

01131  
16



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**PRESERVACION DE AMPLITUD EN  
IMAGENES SISMICAS MIGRADAS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO GEOFISICO**

**P R E S E N T A**

**IVAN ROLON SANTOSCOY**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO CHAVEZ PEREZ**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **PAGINACION DISCONTINUA**

## **Agradecimientos**

Al Programa de Yacimientos Naturalmente Fracturados a través del cual obtuve el apoyo financiero para mi estancia en el Instituto Mexicano del Petróleo (proyecto D.00008).

Al consorcio en tomografía y modelado/migración de la universidad de Utah, E.U.A., (UTAM), en especial a Jianhua Yu del departamento de Geología y Geofísica, pues proveyó los códigos para el cálculo de tiempos de viaje, necesarios en la migración de Kirchhoff, que hicieron factible este trabajo.

Al Centro para Fenómenos de Onda de la Escuela de Minas de Colorado, E.U.A., pues el paquete educativo Seismic Un\*x (Stockwell, 1999) fue una herramienta valiosa en este trabajo.

A Jorge Mendoza Amuchástegui, quien siempre mostró paciencia y disposición para resolver los problemas que se presentaron a lo largo de este trabajo.

A Sergio Chávez Pérez, director de esta tesis.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

SECRET  
UNCLASSIFIED

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Contenido

Agradecimientos	i
Contenido	iii
Resumen	1
1 Introducción	2
1.1 Introducción	2
1.2 Migración	4
Migración antes de apilar	5
Migración de Kirchhoff	5
2 Técnicas de preservación de amplitud en imágenes sísmicas migradas	8
2.1 Introducción	8
2.2 Condiciones de representación	9
2.3 Modelado e inversión de la aproximación de Born	11
Modelado de Born.	12
Inversión de la aproximación de Born.	15
Comentarios	18
2.4 Inversión en términos de la reflectividad	19
Aproximación de Kirchhoff	20
Inversión de la aproximación de Kirchhoff	24
2.5 Inversión en dos y media dimensiones	28
Fase estacionaria	30
El determinante de Beylkin en dos y media dimensiones	31
Medio de referencia de velocidad constante	34
3 Resultados	38
3.1 Introducción	38
3.2 Estimación del error	38
Configuración de fuente común.	41
Configuración de distancia entre fuente y receptor común	42
3.3 Ejemplos	44

4 Conclusiones	52
Apéndices	I
Apéndice A. El método de la fase estacionaria.	I
Apéndice B. Teoría de rayos.	II
Apéndice C. Submuestreo	IV
Referencias	VII

## Resumen

Los algoritmos de migración/inversión de Kirchhoff construyen una imagen del subsuelo al sumar las trazas sísmicas a lo largo de trayectorias de difracción. Es posible, asignando pesos a las trazas, estimar el coeficiente de reflexión. Para efectos de representación sísmica, el esfuerzo necesario, en términos de tiempo de cómputo, para calcular dichos pesos no se justifica, pues no implica un mejoramiento sustancial en la calidad de la imagen. Por lo que usualmente no se emplea peso alguno. Una solución eficiente al problema de preservar la amplitud durante la migración consiste en calcular los pesos considerando una velocidad de referencia constante. Los pesos correspondientes a un medio de velocidad constante corrigen la divergencia geométrica del frente de onda y permiten obtener imágenes de amplitud "verdadera". Además, dichos pesos se pueden expresar en función de la distancia entre la fuente y el receptor, del tiempo de arribo y de la profundidad del medio, por lo que es posible ponderar las trazas fuera de los ciclos del algoritmo. El error debido a la aproximación es pequeño, depende de la inclinación del reflector y del ángulo de incidencia, y permite estimar con precisión el coeficiente de reflexión en medios estructuralmente simples, sin variaciones laterales.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



# 1 Introducción

## 1.1 Introducción

En la búsqueda de hidrocarburos, la prospección sísmica es la tecnología que ha permitido abatir sustancialmente los costos, al reducir el riesgo de perforar pozos no productores. El éxito del método sísmico se debe a que permite obtener con alta resolución, imágenes precisas de la estratigrafía y la estructura del subsuelo. Sin embargo, para los objetivos de exploración actuales, ya no es posible localizar con certeza los yacimientos de hidrocarburos a partir de una imagen estructural o estratigráfica. Esto se debe a que los yacimientos que se podían detectar con una imagen estructural ya han sido encontrados y son explotados. Por otro lado, con el objeto de explotar de la manera más eficiente los yacimientos de hidrocarburos, es necesario conocer tanto la estructura de las formaciones sedimentarias como la distribución de algunas de sus propiedades físicas, como la presión de poro y la permeabilidad. Las necesidades actuales requieren detectar directamente la presencia de hidrocarburos y determinar las propiedades físicas de los yacimientos a partir de los datos sísmicos. La presencia de hidrocarburos en una roca altera su impedancia acústica, por lo que es posible detectar hidrocarburos con base en mediciones del coeficiente de reflexión. Además, a partir del coeficiente de reflexión es posible determinar las propiedades elásticas que permiten caracterizar los yacimientos. El interés de este trabajo se centra en estimar el coeficiente de reflexión de onda plana a partir de datos de perfiles sísmicos de un componente. Por datos sísmicos de un componente se debe entender la medición del componente vertical de la velocidad de partícula (medio terrestre) o bien la medición de la presión (medio marino).

En un régimen de alta frecuencia, la amplitud de un reflejo sísmico primario está gobernada por diversos factores: la directividad de la fuente, la divergencia geométrica del frente de onda, la absorción del medio y las pérdidas por transmisión en las interfaces (O'Doherty y Anstey, 1971). La divergencia geométrica del frente de onda depende del Jacobiano del rayo. El

Jacobiano del rayo se puede calcular a partir del modelo de velocidad que mejor enfoque la imagen sísmica. Por preservación de la amplitud durante la migración debe entenderse un algoritmo que corrija el efecto de la divergencia geométrica del frente de onda, a partir del modelo de velocidad. Un algoritmo de migración que preserve la amplitud permite estimar el coeficiente de reflexión, siempre y cuando, las pérdidas por transmisión y por absorción puedan ser despreciadas

En un experimento sísmico, un sismograma está conformado por ondas de superficie, ondas de cuerpo (reflejos primarios y múltiples) y ruido. Para fines de prospección sísmica, todas aquellas señales que no sean arribos primarios representan ruido; así que el primer paso en la estimación del coeficiente de reflexión radica en separar las ondas de superficie y los reflejos múltiples de los reflejos primarios. En esta tesis no discuto como separar los reflejos primarios ni como construir un modelo de velocidades, únicamente discuto y aplico una técnica de migración/inversión que preserve amplitudes, la migración de Kirchhoff (Bleistein et al., 1987). Esto es, empleo un algoritmo de migración que permite corregir los efectos debidos a la divergencia geométrica del frente de onda, dando como resultado una imagen sísmica migrada y una estimación del coeficiente de reflexión.

Los algoritmos de migración de Kirchhoff construyen una imagen del subsuelo al sumar los datos ponderados de las trazas sísmicas a lo largo de trayectorias de difracción. La posición de los reflectores depende únicamente de los tiempos de arribo de los reflejos y del modelo de velocidad. Los pesos no alteran la posición de los reflectores, pero controlan las amplitudes de la señal en la imagen. Diseñando los pesos es posible corregir la divergencia geométrica del frente de onda.

En el Capítulo 2 de esta tesis, explico los principios en que se basan los algoritmos de Kirchhoff para producir una imagen de los reflectores. Además, con base en dos modelos del campo reflejado, el modelo de Born y la aproximación de Kirchhoff (Bleistein et al., 2001), expongo y discuto las expresiones analíticas de los pesos que permiten estimar el coeficiente de reflexión.

Los pesos del algoritmo de Kirchhoff que permiten estimar la reflectividad del subsuelo dependen de diversos factores: las amplitudes de los rayos incidente y reflejado, el parámetro de rayo, el valor de la velocidad y de la densidad del medio en la fuente, en el punto de reflejo y en el receptor, el ángulo de despegue en la fuente y el ángulo de incidencia en el receptor. Dichos

pesos deben calcularse para cada traza en los datos de entrada y para cada punto de la imagen, por lo que el costo en términos de tiempo de cómputo de la migración está dominado por el cálculo de los pesos. Una manera de calcular eficientemente los pesos de la migración, sin que ello implique esfuerzo adicional alguno, consiste en aproximar los pesos de un medio de referencia de velocidad constante (Dellinger et al., 2000). Tales pesos no degradan la calidad de la imagen, balancean las amplitudes y proporcionan una aproximación de las amplitudes “verdaderas”.

En el Capítulo 3 de esta tesis, empleo dicha aproximación para estimar el coeficiente de reflexión de reflectores planos, inclinados, en un medio de velocidad constante, con configuraciones de fuente común y distancia fuente-receptor constante. Además, presento una estimación analítica del error de la aproximación.

Finalmente, uno de los problemas al diseñar un algoritmo de migración de Kirchhoff radica en calcular con precisión a partir de datos muestreados la integral de los datos a lo largo de superficies de difracción. En el Apéndice C ilustro una forma de resolver este problema.

En la sección restante de este capítulo, expongo, para el lector poco familiarizado con la migración sísmica, en qué consiste la migración antes de apilar y cual es la migración de Kirchhoff.

## **1.2 Migración**

La gráfica de la amplitud de la señal de arribos primarios, en función de la posición del punto medio entre la fuente y el receptor y del tiempo de arribo, es una imagen en “tiempo” de la estructura y estratigrafía del subsuelo. Sin embargo, a partir de dicha imagen no es posible determinar con precisión la posición de los reflectores. Para ello se emplea una técnica conocida como migración cuyo fin es trasladar los eventos sísmicos a la posición en que se originaron dando como resultado una imagen en “profundidad” de los reflectores, en la cual es posible medir la posición de los reflectores. La migración se lleva a cabo al aplicar una condición de representación al campo de reflejos extrapolado a distintas profundidades.

## Migración antes de apilar

Para entender como se forma una imagen migrada de los reflectores es necesario recordar el principio de representación enunciado en Claerbout (1971) según el cual: *un reflector existe en los puntos del subsuelo en que el primer arribo de la onda descendente coincide en tiempo con el arribo de la onda ascendente* (Figura 1.2-1). Por onda descendente, se debe entender a la onda incidente producida por la fuente y por onda ascendente se debe entender la onda reflejada. Con base en el principio de representación, se puede formar una imagen de los reflectores al extrapolar el campo reflejado y deconvolverlo por el campo incidente o bien al evaluar el campo reflejado en el tiempo de arribo de la onda incidente (migración de Kirchhoff).

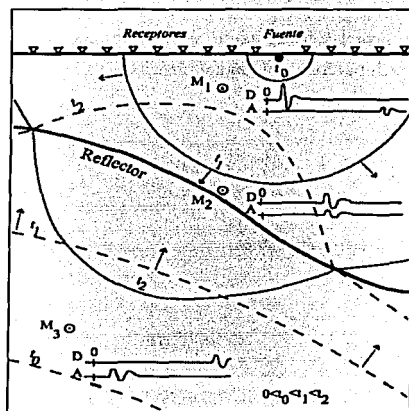


Figura 1.2-1. Ilustración de la condición de representación. Tomada de Claerbout (1971). En la figura se muestra un experimento sísmico. Con línea continua se muestran, en tres tiempos distintos,  $t_0$ ,  $t_1$  y  $t_2$ , los frentes de onda del campo incidente (onda descendente) y con línea punteada los frentes de onda del campo reflejado (onda ascendente). Las flechas indican la dirección de propagación de los frentes de onda. En tres distintas posiciones, en puntos ubicados por encima ( $M_1$ ), por debajo ( $M_3$ ) y sobre el reflector ( $M_2$ ) se muestran los sismogramas de la onda descendente (D) y ascendente (A). Como se observa en el diagrama, únicamente en puntos ubicados sobre el reflector los arribos de la onda ascendente y descendente son coincidentes en el tiempo.

## Migración de Kirchhoff

La migración de Kirchhoff consiste en extrapolar el campo reflejado registrado en superficie, empleando la integral de Kirchhoff, y evaluarlo al tiempo de arribo de la onda descendente (principio de representación). La integral de Kirchhoff es una solución al problema de determinar el campo de presión en el interior de un cuerpo, producido por fuentes exteriores al

cuerpo, a partir de los valores de la presión y de la velocidad de partícula sobre la superficie del cuerpo. Dicha solución requiere conocer la respuesta al impulso del medio, función de Green.

Dada una función de Green de la ecuación de onda acústica, su contraparte acausal, esto es, el complejo conjugado de su transformada de Fourier, también es una solución válida de la ecuación de onda. Cualquiera de las dos, la causal y la acausal, puede ser empleada en la solución integral de Kirchhoff. La diferencia radica en que la primera expresa el valor del campo en función de los valores pasados del campo, sobre la superficie del cuerpo, y la segunda en función de los valores futuros del campo, sobre la superficie del cuerpo (Wapenaar et al., 1989). Para fines de migración, se emplea la función acausal de Green porque, en relación con puntos del subsuelo, las señales registradas en la superficie son los valores futuros del campo ascendente. Esta solución es una aproximación estable, puesto que atenúa las ondas evanescentes.

En un medio acústico de velocidad de propagación constante,  $c$ , la función acausal de Green, es decir, la respuesta acausal del medio en un punto  $\mathbf{x}$  debida a un impulso en  $\mathbf{x}'$  es

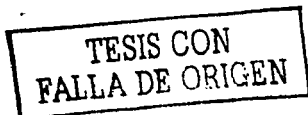
$$G(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (1.2.1)$$

La solución de Kirchhoff que expresa al campo de presión  $P(\mathbf{x}', t)$  es

$$P(\mathbf{x}', t) = \frac{1}{2\pi} \int \int P(\mathbf{x}, \omega) \frac{1 + i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dx^2 e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.2.2)$$

Evaluando el campo reflejado al tiempo de arribo de la onda incidente,  $t_s$ , y notando que el tiempo de viaje al receptor,  $t_R$ , es el cociente de la distancia entre la velocidad se obtiene la expresión final de la migración de Kirchhoff, esto es,

$$I(\mathbf{x}') = P(\mathbf{x}', t_s) = \int P(\mathbf{x}, \omega) W(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{-i\omega(t_s+t_R)} dx^2 d\omega \quad (1.2.3)$$



Esta ecuación expresa la imagen migrada,  $I(x)$ , como la suma ponderada sobre superficies de difracción de las trazas sísmicas. Se puede formar la imagen migrada procesando una traza a la vez, si se agregan a la imagen los datos de cada traza, distribuidos sobre isócronas. Esta es una de las formas más socorridas de programar los algoritmos de Kirchhoff (Gray et al., 2001). En la Figura 1.2-2 muestro la geometría del problema, y en la Figura 1.2-3 muestro las isócronas correspondientes a un par de fuente y receptor. En el siguiente capítulo, evaluando de manera asintótica la ecuación (1.2.3), muestro cómo la integral de Kirchhoff construye una imagen de los reflectores.

