

00324
22



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
DAVID MARTINEZ RAMIREZ



DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



2003

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas
UNAM a difundir en formato electrónico e imp.
contenido de mi trabajo receptor

NOMBRE: David Martínez
Ramírez

FECHA: 25 Marzo 03

FIRMA: [Signature]

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

SOBRE LA PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO.

realizado por **DAVID MARTINEZ RAMIREZ**

con número de cuenta 9758421-4 , quién cubrió los créditos de la carrera de **MATEMATICAS**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA *[Signature]*

Propietario

DRA. VERONICA MARTINEZ DE LA VEGA Y MANSILLA *[Signature]*

Propietario

M.en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORIEGA *[Signature]*

Suplente

DRA. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS *[Signature]*

Suplente

DR. RAUL ESCOBEDO CONDE. *[Signature]*

Consejo Departamental de **MATEMATICAS**

[Signature]
M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORIEGA

JURADO DECALIFICACION
L. 11
MATEMATICAS

Agradecimientos.

Quiero agradecer primero a mi director de tesis por aceptar dirigir esta tesis, por sus comentarios y correcciones, por su apoyo durante mi servicio social y por no haberme ahorcado aunque me lo merezca.

También al grupo de trabajo en topología de continuos por organizar los congresos en Puebla y haberme invitado. En particular a la escuela de verano de continuos del año pasado, donde el prof. Hagopian impartió un interesantísimo curso de Teoría del punto fijo, de donde obtuve una motivación para la tesis.

Agradezco mucho también a cada uno de mis sinodales primero por aceptar ser mis sinodales, y después por haber aceptado leer extremadamente rápido mi tesis, y firmar los votos aprobatorios. Para el Dr. Jose Antonio Gómez tengo un especial agradecimiento.

También quiero agradecer en especial al Dr. Guillermo Gómez por compartir los cursos de cálculo en que estuve como su ayudante, y por apoyarme en los tiempos en que necesitaba terminar esta tesis.

Gracias a la UAM Iztapalapa por el trabajo que me permitió sostenerme (sostener la tesis) durante un rato, y también por su apoyo académico, en particular a la profra. Gabriela Campero.

También quisiera hacer un pequeño homenaje en memoria de la Dra. Silvia de Neymet con quien tomé uno de los cursos sobre grupos topológicos más interesantes que se hayan presenciado.

Se me perdonará no incluir algo para la razón de mis desvelos, pero sería como numerar el conjunto de Cantor.

A todos los chavos y chavas que conozco les doy las gracias por las bromas macabras y una que otra chela.

Por último debo decir que esta Universidad me ha mostrado muchas más cosas que las que he pedido o imaginado.

Prólogo

En esta tesis se exponen de forma accesible algunos de los resultados más conocidos sobre la teoría topológica del punto fijo, de manera que constituye una especie de monografía sobre el tema.

El valor principal de la tesis estriba en explicar de forma más geométrica e intuitiva, ejemplos de espacios que tienen o no la propiedad del punto fijo. Así, en lugar de leer cosas como

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1}(\phi - \pi + 2\pi z), \phi - \pi + 2\pi z, z + \frac{z}{2} \right)$$

se explican con figuras e ideas más accesibles, los ejemplos de espacios y sus propiedades, conservando la formalidad matemática.

El nivel de conocimientos requerido para leer esta tesis es un curso básico de topología general. Existen aun teoremas muy importantes sobre la propiedad del punto fijo, como es el teorema de Lefschetz, que usa técnicas de topología algebraica, los cuales no se incluyeron por falta de tiempo.

En el capítulo 1 se da una pequeña reseña de la teoría básica, definiciones y algunos lemas que se usan a lo largo del trabajo. Esa parte es ampliamente conocida, por lo que se puede omitir si el lector está lo suficientemente iniciado en la matemática, y pasar directamente a la parte interesante que son los capítulos siguientes.

En el capítulo 2 se exponen varios ejemplos de espacios con la propiedad del punto fijo, entre los cuales destacan por el ingenio en su demostración, el teorema de Brouwer sobre la no-retractibilidad del disco en su frontera usando el lema de Sperner, los retratos absolutos, entre otros.

En el capítulo 3 están los contraejemplos, espacios que cumplen cierta propiedad, y que no tienen la propiedad del punto fijo. Por ejemplo, se muestra que hay un espacio X con la propiedad del punto fijo tal que al pegarle un disco a lo largo de un intervalo, el espacio resultante no tiene la propiedad del punto fijo, y así por el estilo existen contraejemplos con propiedades más interesantes.

Por último, se exponen varias preguntas abiertas. El autor estará agradecido con todo aquel que lea esta tesis.

Índice General

Dedicatorias	iii
Agradecimientos.	v
Prólogo	vii
1 Preliminares	1
1.1 Notación	1
1.2 Funciones continuas	1
1.3 Continuos	2
1.4 Teoría de Retractos	10
1.5 Topología Combinatoria	14
1.6 Combinatoria	18
2 Ejemplos	21
2.1 Teorema de Brouwer	21
2.2 Retractos	23
2.3 El cubo de Hilbert y los retracts absolutos	23
2.4 Dendroides y Continuos de Peano	25
2.5 Continuos encadenables y \mathcal{P} -similares	29
2.6 Continuos Aplanables	30
3 Contraejemplos	35
4 Preguntas	61
Bibliografía	63

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

c
1

Sobre la Propiedad del Punto Fijo

David Martínez Ramírez
Universidad Nacional Autónoma de México

19 de marzo de 2003

Dedicatorias

A mis padres.

A la mujer más noble.

1. INTRODUCCIÓN

MOD BERT
MENDO 11 AJIAT

1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025

Capítulo 1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Preliminares

1.1 Notación

La *frontera* de un subconjunto A de un espacio topológico se denota por ∂A .

El n -disco es el conjunto $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

La n -esfera es $\mathbb{S}^n = \partial\mathbb{D}^{n+1}$ (frontera en \mathbb{R}^{n+1}).

El *cubo de Hilbert* \mathcal{H} , se define como el espacio l^∞ , con la métrica

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x_i - y_i)}{2^i},$$

donde los números x_i y y_i , $i \geq 1$, son las coordenadas de los puntos x y y respectivamente.

El *diámetro* de un subconjunto A de un espacio métrico se define por $\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, donde d es la función distancia.

1.2 Funciones continuas

Punto fijo. Se dice que $x \in X$ es un *punto fijo* de una función $f : X \rightarrow X$ si $f(x) = x$. Si la función f no tiene puntos fijos, se dice que es *libre de puntos fijos*.

Propiedad del punto fijo. El espacio X tiene la *propiedad del punto fijo (p.p.f.)*, si cada función continua $f : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo. Sea \mathcal{C} una familia particular de funciones continuas. Se dice que X tiene la *propiedad del punto fijo para \mathcal{C}* si cada función $f \in \mathcal{C}$ tiene un punto fijo. Usualmente se considera \mathcal{C} como la familia de homeomorfismos de X en X , la familia de deformaciones, etc., con lo que se dice que X tiene la propiedad del punto fijo para homeomorfismos, deformaciones, etc. Es interesante notar el siguiente

Lema 1.1 Si f es una función continua sin puntos fijos de un espacio métrico compacto X en sí mismo, entonces existe un número $\epsilon > 0$ tal que $\rho(x, f(x)) > \epsilon$, para

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

todo $x \in X$, donde ρ denota la distancia en X . El número ϵ depende de f pero no de x .

Demostración. Suponga lo contrario, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n \in X$ tal que $\rho(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Por compacidad, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim x_n = a$, para alguna $a \in X$. Entonces $\lim f(x_n) = a$, dado que la distancia entre x_n y $f(x_n)$ tiende a cero. Por continuidad, $a = f(a)$, es decir, a es un punto fijo. Esta contradicción termina la prueba.

ϵ -función. Sean X y Y espacios métricos. Una ϵ -función es una función continua $f: X \rightarrow Y$ tal que $\text{diam}(f^{-1}(y)) \leq \epsilon$ para cada $y \in f(X)$.

1.3 Continuos

Continuo. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

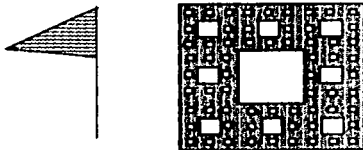


Figura 1.1 Ejemplos de continuos

Continuo. Un *arco* es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Lema 1.2 Si el espacio métrico X tiene la p.p.f. entonces X es conexo.

Demostración. Si X no es conexo, sea $A \cup B$ una separación del espacio en abiertos ajenos no vacíos. Elegimos $a \in A$ y $b \in B$; definamos la función $f: X \rightarrow X$ como $f(x) = b$, si $x \in A$ y $f(x) = a$, si $x \in B$. Esta función es continua y no tiene puntos fijos, esta contradicción prueba el lema.

Continuo indescomponible. Se dice que un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B tales que $A \cup B = X$. En otro caso el continuo X es *indescomponible*.

Continuo unicoherente. Un continuo X es *unicoherente* si siempre que $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X , se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Propiedad hereditaria. Se dice que una propiedad P del continuo X es *hereditaria* si cualquier subcontinuo Y de X posee la propiedad P . Por ejemplo, un continuo es *hereditariamente indescomponible* si cada subcontinuo es *indescomponible*, *hereditariamente unicoherente* si cada subcontinuo es unicoherente, etc.

Cubierta. A una familia de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ se le llama *cubierta* del conjunto X si $X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$. Se dice que la cubierta es *abierta*, si cada uno de sus elementos es un abierto. Cuando X es métrico se define el *diámetro de la cubierta* como $\text{diám}(\mathcal{A}) = \sup\{\text{diám}(A_\alpha) : \alpha \in \mathcal{I}\}$.

Una cubierta $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ es un *refinamiento* de la cubierta $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ cuando para cada $\alpha \in \mathcal{J}$ existe un elemento $\alpha' \in \mathcal{I}$ tal que $B_\alpha \subset A_{\alpha'}$. Se dice que \mathcal{B} es un *refinamiento fuerte* si la cerradura de cada elemento en \mathcal{B} está contenido en algún elemento de \mathcal{A} . Se dice que \mathcal{B} es un *refinamiento estrella*, cuando para cada punto $p \in X$, existe un elemento de $\alpha \in \mathcal{I}$ tal que la estrella $st(p)$ de p está contenida en A_α , donde

$$st(p) = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B} \text{ y } p \in B\}$$

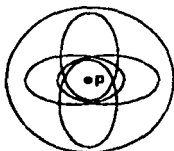


Figura 1.2 Refinamiento estrella

Los siguientes lemas son básicos

Lema 1.3 Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos encajados, es decir $X_{i+1} \subset X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

Si U es un subconjunto abierto de X_1 tal que $X \subset U$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$ para toda $i \geq N$. En particular, si $X_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $X \neq \emptyset$.

Demostración. Ya que U es abierto en X_1 , $X_1 - U$ es compacto. Además $X_1 - U \subset X_1 - X = X_1 - \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X_1 - X_i)$. Como cada $X_1 - X_i$ es abierto en X_1 , la familia $\{X_1 - X_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $X_1 - U$. Por compacidad existen números $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ tales que $X_1 - U \subset (X_1 - X_{i_1}) \cup (X_1 - X_{i_2}) \cup \dots \cup (X_1 - X_{i_n}) = X_1 - (X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_n}) = X_1 - X_{i_n}$. Por lo tanto $X_{i_n} \subset U$, y es posible elegir $N = i_n$. Esto prueba la primera parte de la proposición. El hecho de que $X \neq \emptyset$, si cada $X_i \neq \emptyset$ sigue de la primera parte suponiendo que $X = \emptyset$ y tomando $U = \emptyset$ lo que nos daría $X_N = \emptyset$. Esto completa la prueba.

Lema 1.4 Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos encajados, y

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

entonces X es un continuo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Demostración. Por el lema anterior, se tiene que X es un espacio métrico compacto y no vacío. Para ver que X es conexo, supongamos que no lo es. Sea $X = A \cup B$ una separación de X donde A y B son cerrados ajenos y no vacíos. Como X_1 es un espacio normal, existen abiertos ajenos V y W de X_1 tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Por el lema anterior, $X_n \subset U$ para alguna n , entonces

$$X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$$

Como $A \cup B = X \subset X_n$ y como $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, observamos que $X_n \cap V$ y $X_n \cap W$ son no vacíos. Se sigue entonces que X_n no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es conexo.

Cadena. A una cubierta finita de subconjuntos $\{U_i\}_{i=1}^n$ de un continuo X se le llama *cadena* cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Cadena Simple. A una cubierta finita de conjuntos $\{U_i\}_{i=1}^n$ se le llama *cadena simple* cuando $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Tanto a los elementos de una cadena como de una cadena simple se les llama *eslabones*.

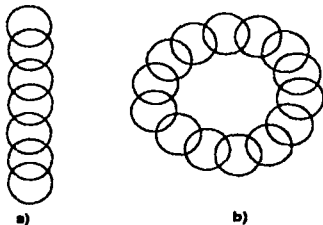


Figura 1.3 Cadena y Cadena simple.

Continuo Encadenable. Se dice que el continuo X es *encadenable*, si dado cualquier número $\epsilon > 0$, es posible encontrar una cadena con eslabones son abiertos de diámetro menor que ϵ .

Ejemplos de Continuos encadenables. Sean p, q y r puntos distintos en el plano. Se dice que una cadena C con eslabones $\{D_1, \dots, D_m\}$ empieza en p , pasa por q y acaba en r si $p \in D_1, q \in D_k$ y $r \in D_m$ donde $1 < k < m$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n una cadena cuyos eslabones son discos planos (cerrados) de diámetro $\frac{1}{2^n}$. Si tales cadenas satisfacen

1. C_{3n} empieza en a_0 , pasa por a_1 y acaba en a_2 , C_{3n+1} empieza en a_1 , pasa por a_0 y acaba en a_2 , C_{3n+2} empieza en a_1 , pasa por a_2 y acaba en a_0 .
2. $\bigcup_{D \in C_{k+1}} D \subset \bigcup_{D \in C_k} D$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Entonces el espacio $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{D \in C_n} D)$ es una intersección encajada de continuos, por lo tanto es un continuo. Este es un ejemplo sencillo de un continuo encadenable.

son conjuntos conexos y abiertos del plano, de forma que \mathcal{U}_{i+1} refina fuertemente a \mathcal{U}_i , \mathcal{U}_{i+1} está *torcida* en \mathcal{U}_i y cada eslabón de \mathcal{U}_i tiene diámetro menor que $\frac{1}{i}$, para cada $i \geq 1$.

Entonces al continuo $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathcal{U}_i)$ se le conoce como el *pseudo-arco*. Nótese que este continuo es encadenable por definición. También tiene otras propiedades, como ser un continuo hereditariamente indescomponible aplanable y homogéneo [Bi2].

Conexidad local. Un continuo X es *localmente conexo en el punto p* si dada cualquier vecindad U de p existe un abierto conexo C tal que $x \in C \subset U$. Cuando X es localmente conexo en cada punto, se dice simplemente que X es un *continuo localmente conexo*.

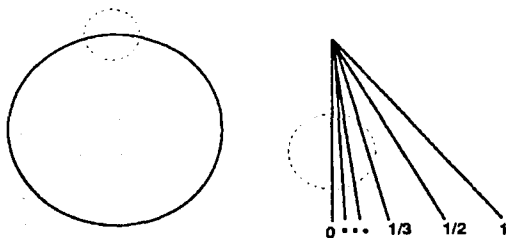


Figura 1.6 Conexidad local y no-conexidad local.

Conexidad en pequeño. Sea X un continuo. Se dice que X es *conexo en pequeño en el punto $p \in X$* si dada cualquier vecindad U de p , la componente conexa de p en el abierto U , contiene a p en su interior. Cuando X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, se dice que X es *conexo en pequeño*.

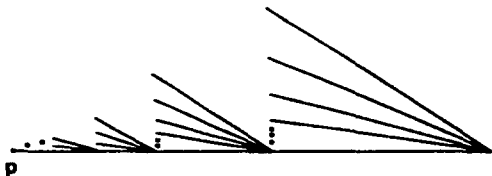


Figura 1.7 Continuo conexo en pequeño pero no localmente conexo en p .

Propiedad S. Un continuo X tiene la *propiedad S*, si para cada $\epsilon > 0$, X es la unión de una colección finita de conexos abiertos $\{C_i\}_{i=1}^n$ de diámetro menor que ϵ . Una caracterización elemental de los continuos localmente conexos es la siguiente.

Teorema 1.5 *Un continuo es localmente conexo si y sólo si tiene la propiedad S.*

Demostración. Supongamos primero que el continuo X es localmente conexo. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ una cubierta abierta del continuo X de diámetro menor que ϵ (por ejemplo se puede tomar la colección de todas las bolas de radio $\frac{\epsilon}{3}$). Para cada punto $x \in X$, existe un $\alpha \in J$ y un conexo abierto C_x tales que $x \in C_x \subset U_\alpha$. Entonces $\{C_x : x \in X\}$ es una colección de abiertos conexos que cubren a X . Como X es compacto, tal cubierta tiene una subcubierta finita $\{C_{x_1}, C_{x_2}, \dots, C_{x_n}\}$. Pero cada C_{x_i} tiene diámetro menor que ϵ , así que X tiene la propiedad S .

Ahora supongamos que X tiene la propiedad S . Tomemos un punto p y cualquier vecindad U de p . Sea $\delta > 0$ un número tal que la bola B de centro en p y radio δ está contenida totalmente en U . Ahora sea $\epsilon = \frac{\delta}{4}$. Por hipótesis X es la unión de una colección finita de abiertos conexos C_1, C_2, \dots, C_n de diámetro menor que ϵ . Supongamos sin pérdida de generalidad que $p \in C_1$. Entonces $C_1 \subset B \subset U$, dado que si $x \in C_1 - B$ entonces la distancia $d(x, p)$ entre x y p es al menos 4ϵ , lo que contradice el hecho de que el diámetro de C_1 es menor que ϵ . Por lo tanto C_1 es un abierto conexo contenido en U . Esto demuestra que X es localmente conexo.

Continuo de Peano. A todo espacio que es la imagen continua del intervalo $[0, 1]$, se le llama *continuo de Peano*.

Lema 1.6 Si $f : X \rightarrow Y$ es una identificación suprayectiva, donde X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.

Demostración. Sea U un abierto en Y . Basta probar que las componentes conexas de U son abiertas ([Du1]). Sea K una componente de U . Por la continuidad de f , $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Sea $x \in f^{-1}(K) \subset f^{-1}(U)$. Como X es localmente conexo, la componente conexa C_x de x en $f^{-1}(U)$ es un abierto conexo. Entonces $f(C_x)$ es un conexo en U que contiene a $f(x) \in K$, por lo que $f(C_x) \subset K$. Entonces $x \in C_x \subset f^{-1}(K)$. Esto prueba que para cada punto $x \in f^{-1}(K)$, existe un abierto C_x tal que $x \in C_x \subset f^{-1}(K)$. Es decir $f^{-1}(K)$ es abierto. Como la topología de Y es la de identificación, se tiene que K es abierto. Por lo tanto Y es localmente conexo como se quería probar. Si el lector gusta recordar la definición de identificación puede referirse a [Du1, pp.120].

Lema 1.7 Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva, entonces f es una identificación suprayectiva.

Demostración. Basta probar que f es cerrada y suprayectiva, dado que toda función continua cerrada y suprayectiva es una identificación [pp. 120]([Du1]). Si $C \in X$ es un cerrado, como X es compacto, C es compacto, y la imagen continua de un compacto es un compacto, así que $f(C)$ es compacto. Pero Y es Hausdorff con lo que se tiene que todo compacto es cerrado, entonces $f(C)$ es un cerrado en Y . Por lo tanto f es una función cerrada y suprayectiva, con lo que el lema queda probado. Como consecuencia inmediata, se tiene que la imagen continua y métrica de un continuo localmente conexo es un continuo localmente conexo. Como el intervalo $[0, 1]$ es un continuo localmente conexo se tiene que todo continuo de Peano es localmente conexo. Inversamente se caracteriza a todos los continuos de Peano en términos de

la conexidad local. El siguiente es un resultado importantísimo, su demostración se puede consultar en [En1, pp. 283].

