00384
2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Espacios de funciones continuas del tipo Cp(X,E)

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO

DIRECTOR DE TESIS

DOCTOR ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO,D.F. ENERO DE 2003

A

Chaparrita
te traigo serenata,
pa' que no digas
que puros corridos canto.
(El Piporro)

A Hortencia

Bendita sea la tierra
donde nació la morera
que dió alimento al gusano
que proporcionó la cera
con la que hicieron el vestido
que ciñe tu cuerpo serrano
¡garbosa!
(Tin Tán)

Agradecimientos

Para elaborar de esta tesis, he necesitado de la motivación, del apoyo, de la inspiración y de la comprensión de muchísimas personas. Antes de entregarla a la imprenta voy a satisfacer la imperiosa necesidad de manifestarles mi agradecimiente infinito a esas bellas personas. El orden en que aparezcan no indica prelación alguna; más bien irán apareciendo como mi memoria las vaya llamando. Pido perdón a las que olvide mencionar explícitamente; sepan que, aunque mi cerebro me falle, estarán siempre en mi corazón.

Mis impetuosos y queridos hijos, al fin chamacos, ya quieren que diga yo algo de ellos. Gracias Manuel, Carlos, Héctor, Antonio y Felipe porque consuetudinariamente me hacen vivir con honestidad y con felicidad, lo cual sería imposible sin el trabajo, junto a mí, de la madre de estos pilluelos, mi amada compañera. Esta tesis es de ella en la parte emotiva, pues ¿quién verdaderamente soportó las tempestades anímicas de su *Angustín*, las calmó y logró llevar siempre a la familia a mares más tranquilos? Gracias, muchas gracias Hortencia.

Agradezco también a todos los jóvenes que han estudiado, estudian y estudiarán en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla, porque han motivado el que yo trate de aprender más, para ofrecerles mejores clases y más claros derroteros por donde gozar la matemática. Mucho de este trabajo lo realicé pensando en ellos. Sin embargo, sin la cooperación de todos los profesores de la Academia de Matemáticas de dicha Facultad, mis cordiales compañeros de trabajo, esta tesis aún no estaría escrita. En efecto, ellos han tenido que absorber mi carga de trabajo para que yo pudiera gozar de permisos con descarga parcial o total de trabajo, durante la mayor parte del tiempo que usé para hacer la tesis. Gracias compañeros, por su maravillosa solidaridad.

De entre mis colegas, quiero mencionar a aquéllos cuya amistad me permite trabajar diariamente con mucha alegría. Ellos me han hecho comprender que los mejores equipos de trabajo son los formados entre amigos, pues en ellos se comparten no sólo el trabajo, sino la vida misma. Gracias, pues, al J.A: a Don Zorri, a Don Ferruco, al Jasón, al Dey azteca, al comandante Linis, al Maci, a Juanelo, a mi compaíto Manuel y al Nato. Con los últimos tres, Juan, Manuel y Armando, he tenido un sueño común, desde 1996: lograr formar en nuestra Facultad

en la UAP, un grupo de trabajo en topología general y de conjuntos. Para hacerlo realidad se requería que cada uno de los soñadores nos preparáramos mejor, y había que buscar a una persona que aceptara guiarnos, comprendiendo nuestras diversas situaciones: todos de más de 30 años, todos con mucho trabajo, algunos con hijos, etc., etc. Manuel y Armando tuvieron el tino de recurrir al que fue su director de tesis de licenciatura que, según su descripción, era un investigador connotado, un excelente y comprensivo profesor y, lo que es más importante, un extraordinario amigo. Por supuesto, se trata nada menos que de Ángel Tamariz. Desde el momento en que se entrevistó con nosotros y a lo largo de todos estos años, he podido corroborar no sólo que son ciertas las cualidades con las que Manuel y Armando nos describieron a Ángel, sino que he descubierto otras muchas. Verdaderamente es raro encontrar a un investigador que realice un trabajo soberbio, que esté dispuesto a atender con extrema gentileza a todos los que recurrimos a él, que sea un ejemplar padre de familia y un eficaz y agradable profesor, que esté siempre dispuesto a apoyar el desarrollo de su universidad (UNAM) y de otras como la nuestra (UAP), que sea un intelectual activo y capaz de aportar a su sociedad opiniones inteligentes y que todo ello lo haga con un excelente sentido del humor que nunca pierde. Trabajando con Ángel Tamariz, no solamente logré realizar esta tesis que él dirigió, sino que aprendí lo que significa ser un Gran Maestro. Aunque finalmente me reciba de doctor, estoy consciente del enorme abismo que existe entre un Gran Maestro y un simple mortal al que le gustan las matemáticas, que las ha enseñado y que aspira a investigarlas (*Me oprimen todavía las sienes*
los brillantes fórceps de este mundo[1]).
Ángel, gracias, infinitamente gracias, por ser mi guía y mi amigo.

Ángel Tamariz logró formar nuestro ansiado grupo de trabajo y, para nuestra fortuna, nos ha unido a la labor que realiza junto con otros profesores de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Durante la realización de esta tesis expuse mis avances no sólo ante mi director, sino también ante algunos de dichos profesores. Deseo mencionar especialmente a Oleg Okunev, quien en todos los seminarios aportó interesantes y profundos comentarios, y a Fidel Casarrubias Segura, que no sólo ha presenciado todas mis exposiciones con inusitada atención, sino que (junto con Juan Angoa) logró trasladarme al presente siglo para que yo escribiera mi trabajo en computadora. Gracias, a estos dos generosos investigadores.

[1] Héctor Carreto, en *Habitante de los parques públicos*.

Mi aprendizaje no concluyó con la versón de la tesis que les entregué a los profesores Adalberto García Maynez, Mijail Tkachenko, Alejandro Illanes, Sergey Antonyan, Alexandre Bikov, Fidel Casarrubias y Ángel Tamariz, quienes amablemente aceptaron ser los sinodales de mi trabajo doctoral. Mi gratitud hacia ellos es inmensa, pues con gran responsabilidad y sabiduría, revisaron dicha versión y propusieron sustanciales e importantes mejoras. He aprendido mucho con sus comentarios inapreciables, gracias a los cuales presento a la luz pública esta versión, esperando que sea mejor que la anterior, aunque, como dice el poeta Mario Calderón [2]

Parecieran agotarse los enigmas
y de madrugada
hay de nuevo aguamiel en el agave...

Agustín Contreras Carreto.

[2] En *Hálito de origen.*

Contenido

Introducción 1

CAPÍTULO 1. Espacios Guadalajara y Puebla 9
1. Espacios E-regulares 9
2. Espacios Guadalajara y Puebla 20
3. E-compacidad 29

CAPÍTULO 2. Estructuras de funciones continuas 37
1. Estructuras algebraicas en $C(X, E)$ 37
2. Estructura topológica en $C(X, E)$ 41
3. Otras propiedades de $Top(-, E)$ y $C_p(-, E)$ 44
4. El funtor $C(X, -)$ 50
5. $L_p(X, E)$ 54

CAPÍTULO 3. Homeomorfismos canónicos de espacios, inducidos por isomorfismos de estructuras de espacios de funciones 61
1. $C_p(-, E)$-equivalencia 63
2. E-extensores 66
3. Espacios de ordinales 72
4. Aplicaciones 78

CAPÍTULO 4. Funciones Cardinales en $C_p(X, E)$ 89
1. Funciones cardinales elementales en $C_p(X, E)$ 89
2. El número de Lindelöf de un espacio $C_p(X, E)$ 96
3. Estrechez y número de Lindelöf 99
4. Estrechez débil y estrechez funcional 103
5. La propiedad de Fréchet–Urysohn, la secuencionalidad y la propiedad k en $C_p(X, \mathbf{2})$ y $C_p(X, \mathbb{Z})$. 111

CAPÍTULO 5. Propiedades tipo compacidad 121
1. Compacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$ 122
2. Compacidad numerable en $C_p(X, \mathbf{2})$ 125
3. Seudocompacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$. 129
4. σ-compacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$ y $C_p(X, \mathbb{Z})$ 133

Bibliografía 139

Introducción

1960 vio nacer el texto *Rings of Continuous Functions* escrito por Leonard Gillman y Meyer Jerison.[3] Este texto fue denominado "THE BOOK" por Melvin Henriksen en su artículo [**38**], en el que narra cómo se fue gestando esta obra, síntesis soberbia de todos los trabajos acerca de la interrelación entre un espacio topológico X y el anillo $C(X)$ de funciones continuas reales definidas en X, que desde el importante artículo de Hewitt ([**42**]) habían aparecido. Felizmente mi aprendizaje sobre todo lo relacionado con los anillos $C(X)$ y, a la postre, con el tema de esta tesis, comenzó, bajo la dirección de Ángel Tamariz, con este libro, pues como Henriksen señala, "por varias generaciones de estudiantes, el trabajar en "THE BOOK" será el primer paso para escribir una disertación en esta área". A través de él conocí el famoso Teorema de Gelfand–Kolmogorov:

TEOREMA 0.1 (Gelfand–Kolmogorov). [4] *Si X y Y son espacios compactos, entonces los anillos $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos si y sólo si X y Y son homeomorfos.*

Este teorema revela que en el universo de los espacios compactos, la estructura de anillo de $C(X)$ determina la topología de X. También aprendí en el libro de Gillman y Jerison que Hewitt demostró en [**42**] que el Teorema de Gelfand–Kolmogorov se puede extender al universo de los espacios realcompactos.

Quizá inspirados en "THE BOOK", se han escrito trabajos interesantes sobre anillos de funciones continuas con valores en estructuras distintas de $\mathbb{R}$, como el artículo de R. S. Pierce (citado en la bibliografía con el número [**55**]) acerca del anillo de funciones continuas $C(X, \mathbb{Z})$, donde $\mathbb{Z}$ es el espacio (anillo topológico) de los números enteros con la topología discreta. Por otro lado, en [**23**], en [**28**] o en [**50**] pueden verse demostraciones de que tanto la estructura de anillo como la de retícula de $C(X, \mathbb{Z})$, determinan la topología de X. En cambio la estructura de grupo abeliano de $C(X, \mathbb{Z})$ no determina en general la topología de X, como puede verse en [**28**] o en [**23**].

A pesar de estas investigaciones y de que el mismo Leonard Gillman invita en [**33**] a desarrollar más investigación sobre los aspectos algebraicos de las estructuras algebraicas de funciones continuas, la mayor parte de la investigación inspirada por "THE BOOK" ha sido de carácter topológico, tal vez por el interés despertado en los topólogos y en los analistas funcionales por teoremas como el de Nagata:

TEOREMA 0.2 (Nagata). [**51**] *Si X y Y son espacios de Tychonoff, entonces los anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos si y sólo si X y Y son homeomorfos.*

[3] En la bibliografía puede hallarse la referencia completa en [**34**].
[4] Ver [**37**].

PAGINACIÓN
DISCONTINUA

A lo largo de esta tesis, $C_p(X, E)$ denota al conjunto $C(X, E)$ de funciones continuas de X a E, dotado de la topología que tiene como subespacio del producto topológico de Tychonoff E^X y que se llama topología de la convergencia puntual en $C(X, E)$. $C_p(X)$, el espacio del que habla el teorema de Nagata, es simplemente el espacio $C_p(X, E)$ cuando E es el espacio $\mathbb{R}$ de los números reales con la topología usual. En el estudio sistemático de los espacios $C_p(X)$, el trabajo de A. V. Arkhangel'skiĭ ha sido medular. Su ya clásico libro "Topological Function Spaces"[5], sus artículos **[3]**, **[6]**,**[7]**,**[8]**, **[12]**, **[13]**, y su texto **[11]**, contienen excelentes descripciones de las sucesivas etapas en el desarrollo de la teoría de estos espacios de funciones. Otros libros sobre este tema son el de McCoy y Ntantu (**[47]**), el de Baars y de Groot (**[16]**), y las notas de Tamariz, Casarrubias y Hernández (**[62]**). En **[13]**, Arkhangel'skiĭ ofrece una extensa bibliografía de 363 trabajos, la mayoría relacionados con los espacios $C_p(X)$ o $C_p(X, \mathbb{I})$, donde $\mathbb{I}$ es el intervalo cerrado unitario $[0, 1]$, con la topología usual. Que no quede entonces la menor duda de que existe actualmente un enorme interés por estos espacios. Sin embargo, no ha habido un estudio sistemático análogo de los espacios topológicos de funciones continuas del tipo $C_p(X, E)$, cuando E es un espacio diferente de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{I}$, ni siquiera para espacios E tan familiares como el ya citado $\mathbb{Z}$ de los números enteros o el espacio discreto de dos elementos, que en esta obra representaré con **2**, o como los subespacios $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}$, que son, respectivamente, los conjuntos de los números naturales, racionales e irracionales con su topología usual, que es la que tienen como subespacios del espacio $\mathbb{R}$. El propósito principal de la presente obra, es el de contribuir al conocimiento de este tipo de espacios $C_p(X, E)$, e intentar comenzar un estudio sistemático de ellos.

Como profesor de matemáticas, una de mis motivaciones fundamentales para aventurarme en los estudios de doctorado y en la subsecuente escritura de este trabajo, ha sido la de poder ofrecer a mis estudiantes posibles líneas de desarrollo y de investigación; por eso deseo que esta tesis sirva como una de tantas formas de comenzar el estudio de los espacios de funciones continuas. Ésta es la razón por la que los primeros tres capítulos son algo extensos en detalles generales.

En esencia el método de trabajo para encontrar propiedades de los espacios del tipo $C_p(X, E)$ consistió en aprovechar la inmensa cantidad de resultados que se conocen para $C_p(X)$ con X de Tychonoff e investigar cuáles podrían trasladarse de alguna manera a la mayor cantidad posible de otros espacios $C_p(X, E)$. Como se ha de comprender, esta investigación es interminable y sólo puedo pretender que la presente tesis sea una aproximación en este sentido. Se sabe por ejemplo que si el espacio X es de Tychonoff, la fuente $C(X)$ posee fuertes propiedades de separación de puntos de X y de puntos de cerrados de X; para expresarlas del modo más general posible he hecho uso, para cada espacio topológico E, de las clases $R(E)$, $E_{7/2}$, $R_\infty(E)$ y, para todo número natural n, de la clase $R_n(E)$. La clase $R(E)$ de los denominados espacios E-regulares fue definida y estudiada por Engelking y Mrówka en **[26]** y desarrollada por el último en **[48]**, en **[49]** y en **[50]**; las otras clases las he definido y analizado en el capítulo 1. Todas estas clases coinciden con la clase de los espacios Tychonoff cuando E es el espacio $\mathbb{R}$, pero hay espacios E para los cuales algunas de dichas clases no coinciden. De este modo surgen de manera natural las clases $\mathbb{G}$ de los espacios Guadalajara y $\mathbb{P}_\infty$ de los espacios Puebla que constan, respectivamente, de los espacios E para los cuales

[5] Ver referencia en la bibliografía en el número **[9]**.

$E_{7/2} = R(E)$ y $R_\infty(E) = R(E)$. La importancia de estas dos clases de espacios radica en que tomando E en alguna de ellas, se obtienen para el espacio $C_p(X, E)$, con $X \in R(E)$, varios hechos interesantes que son paralelos a propiedades de $C_p(X)$, principalmente de aquéllas en las que no se requiere de $\mathbb{R}$ más que lo implícito en la suposición de que X es de Tychonoff y que se traducen, como he comentado, en propiedades de separación de la fuente $C(X)$. La propiedad de separación de la fuente $C_p(X, E)$ que en general resulta más fuerte es la que sirve para definir a los espacios Puebla, por lo que no es de extrañar que aparezcan estos espacios en varios resultados a lo largo de toda la tesis (véanse por ejemplo 2.19, 2.23, 2.24, 2.27, 2.53, 2.54, 2.57, 3.4, 3.78, 4.5, 4.14, 4.15, 4.18, 4.19, 4.24, 4.25, 4.45, 4.59, 5.40,5.42, 5.44). Por otro lado, la clase de espacios Puebla está lejos de ser trivial: contiene a todos los espacios Tychonoff conectables por trayectorias (1.49(3)), a todos los espacios cero–dimensionales (1.49(4)) y a muchos más. Aún no he logrado delimitar con precisión qué espacios topológicos son abarcados por cada una de las clases de espacios Puebla o Guadalajara, pero en el intento he demostrado varias propiedades de los espacios que pertenecen a ellas (verbigracia 1.40, 1.44, 1.46).

Una vez escogido un espacio topológico E, $R(E)$ es el universo más adecuado para estudiar los espacios de funciones $C_p(X, E)$, y como un espacio E-regular es aquél que puede encajarse en alguna potencia de E, al inicio de este trabajo recuerdo viejos criterios, y añado nuevos, para saber cuándo la amalgama[6] de una fuente de funciones continuas encaja al dominio de ellas en el producto topológico de sus codominios y aplico estos resultados para dar útiles caracterizaciones de la E-regularidad en términos de propiedades de separación o de inicialidad de las fuentes $\mathcal{F} = C(X, E)$ y $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X, E^n)$(ver 1.23). Las propiedades universales de las fuentes iniciales (proposición 1.3) y del producto topológico (teorema 1.8), han sido convenientes, pues proveen de maneras de construir funciones (como las que se usan en las definiciones de los funtores $C(-, E)$ de la sección 2 y $C(X, -)$ de la sección 3 del capítulo 2) y simplifican demostraciones, principalmente en donde se ha tenido que mostrar la continuidad de alguna función que llega a un producto topológico (como en 2.41, por ejemplo).

En "THE BOOK" se muestra que las diferentes operaciones y relaciones usuales en el conjunto de los números reales se pueden usar para definir puntualmente relaciones análogas en $\mathbb{R}^X$, para cualquier conjunto X, y éstas a su vez restringirse a $C(X)$, cuando X es un espacio topológico. Aunque un espacio E no sea $\mathbb{R}$, basta con que posea una estructura algebraica del tipo definido en 2.1 de este trabajo (que incluye las estructuras más usuales como son las de grupo, grupo abeliano, anillo, anillo conmutativo, espacio vectorial sobre un campo, y retícula), para que, con las operaciones y relaciones correspondientes definidas puntualmente en $C(X, E)$, este conjunto se convierta en una estructura algebraica del mismo tipo que E. Si además E tiene una estructura algebraico-topológica de cierto tipo, las mismas operaciones puntuales que hacen de $C(X, E)$ una estructura algebraica del mismo tipo que E, harán de $C_p(X, E)$ una estructura algebraico-topológica también del mismo tipo. Aunque todo esto es bien conocido[7] lo repaso someramente en el capítulo 2, para facilitar el recuerdo de estos hechos y para delimitar los que serán útiles para este trabajo.

[6] Recuérdese la definición de amalgama en 1.9 de este trabajo.

[7] Véase por ejemplo [49].

Quizá desde el teorema de Nagata, investigar la relación entre las propiedades del espacio topológico X y la de alguna estructura algebraica $C(X, E)$ o algebraico-topológica $C_p(X, E)$, es uno de los problemas que han guiado a los estudiosos de los espacios de funciones continuas hoy en día. Por ejemplo, una pregunta general, surgida a la luz del teorema de Nagata, es la siguiente:

Si E es una estructura algebraico-topológica de un cierto tipo y las estructuras algebraico-topológicas $C_p(X, E)$ y $C_p(Y, E)$ son topológicamente isomorfas, es decir, son objetos isomorfos en la categoría cuyos objetos son las estructuras algebraico-topológicas del mismo tipo que E (y los morfismos son los homomorfismos continuos entre dichas estructuras), ¿se puede asegurar que los espacios X y Y son homeomorfos?

Una pregunta más general es:

Si E es una estructura algebraico-topológica de un cierto tipo, $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica, y X y Y son espacios topológicos tales que X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y las estructuras algebraico-topológicas $C_p(X, E)$ y $C_p(Y, E)$ son topológicamente isomorfas, ¿Y tendrá la propiedad $\mathcal{P}$?

He abordado este tipo de preguntas en el capítulo 3, en donde no sólo he trabajado con $C_p(X, E)$ como espacio topológico sin estructura algebraica adicional, sino también como espacio vectorial topológico, como anillo topológico (como en el teorema 3.4) y como grupo topológico, y presento varios resultados útiles cuando se trabaja con cualesquiera de estas estructuras algebraico-topológicas (sección 1 del capítulo 3). Para tratar de que la exposición sea unificada y sencilla, he echado mano de la exposición detallada acerca de los funtores entre la categoría $\mathcal{T}op$, de los espacios topológicos y categorías de estructuras algebraicas o algebraico-topológicas que presenté en el capítulo 2. Dichos funtores, como $C_p(-, E)$, asocian a cada espacio topológico X la estructura $C_p(X, E)$, y a cada función continua $f : X \longrightarrow Y$, el morfismo $f^* : C_p(Y, E) \longrightarrow C_p(X, E)$, tal que, si $g \in C_p(Y, E)$, entonces $f^*(g) = g \circ f$. Este morfismo f^* es conocido en algunos trabajos como el mapeo dual de f, y muchas de sus propiedades, respecto a las de f, son conocidas[8] cuando $E = \mathbb{R}$, pero a lo largo de la sección 3 del capítulo 2 extiendo dichas propiedades cuando E es cualquier otro espacio o, en último caso, cuando E es Puebla (como en el corolario 2.24). Uno de los resultados más útiles de esta sección es el hecho de que, si E es una estructura algebraica (o algebraico-topológica) de cierto tipo, entonces para todo espacio topológico X, existen un espacio $\alpha_E X$ y una función E-cociente (2.25) $\alpha_E : X \longrightarrow \alpha_E X$, tales que $\alpha_E X$ es E-regular y $\alpha^* : C_p(\alpha_E X, E) \longrightarrow C_p(X, E)$ es isomorfismo topológico. Esto permite generalizar resultados que se obtienen para $C_p(X, E)$ con X E-regular a resultados sin esta última suposición (por ejemplo en 5.7 y 5.9). Otros hechos dignos de mención que presento en el capítulo 2 son los encajes de cualquier espacio topológico E en el espacio $C_p(X, E)$ (proposición 2.35), y la de cualquier espacio topológico E-regular X en el espacio $C_p(C_p(X, E), E)$ (corolario 2.43). Uso este último encaje para estudiar el espacio vectoral topológico $L_p(X, E)$ para ciertos espacios E y con ello logro demostrar un teorema del tipo Nagata en el capítulo 3 (Teorema 3.4). También he utilizado el encaje en el capítulo 4, para obtener propiedades de dualidad de ciertas funciones cardinales (como en la proposición 4.9).

Mediante el uso de extensores pueden obtenerse homeomorfismos o isomorfismos topológicos entre diversas estructuras de funciones continuas, como muestro en

[8] Véanse, por ejemplo [9] o [62]

la sección 2 del capítilo 3. Uno de los principales resultados de esta sección es el teorema 3.28 que señala que todo espacio metrizable y fuertemente cero-dimensional es t_2-extendial.