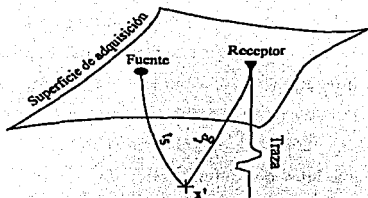


Figura 1.2-2. Geometría del problema. La imagen en el punto  $x'$  se construye al sumar los datos de las trazas sísmicas a lo largo de superficies de difracción.

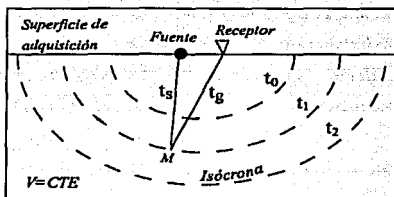


Figura 1.2-3. La imagen migrada, en los algoritmos de Kirchhoff, se puede construir agregando a la imagen los datos de cada traza, distribuidos sobre isócronas. En esta figura se muestran las isócronas, de un par fuente-receptor, correspondientes a tres tiempos distintos ( $t_0$ ,  $t_1$  y  $t_2$ ).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2 Técnicas de preservación de amplitud en imágenes sísmicas migradas

### 2.1 Introducción

La migración de Kirchhoff genera una imagen de los reflectores a partir de tiempos de arribo de reflejos primarios. Los pesos del operador no alteran la posición de los reflectores, pero controlan la amplitud de la imagen. Si se diseñan adecuadamente los pesos, además de obtener una imagen del subsuelo, se pueden estimar propiedades del medio.

En este capítulo explico cómo el operador de Kirchhoff construye una imagen de los reflectores y a partir de dos modelos del campo reflejado, el modelo de Born y la aproximación de Kirchhoff, expongo como diseñar los pesos del operador para estimar el coeficiente de reflexión o la perturbación.

El modelo de Born del campo difractado se obtiene al aplicar la teoría de perturbación a un medio acústico de densidad constante. Si la perturbación es pequeña, el modelo de Born establece una relación lineal entre el campo reflejado y la perturbación.

Por su parte, la aproximación de Kirchhoff se basa en la teoría de rayos y establece una relación lineal entre el coeficiente de reflexión y el campo reflejado. La aproximación de Kirchhoff es un modelo más general del campo reflejado pues no requiere que la perturbación sea pequeña.

Para el caso particular en el que las propiedades del medio no varían en una dirección, los datos sísmicos adquiridos a lo largo de una línea, orientada en la dirección de la inclinación de las capas, son suficientes para determinar las características del medio. En la última sección de este capítulo muestro como el operador de Kirchhoff se puede adaptar a esta situación (Bleistein et al., 1987), conocida como inversión en dos y media dimensiones. Finalmente, concluyo este capítulo exponiendo la aproximación sugerida por Dellinger et al. (2000) para calcular de manera eficiente los pesos del operador.

## 2.2 Condiciones de representación

El operador de Kirchhoff forma una imagen de los reflectores al sumar el campo de reflejos primarios sobre superficies de difracción. Si la geometría de la adquisición se expresa en términos de dos coordenadas  $(\xi_1, \xi_2)$ , es decir si la posición de la fuente y del receptor son funciones de  $\xi$ , la expresión del operador de Kirchhoff es la siguiente

$$I(\mathbf{y}) = \int W(\omega, \mathbf{y}, \xi) \cdot D(\omega, \xi) \cdot e^{-i\omega\phi(\mathbf{y}, \xi)} d\xi^2 d\omega, \quad (2.2.1)$$

donde  $I(\mathbf{y})$  es la imagen migrada, y es el vector de posición de la imagen,  $D(\omega, \xi)$  es la transformada de Fourier de las trazas sísmicas,  $\phi(\mathbf{y}, \xi)$  es la suma de los tiempos de viaje de la fuente al punto de la imagen y del punto de la imagen al receptor,  $\omega$  es la frecuencia y  $W(\omega, \mathbf{y}, \xi)$  son los pesos.

Sin pérdida de generalidad se puede expresar un evento sísmico en términos de la ondícula  $F(\omega)$ , de la amplitud de la señal  $A(\xi)$  y del tiempo de arribo del reflejo  $t_D(\xi)$  como,

$$D(\omega, \xi) = F(\omega) \cdot A(\xi) \cdot e^{i\omega t_D(\xi)}. \quad (2.2.2)$$

Sustituyendo la expresión (2.2.2) en la ecuación (2.2.1) se puede emplear el método de la fase estacionaria para evaluar el operador de Kirchhoff. El método de la fase estacionaria (ver Apéndice A) establece que el resultado de la integral está dominado por el valor del integrando de aquellos puntos en que la fase es estacionaria; esto es, en aquellos puntos en que la derivada de la fase con respecto a las variables de integración es nula.

Las condiciones de fase estacionaria del operador de Kirchhoff se conocen como condiciones de representación (*imaging conditions*, ver Liu y Bleistein, 1995) y son las siguientes,

$$\begin{cases} \frac{\partial t_D}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial t_D}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Por otro lado, si suponemos que la duración de la ondícula es pequeña, entonces al evaluar la integral (2.2.1) en términos de la frecuencia, el resultado de la migración de Kirchhoff será distinto de cero sólo si

$$\phi(\mathbf{y}, \xi) = t_D(\xi) \quad (2.2.4)$$

Las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) establecen que el operador de Kirchhoff forma una imagen en aquellos puntos cuya superficie de difracción es tangente a la superficie de tiempos de arribo de los reflejos.

Para interpretar este resultado consideremos lo siguiente: para cada valor de  $\xi$  se formará una imagen en aquellos puntos y que satisfacen las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4). Al resolver estas ecuaciones podemos plantear a  $y$  en función de  $\xi$ . Si diferenciamos a la ecuación (2.2.4) con respecto a  $\xi$ , considerando a  $y$  como una función de  $\xi$ , se obtiene que

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \cdot \nabla_y \phi(\mathbf{y}, \xi) = \frac{\partial t_D}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \cdot \nabla_y \phi(\mathbf{y}, \xi) = \frac{\partial t_D}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

y si aplicamos las condiciones (2.2.3) se concluye que se forma una imagen en los puntos en que

$$\begin{cases} \nabla_y \phi(\mathbf{y}, \xi) \cdot \frac{dy}{d\xi_1} = 0, \\ \nabla_y \phi(\mathbf{y}, \xi) \cdot \frac{dy}{d\xi_2} = 0. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Las ecuaciones (2.2.6) indican que la superficie solución de las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) es tangente a las isócronas (ley de Snell), es decir, es la envolvente de las isócronas.

Por otro lado, cabe resaltar que si para un valor de  $\xi$  más de un punto satisface las condiciones de representación, entonces el operador de Kirchhoff producirá una imagen en cada

uno de ellos y no es posible determinar en que punto se encuentra realmente el reflector. Por consiguiente el operador de Kirchhoff producirá una imagen errónea del reflector. Esto puede ocurrir cuando se presentan cústicas en el campo de ondas.

En conclusión, el operador de Kirchhoff construye una imagen de los reflectores con base en los tiempos de arribo de reflejos primarios que satisfacen la ley de Snell. Dado que la ley de Snell rige la reflexión de los campos de ondas, el operador de Kirchhoff puede generar una imagen de los reflectores incluso con datos de ondas convertidas en medios anisótropos. Por ahora, he explicado en qué forma el operador de Kirchhoff forma una imagen sin tomar en cuenta la amplitud de la señal. El siguiente paso consiste en aplicar el operador de Kirchhoff a datos modelados con la aproximación de Born y diseñar los pesos de forma que el resultado de la migración sea la perturbación.

### 2.3 Modelado e inversión de la aproximación de Born

La aproximación de Born permite calcular el campo reflejado con base en un método conocido como *Teoría de Perturbación* (Bleistein et al., 2001). En esta teoría una cantidad desconocida se expresa como la suma de una cantidad de referencia y una desviación a esta llamada *perturbación*. En el procesamiento acústico de datos sísmicos, la perturbación del medio se conoce como *difrador*. Análogamente, la función de *Green* del medio (respuesta al impulso) se puede expresar como la suma de la función de Green de un medio cuya velocidad es igual a la velocidad de referencia y de una desviación a esta, o perturbación, conocida como campo difractado.

La integral de Born expresa al campo difractado como la integral sobre todo el espacio de la perturbación escalada por el producto de las respuestas al impulso del medio de referencia. Al emplear la teoría de rayos para aproximar la respuesta al impulso en el medio de referencia (ver Apéndice B), la aproximación de Born adquiere la estructura de un operador elíptico seudodiferencial (Bleistein et al., 2001). Estos operadores poseen la característica de ser invertibles.

### Modelado de Born.

Sea  $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$  la respuesta al impulso, en el punto de coordenadas  $\mathbf{x}$  debida a un impulso en  $\mathbf{x}_s$ , de un medio acústico de densidad constante.  $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$  satisface la ecuación de onda, esto es,

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (2.3.1)$$

donde  $v(\mathbf{x})$  es la velocidad del medio y  $\delta(\mathbf{x})$  es la función impulso. Sin pérdida de generalidad, definiendo que  $\alpha(\mathbf{x})$  es la perturbación y  $c(\mathbf{x})$  es la velocidad de referencia, podemos establecer que

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{x})} = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} (1 + \alpha(\mathbf{x})), \quad (2.3.2)$$

Por otro lado, podemos expresar al campo de presión  $U(\mathbf{x})$  como la suma de dos campos  $U_i(\mathbf{x})$  y  $U_s(\mathbf{x})$ , a  $U_i(\mathbf{x})$  se le conoce como campo de referencia mientras a  $U_s(\mathbf{x})$  se le designa campo difractado, de tal forma que al sustituir la ecuación (2.3.2) en la ecuación (2.3.1) se tiene que

$$\left[ \nabla^2 U_i + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} U_i \right] + \left[ \nabla^2 U_s + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} U_s \right] = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) - \alpha(\mathbf{x}) \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} [U_i + U_s]. \quad (2.3.3)$$

Esta es una ecuación con dos incógnitas, y para resolverla podemos imponer una restricción: exigimos que  $U_i(\mathbf{x})$  satisfaga la ecuación de onda en el medio de referencia. Esto es, imponemos que

$$\nabla^2 U_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} U_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s). \quad (2.3.4)$$

Al sustituir la ecuación (2.3.4) en (2.3.3) se desprende que el campo difractado debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^2 U_s + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} U_s = -\alpha(\mathbf{x}) \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} [U_l + U_s]. \quad (2.3.5)$$

Podemos emplear la identidad de Green\* junto con la respuesta al impulso en el medio de referencia para transformar a la ecuación (2.3.5) en una ecuación integral,

$$U_s(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = \omega^2 \int \frac{\alpha(\mathbf{x})}{c^2(\mathbf{x})} [U_l(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) + U_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)] g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g, \omega) dV \\ - \int U_s \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial U_s}{\partial n} ds, \quad (2.3.6)$$

donde  $g(\mathbf{x})$  es la respuesta al impulso en el medio de referencia, esto es, satisface la ecuación

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g). \quad (2.3.7)$$

El dominio de la integración es todo el espacio, por lo que para calcular la integral de superficie se considera una esfera centrada en el origen y se calcula el límite cuando el radio  $R$  tiende a infinito. Si todas las fuentes de los campos  $U_s(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x})$  se encuentran en una región acotada, es decir, no hay fuentes en el infinito, entonces los campos  $U_s(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x})$  satisfacen las condiciones de irradiación de Sommerfeld (Bleistein, 1984). Las condiciones de irradiación de Sommerfeld implican que en puntos alejados de la fuente el frente de onda tiende a ser esférico, se propaga en la dirección radial y la amplitud de la onda decrece como el inverso de la distancia al origen. Las condiciones de Sommerfeld son,

---

\* La identidad de Green es la siguiente,

$$\int_D \nabla^2 g - g \nabla^2 f \, dV = \int_{\partial D} (\nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

donde  $f$  y  $g$  son dos funciones escalares de variable vectorial, continuas y diferenciables, ver Hsu (1987).

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot U \leq M, \quad (2.3.8)$$

donde  $M$  es algún valor, y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} U \right) = 0. \quad (2.3.9)$$

Bajo las condiciones de Sommerfeld, el integrando de la integral de superficie decrece como  $o(R^{-2})$ , mientras que el área de integración aumenta como  $O(R^2)$ , por lo que la integral es de orden  $o(1)^\dagger$ . Estas condiciones simplifican la ecuación (2.3.6) al anular la integral de superficie.

Por otro lado, si la perturbación es lo suficientemente pequeña de tal forma que la amplitud del campo difractado sea despreciable con respecto a la amplitud del campo incidente, entonces la aproximación de Born permite obtener una solución integral del campo difractado,

$$U_s(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = \omega^2 \int \frac{\alpha(\mathbf{x})}{c^2(\mathbf{x})} U_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g, \omega) dV. \quad (2.3.10)$$

Para emplear la ecuación (2.3.10) es necesario calcular la respuesta al impulso del medio de referencia. Con base en la teoría de rayos, se puede aproximar la respuesta al impulso en términos de la amplitud de la onda y del tiempo de arribo, es decir, se propone que

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = A(\mathbf{x}) e^{i\omega \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)}. \quad (2.3.11)$$

---

<sup>†</sup> Dadas dos funciones  $f(\lambda)$  y  $g(\lambda)$ , se dice que  $f(\lambda)$  es de orden  $O$  de  $g(\lambda)$ , y se escribe  $O(g(\lambda))$ , si

$$|f(\lambda)| \leq k \cdot |g(\lambda)|, \quad \lambda \geq \lambda_0,$$

donde  $\lambda_0$  y  $k$  son dos constantes positivas. Si la constante  $k$  es arbitrariamente pequeña entonces se dice que  $f(\lambda)$  es de orden  $o$  de  $g(\lambda)$ , ver Bleistein (1984).