Teorema 1.8 (Hanh-Mazurkiewics) *Todo continuo localmente conexo es un continuo de Peano.*

Además, un continuo localmente conexo no solamente es de Peano, sino arco-conexo, lo que significa que cada par de puntos se pueden unir por un arco.

Teorema 1.9 *Todo continuo de Peano es arco-conexo.*

La demostración es un poco larga, y no se incluirá en el texto, pero se puede consultar en [Wh1, pp.26]. Se usa el teorema de reducción de Brouwer.

Punto de Separación y Punto Final. Sea X un continuo. Si x es un punto tal que $X - \{x\}$ no es conexo, entonces se dice que x es un *punto de separación* de X . Cuando el punto de separación p deja a los puntos a y b en distintas componentes conexas en $X - \{p\}$, se dice que p *separa a los puntos a y b en X* . El punto p de un continuo de Peano X es un *punto final* de X , si y sólo si no hay un arco que tenga a p como uno de sus puntos intermedios.

Elemento cíclico. Siguiendo la notación en [Wh2], sea X un continuo de Peano. Se dice que X es *cíclicamente conexo* si para cada dos puntos, existe una curva cerrada simple (*ciclo*) que los contiene. Un subcontinuo cíclicamente conexo C de X es un *elemento cíclico maximal* si y sólo si C no es un subconjunto propio de cualquier otro subcontinuo cíclicamente conexo de X .

Un subcontinuo E de X será llamado *elemento cíclico* de X cuando E cae en una de las siguientes categorías.

- I. E es un elemento cíclico maximal de X .
- II. E consta sólo de un punto de separación de X .
- III. E consta sólo de un punto final de X .

Nos referiremos a los elementos cíclicos, como pertenecientes a las clases (I), (II), y (III). Citaremos resultados básicos acerca de los elementos cíclicos de un continuo de Peano, que se obtuvieron de [Wh2].

1. Si E_1 y E_2 son dos elementos cíclicos distintos, entonces $E_1 \cap E_2$ es vacío o punto de separación.
2. Si A_I , A_{II} y A_{III} denotan a la colección de todos los elementos en las clases (I), (II), y (III), respectivamente, entonces $A_I \cap A_{II}$ es numerable, y $A_I \cap A_{III} = A_{II} \cap A_{III} = \emptyset$.
3. A_I es numerable.

Un punto p se llamará *punto interior de una curva cíclica maximal* C , si p no es un punto de separación de X . La notación $I(C)$ se usará para designar el conjunto de todos los puntos internos de una curva cíclica maximal C . Es fácil ver que no hay dos curvas cíclicas maximales distintas que compartan un punto interior.

Por un continuo *acíclico*, se entenderá un continuo que no contiene curvas cerradas simples.

Espacio $X \vee Y$. Sean X y Y espacios ajenos. Identificando los puntos escogidos $x \in X$ y $y \in Y$, se obtiene el espacio $X \vee Y$ (nótese que $X \vee Y$ depende de los puntos escogidos).

Dendritas. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo y acíclico.

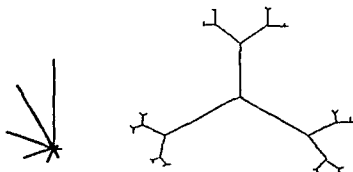


Figura 1.8 dendritas

Dendroide. Un *dendroide* es un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente. Una forma de imaginarse a los dendroides es considerarlos árboles con una infinidad de aristas.

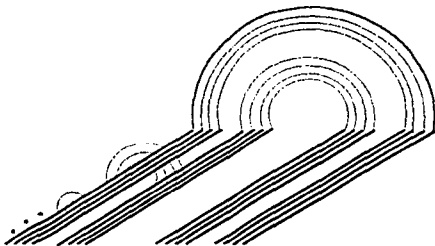


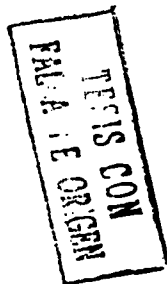
Figura 1.9 dendroide

Un teorema conocido que relaciona las dendritas con dendroides es el siguiente.

Teorema 1.10 *Una dendrita es un dendroide localmente conexo.*

La demostración se puede consultar en [To1, pp.33].

Espacio Cubriente Sea B un espacio topológico, al cual denominaremos como base. Sea E otro espacio, y sea $\pi : E \rightarrow B$ una función continua de forma que para cada



$b \in B$ y cada $p \in f^{-1}(b) \subset E$, hay vecindades U de b y V de p que son homeomorfas a través de π , es decir $\pi(V) = U$ y $\pi|_V$ es un homeomorfismo entre U y V . Entonces se dice que el espacio E es un *espacio cubriente* de B bajo la función proyección π .

1.4 Teoría de Retractos

r -función. Borsuk ha definido un tipo especial de funciones, las llamadas *r -funciones*. A una función continua $f: X \rightarrow Y$ se le llama *r -función* si existe una función continua $g: Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g: Y \rightarrow Y$ es la identidad [Bo1].

r -invariante. Una propiedad que se preserva bajo *r -funciones* se le llama *r -invariante*. Como ejemplo de propiedades *r -invariantes* tenemos la conexidad local, la compacidad local, y la arco-conexidad local y como veremos la propiedad del punto fijo también es un *r -invariante*. (las demostraciones de estos hechos se pueden ver en [Bo1].)

Retracto. Sea X un espacio, $A \subset X$. Una función continua $f: X \rightarrow A$ que fija cada punto de A , se llama *retracción*. En tal caso, se dice que A es *retracto* de X . Cabe señalar que una retracción es un tipo especial de *r -función*, dado que la identidad es su inversa derecha.

Espacios $AR(\mathcal{M})$, y $ANR(\mathcal{M})$. Considere alguna clase de espacios \mathcal{M} . A un espacio $X \in \mathcal{M}$ se le llamará *retracto absoluto para la clase \mathcal{M}* abreviado $AR(\mathcal{M})$ por sus siglas en inglés, si para cada homeomorfismo h que manda X en un subespacio cerrado de $Y \in \mathcal{M}$, el conjunto $h(X)$ es un retracto de Y . Análogamente X es un *retracto absoluto de vecindades para la clase \mathcal{M}* , ($ANR(\mathcal{M})$), si para cada homeomorfismo h que manda X en un subespacio cerrado de $Y \in \mathcal{M}$, el conjunto $h(X)$ es un retracto de alguna de sus vecindades en Y .

Considerando \mathcal{M} como la clase de los espacios métricos compactos, es posible definir un *retracto absoluto*, (AR) como un $AR(\mathcal{M})$, y un *retracto absoluto de vecindades* como un $ANR(\mathcal{M})$. Tiene lugar el siguiente resultado.

Teorema 1.11 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces X es un AR (ANR) si y sólo si, para todo espacio métrico compacto Y y cualquier función continua $f: A \subset Y \rightarrow X$, donde A es un subespacio cerrado de Y , f admite una extensión continua $\bar{f}: Y \rightarrow X$ ($\bar{f}: U \subset Y \rightarrow X$ respectivamente, para algún abierto U de Y).*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que X es un espacio AR , sea A un subespacio cerrado del espacio topológico Y y sea $f: A \rightarrow X$ una función continua. Tómese el espacio de adjunción $Z = Y \cup_f X$ definido como la unión ajena $Y \sqcup X$ con la identificación $x \sim f(x)$, para cada $x \in A$. X resulta un subespacio cerrado de Z , dado que $Z - X \cong Y - A$. Por definición de AR , existe una retracción $r: Z \rightarrow X$. Entonces la función $\bar{f}: Y \rightarrow X$ definida por $\bar{f}(y) = r(y)$ si $y \in Y - A$, y $\bar{f}(y) = f(y)$ si $y \in A$, es continua y coincide con f en A . Por lo tanto es la extensión de f requerida.

(\Leftarrow) Ahora, supongamos que para cada función continua $f: A \rightarrow X$ donde A es un subespacio cerrado de un espacio métrico compacto Y , es posible extender la función

a todo Y . En particular, si $h : X \rightarrow h(X) \subset Y$ es un homeomorfismo entre X y un subconjunto cerrado de Y , entonces existe una extensión continua \bar{h}^{-1} a la función $h^{-1} : h(X) \rightarrow X$. La función $h \circ \bar{h}^{-1} : Y \rightarrow h(X)$, es una retracción de Y en $h(X)$. Esto prueba que X es un espacio AR. La equivalencia está probada.

Teorema 1.12 (Tietze) *El intervalo I es un retracto absoluto.*

Demostración. El resultado es sólo una forma equivalente del conocido teorema de Tietze. Si A es un subconjunto cerrado de un espacio métrico X , toda función continua $f : A \rightarrow I$ se puede extender a una función continua $\bar{f} : X \rightarrow I$. [Ma1, pp.272]

Teorema 1.13 *Si $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ es una colección de espacios AR, entonces el espacio producto $Y = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es un espacio AR.*

Demostración. Basta probar que si X es un espacio métrico compacto y A un subespacio cerrado de X , entonces cualquier función continua $f : A \rightarrow Y$ se puede extender a una función continua $\bar{f} : X \rightarrow Y$. Como es sabido, para definir una función de un espacio a un producto, basta definirla coordenada a coordenada. De esta forma, como cada espacio X_α es un AR, la función $\pi_\alpha \circ f : A \rightarrow X_\alpha$, donde $\pi_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$ es la α -proyección; se puede extender a una función continua $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$. Definiendo $\bar{f} : X \rightarrow Y$ como

$$\bar{f}(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

Claramente \bar{f} coincide con f en A , es decir, es una extensión de f . Por lo tanto el teorema queda probado.

Como consecuencia inmediata, se tiene que tanto I^n para toda $n \in \mathbb{N}$, como I^{\aleph_0} son espacios AR.

De hecho, debido a los siguientes resultados es posible caracterizar a los espacios AR para la clase de los espacios métricos compactos.

Lema 1.14 *Todo espacio métrico separable es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea (X, ρ) un espacio separable con la métrica ρ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{diám}(X) \leq 1$. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un conjunto denso numerable. Definimos la función $f : X \rightarrow I^{\aleph_0}$ como sigue:

$$f(x) = \{\rho(x, a_1), \rho(x, a_2), \rho(x, a_3), \dots\}$$

Esta función es continua porque cada función coordenada es continua. Para ver que f es un homeomorfismo en su imagen basta probar que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X tales que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(p)$ para cierto $p \in X$ entonces x_n converge a p . (Con lo que se prueba que f es inyectiva y que f^{-1} es continua.) Sean

$\epsilon > 0$ un número real y a_i un punto de A tal que $\rho(p, a_i) < \frac{\epsilon}{3}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p)$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i(f(x_n)) = \pi_i(f(p))$, donde $\pi_i : I^{N_0} \rightarrow I$ es la i -ésima proyección, y dado que las proyecciones son continuas, para cada i se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a_i) = \rho(p, a_i)$$

De donde se deduce que existe un índice k tal que $\rho(x_n, a_i) \leq \rho(p, a_i) + \frac{\epsilon}{3}$ para toda $n \geq k$. Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\rho(x_n, p) \leq \rho(x_n, a_i) + \rho(a_i, p) \leq 2\rho(a_i, p) + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon,$$

Para toda $n \geq k$. Esto prueba que $\lim x_n = p$ como se quería demostrar. Como consecuencia tenemos el siguiente.

Teorema 1.15 *Todo espacio métrico compacto se puede encajar como un subespacio cerrado del cubo de Hilbert.*

Demostración. En particular un métrico compacto es un espacio métrico separable. Sea $h : X \rightarrow h(X)$ un homeomorfismo de X en un subespacio $h(X)$ del cubo de Hilbert. Como X es compacto, $h(X)$ también, entonces $h(X)$ es un subespacio compacto de un espacio métrico, por lo tanto es cerrado. Esto prueba el resultado.

Teorema 1.16 *Todo AR es un retracto del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea X un AR. En particular X es un espacio métrico compacto, entonces se puede encajar en el cubo de Hilbert como subespacio cerrado. Por definición de espacio AR, X es retracto del cubo de Hilbert.

En efecto, esto constituye una caracterización de los espacios AR.

Teorema 1.17 *Un espacio es AR si y sólo si es un retracto del cubo de Hilbert.*

Demostración. En vista del teorema anterior basta probar que todo retracto del cubo de Hilbert es un AR. Sea A un retracto del cubo de Hilbert. Sea X un espacio métrico compacto. Sea $h : A \rightarrow h(A) \subset X$ un homeomorfismo de A en un subespacio cerrado de X . Sea $h' : X \rightarrow h'(X) \subset I^{N_0}$ un encaje de X en un subespacio cerrado del cubo de Hilbert. Esto es posible gracias al Teorema 1.15. Sea $r : I^{N_0} \rightarrow h'(h(A))$ una retracción. Entonces $r|_{h'(X)} : h'(X) \rightarrow h'(h(A))$ es una retracción de $h'(X)$ en $h'(A)$. Por lo tanto A es un retracto de cualquier espacio donde se pueda encajar como subespacio cerrado, es decir A es un retracto absoluto.

Se tiene entonces:

Teorema 1.18 *Un retracto de un espacio AR es un espacio AR.*

Demostración. Si X es un AR, existe una retracción $r_1 : I^{\aleph_0} \rightarrow X$. Si $r_2 : X \rightarrow A$ es una retracción, entonces $r_2 \circ r_1 : I^{\aleph_0} \rightarrow A$ es una retracción del cubo de Hilbert en A . Por lo tanto A es un espacio AR.

Una forma de construir espacios AR es uniendo subespacios que también son espacios AR.

Teorema 1.19 Si X y Y son espacios AR tales que $X \cap Y$ es un AR, entonces $X \cup Y$ es un AR.

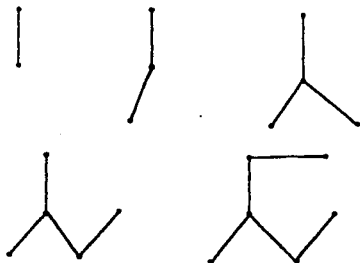


Figura 1.10 Construcción de espacios AR.

Demostración. Supongamos que $X \cup Y$ está encajado como subespacio cerrado de Z , el cual es un espacio métrico compacto. Sean

$$Z_0 = \{z \in Z : \rho(z, X) = \rho(z, Y)\}$$

$$Z_1 = \{z \in Z : \rho(z, X) < \rho(z, Y)\}$$

$$Z_2 = \{z \in Z : \rho(z, X) > \rho(z, Y)\}$$

Es claro que $Z = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$. También $X \cap Y \subset Z_0$ es un subespacio cerrado de Z_0 , y como es AR, existe una retracción $r : Z_0 \rightarrow X \cap Y$. También cada conjunto $X \cup Z_0$ y $Y \cup Z_0$ es cerrado en $Z_1 \cup Z_0$ y $Z_2 \cup Z_0$ respectivamente. Por lo tanto la función $f_1 : X \cup Z_0 \rightarrow X$ dada por $f_1(x) = x$, si $x \in X$, y $f_1(x) = r(x)$, si $x \in Z_0$ se puede extender a una función $f : Z_1 \cup Z_0 \rightarrow X$, la cual es una retracción. Análogamente, es posible encontrar una retracción $g : Z_2 \cup Z_0 \rightarrow Y$ que extiende a r . Ambas retracciones coinciden con r en Z_0 . Por lo tanto la función $h : Z \rightarrow X \cup Y$ dada por $h(z) = f(z)$, si $z \in Z_1 \cup Z_0$, y $h(z) = g(z)$, si $z \in Z_2 \cup Z_0$ es una retracción de Z en $X \cup Y$, como se quería demostrar.

Como ejemplos importantes de espacios AR, se tienen:

Teorema 1.20 (Borsuk) Las dendritas son espacios AR

Demostración. Por su extensión, la demostración original [Bo2] no se expondrá aquí, simplemente se delineará el argumento usado.

En [Bo2, pp.133] primero se prueba que toda dendrita se puede encajar en el plano, así que se supone que $X \subset \mathbb{R}^2$. Se definen discos poligonales D_n , con vértices en X , tales que $X \subset D_n$, $d(y, X) \leq \frac{1}{n}$ para todo $y \in D_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se definen también retracciones $r_n : D \rightarrow D_n$ y se usa la conexidad local para demostrar que las longitudes de los lados tienden a cero. Esto implica que la sucesión de retracciones r_n converge uniformemente a una retracción $r : D \rightarrow X$. Entonces X es un retracto de un 2-disco. Un 2-disco es homeomorfo a I^2 y todo retracto de un espacio AR es un AR . Por lo tanto X es un AR .

1.5 Topología Combinatoria

n -simplex. Sean $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ vectores afinmente independientes en \mathbb{R}^m (esto es, los vectores $\{v_i - v_0\}_{i=1}^n$ son linealmente independientes). El n -simplex con vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ es la envolvente convexa del conjunto de vértices. Usualmente se denota con $\Delta(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$. Es decir

$$\Delta(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = \{\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para cada } i\}$$

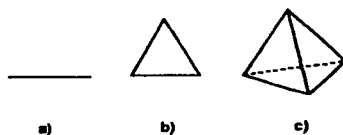


Figura 1.11 1-simplex, 2-simplex, 3-simplex

Cada punto $p = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ del n -simplex se puede representar de forma única como $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Los números λ_i , con $i \leq n$ se denominan *coordenadas baricéntricas* del punto p . El punto cuyas coordenadas baricéntricas son todas iguales ($\lambda_i = \frac{1}{n+1}$) se denomina el *baricentro*. Dado cualquier subconjunto de vértices $\{v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$, al simplex generado por tales vértices, $\Delta(v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ se le conoce como *lado k -dimensional* ó *k -lado* del simplex S .

Claramente, el simplex S contiene todos sus k -lados. Los vértices son los 0-lados. A los $(n-1)$ -lados se les conoce como *caras*, y a los 1-lados como *aristas*. Convendremos además en que el (-1) -lado es el conjunto vacío, y es lado de cualquier simplex. De la definición es claro que el n -simplex es homeomorfo al n -disco y que la frontera del n -simplex en \mathbb{R}^m es la unión de sus caras.

Subdivisión Baricéntrica. Considérese un n -simplex Δ . Sea V el conjunto de vértices de Δ , junto con los baricentros de cada k -lado de Δ . Un k -simplex con

vértices v_1, v_2, \dots, v_k de V forma parte de la *subdivisión baricéntrica* B de Δ , si hay un k -lado Δ_k de Δ , de forma que v_1 es un vértice de Δ , v_2 es el baricentro de un 1-lado de Δ_1 que tiene a v_1 como uno de sus vértices, \dots , v_i es el baricentro de un i -lado de Δ_k que contiene al conjunto de los vértices $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ en uno de sus $i-1$ lados. Entonces el conjunto de simplices de la subdivisión baricéntrica forma una partición de Δ en pequeños k -simplices.

Complejo Simplicial. Una familia finita \mathcal{K} de simplices en \mathbb{R}^n se denomina *complejo simplicial* o simplemente *complejo* si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) La familia \mathcal{K} contiene todos los lados de cada simplex en \mathcal{K} .
- ii) Cuando un par de simplices en \mathcal{K} se intersectan, lo hacen en todo un lado.

La *dimensión* del complejo \mathcal{K} es la dimensión más grande de los simplices que lo conforman. El ejemplo más común de complejo simplicial es el de la familia de *lados* de un simplex Δ , denotado por \mathcal{K}_Δ . Otro ejemplo es una *gráfica*. Una *gráfica* es un complejo simplicial de dimensión no mayor a 1.

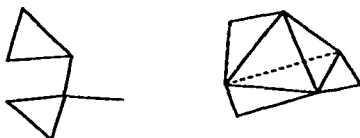


Figura 1.12 complejos

A la unión de los simplices en un complejo dado se le llama la *realización geométrica* del complejo y se le denota por $|\mathcal{K}|$.

Subdivisión Simplicial. Sean K' y K complejos simpliciales. Decimos que el complejo simplicial K' es una *subdivisión simplicial* del complejo K si

1. $|K'| = |K|$
2. para cualquier simplex $\Delta' \in K'$, existe un simplex $\Delta \in K$ tal que $\Delta' \in \Delta$.

Nótese en particular que una *subdivisión baricéntrica* es realmente una *subdivisión simplicial*.