En las secciones 3 y 4 del capítulo 3, centro la atención en los espacios $C_p(X, E)$ cuando X es un espacio de ordinales y E es, o bien el espacio $\mathbb{Z}$, o bien, para alguna $n \in \mathbb{N}$, el espacio discreto de n elementos, denotado a lo largo de este trabajo con $\mathbf{n}$. El hecho de que el anillo de las funciones reales continuas y acotadas $C_p^*(X)$ sea unión numerable de espacios homeomorfos a $C_p(X, \mathbb{I})$ (ver por ejemplo [**62**]), motivó el problema de investigar en este trabajo para qué espacios X $C_p(X, \mathbf{2})$ es homeomorfo a su cuadrado $(C_p(X, \mathbf{2}))^2$, y más generalmente cuándo $C_p(X, \mathbf{2})$ es homeomorfo a cualquier espacio $C_p(X, \mathbf{n})$. Para los espacios X que cumplen cualquiera de estas dos condiciones, se tendrá que el espacio $C_p^*(X, \mathbb{Z})$ de todas las funciones continuas y acotadas de X a $\mathbb{Z}$ es una unión numerable de espacios homeomorfos a $C_p(X, \mathbf{2})$. En la proposición 3.72 logro demostrar que para todo ordinal infinito α, son homeomorfos los espacios $C_p([\alpha], \mathbf{2})$ y $C_p([\alpha], \mathbf{n})$. En todo esto uso varios resultados acerca de $C_p(X, \mathbf{2})$ que obtuve adaptando las pruebas de las correspondientes propiedades para $C(X)$ que aparecen en el capítulo 2 de [**16**]. Utilizando resultados de allí, concluyo en la sección 3 del capítulo 3 que, tanto si X es un espacio compacto numerable y Hausdorff, como si es métrico numerable localmente compacto pero no compacto, se cumple que $C_p(X, \mathbf{2})$ es homeomorfo a $C_p(X, \mathbf{n})$.

S. P. Gul´ko demostró en [**36**] que ni el espacio $C_p([\omega_1))$ ni el espacio $C_p([\omega_1])$, son homeomorfos a sus respectivos cuadrados. Tratando de obtener los resultados análogos para los espacios $C_p([\omega_1), \mathbf{2})$ y $C_p([\omega_1], \mathbf{2})$, sólo logré probar, en la sección 4 del capítulo 3 de esta tesis, que estos espacios no son linealmente homeomorfos a sus cuadrados, quedando como problema abierto el saber si son o no homeomorfos a sus cuadrados.

Con el mismo espíritu que en el capítulo 3, en el **4** continué indagando acerca de si los espacios $C_p(X, \mathbf{2})$, $C_p(X, \mathbb{Z})$ y $C_p(X, E)$ cumplen propiedades análogas a las que se tienen para $C_p(X)$. Consulté algunas demostraciones de resultados que sobre estos espacios aparecen en [**62**] y en el ya mencionado texto de Arkhangel'skiĭ, [**9**]. Adapté las demostraciones de algunas de ellas y obtuve, en la sección 1 del capítulo 4, resultados acerca de las funciones cardinales más comunes, como la cardinalidad, el peso, el peso red, la extesión, el i-peso, el π-peso, el carácter, el π-carácter y el pseudo-carácter, en espacios $C_p(X, E)$. Introduje, para cualquier espacio topológico E, la función cardinal i-peso con respecto a E, iw_E, y demostré algunas simetrías o dualidades entre estas funciones cardinales; por ejemplo, (2) de 4.9 señala que:

Si E es un espacio topológico y $X \in R(E)$, entonces
$nw(X)w(E) = w(E)nw(C_p(X, E))$

Como corolario obtenemos que si E es segundo numerable, entonces el peso red es una propiedad t_E-invariante, es decir, los pesos red de X y de Y coinciden si $C_p(X, E)$ y $C_p(Y, E)$ son espacios homeomorfos. También demostré en 4.20 que si Y es un espacio cero-dimensional, tanto el i-peso de $C_p(Y, \mathbf{2})$ como $iw_{\mathbf{2}}(C_p(Y, \mathbf{2}))$, coinciden con la densidad del espacio X, respondiendo parcialmente al problema siguiente, planteado por Oleg Okunev:

Si X es cero-dimensional, ¿será cierto que $iw(X) = iw_{\mathbf{2}}(X)$?

Al mismo tiempo obtuve el resultado dual: Si X es un espacio cero-dimensional, tanto el i-peso de X como $iw_{\mathbf{2}}(X)$ coinciden con la densidad del espacio $C_p(X, \mathbf{2})$.

convirtiendo la pregunta anterior en esta otra: *Si X es cero-dimensional, ¿será cierto que $d(C_p(X)) = d(C_p(X, \mathbf{2}))$?*

El estudio de la estrechez y el número de Lindelöf lo he dejado para la sección 3 del capítulo 4, en donde, imitando la demostración de Arkhangel'skiĭ en [9] de un célebre teorema de M. O. Asanov, demostré en 4.45 una versión de él para espacios $C_p(X, E)$, suponiendo que E es un espacio Puebla de Hausdorff con más de un punto. Asimismo obtuve el siguiente resultado a partir de los teoremas de Arkhangel'skiĭ y E. G. Pytkeev (teorema II.1.1 de [9]):
Si E es un espacio Puebla de Tychonoff y con más de un punto y $X \in R(E)$, entonces $l^*(X) \leq t(C_p(X, E)) \leq l^*(X)w(E)$ (teorema 4.47).

En la sección 4 del capítulo 4 introduje, para un espacio topológico E fijo, las siguientes funciones cardinales: la E-estrechez funcional (Et_θ), la estrechez funcional débil (Et_R) y q_E, que coinciden cuando $E = \mathbb{R}$, con la estrechez funcional (t_θ), la estechez funcional débil (t_R) y el número de Hewitt–Nachbin (q) estudiadas en [9], respectivamente. Siguiendo el derrotero trazado por este texto de Arkhangel'skiĭ, estudio relaciones entre Et_θ , Et_R, q_E, la estrechez débil (t_c) y la estrechez (t) y consigo, como en las secciones anteriores algunos teoremas de dualidad:

Si X es un espacio cero-dimensional, entonces

$$2t_R(X) = q_2(C_p(X, \mathbf{2})) \quad y \quad q_2(X) = 2t_R(C_p(X, \mathbf{2})) = 2t_\theta(C_p(X, \mathbf{2})).$$

(Véanse 4.67 y 4.73).

Otro resultado interesante que presento en el capítulo 4, es el siguiente (4.77): *Si $\mathrm{Ind}X = 0$, es decir, si X es un espacio fuertemente cero-dimensional y normal, entonces:*

$$2t_R(X) = 2t_\theta(X) = q_2(C_p(X, \mathbf{2})).$$

Este resultado y el corolario 4.73, contestan parcialmente a la pregunta:

¿Para qué espacios Y se tiene que $2t_\theta(Y) = 2t_R(Y)$?.

4.73 responde que esta igualdad es válida para espacios Y del tipo $C_p(X, \mathbf{2})$, cuando X es cero-dimensional; 4.77 muestra que también lo es para los espacios Y tales que $\mathrm{Ind}Y = 0$.

En la sección 4 del capítulo 4 estudio la propiedad k, la secuencionalidad y la propiedad de Fréchet–Urysohn y demuestro, como resultado principal, que estas propiedades son equivalentes en los espacios $C_p(X, \mathbb{Z})$, cuando X es cero-dimensional.

En el capítulo 5 investigo las propiedades topológicas que un espacio X debe satisfacer para que $C_p(X, \mathbf{2})$ o $C_p(X, \mathbb{Z})$ posean propiedades tipo compacidad. como la compacidad numerable, la seudocompacidad, la σ-compacidad, la σ-compacidad numerable, la σ-seudocompacidad y la compacidad misma. Como en los capítulos anteriores, he tratado de apoyarme en resultados conocidos acerca de estas propiedades en $C_p(X)$ y en $C_p(X, \mathbb{I})$. Sin embargo, allí mostraré que algunos de dichos resultados no se pueden trasladar del todo a los que serían sus análogos para $C_p(X, \mathbb{Z})$ y $C_p(X, \mathbf{2})$.

Los resultados principales que obtuve en el capítulo 5, son

(1) La caracterización, en términos de propiedades del espacio X (no necesariamente cero-dimensional), de la compacidad en cualquier espacio del tipo $C_p(X, \mathbf{n})$, con $n \in \mathbb{N}$ (5.12).

(2) En 5.22 una generalización de un teorema de Tkachuk y Shakhmatov [9] (5.1) en el que se muestra que en $C_p(X, \mathbb{I})$, con X de Tychonoff, son equivalentes el que X sea un P-espacio, el que $C_p(X, \mathbb{I})$ tenga la propiedad $\mathcal{Q}$ y el que $C_p(X, \mathbb{I})$ tenga la propiedad σ-$\mathcal{Q}$, donde la letra $\mathcal{Q}$ representa cualesquiera de ciertas propiedades relacionadas con la compacidad numerable, y en general más fuertes que ella, cuyas definiciones presento en 5.16, en 5.18, y en 5.20.[10] Cabe señalar que este teorema fue casi totalmente establecido por Manuel Sanchis y Ángel Tamariz en **[58]**. Mi aportación en él fue ampliarlo un poco con la demostración del lema 5.17.

(3) En 5.24, una caracterización en términos de propiedades del espacio cero-dimensional X, de cualquier propiedad del tipo σ-$\mathcal{Q}$ en $C_p(X, \mathbf{n})$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, donde $\mathcal{Q}$ es como en el inciso anterior (o mejor dicho, como se explica en 5.21).

(4) Aprovechando varios resultados del artículo **[58]** de Sanchis y Tamariz acerca de la seudocompacidad y varias propiedades relacionadas con ella y representadas por ellos con la letra $\mathcal{S}$, pude obtener una caracterización de cualquier propiedad $\mathcal{S}$ en $C_p(X, E)$, para los espacios E que son compactos, separables y Puebla, en términos de propiedades del espacio E-regular X (Teorema 5.44). También, para cada espacio compacto Puebla E, de peso menor o igual que α, analizo las propiedades que debe tener el espacio E-regular X para que $C_p(X, E)$ sea α-seudocompacto (5.42).

(5) En 5.53 demuestro que si X es cero-dimensional, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $C_p(X, \mathbf{n})$ es σ-compacto, entonces X es un espacio de Eberlein-Grothendieck (espacio E-G [11]). No he podido demostrar que el recíproco es también verdadero, pero presento un teorema (5.62), probado independientemente por Oleg Okunev, en el que se muestra la equivalencia de la σ-compacidad del espacio $C_p(X, \mathbf{2})$ con el hecho de que X sea un espacio E-G y su conjunto X' de puntos no aislados sea compacto, cuando X es cero-dimensional y normal.

(6) La demostración del teorema 5.67 que afirma que, si X es cero-dimensional, entonces $C_p(X, \mathbb{Z})$ es σ-compacto si y sólo si X es un compacto de Eberlein.

Debo manifestar que la realización de este trabajo hubiera sido poco menos que imposible sin la tenaz dirección del profesor Ángel Tamariz Mascarúa. Su entusiasmo y enorme capacidad de trabajo hicieron que en ocasiones su participación fuera más allá de la simple dirección. Él planteó los problemas más interesantes, corrigió una y otra vez mis incesantes desatinos y concibió algunos de los teoremas demostrados en el capítulo 5 y otros acerca del mismo tema que ya no me atreví a presentar aquí, pero que el lector interesado puede consultar en el artículo **[18]**, ciertamente emanado de esta tesis pero redactado totalmente en inglés por él. Si a pesar del titánico esfuerzo de mi director este trabajo tiene errores, éstos deberán atribuirse única y exclusivamente a mi pigricia.

[9] Aparecido en **[64]**.
[10] Véanse también las observaciones 5.19 y 5.21.
[11] Véase la definición 5.51.

CAPÍTULO 1

Espacios Guadalajara y Puebla

De todos es sabido que el estudio de los anillos de funciones $C(X, \mathbb{R})$ o de los espacios topológicos $C_p(X, \mathbb{R})$ suele hacerse principalmente para los espacios X que son Tychonoff . De manera natural emerge el problema de cómo generalizar el concepto de espacio Tychonoff a una clase C de espacios topológicos de tal modo que el estudio de los espacios $C_p(X, E)$ de funciones continuas de X a E, donde E sea cualquier espacio y X esté en C, resulte fructífero. Los espacios Tychonoff se caracterizan como aquéllos que se pueden encajar en alguna potencia de $\mathbb{R}$, así que una manera de generalizarlos es a través de los llamados espacios E-regulares: aquéllos que se pueden encajar en alguna potencia de E. Acerquémonos un poco a ellos:

1. Espacios E-regulares

DEFINICIÓN 1.1. (1) *Una* **fuente** *es una familia de funciones con dominio común.*

(2) *Una Top-***fuente** *es una familia de funciones continuas entre espacios topológicos, con un espacio común como dominio.*

(3) *Dadas una familia $\mathcal{E} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios topológicos y una fuente $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$,* **la topología inicial o topología débil de X respecto a la pareja** $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ [1] *es la que tiene por subbase a la familia $\mathcal{S}_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} = \{f_\alpha^{\leftarrow}(U) : \alpha \in \mathcal{A}$ y $U \in \tau_\alpha\}$.* [2]

Observemos que si τ es la topología inicial de X respecto a la pareja $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ definida como arriba, todas las funciones de la fuente $\mathcal{F}$ son continuas, es decir, la fuente $\mathcal{H} = \{f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es *Top*-fuente.

DEFINICIÓN 1.2. *Se dirá que una Top-fuente $\mathcal{H} = \{f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es Top-***fuente inicial** *si τ es la topología inicial de X respecto a la pareja $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{G} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y $\mathcal{F}$ es la fuente $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.*

PROPOSICIÓN 1.3. *Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una top-fuente, son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{F}$ es top-fuente inicial.*

(b) *Siempre que (Z, σ) es un espacio topológico y $g : Z \to X$ es una función tal que $\{f_\alpha \circ g : (Z, \sigma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es Top-fuente, entonces $g : (Z, \sigma) \to (X, \tau)$ es continua.*

---

[1] A la topología inicial de X respecto a la pareja $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ suele también llamársele la topología de X generada por dicha pareja.

[2] Aunque es claro que la topología inicial de X depende de las topologías τ_α, en la práctica suele no ser necesaria la mención explícita de la familia $\mathcal{E}$, y basta referirnos a dicha topología como la topología inicial de X respecto a $\mathcal{F}$ o como la topología de X generada por $\mathcal{F}$.

(c) *Si σ es una topología de X tal que $\{f_\alpha : (X,\sigma) \longrightarrow (Y_\alpha,\tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es Top-fuente, entonces $\tau \subseteq \sigma$.* [3]

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que (Z,σ) es un espacio topológico y $g : Z \longrightarrow X$ es una función tal que, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, $f_\alpha \circ g : (Z,\sigma) \longrightarrow (Y_\alpha,\tau_\alpha)$ es continua. Como $\mathcal{F}$ es inicial, τ tiene por subbase a la familia $\mathcal{S}_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} = \{f_\alpha^{\leftarrow}(U) : \alpha \in \mathcal{A}$ y $U \in \tau_\alpha\}$, así que para probar que $g : (Z,\sigma) \longrightarrow (Y_\alpha,\tau_\alpha)$ es continua, basta darse cuenta de que si $\alpha \in \mathcal{A}$ y $U \in \tau_\alpha$, entonces $g^{\leftarrow}(f_\alpha^{\leftarrow}(U)) = (f_\alpha \circ g)^{\leftarrow}(U)$ es abierto en (Z,σ) porque $f_\alpha \circ g$ es continua.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea σ una topología de X tal que $\mathcal{F}' = \{f_\alpha : (X,\sigma) \longrightarrow (Y_\alpha,\tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es *Top*-fuente. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, es continua la composición:

$$(X,\sigma) \xrightarrow{1_X} (X,\tau) \xrightarrow{f_\alpha} (Y_\alpha,\tau_\alpha)$$

y por (b), $1_X : (X,\sigma) \longrightarrow (X,\tau)$ es continua, es decir, $\tau \subseteq \sigma$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea σ la topología inicial de X respecto a la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{F}')$, donde $\mathcal{G} = \{(Y_\alpha,\tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y $\mathcal{F}'$ es la fuente $\{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Entonces la fuente $\mathcal{H} = \{f_\alpha : (X,\sigma) \longrightarrow (Y_\alpha,\tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es *Top*-fuente inicial y, por las implicaciones $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$, ya demostradas, $\sigma \subseteq \tau$ porque $\mathcal{F}$ es *Top*-fuente. Pero como $\mathcal{H}$ es *Top*-fuente y estamos suponiendo (c), $\tau \subseteq \sigma$. Así $\tau = \sigma$ y con ello, $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ es *Top*-fuente inicial. □

OBSERVACIÓN 1.4. En lo sucesivo, cuando no sea necesario, y siguiendo una inveterada costumbre, no haremos referencia a la topología de un espacio topológico y escribiremos simplemente: "el espacio topológico X" en vez de "el espacio topológico (X,τ)".

A continuación mencionaremos dos corolarios de la proposición 1.3, cuya demostración es muy fácil.

COROLARIO 1.5. *Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_\alpha = \{g_{\alpha,\beta} : Y_\alpha \longrightarrow Z_{\alpha,\beta} : \beta \in \mathcal{A}_\alpha\}$ son Top-fuentes iniciales, también lo es la "composición de las Top-fuentes", es decir, la Top-fuente $\{g_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha : X \longrightarrow Z_{\alpha,\beta} : \alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{A}_\alpha\}$*

COROLARIO 1.6. *Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_\alpha = \{g_{\alpha,\beta} : Y_\alpha \longrightarrow Z_{\alpha,\beta} : \beta \in \mathcal{A}_\alpha\}$ son Top-fuentes tales que la "composición" $\mathcal{G} = \{g_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha : X \longrightarrow Z_{\alpha,\beta} : \alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{A}_\alpha\}$ es Top-fuente inicial, entonces $\mathcal{F}$ es Top-fuente inicial.*

EJEMPLOS 1.7. (1) De la definición usual de inmersión o encaje, se tiene que si (X,τ) y (Y,σ) son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función inyectiva, entonces $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ es encaje si y sólo si $\{f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)\}$ es *Top*-fuente inicial.

(2) También de la definición usual de producto topológico de Tychonoff, sabemos que si $\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de espacios topológicos y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\pi_\alpha : \prod_{\beta\in\mathcal{A}} Y_\beta :\longrightarrow Y_\alpha$ es la proyección canónica, entonces

$$\{\pi_\alpha : \prod_{\beta\in\mathcal{A}} Y_\beta \longrightarrow Y_\alpha\}$$

[3] En pocas palabras, τ es la topología "más chica" que "hace continuas" a todas las funciones en $\mathcal{F}$.

es *Top*-fuente inicial.

El último ejemplo pone de manifiesto una propiedad fundamental de los productos topológicos que, con el auxilio de la proposición 1.3, da lugar fácilmente a una caracterización categórica muy útil de dichos objetos:

TEOREMA 1.8 **(Propiedad universal del producto).** *Si* $\{f_\alpha : Z \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es una Top-fuente, existe una única función continua* $h : Z \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$ *tal que, para cada* $\alpha \in \mathcal{A}$, $\pi_\alpha \circ h = f_\alpha$.

DEFINICIÓN 1.9. *Si* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : Z \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es una Top-fuente, a la única función continua* $h : Z \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$ *tal que, para toda* $\alpha \in \mathcal{A}$, $\pi_\alpha \circ h = f_\alpha$, *se le llama* **la amalgama de la familia** $\mathcal{F}$ *y se denota por* $\triangle\mathcal{F}$ *o por* $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha$. [4]

Entre las consecuencias más importantes de la propiedad universal del producto, se encuentran algunos teoremas de inmersión. Para facilitar el enunciado de ellos, introducimos los siguientes conceptos:

DEFINICIÓN 1.10. *Sea* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *una Top-fuente. Diremos que:*

(1) $\mathcal{F}$ **separa puntos de** X *si para cualesquiera dos elementos distintos,* x *y* y, *en* X, *existe* $\alpha \in \mathcal{A}$ *tal que* $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.
(2) $\mathcal{F}$ **separa puntos de cerrados de** X *si para cualquier cerrado* F *en* X *y cualquier* $x \in X \setminus F$, *existe* $\alpha \in \mathcal{A}$ *tal que* $f_\alpha(x) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(F)$.

PROPOSICIÓN 1.11. *Sea* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *un Top-fuente y* $\mathcal{S} = \{f_\alpha^{\leftarrow}(U) : \alpha \in \mathcal{A}$ *y* U *es abierto en* $Y_\alpha\}$. *Entonces:*

(1) $\mathcal{F}$ *separa puntos de* X *si y sólo si* $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$ *es inyectiva.*
(2) $\mathcal{F}$ *separa puntos de cerrados de* X *si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es base para la topología de* X.
(3) *Si* $\mathcal{F}$ *separa puntos de* X *y es Top-fuente inicial,* $\triangle\mathcal{F}$ *es encaje.*
(4) *Si* $\mathcal{F}$ *separa puntos de cerrados de* X, $\mathcal{F}$ *es Top-fuente inicial.*
(5) *Si* $\mathcal{F}$ *separa puntos y puntos de cerrados de* X, $\triangle\mathcal{F}$ *es encaje.*
(6) *Si* X *es* T_0 *y* $\mathcal{F}$ *separa puntos de cerrados de* X, $\triangle\mathcal{F}$ *es encaje.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Basta tomar en cuenta que para toda $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\pi_\alpha \circ \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha = f_\alpha,$$

donde $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha \to Y_\alpha$ es la proyección natural.

(2) Supongamos primero que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X. Sean A un abierto en X y $x \in A$. Existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $f_\alpha(x) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(X \setminus A)$. Si $U = f_\alpha^{\leftarrow}(Y_\alpha \setminus cl_{Y_\alpha} f_\alpha(X \setminus A))$ entonces $x \in U$ y: $y \in U \Longrightarrow f_\alpha(y) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(X \setminus A) \Longrightarrow f_\alpha(y) \notin f_\alpha(X \setminus A) \Longrightarrow y \notin X \setminus A \Longrightarrow y \in A$. Por lo tanto, $U \subseteq A$. Así, $x \in U \subseteq A$ y $U \in \mathcal{S}$. Se ha probado que $\mathcal{S}$ es base para la topología de X.
Ahora supongamos que $\mathcal{S}$ es base para la topología de X. Entonces, si F es un cerrado en X y $x \in X \setminus F$, existen $\alpha \in \mathcal{A}$ y un abierto U de Y_α tales que $x \in f_\alpha^{\leftarrow}(U) \subseteq X \setminus F$. Como $y \in F \Rightarrow y \notin f_\alpha^{\leftarrow}(U) \Rightarrow f_\alpha(y) \notin U$, resulta

[4] A $\triangle\mathcal{F}$ también se le conoce como la función producto diagonal de la familia $\mathcal{F}$, o la evaluación correspondiente a la familia $\{f_\alpha\}$, o el mapeo paramétrico correspondiente a dicha familia.

que $U \cap f_\alpha(F) = \emptyset$ y como $f_\alpha(x) \in U$, $f_\alpha(x) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(F)$. Así vemos que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X.

(3) Como $\mathcal{F} = \{\pi_\alpha \circ \triangle\mathcal{F} : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial, por el corolario 1.6 $\{\triangle\mathcal{F}\}$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial y, como $\mathcal{F}$ separa puntos de X, $\triangle\mathcal{F}$ es inyectiva.

(4) Si $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X, $\mathcal{S}$ es base de la topología de X y en particular es subbase de dicha topología.

(5) Si $\mathcal{F}$ separa puntos de X, $\triangle\mathcal{F}$ es inyectiva y si además separa puntos de cerrados de X, $\mathcal{F}$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial. Como $\mathcal{F}$ es la "composición" $\{\pi_\alpha \circ \triangle\mathcal{F} : X \longrightarrow Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, por el corolario 1.6 resulta que la fuente $\{\triangle\mathcal{F}\}$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial, es decir, X tiene la topología inicial respecto a $\triangle\mathcal{F}$. Entonces $\triangle\mathcal{F}$ es encaje.