Donde,  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$  satisface la ecuación de transporte y  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$  satisface la ecuación eikonal (ver Apéndice B). La función  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$  expresa la amplitud del campo de onda en el punto de coordenadas  $\mathbf{x}$  debido a una fuente en el punto de coordenadas  $\mathbf{x}_s$ . La función  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$  es el tiempo de viaje entre los puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_s$ . Sustituyendo en la integral (2.3.10) la expresión (2.3.11) obtenemos que

$$U_s(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = \omega^2 \int \frac{\alpha(\mathbf{x})}{c^2(\mathbf{x})} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g) e^{i\omega\phi(\mathbf{x}, \xi)} d\mathbf{x}^3, \quad (2.3.12)$$

donde

$$\phi(\mathbf{x}, \xi) = \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g). \quad (2.3.13)$$

### *Inversión de la aproximación de Born.*

Sea  $D(\xi, \omega)$  el campo difractado medido. Nuestro objetivo es aplicar el operador de Kirchhoff a  $D(\xi, \omega)$  y determinar los pesos del operador de tal forma que el resultado de la migración sea la perturbación. Es decir, se busca determinar a  $W(\mathbf{y}, \xi, \omega)$  a través de la ecuación integral

$$\alpha(\mathbf{y}) = \int \int W(\mathbf{y}, \xi, \omega) D_\xi(\omega, \xi) e^{-i\omega\phi(\mathbf{y}, \xi)} d\xi^2 d\omega, \quad (2.3.14)$$

donde

$$D(\xi, \omega) = F(\omega) U_s(\xi, \omega). \quad (2.3.15)$$

Si en la integral (2.3.14) sustituimos la expresión integral (2.3.12) del campo difractado y alteramos el orden de la integración, obtenemos que

$$\alpha(\mathbf{y}) = \int \frac{\alpha(\mathbf{x})}{c^2(\mathbf{x})} \int \omega^2 F(\omega) \int W(\mathbf{y}, \xi, \omega) A(\mathbf{x}, \xi) e^{-i\omega[\phi(\mathbf{y}, \xi) - \phi(\mathbf{x}, \xi)]} d\xi^2 d\omega d\mathbf{x}^3, \quad (2.3.16)$$

donde  $A(\mathbf{x}, \xi)$  es el producto  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)$ .

El valor de la integral en términos de  $\xi$  está dominado por aquellos puntos en que se satisfacen las condiciones de la fase estacionaria,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_2} \end{cases} \quad (2.3.17)$$

Por otro lado, al efectuar la integral en términos de la frecuencia, dado que la duración de la ondícula es pequeña, el valor de la integral es distinto de cero en los puntos en que

$$\phi(x, \xi) = \phi(y, \xi). \quad (2.3.18)$$

Las ecuaciones (2.3.17) y (2.3.18) son análogas a las condiciones de representación, salvo que en vez de plantearse en función del tiempo de arribo del reflejo  $t_D(\xi)$ , se plantean en términos del tiempo de viaje  $\phi(y, \xi)$  que es la suma del tiempo de viaje entre el punto de la imagen y la fuente y del tiempo de viaje entre el punto de la imagen y el receptor. Si no hay cáusticas en el campo de ondas, entonces no hay dos puntos de una isócrona cuyas superficies de difracción sean tangentes, y la solución de (2.3.17,18) es  $x = y$ .

Así, la contribución más significativa a la integral (2.3.16) proviene de los puntos cercanos a  $y$ , por lo que se puede aproximar esta integral considerando como dominio de integración a un entorno de  $y$ . En puntos cercanos a  $y$  se puede aproximar a  $A(x, \xi)$  por  $A(y, \xi)$  y a  $c(x)$  por  $c(y)$ , y la fase se puede aproximar con el primer término de la serie de Taylor de  $\phi(x, \xi)$ , esto es,

$$\phi(x, \xi) - \phi(y, \xi) = \nabla_x \phi(x, \xi)|_{x=y} \cdot (x - y). \quad (2.3.19)$$

De manera que la integral (2.3.16) se reduce a

$$\alpha(y) = \int \alpha(x) \int \omega^2 F(\omega) \int V(y, \xi, \omega) \frac{A(y, \xi)}{c^2(y)} e^{i\omega \nabla \phi(y, \xi)(x-y)} d\xi^2 d\omega dx^3. \quad (2.3.20)$$

Si se define que

$$k = i\omega \nabla \phi, \quad (2.3.21)$$

la ecuación (2.3.20) adquiere una estructura similar a la aplicación en cascada de la transformada directa e inversa de Fourier<sup>‡</sup>. De hecho la solución de la ecuación (2.3.14) consiste en calcular los pesos de tal forma que la integral sea equivalente a la aplicación en cascada de la transformada directa e inversa de Fourier de  $\alpha(x)$  (Bleistein et al., 2001).

Tales pesos son

$$W(y, \xi, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{c^2(y)}{\omega^2} \cdot \frac{1}{A(y, \xi)} \frac{\partial k}{\partial (\xi, \omega)}, \quad (2.3.22)$$

$$W(y, \xi, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{c^2(y)}{A(y, \xi)} |h(y, \xi)|, \quad (2.3.23)$$

donde

$$h(y, \xi) = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\partial k}{\partial (\xi, \omega)} = \det \begin{vmatrix} \nabla \phi(y, \xi) \\ \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} \quad (2.3.24)$$

<sup>‡</sup> La teoría de Fourier establece que si  $f(x)$  es una función absolutamente integrable se cumple que (Papoulis 1962),

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(x) \int e^{ik \cdot (y-x)} dk^3 dx^3,$$

y,

$$\delta(y-x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik \cdot (y-x)} dk^3.$$



es el determinante de Beylkin.

Finalmente, sustituyendo la expresión de los pesos (2.3.23) en la ecuación (2.3.14), el operador de Kirchhoff que invierte la perturbación es

$$\alpha(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{D_{\xi} \times D_{\omega}} F(\omega) \frac{c^2(\mathbf{y})}{A(\mathbf{y}, \xi)} |h(\mathbf{y}, \xi)| U_s(\mathbf{y}, \xi, \omega) e^{-i\omega\phi(\mathbf{y}, \xi)} d\xi^2 d\omega, \quad (2.3.25)$$

donde  $D_{\xi}$  es el dominio de definición de los parámetros de la adquisición y  $D_{\omega}$  es la banda de frecuencia de la ondícula.

Por otro lado, a partir de la discusión acerca de las condiciones de representación (sección 2.1) sabemos que el operador de Kirchhoff produce la imagen de una superficie, la envolvente de las isócronas de los tiempos de arribo, mas no del interior de un cuerpo. Por lo que es necesario plantear la inversión en términos de una función cuyo dominio de definición sea la interfase del difractor. Si requerimos que tal función nos proporcione información acerca de las propiedades del medio, entonces esa función puede ser el cambio de la velocidad al cruzar la interfase o la derivada de la perturbación en la dirección de la normal a la interfase. Es posible calcular la parcial de la perturbación con respecto a la normal al escalar los pesos (2.3.23) por el módulo del vector  $\mathbf{k}$  (Bleistein, 1987), esto es,

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{y})}{\partial n} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{D_{\xi} \times D_{\omega}} i\omega \frac{c^2(\mathbf{y})}{A(\mathbf{y}, \xi)} |h(\mathbf{y}, \xi)| \cdot |\nabla \phi(\mathbf{y}, \xi)| U_s(\mathbf{y}, \xi, \omega) e^{-i\omega\phi(\mathbf{y}, \xi)} d\xi^2 d\omega. \quad (2.3.26)$$

### Comentarios

Si se aplica el cambio de variables (2.3.21) a la integral (2.3.20) y se cambia el orden de la integración, entonces se cumple que

$$\alpha(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{D_{\mathbf{k}}} \hat{\alpha}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{k}, \quad (2.3.27)$$

donde

$$D_{\mathbf{k}} = \{\omega \nabla \phi(\mathbf{y}, \xi) \mid \xi \in D_{\xi}, \omega \in D_{\omega}\}, \quad (2.3.28)$$

y,

$$\alpha(\mathbf{k}) = \int \alpha(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}^3. \quad (2.3.29)$$

Las ecuaciones (2.3.27-29) expresan el resultado de la migración de Kirchhoff como la transformada de Fourier de banda limitada de la perturbación, donde el dominio de Fourier es la imagen, al aplicar el cambio de coordenadas (2.3.21), del producto cartesiano del dominio de los parámetros de la adquisición y del ancho de banda de la señal. El determinante de Beylkin es el Jacobiano del cambio de coordenadas (2.3.21), y su valor depende de la parametrización de la geometría de la adquisición.

Es común que en un experimento sísmico la geometría de la adquisición sea irregular. Esto provoca distorsiones en las imágenes migradas conocidas como huella de adquisición. Si para el cálculo del determinante de Beylkin se considera fielmente la geometría de la adquisición, entonces es posible corregir estos efectos no deseados (Gesbert, 2002).

Por otro lado, la imagen del reflector se formará sólo si alguna combinación de fuente y receptor satisface la ley de Snell en el reflector, es decir, si el dominio de definición del vector de Fourier contiene a la dirección normal al reflector (Bleistein et al., 2001).

Finalmente, es posible aplicar la inversión de Kirchhoff en modelos más generales que la aproximación de Born. Si se plantea la inversión a partir de la representación de Kirchhoff, no es necesario suponer que la perturbación es pequeña. Además, el resultado de la inversión se puede expresar en función del coeficiente de reflexión, en vez de la perturbación.

## 2.4 Inversión en términos de la reflectividad

La aproximación de Kirchhoff permite expresar el campo reflejado en términos del coeficiente de reflexión, de los valores del campo incidente y de su derivada con respecto a la normal del reflector, sin tener en cuenta al mecanismo que genera el campo reflejado. Esta representación es válida para cualquier magnitud de la perturbación.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Aproximación de Kirchhoff

La aproximación de Kirchhoff es una solución integral del campo difractado. A diferencia de la aproximación de Born, no requiere que la perturbación sea pequeña, pero requiere que el campo difractado y el campo incidente satisfagan la ley de Snell y que la propagación de los campos de onda incidente y difractado puedan ser modelados con la ecuación escalar de onda (en esta sección empleamos la ecuación de onda acústica).

La aproximación de Kirchhoff se obtiene al aplicar el teorema de la divergencia a la expresión

$$g(\mathbf{x}) L u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) L^* g(\mathbf{x}), \quad (2.4.1)$$

donde  $L$  es el operador de Helmholtz y  $L^*$  el operador conjugado. El operador conjugado se define de tal forma que la ecuación (2.4.1) sea la expresión de la divergencia de un campo.

En un medio acústico de densidad variable, el operador  $L$  es

$$\rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \right) + \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.4.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio. Al emplear una identidad del cálculo vectorial<sup>§</sup>, se muestra que

$$g(\mathbf{x}) L u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \frac{\omega^2}{c^2} g(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (g(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) - \nabla(g(\mathbf{x}) \rho) \cdot \frac{\nabla u(\mathbf{x})}{\rho}, \quad (2.4.3)$$

y que

---

<sup>§</sup> Dos funciones escalares,  $v$  y  $w$ , de variables vectoriales, dos veces derivables cumplen que (Issu, 1987)

$$\nabla \cdot (v \nabla w) = v \nabla^2 w + \nabla v \cdot \nabla w$$



$$g(\mathbf{x}) L u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \frac{\omega^2}{c^2} g(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (g(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) - \nabla \cdot \left( \frac{u(\mathbf{x})}{\rho} \nabla (\rho g(\mathbf{x})) \right) + \frac{u(\mathbf{x})}{\rho} \left( \nabla^2 (\rho g(\mathbf{x})) - \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \nabla (\rho g(\mathbf{x})) \right). \quad (2.4.4)$$

Si ordenamos los sumandos de la ecuación (2.4.4), de tal forma que el término de la izquierda adquiera la estructura de la ecuación (2.4.1) y el término de la derecha represente la divergencia de un campo, se tiene que

$$L^* u = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla (\rho u) \right) + \frac{\omega^2}{c^2} u. \quad (2.4.5)$$

Si  $U_s(\mathbf{x})$  es el campo reflejado, entonces  $U_s(\mathbf{x})$  satisface la ecuación escalar de onda con condiciones homogéneas. Si definimos a  $g(\mathbf{x})$  como la respuesta al impulso del operador conjugado, entonces al aplicar el teorema de la divergencia a la ecuación (2.4.1) se tiene que

$$\int_{S_o + S_1} g(\mathbf{x}) L U_s(\mathbf{x}) - U_s(\mathbf{x}) L^* g(\mathbf{x}) dV = \int_{S_o + S_1} g(\mathbf{x}) \frac{\partial U_s(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{U_s(\mathbf{x})}{\rho} \frac{\partial (\rho g(\mathbf{x}))}{\partial n} ds. \quad (2.4.6)$$

$$= U_s(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_s)$$

Nos interesa que la integral de superficie se lleve a cabo únicamente sobre el reflector. Para ello tomamos como superficie de integración al reflector ( $S_o$ ) y a una semiesfera ( $S_1$ ) cuyo radio  $R$  aumenta indefinidamente (ver Figura 2.4-1). Al aplicar las condiciones de irradiaación de Sommerfeld (ver sección 2.3) a los campos  $U_s(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x})$ , la integral sobre la semiesfera es de orden  $o(1)$  y el dominio de la integral se reduce al reflector.

