

00323<sup>I</sup>  
24



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DUALIDAD Y TRANSFORMACIONES  
CANONICAS

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
F I S I C O  
PRESENTA

ALEJANDRO GAONA ORDOÑEZ



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JOSE ANTONIO GARCIA ZENTENO

2003



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AV. INGENIERIA 11  
MIRAFLORES

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Dualidad y transformaciones canónicas"

realizado por Gaona Ordóñez Alejandro  
con número de cuenta 9433353-2 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física  
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

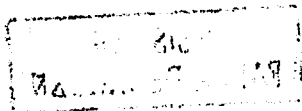
Atentamente

- Director de Tesis Propietario Dr. José Antonio García Zenteno *Antes*
- Propietario Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero *Mart.*
- Propietario Dr. Axel Ricardo de la Macorra Pettersson *Ala come*
- Suplente Dr. Alberto Güijosa Hidalgo *ASA*
- Suplente Dra. Myriam Mondragón Ceballos *Myriam*

Consejo Departamental de Física



*Patricia Goldstein*  
~~DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE~~  
Coordinadora de Licenciatura ~~DEPARTAMENTO DE FÍSICA~~



A mis padres  
Alejandro Leonardo Gaona Elías  
y  
Mercedes Patricia Ordóñez Arniengol  
Quienes me dieron la vida y me animaron a seguir todos mis sueños.  
A mi hermano Leonardo,  
quien siempre me ha apoyado en mis desiciones y ha estado pendiente  
de la realización de esta tesis.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>Prefacio</b>	<b>1</b>
<b>I Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Dualidades</b>	<b>7</b>
1.1. El modelo de Ising en 2D . . . . .	7
1.2. La transformada de Fourier . . . . .	8
1.3. Dualidad teoría electromagnética . . . . .	9
1.4. Dualidades S y T en teoría de cuerdas. . . . .	10
1.4.1. Dualidad T. . . . .	10
1.4.2. Dualidad S. . . . .	15
<b>2. Teoría de Dirac.</b>	<b>17</b>
2.1. Los formalismos y la transformación canónica. . . . .	17
2.1.1. El formalismo lagrangiano. . . . .	17
2.1.2. El formalismo Hamiltoniano. . . . .	18
2.1.3. Las transformaciones canónicas. . . . .	21
2.2. Constricciones Hamiltonianas. . . . .	21
2.2.1. Constricciones primarias. . . . .	21
2.2.2. El hamiltoniano canónico. . . . .	24
2.2.3. Ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana. . . . .	27
2.2.4. Hamiltoniano total. . . . .	28
2.2.5. Ecuaciones débiles y fuertes. . . . .	29
2.2.6. Constricciones secundarias. . . . .	29
2.2.7. Restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange. . . . .	31
2.2.8. Funciones de primera clase y segunda clase. . . . .	32
2.3. El paréntesis de Dirac. . . . .	33
2.3.1. Separación en constricciones de primera y segunda clase. . . . .	33
2.3.2. Tratamiento de las constricciones de segunda clase: un ejemplo. . . . .	34

2.3.3. Paréntesis de Dirac. . . . .	35
<b>3. La cuerda bósónica</b>	<b>39</b>
3.1. El formalismo hamiltoniano de la cuerda bosónica. . . . .	42
<b>II Dualidad en la Teoría electromagnética</b>	<b>45</b>
<b>4. Teoría electromagnética de primer orden</b>	<b>47</b>
4.1. Formalismo de Dirac para la acción de primer orden de la teoría electromagnética . . . . .	49
4.2. Estabilización de las constricciones primarias . . . . .	51
4.3. Separación en constricciones de primera y segunda clase. . . . .	52
4.4. El paréntesis de Dirac . . . . .	53
4.5. Consistencia del paréntesis de Dirac . . . . .	54
4.6. Conteo de los grados de libertad . . . . .	55
<b>5. Teoría electromagnética dual de primer orden</b>	<b>57</b>
5.1. Formulación de las acciones de primer orden para la teoría electromagnética y su dualidad. . . . .	58
5.2. Las acción de primer orden y su dual como una redefinición de campos. . . . .	59
5.3. Equivalencia de la acción de primer orden dual. . . . .	60
5.4. El Hamiltoniano de la acción de primer orden dual. . . . .	60
5.5. Estabilización de las constricciones primarias. . . . .	62
5.6. El paréntesis de Dirac de la teoría dual. . . . .	63
5.7. Conteo de los grados de libertad . . . . .	64
<b>6. Comparación entre la Teoría original y la Teoría Dual</b>	<b>67</b>
6.1. La transformación de dualidad estudiada. . . . .	68
6.2. El espacio reducido de la teoría electromagnética. . . . .	71
6.3. El espacio reducido de la teoría electromagnética dual. . . . .	73
6.4. Transformación canónica y de Dualidad en el espacio reducido. . . . .	75
6.5. La transformación de dualidad canónica en el espacio configuración. . . . .	78
<b>III Dualidad en la Cuerda Bósónica</b>	<b>83</b>
<b>7. Dualidad en Teoría de Cuerdas con acciones de primer orden.</b>	<b>85</b>
7.1. La acción de primer orden para la teoría de cuerdas. . . . .	86
7.1.1. Equivalencia entre la acción de primer orden y la de Polyakov. . . . .	88
7.1.2. Las simetrías de la acción de primer orden. . . . .	88
7.1.3. La acción de primer orden en ADM. . . . .	89

7.1.4.	El formalismo canónico de la acción de primer orden con el formalismo ADM. . . . .	92
7.1.5.	Conteo de los grados de libertad para la acción de primer orden. . . . .	101
7.2.	La acción de Polyakov dual de primer orden. . . . .	101
7.2.1.	La acción de primer orden dual . . . . .	103
7.2.2.	Conteo de los grados de libertad . . . . .	108
7.3.	Comparación entre la acción original y la acción dual de la cuerda bosónica. . . . .	109
7.3.1.	Análisis de la transformación de dualidad. . . . .	110
7.3.2.	La transformación de dualidad imponiendo la norma conforme. . . . .	111
<b>IV</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>115</b>
8.	Conclusiones Generales.	117
<b>V</b>	<b>Apéndices</b>	<b>119</b>
A.	Convenciones y relaciones matemáticas.	121
	Bibliografía	126



## Índice de figuras

1.1. La red original con espines cuadrados se encuentra más marcada y tiene temperatura $T$ , y como se comenta la red dual espines redondos encierra espines cuadrados y tiene temperatura $T^* = 1/T$ . . . . .	8
1.2. Estados de enrollamiento para una cuerda cerrada. a) Para cuerdas con diferente estado de enrollamiento $n = -1$ a $n = 0$ a $n = 1$ . b) Para una cuerda con estado de enrollamiento $n = 0$ que se divide en dos cuerdas con estados $n = 1$ y $n = -1$ . . . . .	14
7.1. La separación de las componentes espaciales y temporales con ayuda de las funciones $N$ y $N^i$ esquematizados en los cortes temporales $\Sigma$ . . .	91

## Agradecimientos

Agradezco al Dr. José Antonio García Zenteno, que como mi tutor y profesor leyó con cuidado este trabajo, y que con los comentarios y anotaciones que hizo, enriqueció y aclaró la lectura de este texto, pero además quiero añadir que en este tiempo Antonio más que un profesor fué un amigo que me apoyó en la realización de este trabajo.

Agradezco a todos mis profesores de la Facultad de Ciencias la guía y amistad que me brindaron a la largo de mis estudios.

Agradezco a la **DGAPA** por su apoyo económico en la realización de esta tesis en el proyecto de investigación del ICN.

De igual forma agradezco personalmente a Rodolfo, Axel, Alberto y Myriam los comentarios y correcciones que hicieron al texto, los cuales completaron y enriquecieron el contenido del texto.

Así mismo quiero agradecer al personal del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM por la ayuda que me brindaron al permitirme utilizar la biblioteca, la sala de computo y todas las instalaciones.

# Prefacio

Recientemente se ha estudiado la dualidad de Hodge en formas diferenciales como una transformación canónica [1, 2, 31]; en particular se conoce el generador de la transformación canónica que reproduce la dualidad electromagnética; además esta transformación se puede ver como una redefinición de campos. Observamos que en [1], se trabaja con la acción electromagnética de segundo orden, en donde la variable fundamental  $A_\mu$  no tiene un mapeo directo ante la transformación de dualidad, debido a que no puede ser depejada algebraicamente. Es bien sabido que la dualidad electromagnética se implementa sobre la 2-forma diferencial  $F_{\mu\nu}$ , de tal forma que sí sabemos como transforma  $\partial_\mu A_\nu$ , pero no como transforma  $A_\mu$ . En este sentido la transformación de dualidad es no local. Uno de los objetivos de esta Tesis es poder hacer el análisis canónico local entre las variables  $A_\mu$  y sus momentos canónicos conjugados  $P^\mu$ , y extender estas ideas a la Teoría de Cuerdas.

Para abordar este problema, se construirá una acción de primer orden para la teoría electromagnética. Con esta acción de primer orden, que tiene como campo auxiliar a  $F_{\mu\nu}$  y multiplicador de Lagrange a  $A_\mu$ , se aumenta la dimensión del espacio configuración de la teoría, arreglando el problema de la no localidad de la transformación de dualidad. Con la acción de primer orden, y la transformación de dualidad estándar, se obtiene la acción de primer orden de la teoría electromagnética dual. Por transformación de dualidad entendemos un mapeo o redefinición de campos a nivel de la acción de primer orden. En estas acciones se hace el análisis de constricciones hamiltonianas, donde se obtienen todas las constricciones de ambas teorías. Estas constricciones son separadas en constricciones de primera y segunda clase; esta separación me permite construir el paréntesis de Dirac. Con el paréntesis de Dirac de ambas teorías se estudiará como se deforma la superficie de constricción debido a la transformación de dualidad, encontrando que la transformación de dualidad cambia la superficie de constricción. Deducimos de este hecho, que la transformación de dualidad es no canónica respecto al paréntesis de Dirac. La canonicidad de la transformación de dualidad se refleja únicamente en la estructura de Poisson estándar. Encontramos también la función generadora  $F_2$  que reproduce la transformación de Dualidad canónica y mapea una superficie de constricción en la otra.

En esta tesis obtenemos la transformación de dualidad en el espacio fase completo, y al resolver las constricciones primarias obtenemos el espacio fase reducido. Al hacer esto, uno encuentra que el paréntesis de Dirac se ve reducido a la estructura simpléctica de Poisson. Además la función generadora  $F_2$  también se ve reducida a una función generadora del tipo  $F_1$ . Esta función generadora reducida, implementa la transformación canónica conocida en la literatura [1, 31].

La dualidad en teoría de cuerdas es otro asunto, se han desarrollado varias du-

alidades en esta teoría entre ellas están la dualidad S, T y U, que no estudiaremos en detalle en esta tesis. La dualidad en la teoría de cuerdas se ha estudiado también como una transformación canónica [2, 24, 25]. Otro objetivo de esta tesis consiste en extender estas ideas usando una acción de primer orden para la cuerda bosónica, y determinar por medio de las constricciones hamiltonianas si la transformación de dualidad es canónica. Inspirados en la teoría electromagnética, construimos la acción de primer orden para la cuerda bosónica de Polyakov. En esta acción también se ve aumentado el espacio configuración con el fin de eliminar la no localidad de la transformación de dualidad, encontrando finalmente que no se puede eliminar. Como veremos la transformación de dualidad en Teoría de Cuerdas es diferente a la estudiada en el caso electromagnético. La transformación implementada aquí refleja la simetría del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$  [17, 22], en donde el hamiltoniano es invariante ante la rotación de las variables  $(x', p)$ . Al obtener la acción de primer orden dual, encontramos que se reduce correctamente a la acción de Polyakov. Encontraremos las constricciones de primera y segunda clase para la teoría y su dual, con las de segunda clase construiremos el paréntesis de Dirac para cada teoría. A este nivel observaremos que los paréntesis de Dirac son diferentes entre sí; es decir, la transformación de dualidad cambia la superficie de restricción. De este hecho se deduce que la transformación de dualidad es NO canónica respecto al paréntesis de Dirac. Por otro lado, al imponer la norma conforme sobre nuestros resultados, las constricciones de segunda clase se ven reducidas, y de igual forma el paréntesis de Dirac. Identificando las variables relevantes de cada teoría  $V$  y  $U$ , observamos que el paréntesis de Dirac de  $x^\mu$  con estas variables llevan a resultados distintos en ambas teorías. Pero al igualar las variables relevantes con sus respectivas constricciones obtenemos que los paréntesis de Dirac se ven reducidos a la estructura simpléctica de Poisson para cada teoría. Por lo tanto, deducimos que la transformación de Dualidad es canónica para la estructura simpléctica de Poisson.

Se estudiará con detalle como la transformación de dualidad implementada por la rotación de las variables  $(x', p)$  es una simetría del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$ , y como esta simetría se compara con la transformación canónica.

Pasemos ahora a ver la organización de la tesis, haciendo énfasis en los resultados más importantes que se encuentran en cada capítulo .

Con el fin de hacer esta Tesis autocontenida, se dará en el Capítulo 1 una visión general sobre las dualidades en la Física y en la Matemática, explicando de forma breve la dualidad del modelo de Ising, la dualidad electromagnética usual, y las dualidades S y T en Teoría de Cuerdas. En el Capítulo 2 se hará una breve exposición de los formalismos lagrangiano y hamiltoniano, que nos llevará a definir lo que es una transformación canónica en mecánica clásica. Una vez expuestos los formalismos que rigen la mecánica, se presentará una herramienta matemática muy poderosa en mecánica clásica: "la Teoría de Dirac" de constricciones hamiltonianas. Aquí definiremos que es una restricción primaria, secundaria, terciaria, etc. y como se obtiene cada una de ellas, también explicaremos que es una restricción de primera y segunda

clase y como se obtiene esta separación de las constricciones. Como se puede ver en esta exposición de la teoría de Dirac, el paréntesis de Dirac se construye con las constricciones de segunda clase de la teoría; por tanto estas constricciones determinan la estructura simpléctica de Dirac, y por tanto nos ayudará a determinar en que espacio la transformación de dualidad es una transformación canónica.

El Capítulo 3 es una exposición general de la Cuerda Bosónica de Polyakov, en donde se explica las simetrías que tiene, además se obtendrán sus ecuaciones de movimiento y su formalismo hamiltoniano. En este formalismo se hará evidente la simetría que tiene el hamiltoniano ante la rotación de las variables  $(x', p)$ . Esta simetría es la motivación de implementar una transformación de dualidad que reproduzca la rotación de  $(x', p)$  y además sea canónica.

En el Capítulo 4 construiremos la acción de primer orden de la teoría electromagnética. En primer lugar se prueba la equivalencia que tiene la acción de primer orden con la acción de Maxwell usual. Posteriormente se obtienen sus ecuaciones de movimiento y su formalismo hamiltoniano, de donde obtenemos las constricciones primarias de la teoría, que son estabilizadas con el hamiltoniano total. Esta estabilización me conduce a las constricciones secundarias. Después separamos las constricciones de la teoría en primera y segunda clase, y con las últimas construimos el paréntesis de Dirac de la teoría. En este punto encontramos las variables que dan paréntesis de Dirac diferente de cero, e identificamos los momentos canónicos de la teoría. Por último calculamos los grados de libertad de la teoría con la información que tenemos sobre las constricciones de primera y segunda clase. Encontramos que los grados de libertad reproducen los grados de libertad del fotón.

En el Capítulo 5 trabajamos con la acción de primer orden de la teoría electromagnética dual, y hacemos los mismos cálculos que se hicieron para la acción de primer orden original.

El Capítulo 6 es uno de los más importantes de esta tesis, ya que aquí se estudia con detalle la transformación de dualidad que mapea una superficie de restricción en la otra. La transformación de dualidad sobre la acción de primer orden me lleva a paréntesis de Dirac diferentes entre sí, por lo tanto la transformación de dualidad es NO canónica respecto al paréntesis de Dirac. Por otra parte esta transformación tiene una función generadora  $F_2(q, P)$ , que implementa la transformación de dualidad canónica respecto al paréntesis de Poisson estándar. Este es un resultado curioso, ya que la transformación de dualidad en el espacio fase completo es NO canónica respecto al paréntesis de Dirac, y es canónica respecto al paréntesis de Poisson. Obtenemos el espacio fase reducido al resolver las constricciones primarias de ambas teorías. Al hacer esto uno encuentra dos caminos para reducir el espacio; uno en que reduces el espacio a nivel de las acciones de primer orden, y otro donde reduces hasta llegar a la acción de Maxwell usual. En la primer reducción uno encuentra que los paréntesis de Dirac reducidos que son no nulos, son diferentes entre sí; por lo tanto a este nivel la transformación de dualidad es no canónica respecto al paréntesis de Poisson. Al reducir el espacio a nivel de las acciones de segundo orden de Maxwell, encontramos

que la función generadora  $F_2$  se reduce a una función generadora del tipo  $F_1(q, Q)$ , esta nueva función generadora, implementa la transformación de dualidad canónica en el espacio reducido. El resultado más importante de esta Tesis es que hemos encontrado una transformación de dualidad que es local en las variables canónicas. Nuestro análisis general en el espacio fase completo, se reduce correctamente, ya que la función generadora  $F_1$  es la que se conoce en la literatura [1], como la función generadora que implementa la transformación de dualidad canónica en la teoría electromagnética.

El Capítulo 7 está dividido en tres secciones, las dos primeras están enfocadas a estudiar las acciones de primer orden para la teoría de cuerdas y su dual. En la tercera sección se analizará la transformación de dualidad implementada, donde se hará un análisis similar al que se hace en la teoría electromagnética de primer orden. Aquí se implementa la dualidad de una forma diferente. La dualidad a estudiar es una dualidad T en teoría de cuerdas. Al obtener las constricciones de primera y segunda clase de ambas teorías, uno obtiene a partir de estas el paréntesis de Dirac de cada teoría. En este punto encontramos las variables  $(x^\mu, V_{0\mu})$  en la teoría original y  $(x^\mu, U_{1\mu})$  en la teoría dual que entre ellas dan un paréntesis de Dirac diferente de cero, y al mismo tiempo dan información acerca de la estructura simpléctica de Dirac reducida a la estructura simpléctica de Poisson, donde la transformación es canónica respecto al paréntesis de Poisson. La transformación de dualidad implementada es una rotación de las variables  $(x^\mu, p_\mu)$  que deja al hamiltoniano invariante. Encontramos además que no se puede obtener la transformación de dualidad local, debido a que no sabemos como transforma la variable  $x^\mu$ . En la norma conforme encontramos una forma de escribir las constricciones, donde se hace evidente la transformación de dualidad como una rotación del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$ , que implementa una transformación de simetría para el hamiltoniano. Cabe señalar que la dualidad se hace en el espacio completo sin imponer ninguna norma. Encontrando que hay una relación entre la transformación de simetría implementada por el grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$  y la transformación canónica.

Por último, en el capítulo 8 presentamos los resultados más importantes que se obtuvieron a lo largo de esta tesis. Se comentan los resultados obtenidos para la dualidad electromagnética y para la dualidad en la cuerda bosónica de primer orden. También se comentan las similitudes que tienen estas transformaciones de dualidad, debido a que, tanto en la dualidad electromagnética como en la dualidad-T en la cuerda bosónica se presenta el fenómeno de la transformación de dualidad NO canónica respecto a la estructura de Dirac, y si canónica respecto a la estructura de Poisson, donde en ambas teorías se puede construir la función generadora que implementa la transformación de dualidad canónica.

# Parte I

## Introducción

6



# Capítulo 1

## Dualidades

Este capítulo está diseñado para dar al lector una visión general de las dualidades en la física. Las dualidades son en general transformaciones que llevan de una teoría a otra distinta, pero en el fondo ambas teorías contienen la misma información física. Aquí presentaremos de forma breve la dualidad del modelo de Ising en 2 dimensiones, la dualidad de la transformada de Fourier, y por último se presentará la dualidad en electromagnetismo y la dualidad S y T en teoría de cuerdas.

### 1.1. El modelo de Ising en 2D

El modelo de Ising fue formulado en 1930 para dar una descripción de una red de partículas que tienen espín arriba o abajo distribuidas estadísticamente y que sólo tienen interacción con los primeros vecinos [4].

Lo primero que tenemos en el modelo de Ising en 2 dimensiones, que es el arreglo de los espines para una red cuadrada, en esta red, los espines están colocados en los vértices y sólo pueden interactuar con sus primeros vecinos por medio del hamiltoniano

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j \quad (1.1)$$

donde  $s_i$  es el espín de cada partícula, y puede ser +1 arriba o -1 abajo,  $J$  es una cantidad que tiene unidades de energía, además de que la red debe de tener condiciones de frontera periódicas en ambos ejes.

Ahora pasamos a la parte interesante, la red dual a la original se construye colocando un espín en el centro de cada bloque de la red original; entonces cada bloque de la red dual encierra un sitio ocupado por un espín de la red original e intersecta las cuatro líneas que unen dichos puntos como se muestra en la figura 1.1.

De la mecánica estadística de este modelo se obtiene

$$\sinh(2\lambda) \sinh(2\lambda^*) = 1, \quad (1.2)$$

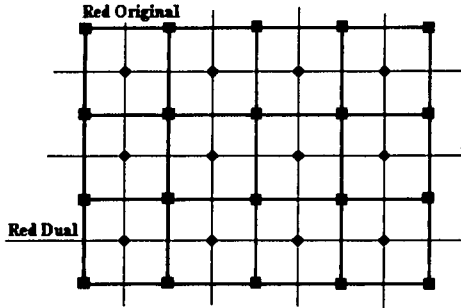
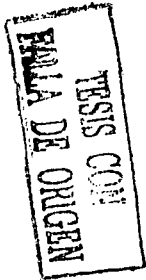


Figura 1.1: La red original con espines cuadrados se encuentra más marcada y tiene temperatura  $T$ , y como se comenta la red dual espines redondos encierra espines cuadrados y tiene temperatura  $T^* = 1/T$ .

donde  $\lambda$  esta definido como

$$\lambda = \beta J = \frac{J}{kT}, \quad (1.3)$$

en donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura del sistema, y  $\lambda^*$  es el inverso multiplicativo de  $\lambda$ . Lo cual define la transformación entre acoplamiento débil y fuerte o equivalentemente Altas y Bajas temperaturas, es decir, si a la red original estadísticamente le corresponde una temperatura  $T$ , a la red dual le corresponde una temperatura  $T^* = 1/T$ , que me relaciona un modelo de altas temperaturas a partir de la transformación de dualidad con un modelo de bajas temperaturas, existiendo una temperatura crítica en que la red original y la dual tienen la misma temperatura  $T_c = T_c$ .

## 1.2. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier es otro ejemplo de dualidad, pero ésta es más bien una dualidad matemática más que una dualidad física. La transformada de Fourier es una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales, ya que ésta dualidad transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, y debido a que es más fácil resolver una ecuación algebraica ésta dualidad representa una herramienta muy poderosa en la resolución de ecuaciones diferenciales. La transformación de Fourier también es utilizada en la mecánica cuántica, ya que cuando uno quiere cambiar de la representación en el espacio de configuración de la función de onda a la representación

en el espacio de momentos lo que se tiene que hacer es una transformación de Fourier

$$\psi(p) = \int \psi(x)e^{ipx} dx, \quad (1.4)$$

y como ambas representaciones son equivalentes, la transformada de Fourier es una dualidad para describir un mismo fenómeno físico en representaciones diferentes. Esto representa una gran ayuda, ya que si un problema es muy complicado de resolver en una representación, su representación dual puede facilitar a encontrar la solución del problema.

### 1.3. Dualidad teoría electromagnética

La dualidad en electromagnetismo es una dualidad S, acoplamiento débil fuerte, en este sentido es interesante de estudiar. Ésta transformación intercambia los campos de tal forma que si en una teoría el campo  $E_i$  es fuerte y  $B_i$  es débil, en su dual el campo  $E_i$  es débil y  $B_i$  es fuerte. Además esta transformación de dualidad es una simetría de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, esta simetría sigue presente en presencia de cargas y corrientes, pero uno tiene que agregar además de cargas eléctricas cargas magnéticas (monopolos magnéticos de Dirac). Para un acoplamiento débil, las cargas eléctricas aparecen como cuantos elementales, obtenida de una cuantización de campos. La carga eléctrica  $q$  de cualquier partícula es de la forma  $q = ne$  para algún entero  $n$ . En contraste, los monopolos magnéticos surgen de acoplamientos débiles como excitaciones colectivas de partículas elementales; tales excitaciones colectivas aparecen en el límite de acoplamiento débil, como solitones, es decir, como soluciones extendidas de ecuaciones de campo clásico no lineales.

El concepto más importante de la dualidad es que dada una teoría su dual representa la misma teoría física, de tal forma que si uno no puede obtener fácilmente un resultado en la teoría original tal vez en la teoría dual el cálculo sea trivial. En el caso de la teoría electromagnética la dualidad se presenta como una invariación de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que después generaliza Dirac al caso con fuentes  $\rho$  y  $\vec{J}$ , en donde para obtener esta simetría es necesario introducir cargas magnéticas (monopolo de Dirac), y al cuantizar la teoría se obtiene la cuantización de la carga eléctrica y magnética, y se pueden estudiar muchos fenómenos interesantes que aquí no abordaremos.

Las ecuaciones de Maxwell escritas en forma covariante permiten implementar la transformación de dualidad electromagnética como una dualidad entre formas diferenciales. El campo fundamental de la teoría es  $A_\mu(X)$ , y la acción de esta teoría está escrita en términos de la derivada de los campos  $A_\mu$

$$F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.5)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es un tensor de rango 2 antisimétrico.

Entonces la dualidad en la teoría electromagnética se puede ver como una dualidad de Hodge en formas diferenciales, y dado el tensor  $F_{\mu\nu}$  su dual se escribe como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (1.6)$$

desarrollando estos tensores en sus componentes

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y desarrollando el tensor dual de  $F_{\mu\nu}$  y  $F^{\mu\nu}$  obtenemos:

$${}^*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad {}^*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos ver que la transformación de dualidad se refleja en el cambio de los vectores  $E_i$  por  $B_i$  y de  $B_i$  por  $-E_i$ , que son los observables físicos, pero en este trabajo vamos a enfocar la dualidad S desde otra perspectiva, ya que nos interesa probar si la transformación de dualidad S es una transformación canónica o no. Para esto construiré las acciones de primer orden de la teoría electromagnética que aumentan el espacio de configuración, y usando el formalismo de constricciones hamiltonianas de Dirac obtendré la superficie de restricción de la teoría y su dual. A partir de ellas sabremos si la transformación es canónica (capítulo 6).

## 1.4. Dualidades S y T en teoría de cuerdas.

Antes de hablar de dualidades, veamos que es una cuerda. Una cuerda es un objeto extendido. Al estudiar mecánica cuántica o mecánica cuántica relativista uno estudia las partículas como objetos puntuales sin estructura. En cuerdas lo que se propone es un objeto extendido unidimensional cuya evolución espacio-temporal determina una membrana. Pero ¿porqué se proponen las cuerdas?, en primer lugar las cuerdas no viven en un espacio-tiempo de 4 dimensiones sino en un espacio tiempo de 11 dimensiones, y la longitud de estas cuerdas es del orden de la longitud de Plank  $l_P \approx 10^{-33}$  cm., que es la dimensión más pequeña del universo. Una forma de visualizar la longitud de Plank es por medio de energías, si uno quisiera estudiar fenómenos físicos a la escala de Plank debería poder manipular energías tan grandes como las que había en la gran explosión, y eso ni el acelerador de partículas más grande del mundo lo puede alcanzar. La teoría de cuerdas es actualmente un candidato para unificar todas las fuerzas de la naturaleza (electromagnetismo, fuerza nuclear débil y fuerte y

gravedad), estas fuerzas están descritas por los siguientes modelos teóricos "el modelo estándar de partículas elementales" y "la relatividad general". Uno de los grandes problemas teóricos es encontrar una teoría de la gravedad cuántica, actualmente se tienen varios modelos, pero ninguno definitivo. La teoría de cuerdas trata de obtener una teoría de la gravedad cuántica, pero al mismo tiempo esta teoría contiene mucha información (supersimetría, D-branas, teoría conforme, dualidades, etc.) es una teoría muy completa y complicada. La teoría de cuerdas tiene 5 tipos de cuerdas  $IA$ ,  $IIA$ ,  $IIB$  y las cuerdas heteróticas  $SO(32) \otimes SO(32)$  y  $E_8 \otimes E_8$ , de las cuales se ha entretrejado una red de dualidades  $S$  y  $T$  que conecta a todas las cuerdas. A todo este entretrejado de cuerdas y dualidades se le conoce como Teoría  $M$ , y se supone que de esta teoría se puede derivar toda la física. Bueno ahora pasemos al tema de esta tesis las dualidades.

Las dualidades son transformaciones que llevan de una teoría a otra, donde ambas continen la misma información física, pero al mismo tiempo pueden cambiar la intensidad de la interacción o también pueden facilitar la visualización de un problema que permita extraer información relevante a la que se le pueda dar una interpretación física. La primera dualidad que se descubrió en teoría de cuerdas fue la dualidad- $T$ . Si empezamos con una teoría en 10 dimensiones que se compactifica sobre un círculo  $S_1$ , los modos de Kaluza-Klein son cuantizados y tienen el momento:  $p = n/R$  para un círculo de radio  $R$  y espín entero.

### 1.4.1. Dualidad $T$ .

El caso más sencillo de compactificación es aquel en que una sola dimensión está curvada formando un círculo microscópico de radio  $R$ . Si  $R$  es suficientemente pequeño, no notaremos la existencia de esta dimensión. Consideremos ahora, por ejemplo, una de las cuerdas cerradas con esta dimensión compactada. Se puede ver que los posibles valores de los cuadrados de las energías  $E$  de las excitaciones de la cuerda en esta situación tendrán la forma:

$$E^2 = \frac{n^2}{R^2} + m^2 T^2 R^2 \quad (1.7)$$

que es equivalente al espectro de masa  $M^2$ , donde  $n$  y  $m$  pueden tomar cualquier valor entero  $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \text{etc.}$  y  $R$  es el radio del círculo en el que está compactada la dimensión extra,  $T$  es la tensión de la cuerda.

En esta fórmula el primer término (proporcional a  $1/R^2$ ) no se obtiene únicamente de la teoría de cuerdas, sino que se puede obtener también de la mecánica cuántica, que nos enseña que la energía de las partículas, cuando viven en un espacio de tamaño finito, son múltiplos enteros del inverso del tamaño ( $R$ ) de dicho espacio finito. Esto es análogo a las frecuencias de vibración de las cuerdas de un violín, que guardan también relación con la longitud de las cuerdas.

El segundo término (proporcional a  $R^2$ ) si se obtiene de la teoría de cuerdas, como revela el hecho de que aparezca la tensión de la cuerda  $T$ . Representa la posibilidad de que la cuerda cerrada esté enrollada  $m$  veces alrededor del círculo de radio  $R$  en que se halla curvada la dimensión extra. A mayor radio  $R$ , la cuerda enrollada mostraría a su vez una energía creciente, que es lo que muestra la ecuación. Es como si tuviéramos enrollada una goma elástica alrededor de un cilindro cuyo radio aumentara: la goma sufriría una tensión progresiva sin romper la goma (representa el aumento de energía).

La ecuación (1.7) presenta una curiosa propiedad de simetría observada por K. Kikkawa y M. Yamanaka en 1984; para simplificar las cosas tomemos unidades de energía en las que se tenga  $T = 1$ , y sabiendo que la tensión de la cuerda es

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad (1.8)$$

tenemos que  $\alpha' = 1/2\pi$ . La ecuación (1.7) sigue teniendo el mismo aspecto si se hace el siguiente intercambio

$$R \longleftrightarrow \frac{\alpha'}{R} = \frac{1}{2\pi R}. \quad (1.9)$$

Para cuerdas, se tienen modos adicionales, correspondientes a una cuerda cerrada enrollada  $m$  veces a sí misma alrededor de  $S_1$ , donde se encuentra que el momento  $P$  tiene quiralidad izquierda (L) y derecha (R):

$$(P_L, P_R) = \left( \frac{n}{2R} + mR, \frac{n}{2R} - mR \right) \quad (1.10)$$

donde  $n$ , representa la excitación de los estados de Kaluza - Klein sobre el círculo, pero  $m$  etiqueta el número de veces que la cuerda se enrolla alrededor del círculo.

De esto se sigue que el espectro de masa para  $M^2$  es invariante bajo la simetría (1.9) cuando uno intercambia  $n \leftrightarrow m$ .

Esto significa que una teoría de cuerdas definida sobre una compactificación de radio  $R$ , es perturbativamente indistinguible de su teoría dual compactificada sobre un radio  $1/2R$ . A diferencia de la teoría de campo para partículas puntuales, las cuerdas no pueden diferenciar entre estas dos regiones; teniendo como resultado que esta simetría dual, que intercambia modos de enrollamiento con los modos de Kaluza - Klein, es estrictamente un resultado de la geometría de la teoría de cuerdas ya que estos modos de enrollamiento no aparecen en partículas puntuales.

Los modos de Kaluza - Klein  $p = \frac{n}{R}$  se obtienen de suponer una función de onda periódica, con periodo  $2\pi R$ :

$$\Psi(x) = \Psi(x + 2\pi R) \quad (1.11)$$

para un hamiltoniano de partícula libre  $H = p^2/2m$ , donde  $p$  es el momento y  $m$  la masa de la partícula. De la mecánica cuántica escribimos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (1.12)$$

donde  $\hat{H}$  es el operador hamiltoniano, y  $E$  es la energía, que son los eigenvalores del operador  $\hat{H}$  con  $\hat{p}$  el operador momento  $\hat{p} \rightarrow -i\nabla$ ; dejando la ecuación de Schrödinger como una ecuación diferencial:

$$\nabla^2\Psi(x) + 2mE\Psi(x) = 0 \quad (1.13)$$

con la convención  $\hbar = c = 1$ , y observando que solo se esta trabajando con una dimensión espacial se encuentra que las soluciones a esta ecuación son:

$$\Psi(x) = Ae^{i\sqrt{2mE}x} \quad (1.14)$$

entonces como hemos pedido que  $\Psi(x)$  sea periódica tenemos que debe cumplir que:

$$Ae^{i\sqrt{2mE}x} = Ae^{i\sqrt{2mE}(x+2\pi R)} = Ae^{i\sqrt{2mE}x}e^{i\sqrt{2mE}2\pi R} \quad (1.15)$$

$$1 = e^{2\pi i\sqrt{2mE}R} \quad (1.16)$$

donde la última igualdad se cumple si

$$\sqrt{2mE}2\pi R = 2\pi n, \quad (1.17)$$

con  $n$  un número entero, de donde obtenemos que la energía es

$$E = \frac{n^2}{2mR^2}, \quad (1.18)$$

que es el espectro de energía para una cuerda libre donde solo tenemos la parte de la energía cinética. De la cuantización obtenemos los modos de Kaluza - Klein:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2}{2mR^2} = \frac{1}{2m}\left(\frac{n}{R}\right)^2 \quad (1.19)$$

por lo tanto se obtiene la cuantización del momento representado por los modos de Kaluza - Klein:

$$p = \frac{n}{R} \quad (1.20)$$

que nos da el espectro de energía.

Desde un punto de vista matemático, esto es una curiosidad, pero desde un punto de vista físico, la invariancia de la ecuación (1.7) y (1.10) ante la simetría (1.9) indica que las energías de las excitaciones de una cuerda, cuando hay una dimensión extra de radio  $R$ , es la misma que la de una cuerda cuando el radio es  $1/R$ ; y no solo las energías, sino todas las propiedades físicas de ambos sistemas, uno con una dimensión extra de radio  $R$  y otra con radio  $1/R$  son exactamente las mismas. Como se puede ver también de los momentos derechos e izquierdos (1.10), estos son indistinguibles entre la teoría con dimensión  $R$  y con dimensión  $1/R$ . Una equivalencia que llama la atención, pues cuando  $R$  aumenta  $1/R$  disminuye; parece, en efecto, contradecir

la experiencia de la vida diaria, que nos dice que las cosas pequeñas son diferentes a las grandes, pero para una cuerda esto no es así; la simetría en cuestión constituye el caso más sencillo de lo que actualmente llamamos dualidad-T en teoría de cuerdas.

