecto a la horizontal y de 5 mm de grosor, (d), como se muestra en las figuras 6-1 y 6-2. El control de temperaturas se llevó a cabo mediante la inyección de fluidos por un sistema de canales, ubicados en las caras superior e inferior de la placa, sin conexión con la fractura. Los fluidos fueron bombeados desde dos baños térmicos, de tal forma que un fluido frío recirculaba por la cara superior y un caliente recirculaba por la inferior. En este caso el fluido utilizado fue silicón PC-710 (ver figuras 6-2, 6-3 y 6-4). Para la fractura se utilizaron dos fluidos, agua destilada y glicerina. Las temperaturas se midieron utilizando termografía y los campos de velocidades utilizando técnicas de PIV ("particle image velocimetry") [78]-[80].



Figura 6-2: Esquema del experimento. Se muestran la placa, los dos baños térmicos y las conexiones.

6.3. Modelo matemático

6.3.1. Ecuaciones en la fractura

Considerando que el balance en la cantidad de movimiento del fluido en la fractura está regido por las ecuaciones de Navier-Stokes, y utilizando la aproximación de Boussinesq, es decir, las variaciones en la densidad sólo se toman en cuenta en el término de flotación, se tiene

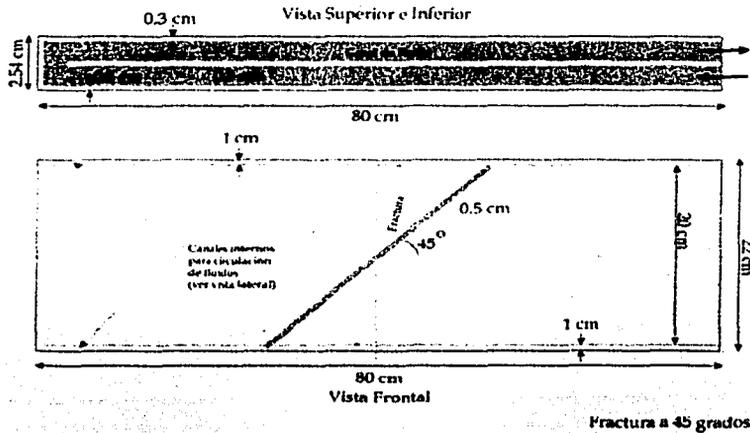


Figura 6-3: Vistas de frente y superior o inferior de la placa metálica

que:

$$\rho_0 \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - \rho^* (T^*) g_x, \quad (6.1)$$

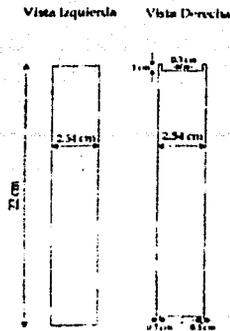
$$\rho_0 \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) - \rho^* (T^*) g_y, \quad (6.2)$$

donde, x^* y y^* son las coordenadas espaciales para la fractura, cuyo origen y orientación se muestran en la figura 6-1, ρ_0 es la densidad de referencia, ρ^* la densidad de fluido, u^* y v^* son las velocidades del fluido en dirección x^* y y^* , respectivamente, p^* la presión, μ la viscosidad dinámica del fluido, g_x y g_y son las componentes de la gravedad a lo largo de los ejes x^* y y^* , respectivamente.

Por otro lado, la ecuación de conservación de cantidad de masa, según la aproximación de Boussinesq, para el fluido de la fractura tiene la forma:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (6.3)$$

Finalmente, la ley de conservación de energía en el fluido, considerando que la dispersión



Fractura a 45 grados

Figura 6-4: Vistas laterales de la placa incluyendo detalles de las zonas de recirculación.

térmica es negligible, tiene la forma:

$$\rho_0 c_v \left(u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = k_f \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (6.4)$$

donde, c_v es la capacidad calorífica, k_f el coeficiente de conductividad térmica, y T^* la temperatura del fluido.

Condiciones de frontera en la fractura

Por la condición de adherencia, las velocidades normal y tangencial a las paredes de la fractura deben ser cero en la interfaz, esto es:

$$u^* = v^* = 0 \quad \text{en} \quad x^* = 0, h \quad \text{y} \quad y^* = 0, d. \quad (6.5)$$

Las temperaturas en los extremos superior e inferior de la fractura son constantes,

$$T^* = T_c \quad \text{en} \quad x^* = 0 \quad \text{y} \quad T^* = T_f \quad \text{en} \quad x^* = h. \quad (6.6)$$

Además, la temperatura debe ser una función continua en la interfaz

$$T^* = T_{sólido} \quad \text{en} \quad y^* = 0, d \quad (6.7)$$

6.3.2. Ecuaciones en la matriz

Anteriormente se mencionó que la matriz porosa es de baja permeabilidad, por lo que las velocidades dentro de ella son muy pequeñas. Por este hecho, la ecuación de balance de cantidad de movimiento en la matriz no se toma en cuenta. Con un análisis de orden de magnitud en la ley de Darcy, se demuestra que lo anterior es cierto si se satisface que:

$$\frac{K \Delta \rho_c g}{\mu} \ll u_{fractura} \quad (6.8)$$

donde, K es la permeabilidad de la matriz porosa, $\Delta \rho_c$ los cambios característicos de densidad del fluido, g la gravedad y $u_{fractura}$ la velocidad característica en la fractura. La relación 6.8 se satisface fácilmente pues $K \sim 10^{-12} m^2$.

La ley de conservación de la energía para ambas regiones de la matriz es de la forma:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y_i^2} = 0 \quad : i = 1, 2 \quad (6.9)$$

donde, el subíndice i indica la región de la matriz, (izquierda $i = 1$ y derecha $i = 2$), x_i^* y y_i^* son las coordenadas espaciales con origen y dirección como se indica en la figura 6-1, y T_i la temperatura en la región i -ésima.

Condiciones de frontera en la matriz

El extremo superior de la matriz tiene temperatura baja; entonces para las dos regiones tenemos:

$$T_1 = T_f \quad \text{en} \quad y_1^* = H \quad \text{y} \quad T_2 = T_f \quad \text{en} \quad y_2^* = 0, \quad (6.10)$$

y el extremo inferior tiene temperatura alta,

$$T_1 = T_c \quad \text{en} \quad y_1^* = 0 \quad \text{y} \quad T_2 = T_c \quad \text{en} \quad y_2^* = H. \quad (6.11)$$

Las fronteras a la izquierda y derecha de la matriz son adiabáticas, por lo que las variaciones de temperatura son cero:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1^*} = 0 \text{ en } x_1^* = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T_2}{\partial x_2^*} = 0 \text{ en } x_2^* = 0. \quad (6.12)$$

En la zona donde el fluido se pega a la matriz porosa, la temperatura y el flujo de calor deben ser funciones continuas, por lo que:

$$k_s \frac{\partial T_1}{\partial n_1^*} = k_f \frac{\partial T_{\text{fluido}}}{\partial y^*} \quad \text{y} \quad T_1 = T_{\text{fluido}} \quad \text{en} \quad y_{s1}^* = y_{s1}^*(x_1^*), \quad (6.13)$$

$$k_s \frac{\partial T_2}{\partial n_2^*} = k_f \frac{\partial T_{\text{fluido}}}{\partial y^*} \quad \text{y} \quad T_2 = T_{\text{fluido}} \quad \text{en} \quad y_{s2}^* = y_{s2}^*(x_2^*), \quad (6.14)$$

donde, k_s es el coeficiente de conductividad térmica de la matriz y n_i^* es la normal a la interfaz aceite-matriz, y_{si}^* .

6.4. Ecuaciones adimensionales

6.4.1. Ecuaciones adimensionales en la cavidad

En la cavidad las longitudes características son d y h . Utilizándolas se pueden definir las variables adimensionales $y = y^*/d$ y $x = x^*/h$. Por otro lado, existen dos temperaturas características en el sistema; con ellas se puede definir una temperatura adimensional, que además esté normalizada $\theta = (T - T_f) / (T_c - T_f)$, mientras que la diferencia de temperaturas característica se define como $\Delta T = T_c - T_f$. Las velocidades características del sistema se obtienen comparando los términos convectivos con los de flotación, en la ecuación de cantidad de movimiento. Dichas velocidades permiten definir su contraparte adimensional: $u = u^* / (Rav/d)$ y $v = v^* / (\Gamma Rav/d)$.

Durante el proceso de adimensionalización se generan los parámetros siguientes: $\Gamma = d/h$ que contiene la información geométrica de la fractura, $Ra = g\beta\Delta T d^3 \rho_0 c_v / (k_f \nu)$ que es el número de Rayleigh para este problema y el número de Prandtl $Pr = \nu \rho_0 c_v / k_f$, que compara las difusividades viscosas y térmicas.

Finalmente las ecuaciones adimensionales en términos de la función de corriente, ψ , definida

por:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad y \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.15)$$

tienen la forma:

$$\Gamma \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = \frac{1}{RaPr} \left(\Gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma \frac{\partial \psi}{\partial y} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right] - \Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\Gamma^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right] \\ &= \frac{1}{Ra} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + \frac{\Gamma^4}{Ra} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{2\Gamma^2}{Ra} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\text{sen } \Phi}{RaPr} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \Gamma \frac{\text{cos } \Phi}{RaPr} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.17)$$

con las condiciones de frontera para la velocidad:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, 1 \quad y \quad y = 0, 1 \quad (6.18)$$

y para la temperatura:

$$\theta = 1 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad y \quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad x = 1 \quad (6.19)$$

$$\theta = \theta_s \quad \text{en} \quad y = 0 \quad y \quad \theta = \theta_s \quad \text{en} \quad y = 1 \quad (6.20)$$

6.4.2. Ecuaciones adimensionales en la Matriz

En la matriz la única longitud característica es H , por lo que las variables adimensionales espaciales se definen como $y_i = y_i^*/H$ y $x_i = x_i^*/H$. Por otro lado, la temperatura adimensional se define como $\theta_i = (T_i - T_f)/(T_c - T_f)$, al igual que en la fractura. Bajo las definiciones anteriores la ecuación de la energía tiene la forma de ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y_i^2} = 0 : i = 1, 2, \quad (6.21)$$

y las condiciones de frontera para el lado izquierdo de la matriz ($i = 1$):

$$\theta_1|_{y_1=0} - 1 = \theta_1|_{y_1=1} = 0, \quad (6.22)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0, \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n_1} = \frac{\kappa}{\Gamma} \text{sen } \Phi \frac{\partial \theta_{fluido}}{\partial y} : y_{s1} = y_{s1}(x_1) \quad (6.24)$$

$$\theta_1|_{y_{s1}(x_1)} = \theta_{fluido}, \quad (6.25)$$

y para el lado derecho ($i = 2$):

$$\theta_2|_{y_2=0} = \theta_2|_{y_2=1} - 1 = 0, \quad (6.26)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial n_2} = \frac{\kappa}{\Gamma} \text{sen } \Phi \frac{\partial \theta_{fluido}}{\partial y} : y_{s2} = y_{s2}(x_2), \quad (6.28)$$

$$\theta_2|_{y_{s2}(x_2)} = \theta_{fluido}, \quad (6.29)$$

donde $\kappa = k_f/k_s$. Para un yacimiento petrolífero $\kappa \lesssim 1$.

6.5. Caso $\kappa \ll \Gamma \ll 1$ y $Ra \rightarrow 0$: vóculos

Los vóculos son cavidades de la matriz formadas por disolución, cuya razón de aspecto, Γ , es de orden unidad o menor (sin ser mucho menor). Los vóculos pueden estar asociados a fracturas o estar aislados y contener o no aceite. Cuando se trata de vóculos con aceite los gradientes de temperatura internos característicos son pequeños, por lo que el número de Rayleigh, Ra , es muy pequeño. En este trabajo sólo estudiamos a vóculos esbeltos (Γ pequeño), pero no tanto que lleguen a ser fracturas. La transición de vóculo a fractura, desde el punto de vista geométrico, es un tema controversial. En esta tesis una fractura podría ser la cavidad con razón de aspecto $\Gamma \lesssim 1/10$ y un vóculo esbelto la cavidad tal que $\Gamma \gtrsim 1/10$.

6.5.1. Modelo en la matriz

La razón de aspecto de un vóculo y la razón de conductividades son tales que $\kappa \ll \Gamma$. Este resultado simplifica enormemente el problema, ya que desacopla el problema de la matriz y del fluido, de tal forma que la matriz ve como adiabático al fluido. El modelo para la matriz queda como:

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y_i^2} = 0 : i = 1, 2 \quad (6.30)$$

$$\theta_1|_{y_1=0} - 1 = \theta_1|_{y_1=1} = 0, \quad (6.31)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0, \quad (6.32)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial n_1} \right|_{y_{s1}} = 0 \text{ en } y_{s1} = y_{s1}(x_1) \quad (6.33)$$

$$\theta_1|_{y_{s1}(x_1)} = \theta_{fluido} \quad (6.34)$$

$$\theta_2|_{y_2=0} = \theta_2|_{y_2=1} - 1 = 0, \quad (6.35)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad (6.36)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial n_2} \right|_{y_{s2}} = 0 \text{ en } y_{s2} = y_{s2}(x_2) \quad (6.37)$$

$$\theta_2|_{y_{s2}(x_2)} = \theta_{fluido}. \quad (6.38)$$

Desde el punto de vista numérico las condiciones de frontera en $y_{s1}(x_1)$ y $y_{s2}(x_2)$ originan dificultades para la generación de la malla; sin embargo, si se propone el siguiente conjunto de transformaciones a un sistema no ortogonal:

$$\eta_i = y_i, \quad (6.39)$$

$$\xi_i = \frac{x_i}{E_i}, \quad (6.40)$$

$$\text{donde } E_i = \frac{x_a}{H} - \frac{(1 - \eta_i)}{\tan \Phi} \text{ y } x_a = \frac{L + H^2 - h^2 - d/\cos \Phi}{2}, \quad (6.41)$$

se mapea la geometría de ambos lados de la matriz a un cuadrado de lado unitario.