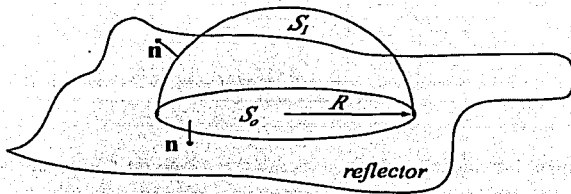


Figura 2.4-1. En esta imagen se muestra un reflector. Sobre las superficies  $S_0$  y  $S_1$  se lleva a cabo la integral de la ecuación (2.4.6). Cuando el radio de la semiesfera aumenta ilimitadamente, la integral sobre  $S_1$  se anula y la superficie  $S_0$  se extiende sobre todo el reflector.

Para obtener la aproximación de Kirchhoff, basta expresar en la ecuación (2.4.6) al campo reflejado en función del campo incidente. Por otro lado, bajo condiciones de alta frecuencia, para puntos sobre el reflector podemos suponer que el campo reflejado es una versión escalada del campo incidente que se propaga en la dirección contraria; esto es

$$U_s(x) = R(x, x_s)U_i(x_s), \quad (2.4.7)$$

donde  $R(x, x_s)$  es el coeficiente de reflexión.

Por otro lado, si empleamos la teoría de rayos para aproximar el campo reflejado y el campo incidente, se tiene que

$$U_i(x, x_s) = A_i(x, x_s)e^{i\omega\tau(x, x_s)}, \quad (2.4.8) \quad \text{y} \quad U_s(x) = A_s(x)e^{i\omega\tau_s(x)}. \quad (2.4.9)$$

La función  $A_i(x)$  es la amplitud del campo reflejado y  $\tau_s(x)$  es el tiempo de arribo del campo reflejado.

En puntos que se encuentran sobre el reflector, por la ley de Snell se debe cumplir que

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial n} = -\frac{\partial \tau_s}{\partial n}, \quad (2.4.10)$$

y que

$$\tau_i(\mathbf{x}) = \tau_i(\mathbf{x}). \quad (2.4.11)$$

De las ecuaciones (2.4.8-11) se desprende que para puntos sobre el reflector se cumple que

$$U_s(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) A_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) e^{i\omega\tau_i(\mathbf{x})}, \quad (2.4.12)$$

y que

$$\frac{\partial U_s(\mathbf{x})}{\partial n} = R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) A_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) \left( \frac{1}{A_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)} \frac{\partial A_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)}{\partial n} - i\omega \frac{\partial \tau_i}{\partial n} \right) e^{i\omega\tau_i(\mathbf{x})}. \quad (2.4.13)$$

Si en la ecuación (2.4.13) la variación de la amplitud es despreciable con respecto al término en  $i\omega$ , entonces

$$\frac{\partial U_s(\mathbf{x})}{\partial n} = -i\omega R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) \frac{\partial \tau_i}{\partial n} A_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) e^{i\omega\tau_i(\mathbf{x})} = -i\omega R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) \frac{\partial \tau_i}{\partial n} U_I(\mathbf{x}). \quad (2.4.14)$$

Con un cálculo similar se verifica que

$$\frac{\partial U_I(\mathbf{x})}{\partial n} = i\omega \frac{\partial \tau_i}{\partial n} U_I(\mathbf{x}). \quad (2.4.15)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Si la velocidad y la densidad de referencia son funciones suaves, en la ecuación (2.4.6) se pueden despreciar las variaciones de la densidad frente a la variación del campo de onda, y al aplicar las ecuaciones (2.4.7) y (2.4.14-15) se obtiene que

$$U_s(\mathbf{x}_g) = - \int_{\text{reflector}} R(\mathbf{x}) \frac{\partial(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)U_I(\mathbf{x}))}{\partial n} ds = - \int_{\text{reflector}} i\omega R(\mathbf{x}) \frac{\partial(\tau_I + \tau_g)}{\partial n} A(\mathbf{x}, \xi) e^{i\omega\phi(\mathbf{x}, \xi)} ds. \quad (2.4.16)$$

Esta es la aproximación de Kirchhoff del campo reflejado (Bleistein et al., 2001).

Ahora nuestro objetivo consiste en calcular los pesos del operador de Kirchhoff de manera que al aplicárselo a datos modelados a través de la ecuación (2.4.16) el resultado de la inversión sea el coeficiente de reflexión.

### ***Inversión de la aproximación de Kirchhoff***

Seguindo el desarrollo de Bleistein et al. (2001) podemos aplicar el operador de Kirchhoff con los pesos de la inversión de Born a datos modelados con la aproximación de Kirchhoff (ecuación 2.4.16), evaluar el resultado con base en el método de la fase estacionaria y corregir los pesos. Es decir, buscamos una función  $W_c(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \xi)$  tal que

$$R(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{D_g \times D_\omega} \omega^2 \Gamma(\omega) W_c(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \xi) \frac{c^2(\mathbf{y})}{A(\mathbf{y}, \xi)} |h(\mathbf{y}, \xi)| |\nabla\phi(\mathbf{y}, \xi)| \int_{\text{reflector}} R(\mathbf{x}) \frac{\partial(\tau_I + \tau_g)}{\partial n} A(\mathbf{x}, \xi) e^{i\omega\phi(\mathbf{x}, \xi)} e^{-i\omega\phi(\mathbf{y}, \xi)} \sqrt{g} d\sigma^2 d\xi^2 d\omega \quad (2.4.17)$$

donde  $\sqrt{g} d\sigma^2 = ds$ .

Para calcular  $W_c(y, x, \xi)$ , se evalúa la integral (2.4.17) en puntos sobre el reflector, empleando el método de la fase estacionaria (ver Apéndice A), esto es

$$R(y) = \sum_{\text{puntos estacionarios}} \frac{R(x^o)}{2\pi} \int_{D_\omega} F(\omega) e^{i\omega(\phi(x^o, \xi^o) - \phi(y, \xi^o)) + i\frac{\pi}{4} \text{sgn} \Phi(\xi, x, y)} d\omega \times \frac{|h(y, \xi^o)|}{\sqrt{|\det \Phi_{\xi\sigma}|}} \sqrt{g} \cdot W_c(y, x^o, \xi^o) \frac{c^2(y) A(x^o, \xi^o)}{A(y, \xi^o)} |\nabla \phi(y, \xi^o)| \left( \frac{\partial \tau_l(x^o, \xi^o)}{\partial n} + \frac{\partial \tau_r(x^o, \xi^o)}{\partial n} \right) \quad (2.4.18)$$

donde

$$\Phi(\xi, x, y) = \phi(x, \xi) - \phi(y, \xi). \quad (2.4.19)$$

Las variables  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  parametrizan la superficie.  $\Phi_{\xi\sigma}$  es el Hessiano de  $\Phi$ , y el índice  $o$  indica que las variables satisfacen las condiciones de la fase estacionaria, esto es, satisfacen

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_2}, \end{cases} \quad (2.4.20)$$

y

$$\begin{cases} \nabla \phi(x, \xi) \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} = 0, \\ \nabla \phi(x, \xi) \cdot \frac{dx}{d\sigma_2} = 0. \end{cases} \quad (2.4.21)$$

Para aplicar el método de la fase estacionaria, es necesario encontrar los puntos  $(x^o, \xi^o)$  que satisfacen las condiciones de la fase estacionaria (2.4.20,21). Cabe notar que la ecuación (2.4.21) es la ley de Snell, por lo que al par de rayos que unen a  $x^o$  con la fuente, de coordenadas  $x_s(\xi^o)$ , y el receptor, de coordenadas  $x_r(\xi^o)$ , se les denomina rayos especulares. A continuación se muestra que si en el medio no hay cáusticas, para puntos  $y$  de la imagen que coincidan con la



posición del reflector, siempre y cuando la posición de la fuente y del receptor sean funciones monótonas en  $D\xi$  (por ejemplo, una adquisición de distancia entre fuente y receptor constante), ningún punto de las regiones I y III (ver Figura 2.4-2) puede satisfacer las ecuaciones (2.4.20), salvo  $x'' = y$ .

Si se aplica la regla de la cadena al evaluar las parciales del miembro derecho de las ecuaciones (2.4.20), teniendo en cuenta que la posición de la fuente y del receptor son funciones de  $\xi$ , entonces esas ecuaciones se reducen a

$$\begin{cases} p_s \cdot \frac{\partial x_s}{\partial \xi_1} + p_g \cdot \frac{\partial x_g}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_1}, \\ p_s \cdot \frac{\partial x_s}{\partial \xi_2} + p_g \cdot \frac{\partial x_g}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi(y, \xi)}{\partial \xi_2}, \end{cases} \quad (2.4.22)$$

donde

$$\begin{cases} p_s = \nabla_{x_s} \phi(y, \xi) \\ p_g = \nabla_{x_g} \phi(y, \xi) \end{cases} \quad (2.4.23)$$

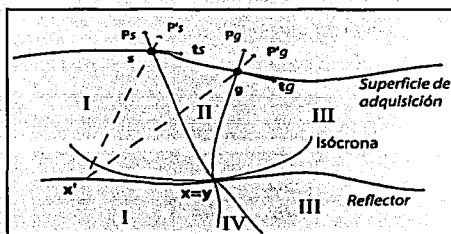


Figura 2.4-2. Geometría del problema. En ausencia de cáusticas, ningún punto de las regiones I y III satisface las condiciones de la fase estacionaria salvo  $x''=y$ . Tomada de Bleistein et al. (1987)

Si existe un punto  $(x', \xi)$  en la región I que satisfaga la ecuación (2.4.20). Y Si se define que

$$t'_s = \frac{\partial x_s}{\partial \xi_i}, \quad t'_g = \frac{\partial x_g}{\partial \xi_i}, \quad (2.4.24)$$

y que

$$\begin{cases} p'_{s'} = \nabla_{x_s} \phi(x', \xi) \\ p'_{g'} = \nabla_{x_g} \phi(x', \xi) \end{cases} \quad (2.4.25)$$

las condiciones (2.4.20) se satisfacen si

$$(p'_{s'} t'_s - p_{s'} t'_s) + (p'_{g'} t'_g - p_{g'} t'_g) = 0. \quad (2.4.26)$$

Por otro lado, dado que no hay cáusticas, los rayos no se cruzan (ver Figura 2.4-2), y en cualquier punto en la región I se tiene que

$$\begin{cases} (p'_{s'} t'_s - p_{s'} t'_s) > 0 \\ (p'_{g'} t'_g - p_{g'} t'_g) > 0 \end{cases} \quad (2.4.27)$$

Las ecuaciones (2.4.27) implican que la ecuación (2.4.26) no se cumple. Ningún punto de la región I satisface la ecuación (2.4.20). De forma análoga se puede verificar que ningún punto de la región III satisface la ecuación (2.4.22). La única solución es  $x^0=y$ .

En el punto estacionario  $x^0=y$  se cumple que

$$\frac{|h(y, \xi)|}{\sqrt{|\Phi_{\xi\sigma}|}} \sqrt{g} = |\nabla_y \phi(y, \xi)|, \quad (\text{ver Bleistein et al., 2001}) \quad (2.4.28)$$

y

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial n} = \frac{\partial \tau_g}{\partial n} = \frac{\cos(\theta_R)}{c(y)} = \frac{1}{2} |\nabla \phi(y, \xi)|, \quad (2.4.29)$$

donde  $\theta_R$  es el ángulo de incidencia. Así que la ecuación (2.4.18) se reduce a

$$R(\mathbf{y}) = R(\mathbf{y}) \cdot W_c(\mathbf{y}, \xi^a) \left| \nabla \phi(\mathbf{y}, \xi^a) \right|^2 c^2(\mathbf{y}) \frac{2 \cos(\theta_R)}{c(\mathbf{y})} \delta_B(0), \quad (2.4.30)$$

donde

$$\delta_B(0) = \frac{1}{2\pi} \int F(w) dw. \quad (2.4.31)$$

Si

$$W_c(\mathbf{y}, \xi) = \frac{1}{c^2(\mathbf{y}) \left| \nabla \phi(\mathbf{y}, \xi) \right|^3}, \quad (2.4.32)$$

el resultado de la migración será una función impulsiva escalada por el coeficiente de reflexión. Sustituyendo (2.4.32) en (2.4.17), la expresión final del operador de Kirchhoff es

$$R(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{D_{\lambda} \times D_{\nu}} i\omega \frac{|h(\mathbf{y}, \xi)|}{|\mathbf{A}(\mathbf{y}, \xi)| \left| \nabla \phi(\mathbf{y}, \xi) \right|^2} \cdot U_s(\mathbf{y}, \xi, \omega) e^{-i\omega \phi(\mathbf{y}, \xi)} d\xi^2 d\omega. \quad (2.4.33)$$

## 2.5 Inversión en dos y media dimensiones

En esta sección expongo la migración de Kirchhoff adaptada al caso de perfiles sísmicos, es decir, cuando la adquisición de los datos sísmicos se lleva a cabo únicamente a lo largo de una línea. Cabe destacar la flexibilidad de la migración de Kirchhoff para adaptarse a este caso y manipular adecuadamente la amplitud. Los métodos de migración que se basan en extrapolar el campo de ondas (de Bruin et al., 1990), preservan adecuadamente las amplitudes y son válidos aún bajo la presencia de cáusticas. Sin embargo, requieren que los datos representen un campo de

onda y que ese campo sea registrado en una superficie; esto restringe severamente su aplicación para perfiles sísmicos. Una solución a este problema consiste en calcular la respuesta del medio al excitarlo con fuentes lineales (Wapenaar et al., 1992) y extrapolar el campo empleando la ecuación de onda en dos dimensiones. Sin embargo, este método sólo permite gradientes lineales de la velocidad de referencia. Por su parte, la migración de Kirchhoff sólo requiere que la velocidad de referencia sea bidimensional y que la adquisición de los datos se lleve a cabo en la dirección de la inclinación de las capas. La ecuación de onda en tres dimensiones, en medios bidimensionales, se conoce como ecuación de onda en dos y media dimensiones. Y la migración de perfiles sísmicos se conoce como migración en dos y media dimensiones.

Si la velocidad es únicamente función de las coordenadas  $x$  y  $z$ , si los reflectores son cilíndricos (si su posición sólo depende de las coordenadas  $x$  y  $z$ ; ver Figura 2.5-1) y si la adquisición de datos sísmicos se lleva a cabo a lo largo de líneas paralelas al eje  $x$ , entonces los datos de cada una de las líneas serán iguales, y al efectuar la integral a lo largo del eje  $y$  con el método de la fase estacionaria, es posible obtener un expresión que nos permita migrar perfiles sísmicos.