Si reescribimos esta transformación dual en un lenguaje de teoría de campo conforme, esta transformación es equivalente a hacer la sustitución:

$$\partial X \rightarrow \partial X \quad (1.21)$$

$$\bar{\partial} X \rightarrow -\bar{\partial} X \quad (1.22)$$

nótese el cambio de signo para un conjunto de variables. Cuando se aplica la misma dualidad a la teoría de supercuerdas se encuentra que:

$$\Psi_L^0 \rightarrow -\Psi_L^0 \quad (1.23)$$

$$\Psi_R^0 \rightarrow \Psi_R^0 \quad (1.24)$$

pero esta transformación para el noveno modo de oscilación izquierdo también cambia el signo de los operadores quirales de modos izquierdos en 10 dimensiones, los que se construyen de los modos cero fermiónicos:

$$\Gamma_{11} = \Psi_L^0 \Psi_L^1 \Psi_L^2 \Psi_L^3 \dots \Psi_L^9 \rightarrow -\Gamma_{11} \quad (1.25)$$

De lo que podemos concluir que la dualidad-T cambia la quiralidad de los modos izquierdos y derechos de las cuerdas. También se puede mostrar que esta simetría persiste a todos los ordenes de teoría de perturbación. Este es el caso de la cuerda no quiral Tipo IIA compactificada sobre un círculo de radio  $R$  es indistinguible perturbativamente de la cuerda quiral Tipo IIB compactificada sobre un círculo de radio  $1/2R$ ; denotando esto como una dualidad-T en las cuerdas Tipo IIA y IIB.

$$T : IIA \leftrightarrow IIB \quad (1.26)$$

en otras palabras, las cuerdas IIA y IIB representan en realidad la misma teoría.

Otra parte de la dualidad-T tiene que ver con la evolución de cuerdas cerradas dentro de un cilindro, ya que estas cuerdas tienen estados de enrollamiento caracterizado por un número entero  $n$  como se muestra en la figura 1.2, el problema de la dinámica de las cuerdas en estos estados de enrollamiento se puede resolver con Teoría de Campo Conforme (CFT). Como se muestra en la figura (1.2 a) se pueden ver varios estados de la cuerda  $n = -1$ ,  $n = 0$  y  $n = 1$ , como podemos ver la dirección que lleva la cuerda es importante para determinar los estados de enrollamiento. En la figura (1.2 b) podemos ver como una cuerda con estado de enrollamiento  $n = 0$  se divide en dos cuerdas con estado de enrollamiento  $n = -1$  y  $n = 1$ , con lo que podemos ver que el número  $n$  determina bien la evolución topológica de la cuerda.



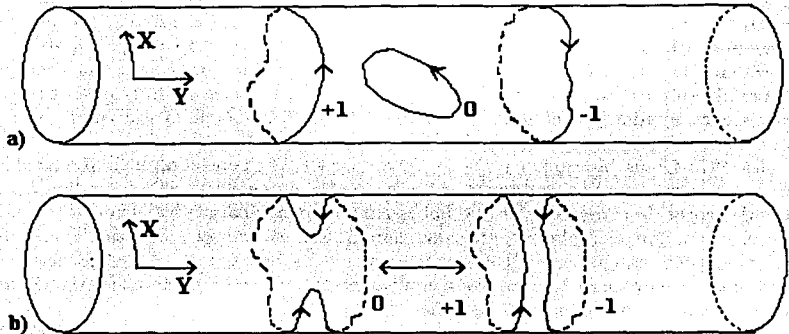


Figura 1.2: Estados de enrollamiento para una cuerda cerrada. a) Para cuerdas con diferente estado de enrollamiento  $n = -1$  a  $n = 0$  a  $n = 1$ . b) Para una cuerda con estado de enrollamiento  $n = 0$  que se divide en dos cuerdas con estados  $n = 1$  y  $n = -1$ .

#### 1.4.2. Dualidad S.

Ya se analizó la dualidad-T en teoría de cuerdas, la cual es perturbativa en las constantes de acoplamiento de cuerdas; más interesante es la dualidad-S, la cual liga la región de acoplamiento débil de una teoría con la región de acoplamiento fuerte de otra.

En teoría de cuerdas la intensidad de las interacciones no viene dada por constantes numéricas, sino por un campo continuo denominada campo dilatón  $\phi$ . Se pueden estudiar las ecuaciones y las interacciones de una supercuerda (por ejemplo, la heterótica) con las seis dimensiones extras compactadas en círculos de radio  $R$  muy pequeños. Nos encontramos entonces con que  $R$  y  $\phi$  aparecen de forma muy análoga en las ecuaciones. Ello parecería indicar algún parentesco entre  $R$  y  $\phi$ . Sin embargo, no se ve a primera vista qué analogía pueda darse entre una cantidad  $R$  que mide el radio de una dimensión extra, y una cantidad  $\phi$  que mide la intensidad de las interacciones. Una posibilidad es que hubiera siete dimensiones extra, en vez de seis. En este caso la teoría en total tendría  $7+3+1=11$  dimensiones espaciotemporales.

En tal situación el dilatón aparece como el radio  $R_{11}$  de la dimensión extra añadida. En ese marco cabría entender la similitud entre los valores de  $R$  y el dilatón  $\phi$ , este último sería otro radio  $R_{11}$  más. Si la analogía entre  $R$  y el dilatón  $\phi$  fuese cierta, deberíamos admitir la existencia de una simetría en la que  $\phi \rightarrow 1/\phi$ , como ocurre

en dualidad-T. Sin embargo, esta nueva hipótesis parece tener bastante más alcance que la dualidad-T. En efecto, si la teoría es invariante bajo el intercambio de  $\phi$  y  $1/\phi$ , quiere decir que la teoría en interacción débil ( $\phi$  pequeño) es equivalente a la teoría en interacción fuerte, ya que ahora  $1/\phi$  sería grande, que refleja una simetría sorprendente para interacciones débiles y fuertes (poco intensas y muy intensas), las que pueden ayudar a encontrar un camino a la unificación de la gravedad con las otras interacciones.

En 1975 Claus Montonen y David Olive, del CERN, consideraron la posibilidad de una simetría análoga, aunque no fue en teoría de cuerdas. Ellos estudiaron un tipo de teoría de campos en la que había partículas con carga eléctrica  $q_e$  normales (un electrón, por ejemplo) y partículas compuestas con carga magnética elemental  $q_m$  (monopolos magnéticos). Ellos sugirieron que la física de cargas eléctricas con constante de acoplamiento grande era equivalente a la física de monopolos magnéticos con constante de acoplamiento pequeño.

Las analogías con dualidad-T y la existencia de una generalización al modelo con supersimetría parecía dar fuerza a la hipótesis de dualidad-S. Las analogías llegaban más lejos. En esas teorías con cargas eléctricas y magnéticas hay un tipo de partículas estables cuyas masas vienen expresadas por:

$$M^2 = q_e^2 \alpha + \frac{q_m^2}{\alpha} \quad (1.27)$$

donde  $q_e$  y  $q_m$  son las cargas eléctrica y magnética de la partícula, respectivamente, y  $\alpha$  representa la constante de acoplamiento que da la intensidad de la interacción. En la ecuación (1.27) el primer término a la derecha corresponde a las partículas con carga eléctrica no nula y el segundo a las partículas con carga magnética no nula. Salta a la vista el parecido entre esta fórmula y la observada para la dualidad-T. En teoría de supercuerdas, en vez de  $\alpha$ , se tiene el dilatón  $\phi$ , y los valores de  $q_e$  y  $q_m$  son números enteros.

Como la dualidad-S es inherentemente no perturbativa, esperamos encontrar nuevos resultados. El campo dilatón es central en esta discusión de los efectos no perturbativos, porque su valor de expectación está relacionado con las constantes de acoplamiento en teoría de cuerdas que nos permiten tener una simetría en las interacciones fuerte y débil. La lagrangiana de la cuerda cuantizada contiene no solo el término usual que describe el área de la hoja mundo sino también el acoplamiento al escalar de Ricci en la hoja mundo dado por:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left( g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \phi R^{(2)} \right) \quad (1.28)$$

usaremos el hecho de que la constante de Euler para una superficie de Riemann bidimensional de genero  $g$  está dado por:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} R^{(2)} = 2 - 2g \quad (1.29)$$

Además si hacemos la sustitución  $\phi \rightarrow \phi + \langle \phi \rangle$ , la integral de trayectoria Euclidiana  $e^{-S}$  gana un nuevo término:

$$e^{-S} \rightarrow e^{-S} e^{\langle \phi \rangle (2g-2)} = e^{-S} e^{-\langle \phi \rangle (2-2g)} \quad (1.30)$$

donde  $\langle \phi \rangle$  es el valor esperado del campo dilatón y  $S$  es la acción para una trayectoria Euclidiana, y en general las amplitudes están multiplicadas por el factor  $g_s^{2g-2+n}$ , donde  $n$  es el número de cuerdas externas. Si colocamos  $e^{\langle \phi \rangle}$  en cada vértice de la superficie de Riemann, podemos reabsorber este factor de tal forma que la constante de acoplamiento  $g_s$  se puede definir como:

$$g_s = e^{\langle \phi \rangle} \quad (1.31)$$

entonces, la constante de acoplamiento esta relacionada con el valor esperado del vacío del campo dilatón; el punto clave de la dualidad-S consiste en intercambiar  $\langle \phi \rangle$  por  $-\langle \phi \rangle$ , entonces esta dualidad conecta las regiones de acoplamiento fuerte con las de acoplamiento débil, y nos permite obtener una teoría equivalente para interacción fuerte y débil. La dualidad-S esta relacionada con la topología de las superficies de Riemann, debido a que las series perturbativas permiten hacer mas juego; estas superficies pueden ser esferas, toros o espacios proyectivos, donde se pueden tener sumas conexas de dichas superficies, y la constante de Euler  $\chi$  está relacionada con el género  $g$  de una superficie como en (1.29) solo para superficies orientables en dos dimensiones como la esfera o el toro.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 2

### Teoría de Dirac.

#### 2.1. Los formalismos y la transformación canónica.

##### 2.1.1. El formalismo lagrangiano.

El formalismo Lagrangiano fue desarrollado por J.L. Lagrange y en parte por L. Euler en el siglo XVIII, con el fin de tener una forma covariante de las leyes de Newton, y tener una descripción del sistema físico sin importar el sistema de coordenadas que se este utilizando.

Lagrange utilizó coordenadas generalizadas para describir un sistema físico, y usando principios variacionales llegó a la conclusión de que las ecuaciones de movimiento para cualquier sistema físico que se quiera estudiar en coordenadas generalizadas se puede derivar a partir de una función (La función lagrangiana). En la mecánica clásica generalmente se estudian sistemas de partículas, o en su caso se pueden estudiar sistemas de muchas partículas que están restringidas a moverse de determinada manera debido a constricciones holónomicas del sistema, el cual facilita los cálculos para la solución del problema como en el caso de los cuerpos rígidos. Pero hay otros sistemas, como los cuerpos deformables que entran dentro de la mecánica de medios continuos, en donde, en lugar de tener una función lagrangiana se tiene una densidad lagrangiana que, en lugar de depender de las coordenadas y velocidades generalizadas, depende de un campo (en general un campo tensorial de rango  $k$ ) y de las derivadas respecto al espacio y tiempo del mismo campo, por lo tanto la acción clásica es la integral sobre todo el espacio de la densidad lagrangiana.

Primero para ir sentando las bases de mi trabajo, realicemos una breve introducción a la mecánica analítica haciendo todos los cálculos para una función lagrangiana que depende de las coordenadas y velocidades generalizadas, donde definimos la acción clásica como:

$$S[q^i, \dot{q}^i, t] = \int L(q^i, \dot{q}^i, t) dt, \quad (2.1)$$

a partir del principio variacional sobre esta acción, y pidiendo que la variación de la

acción sea un extremal, es decir que esta función tenga un máximo o un mínimo, se llega a la conclusión de que la variación de la acción es un extremal cuando se cumple:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (2.2)$$

que es la ecuación de Euler-Lagrange, que me lleva a las ecuaciones de movimiento del sistema físico para cada una de las coordenadas  $q^i$ .

Ahora si uno entra en los detalles matemáticos de esta teoría, uno encuentra que hay una relación intrínseca entre la geometría y la física, por lo cual si uno desea estudiar un determinado sistema físico uno debe colocar un sistema coordinado para determinar la posición de la partícula a cada tiempo. Es por eso que el espacio físico o de configuración forma una variedad diferencial donde se mueve esta partícula.

Si denotamos las coordenadas por  $(q^1, q^2, \dots, q^n)$ , que en realidad es un sistema local de coordenadas en la variedad diferencial  $\mathcal{M}$ , y las velocidades generalizadas por  $(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)$  este espacio genera una variedad diferencial de  $2n$  dimensiones, y decimos que dos curvas son tangentes en una variedad diferencial, si al proyectar por medio de una carta sus curvas son tangentes en  $R^n$ . El espacio vectorial generado por las rectas tangentes en las curvas sobre la variedad diferencial se llama espacio tangente  $T_x \mathcal{M}$ , que tiene como base natural a:

$$\left( \frac{\partial}{\partial q^1}, \frac{\partial}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} \right), \quad (2.3)$$

entonces cualquier vector que se quiera escribir en términos de esta base se escribirá como

$$\vec{A} = \alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (2.4)$$

donde  $\alpha^i$  son las componentes del vector.

Ahora queda claro que el formalismo lagrangiano genera un espacio natural dado por el sistema local de coordenadas  $(q^i, \dot{q}^i)$  conocido como el haz tangente  $T\mathcal{M}$  que es una variedad diferencial de  $2n$  dimensiones.

Estas deducciones las hago, ya que después pasaremos al formalismo hamiltoniano, que genera un espacio de la misma dimensión que el espacio lagrangiano, pero que es completamente diferente, dado que el espacio Hamiltoniano es el espacio "dual" al espacio lagrangiano, esta dualidad es la generada entre espacios vectoriales covariantes y contravariantes.

### 2.1.2. El formalismo Hamiltoniano.

El formalismo hamiltoniano se obtiene a partir de el formalismo lagrangiano mediante una transformación de Legendre de las variables canónicas conjugadas. Definimos la cantidad

$$I(q^i, p_i, t) = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L, \quad (2.5)$$

que es la transformación de Legendre que me cambia el formalismo Lagrangiano por el formalismo Hamiltoniano y se escribe como:

$$H(q, p, t) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}, t), \quad (2.6)$$

identificando los momentos generalizados como

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} \quad (2.7)$$

donde  $q^i$  es la coordenada generalizada y  $p_i$  su variable canónica conjugada; las ventajas de trabajar con el formalismo Hamiltoniano, es que ya no tenemos el término cinético  $\dot{q}$ , además de que vemos que el vector  $q^i$  es covariante y  $p_i$  es contravariante, esto quiere decir que  $q^i$  transforma covariantemente con la base de vectores y  $p_i$  transforma contravariantemente con la base, y en consecuencia sus reglas de transformación son diferentes.

Partiendo del lagrangiano y de la transformación de Legendre con la que se obtiene el hamiltoniano, podemos obtener la forma diferencial del hamiltoniano como

$$dH(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i, \quad (2.8)$$

y obtener la forma diferencial del lagrangiano

$$dL(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i, \quad (2.9)$$

y ahora igualando con la transformación de Legendre (2.6) obtenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \left( p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) d\dot{q}^i, \quad (2.10)$$

que nos da como resultado la identidad del momento generalizado, y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{p}_i, \quad (2.11)$$

encontramos que

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i \quad (2.12)$$

llevan directamente a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (2.13)$$

que dan lugar a una representación equivalente de las ecuaciones de movimiento en el formalismo hamiltoniano. En el formalismo lagrangiano lo que teníamos eran  $n$  ecuaciones de segundo orden, y en el formalismo hamiltoniano tenemos  $2n$  ecuaciones de primer orden. En consecuencia el formalismo hamiltoniano reduce el orden de las ecuaciones de movimiento, pero al mismo tiempo aumenta el número de ecuaciones que tenemos que resolver. Por otro lado podemos derivar la función hamiltoniana  $H(q, p)$  respecto al tiempo con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dH(q, p)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

por lo que ahora podemos usar este resultado para obtener la evolución del tiempo de cualquier variable dinámica  $F(q, p)$

$$\frac{dF(q, p)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (2.15)$$

y con lo cual definimos el paréntesis de Poisson como

$$\{A(q, p), B(q, p)\} = \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^i}. \quad (2.16)$$

El formalismo hamiltoniano además de ser el espacio dual al formalismo lagrangiano por el cambio de  $\dot{q}^i$  por  $p_i$ , tiene otras características muy importantes:

En primer lugar define el espacio fase  $(q^i, p_i)$  que es una variedad diferencial de  $2n$  dimensiones, y donde cada punto de este espacio determina un estado mecánico del sistema.

En segundo lugar define una dos forma diferencial natural

$$\sigma = dp_i \wedge dq^i \quad (2.17)$$

conocida como estructura simpléctica, esta es una dos forma diferencial antisimétrica, y será muy importante a la hora de hacer transformaciones de coordenadas canónicas.

En tercer lugar el formalismo hamiltoniano define un sistema local de coordenadas  $(q^i, p_i)$  que es conocido como un sistema canónico de coordenadas.

En cuarto lugar pero no menos importante, el formalismo hamiltoniano permite hacer la cuantización canónica al cambiar las variables dinámicas por operadores y el paréntesis de Poisson por conmutadores entre los operadores, que dan lugar al principio de incertidumbre introduciendo la constante  $\hbar$ .

Entonces hemos visto que el formalismo hamiltoniano es completamente diferente al formalismo lagrangiano, encontrando que el formalismo hamiltoniano es más rico en información y permite tener otro punto de vista de la mecánica, además de que con este formalismo se hace la cuantización canónica de manera directa.



Y el formalismo hamiltoniano es completamente diferente al lagrangiano en que uno es el haz cotangente a la variedad de configuración y el otro el haz tangente a la variedad de configuración.

### 2.1.3. Las transformaciones canónicas.

Las transformaciones canónicas son redefiniciones de las variables canónicas  $q^i$  y  $p_i$  en términos de otras variables  $Q^i(q^i, p_i)$  y  $P_i(q^i, p_i)$ ; como ya vimos el formalismo hamiltoniano forma el espacio cotangente que es el dual al espacio tangente del formalismo lagrangiano, y en este espacio cotangente se puede definir el espacio fase del sistema físico como aquel espacio de  $2n$  dimensiones que forman las coordenadas generalizadas  $q^i$  y los impulsos generalizados  $p_i$ , además de que definiendo el producto exterior se puede construir la dos forma diferencial

$$\sigma_{ij} = dp_i \wedge dq^i \quad (2.18)$$

conocida como forma simpléctica, esta forma es antisimétrica, y además tiene la propiedad de que al hacer una transformación canónica la estructura simpléctica queda invariante, es decir que una transformación canónica  $Q^i$  y  $P_i$  cumple que

$$dp_i \wedge dq^i = dP_i \wedge dQ^i, \quad (2.19)$$

la estructura simpléctica queda invariante ante la transformación, y a esto es lo que se llama una transformación canónica.

Otra forma de ver que una transformación es canónica es probando si en las nuevas coordenadas las ecuaciones de Hamilton preservan la misma forma, es decir, si en un sistema tengo las coordenadas  $(q^i, p_i)$  con hamiltoniano  $H(q, p)$  las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (2.20)$$

y si hacemos una transformación de las coordenadas viejas a las nuevas  $Q^i(q^i, p_i)$  y  $P_i(q^i, p_i)$ , con hamiltoniano  $H'(q(Q, P), p(Q, P))$ , y se cumple que

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}, \quad (2.21)$$

entonces la transformación de coordenadas es canónica.

## 2.2. Constricciones Hamiltonianas.

### 2.2.1. Constricciones primarias.

El formalismo de constricciones hamiltonianas fue desarrollado por primera vez por Dirac [6], y explicado mucho más claro en su libro [5], pero la siguiente exposición está basada principalmente en [3].

El punto de partida será el principio de mínima acción en forma Lagrangiana.

La expresión más general posible de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico viene dado por el principio de mínima acción. Éste se basa en el hecho de que cada sistema mecánico esta caracterizado por la función lagrangiana

$$L = L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.22)$$

donde las  $q^i$  y  $\dot{q}^i$  representan las coordenadas y velocidades generalizadas del sistema. Esta función puede no ser única como en el caso de los lagrangianos equivalentes, los cuales a pesar de ser diferentes funciones y dar lugar a diferentes ecuaciones de movimiento describen físicamente la misma dinámica.

Con esta función lagrangiana, se define la acción funcional  $S_L$  como

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) dt. \quad (2.23)$$

El principio de mínima acción señala que las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico en consideración, son aquellas que se obtienen al hacer que la acción  $S_L$  sea estacionaria bajo variaciones de  $\delta q^i(t)$ , cuando dichas variaciones se anulan en los extremos  $t_1, t_2$

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0. \quad (2.24)$$

Deduzcamos pues, las ecuaciones que se obtienen al aplicar el principio de mínima acción a la funcional  $S_L$ .

Aquí tenemos el conjunto de las  $N$  funciones para las cuales  $S_L$  tiene un valor estacionario. Esto significa que el valor de  $S_L$  cambiará, si las funciones  $q^i$  se substituyen por cualquiera  $N$  funciones de la forma

$$q^i + \delta q^i. \quad (2.25)$$

La variación de  $S_L$  cuando se hace este remplazo de funciones es

$$S'_L - S_L = \int_{t_1}^{t_2} \left[ L(q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \delta \dot{q}^i, t) - L(q^i, \dot{q}^i, t) \right] dt \quad (2.26)$$

y notamos que no se está variando respecto al tiempo.

Haciendo un desarrollo en serie de la diferencia bajo el signo de integral en potencias de  $\delta q^i$  y  $\delta \dot{q}^i$ , y tomando en cuenta que la condición de que  $S_L$  sea estacionaria sólo impone restricciones sobre la primera potencia del desarrollo, de donde el principio de mínima acción puede expresarse como

$$S'_L - S_L \approx \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right] dt = 0, \quad (2.27)$$

si se toma en cuenta que  $\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \delta q^i$  dado que no existe variación temporal, y se integra por partes la expresión anterior, se obtiene

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i dt. \quad (2.28)$$

En virtud de las condiciones (2.24) el término  $(\partial L / \partial \dot{q}^i) \delta q^i$  se anula, quedando así sólo el término que contiene a la integral. Éste último término debe anularse para toda  $\delta q^i$  y esto sucede únicamente si el integrando es idénticamente nulo, es decir, si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad (2.29)$$

Éstas son las condiciones que hacen a la acción estacionaria y por lo tanto constituyen las ecuaciones de movimiento del sistema, y son conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange.

Escribiendo en una forma más explícita estas ecuaciones para una lagrangiana que no depende explícitamente del tiempo tenemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j. \quad (2.30)$$

De esta ecuación se desprende como consecuencia inmediata que las aceleraciones  $\ddot{q}^j$  a un tiempo dado, están únicamente determinadas por las posiciones y las velocidades a ese tiempo, si y sólo si la matriz  $W_{ij} \equiv (\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j)$  puede ser invertida, o dicho de otra manera, si y sólo si el determinante

$$\det(W_{ij}) \equiv \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0. \quad (2.31)$$

Si por otro lado el  $\det(W_{ij}) = 0$ , se tiene que no todas las aceleraciones pueden ser determinadas por las posiciones y las velocidades, y la solución de las ecuaciones de movimiento pueden entonces contener funciones arbitrarias del tiempo.

El punto de partida para pasar al formalismo hamiltoniano a partir del formalismo lagrangiano, es definir las variables canónicas conjugadas  $p_i$ , llamadas momentos canónicos

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (2.32)$$

En la teoría dinámica estándar se considera el caso en el cual las velocidades pueden escribirse como funciones que dependen exclusivamente de las coordenadas y los momentos, sin embargo se sigue de la definición (2.32) que

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad (2.33)$$

y por lo tanto, si permitimos que  $\det(W_{ij}) = 0$  se tiene que la consideración usual ya no es válida, debido a que esta relación es precisamente la condición de no invertibilidad de las velocidades como funciones de las coordenadas y los momentos. En otras palabras, si el lagrangiano de nuestro sistema es singular, entonces los momentos canónicos no son todos independientes entre sí, y por lo tanto existen ciertas relaciones entre ellos, estas relaciones son del tipo

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0 \quad m = 1, \dots, M, \quad (2.34)$$

las cuales se siguen de la definición (2.32) del momento canónico.

Cuando los momentos  $p_i$  son reemplazados por su definición en términos de las coordenadas  $q^i$  y las velocidades  $\dot{q}^i$  en las relaciones (2.34), éstas se reducen a una identidad. Estas ecuaciones son llamadas constricciones primarias para enfatizar que las ecuaciones de movimiento no son usadas para obtenerlas y que ellas no implican restricciones sobre las coordenadas  $q^i$  y sus velocidades  $\dot{q}^i$ .

De aquí en adelante supondremos por simplicidad, (i) que el rango de la matriz  $W_{ij}$  es constante en todo el espacio  $(q^i, \dot{q}^i)$ , (ii) que las constricciones (2.34) son independientes entre sí y (iii) que estas definen una subvariedad suave embebida en el espacio fase. Esta subvariedad es conocida como la superficie de constricciones primarias.

La extensión al caso de constricciones dependientes (caso reducible) es directa y sigue la misma línea, esta extensión puede encontrarse en (Henneaux and Teitelboim [1992]).

Si el rango de  $W_{ij}$  es  $R$ , entonces existirán  $N - R = M$  relaciones independientes  $\phi_m(q^i, p_i) = 0$  y la superficie de restricción será una subvariedad del espacio fase de dimensión  $2N - M$ .

Visto de forma más intuitiva, lo que se tiene es un mapeo del espacio  $(q^i, \dot{q}^i)$  que constituye una subvariedad de dimensión  $2N$ , a una subvariedad del espacio fase, de dimensión  $2N - M$  mediante la identidad (2.32). Así entonces dado un punto  $(q^i, p_i)$  que satisface las constricciones (2.34), se tiene que su "imagen inversa"  $(q^i, \dot{q}^i)$  que satisface la definición (2.32) no es única, por lo que la imagen inversa de un punto dado de (2.34) forma una variedad de dimensión  $M$ . Por consiguiente, para hacer que las transformaciones del espacio  $(q^i, \dot{q}^i)$  al espacio fase  $(q^i, p_i)$  sean univálidas, es necesario introducir al menos  $M$  parámetros extras en la teoría que indiquen la ubicación de las velocidades  $\dot{q}^i$  en la variedad inversa. Como veremos después, estos parámetros aparecen como multiplicadores de Lagrange cuando definamos el hamiltoniano y estudiemos sus propiedades.

## 2.2.2. El hamiltoniano canónico.

El próximo paso en el análisis, es introducir el hamiltoniano canónico  $H$ , el cual se define como una transformada de Legendre de las variables canónicas conjugadas

$$H \equiv \dot{q}^i p_i - L. \quad (2.35)$$

Bajo esta definición se tiene que  $H$  es una función de las coordenadas y los momentos. No obstante, si hacemos una variación de  $H$  en las variables ( $q^i$  y  $\dot{q}^i$ ) el resultado es

$$\begin{aligned}\delta H &= \dot{q}^i \delta p_i + (\delta \dot{q}^i) p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Se obtiene así que esta variación sobre  $H$  contiene únicamente las variaciones de las coordenadas y los momentos. Las variaciones en las velocidades se anulan debido a la definición que hemos hecho del momento en términos de la función lagrangiana, ésta es la característica que hace interesante a la función hamiltoniana. Aquí la variación de los momentos no es una variación independiente, ya que puede ser vista como una combinación lineal de la variación de las coordenadas y la variación de las velocidades, pero dado que en (2.36) la variación de las velocidades aparece únicamente en combinaciones lineales precisas y no de otra manera, se puede concluir que la función hamiltoniana es una función que depende sólo de las coordenadas  $q^i$  y los momentos  $p_i$ .

Sin embargo, el hamiltoniano canónico definido en (2.35) no está únicamente determinado como una función de las coordenadas y los momentos, ésto se entiende al darnos cuenta de que las variaciones de los momentos en (2.36) no son todas independientes, ya que están restringidas a preservar las constricciones primarias  $\phi_m = 0$ .

Esto nos lleva a la conclusión de que el hamiltoniano canónico está bien definido sólo sobre la subvariedad determinada por las constricciones primarias y por lo tanto puede ser extendido arbitrariamente fuera de dicha subvariedad, de ésto se sigue que el formalismo permanece sin cambios si se reemplaza al hamiltoniano canónico, por este mismo más alguna combinación lineal de las constricciones

$$H^* = H + c^m(q^i, p_i) \phi_m, \quad (2.37)$$

y veremos que éste es el caso a considerar.

Dado que el hamiltoniano  $H$  puede considerarse como una función que depende únicamente de las coordenadas  $q^i$  y de los momentos  $p_i$ , la variación de  $H$  se puede expresar en términos de estas variables como

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i, \quad (2.38)$$

con ayuda de esta ecuación, se puede reescribir la ec.(2.36) como

$$\left( \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i \right) \delta p_i = 0, \quad (2.39)$$

de lo cual uno infiere que

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad (2.40)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{\dot{q}} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} \Big|_p + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.41)$$

La primera de estas ecuaciones es particularmente importante porque nos muestra que las velocidades  $\dot{q}^i$  pueden ser recobradas del conocimiento de los momentos  $p_i$  sujetos a las constricciones (2.34) y de los  $M$  parámetros extras  $u^m$ . Así podemos tomar como nuestras variables dinámicas básicas, las coordenadas, los momentos y los parámetros  $u^m$ , en lugar de las coordenadas y las velocidades. Estos parámetros extras  $u^m$  pueden ser considerados como coordenadas sobre la superficie de las imágenes de una  $\dot{q}^i$  dada.

Dado que estamos considerando a las constricciones como independientes, los vectores  $\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}$  son también independientes sobre la superficie de restricción debido a las condiciones de regularidad<sup>1</sup>. Así dos diferentes conjuntos de  $u^m$  no pueden llevarnos a las mismas velocidades en (2.40). Esto significa que las  $u^m$  pueden, en principio, ser expresadas como funciones de las coordenadas y las velocidades si se resuelven las ecuaciones

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q})) + u^m(q, \dot{q}) \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q})) \quad (2.42)$$

Si definimos la transformación de Legendre del espacio  $(q^i, \dot{q}^i)$  a la superficie  $\phi_m = 0$  del espacio  $(q^i, p_i, u^m)$  por medio de

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}), \\ u^m &= u^m(q, \dot{q}), \end{aligned} \quad (2.43)$$

vemos que esta transformación entre espacios de la misma dimensionalidad  $2N$  es invertible, dado que uno tiene

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \\ \phi_m(q^i, p_i) &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Así, las ecs. (2.43) implican las (2.44) y viceversa. El análisis que se ha hecho, muestra claramente que si se quiere que las transformaciones de Legendre sean invertibles cuando  $\det(\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = 0$ , se tienen que introducir variables extras.

Se debe mencionar que la discusión precedente tiene validez sólo a nivel local. A partir de este punto, asumiremos que las transformaciones (2.43) y (2.44) son de

<sup>1</sup>Las condiciones de regularidad se pueden estudiar en [3].

validez global, esto implica en particular, que el hamiltoniano  $H$  puede ser globalmente definido como una función de las coordenadas y los momentos por medio de (2.35) y no es multivaluado.

### 2.2.3. Ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana.

Las ecuaciones (2.40) y (2.41) nos llevan a escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.29) en su forma hamiltoniana equivalente

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad (2.45)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \quad (2.46)$$

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0 \quad (2.47)$$

Que las ecuaciones (2.45) se siguen de (2.29), es una consecuencia directa de (2.42) y de la definición del momento en términos de las velocidades.

Es conveniente para el desarrollo siguiente de la teoría expresar las ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana en términos del paréntesis de Poisson, el cual está definido como

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}, \quad (2.48)$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones que dependen de las posiciones y de los momentos. Este paréntesis cumple ciertas propiedades que son consecuencia de su definición.

El paréntesis es antisimétrico en  $F$  y  $G$

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad (2.49)$$

es lineal en ambos miembros

$$\{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\}, \quad (2.50)$$

y satisface a ley del producto (regla de Leibnitz)

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2. \quad (2.51)$$

Entre el paréntesis de Poisson formado por tres funciones, existe la relación

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0, \quad (2.52)$$

llamada identidad de Jacobi.

Para cualquier función  $F$  que depende de las coordenadas y los momentos, se tiene

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i. \quad (2.53)$$

Si se substituyen en esta ecuación las ecuaciones de movimiento (2.45) tenemos

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \right) \\ &= \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}.\end{aligned}\quad (2.54)$$

Así tenemos que

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} + u^m \{p_i, \phi_m\} \quad \text{y} \quad \dot{q}^i = \{q^i, H\} + u^m \{q^i, \phi_m\} \quad (2.55)$$

son las ecuaciones de movimiento hamiltonianas escritas en términos del formalismo del paréntesis de Poisson.

#### 2.2.4. Hamiltoniano total.

La ecuación (2.54) puede escribirse de una forma más concisa si extendemos un poco la noción de paréntesis de Poisson. De la definición (2.48) se sigue que los paréntesis están definidos únicamente para funciones que dependen de las coordenadas y los momentos. Si se tiene una función más general tal como una velocidad, la cual no puede ser expresable en términos de las coordenadas y los momentos, entonces esta velocidad no puede tener un paréntesis de Poisson con ninguna cantidad. Si extendemos la noción de paréntesis de Poisson y suponemos que éstos existen para cualesquiera dos cantidades y, también suponemos que los paréntesis conservan su estructura y las propiedades (2.49), pero que no puedan ser determinados cuando las funciones no dependen de los momentos y las coordenadas, entonces podemos reescribir la ecuación (2.54) de la siguiente manera

$$\dot{F} = \{F, H + u^m \phi_m\}.\quad (2.56)$$

En esta expresión los coeficientes  $u^m$  aparecen dentro del paréntesis de Poisson, pero como se vió anteriormente, estos coeficientes en general son funciones de las coordenadas y las velocidades, y no de las coordenadas y los momentos. Esto implica que no podemos usar la definición (2.48) para calcular el paréntesis de Poisson de la ecuación (2.56).

Sin embargo, gracias a la extensión que hemos hecho del concepto de paréntesis de Poisson tenemos

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \{F, H + u^m \phi_m\} = \{F, H\} + \{F, u^m \phi_m\} \\ &= \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\} + \{F, u^m\} \phi_m,\end{aligned}\quad (2.57)$$

el paréntesis  $\{F, u^m\}$  en la expresión anterior, no está bien definido, pero dado que está multiplicado por algo que se anula en la superficie de constricción, entonces el término  $\{F, u^m\} \phi_m$  se anula, quedando

$$\dot{F} = \{F, H + u^m \phi_m\} = \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\},\quad (2.58)$$



lo cual muestra la equivalencia entre (2.54) y (2.56). La función

$$H_T = H + u^m \phi_m \quad (2.59)$$

es llamada *hamiltoniano total*, notemos que los coeficientes  $u^m$  aparecen ahora como multiplicadores de Lagrange. En términos de este hamiltoniano total, las ecuaciones de movimiento se expresan de manera simple

$$\dot{F} = \{F, H_T\}. \quad (2.60)$$

### 2.2.5. Ecuaciones débiles y fuertes.

Hay un punto en el que tenemos que ser cuidadosos cuando trabajamos dentro del formalismo de los paréntesis de Poisson.

Nosotros tenemos las ecuaciones de restricción (2.34), pero éstas no deben ser utilizadas antes de trabajar con el paréntesis de Poisson, dado que si hicieramos esto, entonces el término  $\{F, \phi_m\}$  sería siempre igual a cero. Así entonces, tomaremos como una regla que los paréntesis de Poisson deben ser evaluados antes de hacer uso de las constricciones y, para recordar esta regla en el formalismo, introduciremos el símbolo " $\approx$ " (el cual leeremos como: *debilmente igual*) para las ecuaciones de restricción. Con este símbolo ellas son escritas de la siguiente manera

$$\phi_m \approx 0, \quad (2.61)$$

esta notación enfatiza el hecho de que la cantidad  $\phi_m$  es numéricamente restringida a ser cero, pero que no es idénticamente nula en todo el espacio fase.

En una manera más general, si tenemos dos funciones  $F$  y  $G$  que coinciden en la subvariedad definida por las constricciones  $\phi_m \approx 0$ , se dice que las dos funciones son débilmente iguales entre sí,  $F \approx G$ . Por otro lado, si una ecuación es válida en todo el espacio fase y no sólo sobre la subvariedad  $\phi_m \approx 0$ , decimos que esta ecuación es *fuerte* y el símbolo usual de igualdad " $=$ " es utilizado, entonces

$$F \approx G \iff F - G = c^n(q, p) \phi_n. \quad (2.62)$$

Con esta nueva notación que hemos introducido, la expresión para la ecuación (2.60) es:

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (2.63)$$

### 2.2.6. Constricciones secundarias.

Examinemos ahora una de las consecuencias de las ecuaciones de movimiento (2.54). Un requerimiento de consistencia básico en la teoría, es que las constricciones primarias  $\phi_m$  sean preservadas en el tiempo. Podemos tomar las ecuaciones (2.54) o

(2.63) y poner a  $G$  como una de las constricciones  $\phi_m$ , entonces por consistencia, tendremos que  $\phi_m \approx 0$ . lo que nos lleva a la siguiente ecuación

$$\dot{\phi}_{m'} = \{\phi_{m'}, H\} + u^m \{\phi_{m'}, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.64)$$

El número de condiciones de consistencia aquí es  $M$ , estas ecuaciones pueden dar tres resultados de distinto tipo.