Lo anterior tiene como consecuencia que las ecuaciones de energía en ambos lados de la

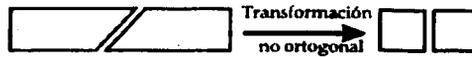


Figura 6-5: El conjunto de transformadas definido por 6.39-6.41, convierten a la matriz en un par de cuadrados de lado unitario.

matriz dejen de ser tipo Laplace. Sin embargo, esto no representa dificultad alguna desde el punto de vista numérico, ya que el problema sigue siendo lineal, pero la malla ya puede ser ortogonal. Finalmente se obtiene para el problema transformado:

$$\frac{\tan^2 \Phi + \xi_i^2}{E_i^2 \tan^2 \Phi} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \xi_i^2} + \frac{2\xi_i}{E_i^2 \tan^2 \Phi} \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_i} - \frac{2\xi_i}{E_i \tan \Phi} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i \partial \xi_i} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i^2} = 0 \quad (6.42)$$

$$\theta_1|_{\eta_1=0} - 1 = \theta_1|_{\eta_1=1} = 0 \quad (6.43)$$

$$\theta_1(\xi_1 = 0) = 1 - \eta_1 \quad (6.44)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1=1} = E_1 \sin \Phi \cos \Phi \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right|_{\xi_1=1} \quad (6.45)$$

$$\theta_2|_{\eta_2=0} = \theta_2|_{\eta_2=1} - 1 = 0 \quad (6.46)$$

$$\theta_2(\xi_2 = 0) = \eta_2 \quad (6.47)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=1} = E_2 \sin \Phi \cos \Phi \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \right|_{\xi_2=1} \quad (6.48)$$

El conjunto de ecuaciones 6.42-6.48 se resuelve con diferencias finitas centradas. Un método alternativo de solución de la ecuación de Laplace en geometrías complicadas, es el método de ecuación integral de frontera, BIEM (por sus siglas en inglés) [75],[76]. El BIEM se utiliza alternativamente para resolver el sistema de ecuaciones 6.30-6.35 una descripción de este método puede encontrarse en el **Apéndice A**.

6.5.2. Modelo en el vóculo

Utilizando un estudio de órdenes de magnitud se pueden simplificar las ecuaciones 6.17 y 6.16 que rigen el comportamiento del fluido en la fractura . Si se supone que los términos

difusivos son más grandes que los convectivos en la ecuación de momento, y se comparan con las fuerzas de flotación, se obtiene:

$$\rho g \beta \Delta T \sim \rho \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (6.49)$$

y entonces

$$u_c \sim \frac{g \beta \Delta T d^2}{\nu} \quad (6.50)$$

Por otro lado, si se supone que en la ecuación de energía los términos difusivos son más importantes que los convectivos :

$$\kappa_f \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \sim \kappa_f \frac{\Delta T}{d^2} \gg u \frac{\partial T}{\partial \xi} \sim u_c \frac{\Delta T}{L}; \quad (6.51)$$

combinado las dos últimas relaciones, se obtiene:

$$\frac{u \frac{\partial T}{\partial \xi}}{\kappa_f \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}} \sim \frac{u_c d}{\kappa_f H} \ll 1; \quad (6.52)$$

o bien:

$$Ra \Gamma \ll 1, \quad (6.53)$$

que es justo lo que se podía anticipar para un vígulo, ($\Gamma \leq 1$ y $Ra \rightarrow 0$). Esto significa, que la hipótesis de que los términos difusivos son más importantes que los convectivos, es cierta. Utilizando estos resultados y suponiendo que el vígulo es esbelto, la ecuación de energía en la cavidad se simplifica a:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (6.54)$$

con solución:

$$\theta = \theta(x) + [\theta_{s2}(x) - \theta_{s1}(x)] y \quad (6.55)$$

donde, $\theta_{s2}(x)$ y $\theta_{s1}(x)$ son las temperaturas de la matriz en su frontera con el aceite, y son funciones conocidas una vez se ha resuelto la ecuación de energía. Por otro lado, la simplificación

de la ecuación de momento queda como:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \frac{\text{sen} \Phi [\theta_{s2}(x) - \theta_{s1}(x)]}{Pr}, \quad (6.56)$$

o bien, en términos de la velocidad:

$$\frac{d^3 u}{dy^3} = \frac{\text{sen} \Phi [\theta_{s2}(x) - \theta_{s1}(x)]}{Pr}. \quad (6.57)$$

La ecuación anterior se resuelve sujeta a las condiciones de frontera $u = 0$ en $y = 0, 1$, y la restricción:

$$\int_0^1 u dy = 0 \quad (6.58)$$

El sistema de ecuaciones anterior tiene solución exacta:

$$u = \frac{[\theta_{s2}(x) - \theta_{s1}(x)] \text{sen} \Phi}{Pr} \left(\frac{1}{12} y + \frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{4} y^2 \right). \quad (6.59)$$

6.5.3. Resultados de temperatura para un vóculo

En la figura 6-6 se muestran los resultados teóricos y experimentales para los campos de temperatura. En este caso el experimento se realizó con glicerina para lograr caer en un espacio paramétrico, tal que $Ra\Gamma \rightarrow 0$. Por otro lado, las velocidades en la fractura se muestran en la figura 6-7

Un resultado importante es que si el vóculo no está inclinado $\theta_{s2}(x) = \theta_{s1}(x)$ y no hay convección; entonces el sistema se comporta como un problema de Rayleigh-Bénard abajo del punto crítico.

6.6. Caso $\kappa > \Gamma$ y $\Gamma \ll 1$: fracturas

Las fracturas típicas de un yacimiento son de razón de aspecto mucho menor que la unidad, es decir, $\Gamma \ll 1$. Por otro lado, la razón de conductividades térmicas de la matriz y el fluido es tal que, $\kappa > \Gamma$. Para esta región paramétrica las ecuaciones de la matriz y el fluido están

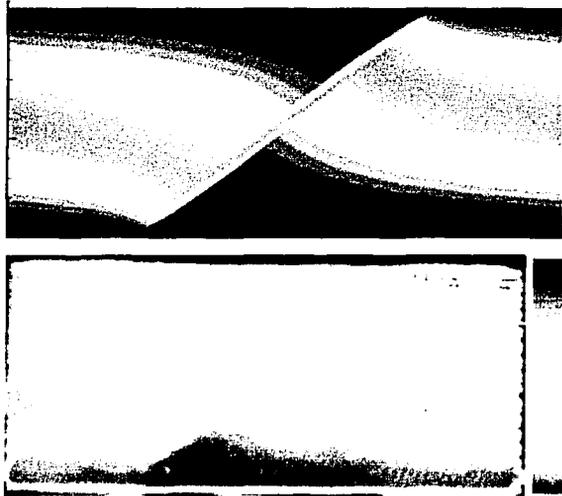


Figura 6-6: Distribución de temperaturas para $Ra\Gamma \rightarrow 0$. Arriba teoría, abajo, imagen de la cámara térmica.

acopladas (a diferencia del caso vulgar). El problema se ataca utilizando una combinación de análisis asintótico y el método BIEM [75],[76].

6.6.1. Método asintótico

De la teoría de los métodos asintóticos se proponen las siguientes expansiones:

$$\theta_i = \theta_{i,0} + \Gamma\theta_{i,1} + O(\Gamma^2), \quad (6.60)$$

$$\theta_f = \theta_{f,0} + \Gamma\theta_{f,1} + O(\Gamma^2), \quad (6.61)$$

$$\psi = \psi_0 + \Gamma\psi_1 + O(\Gamma^2); \quad (6.62)$$

si las relaciones anteriores se sustituyen en la ecuaciones diferenciales 6.17, 6.16 y 6.21 para una cavidad, y en las condiciones de frontera 6.18, 6.23 y 6.27, obtenemos a orden cero en Γ el

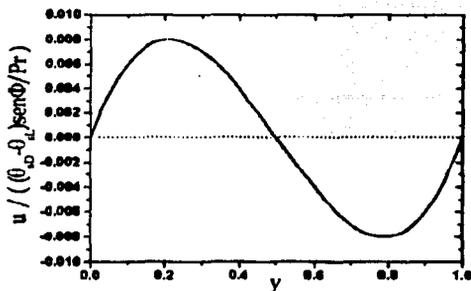


Figura 6-7: Gráfica del cociente $u / \frac{\text{sen} \Phi [\theta_{i,2}(x) - \theta_{i,1}(x)]}{Pr}$. El resultado es válido para cualquier vóculo.

sistema:

$$\frac{\partial^2 \theta_{f,0}}{\partial y^2} = 0, \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial y^4} + \frac{\cos \Phi}{Pr} \frac{\partial \theta_{f,0}}{\partial y} = 0, \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{i,0}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \theta_{i,0}}{\partial y_i^2} = 0 : i = 1, 2; \quad (6.65)$$

y a orden Γ el sistema

$$Ra \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial \theta_{f,0}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial \theta_{f,0}}{\partial y} \right] = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta_{f,0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_{f,1}}{\partial y^2} \right), \quad (6.66)$$

$$Ra \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial y^3} \right] = \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4} + \frac{\cos \Phi}{Pr} \frac{\partial \theta_{f,1}}{\partial y} - \frac{\text{sen} \Phi}{Pr} \frac{\partial \theta_{f,0}}{\partial x}, \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{i,1}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \theta_{i,1}}{\partial y_i^2} = 0 : i = 1, 2, \quad (6.68)$$

con las condiciones de frontera a orden cero y uno dadas por:

$$\theta_{1,0} = 1 \text{ y } \theta_{1,1} = 0 \text{ en } y_1 = 0, \quad (6.69)$$

$$\theta_{1,0} = 0 \text{ y } \theta_{1,1} = 0 \text{ en } y_1 = 1, \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial \theta_{1,0}}{\partial x_1} = 0 \text{ y } \frac{\partial \theta_{1,1}}{\partial x_1} = 0 \text{ en } x_1 = 0, \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial \theta_{f,0}}{\partial y} = 0 \text{ en } y_{s1} = y_{s1}(x_1), \quad (6.72)$$

$$\theta_{1,0} = \theta_{f,0} \text{ y } \theta_{1,1} = \theta_{f,1} \text{ en } y_{s1} = y_{s1}(x_1); \quad (6.73)$$

$$\theta_{2,0} = 0 \text{ y } \theta_{2,1} = 0 \text{ en } y_2 = 0, \quad (6.74)$$

$$\theta_{2,0} = 1 \text{ y } \theta_{2,1} = 0 \text{ en } y_2 = 1, \quad (6.75)$$

$$\frac{\partial \theta_{2,0}}{\partial x_2} = 0 \text{ y } \frac{\partial \theta_{2,1}}{\partial x_2} = 0 \text{ en } x_2 = 0, \quad (6.76)$$

$$\frac{\partial \theta_{f,0}}{\partial y} = 0 \text{ en } y_{s2} = y_{s2}(x_2), \quad (6.77)$$

$$\theta_{2,0} = \theta_{f,0} \text{ y } \theta_{2,1} = \theta_{f,1} \text{ en } y_{s2} = y_{s2}(x_2), \quad (6.78)$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0 \text{ para } y = 0, 1. \quad (6.79)$$

La solución completa para al sistema anterior se puede encontrar utilizando técnicas convencionales de integración y el método de ecuación integral de frontera, BIEM [75], [76]. La solución que se obtiene para las temperaturas en la matriz queda como:

$$\theta_1 = 1 - y_1 + \frac{\Gamma}{2\kappa \tan \Phi} \Upsilon_1(x_1, y_1) + O(\Gamma^2) \quad (6.80)$$

$$\theta_2 = y_2 + \frac{\Gamma}{2\kappa \tan \Phi} \Upsilon_2(x_2, y_2) + O(\Gamma^2). \quad (6.81)$$

Por otro lado, en la fractura la solución asintótica para la velocidad y la temperatura es:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \Gamma \cos \Phi \left(\frac{1}{12} y + \frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{4} y^2 \right) + O(\Gamma^2) \quad (6.82)$$

$$\theta = 1 - x + \frac{\Gamma}{\kappa \tan \Phi} \left(\frac{1}{2} - y \right) + O(\Gamma^2). \quad (6.83)$$

Las funciones Υ_i , están definidas por el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Upsilon_i}{\partial y_i^2} = 0 \quad (6.84)$$

$$\Upsilon_i|_{y_i=0,1} = \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0 \quad (6.85)$$

$$\Upsilon_i = (-1)^i \text{ en } y_{si} = y_{si}(x_i), \quad (6.86)$$

con $i = 1, 2$. Utilizando el BIEM [75], [76] se obtiene para Υ_1 y Υ_2 , en una fractura inclinada $\pi/4$, la solución que se muestra en la figura 6-8:



Figura 6-8: Solución universal para Υ_1 (izquierda), y Υ_2 (derecha) utilizando BIEM.

6.6.2. Resultados

Para una fractura inclinada $\pi/4$ radianes, y un valor de $\Gamma/\kappa = 0.01$, se obtiene el campo de temperaturas de la figura 6-9.

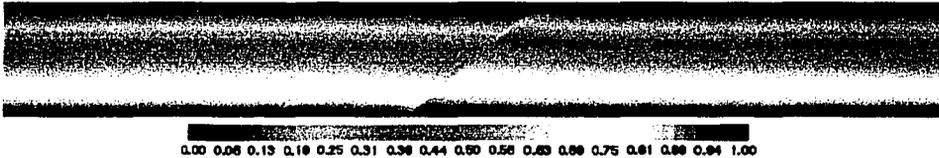


Figura 6-9: Campo de temperaturas, θ_i , para un sistema de una fractura con $\Phi = \pi/4$, y $\Gamma/\kappa = 0.01$.

Por último, en la figura 6-10 se muestra la velocidad adimensional dentro de la fractura comparada con los resultados experimentales; como se puede observar existe una gran concordancia

entre ambos resultados, lo cual valida el modelo teórico propuesto.

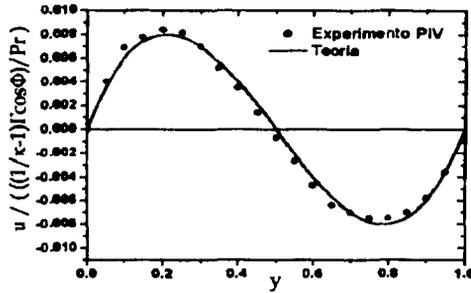


Figura 6-10: Se comparan los resultados del experimento con PIV y la teoría. $Ra = 3.62$.

Cuando se resuelve el problema del fluido asintóticamente, los términos inerciales de la ecuación de energía no son importantes. Sin embargo, en las zonas cercanas a los extremos de la fractura, los términos inerciales son importantes; es decir,

$$u_{cExt} \frac{\Delta T}{l_c} \sim \frac{k_f \Delta T}{\rho c d^2}; \quad (6.87)$$

de aquí,

$$l_c \sim \frac{\rho c d^2}{k_f} u_{cExt}. \quad (6.88)$$

Si se supone que la velocidad característica en esta región debe ser menor que, o de orden u_c se tiene que:

$$\frac{l_c}{d} \sim Ra Pr, \quad (6.89)$$

entonces a distancias de los extremos de la fractura menores o iguales a l_c , la solución para la velocidad aquí presentada no es válida. Sin embargo, este efecto es local y para fracturas esbeltas es completamente despreciable.

Capítulo 7

Convección natural en fracturas porosas

En los yacimientos naturalmente fracturados, existen formaciones cuya estructura es parecida a una fractura [84], [81]. En esta formación, la fractura es formada por un medio poroso de alta permeabilidad y porosidad encapsulado en un medio de baja permeabilidad. A dichos sistemas se les llamará fracturas porosas. En esta sección se estudian los fenómenos de convección natural que existen en tales formaciones.

7.1. Modelo físico

En la figura 7-1 se muestra el sistema a estudiar. La matriz de baja permeabilidad y porosidad, se aproxima como un sólido de conductividad térmica k_s , de largo L , y altura, H . La zona de fractura tiene permeabilidad k , y porosidad ϕ . La fractura porosa está completamente saturada con un fluido de densidad, $\rho(T)$, viscosidad, μ , y conductividad y difusividad térmica k_f y α_T , respectivamente. El grosor de la fractura porosa es, d , y el largo, h , y su inclinación, Φ . La parte inferior del sistema está a temperatura, T_c , mientras que la superior está a temperatura $T_f < T_c$. Por comodidad en el manejo de las variables, se definieron tres sistemas de referencia (x_1^*, y_1^*) , (x_2^*, y_2^*) y (x^*, y^*) , los cuales tienen origen y orientación como se muestra en la figura 7-1.

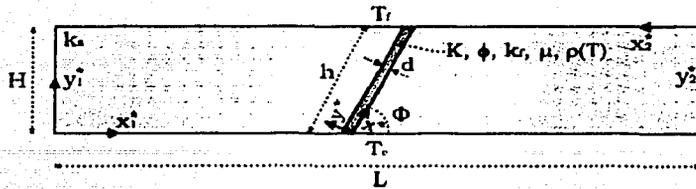


Figura 7-1: Modelo físico para una fractura porosa bajo gradientes de temperatura.

7.2. Ecuaciones

El modelo matemático para el fluido dentro de la fractura, está construido a partir de: la Ley de Darcy en un campo gravitacional, conservación de masa, conservación de energía y una ecuación de estado, además se utiliza la aproximación de Boussinesq (la dependencia la densidad en la temperatura; sólo se toma en cuenta en los términos de flotación, la aproximación es válida si $\Delta\rho \ll \rho$). Las ecuaciones que describen al modelo se presentan a continuación.

La transferencia de cantidad de momento se rige, dentro de un medio poroso por la Ley de Darcy, que junto a las fuerzas de flotación tiene la forma:

$$u^* = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p^*}{\partial x^*} - \rho^* g_x \right) \quad (7.1)$$

$$v^* = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \rho^* g_y \right) \quad (7.2)$$

donde, para el fluido en la fractura, u^* y v^* son las velocidades en las direcciones x^* y y^* respectivamente; p^* es la presión, y por último, g_x y g_y son las componentes de la gravedad en el sistema de referencia de la fractura. La ley de la conservación de la masa, al utilizar la aproximación de Boussinesq, tiene la forma:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (7.3)$$

La ley de conservación de la energía en el fluido es:

$$u^* \frac{\partial T}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T}{\partial y^*} = \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^{*2}} \right). \quad (7.4)$$

La dependencia de la densidad con la temperatura se supone no importante, por lo que se utiliza una expansión en serie de Taylor hasta primer orden,

$$\rho^* = \rho_0 - \beta (T - T_f) \quad (7.5)$$

en donde β , es el coeficiente de expansión térmica del fluido en la fractura.

Si en la zona de baja porosidad y permeabilidad se desprecian las velocidades del fluido $u \sim 0$, el modelo para la matriz de baja permeabilidad se reduce a conservación de la energía:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^{*2}} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y_i^{*2}} = 0 \quad (7.6)$$

Lo anterior es válido si las velocidades características en la fractura son mucho mayores que las de la matriz.

7.2.1. Ecuaciones para fracturas largas

Las fracturas porosas generalmente tienen razón de aspecto pequeña, es decir, son mucho más largas que anchas $\Gamma = d/H \ll 1$. Cuando esto ocurre las velocidades transversales a la fractura son pequeñas comparadas con las longitudinales; además, estas últimas sólo dependen de la coordenada transversal. Lo anterior se deduce de un análisis de órdenes de magnitud en la ecuación de conservación. Si se tiene que:

$$u^* = u^*(y^*), \quad (7.7)$$

$$v^* \sim \Gamma u^*(y^*) \rightarrow 0, \quad (7.8)$$

las ecuaciones de conservación para el fluido en la fractura porosa se reducen a:

$$u^* = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \rho_0 \beta [T - T_0] g \operatorname{sen} \Phi \right), \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial y^*} = -\rho_0 \beta [T - T_0] g \cos \Phi, \quad (7.10)$$

$$\int_0^d u^* dy^* = 0, \quad (7.11)$$

$$u^* \frac{\partial T}{\partial x^*} = \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^{*2}} \right); \quad (7.12)$$

en donde, $P^* = p^* + x^* \rho_0 g \operatorname{sen} \Phi + y^* \rho_0 g \cos \Phi$.

7.2.2. Condiciones de frontera

A continuación se describen las condiciones de frontera para el problema anteriormente descrito. Si como se mencionó, la matriz es de baja porosidad y permeabilidad, el transporte de masa y momento en la interfaz matriz-fractura es muy pequeño. Entonces se puede considerar que la velocidad perpendicular a las paredes de la fractura es cero:

$$v^* = 0 \text{ en } y^* = 0, d. \quad (7.13)$$

Por otro lado, las temperaturas deben ser una función continua en la interfaz matriz-fractura, por lo que:

$$T = T_2(x_1^*, y_1^*) \text{ en } y^* = 0 \text{ y } T = T_1(x_2^*, y_2^*) \text{ en } y^* = d, \quad (7.14)$$

Para la matriz, la temperatura en la zona inferior es T_c y en la superior T_f , esto es:

$$T_i = T_c \text{ en } y_i^* = (i-1)H, \quad (7.15)$$

$$T_i = T_f \text{ en } y_i^* = (2-i)H. \quad (7.16)$$

En los bordes exteriores de la matriz, se tienen condiciones de flujo de calor cero en la dirección horizontal:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i^*} = 0 \text{ en } x_i^* = 0. \quad (7.17)$$

Por último, la función que describe a los flujos de calor debe ser una función continua en la interfaz matriz-fractura:

$$k_m \frac{\partial T_i}{\partial n_i} \Big|_{y^*=d} = k_f \frac{\partial T}{\partial y^*} \Big|_{y^*=(2-i)d}, \quad (7.18)$$

donde, n es la normal a la interfaz matriz-fractura.

7.2.3. Adimensionalización

Las longitudes características en la fractura son h y d ; entonces las coordenadas espaciales adimensionales se definen como $y = y^*/d$ y $x = x^*/h$. Por otro lado, en la matriz la longitud característica es H , por lo que las coordenadas adimensionales quedan definidas por $\eta_i = y_i^*/H$ y $\xi_i = x_i^*/H$. Utilizando las dos temperaturas características del sistema, se pueden definir las temperaturas adimensionales, para la fractura $\theta = (T - T_f) / (T_c - T_f)$ y en la matriz $\Theta_i = (T_i - T_f) / (T_c - T_f)$. En la ecuación de la Ley de Darcy los términos de flotación son del mismo orden que los de velocidad, por lo tanto, la velocidad característica se define como $U_c = k\rho_0\beta\Delta T_0g/\mu$, y la velocidad adimensional $u = u^*/U_c$. Por último, la presión característica se define utilizando la velocidad característica, $P_c = U_cL\mu/k$, y la presión adimensional es entonces, $p = P/P_c$.

Durante el proceso de adimensionalización, se generan los parámetros adimensionales siguientes: $\Gamma = d/L$, que es una medida de la razón de aspecto de la fractura, $\kappa = k_f/k_m$ que relaciona las conductividades térmicas de la matriz y de la fractura porosa, y $Ra = dk\rho_0\beta\Delta T_0g/(\alpha_T\mu)$ que es el número de Rayleigh para un fluido en un medio poroso.

Finalmente las ecuaciones adimensionales para el fluido tienen la forma:

$$u = -\frac{\partial p}{\partial x} - \theta \sin \Phi, \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\Gamma \theta \cos \Phi, \quad (7.20)$$

$$\Gamma Ra u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (7.21)$$

y para la matriz:

$$\frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial \eta_i^2} = 0. \quad (7.22)$$

7.2.4. Solución asintótica

Por el hecho de que la razón de aspecto de la fractura es muy pequeña, se puede proponer una solución en términos de una expansión en este parámetro; entonces, de la teoría de perturbaciones se propone una solución asintótica de la forma:

$$u = u_0 + \Gamma u_1 + O(\Gamma^2), \quad (7.23)$$

$$p = p_0 + \Gamma p_1 + O(\Gamma^2), \quad (7.24)$$

$$\theta = \theta_0 + \Gamma \theta_1 + O(\Gamma^2), \quad (7.25)$$

$$\Theta = \Theta_{i,0} + \Gamma \Theta_{i,1} + O(\Gamma^2). \quad (7.26)$$

Orden cero

Sustituyendo la expansión asintótica en las ecuaciones que modelan al sistema, se obtiene a orden cero en Γ , el sistema:

$$u_0 = -\frac{dp_0}{dx} - \theta_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} = 0, \quad (7.28)$$

$$0 = \frac{\partial^2 \Theta_{i,0}}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{i,0}}{\partial \eta_i^2}, \quad (7.29)$$

sujeto a las condiciones de frontera:

$$\theta_0(y = i - 1) = \Theta_0(\xi_i, \eta_i), \quad (7.30)$$

$$\theta_0(x = 0) = 1, \quad (7.31)$$

$$\int_0^1 u_0 dy = \left. \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right|_{0,1} = 0, \quad (7.32)$$

$$\Theta_{i,0}(\eta_i = 0) = 2 - i, \quad \Theta_{i,0}(\eta_i = 1) = i - 1, \quad (7.33)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta_{i,0}}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i=0} = 0, \quad (7.34)$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver analíticamente; la solución exacta a orden cero en Γ es:

$$\Theta_{1,0} = 1 - y_1, \quad \Theta_{2,0} = y_2, \quad (7.35)$$

$$\theta_0 = 1 - x, \quad (7.36)$$

$$u_0 = 0, \quad (7.37)$$

$$\frac{dp_0}{dx} = -x \operatorname{sen} \Phi. \quad (7.38)$$

Orden Γ

Sustituyendo la solución de orden cero en la ecuación a orden uno en Γ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - \theta_1 \operatorname{sen} \Phi, \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = -(1-x) \cos \Phi, \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = 0, \quad (7.41)$$

$$0 = \frac{\partial^2 \Theta_{i,1}}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{i,1}}{\partial \eta_i^2}, \quad (7.42)$$

sujeto a las condiciones de frontera dadas por:

$$\int_0^1 u_1 dy = 0, \quad (7.43)$$

$$\theta_i(y = i - 1) = \Theta_i(\xi_i, \eta_i), \quad (7.44)$$

$$\theta_1(x = 0) = 0, \quad (7.45)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right|_{0,1} = \frac{1}{x \tan \Phi}, \quad (7.46)$$

$$\Theta_{i,1}(\eta_i = 0) = \Theta_{i,1}(\eta_i = 1) = 0, \quad (7.47)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta_{i,1}}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i=0} = 0, \quad (7.48)$$

la solución para este sistema de ecuaciones es:

$$\theta_1 = \frac{1}{x \tan \Phi} \left(\frac{1}{2} - y \right), \quad (7.49)$$

$$u_1 = \cos \Phi \left[\frac{1}{x} - 1 \right] \left(y - \frac{1}{2} \right), \quad (7.50)$$

$$\Theta_{i,1} = \frac{1}{2 x \tan \Phi} \Upsilon_i, \quad (7.51)$$

donde la función Υ_i , se obtiene a partir del conjunto de ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon_i}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 \Upsilon_i}{\partial \eta_i^2} = 0, \quad (7.52)$$

$$\Upsilon_i|_{\eta_i=0,1} = \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=0} = 0, \quad (7.53)$$

$$\Upsilon_i(n_i) = (-1)^i; \quad (7.54)$$

para resolver el problema anterior en Υ_i , se utiliza el método BIEM descrito en el apéndice A.

7.3. Solución general

Finalmente la solución general del sistema despreciando términos de orden Γ^2 , queda: fractura,

$$u = \Gamma \cos \Phi \left[\frac{1}{\kappa} - 1 \right] \left(y - \frac{1}{2} \right) + O(\Gamma^2), \quad (7.55)$$

$$\theta = 1 - x + \frac{\Gamma}{\kappa \tan \Phi} \left(\frac{1}{2} - y \right) + O(\Gamma^2); \quad (7.56)$$

matriz,

$$\Theta_1 = 1 - \eta_1 + \frac{\Gamma}{2\kappa \tan \Phi} \Upsilon_1(\eta_1, \xi_1) + O(\Gamma^2), \quad (7.57)$$

$$\Theta_2 = \eta_2 + \frac{\Gamma}{2\kappa \tan \Phi} \Upsilon_2(\eta_2, \xi_2) + O(\Gamma^2); \quad (7.58)$$

7.4. Resultados

Se presentan resultados para una fractura con inclinación $\pi/4$; la solución universal para las Υ_1 utilizando BIEM se muestra en la figura 7-2.



Figura 7-2: Solución universal para Υ_1 (izquierda), y Υ_2 (derecha) utilizando BIEM.

Para un valor de $\Gamma/\kappa = 0.01$, se obtiene el campo de temperaturas de la figura 7-3:

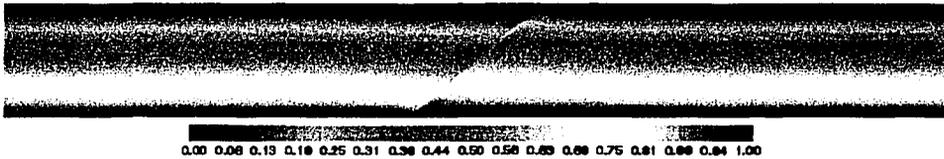


Figura 7-3: Campo de temperaturas, Θ_1 , para un sistema de una fractura porosa con $\Phi = \pi/4$, y $\Gamma/\kappa = 0.01$.

Por último, en la gráfica 7-4 se muestra la velocidad adimensional $u/\Gamma \cos \Phi \left[\frac{1}{\kappa} - 1 \right]$ en la fractura:

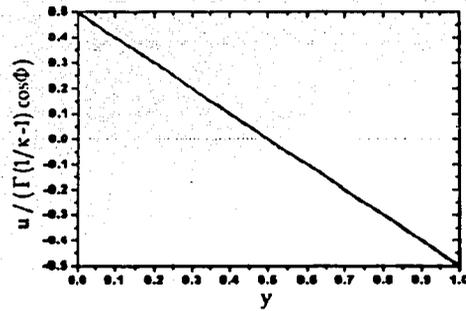


Figura 7-4: Velocidad $u / (\Gamma \cos \Phi [\frac{1}{\kappa} - 1])$ dentro de la fractura porosa.

Capítulo 8

Dispersión y difusión de nitrógeno en fracturas

En los dos capítulos anteriores, se estudió a la convección natural del aceite en fracturas libres y porosas sometidas a un gradiente vertical de temperatura. Dichos mecanismos de convección, son promotores de transporte de N_2 en la zona de aceite del yacimiento. Un segundo conjunto de fenómenos que propician la dispersión del nitrógeno, está compuesto de procesos puramente difusivos y procesos de difusión-convección dentro de la matriz porosa. Sin embargo, los tiempos característicos de tales procesos son muy largos comparados con su similar en fracturas, por lo que representan un papel secundario en la dinámica del nitrógeno en la zona de aceite. En un análisis de orden de magnitud, los tiempos característicos de difusión tienen un valor estimado de:

$$t_{cD} \sim \frac{H^2 \tau}{D} \sim 9 \times 10^6 \text{ años}, \quad (8.1)$$

donde, H es la profundidad de la zona de aceite, τ la tortuosidad del medio poroso y D el coeficiente de difusión libre del nitrógeno en el aceite. Por otro lado, balanceando la velocidad y la fuerza de flotación en la Ley de Darcy, los tiempos característicos de convección térmica en la matriz porosa son de orden de magnitud:

$$t_{cC} \sim \frac{H\nu}{kg\beta\Delta T} \sim 1000 \text{ años}, \quad (8.2)$$

donde, ν es la viscosidad cinemática, k la permeabilidad, g la fuerza de la gravedad, β el coeficiente de expansión volumétrica y ΔT las diferencias características de temperatura en el yacimiento. Por otro lado, los resultados en los capítulos anteriores, predicen que el tiempo necesario para que el petróleo en la interfaz gas-aceite, baje por una fractura y alcance la interfaz agua-aceite, es de unos cuantos años. Si se tiene en cuenta que la incorporación de nitrógeno en el petróleo, provoca que éste último reduzca su calidad, entonces es necesario un estudio detallado de los fenómenos difusivos y dispersivos del yacimiento. Principalmente, cuando estos fenómenos están asociados a movimientos convectivos en fracturas.

En las secciones siguientes se realiza un estudio de los fenómenos difusivo-convectivos y dispersivo-convectivos en fracturas libres y porosas. Por simplicidad, se considera que la cantidad de nitrógeno disuelto en el aceite es tan pequeña, que las propiedades físicas del petróleo no sufren cambios significativos.

8.1. Difusión en fracturas libres

En el capítulo 6 se encontró la solución para los campos de temperatura y velocidad en la fractura libre. Utilizando estos resultados se puede resolver la ecuación de difusión de nitrógeno. El modelo físico a estudiar es el mismo que se describe en capítulo 6, la única diferencia es que en la parte superior de la fractura se tiene una concentración de nitrógeno conocida. El valor de la concentración de nitrógeno en la parte superior de la fractura debe ser igual o menor a la concentración de saturación. La figura 8-1 muestra el modelo a estudiar.

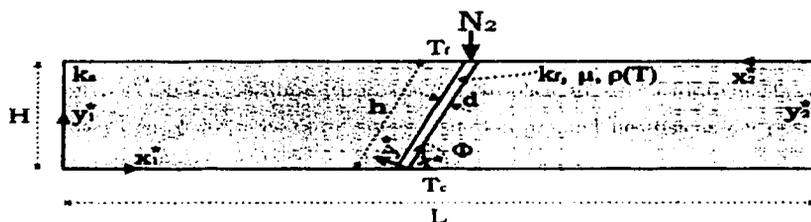


Figura 8-1: Modelo físico para el estudio de la difusión en una fractura.

8.1.1. Ecuación de difusión

El comportamiento del nitrógeno en la fractura está regido por la ecuación de difusión, que tiene la forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C}{\partial x^*} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^{*2}} \right], \quad (8.3)$$

donde, C es la concentración másica de nitrógeno, t^* es la coordenada temporal, x^* y y^* son las coordenadas espaciales, u^* es la velocidad en la dirección x^* , y D es el coeficiente de difusión del nitrógeno en el aceite. El término $v^* \partial C / \partial y^*$ no aparece en la ecuación, ya que en el capítulo 5 se demostró que $v^* \sim 0$.

La ecuación 8.3 está sujeta a las condiciones de frontera siguientes. La concentración de nitrógeno en la cara superior de la fractura se conoce; esto es, $C = C_{N_2}$ en $x^* = h$. Las paredes de la fractura son impermeables, por lo que el flujo de nitrógeno a través de ellas es cero: $\partial C / \partial x^* = 0$ en $x^* = 0$, y $\partial C / \partial y^* = 0$ en $y^* = 0, d$. Por otro lado, la condición inicial es que la fractura sólo contiene aceite, por lo que: $C = 0$ en $t^* = 0$.

La adimensionalización de la ecuación 8.3 se realiza de manera similar al capítulo 6. Para las coordenadas espaciales $y = y^*/d$ y $x = x^*/h$ y la velocidad $u = u^*/(Ra\nu/d)$, donde $Ra = g\beta\Delta T d^3 \rho_0 c_0 / (k_f \nu)$. La concentración se adimensionaliza con respecto a su valor en la parte superior de la fractura, $Y = C/C_{N_2}$. En lo que respecta al tiempo, existen dos tiempos característicos para el sistema, un difusivo, $t_{cD} = h^2/D$ y otro convectivo $t_{cC} = h/u_c$. El interés principal es observar el proceso desde el punto de vista de la difusión, por lo que el tiempo se adimensionaliza con $\sigma = t^*/(h^2/D)$. Finalmente, la ecuación adimensional que resulta, utilizando la solución asintótica para la velocidad (ecuación 6.82), es:

$$\begin{aligned} & \Gamma^2 \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\Gamma^2 Pe \cos \Phi}{12 Pr} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (2y^3 - 3y^2 + y) \frac{\partial Y}{\partial x} \\ & = \Gamma^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

donde, $\Gamma = d/h$, mide la razón de esbeltez de la fractura, y $Pe = u_c d/D$ es el número de Peclet para difusión de especies. Las condiciones de frontera e iniciales adimensionales son:

$$Y|_{\sigma=0} = \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{y=0,1} = \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_{x=0} = Y|_{x=1} - 1 = 0. \quad (8.5)$$

8.1.2. Solución y resultados

Dentro de la fractura existen dos mecanismos que transportan al nitrógeno: convección y difusión. La convección toma de la parte superior de la fractura al aceite rico en nitrógeno, y lo lleva hacia abajo. Al mismo tiempo, la difusión hace que el nitrógeno ubicado en la corriente que viaja hacia abajo, se incorpore en la corriente que va hacia arriba. La figura 8-2 muestra gráficamente estos mecanismos.

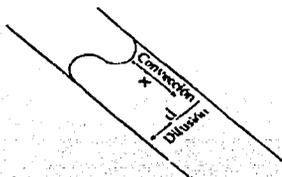


Figura 8-2: El nitrógeno se transporta en la fractura debido a los fenómenos de convección y difusión.

De un análisis de orden de magnitud, se encuentra que lo que avanza el nitrógeno por convección, x , mientras la difusión transporta al nitrógeno la distancia d está dado por:

$$\frac{x}{d} \sim Pe; \quad (8.6)$$

para fracturas típicas en un yacimiento $Pe \lesssim 1$, por lo que $x \lesssim d$. Esto tiene varias implicaciones. En primer término, los efectos convectivos sobre el transporte de nitrógeno se ven neutralizados por lo difusivos, y en segundo, las variaciones de la concentración de nitrógeno en dirección transversal son pequeñas. Si las variaciones en la dirección y son pequeñas, se puede proponer una solución en serie asintótica del tipo:

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{2n} Y_n. \quad (8.7)$$

Sustituyendo la serie asintótica 8.7 en la ecuación de difusión 8.4 se obtiene:

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial y^2} = 0, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial^2 Y_{n+1}}{\partial y^2} = \frac{\partial Y_n}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} + \frac{Pe \cos \Phi}{12 Pr} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (2y^3 - 3y^2 + y) \frac{\partial Y_n}{\partial x}, \quad n \geq 0. \quad (8.9)$$

La ecuación a orden cero 8.8 predice que $Y_0 = Y_0(x, \sigma)$, mientras que cuando $n = 0$ en 8.9, y después de integrar en dirección transversal, se tiene que:

$$\frac{\partial Y_0}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x^2}. \quad (8.10)$$

Esta ecuación diferencial está sujeta a las condiciones de frontera e iniciales $Y_0(1, \sigma) = 1$, $Y_0(x, 0) = 0$, y $\partial Y / \partial x|_{x=0} = 0$. Este sistema se puede resolver utilizando transformada de Laplace y series de Fourier. La solución queda como:

$$Y_0 = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left[(1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right]}{(2m-1)} e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma}. \quad (8.11)$$

Con Y_0 conocido, se puede integrar la ecuación a orden uno:

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} = \frac{\Gamma^2 Pe \cos \Phi}{12 Pr} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (2y^3 - 3y^2 + y) \frac{\partial Y_0}{\partial x}. \quad (8.12)$$

El resultado es:

$$Y_1 = G_1(x, \sigma) + \frac{Pe \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \cos \Phi}{360 Pr} (6y^5 - 15y^4 + 10y^3) \times \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left((1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right) e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma}. \quad (8.13)$$

Aquí, la función G_1 se obtiene resolviendo la ecuación diferencial que queda después de integrar transversalmente la ecuación a orden dos 8.9:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \\ & = \frac{\pi Pe^2 (1/\kappa - 1)^2 \cos^2 \Phi}{362880 Pr^2} \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \text{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi}{2} (1-x) \right) e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \end{aligned} \quad (8.14)$$

con las condiciones de iniciales y de frontera $G_1(x, 0) = 0$, $G_1(1, \sigma) = 0$ y $\partial G_1 / \partial x|_{x=0} = 0$. La solución a este problema es:

$$G_1 = \frac{\pi Pe^2 (1/\kappa - 1)^2 \cos^2 \Phi}{362880 Pr^2} \sigma \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi}{2} (1-x) \right) (2m-1) e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \quad (8.15)$$

Finalmente la solución hasta orden Γ^2 queda como:

$$\begin{aligned} Y = & 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi}{2} (1-x) \right)}{(2m-1)} e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \\ & + \Gamma^2 \frac{Pe(1/\kappa - 1) \cos \Phi}{360 Pr} (6y^5 - 15y^4 + 10y^3) \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left(\frac{(2m-1)\pi}{2} (1-x) \right) e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \\ & + \Gamma^2 \frac{\pi Pe^2 (1/\kappa - 1)^2 \cos^2 \Phi}{362880 Pr^2} \sigma \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi}{2} (1-x) \right) (2m-1) e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \\ & + O(\Gamma^3) \end{aligned} \quad (8.16)$$

El promedio transversal de la concentración adimensional $\bar{Y} = \int_0^1 Y dy$ se muestra en la figura 8-3 para diferentes tiempos y los valores: $\Gamma = 0.01$, $\kappa = 0.07$, $\Phi = \pi/4$, $Pr = 0.36$ y $Pe = 1$.

En la figura 8-4 se muestran los resultados dimensionales para $C/C_0 = \int_0^1 Y dy$ en fracturas de un grosor de 0.1 milímetros, con aceite de Cantarell y un coeficiente de difusión de $3.5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$. Se utilizaron diferentes longitudes de fractura y el tiempo transcurrido es dos años.

A los dos años de iniciado el proceso, dentro de la fractura, el aceite recorre por convección natural en promedio 170 metros, mientras que el nitrógeno sólo ha recorrido un par de metros. Esto se debe a que los procesos difusivos hacen que los convectivos no desempeñen un papel importante en la dinámica del nitrógeno, al menos para este tipo de estructuras.

8.2. Dispersión en fracturas porosas

Las soluciones asintóticas para los campos de velocidad y temperatura en una fractura porosa, bajo convección natural, se obtuvieron en el capítulo 7. Debido a la convección en la fractura, se genera un proceso de dispersión de nitrógeno dentro de ella. La dispersión es un

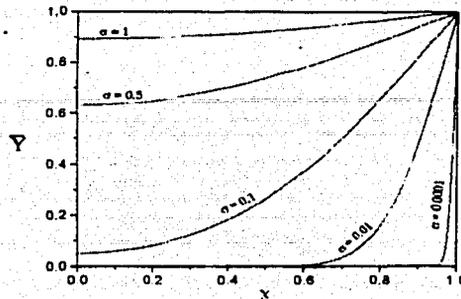


Figura 8-3: Se muestra, en diferentes tiempos, la concentración adimensional promedio de nitrógeno \bar{Y} .

proceso de difusión mejorada. A escala microscópica, las fluctuaciones de la velocidad dentro de los poros mejoran el mezclado de las especies. Para este trabajo se supone que la dispersión es proporcional a la velocidad [9].

El modelo físico a estudiar es idéntico al empleado en el capítulo 7; la única diferencia es que en la parte superior de la fractura se tiene una concentración conocida de nitrógeno. En la figura 8-5 se muestra un esquema del sistema a estudiar.

8.2.1. Ecuación de dispersión

La ecuación de dispersión para la fractura, cuando se toma en cuenta que las velocidades transversales son prácticamente cero, tiene la forma:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C}{\partial x^*} = \phi \frac{\partial}{\partial x^*} \left(D \frac{\partial C}{\partial x^*} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial y^*} \left(D \frac{\partial C}{\partial y^*} \right), \quad (8.17)$$

donde, C es la concentración másica de nitrógeno, t^* es la coordenada temporal. x^* y y^* son las coordenadas espaciales, u^* es la velocidad en dirección x^* en la fractura, ϕ la porosidad de la fractura y D es el tensor de dispersión. Utilizando la definición del tensor de dispersión del capítulo 2 (ecuación 2.16), y tomando en cuenta que la velocidad transversal es muy pequeña,

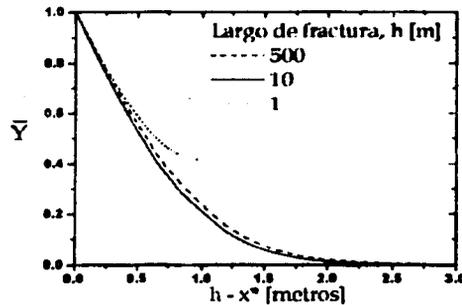


Figura 8-4: Concentración \bar{Y} a orden Γ^2 en una fractura para diferentes longitudes de fractura y a los dos años de iniciado el proceso.

se obtiene:

$$D = \frac{D}{\tau} + \frac{\alpha |u^*|}{\phi}, \quad (8.18)$$

donde, D es el coeficiente de difusión libre (sin medio poroso), del nitrógeno en el aceite, τ es la tortuosidad y α el coeficiente de dispersividad. Utilizando este modelo para la dispersión se obtiene:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C}{\partial x^*} = \phi \left(\frac{D}{\tau} + \frac{\alpha |u^*|}{\phi} \right) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^{*2}} \right) + \alpha \frac{\partial C}{\partial y^*} \frac{\partial |u^*|}{\partial y^*}. \quad (8.19)$$

La ecuación 8.19 está sujeta a las siguientes condiciones de frontera. La concentración de nitrógeno en la cara superior de la fractura es conocida; esto es, $C = C_{N_2}$ en $x^* = h$. Las paredes de la fractura son impermeables, por lo que el flujo de nitrógeno a través de ellas es cero: $\partial C / \partial x^* = 0$ en $x = 0$, y $\partial C / \partial y^* = 0$ en $y^* = 0, d$. Por otro lado, la condición inicial es que la fractura sólo contiene aceite por lo que: $C = 0$ en $t^* = 0$.

La adimensionalización de la ecuación 8.19 se realiza de manera similar a como se hizo en el capítulo 7, para las coordenadas espaciales $y = y^*/d$ y $x = x^*/h$, y para la velocidad $u = u^*/(k\rho_0\beta\Delta T_0g/\mu)$. La concentración se adimensionaliza con su valor en la parte superior de la fractura, $Y = C/C_{N_2}$. En lo que respecta al tiempo, existen dos tiempos característicos

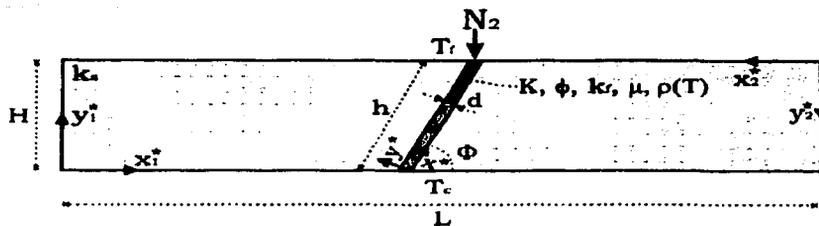


Figura 8-5: Modelo físico para el estudio de la dispersión en fracturas porosas.

para el sistema, uno difusivo, $t_{cD} = \tau h^2/D$ y otro convectivo $t_{cC} = h/(k\rho_0\beta\Delta T_0g/\mu)$. El principal interés es observar el proceso desde un punto de vista difusivo, por lo que el tiempo se adimensionaliza con su valor característico de difusión, $\sigma = t^*/(\tau h^2/D)$. Finalmente, la ecuación adimensional de dispersión cuando se sustituye la solución para la velocidad en la fractura porosa 7.55 es:

$$\Gamma^2 \frac{\partial Y}{\partial \sigma} - \Gamma^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \Gamma^2 \frac{Pe_d (\frac{1}{\kappa} - 1) \cos \Phi}{\phi} \left(y - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (8.20)$$

$$= \Gamma \frac{Pe_\alpha (\frac{1}{\kappa} - 1) \cos \Phi}{\phi} \left[\frac{\partial |y - \frac{1}{2}|}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} + \left| y - \frac{1}{2} \right| \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right]$$

donde, $\Gamma = d/h$, mide la razón de esbeltez de la fractura, $Pe_d = d\tau u_c/D$ es número de Peclet para difusión y $Pe_\alpha = L/\alpha$ es el número de Peclet dispersivo. Las condiciones iniciales y de frontera adimensionales son:

$$Y|_{\sigma=0} = \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{y=0,1} = Y|_{x=1} - 1 = 0. \quad (8.21)$$

8.2.2. Solución y resultados

Al igual que en el caso de la fractura libre, en las fracturas porosas de un yacimiento se tiene que $Pe_d \lesssim 1$. Por otro lado, el número de Peclet dispersivo Pe_α es difícil de estimar, porque que no hay datos del valor de dispersividad. Lake [5], en su libro, muestra una compilación de

medidas experimentales para la dispersividad; no se puede concluir mucho, pues para un mismo material se reportan valores que difieren hasta por un orden de magnitud. Sin embargo, todas las mediciones coinciden en que $Pe_\alpha \lesssim 1$; es decir, la dispersividad se supone igual o menor a la longitud característica en el proceso, d . Como se verá más adelante, esto es suficiente para los propósitos de este trabajo.

De manera similar que en la fractura libre, con un análisis de orden de magnitud, se encuentra que el avance del nitrógeno por convección, x , mientras la difusión o la dispersión transportan al nitrógeno la distancia d , está dado por:

$$\frac{x}{d} \sim (\text{Máximo valor de } Pe_d \text{ o } Pe_\alpha) \lesssim 1. \quad (8.22)$$

Nuevamente las variaciones de la concentración de nitrógeno en la dirección transversal son pequeñas; entonces se puede proponer una solución en términos de las serie asintótica:

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \Gamma^n \quad (8.23)$$

Sustituyendo la serie asintótica 8.23 en la ecuación de dispersión 8.20 se obtiene:

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial y^2} = 0 \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} = -\frac{Pe_\alpha \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \cos \Phi}{\phi} \left[\left| y - \frac{1}{2} \right| \frac{\partial^2 Y_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \left| y - \frac{1}{2} \right|}{\partial y} \frac{\partial Y_0}{\partial y} \right] \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial^2 Y_2}{\partial y^2} = \frac{\partial Y_0}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x^2} + \frac{Pe_d \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \cos \Phi}{\phi} \times \quad (8.26)$$

$$\left[\left(y - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial Y_0}{\partial x} - \left| y - \frac{1}{2} \right| \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} - \frac{\partial \left| y - \frac{1}{2} \right|}{\partial y} \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial^2 Y_3}{\partial y^2} = \frac{\partial Y_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + \frac{Pe_d \cos \Phi \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)}{\phi} \times \quad (8.27)$$

$$\left[\left(y - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \left| y - \frac{1}{2} \right| \left(\frac{\partial^2 Y_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \left| y - \frac{1}{2} \right|}{\partial y} \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial^2 Y_4}{\partial y^2} = \dots \quad (8.28)$$

La ecuación a orden cero 8.24 predice que $Y_0 = Y_0(x, \sigma)$. Con este resultado de 8.25 se con-

cluye también que $Y_1 = Y_1(x, \sigma)$. Cuando la ecuación a segundo orden se integra en dirección transversal se obtiene el sistema

$$\frac{\partial Y_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x^2} \quad (8.29)$$

La cual esta sujeta a las condiciones de frontera e iniciales $Y_0(x=1) = 1$, $\partial Y_0 / \partial x|_{x=0} = 0$ y $Y_0(\sigma=0) = 0$. La solución a este sistema de ecuaciones es:

$$Y_0 = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left[(1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right]}{(2m-1)} e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \quad (8.30)$$

Utilizando este resultado la ecuación a segundo orden 8.26 se puede integrar en dirección y , lo que resulta en:

$$Y_2 = \frac{Pe_d \cos \Phi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)}{6\phi} (2y^3 - 3y^2) \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[(1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right] e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \quad (8.31)$$

$$+ G_2(x, \sigma)$$

donde $G_2(x, \sigma)$ es una función que se obtiene integrando órdenes superiores. Con los resultados de Y_0 y Y_2 se puede integrar transversalmente la ecuación a tercer orden 8.27. La ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + \frac{\pi Pe_\alpha \cos \Phi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)}{4\phi} \times \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \text{sen} \left[(1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right] e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \quad (8.32)$$

la cual esta sujeta a las condiciones $Y_1(x=1) = 0$, $\partial Y_1 / \partial x|_{x=0} = 0$ y $Y_1(\sigma=0) = 0$. La solución a esta ecuación diferencial es

$$Y_1 = \frac{\pi Pe_\alpha \cos \Phi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)}{4\phi} \sigma \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \text{sen} \left[(1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right] e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} \quad (8.33)$$

Finalmente, se obtiene la solución hasta órdenes de Γ^2 :

$$\begin{aligned}
 Y = & 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi}{2} (1-x) \right)}{(2m-1)} e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} + \\
 & \Gamma \frac{\pi P e_{\alpha} \cos \Phi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)}{4\phi} \sigma \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \text{sen} \left[(1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right] e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} + \\
 & \Gamma^2 \frac{P e_d \cos \Phi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)}{6\phi} (2y^3 - 3y^2) \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[(1-x) \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi \right] e^{-(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2 \sigma} + \\
 & \Gamma^2 G_2(x, \sigma) + O(\Gamma^3).
 \end{aligned} \tag{8.34}$$

El promedio transversal de la concentración adimensional $\bar{Y} = \int_0^1 Y dy$ se muestra en la figura 8-6 para diferentes tiempos y los valores: $\Gamma = 0.01$, $\phi = 0.15$, $\kappa = 0.8$, $\Phi = \pi/4$ y $P e_{\alpha} = P e_d = 1$.

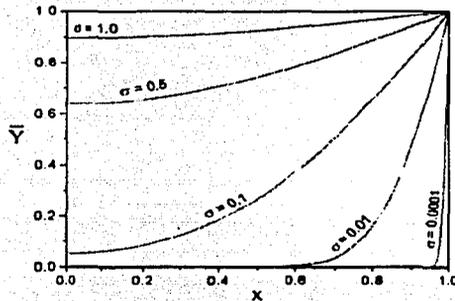


Figura 8-6: Se muestra, en diferentes tiempos, la concentración adimensional promedio de nitrógeno \bar{Y} .

En la figura 8-7 se muestran los resultados dimensionales para $C/C_0 = \int_0^1 Y dy$ en fracturas porosas de un grosor de 10 centímetros, con aceite de Cantarell, un coeficiente de difusión libre de $3.5 \times 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$ y un Peclet dispersivo $P e_{\alpha} = 1$ (el caso más crítico $\alpha \sim d$). Se utilizaron diferentes longitudes de fractura y el tiempo transcurrido es de dos años.

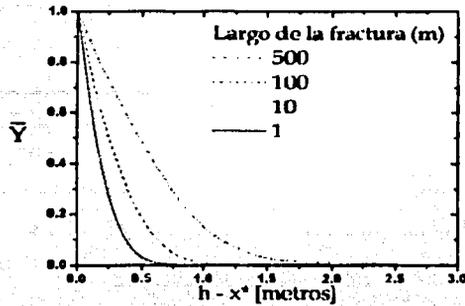


Figura 8-7: Concentración \bar{Y} a orden Γ^2 para una fractura porosa de diferentes longitudes después de dos años.

A los dos años de iniciado el proceso dispersivo, dentro de la fractura, el aceite recorre por convección natural en promedio 20 metros, mientras que el nitrógeno sólo ha recorrido un par de metros. Lo anterior se debe, nuevamente, a que los procesos difusivos hacen que los convectivos no tengan un papel importante.

Capítulo 9

Conclusiones

El lector de esta tesis se podrá dar cuenta que las simplificaciones para dar un primer tratamiento a la dinámica de fluidos en un yacimiento tan complejo como Cantarell, sometido a inyección de nitrógeno, son muchas. Sin embargo, esto es suficiente para entender muchos de los procesos involucrados en esta nueva tecnología. El trabajo por realizar es todavía enorme. En la teoría desarrollada para yacimientos homogéneos, se requiere analizar aspectos referentes a la geometría, la ecuación de estado, la absorción de N_2 por el aceite y la evaporación de hidrocarburos ligeros desde el aceite, los efectos de la difusión sobre la presión, etc.. Por otra parte, en el estudio de yacimientos fracturados es también necesario considerar sistemas interconectados de fracturas, los flujos matriz-fractura, los posibles efectos capilares, etc. En las siguientes secciones se resumen las principales conclusiones del trabajo de tesis.

9.1. Yacimiento homogéneo

Se ha estudiado el comportamiento de un yacimiento homogéneo bajo un proceso de inyección de nitrógeno, tanto en el casquete de gas como en la zona de aceite. A continuación se describen las conclusiones obtenidas en ambas zonas.

En el casquete de gas coexisten dos mecanismos que influyen directamente en la dispersión del nitrógeno: la convección forzada, que se produce por inyectar nitrógeno, y la convección por diferencia de densidades entre el nitrógeno y el gas natural. El problema de inyección de nitrógeno en el casquete es de *escalas temporales múltiples*. Para estudiarlo se escogió el tiempo

característico asociado con el descenso del N_2 por diferencia de densidades. En esta escala, ambos mecanismos son comparables en magnitud. La combinación de estos dos mecanismos, tiene como consecuencia que *el nitrógeno se precipite hacia la parte inferior del casquete de gas*. Este hecho *concuere con lo observado en el campo Cantarell*, donde después de más de dos años de iniciada la inyección, existen zonas de la parte superior del casquete con vecindad a la zona de inyección, que no muestran un incremento notable en la concentración de nitrógeno.

En la zona de aceite, existen dos procesos involucrados en la dispersión de nitrógeno: la convección forzada, producida por los pozos productores, y la convección natural o térmica, producida por los gradientes geotérmicos. La convección forzada del contacto gas aceite tiene un efecto limitado en la dispersión de nitrógeno. Únicamente provoca que la zona contaminada con nitrógeno, baje a la misma velocidad que la interfaz gas-aceite; el tamaño de la zona contaminada depende del número de Peclet.

Por otro lado, la convección natural generalmente se presenta en celdas de convección, y en caso de que éstas existan pueden actuar como mecanismos de mezcla para dispersar el nitrógeno. Cuando los gradientes de temperatura son verticales, el problema de estabilidad lineal para la zona de aceite se encontró resuelto en la literatura. El resultado más importante es que la convección no existe si el número de Rayleigh es menor a $4\pi^2$. Se calculó el número de Rayleigh para Cantarell, dando por resultado que $Ra_{Cantarell} \sim 1.5 < 4\pi^2$. De lo anterior se concluye que: *si se considerara a Cantarell como un yacimiento homogéneo (como primera aproximación), entonces la convección natural no existiría y no habría posibilidad de contaminación de nitrógeno en el aceite (despreciando los efectos difusivos puros)*. Por el contrario, *si los gradientes de temperatura fueran horizontales, entonces la convección natural en el aceite siempre existiría*. Sin embargo, las velocidades máximas calculadas para Cantarell son tan pequeñas que son comparables con las velocidades difusivas, por lo que el posible efecto de éste tipo de fenómeno es despreciable.

Estos fenómenos concuerdan con lo observado en el complejo Cantarell, donde los pozos productores que están a punto de ser invadidos por el gas (ceranos a la interfaz gas-aceite), no presentan cambios significativos en su concentración de nitrógeno.

9.2. Yacimiento naturalmente fracturado

En un yacimiento naturalmente fracturado (YNF), los fenómenos físicos pueden ser completamente diferentes si se comparan con los de un yacimiento homogéneo. En un YNF se estudió el comportamiento térmico de la zona de gas, ya que el nitrógeno se inyecta a una temperatura inferior a la del yacimiento. En la zona de aceite se estudió la convección natural o térmica en tres tipos de estructuras: vórgulos, fracturas libres y fracturas porosas, y por otro lado, los procesos de dispersión y difusión en fracturas libres y porosas.

El comportamiento térmico del casquete de gas de un YNF, coincide cualitativamente con lo observado en Cantarell. Sin embargo, para hacer un mejor análisis de las consecuencias de inyectar nitrógeno a baja temperatura, es necesario realizar algunas pruebas *ad hoc* en el yacimiento. En este trabajo de tesis, se propone una metodología para realizar dichas pruebas.

En los tres tipos de estructuras estudiadas, la convección natural existe para cualquier número de Rayleigh siempre y cuando estén inclinadas. La magnitud de la velocidad del aceite en las fracturas libres o porosas es comparable al movimiento del contacto gas-aceite. Por ejemplo, para una fractura libre de 0.1 milímetros de apertura promedio, el aceite recorre 85 metros en un año y para una fractura porosa de 10 centímetros de grosor promedio el aceite recorre 10 metros al año. *La solución teórica para las velocidades ha sido validada por experimentos de laboratorio, en donde se utilizó la técnica de PIV (particle image velocimetry, por sus siglas en inglés).*

Aunque la convección natural en fracturas, es de orden de magnitud comparable al movimiento del contacto gas-aceite, *la velocidad de avance del frente de dispersión del nitrógeno es comparable a un proceso difusivo puro.* Lo anterior tiene origen en la superposición de los dos mecanismos de transporte en la fractura: difusión o dispersión y convección, de tal manera que el sistema se comporta prácticamente como si no existiera la convección. Nuevamente *este fenómeno se observa en Cantarell, donde los pozos productores que están a punto de ser invadidos por el gas (ceranos a la interfaz gas-aceite), no presentan cambios apreciables en su concentración de nitrógeno.* Por ejemplo, después de transcurridos dos años, para una fractura libre de apertura promedio 0.1 milímetro, o una fractura porosa de 10 centímetros, el avance de nitrógeno es de apenas dos metros, en promedio.

Capítulo 10

Apéndices

10.1. Apéndice A: BIEM

Considere al dominio simplemente conexo D con frontera Γ . Dentro del dominio se satisface la ecuación de Laplace para la función Φ :

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (10.1)$$

sobre la frontera se cumple que:

$$a\Phi + b \frac{\partial \Phi}{\partial n} = c, \quad (10.2)$$

en donde a, b , y c son constantes y n es la normal a Γ .

Por otro lado, del cálculo vectorial la identidad de Green es:

$$\int_D (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) dA = \oint_{\Gamma} (U \vec{\nabla} V - V \vec{\nabla} U) \cdot \hat{n} d\Gamma; \quad (10.3)$$

si definimos $V = \ln r$ y $U = \Phi$, entonces:

$$\int_D (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) dA = 0 \quad (10.4)$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\Phi}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \ln r \right) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0. \quad (10.5)$$

Si utilizamos 10.5 podemos convertir el problema de área, a uno de contorno.

Discretizando a Γ en n puntos como se muestra en la figura 10-1, y utilizando las construcciones ahí definidas

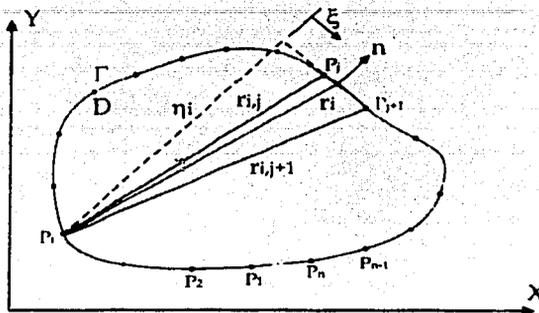


Figura 10-1: La frontera del dominio se discretiza en n puntos.

la integral 10.5 se convierte en:

$$\sum_j \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \left[\frac{\Phi}{r_i} \frac{\partial r_i}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \ln r_i \right] d\xi = 0; \quad (10.6)$$

interpolando linealmente obtenemos las relaciones siguientes:

$$\Phi = \frac{(\Phi_{j+1} - \Phi_j)\xi + \xi_{j+1}\Phi_j - \xi_j\Phi_{j+1}}{\xi_{j+1} - \xi_j},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\left(\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{j+1} - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_j \right) \xi + \xi_{j+1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_j - \xi_j \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{j+1}}{\xi_{j+1} - \xi_j},$$

$$r_j = \sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2},$$

$$\frac{\partial r_j}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{2\eta_j}{\sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2}} = \frac{\eta_j}{\sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2}}.$$

Las relaciones anteriores no permiten integrar cada segmento. La primera parte de la integral

es

$$\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\Phi}{r_i} \frac{\partial r_i}{\partial n} d\xi = \Phi_j \{-I_{11} + I_{12}\xi_{j+1}\} + \Phi_{j+1} \{I_{11} - I_{12}\xi_j\}$$

en donde,

$$I_{11} = \frac{\eta_j \ln \left(\frac{\xi_{j+1}^2 + \eta_j^2}{\xi_j^2 + \eta_j^2} \right)}{2(\xi_{j+1} - \xi_j)},$$

$$I_{12} = \frac{\left[\arctan \frac{\xi_{j+1}}{\eta_j} - \arctan \frac{\xi_j}{\eta_j} \right]}{(\xi_{j+1} - \xi_j)},$$

la segunda parte de la integral queda como

$$\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \ln r_i d\xi = \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \ln r_i d\xi = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_j \{-I_{21} + \xi_{j+1} I_{22}\} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{j+1} \{I_{21} - \xi_j I_{22}\},$$

en donde,

$$I_{21} = \frac{(\xi_{j+1}^2 + \eta_j^2) \ln(\xi_{j+1}^2 + \eta_j^2) - (\xi_{j+1}^2 - \xi_j^2) - (\xi_j^2 + \eta_j^2) \ln(\xi_j^2 + \eta_j^2)}{4(\xi_{j+1} - \xi_j)},$$

$$I_{22} = \frac{\xi_{j+1} \ln(\xi_{j+1}^2 + \eta_j^2) - \xi_j \ln(\xi_j^2 + \eta_j^2) - 2[\xi_{j+1} - \xi_j] + 2\eta_j \left[\tan^{-1} \frac{\xi_{j+1}}{\eta_j} - \tan^{-1} \frac{\xi_j}{\eta_j} \right]}{2(\xi_{j+1} - \xi_j)},$$

Finalmente obtenemos el conjunto de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^n \left[\begin{array}{l} \Phi_j \{-I_{11} + \xi_{j+1} I_{12}\} + \Phi_{j+1} \{I_{11} - \xi_j I_{12}\} + \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_j \{-I_{21} + \xi_{j+1} I_{22}\} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{j+1} \{I_{21} - \xi_j I_{22}\} \end{array} \right] = 0 \quad (10.7)$$

que junto a

$$a\Phi_j + b \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} = c \quad (10.8)$$

forman un sistema cerrado de ecuaciones lineales del tipo:

$$\mathbf{A} \vec{\Phi} = \mathbf{B}, \quad (10.9)$$

que se resuelve utilizando técnicas convencionales del álgebra lineal (por ejemplo descomposición LU).

Para la solución interna se utiliza:

$$\Phi_{int} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left(\frac{\Phi}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \ln r \right) \cdot \hat{n} d\Gamma;$$

esta integral se vuelve a discretizar con el mismo procedimiento, sólo que esta vez desde un punto de referencia interno, por lo que las variables ξ y η , quedan ahora medidas desde el punto de referencia. Un compilado excelente del método BIEM puede encontrarse en las referencias [75] y [76].

10.2. Apéndice B: Método numérico en la zona de gas

El conjunto de ecuaciones 2.61-2.73 se discretiza utilizando diferencias finitas centradas. El resultado se presenta en las ecuaciones en diferencias finitas siguientes:

Para la presión,

$$\begin{aligned}
 & p_{i+1,j}^k \left\{ -\frac{\Delta\sigma\epsilon^2}{\beta\Delta\xi^2} + \frac{\Delta\sigma\epsilon^2}{2\beta\Delta\xi} \left(\frac{-1}{\xi} - \frac{s}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\xi} - \beta \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\xi} \right) \right\} + \\
 & p_{i-1,j}^k \left\{ -\frac{\Delta\sigma\epsilon^2}{\beta\Delta\xi^2} - \frac{\Delta\sigma\epsilon^2}{2\beta\Delta\xi} \left(\frac{-1}{\xi} - \frac{s}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\xi} - \beta \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\xi} \right) \right\} + \\
 & p_{i,j}^k \left\{ 1 + 2\frac{\Delta\sigma}{\beta\Delta\eta^2} + 2\frac{\Delta\sigma\epsilon^2}{\beta\Delta\xi^2} \right\} + \\
 & p_{i,j-1}^k \left\{ -\frac{\Delta\sigma}{\beta\Delta\eta^2} - \frac{\Delta\sigma}{2\beta\Delta\eta} \left(\frac{2\beta}{(1-sY_{i,j}^k)} - \frac{s}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\eta} - \beta \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\eta} \right) \right\} + \\
 & p_{i,j+1}^k \left\{ -\frac{\Delta\sigma}{\beta\Delta\eta^2} + \frac{\Delta\sigma}{2\beta\Delta\eta} \left(\frac{2\beta}{(1-sY_{i,j}^k)} - \frac{s}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\eta} - \beta \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\eta} \right) \right\} \\
 = & p_{i,j}^{k-1} - \frac{\Delta\sigma s}{\beta(1-sY_{i,j}^k)} \left(\frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\sigma} + \frac{2}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\eta} \right);
 \end{aligned}$$

para la concentración:

$$\begin{aligned}
 & Y_{in_j+j}^k \left\{ -\epsilon^2 \frac{\Delta\sigma\gamma}{\Delta\xi^2} - \epsilon^2 \frac{\Delta\sigma}{2\Delta\xi} \left(\gamma \frac{1}{\xi_i} + \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\xi} + \frac{s\gamma}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\xi} \right) \right\} + \\
 & Y_{(i-2)n_j+j}^k \left\{ -\epsilon^2 \frac{\Delta\sigma\gamma}{\Delta\xi^2} + \epsilon^2 \frac{\Delta\sigma}{2\Delta\xi} \left(\gamma \frac{1}{\xi_i} + \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\xi} + \frac{s\gamma}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\xi} \right) \right\} + \\
 & Y_{(i-1)n_j+j}^k \left\{ 1 + 2\epsilon^2 \frac{\Delta\sigma\gamma}{\Delta\xi^2} + 2\frac{\Delta\sigma\gamma}{\Delta\eta^2} \right\} + \\
 & Y_{(i-1)n_j+j-1}^k \left\{ -\frac{\Delta\sigma\gamma}{\Delta\eta^2} + \frac{\Delta\sigma}{2\Delta\eta} \left(\frac{-1}{1-sY_{i,j}^k} + \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\eta} + \frac{s\gamma}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\eta} \right) \right\} + \\
 & Y_{(i-1)n_j+j+1}^k \left\{ -\frac{\Delta\sigma\gamma}{\Delta\eta^2} - \frac{\Delta\sigma}{2\Delta\eta} \left(\frac{-1}{1-sY_{i,j}^k} + \frac{\partial p_{i,j}^k}{\partial\eta} + \frac{s\gamma}{1-sY_{i,j}^k} \frac{\partial Y_{i,j}^k}{\partial\eta} \right) \right\} \\
 = & Y_{i,j}^{k-1}, \tag{10.10}
 \end{aligned}$$

para $i = 2, n_i - 1$, $j = 2, n_j - 1$ y $k = 2, n_k$, en donde i, j y k son los índices asociados a las coordenadas radial, vertical y temporal, respectivamente.

Las condiciones iniciales y de frontera quedan como:

$$Y_{1,j}^k = Y_{2,j}^k, \quad (10.11)$$

$$Y_{n_i,j}^k = Y_{n_i,j}^k, \quad (10.12)$$

$$p_{1,j}^k = p_{2,j}^k, \quad (10.13)$$

$$p_{n_i,j}^k = p_{n_i,j}^k, \quad (10.14)$$

$$Y_{i,1}^k = 1 : (0 < \xi_i \leq r_0/R), \quad (10.15)$$

$$Y_{i,1}^k = Y_{i,2}^k : (r_0/R < \xi_i < 1), \quad (10.16)$$

$$Y_{i,n_j}^k = Y_{i,n_j-1}^k, \quad (10.17)$$

$$\frac{p_{i,2}^k - p_{i,1}^k}{\Delta\eta} = \frac{\beta p_{i,1}^k + 1}{1 - sY_{i,1}^k} - \alpha_{iny} H \left(\xi_i - \frac{r_0}{R} \right), \quad (10.18)$$

$$\frac{p_{i,n_j} - p_{i,n_j-1}}{\Delta\eta} = \frac{\beta p_{i,n_j} + 1}{1 - sY_{i,n_j}} - \alpha_{ext}, \quad (10.19)$$

y

$$Y_{i,j}^1 = 0, \quad (10.20)$$

$$p_{i,j}^1 = \frac{e^{\beta\eta_j} - 1}{\beta}. \quad (10.21)$$

Finalmente el sistema a resolver es del tipo:

$$\mathbf{A}_k \left(Y_{i,j}^k, p_{i,j}^k \right) \begin{bmatrix} Y_{i,j}^k \\ p_{i,j}^k \end{bmatrix} = \mathbf{B}_k \left(Y_{i,j}^k, p_{i,j}^k \right). \quad (10.22)$$

Este sistema matricial no lineal se resuelve utilizando iteración con relajación para cada tiempo. La matriz resultante es del tipo bandeda y se resuelve utilizando descomposición LU . La malla espacial bidimensional es de tamaño 70×70 , para la malla temporal, $\Delta\sigma = 0.005$. El grado de

convergencia que se pide para cada iteración es 1×10^{-9} , y se mide sobre la concentración y la presión:

$$\left| \left[\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} P_{i,j}^k \right]_{iter} - \left[\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} P_{i,j}^k \right]_{iter-1} \right| < 1 \times 10^{-10} \quad (10.23)$$

$$\left| \left[\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} Y_{i,j}^k \right]_{iter} - \left[\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} Y_{i,j}^k \right]_{iter-1} \right| < 1 \times 10^{-10} \quad (10.24)$$

El programa se creó en Fortran 95 y corre en una máquina Pentium III, a 1GHz y con 1 Gb de RAM. Cada corrida dura aproximadamente 48 horas, ($\sigma = 25$).

10.3. Apéndice C: Problema de Horton-Rogers-Lapwood

Sponga a un fluido en equilibrio mecánico dentro de un medio poroso sometido a un gradiente de temperatura y a la fuerza de gravedad, entonces el problema estará regido por la ley de Darcy con velocidad cero:

$$\nabla P = \rho \mathbf{g}; \quad (10.25)$$

si se aplica el rotacional a la ecuación anterior, queda como:

$$\nabla \times \nabla P = \nabla \rho \times \mathbf{g}, \quad (10.26)$$

Ya que la presión es un campo conservativo su rotacional es cero, $\nabla \times \nabla P = 0$, y se tiene que: $\nabla \rho \times \mathbf{g} = 0$. Si la ecuación de estado que rige al fluido, es tal que la densidad es función lineal de la temperatura, $\rho \sim T$, se obtiene:

$$\nabla T \times \mathbf{g} = 0 \quad (10.27)$$

Si se sustituye a $\mathbf{g} = g\hat{i}_z$ en la ecuación 10.27, donde \hat{i}_z es el vector unitario en dirección vertical, se obtiene:

$$\nabla_H T = 0, \quad (10.28)$$

es decir, T es sólo función de la coordenada vertical. En la ecuación 10.28 ∇_H es el gradiente sin el término de la derivada en dirección vertical. Lo que se ha probado líneas atrás, es que una condición necesaria, pero no suficiente, para el equilibrio mecánico, es que la temperatura sólo cambie verticalmente. Este tipo de equilibrio es de naturaleza inestable. Cuando alguna perturbación llega al sistema, ésta podría crecer y romper el equilibrio mecánico, dependiendo del punto que ocupe el sistema en su espacio paramétrico. Para analizar el espacio paramétrico y encontrar las zonas en que el sistema es inestable o estable, frecuentemente se usa el análisis de estabilidad lineal. A continuación se presenta este análisis para el sistema.

El modelo matemático que describe a este sistema se simplifica con la aproximación de Boussinesq, que dice que las variaciones de la densidad sólo son importantes en los términos de flotación. Esto es válido si las variaciones de densidad son pequeñas comparadas con ella misma

($\Delta\rho \ll \rho$). Bajo esta suposición la conservación de masa queda como:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (10.29)$$

donde $\mathbf{V} = \mathbf{V}(u, v, w)$, u , v y w son las velocidades en dirección x , y y z respectivamente. La ecuación de movimiento es la ley de Darcy modificada con un término de aceleración. Lo anterior, porque las variaciones temporales de la velocidad son importantes para el análisis de estabilidad. Considerando lo antes dicho se tiene para la ecuación de la Ley de Darcy:

$$c_a \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P - \frac{\mu}{k} \mathbf{V} + g\rho \quad (10.30)$$

donde c_a es el coeficiente de aceleración, ρ_0 la densidad del fluido en la parte superior de la zona de aceite, la temperatura es T_0 , t la variable temporal, P la presión, g la aceleración de la gravedad, μ la viscosidad del aceite, k la permeabilidad, y ρ la densidad del aceite. La dependencia de la densidad en la temperatura se propone como un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de referencia, aproximado a primer orden:

$$\rho(T) = \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_0} (T - T_0) + O((T - T_0)^2); \quad (10.31)$$

con la definición del coeficiente de expansión volumétrica térmica $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_0}$, la relación anterior se transforma en:

$$\rho(T) = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0)). \quad (10.32)$$

Por otro lado, la conservación de energía para este sistema es:

$$\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_p \mathbf{V} \cdot \nabla T = k_m \nabla^2 T, \quad (10.33)$$

aquí, ρ_m es la densidad de la matriz porosa, c_m y c_p los calores específicos de la matriz y el aceite respectivamente, k_m la conductividad térmica de la matriz y T la temperatura.

Si usamos el conjunto de transformadas definido por:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}}{\alpha_m/H}, \quad p = \frac{P}{\mu\alpha_m/k}, \quad (10.34)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_0}, \quad \sigma = \frac{t}{H^2\vartheta/\alpha_m}, \quad (10.35)$$

donde, los parámetros involucrados están definidos como:

$$\alpha_m = \frac{k_m}{\rho_0 c_p}, \quad \vartheta = \frac{\rho_m c_m}{\rho_0 c_p} \quad (10.36)$$

$$p_H = \frac{k\rho_0 g H}{\mu\alpha_m}, \quad \gamma_a = \frac{k c_a}{H^2\vartheta Pr} \quad (10.37)$$

$$\Delta T = T_H - T_0, \quad (10.38)$$

$$Ra = \frac{\rho_0 g \beta k H \Delta T}{\mu\alpha_m}, \quad Pr = \frac{\mu}{\rho_0 \alpha_m} \quad (10.39)$$

obtenemos el sistema adimensional de ecuaciones definido por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \nabla^2 \theta; \quad (10.40)$$

$$\gamma_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} = -\nabla p + p_H - \mathbf{v} - Ra \theta \hat{i}_z; \quad (10.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (10.42)$$

sujeto a las condiciones de frontera para la temperatura:

$$\theta(z=0) = \theta(z=1) - 1 = 0 \quad (10.43)$$

para la presión y velocidades en las fronteras:

$$p(z=0) = p_0, \quad (10.44)$$

$$w(z=0,1) = 0. \quad (10.45)$$

La condición de frontera en $z = 1$, significa que el flujo perpendicular en la frontera inferior es cero, ya que es impermeable; mientras que la condición de frontera en $z = 0$ supone que la velocidad de la interfaz gas-aceite es muy pequeña. El conjunto de ecuaciones anterior tiene

una solución base estacionaria cuya solución es:

$$v_b = 0, \quad (10.46)$$

$$\theta_b = z, \quad (10.47)$$

$$p_b = zp_H - \frac{z^2}{2}Ra + p_0. \quad (10.48)$$

La solución anterior representa un comportamiento térmico puramente conductivo. Esta solución puede ser inestable en algunas regiones del espacio paramétrico. Para estudiar estas regiones se utiliza la teoría de estabilidad lineal; con este propósito se definen las funciones siguientes:

$$v = v_b + \hat{v} = \hat{v}, \quad (10.49)$$

$$\theta = \theta_b + \hat{\theta} = z + \hat{\theta}, \quad (10.50)$$

$$p = p_b + \hat{p} = zp_{II} - \frac{z^2}{2}Ra + p_0 + \hat{p}, \quad (10.51)$$

en donde las funciones con superíndice $\hat{}$, son pequeñas perturbaciones sobre el sistema estable. En términos de las perturbaciones el sistema queda:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \sigma} + \hat{v} \cdot \nabla (z + \hat{\theta}) = \nabla^2 \hat{\theta}, \quad (10.52)$$

$$\gamma_a \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} = -\nabla \hat{p} - \hat{v} - Ra \hat{\theta}, \quad (10.53)$$

$$\nabla \cdot \hat{v} = 0, \quad (10.54)$$

con las condiciones de frontera:

$$\hat{\theta}(z = 0, 1) = 0 \quad (10.55)$$

$$\hat{w}(z = 0, 1) = 0. \quad (10.56)$$

El sistema anterior es no lineal. Si la hipótesis original es que las perturbaciones son pequeñas, entonces se puede linealizar eliminando términos cuadráticos o superiores en las perturbaciones.

Después de esto el sistema que se obtiene es el siguiente:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \sigma} + \hat{v}_z = \nabla^2 \hat{\theta} \quad (10.57)$$

$$\gamma_a \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} = -\nabla \hat{p} - \hat{v} - Ra \hat{\theta} \hat{i}_z \quad (10.58)$$

$$\nabla \cdot \hat{v} = 0 \quad (10.59)$$

Combinando estas ecuaciones y tomando en cuenta que $\nabla \times \nabla \hat{p} = 0$, se obtiene el problema de autovalores para la perturbación de la velocidad en la dirección z :

$$(\nabla^2 - \alpha^2)^2 w = \alpha^2 Ra w \quad (10.60)$$

con las condiciones de frontera

$$\left. \frac{d^2 w}{dz^2} \right|_{z=0,1} = 0 \quad (10.61)$$

$$w(z=0,1) = 0 \quad (10.62)$$

La solución a este problema de valores propios es:

$$w = \text{sen}(j\pi z), \quad (10.63)$$

en donde los autovalores están definidos por la relación:

$$Ra = \frac{(j^2 \pi^2 + \alpha^2)^2}{\alpha^2} : j = 1, 2, \dots \quad (10.64)$$

El valor mínimo del número de Rayleigh se obtiene cuando $j = 1$, y $\alpha = \pi$. En conclusión el sistema permanece estable para $Ra < 4\pi^2$. Esto significa que para este rango del espacio paramétrico, el sistema es puramente conductivo.

10.4. Apéndice D: Convección natural por gradiente térmico horizontal

Considérese una cavidad porosa saturada por un fluido, como se muestra en la figura 10-2. El medio poroso está sometido a un gradiente horizontal de temperatura, el cual produce movimientos convectivos en el fluido.

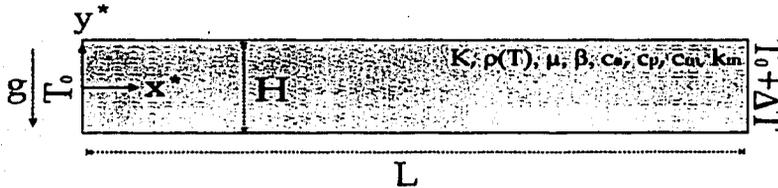


Figura 10-2: Modelo físico de convección natural bajo gradientes térmicos horizontales.

El sistema está regido por la ley de Darcy y la conservación de masa y energía; para simplificar el modelo se utiliza la aproximación de Boussinesq. Las ecuaciones siguientes describen lo antes dicho.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (10.65)$$

$$u^* = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x^*}, \quad (10.66)$$

$$v^* = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \rho^* g^* \right), \quad (10.67)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha_m \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (10.68)$$

$$\rho^* = \rho_0 (1 - \beta [T^* - T_0]). \quad (10.69)$$

Estas ecuaciones deben de resolverse acopladas a las condiciones de frontera: $v^* = 0$ en $y^* = \pm H/2$, $u^* = 0$ en $x^* = 0, L$, $T^* = T_0$ en $x^* = 0$ y finalmente $T^* = T_0 + \Delta T$ en $x^* = L$.

Si se combinan las ecuaciones anteriores y se utilizan las siguientes transformaciones: $x = x^*/L$, $y = y^*/H$, $u = u^*/(Kg\beta\Delta TL/(\nu H))$, $v = v^*/(Hu_c/L)$ y $\theta = (T^* - T_0)/\Delta T$, se obtiene

el sistema de ecuaciones adimensionales siguiente:

$$\gamma Ra \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (10.70)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (10.71)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (10.72)$$

donde $Ra = HKg\beta\Delta T/(\nu\alpha_m)$ y $\gamma = H^2/L^2$. Las condiciones de frontera adimensionales tienen la forma: $v = 0$ en $y = \pm 1/2$, $u = 0$ en $x = 0, 1$, $\theta = 0$ en $x = 0$ y finalmente $\theta = 1$ en $x = 1$.

Si se propone una solución del tipo:

$$u = u_0 + \gamma u_1 + O(\gamma^2), \quad (10.73)$$

$$v = v_0 + \gamma v_1 + O(\gamma^2), \quad (10.74)$$

$$\theta = \theta_0 + \gamma \theta_1 + O(\gamma^2), \quad (10.75)$$

se obtiene a orden cero la solución: $u_0 = \frac{1}{2} - y$, $\theta_0 = x$ y $v_0 = 0$. A orden uno la solución: $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ y $\theta_1 = Ra \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6} \right) + \theta_A$ por lo que la solución completa es:

$$u = \frac{1}{2} - y + O(\gamma^2) \quad (10.76)$$

$$\theta = x + \gamma Ra \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6} \right) + \theta_A + O(\gamma^2) \quad (10.77)$$

$$v = 0 + O(\gamma^2) \quad (10.78)$$

La constante θ_A se calcula cuando esta solución se acopla con las capas límites de las caras izquierda y derecha; para más detalles se pueden revisar los trabajos de Bejan [37], donde en el límite $\gamma \rightarrow 0$ se tiene que $\theta_A \rightarrow 0$. En este trabajo no se profundiza más al respecto debido a que la variable importante aquí, es la velocidad.

Bibliografía

- [1] T. Limón, *Proyecto de inyección de nitrógeno: Antecedentes, obras asociadas y situación actual*. Primera reunión del comité de expertos para dar seguimiento al proceso de mantenimiento de presión al yacimiento mediante la inyección de nitrógeno, Dic., 2000.
- [2] T. Babadagil, A. Al-Bermoni, F. Boukadi, A.W. Iyoho, *EOR possibilities for development of mature light-oil reservoir in Oman*, SPE, Malaysia 8-9 Oct. 2001.
- [3] J.E. Rivera, J.C. Correa, C.A. Mantilla, C.A. Duarte, *Evaluation of displacement efficiency in volatile oil reservoirs under nitrogen injection*, SPE, Malaysia 8-9 Oct. 2001.
- [4] C. Alvarez, E. Manrique, V. Alvarado, A. Samán, *WAG pilot at VLE field and IOR opportunities for mature fields at Maracaibo lake*, SPE, Malaysia 8-9 Oct. 2001.
- [5] Lake W. Larry, *Enhanced Oil Recovery*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [6] P.D. White and J.T. Moss, *Thermal Recovery Methods*, Pennwell, Tulsa, Oklahoma, 1983.
- [7] M. Prats, *Thermal Recovery*, Dallas: Society of Petroleum Engineers of America Institute of Mining and Metallurgical Engineers, Monograph 7, 1982.
- [8] K.C. Hong, *Steamflood, Thermal Enhanced Oil Recovery*, PennWell, Tulsa, Oklahoma, 1994.
- [9] D.A. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [10] T.C. Boberg, *Thermal methods in oil recovery*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [11] B.T. William, *Laboratory studies of oil recovery by steam injection*, Trans. AIME 22, 1961:681.

- [12] C.W. Wu, *A critical review of Steamflood Mechanisms*, SPE 6550, California regional meeting of SPE, Bakersfield, CA, April, 1977.
- [13] A.N. Ying, E.L. Dougherty and S.W. Wang, *A new history-Matching technique in simulating steam injection projects*. Paper SPE 20018, California regional meeting of SPE, Ventura CA, April, 1990.
- [14] S.D. Yoelin, *The TM sand steam stimulation project*, Journal of petroleum technology, August, 987-994, 1971.
- [15] E. Manceau, E. Delamaide, J.C. Sabathier, S. Jullian, F. Kalaydjian, J.E. Ladron de Guevara, J.L. Sanchez Bujanos and F.D. Rodriguez, *Implementing convection in a reservoir simulator: a key feature in adequately modeling the exploitation of the cantarell complex*, SPE, Reservoir Evaluation & Engineering, 128-134. April, 2001.
- [16] *ATHOSTM* es propiedad del Instituto Francés del Petróleo y Beicip-Franlab.
- [17] N. Mungan, *Enhanced Oil Recovery with High Pressure Nitrogen Injection*, Paper SPE 62547, 2000 SPE/AAPG Western Regional Meeting, Long Beach, California, 19-23 June 2000.
- [18] S. Tiwari and M. Suresh Kumar, *Nitrogen Injection for Simultaneous Exploitation of Gas Cap*, Paper SPE 68169, 2001 SPE Middle East Oil Show held in Bahrain, 17-20 March 2001.
- [19] PEMEX Exploración y Producción, *Las reservas de hidrocarburos de México*, México, 2000.
- [20] PEMEX Exploración y Producción, *Las reservas de hidrocarburos de México*, México, 2001.
- [21] PEMEX Exploración y Producción, *Las reservas de hidrocarburos de México*, México, 2002.
- [22] F. Herningis and L. Zipperer, *Calculations of the viscosity of technical gas mixtures from the viscosity of individual gases*, Gas and Wasserfach, 79, 49-69, 1936.
- [23] R. Reid, J. Prausnitz and B. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, New York, 1987.

- [24] F.A. Williams, *Combustion Theory*, Addison-Wesley, California, 1985.
- [25] Bear, Jacob, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, New York, 1972.
- [26] G.I. Barenblatt, V.M. Entov, V.M. Ryslik, *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1990.
- [27] Batchelor, G. K., *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1967.
- [28] Lapwood, E. R., *Convection of a fluid in a porous medium*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 44: 508-521, 1948.
- [29] Horton, C. W. and Rogers, F. T., *Convection currents in a porous medium*, J. Appl. Phys. 16: 367-370, 1945.
- [30] C.R. Lister, *An explanation for the multivalued heat transport found experimentally for convection in a porous medium*, J. Fluid Mech. 214, 287-320, 1990.
- [31] D. Joseph, *Stability of fluid motion II*, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [32] F. Busse and D. Joseph, *Bounds for heat transfer in a porous layer*, J. Fluid Mech, 72, 491-543, 1972.
- [33] V. Gupta and D. Joseph, *Bounds for heat transfer in a porous layer*, J. Fluid Mech, 57, 521-514, 1973.
- [34] M. Combarous and B. LeFur, *Transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale*. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér, B 269, 1969.
- [35] R. Buretta and A. Berman, *Convective heat transfer in a liquid saturated porous layer*, ASME J. Appl. Mech. 43, 249-253, 1976.
- [36] M. Grundmann and A. Mojtabi, *Solution asymptotique du probleme de la convection naturelle dans la cavite carree poreuse chauffee par le bas*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér, II 321, 1995.

- [37] A. Bejan and C. Tien, *Natural convection in a horizontal porous media subjected to an end-to-end temperature difference*. Trans. ASME J. Heat Transfer **100**, 191-198, 1978.
- [38] K. Walker and G. Homsy, *Convection in a porous cavity*, J. Fluid Mech, **87**, 449-474, 1978.
- [39] A.E. Gill, *A proof that convection in a porous vertical slab is stable*, J. Fluid Mech, **35**, 545-547, 1969.
- [40] L.P. Kwon and C.F. Chen, *Stability of thermal convection in a vertical porous layer*, Trans. ASME J. Heat Transfer, **100**, 889-893, 1978.
- [41] D. Poulikakos and A. Bejan, *Natural convection in vertically and horizontally layered porous media heated from the side*, Int. J. Heat Mass Transfer **26**, 1805-1814, 1983.
- [42] T. Masuoka, Y. Tohda, Y. Tsurota and Y. Yasuda, *Buoyant plume above concentrated heat source in stratified porous media*. Trans. JSME Ser. B **52**, 2656-2662, 1986.
- [43] F.C. Lai and F.A. Kulacki, *Natural convection across a vertical layered porous cavity*, Int. J. Heat Mass Transfer, **31**, 1247-1260, 1988.
- [44] J. Ni and C. Beckermann, *Natural convection in a vertical enclosure filled with anisotropic porous media*, Trans. ASME J. Heat Transfer, **113**, 1033-1037, 1991.
- [45] M. Peirotti, M. Giavedoni and J. Deiber, *Natural convective heat transfer in a rectangular porous cavity with variable fluid properties- validity of the Boussinesq approximation*. Int. J. Heat Mass Transfer, **30**, 2571-2581, 1987.
- [46] S. Kimura, Y. Masuda and K. Hayashi, *Natural convection in an anisotropic porous medium heated from the side*, Heat Transfer Japan Res., **22**, 139-153, 1993.
- [47] W. Chang and H. Lin, *Natural convection in a finite wall rectangular cavity filled with an anisotropic porous medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, **37**, 303-312, 1994.
- [48] W. Chang and H. Lin, *Wall heat conduction effect on natural convection in an enclosure filled with a non-Darcian porous medium*. Numer. Heat Transfer A, **25**, 303-302, 1994.
- [49] G. Degan, P. Vasseur and E. Bilgen, *Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer*, Int. J. Heat Mass Transfer, **38**, 1975-1987, 1995.

- [50] G. Degan and P. Vasseur, *Natural convection in a vertical slot filled with an anisotropic porous medium with oblique principal axes*, Numer. Heat Transfer A, 30, 397-412, 1996.
- [51] G. Degan and P. Vasseur, *Boundary-layer regime in a vertical porous layer with anisotropic permeability and boundary effects*, Int. J. Heat Fluid Flow, 18, 334-343, 1997.
- [52] S. Egorov and V. Poleshaev, *Thermal convection in anisotropic porous insulation*, Heat Transfer Res., 25, 968-990, 1993.
- [53] P. Vasseur and L. Robillard, *Natural convection in enclosures filled with anisotropic porous media*, Transport phenomena in porous media. Elsevier, Amsterdam, 1998.
- [54] A. Delmas and E. Arquis, *Early initiation of natural convection in an open porous layer due to the presence of solid conductive inclusions*. ASME J. Heat Transfer, 117, 733-739, 1995.
- [55] J. Marx and R. Langenheim, *Reservoir heating by hot fluid injection*, Trans. AIME, 216, 365, 1959.
- [56] T. Boberg and R. Lantz, *Calculation of the production rate of a thermally stimulated well*, Journal of petroleum technology, December, 1613-1623, 1996.
- [57] D. Towson and T. Boberg, *Gravity drainage in thermally stimulated wells*, Journal of Canadian Petroleum Technology, October-December, 130, 5, 1967.
- [58] W. Owens and V. Suter, *Steam stimulation - newest form of secondary petroleum recovery*, Oil and Gas Journal, April, 26, 82-90, 1965.
- [59] J. Martin, *A Theoretical analysis of steam stimulation*, Journal of petroleum technology, March, 411-508, 1967.
- [60] H. deHaan and J. Van Lookeren, *Early results of the first large scale steam project in the Tia Juana field, western Venezuela*. Journal of Petroleum Technology, January, 101-110, 1969.
- [61] R. Seba and G. Perry, *A mathematical model of repeated steam soaks of thick gravity drainage reservoirs*, Journal of Petroleum Technology, January, 87-94, 1969.

- [62] P. Closmann, N. Ratliff and N. Truitt, *A steam-soak model for depletion-type reservoir*, Journal of petroleum technology, junio, 757-770, 1970.
- [63] J. Gontijo and K. Aziz, *A simple analytical model for simulating heavy oil recovery by cyclic steam in pressure-depletion reservoirs*, SPE 13037, Houston TX, September, 1984.
- [64] J.E. Warren and P.J. Root, *The behavior of naturally Fractured Reservoirs*, SPEJ, September, 245, 1963.
- [65] A. V. Getling, *Rayleigh Benard Convection : Structures and Dynamics*, World Scientific, 1998.
- [66] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [67] Jeffreys, H., *The instability of a compressible fluid heated below*. Proc. Camb. Phil. Soc. 26, pp 170-172, 1930.
- [68] Seppo A. Korpela, Dogan Gozum, and C. B. Baxi, *On the Stability of the Conduction Regime of Natural Convection in a Vertical Slot*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 16, pp 1680-1690, 1973.
- [69] Woods A.W. and Linz S.J., *Natural convection and dispersion in a tilted fracture*. J. Fluid Mech., 241, pp 59-74, 1992.
- [70] A. Medina, E. Luna, C. Perez, F.J. Higuera, *Thermal convection in tilted porous fractures*, J. Physics: Condens. Matter, 14, pp 2467-2474, 2002.
- [71] E. Luna, A. Córdova, A. Medina y F.J. Higuera. *Convection in a finite tilted fracture in a rock*, Physics Letters A, 300, pp 449-455, 2002.
- [72] A. Medina, E. Luna, C. Perez-Rosales and C. Treviño, *Isotherms in a solid with a tilted fracture and their effects on the local fluid motion*, Proceeding of the fourth UNAM supercomputing conference, World Scientific, 2000.
- [73] A. Cordova, A. Medina, C. Perez, E. Luna and C. Treviño, *Convection in tilted fractures*, Proc. LACAFLUM, Caracas Venezuela, Mayo, 2001.

- [74] W.D. McCain, Jr., *The Properties of Petroleum Fluids*, PennWell Books, Tulsa, Oklahoma, 1990.
- [75] J.A. Liggett and P. L-F Liu, *The boundary integral equation method for porous media flow*, Allen & Unwin Inc., London, 1983.
- [76] H. Powel and L.C. Wrobel, *Boundary integral methods in fluid mechanics*, Computational Mechanics publications, Southampton Boston, 1995.
- [77] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, The Clarendon Press, Oxford, 1961.
- [78] M. Raffel, C. Willert and J. Kompenhans, *Particle image velocimetry*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [79] K. Takehara, R. Adrian, G. Etoh and K. Christensen, A Kalman tracker for super-resolution PIV, *Experiments in fluids*: 29 Suppl., s34-s41, 2000.
- [80] A. Córdoba, *Convección Térmica en Fracturas Inclinadas*, Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002.
- [81] S.J. Linz and A.W. Woods, *Natural convection, Taylor dispersion, and diagenesis in a tilted porous layer*. *Physical Review A*. 46, pp 4869-4878.
- [82] Flores Ruiz J.H. *et al*, *Modelo Geofísico de temperaturas del area sureste del Golfo de México*, 2da reunión Nacional de Ciencias de la Tierra, Unión Geofísica Mexicana (UGM). pp. 257 (2000).
- [83] C. M. Bender and S. A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1978.
- [84] Phillips O.M., *Flow and reactions in permeable rocks*, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).