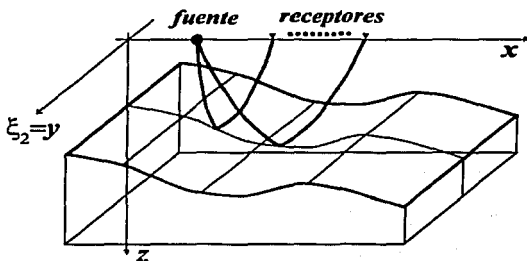


Figura 2.5-1. Ejemplo de un experimento sísmico en 2.5D. Las fuentes y los receptores se localizan sobre el eje  $x$ . La velocidad del medio es una función de  $(x,z)$  y los reflectores son superficies cilíndricas normales al plano  $xz$ . Los rayos que parten de la fuente, se reflejan e inciden en los receptores son paralelos al plano  $xz$ .

### Fase estacionaria

La condición de la fase estacionaria es

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{y}, \xi)}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=0, \mathbf{y}_2=0} = 0. \quad (2.5.1)$$

Dado que el medio es simétrico con respecto a cualquier plano vertical paralelo al eje  $x_1$ , las isócronas también son simétricas y normales al plano vertical que contiene a la línea de adquisición. Por lo tanto, la condición (2.5-1) se cumple cuando

$$\xi_2 = 0. \quad (2.5.2)$$

Para poder aplicar el método de la fase estacionaria, es necesario evaluar la segunda derivada de la fase con respecto a la variable de integración. Dado que la velocidad del medio no varía en la dirección  $x_2$ , el componente de la lentitud en esa dirección es constante, esto es

$$\frac{\partial x_2}{\partial \sigma} = p_2 = Cte \Rightarrow x_2 = \sigma p_2. \quad (2.5.3)$$

Si  $x_{r2} = x_{s2} = \xi_2$  podemos expresar la derivada de la fase en términos del componente de la lentitud en la dirección de  $x_2$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} = \frac{\partial(\tau(\mathbf{y}, \mathbf{x}_s(\xi)) + \tau(\mathbf{y}, \mathbf{x}_r(\xi)))}{\partial \xi_2} = p_2^s + p_2^r = \left( \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_r} \right) \xi_2, \quad (2.5.4)$$

a partir de (2.5.4) se verifica que

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2=0} = \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_r}. \quad (2.5.5)$$

Finalmente, la expresión del operador de Kirchhoff en dos y media dimensiones es

$$R(y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iint_{D_y \times D_w} |w|^{1/2} \operatorname{sgn}(w) \frac{|h(y, \xi)|}{|h(y, \xi)|^2 \nabla \phi(y, \xi)^2} \cdot U_x(y, \xi, w) \cdot \left( \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_r} \right)^{-1/2} \cdot e^{-i\omega\phi(y, \xi) - i\pi/4 \operatorname{sgn}(w)} d\xi dw \quad (2.5.6)$$

El siguiente paso para obtener la expresión del operador de Kirchhoff en 2.5 D es calcular el determinante de Beylkin.

### El determinante de Beylkin en dos y media dimensiones

La expresión del determinante de Beylkin es la siguiente

$$h(y, \xi) = \begin{vmatrix} p_s + p_r & \\ \frac{\partial p_s}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_r}{\partial \xi_1} & \\ \frac{\partial p_s}{\partial \xi_2} + \frac{\partial p_r}{\partial \xi_2} & \end{vmatrix}, \quad \text{donde } \begin{cases} p_s = \nabla_y \tau(y, x_s(\xi)) \\ p_r = \nabla_y \tau(y, x_r(\xi)) \end{cases} \quad (2.5.7)$$

En el caso de dos y media dimensiones, los rayos que parten de la fuente se reflejan e inciden en el reflector están contenidos en el plano vertical de la línea de adquisición (Figura 2.5-1). Por lo que el vector lentitud es paralelo al plano  $x=$  sin importar el valor de  $\xi_1$ , por lo tanto,

$$p_{s2} = p_{r2} = 0, \quad y \quad \frac{\partial p_{s2}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial p_{r2}}{\partial \xi_1} = 0. \quad (2.5.8)$$

Empleando este resultado, la expresión del determinante de Beylkin se reduce a

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$h(\mathbf{y}, \xi) = \left| \frac{\partial(p_{s2} + p_{r2})}{\partial \xi_2} \right| \cdot \det \begin{vmatrix} \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_r \\ \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \xi_1} \end{vmatrix}. \quad (2.5.9)$$

Ahora bien, los vectores  $\mathbf{p}_s$ ,  $\mathbf{p}_r$  y sus parciales con respecto a  $\xi_1$  son coplanares. Además dado que el módulo de  $\mathbf{p}_s$  y de  $\mathbf{p}_r$  es constante, estos vectores son normales a sus derivadas parciales.

De la misma forma en que se calculó la segunda derivada de la fase, se puede calcular que

$$\frac{\partial(p_{s2} + p_{r2})}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_r}. \quad (2.5.10)$$

De lo anterior,

$$h(\mathbf{y}, \xi) = \left( \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_r} \right) \cdot (1 + \cos \theta) \left( \mathbf{p}_s \times \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial \xi_1} + \mathbf{p}_r \times \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \xi_1} \right). \quad (2.5.11)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{p}_s$  y  $\mathbf{p}_r$ .

Calculemos los productos cruz de esta ecuación. Al intercambiar el orden de las derivadas se muestra que

$$\frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial \xi_1} = \nabla_y \frac{\partial \tau_s}{\partial \xi_1} = \nabla_y \left( \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \xi_1} \cdot \nabla_{x_s} \tau_s \right). \quad (2.5.12)$$

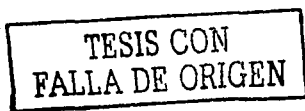
Consideremos por ahora el componente en  $y_j$  de (2.5.12) y sea

$$\nabla_{x_s} \tau_s = p_l + q \mathbf{k}_s, \quad (2.5.13)$$

entonces,

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \xi_1} \cdot \nabla_{x_s} \tau_s \right) = \frac{\partial x_s}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial y_1} + \frac{\partial x_s}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial y_1}. \quad (2.5.14)$$

Teniendo en cuenta que



$$q = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \rho^2}, \quad (2.5.15)$$

si empleamos la regla de la cadena al derivar  $q$  tenemos que la ecuación (2.5.14) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \xi_1} \cdot \nabla_{x_s} \tau_s \right) = \left( \frac{\partial x_s}{\partial \xi_1} - \frac{\rho}{q} \cdot \frac{\partial z_s}{\partial \xi_1} \right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_1}. \quad (2.5.16)$$

De manera análoga se muestra que el componente en  $y_3$  es

$$\frac{\partial}{\partial y_3} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \xi_1} \cdot \nabla_{x_s} \tau_s \right) = \left( \frac{\partial x_s}{\partial \xi_1} - \frac{\rho}{q} \cdot \frac{\partial z_s}{\partial \xi_1} \right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_3}. \quad (2.5.17)$$

Empleando (2.5.15,16) podemos mostrar que

$$\mathbf{p}_s \times \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial \xi_1} = \frac{1}{q} \left| \nabla_{x_s} \tau_s \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \xi_1} \right| (\mathbf{p}_s \times \nabla_y \rho). \quad (2.5.18)$$

Y

$$\mathbf{p}_s \times \nabla_y \rho = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_s}{\partial y_1} & \frac{\partial \tau_s}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y_1} & \frac{\partial \rho}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\tau, \rho)}{\partial(y_1, y_3)} = \rho^2 \frac{16\pi^2 q \sigma}{c^2}, \quad (2.5.19)$$

Si definimos que

$$\mathbf{p}'_s = \nabla_{x_s} \tau_s, \quad (2.5.20)$$

entonces

$$\left| \nabla_{x_s} \tau_s \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \xi_1} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \xi_1} \right| \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'_s \quad (2.5.21)$$

Expresiones similares se obtienen para el otro producto cruz de la ecuación (2.5.11). Finalmente la expresión del determinante de Belykin se reduce a (Bleistein et al., 1987)



$$h(\mathbf{y}, \xi) = \frac{16\pi^2}{c^2} (1 + \cos(\theta)) \cdot \left( \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_r} \right) \cdot \left( \left| \frac{\partial x_s}{\partial \xi_1} \right| \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'_s A_s^2 \sigma_s I_s + \left| \frac{\partial x_r}{\partial \xi_1} \right| \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'_r A_r^2 \sigma_r I_r \right), \quad (2.5.22)$$

donde

$$I_s = \begin{cases} 0, & \text{si la posición de la fuente es constante} \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$I_r = \begin{cases} 0, & \text{si la posición del receptor es constante} \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La expresión del determinante de Beylkin depende únicamente de cantidades que pueden ser calculadas empleando un trazador de rayos en dos dimensiones. Sin embargo, el determinante de Beylkin tiene que calcularse para cada traza y para cada punto de la imagen. Para el caso de un medio de referencia de velocidad constante, el cálculo de los pesos se simplifica considerablemente permitiendo expresar los pesos en términos de los tiempos de viaje, la separación entre la fuente y el receptor y los ángulos de incidencia en la fuente y en el receptor.

### ***Medio de referencia de velocidad constante***

En un medio de referencia de velocidad constante la expresión de los pesos del operador de Kirchhoff se simplifica considerablemente, pues todos los términos se pueden expresar en función del vector de posición de la imagen. Esto es,

$$I_s = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}{c}, \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}, \quad (2.5.23)$$

$$P_s = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}, \quad \sigma_s = c|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|.$$

Por otro lado el coseno del ángulo entre el rayo incidente y el rayo reflejado se puede calcular al aplicar la ley del coseno al triángulo formado por la fuente, el receptor y el punto de reflejo como

$$\cos(\theta) = \frac{|x - x_r|^2 + |x - x_s|^2 - h^2}{2|x - x_r||x - x_s|} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{(t_s^2 + t_r^2) - h^2}{2t_s t_r} \quad (2.5.24)$$

Si la superficie de adquisición es horizontal, los cosenos de los ángulos que forman los rayos en la fuente y el receptor con la vertical se pueden calcular en función de los tiempos de viaje y de la profundidad del reflector, esto es,

$$\cos(\theta_s) = \frac{z}{|x - x_s|} = \frac{z}{c t_s} \quad (2.5.25)$$

Si además se cumple que

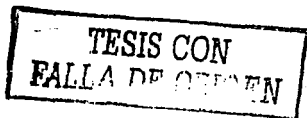
$$\left| \frac{\partial x_s / \partial \xi_1}{\partial \xi_1} \right| = 1, \quad (2.5.26)$$

entonces la expresión de la migración de Kirchhoff es la siguiente

$$\beta(x, z) = \frac{2z}{c^{3/2} \sqrt{\pi}} \int d\xi \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2 t^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left( \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 t_s + \left( \frac{t}{t_s} \right)^2 t_r \right) \times \int d\omega \cdot \sqrt{i\omega} F(\omega) e^{-i\omega (t_s + t_r)} D(\omega, \xi) \quad (2.5.27)$$

donde  $\beta(x, z)$  es el coeficiente de reflexión escalado por el coseno del ángulo de incidencia y dividido por la velocidad de propagación del medio.

Si  $t_s \approx t_r \approx t/2$ , los pesos se pueden calcular con base en el tiempo de arriba, la separación  $h$  entre la fuente y el receptor, la profundidad del reflector y la velocidad; esto es



$$W = \left( \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right) \left( \frac{z}{c^2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{1 - \left( \frac{h}{ct} \right)^2} \right). \quad (2.5.28)$$

El factor que depende de la velocidad del medio, en el punto de reflejo, y de la profundidad se puede aplicar al escribir el resultado de la migración. El factor restante, que depende del tiempo de arribo del reflejo y de la separación entre la fuente y el receptor, se puede aplicar al momento de leer una traza (Dellinger et al., 2000).

En la figura 2.5-2 muestro dos registros de imagen común de cuatro reflectores. Para todos los reflectores el coeficiente de reflexión es constante. El registro (a) fue migrado empleando los pesos de un medio de referencia de velocidad constante, mientras que en el cálculo del registro (b) no se empleó ningún peso. En el registro (a) la amplitud de la señal se mantiene constante. En cambio, en el registro (b) la amplitud de la señal decrece con la profundidad del reflector y aumenta al aumentar el *offset*.

En el siguiente capítulo, estimo el coeficiente de reflexión empleando esta aproximación y calculo el error de dicha aproximación. A continuación, muestro el pseudocódigo del algoritmo de Kirchhoff que programé para llevar a cabo la migración:

*Leer de los parámetros de entrada (dimensiones del modelo, etc..)  
Verificar que los parámetros de la imagen, dimensiones y dominio de definición, sean consistentes con los parámetros del modelo.*

*Calcular las tablas de tiempo de viaje. (Código de UTAM)*

```

Para cada sección de offset/fuente común{
  Para cada traza en los datos de entrada{
    Leer del encabezado de la traza la posición de la fuente y del receptor.
    Filtrar y ponderar la traza, esto es,{
      Aplicar la transformada discreta de Fourier.
      Aplicar el filtro de la media derivada.
      Aplicar la transformación inversa a los datos transformados.
      Ponderar las trazas. (aproximación de Dellinger et al.,2000)
    }
    Leer las tablas de tiempo de viaje
    Para cada punto de la imagen{
      Interpoliar el tiempo de viaje a la fuente.
      Interpoliar el tiempo de viaje al receptor.
    }
  }
  Para cada ix de la imagen{
    Para cada iz de la imagen{
      Sumar los tiempos de viaje a la fuente y al receptor.
      Calcular el valor de la traza al tiempo de viaje.
    }
  }
}

```



Sumar la amplitud calculada a la imagen.

}fin del ciclo sobre las trazas

Ponderar la imagen con la profundidad.

Modificar el encabezado de las trazas.

Guardar la imagen de offset/fuente común.

}fin del ciclo sobre las secciones de offset/fuente común.

Sumar las secciones de offset/fuente común.