Un tipo de ecuaciones se reduce a  $0 \approx 0$ , es decir,  $\dot{\phi}_{m'} \approx 0$  se satisface idénticamente con la ayuda de las constricciones primarias.

Un segundo tipo de ecuaciones son aquellas que se reducen a las relaciones entre las coordenadas y los momentos, y son independientes de los multiplicadores  $u^m$ , estas ecuaciones deben ser independientes de las constricciones primarias, ya que si esto no fuera así, se reducirían a una ecuación de las del tipo anterior.

Finalmente, un tercer tipo de estas ecuaciones son aquellas que no se reducen a ninguno de los dos casos anteriores, entonces éstas imponen condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange  $u^m$ .

Del primer tipo de ecuaciones, ya no hablaremos más. Por otro lado, cada ecuación de las de segundo tipo significa que tenemos otra restricción entre las coordenadas y los momentos. Estas constricciones son llamadas constricciones secundarias. Las constricciones primarias difieren de las secundarias, en el sentido de que las primeras, son consecuencia exclusivamente de la definición del momento, mientras que en las segundas, también hacemos uso de las ecuaciones de movimiento para obtenerlas.

Si en nuestra teoría aparecen constricciones secundarias  $\chi(q, p) \approx 0$ , entonces debemos imponer nuevas condiciones de consistencia sobre estas constricciones, es decir, debemos pedir que estas constricciones secundarias se preserven en el tiempo

$$\{\chi_{m'}, H\} + u^m \{\chi_{m'}, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.65)$$

Estas ecuaciones tienen que ser tratadas de igual manera que las ecs. (2.64). Debemos checar de cual de los tres tipos de ecuaciones antes mencionadas, es cada una de las ecuaciones (2.65). Si éstas resultan ser del segundo tipo, entonces debemos repetir el proceso una vez más debido a que tenemos nuevas constricciones secundarias, el proceso termina cuando las condiciones de consistencia no dan como resultado nuevas constricciones. El resultado final de estos procesos, será la obtención de un cierto número de constricciones secundarias  $\chi(q, p)$ , junto con un número de condiciones sobre los coeficientes  $u^m$  del tipo (2.64). El conjunto de constricciones secundarias será denotado por

$$\phi_l \approx 0, \quad l = M + 1, \dots, M + L, \quad (2.66)$$

donde  $L$  es el número total de constricciones secundarias. La razón para la notación (2.66), es que la distinción entre constricciones primarias y secundarias será de poca

importancia en la forma final de la teoría, y es útil poder denotar todas las constricciones primarias y secundarias en forma única como

$$\phi_I \approx 0, \quad I = 1, 2, \dots, M + L \quad (2.67)$$

Nosotros aplicamos las mismas condiciones de regularidad sobre el conjunto completo de constricciones  $\phi_I$  al igual que lo hicimos con las constricciones primarias. Es decir, no supondremos solamente que las constricciones (2.67) definen una subvariedad suave, sino que también asumiremos que las funciones de constricción  $\phi_I$  obedecen condiciones de regularidad. En lo subsiguiente supondremos que el rango de la matriz de los paréntesis  $\{\phi_I, \phi_I\}$  es constante en toda la superficie (2.67) donde las constricciones son válidas.

### 2.2.7. Restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange.

Analícemos ahora con mayor detenimiento las ecuaciones que imponen restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange  $u^m$ . Como ya hemos mencionado, estas ecuaciones son del tipo

$$\{\phi_I, H\} + u^m \{\phi_I, \phi_m\} \approx 0, \quad (2.68)$$

donde  $m$  es sumado de 1 a  $M$  e  $I$  puede tomar cualquiera de los valores de 1 a  $M + L$ .

Podemos considerar que las ecuaciones (2.68) constituyen un conjunto de  $M + L$  ecuaciones lineales no homogéneas en las  $M$  incógnitas  $u^m$ , con coeficientes que son funciones de las coordenadas y los momentos. Estas ecuaciones deben tener solución ya que de otra manera, las ecuaciones de movimiento lagrangianas serían inconsistentes.

La solución más general de (2.68) es de la forma

$$u^m = U^m(q, p) + V^m(q, p), \quad (2.69)$$

donde  $U^m(q, p)$  es una solución particular de la ecuación inhomogénea (2.68) y  $V^m(q, p)$  es la solución más general del sistema homogéneo asociado

$$V^m(q, p) \{\phi_I, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.70)$$

Que  $V^m(q, p)$  sea la solución más general de (2.70) significa que  $V^m$  es una combinación lineal de soluciones linealmente independientes  $V_a^m, a = 1, \dots, A$ , del sistema homogéneo. El número  $A$  de soluciones independientes  $V_a^m$  es el mismo para toda  $(q^i, p_i)$  sobre la superficie de constricción, porque hemos supuesto que la matriz  $\{\phi_i, \phi_m\}$  es de rango constante en dicha superficie. Tenemos así que la solución general de (2.68) es

$$u^m \approx U^m + v^a V_a^m, \quad (2.71)$$

en términos de los coeficientes  $v^a$ , los cuales son totalmente arbitrarios, podemos notar que en esta última expresión hemos separado la parte de  $u^m$  que permanece

arbitraria, de aquella que está fija mediante las condiciones de requerimiento impuestas sobre las constricciones.

Si se substituye esta expresión de  $u^m$  en la expresión del hamiltoniano total (2.59) se obtiene

$$H_T = H_C + U^m \phi_m + v^a V_a^m \phi_m. \quad (2.72)$$

Definiendo las cantidades  $H'$  y  $\phi_a$  como

$$H' \equiv H + U^m \phi_m \quad (2.73)$$

$$\phi_a \equiv V_a^m \phi_m, \quad (2.74)$$

se tiene que el hamiltoniano total puede escribirse de la siguiente manera

$$H_T = H' + v^a \phi_a. \quad (2.75)$$

### 2.2.8. Funciones de primera clase y segunda clase.

Hemos mencionado anteriormente que la distinción entre constricciones primarias y secundarias, es de poca importancia para la forma final de la formulación hamiltoniana. En contraste, una clasificación diferente de las constricciones (y en forma más general, de funciones definidas sobre el espacio fase) juega un papel central en la teoría. Este es el concepto de funciones de primera clase y segunda clase.

Se dice que una función  $F(q^i, p_i)$  es de primera clase, si su paréntesis de Poisson con todas las constricciones se anula débilmente,

$$\{F, \phi_I\} \approx 0, \quad I = 1, \dots, M + L \quad (2.76)$$

Una función de las variables canónicas que no sea de primera clase, es llamada de segunda clase. Es decir,  $F(q^i, p_i)$  es de segunda clase si hay alguna restricción  $\phi_I$  para la cual se tenga

$$\{F, \phi_I\} \neq 0. \quad (2.77)$$

Si  $F$  es de primera clase, entonces  $\{F, \phi_I\}$  tiene que ser fuertemente igual a alguna función lineal de las constricciones  $\phi$ , ya que las constricciones  $\phi_I$  son por definición las únicas cantidades independientes que son débilmente cero.

Una característica importante de la propiedad "primera clase", es que ésta es preservada bajo la operación de paréntesis de Poisson. En otras palabras, el paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase, es de primera clase. Probemos esta propiedad: si  $F$  y  $G$  son de primera clase, entonces

$$\{F, \phi_I\} = f_I' \phi_I, \quad \{G, \phi_I\} = g_I' \phi_I, \quad (2.78)$$

y utilizando la identidad de Jacobi obtenemos

$$\begin{aligned} \{F, G\}, \phi_I &= \{F, \{G, \phi_I\}\} - \{G, \{F, \phi_I\}\} = \{F, g_I' \phi_I\} - \{G, f_I' \phi_I\} \\ &= \{F, g_I'\} \phi_I + g_I' f_I'' \phi_I' - \{G, f_I'\} \phi_I - f_I' g_I'' \phi_I' \approx 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Como una primera aplicación del concepto de primera clase, observamos que las funciones  $H'$  y  $\phi_a$  que hemos definido en (2.73) y (2.74) son de primera clase. Si formamos el paréntesis de Poisson de  $\phi_a$  con  $\phi_I$ , obtenemos de la definición de  $\phi_a$ , el término  $V_a^m(\phi_m, \phi_I)$  más otros que se anulan débilmente. Dado que los  $V_a^m$  son definidos para satisfacer (2.70),  $\phi_a$  es de primera clase. Similarmente  $\{H', \phi_I\} \approx 0$  debido a la definición de  $H'$  y a (2.68). Más aún, las  $\phi_a$  constituyen un conjunto completo de constricciones primarias de primera clase, esto es, cualquier constricción primaria de primera clase es una combinación lineal de las  $\phi_a$  (con coeficientes que son funciones de las coordenadas  $q^i$ , los momentos  $p_i$  y módulo cuadrados de constricciones de segunda clase). Esto es así porque  $v^a V_a^m$  es la solución más general de (2.70) sobre la superficie  $\phi_I \approx 0$ .

La introducción de esta nueva división de constricciones, nos permite concluir que el hamiltoniano total (2.75) es la suma del hamiltoniano de primera clase  $H'$  y las constricciones primarias de primera clase  $\phi_a$  multiplicadas por coeficientes arbitrarios  $v^a$ . Debemos mencionar que la división de  $H_T$  en  $H'$  y  $v^a \phi_a$  no es única, porque la  $U^m$  que aparece en la definición (2.73) puede ser cualquier solución de la ecuación inhomogénea (2.68). Esto significa que por el renombramiento de las funciones  $v^a$ , podemos admitir dentro de  $H'$  en (2.75) cualquier combinación de las  $\phi_a$  sin cambiar el hamiltoniano total.

## 2.3. El paréntesis de Dirac.

### 2.3.1. Separación en constricciones de primera y segunda clase.

En la sección anterior se estudiaron las principales características de las constricciones de primera clase, estudiemos ahora las características de las constricciones de segunda clase.

Consideramos el caso en el que la matriz  $C_{II'} = \{\phi_I, \phi_{I'}\}$  no se anula sobre la superficie de constricción. Aquí estamos suponiendo que las constricciones son irreducibles y que el rango de la matriz  $C_{II'}$  de los paréntesis de todas las constricciones, es constante sobre toda la superficie de constricción.

**Teorema:** Si el  $\det C_{II'} \approx 0$ , entonces existe (al menos) una constricción de primera clase entre las constricciones  $\phi_I$ .

**Prueba.** Si  $\det C_{II'} \approx 0$ , puede encontrarse una solución no trivial  $\lambda^I$  de  $\lambda^I C_{II'} \approx 0$ . La constricción  $\lambda^I \phi_I$  es entonces fácilmente vista como de primera clase, lo cual prueba el teorema.

Si se redefinen las constricciones como  $\phi_I \rightarrow a_I^{\prime} \phi_{I'}$  mediante una apropiada matriz invertible  $a_I^{\prime}$ , la constricción  $\lambda^I \phi_I$ , puede ser usada como la primera constricción. En esta nueva representación se tiene  $C_{II} = -C_{II'} \approx 0$ .

Aplicando varias veces el teorema, es posible construir una representación equiva-

lente de la superficie de constricción en términos de las constricciones  $\gamma_a \approx 0$ ,  $\chi_a \approx 0$ , cuya matriz de paréntesis de Poisson se lee débilmente

$$\{\chi, \chi\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

donde  $C_{\alpha\beta}$  es una matriz invertible sobre toda la superficie de constricción.

En esta nueva representación, las constricciones están completamente divididas en constricciones de primera y segunda clase, es decir, ninguna combinación lineal de las  $\chi_a$  tiene como resultado una constricción de primera clase, y las constricciones  $\gamma_a$  agotan todas las constricciones de primera clase. Es importante notar que el número de constricciones de segunda clase debe ser par, de lo contrario la matriz antisimétrica  $C_{\alpha\beta}$  tendría determinante cero, entonces no todas las  $\chi_a$  serían de segunda clase.

Nótese que la separación (2.3.1) no es única, debido a que ésta es preservada por las redefiniciones

$$\gamma_a \longrightarrow a_a^b \gamma_b, \quad \chi_a \longrightarrow a_a^b \chi_b + a_a^b \gamma_b \quad (2.80)$$

con  $\det a_a^b \neq 0$ ,  $\det a_a^b \neq 0$ . También uno puede sumar cuadrados de constricciones de segunda clase a  $\gamma_a$  sin cambiar la propiedad de primera clase,  $\gamma_a \longrightarrow \gamma_a + \epsilon_a^{\alpha\beta} \chi_\alpha \chi_\beta$ . Asumiremos que las funciones de segunda clase  $\chi_a$  son tales que  $\det C_{\alpha\beta} \neq 0$  sobre toda la superficie  $\chi_a = 0$  y no solo sobre  $\gamma_a = 0$ . Esto es necesario para manejar apropiadamente las constricciones de segunda clase.

### 2.3.2. Tratamiento de las constricciones de segunda clase: un ejemplo.

A diferencia de las constricciones de primera clase, las constricciones de segunda clase no pueden ser interpretadas como generadoras de transformaciones de norma, o más generalmente, como generadoras de transformaciones con significado físico. La razón es que por definición, la transformación de contacto generada por una constricción de segunda clase  $\chi$  no preserva todas las constricciones  $\phi \approx 0$

$$\delta\chi_a = \{\chi_a, \epsilon^b \chi_b\} = \epsilon^b C_{ab} \neq 0, \quad (2.81)$$

y así mapea un estado permitido sobre un estado no permitido.

Para entender como deben ser tratadas las constricciones de segunda clase, analicemos el ejemplo más simple posible de una teoría con constricciones de segunda clase. Supongamos que tenemos  $N$  pares de coordenadas canónicas y que el primer par  $(q^1, p_1)$  está sujeto a las constricciones

$$\begin{aligned} \chi_1 &= q^1 \approx 0 \\ \chi_2 &= p_1 \approx 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Estas constricciones son de segunda clase porque

$$\{\chi_1, \chi_2\} = 1 \neq 0. \quad (2.83)$$

En este simple caso, la forma en que deben ser tratadas las constricciones de segunda clase es casi directa. Las ecuaciones (2.82) nos dice que las variables  $q^1$  y  $p_1$  no son de interés y por consecuencia, que el primer grado de libertad no es de importancia relevante en la teoría. Tenemos así que las variables canónicas  $q^1$  y  $p_1$  pueden ser descartadas y por lo tanto es posible trabajar sólo con los otros grados de libertad. Esto significa que podemos trabajar con un paréntesis de Poisson modificado y definido de la siguiente manera

$$\{F, G\}^* = \sum_{i=2}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (2.84)$$

Este paréntesis debe ser suficiente porque considera todas las variables dinámicas que son de interés físico.

Notemos que el paréntesis modificado (2.84) de cualquiera de las dos constricciones (2.82) con una variable dinámica arbitraria es idénticamente cero

$$\{F, \chi_1\}^* = \{F, \chi_2\}^* = 0. \quad (2.85)$$

Esto significa que cuando trabajamos con (2.84), podemos poner las  $\chi_\alpha$  como iguales a cero antes de evaluar el paréntesis. Así, si en este ejemplo utilizamos la definición del paréntesis estrella (2.84) en vez de la del paréntesis de Poisson (2.48), podemos poner las constricciones de segunda clase fuertemente igual a cero

$$\chi_1 = \chi_2 = 0. \quad (2.86)$$

También es claro que las ecuaciones de movimiento para los otros ( $n \geq 2$ ) grados de libertad, permanecen de la misma forma si reemplazamos el paréntesis de Poisson original por el paréntesis modificado. Más aún, el paréntesis (2.84) satisface las mismas propiedades (2.49) que el paréntesis de Poisson.

### 2.3.3. Paréntesis de Dirac.

La generalización de (2.84) para un conjunto arbitrario de constricciones de segunda clase fue hecha por Dirac [5, 6, 7], y expuesto de forma más clara en [9] y [3]. Esbozaremos aquí, como llegar a esta generalización.

Dado que el determinante de la matriz  $C_{\alpha\beta}$  es distinto de cero, entonces esta matriz es invertible

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (2.87)$$

Una propiedad que debe de cumplir el paréntesis que generaliza (2.84) es que, cualquier variable dinámica tenga un paréntesis general nulo con las constricciones

de segunda clase. Si  $F$  es una función arbitraria del espacio fase podemos definir otra función  $F^*$  que sea igual a  $F$  sobre la superficie de constricciones de segunda clase  $\chi_\alpha \approx 0$ , como

$$F^* = F + \nu^\alpha \chi_\alpha, \quad (2.88)$$

con la propiedad

$$\{F^*, \chi_\alpha\} \approx 0. \quad (2.89)$$

Por cálculo directo puede obtenerse la expresión explícita para  $F^*$  en función de  $C^{\alpha\beta}$

$$F^* = F - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \chi_\beta. \quad (2.90)$$

Ahora simplemente postulamos que el paréntesis de Poisson de dos cantidades  $F$  y  $G$  debe ser remplazado por el paréntesis de Poisson de sus variables estrellas  $F^*$  y  $G^*$

$$\{F, G\} \longrightarrow \{F^*, G^*\}. \quad (2.91)$$

Notesé que a pesar de que  $F \approx F^*$  y  $G \approx G^*$ , el paréntesis de Poisson  $\{F^*, G^*\}$  no es débilmente igual a  $\{F, G\}$

$$\{F^*, G^*\} \approx \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}. \quad (2.92)$$

El paréntesis de Dirac esta definido como

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}. \quad (2.93)$$

y constituye la generalización de (2.84). Este paréntesis satisface las mismas propiedades que el paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned} \{F, G\}^* &= -\{G, F\}^*, \\ \{F_1 + F_2, G\}^* &= \{F_1, G\}^* + \{F_2, G\}^*, \\ \{F_1 F_2, G\}^* &= F_1 \{F_2, G\}^* + \{F_1, G\}^* F_2, \\ \{\{F, G\}^*, H\}^* &+ \{\{G, H\}^*, F\}^* + \{\{H, F\}^*, G\}^* = 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

además de estas propiedades se tiene que

$$\{\chi_\alpha, F\}^* = 0 \quad \text{para cualquier } F \quad (2.95)$$

$$\{F, G\}^* \approx \{F, G\} \quad \text{con } G \text{ de primera clase y } F \text{ arbitrario} \quad (2.96)$$

$$\{F, \{G, H\}^*\}^* \approx \{F, \{G, H\}^*\}^* \quad \text{con } G \text{ y } H \text{ de primera clase y } F \text{ arbitrario} \quad (2.97)$$

Se sigue de (2.95) que las constricciones de segunda clase pueden ser puestas iguales a cero, antes o después de evaluar el paréntesis de Dirac. Más aún, dado que el hamiltoniano extendido

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad (2.98)$$



es de primera clase, se deduce de (2.96) que  $H_E$  continua generando las ecuaciones de movimiento correctas en términos del paréntesis de Dirac

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}^*, \quad \text{para toda } F. \quad (2.99)$$

En particular, el efecto de una transformación de norma puede también ser evaluado mediante el paréntesis de Dirac

$$\{F, \gamma_a\} \approx \{F, \gamma_a\}^*, \quad \text{para toda } F. \quad (2.100)$$

Así, en lo sucesivo, todas las ecuaciones de la teoría son formuladas en términos del paréntesis de Dirac, y las constricciones de segunda clase son identidades que expresan algunas variables canónicas en términos de otras (ecuaciones fuertes).

Con toda la herramienta matemática antes presentada es posible trabajar con cualquier teoría, y obtener sus constricciones. En cada teoría se pueden presentar dificultades para encontrar una separación en constricciones de primera y segunda clase.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

## Capítulo 3

### La cuerda bósónica

En este capítulo presentaré una introducción a la teoría de cuerdas, en particular quiero enfocarme en la cuerda bósónica y realizar el análisis canónico de esta teoría.

La cuerda bósónica es el modelo más simple de la cuerda relativista; históricamente la acción para una teoría de cuerda fue formulada por primera vez por Nambu y Goto a principios de los años 70, generalizando la idea de la teoría relativista para una partícula puntual. Supongamos que una partícula libre relativista, en su evolución en el espacio tiempo D-dimensional, describe una trayectoria parametrizada en términos de una sola variable  $x^\mu(\tau)$  llamada línea mundo. De forma análoga para la cuerda, un objeto extendido en una dimensión espacial, cuyo movimiento en el espacio-tiempo D-dimensional describe una superficie de universo parametrizada por las variables  $\tau$  y  $\sigma$ , donde  $\tau$  puede ser considerada como la coordenada temporal y  $\sigma$  como la coordenada espacial, y convencionalmente se escoge  $\sigma \in [0, \pi]$ . Cuando la hoja mundo de la cuerda esta descrita por la posición  $X^\mu(\tau, \sigma)$  para todo valor de  $\tau$  y  $\sigma$ . También aquí se considera que la cuerda vive en un espacio-tiempo de Minkowski  $\mathcal{M}$  de D dimensiones, con métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ , donde la coordenada de la cuerda  $X^\mu(\xi)$  se mapea

$$X^\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad \mu = 0, \dots, D-1, \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{S}$  es el parámetro del espacio bidimensional  $\xi = (\tau, \sigma) \in \mathcal{S}$ .

La acción de Nambu-Goto es de la forma siguiente

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int dA = -T \int_M \left( -h(\xi) \right)^{\frac{1}{2}} d\tau d\sigma \quad (3.2)$$

donde vemos que es proporcional al elemento de área invariante  $dA$  de la superficie formada por la cuerda y donde  $M$  denota la superficie de la hoja mundo, de igual forma que se hace con la partícula libre relativista. En (3.2)  $h(\xi) = \det h_{ab}(\xi)$ , donde  $h_{ab}$  es la métrica inducida dada por

$$h_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (3.3)$$

La acción de Nambu-Goto se puede escribir de diferentes maneras que son clásicamente equivalentes, considerando la métrica  $h_{ab}$  como un multiplicador de Lagrange, la acción resultante es

$$S_P[X^\mu, \gamma^{ab}] = -\frac{T}{2} \int_M (-\gamma(\xi))^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} h_{ab} d\tau d\sigma \quad (3.4)$$

esta es la acción de Polyakov, aunque fue formulada por Brink, Di Vecchia, Howe, Deser y Zumino. La acción (3.4), es muy simple, conveniente para la cuantización, y cumple con las siguientes simetrías:

1.- Es globalmente invariante ante transformaciones de Poincaré

$$\delta X^\mu = \Lambda^{\mu\nu} X_\nu + a^\mu, \quad (3.5)$$

$$\delta \gamma_{ab} = 0, \quad (3.6)$$

donde  $\Lambda^{\mu\nu}$  es una matriz antisimétrica de la representación del grupo pseudo ortogonal  $SO(1, D-1)$  y  $a^\mu$  es un vector constante. Esta invariancia refleja la simetría del espacio de Minkowski en el cual se propaga la cuerda.

2.- Es localmente invariante sobre:

A) Difeomorfismos (o reparametrizaciones) de la hoja mundo

$$\delta X^\mu = \zeta^a \partial_a X^\mu, \quad (3.7)$$

$$\delta \gamma_{ab} = \nabla_a \zeta_b + \nabla_b \zeta_a \quad (3.8)$$

independientes de la elección de coordenadas  $\xi^a$ , de hecho el elemento de área invariante, introduce el término cinético e invariante gracias a la contracción total de los índices tensoriales; y debido a esto, la acción (3.4) describe D campos escalares acoplados a la gravedad en dos dimensiones.

B) Transformación de Weyl, sobre rescalamiento local de la métrica de la hoja mundo

$$\delta X^\mu = 0 \quad (3.9)$$

$$\delta \gamma_{ab} = 2\phi(\xi) \gamma_{ab}. \quad (3.10)$$

donde el término  $\phi(\xi)$  es llamado factor conforme.

Ahora lo que sigue es obtener las ecuaciones de movimiento de la cuerda bósónica a partir del principio variacional sobre la acción, al hacer variaciones sobre el campo de la cuerda  $X^\mu$  y de la métrica  $\gamma^{ab}$  en la acción (3.4) obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = 0 \iff \partial_a (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu) = 0, \quad (3.11)$$

con términos de frontera que no se están considerando, y los cuales determinan la distinción entre la cuerda bósónica abierta o cerrada. Y ahora utilizando las siguientes

relaciones

$$\delta\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab}, \quad (3.12)$$

$$\delta\gamma^{ab} = -\gamma^{ac}\gamma^{bd}\delta\gamma_{cd}. \quad (3.13)$$

obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S}{\delta\gamma^{ab}} = 0 \iff \frac{T}{2}\sqrt{-\gamma}\left(\frac{1}{2}\gamma^{cd}\gamma^{ab} - \gamma^{ac}\gamma^{bd}\right)\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu = 0, \quad (3.14)$$

que esta relacionada con el tensor de energía-momento. Por otra parte, el tensor de energía-momento bidimensional  $T_{ab}$  esta definido como

$$T_{ab} = \frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S}{\delta\gamma^{ab}}, \quad (3.15)$$

y la ecuación de campo (3.14) es equivalente a la relación

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu\partial_b X_\mu - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd}\partial_c X^\mu\partial_d X_\mu = 0. \quad (3.16)$$

Es fácil demostrar que  $T_{ab}$  tiene las siguientes propiedades

- 1.-Es simétrico  $T_{ab} = T_{ba}$ .
- 2.-Es conservado  $\partial^a T_{ab} = 0$
- 3.-Tiene traza nula  $\gamma^{ab}T_{ab} = 0$

Una teoría de campo se caracteriza por tener un tensor de energía-momento simétrico, conservado y de traza nula es en general invariante conforme.

La solución de las ecuaciones de movimiento del campo de la cuerda (3.11) con la relación (3.14) se reserva la elección de una norma adecuada. La invarianza de la acción ante difeomorfismos, consiste, al menos localmente, en introducir un sistema de coordenadas tal que deje la métrica invariante, de tal forma que

$$\gamma_{ab}(\xi) = e^{2\phi(\xi)}\eta_{ab}, \quad (3.17)$$

esta es conocida como norma conforme.

En la norma conforme la acción de Polyakov, la relación (3.16) y la ecuación de movimiento (3.11) toman respectivamente las siguientes expresiones

$$S = -\frac{T}{2} \int_M \eta^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu d\tau d\sigma = \frac{T}{2} \int_M [(\partial_\tau X)^2 - (\partial_\sigma X)^2] d\tau d\sigma \quad (3.18)$$

donde convencionalmente  $\tau$  y  $\sigma$  vienen dados en los intervalos

$$\tau \in (-\infty, \infty) \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (3.19)$$

De la ecuación (3.18) se deduce que en la norma conforme la acción (3.4) se reduce a la acción de D campos libres  $X^\mu$ , de donde

$$T_{00} = \dot{X}^2 + X'^2 = T_{11} = 0, \quad (3.20)$$

$$T_{10} = \dot{X}X' = T_{01} = 0 \quad (3.21)$$

donde

$$\dot{X} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad X' = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (3.22)$$

y la ecuación de movimiento (3.11) se reduce a

$$\partial_a \partial^a X^\mu = \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0, \quad (3.23)$$

que es la ecuación de onda para la cuerda bosónica libre.

Ahora pasemos a estudiar el formalismo hamiltoniano de la acción de Polyakov. Aquí encontraremos la transformación de dualidad que es simetría para el hamiltoniano de la teoría.

### 3.1. El formalismo hamiltoniano de la cuerda bosónica.

Para obtener el hamiltoniano de Polyakov, partimos de la acción de Polyakov (3.4) donde conocemos la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{T}{2}(-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad (3.24)$$

que utilizaremos para obtener los momentos canónicos que serán sustituidos en la transformada de Legendre

$$\mathcal{H}_P = \dot{X}^\mu P_\mu + \dot{\gamma}^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta} - \mathcal{L}_P \quad (3.25)$$

que de igual forma como se hizo con la Lagrangiana de Nambu-Goto, definimos los momentos canónico conjugados  $P_\mu$  y  $\Pi_{\alpha\beta}$  como:

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad (3.26)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{\gamma}^{\alpha\beta}}. \quad (3.27)$$

Para ser más explícitos desarrollamos la Lagrangiana (3.24) en cada uno de sus términos, para derivar respecto a  $\dot{X}^\mu$  entonces la lagrangiana desarrollada es:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{T}{2}(-\gamma)^{\frac{1}{2}} [\gamma^{\tau\tau} \dot{X}^2 + 2\gamma^{\tau\sigma} \dot{X}^\mu X'_\mu + \gamma^{\sigma\sigma} X'^2], \quad (3.28)$$

que como vemos no tiene derivadas temporales de la métrica de la hoja mundo, entonces

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \gamma^{\alpha\beta}} = 0, \quad (3.29)$$

de la lagrangiana (3.28) obtenemos el momento canónico conjugado  $P_\mu$  y a partir de la definición (3.26) llegamos a:

$$P_\mu = -T(-\gamma)^{\frac{1}{2}}[\gamma^{\tau\tau} \dot{X}_\mu + \gamma^{\tau\sigma} X'_\mu], \quad (3.30)$$

donde podemos despejar explícitamente a  $\dot{X}_\mu$  en términos de las otras variables. Además con la acción de Polyakov podemos escribir el hamiltoniano en términos de las constricciones de primera clase  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_1$  como

$$\mathcal{H}_P = N\mathcal{H} + N_1\mathcal{H}_1, \quad (3.31)$$

donde  $N$  y  $N_1$  son multiplicadores de Lagrange, conocidos como la función *laps* y la función *schifl* respectivamente.

Al despejar

$$\dot{X}_\mu = \frac{1}{\gamma^{\tau\tau}} \left[ -\frac{P_\mu}{T(-\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \gamma^{\tau\sigma} X'_\mu \right] \quad (3.32)$$

y substituirlo en la definición de la transformada de Legendre (3.25) obtenemos el hamiltoniano de la acción de Polyakov como sigue:

$$\mathcal{H}_P = -\frac{1}{\gamma^{\tau\tau}} \left[ \frac{P^\mu}{T(-\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \gamma^{\tau\sigma} X'^\mu \right] P_\mu + \frac{T}{2} (-\gamma)^{\frac{1}{2}} [\gamma^{\tau\tau} \dot{X}^2 + 2\gamma^{\tau\sigma} \dot{X}^\mu X'_\mu + \gamma^{\sigma\sigma} X'^2], \quad (3.33)$$

donde al substituir la cantidad  $\dot{X}^\mu$  en el Hamiltoniano, y desarrollando para despejar los términos  $P^2$ ,  $X'^2$  y  $X'^\mu P_\mu$  tenemos que el Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}_P = -\frac{(-\gamma)^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^{\tau\tau}} \left[ \frac{P^2}{(-\gamma)T} + (-\gamma)TX'^2 \right] + \frac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}} P_\mu X'^\mu, \quad (3.34)$$

donde se puede ver que a partir de este cálculo se han obtenido explícitamente los multiplicadores de Lagrange  $N$  y  $N_1$  que son:

$$N = -\frac{(-\gamma)^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\tau\tau}} \quad N_1 = \frac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}, \quad (3.35)$$

que están en términos de las componentes de la métrica de la hoja mundo. Además las constricciones de primera clase  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_1$  son

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{P^2}{(-\gamma)T} + (-\gamma)TX'^2 \right) \quad (3.36)$$

$$\mathcal{H}_1 = P_\mu X'^\mu, \quad (3.37)$$

y obedecen el álgebra conforme

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(\sigma), \mathcal{H}(\sigma')\} &= [\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')] \delta'(\sigma - \sigma') \\ \{\mathcal{H}(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')\} &= [\mathcal{H}(\sigma) + \mathcal{H}(\sigma')] \delta'(\sigma - \sigma') \\ \{\mathcal{H}_1(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')\} &= [\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')] \delta'(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \quad (3.38)$$

también conocida como el álgebra de la cuerda. Para conocer con más detalle el formalismo hamiltoniano de la cuerda de Polyakov a nivel clásico ver [18, 19].

Lo que podemos ver del hamiltoniano de Polyakov (3.34), es que este presenta una simetría al intercambiar las variables  $TX^\mu$  por  $P^\mu$ . Esta transformación es conveniente estudiarla como una transformación de dualidad, y desde este punto de vista determinar que simetría guarda esta transformación.

Como se mostro la acción de Polyakov tiene una transformación de simetría que deja invariante el hamiltoniano (3.34) ante el intercambio

$$TX^\mu \longleftrightarrow P^\mu, \quad (3.39)$$

pero aparte tenemos que saber como se transforma la estructura simpléctica ante esta transformación, sabemos que esta teoría tiene paréntesis de Poisson

$$\{X^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')\} = \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.40)$$

y queremos saber si la dualidad (3.39) sobre el hamiltoniano (3.34) es una transformación canónica que preserva el paréntesis de Poisson; para realizar este cálculo es conveniente trabajar en el formalismo  $ADM$  que veremos en el capítulo 7. Pero antes quiero dar una idea acerca de como esta transformación de dualidad es canónica.

Primero el paréntesis de Poisson entre las variables  $X^\mu$  y  $P_\mu$  es

$$\{X^\mu(\sigma), P_\nu(\sigma')\} = \delta_\nu^\mu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma'), \quad (3.41)$$

donde al hacer el cambio de la transformación de dualidad implementada por (3.39) obtengo

$$\{P^\mu(\sigma), X'_\nu(\sigma')\} = -\delta_\nu^\mu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma'), \quad (3.42)$$

el cual parece diferente al anterior debido a que cambia un signo a la estructura simpléctica. Pero al usar las propiedades de la función delta de Dirac, sobre todo la que dice que la derivada de la función delta de Dirac es antisimétrica

$$\delta'_\sigma(\sigma - \sigma') = -\delta'_{\sigma'}(\sigma - \sigma'), \quad (3.43)$$

obtenemos que la estructura simpléctica queda invariante ante el intercambio de las variables, por lo que podemos decir que la transformación es canónica respecto al paréntesis de Poisson.

En el capítulo 7 se estudiará la transformación de dualidad aquí presentada usando acciones de primer orden. Estas acciones de primer orden permiten mayor maniobrabilidad en los campos, permitiendo determinar si la transformación de dualidad implementada es canónica respecto a la estructura simpléctica de Dirac.





## Parte II

# Dualidad en la Teoría electromagnética

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 4

# Teoría electromagnética de primer orden

La dualidad en teoría electromagnética ha sido estudiada de diversas maneras tanto a nivel clásico como a nivel cuántico [14, 21, 30]. Se puede ver como una transformación de autodualidad [13, 15, 16], o como una rotación [28, 29]. Pero hay otra forma de estudiarla a nivel de las constricciones de la teoría, y es formulando una acción de primer orden para la teoría electromagnética.

Las acciones de primer orden se han usado para estudiar diversos modelos, como sistemas gravitacionales, cuerdas y membranas [12]. Estas acciones también se han construido con el fin de estudiar transformaciones de dualidad en  $p$ -formas diferenciales, de hecho la dualidad se genera a partir de acciones madre (acciones de primer orden) de donde se derivan acciones hijas que son duales entre sí [11]. Esta formulación hecha con acciones de primer orden enriquece el estudio de la teoría, debido a que al aumentar el espacio configuración con los campos auxiliares, uno aumenta las simetrías.

Como se vió en el capítulo 1 la teoría electromagnética tiene una simetría que al mismo tiempo es una dualidad que intercambia los campos eléctricos por magnéticos y vice versa; ahora lo que haremos es una generalización de la acción de la teoría electromagnética a una acción de primer orden, que aumenta el número de variables introduciendo campos auxiliares.

Como se dijo en la introducción, la teoría de primer orden tiene dos propiedades que serán relevantes en el análisis de la transformación de dualidad que proponemos. La primera es que para esta acción la transformación de dualidad es una redefinición de campos local, a diferencia de la transformación no local en la teoría electromagnética usual. La segunda propiedad, nos permite realizar el análisis canónico completo en un espacio fase que revela con transparencia la estructura simpléctica subyacente en la teoría de primer orden. Esta estructura jugará un papel relevante en el análisis de las propiedades de la transformación de dualidad.

Los resultados de este capítulo son generalizables a teorías de  $p$ -formas. Analizaremos

mos en detalle el caso electromagnético correspondiente a una teoría de una 1-forma.

En este capítulo nuestro objetivo es presentar una acción de primer orden para la teoría electromagnética y mostrar que ésta es equivalente a la acción electromagnética ya conocida. Además se obtienen las ecuaciones de movimiento de esta acción de primer orden, observando que reproducen la dinámica de Maxwell. Se obtiene el hamiltoniano de esta teoría, en donde calculamos a partir de la definición de los momentos las constricciones primarias. Con estas constricciones se construye el hamiltoniano total, con el cual se estabilizarán las constricciones primarias. Esta estabilización nos lleva a las constricciones secundarias de la teoría. Cerrando con esto el álgebra de constricciones, es decir, ya no hay nuevas constricciones. Con todas las constricciones de la teoría, procedemos a la separación en constricciones de primera y segunda clase. Con las constricciones de segunda clase se construye el paréntesis de Dirac, que es la estructura simpléctica en el espacio fase completo. Este paréntesis de Dirac será comparado con su correspondiente paréntesis de Dirac dual (capítulo 6). Probaremos que el paréntesis de Dirac obtenido es el correcto, al obtener que las constricciones de segunda clase de la teoría son funciones de Casimir para el paréntesis de Dirac. Además se hace la identificación del momento  $P^i$ , que es el momento canónico en el espacio reducido. Por último se procede al conteo de grados de libertad usando la información que tenemos de constricciones de primera y segunda clase.