Función Simplicial. Sean \mathcal{K} y \mathcal{L} complejos simpliciales cuyos conjuntos de vértices son \mathcal{K}^0 y \mathcal{L}^0 respectivamente, donde $\mathcal{K} = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$. A una correspondencia $\phi^0: \mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{L}^0$ se le llama *función simplicial* de los vértices, si para cada subconjunto $\{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$ que determina a un simplex $\Delta(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ en \mathcal{K} , los vértices $\{\phi^0(a_{i_0}), \phi^0(a_{i_1}), \dots, \phi^0(a_{i_n})\}$ determinan un simplex $\Delta(\phi^0(a_{i_0}), \phi^0(a_{i_1}), \dots, \phi^0(a_{i_n}))$ en \mathcal{L} . Se sigue entonces que cualquier función simplicial de los vértices $\phi^0: \mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{L}^0$ se extiende únicamente a una función $\phi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ definida por la fórmula

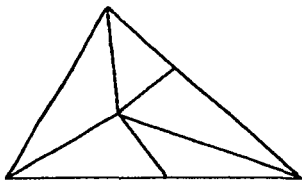


Figura 1.13 subdivisión simplicial

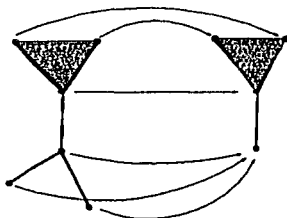


Figura 1.14 Función simplicial

$\phi(\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)) = \Delta(\phi^0(a_0), \phi^0(a_1), \dots, \phi^0(a_n))$. Las funciones de este tipo se llaman *simpliciales*. Si una función es simplicial, entonces $\dim \phi(\Delta) \leq \dim \Delta$ para cualquier $\Delta \in \mathcal{K}$.

Poliedros. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial. Cualquier subespacio X de \mathbb{R}^n homeomorfo a $|\mathcal{K}|$ se denomina *poliedro*. Se dice entonces que el par $T = (\mathcal{K}, \tau)$ es una *triangulación* del poliedro X , o que el espacio X es *triangulable*, donde \mathcal{K} es un complejo y $\tau : \mathcal{K} \rightarrow X$ un homeomorfismo.

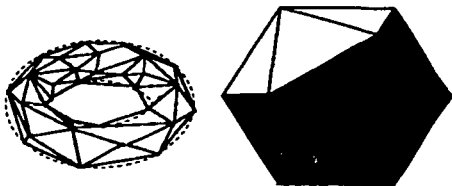


Figura 1.15 Poliedros

Sea K_1 la subdivisión baricéntrica del complejo K . Existe un homeomorfismo $\tau_1 : |K_1| \rightarrow |K|$ el cual se define de la siguiente forma. Sea $v(\sigma)$ un vértice de K_1 donde

$\sigma = \Delta\{v_0, \dots, v_p\} \in K$. Entonces

$$\tau_1(v(\sigma)) = \sum_{j=0}^p \frac{1}{p+1} v_j$$

el cual se extiende linealmente en cada simplex σ de K . Una iteración de tales homeomorfismos

$$|K_r| \xrightarrow{\tau_1} |K_{r-1}| \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_1} |K_1| \xrightarrow{\tau_1} |K|$$

Produce el r -homeomorfismo baricéntrico $\tau_r : |K_r| \rightarrow |K|$. Si $T = (K, \tau)$ es una triangulación del poliedro X , a la triangulación $T_r = (K_r, \tau_r)$ se llama la r -triangulación del poliedro X . Se tiene

Lema 1.21 *Dado un espacio triangulado (X, T) y $\epsilon > 0$, existe un entero r tal que $\text{diám}(T_r) < \epsilon$.*

Aproximación Simplicial. Una función simplicial $\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ es una aproximación simplicial de la función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ si $f(st(a)) \subset st(\phi(a))$ para cada vértice a del complejo \mathcal{K} . Aquí $st(a)$ denota a la *estrella* del vértice a , es decir, la unión de todos los simplices $\Delta \in \mathcal{K}$ que contienen a a como vértice. El siguiente resultado asegura que cualquier función continua entre espacios triangulables se puede aproximar por medio de funciones simpliciales.

Teorema 1.22 (De la aproximación simplicial). *Para cualquier función continua $f : X \rightarrow Y$ entre poliedros y cualquier número real $\epsilon > 0$, existen triangulaciones \mathcal{K} y \mathcal{L} de los poliedros X y Y , respectivamente, y una aproximación simplicial $\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ de f tal que $\rho(f(x), \phi(x)) \leq \epsilon$ para cada punto.*

Demostración. Véase [En1, pp.104].

Nervio de una Cubierta.

Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=0}^k$ una cubierta finita del conjunto X . Diremos que el complejo simplicial \mathcal{K} es el *nervio de la cubierta* \mathcal{A} si sus vértices se pueden arreglar en una secuencia finita a_0, a_1, \dots, a_k tal que

$$\Delta(a_i, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \mathcal{K} \iff A_{i_0} \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$$

Como se expone en [En1, pp.103], cualquier cubierta tiene un nervio, y el nervio no está únicamente determinado por la cubierta.

\mathcal{P} -similar. Sea \mathcal{P} una familia de espacios métricos compactos, y X un espacio métrico compacto. Se dice que el continuo X es \mathcal{P} -similar si para cada $\epsilon > 0$, existe un elemento Y de \mathcal{P} y una ϵ -función $X \rightarrow Y$.

En tal categoría podemos describir a las siguientes clases: un continuo X es *arbolable*, (*tree-like* en inglés) si para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta de X , con elementos de diámetro menor que ϵ , tal que el nervio de la cubierta es un árbol. Análogamente, X es *encadenable*, si para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta de X , con elementos de diámetro menor que ϵ , tal que el nervio de la cubierta es un árbol sin vértices de grado ≥ 3 , es decir, una trayectoria.

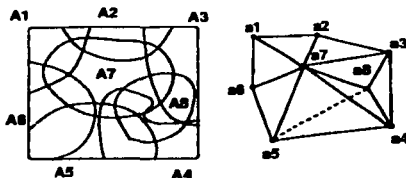


Figura 1.16 Nervio

1.6 Combinatoria

Gráfica. Una gráfica es un conjunto de *vértices* V , junto con un conjunto de *aristas* A , que unen parejas de vértices distintos. Al número de aristas que salen del vértice v , se le llama el *grado* de v , y se denota por $gra(v)$. Usualmente se considera una gráfica como carente de topología y se usan solamente sus propiedades combinatorias.

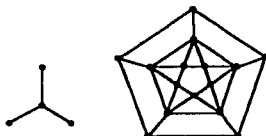


Figura 1.17 Gráficas.

El ejemplo usual de gráfica es un *árbol*. Un *árbol* es una gráfica sin ciclos. Por ciclo se entiende una sucesión de vértices distintos v_1, v_2, \dots, v_n donde v_i y v_{i+1} están unidos por una arista, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Se conviene en llamar v_{n+1} al vértice v_1 .

Por ejemplo

Lema 1.23 *En toda gráfica, el número de vértices de grado impar es par.*

Demostración. Si a es el número de aristas de la gráfica G y v_1, v_2, \dots, v_n los vértices, tenemos

$$\sum_{i=1}^n gra(v_i) = 2a \equiv 0 \pmod{2}$$

Cada vértice de grado impar contribuye con un 1 a esta suma módulo 2, y cada vértice de grado par contribuye con un 0. La suma total es 0, entonces debe haber un número par de unos, es decir, un número par de vértices de grado impar.

Lema de Sperner. Sea \mathcal{K} una subdivisión simplicial en n -simplices del n -simplex $\Delta = \Delta(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$. Los vértices de \mathcal{K} se colorean con $n + 1$ colores, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones

- i) El vértice v_i de Δ de X se colorea del color i .
- ii) Para los vértices de \mathcal{K} que se encuentren en el lado $\Delta(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ se usan sólo los colores del conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Entonces existe al menos un n -simplex $S \in \mathcal{K}$ cuyos vértices tienen todos sus colores distintos.

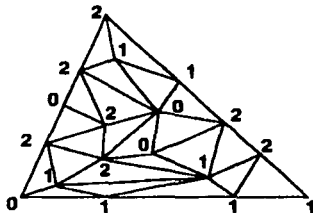


Figura 1.18 Lema de Sperner

Demostración. De hecho demostraremos más, a saber, que el número de n -simplices cuyos vértices tienen todos sus colores distintos, es impar. Inductivamente, si $n = 0$, se tiene una 1-coloración de un solo punto, donde claramente existe un subsimplex coloreado con todos los colores (1 color). Supongamos ahora que el lema se cumple para todos los $(n-1)$ -simplices que cumplen tales condiciones.

Sean T_1, T_2, \dots, T_m los elementos de \mathcal{K} . Sea Δ_0 el $(n-1)$ -lado de Δ cuyos vértices tienen los colores $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Convendremos en llamar r -lado al $(n-1)$ -lado de uno de los simplices T_i , si sus vértices usan todos los colores $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y sólo éstos.

Construyamos una gráfica G como sigue:

Cada vértice a_i de G representará al n -simplex T_i de \mathcal{K} , y un vértice adicional u que representará a Δ_0 . Las aristas de G se sitúan así.

- Los vértices a_i y a_j se unen por una arista si los correspondientes n -simplices T_i y T_j comparten un r -lado.
- El vértice a_i se une con el vértice u si hay todo un r -lado de T_i contenido en Δ_0 .

Notemos los siguientes hechos:

- Cada vértice a_k de G tiene grado 0, 1 ó 2. En efecto, si T_k tiene un r -lado, el vértice restante está coloreado del color n o de color $i < n$. En el primer caso sólo existe un r -lado en T_k , el cual puede compartir con a lo más un n -simplex T_j , o bien estar contenido en Δ_0 , entonces

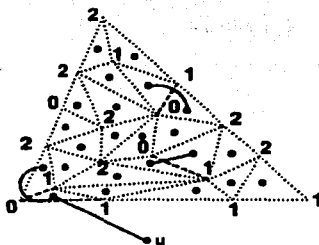


Figura 1.19 Gráfica coloreada.

a_k tiene grado ≤ 1 . En el segundo caso hay exactamente dos $(n-1)$ -lados de T_k que son r -lados (dos formas de elegir el vértice del único color que se repite), por lo que T_i puede compartir a lo más dos r -lados, con otro T_j ó con Δ_0 , entonces el grado de a_k es ≤ 2 . Si T_k no tiene ningún r -lado, claramente $gra(a_k) = 0$.

- El vértice a_k tiene grado 1 si y sólo si T_k tiene todos sus vértices de colores distintos (se sigue del inciso anterior).
- El vértice u de G tiene grado impar.
Esto es consecuencia de la hipótesis de inducción.

Usando el hecho de que en toda gráfica el número de vértices de grado impar es par, y considerando que u tiene grado impar, tenemos que

El número de vértices de la forma a_k de grado 1 en G es impar
es decir, el número de n -simplices T_i cuyos vértices tienen colores distintos es impar, que es precisamente lo que se quería demostrar.

Capítulo 2

Ejemplos

2.1 Teorema de Brouwer

Quizás el resultado más conocido acerca del punto fijo es el siguiente teorema, atribuido a Brouwer.

Teorema 2.1 \mathbb{D}^n tiene la propiedad del punto fijo.

Para demostrar este teorema, basta probar que no existe una retracción del n -disco en su frontera. Dado que si $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ es una función continua sin puntos fijos, podemos definir una función $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ proyectando el punto x en la frontera \mathbb{S}^{n-1} , a través del punto $f(x)$ para obtener el punto $r(x)$, como se muestra en la figura 2.1.

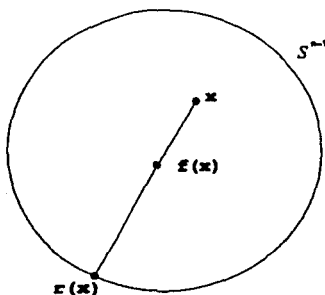


Figura 2.1 retracción del disco en su frontera.

Tal función está bien definida dado que $x \neq f(x)$. Además r es continua porque f lo es, y deja cada punto de la frontera fijo, es decir $r(x) = x$. Entonces r es una retracción del disco en su frontera.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Existen varias pruebas sobre la no-retractibilidad del disco en su frontera, entre ellas las siguientes.

Demostración. (B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz)

El n -simplex es homeomorfo a D^n , así que basta considerar funciones continuas del n -simplex en sí mismo. Sea $f : \Delta \rightarrow \Delta$ una función continua libre de puntos fijos del n -simplex $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$ en sí mismo. Sean $(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_k(x))$ las coordenadas baricéntricas del punto x en Δ . Ahora coloreemos cada punto de Δ con $n+1$ colores de la siguiente forma:

- i) El vértice v_i de S se colorea con el color i .
- ii) El punto x se colorea de color i si $\lambda_i(x) < \lambda_i(f(x))$ (en cuyo caso decimos que la coordenada i disminuyó al aplicarle f). La elección del color es arbitraria cuando hay varias opciones.

Sea C_k una subdivisión simplicial de Δ , en pequeños n -simplex de diámetro no mayor a $\frac{1}{k}$. Note que la coloración de los vértices de C_k satisface el lema de Sperner, dado que si $\Delta_k = \Delta(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k})$, es un k -lado de S , entonces $\lambda_j(x) = 0$ para $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Tales coordenadas no pueden disminuir al aplicarle f .

Entonces en cada subdivisión C_k de Δ , existe un subsimplex cuyos vértices están coloreados con los $n+1$ colores. Cuando $k \rightarrow \infty$ tenemos una familia de n -simplex cuyo diámetro tiende a cero, tales que los vértices de cada uno de ellos están coloreados de distintos colores. Como S es compacto, existe una subsucesión convergente de vértices, uno en cada elemento de la familia. Para cada i , tal subsucesión se puede elegir de forma que todos sean del color i . Sea x el punto de acumulación. En cada uno de ellos, la coordenada i -ésima disminuyó al aplicarle f . Por continuidad, $\lambda_i(x) \leq \lambda_i(f(x))$. Como esto sucede para cada i , tenemos

$$1 = \sum_{i=0}^n \lambda_i(x) \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i(f(x)) = 1$$

Por lo tanto $\lambda_i(x) = \lambda_i(f(x))$ para cada i , es decir $x = f(x)$. Esta contradicción prueba el resultado.

Demostración. (M. Hirsch) Usando el teorema de la aproximación simplicial, es suficiente probar que no existe una retracción de una subdivisión de un n -simplex S en su frontera ∂S .

Suponga que $f : S \rightarrow \partial S$ es una retracción simplicial. Sea a el baricentro de un $(n-1)$ -simplex $A \subset \partial S$. $f^{-1}(a)$ es una variedad compacta 1-dimensional cuya frontera está contenido en ∂S . La componente de $f^{-1}(a)$ es entonces un segmento de línea con un extremo en a , y cuyo otro extremo no existe. Si tal extremo existiera, debería ser un punto de ∂S , distinto de a , que se envía sobre a bajo f , contradiciendo la hipótesis de que $f|_{\partial S}$ es la identidad.

Cualquier n -simplex B que se envía sobre A tiene exactamente dos caras que se envían sobre A . Entonces $B \cap f^{-1}(a)$ es el segmento de línea que une los baricentros de las dos caras. Estos segmentos de línea forman una 1-variedad cuya frontera está

en ∂S porque cada $(n-1)$ -simplex C de S es incidente con uno o dos n -simplex, siempre que $C \subset \partial S$ o no. El resultado está probado.

2.2 Retractos

Teorema 2.2 *Si Y es un retracto de X , y X tiene la propiedad del punto fijo, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

De hecho se cumple más, a saber

Teorema 2.3 *La propiedad del punto fijo es un r -invariante*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una r -función, con inversa derecha continua $g : Y \rightarrow X$. Sea $\phi : Y \rightarrow Y$ cualquier función continua de Y en sí mismo. Como X tiene la p.p.f. la función $g \circ \phi \circ f : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo $x = g(\phi(f(x)))$. Pero g es la inversa derecha de f , entonces $f(x) = \phi(f(x))$, es decir $f(x)$ es un punto fijo de ϕ . Por lo tanto Y tiene la propiedad del punto fijo. En la figura 2.2 podemos apreciar ejemplos de retracts de D^3 , que por lo tanto, tienen la p.p.f.

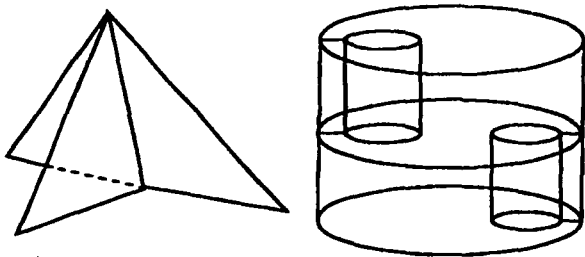


Figura 2.2 retracts de D^3

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.3 El cubo de Hilbert y los retracts absolutos

Es posible extender algunos de los teoremas en espacios de dimensión finita, a sus análogos de dimensión infinita, usando el siguiente lema de aproximación.

Lema 2.4 (De la aproximación.) *Sea X un espacio métrico. Si para cada $\epsilon > 0$ existe una función continua $f_\epsilon : X \rightarrow X$ tal que $d(f_\epsilon(x), x) \leq \epsilon \forall x \in X$ y cada conjunto $f_\epsilon(X)$ tiene la propiedad del punto fijo, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Considere una función continua $\phi : X \rightarrow X$, y un número $\epsilon > 0$. Como $f_\epsilon \circ \phi$ manda $f_\epsilon(X)$ en sí mismo, existe un punto fijo x_ϵ . Entonces $d(x_\epsilon, \phi(x_\epsilon)) = d(f_\epsilon(\phi(x_\epsilon)), \phi(x_\epsilon)) < \epsilon$. Se elige una sucesión de números $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$. Entonces la sucesión de puntos $\{x_{\epsilon_n}\}$, tal que cada x_{ϵ_n} es un punto fijo de $f_{\epsilon_n} \circ \phi$, tiene una subsucesión convergente, dada la compacidad de X . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que la subsucesión es la sucesión. Sea $x = \lim_{\epsilon_n \rightarrow 0} x_{\epsilon_n}$, entonces $x = \lim_{\epsilon_n \rightarrow 0} \phi(x_{\epsilon_n}) = \phi(x)$. Es decir x es un punto fijo de ϕ . Esto concluye la prueba.

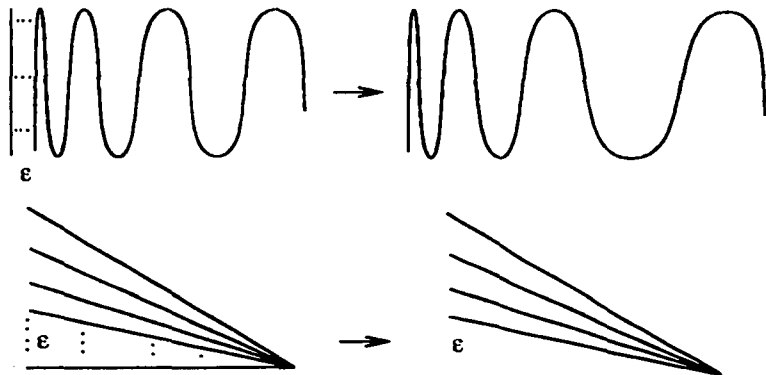


Figura 2.3 ϵ -retracciones

Teorema 2.5 El cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo

Demostración. Usando el lema de aproximación y las proyecciones $f_n : \mathcal{H} \rightarrow I^n$, dadas por

$$f_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

Dada $\epsilon > 0$, es posible elegir n suficientemente grande, tal que

$$d(f_n(x), x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} < \epsilon$$

Claramente, cada conjunto $f_n(\mathcal{H}) = I^n$ es homeomorfo al n -disco, el cual tiene la propiedad del punto fijo. Por lo tanto \mathcal{H} tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 2.6 Todo espacio AR tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Todo espacio AR es la r -imagen del cubo de Hilbert \mathcal{H} . Como la propiedad del punto fijo es invariante bajo r -funciones, el resultado se sigue.

Una forma sencilla de construir espacios AR es empezar con el intervalo I el cual es un AR, y pegar sucesivamente intervalos por un punto. Entonces obtendremos

Teorema 2.7 *Los árboles tienen la propiedad del punto fijo.*

De la misma forma, considerando que las dendritas son espacios AR , se tiene

Teorema 2.8 *Las dendritas tienen la propiedad del punto fijo.*

2.4 Dendroides y Continuos de Peano

Con respecto a los continuos localmente conexos, el siguiente lema nos dice que para la clase de los homeomorfismos, un continuo M tiene la propiedad del punto fijo si cada uno de sus elementos cíclicos tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 2.9 (Ayres) *Sea M un continuo de Peano y $h(M) \subset M$ un homeomorfismo de M en un subcontinuo de M . Entonces existe un elemento cíclico C tal que $h(C) \subset C$.*

La demostración es bastante larga y se puede consultar en [Ay1], usando la notación y resultados de [Wh2].

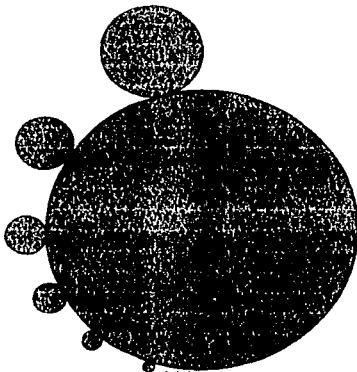


Figura 2.4 Continuo de Peano con la p.p.f.

Efectivamente, si M es un continuo de Peano donde cada uno de sus elementos cíclicos tiene un punto fijo, y $h: M \rightarrow M$ es un homeomorfismo de M en sí mismo, aplicando el lema, hay un elemento cíclico C tal que $h(C) \subset C$. Como C tiene la propiedad del punto fijo, existe un $p \in C$ tal que $h(p) \in C$, es decir, un punto fijo.

Ahora enunciaremos un resultado cuya demostración se puede encontrar en [Gu1, pp.26]

Lema 2.10 *Todo dendroide es descomponible.*

Ahora podemos demostrar el resultado respectivo sobre dendroides.

Teorema 2.11 (Borsuk) *Los dendroides tienen la propiedad del punto fijo.*

Para probar este resultado, primero demostraremos los siguientes lemas.

Lema 2.12 *Todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide.*

Demostración. Sean X un dendroide y A un subcontinuo de X . Sea B un subcontinuo de A . Claramente B es un subcontinuo de X . Como X es hereditariamente unicoherente, tanto B como A son continuos unicoherentes. Esto significa que A es hereditariamente unicoherente. Para ver que A es arco-conexo, sean p y q dos puntos en A . Sea pq el arco en X que tiene a p y q como extremos. Como X es hereditariamente unicoherente la intersección $pq \cap A$ es conexo. $pq \cap A$ es un subcontinuo del arco pq que contiene a los extremos, entonces debe ser todo el arco. Esto significa que $pq \subset A$. Es decir A es arco-conexo.

Lema 2.13 *Sea A un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente y sea $\phi: [0, \infty) \rightarrow A$ una función continua y biyectiva. Entonces la cerradura del conjunto $P = \phi([0, \infty))$, es un arco.*

Demostración. Convendremos en decir que un punto $a \in A$ será un punto límite para ϕ , si existe una sucesión $\{x_n\} \subset [0, \infty)$ tal que $\lim x_n = \infty$ y $\lim \phi(x_n) = a$. Aseguramos que no existe ningún punto límite a_0 para ϕ contenido en P . De otra forma existiría un $x_0 \geq 0$ tal que $a_0 = \phi(x_0)$. El conjunto $C = \overline{\phi([x_0, \infty))}$ es unicoherente y arco-conexo, porque es un subcontinuo de A . Aún más, para cualquier $x_1 > x_0$,

$$C = \overline{\phi([x_1, \infty))} \cup \phi([x_0, x_1])$$

Como C es unicoherente, $\phi(x_0), \phi(x_1) \in \overline{\phi([x_1, \infty))} \cap \phi([x_0, x_1])$, y $\phi([x_0, x_1])$ es el único arco que une a $\phi(x_0)$ y $\phi(x_1)$, concluimos que $\phi([x_0, x_1]) \subset \overline{\phi([x_1, \infty))}$. Por lo tanto,

- (1) Para cualquier $x_1 > x_0$ el conjunto $\phi([x_1, \infty))$ es denso en C , es decir $C = \overline{\phi([x_1, \infty))}$.

Como C es descomponible (C es un subcontinuo de X), existen dos continuos C_0 y C_1 tales que

- (2) $C = C_0 \cup C_1$, $C - C_0 \neq \emptyset \neq C - C_1$.

Dada $x > x_0$, no es posible que $\phi([x, \infty)) \subset C_0$ pues de lo contrario, por (1), $\overline{\phi([x, \infty))} \subset C_0$, lo cual contradice (2).

Similarmenete, no existe $x > x_0$ tal que $\phi([x, \infty)) \subset C_1$. En particular, podemos elegir $a \geq x_0$ tal que $\phi(a) \notin C_0$ y por lo mismo podemos elegir $b \geq a + 1$ tal que $\phi(b) \notin C_1$, y también podemos elegir $c \geq b + 1$ tal que $\phi(c) \notin C_0$. Entonces $\phi(a) \in C_1$, $\phi(b) \in C_0$ y $\phi(c) \in C_1$. Como el único arco que une a $\phi(a)$ con $\phi(c)$ es $\phi([a, c])$ y C_1 es un dendroide, tenemos que $\phi([a, c]) \subset C_1$. Esto es absurdo pues

$$\phi(b) \in \phi([a, b]) - C_1$$

De esta forma hemos mostrado que no existe un punto límite de ϕ que pertenezca a $\phi([0, \infty))$. Como A es compacto, debe existir un punto límite a de la sucesión $\{\phi(n)\}$. Entonces $a \in \overline{\phi([0, \infty))} - \phi([0, \infty))$. Sea L el arco en A que une a los puntos a y $\phi(0)$. Como $\overline{\phi([0, \infty))}$ es un dendroide, $L \subset \overline{\phi([0, \infty))}$. Dada $x > 0$, $\phi([0, x]) \cup \phi([x, \infty)) = \phi([0, \infty))$ y $\phi([0, \infty)) \cap \phi([x, \infty)) = \{\phi(x)\}$. (Pues no hay puntos límite de $\phi([x, \infty))$ en $\phi([0, \infty))$). De manera que

$$\overline{\phi([0, \infty))} - \{\phi(x)\} = (\overline{\phi([0, \infty))} - \phi([0, x])) \cup (\overline{\phi([0, \infty))} - \phi([x, \infty)))$$

es una disconexión de $\overline{\phi([0, \infty))} - \{\phi(x)\}$. Como el conjunto L es conexo e intersecta a ambos uniendos (en $\phi(0)$ y a), se tiene que L no puede estar contenido en esta unión. Por lo tanto $\phi(x) \in L$. Por lo tanto $\phi([0, \infty)) \subset L$ y consecuentemente $\overline{\phi([0, \infty))}$ es un subarco de L . Con esto se concluye la prueba.

Demostración. (Teorema 2.11) Sea A un continuo arco-conexo, y hereditariamente unicoherente. Entonces, para cualesquiera dos puntos a y b en A ($a \neq b$), existe exactamente un arco cuyos extremos son a y b , denotado por ab . En el caso de que $a = b$ se denota $ab = \{a\}$. Si $p \in ab - \{a, b\}$, podemos decir que p está entre a y b , y escribiremos $p \in ab^\circ$.

Supongamos ahora que existe una función continua $f: A \rightarrow A$ sin puntos fijos. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho(p, f(p)) \geq \epsilon$ para todo $p \in A$. Supondremos ahora que para algún número natural n , se ha construido un sistema de n puntos $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$1_n \rho(a_i, a_{i+1}) = \frac{1}{2}\epsilon \text{ para cualquier } i < n.$$

$$2_n \text{ Si } p \in a_i a_{i+1}^\circ, \text{ entonces } \rho(a_i, p) < \frac{1}{2}\epsilon \text{ para cualquier natural } i < n$$

$$3_n a_1 a_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}$$

$$4_n a_n \in a_1 f(a_n)^\circ, \text{ para cada } n > 1.$$

Evidentemente el sistema que contiene solamente un punto a_1 satisface para $n = 1$ las condiciones $1_n - 4_n$. Aseguramos que cualquier sistema a_1, a_2, \dots, a_n que satisfaga tales condiciones se puede completar añadiendo un punto $a_{n+1} \in A$ de forma que el sistema resultante $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ satisfaga las mismas condiciones para $n + 1$, es decir $1_{n+1} - 4_{n+1}$.

Como la distancia entre un punto y su imagen es $> \epsilon$, existe un punto a_{n+1} tal que

$$5 \ a_{n+1} \in a_n f(a_n)^\circ$$

$$6 \rho(a_n, a_{n+1}) = \frac{1}{2}\epsilon$$

$$7 \text{ Si } p \in a_n a_{n+1}^o \text{ entonces } \rho(a_n, p) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Las condiciones 1_{n+1} , 2_{n+1} son consecuencia inmediata de las condiciones 1_n , y 6 , 2_n y 7 respectivamente. Para establecer la condición 3_{n+1} , es suficiente mostrar que

$$a_1 a_n \cap a_n a_{n+1} = \{a_n\}$$

De otra forma, existe $b \neq a_n$ tal que $b \in a_1 a_n \cap a_n a_{n+1}$. Entonces

$$a_1 a_{n+1} \subset a_1 b \cup b a_{n+1} \subset a_1 a_n \cup a_n a_{n+1} - \{a_n\}$$

Pero $a_{n+1} \in a_n f(a_n)^o$ implica que $a_n \notin a_{n+1} f(a_n)$. Entonces el continuo $a_1 a_{n+1} \cup a_{n+1} f(a_n)$ se encuentra en $A - \{a_n\}$. Se infiere que $a_1 f(a_n) \subset A - \{a_n\}$, en contradicción con 4_n .

Por lo tanto $a_1 a_n \cap a_n a_{n+1} = \{a_n\}$, y tomando en cuenta 5 , se tiene que $a_{n+1} \in a_1 f(a_n)^o$. De 7 se tiene que si $p \in a_n a_{n+1}$ entonces

$$\rho(a_n, f(p)) \geq \rho(p, f(p)) - \rho(a_n, p) > \frac{1}{2}\epsilon$$

Pero $f(a_n) f(a_{n+1}) \subset f(a_n a_{n+1})$. Se sigue de 6 , que $a_{n+1} \notin f(a_n) f(a_{n+1})$.

Supongamos ahora que 4_{n+1} no se cumple. Entonces a_{n+1} no se encuentra entre a_1 y $f(a_{n+1})$. Pero $a_{n+1} \neq f(a_{n+1})$ y $a_{n+1} \neq a_1$ (como se vio anteriormente).

Entonces concluimos que $a_{n+1} \notin a_1 f(a_{n+1})$. Se sigue que el continuo $a_1 f(a_{n+1}) \cup f(a_n) f(a_{n+1})$ se encuentra en $A - \{a_{n+1}\}$. Considerando que cualquier subcontinuo de un dendroide es arco-conexo se tiene que $a_1 f(a_n) \subset A - \{a_{n+1}\}$, en contradicción con una expresión anterior.

Hemos mostrado que cualquier sistema a_1, a_2, \dots, a_n que satisface 1_n a 4_n se puede completar con otro punto a_{n+1} de forma que se satisfagan 1_{n+1} a 4_{n+1} . Entonces existe una sucesión infinita $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ que satisface 1_n a 4_n para cada n .

Sea ϕ_n un homeomorfismo que envía el intervalo $[n-1, n]$ sobre $a_n a_{n+1}$ de tal manera que $\phi_n(n-1) = a_n$ y $\phi_n(n) = a_{n+1}$. De 3_n se sigue que haciendo $\phi(x) = \phi_n(x)$ para $1 \leq x \leq n$, obtenemos una función continua biyectiva del rayo $[0, \infty)$ en el conjunto

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i a_{i+1}$$

Por el lema, \bar{P} es un arco, y por lo tanto, existe un homeomorfismo h que envía \bar{P} en el intervalo $[0, 1]$. Evidentemente, la sucesión $\{h(a_n)\}$ es monótona, por lo tanto convergente. Consecuentemente, la sucesión a_n debe ser convergente, lo que contradice 1_n .

El teorema queda probado.

Teorema 2.14 Si X y Y son continuos con la propiedad del punto fijo, también $X \vee Y$, donde $X \vee Y$ es el espacio que se obtiene de identificar un punto elegido de X con un punto elegido de Y .

Demostración. Sean $Z = X \vee Y$, a el punto donde X y Y están identificados, y $f: Z \rightarrow Z$ una función continua sin puntos fijos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(a) \in X - \{a\}$. Claramente X es un retracto de Z , la retracción está dada por $f(z) = z$, si $z \in X$ y $f(z) = a$, si $z \in Y$. Sea i la inclusión de X en Z . La función $r \circ f \circ i: X \rightarrow X$ es una función continua que manda cada punto $x \in X$ en $f(x)$, si $f(x) \in X$, y en a , si $f(x) \in Y$. Como X tiene la propiedad del punto fijo, entonces existe un $x \in X$ tal que $x = r(f(x))$. Tal punto es distinto de a , ya que a no es un punto fijo de f . Además observe que $r(f(x)) = x \in X - \{a\}$, así que $f(x) \notin Y$ y entonces $f(x) \in X$, y como la retracción no mueve los puntos de X , se tiene que x es también un punto fijo de f .

2.5 Continuos encadenables y \mathcal{P} -similares

Teorema 2.15 (Hamilton) *Cada continuo encadenable tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X un continuo encadenable. Suponga que $f: X \rightarrow X$ es una función continua libre de puntos fijos. Como X es compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho(x, f(x)) > \epsilon$ para toda $x \in X$. Sea $\{U_i\}_{i=0}^n$ una cadena, cuyos elementos tienen diámetro menor que ϵ . Es claro que x y $f(x)$ no pueden estar simultáneamente en el mismo eslabón, de lo contrario el diámetro sería al menos ϵ . Sea $x \in U_i$ y $f(x) \in U_j$. Si $i < j$ se dirá que $x < f(x)$, y $x > f(x)$, si $i > j$. Coloreemos cada punto x de 0 ó 1, dependiendo de que $x < f(x)$ ó $x > f(x)$ respectivamente. Cada punto $x \in U_0$ está coloreado de 0 y cada punto en U_n de 1. Formalmente, sean

$$A = \{x \in X : x < f(x)\}$$

$$B = \{x \in X : x > f(x)\}$$

El conjunto A es abierto, ya que dado $x \in U_i$ y $f(x) \in U_j$ con $i < j$, es posible encontrar una vecindad V de $f(x)$ y una vecindad U de x tal que $U \subset U_i$ y $f(U) \subset V \subset U_j$. Es decir $U \subset A$. Análogamente B es abierto. $A \cup B = X$ dado que x y $f(x)$ siempre están en eslabones distintos. Además $A \cap B = \emptyset$, y $U_0 \subset A$, $U_n \subset B$. Como X es conexo, esto es una contradicción, con lo que se concluye la demostración.

Considerando que el pseudo-arco es encadenable por construcción, tenemos

Teorema 2.16 (Hamilton) *El pseudo-arco tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 2.17 (Hamilton) *Si T es un continuo arbolable hereditariamente descomponible, T tiene la propiedad del punto fijo para homeomorfismos.*

En el artículo [Ha1], se prueba el resultado para continuos hereditariamente descomponibles y hereditariamente unicoherentes, y el resultado se sigue dado que se cumple el siguiente lema.

Lema 2.18 *Todo continuo arbolable es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Sea X un continuo arbolable y sean A y B dos subcontinuos de X , tales que $A \cap B$ es disconexo. Para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta $C_\epsilon = \{U_i\}_{i=1}^n$ cuyo nervio es un árbol de forma que $\text{diam} U_i \leq \epsilon$ para cada $i \leq n$. Dado un subconjunto K de X sea $C_{K,\epsilon} = \{U_i \in C_\epsilon : U_i \cap K \neq \emptyset\}$ la subcubierta inducida de K . Los nervios respectivos de $C_{A,\epsilon}$ y $C_{B,\epsilon}$ son conexos, de lo contrario se podría formar una separación de A con los elementos de $C_{A,\epsilon}$. Los nervios de $C_{A,\epsilon}$ y $C_{B,\epsilon}$ son a su vez subgráficas del nervio de C , es decir subárboles. $A \cap B$ es cerrado y X es normal, entonces es posible elegir abiertos ajenos V, W que contienen a los respectivos miembros de una separación de $A \cap B$, y que son tales que $\bar{V} \cap \bar{W} = \emptyset$. Elegimos $x \in V \cap A \cap B$ y $y \in W \cap A \cap B$. También es posible hacer que $C_{\{x\},\epsilon} \subset V$ y $C_{\{y\},\epsilon} \subset W$ para todo ϵ suficientemente pequeño. Sea δ la séptima parte de la distancia entre \bar{V} y \bar{W} . Supongamos que $\epsilon' \leq \delta$ es un número para el cual se cumplen las condiciones arriba mencionadas. Sea $\epsilon < \epsilon'$. Sean T_1 y T_2 los nervios respectivos de las cubiertas $C_{A,\epsilon}$ y $C_{B,\epsilon}$. Sean p y q los elementos respectivos de $C_{\{x\},\epsilon}$ y $C_{\{y\},\epsilon}$. Sabemos que T_1 y T_2 son árboles conexos y que ambos vértices $p \neq q$ están en T_1 y T_2 . En T_1 , cualquier trayectoria que una a p y q (visto como gráfica), se puede reducir a una trayectoria que no repita vértices, ya que T_1 no contiene ciclos. Como T_1 y T_2 son conexos, se pueden encontrar trayectorias $t_i \in T_i$, para $i = 1, 2$, que no repitan vértices y que tengan como extremos a p y q . Pero T_1 y T_2 son subárboles del nervio de la cubierta, y en una gráfica de árbol, dados dos puntos existe una única trayectoria que los tenga como extremos y no repita vértices (si existieran dos, el árbol contendría un ciclo). Por lo tanto $t_1 = t_2$. Esto significa que si $C(v_i) \in C_\epsilon$ es el elemento de la cubierta que tiene a $v_i \in t_i$ como representante, entonces $C(v_i) \cap A \neq \emptyset$ y $C(v_i) \cap B \neq \emptyset$. Como $\epsilon < \delta$, es posible elegir a v_i de forma que $C(v_i) \cap V = \emptyset$ y $C(v_i) \cap W = \emptyset$. Es decir, para cada $\epsilon < \delta$, existen $a_\epsilon \in C(v_i) \subset A - (V \cup W)$ y $b_\epsilon \in C(v_i) \subset B - (V \cup W)$ a distancia $\leq \epsilon$. Elijiendo una sucesión conveniente $\{\epsilon_n\}$ que se aproxime a 0, se tienen sucesiones $a_n \in A - (V \cup W)$ y $b_n \in B - (V \cup W)$, tales que $d(a_n, b_n) < \epsilon_n$. Por compacidad se tiene una subsucesión convergente, que podemos suponer es ella misma. Entonces $a = \lim a_n = \lim b_n \in (A - (V \cup W)) \cap (B - (V \cup W))$. Esto es una contradicción dado que V y W cubren a $A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B$ es conexo, con lo que se prueba que X es hereditariamente unicoherente.