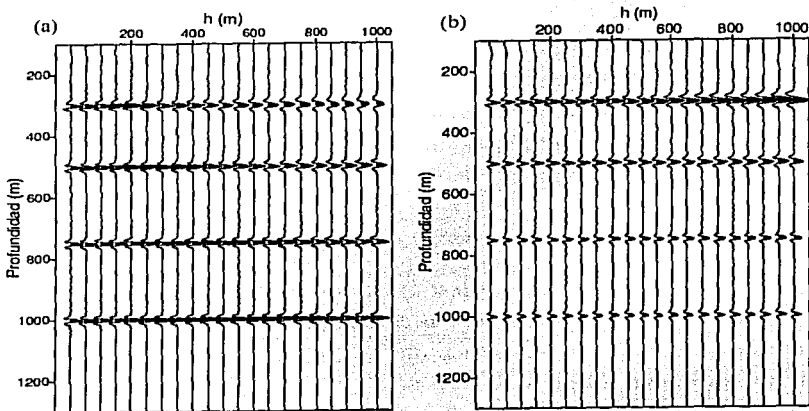


Figura 2.5-2. Registros de imagen común de cuatro reflectores. El registro (a) fue calculado empleando los pesos de un medio de referencia de velocidad constante. El registro (b) se calculó sin aplicar peso alguno.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 3 Resultados

### 3.1 Introducción

En este capítulo empleo la aproximación propuesta por Dellinger et al. (2000), ver sección quinta del Capítulo 2, para estimar el coeficiente de reflexión de reflectores planos en medios de velocidad constante. Además, calculo el error debido a la aproximación en función de la inclinación del reflector y del ángulo de incidencia, para configuraciones de tiro común y de distancia entre fuente y receptor, *offset*, común.

### 3.2 Estimación del error

Una característica útil del operador de Kirchhoff es que al emplear distintos pesos para migrar un mismo conjunto de datos, el cociente del resultado de las migraciones es igual al cociente de los pesos de los rayos especulares (Bleistein, 1987). Esto nos permite calcular el error de la aproximación de una manera muy directa.

Para estimar el error de la aproximación es necesario calcular el cociente del tiempo de viaje entre el punto de reflejo y la fuente (o el receptor) y el tiempo de arribo del reflejo. De manera conveniente para el cálculo del error, la ecuación de la isócrona se puede plantear en función de la distancia  $h$  entre la fuente y el receptor, de la velocidad de referencia  $c$ , del tiempo de viaje  $t$  y de un parámetro que llamaremos  $\mu$ , ver figura 3.2-1; esto es,

$$\begin{cases} x_m = \frac{ct}{2} \cos(\mu) \\ -m = \sqrt{\left(\frac{ct}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(\mu). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

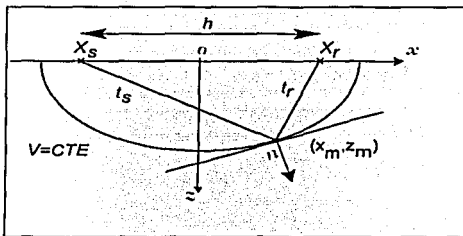


Figura 3.2-1. El origen del sistema de referencia coincide con el punto medio común, el eje x apunta en la dirección del receptor y el eje z es positivo hacia abajo.

La expresión del cuadrado del tiempo de viaje entre el punto de reflejo, de coordenadas  $(x_m, z_m)$ , y el receptor, de coordenadas  $(x_r, 0)$ , es la siguiente

$$t_r^2 = \frac{(x_m - x_r)^2 - z_m^2}{c^2}, \quad x_r = h/2. \quad (3.2.2)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.2.1) en (3.2.2) se tiene que

$$(t_r)^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2c}\right)^2 \cos^2(\mu) - \left(\frac{h}{2c}\right)t \cdot \cos(\mu). \quad (3.2.3)$$

Y, al dividir esta ecuación por el cuadrado del tiempo de arribo, se obtiene

$$\left(\frac{t_r}{t}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2ct}\right)^2 \cos^2(\mu) - \left(\frac{h}{2ct}\right) \cos(\mu). \quad (3.2.4)$$

definiendo

$$\chi = \frac{h}{2ct} \cos(\mu), \quad (3.2.5)$$

y sustituyéndolo en (3.2.4) se obtiene

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\left(\frac{t_r}{t}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2 - \chi. \quad (3.2.6)$$

De forma similar se puede calcular que

$$\left(\frac{t_x}{t}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2 + \chi. \quad (3.2.7)$$

donde  $t_r$  es el tiempo de viaje del punto de reflexión a la fuente.

El error de la aproximación se puede evaluar en función de las coordenadas del reflector y de la separación entre fuente y receptor (Dellinger et al., 2000). Sin embargo, para un análisis cuantitativo, es preferible evaluar el error en función de la inclinación del reflector y del ángulo de incidencia máximo. El ángulo de incidencia máximo,  $\theta_{\max}$ , se puede expresar como

$$\theta_{\max} = \arcsen(\zeta), \quad (2.3.8)$$

donde

$$\zeta = l/c t \quad (2.3.9)$$

Por otro lado, la inclinación del reflector  $\theta_{lfp}$  depende de  $\mu$  y se puede aproximar por

$$\mu \approx \pi/2 - \theta_{lfp}. \quad (2.3.10)$$

A partir de las ecuaciones (3.2.8-10) se tiene que

$$\chi = (1/2)\text{sen}(\theta_{\max})\text{sen}(\theta_{lfp}). \quad (3.2.11)$$

El error debido a la aproximación se puede expresar en términos de  $\chi$ , es decir, depende del ángulo de incidencia y de la inclinación del reflector.

### *Configuración de fuente común.*

Para este caso, la aproximación, empleada en el cálculo de los pesos del operador de Kirchhoff, es la siguiente

$$\left(\frac{t}{t_r}\right)^2 \approx 4. \quad (3.2.12)$$

Así que el error relativo, en la estimación del coeficiente de reflexión, debido a la aproximación es

$$Err_{tiro} = \left(4 \cdot \left(\frac{t_r}{t}\right)^2 - 1\right) * 100\%. \quad (3.2.13)$$

Si sustituimos el valor de la ecuación (3.2.6) en la ecuación (3.2.13) obtenemos que el error es

$$Err_{tiro} = 4(\chi^2 - \chi) * 100\%. \quad (3.2.14)$$

Si  $\chi \ll 1$ , el término cuadrático es despreciable y

$$Err_{tiro} \approx -4\chi * 100\%. \quad (3.2.15)$$

Finalmente, la expresión del error en términos del ángulo de incidencia y de la inclinación del reflector es

$$Err_{tiro} = -2 \operatorname{sen}(\theta_{\max}) \operatorname{sen}(\theta_{dip}) * 100\%. \quad (3.2.16)$$



El ángulo de incidencia máximo está comprendido entre 0° y 90° por lo cual el signo del error relativo depende del signo del ángulo de echado. Si la dirección del echado apunta en la dirección del receptor, el error será positivo, en el caso contrario el error será negativo. Esto concuerda con las observaciones hechas por Geiger (2002), quien estimó el error debido a la aproximación de manera empírica. En la figura 3.2-2 se muestran las curvas de nivel del porcentaje de error (valor absoluto) en función del ángulo de echado y del ángulo de inclinación. El error debido a la aproximación es pequeño si el ángulo de echado o el ángulo de incidencia es pequeño.

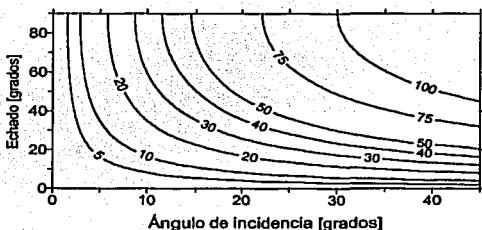


Figura 3.2-2. Curvas de nivel del porcentaje de error en función del ángulo de incidencia y de la inclinación del reflector (configuración de fuente común).

### **Configuración de distancia entre fuente y receptor común**

Para este caso, la aproximación empleada en el cálculo de los pesos del operador de Kirchhofes

$$\left(\frac{t}{t_r}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_s}\right)^2 = 8. \quad (3.2.17)$$

Así que el error relativo es

$$Err_{offset} = \left[ \frac{8}{\left(\frac{t}{t_r}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_s}\right)^2} - 1 \right] * 100\%. \quad (3.2.18)$$

El cuadrado del cociente del tiempo de arribo del reflejo y el tiempo de viaje al reflector se puede calcular al expandir en una serie de potencia el inverso de la ecuación (3.2.6), esto es

$$\left(\frac{t}{t_r}\right)^2 = 4 \left\{ 1 - 4(\chi^2 - \chi) + (4(\chi^2 - \chi))^2 + \dots \right\}. \quad (3.2.19)$$

Con un cálculo similar, se puede obtener una expresión para el cuadrado del cociente del tiempo de arribo del reflejo y el tiempo de viaje a la fuente

$$\left(\frac{t}{t_s}\right)^2 = 4 \left\{ 1 - 4(\chi^2 + \chi) + (4(\chi^2 + \chi))^2 + \dots \right\}. \quad (3.2.20)$$

Al sumar estas dos ecuaciones obtenemos

$$\left(\frac{t}{t_s}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_r}\right)^2 = 8(1 + 12\chi^2). \quad (3.2.21)$$

Y el error debido al aproximación para el caso de *offset* común es

$$Err_{offset} = -12\chi^2 * 100\%. \quad (3.2.22)$$

En términos del ángulo de incidencia y del echado, el error es

$$Err_{offset} = -3sen^2(\theta_{max})sen^2(\theta_{dip}) * 100\% . \quad (3.2.23)$$

En la figura 3.2-3 muestro curvas de nivel del porcentaje de error en función del ángulo de incidencia y del ángulo de echado. En comparación con la configuración de fuente común, la polaridad del error es siempre negativa y la calidad de la aproximación mejora sustancialmente pues el error es de segundo orden en  $\chi$ , esto es, es sensiblemente menor. Esto concuerda con los cálculos de Geiger (2002). Por ejemplo, para un error no mayor al 10%, con ángulos de incidencia de hasta 15 grados, la inclinación del reflector puede ser de hasta 45 grados.

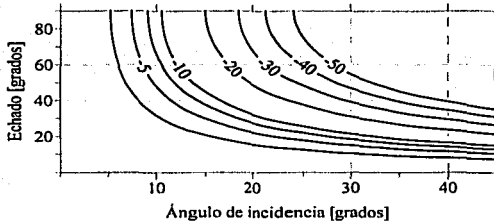


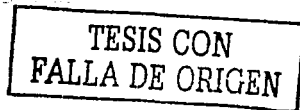
Figura 3.2-3. curvas de nivel del porcentaje de error en función del ángulo de incidencia y de la inclinación del reflector. (configuración de *offset* constante)

### 3.3 Ejemplos

En esta sección empleo la aproximación propuesta por Dellinger et al. (2000) para estimar, a partir de datos sintéticos, el coeficiente de reflexión, de reflectores planos e inclinados, en medios de velocidad constante.

Los datos sintéticos fueron calculados con base en la siguiente ecuación

$$D(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, \omega) = R(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r) \cdot A(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r) \cdot F(\omega) \cdot e^{-i\omega t} , \quad (3.3.1)$$



donde  $R(x_s, x_r)$  es el coeficiente de reflexión,  $A(x_s, x_r)$  es la amplitud del rayo, debida al trayecto entre la fuente y el punto de reflejo y al trayecto entre el punto de reflejo y el receptor,  $F(\omega)$  es un pulso de Ricker de 40 ms de duración, frecuencia pico de 40 Hz y  $t_0$  es el tiempo de arribo del reflejo.

El coeficiente de reflexión  $R(x_s, x_r)$  es el de un medio acústico, esto es,

$$R(x_s, x_r) = \frac{\cos(\theta_i) - \rho_{12} \sqrt{c_{12}^2 - \sin^2(\theta_i)}}{\cos(\theta_i) + \rho_{12} \sqrt{c_{12}^2 - \sin^2(\theta_i)}}, \quad (3.3.2)$$

donde  $\rho_{12}$  es el cociente de densidad,  $c_{12}$  es el cociente de velocidad y  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia. El cociente de densidad que empleé para generar los datos sintéticos es de 1.2 y el cociente de densidad es de 0.8.

Para generar los datos sintéticos consideré tres modelos que difieren únicamente en la inclinación del reflector. Las inclinaciones de los reflectores son 15°, 30° y 60°. La velocidad de propagación es de 2200 m/s. En todos los casos, el punto en el que estimé el coeficiente de reflexión tiene por coordenadas (0,0,500).

La apertura de migración es un parámetro que afecta sensiblemente la amplitud de la imagen migrada. La apertura de migración se define por el conjunto de trazas que el operador de Kirchhoff emplea para formar la imagen. En otras palabras es el dominio de los parámetros de la adquisición,  $\xi$ , sobre los que se lleva a cabo la integral del operador de Kirchhoff. Con el fin de limitar y controlar los efectos debidos a la apertura, en la estimación del coeficiente de reflexión, grafiqué la diferencia entre la curva de difracción y el tiempo de arribo del reflejo, para distintos ángulos de incidencia y para cada caso. Las trazas sísmicas que contribuyen a un punto de la imagen son aquellas para las que la diferencia entre el tiempo de arribo del reflejo y la curva de difracción es menor a media ondulada (20 ms). Con base en dichas curvas se puede determinar la apertura óptima e identificar una apertura insuficiente. En la tabla 3.3-1 se muestran las aperturas empleadas en cada uno de los casos.

El resultado de la migración de fuente común, de los datos del modelo con 15° de inclinación, se muestra en la figura 3.3-1; (c) muestra las trazas migradas para las distintas posiciones de la fuente; (a) muestra con línea continua el coeficiente de reflexión estimado, con línea discontinua el coeficiente de reflexión del modelo y con línea punteada el coeficiente de

reflexión del modelo ponderado por el error debido a la aproximación. Dado que la inclinación del reflector es pequeña, de 15°, la estimación del coeficiente de reflexión es buena. Para ángulos de incidencia mayores a 40° la curva del coeficiente de reflexión estimado y la del coeficiente de reflexión del modelo, ponderado por el error, se separan debido a una apertura de migración insuficiente.