Ahora pasemos a estudiar la acción de primer orden para la teoría electromagnética.

La acción de primer orden propuesta para la teoría electromagnética es

$$S_M[F_{\mu\nu}, A_\mu] = \int_M \left( \frac{g^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{g^2}{2} A_{[\mu} \partial_{\nu]} F^{\nu\mu} \right) d^4x, \quad (4.1)$$

donde el espacio configuración está definido en términos de las variables  $F_{\mu\nu}$  y  $A_\mu$  como variables independientes. Las ecuaciones de movimiento que esta acción genera son

$$\delta A_\mu : \quad \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \quad (4.2)$$

$$\delta F^{\mu\nu} : \quad F_{\mu\nu} - \partial_{[\mu} A_{\nu]} = 0 \quad (4.3)$$

donde  $[\mu\nu] = \mu\nu - \nu\mu$  es la notación para índices antisimétricos. Sustituyendo (4.3) en (4.2) obtenemos como resultado las ecuaciones de Maxwell ya conocidas. La densidad lagrangiana de esta teoría es

$$\mathcal{L}_{F,A} = \frac{g^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{g^2}{2} A_{[\mu} \partial_{\nu]} F^{\nu\mu} \quad (4.4)$$

que utilizaremos para construir el formalismo hamiltoniano correspondiente a esta teoría, pero antes veamos como la acción de primer orden (4.1) contiene la misma información que la acción electromagnética a nivel de la acción.

Partimos de la acción (4.1) de la cual obtenemos las ecuaciones de movimiento (4.2) y (4.3). Observamos que de la ecuación de movimiento (4.3) se pueden despejar algebráicamente los campos  $F_{\mu\nu}$ . Cuando una variable puede despejarse algebráicamente usando su propia ecuación de movimiento se dice que la variable es *auxiliar*. Las variables auxiliares tienen la propiedad de que pueden sustituirse directamente en la acción sin alterar el contenido dinámico de la teoría. En nuestro caso  $F_{\mu\nu}$  es un campo auxiliar. Utilizando (4.3) y sustituyendo en la acción (4.1) obtenemos

$$S[A_\mu] = \int_M \left( \frac{g^2}{4} \partial_{[\mu} A_{\nu]} \partial^{[\mu} A^{\nu]} - \frac{g^2}{2} \partial_{[\mu} A_{\nu]} \partial^{[\mu} A^{\nu]} \right) d^4x \quad (4.5)$$

de donde se deduce la acción electromagnética

$$S[A_\mu] = - \int_M \left( \frac{g^2}{4} \partial_{[\mu} A_{\nu]} \partial^{[\mu} A^{\nu]} \right) d^4x \quad (4.6)$$

que es una acción de segundo orden, y tiene como variable a  $A_\mu$ .

#### 4.1. Formalismo de Dirac para la acción de primer orden de la teoría electromagnética

Para obtener el hamiltoniano de la teoría electromagnética separamos el tensor  $F_{\mu\nu}$  en su parte temporal y espacial

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij}, \quad (4.7)$$

desarrollando de igual forma la lagrangiana (4.4) en sus componentes espaciales y temporales tenemos

$$\mathcal{L}_{F,A} = \frac{g^2}{4} (F_{ij} F^{ij} + 2F_{0i} F^{0i}) + g^2 [A_0 \partial_i F^{i0} + A_i \partial_j F^{ji} + A_i \partial_0 F^{0i}]. \quad (4.8)$$

El hamiltoniano está definido por

$$H = \int \mathcal{H}(F, A) d^3x \quad (4.9)$$

donde  $\mathcal{H}$  es la densidad hamiltoniana que se obtiene de la transformación de Legendre del formalismo lagrangiano como

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial t})} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial A_\mu}{\partial t})} \frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \mathcal{L} \quad (4.10)$$

que podemos escribir como

$$\mathcal{H}_{F,A} = P^{\mu\nu} \partial_0 F_{\mu\nu} + P^\nu \partial_0 A_\nu - \mathcal{L}_{F,A}, \quad (4.11)$$

y desarrollando en sus componentes obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{F,A} = & 2P_{0i}\partial_0 F^{0i} + P_{ij}\partial_0 F^{ij} + P^0\partial_0 A_0 + P_i\partial_0 A^i \\ & - \frac{g^2}{4}(F_{ij}F^{ij} + 2F_{0i}F^{0i}) - g^2[A_0\partial_i F^{i0} + A_i\partial_j F^{ji} + A_i\partial_0 F^{0i}] \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde los momentos son constricciones primarias de la teoría, y se obtienen a partir de la definición del momento como

$$\begin{aligned} P_{0i} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{F,A}}{\partial(\frac{\partial F_{0i}}{\partial t})} = \frac{g^2}{2} A^i \\ P^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{F,A}}{\partial(\frac{\partial F_{ij}}{\partial t})} = 0 \\ P^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{F,A}}{\partial(\frac{\partial A_0}{\partial t})} = 0 \\ P^i &= \frac{\partial \mathcal{L}_{F,A}}{\partial(\frac{\partial A_i}{\partial t})} = 0 \end{aligned}$$

El hamiltoniano es:

$$H_{F,A} = \int \left( -\frac{g^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - g^2 [A_0\partial_i F^{i0} + A_i\partial_j F^{ji}] \right) d^3x \quad (4.13)$$

y las constricciones primarias de la teoría son:

$$\begin{aligned} P_{0i} - \frac{g^2}{2} A_i &\approx 0 \\ P^{ij} &\approx 0 \\ P^0 &\approx 0 \\ P^i &\approx 0 \end{aligned}$$

que están igualadas débilmente, y después estabilizaremos estas constricciones con el hamiltoniano total para encontrar las constricciones secundarias, y finalmente separar en constricciones de primera y segunda clase utilizando el formalismo de Dirac revisado en el capítulo 3. El hamiltoniano total es

$$\begin{aligned} H_T = \int \left( -\frac{g^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - g^2 [A_0\partial_i F^{i0} + A_i\partial_j F^{ji}] \right. \\ \left. + \lambda^{0i}(P_{0i} + g^2 A_i) + \lambda_{ij} P^{ij} + \lambda_0 P^0 + \lambda_i P^i \right) d^3x \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde  $\lambda_{ij}, \lambda^{0i}, \lambda_0, \lambda_i$  son multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones primarias.

Definimos el paréntesis de Poisson en teoría de campo clásico de igual forma que se hace en la mecánica clásica, a partir de las variables conjugadas de la teoría. En general el paréntesis de Poisson en teoría de campos se escribe como:

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\} = & \int \left( \frac{\delta A(x)}{\delta F_{\mu\nu}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta P^{\mu\nu}(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta P^{\mu\nu}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta F_{\mu\nu}(z)} \right) d^3z \\ & + \int \left( \frac{\delta A(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta P^\mu(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta P^\mu(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta A_\mu(z)} \right) d^3z, \end{aligned} \quad (4.15)$$

y a partir de esta definición del paréntesis de Poisson, escribimos explícitamente el paréntesis de Poisson de cada una de las variables con sus variables conjugadas, obteniendo

$$\begin{aligned} \{A_0(x), P^0(y)\} &= \delta(x-y), & \{F_{ij}(x), P^{nm}(y)\} &= \frac{1}{2} \delta_{ij}^n \delta_{ij}^m \delta(x-y) \\ \{A_i(x), P^j(y)\} &= \delta_i^j \delta(x-y), & \{F_{0i}(x), P^{0j}(y)\} &= \delta_i^j \delta(x-y), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $\delta_{[m}^k \delta_{n]}^l$  está definido como

$$\delta_{[m}^k \delta_{n]}^l = \delta_m^k \delta_n^l - \delta_n^k \delta_m^l. \quad (4.17)$$

Ahora podemos utilizar esta información para estabilizar las constricciones primarias con el hamiltoniano total y ver si aparecen nuevas constricciones.

## 4.2. Estabilización de las constricciones primarias

Las constricciones primarias deben ser estabilizadas con el hamiltoniano total (4.14) con el fin de saber si no hay nuevas constricciones en la teoría; las constricciones que lleguen a salir de las estabilizaciones se llaman constricciones secundarias. Las estabilizaciones con las constricciones  $F_{0i} - \frac{g^2}{2} A_i$  y  $P_i$  no dan ninguna construcción nueva, de hecho despejan los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^i, \lambda^{0i}$ . Las estabilizaciones de las constricciones  $P^0$  y  $P^{ij}$  son

$$\{P^0, H_T\} = -g^2 \partial_i F^{i0} \{P^0, A_0\} = g^2 \partial_i F^{i0} \approx 0 \quad (4.18)$$

y

$$\begin{aligned}
\{P_{rs}, H_T\} &= -\frac{g^2}{4}\{P_{rs}, F_{ij}F^{ij}\} - g^2 A_i\{P_{rs}, \partial_j F^{ji}\} \\
&= -\frac{g^2}{2}\left[F_{ij}\{P_{rs}, F^{ij}\} - g^2 \partial_j A_i\{P_{rs}, F^{ji}\}\right] \\
&= -\frac{g^2}{2}\left[F_{ij}\left(-\frac{1}{2}\delta_r^i \delta_s^j\right) + g^2 \partial_j A_i\left(-\frac{1}{2}\delta_r^i \delta_s^j\right)\right] \\
&= \frac{g^2}{2}\left[F_{rs} + (\delta_r^i \delta_s^j - \delta_r^j \delta_s^i)\partial_j A_i\right] \\
&= \frac{g^2}{2}\left[F_{rs} + (\partial_s A_r - \partial_r A_s)\right] \\
&= \frac{g^2}{2}\left[F_{rs} - \partial_{[r} A_{s]}\right] \approx 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

respectivamente. Por tanto, las constricciones secundarias obtenidas son

$$F_{nm} - \partial_{[n} A_{m]} \approx 0 \tag{4.20}$$

y

$$g^2 \partial_i F^{i0} \approx 0 \tag{4.21}$$

Al estabilizar estas constricciones secundarias usando el hamiltoniano total (4.14) no obtenemos nueva información sobre la superficie de constricción.

### 4.3. Separación en constricciones de primera y segunda clase.

Con las constricciones secundarias obtenidas en la sección anterior, completamos todo el conjunto de constricciones que tiene esta teoría. Para separar en primera y segunda clase el conjunto total de constricciones obtenidas observamos que es necesario redefinir las constricciones secundarias (4.20) y (4.21) de tal forma que las constricciones de primera clase son

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= P^0 \approx 0 \\
\phi_2 &= g^2 \partial_i F^{0i} + 2\partial_i P^i \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

y las constricciones de segunda clase son:

$$\begin{aligned}
\chi_1^{ij} &= P^{ij} \approx 0 \\
\chi_{2nm} &= F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{om]} \approx 0 \\
\chi_3^i &= P^i \approx 0 \\
\chi_{4j} &= P_{0j} - \frac{g^2}{2} A_j \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$



Estas constricciones definen la superficie de constricción de la teoría.

#### 4.4. El paréntesis de Dirac

La construcción del paréntesis de Dirac se hace usando las constricciones de segunda clase

$$\begin{aligned} \{\chi_1^i(x), \chi_{2nm}(y)\} &= -\frac{1}{2}\delta_{[n}^i\delta_{m]}^j\delta(x-y) & \{\chi_{2nm}(x), \chi_1^i(y)\} &= \frac{1}{2}\delta_{[n}^i\delta_{m]}^j\delta(x-y) \\ \{\chi_3^i(x), \chi_{4j}(y)\} &= \frac{g^2}{2}\delta_j^i\delta(x-y) & \{\chi_{4j}(x), \chi_3^i(y)\} &= -\frac{g^2}{2}\delta_j^i\delta(x-y). \end{aligned} \quad (4.24)$$

La matriz que se obtiene al hacer el paréntesis de Poisson entre las constricciones de segunda clase  $C^{ab}$  (ver capítulo 3) y su inversa  $C^{ab}$  se calculan como sigue

$$C^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\delta_{[n}^i\delta_{m]}^j\delta(x, y) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\delta_{[n}^i\delta_{m]}^j\delta(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g^2}{2}\delta_j^i\delta(x, y) \\ 0 & 0 & -\frac{g^2}{2}\delta_j^i\delta(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

utilizando como notación simplificada de la delta de Dirac  $\delta(x-y) = \delta(x, y)$ . La matriz inversa  $C^{ab}$  asociada es

$$C^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\delta_{[n}^i\delta_{j]}^m\delta(x, y) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\delta_{[n}^i\delta_{j]}^m\delta(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{g^2}\delta_i^j\delta(x, y) \\ 0 & 0 & \frac{2}{g^2}\delta_i^j\delta(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora construimos el paréntesis de Dirac  $\{A, B\}^*$  el cual se definió en el capítulo 3 como

$$\{A(x), B(y)\}^* = \{A(x), B(y)\} - \int \int \{A(x), \chi_a(x')\} C^{ab}(x', y') \{\chi_b(y'), B(y)\} dx' dy'$$

con las constricciones obtenidas tenemos que el paréntesis de Dirac de la teoría electromagnética de primer orden es:

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}^* &= \{A(x), B(y)\} \\ &- \int \int \{A(x), P^{ij}(x')\} \left\{ \frac{1}{2}\delta_{[i}^n\delta_{j]}^m\delta(x', y') \right\} \left\{ F_{nm} - \frac{2}{g^2}\partial_{[n}P_{om]}(y'), B(y) \right\} dx' dy' \\ &+ \int \int \{A(x), F_{nm} - \frac{2}{g^2}\partial_{[n}P_{om]}(x')\} \left\{ \frac{1}{2}\delta_{[i}^n\delta_{j]}^m\delta(x', y') \right\} \{P^{ij}(y'), B(y)\} dx' dy' \\ &- \int \int \{A(x), P^i(x')\} \left\{ -\frac{2}{g^2}\delta_i^j\delta(x', y') \right\} \left\{ P_{0j} - \frac{g^2}{2}A_j(y'), B(y) \right\} dx' dy' \\ &- \int \int \{A(x), P_{0j} - \frac{g^2}{2}A_j(x')\} \left\{ \frac{2}{g^2}\delta_i^j\delta(x', y') \right\} \{P^i(y'), B(y)\} dx' dy' \quad (4.25) \end{aligned}$$

## 4.5. Consistencia del paréntesis de Dirac

El paréntesis de Dirac conmuta con todas las constricciones de segunda clase por construcción. Probemos esto con el paréntesis que hemos obtenido.

Comenzamos con la constricción de segunda clase  $P^{rs} = 0$

$$\begin{aligned}
 \{P^{rs}, B\}^* &= \{P^{rs}, B\} + \{P^{rs}, F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{om]}\} (\frac{1}{2} \delta_{[i}^n \delta_{j]}^m) \{P^{ij}, B\} \\
 &= \{P^{rs}, B\} - \frac{1}{2} \delta_{[n}^r \delta_{m]}^s (\frac{1}{2} \delta_{[i}^n \delta_{j]}^m) \{P^{ij}, B\} \\
 &= \{P^{rs}, B\} - \frac{1}{2} \delta_{[i}^r \delta_{j]}^s \{P^{ij}, B\} \\
 &= \{P^{rs}, B\} - \{P^{rs}, B\} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde hemos omitido todas las integrales funcionales que actúan sobre las variables de la teoría para ahorrar espacio y hacer más claros los cálculos, tomando en consideración que las integrales funcionales ya están hechas en cada paréntesis.

El mismo cálculo con la constricción  $F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]} = 0$  resulta

$$\begin{aligned}
 A &= \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, B\}^* \\
 &= \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, B\} - \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, P^{ij}\} (\frac{1}{2} \delta_{[i}^n \delta_{j]}^m) \{F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{om]}, B\} \\
 &= \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, B\} - \{F_{rs}, P^{ij}\} (\frac{1}{2} \delta_{[i}^n \delta_{j]}^m) \{F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{om]}, B\} \\
 &= \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, B\} - \frac{1}{2} \delta_{[r}^i \delta_{s]}^j (\frac{1}{2} \delta_{[i}^n \delta_{j]}^m) \{F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{om]}, B\} \\
 &= \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, B\} - \frac{1}{2} \delta_{[r}^n \delta_{s]}^m \{F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{om]}, B\} \\
 &= \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, B\} - \{F_{rs} - \frac{2}{g^2} \partial_{[r} P_{os]}, B\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

lo que muestra que el paréntesis construido es consistente.

Para la constricción  $P^r = 0$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \{P^r, B\}^* &= \{P^r, B\} + \{P^r, P_{0j} - \frac{g^2}{2} A_j\} (-\frac{2}{g^2} \delta_i^j) \{P^i, B\} \\
 &= \{P^r, B\} + \{P^r, A_j\} \{P^j, B\} \\
 &= \{P^r, B\} - \delta_j^r \{P^j, B\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

que satisface también la propiedad requerida. Por último usando la constricción de

segunda clase  $P_{0r} - \frac{g^2}{2} A_r = 0$

$$\begin{aligned}
 B &= \{P_{0r} - \frac{g^2}{2} A_r, B\}^* \\
 &= \{P_{0r} - \frac{g^2}{2} A_r, B\} - \{P_{0r} - \frac{g^2}{2} A_r, P^i\} (\frac{1}{g^2} \delta_i^j) \{P_{0j} - \frac{g^2}{2} A_j, B\} \\
 &= \{P_{0r} - \frac{g^2}{2} A_r, B\} - \{A_r, P^i\} \{P_{0i} - \frac{g^2}{2} A_i, B\} \\
 &= \{P_{0r} - \frac{g^2}{2} A_r, B\} - \{P_{0r} - \frac{g^2}{2} A_r, B\} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Con esto hemos mostrado que el paréntesis de Dirac construido satisface la propiedad de que las constricciones de segunda clase son funciones de Casimir de este paréntesis. Esta propiedad es muy importante debido a que gracias a ella podemos resolver las constricciones de segunda clase y la estructura simpléctica de la teoría no se altera.

Ya que probamos que el paréntesis de Dirac conmuta con todas las constricciones de segunda clase, calcularemos ahora los paréntesis de Dirac de las variables relevantes para uso posterior

$$\begin{aligned}
 \{A_0(x), P^0(y)\}^* &= \delta(x, y), & \{F_{ij}(x), P^{nm}(y)\}^* &= 0 \\
 \{A_i(x), P^j(y)\}^* &= 0, & \{F_{0i}(x), P^{0j}(y)\}^* &= \delta_i^j \delta(x, y),
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

el cual nos da información sobre la estructura simpléctica de la teoría, proyectada sobre la superficie de restricción. Ahora el paréntesis de Dirac entre las variables dinámicas  $A_i$  y  $F^{0i}$  es

$$\{A_i, F^{0j}\}^* = -\frac{2}{g^2} \delta_i^j, \tag{4.31}$$

que es de gran importancia, ya que me dice que la acción de primer orden de la teoría electromagnética tiene como estructura simpléctica de Dirac a

$$\{A_i, P^j\}^* = \delta_i^j \tag{4.32}$$

donde hemos identificado la variable  $P^j = -\frac{g^2}{2} F^{0j}$ , que nos será de gran ayuda para determinar la canonicidad de la transformación de dualidad cuando hagamos los mismos cálculos para la acción de primer orden dual.

## 4.6. Conteo de los grados de libertad

El conteo de los grados de libertad se obtiene de las constricciones de primera y segunda clase de la teoría como sigue

$$g.l. = (e.f.) - 2(1.c.) - (2.c.) \tag{4.33}$$

donde (*g.l.*) significa grado de libertad, *c.f.* espacio fase, 1.c. constricciones de primera clase y 2.c. constricciones de segunda clase.

Ahora la teoría electromagnética de primer orden tiene 20 dimensiones en el espacio fase, son 2 constricciones de primera clase y 12 constricciones de segunda clase, por lo tanto los grados de libertad son

$$g.l. = 20 - 2(2) - 12 = 4 \quad (4.34)$$

Esto implica 2 grados de libertad en el espacio de configuración, que corresponden a los grados de libertad del fotón.

## Capítulo 5

# Teoría electromagnética dual de primer orden

En este capítulo construiremos la acción dual asociada a la acción de primer orden construida y analizada usando el formalismo de Dirac en el capítulo anterior. El método que usaremos para construirla es un tanto inusual. A diferencia de la visión usual de la dualidad como una transformación cuyo efecto es intercambiar las ecuaciones de movimiento con las identidades de Bianchi asociadas, nuestra propuesta consiste en considerar la transformación de dualidad como una simple redefinición de campos. Esto quiere decir que al espacio de configuración de la acción de primer orden (4.1) le asociaremos un nuevo espacio configuración "dual" cuyas variables serán  $*F$  y  $\Lambda$ . La nueva acción así obtenida será la acción de primer orden dual. Es importante señalar que esta definición de la acción dual coincide, al reducir el espacio fase de manera apropiada, con la definición de la acción dual en el formalismo de Maxwell usual. La demostración detallada de esta afirmación será el tema de este capítulo.

Las ecuaciones de movimiento de la teoría dual así construida son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de la teoría original. De hecho, resultan ser combinaciones lineales de las ecuaciones de movimiento de la teoría original en el espacio definido por las variables  $F$  y  $\Lambda$ . Sin embargo, al reducir los campos auxiliares  $F$  y obtener así las ecuaciones de Maxwell las dos teorías tienen exactamente las mismas ecuaciones de movimiento. Esto quiere decir que la diferencia entre la teoría original y su dual es debida a su distinto contenido de campos auxiliares.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos estas acciones tienen propiedades sorprendentes, como el hecho de que el régimen de acoplamiento fuerte en un caso sea el régimen de acoplamiento débil en el otro. Nosotros no analizaremos las interesantes propiedades cuánticas de la transformación de dualidad.

Entre los resultados obtenidos en este capítulo podemos destacar: a) la construcción sistemática de la superficie de restricción dual b) La obtención del paréntesis de Dirac dual. c) Consistencia en el número de grados de libertad para la acción dual.

## 5.1. Formulación de las acciones de primer orden para la teoría electromagnética y su dualidad.

La dualidad S en la teoría electromagnética es una dualidad de Hodge entre 2-formas diferenciales  $F_{\mu\nu}$ , en que un tensor es transformado a otro por medio de

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (5.1)$$

donde  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita de rango cuatro

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si es permutación par de 0123} \\ -1 & \text{si es permutación impar de 0123} \\ 0 & \text{si se repite un índice,} \end{cases}$$

y el símbolo  $\star$  señala la operación de dualidad. Esta operación es muy curiosa, ya que al aplicarla dos veces al mismo tensor regresamos el mismo tensor pero con el signo opuesto

$$\begin{aligned} \star\star F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2!} \epsilon^{\star\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{2!} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} (-2!) \delta_{[\rho}^{\mu} \delta_{\sigma]}^{\nu} F_{\rho\sigma} = -F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $\frac{1}{2} \delta_{[\rho}^{\mu} \delta_{\sigma]}^{\nu} = \frac{1}{2} (\delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \delta_{\sigma}^{\mu})$ .

Como se ha visto la dualidad electromagnética cambia el campo eléctrico por el magnético y vice versa como se puede ver claramente del tensor  $F_{\mu\nu}$  y su dual  $\star F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y desarrollando el tensor dual de  $F_{\mu\nu}$  y  $F^{\mu\nu}$  obtenemos:

$$\star F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \star F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

que muestra la dualidad de una forma muy clara.

## 5.2. Las acción de primer orden y su dual como una redefinición de campos.

Lo que haremos en esta sección es transformar la acción de primer orden (4.1) en su respectiva acción de primer orden dual, para obtenerla utilizaremos la dualidad antes mencionada como la siguiente redefinición de campos

$$G^{\mu\nu} = g^2 \star F^{\mu\nu} \quad \star G_{\mu\nu} = -g^2 F_{\mu\nu} \quad (5.3)$$

de donde obtendremos la acción electromagnética de primer orden dual con la simple sustitución de la redefinición de campos (5.3).

Además hay que tomar en cuenta como transforma el multiplicador de lagrange  $A_\mu$ , la transformación de dualidad que me lleva de  $A_\mu$  a  $\Lambda_\mu$  es

$$\Lambda_\mu \longleftrightarrow g^2 A_\mu,$$

que nos permitirá obtener la acción de primer orden dual.

Ahora veamos cual es la acción de primer orden dual al sustituir la redefinición de campos (5.3) en la acción de primer orden (4.1)

$$\begin{aligned} S_M[F_{\mu\nu}, A_\mu] &= \int_M \left( \frac{g^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{g^2}{2} A_{[\mu} \partial_{\nu]} F^{\nu\mu} \right) d^4x \\ &= \int_M \left( \frac{g^2}{4} \left(-\frac{1}{g^2} \star G_{\mu\nu}\right) \left(-\frac{1}{g^2} \star G^{\mu\nu}\right) + \frac{g^2}{2} \frac{\Lambda_{[\mu} \partial_{\nu]} \left(-\frac{1}{g^2} \star G^{\nu\mu}\right)}{g^2} \right) d^4x \\ &= \int_M \left( -\frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2g^2} \frac{1}{2!} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \Lambda_{[\mu} \partial_{\nu]} G_{\alpha\beta} \right) d^4x \end{aligned} \quad (5.4)$$

por lo tanto la acción de primer orden dual de la acción (4.1) es

$$\tilde{S}_M[G_{\mu\nu}, \Lambda_\mu] = - \int_M \left( \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2g^2} \frac{1}{2!} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \Lambda_{[\mu} \partial_{\nu]} G_{\alpha\beta} \right) d^4x, \quad (5.5)$$

y si aplico la transformación de dualidad a la acción (5.5) vuelvo a la acción (4.1) como se esperaba. La transformación de dualidad queda así implementada a través de una redefinición de campos.

La acción de primer orden dual para la teoría electromagnética que hemos obtenido (5.5) tiene asociadas las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\delta \Lambda_\mu : \quad \partial_\nu \star G^{\nu\mu} = 0 \quad (5.6)$$

$$\delta G^{\mu\nu} : \quad G^{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_{[\alpha} \Lambda_{\beta]} \quad (5.7)$$

La lagrangiana de la teoría dual

$$\mathcal{L}_{G,\Lambda} = - \left( \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2g^2} \frac{1}{2!} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \Lambda_{[\mu} \partial_{\nu]} G_{\alpha\beta} \right), \quad (5.8)$$

será utilizada para obtener el formalismo hamiltoniano de la teoría. Veamos primero la equivalencia que hay entre esta acción y la acción electromagnética usual.

### 5.3. Equivalencia de la acción de primer orden dual.

Primero partimos de la acción dual (5.5) de la cual obtengo las ecuaciones de movimiento (5.6) y (5.7), donde observamos que de la ecuación de movimiento (5.7) se puede despejar algebraicamente a  $G_{\mu\nu}$ . Por tanto es un campo auxiliar. Sustituyendo (5.7) en la acción (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_M[G_{\mu\nu}, \Lambda_\mu] &= - \int_M \left( \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2g^2} \frac{1}{2!} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \Lambda_{[\mu} \partial_{\nu]} G_{\alpha\beta} \right) d^4x \\
 &= - \int_M \left( \frac{1}{4g^2} \left( \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]} \right) \left( \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \partial^{[\rho} \Lambda^{\sigma]} \right) - \frac{1}{2g^2} \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_{[\alpha} \Lambda_{\beta]} \left( \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^{[\rho} \Lambda^{\sigma]} \right) \right) d^4x \\
 &= - \int_M \left( \frac{1}{4g^2} \frac{1}{2!} \frac{(-2!)}{2!} \delta_{[\rho}^{\mu} \delta_{\sigma]}^{\nu} \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]} \partial^{[\rho} \Lambda^{\sigma]} - \frac{1}{2g^2} \frac{(-2!)}{2!} \delta_{[\rho}^{\mu} \delta_{\sigma]}^{\nu} \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]} \partial^{[\rho} \Lambda^{\sigma]} \right) d^4x \\
 &= - \int_M \left( - \frac{1}{4g^2} \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]} \partial^{[\mu} \Lambda^{\nu]} + \frac{1}{2g^2} \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]} \partial^{[\mu} \Lambda^{\nu]} \right) d^4x, \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

de donde se deduce que la acción se reduce a

$$\tilde{S}_M[\Lambda_\mu] = - \int_M \left( \frac{1}{4g^2} \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]} \partial^{[\mu} \Lambda^{\nu]} \right) d^4x, \tag{5.10}$$

que como vemos es la misma acción electromagnética (4.6) que se obtuvo en el capítulo anterior si identificamos

$$\Lambda_\mu \longleftrightarrow g^2 A_\mu, \tag{5.11}$$

como la transformación de dualidad para el campo  $A_\mu$ . Esta transformación intercambia la constante de acoplamiento por su inverso, de tal forma que la dualidad intercambia una teoría de interacción fuerte, por una de interacción débil.

Con esto hemos probado que la acción de primer orden dual reducida, después de eliminar  $G_{\mu\nu}$  como campo auxiliar, es la misma que la acción de primer orden reducida original.

### 5.4. El Hamiltoniano de la acción de primer orden dual.

Para obtener el Hamiltoniano de esta teoría procedemos de la misma manera que en el caso de la acción original (4.1) separando el tensor  $G_{\mu\nu}$  en sus componentes temporales y espaciales

$$G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = 2G_{0i} G^{0i} + G_{ij} G^{ij}. \tag{5.12}$$



Por otra parte, desarrollando la densidad lagrangiana (5.8) en sus componentes espaciales y temporales tenemos

$$\tilde{\mathcal{L}}_{G,\Lambda} = -\frac{1}{4g^2} (2G_{0i}G^{0i} + G_{ij}G^{ij}) - \frac{1}{2!g^2} (\epsilon^{0ijk}\Lambda_i\partial_0G_{jk} \quad (5.13)$$

$$+ \epsilon^{0ijk}\Lambda_0\partial_iG_{jk} - \epsilon^{ij0k}\Lambda_j\partial_iG_{0k}), \quad (5.14)$$

donde es más fácil ver cuales son las "velocidades" de esta teoría, y podemos obtener el Hamiltoniano, que esta definido por

$$\tilde{H}_{G,\Lambda} = \int \left( \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2g^2} \frac{1}{2!} \epsilon^{i\mu\alpha\beta} \Lambda_{[\mu}\partial_{\nu]}G_{\alpha\beta} \right) d^3x \quad (5.15)$$

que escrito en sus componenetes espaciales y temporales es

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{G,\Lambda} &= \int \left( \frac{1}{4g^2} (2G_{0i}G^{0i} + G_{ij}G^{ij}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2!g^2} (\epsilon^{0ijk}\Lambda_0\partial_iG_{jk} + \epsilon^{ij0k}\Lambda_j\partial_iG_{0k}) \right) d^3x, \end{aligned} \quad (5.16)$$

Esta densidad hamiltoniana también se puede escribir en términos de su definición como transformación de Legendre del espacio de configuración al espacio fase, que me define las variables canónicas de la teoría. Los momentos asociados a la función lagrangiana (5.13) son

$$\begin{aligned} \Pi^{0i} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{G,\Lambda}}{\partial \left( \frac{\partial G_{0i}}{\partial t} \right)} = 0 \\ \Pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{G,\Lambda}}{\partial \left( \frac{\partial G_{ij}}{\partial t} \right)} = -\frac{1}{2!g^2} \epsilon^{okij} \Lambda_k \\ \Pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{G,\Lambda}}{\partial \left( \frac{\partial \Lambda^0}{\partial t} \right)} = 0 \\ \Pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}_{G,\Lambda}}{\partial \left( \frac{\partial \Lambda^i}{\partial t} \right)} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

de donde obtenemos las constricciones primarias de la teoría dual de primer orden.

Las constricciones primarias son:

$$\begin{aligned} \Pi^{0i} &\approx 0 \\ \Pi^{ij} + \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{okij} \Lambda_k &\approx 0 \\ \Pi^0 &\approx 0 \\ \Pi^i &\approx 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Las constricciones secundarias se obtienen estabilizando estas constricciones con el Hamiltoniano total. El hamiltoniano total es

$$\begin{aligned}\tilde{H}_T &= \frac{1}{4g^2} (2G_{0i}G^{0i} + G_{ij}G^{ij}) \\ &- \frac{1}{2!g^2} (\epsilon^{0ijk} \Lambda_0 \partial_i G_{jk} + \epsilon^{ij0k} \Lambda_j \partial_i G_{0k}) \\ &+ \lambda_{0i} \Pi^{0i} + \lambda_{ij} (\Pi^{ij} + \frac{1}{2!} \epsilon^{kij} \Lambda_k) + \lambda_0 \Pi^0 + \lambda_i \Pi^i.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Definimos el paréntesis de Poisson de igual forma que en el caso de la teoría original

$$\begin{aligned}\{A(x), B(y)\} &= \int \left( \frac{\delta A(x)}{\delta G_{\mu\nu}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \Pi^{\mu\nu}(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \Pi^{\mu\nu}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta G_{\mu\nu}(z)} \right) d^3 z \\ &+ \int \left( \frac{\delta A(x)}{\delta \Lambda_\mu(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \Pi^\mu(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \Pi^\mu(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \Lambda_\mu(z)} \right) d^3 z,\end{aligned}\quad (5.20)$$

de tal forma que el paréntesis de Poisson entre las variables conjugadas es

$$\begin{aligned}\{\Lambda_0(x), \Pi^0(y)\} &= \delta(x, y), & \{G_{ij}(x), \Pi^{nm}(y)\} &= \frac{1}{2} \delta_i^n \delta_j^m \delta(x, y) \\ \{\Lambda_i(x), \Pi^j(y)\} &= \delta_i^j \delta(x, y), & \{G_{0i}(x), \Pi^{0j}(y)\} &= \delta_i^j \delta(x, y),\end{aligned}\quad (5.21)$$

entonces ahora podemos utilizar esta información para estabilizar las constricciones  $\Pi^0$  y  $\Pi^{0i}$  con ayuda del Hamiltoniano total (5.19).

## 5.5. Estabilización de las constricciones primarias.

Las constricciones primarias deben ser estabilizadas con el Hamiltoniano total con el fin de saber si no hay nuevas constricciones en la teoría. Las estabilizaciones con  $\Pi^0$  y  $\Pi^{0i}$  son

$$\begin{aligned}\{\Pi^0, \mathcal{H}_T\} &= \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0ijk} \partial_i G_{jk} + \partial_i \Pi^i \\ \{\Pi^{0i}, \mathcal{H}_T\} &= -\frac{1}{g^2} G^{0i} - \partial_j \Pi^{ij}.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Las estabilizaciones del resto de constricciones primarias no da nueva información sobre la superficie de restricción (algunas permiten el despeje de multiplicadores de Lagrange y otras simplemente no dan nueva información). La estabilización de las constricciones secundarias (5.22) no da nueva información sobre la superficie de restricción. Por tanto las constricciones de la teoría son (5.18) y (5.22).

Ahora procedemos a dividir las constricciones en primera y segunda clase. Para ello es necesario, como en el caso de la acción original, redefinir las constricciones (5.22). La redefinición propuesta es

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1 &= \Pi^0 \approx 0 \\ \bar{\phi}_2 &= \frac{1}{2!} \epsilon^{0ijk} \partial_i G_{jk} + \partial_i \Pi^i \approx 0.\end{aligned}\quad (5.23)$$

que son las constricciones de primera clase. Las constricciones restantes son de segunda clase

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_1^i &= \Pi^i \approx 0 \\ \bar{\chi}_2^{ij} &= \Pi^{ij} + \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0kij} \Lambda_k \approx 0 \\ \bar{\chi}_{3i} &= \Pi_{0i} \approx 0 \\ \bar{\chi}_4^i &= G^{0i} + g^2 \partial_k \Pi^{ik} \approx 0,\end{aligned}\quad (5.24)$$

con las que se construye el paréntesis de Dirac.

## 5.6. El paréntesis de Dirac de la teoría dual.

Para construir el paréntesis de Dirac, calculamos la matriz  $C_{ab}$  a partir de la construcción hecha en el capítulo 3 con las constricciones de segunda clase.

Para ello debemos calcular los paréntesis de Poisson entre todas las constricciones de segunda clase. Los que resultan distintos de cero son

$$\begin{aligned}\{\bar{\chi}_1^i(x), \bar{\chi}_2^{lm}(y)\} &= -\frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0ilm} \delta(x, y), & \{\bar{\chi}_2^{lm}(x), \bar{\chi}_1^i(y)\} &= \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0ilm} \delta(x, y), \\ \{\bar{\chi}_{3i}(x), \bar{\chi}_4^j(y)\} &= -\delta_i^j \delta(x, y), & \{\bar{\chi}_4^i(x), \bar{\chi}_{3i}(y)\} &= \delta_i^i \delta(x, y),\end{aligned}\quad (5.25)$$

que son los elementos de la matriz de la matriz directa que se usará para obtener el paréntesis de Dirac. Esta matriz es

$$\bar{C}_{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0kij} \delta(x, y) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0kij} \delta(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_n^k \delta(x, y) \\ 0 & 0 & \delta_n^k \delta(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

y su matriz inversa es  $C^{ab}$  dada por

$$\bar{C}^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -g^2 \epsilon_{0kij} \delta(x, y) & 0 & 0 \\ g^2 \epsilon_{0kij} \delta(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_i^n \delta(x, y) \\ 0 & 0 & -\delta_i^n \delta(x, y) & 0 \end{pmatrix}\quad (5.26)$$

que es la que utilizaremos para construir el paréntesis de Dirac.