2.6 Continuos Aplanables

Teorema 2.19 *Un disco con una espiral que converge a su frontera tiene la propiedad del punto fijo (figura 2.5).*

Demostración. Sea $M = D \cup S$ el continuo mencionado, donde D es el disco y S la espiral. Sea f una función continua de M en sí mismo. Como D es arco-conexo, la propiedad de ser arco-conexo se preserva bajo funciones continuas, y no hay un arco en M que una un punto de D con un punto de S , se tiene que $f(D) \subset D$ o bien $f(D) \subset S$. Si $f(D) \subset D$, entonces hay un punto fijo en D , ya que el disco tiene

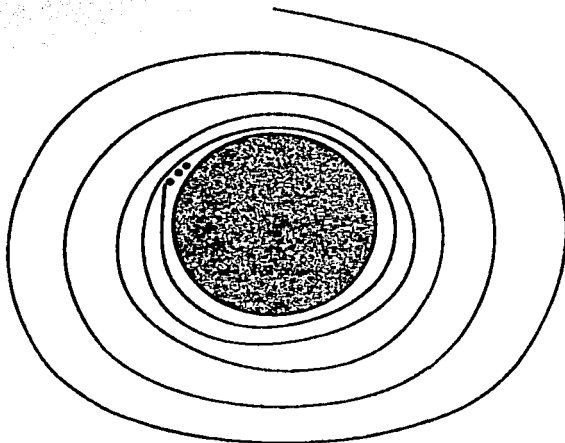


Figura 2.5 Disco con espiral.

la propiedad del punto fijo. En el otro caso, elegimos un punto d en la frontera del disco D y elegimos una sucesión de puntos $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ de S que convergen al punto d . Entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} f(s_i) = f(d) \in S$. Como S es abierto en M , podemos suponer que $f(s_i) \in S$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Ningún punto $s \in S$ cae en D bajo f , de lo contrario el arco ss_i cumpliría $f(s) \in D$ y $f(s_i) \in S$. Pero esto no es posible ya que no existen trayectorias entre D y S , por tanto $f(S) \subset S$, entonces $f(D \cup S) \subset S$. Como $D \cup S$ es compacto, $f(D \cup S)$ es un punto ó un arco en S . Ambos espacios, un punto y un intervalo tienen la propiedad del punto fijo, y $f(f(D \cup S)) \subset f(D \cup S)$, por lo tanto f deja un punto fijo en $f(D \cup S) \subset D \cup S$.

Teorema 2.20 *El círculo de Varsovia tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. El argumento para demostrar este teorema es ampliamente conocido. A continuación se expone.

Sea M , el círculo de Varsovia, formado por una curva $\text{sen}(\frac{1}{x})$ y un arco pegado, como se muestra en la figura 2.6, y sea $f : M \rightarrow M$ una función continua.

Suponga que el punto variable x representa a un perro mientras que $f(x)$ representa a un conejo. El objetivo es que el perro alcance al conejo ($x = f(x)$), pero el conejo no debe dejarse atrapar, para que entonces la función no tenga puntos fijos. El hecho importante es que el continuo M es únicamente arco conexo, es decir que para cada dos puntos distintos existe un único arco que los tiene como extremos. Entonces hagamos que el perro empiece en el punto p , el extremo superior del intervalo límite, como se muestra en la figura. El conejo debe estar siempre por delante del perro, en

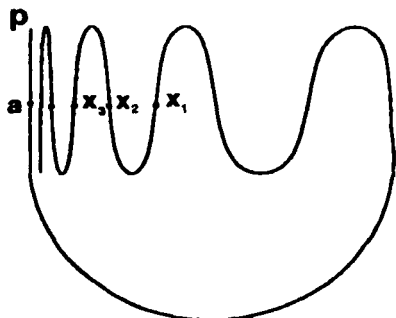


Figura 2.6 Círculo de Varsovia

el sentido de que el punto x siempre está entre p y $f(x)$. Cuando x recorre la curva, aproximándose al intervalo límite, el conejo se aproxima también al intervalo límite siempre delante del perro. En particular, dado $a \in I$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $M - I$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = a$, donde I es el arco límite. Entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(a)$ por la continuidad de f . Dado que x_i siempre está entre p y $f(x_i)$, en la figura, $f(x_i)$ siempre está entre x_i y el arco I . Entonces $f(a) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) \in I$. Esto muestra que f es una función continua que manda el intervalo I en sí mismo, por lo tanto tiene un punto fijo. Esta contradicción demuestra el teorema.

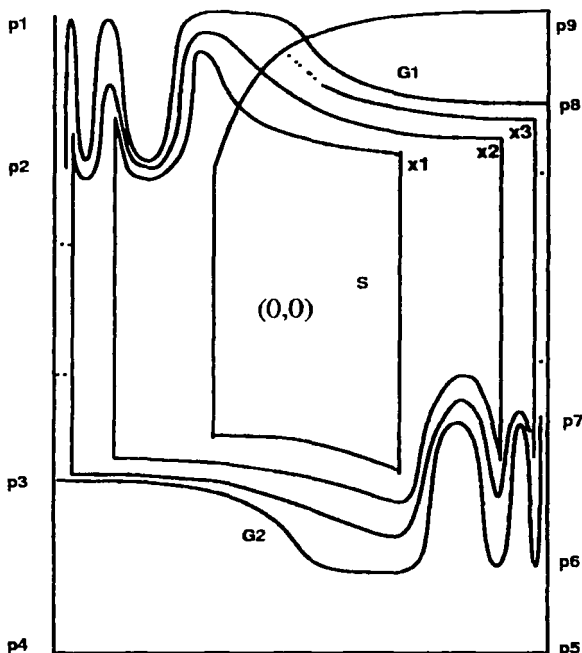
Teorema 2.21 *El continuo $M \subset \mathbb{R}^3$ descrito a continuación, tiene la propiedad del punto fijo, (figura 2.7).*

Primero describamos la figura. M es la unión de tres segmentos $[p_1, p_4]$, $[p_4, p_5]$, $[p_5, p_3]$, dos curvas de $\text{sen}(\frac{1}{2})$, G_1 y G_2 y una espiral S , que tiene la propiedad de que S es homeomorfa a $[0, \infty)$. S comienza en p_3 y se aproxima a la unión de los arcos $[p_1, p_4]$, $[p_4, p_5]$, $[p_5, p_3]$, a las curvas G_1 y G_2 , como se muestra en la figura.

Demostración. Supondremos que $f : M \rightarrow M$ es una función continua libre de puntos fijos. Es posible aplicar el mismo argumento del perro cazando al conejo usado anteriormente, como sigue:

El perro empieza en p_3 . Si $f(p_3) \in [p_1, p_3]$, el perro caza al conejo a lo largo de $[p_3, p_1]$ y deja algún punto de $[p_3, p_1]$ fijo. Si $f(p_3) \in G_2$, mueve al perro x a lo largo de G_2 detrás del conejo $f(x)$. Notese que si $x \in G_2 - \{p_3\}$, $f(x)$ se encuentra adelante de x en el sentido de que x está en el arco de G_2 entre p_3 y $f(x)$. Un argumento análogo al usado para demostrar que el círculo de Varsovia tiene la propiedad del punto fijo, muestra que el arco $[p_3, p_1]$ tiene un punto fijo.

Si $f(p_3) \notin [p_1, p_3] \cup G_2$, se observa que después de que el perro deja p_3 , x se encuentra entre p_3 y $f(x)$ en el arco en M de p_3 a $f(x)$. La caza continúa hasta que el perro llega a p_3 . El conejo se encuentra en ese momento en G_1 o en $S \cup [p_5, p_3]$. Si está en

Figura 2.7 Continuo M

G_1 , tenemos una situación similar a aquella en la cual $f(p_3) \in G_2$, lo que llevaría a un punto fijo para f , por lo que supondremos que $f(p_8) \in S \cup [p_8, p_9]$.

Conforme x se mueve pasando p_8, p_9 y entra en S , se observa que $f(x)$ permanece al frente de x en el sentido de que x se encuentra entre p_9 y $f(x)$ sobre el arco en S de p_9 a $f(x)$. Como S converge a $[p_1, p_3] \cup G_2 \cup [p_6, p_8] \cup G_1$ si x_1, x_2, \dots es una sucesión de puntos de S que convergen a p_8 , entonces podemos suponer que $f(x_1), f(x_2), \dots$ converge a un punto de $[p_1, p_3] \cup G_2 \cup [p_6, p_8] \cup G_1$, y entonces $f(p_8)$ pertenece a $[p_1, p_3] \cup G_2 \cup [p_6, p_8] \cup G_1$. Esto contradice la suposición de que $f(p_8) \in S \cup [p_8, p_9]$. Con esto concluimos que M tiene la propiedad del punto fijo.

Respecto a la investigación de cuáles continuos en el plano tienen la propiedad del punto fijo, se ha planteado la conjetura de que todo continuo aplanable que no separe al plano tiene la propiedad del punto fijo. Esta conjetura ha sido llamada el problema más interesante cuya solución ha sido la más prolongada en la geometría plana. Al respecto se han hecho numerosos avances, entre ellos citaremos los siguientes sin

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

demostración, ya que éstas son muy largas y complicadas. En cambio se incluye la referencia para aquellas personas que estén interesadas.

Teorema 2.22 (Hamilton) *Si X es un continuo plano que no separa al plano, y cuya frontera no contiene ningún continuo indescomponible, entonces X tiene la propiedad del punto fijo para homeomorfismos [Ha1].*

Teorema 2.23 (Carwright y Littlewood) *Si h es un homeomorfismo que preserva la orientación del plano en sí mismo y $X = h(X)$ es un continuo plano que no separa al plano, entonces existe un punto $x \in X$ tal que $h(x) = x$, [Ca].*

Notemos que si la conjetura de los continuos que no separan al plano fuera cierta, el resultado nos daría otra demostración para el teorema de Brouwer en el caso de 2 dimensiones, ya que el disco es un continuo aplanable que no separa al plano.

Sobre continuos arco-conexos, Hagopian ha demostrado los siguientes resultados.

Teorema 2.24 *Cualquier continuo plano arco-conexo que no separa al plano tiene la propiedad del punto fijo [Hg2].*

Teorema 2.25 *Cualquier continuo plano únicamente arco-conexo tiene la propiedad del punto fijo [Hg3].*

Notemos que $M \cup D$ se retrae en el continuo

$$M' = (M \cup \partial D) - (p_8, p_9)$$

Entonces para ver que $M \cup D$ no tiene la propiedad del punto fijo, bastará mostrar que M' no la tiene. Para hacer esto, definiremos una función continua $f: M' \rightarrow M'$.

Restringida a $[p_1, p_3] \cup G_2 \cup [p_8, p_8] \cup G_1$, f es la reflexión a través del origen. También f envía de manera homeomorfa los intervalos $[p_3, p_5]$ en $[p_8, p_{11}]$; $[p_5, p_6]$ en $[p_{11}, p_{11}]$; $[p_8, p_{11}]$ en $[p_{11}, a_1]$; $[p_{11}, a_1]$ en $[a_1, c_1]$, y cada $[a_i, a_{i+1}]$ en $[c_i, c_{i+1}]$. La única precaución que se debe tomar para ver que f sea continua es ver que si un punto se mueve suficientemente lejos sobre la espiral, su imagen es muy cercana a su reflexión a través del origen. En efecto, esto es posible porque cada c_i es la reflexión del punto a_i en el origen. Entonces en el límite, la función coincide con la rotación en $[p_1, p_3] \cup G_2 \cup [p_8, p_8] \cup G_1$. Por tanto $D \cup M$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 3.2 *El continuo de Young no tiene la propiedad del punto fijo.*

El continuo de Young está formado por dos círculos de Varsovia en el plano que se pegan a través de un arco I . A partir del punto medio del arco I se levanta un arco hasta el punto o fuera del plano, después se unen los puntos o y q en la parte exterior de los círculos y a partir de q se toma una espiral que rodee las curvas de $\sin(\frac{1}{x})$ aproximándose a ellas, figura (3.2). El punto q y la espiral se encuentran también en el plano.

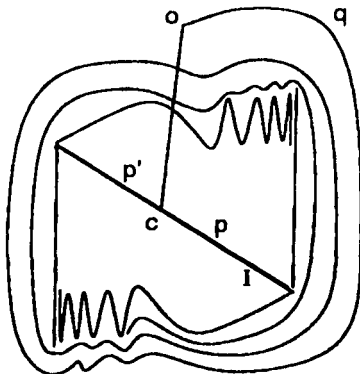


Figura 3.2 Continuo de Young

La función f libre de puntos fijos es una rotación de 180° respecto al centro del círculo y en la espiral. Mas exactamente, en la espiral se toma $f(x)$ como el punto al que se llega partiendo de x y recorriendo la espiral un ángulo de 180° . En el intervalo

I , sean p y p' dos puntos simétricos con respecto al centro c . El centro se envía en o , los puntos p y p' en c , el punto o en q . Los extremos del intervalo I se intercambian, y en los puntos intermedios la función se extiende linealmente.

Para cada punto x del continuo en el plano, a excepción de los puntos del arco pp' , el ángulo entre los segmentos cx y $cf(x)$ es un ángulo de 180° , por lo que $x \neq f(x)$. Cada uno de los puntos p , p' , c , o y q no se queda fijo al aplicarle f , y cada intervalo abierto (p, c) , (p', c) , (c, o) , (o, q) , se envía fuera de él, respectivamente. Por lo tanto la función no tiene puntos fijos.

Teorema 3.3 (Kinoshita) *Existe un continuo con las siguientes propiedades: es contraíble; no tiene la propiedad del punto fijo y el cono sobre él tampoco tiene la propiedad del punto fijo.*

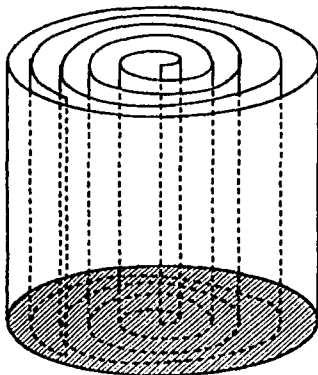


Figura 3.3 El rollo

Demostración. El continuo se construye como sigue: En \mathbb{R}^2 se toma una espiral S que parte del centro de un disco unitario D y que se aproxima a su circunferencia. Entonces $X = \overline{D \cup (S \times I)} \subset \mathbb{R}^3$, es decir $D \cup (S \times I)$ junto con los puntos del cilindro dado por los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $x^2 + y^2 = 1$ y $z \in [0, 1]$, ver figura 3.3.

El continuo es contraíble, porque se puede proyectar en la base D , y la base es contraíble.

Sea D' un disco con el mismo centro que D y radio $r < 1$. Sea K la espiral contenida en la base. Definiremos una función continua $f: D - D' \rightarrow D$ que mande a $(D - D') \cap K$ en K y que no deje puntos fijos (figura 3.4). Veamos todo en el plano. Sea o' el punto de la frontera de D' donde corta la espiral. Sea S_0 la parte infinita de la espiral que empieza en o' . Dado un punto $x \in S_0$, se hace correr el punto x ,

empezando en o y siguiendo la espiral. El punto $f(x)$ empieza en o y recorre la espiral de manera que el ángulo $\angle f(x)ox$ sea constante $= \alpha$. Tal constante se elige de forma que $f(o) = o$.

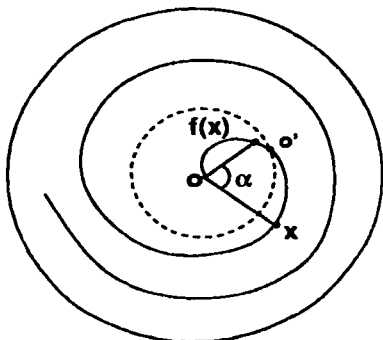


Figura 3.4 Función en la base que preserva la espiral.

Para los puntos en $D - D'$, el segmento que une el centro del círculo y un punto en la frontera, está dividido por la espiral en pequeños subintervalitos. En cada uno de tales intervalos se extiende linealmente la función tomando en cuenta los valores en los extremos, como se muestra en la figura 3.5.

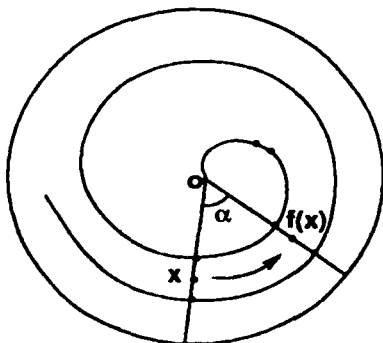


Figura 3.5 Extensión de f

En el límite, es decir en la frontera del círculo, la función induce la rotación con ángulo α . Para encontrar una función del disco D en el espacio X , que no deje puntos fijos, dejando invariante lo que ya definimos, se extiende f al interior de D'

como se muestra en la figura 3.6. Es decir, enviando D' en el arco po . Entonces se tiene una función continua que manda el disco en la unión del disco con el intervalo unido por el centro, que deja la espiral invariante y que no tiene puntos fijos.

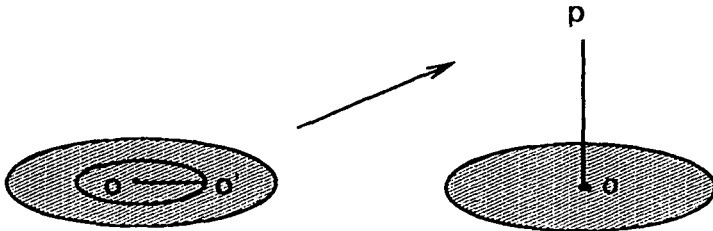


Figura 3.6 El disco interior se envía en el intervalo po

Enunciaremos ahora un resultado usual que nos será útil más adelante. Su demostración puede hallarse en [Du1, pp. 123].

Lema 3.4 Sea $p: X \rightarrow Y$ una identificación. Entonces para cada espacio Z y cada función $g: Y \rightarrow Z$, la continuidad de $g \circ p$ implica la de g .

Hay que definir ahora la función en $S \times I$.

Para ver mejor la función, se desdobra la hoja, para tener una tira infinita $T = [0, \infty) \times [0, 1]$.

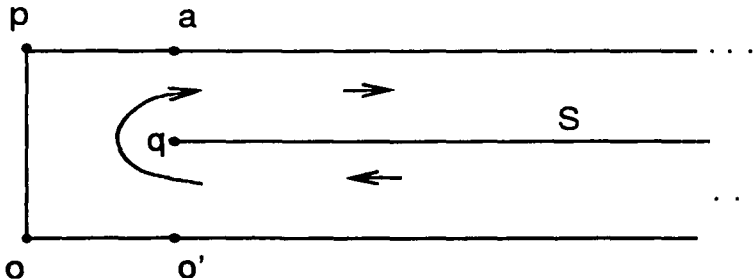
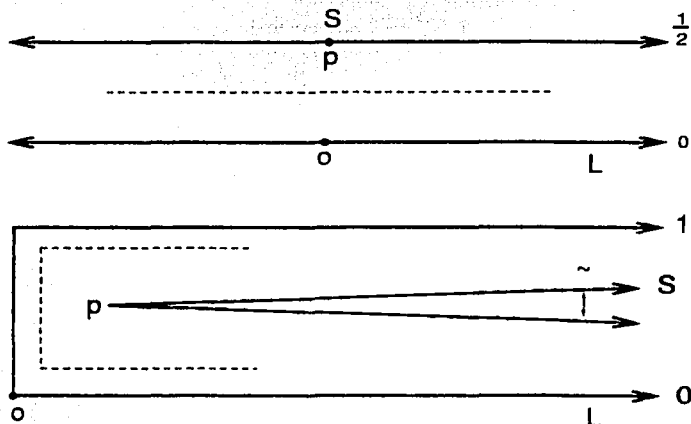


Figura 3.7 Hoja extendida

Sea S el rayo horizontal a altura $\frac{1}{2}$ que parte del punto interior q , como se muestra en la figura. Vamos a definir f en esta tira como composición de dos funciones $f = g \circ h$, donde g y h van de T en T .

Notemos que T es homeomorfa a una tira infinita $R = \mathbb{R} \times [0, \frac{1}{2}]$ bajo la identificación $(x, \frac{1}{2}) \sim (-x, \frac{1}{2})$, figura 3.8.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

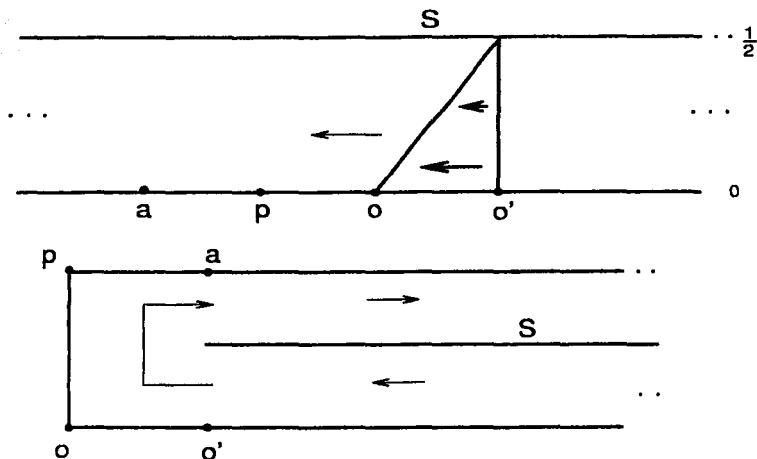
Figura 3.8 Homeomorfismo entre R y T .