El resultado de la migración de *offset* constante, del modelo con 15° de inclinación, se muestra en la figura 3.3-1; (f) muestra las trazas migradas; (d) el coeficiente de reflexión estimado (línea continua) y el coeficiente de reflexión del modelo (línea discontinua). Para ángulos mayores a 35 grados la estimación mejora sensiblemente, en comparación con el caso de fuente común.

Inclinación del reflector.	Configuración	Apertura $x_p/x_m$	Intervalo $\Delta x_p/\Delta x_m$ (m)
15°	Fuente común	-500 a 3500 m	30
	<i>Offset</i> común	-100 a 600 m	30
30°	Fuente común	-100 a 5500 m	30
	<i>Offset</i> común	0 a 1200 m	30
60°	Fuente común	300 a 7500 m	50
	<i>Offset</i> común	400 a 2100 m	50

Tabla 3.3-1. Parámetros empleados en la migración.

Los resultados de la migración de los datos del modelo con 30° de inclinación se muestran en la figura 3.3-2. (e) y (f) muestran los registros de imagen común correspondientes a las configuraciones de fuente común y *offset* común. (c) y (d) muestran con línea continua el coeficiente de reflexión estimado con la configuración de fuente/*offset* común respectivamente, con línea discontinua el coeficiente de reflexión del modelo y con línea punteada el coeficiente de reflexión del modelo ponderado por el error debido a la aproximación. Para el caso de fuente común, en ángulos de incidencia mayores a 35° la estimación es pobre debido a la apertura de migración. Mientras que para el caso de *offset* común la calidad de la aproximación es muy buena.

### Reflector con 15° de inclinación

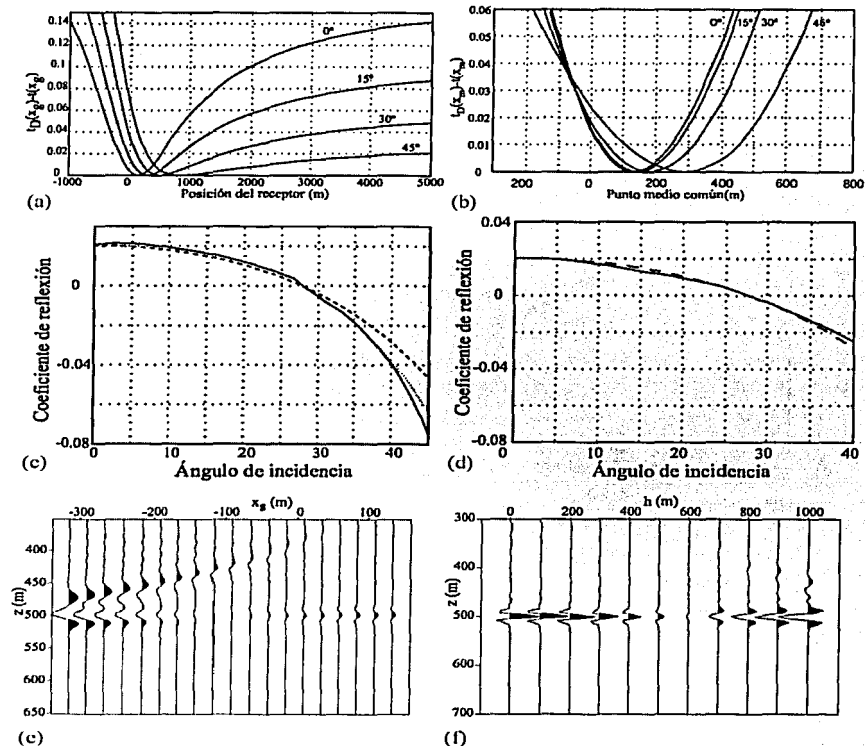


Figura 3.3-1. Configuración de fuente común: diferencia entre el tiempo de arribo y la curva de difracción (a), coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia (c), registro de imagen común (e). Configuración de *offset* común: diferencia entre el tiempo de arribo y la curva de difracción (b), coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia (d), registro de imagen común (f).

### Reflector con 30° de inclinación

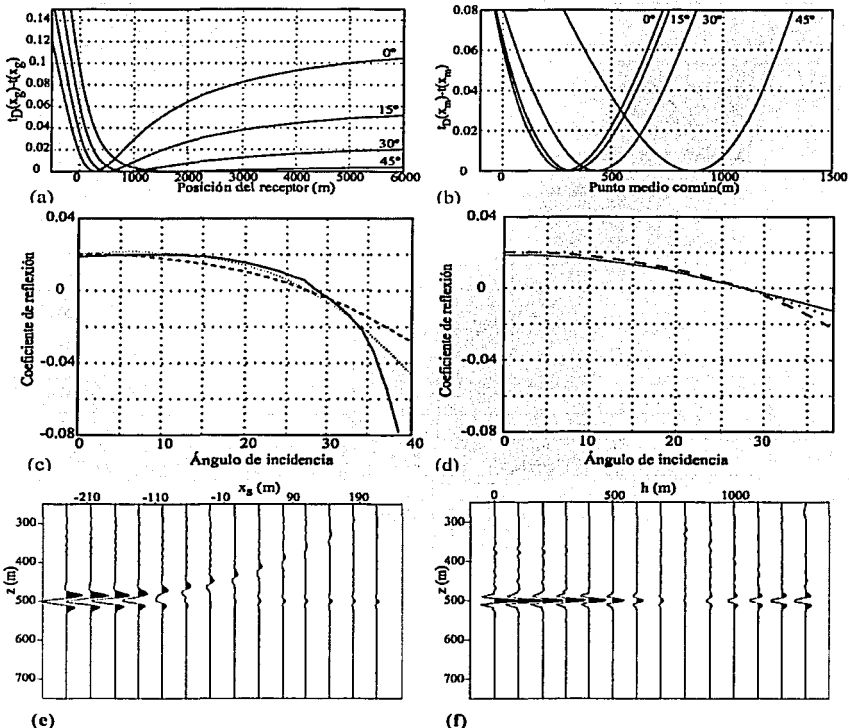


Figura 3.3-2. Configuración de fuente común: diferencia entre el tiempo de arribo y la curva de difracción (a), coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia (c), registro de imagen común (e). Configuración de *offset* común: diferencia entre el tiempo de arribo y la curva de difracción (b), coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia (d), registro de imagen común (f).

### Reflector con 60° de inclinación

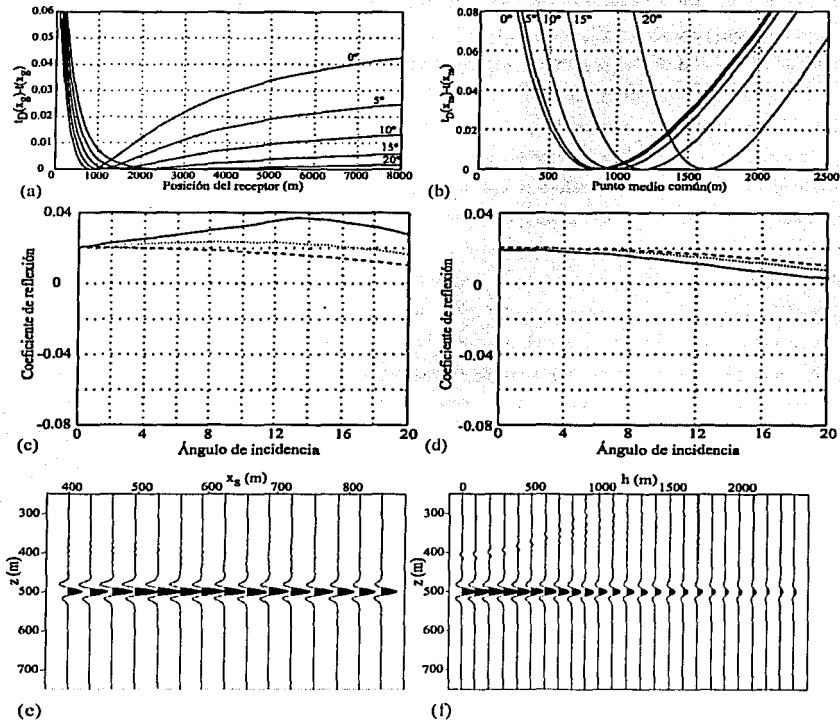


Figura 3.3-3. Configuración de fuente común: diferencia entre el tiempo de arribo y la curva de difracción (a), coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia (c), registro de imagen común (e). Configuración de *offset* común: diferencia entre el tiempo de arribo y la curva de difracción (b), coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia (d), registro de imagen común (f).

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

AREA TESIS NO SALE  
 BIBLIOTECA



Los resultados de la migración de los datos del modelo de  $60^\circ$  de inclinación se muestran en la figura 3.3-3. En (a) y (b) muestro la diferencia entre las curvas de difracción y el tiempo de arribo del reflejo para las configuraciones de fuente común y *offset* común respectivamente. Para el caso de fuente común la apertura de migración es excesivamente grande, esto se debe a que la curva de difracción y el tiempo de arribo del reflejo tienen el mismo comportamiento asintótico al alejarse el receptor de la fuente. La diferencia entre ambas curvas es muy pequeña y aumenta muy lentamente. (c) y (d) muestran el coeficiente de reflexión estimado (línea continua), el coeficiente de reflexión del modelo (línea discontinua) y el coeficiente de reflexión del modelo ponderado por el error (línea punteada), para ambas configuraciones. (e) y (f) muestran los registros de imagen común correspondientes a la configuración de fuente y *offset* común. En ambas configuraciones el error en la estimación es mayor al evaluado con las expresiones (3.2.16,23). Para entender porqué ocurre esto, hay que considerar que para poder invertir la aproximación de Kirchhoff y estimar el coeficiente de reflexión (sección 2.4) fue necesario suponer que el coeficiente de reflexión es constante. En las figuras 3.3-4 y 3.3-5 muestro el coeficiente de reflexión y el error en los pesos, correspondientes a las trazas de la apertura óptima, para un ángulo de incidencia de  $10^\circ$  en la configuración de *offset* común. Al aumentar la inclinación del reflector, aumenta la apertura de migración, y aumenta el intervalo de ángulos de incidencia, de los pares de fuentes y receptores comprendidos en la apertura de migración. La variación del coeficiente de reflexión y del error en los pesos es la causa del error en la estimación del coeficiente de reflexión de la figura 3.3-3d.

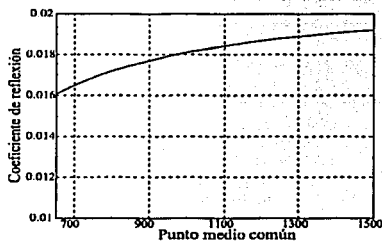


Figura 3.3-4. Coeficiente de reflexión en función el punto medio común.

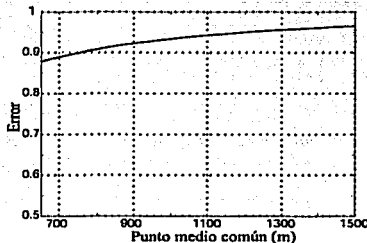


Figura 3.3-5. Error en los pesos del operador (*offset* común) en función del punto medio común.

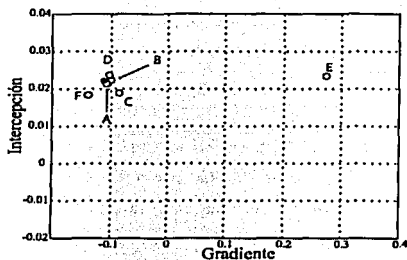


Figura 3.3-6. Gradiente e intercepción de los coeficientes de reflexión estimados. Fuente común: A, C y E para los reflectores de 15°, 30° y 60° de inclinación respectivamente. Offset común: B, D y F para los reflectores de 15°, 30° y 60° de inclinación respectivamente. Con un asterisco se muestra el gradiente y la intercepción del coeficiente de reflexión del modelo.

En la figura 3.3-6 se muestra el gradiente e intercepción de los coeficientes de reflexión estimados para los tres modelos y las dos configuraciones. Marcado con un punto negro se muestra el gradiente y la intercepción del coeficiente de reflexión del modelo. Únicamente en el caso de fuente común (E), para el modelo de 60° de inclinación del reflector, no fue posible estimar con precisión el gradiente y la intercepción del reflector.

Para medios de velocidad constante, la aproximación propuesta por Dellinger et al. (2000) permite estimar con precisión el coeficiente de reflexión. Migrar los datos con el operador de Kirchhoff empleando los pesos correspondientes a un medio de referencia de velocidad constante, equivale a corregir la divergencia geométrica del frente de onda multiplicando los datos de entrada por un factor proporcional al tiempo de arribo del reflejo. Si los pesos del operador de Kirchhoff correspondientes a un medio de velocidad constante, se escalan por una potencia del tiempo de arribo, entonces la corrección a la amplitud será equivalente a escalar los datos de entrada con una potencia del tiempo de arribo del reflejo. Esto es importante, dado que en medios estructuralmente sencillos, sin fuertes variaciones en la velocidad de propagación, es posible corregir los efectos de la divergencia geométrica, la absorción del medio y las pérdidas por transmisión escalando los datos con una potencia del tiempo de arribo del reflejo (Nsoga Mahob et al., 1999). Los pesos de un medio de referencia de velocidad constante permiten corregir adecuadamente la divergencia del frente de onda en medios estructuralmente simples, sin fuertes variaciones laterales.

Por otro lado, los ejemplos de esta sección muestran que las formulas (3.2.16,23) describen adecuadamente el error debido a la aproximación.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 4 Conclusiones

El operador de Kirchhoff forma una imagen de los reflectores al sumar los datos del campo de reflejos primarios a lo largo de superficies de difracción. De las condiciones de fase estacionaria del operador se desprende que en un punto se forma una imagen si la superficie de difracción es tangente a algún evento en los datos de entrada. Esta condición es consistente con la ley de Snell e implica que la imagen de los reflectores es la envolvente de las isócronas. Dado que la ley de Snell es un principio que rige la reflexión de los campos de ondas de cuerpo, el operador de Kirchhoff puede generar una imagen del subsuelo incluso con datos de ondas convertidas.

De las condiciones de representación se deduce que la presencia de cústicas en el campo de ondas puede producir una imagen migrada errónea. Cuando se presentan cústicas en el campo de onda es posible que más de un punto satisfaga las condiciones de representación y no es posible determinar en cual de ellos se encuentra realmente el reflector.