El paréntesis de Dirac  $\{A, B\}^*$  está definido por:

$$\{A(x), B(y)\}^* = \{A(x), B(y)\} - \int \int \{A(x), \chi_a(x')\} C^{ab}(x', y') \{\chi_b(y'), B(y)\} dx' dy'$$

donde la matriz  $C^{ab}$  está dada por (5.26). De manera explícita este paréntesis es

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}^* &= \{A(x), B(y)\} \\ &- \int \int \{A(x), \Pi^i(x')\} (-g^2 \epsilon_{0iij} \delta(x', y')) \{\Pi^{ij} - \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0kij} \Lambda_k(y'), B(y)\} dx' dy' \\ &- \int \int \{A(x), \Pi^{ij} - \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0kij} \Lambda_k(x')\} (g^2 \epsilon_{0iij} \delta(x', y')) \{\Pi^i(y'), B(y)\} dx' dy' \\ &- \int \int \{A(x), \Pi_{0i}(x')\} (\delta_i^i \delta(x', y')) \{G^{0i} + g^2 \partial_k \Pi^{ik}(y'), B(y)\} dx' dy' \\ &- \int \int \{A(x), G^{0i} + g^2 \partial_k \Pi^{ik}(x')\} (-\delta_i^i \delta(x', y')) \{\Pi_{0i}(y'), B(y)\} dx' dy', \end{aligned} \quad (5.27)$$

Hemos checado que este paréntesis de Dirac cumple correctamente con la propiedad de que las constricciones de segunda clase son funciones de Casimir de este paréntesis.

El paréntesis de Dirac entre las variables  $\Lambda_i$  y  $G_{jk}$  es el siguiente:

$$\{\Lambda_i(x), G_{jk}(y)\}^* = -g^2 \epsilon_{0ijk} \delta(x - y) \quad (5.28)$$

que podemos arreglar como

$$\{\Lambda_i(x), -\frac{1}{g^2} G_{jk}(y)\}^* = \epsilon_{0ijk} \delta(x - y), \quad (5.29)$$

el cual me da información de la estructura simpléctica dual. Al compararlo con el resultado del capítulo anterior (4.32) encontramos que la estructura simpléctica en el paréntesis de Dirac no se conserva, ya que me cambia una  $\delta_i^i$  por una  $\epsilon_{0ijl}$ , y por lo tanto la transformación de dualidad es no canónica respecto al paréntesis de Dirac.

En el siguiente capítulo abordaremos con más detalle este problema, y analizaremos cómo se comporta la transformación de dualidad con las acciones de primer orden a nivel del paréntesis de Dirac, y posteriormente reduciremos el espacio resolviendo las constricciones primarias y eliminando los momentos, encontrando que en este espacio reducido la transformación es canónica.

## 5.7. Conteo de los grados de libertad

Como en el caso anterior el conteo de los grados de libertad se obtiene de las constricciones de primera y segunda clase de la teoría como sigue:

$$g.l. = (e.f.) - 2(1.c.) - (2.c.) \quad (5.30)$$

donde (*g.l.*) significa grado de libertad, *e.f.* espacio fase, *1.c.* constrictciones de primera clase y *2.c.* constrictciones de segunda clase.

Ahora la teoría electromagnética dual de primer orden tiene 20 dimensiones en el espacio fase, 2 constrictciones de primera clase y 12 constrictciones de segunda clase, por lo tanto los grados de libertad son

$$g.l. = 20 - 2(2) - 12 = 4 \quad (5.31)$$

que corresponden a 2 grados de libertad en el espacio de configuración. Como vemos son los grados de libertad del fotón. Por tanto la teoría original y su dual contienen la misma física, ya que ambas se reproducen la acción electromagnética y ambas dan los grados de libertad correctos para la descripción del fotón.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 6

# Comparación entre la Teoría original y la Teoría Dual

En los dos capítulos precedentes hemos analizado en detalle la teoría electromagnética en su versión de primer orden y la teoría dual asociada. En particular hemos encontrado, usando el formalismo de Dirac revisado en el capítulo 3, la superficie de constricción asociada a la teoría original y la superficie de constricción dual asociada a la acción dual. La primera observación que salta a la vista es que las superficies de constricción son diferentes (como superficie geométrica en el espacio fase respectivo). Esto tiene como consecuencia que los paréntesis de Dirac sean distintos. Por otro lado, hemos mostrado que tanto la teoría electromagnética original como su dual describen la dinámica del fotón (dos grados de libertad físicos). En este capítulo estudiaremos la relación entre la teoría original y su dual, obteniendo como se mapea una superficie de constricción en otra a partir de una transformación canónica.

Analizaremos la transformación de dualidad en el espacio fase completo. Es conocido que toda transformación puntual en el espacio de configuración puede extenderse como una transformación canónica en el espacio fase correspondiente [8]. Desde esta perspectiva la transformación de dualidad así extendida es una transformación canónica respecto a la estructura simpléctica original del espacio fase. Este modo de extender la transformación puntual (6.2) en el espacio configuración es natural en el sentido de que los momentos de la teoría original y la dual están relacionados precisamente a través de esta transformación canónica.

La observación crucial es que esta transformación canónica, NO es canónica respecto al paréntesis de Dirac ya que éste se modifica debido a que la superficie de constricción cambia ante la transformación canónica, pero sí lo es respecto a la estructura simpléctica del paréntesis de Poisson.

Existen al menos dos caminos para reducir la teoría, y caer dentro del esquema de la teoría de Maxwell usual. Uno es eliminar todos los momentos y regresar a la acción de primer orden. Esta eliminación se realiza usando las ecuaciones de movimiento para los momentos y despejando algebraicamente los momentos. Estos momentos pueden

sustituirse nuevamente en la lagrangiana para obtener la lagrangiana reducida. Ante esta reducción los paréntesis de Dirac reducidos respectivos son distintos como se esperaba del argumento general esbozado en el párrafo anterior. Tenemos entonces un claro ejemplo de que la transformación de dualidad es no canónica (altera la estructura simpléctica).

Otra forma de reducir la teoría es eliminar la variable auxiliar  $F_{\mu\nu}$  y su momento conjugado de modo que queda la teoría hamiltoniana de la acción de Maxwell usual. Aterrizamos así en terreno conocido. Es bien conocido que la transformación de dualidad en la teoría hamiltoniana de Maxwell es una transformación canónica no local. Estos resultados están de acuerdo con los resultados obtenidos en esta tesis como mostraremos en este capítulo.

En este capítulo construiremos la transformación canónica que relaciona la teoría original y dual a nivel del espacio fase completo. En una segunda instancia reduciremos la teoría original y su dual eliminando todos los momentos y regresando así a la descripción de primer orden expuesta en los capítulos 4 y 5. Mostraremos que los paréntesis de Dirac asociados sufren un cambio al reducir el espacio, que es consistente con la estructura simpléctica que puede deducirse de las acciones de primer orden respectivas. Por último eliminado  $F$  y sus momentos asociados, haremos contacto con la literatura actual sobre transformaciones de dualidad vistas como transformaciones canónicas. Con el objeto de hacer esta tesis autocontenida presentaremos un resumen del trabajo [1] donde se muestra con claridad como se construye la transformación canónica a partir de la transformación de dualidad de Hodge, y a partir de esta dualidad se obtiene una función generadora de la transformación canónica. En esta tesis se obtuvo una generalización de la transformación de dualidad a acciones de primer orden que contienen campos auxiliares, de tal forma que al reducir el espacio de la teoría de primer orden, regresamos al espacio reducido que hace contacto con el trabajo [1] para acciones de segundo orden. Resaltaremos que esta transformación canónica no local debe construirse en el espacio de las "variables físicas" asociadas a la teoría de Maxwell. Es sólo en este espacio donde tiene sentido hablar de la transformación de dualidad como transformación canónica. Este espacio está descrito por las componentes transversales del campo eléctrico y magnético. Es importante mencionar que para obtenerlo es necesario resolver la ley de Gauss.

## 6.1. La transformación de dualidad estudiada.

Las relaciones entre la teoría original y su dual están dadas por

$$G^{\mu\nu} = g^2 F^{\mu\nu} \quad \star G_{\mu\nu} = -g^2 F_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es el tensor de Maxwell asociado a la teoría original y  $G_{\mu\nu}$  es el correspondiente tensor de Maxwell dual. Como vimos en los capítulos anteriores el paréntesis de Dirac de la teoría original (4.25) y su dual (5.27) son distintos.



Observamos ahora que es posible construir un mapeo entre las variables originales  $P_\mu, A^\mu, F^{\mu\nu}, P_{\mu\nu}$  y la variables que definen a la teoría dual  $\Pi_\mu, \Lambda^\mu, G^{\mu\nu}, \Pi_{\mu\nu}$ . Este mapeo, por definición, transforma la acción original en la correspondiente dual. En particular mapea una superficie de constricción en la otra y mapea los correspondientes paréntesis de Dirac. Este mapeo esta dado por

$$\begin{aligned}
 G^{0i} &\longleftrightarrow \frac{g^2}{2!} \epsilon^{0inm} F_{nm}, \\
 g^2 \Pi^i &\longleftrightarrow P^i, \\
 \Lambda_k &\longleftrightarrow g^2 A_k, \\
 g^2 \Pi^{in} &\longleftrightarrow -\epsilon^{0min} P_{0m}, \\
 g^2 \Pi_{0k} &\longleftrightarrow -\epsilon_{0kij} P^{ij}, \\
 G^{ij} &\longleftrightarrow \frac{g^2}{2!} \epsilon^{ijk0} F_{k0},
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

y se construye usando la transformación de dualidad (6.1) y extendiendo la transformación a los momentos de manera consistente, es decir, de manera que transforme la acción original en el espacio fase a la acción dual en su correspondiente espacio fase. Es interesante notar que este mapeo transforma una teoría con constante de acoplamiento  $g^2$  a una teoría dual con constante de acoplamiento  $\frac{1}{g^2}$ .

Vamos a probar que el mapeo arriba mencionado funciona correctamente al transformar la superficie de constricción de segunda clase en la correspondiente dual.

Tomemos las constrictiones de la teoría dual y usemos el mapeo para obtener las constrictiones de la teoría original, entonces tenemos para la constricción  $\tilde{\chi}_4^i$  de la teoría electromagnética dual

$$\begin{aligned}
 \tilde{\chi}_4^i &= G^{0i} + g^2 \partial_k \Pi^{ik} \approx 0 \\
 &= \left( \frac{g^2}{2!} \epsilon^{0inm} F_{nm} \right) + g^2 \partial_n \left( -\frac{1}{g^2} \epsilon^{0min} P_{0m} \right) \\
 &= \frac{g^2}{2!} \epsilon^{0inm} \left( F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{0m]} \right) \\
 &= F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{0m]} \approx 0,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

que es la constricción  $\chi_2$  de la teoría electromagnética de primer orden. Ahora con la

constricción  $\tilde{\chi}_2^{ij}$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\chi}_2^{ij} &= \Pi^{ij} + \frac{1}{2!g^2}\epsilon^{0kij}\Lambda_k \approx 0 \\
 &= -\frac{1}{g^2}\epsilon^{0mij}P_{0m} + \frac{1}{2!}\epsilon^{0mij}A_m \\
 &= -\frac{1}{g^2}\epsilon^{0mij}\left(P_{0m} - \frac{g^2}{2}A_m\right) \\
 &= P_{0m} - \frac{g^2}{2}A_m \approx 0,
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

que es la constricción  $\chi_4$  de la teoría electromagnética de primer orden. Con la constricción  $\tilde{\chi}_1^i$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\chi}_1^i &= g^2\Pi^i \approx 0 \\
 &= P^i \approx 0,
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

que es la constricción  $\chi_3$  de la teoría electromagnética de primer orden. Y con la constricción  $\tilde{\chi}_{3i}$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\chi}_{3i} &= g^2\Pi_{0k} \approx 0 \\
 &= \epsilon_{0kij}P^{ij} \\
 &= P^{ij} \approx 0,
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

que es la constricción  $\chi_1$  de la teoría electromagnética de primer orden.

Como vemos la dualidad mapea las constricciones de segunda clase de la teoría a su dual, encontrando que el mapeo lleva las constricciones de segunda clase de la teoría original a constricciones de segunda clase de la teoría dual; y por lo tanto mapea a los correspondientes paréntesis de Dirac. Observamos entonces que la estructura simpléctica del paréntesis de Dirac no queda invariante ante esta transformación.

Sin embargo, el mapeo (6.2) es canónico respecto a la estructura simpléctica estándar. La función generadora de esta transformación es

$$F_2(F_{\mu\nu}, A_\mu, \Pi_\mu, \Pi_{\mu\nu}) = \int \left( \frac{g^2}{2!}\Pi_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\sigma\rho} + g^2\Pi^\mu A_\mu \right) d^3x \tag{6.7}$$

Con esto hemos probado que el mapeo (6.2) es canónico respecto al paréntesis de Poisson, debido a que con la función generadora (6.7) se obtiene la transformación de dualidad escrita como el mapeo (6.2).

Es fácil probar que la función generadora (6.7) reproduce el mapeo (6.2); sólo debemos aplicar las relaciones obtenidas del formalismo hamiltoniano para la función

generadora de la transformación canónica  $F_2$  [8], obteniendo

$$\begin{aligned}
 P^{\alpha\beta}(x) &= \frac{\delta F_2}{\delta F_{\alpha\beta}} = \frac{g^2}{2!} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}(x) \\
 G^{\alpha\beta}(x) &= \frac{\delta F_2}{\delta \Pi_{\alpha\beta}} = \frac{g^2}{2!} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \\
 P^\mu(x) &= \frac{\delta F_2}{\delta A_\mu} = g^2 \Pi^\mu(x) \\
 \Lambda_\mu(x) &= \frac{\delta F_2}{\delta \Pi^\mu} = g^2 A_\mu(x),
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

que reproduce, en primer lugar la transformación de dualidad que hemos definido desde el principio (6.1), y además nos dice como se transforman los momentos  $P, \Pi$  y las variables  $A, \Lambda$ . Ésta función generadora implementa la transformación de dualidad como transformación canónica en todo el espacio fase. Probando con esto que la transformación de dualidad es canónica respecto a la estructura de Poisson.

## 6.2. El espacio reducido de la teoría electromagnética.

Para obtener el espacio reducido de manera consistente hay que despejar los campos auxiliares. Esto implica resolver algunas constricciones. Nuestro punto de partida es la acción total

$$\begin{aligned}
 S_T = \int \left( P_{\mu\nu} \dot{F}^{\mu\nu} + P_\mu \dot{A}^\mu - \left[ -\frac{g^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - g^2 (A_0 \partial_i F^{i0} + A_i \partial_j F^{ji}) \right. \right. \\
 \left. \left. + \lambda^{0i} (P_{0i} + g^2 A_i) + \lambda_{ij} P^{ij} + \lambda_0 P^0 + \lambda_i P^i \right] \right) d^4 x
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Las constricciones de primera clase asociadas a esta acción son

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= P^0 \approx 0 \\
 \phi_2 &= g^2 \partial_i F^{0i} + 2\partial_i P^i \approx 0,
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

y las constricciones de segunda clase son:

$$\begin{aligned}
 \chi_1^{ij} &= P^{ij} \approx 0 \\
 \chi_{2nm} &= F_{nm} - \frac{2}{g^2} \partial_{[n} P_{m]} \approx 0 \\
 \chi_3^i &= P^i \approx 0 \\
 \chi_{4j} &= P_{0j} - \frac{g^2}{2} A_j \approx 0.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Primer despejaremos todos los momentos de esta teoría para regresar a la acción de primer orden (4.1). Los momentos son en conjunto con los multiplicadores de Lagrange de las constricciones primarias, campos auxiliares. Las ecuaciones de movimiento asociadas a  $P_{\mu\nu}$  y  $P_\mu$  respectivamente son

$$\dot{F}^{0i} - \lambda^{0i} = 0 \quad (6.12)$$

$$\dot{F}^{ij} - \lambda^{ij} = 0 \quad (6.13)$$

$$\dot{A}^0 - \lambda^0 = 0 \quad (6.14)$$

$$\dot{A}^i - \lambda^i = 0 \quad (6.15)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a los multiplicadores de Lagrange son las constricciones primarias

$$P_{0i} - \frac{g^2}{2} A_i = 0 \quad (6.16)$$

$$P^{ij} = 0 \quad (6.17)$$

$$P^0 = 0 \quad (6.18)$$

$$P^i = 0 \quad (6.19)$$

De estas relaciones es posible despejar  $P_{\mu\nu}$  y  $P_\mu$  mientras que de las ecuaciones de movimiento asociadas a los momentos es posible despejar los respectivos multiplicadores de Lagrange. Esto define a los momentos y a los multiplicadores de Lagrange como campos auxiliares. Sustituyendo estos despejes en la acción total (6.9) obtenemos

$$S_R = \int \left( -\frac{g^2}{2} F^{0i} A_i - \left[ -\frac{g^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{g^2}{2} (A_0 \partial_i F^{i0} + A_i \partial_j F^{ji}) \right] \right) d^4 x \quad (6.20)$$

que coincide precisamente con la acción de primer orden (4.1). El paréntesis de Dirac reducido es:

$$\{F_{0i}(x), A^j(y)\}^* = -\frac{2}{g^2} \delta_i^j \delta(x, y), \quad (6.21)$$

el resto de los paréntesis de Dirac reducidos son cero. Esto coincide con la estructura simpéctica que puede leerse directamente de la acción de primer orden (4.1).

Ahora pasemos a realizar la otra reducción que nos lleva de la acción completa en el espacio fase a la acción electromagnética en el espacio fase con el objeto de comparar nuestros resultados con los resultados obtenidos en literatura reciente sobre el tema [1], [32]. Para realizar esta reducción usaremos las constricciones de segunda clase. Esto implica reducir  $P^i$ ,  $P^{ij}$ ,  $P^{0j}$ ,  $F_{ij}$  que son también campos auxiliares. El paréntesis de Dirac reducido coincidirá con el paréntesis de Poisson del espacio fase reducido ya que habremos eliminado todas las constricciones de segunda clase. Es importante señalar que las constricciones de primera clase restantes son  $P_0 = 0$ ,  $\partial_i F^{0i} = 0$  como

se desprende de (4.22). La acción total (6.9) queda reducida a

$$S_R = \int \left( -\frac{g^2}{2} F^{0i} \dot{A}_i - \left[ -\frac{g^2}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{g^2}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{g^2}{2} (A_0 \partial_i F^{i0} + A_i \partial_j F^{ji}) + \lambda_0 P^0 \right] \right) d^4 x.$$

Sumando la divergencia  $g^2 \partial_\mu (A_i F^{\mu i})$  a esta acción e identificando

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -E^i \\ F_{ij} &= \frac{1}{2} \epsilon_{0ij} B^i, \end{aligned}$$

donde  $E^i$  es el campo eléctrico y  $B^i$  es el campo magnético, la acción reducida puede escribirse como

$$S_R = \int \left( \frac{g^2}{2} E^i \dot{A}_i - \frac{g^2}{2} (-E^2 - B^2) - \frac{g^2}{2} A_0 \partial_i E^i + \lambda_0 P^0 \right) d^4 x \quad (6.22)$$

Esta acción reducida coincide con la acción de Maxwell en el espacio fase  $(A_i, P^i)$ , identificando  $(P^i = \frac{g^2}{2} E^i)$ . Notese que  $A_0$  y  $\lambda_0$  son multiplicadores de Lagrange asociados a esta acción. En particular  $A_0$  implementa la ley de Gauss.

El paréntesis de Dirac reducido es ahora el paréntesis de Poisson estándar. Por tanto la transformación generada por  $F_2$  es ahora una transformación canónica completa ya que el paréntesis de Dirac coincide con el de Poisson. Para mostrar esto aplicaremos la reducción antes mencionada a la teoría dual.

### 6.3. El espacio reducido de la teoría electromagnética dual.

Lo que haremos en esta sección es aplicar las mismas ideas de reducción usadas en sección anterior a la teoría dual. La acción total de la teoría dual es

$$\begin{aligned} \tilde{S}_T &= \int \left( \Pi_{\mu\nu} \dot{G}^{\mu\nu} + \Pi_\mu \dot{\Lambda}^\mu \right. \\ &\quad - \left[ \frac{1}{4g^2} (2G_{0i} G^{0i} + G_{ij} G^{ij}) - \frac{1}{2!g^2} (\epsilon^{0ijk} \Lambda_0 \partial_i G_{jk} + \epsilon^{ij0k} \Lambda_j \partial_i G_{0k}) \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_{0i} \Pi^{0i} + \lambda_{ij} (\Pi^{ij} + \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{kij} \Lambda_k) + \lambda_0 \Pi^0 + \lambda_i \Pi^i \right] \right) d^4 x. \end{aligned} \quad (6.23)$$

La teoría electromagnética dual, tiene las constricciones de primera clase

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1 &= \Pi^0 \approx 0 \\ \tilde{\phi}_2 &= \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0ijk} \partial_i G_{jk} + \partial_i \Pi^i \approx 0, \end{aligned} \quad (6.24)$$

y las constricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_1^i &= \Pi^i \approx 0, \\ \bar{\chi}_2^{ij} &= \Pi^{ij} + \frac{1}{2!g^2}\epsilon^{0kij}\Lambda_k \approx 0, \\ \bar{\chi}_3^i &= \Pi^{0i} \approx 0, \\ \bar{\chi}_4^j &= G^{0j} + g^2\partial_k\Pi^{jk} \approx 0.\end{aligned}\quad (6.25)$$

Ahora, para obtener la acción reducida vamos a resolver las constricciones de segunda clase (6.25). Esto implica eliminar  $\Pi^i, \Pi^{0i}, \Pi^{ij}, G^{0j}$ , de donde obtenemos la acción reducida

$$\begin{aligned}\bar{S}_R &= \int \left( \frac{1}{2!g^2}\epsilon^{0kij}\dot{\Lambda}_k G_{ij} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \left( \frac{1}{2g^2}\partial_k\Lambda_i\partial^k\Lambda^i + \frac{1}{4g^2}G_{ij}G^{ij} \right) - \Lambda_0\partial_i\left(\frac{1}{2!g^2}\epsilon^{0ijk}G_{jk}\right) + \lambda_0\Pi^0 \right] \right) d^4x.\end{aligned}\quad (6.26)$$

Nuestras variables canónicas son ahora  $G_{ij}, \Lambda_\mu, \Lambda_0$  y  $\lambda_0$ , que son multiplicadores de Lagrange. El primero es responsable de implementar la ley de Gauss dual

$$\partial_i\left(\frac{1}{2!}\epsilon^{0ijk}G_{jk}\right) = 0, \quad (6.27)$$

es común en la literatura actual resolver esta restricción de manera formal usando la dualidad de Hodge. Esto implica que  $G_{ij}$  es el rotacional (espacial) de algún vector. Al sustituir esta solución se obtiene la acción de Maxwell dual. El camino que seguiremos aquí es distinto.

Hemos construido la transformación de dualidad en el espacio fase completo y la hemos identificado con una transformación canónica respecto al paréntesis de Poisson. Esta transformación esta generada por la función generadora  $F_2$  (6.7). Al reducir esta transformación queda

$$\Lambda_\mu \longleftrightarrow g^2 A_\mu \quad (6.28)$$

$$g^2 F^{0k} \longleftrightarrow \frac{1}{2!}\epsilon^{0kij}G_{ij} \quad (6.29)$$

$$P_0 \longleftrightarrow g^2 \Pi_0 \quad (6.30)$$

Esta es la proyección de la transformación canónica en la teoría reducida, pero este mapeo da información redundante, de tal forma que la transformación de dualidad en el espacio reducido se puede escribir simplemente como

$$G^{ij} \longleftrightarrow \frac{g^2}{2!}\epsilon^{ijk0}F_{k0} \quad (6.31)$$

tomando la transformación en ambos sentidos. Esta transformación relaciona, por construcción, la teoría de Maxwell en el espacio fase con la teoría de Maxwell dual

en su espacio fase respectivo. El objetivo de la siguiente sección es analizar en que sentido esta transformación puede interpretarse como una transformación canónica.

Identificando de las constricciones de primera clase a

$$\Pi^i = \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0ijk} G_{jk}, \quad (6.32)$$

y sustituyendo en la acción de primer orden dual (6.26), obtenemos

$$\tilde{S}_R = \int \left( \Pi^k \dot{\Lambda}_k - \left[ \left( \frac{1}{2g^2} \partial_{[i} \Lambda_{j]} \partial^i \Lambda^j \right) + \frac{g^2}{4} G_{ij} G^{ij} \right] - \Lambda_0 \partial_i \Pi^i + \lambda_0 \Pi^0 \right) d^4 x, \quad (6.33)$$

que es la acción de primer orden dual reducida, que coincide con la acción de Maxwell dual en el espacio fase, en esta acción las cantidades  $\Lambda_0$  y  $\lambda_0$  son multiplicadores de Lagrange, y en particular  $\Lambda_0$  implementa la ley de Gauss en la acción de primer orden dual reducida. Su paréntesis de Dirac reducido es ahora el paréntesis de Poisson estándar.

Ahora pasaremos a analizar como se comporta la transformación de dualidad en el espacio reducido que hemos obtenido en las secciones anteriores.

## 6.4. Transformación canónica y de Dualidad en el espacio reducido.

Partimos de las acciones reducidas de la teoría original y su dual escritas en términos de los momentos  $P^i$  y  $\Pi^i$  respectivamente, la acción reducida de la teoría original es

$$S_R = \int \left( P^i \dot{A}_i - \left[ \frac{1}{2g^2} P_i P^i - \frac{g^2}{4} F_{ij} F^{ij} \right] + A_0 \partial_i P^i + \lambda_0 P^0 \right) d^4 x,$$

que depende de  $A_i, A_0, P^i, P^0$  y  $\lambda_0$ , donde las variables  $A_0$  y  $\lambda_0$  son multiplicadores de Lagrange. Ésta acción al ser reducida, nos lleva a obtener el paréntesis de Dirac reducido

$$\{A_i(x), -\frac{g^2}{2} F^{0j}(y)\}^* = \delta_i^j \delta(x-y), \quad (6.34)$$

que es la estructura simpléctica de la acción de primer orden (4.1), en donde hemos identificado la variable canónica como

$$P^i = -\frac{g^2}{2} F^{0i}. \quad (6.35)$$

Ahora pasamos a analizar la acción de primer orden dual reducida.

La acción de primer orden dual reducida es

$$\tilde{S}_R = \int \left( \Pi^k \Lambda_k - \left[ \frac{1}{2g^2} \partial_i \Lambda_j \partial^i \Lambda^j + \frac{g^2}{4} \Pi_i \Pi^i \right] + \Lambda_0 \partial_i \Pi^i + \lambda_0 \Pi^0 \right) d^4 x, \quad (6.36)$$

que depende de  $\Lambda_i, \Lambda_0, \Pi^i, \lambda_0$  y  $\Pi^0$ , donde las variables  $\Lambda_0$  y  $\lambda_0$  son multiplicadores de Lagrange de la teoría. Esta acción reducida tiene como paréntesis de Dirac reducido a

$$\{\Lambda_i(x), -\frac{1}{g^2} G_{jk}(y)\}^* = \epsilon_{0ijk} \delta(x-y), \quad (6.37)$$

donde hemos identificado a

$$\Pi^i = \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0ijk} G_{jk}, \quad (6.38)$$

como una variable canónica; primero observamos que al eliminar los momentos y obtener las acciones reducidas también obtenemos los paréntesis de Dirac reducidos (6.34) y (6.37), que dan información acerca de la estructura simpléctica de las acciones de primer orden. Vemos que a partir de la transformación de dualidad S entre las acciones de primer orden (4.1) y (5.5) los paréntesis de Dirac asociados a estas acciones son diferentes entre sí, por lo tanto esta transformación es no canónica respecto al paréntesis de Dirac. Al reducir estas acciones de primer orden obtenemos los paréntesis de Dirac reducidos (6.34) y (6.37), que también son diferentes entre sí, por lo que se concluye que la transformación de dualidad es no canónica respecto al paréntesis de Dirac reducido.

Por otra parte decimos que (6.38) es una variable canónica de  $\Lambda_i$  debido a que

$$\begin{aligned} \{\Lambda_i(x), \Pi^j(y)\}^* &= \left\{ \Lambda_i(x), \frac{1}{2!g^2} \epsilon^{0jmn} G_{mn}(y) \right\}^* \\ &= -\frac{1}{2!} \epsilon^{0jmn} \left\{ \Lambda_i(x), -\frac{1}{g^2} G_{mn}(y) \right\}^* \\ &= -\frac{1}{2!} \epsilon^{0jmn} \epsilon_{0imn} \delta(x-y) \\ &= \delta_j^i \delta(x-y), \end{aligned} \quad (6.39)$$

preserva la estructura simpléctica de Poisson en el espacio reducido, donde la transformación de dualidad S es canónica.

Ahora pasamos a obtener el espacio reducido de la función generadora  $F_2$  (6.7), esta nueva función generadora reducida implementará una transformación canónica en el espacio reducido, y es conveniente obtenerla, ya que a partir de ella obtendremos la transformación de dualidad canónica ya conocida en la literatura [1], [32].

Para obtener la función generadora reducida, eliminamos los momentos  $(\Pi^\mu, \Pi^{0i})$  que son constricciones de la teoría, de igual forma que se hizo con la obtención de las acciones reducidas.



La función generadora desarrollada en sus componentes espaciales y temporales es la siguiente

$$F_2 = \frac{g^2}{2!} (2\Pi^{kl}\epsilon_{k10i}F^{0i} + 2\Pi^{0k}\epsilon_{0k10i}F^{ij}) + g^2\Pi^0A_0 + g^2\Pi^iA_i, \quad (6.40)$$

que al eliminar los momentos antes mencionados, obtenemos la siguiente función generadora reducida

$$F_{2R} = g^2\Pi^{kl}\epsilon_{k10i}F^{0i}. \quad (6.41)$$

Usando la siguiente constricción de segunda clase

$$\Pi^{ij} = -\frac{1}{2!g^2}\epsilon^{0kij}\Lambda_k, \quad (6.42)$$

y tomando en cuenta que el dual del campo eléctrico  $E^i$ , es el campo magnético  $B_i$ , identificamos la siguiente relación

$$2F_{ij} = \epsilon_{ij0k}F^{0k}, \quad (6.43)$$

donde el campo magnético esta escrito en las componentes del tensor original  $F_{ij}(A)$ . Sustituyendo las relaciones (6.42) y (6.43) en (6.41) obtenemos la función generadora reducida

$$F_1(\Lambda, A) = -\int \epsilon^{0ijk}\Lambda_i F_{jk}(A) d^3x, \quad (6.44)$$

que como vemos es una función generadora del tipo 1, que solo depende de las coordenadas canónicas  $A$  y  $\Lambda$ . Es curioso como al reducir el espacio de las acciones de primer orden, la función generadora de la transformación del tipo  $F_2$  se reduce a una función generadora del tipo  $F_1$ . Esta función generadora (6.44) es la que se conoce en la literatura como la transformación de dualidad canónica.

La función generadora en el espacio reducido (6.44), genera una transformación diferente al mapeo completo obtenido para las acciones de primer orden (6.2). Las funciones generadoras  $F_2$  y  $F_1$  tienen algo en común; implementan la transformación de dualidad canónica respecto a la estructura de Poisson en espacios diferentes.

La función generadora (6.44) implementa la transformación de dualidad canónica en el espacio reducido

$$\begin{aligned} P^i &= \frac{\delta F_1}{\delta A_i} = -\epsilon^{0ijk}\partial_j\Lambda_k, \\ \Pi^i &= -\frac{\delta F_1}{\delta \Lambda_i} = \epsilon^{0ijk}\partial_j A_k. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Como hemos visto, en el espacio reducido se identifican los momentos (6.35) y (6.38) que dejan la estructura simpléctica invariante junto con sus variables canónico conjugadas  $A_i$  y  $\Lambda_i$  respectivamente. Además hemos encontrado que al reducir el espacio de

las acciones de primer orden, e identificar los momentos (6.35) y (6.38) como variables canónicas, los paréntesis de Dirac reducidos que se obtienen hasta el espacio fase de la teoría de Maxwell usual son

$$\begin{aligned} \{A_i(x), P^j(y)\}^* &= \{A_i(x), P^j(y)\} = \delta_i^j, \delta(x-y) \\ \{\Lambda_i(x), \Pi^j(y)\}^* &= \{\Lambda_i(x), \Pi^j(y)\} = \delta_i^j, \delta(x-y) \end{aligned} \quad (6.46)$$

indicándonos que las variables canónicas  $(A_i, P^i)$  se transforman a las variables canónicas  $(\Lambda_i, \Pi^i)$ , que dejan la estructura simpléctica invariante

$$\sigma = dA_i \wedge dP^i = d\Lambda_i \wedge d\Pi^i = \bar{\sigma}, \quad (6.47)$$

concluyendo que la transformación de dualidad que se hizo, es canónica.

Para ver la equivalencia entre los resultados que se han obtenido en esta tesis y los que se conocen en la literatura, presentaremos un resumen del trabajo [1]. En la siguiente sección analizaremos cual es la función generadora que se presenta en dicho trabajo. Veremos la equivalencia que tiene esa función generadora con la función generadora obtenida en el espacio reducido de las acciones de primer orden (6.44). También se estudiará como se deforma la transformación de dualidad en una transformación de dualidad no local al caer dentro del espacio reducido. Esta deformación no permite despejar algebraicamente las variables  $A, \Lambda$  en términos de los momentos  $P, \Pi$ , debido a que la transformación de dualidad es no local.

## 6.5. La transformación de dualidad canónica en el espacio configuración.

En el trabajo [1] se muestra como una dualidad S en la teoría electromagnética es una transformación canónica. Aquí se explica como una redefinición del campo eléctrico y magnético en términos de los momentos  $\Pi^i, \bar{\Pi}^i$  genera una transformación de dualidad canónica. Podemos ver que se trabaja desde un principio con las variables físicas  $E_i$  y  $B_i$ , o en otras palabras, hacen la transformación de dualidad en el espacio reducido. Al trabajar en este espacio, la acción electromagnética es de segundo orden, y las variables  $A_\mu$  no se pueden despejar algebraicamente en términos de los momentos, esto trae como consecuencia que la transformación sea no invertible en términos de los operadores diferenciales aplicados a  $A_\mu$ , entonces en este espacio la transformación de dualidad es no local como veremos adelante.

En la teoría electromagnética de Maxwell la dualidad S se muestra a partir de la definición de dualidad de formas diferenciales, o dualidad de Hodge

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (6.48)$$

que cambia los vectores eléctrico y magnético de una teoría a su dual de la siguiente manera  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ , y  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ , con estos cambios obtenemos la teoría dual electromagnética de Maxwell que además cambia la constante de interacción por su inverso. Ahora veamos que hacen para mostrar que esta transformación es canónica.

Partimos de la acción electromagnética, definida como

$$\begin{aligned} L &= \left( \frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{g^2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde la definición de los campos eléctrico y magnético en términos de  $F_{\mu\nu}$  esta dada por

$$E_i = F_{0i}(A) \quad (6.50)$$

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} F_{jk}(A), \quad (6.51)$$

definido en un espacio-tiempo de Minkowski. Los momentos canónicos están dados por

$$\Pi_0 = 0, \quad (6.52)$$

$$\Pi_i = -\frac{2}{g^2} E_i, \quad (6.53)$$

y el hamiltoniano que se obtiene es

$$H = -\left( \frac{g^2}{4} \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{g^2} \vec{B}^2 \right) + \Pi^i \partial_i A_0. \quad (6.54)$$

La constricción primaria  $\Pi_0 = 0$  nos conduce a la constricción secundaria  $\partial_i \Pi^i = 0$  (Ley de Gauss), de igual forma que se hizo en capítulo 3.

Entonces se define en [1], la transformación de dualidad como

$$\Pi^i = -\frac{1}{2\pi} \tilde{B}^i \quad (6.55)$$

$$\tilde{\Pi}^i = \frac{1}{2\pi} B^i, \quad (6.56)$$

donde  $\tilde{F} = d\tilde{A}$ , es decir, el intercambio entre los grados de libertad eléctrico y magnético, nos lleva al hamiltoniano S-dual con constante de acoplamiento  $\tilde{g}^2 = 1/g^2$ .

La función generadora de esta transformación está dada por:

$$G = -\frac{1}{2\pi} \int_{D_4/\partial D_4=M_3} dA \wedge d\tilde{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_{M_3} (\tilde{A}_i B^i + A_i \tilde{B}^i) d^3x \quad (6.57)$$

donde  $D_4$  es una variedad de cuatro dimensiones cuya frontera es una subvariedad de tres dimensiones  $M_3$ . Con el fin de mostrar la equivalencia completa entre el hamiltoniano de la teoría y su dual tenemos que probar que están definidos y restringidos en el mismo espacio fase. Esto implica que las cantidades duales  $\partial_i \bar{\Pi}^i = 0$  y  $\bar{\Pi}_0$  vienen directamente de la función generadora antes mostrada que no tiene dependencia en  $\bar{A}_0$ . La restricción secundaria  $\partial_i \bar{\Pi}^i = 0$  de la teoría original nos lleva a las componentes de la identidad de Bianchi  $\partial_i \bar{F}^{0i} = 0$  en la teoría dual.

La misma idea puede ser generalizada a teorías de norma abelianas de  $r$ -formas en  $d$  dimensiones.

Antes de discutir estos resultados, aclararemos que en el trabajo [1] las variables  $A_i, \bar{A}_i, \Pi^i, \bar{\Pi}^i$  son equivalentes a las variables  $A_i, \Lambda_i, P^i, \bar{\Pi}^i$  que se usaron a lo largo de los capítulos relacionados con la acción de primer orden electromagnética y su dual, y en las secciones de este capítulo donde obtenemos el espacio reducido de ambas teorías.

Pasemos a discutir la equivalencia entre el trabajo [1], y los resultados de esta tesis. En primer lugar una transformación es canónica cuando uno puede construir la función generadora de dicha transformación. En [1] nos dan la función generadora (6.57), que podemos describir en términos de  $(A_i, \Lambda_i)$  como

$$G(A, \bar{A}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{M_3} (\bar{A}_i \epsilon^{0ijk} \partial_j A_k) d^3x, \quad (6.58)$$

que es la función generadora  $F_1$  que se obtuvo en la sección anterior, y que implementa la transformación canónica en el espacio reducido.

La función generadora (6.58) implementa la transformación

$$\begin{aligned} \Pi^i &= \frac{\delta G}{\delta \bar{A}_i} = -\epsilon^{0ijk} \partial_j \bar{A}_k, \\ \bar{\Pi}^i &= -\frac{\delta G}{\delta A_i} = \epsilon^{0ijk} \partial_j A_k, \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde no se puede despejar algebraicamente  $\bar{A}_i$  como función de  $\Pi$ , y tampoco se puede despejar algebraicamente  $A_i$  como función de  $\bar{\Pi}^i$ . Esto me dice que la transformación de dualidad es no invertible en esas variables, por lo tanto no se puede obtener la acción original a partir de la dual con esta transformación de variables. Esto se puede analizar con las acciones hamiltonianas de la teoría.

Las acciones hamiltonianas de esta teoría y su dual son

$$L = \int (\dot{A}_\mu \Pi^\mu - H_T) d^4x, \quad (6.60)$$

$$\bar{L} = \int (\dot{\bar{A}}_\mu (\bar{\Pi}^\mu) - \bar{H}_T) d^4x, \quad (6.61)$$

donde observamos que al pasar de la acción original (6.60) a la acción dual (6.61) con la transformación (6.59) obtenemos una inconsistencia debido a la no localidad

de la transformación. Para arreglar esto, definimos la transformación en términos de operadores diferenciales  $O^{ij} = \epsilon^{0ijk} \partial_k$

$$\begin{aligned} P^i &= O^{ij} \Lambda_j \\ \Pi^i &= O^{ij} A_j, \end{aligned} \quad (6.62)$$

de tal forma que puedo definir la transformación inversa como

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= (O_{ji})^{-1} P^i \\ A_j &= (O_{ji})^{-1} \Pi^i. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Los operadores antes mencionados cumplen con la siguiente propiedad

$$(O^{\mu\rho})^{-1}(x) O_{\rho\nu}(y) = \delta_\nu^\mu \delta(x - y). \quad (6.64)$$

Como hemos probado, la transformación de dualidad S en el espacio reducido es canónica respecto a la estructura de Poisson. También se ha visto que esta transformación es no invertible en esas variables; debido a que la acción es de segundo orden.

Los resultados más importantes de este capítulo se pueden enumerar de la siguiente forma

- 1.- Se construyó la función generadora  $F_2$  de la transformación canónica en el espacio fase completo.
- 2.- Se probó que esta función generadora reproduce bien el mapeo que nos lleva de una superficie de restricción a su dual.
- 3.- Se obtuvieron los espacios reducidos de la acción de primer orden y su dual, y también los corchetes de Dirac reducidos.
- 4.- Se obtuvo la función generadora reducida  $F_1$  a partir de la función  $F_2$ .
- 5.- Se hizo un análisis de los resultados obtenidos en esta tesis con los obtenidos en la literatura.

Como podemos ver la teoría que se ha desarrollado en esta tesis es completamente general. Se encontró que a partir de acciones de primer orden equivalentes se podía implementar la transformación de dualidad de Hodge. Con la acción de primer orden y su dual se hizo el análisis de restricciones desarrollado por Dirac. A partir de esto, encontramos que la superficie de restricción y su dual son diferentes entre sí. En consecuencia la transformación de dualidad es NO canónica respecto al corchete de Dirac; pero también encontramos un mapeo que nos lleva de una superficie de restricción a otra. Este mapeo es canónico respecto al corchete de Poisson debido a que este mapeo queda definido por la función generadora de la transformación canónica  $F_2$ . Por otra parte se obtuvieron las acciones reducidas de la teoría original y su dual, en donde se identificaron los momentos  $P^i$  y  $\Pi^i$  como los momentos canónicos de la teoría reducida. De igual forma se obtuvo la función generadora reducida  $F_1$ , que implementa la transformación de dualidad canónica en el espacio reducido. Se

encontró que esta función generadora reducida es equivalente a la que se conoce en la literatura [1].

Como hemos visto el método de constricciones desarrollado por Dirac, es una herramienta muy poderosa en la investigación. Con este método se obtuvo la superficie de restricción de la teoría original y su dual, encontrando un mapeo canónico que lleva de una superficie a la otra. La transformación de dualidad  $S$  en teoría electromagnética es una transformación canónica como se ha demostrado en las secciones anteriores. De hecho hemos probado que ésta transformación es canónica en el espacio fase completo obtenido de las acciones de primer orden. De éste resultado también se deduce la transformación de dualidad canónica obtenida en la literatura. El espacio fase reducido se obtuvo al resolver las constricciones de la teoría, encontrado de esta reducción las variables canónicas que dejan la estructura simpléctica invariante

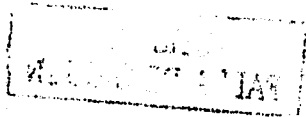
$$\sigma = dA_i \wedge dP^i = d\Lambda_i \wedge d\Pi^i = \bar{\sigma}, \quad (6.65)$$

deduciendo de este hecho que la transformación de dualidad es canónica.

Otro aspecto que presenta la transformación de dualidad electromagnética, es que las constricciones de primera clase sobreviven en ambas teorías, las cuales permiten hacer transformaciones de norma que dejan invariante la teoría.

# Parte III

## Dualidad en la Cuerda Bósonica



86.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## Capítulo 7

# Dualidad en Teoría de Cuerdas con acciones de primer orden.

Se han encontrado resultados acerca de la transformación de dualidad canónica en la teoría de cuerdas [2, 24, 25, 26, 27, 20]. Pero en todos estos trabajos se ha usado la acción de segundo orden de la cuerda de Polyakov, donde la transformación de dualidad es no local.

En este capítulo se construirá una acción de primer orden para la cuerda bósónica de Polyakov. Como se vió en el capítulo 3, la acción de Polyakov tiene varias simetrías. Estas simetrías pueden extenderse a la acción de primer orden que construiremos en este capítulo. Trabajaremos esta acción sin imponer ninguna norma, de tal forma que al final de nuestro análisis podemos elegir la norma que más nos convenga.

En la primera sección de este capítulo se construirá la acción de primer orden para la cuerda de Polyakov. Con esta acción se obtendrán las ecuaciones de movimiento a que da resultado. Esta acción de primer orden es equivalente a la acción de segundo orden de Polyakov, en el sentido de que tienen las mismas ecuaciones de movimiento, y se reduce a la acción de Polyakov original al sustituir el campo auxiliar en la acción de primer orden. Veremos las simetrías que tienen esta acción de primer orden, y posteriormente escribiremos esta acción en variables ADM.

Una vez que se ha obtenido la acción de primer orden en variables ADM, se hace el análisis de constricciones de ésta teoría. Encontrando las constricciones primarias y secundarias de la teoría se procede a la separación de constricciones en primera y segunda clase. Veremos que esta separación no es fácil de obtener. Para hacer la separación, primero obtenemos la matriz que tiene como elementos los paréntesis de Poisson entre todas las constricciones de la teoría. De ésta obtendremos matrices equivalentes, hasta llegar a una donde los elementos diferentes de cero ya no se pueden eliminar. A este nivel, las constricciones quedan redefinidas, y al mismo tiempo esta redefinición hace la separación en constricciones de primera y segunda clase. Una vez que se tiene esta separación, las constricciones de segunda clase nos permitan construir el parénetsis de Dirac de la teoría. Este paréntesis tiene una estructura

simpléctica definida por todas las variables de la teoría. Posteriormente se encuentran las variables relevantes de la teoría que determinan cuales son las variables canónicas usuales de la teoría. Además este paréntesis de Dirac será analizado junto con el paréntesis de Dirac de la teoría dual.

En la segunda sección procedemos a construir la acción de primer orden dual. Para obtener la acción dual uno sustituye las variables originales por sus duales, de acuerdo con la transformación de dualidad. Usando este método, al igual que se hizo con la teoría electromagnética se obtendrá la acción de primer orden dual para la teoría de cuerdas. Con esta acción se obtendrán las constricciones primarias de la teoría usando el mismo formalismo de los momentos generalizados. Para obtener las otras constricciones de la teoría dual utilizaremos la separación de constricciones de la teoría original. Esto es posible debido a que las constricciones de segunda clase siguen siendo constricciones de segunda clase al aplicarles una redefinición de campos consistente con la teoría. La redefinición de campos que tenemos es la transformación de dualidad implementada para la teoría de cuerdas; cabe señalar que esta transformación es diferente a la transformación de dualidad electromagnética. Como sabemos, la transformación de dualidad define un mapeo entre las variables de la teoría original y su dual. Al aplicar este mapeo a las constricciones de segunda clase de la teoría original, uno obtiene las constricciones de segunda clase de la teoría dual. Con estas constricciones se construirá el paréntesis de Dirac para la teoría dual, y se encontrarán las variables relevantes de dicha teoría.

En la tercera sección de este capítulo se analizará en detalle la transformación de dualidad implementada. Esta transformación es una rotación de las variables  $(x^\mu, p_\mu)$ , donde  $x^\mu = \partial_\sigma x^\mu$  y  $p_\mu$  es la variable canónica conjugada de  $x^\mu$ , y  $\sigma$  es uno de los parámetros de la hoja mundo. En este sentido la transformación de dualidad no se realiza en el espacio fase  $(x^\mu, p_\mu)$ , aunque deja la estructura simpléctica invariante. Esto es un fenómeno curioso y al mismo tiempo interesante que estudiaremos en detalle en esta sección. Presentaremos el mapeo de todas las variables entre sí. Se probará que este mapeo es canónico por construcción, y se presentará la función generadora de la transformación canónica en el espacio  $(x^\mu, p_\mu)$ . Haremos también un breve análisis de la relación que tiene una transformación canónica con el grupo de simetría  $O(d, d, \mathbf{R})$ . Este análisis aclarará la transformación entre las variables en el espacio fase  $(x^\mu, p_\mu)$ . Por último se analizará la rotación entre las variables  $(x^\mu, p_\mu)$  como una transformación de simetría, y se explicará como al mismo tiempo es una transformación canónica en el espacio  $(x^\mu, p_\mu)$ .

## 7.1. La acción de primer orden para la teoría de cuerdas.

En el capítulo 4 se presentó la acción de Polyakov, la cual es invariante ante el grupo de Poincaré, ante difeomorfismos y ante reescalamiento de Weyl. En esta

sección, construiremos una acción de primer orden para la cuerda bósónica, que como veremos conduce a las mismas ecuaciones de movimiento que la acción de Polyakov. En esta sección haremos un cambio de notación, y las variables de la teoría original se escribirán con minúsculas  $x^\mu$  y  $p_\mu$ , y las de la teoría dual con mayúsculas  $X^\mu$  y  $P_\mu$ ; aquí mismo, se dará una introducción al formalismo ADM, con el fin de escribir la teoría de cuerdas en términos de las variables  $N$  y  $N_1$ , que en la teoría original denotaremos por  $n$  y  $n_1$ .

Partimos de la acción de Polyakov para la cuerda bósónica

$$S_P[x^\mu, \gamma^{ab}] = -\frac{T}{2} \int_M (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} h_{ab} d\tau d\sigma \quad (7.1)$$

donde  $h_{ab} = \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu$  es la métrica inducida de Polyakov,  $x^\mu$  es la coordenada espacio tiempo en  $D$  dimensiones  $\gamma^{ab}$  es la métrica de la hoja mundo en 2 dimensiones y  $T$  es la tensión de la cuerda.

Ahora, inspirados en el caso electromagnético construimos la acción de primer orden de la cuerda bósónica, donde concluimos que la acción para la cuerda bósónica de primer orden es

$$S[\gamma^{ab}, x_\mu, V_a^\mu] = \frac{1}{2} \int_M (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} h_{ab} d\tau d\sigma, \quad (7.2)$$

con la diferencia de que métrica inducida  $h_{ab}$  es

$$h_{ab} = -\frac{1}{T} V_a^\mu V_{b\mu} + V_{(a}^\mu \partial_{b)} x_\mu. \quad (7.3)$$

La acción (7.1) tiene la misma estructura que la (7.2), con la diferencia de que la métrica inducida  $h_{ab}$  es distinta. La acción (7.2) depende de las variables  $V_{a\mu}$ ,  $x_\mu$  y  $\gamma^{ab}$ , donde  $V_{a\mu}$  son 2D campos auxiliares. Esto significa que pueden despejarse algebráicamente usando sus propias ecuaciones de movimiento, y al sustituir estos campos en la acción de primer orden recuperamos la acción original de Polyakov.

Primero hagamos las variaciones correspondientes a cada variable obteniendo las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \iff \partial_a (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} V_b^\mu) = 0, \quad (7.4)$$

ahora las variaciones respecto a  $V_a^\mu$  son

$$\frac{\delta S}{\delta V_a^\mu} = 0 \iff \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \left( -\frac{1}{T} V_{b\mu} + \partial_b x_\mu \right) = 0. \quad (7.5)$$

Las variaciones respecto a  $\gamma^{ab}$  nos llevan a que  $\gamma_{ab}$  es proporcional a  $h_{ab}$

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma^{ab}} = 0 \iff \frac{T}{2} \sqrt{-\gamma} \left( \frac{1}{2} \gamma^{cd} \gamma^{ab} - \gamma^{ac} \gamma^{bd} \right) V_a^\mu V_{b\mu} = 0. \quad (7.6)$$

De la ecuación (7.5) podemos despejar  $V_{a\mu}$  obteniendo

$$V_{b\mu} \equiv T \partial_b x_\mu. \quad (7.7)$$

Como este campo se puede despejar algebraicamente de sus propias ecuaciones de movimiento, es un campo auxiliar, y podemos sustituirlo en la acción de primer orden (7.2) sin alterar la dinámica de la teoría.

De la ecuación de movimiento (7.6) obtenemos como solución general

$$\gamma_{ab} = \beta h_{ab} \quad (7.8)$$

donde  $\beta$  es un factor conforme arbitrario. Este resultado es idéntico al obtenido usando la acción de Polyakov. La invariancia de Weyl en esta acción genera una redefinición de la métrica interna  $\gamma_{ab}$  que no afecta a la métrica inducida  $h_{ab}$ .

Ahora pasemos a probar que la acción de primer orden es equivalente a la acción de Polyakov.

### 7.1.1. Equivalencia entre la acción de primer orden y la de Polyakov.

Veamos que pasa al sustituir el campo auxiliar  $V_{a\mu}$  definido en (7.7) en la acción (7.2). Partiendo de la acción de primer orden y sustituyendo la variable auxiliar  $V_\mu$  usando la ecuación de movimiento (7.5) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} S[\gamma^{ab}, x_\mu, V_a^\mu] &= \frac{1}{2} \int_M (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} h_{ab} d^2\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_M (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} \left( -\frac{1}{T} V_a^\mu V_{b\mu} + V_a^\mu \partial_b x_\mu \right) d^2\zeta \\ &= -\frac{T}{2} \int_M (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu d\tau d\sigma. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Donde la última igualdad es exactamente la acción de Polyakov (7.1) cuya métrica inducida es

$$h_{ab} = \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu, \quad (7.10)$$

con lo que probamos que la acción de primer orden (7.2) es equivalente a la acción de Polyakov clásicamente.

### 7.1.2. Las simetrías de la acción de primer orden.

La acción de primer orden hereda todas las simetrías de la acción de Polyakov; la invariancia de Poincaré, la invariancia ante difeomorfismos (reparametrizaciones), y la invariancia de Weyl.

La invariancia de Poincaré representa una simetría global y dice que se pueden hacer transformaciones de Lorentz más traslaciones constantes

$$\delta x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (7.11)$$

$$\delta \gamma^{ab} = 0, \quad (7.12)$$

donde  $\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} \Lambda_\nu^\sigma$  es antisimétrico y  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski y además tenemos que  $\Lambda_{\mu\nu}$  y  $a^\mu$  son constantes.

La invariancia de Weyl, es la que hace un reescalamiento conforme y deja invariante la acción

$$\delta \gamma^{ab} = \beta \gamma^{ab} \quad (7.13)$$

Y la invariancia ante reparametrizaciones en dos dimensiones (difeomorfismos)

$$\delta x^\mu = \xi^a \partial_a x^\mu \quad (7.14)$$

$$\delta V_{a\mu} = (\partial_a \xi^b) V_{b\mu} + \xi^b \partial_a V_{b\mu} \quad (7.15)$$

$$\delta \gamma^{ab} = \xi^c \partial_c \gamma^{ab} - (\partial_c \xi^a) \gamma^{cb} - (\partial_c \xi^b) \gamma^{ac} \quad (7.16)$$

$$\delta(\sqrt{-\gamma}) = \partial_a (\xi^a \sqrt{-\gamma}) \quad (7.17)$$

entonces también la acción de primer orden es invariante ante estas simetrías, ya que la métrica inducida es proporcional a la métrica de la hoja mundo como sigue

$$h_{ab} = \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}, \quad (7.18)$$

esta relación se obtiene al hacer variaciones sobre la acción respecto a  $\gamma^{ab}$ , entonces la métrica inducida para la acción de primer orden también es invariante ante difeomorfismos

$$\delta h_{ab} = \xi^c \partial_c h_{ab} - (\partial_c \xi^a) h_{cb} - (\partial_c \xi^b) h_{ac}. \quad (7.19)$$

Y todas las simetrías antes mencionadas las cumple la acción de primer orden, debido a que la métrica inducida  $h_{ab}$

$$h_{ab} = -\frac{1}{T} V_a^\mu V_{b\mu} + V_{(a}^\mu \partial_{b)} x_\mu, \quad (7.20)$$

tiene una estructura en la que solo aparecen derivadas de la coordenada espacio-tiempo  $x_\mu$ , por lo que la acción de primer orden cumple con la invariancia de Poincaré, la invariancia de Weyl y la invariancia ante difeomorfismos (reparametrizaciones de la hoja mundo).

### 7.1.3. La acción de primer orden en ADM.

El tratamiento unificado del espacio y tiempo es una piedra angular en la relatividad general. De forma practica, y más útil es reintroducir de forma explícita una

división del espacio-tiempo en sus componentes espacial y temporal, tal división esta descrita por el formalismo (ADM).

El formalismo ADM fue desarrollado por Arnowitt, Deser y Misner en los años 60 con el fin de separar las variables de espacio-tiempo en sus direcciones espacial y temporal, con las variable  $N$  conocida como función *lapso* y  $N_i$  conocido como vector *shift*.

La descomposición ADM del espacio-tiempo es una elección natural para el problema de valor inicial, y nos lleva a la geometrodinámica de Wheeler en la relatividad general clásica, como la dinámica que envuelve la geometría espacial, esto nos lleva a la versión hamiltoniana de la gravedad clásica y sugiere un acercamiento más útil a la cuantización canónica.

Además el formalismo ADM simplifica la determinación de cantidades conservadas en el espacio, los análogos gravitacionales del momento total y momento angular.

Esta separación en variables ADM tiene una explicación puramente geométrica además de que esta relacionada con la topología, comencemos con la topología  $[0,1] \times \Sigma$  donde  $\Sigma$  es una superficie bidimensional abierta o cerrada; tal espacio-tiempo representa un segmento de un universo entre una superficie inicial  $\{0\} \times \Sigma$ , la cual se toma como espacial; y una superficie final  $\{1\} \times \Sigma$  que también es espacial.

El formalismo ADM de la cuerda es similar al que se estudia en relatividad general, y tiene el mismo concepto geométrico. Para empezar tomemos un espacio tiempo de  $(2+1)$  dimensiones con una rebanada de la variedad  $M$  del espacio tiempo dentro de la superficie  $\Sigma_t$  de tiempo constante, cada una provista con un sistema de coordenadas  $\{x_i\}$  y métrica inducida  $g_{ij}(t, x^i)$ . Para obtener toda la geometría tridimensional debemos describir el camino más corto entre las rebanadas de tiempo  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+dt}$  juntas.

Para hacer esto, comenzamos en un punto sobre  $\Sigma_t$  que tiene coordenadas  $x^i$ , y desplazamos infinitesimalmente en la dirección normal a  $\Sigma_t$ . El resultado de este cambio en el tiempo propio puede ser escrito como

$$dr = N(t, x^i) dt \quad (7.21)$$

donde  $N(t, x^i)$  es llamada la función de *lapso*, sin embargo, en el sistema genérico de coordenadas, tal desplazamiento no será un corrimiento en la cordenada del tiempo, sino que será sólo un corrimiento alterno a las coordenadas espaciales, para hacer esto posible escribimos

$$x^i(t + dt) = x^i(t) - N^i dt \quad (7.22)$$

donde  $N^i(t, x^i)$  es llamado el vector de corrimiento *shift*, entonces la versión Lorentziana del teorema de Pitagoras con el intervalo entre los puntos  $(t, x^i)$  y  $(t + dt, x^i + dx^i)$  es

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \quad (7.23)$$

y esta ecuación representa la forma ADM de la métrica, estas ecuaciones están representadas esquemáticamente en la figura 7.1, donde podemos ver como se separán las variables espaciales de las temporales con ayuda de las funciones  $N$  y  $N^i$ .

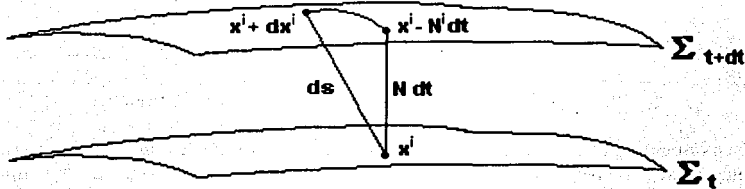


Figura 7.1: La separación de las componentes espaciales y temporales con ayuda de las funciones  $N$  y  $N^i$  esquematizados en los cortes temporales  $\Sigma$ .

Para hacer una distinguir entre las variables originales y duales denotaremos las variables originales con minúsculas, y las duales con mayúsculas.

Ahora la separación en variables ADM de la métrica de la hoja mundo de la cuerda están dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= (n_1^2 - n^2)\gamma_{11} \\ \gamma_{01} &= n_1\gamma_{11} & \gamma_{11} &= \gamma_{11} \end{aligned} \quad (7.24)$$

donde obviamente la métrica de la hoja mundo define una superficie en 2 dimensiones por lo que la función *laps* es  $n$  y el vector *shift* es  $n_1$  que solo tiene una componente espacial.

Ahora obtenemos la inversa de la matriz de  $\gamma_{ab}$  en términos de las variables ADM:

$$\gamma^{ab} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -\gamma_{01} \\ -\gamma_{01} & \gamma_{00} \end{pmatrix},$$

y el determinante con las variables ADM es

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_{11}\gamma_{00} - \gamma_{01}^2 \\ &= [\gamma_{11}(n_1^2 - n^2)\gamma_{11} - \gamma_{01}^2] = -n^2\gamma_{11}^2 \\ (-\gamma)^{\frac{1}{2}} &= n\gamma_{11} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Ahora partiendo de la acción de primer orden:

$$\begin{aligned} S[\gamma^{ab}, x_\mu, V_a^\mu] &= \frac{1}{2} \int_M (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} h_{ab} d^2\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_M (-\gamma)^{\frac{1}{2}} [\gamma^{00} h_{00} + 2\gamma^{01} h_{01} + \gamma^{11} h_{11}] d^2\zeta, \end{aligned} \quad (7.26)$$

y substituyendo los resultados (7.24) y (7.25) llegamos al siguiente resultado

$$\begin{aligned} S[\gamma^{ab}, x_\mu, V_a^\mu] &= -\frac{1}{2} \int_M \frac{1}{n\gamma_{11}} \left[ \gamma_{11} h_{00} - 2n_1 \gamma_{11} h_{01} + \gamma_{11} (n_1^2 - n^2) h_{11} \right] d^2\zeta \\ &= -\frac{1}{2} \int_M \frac{1}{n} \left[ h_{00} - 2n_1 h_{01} + (n_1^2 - n^2) h_{11} \right] d^2\zeta \end{aligned} \quad (7.27)$$

que es una acción que depende de las  $V_a^\mu$  y de las variables ADM  $n$  y  $n_1$

$$S[n, n_1, x_\mu, V_a^\mu] = -\frac{1}{2} \int_M \frac{1}{n} \left[ h_{00} - 2n_1 h_{01} + (n_1^2 - n^2) h_{11} \right] d^2\zeta. \quad (7.28)$$

Notemos que ninguna componente de  $\gamma_{\alpha\beta}$  aparece en el resultado final, y esto se debe a la invariancia de Weyl. Esta acción en términos de las variables ADM nos permitirá construir el hamiltoniano y las constricciones de manera eficiente y directa.

Las ecuaciones de movimiento de las variables  $n$  y  $n_1$  son

$$\delta n : \quad \frac{1}{n} \left[ h_{00} - 2n_1 h_{01} + (n_1^2 + n^2) h_{11} \right] = 0, \quad (7.29)$$

$$\delta n_1 : \quad \frac{1}{n} (2n_1 h_{11} - 2h_{01}) = 0. \quad (7.30)$$

Estas relaciones se pueden reescribir en la forma

$$h_{01} = n_1 h_{11} \quad (n^2 - n_1^2) h_{11} + h_{00} = 0. \quad (7.31)$$

#### 7.1.4. El formalismo canónico de la acción de primer orden con el formalismo ADM.

En esta sección obtendremos las constricciones primarias de la cuerda en el formalismo ADM, además de que obtendremos el hamiltoniano canónico en variables ADM.

De la acción (7.28) en ADM obtenemos los momentos canónicos conjugados de la teoría. Estas son constricciones primarias de la teoría

$$\begin{aligned} \pi_n &\approx 0, & \pi_{n_1} &\approx 0, \\ p_\mu^a &\approx 0, & p_\mu + \frac{1}{n} (V_0^\mu - n_1 V_1^\mu) &\approx 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

El hamiltoniano canónico es

$$H_C = \pi_n \dot{n} + \pi_{n_1} \dot{n}_1 + p_\mu \dot{x}^\mu + p_\mu^a \dot{V}_a^\mu - L, \quad (7.33)$$

eliminando las velocidades y reescribiendo la expresión del lagrangiano obtenemos

$$H_C = \frac{1}{2n} \left[ -\frac{1}{T} V_0^2 + 2n_1 \left( \frac{1}{T} V_0^\mu V_{1\mu} - V_0^\mu x'_\mu \right) + (n_1^2 - n^2) h_{11} \right]. \quad (7.34)$$



Con el hamiltoniano canónico construimos ahora el hamiltoniano de Dirac (o total) que es la extensión fuera de la superficie de constricción primaria del hamiltoniano canónico,

$$H_D = H_C + \lambda_n \pi_n + \lambda_{n_1} \pi_{n_1} + \lambda_a^\mu p_\mu^2 + \lambda^\mu \left( p_\mu + \frac{1}{n} (V_0^\mu - n_1 V_1^\mu) \right), \quad (7.35)$$

donde  $\lambda_a^\mu$ ,  $\lambda_n$  y  $\lambda_{n_1}$  son multiplicadores de Lagrange.

Ahora obtenemos las constricciones secundarias estabilizando las constricciones primarias (7.32) con el hamiltoniano de Dirac

$$\begin{aligned} \{\pi_n, H_D\} &= \left[ -\frac{1}{T} V_0^2 + 2n_1 \left( \frac{1}{T} V_0^\mu V_{1\mu} + V_0^\mu x'_\mu \right) + (n_1^2 - n^2) h_{11} \right] \\ &\quad + 2n^2 h_{11} + 2\lambda_\mu (V_0^\mu - n_1 V_1^\mu) = 0 \\ \{\pi_{n_1}, H_D\} &= n_1 h_{11} - \lambda^\mu V_{1\mu} = 0 \\ \{p_\mu^0, H_D\} &= -\frac{1}{T} V_{0\mu} + n_1 \left( \frac{1}{T} V_{1\mu} - x'_\mu \right) + \lambda_\mu = 0 \\ \{p_\mu^1, H_D\} &= \left[ \frac{n_1}{T} V_{0\mu} + (n_1^2 - n^2) \left( -\frac{1}{T} V_{1\mu} + x'_\mu \right) \right] - n_1 \lambda_\mu = 0 \\ \left\{ p_\mu + \frac{1}{n} (V_0^\mu - n_1 V_1^\mu), H_D \right\} &= \partial_\sigma \left( \frac{n_1^2 - n^2}{n} V_{1\mu} - \frac{n_1}{n} V_{0\mu} \right) + \frac{\lambda_{0\mu}}{n} - \frac{n_1}{n} \lambda_{1\mu} \\ &\quad - \frac{\lambda_n}{n^2} (V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}) - \frac{\lambda_{n_1}}{n} V_{1\mu} = 0 \end{aligned}$$

donde las dos últimas estabilizaciones despejan los multiplicadores de Lagrange, ( $\lambda_{0\mu}$  o  $\lambda_{1\mu}$ ) y  $\lambda_\mu$ , y de las otras estabilizaciones obtenemos la constricción secundaria y las otras estabilizaciones nos conducen a la siguiente constricción secundaria

$$x'_\mu - \frac{1}{T} V_{1\mu} \approx 0. \quad (7.36)$$

El despeje del multiplicador de Lagrange

$$\lambda_\mu = \frac{1}{T} V_{0\mu}, \quad (7.37)$$

nos servirá para reescribir las constricciones para poderlas separar en constricciones de primera y segunda clase.

La superficie de constricción queda definida en el espacio fase completo por las

constricciones

$$\begin{aligned}
 \pi_n &\approx 0, & \pi_{n_1} &\approx 0, & p_\mu^a &\approx 0, \\
 p_\mu + \frac{1}{n}(V_0^\mu - n_1 V_1^\mu) &\approx 0, \\
 x'_\mu - \frac{1}{T} \dot{V}_{1\mu} &\approx 0, \\
 (n^2 - n_1^2) \frac{V_1^2}{T} + \frac{V_0^2}{T} - \frac{2n_1}{T} (V_{0\mu} V_1^\mu - T V_0^\mu x'_\mu) &\approx 0, \\
 n_1 h_{11} - \frac{1}{T} V_0^\mu V_{1\mu} &\approx 0.
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

La separación de las constricciones en primera y segunda clase será una labor complicada como veremos en los siguientes cálculos.

La superficie de restricción puede reescribirse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 \pi_n &\approx 0, & \pi_{n_1} &\approx 0, & p_\mu^a &\approx 0, \\
 p_\mu + \frac{1}{n}(V_0^\mu - n_1 V_1^\mu) &\approx 0, \\
 x'_\mu - \frac{1}{T} \dot{V}_{1\mu} &\approx 0, \\
 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} p^2 + T x'^2 \right) &\approx 0, \\
 p_\mu x'^\mu &\approx 0.
 \end{aligned} \tag{7.39}$$

Antes de hacer la separación en constricciones de primera y segunda clase, obtendremos los parentesis de Poisson entre cada una de las variables del espacio configuración y sus respectivas variables canónicas conjugadas. Entonces para las variables ADM tenemos

$$\begin{aligned}
 \{n, \pi_n\} &= 1, & \{n_1, \pi_{n_1}\} &= 1, \\
 \{n, \pi_{n_1}\} &= \{n_1, \pi_n\} = \{n, n_1\} = \{\pi_n, \pi_{n_1}\} = 0,
 \end{aligned}$$

ahora para los campos auxiliares de la teoría tenemos

$$\begin{aligned}
 \{V_{0\mu}(\sigma), p^{0\nu}(\sigma')\} &= \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma'), & \{V_{1\mu}(\sigma), p^{1\nu}(\sigma')\} &= \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') \\
 \{V_{0\mu}(\sigma), p^{1\nu}(\sigma')\} &= \{V_{1\mu}(\sigma), p^{0\nu}(\sigma')\} = 0 \\
 \{V_{0\mu}(\sigma), V_{1\nu}(\sigma')\} &= \{V_{1\mu}(\sigma), V_{1\nu}(\sigma')\} = \{V_{0\mu}(\sigma), V_{0\nu}(\sigma')\} = 0, \\
 \{p_{0\mu}(\sigma), p_{1\nu}(\sigma')\} &= \{p_{1\mu}(\sigma), p_{1\nu}(\sigma')\} = \{p_{0\mu}(\sigma), p_{0\nu}(\sigma')\} = 0,
 \end{aligned}$$

y finalmente para las variables de espacio-tiempo tenemos

$$\begin{aligned}
 \{x^\mu(\sigma), p_\nu(\sigma')\} &= \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), \\
 \{x'^\mu(\sigma), p_\nu(\sigma')\} &= \delta_\nu^\mu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma').
 \end{aligned}$$

Con estas reglas ya podemos calcular el paréntesis de Poisson entre cada una de las constricciones.

Ahora realizaremos el análisis del álgebra de constricciones para separarlas en primera y segunda clase.

Primero denotaremos todas las constricciones como sigue:

$$C_1 : \pi_n \approx 0 \quad (7.40)$$

$$C_2 : \pi_{n_1} \approx 0 \quad (7.41)$$

$$C_3 : p^{0\mu} \approx 0 \quad (7.42)$$

$$C_4 : p^{1\mu} \approx 0 \quad (7.43)$$

$$C_5 : p_\mu + \frac{1}{n}(V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}) \approx 0 \quad (7.44)$$

$$C_6 : x^\mu - \frac{1}{T} V_{1\mu} \approx 0 \quad (7.45)$$

$$C_7 : \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} p^2 + T x^2 \right) \approx 0 \quad (7.46)$$

$$C_8 : p_\mu x^\mu \approx 0 \quad (7.47)$$

al hacer el paréntesis de Poisson entre estas constricciones, usando este orden obtenemos la siguiente matriz

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & E & 0 & 0 \\ -A & -B & -C & -D & 0 & F & G & H \\ 0 & 0 & 0 & -E & -F & 0 & I & J \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G & -I & L & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H & -J & -K & M \end{pmatrix}$$

cuyas entradas son  $\{C_i, C_j\}$ , donde tenemos que cada elemento esta dado por

$$A : \frac{1}{n^2}(V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu})$$

$$B : \frac{1}{n} V_{1\mu}$$

$$C : -\frac{1}{n}$$

$$D : \frac{n_1}{n}$$

$$E : \frac{1}{T}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
 F &: -\delta'(\sigma - \sigma') \\
 G &: -T^2 x'_\mu \delta'(\sigma - \sigma') \\
 H &: p_\mu \delta'(\sigma - \sigma') \\
 I &: p_\mu \delta'(\sigma - \sigma') \\
 J &: x'_\mu \delta'(\sigma - \sigma') \\
 K &: [h(\sigma) + h(\sigma')] \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') \\
 L &: [h_1(\sigma) + h_1(\sigma')] \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') \\
 M &: [h_1(\sigma) + h_1(\sigma')] \delta'_\sigma(\sigma - \sigma').
 \end{aligned}$$

La matriz cuyos elementos son los antes mencionados, se puede reducir al hacer operaciones de equivalencia sobre ella (multiplicar por una función un renglón, sumar o restar renglones).

Lo que deseamos hacer es obtener el mayor número de ceros en la matriz  $G_{ab}$ , para así obtener la redefinición de constricciones que hace la separación entre constricciones de primera clase y segunda clase.

Empezamos con las más fáciles. Si multiplicamos por  $V_{1\mu}$  al renglón que tiene el elemento  $C$  y se lo sumamos al renglón que tiene el elemento  $B$  obtenemos un cero, que es equivalente a multiplicar la restricción (7.42) por  $V_{1\mu}$  y sumársela a la restricción (7.41), obteniendo la redefinición de la restricción (7.41) como

$$p^{0\mu} V_{1\mu} + \pi_{n_1} \approx 0,$$

ahora si multiplicamos por  $\frac{1}{n}(V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu})$  al elemento  $C$  y se lo sumamos al elemento  $A$  obtenemos otro cero, que es equivalente a redefinir la restricción (7.40) como

$$\frac{1}{n} p^{0\mu} (V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}) + \pi_n \approx 0,$$

por este mismo método obtenemos la redefinición de la restricción (7.43) como

$$n_1 p^{0\mu} + p^{1\mu} \approx 0.$$

Finalmente al hacer estos cálculos llegamos a una matriz equivalente a la anterior  $G_{ab}$  que tiene la siguiente forma

$$G'_{ab} = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & -\delta'_\sigma & -T^2 x'_\mu \delta'_\sigma & p_\mu \delta'_\sigma & \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T} & \delta'_\sigma & 0 & p_\mu \delta'_\sigma & x'_\mu \delta'(\sigma - \sigma') & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & T^2 x'_\mu \delta'_\sigma & -p_\mu \delta'_\sigma & M & K & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -p_\mu \delta'_\sigma & -x'_\mu \delta'_\sigma & -K & L &
 \end{pmatrix}.$$

de donde se obtuvo la redefinición para las constricciones (7.40), (7.41) y (7.43) como

$$\pi_n + \frac{1}{n} p^{0\mu} (V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}) \approx 0, \quad (7.48)$$

$$\pi_{n_1} + p^{0\mu} V_{1\mu} \approx 0, \quad (7.49)$$

$$p^{1\mu} + n_1 p^{0\mu} \approx 0, \quad (7.50)$$

respectivamente.

De igual forma, esta matriz se puede reducir más si hacemos las redefiniciones de las constricciones (7.46) y (7.47), obteniendo la siguiente redefinición de constricciones:

$$H : \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} p^2 + T x^2 \right) + \frac{1}{n} (V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}) (n_1 p^{0\mu} + p^{1\mu})' + n V_{1\mu} (p^{0\mu})' \approx 0 \quad (7.51)$$

$$H_1 : p_{\mu} x'^{\mu} - V_{1\mu} (n_1 p^{0\mu} + p^{1\mu})' - (V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}) (p^{0\mu})' \approx 0, \quad (7.52)$$

y sus paréntesis de Poisson entre sí son:

$$\alpha = \{H(\sigma), H(\sigma')\} = [H(\sigma) + H_1(\sigma')] \delta'_\sigma (\sigma - \sigma') \quad (7.53)$$

$$\beta = \{H(\sigma), H_1(\sigma')\} = [H(\sigma) + H(\sigma')] \delta'_\sigma (\sigma - \sigma') \quad (7.54)$$

$$\alpha = \{H_1(\sigma), H_1(\sigma')\} = [H_1(\sigma) + H_1(\sigma')] \delta'_\sigma (\sigma - \sigma'), \quad (7.55)$$

los cuales resultan ser el álgebra de la cuerda que ya conocemos del capítulo 4, donde además sabemos que  $H$  y  $H_1$  son constricciones de primera clase, es decir, el paréntesis de estas constricciones con cualquier otra es cero, o es igual a una construcción ya conocida<sup>1</sup>. Entonces con las redefiniciones de las constricciones la matriz se simplifica a la siguiente:

$$G''_{ab}(\sigma, \sigma') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n} \delta(\sigma, \sigma') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T} \delta(\sigma, \sigma') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} \delta(\sigma, \sigma') & 0 & 0 & -\delta'_{\sigma'}(\sigma, \sigma') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T} \delta(\sigma, \sigma') & \delta'_\sigma(\sigma, \sigma') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $G''_{ab}$  es una matriz equivalente a  $G_{ab}$ , la ventaja de  $G''_{ab}$  es que tenemos claramente identificadas cuales son constricciones de primera clase y cuales son constricciones de segunda clase<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Esta afirmación puede verse en el apéndice.

<sup>2</sup> en esta última matriz los nuevos ceros que aparecen son ceros que vienen de constricciones, viene demostrado en el apéndice.

Por lo tanto las constricciones de primera clase son  $H$  y  $H_1$  obtenidas anteriormente, y las constricciones de segunda clase son:

$$\chi_1 = p^{0\mu} \approx 0 \quad (7.56)$$

$$\chi_2 = p^{1\mu} + n_1 p^{0\mu} \approx 0 \quad (7.57)$$

$$\chi_3 = p_\mu + \frac{1}{n} (V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}) \approx 0 \quad (7.58)$$

$$\chi_4 = x'_\mu - \frac{1}{T} V_{1\mu} \approx 0. \quad (7.59)$$

Antes de calcular el paréntesis de Dirac, veamos una forma equivalente de obtener los paréntesis de Poisson entre las constricciones ya redefinidas. Si densitizamos las constricciones con un parámetro  $\xi(\sigma)$  podemos calcular el álgebra de constricciones, teniendo control sobre cada uno de los pasos algebraicos.

Para empezar definimos la densitización de una construcción como

$$R[\xi] = \int_\sigma \xi(\sigma) R(x, p), \quad (7.60)$$

con la que podemos expresar

$$[R(\sigma) + R(\sigma')] \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') \quad (7.61)$$

como la siguiente expresión densitizada

$$\int_\sigma (\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2) R(x, p) = R[\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2]. \quad (7.62)$$

Esto permite mayor claridad al hacer los cálculos. Aquí presentaré sólo los resultados de cada paréntesis de Poisson <sup>3</sup>, empezamos viendo los resultados de los paréntesis de Poisson entre las constricciones densitizadas  $H$  y  $H_1$

$$\{H[\xi_1], H[\xi_2]\} = H_1[\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2] \quad (7.63)$$

$$\{H[\xi_1], H_1[\xi_2]\} = H[\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2] \quad (7.64)$$

$$\{H_1[\xi_1], H_1[\xi_2]\} = H_1[\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2]. \quad (7.65)$$

También el paréntesis de Poisson entre las constricciones ( $H, H_1$ ) y las constricciones de segunda clase  $\chi_3$  y  $\chi_4$  nos da como resultado constricciones. Primero hacemos  $H$  con las constricciones  $\chi_3$  y  $\chi_4$

$$\{H[\xi_1], \chi_3[\xi_2]\} = T \chi_4[\xi_1 \xi'_2], \quad (7.66)$$

$$\{H[\xi_1], \chi_4[\xi_2]\} = \frac{1}{T} \chi_3[\xi_1 \xi'_2], \quad (7.67)$$

<sup>3</sup>para ver con más detalle los cálculos del paréntesis de Poisson entre las constricciones densitizadas ver el apéndice.

y ahora hacemos  $H_1$  con las constricciones  $\chi_3$  y  $\chi_4$

$$\{H_1[\xi_1], \chi_3[\xi_2]\} = \chi_3[\xi_1, \xi_2], \quad (7.68)$$

$$\{H_1[\xi_1], \chi_4[\xi_2]\} = \chi_4[\xi_1, \xi_2], \quad (7.69)$$

que representa un resultado curioso, ya que como podemos ver el paréntesis de Poisson de  $H$  con  $\chi_3$  y  $\chi_4$  nos regresa a las constricciones  $\chi_3$  y  $\chi_4$  rotadas y con el factor  $T$  por  $1/T$ . Mientras que el paréntesis de Poisson de  $H_1$  con  $\chi_3$  y  $\chi_4$  nos regresa a las mismas constricciones, como si fuera una identidad. Por último hacemos lo mismo pero para las constricciones  $\chi_1$  y  $\chi_2$ . Entonces  $H$  con  $\chi_1$  y  $\chi_2$  nos da

$$\{H[\xi_1], \chi_1[\xi_2]\} = (\partial_\sigma \chi_2)[\xi_1, \xi_2], \quad (7.70)$$

$$\{H[\xi_1], \chi_2[\xi_2]\} = (\partial_\sigma \chi_1)[\xi_1, \xi_2], \quad (7.71)$$

y ahora  $H_1$  con  $\chi_1$  y  $\chi_2$  tenemos

$$\{H_1[\xi_1], \chi_1[\xi_2]\} = -\partial_\sigma \chi_1[\xi_1, \xi_2], \quad (7.72)$$

$$\{H_1[\xi_1], \chi_2[\xi_2]\} = -\partial_\sigma \chi_2[\xi_1, \xi_2], \quad (7.73)$$

que da nuevamente un resultado curioso. Lo importante aquí es que las constricciones  $H$  y  $H_1$  son constricciones de primera clase, y las constricciones  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$  y  $\chi_4$  son constricciones de segunda clase.

Ahora calculamos el paréntesis de Dirac. Primero obtenemos la matriz  $C_{ab}$  de los paréntesis de Poisson entre las constricciones de segunda clase; la matriz directa es

$$C_{ab}(\sigma - \sigma') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{n}\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T}\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma') \\ \frac{1}{n}\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma') & 0 & 0 & -\delta_\nu^\mu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') \\ 0 & -\frac{1}{T}\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma') & \delta_\nu^\mu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') & 0 \end{pmatrix}$$

y su matriz inversa es:

$$C^{ab}(\sigma - \sigma') = \begin{pmatrix} 0 & nT\delta_\nu^\mu \delta'_\sigma(\sigma, \sigma') & n\delta_\nu^\mu \delta(\sigma, \sigma') & 0 \\ -nT\delta_\nu^\mu \delta'_\sigma(\sigma, \sigma') & 0 & 0 & -T\delta_\nu^\mu \delta(\sigma, \sigma') \\ -n\delta_\nu^\mu \delta(\sigma, \sigma') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T\delta_\nu^\mu \delta(\sigma, \sigma') & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde el paréntesis de Dirac queda dado por

$$\begin{aligned} \{A(\sigma), B(\sigma')\}^* &= \{A(\sigma), B(\sigma')\} \\ &- \int \int \{A(\sigma), \chi_a(\sigma'')\} C^{ab}(\sigma'', \sigma''') \{\chi_b(\sigma'''), B(\sigma')\} d\sigma'' d\sigma''' \end{aligned} \quad (7.74)$$

donde introduciendo las constricciones obtenemos

$$\begin{aligned}
 \{A(\sigma), B(\sigma')\}^* &= \{A(\sigma), B(\sigma')\} \\
 &- \int \int \{A(\sigma), p_{0\mu}(\sigma'')\} n T \delta'_{\sigma''}(\sigma'' - \sigma''') \{n_1 p^{0\mu} + p^{1\mu}, B(\sigma')\} d\sigma'' d\sigma''' \\
 &- \int \{A(\sigma), p^{0\mu}(\sigma'')\} n \{p_\mu + \frac{1}{n}(V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}), B(\sigma')\} d\sigma'' \\
 &+ \int \int \{A(\sigma), n_1 p^{0\mu} + p^{1\mu}\} n T \delta'_{\sigma''}(\sigma'' - \sigma''') \{p_{0\mu}(\sigma'''), B(\sigma')\} d\sigma'' d\sigma''' \\
 &+ T \int \{A(\sigma), (n_1 p^{0\mu} + p^{1\mu})(\sigma'')\} \{x'_\mu - \frac{1}{T} V_{1\mu}(\sigma''), B(\sigma')\} d\sigma'' \\
 &+ \int \{A(\sigma), (p_\mu + \frac{1}{n}(V_{0\mu} - n_1 V_{1\mu}))(\sigma'')\} n \{p^{0\mu}(\sigma''), B(\sigma')\} d\sigma'' \\
 &- T \int \{A(\sigma), (x'_\mu - \frac{1}{T} V_{1\mu})\} \{(n_1 p^{0\mu} + p^{1\mu}), B(\sigma')\} d\sigma''. \quad (7.75)
 \end{aligned}$$

que es el paréntesis de Dirac completo de la cuerda bosónica sin imponer ninguna norma. Como veremos después, al imponerle la norma conforme  $n = 1$  y  $n_1 = 0$ , obtendremos una simplificación en el paréntesis de Dirac.

Además se ha checado que el paréntesis de Dirac obtenido anteriormente, cumple con la propiedad de que las constricciones de segunda clase de la teoría son funciones de Casimir de este paréntesis.

El paréntesis de Dirac entre las variables  $x_\mu$  y  $V_{0\mu}$  es el siguiente

$$\{x^\mu(\sigma), V_{0\nu}(\sigma')\}^* = -n \delta'_\nu{}^\mu \delta(\sigma - \sigma'). \quad (7.76)$$

La norma conforme nos ayudara a simplificar las constricciones, y al mismo tiempo nos ayuda a ver las simetrías de la transformación de dualidad con mucho mayor facilidad. Al introducir la norma conforme  $n = 1$  y  $n_1 = 0$  a las constricciones (7.38) obtenemos las siguientes constricciones:

$$p_\mu^a = 0 \quad (7.77)$$

$$p_\mu + V_0^\mu = 0 \quad (7.78)$$

$$x'_\mu - \frac{1}{T} V_{1\mu} = 0 \quad (7.79)$$

$$\frac{1}{T} (V_0^2 + V_1^2) = 0 \quad (7.80)$$

$$\frac{1}{T} V_0^\mu V_{1\mu} = 0, \quad (7.81)$$

y observamos que en estas constricciones ya no aparecen las constricciones  $\pi_n = 0$  y  $\pi_{n_1} = 0$ .

Al imponer esta norma, el paréntesis de Dirac también se ve reducido, y a este nivel se puede hacer una comparación con el paréntesis de Dirac dual asociado a este. Este análisis se hará en la sección 3 de este capítulo.



### 7.1.5. Conteo de los grados de libertad para la acción de primer orden.

Los grados de libertad de la cuerda bosónica de Polyakov en el espacio fase son  $2(D - 2)$  grados de libertad.

Ahora el conteo de los grados de libertad de la cuerda bósónica es fácil, ya que con todas las variables de espacio tiempo  $x_\mu = D$  y sus momentos conjugados  $p^\nu = D$  los campos auxiliares  $V_a^\mu = 2D$  y sus momentos conjugados  $p_a^\mu = 2D$  las variables  $n$  y  $n_1$  con sus momentos conjugados  $\pi_n$  y  $\pi_{n_1}$  dandonos en total en el espacio fase  $6D + 4$  dimensiones las constricciones de segunda clase son  $4D$  y las constricciones de primera clase son 4

$$g.l. = 6D + 4 - 4D - 8 = 2D - 4 = 2(D - 2) \quad (7.82)$$

que es consistente con los grados de libertad de la cuerda bosónica en el espacio fase.

## 7.2. La acción de Polyakov dual de primer orden.

A diferencia del caso electromagnético, que hemos estudiado en detalle en capítulos anteriores, la cuerda bosónica presenta ciertas peculiaridades que impiden la construcción de un generador canónico local de la transformación de Dualidad. Por transformación de dualidad para la cuerda bosónica entendemos aquí la transformación  $P \leftrightarrow X'$  que en el espacio fase original  $P, X$  resultará claramente no local.

Esta transformación de dualidad es la base de la dualidad T que es ahora de importancia fundamental para entender ciertas características no perturbativas de la teoría de cuerdas.

La construcción que presentamos se realizará como sigue: partiendo de la acción de Polyakov original (7.1) definiremos la transformación de dualidad a nivel del espacio de configuración  $x, \gamma$ . Mostraremos que esta transformación de dualidad es una transformación de simetría para la función lagrangiana de la cuerda bosónica. El lagrangiano permanece invariante ante esta transformación. Es interesante notar que la transformación de dualidad mencionada es una transformación dinámica, en el sentido de que involucra coordenadas y sus derivadas respecto al espacio y al tiempo en la hoja de mundo de la cuerda. Esto complica el análisis de la construcción del generador canónico asociado a esta transformación.

El siguiente paso consiste en definir la acción de primer orden dual. Para ello extendaremos de manera simple la transformación de dualidad mencionada al espacio de configuración que contiene ahora a las variables  $V_a^\mu$ . Tal extensión es una transformación de escala. El factor de escala es la tensión de la cuerda.

Para realizar el correspondiente análisis canónico procederemos a construir la acción canónica asociada a la acción dual en el espacio fase definido por las variables ADM  $N, \Pi_N, N_1, \Pi_{N_1}$  y las variables de espacio tiempo  $X^\mu, P_\mu, U_{a\mu}, P^{a\mu}$ . Escribiremos

la transformación de dualidad en el espacio fase e identificaremos las constricciones de esta teoría mapeando las constricciones de la teoría original en las nuevas constricciones duales. Identificando las constricciones de segunda clase, construiremos el paréntesis de Dirac Dual y lo compararemos con el paréntesis de Dirac de la teoría original.

Por construcción la transformación de dualidad es una transformación canónica no local en el espacio fase. Para eliminar esta no localidad intrínseca realizaremos el análisis en el espacio  $X', P$ . En este espacio la transformación de dualidad es una transformación del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$  (donde  $d$  es la dimensión del espacio tiempo) definido por las matrices  $M$  de  $2d \times 2d$  que satisfacen la condición

$$M^t \Omega M = \Omega$$

donde

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.83)$$

es la métrica del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$ . Esta transformación es una simetría de la densidad hamiltoniana de la cuerda cerrada. No consideraremos en esta tesis el caso de la cuerda abierta [23]. Ante la cuantización, esta simetría se convierte en la simetría  $O(d, d, \mathbf{Z})$  [22, 34, 35] y es una simetría del espectro de la cuerda bosónica.

La transformación generada por este grupo es también la transformación canónica no local en el espacio  $X', P$ . Mostraremos que el generador de esta transformación es de tipo 1 y se puede escribir como  $TX'_\mu x^\mu$ .

Estas ideas pueden generalizarse al caso en que existe una métrica no trivial en el espacio tiempo y un tensor antisimétrico NS-NS  $B_{\mu\nu}$  [32, 33].

La transformación de dualidad antes mencionada, es la que uno desea implementar en las acciones de primer orden. Debido a que el hamiltoniano de la teoría presenta una simetría ante la transformación

$$\begin{aligned} p_\mu &\longleftrightarrow TX'_\mu \\ x'_\mu &\longleftrightarrow \frac{1}{T} P_\mu, \end{aligned} \quad (7.84)$$

es conveniente implementar la dualidad como una rotación de estas variables [17], [35]. Una vez que se tengan todos los elementos de esta transformación, veremos como se mapea el paréntesis de Dirac de la Teoría original a su dual.

### 7.2.1. La acción de primer orden dual

Para poder obtener la acción de primer orden dual, es necesario conocer la transformación de dualidad. Como se menciono anteriormente, la transformación de dualidad que se implementará sobre las variables de la teoría original, consiste en una rotación

de las variables  $x'$  y  $p$ . Esta transformación aplicada a la acción de primer orden puede construirse observando que

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_a x^\mu = \epsilon^{bc}\partial_c X^\mu, \quad (7.85)$$

es una transformación de simetría para el lagrangiano de Polyakov <sup>4</sup>. Esto es fácil de probar, si uno multiplica por  $\partial_b x_\mu$  del lado derecho de la ecuación anterior. Al hacer esto obtenemos

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_a x^\mu\partial_b x_\mu = \epsilon^{bc}\partial_c X^\mu\partial_b x_\mu, \quad (7.86)$$

e identificando a

$$\partial_b x_\mu = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\epsilon^{dc}\gamma_{db}\partial_c X_\mu \quad (7.87)$$

y al sustituirlo en la ecuación (7.86) obtenemos

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_a x^\mu\partial_b x_\mu = \sqrt{-\Gamma}\Gamma^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu, \quad (7.88)$$

por lo cual, la transformación de dualidad (7.85), es una simetría de la lagrangiana de Polyakov.

Al hacer esta transformación, y encontrar que es una simetría de la lagrangiana de Polyakov, encontramos que la métrica de la hoja mundo no sufre cambios por la transformación; entonces, la transformación de dualidad de todos los campos se ve reflejada por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_a x^\mu &= \epsilon^{bc}\partial_c X^\mu, \\ \gamma_{ab} &= \Gamma_{ab}, \\ V_a^\mu &= T U_a^\mu, \end{aligned} \quad (7.89)$$

donde los campos auxiliares  $V$  pasan directamente a los campos auxiliares  $U$  duales, donde el factor  $T$  tiene dimensiones de inverso de área. Además la geometría intrínseca  $\gamma_{ab}$  de la teoría original y su dual  $\Gamma_{ab}$  es la misma, por lo tanto en las siguientes secciones ya no se hará referencia a este sector de la transformación.

Partimos de la acción de primer orden original (7.1), con la métrica inducida  $h_{ab}$ . Al aplicar la transformación de dualidad (7.89) a esta acción obtenemos

$$\hat{S} = -T \int \left( \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} U_a^\mu U_{b\mu} - U_{b\mu} \epsilon^{bc} \partial_c X^\mu \right) d^2 \zeta, \quad (7.90)$$

que es la acción de primer orden dual, que tiene una dependencia funcional de  $\gamma^{ab}$ ,  $U_{a\mu}$  y  $X^\mu$ . A partir de esta acción obtenemos las ecuaciones de movimiento para cada variable. Primero hagamos las variaciones correspondientes a la variable  $X^\mu$

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = 0 \iff \partial_a (\epsilon^{ab} U_{b\mu}) = 0, \quad (7.91)$$

<sup>4</sup> $\epsilon_{ab}$  es el tensor de Levi-Civita en la hoja mundo curva, ver apéndice para convenciones.

ahora las variaciones respecto a  $U_{a\mu}$  son

$$\frac{\delta S}{\delta U_{a\mu}} = 0 \iff \sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}U_{b\mu} - \epsilon^{ab}\partial_b X_\mu = 0. \quad (7.92)$$

Las variaciones respecto a  $\gamma^{ab}$  nos llevan a que  $\gamma_{ab}$  es proporcional a  $h_{ab}$

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma^{ab}} = 0 \iff \frac{T}{2}\sqrt{-\gamma}\left(\frac{1}{2}\gamma^{cd}\gamma^{ab} - \gamma^{ac}\gamma^{bd}\right)U_a^\mu U_{b\mu} = 0. \quad (7.93)$$

Estas ecuaciones de movimiento, pueden ser comparadas con las que se obtuvieron con la acción de primer orden. Como vemos la ecuación de movimiento correspondiente a la variable  $\gamma^{ab}$  no sufrió cambios. Sin embargo (7.91) y (7.92) se ven alteradas por la transformación de dualidad. En particular (7.91) es una identidad de Bianchi para la teoría original, y la ecuación de movimiento generada por la teoría original  $\partial^\alpha V_{\alpha\mu} = 0$  es una identidad de Bianchi en las variables  $U_{a\mu}$ . Por tanto esta transformación intercambia ecuaciones de movimiento por identidades de Bianchi como la dualidad electromagnética. Además de la ecuación de movimiento (7.92) podemos despejar algebraicamente la variable  $U_\mu$ , que nos da como resultado

$$U_a^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{ab}\epsilon^{bc}\partial_c X^\mu. \quad (7.94)$$

Como se ha mencionado varias veces en esta tesis, cuando un campo se puede despejar algebraicamente de sus ecuaciones de movimiento, esta variable se puede sustituir en la acción sin alterar el contenido dinámico de la teoría.

Entonces al sustituir (7.94) en la acción de primer orden dual, e identificando como transforma  $\partial_a X^\mu$  en términos de la transformación de dualidad, uno regresa a la acción de Polyakov original. Probando con esto que la acción de primer orden dual contiene la información dinámica de la cuerda clásicamente.

En esta sección se utilizará la transformación de dualidad (7.89), y la separación de constricciones de la teoría original. Entonces el mapeo generado por la transformación de dualidad, llevará todas las constricciones de segunda clase de la teoría original a las constricciones de segunda clase de la teoría dual. Una vez que se tienen las constricciones de segunda clase, se construye el paréntesis de Dirac de la teoría dual.

Antes de hacerlo, veamos las constricciones primarias que genera la acción de primer orden dual. Para esto se hace uso de la definición de los momentos generalizados, obteniendo como resultado las siguientes constricciones primarias

$$P^\mu - T U_1^\mu = 0 \quad (7.95)$$

$$P^{a\mu} = 0. \quad (7.96)$$

Para identificar el mapeo que genera la transformación de dualidad, es necesario desarrollar la transformación (7.85) en sus componentes espaciales y temporales. De

la acción original sabemos que el momento se escribe como

$$p^\mu = \sqrt{-\gamma} \gamma^{a0} V_a^\mu = T \sqrt{-\gamma} (\gamma^{00} \dot{x}^\mu + \gamma^{10} x'^\mu) \quad (7.97)$$

en donde todos los valores de  $\gamma^{ab}$  estan dados en términos de las variables ADM que se vieron en la sección anterior. De la ecuación (7.85) se sigue la siguiente relación

$$\sqrt{-\gamma} \gamma^{a0} \partial_a x^\mu = \epsilon^{0b} \partial_b X^\mu, \quad (7.98)$$

y sustituyendo el momento (7.97) en la ecuación anterior, encontramos que la transformación de dualidad implementa la transformación

$$\frac{1}{T} p^\mu = X'^\mu. \quad (7.99)$$

Por otra parte, tenemos la constricción primaria (7.95) y las variables  $U_{a\mu}$ , las cuales nos dicen como transforma  $x'^\mu$  en términos del momento  $P^\mu$ . En primer lugar la variable  $\dot{X}^\mu$  esta escrita en términos de la transformación de dualidad por

$$\sqrt{-\gamma} (\gamma^{01} \dot{x}^\mu + \gamma^{11} x'^\mu) = -\dot{X}^\mu. \quad (7.100)$$

Del despeje algebraico (7.94), obtenemos el valor de  $U_1^\mu$  en términos de  $\dot{X}^\mu$  y  $X'^\mu$  como

$$U_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} (\gamma_{10} \dot{X}^\mu - \gamma_{11} \dot{X}^\mu), \quad (7.101)$$

la cual es sustituida en la constricción de segunda clase  $P^\mu - T U_1^\mu = 0$  para obtener  $\dot{X}^\mu$  en términos de  $P^\mu$  y  $X'^\mu$  como

$$\dot{X}^\mu = -\frac{\sqrt{-\gamma}}{T \gamma_{11}} P^\mu + \frac{\gamma_{10}}{\gamma_{11}} X'^\mu. \quad (7.102)$$

Ahora tenemos todos los elementos para encontrar la transformación de la variable  $x'^\mu$ . Despejamos  $\dot{x}^\mu$  de la ecuación (7.97), y sustituimos este despeje en (7.100), de lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-\gamma} \left[ \gamma^{01} \left( \frac{P^\mu}{T \gamma^{00} \sqrt{-\gamma}} - \frac{\gamma^{10} x'^\mu}{\gamma^{00}} \right) + \gamma^{11} x'^\mu \right] &= - \left( -\frac{\sqrt{-\gamma}}{T \gamma_{11}} P^\mu + \frac{\gamma_{10}}{\gamma_{11}} X'^\mu \right) \\ \sqrt{-\gamma} \left[ \frac{\gamma^{01} P^\mu}{T \gamma^{00} \sqrt{-\gamma}} + (\gamma^{11} \gamma^{00} - (\gamma^{10})^2) \frac{x'^\mu}{\gamma^{00}} \right] &= - \left( -\frac{\sqrt{-\gamma}}{T \gamma_{11}} P^\mu + \frac{\gamma_{10}}{T \gamma_{11}} P^\mu \right) \\ \left( \frac{\gamma^{01}}{\gamma^{00}} + \frac{\gamma_{10}}{\gamma_{11}} \right) \frac{P^\mu}{T} + \frac{\sqrt{-\gamma} x'^\mu}{\gamma \gamma^{00}} &= \frac{\sqrt{-\gamma} P^\mu}{T \gamma_{11}}, \end{aligned} \quad (7.103)$$

y usando las relaciones que tienen  $\gamma^{ab}$  y  $\gamma_{ab}$ , se obtiene de que la transformación de la variable  $x'^\mu$  es

$$x'^\mu = \frac{1}{T} P^\mu, \quad (7.104)$$

completando con esto la transformación de dualidad de cada una de las variables, que me permitirá obtener las constricciones de segunda clase duales.

La transformación de dualidad esta implementada por el siguiente mapeo

$$\begin{aligned}
 n &\longleftrightarrow N, \\
 n_1 &\longleftrightarrow N_1, \\
 \pi_n &\longleftrightarrow \Pi_N, \\
 \pi_{n_1} &\longleftrightarrow \Pi_{N_1}, \\
 p^{a\mu} &\longleftrightarrow P^{a\mu}, \\
 V_a^\mu &\longleftrightarrow TU_a^\mu, \\
 x'^\mu &\longleftrightarrow \frac{1}{T}P^\mu, \\
 p^\mu &\longleftrightarrow TX'^\mu,
 \end{aligned} \tag{7.105}$$

que nos lleva de las variables en la teoría original a las variables de la teoría dual.

Con el mapeo obtenido anteriormente, transformamos las constricciones de segunda clase de la teoría original (7.56), (7.57), (7.58) y (7.59) a las constricciones de segunda clase de la teoría dual.

La constricción (7.56) se transforma a la constricción dual

$$P^{0\mu} \approx 0, \tag{7.106}$$

la constricción (7.57) se transforma a la constricción dual

$$N_1 P^{0\mu} + P^{1\mu} \approx 0, \tag{7.107}$$

estas constricciones. se obtienen directamente de la teoría dual como constricciones primarias de la teoría. La constricción (7.58) se transforma a la constricción dual

$$TX'^\mu + \frac{T}{N}(U_{0\mu} - N_1 U_{1\mu}) \approx 0, \tag{7.108}$$

que es una constricción secundaria, que se obtiene de la estabilización de las constricciones primarias con el hamiltoniano total. Por ultimo la constricción (7.59) se transforma a la constricción dual

$$\frac{1}{T}P_\mu - U_{1\mu} \approx 0. \tag{7.109}$$

El mapeo que se aplicó a las constricciones de segunda clase en la teoría original, preserva el carácter de constricción de segunda clase, por lo tanto las constricciones obtenidas anteriormente para la teoría dual son constricciones de segunda clase.

De las constricciones de segunda clase de la teoría dual

$$\tilde{\chi}_1 = P^{0\mu} \approx 0, \quad (7.110)$$

$$\tilde{\chi}_2 = N_1 P^{0\mu} + P^{1\mu} \approx 0, \quad (7.111)$$

$$\tilde{\chi}_3 = T X'_\mu + \frac{T}{N}(U_{0\mu} - N_1 U_{1\mu}) \approx 0, \quad (7.112)$$

$$\tilde{\chi}_4 = \frac{1}{T} P^\mu - U_{1\mu} \approx 0, \quad (7.113)$$

construimos el paréntesis de Dirac. Para hacerlo, primero calculamos la matriz directa de las constricciones de segunda clase

$$\tilde{C}_{ab}(\sigma - \sigma') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{T}{N} \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') \\ \frac{T}{N} \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') & 0 & 0 & \delta_\mu^\nu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') \\ 0 & -\delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') & -\delta_\mu^\nu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') & 0 \end{pmatrix}$$

y su matriz inversa es:

$$\tilde{C}^{ab}(\sigma - \sigma') = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{N}{T} \delta_\mu^\nu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') & \frac{N}{T} \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') & 0 \\ \frac{N}{T} \delta_\mu^\nu \delta'_\sigma(\sigma - \sigma') & 0 & 0 & -\delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') \\ -\frac{N}{T} \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma') & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde el paréntesis de Dirac dual queda dado por

$$\begin{aligned} \{A(\sigma), B(\sigma')\}^* &= \{A(\sigma), B(\sigma')\} \\ &- \int \int \{A(\sigma), P_{0\mu}(\sigma'')\} \left( -\frac{N}{T} \delta'_{\sigma''}(\sigma'' - \sigma''') \right) \{N_1 P^{0\mu} + P^{1\mu}, B(\sigma')\} d\sigma'' d\sigma''' \\ &- \int \{A(\sigma), P^{0\mu}(\sigma'')\} N \left\{ X'_\mu + \frac{1}{N}(U_{0\mu} - N_1 U_{1\mu}), B(\sigma') \right\} d\sigma'' \\ &- \int \int \{A(\sigma), N_1 P^{0\mu} + P^{1\mu}\} \left( \frac{N}{T} \delta'_{\sigma''}(\sigma'' - \sigma''') \right) \{P_{0\mu}(\sigma''), B(\sigma')\} d\sigma'' d\sigma''' \\ &+ \frac{1}{T} \int \{A(\sigma), (N_1 P^{0\mu} + P^{1\mu})(\sigma'')\} \{ (P_\mu - T U_{1\mu})(\sigma''), B(\sigma') \} d\sigma'' \\ &+ \int \{A(\sigma), (X'_\mu + \frac{1}{N}(U_{0\mu} - N_1 U_{1\mu}))(\sigma'')\} N \{P^{0\mu}(\sigma''), B(\sigma')\} d\sigma'' \\ &- \frac{1}{T} \int \{A(\sigma), (P_\mu - T U_{1\mu})(\sigma'')\} \{ (N_1 P^{0\mu} + P^{1\mu}), B(\sigma') \} d\sigma''. \end{aligned} \quad (7.114)$$

que es el paréntesis de Dirac completo de la cuerda bosónica dual sin imponer ninguna norma. Como veremos en la siguiente sección, al imponerle la norma conforme  $N = 1$  y  $N_1 = 0$ , obtendremos una simplificación en el paréntesis de Dirac y en las constricciones.

El paréntesis de Dirac entre las variables  $X_\mu$  y  $U_{1\mu}$  es el siguiente

$$\{X^\mu(\sigma), U_{1\nu}(\sigma')\}^* = \frac{1}{T} \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.115)$$

que es el único elemento del paréntesis de Dirac dual que tiene estructura simpléctica de Poisson al dar como resultado  $\delta_\nu^\mu$ . Este resultado será comparado con el obtenido para la teoría original. Encontrando respecto a que estructura simpléctica la transformación de dualidad es canónica.

### 7.2.2. Conteo de los grados de libertad

Los grados de libertad de la cuerda dual son iguales a los grados de libertad de la cuerda  $2(D-2)$ .

Ahora el conteo de los grados de libertad de la cuerda bósónica dual es fácil de obtener, ya que son todas las variables del espacio fase están involucradas:  $X_\mu = D$  y sus momentos conjugados  $\Pi^\mu = D$ , los campos auxiliares  $U_\mu^a = 2D$  y sus momentos conjugados  $P_\mu^a = 2D$  las variables  $N$  y  $N_1$  con sus momentos conjugados  $\Pi_N$  y  $\Pi_{N_1}$  nos dan en total en el espacio fase  $6D + 4$  dimensiones las constricciones de segunda clase son  $4D$  y las constricciones de primera clase son 4

$$g.l. = 6D + 4 - 4D - 8 = 2D - 4 = 2(D - 2) \quad (7.116)$$

que es congruente, ya que la transformación de dualidad no debe cambiar los grados de libertad de la teoría.

## 7.3. Comparación entre la acción original y la acción dual de la cuerda bósónica.

En las dos secciones anteriores se ha analizado en detalle la acción de primer orden para la cuerda bósónica y su dual. Hemos encontrado, usando el formalismo de Dirac (capítulo 3), la superficie de restricción asociada a la teoría original de primer orden y su dual. Observamos que las superficies de restricción de la teoría original y su dual son diferentes entre sí (como superficie geométrica en el espacio fase respectivo). Esto tiene como consecuencia que los paréntesis de Dirac sean distintos uno del otro. También se ha mostrado que la teoría de cuerdas de primer orden y su dual describen la dinámica de la cuerda bósónica con  $(D-2)$  grados de libertad. Como se vió en la sección anterior, la lagrangiana es invariante ante la transformación de dualidad. De aquí concluimos que la transformación de dualidad que implementamos es una transformación de simetría para la teoría de cuerdas. Sin embargo, hemos encontrado al igual que en la teoría electromagnética, que desde el punto de vista del formalismo de Dirac las dos teorías tienen constricciones de segunda clase distintas, y



en consecuencia un paréntesis de Dirac distinto. Es objetivo de esta sección estudiar este fenómeno.

Veremos como la transformación de dualidad esta implementada en un espacio fase diferente al que se conoce usualmente. En este espacio la variable  $x^\mu = \partial_a x^\mu$  juega el papel de la variable  $x^\mu$ , es decir, la dualidad esta implementada como una rotación en las variables  $(x^\mu, p_\mu)$ , y no en las variables  $(x^\mu, p_\mu)$ . En este sentido la transformación de dualidad es una transformación de simetría del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$ , y al mismo tiempo es una transformación canónica de las variables  $(x^\mu, p_\mu)$ .

Analizaremos en detalle la transformación de dualidad en el espacio  $(x^\mu, p_\mu)$ , y aclararemos como esta transformación también es una transformación canónica no local en el espacio  $(x^\mu, p_\mu)$ . Como se mencionó en la teoría electromagnética, toda transformación puntual en el espacio de configuración puede extenderse como una transformación canónica en el espacio fase correspondiente. Desde esta perspectiva la transformación de dualidad así extendida es una transformación canónica respecto a la estructura simpléctica original del "espacio fase". A diferencia del caso electromagnético, la transformación de dualidad (7.105) no es puntual. Sin embargo es posible construir el generador de la transformación canónica respecto al espacio  $(x^\mu, p_\mu)$ .

Aquí encontramos que la transformación de dualidad así implementada es NO canónica respecto al paréntesis de Dirac, ya que éste se modifica debido a que la superficie de constricción cambia ante la transformación de dualidad. La dinámica a este nivel esta dada por el paréntesis de Dirac, y no por el paréntesis de Poisson estándar. Por lo que la estructura simpléctica relevante es el paréntesis de Dirac. Concluimos que la transformación de dualidad en el espacio fase completo es NO canónica respecto al paréntesis de Dirac.

A diferencia de la teoría electromagnética, aquí reducimos el espacio de una forma diferente. Imponemos la norma conforme  $n = N = 1$  y  $n_1 = N_1 = 0$ , e identificando de las constricciones de segunda clase los momentos  $p_\mu$ , encontramos que los paréntesis de Dirac se ven reducidos a la estructura simpléctica de Poisson estándar. Concluimos de este hecho que la transformación de dualidad es canónica respecto el paréntesis de Poisson.

### 7.3.1. Análisis de la transformación de dualidad.

Las relaciones entre la teoría original de primer orden y su dual están dadas por

$$\begin{aligned} \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a x^\mu &= \epsilon^{bc} \partial_c X^\mu, \\ V_a^\mu &= T U_a^\mu, \end{aligned} \quad (7.117)$$

donde  $x_\mu$  es la variable espacio-tiempo y  $V_{a\mu}$  son los campos auxiliares.

Observamos que es posible construir un mapeo entre las variables originales  $x_\mu, p^\mu, V_{a\mu}, p^{a\mu}$  y las variables que definen a la teoría dual  $X_\mu, P^\mu, U_{a\mu}, P^{a\mu}$ . Este mapeo transforma la acción original en la correspondiente dual, y por definición, este mapeo

es canónico respecto a la estructura de Poisson. En particular mapea una superficie de restricción en la otra y mapea los correspondientes paréntesis de Dirac. Este mapeo está dado por (7.105), y se construye usando la transformación de dualidad (7.117) y extendiendo la transformación a los momentos de manera consistente.

Como se vió en la sección anterior, las constricciones de segunda clase de la teoría original se mapean a las constricciones de segunda clase de la teoría dual por medio de la transformación (7.117), y por tanto el paréntesis de Dirac se mapea a su correspondiente paréntesis de Dirac dual. Estos paréntesis de Dirac contienen información de la estructura simpléctica a nivel del espacio fase completo, entonces hay variables de la teoría que nos dicen si la transformación es canónica en el espacio fase completo. El paréntesis de Dirac entre las variables relevantes de la teoría original es

$$\{x^\mu(\sigma), V_{0\nu}(\sigma')\}^* = -n\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.118)$$

y entre las variables relevantes de la teoría dual es

$$\{X^\mu(\sigma), U_{1\nu}(\sigma')\}^* = \frac{1}{T} \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.119)$$

observando que son diferentes entre sí. En consecuencia la transformación de dualidad es NO canónica respecto al paréntesis de Dirac. Pero al resolver las constricciones, y sustituir las variables  $V_{0\mu}$  y  $U_{1\mu}$  por sus respectivos momentos encontramos que los paréntesis de Dirac reducidos son

$$\{x^\mu(\sigma), -np_\nu(\sigma')\}^* = -n\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.120)$$

y el de la teoría dual es

$$\{X^\mu(\sigma), \frac{1}{T} P_\nu(\sigma')\}^* = \frac{1}{T} \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.121)$$

observando que cada uno por su cuenta preserva la estructura simpléctica de Poisson. De hecho, al hacer el paréntesis de Dirac entre las variables  $\{x^\mu, p_\nu\}^*$  en la teoría original y  $\{X^\mu, P_\nu\}^*$  en la teoría dual, uno encuentra que la estructura simpléctica de Dirac que sobrevive es la estructura simpléctica de Poisson estándar. De este análisis se concluye que la transformación de dualidad es una transformación canónica respecto al paréntesis de Poisson estándar.

Además a partir de este resultado uno puede construir una función generadora  $F_1$ , que implementa la transformación de dualidad canónica. Esta función generadora es similar a la que se encontró en el espacio reducido de la teoría electromagnética. La función generadora de la transformación canónica es

$$F_1(x^\mu, X_\mu) = T \int x^\mu X'_\mu d\sigma. \quad (7.122)$$

La función generadora (7.122), implementa la transformación de dualidad

$$p_\mu(\sigma) = \frac{\delta F_1(\sigma)}{\delta x^\mu(\sigma')} = TX'_\mu(\sigma) \quad (7.123)$$

$$P^\mu(\sigma) = -\frac{\delta F_1(\sigma)}{\delta X_\mu(\sigma')} = Tx'^\mu(\sigma), \quad (7.124)$$

que es la transformación de dualidad que se ha obtenido para las acciones de primer orden. Por lo tanto hemos aprendido que la transformación de dualidad en teoría de cuerdas que genera una rotación entre las variables  $(x^\mu, p_\mu)$  y  $(\frac{1}{T}P^\mu, TX'^\mu)$  es una transformación canónica no local respecto a la estructura simpléctica de Poisson.

### 7.3.2. La transformación de dualidad imponiendo la norma conforme.

En primer lugar las restricciones en la norma conforme quedan reducidas de tal forma, que es más fácil analizar la transformación de dualidad. Las restricciones de segunda clase de la teoría original se ven reducidas a

$$\chi_1 = p^{0\mu} \approx 0, \quad (7.125)$$

$$\chi_2 = p^{1\mu} \approx 0, \quad (7.126)$$

$$\chi_3 = p_\mu + V_{0\mu} \approx 0, \quad (7.127)$$

$$\chi_4 = x'^\mu - \frac{1}{T}V_{1\mu} \approx 0, \quad (7.128)$$

y las restricciones de segunda clase de la teoría dual se ven reducidas a

$$\chi_1 = P^{0\mu} \approx 0, \quad (7.129)$$

$$\chi_2 = P^{1\mu} \approx 0, \quad (7.130)$$

$$\chi_3 = TX'_\mu + TU_{0\mu} \approx 0, \quad (7.131)$$

$$\chi_4 = \frac{1}{T}P^\mu - U_{1\mu} \approx 0. \quad (7.132)$$

Estas restricciones se pueden escribir de forma compacta, identificando el vector

$$z_{a\mu} = (p_\mu, x'_\mu), \quad (7.133)$$

y su dual

$$Z_{a\mu} = (P_\mu, X'_\mu). \quad (7.134)$$

Entonces la transformación de dualidad que estamos estudiado

$$\begin{aligned} p_\mu &\longleftrightarrow TX'_\mu \\ x'_\mu &\longleftrightarrow \frac{1}{T}P_\mu, \end{aligned} \quad (7.135)$$

se puede ver como una rotación introduciendo la siguiente notación

$$\begin{pmatrix} p_\mu \\ x'_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ \frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\mu \\ X'_\mu \end{pmatrix}, \quad (7.136)$$

que se puede escribir de forma compacta como

$$z_{a\mu} = G_{ab} Z_\mu^b \quad (7.137)$$

donde la matriz que hace la rotación es un elemento del grupo de simetría  $O(d, d, \mathbf{R})$ , además esta matriz tiene como inverso a ella misma

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ \frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix} = G_{ab}^{-1}. \quad (7.138)$$

Como esta matriz implementa la rotación de los campos  $(x'^\mu, p_\mu)$  a los campos  $(\frac{1}{T}P^\mu, TX'_\mu)$ , donde el índice  $\mu$  corre de 0 a  $d-1$ , tenemos que la transformación de dualidad se implementa en  $2d$  campos, por lo que la matriz  $G_{ab}$  es una matriz de  $2d \times 2d$ , y todas las matrices en índices  $ab$  son matrices de  $2d \times 2d$ .

Los paréntesis de Poisson entre estas nuevas variables  $z_{a\mu}$  y  $Z_{a\mu}$  pueden escribirse en términos de la métrica del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$   $\Omega_{ab}$  como

$$\{z_{a\mu}(\sigma), z_b^\nu(\sigma')\} = \delta_\mu^\nu \Omega_{ab} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.139)$$

$$\{Z_{a\mu}(\sigma), Z_b^\nu(\sigma')\} = \delta_\mu^\nu \Omega_{ab} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.140)$$

observando que la transformación de dualidad deja invariante la estructura simpléctica en términos de la métrica del grupo de simetría  $O(d, d, \mathbf{R})$ , en este sentido el grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$  implementa la transformación de dualidad canónica en las variables  $(x'^\mu, p_\mu)$ .

Las constricciones (7.127) y (7.128) de la teoría original en norma conforme se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\mu \\ x'_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{0\mu} \\ \frac{1}{T}V_{1\mu} \end{pmatrix} = 0, \quad (7.141)$$

que se puede escribir como

$$\Omega_{ab} z_\mu^a + \epsilon_{ab} v_\mu^a = 0, \quad (7.142)$$

donde el vector  $v_\mu^a$  está definido por

$$v_\mu^a = \begin{pmatrix} V_{0\mu} \\ \frac{1}{T}V_{1\mu} \end{pmatrix}. \quad (7.143)$$

Con el fin de obtener la relación para las constricciones de segunda clase de la teoría dual (7.131) y (7.132) en términos de las variables  $Z_{a\mu}$ , introducimos apropiadamente

una unidad en la ecuación (7.142) y hacemos uso de la relación (7.136) de la que obtenemos

$$\Omega_{ab}G^{bd}G_{da}z_{\mu}^a + \epsilon_{ab}v_{\mu}^b = 0, \quad (7.144)$$

de donde

$$\Omega_{ab}G^{bd}Z_{d\mu} + \epsilon_{ab}u_{\mu}^b = 0, \quad (7.145)$$

que es la relación correspondiente para las constricciones de segunda clase de la teoría dual.

$$u_{\mu}^a = \begin{pmatrix} TU_{0\mu} \\ U_{1\mu} \end{pmatrix}. \quad (7.146)$$

Como podemos ver de las relaciones anteriores, nos damos cuenta de que  $\Omega_{ab}$  juega un papel análogo al de la estructura simpléctica estándar en el espacio fase  $(x^{\mu}, p_{\mu})$ , para la variable  $z_{a\mu}$ . Esto es una consecuencia importante, ya que nos dicen que el correspondiente sector del paréntesis de Dirac es invariante  $O(d, d, \mathbf{R})$  en los índices  $a, b$  ante la transformación de dualidad. Esta invariancia del paréntesis de Dirac solo se refleja en los elementos que tienen  $\partial_{\sigma}\delta(\sigma - \sigma')$ . Se puede ver directamente del paréntesis de Dirac original (7.75) y su dual (7.114), que los términos en donde aparece la derivada de la función delta de Dirac permanecen invariantes ante la transformación de dualidad. Aunque parece que estos elementos de la matriz no son antisimétricos, resulta que sí lo son en las variables  $\sigma$  y  $\sigma'$ , por lo que no tenemos que preocuparnos por la antisimetría de la matriz  $C^{ab}(\sigma - \sigma')$ .

Continuando con nuestro análisis de la transformación de dualidad como transformación canónica encontramos más ideas sobre el tema. La transformación de dualidad es canónica por construcción, y en las variables  $(x^{\mu}, p_{\mu})$  resulta invariante ante el grupo de simetría  $O(d, d, \mathbf{R})$ .

Otra forma de probar la canonicidad de la transformación de dualidad, es usando la acción escrita en su forma hamiltoniana

$$S_P = \int (p_{\mu}\dot{x}^{\mu} - H_D)d^2\zeta, \quad (7.147)$$

en donde al implementar la transformación de dualidad en las variables  $(x^{\mu}, p_{\mu})$ , uno tiene que hacer uso de un operador inverso  $O^{-1} = \partial_{\sigma}^{-1}$ , el cual nos permitirá implementar la no localidad de la transformación de dualidad, y así poder despejar la variable  $x^{\mu}$  en términos del momento  $P^{\mu}$ . De la transformación de dualidad

$$x'_{\mu} = \frac{1}{T}P_{\mu}, \quad (7.148)$$

obtenemos el despeje de la variable  $x'_{\mu}$  como

$$x_{\mu} = \partial_{\sigma}^{-1}P_{\mu}, \quad (7.149)$$

al sustituir en la acción obtenemos

$$\tilde{S}_P = \int (\partial_{\sigma}X_{\mu}\partial_{\sigma}^{-1}\dot{P}^{\mu} - \tilde{H}_D)d^2\zeta, \quad (7.150)$$

haciendo una integral por partes sobre la variable  $X'_\mu$  obtenemos

$$\tilde{S}_P = \int (-X_\mu \partial_\sigma \partial_\sigma^{-1} \dot{P}^\mu - \tilde{H}_D) d^2 \zeta, \quad (7.151)$$

observando que el operador diferencial  $\partial_\sigma$  multiplicado por su inverso  $\partial_\sigma^{-1}$  es la unidad, y hacer una integral por partes en la variable  $\dot{P}^\mu$  obtenemos la siguiente acción en variables  $X^\mu, P_\mu$

$$\tilde{S}_P = \int (P^\mu \dot{X}^\mu - \tilde{H}_D) d^2 \zeta, \quad (7.152)$$

donde observamos que el término cinético es el mismo que tiene la teoría original, comprobando con esto que la transformación de dualidad es canónica para la estructura de Poisson.

La dualidad que se ha realizado sobre la acción de primer orden para la cuerda bosónica, esta dentro de una teoría puramente clásica. Como se sabe la teoría de cuerdas, es una teoría que trata de describir los fenómenos físicos de energías muy grandes. En este sentido esta teoría es mucho más rica al cuantizarla. La dualidad que se ha estudiado aquí es una simetría del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$ , debido a que la rotación de las variables  $(x^\mu, p_\mu)$  deja invariante al hamiltoniano clásico. Al ser cuantizada esta teoría se pasa al grupo de simetría  $O(d, d, \mathbf{Z})$  que deja invariante el espectro de la teoría [35].

Al analizar esta transformación de simetría a nivel clásico, uno encuentra una función generadora de la transformación canónica (7.122), que es idéntica a la función generadora de la transformación canónica que es encontrada en [34, 35]. Concluyendo que nuestro análisis de la transformación de dualidad con acciones de primer orden se reduce correctamente a la literatura ya existente sobre el tema.

Los resultados obtenidos en este capítulo son generalizables al caso en que tenemos una métrica en el espacio tiempo  $G_{\mu\nu}$  no trivial y un campo antisimétrico (NS-NS)  $B_{\mu\nu}$  constante. La correspondiente transformación de dualidad puede implementarse como una dualidad en modelos sigma que contiene la métrica del espacio tiempo de manera no trivial, relacionando modelos con distinto contenido topológico [32, 33].

# Parte IV

## Conclusiones



118

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## Capítulo 8

### Conclusiones Generales.

A lo largo de esta tesis hemos aprendido varios aspectos de la transformación de dualidad entre acciones de primer orden para la teoría electromagnética y la cuerda bosónica de Polyakov.

En primer lugar se estudió en detalle la acción de primer orden de la teoría electromagnética y su dual. Aquí aprendimos que la transformación de dualidad deforma la superficie de constricción en el espacio fase completo. Encontrando un mapeo canónico que transforma una superficie de constricción en su dual. Este mapeo no preserva la estructura simpléctica de Dirac, de lo que se concluye que la transformación de dualidad es NO canónica respecto al paréntesis de Dirac. Al conocer la transformación de dualidad en el espacio fase completo se construyó la función generadora de la transformación canónica  $F_2$ , que reproduce exactamente el mapeo canónico entre las superficies de constricción. Con esta función generadora, uno determina que la transformación de dualidad que reproduce es una transformación canónica respecto a la estructura de Poisson estándar. A este nivel uno puede reducir el espacio fase completo, al espacio básico de Maxwell, donde la variable relevante es  $A_\mu$ . Se obtuvo la acción reducida de la teoría original y su dual, donde se identificaron los momentos canónicos de cada teoría. Al reducir el espacio fase, también se vio reducido el paréntesis de Dirac de la teoría y su dual, encontrando que la estructura simpléctica de Dirac que sobrevive es la estructura de Poisson. Al reducir la función generadora  $F_2$ , esta sufre una transformación peculiar, convirtiéndose en una función generadora del tipo  $F_1$  ver [8]. Esta función generadora reducida, es la que implementa la transformación de dualidad canónica en el espacio fase reducido. Este espacio fase reducido es el que coincide con la el espacio generado por la acción de Maxwell usual, donde la transformación de dualidad se vuelve no local. Esta transformación de dualidad canónica es la que se conoce en la literatura [1, 31], esta tesis se ha obtenido esta transformación a partir de una teoría más general.

Por otra parte, también se estudió en detalle la cuerda bosónica de primer orden y su dual, encontrando que la separación de constricción en primera y segunda clase fue muy laboriosa. La dualidad implementada en esta acción es la dualidad T que refleja

una simetría del hamiltoniano. Al obtener la superficie de constricción de la teoría de Polyakov y su dual encontramos que estas son diferentes entre sí, y se ven deformadas por la transformación de dualidad. Esto nos lleva a decir que la transformación de dualidad  $T$  es no canónica respecto al paréntesis de Dirac. Al imponer la norma conforme  $\mathcal{N} = 1$  y  $N_1 = 0$ , obtenemos una simplificación en las constricciones de segunda clase y en el paréntesis de Dirac de ambas teorías. Aquí encontramos los momentos canónicos que reducen el paréntesis de Dirac a la estructura simpléctica de Poisson, donde la transformación es canónica. Al mismo tiempo, encontramos que las variables  $(x^\mu, p^\mu)$  se pueden escribir como un vector  $z^\mu$ . La transformación de dualidad puede ser estudiada como una transformación de simetría del grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$ , este grupo tiene la propiedad de que implementa la rotación de las variables  $(x^\mu, p_\mu)$  y deja invariante al hamiltoniano. Además como se vió en el capítulo 7 ésta simetría que presenta el hamiltoniano ante el grupo  $O(d, d, \mathbf{R})$  es una transformación canónica respecto a la estructura de Poisson, y tiene como función generadora a  $F_1$  que depende de  $x^\mu$  y  $X'_\mu$ , que es la función que genera la transformación de dualidad canónica. De hecho esta función generadora tiene gran parecido con la función generadora obtenida para la teoría electromagnética, ya que ambas funciones dependen de la variable de la teoría original y la derivada de la variable dual; es decir, ya en el espacio reducido la función generadora de la teoría electromagnética depende de  $A_i$  y de  $\partial_i A_j$ , y en la cuerda bosónica depende de  $x^\mu$  y de  $\partial_\sigma X_\mu$ . De esto podemos concluir que hay una generalidad en las transformaciones de dualidad como transformaciones canónicas. Observamos que las funciones generadoras de la transformación de dualidad canónica para ambas teorías (electromagnética y cuerda bosónica) tiene la misma forma. Pero sólo tienen esta forma en el espacio reducido donde la transformación de dualidad es no local. De hecho parece que en la cuerda bosónica no se puede implementar la transformación de dualidad canónica local. Pero si hemos regresado correctamente a los resultados que se conocen en la literatura sobre este tipo de transformación [34] y [35].

Por último estos resultados se pueden aplicar a muchas otras teorías de interés, y tal vez puedan resolver algunos de los problemas que se presentan en el estudio de este tipo de teorías. Por ejemplo la no conmutatividad de las variables  $X^\mu$ , Dp-branas, la acción de Einstein-Hilbert, teorías con índices mixtos (simétricos y antisimétricos), y muchas otras.

Y aunque no se estudió en esta tesis las propiedades de estas teorías ante transformaciones de norma, sabemos que todas las teorías de norma tienen importancia en la física debido a que a partir de ellas se obtiene información física como lo es en el caso del electromagnetismo, las interacciones nucleares débiles, las interacciones nucleares fuertes (QCD), y la gravitación; todas ellas son teorías de norma. En donde se puede tener alguna aplicación de los resultados aquí obtenidos a la interacción nuclear débil o a la QCD.

# Parte V

## Apéndices



122

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

FALLA DE ORIGEN

## Apéndice A

### Convenciones y relaciones matemáticas.

En todos los cálculos relacionados con la teoría electromagnética se utilizó la métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

además en  $D = 4$  el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  con definición  $\epsilon^{0123} = 1$  cumple con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -4! \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} &= -3! \delta_{\lambda}^{\mu} \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\lambda\kappa\rho\sigma} &= -2! \delta_{[\lambda}^{\mu} \delta_{\kappa]}^{\nu} \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\lambda\kappa\tau\sigma} &= -1! \delta_{[\lambda}^{\mu} \delta_{\kappa}^{\nu} \delta_{\tau]}^{\rho} \end{aligned}$$

y en algunos cálculos se utilizó la separación de las componentes espaciales y temporales de los índices del tensor de Levi-Civita, de las relaciones anteriores se derivan los tensores de Levi-Civita en componentes espaciales y temporales como

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -4! \\ \epsilon^{0ijk} \epsilon_{0ijk} &= -3! \\ \epsilon^{0ijk} \epsilon_{0ljk} &= -2! \delta_l^i \\ \epsilon^{0ijk} \epsilon_{0lnk} &= -1! \delta_l^i \delta_n^j, \end{aligned}$$

de donde podemos obtener algunas relaciones para los tensores antisimétricos que se usan en la teoría electromagnética, por ejemplo

$$\frac{1}{2} \delta_{[i}^n \delta_{j]}^m F^{ij} = F^{nm}, \quad (\text{A.1})$$

otra es obtener la transformación de dualidad entre algunos tensores antisimétricos.

En el capítulo 8 relacionado con la cuerda bosonica de primer orden, se usa el tensor de Levi-Civita sobre la hoja mundo  $\epsilon_{ab}$ , usando la definición

$$\begin{aligned} \epsilon^{01} &= 1 & \epsilon_{01} &= -1 \\ \epsilon^{10} &= -1 & \epsilon_{10} &= 1, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

que al implementar la transformación de cumple con las siguientes propiedades

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \epsilon^{ac} \epsilon^{bd} \gamma_{ab} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{cd}, \quad (\text{A.3})$$

de donde se obtiene

$$\epsilon_a^b \epsilon_b^a = -2\gamma. \quad (\text{A.4})$$

Ademas en este capítulo se utiliza la función delta de Dirac, que es una función simétrica

$$\delta(\sigma - \sigma') = \delta(\sigma' - \sigma), \quad (\text{A.5})$$

y su derivada es antisimétrica

$$\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') = -\partial_{\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (\text{A.6})$$

por lo que la matriz  $C^{ab}(\sigma - \sigma')$  es completamente antisimétrica, una parte por los indices  $a, b$ , y otra por la dependencia funcional en  $(\sigma - \sigma')$ .

Para aclarar la parte en donde se hizo la separación de constricciones en primera y segunda clase para la cuerda bosónica de primer orden, utilizaremos la densitización de constricciones definida como

$$R[\xi] = \int_\sigma \xi R(x, p), \quad (\text{A.7})$$

con la que podemos realizar los cálculos hechos en el capítulo 8, además de que esta desitización tiene la siguiente equivalencia con las deltas de Dirac, si tenemos un resultado como

$$\int_\sigma (\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2) R(\sigma) = R[\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2], \quad (\text{A.8})$$

este es equivalente a

$$[R(\sigma) + R(\sigma')] \delta'_\sigma(\sigma - \sigma'), \quad (\text{A.9})$$

con lo que podemos hacer los cálculos con las constricciones densitizadas y hacer conexión con el álgebra de la cuerda.

Ahora podemos calcular el paréntesis de Poisson de las constricciones de primera clase redefinidas (7.51) y (7.52), y probar que efectivamente esta redefinición así

planteada nos lleva al álgebra de la cuerda, y conmuta con todas las constricciones de segunda clase. Primero veamos que pasa con el paréntesis de Poisson entre  $H$  y  $H^1$

$$\begin{aligned}
 \{H[\xi_1], H[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} \int_{\sigma'} \xi_1(\sigma) \xi_2(\sigma') \{H(\sigma), H(\sigma')\} \\
 &= \int_{\sigma} \int_{\sigma'} \xi_1(\sigma) \xi_2(\sigma') \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} p^2 + T x'^2 \right), \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} p^2 + T x'^2 \right) \right] \\
 &\quad + \{V_{0\mu}(p^{1\mu})' + V_{1\mu}(p^{0\mu})', V_{0\mu}(p^{1\mu})' + V_{1\mu}(p^{0\mu})'\} \\
 &= \int_{\sigma} \int_{\sigma'} \xi_1(\sigma) \xi_2(\sigma') \left[ -p_{\mu}(\sigma) x'^{\mu}(\sigma') \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') + p_{\mu}(\sigma') x'^{\mu}(\sigma) \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') \right. \\
 &\quad - V_{0\mu}(\sigma) (P^{0\mu})'(\sigma') \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') + V_{1\mu}(\sigma') (P^{1\mu})'(\sigma) \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') \\
 &\quad \left. + V_{0\mu}(\sigma') (P^{0\mu})'(\sigma) \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') - V_{1\mu}(\sigma) (P^{1\mu})'(\sigma') \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') \right] \quad (A.10)
 \end{aligned}$$

ahora hacemos la integral en  $\sigma'$  obteniendo

$$\begin{aligned}
 \{H[\xi_1], H[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} \left[ \partial_{\sigma} (\xi_2 x'^{\mu}) \xi_1 p_{\mu} - \partial_{\sigma} (\xi_1 x'^{\mu}) \xi_2 p_{\mu} \right. \\
 &\quad + \partial_{\sigma} (\xi_1 V_{0\mu}) (p^{0\mu})' \xi_2 - \partial_{\sigma} (\xi_2 V_{1\mu}) (p^{1\mu})' \xi_1 \\
 &\quad \left. - \partial_{\sigma} (\xi_2 V_{0\mu}) (p^{0\mu})' \xi_1 + \partial_{\sigma} (\xi_1 V_{1\mu}) (p^{1\mu})' \xi_2 \right] \\
 &= \int_{\sigma} \left[ \xi_1 \xi_2' p_{\mu} x'^{\mu} - \xi_1' \xi_2 p_{\mu} x'^{\mu} \right. \\
 &\quad + \xi_1' \xi_2 V_{0\mu} (p^{0\mu})' - \xi_1 \xi_2' V_{1\mu} (p^{1\mu})' \\
 &\quad \left. - \xi_1 \xi_2' V_{0\mu} (p^{0\mu})' + \xi_1' \xi_2 V_{1\mu} (p^{1\mu})' \right], \quad (A.11)
 \end{aligned}$$

que nos da como resultado final

$$\{H[\xi_1], H[\xi_2]\} = \int_{\sigma} (\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2) (p_{\mu} x'^{\mu} - V_{1\mu} (p^{1\mu})' - V_{0\mu} (p^{0\mu})'), \quad (A.12)$$

y es la constricción  $H_1$  densitizada en dos puntos diferentes de la hoja mundo, que podemos reescribir como

$$\{H[\xi_1], H[\xi_2]\} = H_1[\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2], \quad (A.13)$$

que es el resultado (7.53) del capítulo 8 en forma densitizada. Una vez que sabemos como opera una constricción densitizada, podemos obtener esto para todas las

<sup>1</sup>Para facilitar los cálculos usamos la norma conforme sobre las constricciones, y aunque todos los cálculos están hechos para la norma conforme, también son válidos para las constricciones (7.51) y (7.52) del capítulo 8.

constricciones, obteniendo

$$\begin{aligned} \{H[\xi_1], H[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} (\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2) (p_{\mu} x'^{\mu} - V_{1\mu} (p^{1\mu})' - V_{0\mu} (p^{0\mu})'), \\ \{H[\xi_1], H_1[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} (\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} p^2 + T x'^2 \right) + V_{0\mu} (p^{1\mu})' + V_{1\mu} (p^{0\mu})' \right], \\ \{H_1[\xi_1], H_1[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} (\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2) (p_{\mu} x'^{\mu} - V_{1\mu} (p^{1\mu})' - V_{0\mu} (p^{0\mu})'), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

que finalmente nos dan el álgebra de la cuerda que tenemos expresada en el capítulo 8 en términos de  $\delta'$  por (7.53), (7.54) y (7.55), y que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \{H[\xi_1], H[\xi_2]\} &= H_1[\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2], \\ \{H[\xi_1], H_1[\xi_2]\} &= H[\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2], \\ \{H_1[\xi_1], H_1[\xi_2]\} &= H_1[\xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Ahora veamos que las constricciones densitizadas  $H$  y  $H_1$  conmutan con las constricciones de segunda clase en la norma conforme

$$\begin{aligned} \chi_3 &= p_{\mu} + V_{0\mu} \approx 0 \\ \chi_4 &= x'_{\mu} - \frac{1}{T} V_{1\mu} \approx 0. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \{H[\xi_1], \chi_3[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} \int_{\sigma'} \xi_1(\sigma) \xi_2(\sigma') \left[ T x'_{\mu}(\sigma) - V_{1\mu}(\sigma) \right] \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') \\ &= -T \int_{\sigma} \partial_{\sigma} \left( \xi_1(\sigma) \left[ x'_{\mu}(\sigma) - \frac{1}{T} V_{1\mu}(\sigma) \right] \right) \xi_2(\sigma) \\ &= T \chi_4[\xi_1 \xi_2'] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

que es la restricción  $\chi_4$  por  $T$ . Ahora con  $\chi_3$  tenemos

$$\begin{aligned} \{H[\xi_1], \chi_4[\xi_2]\} &= \frac{1}{T} \int_{\sigma} (\xi_1 \xi_2') \left[ p_{\mu}(\sigma) + V_{0\mu}(\sigma) \right] \\ &= \frac{1}{T} \chi_3[\xi_1 \xi_2'], \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

que es la restricción  $\chi_3$  por  $1/T$ ; como vemos el paréntesis de Poisson con la restricción densitizada  $H$  y las constricciones de segunda clase  $\chi_3$  y  $\chi_4$  nos da las mismas constricciones de segunda clase pero rotadas.

Ahora con la restricción densitizada  $H_1$  tenemos

$$\begin{aligned} \{H_1[\xi_1], \chi_3[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} \int_{\sigma'} \xi_1(\sigma) \xi_2(\sigma') \left[ p_{\mu}(\sigma) + V_{0\mu}(\sigma) \right] \delta'_{\sigma}(\sigma - \sigma') \\ &= \chi_3[\xi_1 \xi_2'], \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

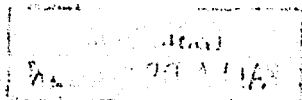


que es la constricción  $\chi_3$ . Ahora con la constricción  $\chi_4$  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \{H_1[\xi_1], \chi_4[\xi_2]\} &= \int_{\sigma} \xi_1 \xi_2' \left[ x_{\mu}'(\sigma) - \frac{1}{T} V_{1\mu}(\sigma) \right] \\ &= \chi_4[\xi_1 \xi_2'], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

que es la constricción  $\chi_4$ ; ahora vemos un resultado diferente al obtenido con la constricción densitizada  $H$ , ya que el paréntesis de Poisson con la constricción densitizada  $H_1$  y las constricciones de segunda clase  $\chi_3$  y  $\chi_4$  nos da las mismas constricciones de segunda clase sin rotarlas.

Ahora con las constricciones de segunda clase  $\chi_1$  y  $\chi_2$  obtenemos derivada de constricciones con  $H$  y  $H_1$ , por lo tanto hemos obtenido que las constricciones corregidas  $H$  y  $H_1$  son constricciones de primera clase que me dan el álgebra de la cuerda.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Bibliografía

- [1] Y. Lozano, "D-Branes Dualities as Canonical Transformation". *Phys.Lett.* **B399**: 233-242, 1997. hep-th/9701186.
- [2] E. Álvarez, L. Álvarez-Gaume and Y. Lozano, "An Introduction to T-Duality in String Theory". *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **41**: 1-20, 1995. hep-th/9410237.
- [3] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, (1992).
- [4] A. Das, *Field Theory. A path integral approach*, World Scientific Lecture Notes in Physics- Vol. 52. World Scientific Publishers (1993), Cap. 13; pp.351-395.
- [5] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York (1967).
- [6] P.A.M. Dirac, "Forms of Relativistic Dynamics". *Review of Modern Physics*, **21**, 3, (1949).
- [7] P.A.M. Dirac, "Generalized Hamiltonian Dynamics". *Canadian Journal of Mathematics*, **129**, 2, (1950).
- [8] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Capítulo 8 (Canonical Transformation), Addison-Wesley, U.S.A. (1950).
- [9] P.G. Bergmann and I. Goldberg, "Dirac Bracket Transformation in Phase Space". *Physical Review*, **98**, 2, (1955).
- [10] M.M. Sheikh-Jabbari, "A Note on T-Duality, Open Strings in B-field Background and Canonical Transformations". *Phys.Lett.* **B474**: 292-294, 2000. hep-th 9911203
- [11] S.E. Hjeltnel and U.Lindström, "Duality for the Non-Specialist". **UIO-PHYS-97-03**, May 1997. hep-th/9705122.
- [12] U. Lindström, "First order actions for Gravitational Systems, String and Membranes". *International Journal of Modern Physics A***3**: 2401-2416, 10, (1988).

- [13] S. Deser, A. Gomberoff, M. Henneaux and C. Teitelboim, "Duality, Self-Duality, Sources and charge quantization in abelian N-form theories". *Phys.Lett.* **B400**: 80-86, 1997. hep-th/9702184.
- [14] S. Deser, "Black Hole Electromagnetic Duality". **BRX-TH-403**, Oct 1996. hep-th/9701157.
- [15] M.K. Gaillard and B. Zumino, "Nonlinear Electromagnetic Self-Duality and Legendre Transformations". **LBL-41110, LBNL-41110, UCB-PTH-97-58**, Dec 1997. hep-th/9712103.
- [16] M.K. Gaillard, B. Zumino, "Self-Duality in Nonlinear Electromagnetism". Prepared for International Seminar on Supersymmetry and Quantum Field Theory, Kharkov, Ukraine, 5-7 Jan 1997. hep-th/9705226.
- [17] M.J. Duff, "Duality rotations in String Theory". *Nuclear Physics* **B335**: 610-620, (1990).
- [18] L. Brink and M. Henneaux, *Principles of String Theory*, Series of the Centro de Estudios Científicos de Santiago. Plenum Press, New York (1988).
- [19] M.J. Green, J. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, (1987).
- [20] J. Maharana and J.H. Schwarz, "Noncompact Symetries in String Theory". *Nucl.Phys.* **B390**: 3-32, 1993. hep-th/9207016.
- [21] A. Sen, "Electric Magnetic Duality in String Theory". *Nucl.Phys.* **B404**: 109-126, 1993. hep-th/9207053.
- [22] J. Maharana, "Duality and  $O(d,d)$  Symetries in String Theory". *Phys.Lett.* **B296**: 65-70, 1992. hep-th/9205016.
- [23] J. Maharana and S.S. Pal, "Noncommutative Open String, D-Brane and Duality". *Phys.Lett.* **B488**: 410-416, 2000. hep-th/0005113.
- [24] J. Maharana and H. Singh, "S Duality and Canonical Transformation in String Theory". *Phys.Lett.* **B380**: 280-285, 1996. hep-th/9603110.
- [25] Th. Curtright, "Canonical Nonabelian Dual Transformation in Supersymmetric Field Theories". *Phys.Rev.* **D52**: 573-576, 1995. hep-th/9502126.
- [26] Y. Lozano, "Nonabelian Duality and Canonical Transformation". *Phys.Lett.* **B355**: 165-170, 1995. hep-th/9503045.
- [27] A. A. Kehagias, "A Canonical approach to S Duality in Abelian Gauge Theory". **NTUA-95-51A**, Aug 1995. hep-th/9508159.

- [28] M.K. Gaillard and B. Zumino, "Duality rotations for Interacting Fields". *Nuclear Physics* **B193**: 221-244, 1981.
- [29] S. Deser and Ö. Sarioglu, "Hamiltonian Electric/Magnetic Duality and Lorentz Invariance". *Phys.Lett.* **B423**: 369-372, 1998. hep-th/9712067.
- [30] S. Deser, A. Gomberoff, M. Henneaux and C. Teitelboim, "p-Brane Dyons and Electric-Magnetic Duality". *Nucl.Phys.* **B520**: 179-204, 1998. hep-th/9712189.
- [31] Y. Lozano, "S-Duality in Gauge Theories as a Canonical Transformation". *Phys.Lett.* **B364**: 19-26, 1995. hep-th/9508021.
- [32] T.H. Buscher, "A Symmetry of the String Background Field Equations". *Physics Letters* **B194**: 59-62, 1, 1987.
- [33] T.H. Buscher, "Path-Integral derivation of Quantum Duality in Nonlinear Sigma-Models". *Physics Letters* **B201**: 466-472, 4, 1988.
- [34] A. Giveon, E. Rabinovici and G. Veneziano, "Duality in String Background Space". *Nucl. Phys.* **B322**: 167-184, 1989.
- [35] A. Giveon, M. Porati and E. Rabinovici, "Target Space Duality in String Theory". *Phys.Rept.* **244**: 77-202, 1994. hep-th/9401139.