Sea $\pi : R \rightarrow (R/\sim) \cong T$ la proyección. Basta definir una función continua $\bar{h} : R \rightarrow R$ que preserve la identificación, esto es, $a, b \in R$ cumplen $a \sim b$ si y sólo si $\bar{h}(a) \sim \bar{h}(b)$. En tal caso podemos definir $h : (R/\sim) \rightarrow (R/\sim)$, dada por

$$h([x]) = [\bar{h}(x)]$$

Esta función está bien definida porque \bar{h} preserva la identificación, y h es continua por el Lema 3.4, y el hecho de que $h \circ \pi = \pi \circ \bar{h}$ es una función continua (composición de dos continuas, π y \bar{h} .)

En R podemos definir la función \bar{h} que mueve todos los puntos excepto los del borde superior. En la base de R se aplica una traslación que coincida con la f definida anteriormente en el rayo $[0, \infty)$ (que se aproxima a una traslación bajo el vector $(-\alpha, 0)$ conforme se avanza lo suficiente a la derecha), y una traslación bajo el vector $(-\alpha, 0)$ para los puntos del rayo $(-\infty, 0]$. En particular envía o' en o y o en p . En el borde superior se deja cada punto fijo, y en un segmento que una un punto en el borde superior con un punto en la base, se extiende la función linealmente, de forma que la función empieza con una traslación en la base y la traslación varía continuamente sin anularse conforme crece la altura hasta que en el borde superior es la identidad, es decir, la traslación nula. Como esta función preserva la identificación $(x, \frac{1}{2}) \sim (-x, \frac{1}{2})$ obtenemos una función continua $h : T \rightarrow T$ que deja fijos los puntos de S y sólomente esos. El espacio R y la función h se ilustran en la figura 3.9. Notemos que cuando un punto $r \in T - S$ no se mueve bajo h hacia la izquierda o hacia la derecha, entonces lo hace hacia arriba, de tal suerte que la altura de $h(r)$ es estrictamente mayor que la altura de r .

Figura 3.9 Función h .

Además h envía d' en o y o en p , y el intervalo $d'o$ linealmente en el intervalo op , como se requería.

La función $g : T \rightarrow T$ es más simple, se define por la fórmula:

$$h(u, t) = \begin{cases} (u, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (u, 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Es decir, g alarga la mitad inferior de T para llenar a T con ella y comprime la mitad superior de T sobre el rayo de altura 1. Note que cuando un punto $r \in T$ no está en el borde superior ni en la base, la altura del punto $g(r)$ es estrictamente mayor que la de r , y g deja invariante la primera coordenada. Los únicos puntos fijos bajo g son los puntos de la base de T .

Ahora sí, definimos $f = g \circ h$. Tenemos que mostrar que f no tiene puntos fijos. Tomemos un punto $r \in T$ y analicemos sus posibilidades.

Si h traslada el punto r hacia la izquierda o a la derecha, la función g respeta esa traslación, dado que no cambia la primera coordenada. Por lo tanto ningún punto que se mueva hacia la izquierda o hacia la derecha bajo h es fijo bajo f .

Si h no traslada el punto r , entonces aumenta su altura, y g aumenta la altura de $h(r)$ siempre y cuando $h(r)$ no esté en el borde superior o en la base de T . Cuando ninguno de esos casos sucede, la altura de $f(r)$ es estrictamente mayor que la de r .

El punto $h(r)$ está en la base o en el borde superior de T si y sólo si r está o bien en la base de T , en el arco op o en el borde superior de T . La única forma de que h no

TESIS CON
 FALTA DE ORIGEN

cambie la primera coordenada de r es que r se encuentre en el intervalo op . Bajo h este intervalo se envía en el intervalo pa en el borde superior, y bajo g el intervalo pa se envía en él mismo. El único punto que podría ser fijo es el punto p , pero $f(p) = a$. Por lo tanto la función f no tiene puntos fijos en T .

Ahora veamos que es posible extender la función f al cilindro límite de $K \times I$. Bastará ver que g y h se pueden extender a dicho cilindro. Esto es fácil pues simplemente se hace lo que se ilustra en las siguientes figuras.

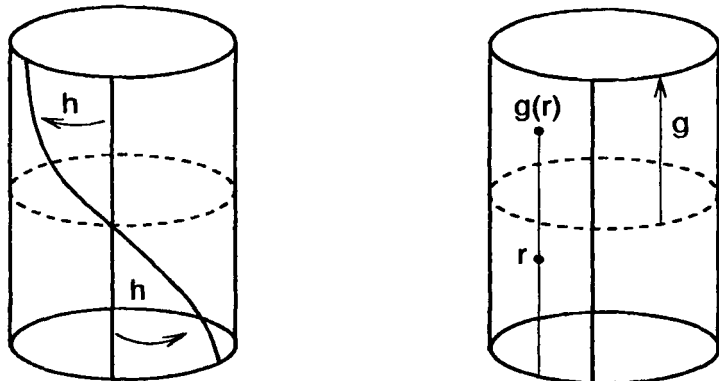


Figura 3.10 h y g en el cilindro.

La función h rota cada circunferencia de altura constante dejando fija la de altura $\frac{1}{2}$, la función g estira la mitad inferior del cilindro y comprime la mitad superior en la circunferencia de altura 1. Claramente $f = g \circ h$ está bien definida, extiende continuamente a la f ya definida antes y no tiene puntos fijos.

Por lo tanto el continuo descrito no tiene la propiedad del punto fijo.

Para ver que el cono sobre él tampoco la tiene, basta ver que $X \times I$ no la tiene. Un Lema de Knill (Lema 3.6) establece que cuando X es contraíble, el cono $\text{Cono}(X)$ tiene la p.p.f. si y sólo si $X \times I$ la tiene. Ahora bien, $X \times I$ no tiene la p.p.f., ya que X es un retracto de $X \times I$ y X no la tiene. Por lo tanto el cono sobre X tampoco tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 3.5 (Bing) *Existe un continuo de dimensión 2 el cual es intersección de una sucesión decreciente de cubos topológicos y que admite un homeomorfismo libre de puntos fijos en sí mismo.*

Considérense dos conos C_1 y C_2 en \mathbb{R}^3 , con vértices o_1 y o_2 . En cada uno de ellos sepárese el vértice, para tener entonces dos espacios homeomorfos a discos sin el

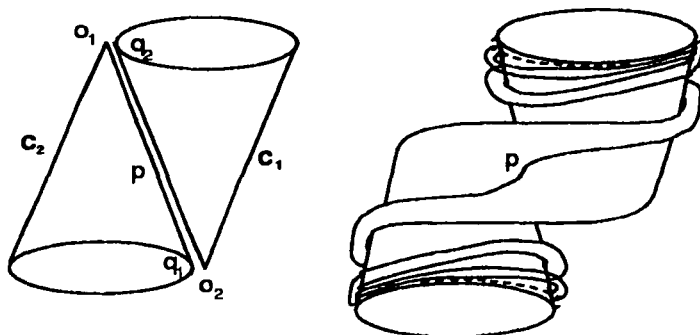


Figura 3.11 Conos pegados

centro. Sean q_1 y q_2 puntos en las bases de C_1 y C_2 , respectivamente. Tomemos los segmentos o_1q_1 y o_2q_2 e identifiquemos el punto medio en ellos. Sea p el punto resultante.

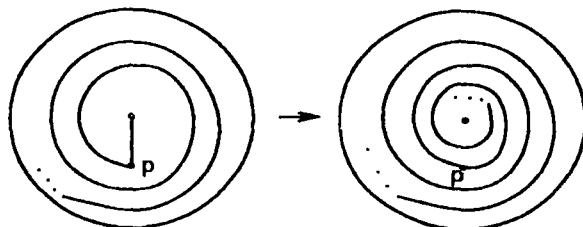


Figura 3.12 círculo sin centro

El segmento po_1 se enrolla sobre el cono C_2 , aproximándose a la base, como se muestra en la figura 3.11. Análogamente el segmento po_2 se enrolla sobre el cono C_1 . La parte común es entonces una espiral. Como el punto o_1 se le quitó al cono, es posible considerar tal espiral como una espiral que se aproxima tanto a o_1 como al círculo en la frontera, figura 3.12.

Como resultado, obtenemos el espacio X , que son dos conos agujerados y pegados a través de una espiral que se aproxima a ambas bases, figura 3.11.

Nótese que el espacio es localmente conexo, entonces es imagen continua del intervalo, gracias al teorema de Hahn-Mazurkiewicz (1.8).

Para ver que el espacio X es intersección de cubos, notemos que podemos encajar primero el espacio en un cubo. Después es posible ir cavando en cada uno de los

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

túneles interiores de los conos, digamos que el cubo B_n se adentre en cada túnel una distancia n y esté separado de sus paredes por una distancia $\frac{1}{n}$. En la parte externa, el disco B_n se puede retraer en las primeras n vueltas de cada túnel y cubrir los demás, figura 3.13.

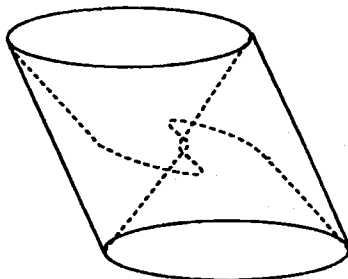


Figura 3.13 discos encajados.

La intersección de los discos B_n para $n \in \mathbb{N}$ es el espacio X .

Para demostrar que X no tiene la propiedad del punto fijo, podemos representar al cono sin el centro, como un cilindro infinito de un lado. En efecto, si el centro se manda a altura $-\infty$ en \mathbb{R}^3 , mientras que el círculo en la frontera se manda a altura -1 , cada círculo de radio r se manda en el círculo a altura $\frac{r}{2}$. Entonces la espiral en la intersección se puede ver como una espiral superior en el cilindro, que tiene como un extremo el punto p , junto con la línea vertical que pasa por p , figura 3.14.

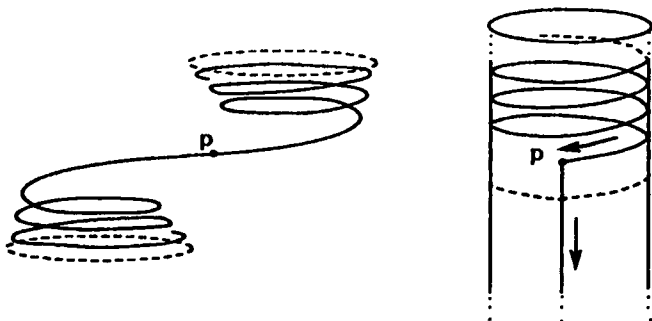


Figura 3.14 espiral común y cilindro

En el cilindro se define una función continua sin puntos fijos, que deja invariante la espiral. Se rota el círculo superior un ángulo α , y para los puntos en la parte

superior del cilindro, (aquellos cuya altura es al menos la altura de p) cada punto se rota siguiendo la trayectoria espiral, un ángulo α , figura 3.14. Note que cada círculo de la sección transversal se rota primero y se traslada hacia abajo. Es posible hacer una rotación en sentido inverso a la función para que la imagen del punto p junto con el arco que se sale, caigan en el rayo vertical como se muestra en la figura (de cualquier modo se traslada hacia abajo). Ahora, para la parte inferior del cilindro, lo que se hace es trasladar hacia abajo cada punto, una distancia α . Entonces hemos encontrado una función continua del cilindro en sí mismo que no tiene puntos fijos y que deja invariante a la espiral.

Observemos que al identificar los conos en la espiral, como la función es una traslación en cada túnel a partir de un momento, y el túnel se enreda aproximándose a la base del otro cono, esta función coincide con la rotación en la base del otro cono (en el límite).

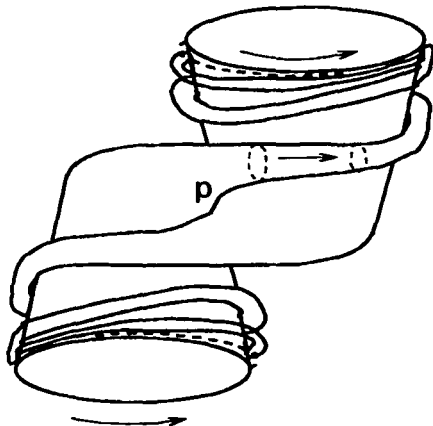
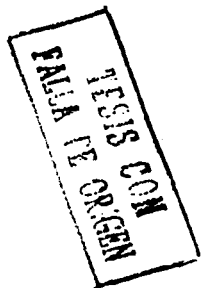


Figura 3.15 Función sin punto fijo.



En particular, en la espiral donde ambos conos se cortan, la función es una traslación, y en las bases es una rotación en el mismo sentido.

La función se construyó usando homeomorfismos en cada cono que coincidieron en la espiral. Por lo tanto la función resultante es un homeomorfismo. Esto concluye la demostración.

Ahora demostraremos un resultado útil para espacios contraíbles.

Lema 3.6 (Knill) Si X es un espacio compacto contraíble, entonces el cono sobre X , $\text{Cono}(X)$ tiene la propiedad del punto fijo sí y sólo si $X \times I$ tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. (\Rightarrow) Como X es contrafiable, existe una función continua $h : X \times I \rightarrow X$ y un punto $c \in X$ tal que $h((x, 1)) = c$ y $h(x, 0) = x$, para todo $x \in X$. Hagamos la identificación $(x, 1) \sim (y, 1)$ para todas $x, y \in X$ en $X \times I$. Por el Teorema de la transgresión [pp. 123] es posible inducir una función continua $\bar{g} : \text{Cono}(X) \rightarrow X$. Elegimos una $k \in (0, 1)$. Notemos que $X \times I$ es homeomorfo a $X \times [0, k]$. Ahora usaremos a \bar{g} para retraer a $\text{Cono}(X)$ en $X \times [0, k]$. Definimos la función $r(x, y) = (x, y)$, si $y \leq k$, y $r(x, y) = (\bar{g}(x, \frac{y(1-k)}{1-k} + y), k)$, si $y \geq k$. Notemos que si $y = 1$, entonces $r(x, y) = (\bar{g}(x, 1), k)$. Por lo tanto si $\text{Cono}(X)$ tiene la p.p.f. entonces $X \times I$ tiene la p.p.f.

(\Leftarrow) Sea p el vértice del cono. Inversamente, si $\text{Cono}(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo, y $f : \text{Cono}(X) \rightarrow \text{Cono}(X)$ es libre de puntos fijos, entonces existe un $t_1 < 1$ tal que $f(p) = (x_1, t_1)$. Como X es compacto, existe un $t_0 \in [t_1, 1]$ tal que $f(x, t) \in X \times [0, t_0]$ para $(x, t) \in X \times [t_0, 1)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t_0 = k$. Entonces definamos una función continua f' en $X \times I$ poniendo $f'(x, 1) = f(p)$, $f'(x, t) = f(x, t)$ para $t \in [k, 1]$ y $f'(x, t) = r(f(x, t))$ para $t \in [0, k]$, donde $x \in X$. Entonces f' no tiene puntos fijos, dado que si $t \in [0, k)$, o bien $f'(x, t)$ es $f(x, k)$ o está en $X \times [0, k]$, y si $k \leq t \leq 1$, $f'(x, t) = f(x, t)$, y si $t = 1$ $f'(x, 1) = (x_1, t_1)$. Esto termina la prueba del lema.

Teorema 3.7 (Knill) *El cono sobre un círculo con una espiral no tiene la propiedad del punto fijo.*

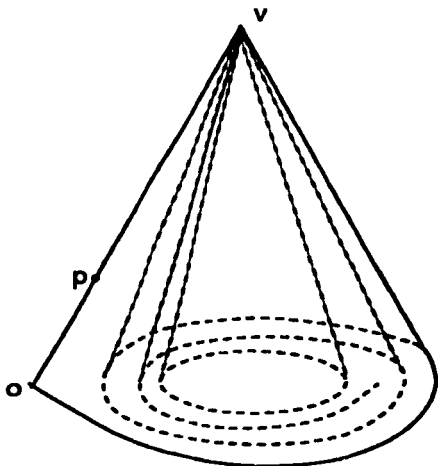


Figura 3.16 Cono sobre el círculo con espiral.

Demostración. Sea X el espacio en cuestión. Definiremos una función continua sin puntos fijos $f : X \rightarrow X$.

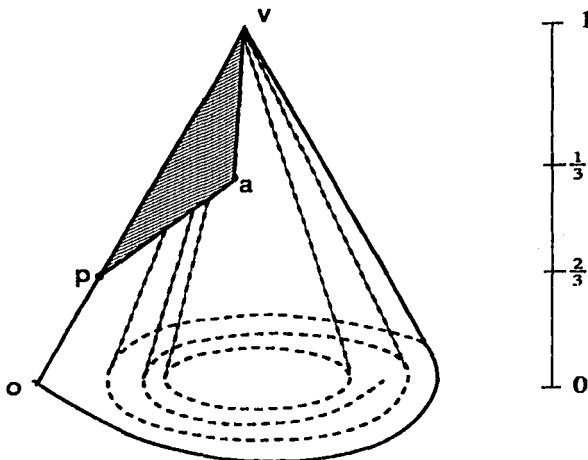


Figura 3.17 Triángulo en la sábana

Sea $z \in [0, 1]$ la altura. Se divide el continuo X en tres secciones, con respecto a la altura $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$.

En la parte de la sábana, sepárese un triángulo T con vértices v , a y p , como se muestra en la figura 3.17.

Ahora vamos a definir la función en $X - T$. En cada sección transversal, la función se define como la composición de una rotación y un cambio de altura. Sea α_z el ángulo de rotación a altura z , y sea $h(z)$ el cambio de altura.

Para $z = 0$, la sección se rota un ángulo $\alpha_0 = \frac{1}{3}$ en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para $z = \frac{1}{3}$, la sección se rota un ángulo $\alpha_{\frac{1}{3}} = 0$, es decir no se rota. Para $z = \frac{2}{3}$ se rota un ángulo $\alpha_{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}$ y para $z = 1$ se rota un ángulo $\alpha_1 = 0$. En las secciones intermedias se extiende linealmente la rotación, de manera que las únicas secciones que no se rotan son $z = \frac{1}{3}$, y $z = 1$. De este modo, las rotaciones hacen que el arco vap en la frontera del triángulo T , se envíe en el arco vp , como se muestra en la figura 3.18.

Ahora definiremos la función $h(z)$ en $X - T$. Para $z \in [\frac{2}{3}, 1]$ la función h manda cada sección transversal a altura z en el punto sobre el segmento vo a altura $3 - 3z$. En particular manda la sección de altura $\frac{2}{3}$ en el vértice v y el vértice v al punto o . Cuando $z \in [0, \frac{2}{3}]$, la altura de cada sección transversal se cambia de acuerdo a la función h que manda $[0, \frac{1}{3}]$ en 0 , y $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ en $[0, 1]$ linealmente. Es decir, la sección

transversal a altura z se envía a la sección transversal a altura $h(z)$.

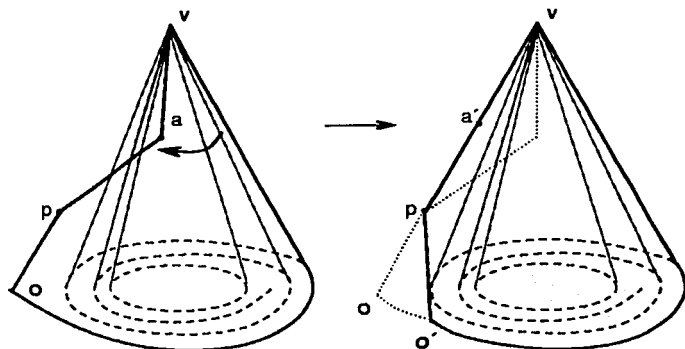


Figura 3.18 Rotaciones

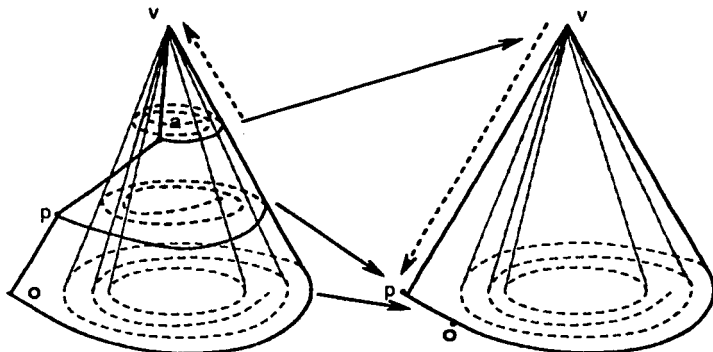


Figura 3.19 Función $h(z)$

La función definida en $X - T$ como la composición de las rotaciones mencionadas y el cambio de altura respectivo, es la función f . Para puntualizar diremos que toda la sección que se encuentra entre las alturas $\frac{2}{3}$ y 1 es enviada al segmento vo en la falda de acuerdo a la fórmula $3 - 3z$. Tal función no tiene puntos fijos. En efecto, el vértice v se envía bajo f en el punto o , el punto o en o' , la imagen de o bajo la rotación α_0 . Cada sección transversal de $X - T$ a altura $z \in (\frac{2}{3}, 1]$ se envía al arco $vo - \{v\}$, el cual no corta a tal sección transversal. Entonces no hay puntos fijos para tales z . Para $z \in [0, \frac{2}{3}]$, cada sección transversal se envía en una sección transversal a altura

distinta, excepto para $z = 0$ y $z = \frac{1}{2}$, pero en cada una de tales alturas la sección transversal se rotó un ángulo α , distinto de cero. Notemos que el segmento ap se envía linealmente en el arco vo , mandando a en v y p en o . También el arco av se envía en el arco vo , mandando a en v y v en p .

Así que para definir completamente f en X basta ahora definirla en T . Simplemente se proyecta linealmente el triángulo vap en ap , identificando los lados av y ap , como se muestra en la figura 3.20; y enviando el segmento ap en vo , mandando a en v y p en o . Es fácil verificar que tal función coincide con la función en $X - T$ previamente definida, en la frontera de T , y que no hay puntos fijos en T . Si hubiera puntos fijos, tales deberían estar en el segmento vp , pero tal segmento se envía bajo f en el punto o .

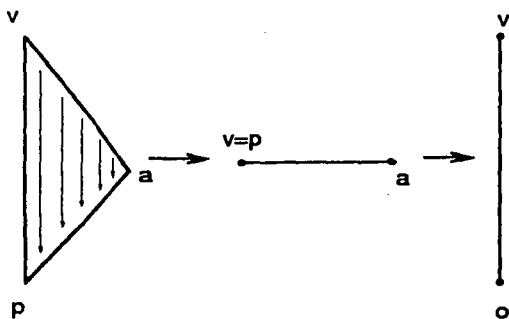


Figura 3.20 Función en T .

Entonces hemos definido una función del espacio X en sí mismo, libre de puntos fijos. Esto demuestra que el espacio no tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 3.8 Si $D \cup S$ es un disco con una espiral enredándose en su frontera, el cono sobre $D \cup S$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Claramente el cono sobre el disco se puede retraer al cono sobre el círculo, por lo que existe una retracción del cono sobre $D \cup S$ en el cono con falda del ejemplo anterior. Dado que las retracciones preservan la propiedad del punto fijo, y al cono con falda no tiene la p.p.f, podemos concluir que $\text{Cono}(D \cup S)$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 3.9 (Knill) Si B es la lata con falda entonces B tiene la propiedad del punto fijo, $B \times [0, 1]$ no tiene la propiedad del punto fijo, y existe un 3-disco C (a saber la lata sólida) tal que aun cuando B y C tienen la propiedad del punto fijo y $B \cap C$ es un disco, $B \cup C$ no tiene la propiedad del punto fijo.

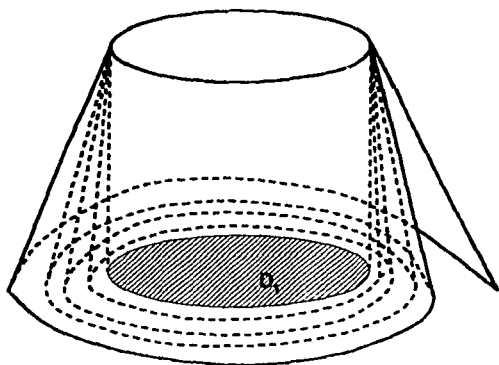


Figura 3.21 la Lata con falda

Demostración. El continuo B llamado *la lata con falda* se describe a continuación. En la base se pone un disco D_1 y hay una espiral que se aproxima a su orilla, también tenemos un cilindro que se levanta sobre la orilla de D_1 y, los puntos de la espiral se unen, por segmentos, con el borde superior del cilindro.

Otra forma de representar a B se muestra en la figura 3.22. En la base se pone un disco D que corresponde a la unión del disco D_1 con el cilindro y la espiral de la base en la representación anterior se sustituye por la espiral que baja sobre la circunferencia que rodea al nuevo $D_1 \subset D$.

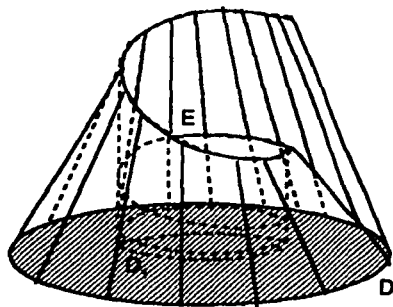


Figura 3.22 la Lata con falda

Lema 3.10 *El continuo B es contraíble.*

Para mostrar esto, primero le ponemos nombres a algunas de las partes de B . A la espiral le llamamos E , al disco en el plano (figura 3.22) le llamamos D , al disco interior le llamamos D_1 . Suponemos que D tiene radio 2 y que D_1 tiene radio 1. Ambos están contenidos en el plano xy y están centrados en el origen $(0,0,0)$. Sea C la frontera de D . Para cada punto $e \in E$, sea $p(e)$ el punto de C que le corresponde. Este punto $p(e)$ se puede construir proyectando sobre el plano (nos daría un punto en la frontera de D_1) y al resultado lo multiplicamos por 2. Dada $e \in E$, al segmento que une a e con $p(e)$ lo denotamos por $ep(e)$. Sea

$$R = \bigcup \{ep(e) : e \in E\}.$$

Entonces $B = D \cup R$ y $D \cap R = \partial D$. Ahora si, definimos $h : B \times [0,1] \rightarrow B$ en la siguiente forma. Si un punto q pertenece a un segmento de la forma $ep(e)$, $h(\{q\} \times [0,1])$ recorre linealmente al subsegmento de $ep(e)$ que va de q a $p(e)$ de manera que $h(q,0) = q$ y $h(q,1) = p(e)$. En la fórmula

$$h(q,t) = tp(e) + (1-t)q$$

Extendemos esta h definiéndola en el disco D por la fórmula $h(q,t) = t(2q) + (1-t)q$. Es decir h hace caminar al punto q hasta el punto $2q$. Observemos que h es una función continua, $h(q,0) = q$ para toda $q \in B$, $h(q,1) \in D$ para toda $q \in B$ y $h((0,0,0),t) = (0,0,0)$ para toda $t \in [0,1]$ (h no mueve al origen).

Como la h lleva a todo B en D y D es contraíble, podemos completar a h para obtener una contracción del espacio B .

Lema 3.11 *El continuo B tiene la propiedad del punto fijo.*

Supongamos por el contrario que existe una función libre de puntos fijos $f : B \rightarrow B$. Hallaremos una contradicción construyendo un poliedro contraíble X y una función continua $f_1 : X \rightarrow X$ que no tenga puntos fijos. Esto será contradictorio con el Teorema de Lefschetz que establece que tales poliedros tienen la propiedad del punto fijo ([Bro1, pp.25]). Por supuesto, X y f_1 tienen que ser contruidos usando la función f .

Primero mostraremos que existe un subarco J de D que une un punto $a_1 \in \partial D_1$ con un punto $a_2 \in \partial D$ y que satisface

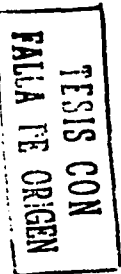
$$(i) J \cap D_1 = \{a_1\}, J \cap \partial D = \{a_2\}.$$

$$(ii) \text{ Para cada } a \in J, a \notin h(f(a) \times [0,1]).$$

Donde h es la función que definimos en el lema anterior. La condición (ii), lo que dice es que si desde a miramos hacia el origen, entonces no nos estorba $f(a)$.

Para probar la existencia de J , primero consideramos el conjunto

$$F = \{a \in B : a = h(f(a),t) \text{ para algún } t \in [0,1]\}$$



Notemos que $h(q, t) = \bar{v}$ para alguna $t \in [0, 1]$ si y sólo si $q = \bar{v}$. De modo que si ocurriera que $\bar{v} \in F$, entonces $\bar{v} = h(f(\bar{v}), t)$, de modo que $f(\bar{v}) = \bar{v}$ lo cual es absurdo pues f no tiene puntos fijos. Esto muestra que $\bar{v} \notin F$.

Para ver que F es cerrado, supongamos que $a \in \bar{F}$, entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, de puntos de F , tal que $\lim a_n = a$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $t_n \in [0, 1]$ tal que $a_n = h(f(a_n), t_n)$. Como $[0, 1]$ es compacto, podemos suponer que $\lim t_n = t$ para alguna $t \in [0, 1]$. Por la continuidad de f y h , tenemos que $a = h(f(a), t)$. Por lo tanto $a \in F$. Hemos probado que F es cerrado.

Sea $\pi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección en la i -ésima coordenada. Sea $g: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(q) = \begin{cases} f(q), & \text{si } f(q) \in D, \\ (\pi_3(f(q)) + 2) \frac{(\pi_1(f(q)), \pi_2(f(q)), 0)}{\|(\pi_1(f(q)), \pi_2(f(q)))\|}, & \text{si } f(q) \in R \end{cases}$$

Si $f(q) \in D \cap R$, entonces $f(q)$ está en ∂D , así que $f(q) = (\pi_1(f(q)), \pi_2(f(q)), 0)$ y $\|(\pi_1(f(q)), \pi_2(f(q)))\| = 2$ y $\pi_3 = 0$. De modo que la segunda definición de $g(q)$ es igual a $(0 + 2) \frac{f(q)}{2} = f(q)$. Esto muestra que g está bien definida. Ahora veremos que g es continua. Ya que $f^{-1}(B - D)$ es abierto y en esta parte la función está definida por una fórmula continua, g es continua en $f^{-1}(B - D)$. Ahora tomemos una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en D tal que $\lim q_n = q$, donde $q \in f^{-1}(D)$. Ya que f es continua y $f|_{f^{-1}(D)} = g|_{f^{-1}(D)}$, el caso interesante es cuando $q_n \notin f^{-1}(D)$ para cada n .

Dado que D es convexo, los segmentos qq_n están contenidos en D y sus diámetros convergen a cero. Como f es continua, $f(q_n)$ son subcontinuos de B cuyos diámetros convergen a cero. Como $f(q)$, $f(q_n) \in f(q_n)$, tenemos que $f(q)$ y $f(q_n)$ pertenecen a subcontinuos de B cuyo diámetro tiende a cero, $f(q) \in D$ y $f(q_n) \in B - D$. Entonces los conexos que tienden a $f(q)$ y a $f(q_n)$ intersectan a $\partial D \in R$. Esto sólo es posible si $f(q) \in \partial D \subset R$. De manera que $g(q_n)$ y $g(q)$ se definen todos con la segunda definición, la cual está dada en términos continuos. Por tanto $\lim g(q_n) = g(q)$. Por lo tanto g es continua.

Ahora veamos que g no tiene puntos fijos. Si ocurriera que $q = g(q)$, como f no tiene puntos fijos, tenemos que $q \neq f(q)$, de modo que $g(q)$ está dada por la segunda definición. Notemos que $q \in D$ implica que $\|q\| \leq 2$. Por otra parte, la norma de $g(q)$ es igual a $\pi_3(f(q)) + 2 \geq 0$. De modo que $2 = \|q\| = \pi_3(f(q) + 2)$. Es decir $\pi_3(f(q)) = 0$ y $f(q) \in R$, así que $f(q) \in \partial D \subset D$. De modo que $q = g(q) = f(q)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto g no tiene puntos fijos.

Definimos $k: (F \cap \mathbb{R}^2) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\bar{v}\}$ por

$$k(q, t) = \left((1-t) + \frac{t\|q\|}{\|q\| - \|f(q)\|} \right) (tq - g(tq))$$

Dada $q \in F$, por la definición de F y de h , $f(q)$ está en el segmento que une a q con el origen y además $q \neq f(q)$. De modo que $\|f(q)\| < \|q\|$. De manera que k está bien definida. Como g no tiene puntos fijos, $tq \neq g(tq)$. Si ocurriera que

$$(1-t) + \frac{t\|q\|}{\|q\| - \|f(q)\|} = 0,$$

entonces

$$\frac{\|q\| - \|f(q)\| - t\|q\| + t\|f(q)\| + t\|q\|}{\|q\| - \|f(q)\|} = 0$$

De modo que $\|q\| = (1-t)\|f(q)\|$. Esto es imposible pues $\|f(q)\| < \|q\|$ y $0 \leq 1-t \leq 1$. Esto comprueba que $k(q, t) \neq \bar{0}$ para todo $(q, t) \in (F \cap \mathbb{R}^2) \times (0, 1)$.

Dada $q \in F \cap \mathbb{R}^2$, $q \in D$ y $f(q)$ está en el segmento que une a $\bar{0}$ con q , de modo que $f(q) \in D$. Entonces

$$\frac{q - g(q)}{\|q\| - \|f(q)\|} = \frac{q - f(q)}{\|q\| - \|f(q)\|}$$

es un vector unitario en la dirección de q . De manera que

$$k(q, 1) = \left(\frac{\|q\|}{\|q\| - \|f(q)\|} \right) (q - g(q)) = q$$

Por lo tanto $k(q, 1) = q$ para toda $q \in F \cap \mathbb{R}^2$.

Notemos que $k(q, 0) = -g(0)$.

Por lo tanto k es una contracción de $F \cap \mathbb{R}^2$ en el espacio $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$. En consecuencia, $F \cap \mathbb{R}^2$ es un subespacio compacto de $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ que se puede contraer en $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$. Por tanto $\bar{0}$ está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - (F \cap \mathbb{R}^2)$. De lo contrario $F \cap \mathbb{R}^2$ no sería contraíble en $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$.

Entonces existe un rayo infinito desde cero en $\mathbb{R}^2 - (F \cap \mathbb{R}^2)$. Es decir, existe una función continua e inyectiva $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 - (F \cap \mathbb{R}^2)$ tal que σ es un homeomorfismo en su imagen, $\sigma(\bar{0}) = \bar{0}$, y $\sigma([0, \infty))$ no es acotado en \mathbb{R}^2 .

De aquí es fácil obtener el conjunto J que satisface las propiedades (i) y (ii)

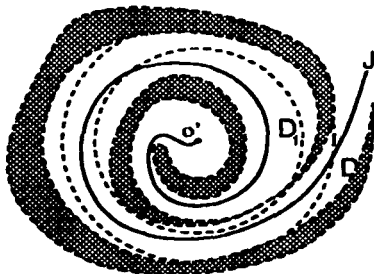


Figura 3.23 Arco J.

Sea A el anillo $\{q \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|q\| \leq 2\}$.

J es un arco que une dos puntos en la frontera de A , uno en el círculo de radio 1 y otro en el de radio 2. Es posible hallar un homeomorfismo de A en sí mismo, de forma que J se envíe a un segmento de línea J' que une a dos puntos con las mismas

características. En tal caso hay una retracción de A en $J' \cup \partial D$, por lo tanto existe una retracción $r : A \rightarrow J \cup \partial D$.

Extendamos la retracción al conjunto $A \cup R$ haciendo

$$r(q) = r(\pi_1(q), \pi_2(q), 0)$$

Dada $\delta \in (0, 2]$, sea $A_\delta = \{q \in \mathbb{R}^3 : 2 - \delta \leq \|(\pi_1(q), \pi_2(q), 0)\| \leq 2\}$. Ahora mostraremos que

(iii) Para toda $\delta \in (0, 2]$, existe $\chi > 0$ tal que

$$f(\partial D) \subset D \cup A_\delta \cup (D \times [\chi, \infty))$$

Supongamos por el contrario que existe $\delta \in [0, 2]$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $f(\partial D)$ no está contenido en $D \cup A_\delta \cup (D \times [\frac{1}{n}, \infty))$. Entonces existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $a_n \in \partial D$ tal que $f(a_n) \notin D \cup A_\delta \cup (D \times [\frac{1}{n}, \infty))$. Como ∂D es compacto, podemos suponer que $\lim a_n = a$ para alguna $a \in \partial D$. Entonces $\|(\pi_1(f(a_n)), \pi_2(f(a_n)), 0)\| < 2 - \delta$ y $\pi_3(f(a_n)) = 0$. Entonces $f(a) \in D$ y $\|f(a)\| < 2 - \delta$. Como ∂D es una circunferencia, los diámetros de los subarcos aa_n de ∂D que van de a a a_n tienden a cero, así que los diámetros de los subcontinuos $f(aa_n)$ también tienden a cero. Pero esto es imposible pues $f(a_n), f(a) \in f(aa_n)$, $0 < \pi_3(f(a_n))$, $\|f(a)\| < 2 - \delta$ y $f(a) \in D$. Esto termina la prueba de (iii).

Ahora mostraremos

(iv) Existe $\chi > 0$ tal que si $q \in \partial D$ y $0 < \pi_3(f(q)) < \chi$, entonces $q \notin r(h(\{f(q)\} \times [0, 1]))$.

Como f no tiene puntos fijos, existe $\epsilon > 0$ tal que $\|q - f(q)\| > \epsilon$ para todo q . Ya que la función r es continua, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{3}$, $\delta \leq 2$, y si $\|z - v\| < \delta$, entonces $\|r(z) - r(v)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $\chi > 0$ como en (iii) para $\frac{\epsilon}{2}$ y que cumpla $\chi < \frac{\epsilon}{2}$, y sea $q \in \partial D$ tal que $0 < \pi_3(f(q)) < \chi$. Entonces $f(q) \notin D$. Por la elección de χ concluimos que $f(q) \in A_\delta$. Entonces

$$2 - \frac{\delta}{2} < \|(\pi_1(f(q)), \pi_2(f(q)), 0)\| < \frac{\delta}{2}$$

y

$$0 < \pi_3(f(q)) < \frac{\delta}{2}$$

Así que existe $w \in \partial D$ tal que $\|f(q) - w\| < \delta$.

Si existiera $t \in [0, 1]$ tal que $q = r(h(f(q), t))$, como h va moviendo a los puntos hacia ∂D , tenemos que

$$\|h(f(q), t) - w\| < \delta, \quad \text{por la elección de } \delta$$

y entonces

$$\|r(h(f(q), t)) - w\| < \frac{\epsilon}{2} \quad (r(w) = w)$$

Así que

$$\|q - w\| < \frac{\epsilon}{2}$$

De modo que $\|q - f(q)\| < \epsilon$. Esto contradice la elección de ϵ y muestra que

$$q \notin \tau(h(\{f(q)\} \times [0, 1]))$$

Por lo tanto (iv) es cierto. Otra propiedad que necesitaremos es la siguiente.

(v) Existe un $\chi > 0$ tal que si $q \in R$, $(\pi_1(q), \pi_2(q), 0) \in J$ y $\pi_3(q) < \chi$, entonces $q \in F$.

Para probar (v), sea χ la distancia entre F y J . El número χ es positivo pues J y F son compactos ajenos. Dada $q \in R$ tal que $(\pi_1(q), \pi_2(q), 0) \in J$ y $\pi_3(q) < \chi$. Entonces

$$\|q - (\pi_1(q), \pi_2(q), 0)\| < \chi$$

Por la elección de χ , tenemos que $q \notin F$.

Ahora levantamos a J sobre R . Es decir encontramos $J_0 \in R$ tal que $J = \pi(J_0)$, donde $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Y además $\pi|_{J_0}: J_0 \rightarrow J$ es un homeomorfismo. Esto puede hacerse considerando a $R-D$ como un espacio cubriente de $A-D$, con la función cubriente $\pi|_{R-D}$. En los únicos puntos donde π no funciona como función cubriente es donde empieza la rampa $R-D$. Sin embargo, la técnica de espacios cubrientes sigue funcionando. La idea del levantamiento finalmente consiste en que, para todo punto $q \in A-D$, existe una vecindad V_q de q en $A-D$ tal que todas las componentes de $\pi^{-1}(V_q) \cap (R-D)$ tienen la propiedad de que π las envía homeomorficamente sobre V_q . Tomando las inversas de estos homeomorfismos se pueden levantar subarcos de J en una infinidad de maneras diferentes. El resto consiste en hacerlo de manera ordenada para levantar a J completo.

De hecho existe una cantidad numerable de levantamientos de J . Por lo que podemos suponer que $J_0 \subset \mathbb{R}^2 \times [0, \chi)$, donde χ se toma de forma que se satisfagan (iv) y (v).

Sea $q: J \rightarrow J_0$ la inversa de $\pi|_{J_0}: J_0 \rightarrow J$. Observemos que J_0 parte a la rampa $R-D$ en dos componentes, llamemos K a la componente que contiene al principio de la rampa. Entonces K es homeomorfo a un disco.

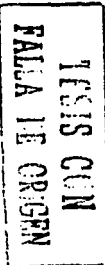
Sea $X = K \cup D$. Notemos que X es un poliedro contraíble.

Como χ satisface (v), $J_0 \cap F = \emptyset$. Como B es un espacio métrico existe una función continua $d: B \rightarrow [0, 1]$ tal que $d^{-1}(0) = F$ y $d^{-1}(1) = J_0$.

Finalmente definamos $F: X \rightarrow X$ por

$$F(x) = \begin{cases} h(f(x), d(x)), & \text{si } h(f(x), d(x)) \in X, \\ q(r(h(f(x), d(x)))) & \text{si } h(f(x), d(x)) \notin X, \end{cases}$$

Ahora veremos porqué la función F es continua. La función $\phi: B \rightarrow B \times [0, 1]$ dada por $b \rightarrow (f(b), d(b))$ es continua porque es continua coordenada a coordenada. La función $h: B \times [0, 1] \rightarrow B$ es continua por definición, por lo tanto la composición



$h \circ \phi : B \rightarrow B$ es continua. La primera parte de la definición de F es esta misma función restringida al cerrado $(h \circ \phi)^{-1}(X)$.

La composición $q \circ r$ es una función continua de B en $J_0 \cup \partial D$ que es la identidad en $J_0 \cup \partial D$, por lo tanto es una retracción. En efecto, si $b \in J_0$, $r(b) = \pi(b)$ y $q(r(b)) = q(\pi(b)) = b$. Y si $b \in \partial D$, entonces $r(b) = b = q(b)$. La composición $q \circ r \circ h \circ \phi$ es una función continua de B en $J_0 \cup \partial D$.

Restringida a $(h \circ \phi)^{-1}(J_0 \cup (R - K) \cup \partial D) = (h \circ \phi)^{-1}(J_0 \cup (B - X) \cup \partial D)$, se tiene la función continua $q \circ r \circ h \circ \phi$ que coincide con $h \circ \phi$ en $(h \circ \phi)^{-1}(\partial D \cup J_0)$. Esta última coincide con el segundo renglón en la definición de F .

Si tomamos una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X , tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $h(\phi(x_n)) \in R - X$ y $h(\phi(x)) \in D$, demostremos que $h(\phi(x)) \in \partial D$.

Supongámonos lo contrario, es decir que $p = h(\phi(x))$ es un punto interior de D . Sea V una vecindad de p en B , que no corte a ∂D . El punto x está en X , ya que X es cerrado. Entonces $p \in h(\phi(X))$. X es un continuo localmente conexo, entonces la imagen de X bajo la función $h \circ \phi$ es un continuo localmente conexo. Por lo tanto para cualquier vecindad W de p en B tal que $W \subset V$ se tiene que $W \cap h(\phi(X))$ contiene a un abierto conexo $U \cap h(\phi(X))$ de p en $h(\phi(X))$, donde U es un abierto en B . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U \subset W$, de lo contrario elegimos $U \cap W$ en vez de U . Por hipótesis U contiene a una infinidad de puntos de la forma $h(\phi(x_n)) \in (R - X) \cap h(\phi(X))$, los cuales se pueden tomar en componentes conexas en U , dado que B no es localmente conexo en p . En B un conexo que contenga a p y a un punto en $R - D$ debe contener a un punto en la frontera ∂D . Como U no corta a ∂D , entonces $U \cap h(\phi(X))$ no es conexo en $h(\phi(X))$. Esto es una contradicción al hecho de que p estaba en el interior del disco.

Entonces los únicos puntos límite donde el primero y segundo renglón de la definición de F coinciden, es cuando $h(\phi(x)) \in \partial D$ o $h(\phi(x)) \in J_0$. En tales puntos $q \circ r \circ h \circ \phi$ coincide con $h \circ \phi$ porque $q \circ r$ es una retracción en $J_0 \cup \partial D$. Por lo tanto la función F así definida es continua.

Veremos que la función no tiene puntos fijos. Supongamos que $x = F(x)$. Si $h(\phi(x)) \in X$, entonces $x = h(f(x), d(x)) \in X$. Esto significa que $x \in F$. Es decir, $d(x) = 0$, por lo tanto $x = h(f(x), d(x)) = h(f(x), 0) = f(x)$, lo cual contradice que f no tiene puntos fijos. Si $h(\phi(x)) \notin X$ entonces $h(\phi(x)) \in J_0$, pero J_0 no está en F debido a la elección de χ y la propiedad (v). Por lo tanto $x \neq h(\phi(x))$, esto contradice la suposición de que x era un punto fijo de F . Hemos probado que F es una función libre de puntos fijos del poliedro contraíble X en sí mismo. Esto termina nuestra prueba.

Lema 3.12 *El cono sobre X y el producto $X \times I$ no tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Note que X contiene como subespacio al disco con una espiral aproximándose alrededor, llamémosle B^0 . Entonces el cono $\text{Cono}(X)$ contiene como subespacio al cono sobre B^0 , que como sabemos, no tiene la propiedad del punto fijo. Aún más, demostraremos que $\text{Cono}(B^0)$ es un retracto de $\text{Cono}(X)$, lo que implica

que $\text{Cono}(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo. De lo contrario, $\text{Cono}(B^0)$ tendría la propiedad del punto fijo, debido a que cada retracto de un espacio con la propiedad del punto fijo tiene la propiedad del punto fijo.

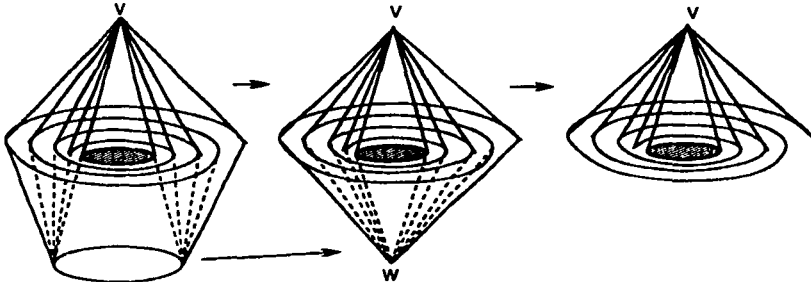


Figura 3.24 $\text{Cono}(B^0)$ es un retracto de $\text{Cono}(B)$

Para definir la retracción $r : \text{Cono}(X) \rightarrow \text{Cono}(B^0)$, se identifican todos los puntos en el círculo inferior (figura 3.24) de X en un punto w . Entonces se tiene en la parte inferior un cono homeomorfo a $\text{Cono}(B^0)$. Tal cono se refleja sobre $\text{Cono}(B^0)$, y para los puntos que unen v con un punto p de la parte inferior de X la función se extiende linealmente. La imagen de tal punto está en $\text{Cono}(B^0)$, dado que sus extremos lo están. La función así definida es continua porque es composición de una identificación, una reflexión y una extensión lineal. Cada punto en $\text{Cono}(X)$ se envía en $\text{Cono}(B^0)$, y deja cada punto en $\text{Cono}(B^0)$ fijo. Entonces es la retracción buscada.

Debido a un lema de Knill anteriormente probado (Lema 3.6), se tiene que cuando X es un continuo contraíble, $X \times I$ tiene la propiedad del punto fijo si y sólo si $\text{Cono}(X)$ la tiene. Por lo tanto en éste caso ni $X \times I$, ni $\text{Cono}(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.

Lema 3.13 Sea B como en el teorema 3.9. Entonces existe un 3-disco C de forma que $B \cup C$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Tomemos el continuo B dibujado en la figura 3.21. Sea C el disco tridimensional que se forma tomando el cilindro $D \times I$, con interior. Donde D es el círculo de la base. Notemos que el cilindro $D \times I$ se puede retraer en la tapa superior y la pared del cilindro. El centro de la tapa superior se traslada hacia arriba, obteniendo el espacio que se muestra en la siguiente figura.

Para definir una función de $B \cup C$ en sí mismo, libre de puntos fijos, usamos la función definida para mostrar que el cono sobre el círculo con espiral no tiene puntos fijos. Convengamos en que el vértice de $B \cup D$ está a altura 2, la base a altura 0, y el círculo superior Z (desde donde parte la sábana), está a altura 1. Si identificamos

¡ESIS CON
FINA DE ORIGEN

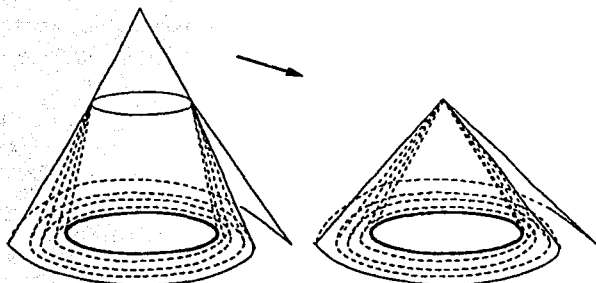
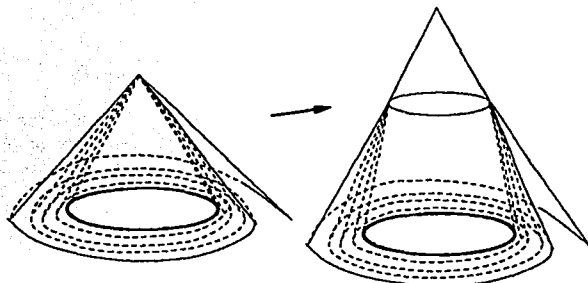
Figura 3.25 Identificación en BUC 

Figura 3.26 Función sin puntos fijos.

toda la parte superior (el cono sobre el círculo Z) en un solo punto, (figura 3.26), obtenemos un cono sobre el círculo con espiral M , cuyo vértice está a altura 1. En tal espacio aplicamos la función $g : M \rightarrow M$ libre de puntos fijos que usamos en el Teorema 3.7.

Después de aplicar tal función, se proyectan los puntos en la tercera parte superior del continuo, sobre el cono del círculo y se expande la altura hasta coincidir con la altura original 2. Todos los puntos a altura $z \geq 1$ se enviaron en el punto p , en la base del cono. Excepto por un triángulo T , cada sección transversal a altura $z \neq \frac{1}{3}$ se rotó un ángulo distinto de cero. Al expandir M y proyectar la figura como se indicó, el ángulo de rotación se preserva. Entonces no hay puntos fijos, a excepción, quizás del triángulo T y la sección $z = \frac{1}{3}$. En el triángulo no hay puntos fijos, porque el lado de T donde coincide T con su imagen, se envía en el punto p , el cual queda invariante después de la extensión. La sección $z = \frac{1}{3}$ se envía en la sección $2z$, por lo cual no queda fijo ningún punto en tal sección. (Figura 3.26).

De esta forma hemos encontrado una función libre de puntos fijos en BUC .

Ejemplos de espacios más sencillos que tengan propiedades similares a las anteriormente descritas son los siguientes. Su demostración requiere de métodos de cohomología.

Teorema 3.14 (López) *Existe un poliedro X con la propiedad del punto fijo y un disco D tal que $D \cap X$ es un arco pero $D \cup X$ no tiene la propiedad del punto fijo. [Lo1]*

Teorema 3.15 (López) *Existe un poliedro X con la propiedad del punto fijo tal que el producto $X \times [0, 1]$ no tiene la propiedad del punto fijo. [Lo1]*

Teorema 3.16 (López) *La propiedad del punto fijo no es un invariante para el tipo de homotopía en la categoría de los poliedros finitos. [Lo1]*

ESTA TESIS NO SALIÓ
DE LA BIBLIOTECA

Capítulo 4

Preguntas

Pregunta 4.0.1 *¿Existe un poliedro 2-dimensional con la propiedad del punto fijo con característica de Euler par?*

Pregunta 4.0.2 *¿Cada continuo arbolable tiene la propiedad del punto fijo?*

Esta pregunta ha sido contestada negativamente por Bellamy [Be1].

El siguiente problema ha sido llamado el problema más interesante en topología plana. Se sabe que cada continuo plano que no separa al plano es intersección de una secuencia decreciente de discos en el plano.

Pregunta 4.0.3 *¿Cada continuo aplanable que no separa al plano tiene la propiedad del punto fijo?*

Pregunta 4.0.4 *¿Un disco plano al cual se le quita un canal tiene siempre la propiedad del punto fijo?*

Pregunta 4.0.5 *¿Acaso cada continuo planar arco-conexo que no contenga una curva cerrada simple tiene la propiedad del punto fijo?*

Pregunta 4.0.6 *¿Si X es el continuo de la figura 3.11, $X \times [0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo?*

Pregunta 4.0.7 *¿Si C es un continuo plano con la propiedad del punto fijo y D es un disco que intersecta a C en un arco, debe $C \cup D$ tener la propiedad del punto fijo?*

Pregunta 4.0.8 *¿Si un continuo 1-dimensional X tiene la propiedad del punto fijo, también $X \times [0, 1]$?*

Pregunta 4.0.9 *¿Si P y Q son poliedros sin puntos separadores locales con la propiedad del punto fijo, debe $P \times Q$ tener la propiedad del punto fijo?*

Pregunta 4.0.10 *¿Cada homeomorfismo de un continuo contraíble en sí mismo deja un punto fijo?*

Pregunta 4.0.11 *Sea M el continuo plano que se forma con un triodo y una espiral que se aproxima a él. Sea $C(M)$ el cono sobre M . ¿ $C(M)$ tiene la propiedad del punto fijo?*

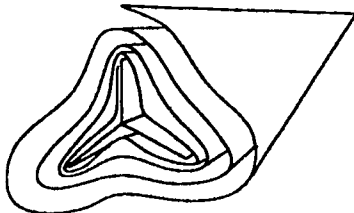


Figura 4.1 Cono sobre el triodo con espiral.

Bibliografía

- [Ay1] W.L. Ayres, Some generalizations of the Scherer fixed point theorem, *Fund. Math.*, 16 (1930) 332-336.
- [Ay2] W.L. Ayres, Concerning the arc-curves and basic sets of a continuous curve., *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 30 (1928), pp. 567-578.
- [Bel] D.P. Bellamy, A tree-like continuum without the fixed point property, *Houston J. Math.* 6 (1979), 1-13.
- [Bi1] R.H. Bing, The Elusive Fixed Point Property. *American Mathematical Monthly* 76 (1969) 119-132.
- [Bi2] R.H. Bing, A homogeneous indecomposable plane continuum, *Duke Math. J.*, 15 (1948) 729-742.
- [Bi3] R.H. Bing, Challenging Conjectures, *American Math. Monthly*, 74 (1967) 56-64.
- [Bo1] K.Borsuk, A Theorem on Fixed Points, *Bull. Acad. Polon. Sci.* 2 (1954), 17-20.
- [Bo2] K. Borsuk, Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui meme sans points invariants, *Fund. Math.* 24 (1935), 51-58.
- [Bo3] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Polish Scientific Publishers, Varsawa, Poland, 1967.
- [Bor1] Kim C. Border. *Fixed Point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press, 1985. ISBN 0-521-26564-9.
- [Br1] L.E.J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen* 71, 1912 97-115.
- [Bro1] Robert F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott Foresman and Company, 1971.
- [Ca1] M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, Some Fixed Point Theorems. *Annals of Mathematics* Vol. 54, No.1, July, 1951, 1-37.
- [Cas1] B.G. Casler, An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965) 559-566.

- [Cr1] Fred H. Croom, Basic concepts of algebraic topology, New York : Springer-Verlag, 1978, ISBN 0-387-90288-0.
- [Dul] James Dugundji, Topology, Allyn and Bacon Inc., 1966 ISBN 0-205-00271-4.
- [En1] R. Engelking, K. Sierlucky, Topology a geometric Approach, Berlin: Helder-mann, 1992. ISBN 3-88538-004-8.
- [Fa1] E. Fadell, On a coincidence theorem of F.B. Fuller, Pacific J. Math., 15 (1965) 825-834.
- [Fu1] F.B. Fuller, The homotopy theory of coincidences, Ann. of Math, 59 (1954) 219-226.
- [Gu1] Guzmán Tristán, Araceli. Dendroides y la propiedad de Kelley, Tesis de licenciatura, UNAM, 2002.
- [Ha1] O.H. Hamilton, Fixed points under transformations of continua which are not connected im Kleinen, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938) 18-24.
- [Ha2] O.H. Hamilton, A fixed point theorem for pseudo-arcs and certain other metric continua, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951) 173-174.
- [Hg1] Charles Hagopian, Fixed points in continua, Apuntes de la escuela de verano, Puebla, México, 2002.
- [Hg2] Charles Hagopian, A fixed point theorem for plane continua, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 351-354. Addendum 78 (1972), 289.
- [Hg3] Charles Hagopian, Uniquely arcwise connected continua have the fixed point property, Trans. Amer. Math. Soc. 248 (1979), 85-104.
- [Hi1] Morris W. Hirsch, A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary, Proc. Amer. Math.
- [Ke1] J.L.Kelley, Fixed sets under homeomorphisms, Duke Math. Journal, 5 (1939) 535-537.
- [Ki1] Shinichi Kinoshita, On some contractible continua without the fixed point property, Fund. Math., 40 (1953) 96-98.
- [Kn1] R.J. Knill, cones, products and fixed points, Fund. Math., 60 (1967) 35-46.
- [Ku1] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale simplexe, Fund. Math., 14, 1929, 132-137.
- [Ku2] Kuratowski K., Topology, vol. II, New York 1968.
- [Le1] S. Lefschetz, On the fixed point formula, Annals of Math., 38 (1937) 819-822.
- [Le2] S. Lefschetz, Algebraic Topology, Amer. Math. Soc. 1942.

- [Lol] W. Lopez, An example in the fixed point theory of polyhedra, Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 922-924.
- [Mal] García Maynez Adalberto, Tamáriz Mascarúa Angel, Topología General, Porrúa 1988, México.
- [Mil] P.Minc, A fixed point theorem for weakly chainable plane continua. Trans. Amer. Math. Soc. 317 (1990), 303-312.
- [Nal] Nadler, Jr., Sam B., Continuum Theory, Marcel Decker, Inc. 1992, ISBN 0-8247-8659-9.
- [Pol] L.S. Pontryagin, Foundations of Combinatorial Topology, Graylock Press, Rochester, N.Y. 1952.
- [Sm1] D.R. Smart, Fixed Point theorems, Cambridge University Press, 1974.
- [Tol] Torres Flores, Miriam. Caracterizaciones de Dendritas, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2001.
- [Val] I. van der Walt, Fixed and almost fixed points, Amsterdam Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1963.
- [Yo1] G.S. Young, Fixed point theorems for arcwise connected continua, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960) 880-884.
- [Wal] L.E. Ward, Jr., A Fixed Point Theorem for Chained Spaces, Pacific J. Math., 9 (1959) 1273-1278.
- [We1] Franz Wecken, Fixpunktklassen III, Mindestzahlen von Fixpunkten, Math. Ann., 118-119 (1941-43) 544-577.
- [Wh1] G.Th. Whyburn, Topological Analysis Princeton University Press, 1958.
- [Wh2] G.Th. Whyburn, Concerning the structure of a continuous curve. Amer. Jour. of Math, vol. 50 (1928), pp. 167-194.

TESIS CON
FOLIO ORIGINAL