Los pesos del operador no afectan la posición de los reflectores pero controlan la amplitud de la imagen. Diseñando adecuadamente los pesos es posible estimar el coeficiente de reflexión de onda plana. Con una aproximación a los pesos de un medio de referencia de velocidad constante es posible estimar el coeficiente de reflexión en medios estructuralmente sencillos, sin cambios laterales ni fuertes gradientes de velocidad. Considerar un medio de referencia de velocidad constante, para diseñar los pesos del operador de Kirchhoff, es equivalente a corregir la divergencia geométrica del frente de onda con un factor proporcional al tiempo de arribo del reflejo. Los pesos correspondientes a un medio de referencia de velocidad constante balancean la amplitud de la imagen y pueden aplicarse de manera eficiente al momento de leer o escribir el resultado de la migración sin que ello implique esfuerzo en cómputo adicional.

Para el caso de la configuración de fuente común, la aproximación a los pesos de un medio de referencia de velocidad constante permitió estimar con precisión el coeficiente de reflexión en reflectores subhorizontales, con inclinaciones menores a 30 grados.

Para el caso de la configuración de *offset* común, la aproximación a los pesos permitió estimar de manera aceptable el coeficiente de reflexión de un reflector con una inclinación de

hasta 60 grados. La precisión de la aproximación es sensiblemente mejor en la configuración de *offset* común que en la configuración de fuente común

De manera analítica evalué el error en la estimación del coeficiente de reflexión debido a la aproximación, esto permitió determinar en que rango de ángulos de incidencia e inclinación del reflector es posible determinar con precisión el coeficiente de reflexión. La estimación del error que presento concuerda con la evaluación del error hecha por Geiger (2002), quien estimó el error en forma empírica. Además, el error que se observó, en la estimación del coeficiente de reflexión, concuerda con el error calculado analíticamente. Por su parte, Dellinger et al. (2000) evaluaron en forma analítica el error debido a la aproximación, sin embargo, la expresión del error que obtuvieron está en función de la separación entre fuente y receptor y de las coordenadas del punto de reflejo. Por lo que no es posible determinar directamente con dicha expresión el intervalo de ángulos de incidencia y el rango de ángulos de inclinación del reflector para los que la aproximación es válida.

Los pesos de un medio de referencia de velocidad constante sólo permiten estimar el coeficiente de reflexión en medios sin fuertes gradientes de velocidad. Y no es de esperar que en medios estructuralmente complejos sea posible estimar el coeficiente de reflexión con dichos pesos.

# PAGINACIÓN DISCONTINUA

# Apéndices

## Apéndice A. El método de la fase estacionaria.

La motivación de este apéndice es describir un método que permite evaluar de manera asintótica integrales del tipo

$$I(\lambda) = \int_a^b f(t) e^{i\lambda\phi(t)} dt, \quad (\text{A.1})$$

para valores grandes de  $\lambda$ .

Si  $f(t)$  y  $\phi(t)$  son derivables y si  $\phi'(t)$  es distinta de cero en el intervalo de integración, se puede evaluar la integral (A.1) por partes, esto es

$$I(\lambda) = \frac{f(t)}{i\lambda\phi'(t)} e^{i\lambda\phi(t)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dt} \left( \frac{f(t)}{\phi'(t)} \right) e^{i\lambda\phi(t)} dt. \quad (\text{A.2})$$

Esta nueva integral se puede evaluar a su vez por partes. Repitiendo este proceso se tiene que

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n e^{i\lambda\phi(t)}}{(i\lambda)^{n+1}} \left[ \frac{1}{\phi'(t)} \cdot \frac{d}{dt} \right]^n \left[ \frac{f(t)}{\phi'(t)} \right]_a^b + \frac{(-1)^N}{(i\lambda)^N} \int_a^b e^{i\lambda\phi(t)} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\phi'(t)} \cdot \frac{d}{dt} \right]^N \left[ \frac{f(t)}{\phi'(t)} \right] dt. \quad (\text{A.3})$$

El primer término de la ecuación (A.3) es la expansión asintótica de la integral (A.1). La integral por partes se puede efectuar siempre y cuando :

- i)  $\phi'(t)$  sea distinto de cero en el intervalo de integración y

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ii) las derivadas de  $f(t)$  y  $\phi(t)$  del orden requerido existan.

A los puntos en que no se satisfacen estas ecuaciones se les denomina puntos críticos.

Lejos de los puntos críticos, el integrando oscila rápidamente y su contribución a la integral es despreciable en comparación con la contribución de los puntos críticos. En los puntos críticos en que la derivada de la fase se anula, la contribución a la integral es (Bleistein, 1984)

$$e^{i\lambda\phi(u)+i\mu\pi/\lambda} f(u) \left[ \frac{2\pi}{\lambda|\phi''(u)|} \right]^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

donde,  $\mu$  es el signo de la segunda derivada de la fase y  $u$  es tal que  $\phi'(u)=0$ .

Estos resultados se pueden extender al caso de integrales de más de una dimensión, (Bleistein, 1984)

$$\left[ \frac{2\pi}{\lambda} \right]^{m/2} \frac{f(\mathbf{x}_0)}{\sqrt{|\det A|}} e^{i\lambda\phi(\mathbf{x}_0)+i\text{sign}A\pi/\lambda}, \quad (\text{A.5})$$

donde  $A$  es el Hessiano de la fase,  $\mathbf{x}_0$  es un punto en el que la fase es estacionaria y  $m$  es la dimensión del vector  $\mathbf{x}_0$ .

## Apéndice B. Teoría de rayos.

La teoría de rayos es un conjunto de resultados matemáticos que surgen al buscar soluciones a la ecuación de onda de la forma

$$U(\mathbf{x}) = \omega^\beta e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n}. \quad (\text{B.1})$$

Estas soluciones describen al campo de ondas a partir del tiempo de arribo  $\tau(\mathbf{x})$  y de la amplitud  $A(\mathbf{x})$ . Al sustituir la expresión (B.1) en la ecuación de onda se obtiene un conjunto de ecuaciones

diferenciales que rigen las amplitudes y el tiempo de arribo. Para nuestros fines, el primer término de la serie es suficiente.

La ecuación diferencial que satisface el tiempo de viaje se conoce como ecuación *eikonal* y es la siguiente

$$|\nabla \tau(\mathbf{x})|^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}, \quad (\text{B.2})$$

donde  $c(\mathbf{x})$  es la velocidad de propagación de las ondas.

Por su parte, la ecuación diferencial que gobierna la amplitud se conoce como ecuación de transporte y es la siguiente

$$\nabla \cdot (A^2(\mathbf{x}) \nabla \tau(\mathbf{x})) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Para resolver la ecuación *eikonal* se emplea el método de las curvas características. Las ecuaciones diferenciales de las curvas características son

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}, \quad (\text{B.5}) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{1}{2} \nabla \left( \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \right) \quad (\text{B.6})$$

donde,

$$\mathbf{p} = \nabla \tau(\mathbf{x}). \quad (\text{B.7})$$

Por otro lado, al aplicar el teorema de la divergencia a la ecuación de transporte se tiene que

$$\oint_{\mathcal{S}} A^2(\mathbf{x}) \nabla \tau \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad (\text{B.8})$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



si como superficie de integración se escoge un tubo de rayos, se puede mostrar que (Bleistein et al., 2001)

$$A^2(\sigma) = A^2(\sigma_u) \frac{J(\sigma_u)}{J(\sigma)} \quad (\text{B.9})$$

donde  $J(\sigma)$  es el jacobiano del rayo,  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma}$ .

### Apéndice C. Submuestreo\*

Los métodos de migración de Kirchhoff padecen problemas de submuestreo en el dominio de la imagen y en el dominio del operador (Biondi, 2001). Los problemas de submuestreo en la imagen se pueden resolver filtrando los datos de entrada, con un filtro paso bajo, de manera que la longitud de onda satisfaga el criterio de Nyquist.

Si  $\Delta x$  y  $\Delta z$  son los intervalos de muestreo de la imagen y  $\phi$  es la suma de los tiempos de viaje del punto de la imagen a la fuente y del punto de la imagen al receptor, entonces la frecuencia de corte  $f_{\text{corte}}$  debe cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} f_{\text{corte}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p_x \cdot \Delta x} \\ f_{\text{corte}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p_z \cdot \Delta z} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

$$p_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad p_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (\text{C.2})$$

---

Si la frecuencia de muestreo de una señal es menor al doble de la máxima frecuencia contenida en la señal, entonces, no es posible recuperar el espectro de la señal a partir de los datos muestreados (*Teorema del muestreo*) y se dice que los datos muestreados tienen *aliasing*.

Los problemas de submuestreo del operador se deben al muestreo de los datos de entrada. En este caso la frecuencia de corte depende de la diferencia entre la pendiente del operador y la pendiente de los tiempos de arribo. Para este caso la frecuencia de corte es,

$$f_{\text{corte}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|p_O - p_D| \cdot \Delta\xi} \quad (\text{C.3})$$

Donde

$$p_D = \frac{\partial t_D(\xi)}{\partial \xi}, \quad p_O = \frac{\partial \phi(\xi, x)}{\partial \xi} \quad (\text{C.4})$$

$\Delta\xi$  es el intervalo de muestreo de los parámetros de la adquisición y  $t_D(\xi)$  es el tiempo de arribo de los reflejos.

En la figura (C-1) muestro dos imágenes migradas de un reflector de  $60^\circ$  de inclinación. En el cálculo de la imagen (a) no se empleó ningún filtro y en ella se observa claramente el submuestreo del operador. En el cálculo de la imagen (b) se empleó el filtro descrito en este apéndice para evitar el submuestreo del operador.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

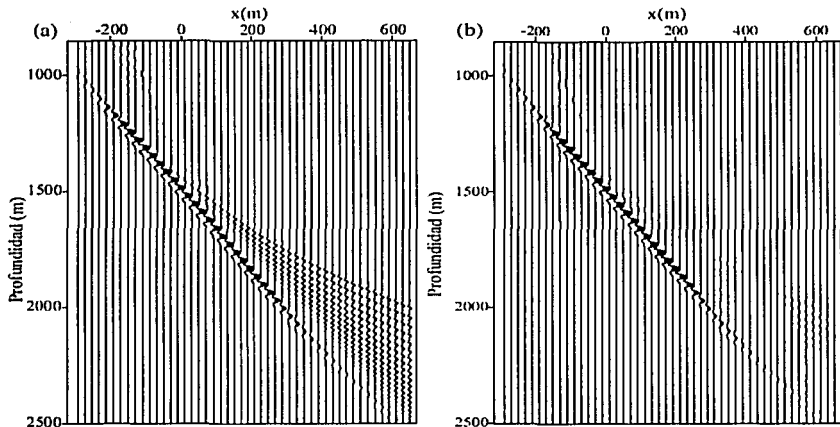


Figura C-1. Imágenes migradas de un reflector de  $60^\circ$  de inclinación, con una configuración de fuente y receptor coincidentes (*offset* cero). En el cálculo de la imagen (a) no se empleó ningún filtro. En el cálculo de (b) se empleó el filtro descrito en este apéndice, para impedir el submuestreo del operador de Kirchhoff. En la imagen (a) se aprecia claramente el submuestreo del operador.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

## Referencias

- Biondi, B., 2001, Kirchhoff imaging beyond aliasing: *Geophysics*, **66**, 654-666.
- Bleistein, N., 1984, *Mathematical methods for wave phenomena*: Academic Press., New York.
- Bleistein, N., 1987, On the imaging of reflectors in the earth: *Geophysics*, **52**, 931-942.
- Bleistein, N., J.K. Cohen y F.G. Hagin, 1987, Two-and-one-half dimensional Born inversion with an arbitrary reference: *Geophysics*, **52**, 26-36.
- Bleistein, N., J.K. Cohen y J.W. Stockwell Jr., 2001, *Mathematics of multidimensional seismic inversion*: Springer-Verlag, New York.
- Claerbout, J.F., 1971, Toward a unified theory of reflector mapping: *Geophysics*, **36**, 467-481.
- de Bruin, C.G.M., C.P.A. Wapenaar y A.J. Berkhout, 1990, Angle-dependent reflectivity by means of prestack migration: *Geophysics*, **55**, 1223-1234.
- Dellinger, J.A., S.H. Gray, G.E. Murphy y J.T. Etgen, 2000, Efficient 2.5-D true-amplitude migration: *Geophysics*, **65**, 943-950.
- Geiger, H.D., 2002, Amplitude preserving weights for Kirchhoff prestack time migration: presentado en la 72ª Reunión Anual Internacional de la Sociedad de Geofísicos de Exploración, Salt Lake City, Utah, E.U.A.
- Gesbert, S., 2002, From acquisition footprints to true amplitude: *Geophysics*, **67**, 830-839.
- Gray, S.H., J. Etgen, J. Dellinger y D. Whitmore, 2001, seismic migration problems and solutions: *Geophysics*, **66**, 1622-1640.
- Hsu, H.P., 1987, *Análisis vectorial*: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
- Liu, Z. y N. Bleistein, 1995, Migration velocity analysis: Theory and an iterative algorithm: *Geophysics*, **60**, 142-153.
- Nsoga Mahob, P., J.P. Castagna y R.A. Young, 1999, AVO inversion of a Gulf of México bright spot- A case study: *Geophysics*, **64**, 1480-1491.
- O'Doherty, R.F. y N.A. Anstey, 1971, Reflections on amplitudes: *Geophysical prospecting*, **19**, 430-458.
- Papoulis, A., 1962, *The fourier integral and its applications*: McGraw-Hill Book Company, Inc.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Stockwell, J.W., 1999, The CWP/SU: Seismic Un\*x package, *Computers & Geosciences*, **25**, 415-419.

Wapenaar, C.P.A., G.L. Peels, V. Budejicky y A.J. Berkhout, 1989, Inverse extrapolation of primary seismic waves: *Geophysics*, **54**, 853-863.

Wapenaar, C.P.A., D.J. Verschuur y P.Herrmann, 1992, Amplitude preprocessing of single and multicomponent seismic data: *Geophysics*, **57**, 1178-1188.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN