00324
10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Cohomología de Gavillas y sus Aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICO

P R E S E N T A

G A L O E S C A N E R O P É R E Z

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

2003

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

PAGINACION DISCONTINUA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Cohomología de Gavillas y sus Aplicaciones"

realizado por Galo Escanero Pérez

con número de cuenta 9200209-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta	Javier Elizondo
Propietario	Dr. Marcelo Aguilar González	
Propietario .	Dr. Francisco Marmolejo Rivas	Marmolejo
Suplente	Dr. Herbert Kanarek Blando	HKanarek
Suplente	M. en C. Emigdio Martínez Ojeda	

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
MATEMATICAS

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Para Axel, Adriana y Eugenio

Agradecimientos

En cierto sentido este trabajo se comenzó a escribir cuando decidí estudiar Matemáticas, que por cierto fue una decisión feliz pero difícil de tomar. Quiero agradecer a la gente que estuvo conmigo durante la carrera y durante la realización de mi tesis.

A mi mamá y a Román por la confianza, la paciencia y el apoyo. A mi abuela y su calor. A mi tío Armando de quien tanto he aprendido y quien tanto me ha apoyado. A mi tía Sol y su cariño.

A mis profesores, por sus enseñanzas y su amistad que me enorgullecen. A Javier Páez, con quien disfruté grata y alegremente de las matemáticas, en los días de aula y en los días de catacumba. A Alejandro Garciadiego, por sus clases y sus consejos, por sus palabras de aliento. A Carlos Hernández, por tanta atención en aquellos días de Análisis. A Pablo Barrera quien me brindó su apoyo cuando la burocracia se cerraba. A José Alfredo Amor y su dedicación. A la gente del Instituto de Matemáticas en Cuernavaca, quienes nos recibieron a brazos abiertos durante la huelga.

A Javier Elizondo, mi maestro, mi asesor, por toda su confianza y su apoyo.

A mis sinodales. A Francisco Marmolejo por su especial atención en la revisión de la presente tesis, fue muy divertido. A Marcelo Aguilar, por sus valiosas sugerencias. Al Mito, y los días de té negro que pasamos platicando de ésta tesis. A Herbert Kanarek por el tiempo que me ha dedicado.

A mis amigos de la carrera, los apóstoles, los hijos de Páez: Isabel, Camille, Pablo, Octavio, Álgebra, José Luis, Mariano, Ferrán. Estoy muy contento de haber estudiado con ustedes.

A mis amigos. A Carlos Rangel, Canuto, de quien no me canso de aprender. A Eladio Cornejo y las charlas y las porras. A Manuel, Carlos, Ivan, Oliver, Araís, Jorge. A Erika. A Pia.

A mis amigos del Instituto que no nombro uno por uno pues son muchos. A la familia geometroalgebraica, Pancho, el Barbas, Eduardo, Omar y José Pablo.

Finalmente, a todos aquellos que me faltan.

Índice General

Introducción

Emana el manantial una gota viva, breve como la chispa, breve como la fogata. Emana el manantial gotas humanas, se forma el arroyo, corre el río, la humanidad corre, se precipita con sed hacia el océano. El océano se mira a sí mismo a través de los ojos del hombre. Se desparrama la humanidad, impelida por la curiosidad; comprender al mundo para comprenderse a sí mismo, para entenderse como parte de un todo, el eterno retorno, al paraíso del que fuimos arrojados, la madre.

El pie humano ha trazado muchísimos caminos, por algunos de ellos se ha avanzado poco, en otros se ha llegado más lejos, algunos se han olvidado y otros son muy transitados. Algunos caminos se han internado en las profundidades de la cordillera del conocimiento, y allí encontramos las inmensas exploraciones matemáticas. Me parece que los andares por las matemáticas llevan al caminante a lugares plenos de inusitada belleza, tierras colmadas de deliciosos alimentos para el alma.

Por su profundidad y por su belleza fuí hechizado.

De entre los diversos caminos que uno puede tomar en la maraña de las ramas, mis pasos me fueron llevando por la Geometría Algebraica; que por cierto lleva bastante tiempo creciendo. Los textos modernos de Geometría Algebraica inevitablemente remiten al fundamentalísimo trabajo de Jean Pierre Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérentes*, esto es, Gavillas Algebraicas Coherentes, y fue de esta manera que me interesé en consultarlo.

0.1 Un poco de historia

La teoría de gavillas surge como el lenguaje que permitía expresar lo que los matemáticos de la época estaban pensando, me refiero a los matemáticos a quienes les interesaba la Topología Algebraica. El estudio de homología y cohomología se hallaba muy difundido y era harto fructífero, lo tradicional era tomar un grupo fijo como grupo de coeficientes, pero algunos estudiosos se interesaron por espacios donde el grupo variaba con cada punto, de manera que se satisfaciesen ciertas condiciones difíciles de explicar. Usualmente se dice que la teoría de gavillas vió su origen en los trabajos de Leray, yo seguiré esa tradición, pues es en un trabajo suyo donde por primera vez es empleado el término gavilla (*faisceau*) con un significado matemático que a continuación enunciamos: una gavilla B (de módulos) sobre un espacio topológico E se define como una función que asigna a cada conjunto cerrado $F \subset E$ un módulo B_F, tal que $B_\emptyset = 0$ junto con un homomorfismo de B_F en B_f siempre que $f \subset F$, que a $b_F \in B_F$ asocia $b_F \cdot f$ en B_f de tal suerte que si $f' \subset f \subset F$ entonces $(b_F \cdot f) \cdot f' = b_F \cdot f'$. La motivación de Leray era relacionar la cohomología de dos espacios topológicos a partir de una función continua entre ellos, tomando imágenes inversas de puntos, por eso el necesitaba relacionar objetos a conjuntos cerrados, pensando que los puntos lo eran. Así fué que definió gavillas, mismas que en un principio mostraban su valor en la medida que se acompañaban del uso de sucesiones espectrales, pues dicha combinación permitía resolver en muchos casos el problema mencionado. Esta definición aparece en un artículo de 1946, pero el artículo que marca la pauta es de 1945, donde las gavillas aparecían implícitamente. Muy pocos años después Cartan se familiariza con la idea y la usa en su propio trabajo dentro del Análisis Complejo, definiendo gavilla a partir de los abiertos.

En 1883, Poincaré provó que una función en dos variables complejas que es cociente de dos funciones holomorfas sobre una vecindad suficientemente pequeña para cada punto de $\mathbb{C}^2$, es de hecho, un cociente de dos funciones holomorfas en el espacio total $\mathbb{C}^2$. A este tipo de problemas se les conoce como "pasar de propiedades locales a propiedades globales". En 1895, Cousin generalizó el teorema de Poincaré a algunos tipos de subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}^n$, y de esta manera introdujo nuevos problemas del paso de propiedades locales a globales. Estos problemas son más complicados que aquel trivial donde se define una función por medio de sus restricciones sobre los abiertos de una cubierta, ahora los objetos a ser definidos globalmente son clases de funciones, por ejemplo, clases del tipo $f + H$, donde f es una función meromorfa y H es el conjunto de todas las funciones holomorfas en un conjunto abierto dado.

Después de 1934, el trabajo de Cartan y Oka sobre funciones de varias variables complejas, estuvo centrado en tales problemas, mismos que habían permanecido descuidados después de Cousin. Justo en 1945, Cartan provó problemas típicos de pasar de lo local a lo global para grupos de homología, ello lo llevó a interesarse en las nuevas nociones que Leray proponía, pero adaptandola a su necesidad de asociar módulos a abiertos y no a cerrados, a saber, $U \mapsto H_q(U;T)$. Después Lazard describe a las gavillas como espacio étale y lo sugiere en uno de los celebres seminarios de Cartan de la decada de los cincuenta (donde participaron algunos de sus alumnos de la talla de Koszul y Serre, entre otros), descripción con la que Cartan continúa su trabajo. Fueron las necesidades de Grothendieck las que pusieron de nuevo en boga la definición por abiertos.

Al estudiar gavillas, Cartan y su grupo, pronto se interesaron en *gavillas coherentes*. La idea de una familia coherente de ideales fue introducida por Cartan en 1944, y en 1950 él mismo la tradujo al lenguaje de gavillas. La razón para estudiar coherencia es que si ciertas propiedades se tienen en un punto, entonces las mismas propiedades se tienen en toda una vecindad del mismo, y así, para probar teoremas basta hacerlo en un punto. Un estudio sistemático de gavillas coherentes fue emprendido en el Seminario de Cartan de 1951-1952. Allí, uno encuentra los dos teoremas fundamentales que conciernen a una gavilla coherente $\mathscr{F}$ sobre una variedad de Stein $\mathcal{X}$ (variedades complejas que admiten encajes biholomorfos en algún $\mathbb{C}^n$), los cuales jugaron un papel importante por varios años.

Teorema A Los tallos de $\mathscr{F}$ son generados por secciones globales.

Teorema B $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) = 0$ para $q \geq 0$.

Este segundo resultado implica que el primer problema de Cousin tiene solución sobre una variedad de Stein, esto es que siempre hay una función meromorfa con partes principales dadas. Serre encontró más aplicaciones, entre ellas que las variedades de Stein están caracterizadas por los Teoremas A y B, y que el segundo problema de Cousin (la existencia de una función meromorfa con un divisor dado) está clasificado por $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$.

0.2 Faisceaux Algébriques Cohérentes

Mejor conocido como FAC, el artículo de Serre introdujo los métodos del álgebra homológica en geometría algebraica, los métodos cohomológicos. En 1949, André Weil notó que la topología de Zariski puede ser definida sobre sus variedades abstractas y con ayuda de ella define la noción de espacio fibrado en geometría algebraica. En 1954, Serre generaliza la noción de gavilla en la misma forma que fue generalizada la noción de espacio fibrado, es decir, usando la topología de Zariski.

La necesidad de una teoría de cohomología para variedades algebraicas "abstractas", fue enfatizada por primera vez por Weil, ya que necesitaba de ello para poder dar un significado preciso a sus celebres conjeturas en Geometría Diofantina. Serre se da cuenta que con el lenguaje de gavillas se puede y es más cómodo presentar la noción de variedad abstracta, ocupando la noción general de *espacio anillado* desarrollada por Cartan. La ventaja de esta estructura es que se comporta bien en lo que se refiere a pegado a lo largo de subconjuntos abiertos, la verificación de las condiciones de pegado se convierte en algo usualmente trivial. A diferencia de los tiempos pasados, fija de una vez por todas el campo base, un campo k algebraicamente cerrado, así, sus piezas básicas para pegar son abiertos de variedades afines sobre k. El objetivo principal de Serre es extender a sus variedades, en la medida de lo posible, los resultados sobre cohomología con valores en una gavilla conocidos en el caso clásico $k = \mathbb{C}$. Para poder utilizar la sucesión exacta de cohomología se limita a las gavillas coherentes de módulos.

La idea general de Serre ha sido que la topología de Zariski de una variedad es adecuada para aplicar los métodos de la topología algebraica. Los intentos de Serre fueron buenos pero no resolvían el problema de Weil, sin embargo arrojan mucha información acerca de las variedades. A pesar de que la teoría de cohomología de gavillas algebraicas coherentes no era adecuada para los propósitos de Weil, fue fuente de nuevos métodos y nuevas nociones, y dió lugar a resultados que no se esperaba estuviesen relacionados con gavillas tales como el teorema de Zariski sobre funciones holomorfas y su teorema principal. Curiosamente la cohomología de Weil, es decir, la cohomología que buscaba Weil fue definida por un enfoque distinto pero inspirado en los trabajos de Serre.

Originalmente mi intención era estudiar el FAC íntegramente y presentar como trabajo de tesis una explicación de los resultados de dicho artículo. Resultó un objetivo ambicioso en la medida en que el FAC es un artículo muy extenso.

El objetivo del FAC es, como ya se dijo, introducir los métodos de la topología algebraica y del álgebra homológica en geometría algebraica. La cohomología que se estudia es del tipo *Čeck* y el principal resultado que se incluye en el presente trabajo es que una sucesión exacta corta de gavillas sobre una variedad algebraica, $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$, donde $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente, induce una sucesión exacta larga en cohomología.

En el Capítulo 1 se define la noción de gavilla desde el punto de vista de los puntos, es decir, como espacio étale. Dada una pregavilla se construye una gavilla, y surge el punto de vista de los abiertos del espacio donde esté definida. Así, la noción de secciones emerge como puente entre ambos puntos de vista. Finalmente, se define lo que es un morfismo de gavillas, y cuándo es inyectivo y suprayectivo, observando las diferencias según el punto de vista adoptado.

En el Capítulo 2 se estudia como construir gavillas apartir de otras gavillas, me refiero a la suma directa, el tensor, entre otras, además de definir subgavillas, cocientes, extensiones y restricciones.

En el Capítulo 3 se define la noción de gavillas coherentes, que tiene sentido para gavillas de módulos, y se incluye uno de los resultados importantes de este trabajo, a saber, si en una sucesión exacta corta de gavillas, dos de ellas son coherentes, entonces la tercera también lo es (Teorema 1). Dicho resultado, nos permite decir que la suma directa de gavillas coherentes es coherente, así como el núcleo, imagen y conúcleo de un morfismo de gavillas coherentes. De hecho, se estudia el comportamiento de las nociones definidas en general para gavillas, cuando además son coherentes, por ejemplo como influye en $Hom_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ (gavilla de gérmenes de morfismos entre las gavillas $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$), el que $\mathscr{F}$ sea coherente y el que ambas $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ sean coherentes, en este último caso $Hom_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ resulta coherente. Se nota como se simplifican las cosas cuando la gavilla de anillos $\mathscr{A}$ es coherente. Por último, se presenta la relación entre cambiar de anillos cuando esto es posible y para extensión y restricción.

En el Capítulo 4, al estilo de *Čeck* se definen grupos de cohomología de una cubierta de un espacio topológico $\mathcal{X}$ con valores en una gavilla, $H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, para definir $H^q(\mathcal{X},\mathscr{F})$ como el límite directo de los $H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, corriendo sobre clases de cubiertas. Se demuestra que cuando $\mathcal{X}$ es paracompacto entonces una sucesión exacta corta de gavillas da lugar a una sucesión exacta larga en cohomología. Todo lo anterior requiere de trabajo, para ver que ciertas nociones tienen sentido.

En el Capítulo 5 se dan condiciones a una cubierta $\mathfrak{U}$ de un espacio topológico $\mathcal{X}$ para que dada una gavilla $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ tengamos $H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \cong H^q(\mathcal{X},\mathscr{F})$.

En el Capítulo 6, se define la noción de variedad algebraica.

En el Capítulo 7 se hace notar que la gavilla $\mathcal{O}$ de anillos locales de una variedad algebraica es coherente. Se define gavilla algebraica como aquella que es gavilla de $\mathcal{O}$-módulos gavillas de variedades y se estudian algunas de sus propiedades.

Finalmente, el Capítulo 8 es un cúmulo de resultados importantes. Primeramente, el Teorema 8 que dice que si $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente sobre una variedad afín $\mathcal{X}$, entonces los tallos $\mathscr{F}_x$ son generados por las secciones globales de $\mathscr{F}$ (nótese la similitud con el Teorema A). Segundo, el Teorema 9, el cual implica que para una variedad afín $\mathcal{X}$ y una gavilla algebraica coherente $\mathscr{F}$ se tiene $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$ (compárese con el Teorema B). Por último, el Teorema 12 que dice que una sucesión exacta corta de gavillas sobre una variedad algebraica, $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$, donde $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente, induce una sucesión exacta larga en cohomología.

0.3 Después del FAC

Variedades y esquemas

El artículo de Serre es una fuente y no una culminación. Los objetos originales de la geometría algebraica son los conjuntos de ceros de sistemas finitos de polinomios, es decir, variedades afines, lo que Serre propone es tomar objetos que localmente se vean como dichas variedaddes afines. Este punto de vista está muy ligado al Álgebra Conmutativa, pues a cada variedad afín irreducible sobre un campo k, le corresponde una k-álgebra finitamente generada y libre de nilpotentes (estamos pensando a k algebraicamente cerrado). Sin embargo, había la necesidad de generalizar el objeto que estudiaba la Geometría Algebraica. Hartshorne platica acerca de tres razones, mismas que aquí mencionaré. Primero, se había notado que era necesario trabajar sobre campos que no fuesen algebraicamante cerrados, pues llegaba a suceder que el anillo local de un punto de una subvariedad sobre una variedad tenía un campo de residuos que no era algebraicamente cerrado, y en ocasiones se deseaba dar un mismo tratamiento a la variedad y al punto. Otro aspecto que se quería generalizar era el considerar variedades que no necesariemente estuviesen encajadas en un espacio afín o en uno proyectivo (desafortunadamente en el presente trabajo no estudiamos el caso proyectivo) ya que en ocasiones se construían variedades sólo con datos locales, de hecho las variedades de Serre sí cubren esta necesidad. Usualmente se pedía que la variedad fuése irreducible pero en ocasiones era necesario considerarlas reducibles y de varias componenetes, ya Serre había superado está condición en su definición. Grothendieck propone un objeto que cubre dichas necesidades. Habíamos dicho que a una variedad afín irreducible sobre un campo k, le corresponde una k-álgebra finitamente generada y libre de nilpotentes, es decir, a un objeto geométrico se le asocia un objeto algebraico, Grothendieck adopta la postura contraria, preguntándose cómo asociar un objeto geométrico a un objeto algebraico, especificamente a un anillo conmutativo con unidad (y ya no solamente a k-álgebras finitamente generadas y libres de nilpotentes). Dicho objeto propuesto es el *esquema afín*, denotado $\operatorname{Spec} A$, donde A es un anillo conmutativo con unidad,

$$\operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} | \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo de } A\},$$

a dicho conjunto se le dota de una topología y de una gavilla, ambas íntimamente ligadas al anillo mismo, de suerte que los puntos cerrados son los ideales maximales y el anillo de las secciones globales es isomorfo a A.

Los puntos de una variedad afín corresponden a los ideales maximales de su anillo asociado, de donde el esquema afín de una k-álgebra finitamente generada y libre de nilpotentes tiene más puntos que la variedad afín irreducible asociada. Dichos puntos extras coresponden a subvariedades de la variedad, por lo que al adoptar como objetos a los esquemas afines se gana mucho en información.

Grothendieck va un poco más lejos definiendo *esquema* como un objeto que localmente se ve como un esquema afín. Los resultados conocidos previamente para variedades se traducen a este nuevo lenguaje, aunque no todos siguen valiendo dada la generalidad de los esquemas.

Desde mi punto de vista, uno de los grandes logros de la teoría de esquemas fue convertirse en un lenguaje común para distintos matemáticos, por ejemplo, entre aquellos interesados en la aritmética y aquellos interesados en los métodos analíticos.

La categoría de esquemas es una ampliación de la categoría de variedades. En ocasiones el trabajar con un objeto más general ayuda a la mejor compresión de lo que uno está estudiando, en otras ocasiones es mejor quedarse con el objeto tradicional, parece ser que este el caso cuando se trata de variedades algebraicas sobre los complejos, pues en ese caso se suma la potencia de los métodos analíticos. Jean Pierre Serre estudió la relación entre las variedades algebraicas complejas con la topología tradicional y con la topología de Zariski, y en 1956 publicó su artículo *Géométrie algébrique et géométrie analytique* donde demuestra que da lo mismo tomar los grupos de cohomología con valores en una gavilla ya sea con su estructura analítica ya sea con su estructura algebraica.

Tomemos como ejemplo el Programa del Modelo Mínimo o Programa de Mori, trabajo que busca encontrar un representante especial en cada clase de equivalencia birracional de variedades algebraicas complejas. Ya la escuela italiana de principios del siglo pasado había llegado a buen puerto en lo que se refiere a dimensión uno, es decir, curvas. Mori culminó victoriosamente el trabajo para superficies en la decada de los ochenta y actualmente mucha gente en el mundo estudia el caso de mayores dimensiones. El punto es que la clasificación que se busca es de las variadedades algebraicas tradicionales pero gran parte del trabajo en superficies no necesita del tonelaje y la fuerza de la teoría de esquemas, sin embargo, su uso sí ayuda en mucho y por momentos es indispensable.

Cohomología

Tan sólo unos pocos años después de haber sido publicado el FAC, Grothendieck publicó su celebre "Sur quelques points d' algèbre homologique", artículo donde prueba que la categoría de gavillas sobre un espacio topológico $\mathcal{X}$, tiene suficientes objetos inyectivos, y así, a toda gavilla $\mathscr{F}$ se le asocia una resolución inyectiva dando lugar a un complejo con el cuál se definen los grupos de cohomología $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F})$, y estos no dependen de la resolución.

El estudio de cohomología que propone Grothendieck resultó muy eficiente para probar cosas de caracter teórico pero muy dificil de calcular, en cambio, a pesar de ser menos potente, la cohomología que propone Serre es más sencilla de calcular.

Aún tomando como objeto de estudio a los esquemas, es más fácil calcular cohomología como lo hace Serre en FAC que siguiendo a Grothendieck. Por ello y por la forma y elegancia con que Serre escribe, FAC continua siendo una lectura sugerida, alegremente los autores de textos modernos de geometría algebraica invitan a consultarle.

Capítulo 1

Gavillas

El lenguaje de gavillas es muy expresivo cuando hablamos de relaciones entre lo global y lo local, las propiedades que se tienen en un punto y las que son compartidas por muchos de ellos, tantos como quizá todo el espacio donde nos encontremos. Se puede decir que la teoría de gavillas es la parte de la geometría que concierne a pasar de propiedades locales a propiedades globales. Es un lenguaje que ha sido útil en ramas como la topología algebraica, geometría analítica, geometría diferencial y ecuaciones diferenciales, entre otras. Nuestra intención es abordar el estudio de variedades algebraicas ayudados con dicha teoría, para ello damos cuenta de la misma a lo largo de este capítulo.

Tomar una gavilla sobre un espacio topológico es asociar información sobre cada punto del espacio, de manera tal que al movernos de un punto a otro tengamos cierto control en el variar de la información. A cada punto lo cargamos con una mochila llena de datos y a puntos vecinos les damos datos parecidos. Esta idea debe cumplir ciertas propiedades, para que sea cómodo trabajar con ella.

1.1 Definición de una gavilla

Definición 1. Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Una *gavilla de grupos abelianos* sobre $\mathcal{X}$ esta formada por:

(a) Una asociación que a cada $x \in \mathcal{X}$ asigna un grupo abeliano $\mathscr{F}_x$, llamado *tallo*.

(b) Una topología sobre el conjunto $\mathscr{F} = \amalg \mathscr{F}_x$, unión disjunta de los conjuntos $\mathscr{F}_x$.

Lo anterior debe cumplir dos propiedades pero antes de enunciarlas haremos unas precisiones. Definimos la función proyección $\pi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{X}$ como $\pi(f) = x$ si $f \in \mathscr{F}_x$; al subconjunto de $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ cuyos elementos son las parejas (f, g) tales que $\pi(f) = \pi(g)$ lo denotaremos $\mathscr{F} + \mathscr{F}$. Completando nuestra definición, pedimos que sean satisfechas las siguientes propiedades.

(I) La función proyección π es homeomorfismo local. Dicho de otra manera, para todo $f \in \mathscr{F}$ existe una vecindad $\mathcal{V}$ de f y una vecindad $\mathcal{U}$ de $\pi(f)$ tales que la restricción de π en $\mathcal{U}$ es un homeomorfismo de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{U}$.

(II) La operación de grupo y de inverso son continuas. Es decir, la aplicación $f \mapsto -f$ es continua de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{F}$, y la aplicación $(f, g) \mapsto f + g$ es continua de $\mathscr{F} + \mathscr{F}$ en $\mathscr{F}$.

La definición anterior tradicionalmente se conoce como de *espacio etale.* Si pedimos solamente que los tallos sean conjuntos y olvidando la segunda condición, decimos que tenemos una *gavilla de conjuntos.*

Dotando de diversas estructuras, por ejemplo algebraicas, a los tallos obtenemos diversas gavillas; así, una *gavilla de anillos* $\mathscr{A}$ es un gavilla de grupos abelianos $\mathscr{A}_x$, $x \in \mathcal{X}$, donde cada tallo tiene estructura de anillo y tal que la aplicación $(f, g) \mapsto f \cdot g$ es continua de $\mathscr{A} + \mathscr{A}$ en $\mathscr{A}$ *(nosotros consideraremos sólo anillos con unidad, pidiendo que dicho elemento varíe continuamente con x).* Si $\mathscr{A}$ es una gavilla de anillos, decimos que $\mathscr{F}$ es una *gavilla de $\mathscr{A}$-módulos* si cada $\mathscr{F}_x$ es un $\mathscr{A}_x$-módulo variando continuamente con x. Precisando, si $\mathscr{A} + \mathscr{F}$ es el subconjunto de $\mathscr{A} \times \mathscr{F}$ de las parejas (a, g) tales que $\pi(a) = \pi(g)$ entonces $\mathscr{A} + \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$ definida como $(a, g) \mapsto a \cdot g$ debe ser continua.

Es de mayor interes para nosotros estudiar gavillas cuyos tallos gocen de estructura algebraica pues en variedades algebraicas es el pan de diario.

En lo sucesivo, la palabra gavilla significará gavilla de grupos abelianos sin mención adicional. Los resultados que vayamos enunciando serán demostrados sólo para la estructura de grupo abeliano pues para anillos y módulos las pruebas son similares.

Ejemplo 1. Sean G un grupo abeliano con la topología discreta y $\mathcal{X}$ un espacio topológico, definimos $\mathscr{F}_x = G$ para toda $x \in \mathcal{X}$, entonces $\mathscr{F} = \mathcal{X} \times G$ dotado con la topología producto es una gavilla de grupos abelianos pues como G tiene la topología discreta entonces las propiedades (I) y (II) son satisfechas. Lo mismo sucede si en lugar de un grupo abeliano hubieramos tomado un anillo o un módulo. La gavilla anterior es conocida como *gavilla constante* isomorfa a G y nos referiremos a ella como gavilla G.

Ejemplo 2. Sea $\mathscr{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, x < 1\} \cup \{(1, n) \in \mathbb{R}^2 | n \in \mathbb{Z}\}$ con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$ tomando como vecindades de $(1, n)$ los conjuntos $G_a(n) = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, a < x < 1\} \cup \{(1, n)\}$. Y sea $\mathcal{X} = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$. Definimos $\pi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{X}$ como :

$$\begin{aligned} \pi(x, y) &= (x, y) \quad \text{si } x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x < 1, \\ \pi(1, n) &= (1, 0) \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

entonces $\pi^{-1}(1, 0) \cong \mathbb{Z}$ y para los otros puntos de $\mathcal{X}$ tenemos $\pi^{-1}(x, y) = (x, y)$. Entonces $\mathscr{F}$ es una gavilla de grupos abelianos que a todos los puntos de $\mathcal{X}$ asocia

el grupo trivial 0 salvo al punto $(1,0)$ al cual asocia $\mathbb{Z}$, efectivamente es gavilla pues tiene la topología inducida. El espacio $\mathcal{X}$ es abierto en $\mathscr{F}$ y es compacto pero no es cerrado por definición de los $G_a(0)$. Concluimos que $\mathscr{F}$ no es Hausdorff a pesar de que $\mathcal{X}$ sí lo es.
Moraleja: aún cuando $\mathcal{X}$ es Hausdorff, una gavilla $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ no tiene por qué serlo.

Como todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo entonces toda gavilla de grupos abelianos sobre $\mathcal{X}$ puede ser considerada como gavilla de $\mathbb{Z}$-módulos, puesto que la acción de $\mathbb{Z}$ se define con la suma en cada grupo abeliano y por ser gavilla ésta varía continuamente sobre $\mathcal{X}$.

1.2 Secciones de una gavilla

Sea $\mathscr{F}$ una gavilla sobre el espacio $\mathcal{X}$, y sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$. Llamamos *sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$* a una función continua $\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathscr{F}$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_{\mathcal{U}}$. De esta forma $\sigma(x) \in \mathscr{F}_x$ para cada $x \in \mathcal{U}$, se sigue que σ es inyectiva, y así, es un homeomorfismo en su imagen cuya inversa es π. El conjunto de secciones de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ se denota $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ y recupera la estructura de los tallos ya que hemos pedido que las operaciones varíen continuamente; así, si $\mathscr{F}$ es una gavilla de grupos abelianos por la Propiedad (II) $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ es un grupo abeliano, donde $(s + \sigma)(x) = s(x) + \sigma(x)$ para s y $\sigma \in \Gamma(U, \mathscr{F})$. Si la gavilla $\mathscr{A}$ es de anillos entonces $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{A})$ es un anillo, etc. (si s y $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{A})$ definimos $(s \cdot \sigma)(x) = s(x) \cdot \sigma(x)$, si además $\xi \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ donde $\mathscr{G}$ es una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos, entonces definimos $(\sigma \cdot \xi)(x) = \sigma(x) \cdot \xi(x)$, es decir, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ es un $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{A})$ módulo; lo anterior está bien definido por la condición de continuidad sobre las operaciones en los tallos).

Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ y σ es una sección sobre $\mathcal{V}$, la restricción de σ a $\mathcal{U}$ es una sección sobre $\mathcal{U}$; de donde tenemos un morfismo de grupos $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \Gamma(\mathcal{V}, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$. (En su caso lo es de anillos, de módulos, etc.)

Para todo elemento de un tallo existe una sección que lo representa. Es decir, si $f \in \mathscr{F}_x$ entonces existen $\mathcal{U}$ vecindad de x y $\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathscr{F}$ continua tal que $\sigma(x) = f$. Con el lenguaje de la Propiedad (I), $\sigma = (\pi|_{\mathcal{V}})^{-1}$.

Supongamos que tenemos dos secciones, $s_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathscr{F}$ y $s_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathscr{F}$, digamos que $\mathcal{V}_i = s_i(\mathcal{U}_i)$ con $i = 1, 2$. Si $s_1(x) = s_2(x) = f \in \mathscr{F}_x$, entonces $\pi \circ s_1|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = \pi \circ s_2|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2}$ y como π es inyectiva sobre $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ (de hecho sobre cada $\mathcal{V}_i$) tenemos que $s_1|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = s_2|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2}$. Es decir, si dos secciones son iguales en un punto lo son en una vecindad del mismo.

Dicho de otra manera, $\mathscr{F}_x$ es el *límite directo* de los $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ siguiendo el orden filtrante de las vecindades de x.

Para convencernos de lo anterior estudiemos $\varinjlim_{x \in \mathcal{U}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$. La construcción de límite directo que incluimos en el Apéndice A se hace cuando tenemos estructura de módulos, lo cual es el caso, un grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo.

Primero dotamos de un orden a la familia de $\Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$ usando como familia de índices a los subconjuntos de $\mathcal{X}$ que contienen a x fijo, así, $\Gamma(\mathcal{V},\mathscr{F}) \leq \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$ si y sólo si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Dados $\Gamma(\mathcal{U}_1,\mathscr{F})$ y $\Gamma(\mathcal{U}_2,\mathscr{F})$, entonces $\Gamma(\mathcal{U}_i,\mathscr{F}) \leq \Gamma(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2,\mathscr{F})$ (y aún $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$) y los morfismos $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ por ser restricciones cumplen $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}} = \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \circ \varrho_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ cuando $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Entonces se cumplen las condiciones para construir el límite directo (*cf.* Apéndice A):

$$\varinjlim_{x\in\mathcal{U}} \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F}) := {}^{\oplus\Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})}\big/_{\sim} \tag{1.1}$$

donde $s_{\mathcal{V}} \sim \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(s_{\mathcal{V}})$ para $s_{\mathcal{V}} \in \Gamma(\mathcal{V},\mathscr{F})$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, esta relación dice que dos secciones definidas en x son equivalentes si son iguales en una vecindad de x contenida en la intersección de los abiertos donde están definidas las secciones en cuestión.

Ahora, queda claro que 1.1 es el tallo $\mathscr{F}_x$ (cuando $x \in \mathcal{U}$) puesto que para todo $f \in \mathscr{F}_x$ existen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ abierto y una sección s de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ tal que $s(x) = f$ y cualesquiera dos secciones con esa propiedad pertenecen a la misma clase de equivalencia pues coinciden en su intersección. Además, diremos que $(s,\mathcal{U})$ es un representante de f.

La construcción anterior fue para gavillas de grupos abelianos, pero funciona aún para gavillas de anillos y de módulos, la idea es la misma y se desarrolla con mayor detalle en el Apéndice A.

1.3 Construcción de gavillas

Decimos que $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas si es una función continua inducida por una familia de morfismos de grupos $\varphi_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$ (de anillos, de módulos). En breve estudiaremos más a fondo dichos morfismos.

Sean dados para cada abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ un grupo abeliano $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$, y, para cada par de abiertos $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ un morfismo $\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathscr{F}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$, tales que la condición de transitividad $\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \circ \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}$ sea verificada cada vez que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ y $\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = 1_{\mathcal{U}}$. Llamaremos ***pregavilla*** a la colección $\{\mathscr{F}_{\mathcal{U}},\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$. La pregavilla $\{\mathscr{F}_{\mathcal{U}},\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$ permite construir una gavilla de la manera siguiente:

(a) Definimos $\mathscr{F}_x = \varinjlim \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ (el límite directo de los $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ siguiendo el orden filtrante de las vecindades $\mathcal{U}$ de x). Si x pertenece al abierto $\mathcal{U}$ se tiene un morfismo canónico $\varphi_x^{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathscr{F}_x$, el que manda a un elemento de $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ en su clase.

(b) Sea $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$, designamos por $[t,\mathcal{U}]$ el conjunto de los $\varphi_x^{\mathcal{U}}(t) \in \mathscr{F}_x$ corriendo $x \in \mathcal{U}$; se tiene que $[t,\mathcal{U}] \subseteq \mathscr{F}$, y se dota a $\mathscr{F}$ con la topología generada por todos los $[t,\mathcal{U}]$. Veamos que la intersección de dos conjuntos $[s,\mathcal{U}]\cap[t,\mathcal{V}]$ contiene algún miembro de dicha familia. Si $\mathcal{U}\cap\mathcal{V} = \emptyset$ entonces $[s,\mathcal{U}]\cap[t,\mathcal{V}] = \emptyset$; si $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ nos fijamos en $s' = \varphi_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(s)$ y $t' = \varphi_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(t)$, entonces sucede una de dos cosas: $\varphi_x^{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}(s') \neq \varphi_x^{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}(t')$ para todo $x \in \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$, en cuyo caso $[s,\mathcal{U}]\cap[t,\mathcal{V}] = \emptyset$, ó $\varphi_x^{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}(s') = \varphi_x^{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}(t')$ para algún $x \in \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$, en cuyo caso existe $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ tal que $\varphi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}(s') = \varphi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}(t')$, por lo que $[s,\mathcal{U}]\cap[t,\mathcal{V}] = [\varphi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(s),\mathcal{W}] = [\varphi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(t),\mathcal{W}]$. Es claro que cubren a $\mathscr{F}$. Por lo que hemos puntualizado concluímos que la familia de los conjuntos $[t,\mathcal{U}]$ genera una topología de la cual es base. Además, un elemento $g \in \mathscr{F}_x$ admite como base de vecindades en $\mathscr{F}$ los conjuntos $[t,\mathcal{U}]$ donde $x \in \mathcal{U}$ y $g = \varphi_x^{\mathcal{U}}(t)$.

La manera en que fue construida la topología verifica las Propiedades (I) y (II), por lo que tenemos una gavilla, la *asociada al sistema* $\{\mathscr{F}_{\mathcal{U}}, \varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$, veamos:

Si $f \in \mathscr{F}$ tomamos un representante $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$, es decir, $\varphi_x^{\mathcal{U}}(t) = f$, y definimos $\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathscr{F}$ como $\sigma(x) = \varphi_x^{\mathcal{U}}(t)$, que es un homeomorfismo tal que $\pi\circ\sigma = Id_{\mathcal{U}}$.

Para la Propiedad (II), si $g : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$, $g(f) = -f$ entonces $g^{-1}([t,\mathcal{U}]) = [-t,\mathcal{U}]$, similarmente la suma.

Si $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$, la aplicación $x \mapsto \varphi_x^{\mathcal{U}}(t)$ es una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ de donde tenemos un morfismo canónico $\imath_{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$. En las dos siguientes proposiciones veremos condiciones necesarias y suficientes para que $\imath_{\mathcal{U}}$ sea inyectiva y biyectiva.

Proposición 1. *Una condición necesaria y suficiente para que $\imath_{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$ sea inyectiva es la siguiente:*

Si $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ es tal que existe una cubierta abierta $\{\mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{U}$ con $\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t) = 0$ para toda i entonces $t = 0$.

Demostración. Veamos que $\imath_{\mathcal{U}}$ es inyectiva cuando se cumple la anterior propiedad. Supongamos que $\imath_{\mathcal{U}}(t) = 0$, entonces $\varphi_x^{\mathcal{U}}(t) = 0$ para toda $x \in \mathcal{U}$, entonces localmente es cero y así, generamos una cubierta abierta $\{\mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{U}$ donde $\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t) = 0$ para toda i por lo que $t = 0$.

Veamos que si es inyectiva entonces se cumple la condición. Supongamos que existe una cubierta abierta $\{\mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{U}$ con $\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t) = 0$ para toda i entonces $0 = \varphi_x^{\mathcal{U}_i}\circ\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t) = \varphi_x^{\mathcal{U}}(t) = \imath_{\mathcal{U}}(t)(x)$, por lo tanto $t = 0$. □

Proposición 2. *Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{X}$, y supóngase que $\imath_{\mathcal{V}} : \mathscr{F}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{V},\mathscr{F})$ sea inyectiva para todo abierto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. La aplicación $\imath_{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$ es suprayectiva si y sólo si para toda cubierta abierta $\{\mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{U}$, y todo sistema $\{t_i\}$, $t_i \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}_i}$, tales que $\varphi_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}^{\mathcal{U}_i}(t_i) = \varphi_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}^{\mathcal{U}_j}(t_j)$ para toda pareja (i,j), existe $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ tal que $\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t) = t_i$ para toda i.*

Demostración. Sea $\imath_{\mathcal{U}}$ suprayectiva. Definimos $\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathscr{F}$ como $\sigma(x) = \varphi_x^{\mathcal{U}_i}(t_i)$ si $x \in \mathcal{U}_i$, como $\varphi_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}^{\mathcal{U}_i}(t_i) = \varphi_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}^{\mathcal{U}_j}(t_j)$ entonces σ esta bien definida y por construcción se tiene que $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$; como $\imath_{\mathcal{U}}$ es suprayectiva entonces existe $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ tal que $\imath_{\mathcal{U}}(t) = \sigma$. Como $\sigma|_{\mathcal{U}_i} = \imath_{\mathcal{U}_i}(\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t))$ y $\sigma|_{\mathcal{U}_i} = \imath_{\mathcal{U}_i}(t_i)$, por inyectividad de $\imath_{\mathcal{U}_i}$ tenemos $\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t) = t_i$.

Ahora veamos que $\imath_{\mathcal{U}}$ es suprayectiva. Sea $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$. Para cada $x \in \mathcal{U}$ existe un abierto $\mathcal{U}_x$ y $t^x \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}_x}$ tal que $\sigma(x) = \varphi_x^{\mathcal{U}_x}(t^x)$ (podemos suponer que $\sigma|_{\mathcal{U}_x} = \imath_{\mathcal{U}_x}(t^x)$, pues dos secciones que coinciden en un punto coinciden localmente y entonces podemos adecuar el abierto asociado $\mathcal{U}_x$); hemos construído una cubierta $\{\mathcal{U}_x\}$ y un sistema $\{t^x\}$ tal que $\varphi_{\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y}^{\mathcal{U}_x}(t^x) = \varphi_{\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y}^{\mathcal{U}_y}(t^y)$ puesto que coinciden cada una con $\sigma|_{\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y}$, entonces existe $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ tal que $\varphi_{\mathcal{U}_x}^{\mathcal{U}}(t) = t^x$, por lo tanto, $\imath_{\mathcal{U}}(t) = \sigma$. □

Si $\mathscr{F}$ es una gavilla sobre $\mathcal{X}$, tiene asociada de manera natural la pregavilla $(\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F}), \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})$ (donde los morfismos $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ son la restricción usual), que inmediatamente cumple con las condiciones de las Proposiciones 1 y 2, por lo que $\imath$ es isomorfismo. Lo anterior induce una función continua entre la gavilla asociada a la pregavilla y la gavilla $\mathscr{F}$ que sobre los tallos es isomorfismo. Es decir, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 3. *Si $\mathscr{F}$ es una gavilla sobre $\mathcal{X}$ entonces la gavilla asociada al sistema $(\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F}), \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})$ es canónicamente isomorfa a $\mathscr{F}$.*

□

Por lo que hemos visto, podemos definir gavilla como una pregavilla que cumple con el *Axioma de gavilla*, esto es, con las condiciones requeridas para que $\imath$ sea isomorfismo.

Axioma de gavilla Sea $(\mathscr{F}_{\mathcal{U}}, \varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})$ una pregavilla. Para toda cubierta abierta $\{\mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{U}$, y todo sistema $\{t_i\}$, $t_i \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}_i}$, tales que $\varphi_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}^{\mathcal{U}_i}(t_i) = \varphi_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}^{\mathcal{U}_j}(t_j)$, existe un único $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ tal que $\varphi_{\mathcal{U}_i}^{\mathcal{U}}(t) = t_i$ para toda i.

Si una pregavilla cumple con el axioma anterior diremos que es una gavilla y esto no crea ambiguedad con nuestra definición original. El axioma lo que expresa es que si tenemos una familia de secciones que se comporta bien en las intersecciones de sus dominios entonces hay una sección de la que provienen en la unión y es única. El puente que une las anteriores definiciones se construye con la noción de sección. La definición que usa Serre (como espacio etale) ocupa como pieza clave al tallo, dando con ello énfasis en el carácter puntual (que se comporta bien localmente) de la gavilla. El otro estilo tiene énfasis en información más gruesa, pues se da en términos de los abiertos y otorga mucha importancia a la colección de morfismos.

Ahora podemos dar algunos ejemplos más.

Ejemplo 3. Sea $\mathcal{X}$ una variedad topológica, definimos $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ como el conjunto de funciones continuas de $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}$ (o analíticas u holomorfas en $\mathbb{C}$) y como sistema de morfismos, las restricciones. El conjunto $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ es un anillo puesto que recupera dicha estructura de $\mathbb{R}$ (o de $\mathbb{C}$). La gavilla asociada a dicho sistema es conocida como *gavilla de funciones continuas (analíticas u holomorfas)* y la denotamos como $\mathscr{C}$.

Ejemplo 4. Sea V un haz vectorial sobre un espacio topológico $\mathcal{X}$. La gavilla definida por las secciones de V es una gavilla de módulos sobre la gavilla de funciones continuas en $\mathcal{X}$. Notemos que V tiene estructura vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ dotado de alguna topología. Veamos que $\mathscr{S}$, el sistema de secciones de V es pregavilla, sea $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, entonces $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathscr{S}_{\mathcal{U}} \to \mathscr{S}_{\mathcal{V}}$ está definida como $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(\sigma) = \sigma|_{\mathcal{V}}$, por ser restricciones se cumple que si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ entonces $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \circ \varrho_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}$. De hecho, esta pregavilla cumple el Axioma de gavilla pues para la existencia basta pegar las secciones definidas por la cubierta dada, y para la unicidad, sabemos que las secciones están definidas por sus valores en los puntos. Cada $\mathscr{S}_{\mathcal{U}}$ es un $\mathscr{C}_{\mathcal{U}}$−módulo, la acción es puntual, es decir si $f \in \mathscr{C}_{\mathcal{U}}$ y $\sigma \in \mathscr{S}_{\mathcal{U}}$, entonces $f \cdot \sigma(x) = f(x)\sigma(x)$ (aquí usamos que $f(x)$ es escalar y actua en $\sigma(x)$ por la estructura de espacio vectorial) que de nuevo es una sección por la continuidad de f y por cumplir $\pi \circ f\sigma = 1$. Por lo tanto, $\mathscr{S}$ es una gavilla de módulos sobre la gavilla de funciones continuas $\mathscr{C}$.

1.4 Morfismos de gavillas

Hemos descrito dos ideas para hablar de gavillas, una la de la definición, que dota a los puntos con su paquete de información, y la otra que dota a los abiertos con el paquete, ambas nociones comunicadas por el puente de las secciones son equivalentes. Estudiemos los morfismos de gavillas y sus relaciones a la luz de las anteriores ideas. Supongamos que tenemos dos gavillas $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ cuyas gavillas de secciones son $\{\mathscr{F}_{\mathcal{U}}, \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$ y $\{\mathscr{G}_{\mathcal{U}}, \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$. Agreguemos una colección de morfismos de grupos abelianos $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathscr{G}_{\mathcal{U}}$ tal que cuando $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_{\mathcal{V}} \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}"'] & \mathscr{G}_{\mathcal{V}} \arrow[d, "\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}"] \\ \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{U}}"'] & \mathscr{G}_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

entonces, como los mapeos $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ inducen un morfismo $\varrho_x^{\mathcal{U}}$, también conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\varrho_x^{\mathcal{U}}"'] & \mathscr{G}_{\mathcal{U}} \arrow[d, "\varrho_x^{\mathcal{U}}"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"'] & \mathscr{G}_x \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

así, la colección de morfismos φ_x por provenir de los morfismos $\varphi_{\mathcal{U}}$ induce una función continua $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$.

Por otro lado, un morfismo de gavillas $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ induce una familia de morfismos $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathscr{G}_{\mathcal{U}}$, donde si $\sigma \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ entonces $\varphi_{\mathcal{U}}(\sigma)(x) = \varphi_x \circ \varrho_x^{\mathcal{U}}(\sigma)(x)$;

el sistema inducido cumple $\varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} \circ \varphi_{\mathcal{V}} = \varphi_{\mathcal{U}} \circ \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}$, compárese con el diagrama 1.2 y con la cuenta siguiente:

$$\begin{aligned}
\varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} \circ \varphi_{\mathcal{V}}(\sigma)(x) &= \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(\varphi_x \circ \varrho^{\mathcal{V}}_x)(\sigma)(x) \\
&= \varphi_x \circ \varrho^{\mathcal{V}}_x(\sigma)(x) \\
&= \varphi_x \circ \varrho^{\mathcal{U}}_x \circ \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(\sigma)(x) \\
&= \varphi_{\mathcal{U}} \circ \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(\sigma)(x).
\end{aligned}$$

Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos gavillas sobre $\mathcal{X}$ cuyas pregavillas de secciones son $\{\mathscr{F}_{\mathcal{U}}, \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\}$ y $\{\mathscr{G}_{\mathcal{U}}, \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\}$, entonces una colección de morfismos de grupos abelianos $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathscr{G}_{\mathcal{U}}$, tal que $\varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} \circ \varphi_{\mathcal{V}} = \varphi_{\mathcal{U}} \circ \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}$ cuando $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, induce un morfismo de gavillas y todo morfismo de gavillas es de esta forma.*

□

Decimos que $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, un morfismo de gavillas, es inyectivo o suprayectivo si φ_x es inyectiva o suprayectiva para todo $x \in \mathcal{X}$. Como podemos dar un morfismo de gavillas ya sea a partir de los tallos o de los grupos de secciones, pero hemos definido inyectividad y suprayectividad sólo en términos de los primeros, sería deseable poder recuperar dichas propiedades en términos de los segundos.

Sin embargo sólo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5. *Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces $\varphi_{\mathcal{U}}$ es inyectiva (respectivamente biyectiva) para todos los abiertos $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ si y sólo si φ_x es inyectiva (respectivamente biyectiva) para todo $x \in \mathcal{X}$.*

Demostración.

($\underset{1}{\Rightarrow}$) Sea $t_x \in \mathscr{F}_x$ y supongamos $\varphi_x(t_x) = 0$. Tomamos $(t, \mathcal{V})$ representante de t_x en $\mathscr{F}_{\mathcal{V}}$. Entonces $\varphi_{\mathcal{V}}(t) = s$ es representante de $0 \in \mathscr{G}_x$ en $\mathscr{G}_{\mathcal{V}}$ (ya que $\varphi_x(t_x) = 0$). De donde, para $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ abierto, $\varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(s) = 0$. Y como $\varphi_{\mathcal{U}}(\varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(t)) = \varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(s)$ entonces $\varrho^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(t) = 0$ ($\varphi_{\mathcal{U}}$ es inyectiva), de donde $t_x = 0$. Por lo tanto, φ_x es inyectiva.

($\underset{1}{\Leftarrow}$) Sea $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ y supongamos $s = \varphi_{\mathcal{U}}(t) = 0$. Se sigue que $s_x = 0$, para toda $x \in \mathcal{U}$. Pero $s_x = \varphi_x(t_x)$ (ya que $\varphi_x(\varrho^{\mathcal{U}}_x(t)) = \varrho^{\mathcal{U}}_x(\varphi_{\mathcal{U}}(t)) = s_x$, como en el diagrama 1.3), entonces $t_x = 0$, para toda $x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $t = 0$ (Axioma de gavilla) y $\varphi_{\mathcal{U}}$ es inyectiva.

($\underset{2}{\Rightarrow}$) Debemos suponer que φ_x es inyectiva para toda $x \in \mathcal{X}$ pues de lo contrario por la prueba anterior tendríamos que alguna $\varphi_{\mathcal{U}}$ no es inyectiva. Sea $s_x \in \mathscr{G}_x$, tomamos $(s, \mathcal{U})$ representante en $\mathscr{G}_{\mathcal{U}}$. Existe un único $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ tal que $\varphi_{\mathcal{U}}(t) = s$. Sea $t_x = \varrho^{\mathcal{U}}_x(t)$. Tenemos $s_x = \varrho^{\mathcal{U}}_x(\varphi_{\mathcal{U}}(t)) = \varphi_x(\varrho^{\mathcal{U}}_x(t)) = \varphi_x(t_x)$. Por lo tanto, φ_x es suprayectiva.

($\underset{2}{\Leftarrow}$) De nuevo debemos suponer que $\varphi_{\mathcal{U}}$ es inyectiva para todo $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ abierto. Sean $s \in \mathscr{G}_{\mathcal{U}}$ y $s_x = \varrho_x^{\mathcal{U}}(s)$. Existe un único $t_x \in \mathscr{F}_x$ tal que $\varphi_x(t_x) = s_x$, tomamos $(t^x, \mathcal{V}_x)$ representante en $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_x}$ de t_x (s.p.g. $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{U}$). Ahora, $\varphi_{\mathcal{V}_x}(t^x)$ es representante de s_x (ya que, $\varrho_x^{\mathcal{V}_x}(\varphi_{\mathcal{V}_x}(t^x)) = \varphi_x(\varrho_x^{\mathcal{V}_x}(t^x)) = \varphi_x(t_x) = s_x$). Tenemos una cubierta $\{\mathcal{V}_x\}$ de $\mathcal{U}$. Apliquemos el Axioma de gavilla al sistema de $\{t^x\}$ para construir el elemento buscado en $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$, checando antes que se cumplen las condiciones requeridas. Sean $t^x \in \mathscr{F}_{\mathcal{V}_x}$ y $t^y \in \mathscr{F}_{\mathcal{V}_y}$. Supongamos que $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}\left(\varrho^{\mathcal{V}_x}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}(t^x)\right) &= \varrho^{\mathcal{V}_x}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}\left(\varphi_{\mathcal{V}_x}(t^x)\right)\\
\varphi_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}\left(\varrho^{\mathcal{V}_y}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}(t^y)\right) &= \varrho^{\mathcal{V}_y}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}\left(\varphi_{\mathcal{V}_y}(t^y)\right)
\end{aligned}$$

además $\varrho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}_x}(s) = \varphi_{\mathcal{V}_x}(t^x)$ y $\varrho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}_y}(s) = \varphi_{\mathcal{V}_y}(t^y)$, por ser representantes de s_x y s_y respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}\left(\varrho^{\mathcal{V}_x}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}(t^x)\right) &= \varrho^{\mathcal{V}_y}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}\left(\varrho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}_x}(s)\right)\\
&= \varrho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}(s)\\
&= \varphi_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}\left(\varrho^{\mathcal{V}_y}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}(t^y)\right)
\end{aligned}$$

Como $\varphi_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}$ es inyectiva, entonces $\varrho^{\mathcal{V}_x}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}(t^x) = \varrho^{\mathcal{V}_y}_{\mathcal{V}_x\cap\mathcal{V}_y}(t^y)$. Por lo tanto, por el Axioma de gavilla, existe un único $t \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ tal que $\varrho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}_x}(t) = t^x$. Por otro lado, como $\{\mathcal{V}_x\}$ es cubierta de $\mathcal{U}$ y para la colección de secciones de la forma $\varphi_{\mathcal{V}_x}(t^x)$, tenemos que $\varphi_{\mathcal{U}}(t)$ y s cumplen $\varrho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}_x}(\varphi_{\mathcal{U}}(t)) = \varphi_{\mathcal{V}_x}(t^x) = \varrho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}_x}(s)$. Entonces, por el Axioma de gavilla $s = \varphi_{\mathcal{U}}(t)$. Por lo tanto, $\varphi_{\mathcal{U}}$ es suprayectiva.

□

Surge de manera natural la pregunta ¿será posible probar lo anterior si en lugar de la inyectividad se tiene la suprayectividad? Veamos con un ejemplo concreto que no es el caso.

Ejemplo 5. Sea $\mathcal{X}$ el espacio topológico $\mathbb{C} - \{0\}$, sea $\mathscr{F} = \mathscr{G}$ la gavilla de funciones complejovaluadas, continuas y nunca nulas, y sea φ el mapeo que manda una función f en f^2.
Es un resultado conocido (por ejemplo en *Complex Analysis* de Lars Valerian Ahlfors) que para definir una rama de $\sqrt{z}$ es necesario considerar como dominio a $\mathbb{C}$ menos un rayo, llamémoslo Ω. Entonces para un abierto no contenido en alguno de la forma Ω, la función $f(z) = z$ no tiene preimágen. Por otro lado, a nivel tallo

el mapeo inducido si es suprayectivo, pues siempre existe un abierto en el que el representante tiene raíz cuadrada.

Lo que sí se puede demostrar es que $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es suprayectiva si localmente es suprayectiva, es decir, si para cada $g_x \in \mathscr{G}_x$ existe una vecindad $\mathcal{U}$ de x, $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ y $g \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ tales que $\varrho_x^{\mathcal{U}}(g) = g_x$ y $\varphi_{\mathcal{U}}(f) = g$, la prueba de ello está implicita en la prueba de la Proposición 5.

Las nociones de inyectividad y suprayectividad que hemos definido coinciden con las nociones categóricas de monomorfismo y epimorfismo debido a que los morfismos a nivel tallo lo cumplen.

Capítulo 2

Operaciones sobre las gavillas

Veremos cómo construir gavillas a partir de otras gavillas, que es a lo que nos referimos con ***operaciones sobre las gavillas.***

2.1 Subgavilla y gavilla cociente

Sea $\mathscr{A}$ una gavilla de anillos sobre $\mathcal{X}$. Una ***subgavilla*** $\mathscr{G}$ de una gavilla $\mathscr{F}$ de $\mathscr{A}$-módulos es un subconjunto abierto de $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{G}_x$ es $\mathscr{A}_x$-submódulo de $\mathscr{F}_x$. La proyección $\pi|_{\mathscr{G}}$ es homeomorfismo local pues π lo es y $\mathscr{G}$ es abierto, por esto último las operaciones son continuas, concluimos que $\mathscr{G}$ es una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos sobre $\mathcal{X}$. Se desprende que $\Gamma(\mathcal{U},\mathscr{G})$ es $\Gamma(\mathcal{U},\mathscr{A})$-submódulo de $\Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$. El cociente $\mathscr{H} = \mathscr{F}/\mathscr{G}$ es un espacio topológico que como conjunto es el agregado de los tallos $\mathscr{H}_x = \mathscr{F}_x/\mathscr{G}_x$. Por tener la topología cociente, las operaciones son continuas y la proyección es homeomorfismo local. Entonces $\mathscr{H}$ es una gavilla conocida como *gavilla cociente* y se denota $\mathscr{F}/\mathscr{G}$. También podemos definirla como la gavilla asociada al sistema $\{\mathscr{H}_{\mathcal{U}}, \varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$ donde $\mathscr{H}_{\mathcal{U}} = \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})/\Gamma(\mathcal{U},\mathscr{G})$ y $\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ es el inducido por $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \Gamma(\mathcal{V},\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F})$. Ambas gavillas son isomorfas pues lo son sus tallos.

Si ς es una sección de $\mathscr{H}$ sobre $\mathcal{U}$ vecindad de x, existe una sección t de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $t(y) = \varsigma(y)$ módulo $\mathscr{G}_y$ para toda $y \in \mathcal{V}$, pero no podemos garantizar que $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ pues de la suprayectividad en los tallos no se sigue la suprayectividad en los abiertos, como ya vimos en el Ejemplo 5. Por la Proposición 5, la siguiente sucesión es exacta (corriendo x):

$$0 \to \mathscr{G}_x \hookrightarrow \mathscr{F}_x \twoheadrightarrow \mathscr{H}_x \to 0,$$

de la anterior sucesión se sigue que la siguiente es exacta:

$$0 \to \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{G}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to \Gamma(\mathcal{U},\mathscr{H})$$

para esta sucesión no podemos garantizar la suprayectividad del último morfismo. La inyección de una subgavilla es un morfismo inyectivo de gavillas, la proyección de una gavilla en una gavilla cociente es un morfismo suprayectivo.

Si $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas de $\mathscr{A}$-módulos, definimos $\Im_x$ como la imagen de φ_x y a $\mathscr{N}_x$ como el núcleo de φ_x, entonces los agregados naturales $\Im$ y $\mathscr{N}$ son subgavillas de $\mathscr{G}$ y $\mathscr{F}$ respectivamente. Por ser imágenes y núcleos los tallos definidos son submódulos, debemos mostrar que $\Im$ es abierto de $\mathscr{G}$ y $\mathscr{N}$ es abierto de $\mathscr{F}$. Sea $g \in \Im$ entonces $g \in \Im_x$, de donde existe $f \in \mathscr{F}_x$ tal que $\varphi_x(f) = g$. Sea ς una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ tal que $\varsigma(x) = f$, entonces $\varphi \circ \varsigma(x) = g$ y por lo tanto, $\varphi \circ \varsigma(\mathcal{U})$ es un abierto que contiene a g y queda contenido en $\Im$. Concluimos que $\Im$ es subgavilla de $\mathscr{G}$. Ahora, veamos que $\mathscr{N}$ es abierto en $\mathscr{F}$. Sean $f \in \mathscr{N}_x$ y σ una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ tal que $\sigma(x) = f$, como $\varphi(f) = 0$ entonces localmente, digamos sobre un abierto $\mathcal{V}$, la sección $\varphi \circ \sigma$ es la constante cero, entonces el abierto $\sigma(\mathcal{V})$ esta contenido en $\mathscr{N}$ y contiene a f. Concluimos que $\mathscr{N}$ es subgavilla de $\mathscr{F}$.

A la gavilla $\mathscr{N}$ la llamamos *núcleo* de φ y a la gavilla $\Im$ la llamamos *imagen* de φ; la gavilla $\mathscr{G}/\Im$ la llamamos *conúcleo* de φ y sus tallos justamente son los conúcleos de los morfismos φ_x. Cuando sea necesario hacer énfasis en el morfismo que define a las anteriores gavillas, las denotaremos $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $\mathrm{Coker}(\varphi)$ respectivamente.

Si $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ entonces φ es un morfismo inyectivo pues claramente cada morfismo φ_x es inyectivo, similarmente φ es suprayevtivo si $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$. Como hemos definido el concepto de núcleo y conúcleo de morfismos de gavillas podemos hablar de sucesiones exactas. Naturalmente decimos que una sucesión de morfismos de gavillas es exacta si la imagen es igual al núcleo de dos morfismos consecutivos, por ejemplo, dado un morfismo de gavillas $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ las siguientes sucesiones son exactas.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \hookrightarrow \mathscr{F} \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow \mathscr{F} \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

2.2 Reensamblado de gavillas

Si $\mathscr{F}$ es una gavilla sobre $\mathcal{X}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{X}$, entonces $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \amalg_{x \in \mathcal{U}} \mathscr{F}_x$ con la topología inducida es una gavilla sobre $\mathcal{U}$, llamada ***gavilla inducida por $\mathscr{F}$ en $\mathcal{U}$*** y denotada como $\mathscr{F}(\mathcal{U})$.

Por lo apuntado, podemos romper una gavilla en piezas que siguen siendo gavillas y nos preguntamos si podemos recuperar una gavilla a partir de sus piezas inducidas.

Proposición 6. *Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de $\mathcal{X}$, y para cada $i \in I$ sea $\mathscr{F}_i$ una gavilla sobre $\mathcal{U}_i$; para toda (i, j) sea $\vartheta_{ij} : \mathscr{F}_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow \mathscr{F}_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ un isomorfismo y supongamos que $\vartheta_{ij} \circ \vartheta_{jk} = \vartheta_{ik}$ sobre $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$, para toda tercia (i, j, k).*

Entonces, existe una gavilla $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ y para cada $i \in I$ un isomorfismo $\eta_i : \mathscr{F}(\mathcal{U}_i) \longrightarrow \mathscr{F}_i$ tal que $\vartheta_{ij} = \eta_i \circ \eta_j^{-1}$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Más aún, $\mathscr{F}$ y las η_i son únicas salvo isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $\{\mathcal{U}_i\}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{X}$ y que para cada $\mathcal{U}_i$ tenemos una gavilla $\mathscr{F}_i$ de tal forma que coinciden en las intersecciones, es decir, tenemos una familia de isomorfismos $\vartheta_{ij} : \mathscr{F}_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow \mathscr{F}_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ para toda pareja (i, j) que cumple con la propiedad de transitividad $\vartheta_{ik} = \vartheta_{ij} \circ \vartheta_{jk}$ (*Nota: el isomorfismo ϑ_{ij} es una familia de isomorfismos ya sea $\vartheta_{ij,\mathcal{U}} : \mathscr{F}_{j,\mathcal{U}} \longrightarrow \mathscr{F}_{i,\mathcal{U}}$ o $\vartheta_{ij,x} : \mathscr{F}_{j,x} \longrightarrow \mathscr{F}_{i,x}$*). Con esta información podemos construir una pregavilla. Si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{X}$ definimos $\mathscr{F}_\mathcal{U}$ como el conjunto de las familias $\{s_i\}$, donde cada s_i es una sección de $\mathscr{F}_i$ sobre $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i$ tal que $\vartheta_{ij,\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}(s_j) = s_i$. Definiendo $\{s_i\} + \{\sigma_i\} = \{s_i + \sigma_i\}$ (está bien definida pues $s_i + \sigma_i \in \mathscr{F}_{i\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i}$ y $\vartheta_{ij}(s_j + \sigma_j) = \vartheta_{ij}(s_j) + \vartheta_{ij}(\sigma_j) = s_i + \sigma_i$) dotamos a $\mathscr{F}_\mathcal{U}$ con estructura de grupo abeliano ya que hereda la estructura de cada $\mathscr{F}_i(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i)$.

Si $\{\varphi^{\mathcal{V}}_{i,\mathcal{U}}\}$ es la familia de mapeos restricción de $\mathscr{F}_i$ definimos $\psi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \mathscr{F}_\mathcal{V} \longrightarrow \mathscr{F}_\mathcal{U}$ para $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ como $\psi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(\{s_i\}) = \{\varphi^{\mathcal{V}\cap\mathcal{U}_i}_{i,\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i}(s_i)\}$. Para ver que dicho mapeo está bien definido debemos checar que $\vartheta_{ij,\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_j}(\varphi^{\mathcal{V}\cap\mathcal{U}_j}_{j,\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_j}(s_j)) = \varphi^{\mathcal{V}\cap\mathcal{U}_i}_{i,\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i}(s_i)$, pero ello sucede ya que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_{j,\mathcal{V}} \arrow[r, "\vartheta_{ij,\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\varphi^{\mathcal{V}}_{j,\mathcal{U}}"'] & \mathscr{F}_{i,\mathcal{V}} \arrow[d, "\varphi^{\mathcal{V}}_{i,\mathcal{U}}"] \\ \mathscr{F}_{j,\mathcal{U}} \arrow[r, "\vartheta_{ij,\mathcal{U}}"'] & \mathscr{F}_{i,\mathcal{U}} \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

y $\vartheta_{ij,\mathcal{V}}(s_j) = s_i$. La propiedad de transitividad $\psi^{\mathcal{W}}_{\mathcal{U}} = \psi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} \circ \psi^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ se sigue de $\vartheta_{ik} = \vartheta_{ij} \circ \vartheta_{jk}$. Entonces $\mathscr{F}$ la gavilla asociada a la pregavilla construida es la gavilla buscada. □

2.3 Extensión y restricción de gavillas

Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico, $\mathcal{Y}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{X}$ y $\mathscr{F}$ una gavilla sobre $\mathcal{X}$, entonces queda inducida una gavilla sobre $\mathcal{Y}$ a la que denotamos $\mathscr{F}(\mathcal{Y})$, donde $\mathscr{F}(\mathcal{Y})_y = \mathscr{F}_y$ para todo $y \in \mathcal{Y}$. Decimos que $\mathscr{F}$ está *concentrada* en $\mathcal{Y}$ o que es nula fuera de $\mathcal{Y}$ si $\mathscr{F}_x = 0$ para todo $x \in \mathcal{X} - \mathcal{Y}$.

Proposición 7. *Si la gavilla $\mathscr{F}$ esta concentrada en $\mathcal{Y}$, el siguiente morfismo restricción es biyectivo:*

$$\varrho^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}} : \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{Y}, \mathscr{F}(\mathcal{Y})).$$

Demostración. Veamos que es inyectiva, sea σ una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ nula sobre $\mathcal{Y}$, es decir, $\varrho^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}}(\sigma) = 0$, entonces es nula sobre todo $\mathcal{X}$ pues $\mathscr{F}_x = 0$ fuera de $\mathcal{Y}$.

Veamos que es suprayectiva, sea ς una sección de $\mathscr{F}(\mathcal{Y})$ sobre $\mathcal{Y}$. Extendemos por cero a ς, es decir, definimos $\sigma(x) = 0$ si $x \notin \mathcal{Y}$ y $\sigma(x) = \varsigma(x)$ si $x \in \mathcal{Y}$, es inmediato que $\varrho^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}}(\sigma) = \varsigma$ y que $\pi \circ \sigma = Id_\mathcal{X}$, chequemos que σ es continua. Para cada $y \in \mathcal{Y}$ existen abiertos $\mathcal{V}^y$ y $\mathcal{U}^y$, vecindades de $\varsigma(y)$ y de y respectivamente, junto con secciones $s^y \in \Gamma(\mathcal{U}^y, \mathscr{F})$ tal que la restricción de ς en $\mathcal{U}^y \cap \mathcal{Y}$ es igual a la restricción de s^y (compare con los argumentos de la página 3), además, $s^y(x) = 0$ si $x \notin \mathcal{Y}$ pues $\mathscr{F}_x = 0$. De lo anterior, concluimos que σ restringida a los abiertos $\mathcal{U}^y$ es igual a s^y. Por lo tanto, σ en $\mathcal{U}^y$, $\mathcal{X} - \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y}$ es continua, y así, σ es continua en $\mathcal{X}$. □

Una gavilla $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ concentrada en un subespacio cerrado $\mathcal{Y}$ queda completamente determinada por la gavilla inducida $\mathscr{F}(\mathcal{Y})$. Es decir, si $\mathscr{G}$ es una gavilla sobre $\mathcal{Y}$, y definimos $\mathscr{F} = \amalg \mathscr{F}_x$ donde $\mathscr{F}_x = \mathscr{G}_x$ si $x \in \mathcal{Y}$ y $\mathscr{F}_x = 0$ si $x \notin \mathcal{Y}$ entonces existe una única estructura de gavilla para $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}(\mathcal{Y}) = \mathscr{G}$. Para mostrar que existe, construiremos una pregavilla cuya gavilla asociada es la buscada. Si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{X}$ definimos $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ como el conjunto de las secciones de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}$ extendidas por cero, y por esto último, estos conjuntos preservan la estructura de grupo abeliano de los $\Gamma(\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}, \mathscr{G})$. Como familia de morfismos tomamos la de restricciones, obteniendo una pregavilla cuya gavilla asociada corresponde como conjunto con $\mathscr{F}$. Por construcción, $\mathscr{F}_{\mathcal{U}} \cong \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \cong \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}$, por lo tanto $\mathscr{F}(\mathcal{Y}) \cong \mathscr{G}$. La unicidad es por la proposición anterior, pues si tenemos dos gavillas concentradas en $\mathcal{Y}$ que coinciden con $\mathscr{G}$ entonces coinciden entre si por transitividad. Hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 8. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico, $\mathcal{Y}$ un subespacio cerrado y $\mathscr{G}$ es una gavilla sobre $\mathcal{Y}$. Si definimos $\mathscr{F} = \amalg \mathscr{F}_x$ donde $\mathscr{F}_x = \mathscr{G}_x$ si $x \in \mathcal{Y}$ y $\mathscr{F}_x = 0$ si $x \notin \mathcal{Y}$ entonces existe una única estructura de gavilla para $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}(\mathcal{Y}) = \mathscr{G}$.*

□

Se dice que la gavilla $\mathscr{F}$ se obtuvo prolongando por cero a $\mathscr{G}$ fuera de $\mathcal{Y}$ y se le denota $\mathscr{G}^{\mathcal{X}}$.

Observación 1. En literatura más moderna, existen nociones más generales que recuperan la idea de extensión y restricción. Incluiremos las definiciones en el lenguaje de pregavillas.

Sea $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una función continua y $\mathscr{F}$ una gavilla sobre $\mathcal{X}$, definimos la gavilla *imagen directa* $f_*\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{Y}$ como $(f_*\mathscr{F})_{\mathcal{V}} = \mathscr{F}_{f^{-1}(\mathcal{V})}$ para cualquier subconjunto abierto de $\mathcal{Y}$. Como la pregavilla $\{\mathscr{F}_{\mathcal{U}}, \varphi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\}$ es gavilla, entonces la definición anterior efectivamente es gavilla. Tomando la función inclusión recuperamos la idea de prolongación de una gavilla por cero.

Sea $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ y $\mathscr{G}$ una gavilla sobre $\mathcal{Y}$, definimos la gavilla *imagen inversa* $f^{-1}\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{X}$ como la gavilla asociada a la pregavilla que a cada abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ asocia $\lim_{\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})} \mathscr{G}(\mathcal{V})$. Tomando la función inclusión, $i^{-1}\mathscr{F}$ coincide con la gavilla restricción pues son isomorfas en cada tallo.

2.4 Suma directa de gavillas

Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos gavillas de $\mathscr{A}$-módulos sobre $\mathcal{X}$ definimos su *suma directa* como el agregado de las sumas directas de los tallos, es decir, $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ es el subconjunto de $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$ formado por las parejas (f, g) tales que $p(f) = q(g)$, donde p y q son las proyecciones sobre $\mathcal{X}$ de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ respectivamente. De esta forma $(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})_x = \mathscr{F}_x \oplus \mathscr{G}_x$ la suma directa de $\mathscr{A}_x$-módulos. El conjunto $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ dotado con la topología inducida por $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$ es una gavilla. Las propiedades (I) y (II) requeridas, enunciadas en la Sección 1.1, se cumplen pues son inducidas por $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$. Las pruebas son típicas por lo cual nosotros sólo mostraremos que la proyección $\pi : \mathscr{F} \oplus \mathscr{G} \longrightarrow \mathcal{X}$ es homeomorfismo local.

Si $f \in \mathscr{F}_x$ y $g \in \mathscr{G}_x$, es decir $(f, g) \in \mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$, entonces existen abiertos $\mathcal{U}_1$ de $\mathscr{F}$ y $\mathcal{U}_2$ de $\mathscr{G}$ y $\mathcal{V}$ abierto de $\mathcal{X}$ tales que $p|_{\mathcal{U}_1} : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{V}$ y $q|_{\mathcal{U}_2} : \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{V}$ son homeomorfismos, donde $f \in \mathcal{U}_1$, $g \in \mathcal{U}_2$ y $x \in \mathcal{V}$. Denotamos $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ al abierto de $(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}) \cap (\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$ y proponemos que $\pi|_{\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2} : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{V}$ es homeomorfismo. Si $y \in \mathcal{V}$, tomamos $a \in \mathcal{U}_1$ y $b \in \mathcal{U}_2$ tales que $p(a) = y = q(b)$, entonces $(a, b) \in \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ es tal que $\pi(a, b) = y$; la proyección π es inyectiva en $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ pues p y q lo son en $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$, entonces dado $y \in \mathcal{V}$ sólo existe un único $a \in \mathcal{U}_1$ tal que $p(a) = y$ y análogamente con q, por lo tanto π es biyectiva. Si $\mathcal{W}$ es un abierto de $\mathcal{V}$ entonces $\pi^{-1}(\mathcal{W}) = p^{-1}(\mathcal{W}) \oplus q^{-1}(\mathcal{W})$ que es abierto, entonces π es continua. Si ahora $\mathcal{W}$ es un abierto de $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ entonces es de la forma $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, donde $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}_i$, y así, $\pi(\mathcal{W}) = p(\mathcal{V}_1) = q(\mathcal{V}_2)$ es abierto, por lo tanto, $\pi|_{\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2}$ es homeomorfismo. Se checa que la operación suma es continua.

Veamos otro ejemplo de un morfismo de gavillas suprayectivo pero tal que en su sistema de morfismos entre los anillos de secciones hay alguno que no lo es. Nos esperamos hasta ahora para dar dicho ejemplo porque necesitamos la definición de suma directa.

Ejemplo 6. Tomamos la esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dotada con la gavilla de funciones analíticas $\mathscr{G}$. Sea $\mathscr{F}^0$ sobre $\mathbb{CP}^1$ la gavilla de las funciones analíticas que se anulan en cero, sus anillos de secciones ${\mathscr{F}^0}_{\mathcal{U}}$ son el anillo de funciones analíticas que se anulan en cero si $0 \in \mathcal{U}$, o, el conjunto de todas las funciones analíticas en $\mathcal{U}$ si $0 \notin \mathcal{U}$. Similarmente, sea $\mathscr{F}^\infty$ la gavilla de las funciones analíticas que se anulan en ∞. Tomamos la gavilla $\mathscr{F}^0 \oplus \mathscr{F}^\infty$ y el morfismo de gavillas $\varphi : \mathscr{F}^0 \oplus \mathscr{F}^\infty \longrightarrow \mathscr{G}$ el mapeo adición.
Tomando como abierto a $\mathbb{CP}^1$ mismo, tenemos que las funciones constantes no nulas no tienen preimagen bajo $\varphi_{\mathbb{CP}^1}$. No sucede así con los tallos, ya que para cada $\mathscr{G}_z$ donde $z \notin \{0, \infty\}$, el morfismo φ_z es la identidad y si $z = 0$, para $g_0 \in \mathscr{G}_0$ tomo un representante de g_0 sobre un abierto que no contenga a ∞, digamos $(g, \mathcal{U})$, si $g(0) = 0$, $g \oplus 0 \in (\mathscr{F}^0 \oplus \mathscr{F}^\infty)_{\mathcal{U}}$ es preimagen, si $g(0) \neq 0$ tomo $0 \oplus g \in (\mathscr{F}^0 \oplus \mathscr{F}^\infty)_{\mathcal{U}}$. Análogamente para ∞.

2.5 Producto tensorial de gavillas

Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos gavillas de $\mathscr{A}$-módulos, definimos $\mathscr{H}_x = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{A}_x} \mathscr{G}_x$ y tomamos $\mathscr{H} = \coprod_{x\in\mathcal{X}} \mathscr{H}_x$. Queremos dotar al conjunto $\mathscr{H}$ de una topología que lo convierta en gavilla. Para ello definimos $\mathscr{H}_{\mathcal{U}} = \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \otimes_{\mathscr{A}_{\mathcal{U}}} \mathscr{G}_{\mathcal{U}}$ y como el límite directo conmuta con tensorizar (véase el Apéndice A) entonces $\varinjlim \mathscr{H}_{\mathcal{U}} = \mathscr{H}_x$. Tomamos el sistema dirigido $\{\mathscr{H}_{\mathcal{U}}, \varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \otimes \psi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$ y procedemos con la construcción de la Sección 1.3, así recuperamos al conjunto $\mathscr{H}$ pero ahora dotado de una topología que lo convierte en gavilla. Lo apuntado da lugar a la siguiente proposición.

Proposición 9. *Existe para el conjunto $\mathscr{H}$ una única estructura de gavilla tal que si s y t son secciones de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{U}$, respectivamente, entonces la aplicación $x \mapsto s(x) \otimes t(x) \in \mathscr{H}_x$ corriendo $x \in \mathcal{U}$ es una sección de $\mathscr{H}$ sobre $\mathcal{U}$.*

Demostración. Como ya vimos, justo antes de enunciar la proposición, la estructura existe, la unicidad se sigue de que la construimos como en la Sección 1.3[1]. □

La gavilla así definida la llamamos *producto tensorial de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$*, y la denotamos $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}$. Si los anillos $\mathscr{A}_x$ son conmutativos entonces $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}$ es gavilla de $\mathscr{A}$-módulos.

Si $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'$ y $\psi : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G}'$ son $\mathscr{A}$ morfismos, entonces $\varphi_x \otimes \psi_x$ es un morfismo de grupos abelianos de $\mathscr{F}_x \otimes \mathscr{G}_x$ en $\mathscr{F}'_x \otimes \mathscr{G}'_x$ que define un morfismo de gavillas al que denotamos $\varphi \otimes \psi$.

Las propiedades usuales del producto tensorial de módulos se heredan al tensor de gavillas. Supongamos que tenemos una sucesión exacta:

$$\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

entonces a nivel tallo tenemos:

$$\mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{F}'_x \longrightarrow \mathscr{F}''_x \longrightarrow 0.$$

Ahora, si $\mathscr{G}$ es una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos entonces:

$$\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{A}_x} \mathscr{G}_x \longrightarrow \mathscr{F}'_x \otimes_{\mathscr{A}_x} \mathscr{G}_x \longrightarrow \mathscr{F}''_x \otimes_{\mathscr{A}_x} \mathscr{G}_x \longrightarrow 0$$

es exacta, por propiedades de módulos. Concluímos que:

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}'' \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \longrightarrow 0$$

es exacta. Análogamente, tenemos:

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} (\mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2) \cong \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}_2$$
$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{A} \cong \mathscr{F}$$

[1] Dados los tallos para ver que el agregado de ellos puede tener estructura de gavilla basta dar la pregavilla, la unicidad se sigue de los tallos, pues dos gavillas son isomorfas si lo son cada uno de sus tallos, como se vió con la Proposición 5.

y si además, los $\mathscr{A}_x$ son conmutativos:

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \cong \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{F}$$
$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{H}) \cong (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{H}.$$

2.6 Gavilla de gérmenes de morfismos

Sean $\mathscr{A}$ una gavilla de anillos y $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas de $\mathscr{A}$-módulos. Si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{X}$, sea $\mathscr{H}_{\mathcal{U}}$ el grupo de morfismos de $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ en $\mathscr{G}_{\mathcal{U}}$ (dicho de manera distinta, morfismos de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{U}$). Mediante las restricciones de los morfismos queda bien definido un morfismo $\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathscr{H}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathcal{U}}$. Siguiendo la Sección 1.3 llamamos *gavilla de gérmenes de morfismos* a la gavilla definida por el sistema $\{\mathscr{H}_{\mathcal{U}}, \varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$ y la denotamos como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$. Además, si los $\mathscr{A}$ son conmutativos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos.

Un elemento $\bar{f}$ de $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))_x$, es el germen de un morfismo de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{G}$ sobre una vecindad $\mathcal{U}$ de x, digamos $f : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathscr{G}_{\mathcal{U}}$, entonces $f_x \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$, con lo que hemos definido un morfismo:

$$\zeta : \left(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})\right)_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x).$$

Dicho morfismo está bien definido pues se trata de gérmenes, los cuáles sobre x definen el mismo morfismo por lo cuál ζ no depende del representante. *Nota*: el morfismo ζ no es biyección.

Sean $\varphi : \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F}$ y $\psi : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G}'$ dos $\mathscr{A}$ morfismos de gavillas. Si $\gamma : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de $\mathscr{A}$-gavillas, le asociamos el morfismo de $\mathscr{F}'$ en $\mathscr{G}'$ definido por:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\gamma"] & \mathscr{G} \arrow[d, "\psi"] \\ \mathscr{F}' \arrow[u, "\varphi"] & \mathscr{G}' \end{tikzcd}$$

Tenemos un morfismo natural,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\varphi, \psi) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}', \mathscr{G}').$$

Además, la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G}' \longrightarrow \mathscr{G}''$$

da lugar, por argumentos similares a los dados en el tensor, a la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}'').$$

También:

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A},\mathscr{G}) \cong \mathscr{A}\\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}_2)\\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2,\mathscr{G}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}_1,\mathscr{G}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}_2,\mathscr{G}).\end{gathered}$$

Capítulo 3

Gavillas coherentes de módulos

A lo largo de esta sección las gavillas a las que nos referimos son gavillas de $\mathscr{A}$-módulos sobre el espacio topológico $\mathcal{X}$. La gavilla $\mathscr{A}$ es de anillos conmutativos con unidad, misma que varía continuamente.

3.1 Definiciones

Decimos que una gavilla $\mathscr{F}$ es de *tipo finito* si localmente es generada por un número finito de secciones, es decir, para cada $x \in \mathcal{X}$ existe un abierto $\mathcal{U}$ que lo contiene y una familia finita $\varsigma_1, ..., \varsigma_p$ de secciones de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ tales que $\mathscr{F}_y$ es generado por $\varsigma_1(y), ..., \varsigma_p(y)$ como $\mathscr{A}_y$-módulo para toda $y \in \mathcal{U}$. Lo anterior es lo mismo que decir que el morfismo de gavillas $\varphi(\mathcal{U}) : \mathscr{A}^p(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathcal{U})$ definido en cada tallo como $\varphi(\mathcal{U})_y(f_1, ..., f_p) = \sum_{i=1}^{p} f_i\varsigma_i(y)$ es suprayectivo.

Nota: Es claro que si una gavilla es de tipo finito cada tallo es finitamente generado como módulo, una inquietud sería saber si toda gavilla cuyos tallos son finitamente generados es de tipo finito. Sirvan los Ejemplos 5 y 6 para ver que no es el caso. De la definición de ser de tipo finito y siguiendo su notación no se sigue que $\mathscr{F}_\mathcal{U}$ sea finitamente generado sobre $\mathscr{A}_\mathcal{U}$ como módulo, pues no podemos garantizar la suprayectividad de un morfismo $\mathscr{A}_\mathcal{U}^p \longrightarrow \mathscr{F}_\mathcal{U}$ a pesar de que $\mathscr{A}_x^p \longrightarrow \mathscr{F}_x$ sea suprayectivo para todo $x \in \mathcal{U}$ (compárese con el comentario siguiente a la Proposición 5).

Proposición 10. *Si una gavilla $\mathscr{F}$ es de tipo finito y $\varsigma_1(x), ..., \varsigma_p(x)$ genera al tallo $\mathscr{F}_x$ entonces $\varsigma_1(y), ..., \varsigma_p(y)$ genera al tallo $\mathscr{F}_y$ para cada y en alguna vecindad de x.*

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es de tipo finito existe una vecindad $\mathcal{V}$ de x tal que $\mathscr{F}_y$ es generado por $\sigma_1(y), ..., \sigma_q(y)$ para toda $y \in \mathcal{V}$ donde $\sigma_1, ..., \sigma_q$ son secciones de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{V}$. Por otro lado, $\varsigma_1(x), ..., \varsigma_p(x)$ genera al tallo $\mathscr{F}_x$ entonces,

$$\sigma_i(x) = a_{1i}(x)\varsigma_1(x) + \cdots + a_{pi}(x)\varsigma_p(x),$$

por lo que localmente, digamos sobre el abierto $\mathcal{V}_i$, tenemos la igualdad siguiente:

$$\sigma_i = a_{1i}\varsigma_1 + \cdots + a_{pi}\varsigma_p.$$

Concluimos que $\varsigma_1(y), ..., \varsigma_p(y)$ genera a $\mathscr{F}_y$ para toda $y \in \cap_{i=1}^{p} \mathcal{V}_i$. □

Como ya hemos mencionado, si tenemos una gavilla $\mathscr{F}$ y una familia finita de secciones $\varsigma_1, ..., \varsigma_p$ de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ podemos asociar un morfismo de gavillas $\varphi(\mathcal{U}) : \mathscr{A}^p(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathcal{U})$ definido en cada tallo como $\varphi(\mathcal{U})_y(f_1, ..., f_p) = \sum_{i=1}^{p} f_i\varsigma_i(y)$, a φ le llamaremos *morfismo asociado a* $\varsigma_1, ..., \varsigma_p$. Definimos la *gavilla de relaciones* de $\varsigma_1, ..., \varsigma_p$ como el núcleo $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Definición 2. Decimos que una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos $\mathscr{F}$ es *coherente* si:

a) $\mathscr{F}$ es de tipo finito.

b) Si para todo abierto $\mathcal{U}$ y cualquier familia finita de secciones de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ su gavilla de relaciones es de tipo finito.

Lo dicho en los incisos anteriores implica el siguiente resultado.

Proposición 11. *Localmente, una gavilla coherente $\mathscr{F}$ es isomorfa al conúcleo de un morfismo de gavillas $\varphi : \mathscr{A}^q \longrightarrow \mathscr{A}^p$.*

Demostración. Si $x \in \mathcal{X}$ existe un abierto $\mathcal{U}$ que lo contiene y tal que $\psi : \mathscr{A}^p(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathcal{U})$ es suprayectivo, ya que $\mathscr{F}$ es de tipo finito, y por ser coherente el núcleo $\mathrm{Ker}(\psi)$ es de tipo finito por lo que obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\mathscr{A}^q(\mathcal{U}) \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}^p(\mathcal{U}) \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow 0$$

La anterior sucesión nos dice que $\mathscr{F}$ es isomorfo localmente al conúcleo de φ. □

Para que una subgavilla $\mathscr{G}$ de una gavilla coherente $\mathscr{F}$ también sea coherente basta con que sea de tipo finito pues cualquier familia finita de secciones de $\mathscr{G}$ sobre un abierto $\mathcal{U}$ también lo es de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ y así su gavilla de relaciones es de tipo finito. Por lo dicho enunciamos como ya probada la siguiente proposición.

Proposición 12. *Toda subgavilla de tipo finito de una gavilla coherente es coherente.*

□

3.2 Propiedades de gavillas coherentes de módulos

El siguiente resultado es sumamente útil y en lo personal me gusta mucho.

Teorema 1. *Si en una sucesión exacta corta de gavillas dos de ellas son coherentes entonces también lo es la tercera.*

Demostración. Trabajemos con la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathscr{G} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \mathscr{H} \longrightarrow 0.$$

Probemos que $\mathscr{H}$ es coherente cuando $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son coherentes.

Para ver que $\mathscr{H}$ es de tipo finito sea $x \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{U}$ un abierto que lo contiene tal que $\mathscr{G}_y$ es generado por $\sigma_1(y), ..., \sigma_m(y)$ para toda $y \in \mathcal{U}$ donde $\sigma_1, ..., \sigma_m$ son secciones de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{U}$. Si llamamos ς_i a $\psi_{\mathcal{U}}(\sigma_i)$ la familia $\varsigma_1, ..., \varsigma_m$ es una familia de secciones de $\mathscr{H}$ sobre $\mathcal{U}$ tal que $\varsigma_1(y), ..., \varsigma_m(y)$ genera $\mathscr{H}_y$ para toda $y \in \mathcal{U}$ ya que ψ es suprayectiva.

Hemos probado que $\mathscr{H}$ es de tipo finito, ahora veamos que cumple la condición *b*) de la definición de gavilla coherente.

Sean $\varsigma_1, ..., \varsigma_r$ secciones de $\mathscr{H}$ sobre el abierto $\mathcal{U}$ y $\eta : \mathscr{A}^r(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathcal{U})$ el morfismo asociado a dichas secciones. Sea $x \in \mathcal{U}$, podemos encontrar una vecindad $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ de x tal que existan $\sigma_1, ..., \sigma_r$ secciones de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{V}$ que cumplen $\psi_{\mathcal{V}}(\sigma_i) = \varsigma_i$ (pensado sobre $\mathcal{V}$). Dicha vecindad existe ya que ψ es suprayectiva, procederíamos encontrando una vecindad para cada sección tomando después la intersección que, por ser finita, es de nuevo una vecindad abierta de x. Tomando $\delta : \mathscr{A}^r(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathcal{V})$ como el morfismo asociado a $\sigma_1, ..., \sigma_r$ hacemos conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}^r(\mathcal{V}) \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, "\delta"'] & \\
& \mathscr{H}(\mathcal{V}) \\
\mathscr{G}(\mathcal{V}) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Para recabar información acerca de $\mathrm{Ker}(\eta)$ pondremos nuestra atención en su imagen bajo δ, así, $\delta(\mathrm{Ker}(\eta)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathscr{F}$, todo restringido sobre $\mathcal{V}$. Como $\mathscr{F}$ es coherente, y también cualquier restricción, existe un abierto (que asumiremos es el mismo $\mathcal{V}$ pues basta tomar la intersección) junto con secciones $s_1, ..., s_p$ de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{V}$ tal que $\mathscr{F}_y$ es generado por $s_1(y), ..., s_p(y)$ para todo $y \in \mathcal{V}$. Si llamamos ϱ_i a $\varphi_{\mathcal{V}}(s_i)$ entonces $\varrho_1(y), ..., \varrho_p(y)$ genera a $(\mathrm{Ker}(\psi))_y$ para toda $y \in \mathcal{V}$, en particular tenemos:

$$b_1\sigma(y) + \cdots + b_r\sigma_r(y) = a_1\varrho_1(y) + \cdots + a_p\varrho_p(y)$$

para todo $(b_1, ..., b_r) \in \mathscr{A}_y^r$ y para todo $y \in \mathcal{V}$, donde $(a_1, ..., a_p) \in \mathscr{A}_y^p$. Sea ζ el morfismo asociado a las secciones $\varrho_1, ..., \varrho_p, \sigma_1, ..., \sigma_r$, puesto que $\mathscr{G}$ es coherente la gavilla $\mathrm{Ker}(\zeta)$ es de tipo finito. Podemos expresar todo lo anterior diciendo que el siguiente diagrama conmuta y que es exacto en su columna central y en su renglón base.

$$\begin{tikzcd}
& & \mathscr{A}^t(\mathcal{V}) \arrow[d, "\gamma"'] & & \\
& & \mathscr{A}^{p+r}(\mathcal{V}) \arrow[r, dotted, "\pi"] \arrow[d, "\zeta"'] & \mathscr{A}^r(\mathcal{V}) \arrow[d, "\eta"] \arrow[dl, "\delta"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(\mathcal{V}) \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{G}(\mathcal{V}) \arrow[r, "\psi"] & \mathscr{H}(\mathcal{V}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En el diagrama γ es el morfismo natural por ser $\mathrm{Ker}(\zeta)$ de tipo finito. El morfismo π es la proyección sobre las últimas r coordenadas y sólo hace conmutar el diagrama cuando las primeras p coordenadas pertenecen a la gavilla de relaciones de $\varrho_1, ..., \varrho_p$, por eso lo hemos dibujado punteado. Vamos a demostrar qúe la imagen de $\mathrm{Ker}(\zeta)$ bajo π es igual a $\mathrm{Ker}(\eta)$.

Supongamos que $(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_r) \in \mathscr{A}^{p+r}(\mathcal{V})$ es tal que bajo ζ va a cero, es decir, $a_1\varrho_1 + \cdots + a_p\varrho_p + b_1\sigma_1 + \cdots + b_r\sigma_r = 0$ entonces $\pi(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_r) \in \mathrm{Ker}\,\eta$ ya que:

$$\begin{aligned}
\eta \circ \pi(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_r) &= \eta(b_1, ..., b_r) \\
&= \psi \circ \delta(b_1, ..., b_r) \\
&= \psi(b_1\sigma_1 + \cdots + b_r\sigma_r) \\
&= -\psi(a_1\varrho_1 + \cdots + a_p\varrho_p) \\
&= -\psi \circ \varphi(a_1, ..., a_p) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la gavilla de relaciones de $\varrho_1, ..., \varrho_p, \sigma_1, ..., \sigma_r$ bajo π queda contenida en la gavilla de relaciones de $\varsigma_1, ..., \varsigma_r$, es decir, $\pi(\mathrm{Ker}(\zeta)) \subseteq \mathrm{Ker}(\eta)$. Como ya hemos visto, si $(b_1, ..., b_r) \in \mathrm{Ker}(\eta)$ existen $(a_1, ..., a_p)$ tal que $b_1\sigma + \cdots + b_r\sigma_r = a_1\varrho_1 + \cdots + a_p\varrho_p$ por lo que $(-a_1, ..., -a_p, b_1, ..., b_r) \in \mathrm{Ker}(\zeta)$, por lo tanto, $\mathrm{Ker}(\eta) \subseteq \pi(\mathrm{Ker}(\zeta))$. Concluimos que $\mathrm{Ker}(\eta)$, la gavilla de relaciones de $\varsigma_1, ..., \varsigma_r$, es de tipo finito pues $\mathrm{Ker}(\zeta)$ lo es. Por lo tanto, $\mathscr{H}$ es una gavilla coherente.

Supongamos que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{H}$ son coherentes.

Veamos que $\mathscr{G}$ es de tipo finito. Para ello sean $x \in \mathcal{X}$ y $\varsigma_1, ..., \varsigma_r$ secciones de $\mathscr{H}$ sobre $\mathcal{U}$, vecindad abierta de x, que generan cada tallo sobre $\mathcal{U}$. Por un argumento recientemente usado, podemos hablar de secciones $\sigma_1, ..., \sigma_r$ de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tales que $\psi_{\mathcal{V}}(\sigma_i) = \varsigma_i$. Por otro lado, existen secciones $s_1, ..., s_p$ de $\mathscr{F}$ digamos sobre el mismo $\mathcal{V}$ tal que generan cada tallo $\mathscr{F}_y$ corriendo $y \in \mathcal{V}$. La familia de secciones de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{V}$, $\varphi_{\mathcal{V}}(s_1), ..., \varphi_{\mathcal{V}}(s_p), \sigma_1, ..., \sigma_r$ genera cada tallo $\mathscr{G}_y$ corriendo $y \in \mathcal{V}$ debido a la exactitud de la sucesión a nivel tallo. Por lo tanto $\mathscr{G}$ es de tipo finito.

Ahora, sean $\sigma_1, ..., \sigma_m$ secciones sobre un abierto $\mathcal{U}$ y δ su morfismo asociado. Queremos ver que la gavilla de relaciones de $\sigma_1, ..., \sigma_m$, $\mathrm{Ker}(\delta)$, es de tipo finito. Sea η el morfismo asociado a $\psi_{\mathcal{U}}(\sigma_1), ..., \psi_{\mathcal{U}}(\sigma_m)$. Por definición de los morfismos el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}^m(\mathcal{U}) \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
\mathscr{G}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\psi"'] & \mathscr{H}(\mathcal{U}).
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{H}$ es coherente, la gavilla de relaciones de $\psi_{\mathcal{U}}(\sigma_1), ..., \psi_{\mathcal{U}}(\sigma_m)$ es de tipo finito, entonces existen secciones $f^1, ..., f^n$ de la gavilla $\mathrm{Ker}(\eta)$ digamos sobre el mismo $\mathcal{U}$ tales que $f^1(y), ..., f^n(y)$ genera el tallo $(\mathrm{Ker}(\eta))_y$ para toda $y \in \mathcal{U}$, donde $f^i = (f_1^i, ..., f_m^i)$. Ahora, llamamos u_i a $\delta(f^i)$, es decir, $u_i = f_1^i\sigma_1 + \cdots + f_m^i\sigma_m$. Es inmediato de la definición que $\psi(u_i) = 0$. Restringiendo nuestro abierto (cosa que en la notación seguiremos sin hacerlo) podemos decir que $u_i \in \mathrm{Im}\,\varphi_{\mathcal{U}}$. La gavilla de relaciones de $u_1, ..., u_n$ es de tipo finito vía la coherencia de $\mathscr{F}$. Llamemos γ al morfismo asociado a $u_1, ..., u_n$.

Podemos resumir lo desarrollado hasta ahora diciendo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}^n(\mathcal{U}) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\gamma"'] & & \\
& \mathscr{A}^m(\mathcal{U}) \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
\mathscr{F}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathscr{G}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\psi"'] & \mathscr{H}(\mathcal{U})
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha(a_1, ..., a_n) = a_1f^1 + \cdots + a_nf^n$. Sea $(f_1, ..., f_m) \in \mathscr{A}^m(\mathcal{U})$ tal que bajo δ cae en cero, es decir, $f_1\sigma_1 + \cdots + f_m\sigma_m = 0$, entonces $(f_1, ..., f_m)$ es una sección de $\mathrm{Ker}(\eta)$ sobre $\mathcal{U}$ (una vez más el abierto se debe tomar más pequeño pero no lo reflejaremos en la notación) por lo que existe $(g_1, ..., g_n) \in \mathscr{A}_{\mathcal{U}}^n$ tal que $\alpha_{\mathcal{U}}(g_1, ..., g_n) = (f_1, ..., f_m)$, además por construcción, $(g_1, ..., g_n) \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ que es de tipo finito. Resumimos diciendo que $\alpha_| : \mathrm{Ker}(\gamma) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\delta)$ es suprayectiva y la gavilla $\mathrm{Ker}(\gamma)$ es de tipo finito. Por lo tanto, la gavilla de relaciones de $\sigma_1, ..., \sigma_m$, $\mathrm{Ker}(\delta)$, es de tipo finito y así, $\mathscr{G}$ es coherente.

Caso en que $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ son coherentes. La mecánica de la demostración es muy parecida a lo que ya hemos hecho, entonces incluyo la prueba elegantísima que ofrece Serre.

> Supongamos $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ coherentes. Localmente existe un morfismo suprayectivo $\gamma : \mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{G}$; sea $\mathscr{I}$ el núcleo de $\psi \circ \gamma$; como $\mathscr{H}$ es coherente, $\mathscr{I}$ es de tipo finito (condición b), entonces $\gamma(\mathscr{I})$ es una gavilla de tipo finito, y así coherente por la Proposición 12; como φ es un isomorfismo sobre $\gamma(\mathscr{I})$, concluimos que $\mathscr{F}$ es coherente.

□

Corolario 1. *La suma directa de una familia finita de gavillas coherentes es una gavilla coherente.*

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{F} \oplus \mathscr{G} \twoheadrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0.$$

□

Corolario 2. *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos subgavillas coherentes de una gavilla coeherente $\mathscr{H}$. Las gavillas $\mathscr{F} + \mathscr{G}$ y $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ son coherentes.*

Demostración. La subgavilla $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ es de tipo finito pues $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ lo son, entonces por la Proposición 12, es coherente. Ahora, consideremos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}\cap\mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}\oplus\mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}+\mathscr{G} \longrightarrow 0$$

Entonces por el Teorema 1 la subgavilla $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ es coherente. □

Teorema 2. *Sea $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morfismo de gavillas coherentes. El núcleo, conúcleo e imagen de φ son gavillas coherentes.*

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es de tipo finito, también lo es $\mathrm{Im}(\varphi)$, entonces por la Proposición 12 es coherente. Aplicando el Teorema 1 a la siguiente sucesión exacta obtenemos que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es coherente.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow 0$$

La gavilla $\mathrm{Coker}(\varphi)$ es coherente por el Teorema 1 pues la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

□

3.3 Operaciones sobre las gavillas coherentes

Veremos que tomar las construcciones Hom y de producto tensorial de dos gavillas coherentes nos da de nuevo una gavilla coherente.

Proposición 13. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos gavillas coherentes, entonces $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ es coherente.*

Demostración. Localmente $\mathscr{F}$ es isomorfa al conúcleo de un morfismo $\varphi : \mathscr{A}^q \longrightarrow \mathscr{A}^p$, entonces localmente $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ es isomorfa al conúcleo de $\varphi\otimes Id : \mathscr{A}^q\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{A}^p\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$; la gavilla $\mathscr{A}^q\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ es isomorfa a $\mathscr{G}^q$, que es coherente, entonces $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ localmente es isomorfa al conúcleo de un morfismo $\mathscr{G}^q \longrightarrow \mathscr{G}^p$. Por el Teorema 2 concluímos que $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ es coherente. □

Proposición 14. *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos gavillas de las cuales $\mathscr{F}$ es coherente. Para todo $x\in X$ el módulo $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}))_x$ es isomorfo al módulo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)$.*

Demostración. Trabajemos con el morfismo

$$\zeta : (\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}))_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)$$

definido en la Sección 2.6.

Primero veamos que ζ es inyectivo. Supongamos que tenemos $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ en $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}))_x$ tal que $\zeta(\bar{\varphi}) = \zeta(\bar{\psi})$. Tomemos representantes de $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ digamos sobre el abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$:

$$\varphi : \mathscr{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathcal{U})$$
$$\psi : \mathscr{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathcal{U}).$$

Sabemos que $\varphi_x = \psi_x$ y queremos probar $\varphi = \psi$ en alguna vecindad de x. Como $\mathscr{F}$ es de tipo finito existe un abierto $\mathcal{V}$ vecindad de x y secciones $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_p$ de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ que generan cada tallo sobre $\mathcal{V}$. Por hipótesis $(\varphi - \psi)_x(\varsigma_i) = 0$ por lo que las secciones $\varphi(\varsigma_i)$ y $\psi(\varsigma_i)$ coinciden sobre el tallo $\mathscr{G}_x$ entonces lo hacen localmente, digamos sobre $\mathcal{V}_i$. Como $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_p$ son generadores φ y ψ coinciden en $\cap_{i=1}^{p} \mathcal{V}_i$. Por lo tanto ζ es inyectiva. (Lo que pesó en la prueba fue que $\mathscr{F}$ es de tipo finito pues aún no usamos que es coherente.)

Veamos que ζ es suprayectiva. Tomemos un morfismo $\gamma : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$, queremos extender γ sobre una vecindad de x, es decir, construir un morfismo $\psi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ definido sobre una vecindad de x y tal que $\psi_x = \gamma$.

Sea $\mathcal{U}$ una vecindad abierta de x y $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_p$ secciones de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$ tales que generen cada tallo $\mathscr{F}_y$ corriendo y en $\mathcal{U}$. Para $\gamma(\varsigma_i(x))$ tomamos una sección σ_i de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{V}_i$ que lo represente, es decir, $\sigma_i(x) = \gamma(\varsigma_i(x))$. Como $\mathscr{F}$ es coherente, la gavilla de relaciones de $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_p$ es de tipo finito, digamos que sobre $\mathcal{V} = \cap_{i=1}^{p} \mathcal{V}_i$ hay secciones $f^1, \ldots, f^q$ tales que para toda $y \in \mathcal{V}$ tenemos que $f^1(y), \ldots, f^q(y)$ generan al tallo sobre y de la gavilla de relaciones de $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_p$; formalmente $f^j = (f_1^j, \ldots, f_p^j)$ para $j = 1, \ldots, q$. Llamemos p_j a $f_1^j \sigma_1 + \cdots + f_p^j \sigma_p$. Como f^j pertenece a la gavilla de relaciones de $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_p$, tenemos $f_1^j \varsigma_1 + \cdots + f_p^j \varsigma_p = 0$ para alguna vecindad de x, digamos $\mathcal{W}_j$; entonces $p_j = 0$ en $\mathcal{W}_j$. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap_{j=1}^{p} \mathcal{W}_j$. De todo lo anterior se sigue que para toda $y \in \mathcal{W}$ si $a_1\varsigma_1(y) + \cdots + a_p\varsigma_p(y) = 0$, donde $a_i \in \mathscr{A}_y$, entonces $a_1\sigma_1(y) + \cdots + a_p\sigma_p(y) = 0$. Definimos $\psi : \mathscr{F}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathcal{W})$ en cada tallo como $\psi_y(a_1\varsigma_1(y) + \cdots + a_p\varsigma_p(y)) = a_1\sigma_1(y) + \cdots + a_p\sigma_p(y)$. Por construcción ψ es un morfismo de gavillas tal que $\psi_x = \gamma$.

Es fundamental que $\mathscr{F}$ sea coherente en nuestra prueba de la suprayectividad de ζ. Si $a_1\varsigma_1(y) + \cdots + a_p\varsigma_p(y) = 0$ en alguna vecindad $\mathcal{U}$ de x entonces $a_1\sigma_1(x) + \cdots + a_p\sigma_p(x) = 0$, por lo que $a_1\sigma_1(y) + \cdots + a_p\sigma_p(y) = 0$ en alguna vecindad de x que depende de $a_1, \ldots, a_p$; en principio tenemos una infinidad de abiertos y posiblemente su intersección ya no lo sea perdiendo sentido nuestro morfismo ψ. Pero como $\mathscr{F}$ es coherente basta tomarse los abiertos que definen los generadores, que son un número finito, así $\mathcal{U}$ es un abierto y ψ queda bien definida. $\square$

En la Sección 2.6 confesamos que no podíamos decir que ζ fuése biyectivo, ahora hemos dado condiciones suficientes. Con tan sólo pedir que $\mathscr{F}$ fuera coherente pudimos asegurar el isomorfismo anteror, si también pedimos que $\mathscr{G}$ sea coherente podemos garantizar que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ sea una gavilla coherente, que es justo lo que veremos en la siguiente proposición.

Proposición 15. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son gavillas coherentes, entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ *es una gavilla coherente.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{X}$ y sea $\mathcal{U}$ una vecindad abierta donde el renglón del siguiente diagrama es exacto (existe pues $\mathscr{F}$ es coherente):

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}^q(\mathcal{U}) \arrow[r] & \mathscr{A}^p(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{F}(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & \mathscr{G}(\mathcal{U}) &
\end{tikzcd}$$

Por composiciones, naturalmente queda inducida una sucesión, la siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(\mathcal{U})}(\mathscr{F}(\mathcal{U}),\mathscr{G}(\mathcal{U})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(\mathcal{U})}(\mathscr{A}^p(\mathcal{U}),\mathscr{G}(\mathcal{U})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(\mathcal{U})}(\mathscr{A}^q(\mathcal{U}),\mathscr{G}(\mathcal{U})) \quad (3.1)$$

que a nivel tallo es exacta y entonces por la Proposición 14 es exacta a nivel gavilla. Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}^p,\mathscr{G})$ es isomorfa a $\mathscr{G}^p$ entonces por la sucesión exacta 3.1 y por el Teorema 2 concluímos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ es coherente. □

3.4 Gavillas coherentes de anillos

Una gavilla de anillos $\mathscr{A}$ a su vez es una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos de tipo finito, pues basta tomarse la sección constante 1. Entonces para que $\mathscr{A}$ sea una gavilla coherente basta pedir que la gavilla de relaciones de un número finito de secciones sea de tipo finito ambas sobre $\mathcal{U}$.

Cuando $\mathscr{A}$ es una gavilla coherente de anillos y aplicando lo anterior, tenemos los siguientes resultados:

Proposición 16. *Sean $\mathscr{A}$ una gavilla de anillos coherente y $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos. Para que $\mathscr{F}$ sea coherente, es necesario y suficiente que localmente sea el conúcleo de un morfismo $\mathscr{A}^q \longrightarrow \mathscr{A}^p$.*

Demostración. De hecho, la proposición sólo recapitula lo ya dicho en la Proposición 11 y en el Teorema 2, tomando en cuenta que $\mathscr{A}^r$ es coherente para cualquier $r \in \mathbb{N}$. □

Proposición 17. *Sea $\mathscr{A}$ una gavilla de anillos coherente. Para que una subgavilla de $\mathscr{A}^p$ sea coherente, es necesario y suficiente que sea de tipo finito.*

Demostración. Se sigue de aplicar la Proposición 12. □

Corolario 3. *La gavilla de relaciones de un número finito de secciones de una gavilla coherente es coherente.*

Demostración. Dicha gavilla de relaciones es de tipo finito, entonces por la Proposición anterior es coherente. □

Proposición 18. *Sean $\mathscr{A}$ una gavilla de anillos coherente y $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos. Para cada $x \in X$ sea $\mathscr{I}_x$ el ideal de $\mathscr{A}_x$ formado por todos los $a \in \mathscr{A}$ tal que $a \cdot f = 0$ para toda $f \in \mathscr{F}_x$. Los ideales $\mathscr{I}_x$ forman una gavilla coherente de ideales (conocida como* anuladora de *$\mathscr{F}$).*

Demostración. Otra manera de pensar $\mathscr{I}_x$ es como el núcleo del morfismo natural $\mathscr{A}_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{F}_x)$, entonces la gavilla $\mathscr{I}$ de los ideales $\mathscr{I}_x$ es isomorfa al núcleo del morfismo de gavillas $\mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ por las Propiedades 14 y 15. Concluimos que $\mathscr{I}$ es coherente siguiendo al Teorema 2. □

3.5 Cambiando anillos

Las nociones de gavilla de tipo finito y de gavilla coherente dependen de la gavilla de anillos $\mathscr{A}$ con que se esté tratando. Cuando hablemos de distintas gavillas de anillos especificaremos diciendo "de tipo finito sobre $\mathscr{A}$" o "$\mathscr{A}$-coherente" para no caer en ambiguedades.

Teorema 3. *Sean $\mathscr{A}$ una gavilla coherente de anillos e $\mathscr{I}$ una gavilla de ideales de $\mathscr{A}$. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-módulos. Para que $\mathscr{F}$ sea $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-coherente es necesario y suficiente que sea $\mathscr{A}$-coherente. En particular, $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ es una gavilla coherente de anillos.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{F}$ es $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-coherente, entonces localmente tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$(\mathscr{A}/\mathscr{I})^q \longrightarrow (\mathscr{A}/\mathscr{I})^p \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

Como $\mathscr{A}$ e $\mathscr{I}$ son gavillas $\mathscr{A}$-coherentes, entonces también lo es $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ en virtud del Teorema 1. Como $\mathscr{F}$ es isomorfo al conúcleo de un morfismo entre gavillas $\mathscr{A}$-coherentes, entonces por el Teorema 2 es $\mathscr{A}$-coherente.

Ahora, supongamos que $\mathscr{F}$ es $\mathscr{A}$-coherente. La gavilla $\mathscr{F}$ por ser de $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-módulos se ve obligada a ser de tipo finito sobre $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ ya que es de tipo finito como gavilla de $\mathscr{A}$-módulos. Sean $\sigma_1, ..., \sigma_r$ secciones de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}$, entonces su gavilla de relaciones es de tipo finito sobre $\mathscr{A}$. Queremos llegar a que la gavilla de relaciones es de tipo finito sobre $\mathscr{A}/\mathscr{I}$, es decir, buscamos φ tal que el siguiente diagrama conmute y que sus renglones sean exactos:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}^q \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathscr{A}^p \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
(\mathscr{A}/\mathscr{I})^q \arrow[r, dotted, "\varphi"] & (\mathscr{A}/\mathscr{I})^p \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como las verticales son proyecciones φ queda bien inducida por ψ. Por lo tanto, $\mathscr{F}$ es $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-coherente. □

3.6 Extensión y restricción de una gavilla coherente

Retomando la Subsección 2.3 cabe preguntarse a cerca de la propiedad de ser coherente.

Proposición 19. *Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{X}$ y sea $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos sobre $\mathcal{Y}$. Para que $\mathscr{F}$ sea de tipo finito sobre $\mathscr{A}$ es necesario y suficiente que $\mathscr{F}^{\mathcal{X}}$ sea de tipo finito sobre $\mathscr{A}^{\mathcal{X}}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{X}$, y $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{Y}$. Todo morfismo $\varphi : \mathscr{A}^p(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathcal{V})$ define un morfismo $\varphi^{\mathcal{X}} : \mathscr{A}^{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{F}^{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ y reciprocamente; el morfismo φ es suprayectivo si y sólo si $\varphi^{\mathcal{X}}$ es suprayectivo. Lo anterior implica que $\mathscr{F}$ es de tipo finito sobre $\mathscr{A}$ si y sólo si $\mathscr{F}^{\mathcal{X}}$ es de tipo finito sobre $\mathscr{A}^{\mathcal{X}}$. □

Análogamente se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 20. *$\mathscr{F}$ es $\mathscr{A}$-coherente si y sólo si $\mathscr{F}^{\mathcal{X}}$ es $\mathscr{A}^{\mathcal{X}}$-coherente.*

□

Corolario 4. *Para que $\mathscr{A}$ sea una gavilla coherente de anillos es necesario y suficiente que $\mathscr{A}^{\mathcal{X}}$ lo sea.*

□

Capítulo 4

Cohomología con valores en una gavilla

A lo largo de esta sección Serre alude a una serie de conceptos y resultados propios de la topología algebraica, por lo cual introduciremos un poco de ese lenguaje. El procedimiento que usaremos para construir los grupos de cohomología es el de *Čeck*.

Un *complejo simplicial* K consiste de un conjunto de vértices $\{v\}$ y un conjunto $\{s\}$ de subconjuntos finitos no vacíos de $\{v\}$ llamados ***simplejos***, tales que:

(a) Cualquier conjunto consistente de exactamente un vértice es un simplejo.

(b) Cualquier subconjunto no vacío de un simplejo es de nuevo un simplejo.

Un simplejo s que contiene exactamente $q+1$ vértices es llamado q-simplejo. En este caso decimos que la dimensión de s es q, denotándolo como $\dim s = q$. Si $s' \subset s$ decimos que s' es cara de s (una cara propia si $s \neq s'$), y si s' es un p-simplejo lo llamamos p-cara de s. Si s es un q-simplejo, s es su única q-cara y una cara s' de s es propia si y sólo si $\dim s' < q$. Es claro que cualquier simplejo tiene sólo un número finito de caras. Los simplejos admiten un orden parcial, a saber, $s' < s$ si s' es cara de s. De la condición (a) se sigue que los 0-simplejos de K se corresponden biyectivamente con los vértices y por la condición (b) todo simplejo queda determinado por sus vértices. Por lo tanto un complejo K puede ser visto como el conjunto de sus simplejos.

4.1 Cocadenas de una cubierta

Al hablar de cubiertas nos referiremos siempre a cubiertas abiertas sin mencionarlo explícitamente.

Sea $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una cubierta de $\mathcal{X}$. Nos interesan las intersecciones finitas de elementos de $\mathfrak{U}$, por lo que recibirán notación, así si $s = (i_0, ..., i_p)$ llamamos $\mathcal{U}_s$ a la intersección $\mathcal{U}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{i_p}$.

Ahora, sea $\mathscr{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre $\mathcal{X}$. Si $p \geq 0$ llamamos *p-cocadena de $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathscr{F}$* a las funciones $f : I^{p+1} \longrightarrow \prod_{s\in I^{p+1}} \mathscr{F}_{\mathcal{U}_s}$ que a cada $s = (i_0, ..., i_p)$ asocian una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}_s$ a la que llamaremos f_s ó $f_{i_0\cdots i_p}$. Con otras palabras, una p-cocadena de $\mathfrak{U}$ es una familia de secciones, una por cada abierto de la forma $\mathcal{U}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{i_p}$. Al conjunto de p-cocadenas de $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathscr{F}$ lo denotamos como $C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ quien resulta grupo abeliano al dotarlo con la operación puntual $(f+g)(s) = f_s + g_s$, aprovechando la estructura algebraica del codominio. A la familia de los grupos $C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ corriendo p por $0, 1, 2, 3, \ldots$ la denotamos como $C(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.

4.2 Operaciones simpliciales

Trabajemos un momento con el conjunto de índices I. Sea $S(I)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos ordenados de I, es decir, sus p-simplejos son de la forma $s = (i_0, \ldots, i_p)$, donde estamos pensando $i_0 < \cdots < i_p$, de esta forma, (i_0, i_1) es distinto de (i_1, i_0) cuando $i_0 \neq i_1$. Sea $K_p(I)$ el grupo abeliano libre generado por los p-simplejos de $S(I)$ y finalmente sea $K(I) = \oplus_{p \geq 0} K_p(I)$. Cuando no interese el orden de los elementos de s, lo haremos notar agregando dos barras: $|s|$. Una aplicación $h : K_p(I) \longrightarrow K_q(I)$ donde $q \leq p$ se llama *endomorfismo simplicial* si:

(i) h es morfismo de grupos abelianos;

(ii) para todo simplejo s de dimensión p de $S(I)$ tenemos,

$$h(s) = \sum_{s'} c_s^{s'} \cdot s'$$

donde $c_s^{s'} \in \mathbb{Z}$ y la suma corre sobre todos los simplejos s' de $S(I)$ de dimensión q tales que $|s'| \subset |s|$. Ahora, sean h un endomorfismo simplicial y $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. Para todo simplejo de dimensión p, ponemos:

$$({}^t hf)_s = \sum_{s'} c_s^{s'} \cdot \varrho_s^{s'}(f_{s'}),$$

donde $\varrho_s^{s'}$ es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{s'}}$ en $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_s}$, restricción que tiene sentido pues $|s'| \subset |s|$ y entonces $\mathcal{U}_s \subset \mathcal{U}_{s'}$.

La aplicación $s \mapsto ({}^t hf)_s$ es una p-cocadena denotada ${}^t hf$. Así, la aplicación ${}^t h : C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ definida como ${}^t h(f) = {}^t hf$ es un morfismo de grupos. Además,

$$\begin{aligned} {}^t(g+h) &= {}^t g + {}^t h \\ {}^t(h_1 \circ h_2) &= {}^t h_2 \circ {}^t h_1 \\ {}^t 1 &= 1. \end{aligned}$$

La última igualdad es clara, para checar las demás, digamos que $g(s) = \sum_{s'} d_s^{s'} \cdot s'$ y $h(s) = \sum_{s'} e_s^{s'} \cdot s'$, entonces,

$$\begin{aligned} {}^t(g+h)(f)_s &= \sum_{s'} (d_s^{s'} + e_s^{s'}) \cdot \varrho_s^{s'}(f_{s'}) \\ &= \sum_{s'} d_s^{s'} \cdot \varrho_s^{s'}(f_{s'}) + \sum_{s'} e_s^{s'} \cdot \varrho_s^{s'}(f_{s'}) \\ &= {}^t g(f)_s + {}^t h(f)_s. \end{aligned}$$

Ahora, sean:

$$h_1 : K_q(I) \longrightarrow K_r(I); \qquad h_1(\sigma) = \sum_{s'} b_\sigma^{s'} \cdot s'$$

$$h_2 : K_p(I) \longrightarrow K_q(I); \qquad h_2(s) = \sum_{\sigma} c_s^{\sigma} \cdot \sigma,$$

donde $p > q > r$, y así,

$$\begin{aligned} h_1 \circ h_2(s) &= h_1\left(\sum_\sigma c_s^\sigma \cdot \sigma\right) \\ &= \sum_\sigma c_s^\sigma \cdot h_1(\sigma) \\ &= \sum_\sigma c_s^\sigma \cdot \left(\sum_{s'} b_\sigma^{s'} \cdot s'\right) \\ &= \sum_\sigma \sum_{s'} c_s^\sigma \cdot b_\sigma^{s'} \cdot s', \end{aligned}$$

de donde para $f \in C^r(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} ({}^t(h_1 \circ h_2)(f))_\sigma &= \sum_\sigma \sum_{s'} c_s^\sigma \cdot b_\sigma^{s'} \cdot \varrho_s^{s'}(f_{s'}) \\ &= \sum_\sigma c_s^\sigma \left(\sum_{s'} b_\sigma^{s'} \cdot \varrho_s^\sigma \varrho_\sigma^{s'}(f_{s'})\right) \\ &= \sum_\sigma c_s^\sigma \varrho_s^\sigma \left(\sum_{s'} b_\sigma^{s'} \cdot \varrho_\sigma^{s'}(f_{s'})\right) \\ (({}^t h_2 \circ {}^t h_1) f)_\sigma &= \sum_\sigma c_s^\sigma \varrho_s^\sigma (({}^t h_1 f)_\sigma) \end{aligned}$$

Llamaremos *construcción t* a la descrita en esta sección, que a un endomorfismo simplicial de cadenas h asocia un endomorfismo simplicial de cocadenas ${}^t h$.

4.3 Complejos de cocadenas

Apliquemos la construcción t al endomorfismo $\partial_{p+1} : K_{p+1}(I) \longrightarrow K_p(I)$, definido como:

$$\partial(i_0, ..., i_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j(i_0, ..., \hat{i}_j, ..., i_{p+1}),$$

donde el sombrero sobre i_j significa omitir dicho índice.

De esta forma obtenemos un morfismo $d = {}^t\partial$ (donde $d_p = {}^t\partial_{p+1}$), el cual por definición es el que sigue:

$$d(f)_{i_0,...,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \varrho_j(f_{i_0,...,\hat{i}_j,...,i_{p+1}}),$$

donde $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ y ϱ_j es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0,...,\hat{i}_j,...,i_{p+1}}}$ sobre $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0,...,i_{p+1}}}$. Como $\partial \circ \partial = 0$ entonces $d \circ d = 0$, por lo que hemos dotado a $C(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ con un operador cofrontera, es decir un operador que lo hace complejo de cocadenas. Definimos el q-ésimo grupo de cohomología del complejo $C(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ como $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$, donde $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d \subset C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, y lo denotamos como $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.

Si $f \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ entonces f_i es una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}_i$. Sabemos que $\partial : K_1(I) \longrightarrow K_0(I)$ está definida como $\partial(i,j) = j - i$ entonces induce $d(f)_{ij} = \varrho^{\mathcal{U}_j}_{\mathcal{U}_{ij}}(f_j) - \varrho^{\mathcal{U}_i}_{\mathcal{U}_{ij}}(f_i)$. Así, si $f \in \operatorname{Ker} d$ entonces por el Axioma de gavilla existe una única sección global $\bar{f}$ tal que $\varrho^{\mathcal{X}}_{\mathcal{U}_i} = f_i$ para toda $i \in I$. De lo anterior concluimos que existe un morfismo inyectivo $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F})$. De hecho no sólo es inyectivo sino también suprayectivo pues con cada sección global g podemos definir una 0-cocadena $\bar{g}$ como $\bar{g}(i) = \varrho^{\mathcal{X}}_{\mathcal{U}_i}(g)$ que por ser sección global pertenece al núcleo $\operatorname{Ker} d = H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. Hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 21. *El grupo de cohomología $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ es isomorfo a $\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F})$.*

□

El grupo de cohomología $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ no depende de la cubierta $\mathfrak{U}$ como acabamos de ver en la proposición anterior, desafortunadamente éste no es el caso general, no necesariamente sucede para $q > 0$.

4.4 Cocadenas alternantes y algunos de sus usos

Decimos que una p-cocadena es alternante si $f_{i_0 \cdots i_p} = 0$ cuando dos de los índices $i_0, ..., i_p$ son iguales, y, $f_{i_{\sigma(0)}, \cdots, i_{\sigma(p)}} = \epsilon_\sigma f_{i_0 \cdots i_p}$, donde σ es una permutación del conjunto $\{0, ..., p\}$ y ϵ_σ es el signo de σ.

El conjunto de las p-cocadenas alternantes es cerrado bajo la suma por lo que forma un subgrupo de $C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ y lo denotamos $C'^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. A la familia de los $C'^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ la denotamos $C'(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.

Una 0-cocadena f de $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathscr{F}$ es una familia de secciones, una por cada abierto $\mathcal{U}_i$, es decir, $f = (f_i)_{i\in I}$ donde $f_i \in \mathcal{U}_i$. A este nivel todas las cocadenas se ven obligadas a ser alternantes. Si $f \in C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ le podemos asociar una 0-cocadena al evaluarla sólo en las parejas (i,i). Podemos pensar que hemos afinado nuestra percepción y donde a nivel cero veíamos la misma familia ahora distinguimos muchas distintas. Una 1-cocadena alternante es aquella que se olvida de su parte de 0-cocadena, que pone atención sólo en la información nueva. La anterior idea se extiende a todos los niveles, así, una p-cocadena es aquella que se olvida de su parte de $p-1$-cocadena, no redunda en lo ya sabido centrandose sólo en la información nueva.

Proposición 22. *Si f es alternante también lo es $d(f)$.*

Demostración. Probemos que $df(i_0, ..., i_{p+1}) = 0$ cuando $i_0 = i_1$ (el caso general es similar salvo que necesitaríamos una engorrosa notación):

$$\begin{aligned} df(i_0, \dots, i_{p+1}) &= \varrho^{\mathcal{U}_{i_1 i_2 \cdots i_{p+1}}}_{\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_{p+1}}}(f_{i_1 \cdots i_{p+1}}) - \varrho^{\mathcal{U}_{i_0 i_2 \cdots i_{p+1}}}_{\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_{p+1}}}(f_{i_0 i_2 \cdots i_{p+1}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo anterior por ser f alternante y tener $i_0 = i_1$, entonces casi todos los sumandos se anulan en la primera igualdad. Ahora veamos como se comporta df con las permutaciones.

$$\begin{aligned} (df)_{i_{\sigma 0}, \dots, i_{\sigma p+1}} &= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \varrho\left(f_{i_{\sigma 0} \cdots \hat{i}_{\sigma j} \cdots \sigma p+1}\right) \\ &= \sum_{\sigma j=0}^{p+1} (-1)^j \varrho\left(\epsilon_{\sigma j} f_{i_0 \cdots \hat{i}_{h_j} \cdots i_{p+1}}\right) \\ &= \sum_{\sigma j=0}^{p+1} (-1)^j \epsilon_{\sigma j} \varrho\left(f_{i_0 \cdots \hat{i}_{h_j} \cdots i_{p+1}}\right) \\ &= \sum_{\sigma j=0}^{p+1} (-1)^{h_j} \epsilon_{\sigma} \varrho\left(f_{i_0 \cdots \hat{i}_{h_j} \cdots i_{p+1}}\right) \\ &= \epsilon_\sigma \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \varrho\left(f_{i_0 \cdots \hat{i}_j \cdots i_{p+1}}\right) \end{aligned}$$

Dado que omitimos uno de los índices no sabemos cual pueda ser el signo de la permutación que te regresa, mismo que hemos denotado como ϵ_{σ_j}, sin embargo, se cumple la igualdad $(-1)^{h_j}\epsilon_\sigma = \epsilon_{\sigma_j}(-1)^j$ para toda j con $h_j = \sigma(j)$. Las cuentas anteriores nos muestran que d manda cocadenas alternantes en cocadenas alternantes. □

Lo que dice la Proposición 22 es que d deja estable $C'(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ que entonces forma un subcomplejo de $C(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Los grupos de cohomología de $C'(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ los denotaremos $H'^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Las cocadenas alternantes resultan muy útiles, muestra de ello es el siguiente Teorema y su Corolario.

Teorema 4. *La inclusión de $C'(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ en $C(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ define un isomorfismo de grupos de $H'^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ sobre $H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ para todo $q \geq 0$.*

La prueba del Teorema 4 requiere de cierto lenguaje que no hemos introducido. Sean K y K' dos complejos de cadenas y $f,g : K \longrightarrow K'$ dos morfismos entre ellos. Decimos que una sucesión de morfismos $D = \{D_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q+1}(K')\}$ es una *homotopía de cadenas* si $\partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$. Similarmente si K y K' son complejos de cocadenas y $f,g : K \longrightarrow K'$ dos morfismos entre ellos, decimos que una sucesión de morfismos $D = \{D^q : C^q(K) \longrightarrow C^{q-1}(K')\}$ es una *homotopía de cocadenas* si $d_{q-1} \circ D_q + D_{q+1} \circ d_q = g_q - f_q$. Denotamos lo anterior como $D : f \cong g$ diciendo que f y g son *cadeno-homotópicos* ó *cocadeno-homotópicos*.

Lema 1. *Si $f,g : K \longrightarrow K'$ son cocadeno-homotópicos, entonces sus morfismos inducidos coinciden: $f^* = g^* : H^q(K) \longrightarrow H^q(K')$.*

(Análogamente, si son cadeno-homotópicos tenemos que $f_* = g_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(K')$.)

Demostración. Sea $D : f \cong g$ y $z \in \mathrm{Ker}(d_q : K^q \longrightarrow K^{q+1})$, entonces,

$$\begin{aligned} d_{q-1} \circ D_q(z) + D_{q+1} \circ d_q(z) &= g_q(z) - f_q(z) \\ d_{q-1} \circ D_q(z) &= g_q(z) - f_q(z), \end{aligned}$$

por lo que, $g_q(z) - f_q(z) \in \mathrm{Im}\, d_{q-1}$. Concluimos que $f(z)$ y $g(z)$ definen la misma clase en $H^q(K')$, por lo tanto $f^* = g^*$. □

Demostración del Teorema 4. Primero, al conjunto I de índices lo dotamos de un orden total y definimos un endomorfismo simplicial $h : K_q(I) \longrightarrow K_q(I)$ de la siguiente manera:

$h((i_0, ..., i_q)) = 0$, si entre los índices $i_0, ..., i_q$ dos son iguales;

$h((i_0, ..., i_q)) = \epsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, ..., i_{\sigma q})$, si todos los índices $i_0, ..., i_q$ son distintos, donde ϵ_σ denota el signo de la permutación σ que oredena al simplejo, es decir, $i_{\sigma 0} < ... < i_{\sigma q}$.

En efecto, h es simplicial pues $|i_{\sigma 0}, ..., i_{\sigma q}| \subset |i_0, ..., i_q|$, de hecho como conjuntos tenemos la igualdad.

El endomorfismo h hace conmutativo el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} K_{p+1}(I) & \xrightarrow{h} & K_{p+1}(I) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ K_p(I) & \xrightarrow[h]{} & K_p(I) \end{array}$$

ya que, tomando $(i_0, i_1, ..., i_{p+1}) \in K_{p+1}(I)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
h \circ \partial(i_0, i_1, ..., i_{p+1}) &= h\left(\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j(i_0, ..., \hat{\imath}_j, ..., i_{p+1})\right) \\
&= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j h(i_0, ..., \hat{\imath}_j, ..., i_{p+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \left(\epsilon_{\sigma_j}(i_{\sigma 0}, ..., \hat{\imath}_{\sigma(r_j)}, ..., i_{\sigma(p+1)})\right) \\
&\quad \text{donde } (-1)^j\epsilon_{\sigma_j} = \epsilon_\sigma(-1)^{r_j}, \text{ y } \sigma(r_j) = j \\
&= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^{r_j}\epsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, ..., \hat{\imath}_{\sigma(r_j)}, ..., i_{\sigma(p+1)}) \\
&= \epsilon_\sigma \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j(i_{\sigma 0}, ..., \hat{\imath}_{\sigma_j}, ..., i_{\sigma(p+1)}) \\
\partial \circ h(i_0, ..., i_{p+1}) &= \partial(\epsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, ..., i_{\sigma(p+1)})).
\end{aligned}$$

Proponemos que 1 y h son cadeno-homotópicas. Buscamos D tal que:

$$1_q - h_q = \partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q.$$

Dibujemos un diagrama de apoyo, para ubicar en donde nos movemos.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_{q+1}(I) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "h"] & K_q(I) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dl, "D_q"'] & K_{q-1}(I) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dl, "D_{q-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K_{q+1}(I) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & K_q(I) \arrow[r, "\partial_q"'] & K_{q-1}(I) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Analizando el caso $q = 0$ junto con $q = 1$ se ocurre cómo definir D, presentamos la definición en general. Para lo cual tomamos $\iota \in I$ un índice fijo.

Sea $D_q : K_q(I) \longrightarrow K_{q+1}(I)$ definida de la siguiente manera:

$$D_q\left((i_0, i_1, ..., i_q)\right) = (\iota, i_0, i_1, ..., i_q) - \epsilon_\sigma(\iota, i_{\sigma 0}, i_{\sigma 1} ..., i_{\sigma q}),$$

donde σ es la permutación que ordena. Chequemos que D cumple:

$$1_q - h_q = \partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q.$$

Para ello, sea $(i_0, i_1, ..., i_q) \in K_q(I)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1} \circ D_q(i_0, ..., i_q) &= \partial_{q+1} \left((\iota, i_0, ..., i_q) - \epsilon_\sigma (\iota, i_{\sigma 0}, ..., i_{\sigma q})\right) \\
&= (i_0, ..., i_q) + \sum_{r=0}^{q} (-1)^{r+1} (\iota, i_0, ..., \hat{\imath}_r, ..., i_q) - \\
&\quad \epsilon_\sigma (i_{\sigma 0}, ..., i_{\sigma q}) - \epsilon_\sigma \sum_{r=0}^{q} (-1)^{r+1} (\iota, i_{\sigma 0}, ..., \hat{\imath}_{\sigma r}, ..., i_{\sigma q}) \\
&= (i_0, ..., i_q) - \epsilon_\sigma (i_{\sigma 0}, ..., i_{\sigma q}) + \\
&\quad \sum_{r=0}^{q} (-1)^{r+1} \Big((\iota, i_0, ..., \hat{\imath}_r, ..., i_q) - \epsilon_\sigma (\iota, i_{\sigma 0}, ..., \hat{\imath}_{\sigma r}, ..., i_{\sigma q}) \Big)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
D_{q-1} \circ \partial_q (i_0, ..., i_q) &= D_{q-1} \left(\sum_{r=0}^{q} (-1)^r (i_0, ..., \hat{\imath}_r, ..., i_q) \right) \\
&= \sum_{r=0}^{q} (-1)^r D_{q-1} (i_0, ..., \hat{\imath}_r, ..., i_q) \\
&= \sum_{r=0}^{q} (-1)^r \Big((\iota, i_0, ..., \hat{\imath}_r, ..., i_q) - \epsilon_{\sigma_r} (\iota, i_{\sigma 0}, ..., \hat{\imath}_{\sigma r}, ..., i_{\sigma q}) \Big) \\
&\quad \text{donde } (-1)^s \epsilon_{\sigma_r} = \epsilon_\sigma (-1)^r, \text{ con } s = \sigma(r) \\
&= \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \Big((\iota, i_0, ..., \hat{\imath}_s, ..., i_q) - \epsilon_\sigma (\iota, i_{\sigma 0}, ..., \hat{\imath}_{\sigma s}, ..., i_{\sigma q}) \Big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q)(i_0, ..., i_q) &= (i_0, ..., i_q) - \epsilon_\sigma (i_{\sigma 0}, ..., i_{\sigma q}) \\
&= (1_q - h_q)(i_0, ..., i_q)
\end{aligned}$$

Aplicando la construcción t de la Sección 4.2 obtenemos la siguiente igualdad:

$$^t1 - {}^th = {}^tD \circ {}^t\partial + {}^t\partial \circ {}^tD.$$

Podemos escribir los morfismos de la igualdad anterior en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_{q-1}"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "^th"] & C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_q"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "^th"] \arrow[dl, "D^q"'] & C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "^th"] \arrow[dl, "D^{q+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_{q-1}"'] & C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_q"'] & C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $D^q = {}^tD_{q-1}$ y, como ya habíamos apuntado, ${}^t\partial_{q+1} = d_q$.

En este momento podemos concluir diciendo que $1^* = h^* : H^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ pero lo que nos interesa es probar que $H'^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \cong H^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ vía el morfismo inducido por la inclusión $i : C'(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.

Lo que afirmamos es $\mathrm{Im}({}^th) \subset C'(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. La contención anterior nos permite decir ${}^th : C(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C'(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ y como hemos porbado que 1 y th son cocadeno homotópicas entonces los pares $i \circ {}^th$ y 1_C, y, ${}^th \circ i$ y $1_{C'}$ son cocadeno-homotópicos. Concluimos por el Lema 1 que $(i \circ {}^th)^* = 1^*$ y $({}^th \circ i)^* = 1^*$. Por lo tanto i^* es isomorfismo.

Comprobemos la afirmación. Sea $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ y apliquémosle th. Al evaluar $s = (i_0, i_1, \ldots, i_q)$ donde dos índices son iguales da cero por como se definió h, en símbolos tenemos: $({}^thf)_s = 0$. Supongamos que ninguno de los índices en s se repite, tenemos $({}^thf)_{i_0 i_1 \cdots i_q} = \epsilon_\sigma f_{i_{\sigma 0} i_{\sigma 1} \cdots i_{\sigma q}}$, donde σ es la permutación tal que $i_{\sigma 0} < i_{\sigma 1} < \cdots < i_{\sigma q}$. Ahora, sea ρ una permutación cualquiera de $\{0, 1, \ldots, q\}$, entonces $({}^thf)_{i_{\rho 0} i_{\rho 1} \cdots i_{\rho q}} = \epsilon_\eta f_{i_{\eta\rho 0} i_{\eta\rho 1} \cdots i_{\eta\rho q}}$, donde η es una permutación tal que $i_{\eta\rho 0} < i_{\eta\rho 1} < \cdots < i_{\eta\rho q}$. Se sigue que $\eta\rho = \sigma$ por lo que $\epsilon_\eta \epsilon_\rho = \epsilon_\sigma$. Por lo tanto, suceden las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
({}^thf)_{i_{\rho 0} i_{\rho 1} \cdots i_{\rho q}} &= \epsilon_\eta f_{i_{\eta\rho 0} i_{\eta\rho 1} \cdots i_{\eta\rho q}} \\
&= \epsilon_\eta f_{i_{\sigma 0} i_{\sigma 1} \cdots i_{\sigma q}} \\
&= \epsilon_\eta \epsilon_\rho \epsilon_\rho f_{i_{\sigma 0} i_{\sigma 1} \cdots i_{\sigma q}} \\
&= \epsilon_\rho \epsilon_\sigma f_{i_{\sigma 0} i_{\sigma 1} \cdots i_{\sigma q}} \\
&= \epsilon_\rho ({}^thf)_{i_0 i_1 \cdots i_q}
\end{aligned}$$

Hemos probado la afirmación con lo cual terminamos la prueba del teorema. □

Corolario 5. $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ *para* $q \geq \dim(\mathfrak{U})$.

Recordemos que $\dim \mathfrak{U}$ es la dimensión de complejo simplicial del nervio que define la cubierta $\mathfrak{U}$, es decir, el complejo simplicial donde los vértices son los elementos de la cubierta $\mathfrak{U}$ y los p-simplejos son familias $\{\mathcal{U}_{i_0}, \ldots, \mathcal{U}_{i_p}\}$ donde $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p} \neq \emptyset$; entonces la dimensión es el máximo $p \geq 0$ tal que existe un p-simplejo, si no existe dicho maximo decimos que la dimensión es ∞.

Demostración. Por definición de $\dim \mathfrak{U}$, $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q} = \emptyset$ para $q \geq \dim \mathfrak{U}$ si los índices $i_0, \ldots, i_q$ son distintos. Entonces $C'(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ de donde $H'^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ por lo que $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$. □

4.5 Cubiertas más finas

Decimos que una cubierta $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ es más fina que una cubierta $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ si cada $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_j$ para alguna $j \in J$, es decir, si existe una aplicación $\tau : I \longrightarrow J$ tal que $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau i}$ para toda $i \in I$.

Si tomamos una q-cocadena f de $\mathscr{F}$ sobre $\mathfrak{V}$ podemos asociarle una q-cocadena de $\mathscr{F}$ sobre $\mathfrak{U}$ vía el morfismo τ, a saber, $(\tau f)_{i_0\cdots i_q} = \varrho^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{U}}(f_{\tau i_0\cdots\tau i_q})$ donde $\varrho^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{U}}$ es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\tau i_q}}$ sobre $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots i_q}}$. Hemos construido un morfismo de $C^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ en $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$.

Por definición de τf y transitividad de las restricciones tenemos que la restricción de la sección $\tau f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_q}$ del abierto $\mathcal{U}_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_q}$ al abierto $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_j\cdots i_q}$ es igual a la restricción de la sección $f_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q}$ del abierto $\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q}$ al abierto $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_j\cdots i_q}$. En símbolos, hemos dicho lo siguiente:

$$\varrho^{\mathcal{U}_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_q}}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots i_j\cdots i_q}}(\tau f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_q}) = \varrho^{\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q}}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots i_j\cdots i_q}}(f_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q}).$$

Es decir, no importa tanto desde donde hacemos la restricción, al final queda lo mismo, y usamos este hecho para ver que τ conmuta con el operador cofrontera:

$$\begin{aligned}
(\tau\circ d^{\mathfrak{V}}_q)(f)_{i_0\cdots i_q} &= \varrho^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{U}}(df)_{\tau i_0\cdots\tau i_q}\\
&= \varrho^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{U}}\left(\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\varrho^{\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q}}_{\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\tau i_j\cdots\tau i_q}}(f_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q})\right)\\
&= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\varrho^{\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q}}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots i_j\cdots i_q}}(f_{\tau i_0\cdots\hat{\tau i_j}\cdots\tau i_q})\\
(d^{\mathfrak{U}}_q\circ\tau)(f)_{i_0\cdots i_q} &= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\varrho^{\mathcal{U}_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_q}}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots i_j\cdots i_q}}((\tau f)_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_q}).
\end{aligned}$$

Por lo anterior queda bien definido un morfismo $\tau^* : H^q(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ donde. A nivel cocadenas nos estamos moviendo en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C^{q-1}(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \arrow[r, "d^{\mathfrak{V}}_{q-1}"] \arrow[d, "\tau"] & C^q(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \arrow[r, "d^{\mathfrak{V}}_q"] \arrow[d, "\tau"] & C^{q+1}(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \arrow[d, "\tau"]\\
C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "d^{\mathfrak{U}}_{q-1}"] & C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "d^{\mathfrak{U}}_q"] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F}).
\end{tikzcd}$$

Veremos que el morfismo $\tau^* : H^q(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ no depende de τ, para ello damos el siguiente lema.

Lema 2. *Si τ,τ' son dos aplicaciones de I en J tales que $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau i}$ y $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau' i}$ (es decir, ambas hacen a $\mathfrak{U}$ más fina que $\mathfrak{V}$) entonces τ y τ' son cocadeno-homotópicas.*

Demostración. La prueba consiste en hacer un largo cálculo, desafortunadamente no encontré otra forma menos tediosa de probarlo.

Sea $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$, definimos:

$$(kf)_{i_0 i_1 \cdots i_{q-1}} = \sum_{h=0}^{q-1} (-1)^h \varrho_h \left(f_{\tau i_0 \tau i_1 \cdots \tau i_h \tau' i_h \tau' i_{h+1} \cdots \tau' i_{q-1}} \right)$$

donde ϱ_h es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau i_h{}' \cdots \tau i_{q-1}{}'}}$ en $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_{q-1}}}$. Queremos mostrar $dk + kd = \tau' - \tau$. Dibujemos un diagrama de apoyo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_{q-1}"] \arrow[d, shift right, "\tau"'] \arrow[d, shift left, "\tau'"] & C^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_q"] \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, shift right, "\tau"'] \arrow[d, shift left, "\tau'"] & C^{q+1}(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, shift right, "\tau"'] \arrow[d, shift left, "\tau'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_{q-1}"'] & C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d_q"'] & C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Tomemos $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ e $(i_0, ..., i_q)$ un simplejo de índices y evaluemos:

$$\begin{aligned}
(kdf)_{i_0 \cdots i_q} &= \sum_{h=0}^{q} (-1)^h \varrho_h \left(df_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \tau' i_q} \right) \\
&= \sum_{h=0}^{q} (-1)^h \varrho_h \left(\sum_{j=0}^{h} (-1)^j \varrho_j \left(f_{\tau i_0 \cdots \widehat{\tau i_j} \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \tau' i_q} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=h}^{q} (-1)^{j+1} \varrho'_j \left(f_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \widehat{\tau' i_j} \cdots \tau' i_q} \right) \right) \\
&= \sum_{h=0}^{q} (-1)^h \left(\sum_{j=0}^{h} (-1)^j \varrho_h \varrho_j \left(f_{\tau i_0 \cdots \widehat{\tau i_j} \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \tau' i_q} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=h}^{q} (-1)^{j+1} \varrho_h \varrho'_j \left(f_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \widehat{\tau' i_j} \cdots \tau' i_q} \right) \right),
\end{aligned}$$

donde:

ϱ_h es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \tau' i_q}}$ en $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}}$;

ϱ_j es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0 \cdots \widehat{\tau i_j} \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \tau' i_q}}$ en $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \tau' i_q}}$; y,

ϱ'_j es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \widehat{\tau' i_j} \cdots \tau' i_q}}$ en $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0 \cdots \tau i_h \tau' i_h \cdots \tau' i_q}}$.

Las composiciones $\varrho_h \circ \varrho_j$ y $\varrho_h \circ \varrho'_j$ están bien definidas, las denotaremos como ρ_j

y ρ'_j, respectivamente. De esta forma nos queda:

$$\begin{aligned}
(kdf)_{i_0\cdots i_q} &= \sum_{h=0}^{q}(-1)^h\left(\sum_{j=0}^{h}(-1)^j\rho_j\left(f_{\tau i_0\cdots\widehat{\tau i_j}\cdots\tau i_h\tau' i_h\cdots\tau' i_q}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j=h}^{q}(-1)^{j+1}\rho'_j\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_h\tau' i_h\cdots\widehat{\tau' i_j}\cdots\tau' i_q}\right)\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
(dkf)_{i_0\cdots i_q} &= \sum_{s=0}^{q}(-1)^s\varrho_s((kf)_{i_0\cdots\hat{i}_s\cdots i_q})\\
&= (-1)^0\varrho_0\left(\sum_{r=1}^{q}(-1)^{r-1}\varrho_r(f_{\widehat{\tau i_0}\tau i_1\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q})\right)\\
&\quad+\sum_{s=1}^{q-1}(-1)^s\varrho_s\left[\sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r\varrho'_r\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_s}\cdots\tau' i_q}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{r=s+1}^{q}(-1)^{r-1}\varrho_r\left(f_{\tau i_0\cdots\widehat{\tau i_s}\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q}\right)\right]\\
&\quad+(-1)^q\varrho_q\left(\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^r\varrho'_r\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_q}}\right)\right)\\
&= \left(\sum_{r=1}^{q}(-1)^{r-1}\varrho_0\varrho_r(f_{\widehat{\tau i_0}\tau i_1\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q})\right)\\
&\quad+\sum_{s=1}^{q-1}(-1)^s\left[\sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r\varrho_s\varrho'_r\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_s}\cdots\tau' i_q}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{r=s+1}^{q}(-1)^{r-1}\varrho_s\varrho_r\left(f_{\tau i_0\cdots\widehat{\tau i_s}\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q}\right)\right]\\
&\quad+(-1)^q\varrho_q\left(\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^r\varrho_q\varrho'_r\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_q}}\right)\right),
\end{aligned}$$

en la segunda igualdad, el primer reglón corresponde a $s=0$, el segundo y el tercer renglón corresponden a $1\leq s\leq q-1$ y el cuarto renglón corresponde a $s=q$. En este caso:

ϱ_s es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots\hat{i}_s\cdots i_q}}$ en $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots i_q}}$;

ϱ'_r es la restricción de $\mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_s}\cdots\tau' i_q}}$ en $\mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots\hat{i}_s\cdots i_q}}$; y,

$$\varrho_r \text{ es la restricción de } \mathscr{F}_{\mathcal{V}_{\tau i_0\cdots\widehat{\tau i_s}\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q}} \text{ en } \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots\widehat{i_s}\cdots i_q}}.$$

Además, las composiciones tienen sentido y de hecho si $s = j$ tenemos $\varrho_s \circ \varrho_r = \rho_s$ y $\varrho_s \circ \varrho_r' = \rho_s'$ según la notación que hemos dado. Ahora, tenemos:

$$\begin{aligned}(dkf)_{i_0\cdots i_q} = & \left(\sum_{r=1}^{q}(-1)^{r-1}\rho_0(f_{\widehat{\tau i_0}\tau i_1\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q})\right)\\
&+\sum_{s=1}^{q-1}(-1)^s\left[\sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r\rho_s'\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_s}\cdots\tau' i_q}\right)\right.\\
&\left.+\sum_{r=s+1}^{q}(-1)^{r-1}\rho_s\left(f_{\tau i_0\cdots\widehat{\tau i_s}\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q}\right)\right]\\
&+(-1)^q\left(\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^r\rho_q'\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_q}}\right)\right),\end{aligned}$$

Ya evaluamos, ahora sumemos:

$$\begin{aligned}(dkf+kdf)_{i_0\cdots i_q} = & \left(\sum_{r=1}^{q}(-1)^{r-1}\rho_0(f_{\widehat{\tau i_0}\tau i_1\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q})\right)\\
&+\sum_{s=1}^{q-1}(-1)^s\left[\sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r\rho_s'\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_s}\cdots\tau' i_q}\right)\right.\\
&\left.+\sum_{r=s+1}^{q}(-1)^{r-1}\rho_s\left(f_{\tau i_0\cdots\widehat{\tau i_s}\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q}\right)\right]\\
&+(-1)^q\left(\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^r\rho_q'\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_q}}\right)\right)\\
&+\sum_{r=0}^{q}(-1)^r\left(\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\rho_s\left(f_{\tau i_0\cdots\widehat{\tau i_s}\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\tau' i_q}\right)\right.\\
&\left.+\sum_{s=r}^{q}(-1)^{s+1}\rho_s'\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_r\tau' i_r\cdots\widehat{\tau' i_s}\cdots\tau' i_q}\right)\right)\end{aligned}$$

Queremos reducir la anterior suma que luce hosca, poco amigable. Podemos esperar que sí haya cancelaciones pues ciertos términos se repiten pero con potencias de (-1) corridas. Resumimos en el Cuadro 4.1 cómo los índices s van condicionando a los índices r en dkf y cómo los índices r condicionan a los índices s en kdf.

	ρ'	ρ
$s=0$	-	$r=1,...,q$
$s=1$	$r=0$	$r=2,...,q$
$s=2$	$r=0,1$	$r=3,...,q$
$s=3$	$r=0,1,2$	$r=4,...,q$
...	...	...
$s=q-1$	$r=0,...,q-2$	$r=q-1,q$
$s=q$	$r=0,...,q-1$	-
$r=0$	$s=0,1,...,q$	$s=0$
$r=1$	$s=1,...,q$	$s=0,1$
$r=2$	$s=2,...,q$	$s=0,1,2$
$r=3$	$s=3,...,q$	$s=0,1,2,3$
...	...	...
$r=q$	$s=q$	$s=0,...,q$

Tabla 4.1: Relación de los índices

Los sumandos se cancelaran cuando la pareja (s,r) aparezca en la parte superior e inferior de la tabla tanto de ρ' como de ρ. Por lo que $(dkf+kdf)_{i_0\cdots i_q}$ se reduce sustancialmente a la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
& (-1)^0\left((-1)^0\rho_0\left(f_{\widehat{\tau i_0}\tau' i_0\cdots\tau' i_q}\right)+(-1)^1\rho_0'\left(f_{\tau i_0\widehat{\tau' i_0}\cdots\tau' i_q}\right)\right)\\
+ \; & (-1)^1\left((-1)^1\rho_1\left(f_{\tau i_0\widehat{\tau i_1}\tau' i_1\cdots\tau' i_q}\right)+(-1)^2\rho_1'\left(f_{\tau i_0\tau i_1\widehat{\tau' i_1}\cdots\tau' i_q}\right)\right)\\
+ \; & (-1)^2\left((-1)^2\rho_2\left(f_{\tau i_0\tau i_1\widehat{\tau i_2}\tau' i_2\cdots\tau' i_q}\right)+(-1)^3\rho_2'\left(f_{\tau i_0\tau i_1\tau i_2\widehat{\tau' i_2}\cdots\tau' i_q}\right)\right)\\
& \vdots\\
+ \; & (-1)^q\left((-1)^q\rho_q\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_{q-1}\widehat{\tau i_q}\tau' i_q}\right)+(-1)^{q+1}\rho_q'\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_{q-1}\tau i_q\widehat{\tau' i_q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Como

$$(-1)^0(-1)^1\rho_0'\left(f_{\tau i_0\widehat{\tau' i_0}\cdots\tau' i_q}\right)+(-1)^1(-1)^1\rho_1\left(f_{\tau i_0\widehat{\tau i_1}\tau' i_1\cdots\tau' i_q}\right)=0,$$

y en general,

$$(-1)^{q-1}(-1)^q\rho_{q-1}'\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_{q-1}\widehat{\tau' i_{q-1}}\tau' i_q}\right)+(-1)^q(-1)^q\rho_q\left(f_{\tau i_0\cdots\tau i_{q-1}\widehat{\tau i_q}\tau' i_q}\right)=0,$$

entonces todos los sumandos excepto los extremos se cancelan. Hemos reducido nuestra suma a lo siguiente:

$$\begin{aligned}(dkf + kdf)_{i_0 \cdots i_q} &= \rho_0\Big(f_{\tau \hat{i}_0 \tau' i_0 \cdots \tau' i_q}\Big) - \rho_q'\Big(f_{\tau i_0 \cdots \tau i_{q-1} \tau i_q \tau' \hat{i}_q}\Big) \\ &= (\tau' f - \tau f)_{i_0 \cdots i_q}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación $dk + kd = \tau' - \tau$ queda probada y así τ y τ' son cocadeno-homotópicas. □

Teorema 5. *El morfismo $\tau^* : H^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ no depende de τ.*

Demostración. Sean τ, τ' dos aplicaciones de I en J tales que $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau i}$ y $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau' i}$; como τ y τ' son cocadeno-homotópicos según vimos en el Lema 2 entonces por el Lema 1 resulta $\tau^* = \tau'^*$. □

De esta manera, si $\mathfrak{U}$ es una cubierta más fina que $\mathfrak{V}$, para todo entero $q \geq 0$ existe un morfismo canónico de $H^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ en $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ al que denotaremos $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$.

4.6 Grupos de cohomología de un espacio $\mathcal{X}$ con valores en una gavilla $\mathscr{F}$

Decimos que $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$ si $\mathfrak{U}$ es más fino que $\mathfrak{V}$ con lo cuál tenemos un orden parcial para la familia de cubiertas de $\mathcal{X}$. Más aún, si $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ y $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ son dos cubiertas de $\mathcal{X}$ entonces $\mathfrak{W} = \{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ es una cubierta de $\mathcal{X}$ más fina que $\mathfrak{U}$ y que $\mathfrak{V}$.

No podemos garantizar que la familia de todas las cubiertas sea un conjunto pues no tenemos ninguna restricción que nos de control sobre todos los posibles conjuntos de índices. Para ello definimos una relación, decimos que dos cubiertas $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ son equivalentes si $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$ y $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{U}$. Resulta que la colección de clases de cubiertas bajo esta relación sí es conjunto pues en cada clase podemos encontrar un representante cuyo conjunto de índices viva en el conjunto potencia del conjunto potencia del espacio en cuestión, es decir de $P(P(\mathcal{X}))$, el cual sabemos que sí es conjunto. Guardemos nuestra atención en las clases de cubiertas definidas por la equivalencia descrita, tomándolas como conjunto de índices para formar un sistema $\{H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}), \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})\}$ el cuál resulta ser un conjunto dirigido pues $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$ es la identidad y $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{W}) = \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \circ \sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{W})$. Por esto último, $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ es isomorfo a $H^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ cuando $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ son equivalentes. Ahora podemos enunciar sin ambiguedad la siguiente definición.

Definición 3. Llamamos *q-ésimo grupo de cohomología de $\mathcal{X}$ con valores en $\mathscr{F}$* al límite directo del sistema $\{H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}), \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})\}$, al que denotamos $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F})$.

Con otras palabras, un elemento de $H^q(\mathcal{X},\mathscr{F})$ es una pareja $(\mathfrak{U},x)$, donde x vive en $H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, bajo la relación donde dos parejas $(\mathfrak{U},x)$ y $(\mathfrak{V},y)$ son equivalentes si existe una cubierta $\mathfrak{W}$ más fina que ambas $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ tal que $\sigma(\mathfrak{W},\mathfrak{U})(x) = \sigma(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(y)$ en $H^q(\mathfrak{W},\mathscr{F})$.

De la construcción de límite directo (*cf.* Apéndice A) tenemos un morfismo canónico $H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{X},\mathscr{F})$ para toda cubierta de $\mathcal{X}$.

Proposición 23. $H^0(\mathcal{X},\mathscr{F}) = \Gamma(\mathcal{X},\mathscr{F})$.

Demostración. Es inmediato de la Proposición 21. □

4.7 Morfismos de gavillas

Sea $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morfismo de gavillas. Si $\mathfrak{U}$ es un cubierta de $\mathcal{X}$ definimos $\bar{\varphi} : C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ que a todo $f \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ asocia el elemento $\varphi f \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ definido por la fórmula $(\varphi f)_s = \varphi(f_s)$. Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
(\bar{\varphi}\circ d_{\mathscr{F}})(f)(i_0,\dots,i_{q+1}) &= \bar{\varphi}\Big(\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\varrho_j\big(f_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{q+1}}\big)\Big)\\
&= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\varrho_j\big(\varphi(f_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{q+1}})\big)\\
&= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\varrho_j\big((\varphi f)_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{q+1}}\big)\\
&= d_{\mathscr{G}}(\varphi f)(i_0,\dots,i_{q+1}).
\end{aligned}$$

Por lo anterior queda bien definido un morfismo $\varphi^* : H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ como $\varphi^*(\overline{f}) = \overline{\varphi f}$. Si $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}$ es más fino que $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ podemos fijarnos en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\sigma_{\mathscr{F}}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})"'] & H^q(\mathfrak{V},\mathscr{G}) \arrow[d, "\sigma_{\mathscr{G}}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})"] \\
H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^*"'] & H^q(\mathfrak{V},\mathscr{G}).
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

De la definición de φ^* dicho diagrama conmuta, para mostrar ello sea $\overline{f} \in H^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ y $\tau : I \longrightarrow J$ una función que define a $\sigma_{\mathscr{F}}$ y $\sigma_{\mathscr{G}}$. Tenemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \varphi^*\sigma_{\mathscr{F}}(\overline{f})(i_0, ..., i_q) &= \varphi^*(\overline{f_{\tau i_0 \cdots \tau i_q}}) \\ &= \overline{\varphi f_{\tau i_0 \cdots \tau i_q}} \\ &= \sigma_{\mathscr{G}}(\overline{\varphi f})(i_0, ..., i_q) \\ &= \sigma_{\mathscr{G}} \circ \varphi^*(f)(i_0, ..., i_q). \end{aligned}$$

Por lo anterior, el diagrama conmuta y así, pasando al límite directo, tenemos un morfismo $\varphi^* : H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \mathscr{G})$. Cuando $q = 0$, φ^* coincide con el morfismo asociado a $\varphi : \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{G})$ por definición de φ^*.

Los morfismos φ^* gozan de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \varphi^* + \psi^* = (\varphi + \psi)^* \quad & \text{ya que,} \\ (\varphi + \psi)^*(\overline{f}) \quad &= \overline{\varphi + \psi)(f)} \\ &= \overline{\varphi(f) + \psi(f)} \\ &= \overline{\varphi(f)} + \overline{\psi(f)} \\ &= \varphi^*(f) + \psi^*(f). \\ \varphi^* \circ \psi^* = (\varphi \circ \psi)^* \quad & \text{ya que,} \\ (\varphi \circ \psi)^*(\overline{f}) \quad &= \overline{(\varphi \circ \psi)(f)} \\ &= \overline{\varphi(\psi(f))} \\ &= \varphi^*(\overline{\psi(f)}) \\ &= \varphi^* \circ \psi^*(\overline{f}) \\ 1^* = 1 \quad & \text{ya que,} \\ 1^*(\overline{f}) \quad &= \overline{f} \end{aligned}$$

Además si $\mathscr{F} = \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2$ y $\pi_i : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}_i$ donde $i = 1, 2$ es la proyección, entonces $(\pi_1 \oplus \pi_2)^* : H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \mathscr{G}_1) \oplus H^q(\mathcal{X}, \mathscr{G}_2)$ es un isomorfismo.

Sea $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathscr{A}$-módulos. Toda sección de $\mathscr{A}$ sobre $\mathcal{X}$ define un endomorfismo de $\mathscr{F}$ y así de $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ por lo que $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ tiene estructura de módulo sobre el anillo de secciones globales de $\mathscr{A}$.

4.8 Sucesión exacta de gavillas

Sea $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0$ una sucesión exacta de gavillas que induce la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow C(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi} C(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi} C(\mathfrak{U}, \mathscr{H})$$

donde ψ no es suprayectiva en general. (*cf.* Proposición 5 y el ejemplo que le sigue.)

Sea $C_0(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ la imagen de ψ, que es un subcomplejo de $C(\mathfrak{U},\mathscr{H})$, llamemos $H_0(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ a la cohomología asociada a $C_0(\mathfrak{U},\mathscr{H})$. Ahora, tenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow C(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \longrightarrow C_0(\mathfrak{U},\mathscr{H}) \longrightarrow 0.$$

Proposición 24. *La sucesión anterior da lugar a una sucesión exacta de cohomología:*

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^*} H_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H}) \xrightarrow{\mathbf{d}} H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Veamos como definir $\mathbf{d}$. Partimos de la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow C(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \longrightarrow C_0(\mathfrak{U},\mathscr{H}) \longrightarrow 0$$

que a nivel q se ve como el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^q"] \arrow[d, "d^q"'] & C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \arrow[r, "\psi^q"] \arrow[d, "\delta^q"'] & C_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^q"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^{q+1}"] \arrow[d, "d^{q+1}"'] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \arrow[r, "\psi^{q+1}"] \arrow[d, "\delta^{q+1}"'] & C_0^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^{q+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q+2}(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^{q+2}"] & C^{q+2}(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \arrow[r, "\psi^{q+2}"] & C_0^{q+2}(\mathfrak{U},\mathscr{H}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tomamos $h \in C_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ tal que $\partial h = 0$, es decir, tiene sentido $\overline{h} \in H_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$. Como ψ es suprayectiva existe $g \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ tal que $\psi(g) = h$. Tenemos que $\delta(g) \in \operatorname{Ker}\psi^{q+1}$ ya que $0 = \partial(h) = \partial \circ \psi(g) = \psi \circ \delta(g)$; por exactitud existe un único $f \in C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ tal que $\varphi(f) = \delta(g)$.

Queremos que $d(f)$ sea nulo y así tenga sentido decir $\overline{f} \in H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Esto último en efecto sucede pues $\varphi^{q+2}(d^{q+1}(f)) = \delta^{q+1}(\varphi^{q+1}(f)) = \delta^{q+1} \circ \delta^q(g) = 0$ y sabemos que φ es inyectiva.

Nuestra intención es definir $\mathbf{d}(\overline{h})$ como $\overline{f}$, para ello debemos notar que dicha asociación no depende ni de g ni de h. Veamos que no depende de g, el caso de h es análogo y no lo incluiremos, supongamos que g_1 y g_2 viven en $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ con $\psi(g_1) = \psi(g_2) = h$, entonces $g_1 - g_2 \in \operatorname{Ker}\psi$ por lo que existe $f' \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ tal que $\varphi(f) = g_1 - g_2$; por otro lado, $\delta(g_1)$, $\delta(g_2)$ y $\delta(g_1 - g_2) \in \operatorname{Ker}\psi^{q+1}$ entonces existen f_1 y f_2 en $C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ tales que $\varphi(f_1) = \delta(g_1)$ y $\varphi(f_2) = \delta(g_2)$, y por inyectividad de φ, $d(f') = f_1 - f_2$ pues $\varphi(d(f')) = \varphi(f_1) - \varphi(f_2) = \delta(g_1 - g_2)$, de donde $f_1 - f_2 \in \operatorname{Im} d$ por lo que $\overline{f}_1 = \overline{f}_2 \in H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Por lo tanto, $\mathbf{d}$ está bien definida.

Ahora que hemos definido $\mathbf{d}$ veamos que la sucesión de cohomología es exacta.

Como $\psi^* \circ \varphi^* = (\psi \circ \varphi)^*$ entonces $\operatorname{Im}\varphi^* \subset \operatorname{Ker}\psi^*$. Veamos que $\operatorname{Ker}\psi^*$ está contenido en $\operatorname{Im}\varphi^*$. Sea $\overline{g} \in H^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ tal que $\psi^*(\overline{g}) = 0$, es decir, $\psi(g)$ vive en $\operatorname{Im}\partial^{q-1} \subset C_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$. Entonces existe $h \in C_0^{q-1}(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ tal que $\partial^{q-1}(h) = \psi(g)$ y a su vez existe $g' \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ tal que $\psi^{q-1}(g') = h$ pues ψ^{q-1} es suprayectiva. Ahora, $g - \delta(g') \in \operatorname{Ker}\psi$, pues $\psi(g) - \psi(\delta(g')) = \psi(g) - \psi(g) = 0$ y por exactitud existe $f \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ tal que $\varphi(f) = g - \delta(g')$. Además tiene sentido $\overline{f} \in H^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, ya que $\varphi \circ d(f) = \delta \circ \varphi(f) = \delta(g - \delta(g')) = 0$, pues $\delta(g) = 0$ y $\delta^2 = 0$, y φ es inyectiva. Por otro lado, $\varphi(f) = g - \delta(g')$ implica que $\overline{\varphi(f)} = \overline{g}$. Por lo tanto, $\operatorname{Ker}\psi^* = \operatorname{Im}\varphi^*$.

Veamos que $\operatorname{Im}\psi^* = \operatorname{Ker}\mathbf{d}$.

Sea $\overline{g} \in H^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$, entonces $\mathbf{d}(\psi^*(\overline{g})) = \mathbf{d}(\overline{\psi(g)})$. Con la notación usada en la construcción de $\mathbf{d}$ vemos que g sirve como representante en la preimagen de ψg y como $g \in \operatorname{Ker}\delta$ entonces $\mathbf{d}(f) = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}\psi^* \subset \operatorname{Ker}\mathbf{d}$. Veamos ahora que $\operatorname{Ker}\mathbf{d} \subset \operatorname{Im}\psi^*$. Para ello sea $h \in C_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ tal que $\partial(h) = 0$ y $\mathbf{d}(\overline{h}) = 0$. Si $g \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ es tal que $\psi(g) = h$ tenemos que $\delta(g) = 0$ ya que $\mathbf{d}(\overline{H}) = 0$. Como $g \in \operatorname{Ker}\delta$ tiene sentido $\psi^*(\overline{g})$, y este último no es otro que $\overline{h}$ mismo, por lo que $\operatorname{Ker}\mathbf{d} \subset \operatorname{Im}\psi^*$.

Veamos que $\operatorname{Im}\mathbf{d} = \operatorname{Ker}\varphi^*$.

Sea $h \in C_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ tal que $\partial(h) = 0$. Sean $g \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ tal que $\psi(g) = h$ y $f \in C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ tal que $\varphi(f) = \delta(g)$ entonces $\mathbf{d}(\overline{h}) = \overline{f}$ y $\varphi^*(\overline{f}) = \overline{\delta g} = 0$ pues $\delta(g) \in \operatorname{Im}\delta$. Ahora, sea $f \in C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ tal que $d(f) = 0$ y $\varphi^*(\overline{f}) = 0$, es decir, $\varphi(f) \in \operatorname{Im}\delta$, por esto último existe $g \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ tal que $\delta(g) = \varphi(f)$ y así $\psi(g) \in C_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ y como $\partial \circ \psi(g) = \psi \circ \delta(g) = \psi \circ \varphi(g) = 0$ entonces $\overline{\psi(g)} \in H_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ y así $\mathbf{d}(\overline{\psi(g)})$.

Con esto último terminamos la demostración. □

Sean $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ dos cubiertas abiertas y $\tau : I \longrightarrow J$ un morfismo tal que $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau i}$, es decir, $\mathfrak{U}$ es un refinamiento de $\mathfrak{V}$. Entonces con la notación de la proposición anterior, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^q(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"] & C^q(\mathfrak{V},\mathscr{G}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tau"] & C^q(\mathfrak{V},\mathscr{H}) \arrow[d, "\tau"] \\
0 \arrow[r] & C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi"] & C^q(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \arrow[r, "\psi"] & C^q(\mathfrak{U},\mathscr{H}).
\end{tikzcd}$$

Veamos porqué conmuta. Sea $f \in C^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ entonces $\tau\circ\varphi(f)(i_0,\ldots,i_p) = \varphi f_{\tau i_0\cdots\tau i_p}$ que a su vez es igual a $\varphi(f_{\tau i_0\cdots\tau i_p}) = \varphi\circ\tau(i_0,\ldots,i_p)$. Esto demuestra que el primer cuadrado conmuta y el segundo también lo hace por razones análogas. Se sigue que $\tau(C_0^q(\mathfrak{V},\mathscr{H})) \subset C_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ entonces queda definido:

$$\tau^* : H_0^q(\mathfrak{V},\mathscr{H}) \longrightarrow H_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$$

De esta forma obtenemos morfismos canónicos $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) = H_0^q(\mathfrak{V},\mathscr{H}) \longrightarrow H_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$. Por todo lo anterior, podemos definir $H_0^q(\mathcal{X},\mathscr{H})$ como el límite directo del sistema $(H_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{H}),\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}))$.

Como se puede ver en el Apéndice A, el límite directo de sucesiones exactas es una sucesión exacta, y así, tenemos probada la siguiente proposición.

Proposición 25. *La sucesión,*

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathcal{X},\mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^q(\mathcal{X},\mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^q_0(\mathcal{X},\mathscr{H}) \xrightarrow{\mathrm{d}} H^{q+1}(\mathcal{X},\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

□

La inclusión $C^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{H}) \overset{i}{\hookrightarrow} C^q(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ induce un morfismo $i^* : H^q_0(\mathcal{X},\mathscr{H}) \longrightarrow H^q(\mathcal{X},\mathscr{H})$.

Proposición 26. *El morfismo $H^q_0(\mathcal{X},\mathscr{H}) \xrightarrow{i^*} H^q(\mathcal{X},\mathscr{H})$ es biyectivo cuando $q=0$ y es inyectivo cuando $q=1$.*

Antes estudiemos un lema previo.

Lema 3. *Sea $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ una cubierta de $\mathcal{X}$. Para cada $h \in C^0(\mathfrak{V},\mathscr{H})$ existe una cubierta $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ más fina que $\mathfrak{V}$ (digamos $\tau : I \longrightarrow J$ donde $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau i}$) tal que $\tau h \in C^0_0(\mathfrak{U},\mathscr{H})$.*

Demostración. Sea $h \in C^0(\mathfrak{V},\mathscr{H})$. Sabemos que ψ es suprayectivo como morfismo de gavillas; dicha propiedad se hereda a los morfismos en los tallos pero no necesariamente a nivel secciones, he aquí la dificultad para que h viva en $C^0_0(\mathfrak{V},\mathscr{H})$. Como ψ es suprayectiva en cada tallo, entonces para toda $x \in \mathcal{V}_i$, para cada $\mathcal{V}_i \in \mathfrak{V}$, existe una vecindad $\mathcal{U}_{x,i}$ tal que existe $g_i \in \Gamma(\mathcal{U}_{x,i},\mathscr{H})$ que cumple $\psi_{\mathcal{U}_i}(g_i) = h_i$ sobre $\mathcal{U}_{x,i}$. Tomemos la cubierta $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_{x,i}\cap\mathcal{V}_j\}_{(x,i,j)\in\mathcal{X}\times J\times J}$ y $\tau : \mathcal{X}\times J\times J \longrightarrow J$ la proyección en la última coordenada, este morfismo hace a $\mathfrak{U}$ más fino que $\mathfrak{V}$ pues claramente $\mathcal{U}_{x,i}\cap\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_j$. Entonces por construcción $\tau h \in C^0_0(\mathfrak{U},\mathscr{H})$, ya que las secciones que define trabajan sobre abiertos donde las secciones de h tienen preimagen bajo ψ. □

Demostración de la Proposición 26. Primero el caso $q=1$. Sea $\overline{f} \in H^1_0(\mathcal{X},\mathscr{H})$ tal que $i^*(\overline{f}) = 0$, esto es, existe una cubierta $\mathfrak{U}$, una cocadena $f \in C^1(\mathcal{X},\mathscr{H})$ y $g \in C^0(\mathcal{X},\mathscr{H})$ tal que f esta en la clase de $\overline{f}$ y $\partial(g) = f$. A dicha $g \in C^0(\mathcal{X},\mathscr{H})$ le aplicamos el lema anterior, y así obtenemos una cubierta $\mathfrak{V}$ más fina que $\mathfrak{U}$, digamos mediante una función τ, tal que $\tau g \in C^0_0(\mathfrak{V},\mathscr{H})$. Entonces, $\partial(\tau g) = \tau(\partial g) = \tau(f)$. Como τf también vive en la clase $\overline{f}$, acabamos de probar que $\overline{f} = 0$. Por lo tanto, i^* es inyectiva para $q=1$.

Veamos que $H^0_0(\mathcal{X},\mathscr{H}) \xrightarrow{i^*} H^0(\mathcal{X},\mathscr{H})$ es biyectivo. Sea $\overline{h} \in H^0(\mathcal{X},\mathscr{H})$ y $h \in C^0(\mathfrak{U}_I,\mathscr{H})$ representante de $\overline{h}$, por el Lema 3 existe $\mathfrak{V}_J$ una cubierta y un morfismo $\tau : J \longrightarrow I$ que hace a $\mathfrak{V}_J$ más fina que $\mathfrak{U}_I$ tal que $\tau h \in C^0_0(\mathfrak{V}_J,\mathscr{H})$, tenemos que h y τh viven en la misma clase $\overline{h}$, entonces $\overline{\tau h} \in H^0_0(\mathcal{X},\mathscr{H})$ es preimagen de $\overline{h}$. Por lo tanto, i^* es sobreyectiva para $q=0$.

Sea $\overline{h} \in H^0_0(\mathcal{X},\mathscr{H})$ tal que $i^*(\overline{h}) = 0$, entonces es la sección global cero. Por lo tanto, i^* es biyectiva para $q=0$. □

Como el núcleo de la composición $H^1(\mathcal{X},\mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^1_0(\mathcal{X},\mathscr{H}) \xrightarrow{i^*} H^1(\mathcal{X},\mathscr{H})$ es $\operatorname{Ker}\psi^*$ pues i^* es inyectiva, entonces tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6. *La sucesión,*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{X},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^*"] & H^0(\mathcal{X},\mathscr{G}) \arrow[r, "\psi^*"] & H^0(\mathcal{X},\mathscr{H}) \arrow[d, "d"] \\ & H^1(\mathcal{X},\mathscr{H}) & H^1(\mathcal{X},\mathscr{G}) \arrow[l, "(i\circ\psi)^*"'] & H^1(\mathcal{X},\mathscr{F}) \arrow[l, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

es exacta.

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 25 y 26. □

Corolario 7. *Si $H^1(\mathcal{X},\mathscr{F}) = 0$ entonces $\Gamma(\mathcal{X},\mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X},\mathscr{H})$ es suprayectiva.*

Demostración. Por el corolario anterior y la Proposición 21. □

4.9 Sucesión exacta de gavillas cuando $\mathcal{X}$ es paracompacto

Recordemos que un espacio topológico Hausdorff es *paracompacto* si para cada cubierta existe una cubierta más fina que localmente sea finita, es decir, dado un punto $x \in \mathcal{X}$ sólo un número finito de abiertos del refinamiento cubren a x.[1]

Proposición 27. *Cuando $\mathcal{X}$ es paracompacto el morfismo canónico $H^q_0(\mathcal{X},\mathscr{H}) \longrightarrow H^q(\mathcal{X},\mathscr{H})$ es biyectivo para toda $q \geq 0$.*

La prueba se sigue del siguiente lema, análogo al Lema 3:

Lema 4. *Sea $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ una cubierta y sea $f \in C^q(\mathfrak{V},\mathscr{H})$. Existe una cubierta $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ y una aplicación $\tau : I \longrightarrow J$ tal que $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{\tau i}$ y que $\tau f \in C^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{H})$.*

Demostración. Como $\mathcal{X}$ es paracompacto podemos asumir que $\mathfrak{V}$ es localmente finita. Además, usando que $\mathcal{X}$ es normal, existe una cubierta $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}_j\}_{j\in J}$ tal que $\overline{\mathcal{W}_j} \subset \mathcal{V}_j$. (Tomamos $x \in \mathcal{X}$, existe sólo un número finito de elementos de $\mathfrak{V}$ que lo cubren, digamos $\mathcal{V}_{x,1},\ldots,\mathcal{V}_{x,n}$, para los cerrados $\{x\}$ y $\mathcal{V}^c_{x,i}$ existen abiertos $\mathcal{U}_{x,i}$ y $\mathcal{W}_{x,i}$ tal que $\mathcal{V}^c_{x,i} \subset \mathcal{U}_{x,i}$, $x \in \mathcal{W}_{x,i}$ y $\mathcal{U}_{x,i} \cap \mathcal{W}_{x,i} = \emptyset$, de donde $\mathcal{U}_x \cap \overline{\mathcal{W}_x} = \emptyset$. Definimos $\mathcal{W}_x = \cap \mathcal{W}_{x,i}$, que es una intersección finita, y así queda construida una tal cubierta $\mathfrak{W}$ salvo por el conjunto de índices que tomando refinamientos se arregla.)

Para todo $x \in \mathcal{X}$, escogemos una vecindad abierta $\mathcal{U}_x$ de x tal que:

[1] Algunos autores prefieren definir paracompacto solamente con la propiedad del refinamiento localmente finito, sin pedir la propiedad de ser Hausdorff.

(a) Si $x \in \mathcal{V}_j$ (resp. $x \in \mathcal{W}_j$), se tiene $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_j$ (resp. $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{W}_j$).

(b) Si $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{W}_j \neq 0$, se tiene $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_j$.

(c) Si $x \in \mathcal{V}_{j_0 \cdots j_q}$ existe una sección g de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{U}_x$ tal que $\psi(g) = f_{j_0 \cdots j_q}$ sobre $\mathcal{U}_x$.

La cubierta $\mathfrak{W}$ cumple con los incisos (a) y (b) pero no necesariamente con el inciso (c), dicho inciso (c) es el que más incumbe a nuestra Proposición 27. El morfismo ψ es suprayectivo, lo cual quiere decir que ψ_x el morfismo inducido a nivel tallo es suprayectivo de donde existen una vecindad $\mathcal{A}_x$ de $x \in \mathcal{V}_{j_0 \cdots j_q}$ y $g \in \Gamma(\mathcal{A}_x, \mathscr{G})$ tal que $\psi_{\mathcal{A}_x}(g) = f_{j_0 \cdots j_q}$ sobre $\mathcal{A}_x$. Entonces tomando $\mathcal{U}_x = \mathcal{W}_x \cap \mathcal{A}_x$ obtenemos una cubierta $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ que cumple con los tres incisos.

Ahora, para todo $x \in \mathcal{X}$ escogemos $\tau x \in J$ tal que $x \in \mathcal{U}_{\tau x}$, de manera que tenemos un morfismo $\tau : \mathcal{X} \longrightarrow J$.

Afirmamos que $\tau f \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathscr{H})$.

Recordemos que $(\tau f)_{x_0 \cdots x_q} = \varrho(f_{\tau x_0 \cdots \tau x_q})$ donde $\varrho : \mathscr{H}_{\mathcal{V}_{\tau x_0 \cdots \tau x_q}} \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathcal{U}_{x_0 \cdots x_q}}$. Si $\mathcal{U}_{x_0 \cdots x_q} = \emptyset$ entonces $\tau f \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathscr{H})$. En otro caso $\mathcal{U}_{x_0} \cap \mathcal{U}_{x_k} \neq \emptyset$ para $0 \leq k \leq q$. Por construcción $\mathcal{U}_{x_k} \subset \mathcal{W}_{\tau x_k}$ entonces $\mathcal{U}_{x_0} \cap \mathcal{W}_{\tau x_k} \neq \emptyset$ por lo que $\mathcal{U}_{x_0} \subset \mathcal{V}_{\tau x_k}$. Por el inciso (b) del Lema 4 concluimos que $\mathcal{U}_{x_0} \subset \mathcal{V}_{\tau x_0} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{\tau x_q}$, y así $x_0 \in \mathcal{V}_{\tau x_0 \cdots \tau x_q}$ y por (c) del Lema 4 existe $g \in C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{H})$ tal que $\psi(g) = f_{\tau x_0 \cdots \tau x_q}$ en $\mathcal{U}_{x_0}$, con mayor razón sobre $\mathcal{U}_{x_0 \cdots x_q}$. □

Demostración de la Proposición 27. Es similar a la demostración de la Proposición 26, pues de hecho el problema era encontrar un resultado análogo al Lema 3 cuando $q \geq 1$, la paracompacidad nos lo permitió. □

Corolario 8. *Si $\mathcal{X}$ es paracompacto, se tiene una sucesión exacta:*

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^q(\mathcal{X}, \mathscr{H}) \xrightarrow{\mathrm{d}} H^{q+1}(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^{q+1}(\mathcal{X}, \mathscr{G}) \longrightarrow \cdots.$$

El operador **d** *definido como la composición de la inversa del isomorfismo de $H_0^q(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ en $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ y el operador* **d** *antiguo.*

□

A la sucesión anterior se llama *sucesión exacta de cohomología* definida por la sucesión exacta de gavillas $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0$ dada.

Hemos pedido que $\mathcal{X}$ sea paracompacto, con más generalidad la sucesión exacta de cohomología vale en cada ocasión que podamos probar un isomorfismo de $H_0^q(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ en $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{H})$. [2]

[2] A. Grothendieck mostró que la categoría de gavillas tiene suficientes objetos inyectivos, lo cual permite definir los grupos de cohomología como funtores derivados. Debido a dicho trabajo ya no hay necesidad de utilizar el procedimiento de *Čeck*, que sin ser el más general es el más cómodo.

4.10 Cohomología de un subespacio cerrado

Sea $\mathscr{F}$ una gavilla sobre el espacio $\mathcal{X}$. Dado un subespacio $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ definimos en la sección 2.2 $\mathscr{F}(\mathcal{Y})$ la gavilla inducida por $\mathscr{F}$ en $\mathcal{Y}$.

Si $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ es una cubierta de $\mathcal{X}$ entonces $\mathfrak{U}' = \{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{Y}\}_{i\in I}$ es una cubierta de $\mathcal{Y}$, llamamos $\mathcal{U}_i' = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{Y}$; si $f_{i_0\cdots i_q}$ es una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_q}$, entonces su restricción $f'_{i_0\cdots i_q}$ en $\mathcal{U}'_{i_0\cdots i_q} = \mathcal{U}'_{i_0} \cap \cdots \cap \mathcal{U}'_{i_q}$ es una sección de $\mathscr{F}(\mathcal{Y})$ sobre $\mathcal{U}'_{i_0\cdots i_q}$. Lo que acabamos de describir es un morfismo $\varrho : C(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C(\mathfrak{U}', \mathscr{F}(\mathcal{Y}))$ que conmuta con d. Verifiquemos esto último, dibujemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varrho"'] & C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[d, "\varrho"] \\
C^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}(\mathcal{Y})) \arrow[r, "d"'] & C^{q+1}(\mathfrak{U}', \mathscr{F}(\mathcal{Y}))
\end{tikzcd}$$

Veamos que el diagrama conmuta:

$$\begin{aligned}
\varrho \circ d(f)_{i_0\cdots i_{q+1}} &= \varrho\left(\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j \varrho_j\left(f_{i_0\cdots \hat{i}_j \cdots i_{q+1}}\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j \varrho_j'\left(f_{i_0\cdots \hat{i}_j \cdots i_{q+1}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j \varrho_j'\left(f'_{i_0\cdots \hat{i}_j \cdots i_{q+1}}\right) \\
&= d\left(f'_{i_0\cdots \hat{i}_j \cdots i_{q+1}}\right) \\
&= d\left(\varrho\left(f_{i_0\cdots i_{q+1}}\right)\right) \\
&= d \circ \varrho(f)_{i_0\cdots i_{q+1}}
\end{aligned}$$

Entonces queda bien definido $\varrho^* : H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}(\mathcal{Y}))$. Si $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$ entonces $\mathfrak{U}' < \mathfrak{V}'$ y además $\varrho^* \circ \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \sigma(\mathfrak{U}', \mathfrak{V}') \circ \varrho^*$ por lo que pasando al límite queda definido un morfismo $\varrho^* : H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{Y}, \mathscr{F}(\mathcal{Y}))$.

Proposición 28. *Supongamos que $\mathcal{Y}$ es cerrado en $\mathcal{X}$ y que $\mathscr{F}$ es nula fuera de $\mathcal{Y}$. Entonces $\varrho^* : H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{Y}, \mathscr{F}(\mathcal{Y}))$ es biyectiva para toda $q \geq 0$.*

Demostración. Toda cubierta $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{Y}$ es de la forma $\mathfrak{U}'$ donde $\mathfrak{U}$ es una cubierta de $\mathcal{X}$. (Por ejemplo, $\mathcal{U}_i = \mathcal{W}_i \cup (\mathcal{X} - \mathcal{Y})$.)

Para toda cubierta $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{X}$ tenemos una biyección $C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}(\mathcal{Y}))$ aplicando la Proposición 7 a $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_q}$, $\mathcal{U}'_{i_0\cdots i_q}$ y la gavilla $\mathscr{F}$. Lo anterior es suficiente para que ϱ^* sea biyectivo. □

Aplicando la proposición anterior a una gavilla $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{Y}$ junto con $\mathscr{G}^{\mathcal{X}}$ su prolongación a $\mathcal{X}$ por cero, tenemos $H^q(\mathcal{Y},\mathscr{G}) = H^q(\mathcal{X},\mathscr{G}^{\mathcal{X}})$ para toda $q \geq 0$. Dicho de otra manera identificar $\mathscr{G}$ y $\mathscr{G}^{\mathcal{X}}$ es compatible con la asociación de grupos de cohomología.

Capítulo 5

Comparación de grupos de cohomología de cubiertas diferentes

En este capítulo se intenta dar una respuesta a la pregunta ¿qué condiciones hay que pedir a una cubierta $\mathfrak{U}$ de un espacio topológico $\mathcal{X}$ para que dada una gavilla $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ tengamos $H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = H^n(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ para toda $n \geq 0$?

Para ello necesitamos comparar los grupos de cohomología definidos por cubiertas distintas, en especial cuando una es más fina que la otra.

Necesitamos de complejos dobles.

5.1 Complejos dobles

Un *complejo doble* es un grupo abeliano bigraduado,

$$K = \sum_{\substack{p \geq 0 \\ q \geq 0}} K^{p,q},$$

dotado con dos endomorfismos, el operador horizontal d' que mapea $K^{p,q}$ en $K^{p+1,q}$, y el operador vertical d'' que mapea $K^{p,q}$ en $K^{p,q+1}$. Pedimos que dichos operadores satisfagan:[1]

$$d' \circ d' = 0, d'' \circ d'' = 0, d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0.$$

Podemos dibujar al complejo K en el siguiente diagrama, que no estamos

[1] Algunos autores prefieren pedir $d' \circ d'' = d'' \circ d'$.

pidiendo sea conmutativo, sino que conmuta salvo el signo:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
K^{0,3} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{1,3} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{2,3} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{3,3} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & \cdots \\
K^{0,2} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{1,2} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{2,2} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{3,2} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & \cdots \\
K^{0,1} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{1,1} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{2,1} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{3,1} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & \cdots \\
K^{0,0} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{1,0} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{2,0} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{3,0} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

A un elemento de $K^{p,q}$ le decimos bihomogeneo de bigrado (p, q) con grado total $p + q$. Definimos $d = d' + d''$, con el cual obtenemos:

$$K^{0,0} \xrightarrow{d} K^{0,1} \bigoplus K^{1,0} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \xrightarrow{d} \cdots$$

que cumple $d \circ d = 0$, se sigue de las propiedades de d' y d''. Tenemos un complejo de cadenas al considerar en cada nivel n el grupo libre abeliano generado por los elementos con grado total n junto con el operador d. Denotamos los grupos de cohomología asociados a (K, d) como $H^n(K)$, n denotando el grado total.

Como d' es compatible con la bigraduación de K, podemos tomar los grupos de cohomología de (K, d') (para cada q corriendo p en las componentes $K^{p,q}$) a los que denotamos como $H_I^{p,q}(K)$. Por ejemplo, tenemos el complejo $(K^{p,1}, d')$:

$$K^{0,1} \xrightarrow{d'} K^{1,1} \xrightarrow{d'} K^{2,1} \xrightarrow{d'} K^{3,1} \xrightarrow{d'} \cdots$$

Análogamente se define $H_{II}^{p,q}(K)$, ahora con d''.

Denotamos como K_{II}^q al subgrupo de $K^{0,q}$ formado por los elementos x tales que $d'(x) = 0$ y ponemos $K_{II} = \oplus_{q=0}^{\infty} K_{II}^q$. De igual forma, denotamos como K_I^p al subgrupo de $K^{p,0}$ formado por aquellos elementos donde d'' se anula, y ponemos $K_I = \oplus_{q=0}^{\infty} K_I^p$. Por definición, tenemos:

$$K_{II}^q = H_I^{0,q}(K)$$
$$K_I^p = H_{II}^{p,0}(K)$$

Tenemos que K_{II} es un subcomplejo de K, el operador d coincide con d'' sobre K_{II}, pues si $x \in K_{II}$ entonces $d(x) = 0 + d''(x)$. Similarmente, K_I es un subcomplejo de K y el operador d coincide con d' sobre K_I.

Proposición 29. *Si $H_I^{p,q}(K) = 0$ para $p > 0$ y $q \geq 0$, entonces la inclusión $i : K_{II} \longrightarrow K$ define una biyección de $H^n(K_{II})$ sobre $H^n(K)$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Sea $x \in K_{II}^q$ tal que $d''(x) = 0$, es decir, x es un q-cociclo de K_{II}, entonces $d(x) = d'(x) + d''(x) = 0 + 0$, de donde x es un q-cociclo de K que tiene grado total $q + 0$. Entonces queda bien definido un morfismo $i^* : H^q(K_{II}) \longrightarrow H^q(K)$.

Veamos que es inyectivo.

Sea $x \in K_{II}^q$ tal que $d''(x) = 0$. Supongamos que $i^*(\overline{x}) = 0$, entonces existe y en las componentes de K de grado total $q - 1$ tal que $d(y) = x$, es decir, $d'(y) + d''(y) = x$. Como $x \in K^{0,q}$ entonces necesariamente $d'(y) = 0$, por lo que $y \in K_{II}^{q-1}$ y así $\overline{x} = 0$ en $H^q(K_{II})$. Por lo tanto, i^* es inyectiva.

Veamos que es suprayectiva.

Sea $y = (y_0, y_1, ..., y_n) \in K^{0,n} \oplus K^{1,n-1} \oplus \cdots \oplus K^{n,0}$ tal que $d(y) = 0$, es decir $\overline{y} \in H^n(K)$. Como $d(y) = 0$ entonces $d'(y_n) = 0$ y así, y_n es un cociclo del complejo:

$$K^{0,1} \xrightarrow{d'} K^{1,1} \xrightarrow{d'} K^{2,1} \xrightarrow{d'} K^{3,1} \xrightarrow{d'} \cdots,$$

como por hipótesis $H_I^{n,0}(K) = 0$ entonces existe $x_n \in K^{n-1,0}$ tal que $d'(x_n) = y_n$. Consideramos $y_{n-1} - d''(x_n)$, quien cumple:

$$\begin{aligned} d'(y_{n-1} - d''(x_n)) &= d'(y_{n-1}) - d'(d''(x_n)) \\ &= d'(y_{n-1}) + d''(d'(x_n)) \\ &= d'(y_{n-1}) + d''(y_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues $d''+d''\circ d' = 0$ y $d(y) = 0$. Entonces $y_{n-1}-d''(x_n)$ es un cociclo de $K^{\bullet,1}$ y como por hipótesis $H_I^{n-1,1}(K) = 0$ existe $x_{n-1} \in K^{n-2,1}$ tal que $d'(x_{n-1}) = y_{n-1} - d''(x_n)$. Ahora consideramos $y_{n-1} - d''(x_{n-1})$ quien de nuevo es un cociclo, en el complejo horizontal correspondiente. Continuamos de esta manera, construyendo una familia $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \in K^{0,n-1} \oplus K^{1,n-2} \oplus \cdots \oplus K^{n-2,1} \oplus K^{n-1,0}$ tal que $d'(x_i) = y_i - d''(x_{i+1})$ para $i < n$ y $d'(x_n) = y_n$. Entonces,

$$\begin{aligned} y - d(x) &= (y_0, y_1, ..., y_n) - d(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \\ &= (y_0, y_1, ..., y_n) \\ &\quad -(d''(x_1), d'(x_1) + d''(x_2), ..., d'(x_{n-1}) + d''(x_n), d'(x_n)) \\ &= (y_0, y_1, ..., y_n) \\ &\quad -(d''(x_1), y_1 - d''(x_2) + d''(x_2), ..., y_{n-1} - d''(x_n) + d''(x_n), y_n) \\ &= (y_0 - d''(x_1), 0, ..., 0). \end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que $(y_0, ..., y_n)$ y $(y_0 - d''(x_1), 0, ..., 0)$ son cohomólogos. Por otro lado, $y_0 - d''(x_1)$ es un cociclo de K_{II} pues $d'(y_0 - d''(x_1)) = 0$ y $d''(y_0 - d''(x_1)) = 0$, entonces $i(y_0 - d''(x_1)) = (y_0 - d''(x_1), 0, ..., 0)$ es la preimagen buscada. Por lo tanto, i^* es suprayectiva. $\square$

5.2 Complejo doble definido por dos cubiertas

Sean $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ dos cubiertas de $\mathcal{X}$. Si s es un p-simplejo de $S(I)$ y s' es un q-simplejo de $S(J)$, denotamos por $\mathfrak{V}_s$ a la cubierta de $\mathcal{U}_s$ formada por los abiertos $\mathcal{U}_s \cap \mathcal{V}_j$, corriendo $j \in J$; y denotamos por $\mathfrak{U}_{s'}$ a la cubierta de $\mathcal{V}_{s'}$ formada por los abiertos $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_{s'}$, corriendo i en I.

Si $\mathscr{F}$ es una gavilla sobre $\mathcal{X}$, definimos el complejo doble $C(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ como $\oplus_{p,q} C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ donde $C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) = \prod \Gamma(\mathcal{U}_s \cap \mathcal{V}_{s'}, \mathscr{F})$, el producto corriendo sobre todas las parejas (s, s') donde s es un p-simplejo de $S(I)$ y s' es un q-simplejo de $S(J)$.

Un elemento $f \in C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ es un sistema $(f_{s,s'})$ de secciones de $\mathscr{F}$ sobre los $\mathcal{U}_s \cap \mathcal{V}_{s'}$.

Por definición de $\mathfrak{U}_{s'}$ y de $C^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})$ podemos identificar $C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ con $\prod_{s'} C^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})$, el producto sobre los q-simplejos de $S(J)$. Entonces para definir un operador cofrontera de $C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ en $C^{p+1,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ basta dar un operador frontera en cada pata, lo cuál es el caso, para cada s' tenemos un operador cofrontera $d : C^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})$, a saber, el que construimos en la Sección 4.3; entonces se tiene un morfismo:

$$d_{\mathfrak{U}} : C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) \longrightarrow C^{p+1,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$$

definido como:

$$(d_{\mathfrak{U}} f)_{i_0\cdots i_{p+1}, j_0\cdots j_q} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \varrho_k (f_{i_0\cdots \hat{i_k}\cdots i_{p+1}, j_0\cdots j_q})$$

donde ϱ_k es el morfismo restricción definido por la inclusión de $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_{p+1}} \cap \mathcal{V}_{j_0\cdots j_q}$ en $\mathcal{U}_{i_0\cdots \hat{i_k}\cdots i_{p+1}} \cap \mathcal{V}_{j_0\cdots j_q}$. Análogamente, se tiene:

$$d_{\mathfrak{V}} : C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) \longrightarrow C^{p,q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$$

definido como:

$$(d_{\mathfrak{V}} f)_{i_0\cdots i_p, j_0\cdots j_{q+1}} = \sum_{h=0}^{q+1} (-1)^h \varrho_h (f_{i_0\cdots i_p, j_0\cdots \hat{j_h}\cdots j_q}).$$

Es claro que $d_{\mathfrak{U}} \circ d_{\mathfrak{U}} = 0, d_{\mathfrak{V}} \circ d_{\mathfrak{V}} = 0$ y $d_{\mathfrak{U}} \circ d_{\mathfrak{V}} = d_{\mathfrak{V}} \circ d_{\mathfrak{U}}$ pues dichos morfismos en cada pata satisfacen lo anterior.(*Cf.* Sección 4.3.)

Dotamos a $C(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ de una estructura de complejo doble poniendo como operador horizontal a $d_{\mathfrak{U}}$ y como operador vértical a $(-1)^p d_{\mathfrak{V}}$. Aplicamos lo hecho y dicho en la sección anterior a $C(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$. Ahora denotamos por $H^n(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$, $H_I^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$, $H_{II}^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$, $C_I(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ y $C_{II}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ a lo que corresponde a $H^n(K)$, $H_I^{p,q}$, $H_{II}^{p,q}(K)$, K_I y K_{II} respectivamente.

Como se dijo, $C^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) = \prod_{s'} C^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})$ y así tenemos el siguiente resultado.

Proposición 30. *El grupo* $H_I^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ *es isomorfo a* $\prod_{s'} H^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})$*, el producto corriendo entre los q-simplejos s' de* $S(J)$*. En particular,* $C_{II}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) = H_I^{0,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ *es isomorfo a* $\prod_{s'} H^0(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F}) = C^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})$.

□

Denotamos por i'' al isomorfismo canónico $C(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \longrightarrow C(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ definido como:

$$(i''f)_{i_0,j_0\cdots j_q} = \varrho_{i_0}(f_{j_0\cdots j_q})$$

donde ϱ_{i_0} es la restricción definida por la inclusión de $\mathcal{U}_{i_0} \cap \mathcal{V}_{j_0\cdots j_q}$.

Análogamente, $H_{II}^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) \cong \prod_s H^q(\mathcal{V}_s,\mathscr{F})$ corriendo s en los p-simplejos de $S(I)$. Y se tiene un morfismo $i' : C(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C_I(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ definido como:

$$(i'f)_{i_0\cdots i_p,j_0} = \varrho_{j_0}(f_{i_0\cdots i_p})$$

donde ϱ_{j_0} es la restricción definida por la inclusión de $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_p} \cap \mathcal{V}_{j_0}$ en $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_p}$.

5.3 Aplicaciones

Mantenemos la notación de la sección anterior.

Proposición 31. *Supongamos que* $H^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F}) = 0$ *para todo* s' *y todo* $p > 0$*. Entonces el morfismo* $H^n(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ *definido por* i'' *es biyectivo para* $n \geq 0$.

Demostración. Por la Proposición 30 $H_I^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) = 0$ para $p > 0$ y $q \geq 0$, entonces el resultado buscado se sigue de la Proposición 29. □

La anterior proposición dice que si $H^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F}) = 0$ entonces la información cohomológica que aporta $\mathfrak{U}$ a $H^n(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ ya está contenida en la información que aporta $\mathfrak{V}$. Se antoja que si $\mathfrak{V}$ es más fina que $\mathfrak{U}$ entonces $\mathfrak{U}$ no aporte más información de la que aporte $\mathfrak{V}$.

Proposición 32. *Supongamos que la cubierta* $\mathfrak{V}$ *es más fina que la cubierta* $\mathfrak{U}$*. Entonces* $i'' : H^n(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ *es biyectivo para* $n \geq 0$.

Antes de dar la prueba veamos un lema que necesitaremos.

Lema 5. *Sea* $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}_i\}_{i\in I}$ *una cubierta de un espacio* $\mathcal{Y}$*, y sea* $\mathscr{F}$ *una gavilla sobre* $\mathcal{Y}$*. Si existe* $i \in I$ *tal que* $\mathcal{W}_i = \mathcal{Y}$*, entonces* $H^p(\mathfrak{W},\mathscr{F}) = 0$ *para* $p > 0$.

Demostración. Sea $\mathfrak{W}' = \{\mathcal{Y}\}$ la cubierta de $\mathcal{Y}$ que consiste sólo de $\mathcal{Y}$, entonces $\mathcal{W}$ es más fina que $\mathcal{W}'$ y por la hipótesis hecha sobre $\mathcal{W}$, también $\mathcal{W}'$ es más fina que $\mathcal{W}$. Por lo tanto, $H^p(\mathfrak{W},\mathscr{F}) = H^p(\mathfrak{W}',\mathscr{F})$, pero esta última es cero para $p > 0$ por lo dicho en el Corolario 5. □

Demostración de la Proposición 32. Aplicando el Lema 5 a $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}_{s'}$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{V}_{s'}$ ($V_{s'}$ es cubierto por $\mathfrak{W}$ ya que $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$), tenemos $H^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathscr{F}) = 0$ para $p > 0$, entonces por la Proposición 31, el morfismo $i'' : H^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ es biyectivo para $n \geq 0$. □

Proposición 33. *Más aún, para la proposición anterior el morfismo* $(i'')^{-1} \circ i' : H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ *no es otro que* $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, *definido al final de la Sección 4.5.*

Demostración. Para comprobar que lo dicho sucede sea $\tau : J \longrightarrow I$ tal que $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{U}_{\tau j}$ (es decir, τ hace más fina a $\mathfrak{V}$ respecto a $\mathfrak{U}$). Como por la Proposición 32 el morfismo i'' es biyectivo, basta probar que los cociclos $i'(f)$ e $i''(\tau f)$ son cohomólogos en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$, donde f es un cociclo.

Para todo entero p, $0 \leq p \leq n-1$, definimos $g^p \in C^{p,n-p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ mediante la fórmula:

$$g^p_{i_0 \cdots i_p, j_0 \cdots j_{n-p-1}} = \varrho_p(f_{i_0 \cdots i_p \tau j_0 \cdots \tau j_{n-p-1}})$$

donde ϱ_p es el morfismo restricción definido por la inclusión de $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p} \cap \mathcal{V}_{j_0 \cdots j_{n-p-1}}$ en $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p \tau j_0 \cdots \tau j_{n-p-1}}$.

Calculemos $d''(g^0)$, digamos evaluando $(i_0, j_0 \cdots j_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
\left(d''(g^0)\right)_{i_0, j_0 \cdots j_{n-1}} &= \left((-1)^0 d_{\mathfrak{V}}(g^0)\right)_{i_0, j_0 \cdots j_{n-1}} \\
&= (-1)^0 \left(d_{\mathfrak{V}}(g^0)\right)_{i_0, j_0 \cdots j_{n-1}} \\
&= (-1)^0 \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \varrho_h(g^0_{i_0, j_0 \cdots \hat{j}_h \cdots j_n}) \\
&= (-1)^0 \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \varrho_h(\varrho_0(f_{i_0, \tau j_0 \cdots \tau \hat{j}_h \cdots \tau j_n})),
\end{aligned}$$

recuérdese que:

$$\begin{aligned}
\varrho_h &: \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0} \cap \mathcal{V}_{j_0 \cdots \hat{j}_h \cdots j_n}} \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0} \cap \mathcal{V}_{j_0 \cdots j_n}} \\
\varrho_0 &: \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0, \tau j_0 \cdots \tau \hat{j}_h \cdots \tau j_n}} \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0} \cap \mathcal{V}_{j_0 \cdots \hat{j}_h \cdots j_n}}.
\end{aligned}$$

Llamamos ϱ'_h a $\varrho_h \circ \varrho_0$. Entonces:

$$\left(d''(g^0)\right)_{i_0, j_0 \cdots j_{n-1}} = (-1)^0 \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \varrho'_h(f_{i_0, \tau j_0 \cdots \tau \hat{j}_h \cdots \tau j_n}),$$

Como f es un n-cociclo entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(d_{\mathfrak{U}}(f)\right)_{i_0 \tau j_0 \cdots \tau j_n} \\
&= \varrho_0(f_{\tau j_0 \cdots \tau j_n}) + \sum_{h=0}^{n} (-1)^{h+1} \varrho_h(f_{i_0 \tau j_0 \cdots \tau \hat{j}_h \cdots \tau j_n})
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\varrho_0(f_{\tau j_0\cdots\tau j_n}) = \sum_{h=0}^{n}(-1)^h \varrho_h(f_{i_0\tau j_0\cdots\tau\hat{j}_h\cdots\tau j_n})$$

y así:

$$\begin{aligned}\left(d''(g^0)\right)_{i_0,j_0\cdots j_{n-1}} &= \varrho_0(f_{\tau j_0\cdots\tau j_n})\\ &= \varrho_0((\tau f)_{j_0\cdots j_n})\\ &= \left(i''(\tau f)\right)_{i_0,j_0\cdots j_n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d''(g^0) = i''(\tau f)$. Mediante calculos análogos tenemos lo siguiente:

$$d''(g^0) = i''(\tau f), ..., d''(g^p) = d'(g^{p-1}), ..., d'(g^{n-1}) = (-1)^n i'(f)$$

de donde $d(g^0 - g^1 + \cdots + (-1)^{n-1}g^{n-1}) = i''(\tau f) - i'(f)$, por lo que $i''(\tau f)$ e $i'(f)$ son cohomólogos. □

Proposición 34. *Supongamos que $\mathfrak{V}$ es más fino que $\mathfrak{U}$ y que $H^q(\mathfrak{V}_s, \mathscr{F}) = 0$ para todo s y todo $q > 0$. Entonces, el morfismo $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ es biyectivo para toda $n \geq 0$.*

Demostración. Aplicamos la Proposición 31 intercambiando $\mathfrak{U}$ por $\mathfrak{V}$, de donde $i' : H^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ es biyectivo. Entonces, por la Proposición 33 $(i'')^{-1} \circ i' = \sigma(\mathfrak{V}, \mathcal{U})$ es biyectivo. □

Teorema 6. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico, $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una cubierta de $\mathcal{X}$ y $\mathscr{F}$ una gavilla sobre $\mathcal{X}$. Supongamos que existe una familia $\mathfrak{V}^\alpha$, $\alpha \in A$, de cubiertas de $\mathcal{X}$ que cumplen:*

1. *Para toda cubierta $\mathfrak{W}$ de $\mathcal{X}$, existe un $\alpha \in A$ tal que $\mathfrak{V}^\alpha$ es más fina que $\mathfrak{W}$. (Es decir, una familia de cubiertas arbitrariamente finas.)*
2. *Para cada $\alpha \in A$ y todo simplejo s de $S(I)$ se tiene $H^q(\mathfrak{V}^\alpha_s, \mathscr{F}) = 0$, donde $q > 0$. (En la Sección 5.2 definimos $\mathfrak{V}^\alpha_s = \{\mathcal{U}_s \cap \mathcal{V}_i | \mathcal{U}_s \in \mathfrak{U}, \mathcal{V}_i \in \mathfrak{V}^\alpha\}$ que es una cubierta de $\mathcal{U}_i$.)*

Entonces $\sigma(\mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$.

Observación 2. Este resultado no nos caracteriza a las cubiertas $\mathfrak{U}$ tales que $\sigma(\mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ es biyectivo. Necesitamos un poco más, necesitamos la familia $\mathfrak{V}^\alpha$ que esté íntimamente relacionada con la cubierta $\mathfrak{U}$, esta relación es la que se expresa en el inciso 2.

Demostración del Teorema 6. Podemos suponer que cada $\mathfrak{V}^\alpha$ es más fina que $\mathfrak{U}$ por la condición del inciso 1. Entonces por la Proposición 34 el morfismo $\sigma(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathscr{F})$ es biyectivo para toda $n \geq 0$. Como las cubiertas $\mathfrak{V}^\alpha$ son arbitrariamente finas entonces $H^n(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ es el límite directo de $H^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathscr{F})$. Entonces $\sigma(\mathfrak{U})$ es biyección, pues es el límite directo de los $\sigma(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U})$. □

Capítulo 6

Variedades algebraicas

Ahora verteremos la teoría de gavillas en el estudio de variedades algebraicas. Durante lo que resta de este escrito, k denota un campo algebraicamente cerrado de cualquier característica. Se supone que el lector está familiarizado con el concepto de localización de anillos y módulos, así como sus propiedades más importantes. Para consultar a cerca de éste tema se sugiere el excelente texto de Matsumura ([Mat89]).

6.1 Espacios noetherianos

Decimos que un espacio topológico $\mathcal{X}$ es *de Noether o noetheriano* si toda sucesión decreciente de subespacios cerrados de $\mathcal{X}$ se estaciona. Es decir, si tomamos $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, donde C_i es cerrado en $\mathcal{X}$, entonces existe un natural n tal que $C_n = C_m$ para toda $m \geq n$. Una manera de decir lo anterior es que el conjunto de todos los subespacios cerrados de $\mathcal{X}$ verifica la condición minimal.

Decimos que un espacio topológico es *casicompacto*[1] si toda cubierta $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{X}$ tiene una subcubierta finita.

Proposición 35.

(a) Si $\mathcal{X}$ es noetheriano entonces es casicompacto.

(b) Si $\mathcal{X}$ es noetheriano entonces todo subespacio de $\mathcal{X}$ también lo es.

(c) Si $\mathcal{X}$ es la unión finita de subespacios noetherianos $\mathcal{Y}_i$, entonces $\mathcal{X}$ mismo es de Noether.

Demostración.

(a) Si tenemos una cubierta de $\mathcal{X}$ podemos formar una cadena $\mathcal{U}_{i_0} \subset \mathcal{U}_{i_0} \cup \mathcal{U}_{i_1} \subset \cdots \mathcal{U}_{i_0} \cup \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_q} \subset \cdots$ con los elementos de la cubierta, tomando los complementos obtenemos una cadena de cerrados que por hipótesis se estaciona, a saber, $\mathcal{U}_{i_0}^c \subset (\mathcal{U}_{i_0} \cup \mathcal{U}_{i_1})^c \subset \cdots (\mathcal{U}_{i_0} \cup \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_q})^c \subset \cdots$. Por ser cubierta, tenemos $\emptyset = (\cup \mathcal{U}_i)^c$ de donde en la cadena de cerrados existe un

[1] El énfasis que se da con *casi* es porque no pedimos que el espacio sea Hausdorff.

eslabón a partir del cual todos los eslabones son el conjunto vacío, digamos $(\mathcal{U}_{i_0} \cup \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_q})^c = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_{i_0} \cup \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_q} = \mathcal{X}$ y así $\mathcal{X}$ es casicompacto.

(b) Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio de $\mathcal{X}$ y $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$, donde C_i es cerrado en $\mathcal{Y}$, entonces tenemos una cadena $C_1' \supset C_2' \supset C_3' \supset \cdots$, donde C_i' es cerrado en $\mathcal{X}$ y $C_i = C_i' \cap \mathcal{Y}$; como $\mathcal{X}$ es de Noether entonces dicha cadena se estaciona en $\mathcal{X}$ lo cual hace que se estacione en $\mathcal{Y}$.

(c) Sea $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$, donde C_i es cerrado en $\mathcal{X}$, entonces tenemos las cadenas inducidas $C_1 \cap \mathcal{Y}_i \supset C_2 \cap \mathcal{Y}_i \supset C_3 \cap \mathcal{Y}_i \supset \cdots$, donde $C_j \cap \mathcal{Y}_i$ es cerrado en $\mathcal{Y}_i$, entonces por hipótesis se estaciona digamos en n_i, como son un número finito podemos tomar n el máximo de las n_i y así, la cadena original se estaciona a partir de esta n.

□

Un espacio topológico $\mathcal{X}$ se dice *irreducible* si cada vez que $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ donde $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ ó $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$. Lo anterior es equivalente a que la intersección de dos abiertos no nulos es no vacía.

Proposición 36. *Cualquier subconjunto cerrado de un espacio topológico de Noether puede ser escrito como unión de un número finito de cerrados irreducibles.*

Demostración. Sea $F = \{V | V$ es cerrado y no se expresa como unión finita de irreducibles$\}$. Si $F \neq \emptyset$, existe elemento mínimo W (puesto que nuestro espacio es de Noether, y aplicando Zorn). Entonces W es reducible, $W = V_1 \cup V_2$, donde $V_i \subsetneq W$ y cerrados; $V_i \notin F$ para no contradecir la minimalidad de W, por lo tanto V_i se expresa como unión finita de irreducibles, y así W también (contradicción). Concluimos que $F = \emptyset$. □

Si suponemos que los cerrados irreducibles no se repiten entonces el conjunto de los cerrados irreducibles en que se descompone el espacio topológico queda determinado de manera única. En este caso les llamamos las *componentes irreducibles* del espacio topológico en cuestión.

Proposición 37. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico tal que $\mathcal{X} = \cup_{i=1}^{r} \mathcal{V}_i$ donde cada $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{X}$ es un abierto no vacío. Entonces, $\mathcal{X}$ es irreducible si y sólo si cada $\mathcal{V}_i$ es irreducible y $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$ para todo par (i,j).*

Demostración. Si $\mathcal{X}$ es irreducible la intersección de abiertos no nulos es no vacía y todo abierto es irreducible, pues de lo contrario es fácil dar una descomposición de $\mathcal{X}$ que lo hace reducible, llegando a contradicción.

Ahora, veamos que si $\mathcal{X}$ cumple la condición de la proposición entonces es irreducible. Sea $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cup Z$, donde $\mathcal{Y}$ y Z son cerrados, entonces $\mathcal{V}_i = (\mathcal{V}_i \cap \mathcal{Y}) \cup (\mathcal{V}_i \cap Z)$, y así cada $\mathcal{V}_i$ está contenido o en $\mathcal{Y}$ o en Z, debido a su irreducibilidad. Supongamos que tanto Z como $\mathcal{Y}$ son cerrados propios de $\mathcal{X}$, entonces existen índices i y j tales que $\mathcal{V}_i \not\subseteq \mathcal{Y}$ y $\mathcal{V}_j \not\subseteq Z$ por lo que $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{Y}$ y $\mathcal{V}_i \subset Z$. Sea $T = \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_i \cap Z$, es cerrado en $\mathcal{V}_j$ y además $\mathcal{V}_j = T \cup (Z \cap \mathcal{V}_j)$. Entonces $\mathcal{V}_j = T$ o $\mathcal{V}_j = Z \cap \mathcal{V}_j$ por irreducibilidad. Si $\mathcal{V}_j = T$, entonces $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \emptyset$, lo cual no puede suceder. Si $\mathcal{V}_j = Z \cap \mathcal{V}_j$ entonces $\mathcal{V}_j \subset Z$, que tampoco puede suceder. Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ y Z no pueden ser ambos propios. □

6.2 El espacio afín

Definimos el espacio afín $\mathbb{A}_k^r$ de dimensión r sobre el campo k como el conjunto de r-adas de k. Un polinomio p del anillo $k[x_1, ..., x_r]$ define una función de $\mathbb{A}_k^r$ en k que a cada $a \in \mathbb{A}_k^r$ asocia $p(a) \in k$. Nos podemos fijar en el conjunto donde se anula, en general, si $T \subset k[x_1, ..., x_r]$ definimos el *conjunto de ceros de* T como:

$$Z(T) := \{(a) \in \mathbb{A}_k^r \mid p(a) = 0 \ \ \forall p \in T\}.$$

Sea $\mathfrak{a}$ el ideal generado por T en $k[x_1, ..., x_r]$, como este último es anillo noetheriano entonces $\mathfrak{a} = (f_1, ..., f_n)$. Tenemos $Z(T) = Z(\mathfrak{a}) = Z(f_1, ..., f_n)$. Llamamos conjunto algebraico a todo subconjunto de $\mathbb{A}_k^r$ que sea el conjunto cero de algún $T \subset k[x_1, ..., x_r]$.

Dichos conjuntos definen una topología al tomarlos como cerrados, conocida como *topología de Zariski*. Tiene sentido pues $Z(\mathfrak{a}_1) \cup Z(\mathfrak{a}_2) = Z(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$, $\bigcap Z(\mathfrak{a}_i) = Z(\bigcup \mathfrak{a}_i)$, $\mathbb{A}_k^r = Z(0)$ y $\emptyset = Z(1)$. Dotamos a $\mathbb{A}_k^r$ con dicha topología.

Como $k[x_1, ..., x_r]$ es noetheriano cualquier cadena ascendente de ideales se estaciona, lo cual implica que toda cadena descendente de conjuntos cerrados de $\mathbb{A}_k^r$ también se estaciona, de donde $\mathbb{A}_k^r$ es noetheriano como espacio topológico. Además, si $\mathbb{A}_k^r = Z(\mathfrak{a}_1) \cup Z(\mathfrak{a}_2)$ entonces $\mathbb{A}_k^r = Z(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$ y así necesariamente $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0$, por lo que $\mathfrak{a}_1 = 0$ ó $\mathfrak{a}_2 = 0$, pues estamos sobre un dominio entero. Por lo tanto, $\mathbb{A}_k^r$ es irreducible.

Ya apuntamos que un polinomio $p \in k[x_1, ..., x_r]$ define una función de $\mathbb{A}_k^r$ en k. Dotando a k con la topología de Zariski, la función p es continua. Los cerrados de k son sus subconjuntos finitos y k mismo, para ver que p es continua basta mostrar que la imagen inversa de un punto es cerrada en $\mathbb{A}_k^r$. Sea $a \in K$ entonces $p^{-1}(a)$ es el conjunto de ceros del polinomio $p(x_1, ..., x_r) - a$ por lo que es cerrado. Por lo tanto p es continua.

Queremos asociar una gavilla de anillos al espacio $\mathbb{A}_k^r$, y lo vamos a hacer a partir del anillo $K[x_1, ..., x_r]$ pues la topología de $\mathbb{A}_k^r$ está íntimamente ligada a dicho anillo.

Sea $a = (a_1, ..., a_r)$ un punto de $\mathbb{A}_k^r$, el ideal $(x_1 - a_1, ..., x_r - a_r) = \mathfrak{m}_a$ es maximal en $k[x_1, ..., x_r]$. Definimos el *anillo local de* a como $k[x_1, ..., x_r]_{\mathfrak{m}_a}$, esto es, la localización de $k[x_1, ..., x_r]$ con respecto al complemento de $\mathfrak{m}_a$, y lo denotamos como $\mathcal{O}_a$. Sus elementos son de la forma $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in K[x_1, ..., x_r]$ y $q(a) \neq 0$, es decir, $q \notin \mathfrak{m}_a$.

Por otro lado, una función $\frac{p}{q}$ (con $p, q \in K[x_1, ..., x_r]$) se dice *regular en* a si $q(a) \neq 0$. De esta forma, $\mathcal{O}_a$ es el anillo cuyos elementos son los cocientes de polinomios que como funciones son regulares en a. Además, $\frac{p}{q}$ se dice regular en $\mathcal{V}$ si es regular en a para toda $a \in \mathcal{V}$. Un cociente $\frac{p}{q}$ define una función del subconjunto de $\mathbb{A}_k^r$ donde es regular, en k. Dicho dominio es abierto pues es el complemento de $Z(\{q\})$ y así $\frac{p}{q}$ es continua cuando dotamos a $k = \mathbb{A}_k^1$ con la topología de Zariski.

Por lo anterior, dado un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$, si $\frac{p}{q}$ es regular en $\mathcal{U}$ entonces es continua. Llamemos $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ al subanillo de $\mathscr{C}_\mathcal{U}$ que consiste de funciones regulares en $\mathcal{U}$ de la forma $\frac{p}{q}$. Conforme a lo dicho en la Sección 1.3 obtenemos una gavilla $\mathcal{O}$ a partir de los $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ que por construcción es subgavilla de $\mathscr{C}$, la gavilla de funciones continuas.

6.3 Subespacios localmente cerrados de $\mathbb{A}_k^r$

Decimos que un subconjunto de $\mathbb{A}_k^r$ es un *subespacio localmente cerrado en* $\mathbb{A}_k^r$ si es la intersección de un conjunto abierto y un conjunto cerrado en $\mathbb{A}_k^r$. Queremos inducir una estructura de gavilla sobre los espacios localmente cerrados a partir de la gavilla $\mathcal{O}$ ya que dichos espacios son las piezas básicas para hablar de variedades algebraicas.

Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio localmente cerrado y $\mathscr{C}(\mathcal{Y})$ la gavilla de gérmenes de funciones continuas en $\mathcal{Y}$ con valores en k. Si $a \in \mathcal{Y}$ tenemos un morfismo canónico, vía la restricción, a saber:

$$\epsilon_a : \mathscr{C}(\mathbb{A}_k^r)_a \longrightarrow \mathscr{C}(\mathcal{Y})_a.$$

Denotamos como $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},a}$ a la imagen de $\mathcal{O}_a$ bajo ϵ_a. Llamamos la atención al hecho de que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},a}$ es subanillo de $\mathscr{F}(\mathcal{Y})_a$. Los anillos $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},a}$ forman una subgavilla $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$ de $\mathscr{C}(\mathcal{Y})$ a la que llamamos *gavilla de anillos locales* de $\mathcal{Y}$.

Así, una sección de $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$ sobre un abierto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{Y}$ es por definición una función continua $f : \mathcal{V} \longrightarrow k$, que localmente se ve como la restricción en $\mathcal{V}$ de una función $\frac{p}{q}$, es decir, para cada $a \in \mathcal{V}$ vemos a f como la restricción en $\mathcal{V}$ de una función $\frac{p}{q}$ regular en a; decimos que f es una *función regular sobre* $\mathcal{V}$. Una función regular sobre $\mathcal{V}$ es continua dotando a $\mathcal{V}$ con la topología inducida por $\mathbb{A}_k^r$ y a k con la topología de Zariski.

El conjunto de funciones regulares en todo punto de $\mathcal{V}$ forma un anillo denotado como $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_\mathcal{Y})$. Es claro que si $f \in \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ y si $f(a) \neq 0$ para todo $a \in \mathcal{V}$, entonces $1/f \in \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_\mathcal{Y})$.

Proposición 38. *Sean $\mathcal{U}$ un subespacio abierto de $\mathbb{A}_k^r$ y $\mathcal{F}$ uno cerrado, nos fijamos en $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$. Sea $\mathrm{i}(\mathcal{F})$ el ideal de $k[x_1, \ldots, x_r]$ formado por los polinomios nulos sobre $\mathcal{F}$. Si $a \in \mathcal{Y}$, el núcleo de la suprayección $\epsilon_a : \mathcal{O}_a \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y},a}$ es igual al ideal $\mathrm{i}(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{O}_a$ de $\mathcal{O}_a$.*

Demostración. Todos los polinomios de $\mathrm{i}(\mathcal{F})$ se anulan en $\mathcal{O}_a$, donde $a \in \mathcal{Y}$, entonces allí localmente son cero, por lo tanto es claro que $\mathrm{i}(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{O}_a$ está contenido en el núcleo de ϵ_a.

Ahora, sea $a \in \mathcal{V} = \mathcal{A} \cap \mathcal{F}$ y $0 \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y},a}$ (donde $\mathcal{A}$ es abierto de $\mathbb{A}_k^r$) tal que existe $r = p/q$ definida sobre $\mathcal{A}$ que cumple $\varrho_{\mathcal{V}}^{\mathcal{A}}(p/q) = 0$, entonces $p(a) = 0$ y así $p(y) = 0$ para toda $y \in \mathcal{W}$ un abierto de $\mathbb{A}_k^r$. Tomamos p_1 un polinomio que se anule en el cerrado $\mathcal{W}^c \cap \mathcal{F}$ y que no se anule en a, existe pues $\mathcal{W}^c \cap \mathcal{F}$ es cerrado y $a \notin \mathcal{W}^c \cap \mathcal{F}$. Entonces $pp_1 \in \mathrm{i}(\mathcal{F})$ y como $r = p/q = pp_1/qp_1$ tenemos $r \in \mathrm{i}(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{O}_a$. □

Corolario 9. *Sea $a = (a_1, ..., a_r)$. El anillo $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},a}$ es isomorfo al anillo de fracciones de $k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{F})$ relativo al ideal maximal definido por el punto a.*

Demostración. Por la proposición tenemos:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y},a} \cong k[x_1, ..., x_r]_{\mathfrak{m}_a}/\mathrm{i}(\mathcal{F})k[x_1, ..., x_r]_{\mathfrak{m}_a}$$

donde $\mathfrak{m}_a = (x_1 - a_1, ..., x_r - a_r)$ el ideal maximal definido por a. Localizar un anillo conmuta con tomar cociente, entonces:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y},a} \cong (k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{F}))_{\overline{\mathfrak{m}_a}},$$

donde $\overline{\mathfrak{m}_a}$ es la imagen del complemento de $\mathfrak{m}_a$ en $k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{F})$. □

Si a los elementos de $\mathcal{O}_a$, fracciones racionales regulares en a, los podemos pensar como funciones continuas de una vecindad de a en k, los elementos de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},a}$ los podemos pensar como clases de dichas funciones. Esto es lo que en cierto sentido dice el corolario anterior.

6.4 Aplicaciones regulares

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subespacios localmente cerrados de $\mathbb{A}_k^r$ y $\mathbb{A}_k^s$, respectivamente. Decimos que una aplicación continua $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es *regular sobre* $\mathcal{U}$ si para cada $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{V},\varphi(a)}$ tenemos que $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{U},a}$. Digamos que $\mathcal{U} = \mathcal{A} \cap \mathcal{F}$ y $\mathcal{V} = \mathcal{B} \cap \mathcal{G}$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son abiertos y, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son cerrados. Entonces,

$$f \in (K[x_1, ..., x_s]/\mathrm{i}(\mathcal{G}))_{\overline{\mathfrak{m}_a}},$$

y la condición que pedimos es:

$$f \circ \varphi \in (K[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{F}))_{\mathfrak{m}_a}.$$

Otra manera de decir lo anterior es que $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es regular si induce una función de gavillas $\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ donde a $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{V},\varphi(a)}$ le asocia $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{U},a}$.

Denotamos como $\varphi_i(a)$ a la i-ésima coordenada de $\varphi(a)$.

Proposición 39. *Para que $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ sea regular sobre $\mathcal{U}$, es necesario y suficiente que las $\varphi_i : \mathcal{U} \longrightarrow k = \mathbb{A}_k^1$ sean regulares sobre $\mathcal{U}$ para $1 \le i \le s$.*

Demostración. La condición es necesaria. Como φ es continua se sigue que sus coordenadas lo son. Tomamos $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}_i,\varphi_i(a)}$, donde $\mathcal{V}_i$ es la proyección de $\mathcal{V}$ en la i-ésima coordenada. El anillo $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_i,\varphi_i(a)}$ se incluye de manera natural en $\mathcal{O}_{\mathcal{V},\varphi_i(a)}$, entonces podemos decir $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{V},\varphi_i(a)}$, y así, por hipótesis, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{U},a}$.

La condición es suficiente. Supongamos que tenemos $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ y que cada función coordenada φ_i es regular en $\mathcal{U}$. Para ver que φ es continua basta ver que $\varphi^{-1}(Z(p) \cap \mathcal{V})$ es cerrado, donde $p \in K[x_1, ..., x_s]$. Tenemos $\varphi^{-1}(Z(p) \cap \mathcal{V}) = \{a \in \mathbb{A}_k^r | p(\varphi(a)) = 0\}$; como $p(\varphi) = p(\varphi_1, ..., \varphi_s) \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathcal{U}))$, pues cada $\varphi_i \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathcal{U}))$, entonces $p(\varphi)$ es continua, y así, $\varphi^{-1}(Z(p) \cap \mathcal{V})$ es cerrado, por lo que φ es continua.

Ahora, sean $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{V},\varphi(a)}$. Por definición f se puede escribir localmente como la restricción de $\frac{p}{q}$, donde p y q viven en $k[x_1, ..., x_s]$ y $q(\varphi(a)) \neq 0$. Entonces la función $f\circ\varphi$ es igual a $p\circ\varphi/q\circ\varphi$ en una vecindad de a. Como ya apuntamos $p\circ\varphi$ y $q \circ \varphi$ viven en $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathcal{U}))$, de donde son regulares en una vecindad de a y como $q \circ \varphi(a) \neq 0$ entonces $f \circ \varphi$ es regular en una vecindad de a y así $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{U},a}$. □

Sean $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ y $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ funciones regulares sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente entonces $\psi \circ \varphi$ es continua. Si $a \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{W},\psi\circ\varphi(a)}$ entonces $f \circ \psi \in \mathcal{O}_{\mathcal{V},\varphi(a)}$ y así $f \circ \psi \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{U},a}$. Por lo tanto la composición de funciones regulares es regular.

Una biyección $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ se llama *isomorfismo birregular* (o simplemente isomorfismo) si φ y φ^{-1} son regulares, en este caso decimos también que φ es un *homeomorfismo de $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{V}$ que transforma $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ en $\mathcal{O}_\mathcal{V}$.*

6.5 Productos

Si r y r' son dos enteros mayores o iguales que 0 identificamos al espacio afín $\mathbb{A}_k^{r+r'}$ con $\mathbb{A}_k^r \times \mathbb{A}_k^{r'}$ como conjuntos. La topología de Zariski para $\mathbb{A}_k^{r+r'}$ es más fina que la topología producto de las topologías de Zariski de $\mathbb{A}_k^r$ y $\mathbb{A}_k^{r'}$.

Por lo anterior, si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son subespacios localmente cerrados de $\mathbb{A}_k^r$ y $\mathbb{A}_k^{r'}$, respectivamente, entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ es un subespacio localmente cerrado de $\mathbb{A}_k^{r+r'}$ y la gavilla $\mathcal{O}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}'}$ está bien definida.

Por otro lado, sea $\mathcal{W}$ un subespacio localmente cerrado de $\mathbb{A}_k^t$, y sean $\varphi : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U}$ y $\varphi' : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U}'$ aplicaciones. Con este lenguaje tenemos el siguiente corolario a la Proposición 39.

Corolario 10. *Para que la aplicación $x \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x))$ sea regular en $\mathcal{W}$, es necesario y suficiente que φ y φ' sean regulares.*

□

Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ son dos subespacios no vacíos localmente cerrados de $\mathbb{A}_k^s$ y $\mathbb{A}_k^{s'}$ y si $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ y $\psi' : \mathcal{U}' \longrightarrow \mathcal{V}'$ son dos aplicaciones, entonces por la Proposición 39 y el Corolario 10 tenemos los siguientes resultados.

Corolario 11. *La aplicación $\psi \times \psi' : \mathcal{U} \times \mathcal{U}' \longrightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ es regular si y sólo si ψ y ψ' lo son.*

□

Corolario 12. *Para que $\psi \times \psi'$ sea un isomorfismo biregular, es necesario y suficiente que ψ y ψ' sean isomorfismos biregulares.*

□

6.6 Definición de la estructura de variedad algebraica

Se llama *variedad algebraica sobre k* a un conjunto $\mathcal{X}$ dotado de:

1. Una topología;
2. Una subgavilla $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ de la gavilla $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ de gérmenes de funciones definidas en $\mathcal{X}$ con valores en k.

tal que se cumplen los Axiomas VA_I y VA_{II} que enunciaremos. Dados $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dotados con la estructura descrita, un isomorfismo de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ es un homeomorfismo de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{Y}$ que transforma $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ en $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$. Además, si $\mathcal{X}'$ es un abierto de $\mathcal{X}$, podemos dotar a $\mathcal{X}'$ con la topología inducida y la gavilla inducida, es decir, podemos inducir la estructura en abiertos.

(VA_I) Existe una cubierta abierta y finita $\mathfrak{V} = \{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{X}$ tal que cada $\mathcal{V}_i$ dotado con la estructura inducida por $\mathcal{X}$ es isomorfo a un subespacio localmente cerrado $\mathcal{U}_i$ de un espacio afín con su gavilla $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$.

Simplificando el lenguaje, llamamos *variedad prealgebraica* a todo espacio topológico dotado con una gavilla $\mathcal{O}$ que satisface el Axioma VA_I. Un isomorfismo $\varphi_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{U}_i$ será llamado *carta* de $\mathcal{V}_i$. El Axioma VA_I significa que es posible cubrir a $\mathcal{X}$ con un número finito de abiertos que poseen cartas. Se sigue de la Proposición 37 que $\mathcal{X}$ es casicompacto.

Llamaremos *topología de Zariski de $\mathcal{X}$* a su topología, a su vez, la gavilla $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ será llamada *gavilla de anillos locales de $\mathcal{X}$*.

Aplica ahora un resultado típico de ensamblado a variedades prealgebraicas.

Proposición 40. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto, igual a la unión de una familia finita de subconjuntos $\mathcal{X}_j$, digamos $j \in J$. Supongamos que cada $\mathcal{X}_j$ esta dotado con una estructura de variedad prealgebraica y que dichas estructuras son compatibles, es decir:*

1. *$\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ es abierto en $\mathcal{X}_i$ para cualesquiera $i, j \in J$;*
2. *las estructuras inducidas por $\mathcal{X}_i$ y $\mathcal{X}_j$ en $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ coinciden para todo $i, j \in J$.*

Entonces, existe una única estructura de variedad prealgebraica para $\mathcal{X}$ tal que los $\mathcal{X}_i$ son abiertos y la estructura inducida sobre cada $\mathcal{X}_i$ coincide con la estructura dada.

Demostración. La existencia y unicidad de la gavilla y la topología es algo que vimos en la Proposición 6. Chequemos que cumple el Axioma VA_I, ello se sigue de que la cubierta es finita y cada $\mathcal{X}_i$ cumple el Axioma VA_I. □

Corolario 13. *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ variedades prealgebraicas. Existe sobre el conjunto $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ una única estructura de variedad prealgebraica tal que si $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ y $\varphi' : \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{U}'$ son cartas (donde $\mathcal{V}$ es abierto de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{X}'$) entonces $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ es abierto en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ y $\varphi \times \varphi' : \mathcal{V} \times \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ es una carta.*

Demostración. Cubrimos a $\mathcal{X}$ con un número finito de abiertos $\mathcal{V}_i$ que posean carta digamos $\varphi_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{U}_i$, y sea $(\mathcal{V}'_j, \mathcal{U}'_j, \varphi'_j)$ un sistema análogo sobre $\mathcal{X}'$. El conjunto $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ es unión de los conjuntos $\mathcal{V}_i \times \mathcal{V}'_j$; dotamos a cada $\mathcal{V}_i \times \mathcal{V}'_j$ de la estructura de variedad prealgebraica inducida por $\varphi_i^{-1} \times \varphi_j^{-1}$.

Aplicando la proposición anterior a la familia $\{\mathcal{V}_i \times \mathcal{V}'_j\}$ obtenemos la estructura deseada (lo podemos hacer debido al corolario anterior). □

Observación 3. Dadas dos variedades prealgebraicas $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$, es muy distinto dotar al conjunto $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ con la topología producto y la gavilla suma directa que con la topología y la gavilla del corolario anterior. Por ejemplo, $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1$ con la topología producto sus cerrados sólo son familias finitas de puntos y el espacio completo, en tanto con la topología que le corresponde según el corolario anterior, coincide con $\mathbb{A}_k^2$.

Aplicando el corolario cuando $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ dotamos a $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ con estructura de variedad prealgebraica. Ahora, enunciamos el segundo axioma:

(VA_{II}) La diagonal Δ de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ es cerrada en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. (Con la topología de variedad prealgebraica.)

Este axioma es análogo a la condición de espacios topológicos para ser Hausdorff. Por otro lado, el Axioma VA_I no implica al Axioma VA_{II}, como veremos con ayuda del siguiente ejemplo. Tomamos $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathbb{A}_k^1$ y los pegamos a lo largo de $\mathbb{A}_k^1 - \{0\}$, tenemos $\mathcal{X}$ definido por $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ como en la Proposición 40, entonces $\mathcal{X}$ es variedad prealgebraica pero no cumple el Axioma VA_{II}.

Supongamos que $\mathcal{X}$ es una variedad obtenida como en la Proposición 40. El Axioma VA_{II} es satisfecho si y sólo si $\mathcal{X}_{ij} = \Delta \cap (\mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j)$ es cerrado en $\mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j$. Si Δ es cerrado en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ entonces $\Delta \cap (\mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j)$ es cerrado en $\mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j$ que es un abierto de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Como ser cerrado es una propiedad local entonces si $\mathcal{X}_{ij}$ es cerrado en el abierto $\mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j$ se sigue que Δ es cerrado en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Digamos que $\varphi_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{U}_i$ es carta para cada i, sea $\mathcal{T}_{ij} = (\varphi_i \times \varphi_j)(\mathcal{X}_{ij})$; podemos describir a $\mathcal{T}_{ij}$ como el conjunto de las parejas $(\varphi_i(x), \varphi_j(x))$, con $x \in \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$. Con este lenguaje y la equivalencia vista podemos enunciar el Axioma VA_{II} como sigue:

(VA'_{II}) Para toda pareja i, j, el conjunto $\mathcal{T}_{ij}$ es cerrado en $\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$.

6.7 Aplicaciones regulares, estructuras inducidas, productos

Como localmente una variedad algebraica es como un subespacio localmente cerrado de un espacio afín, podemos construir objetos análogos a los que teníamos para subespacios localmente cerrados. Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos variedades algebraicas y $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Decimos que φ es regular si es continua y si $a \in \mathcal{X}$, y $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y},\varphi(a)}$, entonces $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},a}$.

La composición de dos aplicaciones regulares es regular y una biyección $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es isomorfismo si φ y φ^{-1} son regulares. La prueba de lo anterior es como en la Sección 6.4.

Sean $\mathcal{X}$ una variedad algebraica y $\mathcal{X}'$ un subconjunto localmente cerrado de $\mathcal{X}$. Dotamos a $\mathcal{X}'$ con la topología y las gavillas inducidas. (La gavilla inducida es aquella cuyos tallos $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',x}$ son la imagen de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ bajo el morfismo canónico $\mathcal{F}(\mathcal{X})_x \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{X}')_x$.) Si $\varphi_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{U}_i$ es un sistema de cartas tal que $\mathcal{X} = \cup \mathcal{V}_i$ ponemos $\mathcal{V}_i' = \mathcal{V}_i \cap \mathcal{X}'$ y $\mathcal{U}_i' = \varphi_i(\mathcal{V}_i')$, entonces $\varphi_i' = \varphi_i|_{\mathcal{V}_i'} : \mathcal{V}_i' \longrightarrow \mathcal{U}_i'$ es un sistema de cartas pues $\mathcal{U}_i'$ es localmente cerrado tal que $\mathcal{X}' = \cup \mathcal{V}_i'$ de donde $\mathcal{X}'$ es variedad prealgebraica. Como la topología de $\mathcal{X}' \times \mathcal{X}'$ es la inducida de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ entonces la diagonal de $\mathcal{X}' \times \mathcal{X}'$ es cerrada. Entonces $\mathcal{X}'$ tiene estructura de variedad algebraica *inducida* por la de $\mathcal{X}$. En este caso decimos que $\mathcal{X}'$ es *subvariedad* de $\mathcal{X}$.

La inclusión $\iota : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$ es continua y si $x \in \mathcal{X}'$ y $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ entonces $f \circ \iota \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}',x}$, por lo que es regular.

Proposición 41. *La aplicación $\varphi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}'$ es regular si y sólo si $\iota \circ \varphi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ es regular.*

Demostración. Composición de funciones regulares es regular por lo que si φ es regular entonces $\iota \circ \varphi$ lo es. Tienen los mismos valores tanto φ como $\iota \circ \varphi$ entonces φ es continua y si $y \in \mathcal{Y}$ y $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},\iota\circ\varphi(y)}$ entonces $f \circ \iota\varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}$. De donde si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},\varphi(y)}$ entonces $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},\iota\circ\varphi(y)}$ concluimos que φ es regular. □

Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ dos variedades algebraicas, entonces en virtud de la Sección 6.5, $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ hereda de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ una estructura de variedad prealgebraica. De hecho, $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ es variedad algebraica y la llamamos *variedad producto*. Veamos que la estructura de variedad prealgebraica heredada cumple el Axioma VA'_{II}, siguiendo su notación. Si $\varphi_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{U}_i$ y $\varphi'_{i'} : \mathcal{V}'_{i'} \longrightarrow \mathcal{U}'_{i'}$ son sistemas de cartas donde $\mathcal{X} = \cup \mathcal{V}_i$ y $\mathcal{X}' = \cup \mathcal{V}'_{i'}$, entonces $\mathcal{T}_{ij} \times \mathcal{T}'_{i'j'}$ es cerrado en $\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j \times \mathcal{U}'_{i'} \times \mathcal{U}'_{j'}$ ya que $\mathcal{T}_{ij}$ es cerrado en $\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$ y $\mathcal{T}'_{i'j'}$ es cerrado en $\mathcal{U}'_{i'} \times \mathcal{U}'_{j'}$. Por lo tanto, se cumple el Axioma VA'_{II}.

Son aplicables sin modificación los Corolarios 10 y 11 a las variedades algebraicas.

Si $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es una aplicación regular, la gráfica Φ de φ es cerrada en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ya que $\Phi = (\varphi \times 1)^{-1}(\Delta_{\mathcal{Y}})$ donde $\varphi \times 1 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$. Además, $\psi : \mathcal{X} \longrightarrow \Phi$ definida como $\psi(x) = (x, \varphi(x))$ es un isomorfismo, puesto que

ψ y ψ^{-1} son regulares, esta última lo es por ser la restricción de la proyección $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$, que es regular.

6.8 Campo de funciones racionales sobre una variedad irreducible

Los siguientes resultados reflejan propiedades topológicas del espacio base en la gavilla.

Lema 6. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio conexo, G un grupo abeliano y $\mathscr{G}$ la gavilla constante sobre $\mathcal{X}$, isomorfa a G. La aplicación canónica $G \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{G})$ es biyectiva.*

Demostración. Un elemento de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{G})$ es una función continua de $\mathcal{X}$ en $\mathscr{G}$ y como $\mathcal{X}$ es conexo y $\mathscr{G}$ viene con la topología discreta, entonces una tal función sólo puede ser constante, de lo que se sigue la biyección. □

Decimos que una gavilla $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ es *localmente constante* si para cada $x \in \mathcal{X}$ existe un abierto $\mathcal{U}$ tal que $x \in \mathcal{U}$ y $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ es constante sobre $\mathcal{U}$.

Lema 7. *Toda gavilla $\mathscr{F}$ localmente constante sobre un espacio irreducible $\mathcal{X}$ es constante.*

Demostración. Llamamos $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ a $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, es suficiente mostrar que $\varrho_x : \mathscr{F}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathscr{F}_x$ es biyectiva para toda $x \in \mathcal{X}$, pues es probar un isomorfismo de la gavilla constante definida por $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ y la gavilla $\mathscr{F}$. Si $f \in \mathscr{F}_{\mathcal{U}}$, el lugar de los puntos $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = 0$ es abierto pues $\mathscr{F}$ es localmente constante y por la misma razón es cerrado, pues si $f(x) = a \neq 0$ entonces localmente $f(x) = a$. Como $\mathcal{X}$ es irreducible, dicho lugar o es el vacío o es el total, de donde ϱ_x es inyectivo, pues si $\varrho_x(f) = 0$ entonces $f(x) = 0$ y así $f = 0$. Para ver que ϱ_x es suprayectiva sea $m \in \mathscr{F}_x$ y sea ς una sección de $\mathscr{F}$ sobre un abierto $\mathcal{U}$ tal que $\varsigma(x) = m$. Por otro lado, cubrimos a $\mathcal{X}$ con abiertos $\mathcal{U}_i$ tales que $\mathscr{F}(\mathcal{U}_i)$ es constante sobre $\mathcal{U}_i$. Como $\mathcal{X}$ es irreducible entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i \neq 0$, escogemos $x_i \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i$ entonces existe una sección s_i de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}_i$ tal que $s_i(x_i) = \varsigma(x_i)$ (dicha sección existe para alguna vecindad, pero al ser $\mathscr{F}(\mathcal{U}_i)$ constante es que podemos tomar a $\mathcal{U}_i$), entonces s_i y ς coinciden en una vecindad, de hecho, por ser constante $\mathscr{F}(\mathcal{U}_i)$, coinciden en todo $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i$. Lo mismo sucede para s_i y s_j, coinciden en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Entonces, por el Axioma de gavilla, existe una única sección σ de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$ tal que $\varrho_x(\sigma) = m$. □

Ahora, tomemos $\mathcal{X}$ una variedad algebraica irreducible. Si $\mathcal{U}$ es un abierto no vacío de $\mathcal{X}$ ponemos $\mathscr{A}_{\mathcal{U}} = \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{A})$; supongamos que $f, g \in \mathscr{A}_{\mathcal{U}}$ y $f \cdot g = 0$, entonces f y g son aplicaciones regulares de $\mathcal{U}$ en k, sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ los conjuntos de las $x \in \mathcal{U}$ tales que $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$, respectivamente, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, como f y g son continuas entonces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son cerrados y como $\mathcal{U}$ es irreducible entonces $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ o $\mathcal{G} = \mathcal{U}$ de donde $f = 0$ o $g = 0$, concluimos que $\mathscr{A}_{\mathcal{U}}$ es dominio entero. Denotemos com $\mathscr{K}_{\mathcal{U}}$ el campo de fracciones de $\mathscr{A}_{\mathcal{U}}$. Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ el homorfismo $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathscr{A}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathscr{A}_{\mathcal{U}}$ es inyectivo pues $\mathcal{U}$ es denso en $\mathcal{V}$ por irreducibilidad y entonces tenemos un morfismo bien definido $\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathscr{K}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathcal{U}}$. El sistema $\{\mathscr{K}_{\mathcal{U}}, \varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$ define una gavilla a la que llamamos *gavilla de campos* $\mathscr{K}$. Además, el tallo $\mathscr{K}_x$ es canónicamente isomorfo al campo de fracciones de $\mathscr{O}_{\mathcal{X},x}$.

Proposición 42. *Para toda variedad algebraica irreducible $\mathcal{X}$, la gavilla $\mathscr{K}$ es constante.*

Demostración. En virtud del Lema 7 basta probar la proposición cuando $\mathcal{X}$ es subespacio localmente cerrado de un espacio afín $\mathbb{A}_k^r$. Tenemos $\mathcal{X} = \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$ donde $\mathcal{U}$ es abierto y $\mathcal{F}$ cerrado de $\mathbb{A}_k^r$. Sea $\mathrm{i}(\mathcal{F})$ el ideal de $k[x_1, ..., x_r]$ de los polinomios nulos en $\mathcal{F}$. Sea $A = k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{F})$, que es dominio entero pues $\mathcal{X}$ es irreducible. Tomamos su campo de fracciones al que denotamos como $k(A)$. Entonces por el corolario a la Proposición 38 tenemos:

$$\mathscr{O}_{\mathcal{Y},a} \cong (k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{F}))_{\overline{\mathfrak{m}_a}},$$

de donde $k(\mathscr{O}_{\mathcal{X},a}) \cong K(A)$, y así, tenemos un isomorfismo entre la gavilla constante $K(A)$ y la gavilla $\mathscr{K}$. □

Por el Lema 6 las secciones globales de la gavilla $\mathscr{K}$ forman un campo, isomorfo a $\mathscr{K}$ para cualquier $x \in \mathcal{X}$, y lo denotaremos $K(\mathcal{X})$. Lo llamaremos *campo de funciones racionales sobre* $\mathcal{X}$, dicho campo es extensión de tipo finita del campo k, definimos la *dimensión de* $\mathcal{X}$, $\dim \mathcal{X}$, como el grado de trascendencia de $k(\mathcal{X})$ en k. Extendemos la definición a variedades algebraicas reducibles poniendo $\dim \mathcal{X} = \sup \dim \mathcal{Y}_i$, donde $\mathcal{X} = \cup \mathcal{Y}_i$ y $\mathcal{Y}_i$ es subvariedad cerrada e irreducible de $\mathcal{X}$. Como $\mathscr{O}_{\mathcal{X},x} \subset \mathscr{K}_x \cong k(\mathcal{X})$, entonces podemos pensar a $\mathscr{O}_{\mathcal{X},x}$ como subanillo de $k(\mathcal{X})$.

Sea A es un dominio entero con campo de fracciones L. Podemos considerar cada anillo de fracciones de A como subanillo de L. Entonces, con este sentido, $A = \cap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$, donde $\mathfrak{m}$ corre entre todos los ideales maximales de A. (*Cf.* [Mat89].)

Por el resultado que hemos citado si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{X}$ entonces $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}})$ es la intersección en $k(\mathcal{X})$ de los anillos $\mathscr{O}_{\mathcal{X},x}$ corriendo $x \in \mathcal{U}$.

Si $\mathcal{Y}$ es una subvariedad de $\mathcal{X}$, tenemos $\dim \mathcal{Y} \leq \dim \mathcal{X}$ pues $k(\mathcal{Y})$ es subcampo de $k(\mathcal{X})$. Además, si $\mathcal{Y}$ es cerrado y no contiene componentes irreducibles de $\mathcal{X}$, entonces $\dim \mathcal{Y} \leq \dim \mathcal{X}$.

Capítulo 7

Gavillas algebraicas coherentes

7.1 La gavilla de anillos locales de una variedad algebraica

Veamos algunas propiedades de la gavilla $\mathscr{O}$ de anillos locales de $\mathbb{A}_k^r$.

Lema 8. *La gavilla $\mathscr{O}$ es una gavilla coherente de anillos.*

Demostración. Sean $a \in \mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ vecindad de a, y $f_1, ..., f_p$ secciones de $\mathscr{O}$ sobre $\mathcal{U}$, es decir, $f_1, ..., f_p$ son funciones racionales regulares en todo punto de $\mathcal{U}$. Queremos ver que la gavilla de relaciones de $f_1, ..., f_p$ es de tipo finito, de donde $\mathscr{O}$ es coherente por lo visto en la Sección 3.4.

Podemos decir $f_i = p_i'/q_i$, donde $q_i(a) \neq 0$ para toda $a \in \mathcal{U}$. Entonces si $q = q_1 \cdot q_2 \cdots q_p$ tenemos que $f_i = \frac{p_i' q_1 \cdots q_{i-1} q_{i+1} \cdots q_p}{q}$ es decir, podemos pensar $f_i = p_i/q$ donde $q(a) \neq 0$ para toda $a \in \mathcal{U}$.

Ahora, sea $y \in \mathcal{U}$ y $g_i \in \mathscr{O}_y$ tal que $\sum_{i=1}^p g_i f_i = 0$ en una vecindad de y. Podemos escribir $g_i = r_i/s$, donde r_i y s son polinomios y s no se anula en y, entonces decir $\sum_{i=1}^p g_i f_i = 0$ es decir $\sum_{i=1}^p r_i p_i = 0$ en una vecindad de y. Ahora, aplicamos el álgebra. Como $k[x_1, ..., x_p]$ es noetheriano entonces $k[x_1, ..., x_r]^p$ es noetheriano y el módulo de relaciones de $p_1, ..., p_p$ es un submódulo de $k[x_1, ..., x_r]^p$ de donde es finitamente generado, esto último induce que la gavilla de relaciones sea de tipo finito. □

Tomemos $\mathcal{V}$ una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}_k^r$; para todo $x \in \mathcal{X}$, sea $\mathscr{I}_x(\mathcal{V})$ el ideal de $\mathscr{O}$ formado por los elementos $f \in \mathscr{O}_x$ cuya restricción en $\mathcal{V}$ es nula en una vecindad de x (de esta forma $\mathscr{I}_x(\mathcal{V}) = \mathscr{O}_x$ si $x \notin \mathcal{V}$), es decir, $\mathscr{I}_x(\mathcal{V})$ es el núcleo de $\epsilon_x : \mathscr{O}_x \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathcal{V},x}$). Los ideales $\mathscr{I}_x(\mathcal{V})$ forman una subgavilla $\mathscr{I}(\mathcal{V})$ de la gavilla $\mathscr{O}$.

Lema 9. *Si $\mathcal{V}$ una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}_k^r$ entonces la gavilla $\mathscr{I}(\mathcal{V})$ es una gavilla coherente de $\mathscr{O}$-módulos.*

Demostración. Sea $\mathrm{i}(\mathcal{V})$ el ideal de $K[x_1, ..., x_r]$ formado por los polinomios que se anulan en $\mathcal{V}$. Por la Proposición 38 tenemos $\mathscr{I}_x(\mathcal{V}) = \mathrm{i}(\mathcal{V}) \cdot \mathscr{O}_x$ para toda $x \in \mathcal{V}$, de hecho para toda $x \in \mathcal{X}$ pues si $x \notin \mathcal{V}$ entonces $\mathscr{I}_x(\mathcal{V}) = \mathrm{i}(\mathcal{V}) \cdot \mathcal{O}_x = \mathcal{O}$. Como $K[x_1, ..., x_r]$ es noetheriano, el ideal $\mathrm{i}(\mathcal{V})$ es generado por un número finito de elementos de donde $\mathrm{i}(\mathcal{V})$ es de tipo finito y así coherente (en virtud de la Proposición 12). □

Ahora, extendamos el resultado del Lema 8 a una variedad algebraica arbitraria.

Proposición 43. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad algebraica, la gavilla $\mathcal{O}_\mathcal{V}$ es una gavilla coherente de anillos sobre $\mathcal{V}$.*

Demostración. Como coherencia es una propiedad local, podemos suponer que $\mathcal{V}$ es una subvariedad cerrada del espacio afín $\mathbb{A}_k^r$. Entonces por el Lema 9, la gavilla $\mathscr{I}(\mathcal{V})$ es una gavilla coherente de ideales, y así la gavilla $\mathcal{O}/\mathscr{I}(\mathcal{V})$ es una gavilla coherente de $\mathcal{O}$-módulos sobre $\mathcal{V}$; siguiendo el Teorema 3, $\mathcal{O}$ es una gavilla coherente como gavilla de anillos.

Dicha gavilla de anillos es nula fuera de $\mathcal{V}$ pues $\mathscr{I}_x(\mathcal{V}) = \mathcal{O}$ si $x \notin \mathcal{V}$, y, por otra parte, su restricción a $\mathcal{V}$ no es otra que $\mathcal{O}_\mathcal{V}$, entonces la gavilla $\mathcal{O}_\mathcal{V}$ es una gavilla coherente de anillos en virtud del corolario a la Proposición 20. □

Observación 4. En la prueba anterior no usamos el hecho de que $\mathcal{V}$ satisfaciese el Axioma VA_{II}, por lo que es completamente válido para variedades prealgebraicas.

7.2 Gavillas algebraicas coherentes

Si $\mathcal{V}$ es una variedad algebraica, digamos que $\mathcal{O}_\mathcal{V}$ es su gavilla de anillos locales, entonces toda gavilla de $\mathcal{O}_\mathcal{V}$-módulos será llamada *gavilla algebraica sobre $\mathcal{V}$*.

Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos gavillas algebraicas, decimos que $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un *morfismo algebraico* si cada $\varphi_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$ es un morfismo de $\mathcal{O}_{\mathcal{V},x}$-módulos y φ transforma las secciones locales de $\mathscr{F}$ en secciones locales de $\mathscr{G}$. (*Cf.* con la Sección 1.4.)

Si $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica sobre $\mathcal{V}$, los grupos de cohomología $H^q(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ son $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_\mathcal{V})$-módulos como ya vimos al final de la Sección 4.7, en particular son k-módulos pues $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ es k-álgebra. Decimos que una gavilla algebraica $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{V}$ es *coherente* si es una gavilla coherente de $\mathcal{O}_\mathcal{V}$-módulos. Entonces $\mathscr{F}$ es coherente si localmente es el conúcleo de un morfismo algebraico $\varphi : \mathcal{O}_\mathcal{V}^q \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{V}^p$, siguiendo la Proposición 16.

7.3 Gavilla de ideales definida por una subvariedad cerrada

Generalizamos lo visto en la Sección 7.1: Sea $\mathcal{W}$ una subvariedad cerrada de una variedad algebraica $\mathcal{V}$. Para todo $x \in \mathcal{V}$, sea $\mathscr{I}_x(\mathcal{W})$ el ideal de $\mathcal{O}_{\mathcal{V},x}$ formado por los elementos $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{V},x}$ que al restringirlos en $\mathcal{W}$ se anulan en una vecindad de x; sea $\mathscr{I}(\mathcal{W})$ la subgavilla de $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}$ formada por los $\mathscr{I}_x(\mathcal{W})$.

Proposición 44. *La gavilla $\mathscr{I}(\mathcal{W})$ es una gavilla algebraica coherente.*

Demostración. Como coherencia es una propiedad local, podemos suponer que $\mathcal{V}$ (y así $\mathcal{W}$) es una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}_k^r$. Debido a la Proposición 12 para que $\mathscr{I}(\mathcal{W})$ sea coherente basta que sea de tipo finito pues $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}$ es una gavilla coherente de anillos. Aplicando el Lema 9 a $\mathcal{W}$ (pensado en $\mathbb{A}_k^r$) obtenemos que la gavilla de ideales definida por $\mathcal{W}$ es de tipo finito, entonces $\mathscr{I}(\mathcal{W})$ es de tipo finito vía el mapeo canónico $\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathcal{V}}$. □

Si $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}$ es la gavilla de anillos locales de $\mathcal{W}$, y $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ la gavilla en $\mathcal{V}$ obtenida prolongando por cero a $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}$ fuera de $\mathcal{W}$. Entonces $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ es canónicamente isomorfa a $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}/\mathscr{I}(\mathcal{W})$ ya que se tiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \longrightarrow 0.$$

Sea ahora $\mathscr{F}$ una gavilla algebraica sobre $\mathcal{W}$, y sea $\mathscr{F}^{\mathcal{V}}$ la gavilla obtenida al prolongar $\mathscr{F}$ por cero fuera de $\mathcal{W}$. Podemos considerar a $\mathscr{F}^{\mathcal{V}}$ como una gavilla de $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$-módulos, y también como una gavilla de $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}$-módulos donde la gavilla anuladora contiene a $\mathscr{I}_{\mathcal{W}}$. (*Cf.* la Proposición 18.)

Proposición 45. *Si $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{W}$, $\mathscr{F}^{\mathcal{W}}$ es una gavilla coherente sobre $\mathcal{V}$. Inversamente, si $\mathscr{G}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{V}$ tal que la gavilla anuladora contiene a $\mathscr{I}(\mathcal{W})$, entonces la restricción de $\mathscr{G}$ a $\mathcal{W}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{W}$.*

Demostración. Si $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{W}$, entonces por la Proposición 20 $\mathscr{F}^{\mathcal{V}}$ es una gavillla algebraica $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$-coherente, entonces es una gavilla algebraica $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}$-coherente por el Teorema 3 y porque $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \mathscr{O}_{\mathcal{V}}/\mathscr{I}(\mathcal{W})$.

Inversamente, si $\mathscr{G}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{V}$, tal que su gavilla anuladora contiene a $\mathscr{I}(\mathcal{W})$, entonces $\mathscr{G}$ puede ser considerada como una gavilla de $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}/\mathscr{I}(\mathcal{W})$-módulos, y por el Teorema 3 es una gavilla $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}/\mathscr{I}(\mathcal{W})$-coherente; entonces la restricción de $\mathscr{G}$ a $\mathcal{W}$ es una gavilla coherente de $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}$-módulos por la Proposición 20. □

Lo que la proposición anterior nos dice es que toda gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{W}$ puede ser identificada como una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{V}$. Por la Proposición 28 ésta identificación no altera los grupos de cohomología.

En particular, toda gavilla algebraica coherente sobre una subvariedad del espacio afín puede ser considerada como una gavilla algebraica coherente sobre el espacio afín.

7.4 Gavilla de ideales fraccionales

La gavilla constante $K(\mathcal{V})$ de funciones racionales, donde $\mathcal{V}$ es una variedad algebraica irreducible es una gavilla algebraica que no es coherente cuando $\dim \mathcal{V} > 0$.

Si $K(\mathcal{V})$ fuese coherente la siguiente sucesión localmente sería exacta:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}^{q} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^{p} \longrightarrow K(\mathcal{V}) \longrightarrow 0,$$

por lo que a nivel tallo tendríamos:

$$\mathcal{O}_{x}^{q} \longrightarrow \mathcal{O}_{x}^{p} \longrightarrow K_x \longrightarrow 0.$$

Entonces todo elemento de $K_x \cong K(\mathcal{V})$ sería algebraico sobre K de donde $\dim \mathcal{V} = 0$.

Ahora, recordemos la definición de ideal fraccional. Si A es un dominio entero con campo de fracciones K, un ideal fraccional I de A es un submódulo de K tal que $I \neq 0$ y $\alpha I \subset A$ para algún $\alpha \in K$ distinto de cero. Podemos llamar ***gavilla de ideales fraccionarios*** a toda subgavilla algebraica $\mathscr{F}$ de $K(\mathcal{V})$ ya que cada $\mathscr{F}$ es un ideal fraccional de $\mathcal{O}_{\mathcal{V},x}$. En efecto, $\mathscr{F}$ es un $\mathcal{O}_{\mathcal{V},x}$-submódulo de K_x. Podemos pensar que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$ es un subespacio localmente cerrado irreducible del espacio afín $\mathbb{A}_k^r$, llamamos $\mathfrak{p}$ al ideal $i(\mathcal{F})$, y sea $a \in \mathcal{V}$ entônces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} k[x_1,\dots,x_r]_{\mathfrak{m}_a} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & k[x_1,\dots,x_r]_{\mathfrak{p}} \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{\mathcal{V},a} \arrow[r, hook] & K(\mathfrak{p}) \end{tikzcd}$$

Podemos encontrar la α requerida si $k[x_1,\dots,x_r]_{\mathfrak{p}}$ es finitamente generado como $k[x_1,\dots,x_r]_{\mathfrak{m}_a}$-módulo, ello se sigue de que k es algebraicamente cerrado. Como $K(\mathfrak{p})$ es un $\mathcal{O}_{\mathcal{V},a}$-módulo noetheriano finitamente generado y $\mathcal{O}_{\mathcal{V},a}$ es un anillo noetheriano entonces todo submódulo de $K(\mathfrak{p})$ es finitamente generado, que es el caso de $\mathscr{F}$, por lo tanto es fraccional.

Proposición 46. *Para que una subgavilla algebraica $\mathscr{F}$ de $K(\mathcal{V})$ sea coherente es necesario y suficiente que sea de tipo finito.*

Demostración. Si es coherente es de tipo finito. Para demostrar que es coherente cuando ya es de tipo finito sólo hace falta mostrar que si $f_1,\dots,f_r$ son fracciones racionales de $\mathscr{F}$ entonces su gavilla de relaciones es de tipo finito. Si $a \in \mathcal{V}$ podemos encontrar funciones $g_1,\dots,g_r$ y h tales que $f_i = \frac{g_i}{h}$, donde $g_1,\dots,g_r$ y h son regulares en una vecindad $\mathcal{U}$ de a y h no se anula en $\mathcal{U}$. Entonces la gavilla de relaciones de $f_1,\dots,f_r$ es la misma que la gavilla de relaciones de $g_1,\dots,g_r$, pero esta última es de tipo finito pues $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ es una gavilla coherente de anillos. $\square$

7.5 Gavilla asociada a un haz vectorial

En la Sección 1.3 vimos en un ejemplo que un haz vectorial es una gavilla. Ahora, tomamos un haz vectorial $\mathscr{H}$ sobre una variedad algebraica $\mathcal{V}$ con fibra $\mathbb{A}_k^r$. Dado un abierto $\mathcal{U}$, en lugar de tomar todas las secciones de $\mathscr{H}$, nos restringimos a las secciones de $\mathscr{H}$ que sean regulares sobre $\mathcal{U}$, denotamos a dicho conjunto como $R_{\mathcal{U}}$. Al igual que en el Ejemplo 4 definimos $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : R_{\mathcal{V}} \longrightarrow R_{\mathcal{U}}$ como $\varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(\sigma) = \sigma_{|\mathcal{U}}$ para $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. El sistema $\{R_{\mathcal{U}}, \varrho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\}$ define una gavilla que denotamos $R(\mathscr{H})$. Análogamente al Ejemplo 4 se ve que $R_{\mathcal{U}}$ es un $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{O}_{\mathcal{V}})$-módulo de donde $R(\mathscr{H})$ es una gavilla algebraica sobre $\mathcal{V}$.

Proposición 47. *La gavilla $R(\mathscr{H})$ es localmente isomorfa a $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}^r$; en particular es una gavilla algebraica coherente.*

Demostración. Se sigue de la trivialidad local, de que goza todo haz fibrado, junto con la observación ya hecha de que R_U es un $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{O}_{\mathcal{V}})$-módulo. □

Inversamente, toda gavilla algebraica $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{V}$, localmente isomorfa a $\mathscr{O}_{\mathcal{V}}^r$, es isomorfa a una gavilla $R(\mathscr{H})$, donde $\mathscr{H}$ es un haz vectorial sobre $\mathcal{V}$. Se construye $\mathscr{H}$ inmediatamente a partir de $\mathscr{F}$.

Capítulo 8

Gavillas algebraicas coherentes sobre variedades afines

8.1 Variedades afines

Una variedad algebraica se llama *variedad afín* si es isomorfa a una subvariedad cerrada de un espacio afín. Como el producto de subvariedades cerradas del espacio afín es subvariedad cerrada de un espacio afín, entonces el producto de variedades afines es afín; también es una variedad afín cualquier subvariedad cerrada de una variedad afín.

8.1.1 Abiertos afines

Un subconjunto abierto de una variedad algebraica se dice *abierto afín* si dotado con la estructura inducida de variedad algebraica es variedad afín.

Proposición 48. *La intersección de abiertos afines es afín.*

Demostración. Queremos mostrar que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos afines de una variedad algebraica $\mathcal{X}$ entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ con la gavilla $\mathcal{O}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}$ es isomorfa a una subvariedad cerrada de un espacio afín. Para ello consideramos el morfismo diagonal $\Delta : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ que a cada x asocia (x, x); por un resultado visto en la Sección 6.7, Δ es un isomorfismo biregular de $\mathcal{X}$ en su imagen. La restricción de Δ a $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es un isomorfismo biregular de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ en $\Delta(\mathcal{X}) \cap \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Podemos pensar a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ como variedades afines pues son abiertos afines, entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ es variedad afín y así $\Delta(\mathcal{X}) \cap \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ es variedad afín, ya que $\Delta(\mathcal{X}) \cap \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ es cerrado en $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ por el Axioma (VA_{II}) que dice que $\Delta(\mathcal{X})$ es cerrado en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Concluimos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cong \Delta(\mathcal{X}) \cap \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ es un abierto afín.

□

Sea $\mathcal{V}$ una variedad algebraica y $f : \mathcal{V} \longrightarrow k$ una función regular sobre $\mathcal{V}$, consideramos el subconjunto de $\mathcal{V}$ cuyos elementos son los puntos $x \in \mathcal{V}$ tales que $f(x) \neq 0$, por definición de función regular, dicho conjunto es abierto, es el complemento del cerrado $f^{-1}(0)$. Denotemos como $\mathcal{V}_f$ al subconjunto abierto de los puntos de $\mathcal{V}$ donde f no se anula.

Proposición 49. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad afín y f es una función regular sobre $\mathcal{V}$, entonces el abierto $\mathcal{V}_f$ es afín.*

Demostración. Consideremos la variedad afín $\mathcal{V} \times k$ y el subconjunto $\mathcal{W}$ cuyos elementos son las parejas (x, λ) tales que $\lambda \cdot f(x) = 1$. Se tiene que $\mathcal{W}$ es cerrado pues es imágen inversa de 1 bajo el morfismo continuo que a (x, λ) asocia $\lambda \cdot f(x)$. Por ser cerrado en variedad afín, $\mathcal{W}$ es variedad afín.

Definimos $\pi : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ como $\pi(x, \lambda) = x$. Por definición de $\mathcal{W}$, $\pi(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}_f$; además π es regular ya que si (x_0, λ) y (x_0, μ) viven en $\mathcal{W}$ entonces $\lambda = \mu$ y π es proyección en la primera coordenada. Por otro lado, definimos $\omega : \mathcal{V}_f \longrightarrow \mathcal{W}$ como $\omega(x) = (x, \frac{1}{f(x)})$, es aplicación regular debido a lo dicho en la Sección 6.7 considerando la aplicación regular $\frac{1}{f(x)}$. Es claro que $\pi \circ \omega = 1$ y $\omega \circ \pi = 1$, entonces $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}_f$ son isomorfos. Por lo tanto, $\mathcal{V}_f$ es afín. □

Proposición 50. *Sean $\mathcal{V}$ una subvariedad cerrada de un espacio afín $\mathbb{A}_k^r$ y $\mathcal{F}$ un subconjunto cerrado de $\mathcal{V}$ y llamamos $\mathcal{U} = \mathcal{V} - \mathcal{F}$. Los abiertos $\mathcal{V}_p$ forman una base para la topología de $\mathcal{U}$, corriendo p sobre el conjunto de los polinomios que se anulan en $\mathcal{F}$, es decir, $p \in \mathrm{i}(\mathcal{F})$.*

Demostración. Tomamos un abierto de $\mathcal{U}$, digamos $\mathcal{U}' = \mathcal{V} - \mathcal{F}'$, con $\mathcal{F}'$ un cerrado que contiene a $\mathcal{F}$. Sea $x \in \mathcal{U}'$, deseamos encontrar un polinomio $p \in \mathrm{i}(\mathcal{F})$ tal que $\mathcal{V}_p \subset \mathcal{U}'$ y $x \in \mathcal{V}_p$, es decir, $p(x) \neq 0$ y $p(y) = 0$ para toda $y \in \mathcal{F}$. Dicho polinomio debe existir pues $\mathcal{F}'$ es cerrado y $x \notin \mathcal{F}'$. □

Teorema 7. *Los abiertos afines de una variedad algebraica $\mathcal{X}$ forman una base de la topología de $\mathcal{X}$.*

Demostración. Basta probarlo de manera local, entonces podemos suponer que $\mathcal{X}$ es una subvariedad localmente cerrada de un espacio afín, digamos $\mathcal{X} = \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$, donde $\mathcal{U}$ es abierto y $\mathcal{F}$ es cerrado, entonces $\mathcal{X}$ es un abierto de la variedad cerrada $\mathcal{F}$, de donde una base para la topología de $\mathcal{X}$ la forman los abiertos afines de $\mathcal{X}$ de la forma $\mathcal{V}_p$ con $p \in \mathrm{i}(\mathcal{F})$, que es lo que vimos en la Proposición 50. □

Corolario 14. *Las cubiertas de $\mathcal{X}$ formadas por abiertos afines son arbitrariamente finas.*

Demostración. Se sigue de que los abiertos afines forman una base de la topología. □

Observación 5. Si $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ es una cubierta de abiertos afines, entonces los abiertos $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p}$ son afines en virtud de la Proposición 48.

8.2 Algunas propiedades de variedades irreducibles

Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}_k^r$ y sea $\mathrm{i}(\mathcal{V})$ el ideal formado por los polinomios de $k[x_1, ..., x_r]$ que se anulan en $\mathcal{V}$. Llamemos $\mathcal{A}$ al anillo $k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{V})$, recordando que si $x \in \mathcal{V}$ entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{V},x} = \mathcal{A}_{\mathfrak{m}_x}$ tenemos un morfismo canónico:

$$\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}).$$

Si $a \in \mathcal{A}$, $\mathrm{i}(a)$ es la sección que a cada $x \in \mathcal{V}$ asocia la clase de a en $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}_x}$. Si $\iota(a)$ es la sección constante cero entonces a es tal que en todas las localizaciones de $\mathcal{A}$ sobre ideales maximales de $\mathcal{A}$ es cero, por lo que $a = 0$. Lo dicho obedece a un resultado más general que en libro de Matsumura ([Mat89]) aparece como Teorema 4.6. Por lo dicho, ι es inyectiva.

Proposición 51. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad algebraica irreducible, $\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ es biyectiva.*

Demostración. Como habíamos mencionado en la Sección 6.8, $\mathcal{A}$ es dominio entero y así $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) = \cap_{x\in\mathcal{V}}\mathcal{A}_{\mathfrak{m}_x}$, como k es algebraicamente cerrado los ideales maximales de $\mathcal{A}$ son los $\mathfrak{m}_x$ y sólo ellos, entonces $\mathcal{A} = \cap_{x\in\mathcal{V}}\mathcal{A}_{\mathfrak{m}_x}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cong \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ bajo ι. □

Proposición 52. *Sean $\mathcal{X}$ una variedad algebraica irreducible, q una función regular sobre $\mathcal{X}$ y p una función regular sobre $\mathcal{X}_q$. Entonces para toda n suficientemente grande, la función racional $q^n p$ es regular sobre $\mathcal{X}$.*

Demostración. Habíamos dicho que las variedades prealgebraicas son casicompactas entonces $\mathcal{X}$ lo es. Podemos hacer la prueba de manera local, encontrando naturales n para cada abierto, después usando la casicompacidad obtendríamos una n global.

Como los abiertos afines de $\mathcal{X}$ forman una base de su topología (Teorema 7) podemos suponer que $\mathcal{X}$ es una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}_k^r$.

Por la Proposición 51, $q \in \mathcal{A} = k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{X})$. Por otro lado, para todo $x \in \mathcal{X}_q$, tenemos $p = \frac{p_x}{q_x}$, donde $p_x, q_x \in \mathcal{A}$ y $q_x(x) \neq 0$, pues p es regular en $\mathcal{X}_q$. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal generado por los q_x, como el conjunto de ceros que define $\mathfrak{a}$ está contenido en el que define q, podemos aplicar el Nullstellensatz de Hilbert (Matsumura [Mat89], Teorema 5.4) y así obtenemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $q^n \in \mathfrak{a}$, es decir, $q^n = \sum r_x \cdot q_x$ de donde $q^n p = \sum r_x \cdot p_x$, con $r_x \in \mathcal{A}$ y así, $q^n p$ es regular en $\mathcal{X}$. □

Un poco más general tenemos la siguiente proposición.

Proposición 53. *Sean $\mathcal{X}$ una variedad algebraica irreducible, g una función regular en $\mathcal{X}$, $\mathcal{F}$ una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{X}$ y s una sección global de $\mathcal{F}$, cuya restricción en $\mathcal{X}_g$ es nula.*

Entonces para toda n suficientemente grande, la sección $g^n s$ es nula sobre $\mathcal{X}$.

Demostración. De nuevo, basta probarlo de manera local. Entonces podemos suponer que $\mathcal{X}$ es subvariedad cerrada de $\mathbb{A}_k^r$, que $\mathscr{F}$ es isomorfa al conúcleo de un morfismo $\varphi : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^q$ y que s es imagen de una sección σ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^q$.

Sea $A = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = A = k[x_1, ..., x_r]/\mathfrak{i}(\mathcal{X})$. La sección σ puede ser identificada con un sistema de q elementos de A pues $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^q$.

Sean:

$$t_1 = \varphi(1, 0, ..., 0)$$
$$\vdots$$
$$t_p = \varphi(0, ..., 0, 1).$$

Los t_i, $1 \leq i \leq p$, son secciones de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p$ sobre $\mathcal{X}$, por definición de φ, entonces, también pueden ser identificadas a sistemas de q elementos de A.

Como s es nulo sobre $\mathcal{X}_q$ entonces para todo $x \in \mathcal{X}_q$, tenemos que $\sigma(x)$ vive en $\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^p)$ que es decir que σ se puede escribir como $\sum_{i=0}^p h_i t_i$, con $h_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ (ello se debe a que $\mathscr{F}$ es el conúcleo de φ). Tomando los denominadores de cada h_i y multiplicándolos obtenemos un $g_x \in A$ tal que $g_x(x) \neq 0$ y $g_x \cdot \sigma = \sum_{i=0}^p r_i t_i$, pero ahora $r_i \in A$.

Siguiendo la misma historia de la Proposición 52 encontramos g y n suficientemente grande tales que g^n pertenece al ideal generado por los g_x y $g^n \cdot \sigma(x)$ vive en $\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^p)$ para toda $x \in \mathcal{X}$, por lo que $q^n \cdot s = 0$ sobre $\mathcal{X}$ (pues $\mathscr{F}$ es conúcleo de φ). □

Proposición 54. *Tome usted una variedad afín irreducible $\mathcal{X}$, g_i una familia finita de funciones regulares sobre $\mathcal{X}$ que no se anulen simultaneamente, y $\mathfrak{U}$, la cubierta de $\mathcal{X}$ cuyos abiertos son los $X_{q_i} = \mathcal{U}_i$.*

Si $\mathscr{F}$ es una subgavilla algebraica de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p$, entonces $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $q > 0$.

Demostración. Primero observemos que la familia de abiertos $\mathcal{U}_i$ sí forma una cubierta de $\mathcal{X}$ pues las funciones regulares g_i no se anulan simultaneamente. Podemos suponer que ninguna de las funciones g_i es identicamente nula, pues nos es irrelevante $\mathcal{X}_{g_i} = \emptyset$.

Sea f un q-cociclo de $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathscr{F}$. Vamos a construir una cocadena κ tal que $f = d\kappa$, de donde $B^q = Z^q$ y así $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$.

Cada $f_{i_0 \cdots i_q}$ es una sección de $\mathscr{F}$ sobre el respectivo $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$, podemos identificar a $f_{i_0 \cdots i_q}$ con un sistema de p funciones regulares sobre $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$. La Proposición 52 nos daba condiciones para extender funciones regulares, aplicamos dicho resultado al producto $g_{i_0} g_{i_1} \cdots g_{i_q}$, pues es regular en todo $\mathcal{X}$, obtenemos $G_{i_0 \cdots i_q} = (g_{i_0} g_{i_1} \cdots g_{i_q})^n f_{i_0 \cdots i_q}$, un sistema de p funciones regulares de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ sobre $\mathcal{X}$ completo.

Quisieramos que $G_{i_0 \cdots i_q}$ fuese una función regular de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{X}$, sin embargo sólo podemos decir que es función regular de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p$ sobre $\mathcal{X}$.

Como la familia de las g_i es finita, podemos escoger n lo suficientemente grande para que funcione al ir variando los índices $i_0, ..., i_q$.

Consideremos la imagen de $G_{i_0 \cdots i_q}$ en la gavilla cociente $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p / \mathcal{F}$; es una sección nula al restringirla en $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$ por definición. Aplicando la Proposición 53 tenemos que existe m lo suficientemente grande tal que $(g_{i_0} g_{i_1} \cdots g_{i_q})^m G_{i_0 \cdots i_q}$ es una sección de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{X}$ (de nuevo tomamos m que funcione para todos los índices $i_0, ..., i_q$).

Tomamos una sección $h_{i_0 \cdots i_q}$, representante de $(g_{i_0} g_{i_1} \cdots g_{i_q})^m G_{i_0 \cdots i_q}$, pensado en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p / \mathcal{F}$. Entonces $h_{i_0 \cdots i_q}$ coincide con $(g_{i_0} g_{i_1} \cdots g_{i_q})^N f_{i_0 \cdots i_q}$ sobre $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$, donde $N = n + m$.

Como las g_i no se anulan simultaneamente tampoco lo hacen las g_i^N de donde existen funciones $r_i \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ tales que $\sum_s r_s g_s = 1$.

Definimos la cocadena κ en $(i_0, ..., i_{q-1})$ como:

$$\kappa_{i_0 \cdots i_{q-1}} = \sum_s r_s \frac{h_{s i_0 i_1 \cdots i_{q-1}}}{(g_{i_0} g_{i_1} \cdots g_{i_{q-1}})^N}$$

Del lado derecho están involucrados tres tipos de funciones cuales son regulares globalmente, tomar el cociente sólo hace sentido sobre $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_{q-1}}$ por lo que está bien definido $\kappa_{i_0 \cdots i_{q-1}}$. Con mayor precisión deberíamos denotar la restricción de las secciones globales involucradas, pero para simplificar la notación lo evitaremos. Quede presente que el codominio de las restricciones que no anotaremos siempre es $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_{q-1}}}$.

Veamos que $f = d\kappa$, para ello sea $i_0, ..., i_q$ y evaluemos:

$$\begin{aligned}(d\kappa)_{i_0 \cdots i_q} &= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \varrho_j (\kappa_{i_0 \cdots \hat{i_j} \cdots i_q}) \\ &= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \varrho_j \left(\sum_s r_s \frac{h_{s i_0 i_1 \cdots \hat{i_j} \cdots i_q}}{(g_{i_0} g_{i_1} \cdots \hat{g_{i_j}} \cdots g_{i_q})^N} \right)\end{aligned}$$

donde $\varrho_j : \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{i_0 \cdots \hat{i_j} \cdots i_q}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}}$, como estamos sobre $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$, entonces $h_{s i_0 i_1 \cdots \hat{i_j} \cdots i_q} = (g_s g_{i_0} g_{i_1} \cdots \hat{g_{i_j}} \cdots g_{i_q})^N f_{s i_0 i_1 \cdots \hat{i_j} \cdots i_q}$ y así:

$$(d\kappa)_{i_0 \cdots i_q} = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \varrho_j \left(\sum_s r_s \cdot g_s^N f_{s i_0 i_1 \cdots \hat{i_j} \cdots i_q} \right)$$

Por otra parte, f es cociclo, entonces:

$$0 = (df)_{s i_0 \cdots i_q} = \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^{j+1} \rho_j (f_{s i_0 i_1 \cdots \hat{i_j} \cdots i_q}) \right) + \rho_s (f_{i_0, \ldots, i_q})$$

donde $\rho_j : \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{si_0\cdots\hat{i_j}\cdots i_q}} \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{si_0\cdots i_q}}$ y $\rho_s : \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{i_0\cdots i_q}} \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathcal{U}_{si_0\cdots i_q}}$. Despejando de la última ecuación obtenemos:

$$\rho_s(f_{i_0,\ldots,i_q}) = \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \rho_j(f_{si_0i_1\cdots\hat{i_j}\cdots i_q})$$

Regresando, tenemos:

$$\begin{aligned}(d\kappa)_{i_0\cdots i_q} &= \sum_{j=0}^{q}\sum_{s}(-1)^j \varrho_j\left(r_s\cdot g_s^N f_{si_0i_1\cdots\hat{i_j}\cdots i_q}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{q}\sum_{s} r_s\cdot g_s^N(-1)^j \varrho_j\left(f_{si_0i_1\cdots\hat{i_j}\cdots i_q}\right)\end{aligned}$$

ya que $\mathscr{F}$ es algebraica. Continuando:

$$\begin{aligned}(d\kappa)_{i_0\cdots i_q} &= \sum_{s} r_s\cdot g_s^N \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \varrho_j\left(f_{si_0i_1\cdots\hat{i_j}\cdots i_q}\right)\\ &= \sum_{s} r_s\cdot g_s^N(\rho_s(f_{i_0\cdots i_q}))\end{aligned}$$

Restringiendonos hasta $\mathcal{U} = \cap_i \mathcal{U}_i \neq \emptyset$ corriendo por todas las i, que es un conjunto finito (no se olvide!) entonces tenemos:

$$(d\kappa)_{i_0\cdots i_q|\mathcal{U}} = (\sum_{s} r_s\cdot g_s^N(f_{i_0\cdots i_q}))_{|\mathcal{U}} = f_{i_0\cdots i_q|\mathcal{U}}$$

Con lo cual terminamos, pues de ello se sigue que coinciden en todo $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_q}$ pues se trata de sistemas de p funciones racionales sobre todo $\mathcal{X}$ y $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $q > 0$. El caso $q = 0$ no funciona pues construimos una $q-1$ cocadena. □

Corolario 15. *$H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$.*

Demostración. Por la Proposición 50 las cubiertas cuyos abiertos son de la forma $\mathcal{X}_q$ son arbitrariamente finas (*cf.* Corolario 14) de donde $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$, por la proposición anterior. □

Corolario 16. *El morfismo $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p/\mathscr{F})$ es suprayectivo.*

Demostración. Por el Corolario 6 tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^p/\mathscr{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathscr{F})$$

que no es otra que la siguiente:

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}^p_{\mathcal{X}}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}^p_{\mathcal{X}}/\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

de donde tenemos la suprayectividad. □

El siguiente resultado generaliza a la Proposición 51.

Corolario 17. *Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}^r_k$ y $A = k[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{V})$. Entonces, el morfismo $\iota : A \longrightarrow \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ es biyectivo.*

Demostración. La gavilla $\mathcal{O}/\mathcal{I}(\mathcal{V})$ restringida a $\mathcal{V}$ no es otra que $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$, como se mencionó en la demostración de la Proposición 43, entonces todo elemento de $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ es restricción de una sección de $\mathcal{O}$ sobre $\mathbb{A}^r_k$, es decir de un polinomio, ya que por la Proposición 51, $\Gamma(\mathbb{A}^r_k, \mathcal{O})$ es isomorfo a $K[x_1, ..., x_r]$, al palicar dicho resultado a $\mathbb{A}^r_k$. Se sigue que ι es suprayectiva y como ya sabíamos que era inyectiva tenemos la biyección. □

8.3 Secciones de una gavilla algebraica coherente sobre una variedad afín

Veremos que los tallos de una gavilla algebraica coherente $\mathcal{F}$ sobre una variedad afín $\mathcal{X}$ son generados por secciones globales de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{X}$ es afín podemos suponer que es una subvariedad cerrada de un espacio afín, $\mathbb{A}^r_k$. Prolongando $\mathcal{F}$ por cero fuera de $\mathcal{X}$, obtenemos una gavilla algebraica coherente sobre $\mathbb{A}^r_k$ (*Cf.* Sección 7.3). Si demostramos que los tallos de $\mathcal{F}^{\mathcal{X}}$ son generados por las secciones globales de $\mathcal{F}^{\mathcal{X}}$, entonces habremos pobrado que los tallos de $\mathcal{F}$ son generados por las secciones globales de $\mathcal{F}$.

Teorema 8. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla algebraica coherente sobre una variedad afín $\mathcal{X}$. Para todo $x \in \mathcal{X}$, el $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$-módulo $\mathcal{F}_x$ es generado por las secciones globales de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Por lo comentado antes de enunciar el teorema, podemos suponer que $\mathcal{X} = \mathbb{A}^r_k$. Por los resultados vistos en la Sección 8.1 sabemos que los abiertos afines $\mathcal{X}_q$ forman una base de la topología de $\mathcal{X} = \mathbb{A}^r_k$, el cual es casicompacto, entonces podemos tomar una familia finita de polinomios que no se anulen simultáneamente (como se dijo en la Proposición 54) y tales que los abiertos afines que definen forman una cubierta de $\mathcal{X}$. Por definición de gavilla coherente, $\mathcal{F}$ es localmente isomorfa a un cociente de la gavilla $\mathcal{O}^p$. Combinando los anteriores resultados podemos suponer que tenemos una familia finita de polinomios $q_1, ..., q_m$ que no se anulan simultáneamente y tales que los abiertos $\mathcal{U}_i = \mathcal{X}_{q_i}$ forman una cubierta de $\mathcal{X}$ y que sobre cada $\mathcal{U}_i$ tenemos un morfismo suprayectivo $\varphi_i : \mathcal{O}^{p_i} \longrightarrow \mathcal{F}$.

Para demostrar que los tallos son generados por las secciones globales tomamos $x \in \mathcal{X}$, entonces $x \in \mathcal{U}_i$ para algún i, digamos $i = 1$, entonces, por hipótesis, $\mathcal{F}(\mathcal{U}_1)$ es un cociente de la gavilla $\mathcal{O}^{p_1}$ de donde $\mathcal{F}$ esta generado por $\Gamma(\mathcal{U}_1, \mathcal{F})$.

En el siguiente lema, vamos a probar que las secciones de $\mathscr{F}$ sobre $\mathfrak{U}$ se pueden extender de manera única a secciones globales, con lo cuál se concluye la prueba. □

Lema 10. *Si s_1 es una sección de $\mathscr{F}$ sobre $\mathcal{U}_1$, existe un entero N y una sección global s de $\mathscr{F}$ tales que $s = q_1^N s_1$ sobre $\mathcal{U}_1$.*

Demostración. Como dijimos hace un momento, en la prueba del teorema, existen morfismos suprayectivos $\varphi_i : \mathscr{O}^{p_i} \longrightarrow \mathscr{F}$, corriendo i de 1 a m. Sabemos que los $\mathcal{U}_i$ son abiertos afines (Proposición 49) entonces $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$ es afín (Proposición 48) y así podemos pensar en $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$ como variedad afín, es fácil ver que es irreducible sobre todo recordando que un espacio es irreducible si la intersección de cualesquiera dos abiertos no nulos es no vacía. Como φ_i es suprayectiva entonces $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}^{p_i}/\operatorname{Ker}\varphi_i$ sobre $\mathcal{U}_i$, y así del Corolario 16, tenemos la siguiente suprayección:

$$\Gamma(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i, \mathscr{O}^{p_i}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i)) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i, \mathscr{F}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i)).$$

Por lo tanto, existe σ_{1i} una sección de $\mathscr{O}^{p_i}$ sobre $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$ tal que $\varphi_i(\sigma_{1i}) = s_1$ sobre $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$. Por otro lado, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$ es el lugar de los puntos de $\mathcal{U}_i$ donde q_1 no se anula, es decir, $(\mathcal{U}_i)_{q_1} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$. Además, σ_{1i} es un sistema de p_i secciones de $\mathscr{O}$ sobre $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$, podemos aplicar la Proposición 52 a cada una de ellas tomando la variedad algebraica irreducible $\mathcal{U}_i$, q_1 la función regular sobre $\mathcal{U}_i$ y σ_{1i} la función regular sobre $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_1$, obtenemos que existe n_i suficientemente grande tal que $q^{n_i}\sigma_{1i}$ es una sección de $\mathscr{O}^{p_i}$ sobre $\mathcal{U}_i$. Ahora tomamos otro máximo, a saber, sea n elentero más grande entre las n_i corriendo i de 1 a m. Llamamos s'_i a $\varphi_i(q^n\sigma_{1i})$, dicha sección coincide con $q^n s_1$ sobre $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i$, de lo cual se sigue que $s'_i = s'_j$ sobre $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. La sección $s'_i - s'_j$ está definida sobre todo $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ y se anula en $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, entonces por la Proposición 53 existe un entero n_{ij} tal que $q_1^{n_{ij}} s'_i - s'_j$ está definida sobre todo $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Sea N el máximo de entre los n_{ij} y n. Por el Axioma de Gavilla existe una sección global s de $\mathscr{F}$ que sobre cada $\mathcal{U}_i$ coincide con $q^N s'_i$. Además, s restringida a $\mathcal{U}_0$ coincide con $q^N s_1$, pues se tenía que $s'_i = q^n s_1$ sobre $\mathcal{U}_i$. □

Corolario 18. *La gavilla $\mathscr{F}$ es isomorfa a una gavilla cociente de la gavilla $\mathscr{O}^p_{\mathcal{X}}$.*

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es coherente, $\mathscr{F}_x$ es un $\mathscr{O}_{\mathcal{X},x}$-módulo de tipo finito. Se sigue del Teorema 8 que $\mathscr{F}_x$ está generado por un número finito de secciones globales de $\mathscr{F}$. Por la Proposición 10 estás secciones generan $\mathscr{F}_y$ para toda y en una vecindad de x. Como $\mathcal{X}$ es casicompacto, podemos obtener un juego finito de secciones globales de $\mathscr{F}$ que generan a cada tallo, digamos las secciones $s_1, \ldots, s_p$. Se sigue que hay un morfismo suprayectivo $\varphi : \mathscr{O}^p_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathscr{F}$, por lo que $\mathscr{F}$ es isomorfa a la gavilla cociente $\mathscr{O}^p_{\mathcal{X}}/\operatorname{Ker}\varphi$. □

Corolario 19. *Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}$ una sucesión exacta de gavillas algebraicas coherentes sobre una variedad afín $\mathcal{X}$. Entonces, la sucesión $\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^*} \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ es exacta.*

Demostración. Podemos suponer que $\mathcal{X}$ es el espacio afín $\mathbb{A}_k^r$, como se hizo en el Teorema 8. Sea $s \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ y le aplicamos $\psi^* \circ \varphi^*$, tenemos $\psi^* \circ \varphi^*(s) = \psi \circ \varphi \circ s = 0$, pues $\psi \circ \varphi = 0$. (En caso de duda con la notación ψ^* véase la Sección 4.7.)

Por el corolario anterior se tiene un morfismo suprayectivo $\pi : \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p \longrightarrow \mathscr{F}$ de donde $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p / \operatorname{Ker} \pi$. Por el Corolario 16 tenemos la suprayección:

$$\pi^* : \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F})$$

por lo que $\varphi^* \circ \pi^*$ es suprayectiva:

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \operatorname{Im} \varphi).$$

Entonces φ^* es forzosamente suprayectiva, y como $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$ tenemos:

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \Gamma(\mathcal{X}, \operatorname{Ker} \psi),$$

de donde, para toda sección global σ tal que $\psi \circ \sigma = 0$ existe $s \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ que cumple $\varphi^*(s) = \sigma$.

Por lo tanto, la sucesión inducida en secciones globales es exacta. □

8.4 Grupos de cohomología de una variedad afín con valores en una gavilla algebraica coherente

Generalizando la Proposición 54 que además pedía que $\mathcal{X}$ fuése irreducible y $\mathscr{F}$ fuése subgavilla de $\mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p$, tenemos es siguiente teorema.

Teorema 9. *Sea $\mathcal{X}$ una variedad afín, q_i una familia finita de funciones regulares sobre $\mathcal{X}$, que no se anulan simultáneamente, y $\mathfrak{U}$ la cubierta abierta de $\mathcal{X}$ formada por los $\mathcal{X}_{q_i} = \mathcal{U}_i$. Si $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{X}$, tenemos $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $q > 0$.*

Demostración. Primero mostremos el resultado cuando $\mathcal{X}$ es irreducible. Por el Corolario 18, tenemos un morfismo suprayectivo $\psi : \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p \longrightarrow \mathscr{F}$ de donde la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \psi \xrightarrow{i} \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p \xrightarrow{\psi} \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

En general, una sucesión exacta de gavillas no induce sucesiones exactas de complejos de cocadenas, pero en este caso la sucesión inducida es exacta:

$$0 \longrightarrow C(\mathfrak{U}, \operatorname{Ker} \psi) \xrightarrow{i} C(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p) \xrightarrow{\psi} C(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow 0.$$

Por lo dicho en la Sección 4.8, sólo falta checar que ψ es suprayectiva. Como $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$ es variedad irreducible podemos aplicar el Corolario 16 que dice que el siguiente morfismo es suprayectivo:

$$\Gamma(\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^p(\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q})) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}, \mathscr{F}(\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q})),$$

se sigue que $C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{O}^p_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ es suprayectivo. Por lo tanto, la sucesión en complejos es exacta.

La sucesión inducida, a su vez, induce una sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{O}^p_{\mathcal{X}}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^{q+1}(\mathfrak{U}, \operatorname{Ker}\psi) \longrightarrow \cdots$$

Como $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{O}^p_{\mathcal{X}}) = 0$ y $H^{q+1}(\mathfrak{U}, \operatorname{Ker}\psi) = 0$ para $q > 0$ entonces $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$.

Ahora, probemos el caso general.

Como $\mathcal{X}$ es afín podemos suponer que es una subvariedad cerrada del espacio afín $\mathbb{A}^r_k$. Por el Corolario 17 tenemos que $K[x_1, ..., x_r]/\mathrm{i}(\mathcal{X})$ es isomorfo a $\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{O})$, de donde las funciones q_i viene inducidas por polinomios, digamos p_i respectivamente. Por otro lado, sea r_j un sistema finito de generadores del ideal $\mathrm{i}(\mathcal{X})$ (recuérdese que $K[x_1, ..., x_r]$ es noetheriano). Como q_i no se anulan simultáneamente, entonces forzosamente p_i, r_j no se anulan simultáneamente sobre $\mathbb{A}^r_k$, de donde inducen una cubierta $\mathfrak{U}'$ de $\mathbb{A}^r_k$.

Tomemos $\mathscr{F}^{\mathbb{A}^r_k}$ la gavilla que se obtiene prolongando por cero a $\mathscr{F}$ fuera de $\mathcal{X}$. Tenemos un caso particular del que ya demostramos al principio de esta prueba, a saber, $\mathbb{A}^r_k$ es la variedad afín irreducible, p_i, r_j es la familia finita y $\mathscr{F}^{\mathbb{A}^r_k}$ la gavilla algebraica coherente. Entonces $H^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}^{\mathbb{A}^r_k}) = 0$ para $q > 0$. Además, el complejo $C((\mathfrak{U}', \mathscr{F}^{\mathbb{A}^r_k})$ es isomorfo a $C(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ pues $\mathscr{F}^{\mathbb{A}^r_k}$ es cero fuera de $\mathcal{X}$, entonces $H^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}^{\mathbb{A}^r_k}) = H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, con lo cual terminamos la prueba. □

Corolario 20. *Si $\mathcal{X}$ es una variedad afín y $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{X}$, entonces $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$.*

Demostración. Por la Proposición 50 las cubiertas cuyos abiertos son de la forma $\mathcal{X}_q$ son arbitrariamente finas (*cf.* Corolario 14) de donde $H^q(\mathcal{X}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$, por el teorema anterior. □

Corolario 21. *Sea $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas sobre una variedad afín $\mathcal{X}$. Si la gavilla $\mathscr{F}$ es algebraica y coherente entonces el morfismo $\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ es suprayectivo.*

Demostración. Por el corolario anterior $H^1(\mathcal{X}, \mathscr{F}) = 0$, entonces por el Corolario 6 la siguiente sucesión es exacta:

$$H^0(\mathcal{X}, \mathscr{G}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathscr{H}) \longrightarrow 0$$

que es decir que $\Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ es suprayectivo. □

8.5 Cubiertas de variedades algebraicas por abiertos afines

Proposición 55. *Sea $\mathcal{X}$ una variedad afín y sea $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una cubierta finita de $\mathcal{X}$ por abiertos afines.*

Si $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{X}$, se tiene $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $q > 0$.

Demostración. Por la Proposición 50 existen funciones regulares p_j sobre $\mathcal{X}$ tales que la cubierta $\mathfrak{V} = \{\mathcal{X}_{p_j}\}$ es más fina que $\mathfrak{U}$.

Para cada $(i_0, ..., i_p)$ la cubierta $\mathfrak{V}_{i_0 \cdots i_p}$ inducida por $\mathfrak{V}$ sobre $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p}$ está definida por las restricciones de los p_j en $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p}$. Como $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p}$ es variedad afín, según la Proposición 48, entonces $H^q(\mathfrak{V}_{i_0 \cdots i_p}, \mathscr{F}(\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p})) = 0$ para $q > 0$, por el Teorema 9.

Aplicamos la Proposición 34 y obtenemos $H^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) = H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ y como $H^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$ entonces ya terminamos. □

Teorema 10. *Sean $\mathcal{X}$ una variedad algebraica, $\mathscr{F}$ una gavilla algebraica coherente sobre $\mathcal{X}$ y $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una cubierta finita de $\mathcal{X}$ por abiertos afines.*

El morfismo $\sigma(\mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{X}, \mathscr{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$.

Demostración. Vamos a aplicar el Teorema 6, veamos que se cumplen las condiciones para poder hacerlo.

Tome usted la familia $\mathfrak{V}^\alpha$ de cubiertas finitas que consisten de abiertos afines. Por el Corolario 14 esta familia cumple con la condición 1 del Teorema 6, es decir, tiene elementos arbitrariamente finos.

Para cada $(i_0, ..., i_p)$ las cubiertas $\mathfrak{V}^\alpha_{i_0, ..., i_p}$ inducidas por $\mathfrak{V}^\alpha$ sobre $\mathcal{U}_{i_0, ..., i_p}$ son cubiertas de abiertos afines (Proposición 48 y así, por la Proposición 55 $H^q(\mathfrak{V}^\alpha_{i_0, ..., i_p}, \mathscr{F}) = 0$ para $q > 0$.

Ahora, apliquemos el Teorema 6 de donde $\sigma(\mathfrak{U})$ es biyectivo para $n \geq 0$. □

Teorema 11. *Sean $\mathcal{X}$ una variedad algebraica y $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una cubierta finita de $\mathcal{X}$ por abiertos afines.*

Sea $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas sobre $\mathcal{X}$, donde la gavilla $\mathscr{F}$ es algebraica y coherente.

Entonces el morfismo canónico $H^q_0(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{H})$ es biyectivo para todo $q \geq 0$.

Demostración. Es suficiente mostrar que $C_0(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) = C(\mathfrak{U}, \mathscr{H})$ por definición de C_0 la igualdad significa que para toda sección de $\mathscr{H}$ sobre $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$ es imagen de una sección de $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_q}$. Lo anterior se sigue del Corolario 21. □

Corolario 22. *Sea $\mathcal{X}$ una variedad algebraica y sea $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas sobre $\mathcal{X}$, donde la gavilla $\mathscr{F}$ es algebraica y coherente.*

Entonces el morfismo canónico $H^q_0(\mathcal{X}, \mathscr{H}) \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ es biyectivo para todo $q \geq 0$.

Demostración. Por la Proposición 50 las cubiertas cuyos abiertos son afines son arbitrariamente finas (*cf.* Corolario 14) de donde $H^q_0(\mathcal{X}, \mathscr{H}) \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \mathscr{H})$ es biyectivo para todo $q \geq 0$ por el teorema anterior. □

Teorema 12. *Sea $\mathcal{X}$ una variedad algebraica y sea $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas sobre $\mathcal{X}$, donde la gavilla $\mathscr{F}$ es algebraica y coherente. Entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathcal{X},\mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^q(\mathcal{X},\mathscr{H}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(\mathcal{X},\mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^{q+1}(\mathcal{X},\mathscr{G}) \longrightarrow \cdots.$$

Demostración. Se sigue del corolario anterior. (*Cf.* con el comentario siguiente al Corolario 8.) □

8.6 Palabras finales

Por lo que hemos visto, en geometría algebraica existe una buena teoría de cohomología en el sentido de que hemos obtenido una sucesión exacta larga en cohomología inducida por una sucesión exacta corta de gavillas donde la primera es algebraica y coherente.

Tomando como campo base a $\mathbb{C}$ se tienen dos teorías de cohomología sobre las variedades, la algebraica y la analítica, una tomando la topología de Zariski y otra con la topología usual, que son bien distintas, con la primera, las variedades no son Hausdorff y con la segunda sí. En un trabajo posterior de Serre se demuestra que hay una biyección entre las gavillas algebraicas y las gavillas analíticas definidas sobre una variedad compleja, dada por $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}$, donde $\mathscr{F}$ es una gavilla algebraica y $\mathscr{O}$ es la gavilla de funciones holomorfas, además las dos teorías coinciden. De esta forma, una aplicación de lo desarrollado en esta tesis es la solución al primer problema de Cousin, tomando la gavilla constante $\mathbb{Z}$.

FINIS OPERA

Apéndice A

Límite directo

En la elaboración de este apéndice se siguen a MacDonald y Atiyah quienes introducen este concepto en su sección de ejercicios del capítulo 2 de [AM69].

Veamos la construcción algebraica, las propiedades como conmutar con la suma directa y con el tensor, Hom en límites dierectos y límites directos de módulos finitamente generados.

Decimos que un conjunto parcialmente ordenado I es ***dirigido*** si para todo par $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Una familia $\{M_i\}$ de A-módulos indexada por un conjunto dirigido se llama ***sistema dirigido*** si esta provista por una familia de morfismos $\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$, uno por cada par $i \leq j$ de I tal que $\mu_{ii} = Id_{M_i}$ para toda $i \in I$ y $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$ para toda tercia $i \leq j \leq k$. Denotamos a este sistema dirigido como $\{M_i, \mu_{ij}\}$.

Dado un sistema dirigido $\{M_i, \mu_{ij}\}$ de A-módulos existe un A-módulo M junto con una familia de morfismos $\mu_i : M_i \longrightarrow M$ para cada $i \in I$, tal que $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$. Para construir M consideremos la suma directa $\oplus_{i \in I} M_i$ y la familia de inclusiones $\varrho_i : M_i \longrightarrow \oplus M_i$. Llamemos E al submódulo generado por los elementos de la forma $\varrho_i(x_i) - \varrho_j(\mu_{ij}(x_i))$ donde $x_i \in M_i$ e i y j corren por todo I. Proponemos $M = \oplus M_i / E$, por ser cociente existe un morfismo natural $\pi : \oplus M_i \longrightarrow M$, llamamos μ_i a $\pi \circ \varrho_i$, la familia de morfismos así construida cumple con las condiciones requeridas, veamos:

$$\mu_j \circ \mu_{ij} = \pi \circ \varrho_j \circ \mu_{ij} \stackrel{1}{=} \pi \circ \varrho_i = \mu_i$$

donde la igualdad 1 sucede ya que por construcción de E, $\varrho_i(x_i)$ y $\varrho_j(\mu_{ij}(x_i))$ van a dar a lo mismo bajo π.

Si N es un A-módulo con propiedades similares a las de M, es decir, está provisto de una familia de morfismos $\nu_i : M_i \longrightarrow N$ tal que $\nu_i = \nu_j \circ \mu_{ij}$ entonces existe un único morfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ tal que $\nu_i = \varphi \circ \mu_i$ para toda $i \in I$ (a esta propiedad la llamamos *propiedad de factorización*). Para verificar lo anterior sea $(x_i)_{i \in I}$ en $\oplus M_i$, definimos $\psi : \oplus M_i \longrightarrow N$ como $\psi((x_i)) = \sum_{i \in I} \nu_i(x_i)$, que es una suma finita pues las x_i son cero salvo un número finito. Tenemos que ψ es un morfismo de A-módulos pues fue definido en términos de los ν_i. Tomemos un generador de E, $\varrho_i(x_i) - \varrho_j(\mu_{ij}(x_i))$, y veamos a donde llega bajo ψ,

$$\psi\left(\varrho_i(x_i) - \varrho_j(\mu_{ij}(x_i))\right) = \nu_i(x_i) - \nu_j(-\mu_{ij}(x_i)) = \nu_i(x_i) - \nu_i(x_i) = 0.$$

Concluimos que $E \subseteq \operatorname{Ker}\psi$ por lo que ψ es compatible con π induciendo un morfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ definido como $\varphi(\pi((x_i))) = \psi((x_i))$.

El morfismo φ es único. Antes probemos el siguiente Lema.

Lema 11. *Todo elemento de M puede ser escrito de la forma $\mu_i(x_i)$ para algún $x_i \in M_i$.*

Demostración. Sean $m \in M$ y $(x_i)_{i\in I} \in \oplus M_i$ tal que $\pi((x_i)) = m$. Sabemos que a lo más un número finito de las entradas de x_i es distinto de cero, supongamos que son dos, a saber, x_m y x_n. Para el par (m, n) existe $k \in I$ tal que $m \leq k$ y $n \leq k$. Sea $(y_i) \in \oplus M_i$ tal que $y_n = x_n$, $y_k = \mu_{mk}(x_m)$ y que en todas las demás entradas es cero, entonces $(y_i) - (x_i) = \varrho_m(x_m) - \varrho_k(\mu_{mk}(x_m))$, por lo que $\pi((y_i)) = \pi((x_i)) = m$. Sea ahora $(z_i) \in \oplus M_i$ es tal que todas sus entradas son nulas salvo en el lugar k donde $z_k = \mu_{mk}(x_m) + \mu_{nk}(x_n)$, tenemos que $(z_i) - (y_i) = \varrho_n(x_n) - \varrho_k(\mu_{nk}(x_n))$, y así $\pi((z_i)) = \pi((y_i)) = m$. Concluimos que $m = \pi \circ \varrho_k(\mu_{mk}(x_m) + \mu_{nk}(x_n))$. El caso general, no asumiendo que sólo dos entradas no son nulas, se resuelve con el mismo procedimiento, pues cada vez que se aplica disminuye el número de estas entradas.

□

Mostremos que el morfismo φ es único. Para ello sea $\psi : M \longrightarrow N$ tal que $\nu_i = \psi \circ \mu_i$. Sea $m \in M$ existe $x_i \in M_i$ tal que $\mu_i(x_i) = m$, entonces $\psi(m) = \psi(\mu_i(x_i)) = \nu_i(x_i) = \varphi(\mu_i(x_i)) = \varphi(m)$. Concluimos que φ es única. Como φ es único entonces podemos probar que M es único salvo isomorfismo. Para probar lo anterior supongamos que N provisto de los morfismos $\nu_i : M_i \longrightarrow N$ cumple con la propiedad de factorización. Como tanto M como N tienen la propiedad de factorización tenemos que existen $\varphi : M \longrightarrow N$ y $\psi : N \longrightarrow M$ tales que $\nu_i = \varphi \circ \mu_i$ y $\mu_i = \psi \circ \nu_i$ por lo que $\mu_i = \psi \circ \varphi \circ \mu_i$, entonces $\psi \circ \varphi = Id$, por unicidad, pues ambos morfismos cumplen la propiedad de factorización, análogamente $\varphi \circ \psi = Id$. Concluimos que M y N son isomorfos. Por todo lo que hemos dicho, hemos probado el siguiene Teorema.

Teorema 13. *Dado un sistema dirigido $\{M_i, \mu_{ij}\}$ de A-módulos existe un único A-módulo M junto con una familia de morfismos $\mu_i : M_i \longrightarrow M$ para cada $i \in I$, tal que $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$. Además si N es un A-módulo provisto de una familia de morfismos $\nu_i : M_i \longrightarrow N$ tal que $\nu_i = \nu_j \circ \mu_{ij}$ entonces existe un único morfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ tal que $\nu_i = \varphi \circ \mu_i$ para toda $i \in I$.*

□

A M junto con los morfismos μ_i lo llamamos *límite directo* del sistema $\{M_i, \mu_{ij}\}$ y se denota como $\varinjlim_{i\in I} M_i$, además a la propiedad de factorización la llamaremos *propiedad universal del límite directo.*

Veamos algunos resultados tradicionales a cerca de límites directos.

Proposición 56. *Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de un A-módulo, donde para todo par de índices i, j en I existe $k \in I$ tal que $M_i + M_j \subseteq M_k$. Definimos $i \leq j$ si $M_i \subseteq M_j$ y sea $\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ la inclusión de M_i en M_j. Entonces $\varinjlim M_i = \sum M_i = \cup M_i$, con i corriendo en I.*

Demostración. Llamemos $\varrho_i : M_i \longrightarrow \sum M_i$ a las inclusiones naturales, como μ_{ij} es inclusión, tenemos $\varrho_i = \varrho_j \circ \mu_{ij}$. Probaremos que $\sum M_i$ cumple la propiedad universal del límite directo. Sea N un A-módulo provisto de una familia de morfismos $\nu_i : M_i \longrightarrow N$ tal que $\nu_i = \nu_j \circ \mu_{ij}$. Si $m \in \sum M_i$ podemos asumir que $m \in M_n$ para algún $n \in I$ ya que para todo par i, j en I existe $k \in I$ tal que $M_i + M_j \subseteq M_k$, entonces definimos $\varphi : \sum M_i \longrightarrow N$ como $\varphi(m) = \nu_n(m)$. El morfismo φ no depende del índice n (que varía para cada $m \in \sum M_i$) pues los morfismos son inclusiones. Por lo tanto, $\sum M_i$ es el límite directo del sistema $\{M_i, \mu_{ij}\}$.

El argumento para probar que $\cup M_i$ es el límite directo es análogo. □

El anterior resultado nos dice que cualquier A-módulo es el límite directo de sus submódulos finitamente generados.

Dados dos sistemas dirigidos sobre el mismo conjunto dirigido, $\{M_i, \mu_{ij}\}$ y $\{N_i, \nu_{ij}\}$ de A-módulos, definimos un morfismo entre ellos como una familia de morfismos de A-módulos, $\varphi_i : M_i \longrightarrow N_i$, tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\mu_{ij}"'] & N_i \arrow[d, "\nu_{ij}"] \\
M_j \arrow[r, "\varphi_j"'] & N_j
\end{tikzcd}$$

Proposición 57. *La familia $\{\varphi_i\}$ define un único morfismo $\varphi : \varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} N_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\mu_{ij}"'] & N_i \arrow[d, "\nu_{ij}"] \\
\varinjlim_{i\in I} M_i \arrow[r, "\varphi"'] & \varinjlim_{i\in I} M_i
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $m \in \varinjlim_{i\in I} M_i$, que además por lo ya dicho tiene la forma $\mu_i(x_i) = m$ para algún $x_i \in M_i$. Definimos $\varphi(m) = \nu_i(\varphi_i(x_i))$. Para ver que φ está bien definida basta comprobar que si $x_j = \mu_{ij}(x_i)$ entonces $\nu_i(\varphi_j(x_i)) = \nu_j(\varphi_j(x_j))$, es decir, que cualquier representante del cero va al cero vía los generadores. Tenemos $\mu_j(\mu_{ij}(x_i)) = \mu_i(x_i)$ de donde φ está bien definida y cumple $\varphi \circ \mu_i = \nu_i \circ \varphi_i$. □

Decimos que una sucesión de sistemas directos y homomorfismos,

$$(M_i, \mu_i j) \xrightarrow{\Phi} (N_i, \nu_i j) \xrightarrow{\Psi} (P_i, \pi_i j)$$

es exacta si la sucesión,

$$M_i \xrightarrow{\varphi_i} N_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$$

es exacta para cada $i \in I$.

Proposición 58. *Dada una sucesión exacta de sistemas dirigidos,*

$$(M_i, \mu_i j) \xrightarrow{\Phi} (N_i, \nu_i j) \xrightarrow{\Psi} (P_i, \pi_i j),$$

la sucesión inducida en los límites directos es exacta.

Demostración. Digamos que la sucesión inducida es la siguiente:

$$\varinjlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{\varphi} \varinjlim_{i\in I} N_i \xrightarrow{\psi} \varinjlim_{i\in I} P_i$$

Veamos que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. Sea $m \in \varinjlim_{i\in I} M_i$ entonces $m = \mu_i(x_i)$ y así $\varphi(m) = \nu_i(\varphi_i(x_i))$, entonces $\psi(\nu_i(\varphi_i(x_i))) = \pi_i(\psi_i(\varphi_i(x_i))) = 0$. Para ver que $\mathrm{Ker}(\psi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ sea $n = \nu_i(y_i) \in \varinjlim_{i\in I} N_i$ tal que $\psi(n) = 0$, es decir, $\pi_i(\psi_i(y_i)) = 0$. Llamemos z_i a $\psi_i(y_i)$, como $\pi_i(z_i) = 0$ entonces existe $j \in I$ tal que $\pi_{ij}(z_i) = 0$. Recordemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} N_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\nu_{ij}"'] & P_i \arrow[d, "\pi_{ij}"] \\ N_j \arrow[r, "\psi_j"'] & P_j \end{tikzcd}$$

Sea $y_j = \nu_{ij}(y_i)$ por lo anterior y por el diagrama tenemos $\psi_j(y_j) = \pi_{ij}(z_i) = 0$. Por exactitud existe $x_j \in M_j$ tal que $\varphi_j(x_j) = y_j$. Concluimos que $\mu_j(x_j)$ quien vive en $\varinjlim_{i\in I} M_i$ es tal que $\varphi(\mu_j(x_j)) = n$. □

Sea N un A-módulo y M el límite directo del sistema $\{M_i, \mu_{ij}\}$ de A-módulos; sin necesidad de prueba $\{M_i \otimes N, \mu_{ij} \otimes Id\}$ es un sistema dirigido y como tal existe su límite directo al que llamaremos P. El i-ésimo morfismo asociado al límite directo M, $\mu_i : M_i \longrightarrow M$, induce al morfismo $\mu_i \otimes Id : M_i \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ y así, por la propiedad universal de P existe $\psi : P \longrightarrow M \otimes N$.

Proposición 59. *El morfismo ψ de las anteriores líneas es un isomorfismo.*

Demostración. Para ver que ψ es inyectivo, sea $\overline{x \otimes n} \in P$ tal que $\psi(\overline{x \otimes n}) = 0$, supongamos que $\pi_i(x \otimes n) = \overline{x \otimes n}$ donde $x \otimes n \in M_i \otimes N$ entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 0 = \psi(\overline{x \otimes n}) &= \psi \circ \pi_i(x \otimes n) \\ &= \mu_i \otimes Id(x \otimes n) \\ &= \mu_i(x) \otimes n. \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que ó $\mu_i(x) = ay$ con $a \in A$ y $y \in M$ tal que $an = 0$; ó, $n = az$ con $a \in A$ y $z \in N$ tal que $a\mu_i(x) = \mu_i(ax) = 0$, es decir, existe $j \in I$ cumpliendo $\mu_{ij}(ax) = 0$. En cualquiera de los dos casos resulta $\overline{x \otimes n} = 0$. Por lo tanto ψ es inyectiva.

Veamos que ψ es suprayectiva. Sea $\mu_i(x) \otimes n \in M \otimes N$, donde $x \in M_i$ entonces $\pi_i(x \otimes n)$ bajo ψ cae en $\mu_i(x) \otimes n$. Concluimos que ψ es isomorfismo. □

Lo que acabamos de hacer es mostrar que el límite directo y tensorizar conmutan, es decir:

$$\varinjlim (M_i \otimes N) \cong \left(\varinjlim M_i\right) \otimes N.$$

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de anillos indexada por un conjunto dirigido I, y para cada par $i \leq j$ en I sea $\alpha_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ un morfismo de anillos que satisface las condiciones $\alpha_{ii} = Id_{A_i}$ y de transitividad: $\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \circ \alpha_{ij}$. Considerando cada A_i como $\mathbb{Z}$-módulo tenemos un sistema dirigido al que podemos construir su límite directo $A = \varinjlim A_i$.

Proposición 60. *El $\mathbb{Z}$-módulo A es un anillo y los morfismos $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$ asociados al límite directo A son morfismos de anillos.*

Demostración. Sólo debemos definir el producto en A, para ello sean $\bar{a}, \bar{b} \in A$ y supongamos que $\alpha_i(a) = \bar{a}$ y $\alpha_j(b) = \bar{b}$ donde $a \in A_i$ y $b \in A_j$. Por ser I un conjunto dirigido existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$; definimos $\bar{a} \cdot \bar{b}$ como $\alpha_k\left(\alpha_{ik}(a) \cdot \alpha_{jk}(b)\right)$. Al primer vistazo no queda claro que la definición sea independiente de los índices i, j y k; veamos tan sólo que no depende de la elección de k pues para los otros índices el razonamiento es análogo. Sea $p \in I$ tal que $i \leq p$ y $j \leq p$ y a su vez, sea $q \in I$ tal que $k \leq q$ y $p \leq q$. Queremos probar que $\alpha_k\left(\alpha_{ik}(a_i) \cdot \alpha_{jk}(a_j)\right) = \alpha_p\left(\alpha_{ip}(a_i) \cdot \alpha_{jp}(a_j)\right)$, por la elección de los índices $\alpha_k = \alpha_q \circ \alpha_{kq}$ y $\alpha_p = \alpha_q \circ \alpha_{pq}$, entonces basta mostrar:

$$\alpha_q \circ \alpha_{kq}\left(\alpha_{ik}(a_i) \cdot \alpha_{jk}(a_j)\right) - \alpha_q \circ \alpha_{pq}\left(\alpha_{ip}(a_i) \cdot \alpha_{jp}(a_j)\right) \stackrel{?}{=} 0.$$

Asociando y usando que los morfismos α_{rs} son de anillos tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \alpha_q \circ \alpha_{kq}\left(\alpha_{ik}(a_i) \cdot \alpha_{jk}(a_j)\right) - \alpha_q \circ \alpha_{pq}\left(\alpha_{ip}(a_i) \cdot \alpha_{jp}(a_j)\right) &= \\ \alpha_q\left(\alpha_{iq}(a_i) \cdot \alpha_{jq}(a_j)\right) - \alpha_q\left(\alpha_{iq}(a_i) \cdot \alpha_{jq}(a_j)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto la definición del producto no depende del índice k; concluímos que A es un anillo y su estructura multiplicativa convierte en morfismos de anillos al familia $\{\alpha_i\}$. □

Al anillo A lo llamamos el límite directo del sistema $\{A_i, \alpha_{ij}\}$. Si $A = 0$ necesariamente algún $A_i = 0$ pues en caso contrario para todos los anillos A_i tendríamos $0 \neq 1$ y así la clase del 1 sería distinta de cero en A.

Proposición 61. *Sean* (A_i, α_{ij}) *un sistema dirigido de anillos y* η_i *el nilradical de* A_i. *Pruebe que* $\varinjlim \eta_i$ *es el nilradical de* $\varinjlim A_i = A$.

Demostración. Sea η el nilradical de A. Veamos que $\eta \subseteq \varinjlim \eta_i$, para ello sea $x \in \eta$ tal que $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$; supongamos que hay una $a_i \in A_i$ tal que $\alpha_i(a_i) = x$, entonces $\alpha_i(a_i^n) = 0$. Por lo anterior existe $j \in I$ tal que $\alpha_{ij}(a_i^n) = 0$ de donde $\alpha_{ij}(a_i) \in \eta_j$. Por lo tanto $\eta = \varinjlim \eta_i$.

Como nilpotentes bajo morfismos de anillos van en nilpotentes, tenemos $\varinjlim \eta_i = \eta$. □

Bibliografía

[AM69] Michael Francis Atiyah and Ian Grant MacDonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[Die74] Jean Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique, Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique*, volume 1. Presses Universitaires de France, 1974.

[Dow56] C. H. Dowker. *Lectures on sheaf theory.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1956. Notes by S. V. Adavi and N. Ramabhadran.

[EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes.* Number 197 in Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 2000.

[Gra] John W. Gray. Fragments of the history of sheaf theory. In *Applications of sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977)*, volume 753 of *Lecture Notes in Math.*

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Number 52 in Graduate exts in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1977.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory.* Cambridge University Press, 1989.

[Ser55] Jean-Pierre Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61(2):197–278, 1955.

Índice de Materias