(6) Si X es T_0 y $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X, es fácil ver que $\mathcal{F}$ también separa puntos de X. Por (5), $\triangle\mathcal{F}$ es encaje.

□

Antes de continuar, se harán unos útiles convenios sobre notaciones:

NOTACIÓN:
(1) Si X y E son conjuntos, con $F(X,E)$ o con E^X se denotará a la fuente $\{f : X \to E : f \text{ es función }\}$.
(2) Si X y E son espacios topológicos, se denotará por $C(X,E)$ a la $\mathcal{T}op$-fuente $\{f : X \to E : f \text{ es función continua }\}$.
(3) Se acostumbra, en vez de $C(X,\mathbb{R})$, escribir simplemente $C(X)$.

Cabe señalar que si $\mathcal{F}$ es una $\mathcal{T}op$-fuente inicial, no necesariamente separa puntos de cerrados de X. La siguiente proposición nos proveerá de ejemplos para ilustrar éste y otros hechos posteriores:

PROPOSICIÓN 1.12. *Si E es un espacio de Hausdorff con por lo menos dos elementos y tal que las únicas funciones continuas de E en sí mismo son la identidad y las constantes, entonces $C(E^2, E)$ no separa puntos de cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Sean p y q dos puntos distintos en E. Como E es T_2, existen abiertos ajenos U y V en E tales que $p \in U$ y $q \in V$. Sea $F = E^2 \setminus U \times V$. F es cerrado en E^2 y $(p,q) \notin F$.

Supongamos que existe $f \in C(E^2, E)$ tal que $f(p,q) \notin cl_E(f(F))$. Como $\{(p,p), (q,q)\} \subseteq F$, se tiene que $\{f(p,p), f(q,q)\} \subseteq cl_E f(F)$, lo que implica que $f(p,p) \neq f(p,q) \neq f(q,q)$. Entonces las funciones continuas

$$g_p : E \longrightarrow E \quad \text{y} \quad g_q : E \longrightarrow E$$

definidas para cada $x \in E$ como $g_p(x) = f(p,x)$ y $g_q(x) = f(x,q)$ no son constantes (ninguna de las dos vale lo mismo en p que en q). Por las características mencionadas de E se concluye que $g_p = 1_E = g_q$. Lo que significa que $q = g_p(q) = f(p,q) = g_q(p) = p$ y esto es una contradicción. Por lo tanto, no existe $f \in C(E^2, E)$ tal que $f(p,q) \notin cl_E f(F)$. □

DEFINICIÓN 1.13. *Sea E un espacio topológico.*

(1) *Diremos que E es trivial si $E = \emptyset$ o E es un singulete.*
(2) *Diremos que una función $f : E \longrightarrow E$ es trivial si es la identidad o es constante.*

La proposición 1.12 se expresa ahora diciendo que si E es un espacio de Hausdorff no trivial tal que $C(E, E)$ tiene sólo funciones triviales, entonces $C(E^2, E)$ no separa puntos de cerrados.

EJEMPLOS 1.14. (1) J. de Groot demostró en [**21**] la existencia de un subespacio Γ de $\mathbb{R}^2$ no trivial pero tal que $C(\Gamma, \Gamma)$ tiene solamente funciones triviales. A este espacio le llamaremos **espacio de de Groot**. Sean π_1 y π_2 las proyecciones canónicas de Γ^2 en Γ. Como dijimos en el ejemplo 1.7 (2), $\mathcal{F} = \{\pi_i : \Gamma^2 \longrightarrow \Gamma : i \in \{1,2\}\}$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial. Sin embargo $\mathcal{F}$ no separa puntos de cerrados de Γ^2, pues $\mathcal{F} \subseteq C(\Gamma^2, \Gamma)$ y $C(\Gamma^2, \Gamma)$ no separa puntos de cerrados, como se mostró en la proposición 1.12.

(2) Hay en cambio $\mathcal{T}op$-fuentes $\mathcal{F}$ para las cuales se cumplen no sólo la implicación (4) de la proposición 1.11, sino también su recíproca: si $\mathcal{F}$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial, $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados. Un ejemplo importante es la fuente $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X, E^n)$, donde X y E son espacios topológicos cualesquiera. Este hecho y su demostración lo estableceremos formalmente como proposición 1.18, después de dar una definición y una proposición muy útiles.

DEFINICIÓN 1.15. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera. Un subconjunto A de X es E-***abierto** *(respectivamente, E-***cerrado***) ***en** *X si existen $n \in \mathbb{N}, f \in C(X, E^n)$ y un subconjunto abierto (resp. cerrado) U de E^n, tales que $A = f^{\leftarrow}(U)$.*

EJEMPLO 1.16. Si $E = \mathbb{I}$ o $E = \mathbb{R}$, los subconjuntos E-cerrados de un espacio X coinciden con los subconjuntos nulos [5] de dicho espacio, y los E-abiertos, con los conulos. [6]
En 1.14 de [**34**] se afirma que la intersección de conjuntos nulos de un espacio X, no necesariamente es un subconjunto nulo de X. Así que no siempre la intersección arbitraria de E-cerrados es E-cerrado. En cambio, las intersecciones finitas de E-cerrados de un espacio X sí son E-cerrados en ese espacio, como mostraremos a continuación:

PROPOSICIÓN 1.17. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera, y $A \subseteq X$. Entonces:*

(1) *A es E-cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es E-abierto.*
(2) *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua a otro espacio Y y A es E-abierto (resp. E-cerrado) en Y, entonces $f^{\leftarrow}(A)$ es E-abierto (resp. E-cerrado) en X.*
(3) *Uniones finitas de conjuntos E-abiertos (resp. E-cerrados) de X son E-abiertos (resp. E-cerrados) en X.*
(4) *Intersecciones finitas de conjuntos E-abiertos (resp. E-cerrados) de X son E-abiertos (resp. E-cerrados) en X.*

---

[5] Un subconjunto A de un espacio X es un conjunto nulo de X si existe una función $f \in C(X)$ tal que $A = f^{\leftarrow}\{0\}$.

[6] Un subconjunto conulo de un espacio X, es el complemento de un nulo.

PROOF. Como (1) y (2) son sencillas, sólo haremos las demostraciones de (3) y (4). Es suficiente hacerlas para dos conjuntos A y B en X: Si A y B son E-abiertos (resp. E-cerrados) en X, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f_1 \in C(X, E^{n_1})$, $f_2 \in C(X, E^{n_2})$ y abiertos (resp. cerrados) U_1 en E^{n_1} y U_2 en E^{n_2}, tales que $A = f_1^{\leftarrow}(U_1)$ y $B = f_2^{\leftarrow}(U_2)$. Sean $f = \triangle\{f_1, f_2\} : X \longrightarrow E^{n_1} \times E^{n_2} \cong E^{n_1+n_2}$, y sean $\pi_1 : E^{n_1} \times E^{n_2} \longrightarrow E^{n_1}$ y $\pi_2 : E^{n_1} \times E^{n_2} \longrightarrow E^{n_2}$ las proyecciones canónicas. Entonces $A = f_1^{\leftarrow}(U_1) = f^{\leftarrow}(\pi_1^{\leftarrow}(U_1))$ y $B = f_2^{\leftarrow}(U_2) = f^{\leftarrow}(\pi_2^{\leftarrow}(U_2))$, y así $A \cup B = f^{\leftarrow}(\pi_1^{\leftarrow}(U_1) \cup \pi_2^{\leftarrow}(U_2))$ y $A \cap B = f^{\leftarrow}(\pi_1^{\leftarrow}(U_1) \cap \pi_2^{\leftarrow}(U_2))$. Como $\pi_1^{\leftarrow}(U_1) \cup \pi_2^{\leftarrow}(U_2)$ y $\pi_1^{\leftarrow}(U_1) \cap \pi_2^{\leftarrow}(U_2)$ son abiertos (resp. cerrados) en $E^{n_1} \times E^{n_2} \cong E^{n_1+n_2}$ y $f \in C(X, E^{n_1+n_2})$, $A \cup B$ y $A \cap B$ son E-abiertos (resp. E-cerrados). □

PROPOSICIÓN 1.18. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera, y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ las Top-fuentes $C(X, E)$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X, E^n)$, respectivamente. Son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{G}$ separa puntos de cerrados de X.*
(b) *La familia de E-abiertos de X es base para la topología de X.*
(c) *$\mathcal{G}$ es Top-fuente inicial.*
(d) *$\mathcal{F}$ es Top-fuente inicial.*
(e) *La familia de E-cerrados de X es base de cerrados de X.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\mathcal{G} = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, donde, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $Y_\alpha = E^{n_\alpha}$ y $f_\alpha \in C(X, E^{n_\alpha})$. Entonces la familia $\mathcal{S} = \{f_\alpha^{\leftarrow}(U) : \alpha \in \mathcal{A}$ y U es abierto en $Y_\alpha\}$ no es otra cosa que la familia de E-abiertos de X.
(a)⇔(b) Se cumple por la observación anterior y la proposición 1.11 (2).
(a)⇒(c) Es válida por la 1.11 (4).
(c)⇒(b) Si $\mathcal{G}$ es Top-fuente inicial entonces $\mathcal{S}$ es subbase de la topología de X. Como $\mathcal{S}$ es cerrada bajo intersecciones finitas (por la proposición anterior), es base de la topología de X.
(c)⇔(d) Si, para cada $\alpha \in \mathcal{A}, \mathcal{H}_\alpha = \{\pi_j : E^{n_\alpha} \longrightarrow E : j \in \{1, 2, ..., n_\alpha\}\}$, donde cada π_j es una proyección canónica, entonces $C(X, E) = \{\pi_j \circ f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}$ y $j \in \{1, 2, ..., n_\alpha\}\}$. Como, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{H}_\alpha$ es Top-fuente inicial, por los corolarios 1.5 y 1.6 se tiene que $\mathcal{G}$ es Top-fuente inicial ⇔ $\mathcal{F}$ es Top-fuente inicial. □

COROLARIO 1.19. *Sean $X, E, \mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ como en la proposición 1.18. Supongamos que se satisface cualquiera de las condiciones equivalentes (a), (b), (c) o (d) de dicha proposición. Entonces, $\triangle\mathcal{G} : X \longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{G}} Y_f$ es encaje si X es T_0 o si $\mathcal{F}$ separa puntos de X.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es T_0, como $\mathcal{G}$ separa puntos de cerrados de X, por (6) de 1.11 $\triangle\mathcal{G}$ es encaje. Por (5) de esta misma proposición, $\triangle\mathcal{G}$ también es encaje si $\mathcal{F}$ separa puntos de X, ya que este hecho implica que $\mathcal{G}$ separa puntos de cerrados de X. □

COROLARIO 1.20. *Si $X, E, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ son como en la proposición 1.18, si se satisface alguna de las condiciones equivalentes (a), (b), (c) o (d) de dicha proposición y si además X es T_0 o $\mathcal{F}$ separa puntos de X, entonces X es homeomorfo a un subespacio de alguna potencia de E.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para toda $f \in C(X, E^n)$, pongamos $Y_f = E^n$. Entonces $\triangle\mathcal{G}$ es una función de X en $\prod_{f \in \mathcal{G}} Y_f$ y este último espacio es una potencia de E. Además, por el corolario anterior, $\triangle\mathcal{G}$ es encaje. □

Como mencionamos en el primer párrafo de este capítulo, a los espacios que son homeomorfos a subespacios de potencias de E, les daremos un nombre que nos recuerde que su estudio ha sido motivado por los espacios de Tychonoff, o sea los completamente regulares y T_1:

DEFINICIÓN 1.21. *Si X y E son cualesquiera espacios topológicos, diremos que X es* **E-regular** [7] *si es homeomorfo a un subespacio de alguna potencia de E, es decir, si existen un conjunto M y un encaje $\varphi : X \longrightarrow E^M$.*

NOTACIÓN:

(1) Si A y B son espacios topológicos, la proposición "A es homeomorfo a un subespacio de B" se escribirá así: $A \subset_{Top} B$.
(2) La proposición "X es E-regular" se denotará por $X \in R(E)$. De hecho, suele considerarse $R(E)$ como la clase de todos los espacios E-regulares.

El corolario 1.20 da entonces condiciones suficientes para que X sea un espacio E-regular. A continuación veremos que, felizmente, dichas condiciones también son necesarias, es decir, obtenemos la siguiente caracterización de los espacios E-regulares:

TEOREMA 1.22. *Sean X y E espacios topológicos, con $E \neq \emptyset$. Entonces $X \in R(E)$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

(i) *$\mathcal{F} = C(X, E)$ separa puntos de X.*
(ii) *$\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X, E^n)$ separa puntos de cerrados de X.*

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia es el corolario 1.20. Probaremos ahora la necesidad: Sea $X \in R(E)$. Existen entonces un conjunto M y un encaje $j : X \longrightarrow E^M$. Para cada $\mu \in M$, sea $\pi_\mu : E^M \longrightarrow E$ la μ-ésima proyección natural. Veamos que se cumple la condición (i): Si x y y son puntos distintos, $j(x) \neq j(y)$ porque j es inyectiva. Entonces existe $\mu \in M$ tal que $\pi_\mu(j(x)) \neq \pi_\mu(j(y))$. Poniendo $f = \pi_\mu \circ j$, se tiene que $f \in C(X, E)$ y $f(x) \neq f(y)$. Hemos probado que $\mathcal{F}$ separa puntos de X.
Probar la condición (ii) es un poco más tardado, pero ahí va:
Sean F un cerrado en X y $x \in X \setminus F$. Como $j : X \longrightarrow j(X)$ es homeomorfismo, $x \notin F \Rightarrow j(x) \notin j(F) = cl_{j(X)} j(F) = cl_{E^M}(j(F)) \cap j(X) \Rightarrow j(x) \notin cl_{E^M} j(F)$, así que existe $U = \pi_{\mu_1}^{\leftarrow}(V_{\mu_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\mu_n}^{\leftarrow}(V_{\mu_n})$, básico canónico de E^M, tal que $j(x) \in U \subseteq E^M \setminus cl_{E^M} j(F)$. Sean $e \in E$ y, para cada $\mu \in M$,

$$Y_\mu = \begin{cases} E & \text{si } \mu \in \{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \\ \{e\} & \text{si } \mu \notin \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}. \end{cases}$$

Entonces $\prod_{\mu \in M} Y_\mu$ es homeomorfo a E^n, con un homeomorfismo $h : \prod_{\mu \in M} Y_\mu \longrightarrow E^n$ que es la única función continua tal que, para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$, conmuta el triángulo:

[7] El concepto de E-regularidad ha sido ampliamente estudiado por Mròwka (por ejemplo en [48]), quien le llama espacio E-completamente regular al que nosotros hemos llamado E-regular, seguiendo a Eda, Kiyosawa y Ohta en [23]

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mu\in M} Y_\mu \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho_{\mu_k}"'] & E^n \arrow[dl, "\eta_k"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

donde, para toda $k\in\{1,\dots,n\}$, $\eta_k : E^n \longrightarrow E$ es la k-ésima proyección y, para cada $\mu\in M$, ρ_μ es la μ-ésima proyección de $\prod_{\mu\in M} Y_\mu$ en Y_μ. También por la propiedad universal del producto existe $g : E^M \longrightarrow \prod_{\mu\in M} Y_\mu$ continua tal que, para cada $\mu\in M$, conmuta el triángulo:

$$\begin{tikzcd}
E^M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_\mu"'] & \prod_{\mu\in M} Y_\mu \arrow[d, "\rho_\mu"] \\
& Y_\mu
\end{tikzcd}$$

donde, para cada $\mu\in M$, f_μ es la μ-ésima proyección (o sea π_μ) si $\mu\in\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$, y f_μ es la constante $\underline{e}$ [8] si $\mu\notin\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$. Así, para cada $k\in\{1,\dots,n\}$, conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E^M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_{\mu_k}"'] & \prod_{\mu\in M} Y_\mu \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho_{\mu_k}"] & E^n \arrow[dl, "\eta_k"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Sea $f = h\circ g\circ j$. Entonces $f\in C(X, E^n)$. Veamos que $f(x)\notin cl_{E^n} j(F)$: si $y\in U$ entonces, para cada $k\in\{1,\dots,n\}$, se tiene que $\eta_k(h\circ g(y)) = \pi_{\mu_k}(y)\in V_{\mu_k}$. Por consiguiente $h\circ g(U)\subseteq V_{\mu_1}\times\ldots\times V_{\mu_k}$, que es abierto en E^n. En particular $f(x) = h\circ g(j(x))$ es elemento de $V_{\mu_1}\times\ldots\times V_{\mu_k}$. Por otro lado, $f(F)\cap(V_{\mu_1}\times\ldots\times V_{\mu_n}) = \emptyset$, ya que siempre que un elemento z está en F, $j(z)$ no está en U, y existe entonces un $k\in\{1,\dots,n\}$ tal que $\pi_{\mu_k} j(z)\notin V_{\mu_k}$. Así que finalmente $f(x)\notin cl_{E^n} f(F)$. $\square$

COROLARIO 1.23. *Si X y E son espacios topológicos, $E\neq\emptyset$, $\mathcal{F} = C(X,E)$ y $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X, E^n)$, entonces son equivalentes:*

(a) *$X\in R(E)$.*
(b) *$\mathcal{F}$ separa puntos y es Top-fuente inicial.*
(c) *$\mathcal{F}$ separa puntos y $\mathcal{G}$ es Top-fuente inicial.*
(d) *$\mathcal{F}$ separa puntos de X y la familia de E-abiertos de X es base de su topología.*

[8] La función $\underline{e}$ es la que, a cada elemento de su dominio de definición, le asocia el valor e

(e) *$\mathcal{G}$ separa puntos de X y es Top-fuente inicial.*
(f) *$\mathcal{G}$ separa puntos de X y la familia de E-abiertos de X es base de su topología.*

DEMOSTRACIÓN. (a)$\Rightarrow$(b) es consecuencia de 1.18 y 1.22. (b)$\Rightarrow$(c), (c)$\Rightarrow$(d) y (e)$\Rightarrow$(f) se cumplen por 1.18. (d)$\Rightarrow$(e) se deduce de 1.18 y del hecho de que, como $\mathcal{F}$ es subfamilia de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{F}$ separa puntos de X, $\mathcal{G}$ lo hace también. Finalmente, (f)$\Rightarrow$(a) se tiene puesto que, si $\mathcal{G}$ separa puntos de X y la familia de E-abiertos de X es base de su topología, por 1.18 $\mathcal{G}$ es *Top*-fuente inicial, así que por 1.11(5), $\Delta\mathcal{G}$ es encaje y con ello, $X \in R(E)$. □

COROLARIO 1.24. *Si X y E son espacios cualesquiera, $C' \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(X, E^n)$ y la topología de X es la inicial respecto a C', entonces también es la inicial respecto a $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X, E^n)$. Si además X es T_0 o $C(X, E)$ separa puntos, entonces $X \in R(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean τ la topología de X, $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C((X,\tau), E^n)$ y σ la topología inicial de X respecto a la pareja $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{E}$ es la familia de codominios de los elementos de C'. Como τ es la topología inicial de X respecto a la pareja $(\mathcal{E}, C')$, cada elemento de C' es continua, es decir, $C' \subseteq \mathcal{G}$ (por la observación que sigue a la definición 1.1). Por la proposición 1.3, $\tau \subseteq \sigma$. Mas todo elemento de $\mathcal{G}$ es una función continua, así que de nuevo por 1.3, $\sigma \subseteq \tau$. Entonces $\tau = \sigma$ y por ende, $\mathcal{G}$ es *Top*-fuente inicial, y esto implica que es fuente inicial. Si además X es T_0 o $C(X,\ E)$ separa puntos de X, por el corolario 1.20 $X \in R(E)$. □

COROLARIO 1.25. *Si X es un espacio T_0 y E es cualquier espacio topológico, entonces $X \in R(E)$ si y sólo si existe una subfamilia C' de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(X, E^n)$ tal que la topología de X es la inicial respecto a C'.*

Para obtener un corolario más, veamos qué es eso del E-exponente de un espacio topológico:

DEFINICIÓN 1.26. *Sean E un espacio y $X \in R(E)$. El* **E-exponente de X**, *$exp_E X$, es el mínimo cardinal infinito α para el cual $X \subset_{Top} E^\alpha$.*

Seguramente resultará útil recordar que **el peso** de un espacio topológico X es el mínimo cardinal infinito α tal que la topología de X tiene una base de cardinalidad menor o igual que α. El peso de X se denota con $w(X)$. En símbolos: $w(X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es base de la topología de X $\} + \aleph_0$

COROLARIO 1.27. *Sean E un espacio y $X \in R(E)$. Entonces $exp_E X \leq w(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_n = \{f^{\leftarrow}(V) : V$ es abierto en E^n y $f \in C(X, E^n)\}$. Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ es la familia de E-abiertos de X y, por ende, es base de X (por el corolario 1.21). Por 1.1.15 de [**24**], existe una base $\mathcal{B}_0$ de X tal que $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ y $|\mathcal{B}_0| \leq w(X)$. Poniendo $\mathcal{B}_0 = \{B_\lambda : \lambda < w(X)\}$, se tiene que, para cada $\lambda < w(X)$, existen $n_\lambda \in \mathbb{N}$, V_λ abierto en E^{n_λ} y $f_\lambda \in C(X, E^{n_\lambda})$ tales que $B_\lambda = f_\lambda^{\leftarrow}(V_\lambda)$. Sea $\mathcal{F} = \{f_\lambda : \lambda < w(X)\}$. Probaremos que $\Delta\mathcal{F}$ es encaje: si $\mathcal{S} = \{f_\lambda^{\leftarrow}(U) : U$ es abierto en $E^{n_\lambda}\}$, entonces $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{S}$ y por lo tanto $\mathcal{S}$ es base de X. Por 1.11 (2), $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X y como este espacio es T_0, $\Delta\mathcal{F} : X \longrightarrow \prod_{\lambda<w(X)} E^{n_\lambda}$ es encaje. Ahora sea $\{H_\lambda : \lambda < w(X)\}$ una partición de $w(X)$ tal que para toda $\lambda < w(X)$, $|H_\lambda| = n_\lambda$. Para cada $\lambda < w(X)$ y para toda $\mu \in H_\lambda$, sea $X_\mu = E$. Entonces $E^{n_\lambda} \cong \prod_{\mu\in H_\lambda} X_\mu$, y con ello:

$$\prod_{\lambda<w(X)} E^{n_\lambda} \cong \prod_{\lambda<w(X)} \prod_{\mu\in H_\lambda} X_\mu.$$

Como $|\bigcup_{\lambda<w(X)} \mathcal{U}_\lambda| \leq \aleph_0 \cdot w(X) = w(X)$, concluimos que $X \subset_{Top} E^{w(X)}$. Por lo tanto $exp_E X \leq w(X)$. □

COROLARIO 1.28. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica $\aleph_0$-productiva y hereditaria. Si E tiene $\mathcal{P}$, entonces todo espacio E-regular segundo numerable tiene $\mathcal{P}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que E tiene $\mathcal{P}$. Entonces $E^{\aleph_0}$ tiene $\mathcal{P}$. Si $X \in R(E)$ y $w(X) = \aleph_0$, por el corolario anterior $X \subset_{Top} E^{\aleph_0}$, así que X tiene $\mathcal{P}$. □

Otros resultados acerca de E-regularidad que están demostrados en la página 169 de [**48**], son los siguientes:

PROPOSICIÓN 1.29. *Sean E_1 y E_2 espacios topológicos. Entonces:*
(1) *$E_1 \in R(E_1)$. De hecho, $exp_{E_1} E_1 = \aleph_0$.*
(2) *Si $X \in R(E_1)$ y $X_0 \subset_{Top} X$ entonces $X_0 \in R(E_1)$ y $exp_{E_1} X_0 \leq exp_{E_1} X$.*
(3) *Si para cada $\mu \in M$, $X_\mu \in R(E_1)$, entonces $\prod_{\mu\in M} X_\mu \in R(E_1)$ y*

$$exp_{E_1} \prod_{\mu\in M} X_\mu \leq \sum_{\mu \in M} exp_{E_1} X_\mu.$$

(4) *$R(E_2) \subseteq R(E_1)$ si y sólo si $E_2 \in R(E_1)$.*
(5) *$R(E_1) = R(E_2)$ si y sólo si $E_1 \in R(E_2)$ y $E_2 \in R(E_1)$.*
(6) *$R(E_1) = R(E_1^\alpha)$, para todo ordinal $\alpha > 0$.*

EJEMPLOS 1.30. (1) Es usual definir un espacio completamente regular como aquel espacio X en el cual, dados un cerrado F y un punto $x \in X \setminus F$, existe $f \in C(X)$ tal que $f(F) \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$. Ahora bien, un espacio es $T_{7/2}$ o de Tychonoff, si es completamente regular y T_1. Así, si un espacio X es de Tychonoff, es T_0 y, por el hecho de ser completamente regular, $C(X)$ y con ello $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X, \mathbb{R}^n)$, separan puntos de cerrados de X y, aplicando (e) del corolario 1.23 cuando $E = \mathbb{R}$, se concluye que $X \in R(\mathbb{R})$. Inversamente, si $X \in R(\mathbb{R})$, como la propiedad de ser de Tychonoff es productiva y hereditaria y $\mathbb{R}$ es de Tychonoff, entonces X lo es también. En suma:
Un espacio X es de Tychonoff si y sólo si $X \in R(\mathbb{R})$.

Si ahora F es un cerrado en un espacio X, $x \in X \setminus F$ y $f \in C(X)$ es tal que $f(F) \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$, poniendo $g = (0 \vee f) \wedge 1$ [9], se tiene que $g(F) \subseteq \{0\}, g(x) = 1$ y $g \in C(X, \mathbb{I})$. Por eso, usando argumentos similares a los de arriba, concluimos que:
Un espacio X es de Tychonoff si y sólo si $X \in R(\mathbb{I})$.

(2) Acabamos de caracterizar a los espacios de Tychonoff como los $\mathbb{R}$-regulares y también como los $\mathbb{I}$-regulares. ¿Cómo debe ser un espacio E para que su clase de regularidad $R(E)$ coincida con la clase $T_{7/2}$ de los espacios Tychonoff? Si E es de Tychonoff, $E \in R(\mathbb{I})$. Si además $\mathbb{I} \subset_{Top} E$, entonces $\mathbb{I} \in R(E)$ y, por la proposición 1.29(5), $R(E) = R(\mathbb{I})$.
Ahora supongamos que $R(E) = R(\mathbb{I})$. Entonces $E \in R(\mathbb{I})$ y por lo tanto es de Tychonoff. Como $\mathbb{I} \in R(\mathbb{I}) = R(E)$, existe un cardinal α tal que $\mathbb{I} \subset_{Top} E^\alpha$. Sea $\mathbb{I}_0$ un subespacio de E^α homeomorfo a $\mathbb{I}$, y pongamos $E^\alpha = \prod_{\mu\in M} E_\mu$, donde cada E_μ es E. Para al menos un $\mu_0 \in M$, la μ_0-ésima proyección de $\mathbb{I}_0$, $\pi_{\mu_0}(\mathbb{I}_0)$, contiene más de un punto, y como es un continuo, contiene un

[9] 0 y 1 son las funciones constantes con valores 0 y 1, respectivamente; $\vee$ y $\wedge$ son las funciones supremo e ínfimo, también respectivamente. Todas ellas funciones de X en $\mathbb{R}$.

subespacio homeomorfo a I_0 ver [**70**]. Por consiguiente, $\mathbb{I} \subset_{Top} E$. Se ha demostrado entonces que:
$R(\mathbb{I}) = R(E)$ **si y sólo si** $\mathbb{I} \subset_{Top} E$ **y** E **es de Tychonoff.**

Recordemos que un espacio topológico X es **cero-dimensional** si es T_1 y tiene una base cuyos elementos son al mismo tiempo abiertos y cerrados en X. Por comodidad, a un subespacio de un espacio topológico X que es abierto y cerrado a un tiempo en X, le llamaremos **cerrabierto en** X.

Todo espacio discreto es cero-dimensional. Un espacio discreto que usaremos mucho, es el espacio $\{0,1\}$ con la topología discreta. A este espacio lo denotaremos por $\mathbf{2}$.

Otros dos hechos básicos muy conocidos acerca de espacios cero-dimensionales, son:

- La cero-dimensionalidad es una propiedad topológica, hereditaria y productiva.
- Todo espacio cero-dimensional es de Tychonoff.

Ahora añadiremos el siguiente, a modo de proposición:

PROPOSICIÓN 1.31. *Un espacio topológico T_1 X es cero-dimensional si y sólo si $X \in R(\mathbf{2})$.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es cero-dimensional, es T_1 y $C(X,\mathbf{2})$ separa puntos de cerrados de X, pues si F es un cerrado en X y $x \in X \setminus F$, existe un cerrabierto U de X tal que $x \in U \subseteq X \setminus F$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

La función f es continua y, como $cl_{\mathbf{2}} f(F) \subseteq \{0\}$, $f(x) = 1 \notin cl_{\mathbf{2}} f(F)$. Por el corolario 1.23 concluimos que $X \in R(\mathbf{2})$. Esto demuestra la necesidad. La suficiencia es clara porque la cero-dimensionalidad es un propiedad productiva y hereditaria. $\square$

Aplicando este resultado y el corolario 1.27, se obtiene este otro corolario:

COROLARIO 1.32. *Si X es cero-dimensional de peso m, entonces $X \subset_{Top} \mathbf{2}^m$.*

Este corolario simplemente dice que el *Cubo de Cantor*, $\mathbf{2}^m$ es universal para todos los espacios cero-dimensionales de peso m (ver 6.2.16 de [**24**]).

Ahora diremos cómo debe ser un espacio topológico E para que su clase de regularidad coincida con la clase de los espacios cero-dimensionales.

PROPOSICIÓN 1.33. $R(E) = R(\mathbf{2})$ *si y sólo si E es cero-dimensional con más de un punto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $R(E) = R(\mathbf{2})$, entonces $E \in R(\mathbf{2})$ y esto implica, como ya vimos, que E es cero-dimensional. Pero $\mathbf{2} \in R(\mathbf{2}) = R(E)$ y por lo tanto existe un cardinal α tal que $\mathbf{2} \subset_{Top} E^\alpha$, así que E^α y, por consiguiente E, no puede ser un singulete. Esto demuestra la necesidad. Para probar la suficiencia, supongamos que E es cero-dimensional con por lo menos dos puntos distintos, digamos e_1 y e_2. Como $\{e_1, e_2\}$ resulta ser homeomorfo a $\mathbf{2}$, se tiene que $\mathbf{2} \subset_{Top} E$ y ello implica que $\mathbf{2} \in R(E)$ y, por consiguiente, que $R(\mathbf{2}) \subseteq R(E)$. Por otro lado, $E \in R(\mathbf{2})$, y así, $R(\mathbf{2}) = R(E)$. $\square$

Con $\mathfrak{F}$ denotaremos al diádico conexo de Alexandrov[10], es decir, al espacio de dos puntos, $\{0,1\}$, cuyo único subconjunto abierto no vacío propio es $\{0\}$. Es muy fácil demostrar la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1.34 (3.12 de [**48**]). *La clase $R(\mathfrak{F})$ coincide con la clase de todos los espacios T_0. Además $R(E) = R(\mathfrak{F})$ si y sólo si E es un espacio T_0 pero no es un espacio T_1.*

La primera parte de la proposición 1.34 implica, en particular, que para todo espacio T_0 X, la fuente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X, \mathfrak{F}^n)$ separa puntos de cerrados. De hecho, una proposición más fuerte es la siguiente:

PROPOSICIÓN 1.35. *Para todo espacio X, la fuente $C(X,\mathfrak{F})$ separa puntos de cerrados. Más aun, dicha fuente separa puntos, si y sólo si X es un espacio T_0.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un espacio topológico cualquiera, F un cerrado en X y $x_0 \in X \setminus F$. Sea $f : X \longrightarrow \mathfrak{F}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin F \\ 1 & si\ x \in F. \end{cases}$$

Esta función es continua, ya que $f^{\leftarrow}(\{0\}) = X \setminus F$, que es abierto en X. Además $f(x_0) = 0 \notin \{1\} = cl_{\mathfrak{F}}\{1\} = cl_{\mathfrak{F}} f(F)$. Entonces la fuente $C(X, \mathfrak{F})$ separa puntos de cerrados.

Para demostrar la segunda parte, usaremos la proposición 1.34. Por ella sabemos que si X es un espacio T_0, entonces $X \in R(\mathfrak{F})$ y esto implica, por 1.24, que $C(X,\mathfrak{F})$ separa puntos de X.

Inversamente, si ahora suponemos que $C(X,\mathfrak{F})$ separa puntos de X, entonces, por la primera parte de esta proposición, esta misma fuente separa puntos y puntos de cerrados de X, así que por 1.24, $X \in R(\mathfrak{F})$, lo que implica, por 1.34, que X es T_0. $\square$

Esta proposición nos muestra que si X es un espacio que no es T_0, la fuente $C(X,\mathfrak{F})$ separa puntos de cerrados de X pero no separa puntos de X.

2. Espacios Guadalajara y Puebla

Son muy conocidas las siguientes caracterizaciones de la propiedad "X es de Tychonoff", la primera de ellas ya recordada en la sección anterior:

(1) Existe un cardinal m tal que $X \subset_{Top} \mathbb{R}^m$.
(2) X es T_0 y la familia de nulos en X es base de cerrados de su topología.
(3) X es T_0 y su topología es la inicial respecto a (o está generada por) alguna subfamilia de $C(X)$.

Substituyendo en la afirmación (1) el espacio $\mathbb{R}$ por otro cualquiera E, hemos obtenido, en la definición 1.21, el concepto de espacio E-regular y, al caracterizarlo por medio de los corolarios 1.23(d) y 1.25, que en cierto modo son las correspondientes para cualquier espacio E de las afirmaciones (2) y (3) mencionadas arriba, vemos que no es mala idea generalizar el concepto de espacio Tychonoff al de espacio E-regular como lo hicimos. Sin embargo, el que haya estudiado todo o parte del ya clásico libro "Topological Function Spaces" de A. V. Arkhangel'skii y cuya referencia completa aparece en la bibliografía como [**9**], habrá percatádose de que

[10] También llamado espacio de Sierpinski.

en el estudio de los espacios del tipo $C_p(X)$, o sea $C(X)$ con la topoloía que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^X$, se usan las muchas posibilidades de separación por medio de funciones continuas que se tienen al suponer que X es de Tychonoff. Por ejemplo, de la definición de espacio de Tychonoff se deduce fácilmente que, si X tiene tal propiedad, $C(X)$ separa puntos y puntos de cerrados de X. Pero la recíproca es también cierta: si $C(X)$ separa puntos y puntos de cerrados de X, entonces X es de Tychonoff. Esto se deduce del hecho de que X es de Tychonoff si y sólo si $X \in R(\mathbb{R})$, como vimos en el ejemplo 1.30(1). Para espacios E-regulares la análoga caracterización tendría que ser: "*X es un espacio E-regular si y sólo si $C_p(X, E)$ separa puntos y puntos de cerrados de X*". Desafortunadamente, aunque se cumple que *si $C(X, E)$ separa puntos y puntos de cerrados de X entonces $X \in R(E)$*, la otra implicación no necesariamente es cierta. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 1.36. *(de dos espacios X y E tales que $C(X, E)$ no separa puntos de cerrados de X pero X sí es E-regular).* Sea E un espacio de Hausdorff no trivial tal que los únicos elementos de $C(E, E)$ son las funciones triviales. En 1.12 se demostró que $C(E^2, E)$ no separa puntos de cerrados. Como E^2 es E-regular, $X = E^2$ y E son los espacios requeridos.

Este ejemplo muestra que la condición (ii) en el teorema 1.22 no puede ser sustituida por "$C(X, E)$ separa puntos de cerrados de X", aunque sí para ciertas elecciones del espacio E, como para $E = \mathbb{R}$ y $E = 2$. Cabe preguntar:

¿Para qué tipo de espacios E podemos afirmar que la clase $R(E)$ coincide con la clase de los espacios X tales que $C(X, E)$ separa puntos y puntos de cerrados de X?

Como prácticamente todos los espacios E que nos interesarán para estudiar $C(X, E)$ son por lo menos T_0, y como esta propiedad es hereditaria y productiva, lo que implica que si E es T_0 entonces $R(E) \subseteq T_0$, la pregunta que nos interesará es la siguiente:

¿Para qué tipo de espacios $E \in T_0$ podemos afirmar que la clase $R(E)$ coincide con la clase de los espacios X que son T_0 y para los cuales $C(X, E)$ separa puntos de cerrados de X? A esta última clase le daremos un nombre propio:

DEFINICIÓN 1.37. *Sean X un espacio topológico cualquiera y E un espacio T_0. Diremos que X* **es un espacio E-Tychonoff o que pertenece a la clase $E_{7/2}$** *($X \in E_{7/2}$), si X es T_0 y $C(X, E)$ separa puntos de cerrados de X.*

PROPOSICIÓN 1.38. *Sean E y E' espacios topológicos T_0. Entonces:*

(1) $E_{7/2} \subseteq R(E)$.
(2) $E \in E_{7/2}$.
(3) $E \subseteq E' \Longrightarrow E_{7/2} \subseteq E'_{7/2}$.
(4) *Si existe un encaje $j : E \longrightarrow E'$, entonces $E_{7/2} \subseteq E'_{7/2}$.*
(5) *Si $E = \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ y, para cada $\lambda \in \Lambda$, E_λ es T_0, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E_\lambda)_{7/2} \subseteq E_{7/2}$.*
(6) $E_{7/2} \subseteq E'_{7/2} \Longleftrightarrow E \in E'_{7/2}$.
(7) $E_{7/2} = E'_{7/2} \Longleftrightarrow E \in E'_{7/2}$ *y* $E' \in E_{7/2}$.
(8) *$E_{7/2}$ es una propiedad hereditaria pero no productiva.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $X \in E_{7/2}$, entonces X es T_0 y $C(X,E)$ separa puntos de cerrados de X. Así, $C(X,E)$ separa puntos y puntos de cerrados de X, por lo que $X \in R(E)$.
(2) $\{1_E : E \longrightarrow E\}$ separa puntos de cerrados de E.
(3) Si $E \subseteq E'$, entonces $C(X,\ E) \subseteq C(X,\ E')$. Por lo tanto, si $C(X,\ E)$ separa puntos de cerrados de X, también lo hace $C(X,\ E')$.
(4) Es corolario inmediato de (3).
(5) Sea $\lambda \in \Lambda$. Como E_λ está encajado en E, por (4) $(E_\lambda)_{7/2} \subseteq E_{7/2}$. Dado que esto es para toda $\lambda \in \Lambda$, se obtiene que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(E_\lambda)_{7/2} \subseteq E_{7/2}$.
(6) Supongamos que $E \in E'_{7/2}$. Probaremos que $E_{7/2} \subseteq E'_{7/2}$. Si $X \in E_{7/2}$ entonces $C(X,E)$ y $C(E,E')$ separan puntos de cerrados de sus respectivos dominios. De aquí se sigue fácilmente que $C(X,E')$ separa puntos de cerrados de X.
(7) Es corolario inmediato de (6).
(8) Sean $X \in E_{7/2}$ y $A \subseteq X$. Si F es cerrado en A y $x \in A \setminus F$, existe un cerrado F' en X tal que $F = F' \cap A$ y $x \notin F'$. Como $C(X,E)$ separa puntos de cerrados de X, existe $f \in C(X,E)$ tal que $f(x) \notin cl_E f(F')$. Sea $g = f|_A$. Entonces $g \in C(A,E)$ y como $g(F) = f(F) \subseteq f(F')$, $g(x) = f(x) \notin cl_E g(F)$. Para ver que $E_{7/2}$ no es productiva, basta recordar (ver ejemplo 1.36) que si Γ es el espacio de de Groot, $C(\Gamma^2,\Gamma)$ no separa puntos de cerrados de Γ^2, es decir, $\Gamma^2 \notin \Gamma_{7/2}$.

□

Como mencionamos en la prueba de (8) de la proposición anterior, el cuadrado del espacio de de Groot no es elemento de $\Gamma_{7/2}$. Por otro lado, es claro que $\Gamma^2 \in R(\Gamma)$, así que no siempre se tiene, para cualquier espacio E, que $E_{7/2} = R(E)$. Tiene sentido entonces el siguiente concepto:

DEFINICIÓN 1.39. *Un espacio T_0 E es* **un espacio Guadalajara,** *si $E_{7/2} = R(E)$. La clase de los espacios Guadalajara será representada por $\mathbb{G}$.*

El siguiente teorema proporciona algunas propiedades interesantes de estos espacios:

TEOREMA 1.40. (1) $\mathbb{G} = \{E \in T_0 :$ *para cada* $n \in \mathbb{N}, E^n \in E_{7/2}\}$.
(2) *Para todo espacio T_0 E, $E \in \mathbb{G} \iff E_{7/2}$ es productiva.*
(3) $\mathbb{G} = \{E \in T_0 :$ *para cada cardinal* α, $E^\alpha \in E_{7/2}\}$.
(4) $\mathbb{G}$ *es una propiedad productiva.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $G' = \{E \in T_0 :$ para cada $n \in \mathbb{N}, E^n \in E_{7/2}\}$. Supongamos que $E \in \mathbb{G}$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $E^n \in R(E) = E_{7/2}$, se tiene que $E \in G'$. Entonces, $\mathbb{G} \subseteq G'$. Para probar la otra contención, sea $E \in G'$. Ahora hay que ver que $R(E) \subseteq E_{7/2}$. Para ello, tomemos $X \in R(E)$. Como E es T_0, X también. Comprobaremos que $C(X,E)$ separa puntos de cerrados de X. Sean F un cerrado en X y $x \in X \setminus F$. Dado que $X \in R(E)$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X,E^n)$ separa puntos de cerrados de X, así que existen $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C(X,E^n)$ tales que $f(x) \notin cl_{E^n} f(F)$. Como $E \in G'$, $E^n \in E_{7/2}$ y con ello $C(E^n,E)$ separa puntos de cerrados de E^n, por lo que existe $g \in C(E^n,E)$ tal que $g(f(x)) \notin cl_E g(cl_{E^n} f(F))$. En vista de que $cl_E(g(f(F))) \subseteq cl_E g(cl_{E^n} f(F))$, $g \circ f(x) \notin cl_E(g \circ f(F))$ y $g \circ f \in C(X,E)$. Por lo tanto, $C(X,E)$ separa puntos de cerrados de X y $X \in R(E)$.

(2) Sea E un espacio T_0. Supongamos primero que $E \in \mathbb{G}$. Entonces $E_{7/2} = R(E)$ y como $R(E)$ siempre es productiva, $E_{7/2}$ es productiva. Ahora supongamos que la propiedad $E_{7/2}$ es productiva y demostremos que E es un espacio Guadalajara, es decir, que $E_{7/2} = R(E)$. Por 1.38 (1) sabemos que $E_{7/2} \subseteq R(E)$, así que sólo falta ver la otra contención. Sea $Z \in R(E)$; entonces existe un cardinal α tal que $Z \subset_{Top} E^\alpha$. Como $E \in E_{7/2}$ y estamos suponiendo que $E_{7/2}$ es productiva, $E^\alpha \in E_{7/2}$. Por consiguiente, el hecho de que $E_{7/2}$ sea hereditaria implica que $Z \in E_{7/2}$.

(3) Sea $A = \{E \in T_0 :$ para cada cardinal α, $E^\alpha \in E_{7/2}\}$. Si $E \in \mathbb{G}$ entonces $E_{7/2}$ es productiva, como acabamos de ver. Por consiguiente, $E^\alpha \in E_{7/2}$, es decir, $E \in A$. Por lo tanto $\mathbb{G} \subseteq A$. Pero claramente $A \subseteq \{E \in T_0 :$ para cada $n \in \mathbb{N}, E^n \in E_{7/2}\} = \mathbb{G}$.

(4) Supongamos que para toda $\mu \in M$, $E_\mu \in \mathbb{G}$. Probaremos que $\prod_{\mu\in M} E_\mu \in \mathbb{G}$. Para empezar, como cada E_μ es T_0, $\prod_{\mu\in M} E_\mu$ es T_0.
Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(\prod_{\mu\in M} E_\mu)^n \cong \prod_{\mu\in M} E_\mu^n$.
Para cada $\mu \in M$, sea $\pi_\mu : \prod_{\mu\in M} E_\mu^n \longrightarrow E_\mu^n$ la μ-ésima proyección natural.
Sean F un cerrado en $\prod_{\mu\in M} E_\mu^n$ y $\bar{a} = (a_\mu)_{\mu\in M} \in \prod_{\mu\in M} E_\mu^n \setminus F$. Existen entonces $\mu_1, \dots, \mu_k$ en M y $A_1, \dots, A_k$, abiertos de $E_{\mu_1}^n, \dots, E_{\mu_k}^n$, respectivamente, tales que

$$\bar{a} \in \pi_{\mu_1}^{\leftarrow}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{\mu_k}^{\leftarrow}(A_k) \subseteq \prod_{\mu\in M} E_\mu^n \setminus F. \qquad (\star)$$

Pero para cada $\mu \in M$, $E_\mu \in \mathbb{G}$ y con ello $C(E_\mu^n, E)$ separa puntos de cerrados de E_μ^n. Por eso, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe $f_{\mu_j} : E_{\mu_j}^n \longrightarrow E_{\mu_j}$ tal que $f_{\mu_j}(a_{\mu_j}) \notin cl_{E_{\mu_j}} f_{\mu_j}(E_{\mu_j}^n \setminus A_j)$. Para cada $\mu \notin \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, sea $f_\mu : E_\mu^n \longrightarrow E_\mu$ la primera proyección, es decir, la función tal que si $(e_1, \dots, e_n) \in E_\mu^n$, $f_\mu(e_1, \dots, e_n) = e_1$.
Sea $f = \triangle_{\mu\in M}(f_\mu \circ \pi_\mu) : \prod_{\mu\in M} E_\mu^n \longrightarrow \prod_{\mu\in M} E_\mu$, o sea, la única función continua tal que, para cada $\mu \in M$, $q_\mu \circ f = f_\mu \circ \pi_\mu$, donde $q_\mu : \prod_{\mu\in M} E_\mu \longrightarrow E_\mu$ es la proyección natural μ-ésima. Probaremos que $f(\bar{a}) \notin cl_{\prod_{\mu\in M} E_\mu} f(F)$.
Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, sea V_j un abierto de E_{μ_j} tal que $f_{\mu_j}(a_{\mu_j}) \in V_j$ y $V_j \cap f_{\mu_j}(E_{\mu_j}^n \setminus A_j) = \emptyset$. Entonces, para toda $j \in \{1, \dots, k\}$, $q_{\mu_j}(f(\bar{a})) = f_{\mu_j} \circ \pi_{\mu_j}(\bar{a}) = f_{\mu_j}(a_j) \in V_j$, lo que implica que $f(\bar{a}) \in q_{\mu_1}^{\leftarrow}(V_1) \cap \dots \cap q_{\mu_k}^{\leftarrow}(V_k)$.
Entonces $V = q_{\mu_1}^{\leftarrow}(V_1) \cap \dots \cap q_{\mu_k}^{\leftarrow}(V_k)$ es un básico canónico de $\prod_{\mu\in M} E_\mu$ que no intersecta a $f(F)$. En efecto, sea $(e_\mu)_{\mu\in M} \in V$ y supongamos que existe $(b_\mu)_{\mu\in M}$ tal que $f((b_\mu)_{\mu\in M}) = (e_\mu)_{\mu\in M}$. Por consiguiente, $f_\mu(b_\mu) = f_\mu \circ \pi_\mu((b_\mu)_{\mu\in M}) = q_\mu \circ f((b_\mu)_{\mu\in M}) = q_\mu((e_\mu)_{\mu\in M}) = e_\mu$, para cada $\mu \in M$, pero como para toda $j \in \{1, \dots, k\}$, $q_{\mu_j}((e_\mu)_{\mu\in M}) = e_{\mu_j} \in V_j$ y con ello $e_{\mu_j} \notin f_{\mu_j}(E_{\mu_j}^n \setminus A_j)$, entonces $b_{\mu_j} \notin E_{\mu_j}^n \setminus A_j$. Así, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, $b_{\mu_j} \in A_j$ y por lo tanto $(b_\mu)_{\mu\in M} \in \pi_{\mu_1}^{\leftarrow}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{\mu_k}^{\leftarrow}(A_k)$. Por $(\star)$, $(b_\mu)_{\mu\in M} \notin F$. De este modo se ve que no existe $(b_\mu)_{\mu\in M} \in F$ tal que $f((b_\mu)_{\mu\in M}) = (e_\mu)_{\mu\in M}$ y por eso $(e_\mu)_{\mu\in M} \notin f(F)$. De allí que $V \cap f(F) = \emptyset$ y $f(\bar{a}) \in V$. Por lo tanto $f(\bar{a}) \notin cl_{\prod_{\mu\in M} E_\mu} f(F)$.

□

EJEMPLOS 1.41. (1) El espacio diádico conexo de Alexandrov, $\mathfrak{F}$, estudiado en la proposición 1.34, es un espacio Guadalajara, pues es T_0 y $C(X, \mathfrak{F})$

separa puntos de cerrados de X, para cualquier espacio topológico X, como se demostró en 1.35. En particular $\mathcal{R}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}_{7/2}$.

(2) Como se dijo en el ejemplo 1.36, si E es un espacio de Hausdorff no trivial tal que los únicos elementos de $C(E, E)$ son las funciones triviales, entonces $C(E^2, E)$ no separa puntos de cerrados. Por consiguiente, $E^2 \in \mathcal{R}(E) \setminus E_{7/2}$, y con ello $E \notin \mathbb{G}$. En particular, el espacio Γ de de Groot no es Guadalajara. Esto muestra que no todo espacio Tychonoff tiene esta propiedad.

(3) Como se comentó al inicio de esta sección, la definición de espacio Tychonoff implica que $\mathbb{R}$ es un espacio Guadalajara. Por el teorema anterior, $\mathbb{R}^\alpha$ también lo es, para cualquier cardinal α.

(4) $\mathbb{G}$ no es una propiedad hereditaria, pues $\mathbb{R}^2 \in \mathbb{G}$, pero su subespacio Γ no es Guadalajara.

(5) Hay también espacios que son Guadalajara pero no son de Tychonoff. Toda potencia $\mathfrak{F}^\alpha$ de $\mathfrak{F}$ es un ejemplo de tales espacios.

(6) Como corolario de la proposición 1.50 veremos que, tanto los espacios cero-dimensionales no triviales como los espacios de Tychonoff conectables por trayectorias, son espacios Guadalajara.

Antes de dar más ejemplos de espacios Guadalajara, pensemos de nuevo en lo que implica el hecho de "ser de Tychonoff": Si un espacio X es completamente regular, F es un cerrado en X y $x \in X \setminus F$, existe $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f(F) \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$, y si r, s son reales tales que $r < s$, existe un homeomorfismo $h : [0,1] \longrightarrow [r, s]$ tal que $h(0) = r$ y $h(1) = s$. Así, $h \circ f \in C(X, [r, s])$ manda a F a $\{r\}$ y al punto x al valor s. Si añadimos a X la propiedad T_1, es decir, si suponemos en total que X es de Tychonoff, entonces todo singulete es cerrado y ello permite lograr una propiedad de separación "más fuerte" en apariencia que la propiedad de Tychonoff, pero en realidad equivalente a ella:

PROPOSICIÓN 1.42. *Un espacio X es de Tychonoff si y sólo si es T_1 y para cualquier cerrado F en X y cualquier $n \in \mathbb{N}$, dados n puntos distintos, $x_1, \ldots, x_n$ en $X \setminus F$ y $n+1$ valores reales, $r_0, r_1, \ldots, r_n$, no necesariamente distintos entre sí, existe $f \in C(X)$ tal que $f(F) \subseteq \{r_0\}$ y para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_j) = r_j$.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo es menester demostrar la necesidad: para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $G_j = F \cup (\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_j\})$ es cerrado en X, pues X es T_1, y $x_j \notin G_j$. Como X es completamente regular, existe $f_j \in C(X)$ tal que $f_j(G_j) \subseteq \{0\}$ y $f_j(x_j) = r_j - r_0$. Entonces $F = \mathrm{r}_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n \in C(X)$, $f(F) \subseteq \{r_0\}$ y para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_j) = r_j$. □

DEFINICIÓN 1.43. *Sean X un espacio cualquiera y E un espacio T_0.*

(1) *Si $n \in \mathbb{N}$, diremos que X* **pertenece a la clase** *$R_n(E)$ ($X \in R_n(E)$), si X es T_0 y para cualquier cerrado F en X, dados n elementos diferentes en $X \setminus F$, $x_1, \ldots, x_n$, y dados $n+1$ elementos de E, $e_0, \ldots, e_n$, no necesariamente distintos entre sí, existe $f \in C(X, E)$ con la propiedad de que $f(F) \subseteq \{e_0\}$ y para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_j) = e_j$.*

(2) *Diremos que X* **pertenece a la clase** *$R_\infty(E)$ ($X \in R_\infty(E)$), si X pertenece a la clase $R_n(E)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En pocas palabras, $R_\infty(E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n(E)$.*

PROPOSICIÓN 1.44. *Sea E un espacio T_0.*

(1) *Si n, $m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $R_m(E) \subseteq R_n(E)$.*

(2) *Si E es un espacio T_0 con más de un punto y $X \in R_1(E)$, entonces X es T_1.*
(3) *Si E tiene por lo menos dos elementos, entonces $R_n(E) \subseteq E_{7/2}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. En particular $R_n(E) \subseteq R(E)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.*
(4) $R_1(E) = E_{7/2} \iff E \in R_1(E)$.
(5) *Si $E \in T_i$, con $i \in \{1, 2, 3, 7/2\}$ y tiene por lo menos dos elementos, entonces $X \in R_n(E) \Longrightarrow X \in T_i$.*
(6) *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $R_n(E)$ es hereditaria.*
(7) *Si $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y $n \in \mathbb{N}$,*

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in R_n(E) \iff \textit{para todo subconjunto finito } B \textit{ de } \Lambda,\ \prod_{\lambda\in B} X_\lambda \in R_n(E).$$

Demostración. (1) Se sigue inmediatamente de la definición.

(2) Sean e_1 y e_2 dos puntos distintos en E y supongamos que existe V abierto en E, tal que $e_1 \in V$ y $e_2 \notin V$. Sean x_1 y x_2 dos elementos diferentes en X. Como X es T_0, podemos suponer que existe un abierto U en X tal que $x_1 \in U$ pero $x_2 \notin U$. Si denotamos por F al cerrado $X \setminus U$, entonces $x_1 \notin F$ y, como $X \in R_1(E)$, existe $f \in C(X, E)$ tal que $f(x_1) = e_2$ y $f(F) \subseteq \{e_1\}$. Entonces $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$, $x_1 \notin f^{\leftarrow}(V)$ y $x_2 \in f^{\leftarrow}(V)$. Por consiguiente, X es T_1.

(5) Si $X \in R_n(E)$, entonces $X \in E_{7/2}$ y, por la proposición 1.38(1), $X \in R(E)$. Pero T_i es hereditaria y productiva, así que $X \in T_i$.

(6) Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $R_n(E)$ es una propiedad hereditaria. Sean $X \in R_n(E)$, A un subespacio de X, F un cerrado en A, $x_1, \ldots, x_n$ elementos distintos en $A \setminus F$ y $e_0, \ldots, e_n$, en E. Existe F', cerrado en X, tal que $F = F' \cap A$. Como $x_1, \ldots, x_n$ no están en F', existe $g \in C(X, E)$ tal que $g(F') \subseteq \{e_0\}$ y, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $g(x_j) = e_j$. Si $f = g|_A$, entonces $f \in C(A, E)$, $f(F) = g|_A(F) = g(F) \subseteq g(F') \subseteq \{e_0\}$ y $f(x_j) = g|_A(x_j) = g(x_j) = e_j$. Como además A es un espacio T_0, $A \in R_n(E)$

(7) Como $R_n(E)$ es hereditaria, se tiene que si $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in R_n(E)$, entonces, para todo subconjunto finito B de Λ, $\prod_{\lambda\in B} X_\lambda \in R_n(E)$.
Para demostrar la recíproca, tomemos en cuenta primero que, por la suposición de que todo producto de un número finito de elementos de la familia $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ está en la clase $R_n(E)$, resulta que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \in R_n(E)$. Como T_0 es una propiedad productiva, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es T_0. Ahora tomemos $e_0, e_1, \ldots, e_n \in E$, F cerrado en X y $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus F$ y diferentes entre sí. Para cada $i \in [n]$, sean $\lambda_1^i, \ldots, \lambda_{n_i}^i \in \Lambda$ y, para cada $j \in [n_i]$, A_j^i abierto en $X_{\lambda_j^i}$, tales que $x_i \in \bigcap_{j\in[n_i]} \pi_{n_j}^{\leftarrow}(A_j^i) = A_i$, con $A_i \cap F = \emptyset$. Sea $B = \{\lambda_j^i : i \in [n],\ j \in [n_i]\}$. Para cada $i \in [n]$, sean $y_i = \pi_B(x_i)$ y $C_i = \pi_B(A_i)$, y sea $F' = \prod_{\lambda\in B} X_\lambda \setminus \bigcup_{i\in[n]} C_i$. Entonces F' es cerrado en $\prod_{\lambda\in B} X_\lambda$ y $y_i \notin F'$, para toda $i \in [n]$. Como $\prod_{\lambda\in B} X_\lambda \in R_n(E)$, existe una función continua $f : \prod_{\lambda\in B} X_\lambda \longrightarrow E$ tal que $f(F') \subseteq \{e_0\}$ y, para toda $i \in [n]$, $f(y_i) = e_i$. Por consiguiente, la función

$$f \circ \pi_B : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow E$$

es continua, $(f \circ \pi_B)(F) \subseteq f(F') \subseteq \{e_0\}$ (pues $\pi_B(F) \subseteq F'$ porque si $x \in F$, para cada $i \in [n]$ existe $j_i \in [n_i]$ tal que $\pi_{j_i}(x) \notin \pi_{j_i}(A_{j_i}^i)$, con lo que

$\pi_B(x) \notin \pi_B(A_i)$. Por lo tanto $\pi_B(x) \notin \bigcup_{i\in[n]} C_i$ y por eso $\pi_B(x) \notin F'$. También se tiene que, para cada $i \in [n]$, $(f \circ \pi_B)(x_i) = f(y_i) = e_i$. □

COROLARIO 1.45. *Sea E un espacio T_0. Entonces:*

(1) *$R_\infty(E)$ es hereditaria.*
(2) *Si $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de espacios topológicos,*

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in R_\infty(E) \iff \textit{para todo subconjunto finito } B \textit{ de } \Lambda,\ \prod_{\lambda\in B} X_\lambda \in R_\infty(E).$$

Una caracterización de la E-regularidad, análoga a la propiedad dada en la proposición 1.42 para los espacios de Tychonoff, tendría que afirmar: "*X es E-regular si y sólo si $X \in R_\infty(E)$*". Ahora bien, si E tiene más de un punto y si $X \in R_1(E)$, entonces $X \in E_{7/2}$, como ya dijimos, y por el teorema 1.38(1), $X \in R(E)$. Sin embargo, como vimos en el ejemplo 1.36, $\Gamma^2 \in R(\Gamma)$ pero $\Gamma^2 \notin \Gamma_{7/2}$ y en particular $\Gamma^2 \notin R_1(\Gamma)$, así que la implicación "$X \in R(E) \Longrightarrow X \in R_1(E)$" no es válida en general, ni aun cuando X sea de Tychonoff, como en el caso de Γ^2. Precisamente este espacio Γ es él mismo un ejemplo de un espacio que está en $\Gamma_{7/2}$ pero no en $R_1(\Gamma)$. En efecto, como Γ tiene por lo menos dos puntos distintos (de hecho, Γ es denso en $\mathbb{R}^2$ (ver [**21**]) y por lo tanto es infinito), dados un cerrado F en Γ, un punto $x_1 \in \Gamma \setminus F$ y dos elementos e_0, e_1 en Γ, distintos entre sí, con e_1 distinto de x_1, por la naturaleza de Γ [11] no puede existir $f \in C(\Gamma, \Gamma)$ tal que $f(x_1) = e_1$, y $f(F) \subseteq \{e_0\}$.

DEFINICIÓN 1.46. *Sea E un espacio topológico T_0, con más de un punto.*

(1) *Si $n \in \mathbb{N}$, diremos que E* **pertenece a la clase $\mathbb{P}_n$** *si $R(E) = R_n(E)$.*
(2) *Diremos que E es un* **espacio Puebla** *o que* **pertenece a la clase $\mathbb{P}_\infty$**, *si $R(E) = R_\infty(E)$.*
(3) *Si $n \in \mathbb{N}$, diremos que E* **pertenece a la clase $\mathbb{D}_n$** *si $R_n(E) = E_{7/2}$.*
(4) *Diremos que E* **pertenece a la clase $\mathbb{D}_\infty$**, *si $R_\infty(E) = E_{7/2}$.*

PROPOSICIÓN 1.47. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

(1) $\mathbb{P}_\infty = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_m$.
(2) *Si $E \in \mathbb{P}_n \cup \mathbb{D}_n$, entonces $E \in T_1$.*
(3) $\mathbb{P}_n = \mathbb{D}_n \cap \mathbb{G}$.
(4) *Si $\mathbb{P}'_n = \{E \in T_1 :$ para cada $m \in \mathbb{N}, E^m \in R_n(E)\}$, y si $E \in \mathbb{P}'_n$, entonces, para todo cardinal $\alpha \geq \omega$, $E^\alpha \in R_n(E)$.*
(5) $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}'_n$.
(6) *$\mathbb{P}_n$ es hereditaria con respecto a retractos.*
(7) *$\mathbb{D}_n$ es hereditaria con respecto a retractos.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Recordemos que si E tiene por lo menos dos puntos, $R_\infty(E) \subseteq R_m(E) \subseteq E_{7/2} \subseteq R(E)$, para toda $m \in \mathbb{N}$, así que si $E \in \mathbb{P}_\infty$, se tiene que para toda $m \in \mathbb{N}$, $R_m(E) = R(E)$, es decir, $E \in \mathbb{P}_m$, y por lo tanto, $E \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_m$. Inversamente, si $E \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_m$, entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, $R_m(E) = R(E)$. Así, $R(E) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} R_m(E) = R_\infty(E)$, o sea, $E \in \mathbb{P}_\infty$.

[11] Las únicas funciones continuas de Γ en Γ son las constantes y la identidad (ver ejemplo 1.14)

(2) Si $E \in \mathbb{P}_n$, entonces $E \in R(E) = R_n(E)$ y, por 1.44(2), $E \in T_1$.
Si $E \in \mathbb{D}_n$, entonces $E \in E_{7/2} = R_n(E)$ y esto implica nuevamente que $E \in T_1$.

(3) $E \in \mathbb{P}_n$ es equivalente a la proposición $R_n(E) = R(E)$ y por lo tanto al hecho de que $R_n(E) = E_{7/2} = R(E)$, es decir, a que $E \in \mathbb{D}_n \cap \mathbb{G}$.

(4) Si $E \in \mathbb{P}'_n$, E es T_1 y E^α también. Sean F un cerrado en E^α, $p_1, \dots, p_n$ elementos distintos en $E^\alpha \setminus F$, y $e_0, \dots, e_n$, $n+1$ elementos de E.
Pongamos $E^\alpha = \prod_{\mu<\alpha} E_\mu$, donde, para toda $\mu < \alpha$, $E_\mu = E$. También, para cada $\mu < \alpha$, sea $\pi_\mu : E^\alpha \longrightarrow E_\mu$ la μ-ésima proyección. Para toda $j \in \{1, \dots, n\}$, existe un básico canónico de E^α, $W_j = \pi^{\leftarrow}_{\mu_{j,1}}(A_{\mu_{j,1}}) \cap \dots \cap \pi^{\leftarrow}_{\mu_{j,n_j}}(A_{\mu_{j,n_j}})$, tal que $p_j \in W_j \subseteq E^\alpha \setminus F$. Sean:

$$J = \bigcup_{j=1}^{n} \{\mu_{j,1}, \dots, \mu_{j,n_j}\}, \quad Y = \prod_{\mu \in J} E_\mu, \quad U = \prod_{\mu \in J} A_\mu,$$

y sea $\pi_J : E^\alpha \longrightarrow Y$ la proyección a la "J-ésima cara".
Si $q \in F$, entonces, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $q \notin W_j$, así que existe $k \in \{1, \dots, n_j\}$ tal que $\pi_{\mu_{j,k}}(q) \notin A_{\mu_{j,k}}$ y por lo tanto $\pi_J(q) \notin U$. Se tiene, por consiguiente, que $\pi_J(F) \cap U = \emptyset$ y, como U es abierto en Y y $\pi_J(p_j) \in U$, $\pi_J(p_j) \notin cl_Y \pi_J(F)$. Así, $\pi_J(p_1), \dots, \pi_J(p_n)$ son elementos distintos de $Y \setminus cl_Y \pi_J(F)$.[12] Dado que Y es una potencia finita de E y $E \in \mathbb{P}'_n$, $Y \in R_n(E)$, así que existe $g \in C(Y, E)$ tal que, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $g(\pi_J(p_j)) = e_j$, y $g(cl_Y(F)) \subseteq \{e_0\}$. Si $f = g \circ \pi_J : E^\alpha \longrightarrow E$ entonces $f(F) = g \circ \pi_J(F) \subseteq \{e_0\}$ y para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(p_j) = e_j$.

(5) Sea $E \in \mathbb{P}_n$. Entonces $R_n(E) = R(E)$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $E^m \in R(E) = R_n(E)$, y como E es T_1 (por (2)), $E \in \mathbb{P}'_n$. Ahora sea $E \in \mathbb{P}'_n$. Para ver que $E \in \mathbb{P}_n$, basta probar que $R(E) \subseteq R_n(E)$. Si $X \in R(E)$, existe un cardinal α tal que $X \subset_{Top} E^\alpha$. Por (4), $E^\alpha \in R_n(E)$ y por (6) de 1.44, $X \in R_n(E)$.

(6) Sean $X \in \mathbb{P}_n$ y A un retracto de X. Demostraremos que $R(A) \subseteq R_n(A)$.
Sean $Z \in R(A)$, F cerrado en Z, $z_1, \dots, z_n \in Z \setminus F$ y $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$. Como $X \in \mathbb{P}_n$, $R(X) = R_n(X)$, así que $Z \in R(A) \subseteq R(X) = R_n(X)$ y por lo tanto existe $f : Z \longrightarrow X$ continua tal que $f(F) \subseteq \{a_0\}$ y $f(z_i) = a_i$, para toda $i \in [n]$. Entonces, si $\rho : X \longrightarrow A$ es una retracción, se tiene que $\rho \circ f : Z \longrightarrow A$ es continua y $\rho \circ f(F) \subseteq \{a_0\}$ y $(\rho \circ f)(z_i) = a_i$, para cada $i \in [n]$.

(7) La demostración es parecida a la de (6).

$\square$

COROLARIO 1.48. *Sea E un espacio topológico T_0. Entonces:*

(1) *Si $E \in \mathbb{P}_\infty \cup \mathbb{D}_\infty$, entonces $E \in T_1$.*
(2) $\mathbb{P}_\infty$ *es hereditaria respecto a retractos.*
(3) $\mathbb{P}_\infty = \mathbb{D}_\infty \cap \mathbb{G}$.
(4) $\mathbb{P}_\infty = \{E \in T_1 :$ *para cada* $m \in \mathbb{N}, E^m \in R_\infty(E)\}$.

EJEMPLOS 1.49. (1) $\mathfrak{F}$, el espacio diádico de Alexandrov, es un espacio Guadalajara, pero no es un espacio Puebla, porque no es T_1. De hecho,

[12] Si $\pi_J(p_i) = \pi_J(p_j)$, para $i \neq j$, existe $\lambda < \alpha$ tal que $\pi_\lambda(p_i) \neq \pi_\lambda(p_j)$ y podemos anexar λ al conjunto J y obtener un nuevo conjunto J' en el que $\pi_{J'}(p_i) \neq \pi_{J'}(p_j)$, sin perder el hecho de que, para toda $j \in \{1, \dots, n\}$, $\pi_{J'}(j) \notin cl_Y \pi_{J'}(F)$.

para cualquier cardinal α, $\mathfrak{F}^\alpha$ es un espacio de cardinalidad 2^α, pero no es un espacio Puebla porque no es un espacio T_1, aunque sí es Guadalajara porque $\mathbb{G}$ es una propiedad productiva.

(2) Con las nuevas notaciones, la definición usual de espacio Tychonoff se puede reescribir simplemente así: **Un espacio X es de Tychonoff si y sólo si $X \in R_1(\mathbb{R})$.** Vimos, en la proposición 1.42, que esta propiedad es suficiente para demostrar que **$\mathbb{R}$ es un espacio Puebla**. Una demostración semejante a la de dicha proposición, nos permite asegurar que: **si $(E,+)$ es un grupo topológico abeliano, entonces $R_1(E) = R_\infty(E)$.** Para convencernos de este hecho, basta mostrar que $R_1(E) \subseteq R_\infty(E)$: Sean $X \in R_1(E)$, F un cerrado en X, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$, puntos distintos en $X \setminus F$, y $e_0, e_1, \ldots, e_n$, $n+1$ elementos de E. Como X es T_1, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $G_j = F \cup (\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_j\})$ es cerrado en X. Dado que $X \in R_1(E)$, entonces, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $f_j \in C(X, E)$ tal que $f_j(x_j) = e_j - e_0$ y $f_j(G_j) \subseteq \{0\}$. Si ponemos $f = e_0 + f_1 + \ldots + f_n$, se tiene que $f(F) \subseteq \{e_0\}$ y, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_j) = e_j$.

(3) De igual manera puede probarse que $\mathbb{I}$, y de hecho cualquier otro intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$, son espacios Puebla.

(4) Si E es de Tychonoff no trivial y conectable por trayectorias, entonces E es un espacio Puebla. Para demostrar esto, usaremos (4) del corolario 1.48, es decir, veremos que si $m \in \mathbb{N}$, entonces $E^m \in R_\infty(E)$. Sean $m \in \mathbb{N}$, F un cerrado en E^m, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$ elementos distintos en $E^m \setminus F$, y $e_0, \ldots, e_n$, $n+1$ elementos de E. Como E es conectable por trayectorias, existen $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ en $\mathbb{R}$, y para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, una trayectoria $\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \longrightarrow E$ tal que $\gamma_k(a_{k-1}) = e_{k-1}$ y $\gamma_k(a_k) = e_k$. Sea $\gamma : [a_0, a_n] \longrightarrow E$ tal que, para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\gamma|_{[a_{k-1}, a_k]} = \gamma_k$.
Entonces γ es una función continua. Por otro lado, como $[a_0, a_n]$ es un espacio Puebla y $E^m \in R([a_0, a_n])$, es decir, es de Tychonoff, existe $f \in C(E^m, [a_0, a_n])$ tal que $f(F) \subseteq \{a_0\}$ y, para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_k) = a_k$. Entonces $\gamma \circ f : X \longrightarrow E$ es continua y tal que $\gamma \circ f(x_k) = e_k$, para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $\gamma \circ f(F) \subseteq \{e_0\}$.

(5) Todo espacio cero-dimensional con más de un punto es un espacio Puebla. Para demostrar esta afirmación, usaremos nuevamente (4) del corolario 1.48. Sean E un espacio cero-dimensional y $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $E^n \in R_\infty(E)$. Como $R_\infty(E) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} R_m(E)$, usaremos inducción matemática sobre m para probar que

$$\forall m \in \mathbb{N} : E^n \in R_m(E).$$

Sea $S = \{m \in \mathbb{N} : E^n \in R_m(E)\}$.
Primero, $1 \in S$ pues si F es cerrado en E^n, $x_1 \in E^n \setminus F$, y e_0 y e_1 son elementos de E, entonces existe un cerrabierto U de E^n, tal que $x_1 \in U \subseteq E^n \setminus F$. La función $f : E^n \longrightarrow E$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si } x \in U \\ e_0 & \text{si } x \notin U, \end{cases}$$

es continua, $f(x_1) = e_1$ y $f(F) \subseteq \{e_0\}$. Entonces $E^n \in R_1(E)$.
Ahora supongamos que $m \in S$ y demostremos que $m+1 \in S$. Sean F un cerrado en E^n, $x_1, \ldots, x_{m+1}$ elementos distintos en $E^n \setminus F$ y $e_0, \ldots, e_{m+1}$, $n+2$ elementos de E. Como $m \in S$, existe $g \in C(E^n, E)$ tal que $g(F) \subseteq \{e_0\}$ y para cada $j \in [m]$, $f(x_j) = e_j$. Por otro lado, $x_{m+1} \notin F \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$ y

este conjunto es cerrado en E^n, de donde se colige que existe un cerrabierto U en E^n tal que $x_{m+1} \in U \subseteq E^n \setminus (F \cup \{x_1, \dots, x_m\})$. Por lo tanto la función $f : E^n \longrightarrow E$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} e_{m+1} & \text{si } x \in U \\ g(x) & \text{si } x \notin U, \end{cases}$$

es continua, $f(x_j) = e_j$, para toda $j \in \{1, \dots, m+1\}$, y $f(F) = g(F) \subseteq \{e_0\}$. Así, $m+1 \in S$.
Por lo tanto, $S = \mathbb{N}$.

Como corolario de los dos últimos ejemplos, tenemos que:

PROPOSICIÓN 1.50. (1) *Si E es de Tychonoff, conectable por trayectorias y con más de un punto, entonces $R_\infty(E) = E_{7/2} = R(E)$.*

(2) *Si E es cero-dimensional con más de un punto, entonces $R_\infty(E) = E_{7/2} = R(E) = \{X \in T : X \text{ es cero-dimensional}\}$.*

3. E-compacidad

Otra caracterización de la propiedad de Tychonoff es la siguiente: **La clase de espacios de Tychonoff coincide con la clase de espacios que son subespacios de espacios compactos Hausdorff** (ver [**34**]). Para dar un criterio análogo que caracterice a la E-regularidad, definamos primero a los espacios que jugarán en él el papel análogo al que juegan los compactos Hausdorff en la caracterización anterior.

DEFINICIÓN 1.51. *Si X y E son cualesquiera espacios topológicos, diremos que X* **es E-compacto** *si es homeomorfo a un subespacio cerrado de alguna potencia de E, es decir, si existen un conjunto M y un encaje $\varphi : X \longrightarrow E^M$ tales que $\varphi(X)$ es cerrado en E^M.*

NOTACIÓN:

(1) Si A y B son espacios topológicos, la proposición "A es homeomorfo a un subespacio cerrado de B", se representará con $A \subset_{cl} B$.
(2) La proposición "X es E-compacto", se indicará con $X \in K(E)$, es decir, $K(E)$ denotará a la clase de los espacios E-compactos.

El concepto de E-compacidad generaliza a los conceptos de compacidad y de realcompacidad. En efecto, si X es compacto y T_2, X es de Tychonoff y por lo tanto es $\mathbb{I}$-regular, así que X es homeomorfo a un subespacio A de alguna potencia $\mathbb{I}^M$ de $\mathbb{I}$. Como X es compacto, A también lo es, y como $\mathbb{I}^M$ es T_2, A es subespacio cerrado de $\mathbb{I}^M$. Con ello $X \subset_{cl} \mathbb{I}^M$. Inversamente, si $X \subset_{cl} \mathbb{I}^M$ para algún conjunto M, entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado del compacto Hausdorff $\mathbb{I}^M$ y por eso X es compacto y Hausdorff. Entonces los espacios $\mathbb{I}$-compactos son precisamente los compactos de Hausdorff.

Gillman y Jerison prueban en 11.12 de [**34**] que los espacios realcompactos son exactamente los $\mathbb{R}$-compactos. Ahora veremos nosotros quienes son los **2**-compactos.

PROPOSICIÓN 1.52. $X \in K(\mathbf{2})$ *si y sólo si X es compacto y cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $X \in K(\mathbf{2})$. Entonces existen un conjunto M y un subespacio cerrado A de $\mathbf{2}^M$ tal que X es homeomorfo a A, el cual es compacto por ser cerrado en el compacto $\mathbf{2}^M$. X es cero-dimensional pues $X \in R(\mathbf{2})$ (ver proposición 1.31). Hemos demostrado la necesidad. Ahora demostraremos la suficiencia. Sea X cero-dimensional y compacto. Entonces $X \in R(\mathbf{2})$, así que para algún conjunto M, $X \subset_{Top} \mathbf{2}^M$ y como este último espacio es de Hausdorff y X es compacto, $X \subset_{cl} \mathbf{2}^M$, es decir, $X \in K(\mathbf{2})$. □

DEFINICIÓN 1.53. *Sean E cualquier espacio y $X \in K(E)$.* **El E-exponente grande de** X, $Exp_E X$, *es el mínimo cardinal infinito α para el cual $X \subset_{cl} E^{\alpha}$.*

Es fácil ver que para todo espacio E y todo espacio $X \in K(E)$, $exp_E X \leq Exp_E X$. Otras propiedades de los espacios E-compactos, como las siguientes, pueden estudiarse con más detenimiento en [**48**].

PROPOSICIÓN 1.54. *Sean E y F espacios topológicos cualesquiera. Entonces:*

(1) $K(E) \subseteq R(E)$.
(2) $E \in K(E)$. *Más aún,* $Exp_E E = \aleph_0$.
(3) *Si* $X \in K(E)$ *y* $A \subset_{cl} X$, *entonces* $A \in K(E)$ *y* $Exp_E A \leq Exp_E X$.
(4) *Si para cada* $\mu \in M$, $X_\mu \in K(E)$, *entonces se tiene que* $\prod_{\mu \in M} X_\mu \in K(E)$ *y* $Exp_E \prod_{\mu \in M} X_\mu \leq \sum_{\mu \in M} Exp_E X_\mu$.
(5) $K(E) \leq K(F)$ *si y sólo si* $E \in K(F)$.
(6) $K(E) = K(F)$ *si y sólo si* $E \in K(F)$ *y* $F \in K(E)$.

Con demostraciones parecidas a las del ejemplo 1.30 (2) y de la proposición 1.33, respectivamente, se pueden probar las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 1.55. *Si E es un espacio topológico cualquiera, entonces* $K(\mathbb{I}) = K(E)$ *si y sólo si* $\mathbb{I} \subset_{cl} E$, *y E es compacto y Hausdorff.*

PROPOSICIÓN 1.56. *Si E es un espacio topológico cualquiera, entonces* $K(\mathbf{2}) = K(E)$ *si y sólo si E es cero-dimensional, compacto y con más de un punto.*

Para el siguiente ejemplo, mencionado en [**48**], página 177, daremos la siguiente notación:

NOTACIÓN: Si α es un ordinal cualquiera distinto de 0, denotaremos por $[0, \alpha)$ a la familia de ordinales menores estrictamente que α, con la topología del orden. También, si α es un ordinal mayor que 1, denotaremos al espacio $[1, \alpha)$ por (α) y al espacio $[1, \alpha]$ por $[\alpha]$.

EJEMPLO 1.57. Sean α y β ordinales iniciales.

(1) Si $cf(\alpha) = cf(\beta)$ entonces $K([0, \alpha)) = K([0, \beta))$.
(2) Si $cf(\alpha) \neq cf(\beta)$ entonces ni $K([0, \alpha)) \subseteq K([0, \beta))$, ni $K([0, \beta)) \subseteq K([0, \alpha))$.

OBSERVACIÓN 1.58. Es muy fácil obtener la caracterización de la E-regularidad insinuada al inicio de esta sección, usando el concepto de E-compacidad: Si X es E-regular, existen un conjunto M y un encaje $j : X \longrightarrow E^M$, así que $cl_{E^M} j(X)$ es E-compacto y X, al identificarse con $j(X)$, es un subespacio de él. Inversamente, como todo E-compacto es E-regular y esta propiedad es hereditaria, tendremos que todo subespacio de un E-compacto es E-regular. Entonces, efectivamente, **la clase $R(E)$ coincide con la de los espacios que son subespacios de espacios**

E-**compactos.** Al añadir la propiedad de Hausdorff podemos, sin embargo, afirmar algo más interesante, como veremos abajo: todo espacio E-regular y Hausdorff se puede encajar en un espacio $\beta_E X$ que es E-compacto y que tiene propiedades análogas a las de la compactación de Stone-Čech, βX, de un espacio de Tychonoff X.

NOTACIÓN: Si X y E son espacios cualesquiera y ponemos $C(X, E) = \{f_\mu\}_{\mu \in M}$, denotaremos por α_E^X a la función $\triangle C(X, E) : X \longrightarrow E^M$. Cuando no sea necesario, por el contexto, mencionar a la X, a α_E^X la representaremos sencillamente con α_E.

A la imagen de α_E la denotaremos por $\alpha_E X$ y a la cerradura en E^M de dicha imagen, por $\beta_E X$.

Los siguientes dos resultados aparecen respectivamente como el teorema 2.2 y la proposición 2.4 en [**23**]. Allí pueden consultarse sus demostraciones.

PROPOSICIÓN 1.59. *Sean X y E espacios cualesquiera.*

(1) *Si $Y \in R(E)$ y $f \in C(X, Y)$, existe una única función $\alpha_E f \in C(\alpha_E X, Y)$ tal que $\alpha_E f \circ \alpha_E = f$.*
(2) *Si $Y \in K(E)$, E es de Hausdorff y $f \in C(X, Y)$, existe una única función $\beta_E f \in C(\beta_E X, Y)$ tal que $\beta_E f \circ \alpha_E = f$.*

PROPOSICIÓN 1.60. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera y $\alpha_E = \triangle_{\mu \in M} f_\mu$, donde $\{f_\mu\}_{\mu \in M} = C(X, E)$. Entonces:*

(1) *Si $X \in R(E)$, α_E es encaje, es decir, X se puede identificar con el subespacio $\alpha_E X$ de E^M.*
(2) *Si E es de Hausdorff y $X \in K(E)$, $X = \alpha_E X = \beta_E X$, es decir, X se puede considerar como el subespacio cerrado $\mathrm{cl}_{E^M} \alpha_E X$ de E^M.*

DEFINICIÓN 1.61. *Sea X un espacio topológico cualquiera.*

(1) **Una extensión de** X *es una pareja (j, Y), en donde Y es un espacio de Hausdorff, $j : X \longrightarrow Y$ es encaje y $j(X)$ es denso en Y. Usualmente no es necesario hacer referencia a la inmersión j, y diremos simplemente "Y es una extensión de X".*
(2) *Si (j, Y) y (k, Z) son extensiones de X,* **una función canónica de** (j, Y) **en** (k, Z) *es una función continua $\varphi : Y \longrightarrow Z$ tal que $\varphi \circ j = k$.*
(3) *Diremos que las extensiones (j, Y) y (k, Z) de X* **son extensiones equivalentes,** *y denotaremos esta propiedad por $(j, Y) =_{ext} (k, Z)$ (o simplemente por $Y =_{ext} Z$, cuando no haya peligro de confusión) si existe una función canónica $\varphi : (j, Y) \longrightarrow (k, Z)$ y φ es homeomorfismo.*
(4) *Escribiremos $(j, Y) \subseteq_{ext} (k, Z)$ (o simplemente $Y \subseteq_{ext} Z$) si existe una función canónica $\varphi : (j, Y) \longrightarrow (k, Z)$ y φ es encaje.*
(5) *Escribiremos $(j, Y) \leq_{ext} (k, Z)$ (o $Y \leq_{ext} Z$) si existe una función canónica $\varphi : (k, Z) \longrightarrow (j, Y)$. Suele decirse que (k, Z)* **es proyectivamente mayor que** (j, Y) *(Ver* [**56**]*).*

OBSERVACIÓN 1.62.

(1) Si (j, Y) y (k, Z) son extensiones de un espacio X, entonces existe a lo más una función canónica $\varphi : (j, Y) \longrightarrow (k, Z)$.

En efecto, si φ y φ' son funciones canónicas de (j, Y) en (k, Z) entonces, para toda $x \in X$, $\varphi'|_{j(X)}(x) = \varphi' \circ j(x) = k(x) = (\varphi \circ j)(x) = \varphi|_{j(X)}(x)$ y como Y es de Hausdorff y $j(X)$ es denso en Y, $\varphi = \varphi'$.

(2) Si una función canónica $\varphi : (j,Y) \longrightarrow (k,Z)$ entre dos extensiones de un espacio X no es homeomorfismo o no es sobreyectiva, entonces $(j,Y) \neq (k,Z)$.
(3) Si $f : (j,Y) \longrightarrow (k,Z)$ y $g : (k,Z) \longrightarrow (j,Y)$ son funciones canónicas, entonces $f = g^{\leftarrow}$ y f es homeomorfismo, es decir, $(j,Y) =_{ext} (k,Z)$.
(4) La relación $=_{ext}$ es una relación de equivalencia en el conjunto de extensiones de un espacio X.

CONVENIOS

(1) Dos extensiones equivalentes de un mismo espacio X serán identificadas y consideradas como un sólo espacio.
(2) A la clase de extensiones diferentes entre sí (tomando en cuenta el convenio anterior) de un espacio X, la denotaremos por $\mathcal{E}(X)$.[13]

PROPOSICIÓN 1.63. *Sea X un espacio cualquiera. Entonces $(\mathcal{E}(X), \leq_{ext})$ y $(\mathcal{E}(X), \subseteq_{ext})$ son conjuntos parcialmente ordenados.*

DEFINICIÓN 1.64. *Sean $\mathcal{P}$ una propiedad topológica y X un espacio topológico cualquiera.*

(1) *Una* **$\mathcal{P}$-extensión del espacio X** *es una extensión (j,T) de X tal que $T \in \mathcal{P}$.*
(2) *Al conjunto de $\mathcal{P}$-extensiones de X lo denotaremos por $\mathcal{P}(X)$.*
(3) *Si (j,T) es una extensión de X, se dirá que X* **está $\mathcal{P}$-encajado en** *(j,T) (o simplemente en T) si siempre que Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y $f \in C(X,Y)$, existe $\hat{f} \in C(T,Y)$ tal que $\hat{f} \circ j = f$.*
(4) *Una* **$\mathcal{P}$-extensión máxima** *de X es una $\mathcal{P}$-extensión (j,T) de X en la que X está $\mathcal{P}$-encajado.*

DEFINICIÓN 1.65. *Sean X y E espacios cualesquiera y (j,T) una extensión de X.*

(1) *Si $\mathcal{P}$ es la propiedad de ser homeomorfo a E, se dirá que X* **está E-encajado en** *(j,T) (o simplemente en T) si X está $\mathcal{P}$-encajado en T*[14].
(2) *Si $\mathcal{P}$ es la propiedad $K(E)$, a las $\mathcal{P}$-extensiones de X se les llamará* **E-compactaciones de X**.

PROPOSICIÓN 1.66. *Sean X un espacio y $\mathcal{P}$ una propiedad topológica.*

(1) *Si (j,T) es una $\mathcal{P}$-extensión máxima de X, entonces (j,T) es el máximo de $\mathcal{P}(X)$ en $(\mathcal{E}(X), \leq_{ext})$.*
(2) *Si T_1 y T_2 son $\mathcal{P}$-extensiones máximas de X entonces, $T_1 =_{ext} T_2$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $(k,Z) \in \mathcal{P}(X)$. Como $k \in C(X,Z)$ y $Z \in \mathcal{P}$ y como X está $\mathcal{P}$-encajado en (j,T), existe $\hat{k} \in C(T,Z)$ tal que $\hat{k} \circ j = k$. Por lo tanto $Z \leq_{ext} T$.
(2) Es corolario de (1).

□

[13] $\mathcal{E}(X)$ viene siendo *un conjunto de representantes para las clases de equivalencia módulo* $=_{ext}$.

[14] En un lenguaje más claro: X está E-encajado en T si para cualquier función continua $f : X \longrightarrow E$, existe una función continua $\hat{f} : T \longrightarrow E$ tal que $\hat{f}|_X = f$.

Por la proposición 1.60(1) sabemos que si $X \in R(E)$, entonces $(\alpha_E, \beta_E X)$ es una extensión de X que es E-compacta, o sea, $(\alpha_E, \beta_E X) \in K(E)(X)$, pero ahora veremos que esta extensión tiene propiedades análogas a las de la compactación de Stone-Čech, como auguramos en la observación 1.58, si E es de Hausdorff.

TEOREMA 1.67. *Sean E un espacio de Hausdorff y $X \in R(E)$. Entonces:*

(1) *$(\alpha_E, \beta_E X)$ es la $K(E)$-extensión máxima de X.*

(2) *$(\alpha_E, \beta_E X)$ es la única extensión E-compacta de X en la que X está E-encajado.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Ya quedamos en que $(\alpha_E, \beta_E X) \in K(E)(X)$. Como E es de Hausdorff, la proposición 1.59 nos permite deducir que X está $K(E)$-encajado en $(\alpha_E, \beta_E X)$. Por consiguiente $(\alpha_E, \beta_E X)$ es una $K(E)$-extensión máxima de X.

(2) Como $E \in K(E)$ y X está $K(E)$-encajado en $(\alpha_E, \beta_E X)$, entonces, para toda $f \in C(X, E)$ existe $\hat{f} \in C(\beta_E X, E)$ tal que $\hat{f} \circ \alpha_E = f$. Por ende, X está E-encajado en $(\alpha_E, \beta_E X)$. Para probar la unicidad, supongamos que (j, T) es una extensión E-compacta de X en la que X está E-encajado. Si logramos ver que (j, T) es una $K(E)$-extensión máxima de X entonces, por la proposición 1.66, se tendrá que $(j, T) =_{ext} (\alpha_E, \beta_E(X))$. Sean, pues, $Y \in K(E)$ y $f \in C(X, Y)$. Como $Y \in K(E)$, existen un conjunto M y un encaje $h : Y \longrightarrow E^M$ tales que $h(Y)$ es cerrado en E^M. Si para cada $\mu \in M$, $\pi_\mu : E^M \longrightarrow E$ es la proyección canónica, entonces, para toda $\mu \in M$, $\pi_\mu \circ h \circ f \in C(X, E)$. Como X está E-encajado en (j, T), existe $g_\mu \in C(T, E)$ tal que $g_\mu \circ j = \pi_\mu \circ h \circ f$. Sea $g = \triangle_{\mu \in M} g_\mu : T \longrightarrow E^M$. Para toda $\mu \in M$, $\pi_\mu \circ (g \circ j) = (\pi_\mu \circ g) \circ j = g_\mu \circ j = \pi_\mu \circ (h \circ f)$. Por ello, $g \circ j = h \circ f$. Por consiguiente, $g(T) = g(cl_T j(X)) \subseteq cl_{E^M} g \circ j(X) = cl_{E^M} h(f(X)) \subseteq cl_{E^M} h(Y) = h(Y)$. Ahora bien, $h^{\leftarrow} : h(Y) \longrightarrow Y$ es homeomorfismo, así que si $\hat{f} = h^{\leftarrow} \circ g$, entonces $\hat{f} \in C(T, Y)$ y $\hat{f} \circ j = h^{\leftarrow} \circ g \circ j = h^{\leftarrow} \circ h \circ f = f$. □

EJEMPLOS 1.68. (1) Si $j : X \longrightarrow T$ es encaje, es fácil corroborar que:

(a) X está $\mathbb{R}$-encajado en T si y sólo si $j(X)$ está C-encajado en T en el sentido de [**34**], es decir, toda función en $C(j(X))$ puede extenderse a una función en $C(T)$.

(b) X está $\mathbb{I}$-encajado en T si y sólo si $j(X)$ está C^*-encajado en T (ver 1.16 de [**34**]), es decir, toda función en $C(j(X), \mathbb{I})$ puede extenderse a una función en $C(T, \mathbb{I})$.

Cuando se identifica X con $j(X)$, cosa muy común, coinciden entonces el concepto de $\mathbb{R}$-encajado en T con el de C-encajado en T, y el de $\mathbb{I}$-encajado en T con el de C^*-encajado en T. De este modo, 1.67(2) se puede escribir así, en el caso de $E = \mathbb{I}$:

(c) Si X es de Tychonoff, $(\alpha_{\mathbb{I}}, \beta_{\mathbb{I}} X)$ es la única extensión compacta y de Hausdorff (recordar comentarios en la página 29) de X en la que X está C^*-encajado. En pocas palabras, $\beta_{\mathbb{I}} X$ no es otra cosa que la compactación de Stone-Čech de X, βX (Ver 6.5 de [**34**]).

Y en el caso en que $E = \mathbb{R}$, así:

(d) Si X es de Tychonoff, $(\alpha_{\mathbb{R}}, \beta_{\mathbb{R}} X)$ es la única extensión realcompacta y de Hausdorff de X en la que X está C-encajado. Así, $\beta_{\mathbb{R}} X$ es la realcompactación de Hewitt de X, υX.

El lector interesado en conocer más hechos sobre E-compacidad, puede acudir a [**48**] o a [**56**]. En [**23**] se encuentran interesantes resultados sobre $\mathbb{N}$-compacidad y en particular se estudia la analogía que existe entre la relación de $\beta_{\mathbb{N}}X$ con $\beta_{\mathbf{2}}X$, y la relación de $\beta_{\mathbb{R}}X$ con βX. Se prueba también allí (ejemplo (2) en 2.13) que si Λ es un conjunto no numerable, entonces $\mathbb{Z}^\Lambda = \beta_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}^{[\Lambda]})$, donde $\mathbb{Z}^{[\Lambda]}$ es el subespacio de $\mathbb{Z}^\Lambda$ que consta de todas las $x = (x_\lambda)$ para las cuales $x_\lambda = 0$, excepto para a lo más una cantidad numerable de λ´s, es decir , es el Σ-producto de $\mathbb{Z}^\lambda$ basado en 0.

Recordemos que si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios topológicos y $a \in \prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$, **el Σ-producto de $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$ basado en** a, es el conjunto

$$\Sigma(a) = \{x \in \prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda : |\{\lambda < \alpha : x(\lambda) \neq a(\lambda)\}| \leq \aleph_0\}.$$

Usando el corolario 3.4 de [**2**], podemos probar que si E es de Hausdorff y todo singulete de E es G_δ, entonces todo Σ-producto de un producto topológico $\prod_{\mu\in M} X_\mu$ es E-encajado en dicho producto, En particular:

PROPOSICIÓN 1.69. *Si E es de Hausdorff y en él todo singulete es G_δ, y si $\{X_\mu : \mu \in M\}$ es una familia de espacios topológicos E-compactos, entonces $\beta_E\Sigma(a) = \prod_{\mu\in M} X_\mu$, para todo $a \in \prod_{\mu\in M} X_\mu$.*

DEMOSTRACIÓN. Σ es denso y E-encajado en $\prod_{\mu\in M} X_\mu$, el cual es E-compacto. Por consiguiente, $\beta_E\Sigma(a) = \prod_{\mu\in M} X_\mu$. □

Concluyamos nuestro capítulo con algunas observaciones acerca de espacio fuertemente cero-dimensionales que nos serán muy útiles. Para comenzar, recuérdese que un espacio no vacío X es **fuertemente cero-dimensional** si es de Tychonoff y satisface que, para cualesquiera dos nulos[15] A y B, ajenos entre sí en X, existe un cerrabierto C de X tal que $A \subseteq C$ y $B \cap C = \emptyset$.

OBSERVACIÓN 1.70. Todo espacio fuertemente cero-dimensional es cero-dimensional ([**24**], 6.2.6), pero no todo cero-dimensional es fuertemente cero-dimensional ([**24**], 6.2.20). Sin embargo, todo espacio cero-dimensional y de Lindelöf es fuertemente cero-dimensional y, como corolario de ello, también lo es todo espacio numerable no vacío y regular (ver el corolario 6.2.8 de [**24**]).

Son ejemplos de espacios fuertemenrte cero-dimensionales, todos los discretos no vacíos, la Línea de Sorgenfrey, $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ y todo subespacio de $\mathbb{R}$ que no sea vacío y que no contenga ningún intervalo no vacío. También lo son $\mathbb{Q}^n$ y $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$, para toda n$\in \mathbb{N}$. El espacio de Baire de peso m, $B(m)$, definido en 4.2.12 de [**24**], es fuertemente cero-dimensional, para toda $m \geq \aleph_0$ (ver ejemplo 7.3.14 de [**24**]). Los espacios de ordinales $[0, \omega_1 + 1)$ y $[0, \omega_0 + 1)$ (ver notación en la página 30), son fuertemente cero-dimensionales, así como todo subespacio C^*-encajado y no vacío de uno que también lo sea.

Como ya mencionamos, si X es cero-dimensional y Lindelöf entonces X es fuertemente cero-dimensional, así que si X es compacto, son equivalentes el que X sea cero-dimensional con el hecho de que X sea fuertemente cero dimensional. En 6.2.12 de [**24**], se prueba que la compactación de Stone-Čech, βX, de un espacio X es cero-dimensional si y sólo si X es fuertemente cero-dimensional. Podemos con esto demostrar que:

[15] ver la nota de pie de página número 5, en la página 13

PROPOSICIÓN 1.71. *Si X es un espacio cero-dimensional, son equivalentes:*
(a) *X es fuertemente cero-dimensional.*
(b) *$\beta_2 X =_{ext} \beta X$.*

DEMOSTRACIÓN. (a)$\Longrightarrow$(b): Si X es fuertemente cero-dimensional entonces βX es cero-dimensional, por lo que es una extensión $\mathbf{2}$-compacta de X. Además, si $f \in C(X, \mathbf{2})$, dado que $\mathbf{2}$ es compacto y X está $K(\mathbb{I})$-encajado en $\beta_{\mathbb{I}} X = \beta X$, existe $\hat{f} \in C(\beta X, \mathbf{2})$ tal que $\hat{f} \circ \alpha_{\mathbb{I}} = f$. Entonces X está $\mathbf{2}$-encajado en βX. Por 1.67(2), $\beta X =_{ext} \beta_2 X$.
(b)$\Longrightarrow$(a): Si $\beta X =_{ext} \beta_2 X$ entonces βX es cero-dimensional y por lo tanto X es fuertemente cero-dimensional. $\square$

En capítulos posteriores[16] usaremos espacios que son normales y al mismo tiempo fuertemente cero-dimensionales. Afortunadamente estas dos propiedades conjuntas pueden caracterizarse de diversas maneras, como mencionamos en la siguiente, fácil de demostrar.

PROPOSICIÓN 1.72. *Para todo espacio no vacío X, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(a) *X es fuertemente cero-dimensional y normal.*
(b) *Todo cerrado en X es $\mathbf{2}$-encajado en X.*
(c) *Para cualesquiera dos cerrados ajenos F y G en X, existe $f \in C(X, \mathbf{2})$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$.*
(d) *Para cualesquiera dos cerrados ajenos F y G en X, existen cerrabiertos ajenos A y B en X tales que $F \subseteq A$ y $G \subseteq B$.*
(e) *$\operatorname{Ind} X = 0$.* [17]

OBSERVACIÓN 1.73. En vista de la proposición anterior, nos referiremos a los espacios fuertemente cero-dimensionales y normales como aquellos tales que su Ind es cero. Son de este tipo todos los espacios cero-dimensionales y de Lindelöf y los ultraparacompactos. Todo espacio métrico separable y cero-dimensional es cero-dimensional y de Lindelöf, por lo que también tiene Ind cero.

[16] Por ejemplo en el teorema 3.28 y en la proposición 4.45

[17] Para ver una definición del concepto de dimensión inductiva grande de un espacio X, $\operatorname{Ind} X$, puede consultarse [27].

CAPÍTULO 2

Estructuras de funciones continuas

Si X es un conjunto, la suma y el producto de números reales se usan para definir una suma y un producto en $\mathbb{R}^X$ de manera puntual: para cualesquiera f y g en $\mathbb{R}^X$ y para cada $x \in X$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, y también un producto por escalares: si $r \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathbb{R}^X$, para cada $x \in X$, $(rf)(x) = r(f(x))$. Con esta operación y la suma en $\mathbb{R}^X$, este conjunto resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Asimismo, $(\mathbb{R}^X, +)$ es un grupo abeliano y $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

La relación $\geq$ en $\mathbb{R}^X$ definida por: $f \geq g$ si y sólo si $f(x) \geq g(x)$, para cada $x \in X$, es un orden parcial en el que, para cualesquiera funciones f, g y h en $\mathbb{R}^X$, $f \geq g$ implica $f + h \geq g + h$, y las condiciones $f \geq g$ y $h \geq 0$ implican $fh \geq gh$. Estas consistencias de la suma y del producto con el orden parcial, hacen de $(\mathbb{R}^X, +, \cdot, \geq)$ un anillo parcialmente ordenado (ver definición en 0.19 de [**34**]).

Si definimos, para cualesquiera f, g en $\mathbb{R}^X$ las funciones $f \wedge g$, $f \vee g$, de X a $\mathbb{R}$ de tal suerte que para cada $x \in X$, $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ (ínfimo de $\{f(x), g(x)\}$) y $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ (supremo de $\{f(x), g(x)\}$), se comprueba que $(\mathbb{R}^X, \wedge, \vee)$ es un retículo. Así, $(\mathbb{R}^X, +, \cdot, \wedge, \vee, \geq)$ es un anillo ordenado reticularmente (ver [**34**], 0.19, página 7).

Más aún: con la topología producto, $(\mathbb{R}^X, +)$ es un grupo topológico, $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ es un anillo topológico y $(\mathbb{R}^X, +)$ con el producto por escalares, es un espacio vectorial topológico.

Ahora bien, si X es un espacio topológico, f y g son elementos de $C(X)$ y r es un real cualquiera, entonces $f+g, f \cdot g, f \wedge g, f \vee g$ y rf, son también funciones continuas, por lo que $(C(X), +, \cdot, \vee, \wedge, \geq)$ es un anillo ordenado reticularmente, subanillo de $\mathbb{R}^X$; $(C_p(X), +)$ es un subgrupo topológico de $(\mathbb{R}^X, +)$; $(C_p(X), +, \cdot)$ es subanillo topológico de $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$, y $(C_p(X), +)$ con el producto por escalares, es subespacio vectorial topológico de $(\mathbb{R}^X, +)$.

Trataremos de generalizar lo anterior:

1. Estructuras algebraicas en $C(X, E)$

DEFINICIÓN 2.1 (ver [**49**]). (1) *Una* **estructura algebraica** *es una terna*

$$\mathcal{E} = (E, (o_0, \ldots, o_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}, (\rho_0, \ldots, \rho_\eta, \ldots)_{\eta<\beta}),$$

donde E es un conjunto; para cada $\xi < \alpha$, o_ξ es una operación sobre E, y para cada $\eta < \beta$, ρ_η es una relación sobre E.

(2) *Cuando no haya peligro de confusión, nos referiremos a una estructura algebraica como en (1), hablando sencillamente de "la estructura algebraica E".*

(3) **El tipo de la estructura**

$$\mathcal{E} = (E, (o_0, \ldots, o_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}, (\rho_0, \ldots, \rho_\eta, \ldots)_{\eta<\beta}).$$

es una pareja

$$\tau = ((\nu_0, \dots, \nu_\xi, \dots)_{\xi<\alpha}, (\mu_0, \dots, \mu_\eta)_{\eta<\beta}),$$

de sucesiones transfinitas, tal que para cada $\xi < \alpha$, o_ξ es una operación ν_ξ-aria y, para cada $\eta < \beta$, ρ_η es una relación μ_η-aria.

(4) *Dadas dos estructuras $\mathcal{E} = (E, (o_0, \dots, o_\xi, \dots)_{\xi<\alpha}, (\rho_0, \dots, \rho_\eta, \dots)_{\eta<\beta})$ y $\mathcal{E}' = (E', (o'_0, \dots, o'_\xi, \dots)_{\xi<\alpha}, (\rho'_0, \dots, \rho'_\eta, \dots)_{\eta<\beta})$, ambas del mismo tipo $\tau = ((\nu_0, \dots, \nu_\xi, \dots)_{\xi<\alpha}, (\mu_0, \dots, \mu_\eta)_{\eta<\beta})$, una función $\varphi : E \longrightarrow E'$ es homomorfismo (de estructuras algebraicas del tipo τ), si:*
   (i) $\forall\, \xi < \alpha$ *y* $\forall (x_\gamma)_{\gamma<\nu_\xi} \in E^{\nu_\xi}$, $\varphi(o_\xi((x_\gamma)_{\gamma<\nu_\xi})) = o'_\xi(\varphi((x_\gamma)_{\gamma<\nu_\xi}))$. [1]
   (ii) *Para cada $\eta < \beta$ y cada $(x_\delta)_{\delta<\mu_\eta} \in E^{\mu_\eta}$, $(x_\delta)_{\delta<\mu_\eta} \in \rho_\eta$ implica que $(\varphi(x_\delta))_{\delta<\mu_\eta} \in \rho'_\eta$.* [2]

(5) *Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son estructuras algebraicas del mismo tipo, como en (4), una función $\varphi : E \longrightarrow E'$ es isomorfismo (de estructuras algebraicas de tal tipo) si φ es biyectiva, y satisface (i) y (ii) de (4), pero substituyendo en (ii) la palabra implica por la expresión si y sólo si.*

(6) *Dada un estructura $\mathcal{E}$ como en (1), una subestructura algebraica de $\mathcal{E}$ consta de un subconjunto E_0 que es cerrado bajo todas las operaciones de $\mathcal{E}$ junto con operaciones y relaciones que son las mismas que las de $\mathcal{E}$, pero restringidas a E_0.*

(7) *Sea $\mathcal{E} = (E, (o_0, \dots, o_\xi, \dots)_{\xi<\alpha}, (\rho_0, \dots, \rho_\eta, \dots)_{\eta<\beta})$ una estructura algebraica de tipo $\tau = ((\nu_0, \dots, \nu_\xi, \dots)_{\xi<\alpha}, (\mu_0, \dots, \mu_\eta)_{\eta<\beta})$. Diremos que $\mathcal{E}$ es* **una estructura algebraico-topológica de tipo** τ, *si E es un espacio topológico de Hausdorff y, para cada $\xi < \alpha$, $o_\xi : E^{\nu_\xi} \longrightarrow E$ es una función continua.*

EJEMPLOS 2.2. (1) Si E es una estructura algebraico-topológica y X es un espacio topológico arbitrario, con las operaciones y relaciones definidas puntualmente a partir de las operaciones y relaciones en E, $C(X, E)$ se convierte también en una estructura algebraica del mismo tipo que E.

(2) Si E es un espacio vectorial sobre un campo K, el producto de elementos de E por escalares (elementos de K) se puede interpretar como una familia de operaciones unarias. En efecto,$(E, +)$ es un grupo abeliano y la familia $End(E)$ de endomorfismos de E es también un anillo. El que E posea una "multiplicación por escalares", significa que existe un morfismo de anillos, $o : K \longrightarrow End(E)$. Para cada $k \in K$ y para cada $a \in E$, el producto $k \cdot a$ no es otra cosa que aplicarle a a el endomorfismo $o(k)$: $k \cdot a = o(k)(a)$. De ahí que "multiplicar por k" es la operación unaria $o(k) : E \longrightarrow E$ (ver [**1**], por ejemplo).

(3) Como corolario de 1.59 (1), tenemos que si X y E son espacios topológicos cualesquiera, $C(X, E) = \{f_\mu\}_{\mu\in M}$ y $\alpha_E = \triangle_{\mu\in M} f_\mu : X \longrightarrow E^M$, entonces, para toda $f \in C(X, E)$ existe una única $\alpha_E f \in C(\alpha_E X, E)$ tal que $\alpha_E f \circ \alpha_E = f$. Esto nos permite definir una función $\psi : C(X, E) \longrightarrow C(\alpha_E X, E)$ tal que para cada $f \in C(X, E)$, $\psi(f) = \alpha_E f$. Ahora bien, el hecho de que para cada $f \in C(X, E)$, $\alpha_E f$ es el único elemento de $C(\alpha_E X, E)$ tal que

[1] Para que se vea más claro: si por ejemplo, o_ξ es una operación binaria, (i) señala que si $(x_1, x_2) \in E^2$, $\varphi(x_1 o_\xi x_2) = \varphi(x_1) o'_\xi \varphi(x_2)$.

[2] Por ejemplo, si ρ_η es una relación binaria, cada vez que $(x_1, x_2) \in E^2$, $x_1 \rho_\eta x_2 \implies \varphi(x_1) \rho'_\eta \varphi(x_2)$.

$\alpha_E f \circ \alpha_E = f$, implica que la función $\alpha_E{}^*$: $C(\alpha_E X, E) \longrightarrow C(X, E)$ que a cada $g \in C(\alpha_E X, E)$ le asocia $\alpha_E{}^*(g) = g \circ \alpha_E$, es la inversa de ψ. Entonces ψ es una función biyectiva.

Cuando E es una estructura algebraico-topológica, es fácil comprobar que tanto ψ como su inversa $\alpha_E{}^*$, conservan las operaciones de estructura algebraica de sus respectivos dominios. Ahora probaremos que ambas funciones preservan también las relaciones, con lo que cada una de ellas se trueca en isomorfismo (de estructuras algebraicas del mismo tipo que E).

Sea ρ una relación en E que por simplicidad supondremos binaria, y sean ρ^X y $\rho^{\alpha_E X}$ las relaciones en $C(X, E)$ y en $C(\alpha_E X, E)$, respectivamente, definidas puntualmente a partir de ρ. Veamos primero que $\alpha_E{}^*$ conserva la relación $\rho^{\alpha_E X}$.

Sean h y k elementos de $C(\alpha_E X, E)$ y supongamos que $h\ \rho^{\alpha_E X}\ k$. Entonces, para toda $p \in \alpha_E X$, $h(p)\ \rho\ k(p)$. En particular, para cada $x \in X$, $h(\alpha_E(x))\ \rho\ k(\alpha_E(x))$, es decir, $h \circ \alpha_E(x)\ \rho\ k \circ \alpha_E(x)$. Por lo tanto, $\alpha_E{}^*(h) = h \circ \alpha_E\ \rho\ k \circ \alpha_E = \alpha_E{}^*(k)$.

Ahora veamos que ψ conserva la relación ρ^X. Sean f y g elementos de $C(X, E)$ y supongamos que $f \rho^X g$. Definamos la función $h = \Delta\{f, g\} : X \longrightarrow E \times E$, es decir, para $x \in X$ $h(x) = (f(x), g(x))$. Entonces h es continua y, como $f \rho^X g$, se tiene que para cada $x \in X$, $f(x)\ \rho\ g(x)$, es decir, $(f(x), g(x)) \in \rho$. Por consiguiente podemos considerar a h como un elemento de $C(X, \rho)$. Dado que $\rho \in R(E)$, por 1.59(1) existe $\hat{h} \in C(\alpha_E X, \rho)$ tal que $\hat{h} \circ \alpha_E = h$. Así, para cada $p \in \alpha_E X$, $\hat{h}(p) \in \rho$. Sea $h_1 = \Delta\{\alpha_E f, \alpha_E g\}$. Entonces, para cada $x \in X$, $h_1 \circ \alpha_E(x) = h_1(\alpha_E(x)) = (\alpha_E f(\alpha_E(x)), \alpha_E g(\alpha_E(x))) = (\alpha_E f \circ \alpha_E(x), \alpha_E g \circ \alpha_E(x)) = (f(x), g(x)) = h(x)$ y, por la unicidad pregonada en 1.59 (1), $h_1 = \hat{h}$ y por consiguiente, para toda $p \in \alpha_E X$, se tiene que $(\alpha_E f(p), \alpha_E g(p)) = h_1(p) = \hat{h}(p) \in \rho$, con lo que $\psi(f) = \alpha_E f\ \rho^{\alpha_E X}\ \alpha_E g = \psi(g)$, es decir, ψ preserva la relación ρ^X. En conclusión:

PROPOSICIÓN 2.3. *Dados cualquier espacio topológico X y cualquier estructura algebraico-topológica E, la función $\psi : C(X, E) \longrightarrow C(\alpha_E X, E)$ tal que para cada $f \in C(X, E)$, $\psi(f) = \alpha_E f$, y su inversa $\alpha_E{}^*$: $C(\alpha_E X, E) \longrightarrow C(X, E)$, que a cada $g \in C(\alpha_E X, E)$ le asocia $\alpha_E{}^*(g) = g \circ \alpha_E$, son isomorfismos de estructuras algebraicas (del mismo tipo que E).*

(4) Por 1.59 (2) sabemos que si X es un espacio topológico cualquiera y E es T_2, dada $f \in C(X, Y)$, existe una única función $\beta_E f \in C(\beta_E X, Y)$ tal que $\beta_E f \circ \alpha_E = f$. Se puede definir entonces una función $\zeta : C(X, E) \longrightarrow C(\beta_E X, E)$ tal que, para cada $f \in C(X, E)$, $\zeta(f) = \beta_E f$, la cual también tiene una inversa $\zeta^{-} : C(\beta_E X, E) \longrightarrow C(X, E)$ tal que $\zeta^{-}(g) = g \circ \alpha_E$, para toda $g \in C(\beta_E, E)$. Así pues, ζ es biyectiva.

Si E es una estructura algebraico-topológica, es fácil ver que ζ^{-} es un homomorfismo de estructuras algebraicas, ya que ζ^{-} se comporta exactamente igual que $\alpha_E{}^*$ en (3). En cambio, ζ no necesariamente preserva relaciones, pero una prueba análoga a la que usamos para demostrar que ψ conserva relaciones nos llevaría a concluir que:

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea E una estructura algebraico-topológica tal que todas las relaciones de E son espacios E-compactos, y sea X un espacio cualquiera. Entonces $\zeta : C(X, E) \longrightarrow C(\beta_E X, E)$, tal que $f \overset{\zeta}{\longmapsto} \beta_E f$, es isomorfismo.*

Los ejemplos (3) y (4) anteriores, y las respectivas proposiciones 2.3 y 2.4, son casos particulares de una situación que analizaremos en seguida:

OBSERVACIÓN 2.5. (1) Si Con es la categoría de todos los conjuntos y funciones entre ellos, y si E es un conjunto, obtenemos un funtor contravariante

$$Con(-, E) : Con \longrightarrow Con$$

asociándole a cada conjunto X, $Con(X, E) = E^X$, y a cada función $f : X \longrightarrow Y$, la función $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$ tal que, para cada $g \in E^Y$, $f^\sharp(g) = g \circ f$.

(2) Si C es la categoría cuyos objetos son las estructuras algebraicas de un cierto tipo dado τ y cuyos morfismos son los homomorfismos de dichas estructuras, y si E es un objeto de C entonces, para cada conjunto X, E^X también es un objeto de C con las operaciones y relaciones definidas puntualmente a partir de las de E y, para cada función $f : X \longrightarrow Y$, la función $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$, definida en (1), es un homomorfismo de estructuras algebraicas. Así obtenemos un funtor contravariante

$$C(-, E) : Con \longrightarrow C.$$

(3) Ahora supongamos que E es un espacio topológico cualquiera. Entonces, para cada conjunto X, E^X es también un espacio topológico (un producto de Tychonoff) y para cada $x \in X$, representaremos con $\pi_x : E^X \longrightarrow E$ a la x-ésima proyección natural. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función cualquiera, entonces la función $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$ es tal que para toda $x \in X$ y para toda $g \in E^Y$, $(\pi_x \circ f^\sharp)(g) = \pi_x(f^\sharp(g)) = \pi_x(g \circ f) = g \circ f(x) = g(f(x)) = \pi_{f(x)}(g)$, es decir, $\pi_x \circ f^\sharp = \pi_{f(x)} : E^Y \longrightarrow E$, que es una función continua y como la fuente $\{\pi_x : E^X \longrightarrow E : x \in X\}$ es inicial, $f^\sharp$ es continua.
De este modo obtenemos un funtor

$$Top(-, E) : Con \longrightarrow Top$$

como en (1) y (2).

(4) Sea E una estructura algebraico-topológica y sea C la categoría de todas las estructuras algebraico-topológicas del mismo tipo que la de E. Es fácil percatarse de que, para todo conjunto X, la estructura algebraica E^X es un objeto de C.
Una operación α-aria $o^X : (E^X)^\alpha \longrightarrow E^X$, definida en E^X puntualmente a través de la correspondiente operación o en E, es la única función que hace conmutar el siguiente diagrama, para cada $x \in X$:

$$\begin{tikzcd}
(E^X)^\alpha \arrow[r, "o^X"] \arrow[d, "(\pi_x)^\alpha"'] & E^X \arrow[d, "\pi_x"] \\
E^\alpha \arrow[r, "o"'] & E
\end{tikzcd}$$

Aquí $(\pi_x)^\alpha = \triangle_{\lambda<\alpha}(\pi_x \circ p_\lambda)$, donde $p_\lambda : (E^X)^\alpha \longrightarrow E^X$ es la λ-ésima proyección natural, para cada $\lambda < \alpha$. Como para cada $x \in X$, $o \circ (\pi_x)^\alpha$ es continua, o^X es continua.
Por otro lado, como vimos en (3), la función $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$ es continua. De este modo obtenemos nuevamente un funtor contravariante

$$C(-, E) : Con \longrightarrow C$$

definido de manera análoga que en los casos anteriores.

2. Estructura topológica en $C(X, E)$

Ahora nos toca hablar de $C(X, E)$ como espacio topológico y como estructura algebraico-topológica.

DEFINICIÓN 2.6. *Si X y E son espacios topológicos cualesquiera, $C_p(X, E)$ será el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $C(X, E)$ y cuya topología es la que hereda como subespacio del producto topológico (de Tychonoff) E^X. A dicha topología se le llama* **la topología de la convergencia puntual en $C(X, E)$**. *De ahí el subíndice p.*

Tamariz, Casarrubias y Hernández explican en [**62**] que el nombre de topología de la convergencia puntual dado a la que tiene $C_p(X, E)$, se debe al siguiente hecho:

PROPOSICIÓN 2.7. *Si $f \in C(X, E)$ y $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en $C(X, E)$, entonces $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a f en $C(X, E)$ si y sólo si la red $(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(x)$ en E, para cada $x \in X$.*

Para caracterizar de otra forma la topología de la convergencia puntual en $C(X, E)$, definimos:

DEFINICIÓN 2.8. *Si X y E son espacios topológicos, entonces, para cada $x \in X$, la función evaluación en x es la función $\hat{x} : C_p(X, E) \longrightarrow E$ tal que para toda $f \in C(X, E)$, $\hat{x}(f) = f(x)$.*

PROPOSICIÓN 2.9. *Si X y E son espacios topológicos cualesquiera, entonces:*

(1) *Para cada $x \in X$, $\hat{x}$ es la restricción a $C_p(X, E)$ de la x-ésima proyección natural $\pi_x : E^X \longrightarrow E$ y por lo tanto es continua.*
(2) *La topología de la convergencia puntual en $C(X, E)$ es la topología débil o inicial respecto a la pareja $(\{E\}, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es la fuente $\{\hat{x} : C(X, E) \longrightarrow E : x \in X\}$*
(3) *La familia de conjuntos de la forma $\hat{x}_1^{\leftarrow}(U_1) \cap \ldots \cap \hat{x}_n^{\leftarrow}(U_n)$, donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de X y $U_1, \ldots U_n$ son abiertos en E, forman una base para la topología de la convergencia puntual en $C(X, E)$.*

DEMOSTRACIÓN. (2) Como la inclusión $i : C_p(X, E) \hookrightarrow E^X$ es encaje y la fuente $\{\pi_x : E^X \longrightarrow E : x \in X\}$ es Top-fuente inicial, la fuente $\{\hat{x} : C_p(X, E) \longrightarrow E : x \in X\} = \{\pi_x \circ i : x \in X\}$ es Top-fuente inicial (por 1.5). (3) es corolario inmediato de (2). □

NOTACIONES: Sean X y E espacios topológicos, para cada $x \in X$, $\pi_x : E^X \longrightarrow E$ la x-ésima proyección natural, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$, elementos de X, y $U_1, \ldots U_n$, abiertos en E. Entonces:

(1) $\pi_{x_1}^{\leftarrow}(U_1) \cap \ldots \cap \pi_{x_n}^{\leftarrow}(U_n)$ será denotado por $\tilde{W}(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots U_n)$, o por $[x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots U_n]$.

(2) $\hat{x}_1^{\leftarrow}(U_1) \cap \ldots \cap \hat{x}_n^{\leftarrow}(U_n)$ será denotado por $W(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots U_n)$, o por $\langle x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots U_n \rangle$.

Note que $W(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots U_n) = \tilde{W}(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots U_n) \cap C_p(X, E)$.

En algunas ocasiones será útil escribir $\langle f;\ x_1, \ldots, x_n;\ U_1, \ldots, U_n \rangle$ para indicar que $f \in \langle x_1, \ldots, x_n;\ U_1, \ldots, U_n \rangle$, en especial cuando E es métrico. En este caso, si d es la métrica de E, $\varepsilon > 0$, $f \in C_p(X, E)$, $n \in \mathbb{N}$ y, para cada $j \in [n]$, $x_j \in X$ y B_j es la bola con centro en $f(x_j)$ y radio ε, entonces escribiremos $\langle f;\ x_1, \ldots, x_n;\ \varepsilon \rangle$ en vez de $\langle f;\ x_1, \ldots, x_n;\ B_1, \ldots, B_n \rangle$.

Observación 2.10. (1) Regresemos ahora a (3) de la observación 2.5. Supongamos que E es un espacio cualquiera. Vimos que si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, entonces $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$, tal que para cada $g \in E^Y$, $f^\sharp(g) = g \circ f$, es una función continua. Entonces, si f es continua, para toda $g \in C_p(Y, E)$ $f^\sharp(g) = g \circ f \in C_p(X, E)$.

Llamemos f^* a la función $f^\sharp|_{C_p(Y,E)}^{C_p(X,E)}$ [3]. Como $f^\sharp$ es continua, f^* también lo es, así que obtenemos, como en (3) de 2.5, un funtor contravariante

$$C_p(-, E) : Top \longrightarrow Top$$

que a cada espacio topológico X le asocia el espacio topológico $C_p(X, E)$ y a cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ le asigna la función continua $f^* : C_p(Y, E) \longrightarrow C_p(X, E)$.

(2) A continuación supongamos que E es una estructura algebraico-topológica de cierto tipo, ya hemos visto que dado cualquier espacio topológico X, $C_p(X, E)$ es una estructura algebraica del mismo tipo que E, y lo más natural aquí es preguntarnos si $C_p(X, E)$ es estructura algebraico-topológica.

Sea o una operación α-aria sobre E. Vimos en (4) de 2.5 que la operación $o^X : (E^X)^\alpha \longrightarrow E^X$, definida puntualmente sobre E^X, es una función continua. El que esté definida puntualmente a partir de o significa que, para cualquier elemento $(f_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ de $(E^X)^\alpha$, $o^X((f_\lambda)_{\lambda<\alpha})$ es la función de X en E tal que a cada $x \in X$ le asocia $o((f_\lambda(x))_{\lambda<\alpha})$, es decir, $o^X((f_\lambda)_{\lambda<\alpha})$ es la composición:

$$X \xrightarrow{\triangle_{\lambda<\alpha} f_\lambda} E^\alpha \xrightarrow{o} E.$$

Si $(f_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ es un elemento de $C_p(X, E)$, $\triangle_{\lambda<\alpha} f_\lambda$ es continua, y como también o lo es, $o^X((f_\lambda)_{\lambda<\alpha}) \in C_p(X, E)$. Esto quiere decir que o^X restringida a $C_p(X, E)$ es una operación bien definida y es continua. $C_p(X, E)$ es entonces una estructura algebraico-topológica, subestructura algebraica de E^X.

Si $\mathcal{C}$ es la categoría de estructuras algebraico-topológicas del mismo tipo que E, el funtor contravariante $C(-, E)$, definido en (1), puede ahora considerarse como un funtor de Top en $\mathcal{C}$.

(3) Recordemos (ver por ejemplo [40]) que si $\mathcal{C}$ es una categoría, se dice que un $\mathcal{C}$-morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es **$\mathcal{C}$-sección** si tiene inverso izquierdo, es decir, si existe un $\mathcal{C}$-morfismo $B \xrightarrow{g} A$ tal que $g \circ f = 1_A$, y se llama **$\mathcal{C}$-retracción** si tiene inverso derecho. Si el $\mathcal{C}$-morfismo f tiene al mismo tiempo inverso derecho e inverso izquierdo, se dice que es un $\mathcal{C}$-isomorfismo. Un $\mathcal{C}$-morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es **$\mathcal{C}$-monomorfismo** si es cancelable por la izquierda, es decir, si

[3] Esta función es $f^\sharp$ pero con dominio restringido a $C_p(Y, E)$ y codominio restringido a $C_p(X, E)$

para cualesquiera $\mathcal{C}$-morfismos h y k, el que $f \circ h = f \circ k$, implica que $h = k$. f en cambio es **$\mathcal{C}$-epimorfismo** si es cancelable por la derecha. En **[40]** se demuestran algunos resultados como los siguientes, que pueden sernos de gran utilidad:

(i) Todo morfismo en una categoría concreta[4] que es una función inyectiva sobre los conjuntos subyacentes, es un $\mathcal{C}$-monomorfismo.

(ii) Todo morfismo en una categoría concreta $\mathcal{C}$ que es función suprayectiva sobre los conjuntos subyacentes, es un $\mathcal{C}$-epimorfismo.

(iii) Toda $\mathcal{C}$-sección es $\mathcal{C}$-monomorfismo y toda $\mathcal{C}$-retracción, $\mathcal{C}$-epimorfismo.

(iv) Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías cualesquiera y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor covariante, F preserva isomorfismos, secciones y retracciones. En cambio, si $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor contravariante, G preserva isomorfismos, pero manda $\mathcal{C}$-secciones en $\mathcal{D}$-retracciones y $\mathcal{C}$-retracciones en $\mathcal{D}$-secciones.

EJEMPLOS 2.11. (1) En $\mathcal{C}on$ son equivalentes los conceptos de retracción, epimorfismo y función suprayectiva, y son equivalentes los de función inyectiva y monomorfismo. Las secciones son las funciones inyectivas con dominio no vacío y los isomorfismos son las funciones biyectivas.

(2) En $\mathcal{T}op$, una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es sección si y sólo si f es encaje y $f(X)$ es retracto de Y, y es $\mathcal{T}op$-retracción si existen una retracción (en el sentido topológico usual) $r : X \longrightarrow Z$ y un homeomorfismo $h : Z \longrightarrow Y$ tales que $f = h \circ r$.
Los isomorfismos en $\mathcal{T}op$ son los homeomorfismos, mientras que los monomorfismos son las funciones continuas e inyectivas y los epimorfismos son las funciones continuas y suprayectivas.

(3) En la mayoría de las categorías de estructuras algebraicas como la de los grupos ($\mathcal{G}rp$), la de los anillos ($\mathcal{R}ng$) y la de R-módulos (R-$\mathcal{M}od$), los morfismos son los homomorfismos inyectivos y los epimorfismos son los homomorfismos suprayectivos.

(4) Todos los funtores definidos en la observación 2.5 son funtores contravariantes del tipo $\mathcal{C}(-, E) :\longrightarrow \mathcal{C}$ en donde $\mathcal{C}$ es una categoría, E es un objeto de $\mathcal{C}$, para cada conjunto X, E^X es un objeto de $\mathcal{C}$ y, para cada función $f : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{C}(-, E)(f)$ es el $\mathcal{C}$-morfismo $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$ tal que para cada $g \in E^Y$, $f^\sharp(g) = g \circ f$. Por lo comentado en (3)(iv) de la observación 2.10 y por (1) de esta colección de ejemplos, si f es una función suprayectiva, entonces $f^\sharp$ es $\mathcal{C}$-sección (y con ello, $\mathcal{C}$-monomorfismo). En particular, $f^\sharp$ es inyectiva, pero se puede decir más cuando E es un espacio topológico, como en (3) y (4) de la observación 2.5, ya que $f^\sharp$, al ser $\mathcal{T}op$-sección, es encaje y $f^\sharp(E^Y)$ es retracto de E^X.

Si, en cambio, f es inyectiva, $f^\sharp$ es $\mathcal{C}$-retracción y en particular es suprayectiva, pero cuando E es espacio topológico, $f^\sharp$ es $\mathcal{T}op$-retracción, es decir, existen un subespacio Z de E^Y, una retracción $r : E^Y \longrightarrow Z$ y un homeomorfismo $h : Z \longrightarrow E^X$, tales que $f^\sharp = h \circ r$.

[4] Es decir, una categoría cuyos objetos son conjuntos con estructura (por ejemplo de anillo, de grupo, de espacio vectoral o de espacio topológico) y cada uno de cuyos morfismos es una función entre conjuntos que respeta las correspondientes operaciones o relaciones que la hacen un morfismo de la categoría.

(5) Si E es un espacio topológico y $C_p(-,E) : Top \longrightarrow Top$ es el funtor definido en (1) de la observación 2.10, para cada función continua y sobre $f : X \longrightarrow Y$, la función continua $f^* = C_p(-,E)(f) : C_p(y,E) \longrightarrow C_p(X,E)$ es la restricción de $Top(-,E) = f^\sharp$ a $C_p(Y,E)$ y esta función, como acabamos de decir, es encaje. Por consiguiente f^* también es encaje [5].

(6) Cuando E es una estructura algebraico-topológica y C es la categoría de estructuras algebraicas del mismo tipo que E, el funtor $C(-,E) : Top \longrightarrow C$ definido en (2) de 2.10, asocia a cada función continua y suprayectiva f, el C-monomorfismo f^* que en particular es encaje.

(7) Sean X y E espacios topológicos cualesquiera y $\alpha_E : X \longrightarrow E^{\mathcal{A}}$ la función definida en la notación que precede a la proposición 1.59. Allí mismo se definieron los espacios $\alpha_E X = \alpha_E(X)$ y $\beta_E X = cl_{E^{\mathcal{A}}} \alpha_E(X)$.
Si consideramos a α_E como una función de X en $\alpha_E X$, resulta continua y sobre y, por lo dicho en (5) de esta colección de ejemplos, la función $C_p(-,E)(\alpha_E) = \alpha_E^* : C_p(\alpha_E X, E) \longrightarrow C_p(X,E)$ es encaje. Pero ésta es la misma función que en (3) de los ejemplos 2.2 aparece como la inversa de $\psi : C(X,E) \longrightarrow C(\alpha_E X, E)$. Por lo tanto, al ser biyectiva, α_E^* es homeomorfismo.

Si E es una estructura algebraico-topológica, también en 2.2(3) se demostró que α_E^* es isomorfismo de estructuras algebraicas, así que ahora podemos asegurar que $\alpha_E^* : C_p(\alpha_E X, E) \longrightarrow C_p(X,E)$ es isomorfismo topológico.

(8) Nuevamente sean X y E espacios topológicos cualesquiera y $\alpha_E : X \longrightarrow E^{\mathcal{A}}$, como en (7). Llamémosle $\bar{\alpha}_E$ a la función α_E considerada como una función de X en $\beta_E X$. Si $C_p(-,E)$ es el funtor de (1) de la observación 2.10, $\bar{\alpha}_E^* = C_p(-,E)(\bar{\alpha}_E) : C_p(\beta_E, E) \longrightarrow C_p(X,E)$ es una función continua. Como para toda $g \in C_p(\beta_E X, E)$, $\bar{\alpha}_E^*(g) = g \circ \alpha_E^* = g \circ \alpha_E$, $\bar{\alpha}_E^*$ es la inversa de la función ζ definida en (4) de los ejemplos 2.2, así que $\bar{\alpha}_E^*$ es continua y biyectiva (es decir, es una condensación), pero no podemos asegurar que sea homeomorfismo. Sin embargo, si E es una estructura algebraico-topológica en la que todas sus relaciones son espacios E-compactos, la proposición 2.4 muestra que $\bar{\alpha}_E^*$ sí es isomorfismo de estructuras algebraicas.

3. Otras propiedades de $Top(-,E)$ y $C_p(-,E)$

De ahora en adelante, cada vez que f sea una función entre conjuntos y E sea un espacio cualquiera, $f^\sharp$ será la aplicación del funtor $Top(-,E) : Con \longrightarrow Top$, como en (3) de la observación 2.5, entendiéndose que si E tiene además estructura algebraica, $f^\sharp$ es homomorfismo de estructuras algebraicas. Asimismo, si X y E son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es continua, f^* será la aplicación del funtor $C_p(-,E)$ a f, como en (1) de 2.10.

Daremos otras propiedades de $f^\sharp$ y de f^*, para lo cual es útil que recordemos que:

LEMA 2.12. *Sean X, Y y Z conjuntos, y $f : X \longrightarrow Z$, $g : X \longrightarrow Y$ funciones tales que las fibras de f están contenidas en las fibras de g, es decir, para cualesquiera dos elementos x_1 y x_2 en X, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $g(x_1) = g(x_2)$.*

(1) *Si f es suprayectiva, existe una única función $h : Z \longrightarrow Y$ tal que $h \circ f = g$*

[5] $C_p(Y,E) \xrightarrow{f^*} C_p(X,E) \hookrightarrow E^X$ es encaje pues coincide con la composición de encajes: $C_p(Y,E) \hookrightarrow E^Y \xrightarrow{f^\sharp} E^X$. Luego aplíquese el corolario 1.6.

(2) *Si X, Y y Z son espacios topológicos, g es continua y f es una función cociente, existe una única función continua $h : Z \longrightarrow Y$ tal que $h \circ f = g$.*

COROLARIO 2.13. *Si X, Y y Z son espacios topológicos y f y g son funciones cocientes con las mismas fibras, entonces existe un homeomorfismo $h : Z \longrightarrow Y$ tal que $h \circ f = g$.*

COROLARIO 2.14. *Sean E un espacio topológico, X, Y conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. Entonces:*
(1) $f^\sharp(E^Y) = \{g \in E^X : \forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2)\}$.
(2) *Si X, Y son espacios topológicos y f es una función cociente, entonces* $f^\sharp(C(Y,E)) = \{g \in C(X,E) : \forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2)\}$.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sean E un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función entre conjuntos.*
(1) *Si f es suprayectiva, $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$ es encaje cerrado.*
(2) *Si X, Y son espacios topológicos y f es cociente, $f^\sharp$ es encaje cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Si f es suprayectiva, por (4) de los ejemplos 2.11 $f^\sharp$ es encaje. Veamos que $f^\sharp(E^Y)$ es cerrado en E^X. Sea $g \in E^X \setminus f^\sharp(E^Y)$. Por 2.14(1), existen x_1 y x_2 en X tales que $f(x_1) = f(x_2)$ pero $g(x_1) \neq g(x_2)$. Como E es de Hausdorff, existen abiertos ajenos U y V en E tales que $g(x_1) \in U_1$ y $g(x_2) \in U_2$. El conjunto $\tilde{W} = [x_1, x_2; U_1, U_2]$ es un básico de la topología de E^X tal que $g \in \tilde{W}$ y $\tilde{W} \subseteq E^X \setminus f^\sharp(E^Y)$. Esto último se debe a que si $r \in \tilde{W}$, $r(x_1) \in U_1$ y $r(x_2) \in U_2$ y por eso $r(x_1) = r(x_2)$ y no puede existir $l \in E^Y$ tal que $l \circ f = r$ (pues $f(x_1) = f(x_2)$), es decir, $r \notin f^\sharp(E^Y)$. Así, $E^X \setminus f^\sharp(E^Y)$ es abierto en E^X.
(2) La prueba es completamente análoga a la anterior, pero la hipótesis de que f es cociente se usa para tener que la función l es continua.

□

PROPOSICIÓN 2.16. *Sean X y E espacios cualesquiera, Y un espacio tal que $C(Y,E)$ es inicial y $f : X \longrightarrow Y$ una función cualquiera (no necesariamente continua). Entonces f es continua si y sólo si $f^\sharp(C(Y,E)) \subseteq C(X,E)$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es clara, aun cuando $C(Y,E)$ no sea inicial. Ahora supongamos que $f^\sharp(C(Y,E)) \subseteq C(X,E)$. Esto significa que, para cada $g \in C(Y,E)$, $g \circ f$ es continua, lo que implica, por ser $C(Y,E)$ Top-fuente inicial, que f es continua. □

PROPOSICIÓN 2.17. *Sean E un espacio de Hausdorff, X, Y espacios tales que $C(X,E)$ separa puntos de X y $C(Y,E)$ es inicial, y $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. Supongamos que $f^\sharp(C(Y,E))$ es denso en $C_p(X,E)$. Entonces f es condensación, es decir, es biyectiva y continua.*

DEMOSTRACIÓN. Como $f^\sharp(C(Y,E)) \subseteq C(X,E)$, 2.16 implica que f es continua. Además, f es suprayectiva por hipótesis. Sólo falta ver que f es inyectiva.

Supongamos que f no es inyectiva. Existen entonces x_1 y x_2 en X tales que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Como $C(X,E)$ separa puntos de X, existe $\phi \in C(X,E)$ tal que $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ y, como E es de Hausdorff, hay abiertos ajenos en E, U

y V, tales que $\phi(x_1) \in U$ y $\phi(x_2) \in V$. Sea $W = \langle x_1, x_2; U, V\rangle$. El conjunto W es un básico de la topología de $C_p(X, E)$ y es no vacío porque $\phi \in W$. Como $f^\sharp(C(Y,E))$ es denso en $C_p(X,E)$, existe $\psi \in W \cap f^\sharp(C(Y,E))$. Dado que $\psi \in f^\sharp(C(Y,E)) \subseteq f^\sharp(E^Y)$ y $f(x_1) = f(x_2)$, $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ (por el corolario 2.14(1)), pero como $\psi \in W$, $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$, y esto es una contradicción. Por lo tanto, f es inyectiva. $\square$

COROLARIO 2.18. *Sean E un espacio de Hausdorff, $X \in R(E)$, Y un espacio tal que $C(Y,E)$ es **inicial**, y $f : X \longrightarrow Y$ una **función suprayectiva**. Entonces f es homeomorfismo si y sólo si $f^\sharp(C(Y,E)) = C(X,E)$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es corolario del hecho de que todo funtor, ya sea covariante o contravariante, conserva isomorfismos. Así el funtor $C(-,E)$: $Top \longrightarrow Top$ manda homeomorfismos en homeomorfismos: Si f es homeomorfismo, f^* también y $f^\sharp(C(Y,E)) = f^*(C(Y,E)) = C(X,E)$.
Ahora supongamos que $f^\sharp(C(Y,E)) = C(X,E)$. Por 2.17, f es condensación, así que para demostrar que f es homeomorfismo, sólo falta ver que su inversa $f^{\leftarrow} : Y \longrightarrow X$ es continua. Para lograrlo, usaremos 2.16, ya que $C(X,E)$ es inicial porque $X \in R(E)$ (recordar corolario 1.23): Como f es biyectiva, $f^\sharp = Top(,E)(f)$ es homeomorfismo y su inversa es precisamente $(f^{\leftarrow})^\sharp$. Por consiguiente, $(f^{\leftarrow})^\sharp(C(X,E)) = (f^{\leftarrow})^\sharp(f^\sharp(C(Y,E))) = C(Y,E)$. Por 2.16, $f^{\leftarrow}$ es continua. $\square$

A continuación se probará una recíproca parcial de la proposición 2.17.

PROPOSICIÓN 2.19. *Sean $E \in \mathbb{P}_\infty$* [6]*, $Y \in R(E)$ y $f : X \longrightarrow Y$ una condensación. Entonces $f^\sharp(C(Y,E))$ es denso en $C_p(X,E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $g \in C_p(X,E)$ y $W = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ un básico canónico de $C_p(X,E)$ tal que $g \in W$. Como f es inyectiva, supondremos que $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ son distintos entre sí. En vista de que $Y \in R_\infty(E)$, existe $h : Y \longrightarrow E$ continua tal que , para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $h(f(x_j)) = g(x_j)$. Por lo tanto, $f^\sharp(h) \in f^\sharp(C(Y,E)) \cap W$, es decir, $W \cap f^\sharp(C(Y,E)) \neq \emptyset$. $\square$

De 2.15(2) se colige que una condición suficiente para que $f^\sharp(C(Y,E))$ sea cerrado en $C_p(X,E)$, es que $f : X \longrightarrow Y$ sea cociente. Para dar una condición necesaria y suficiente, introduciremos el concepto de función E-cociente:

DEFINICIÓN 2.20. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera, Y un conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva.*

(1) **La topoloía E-cociente generada en Y por f**, *es la topología inicial de Y respecto a la fuente*
$$\mathcal{L} = \{g \in E^Y : f^\sharp(g) \in C(X,E)\}.$$
(2) *f* **es una función E-cociente** *si Y tiene la topología E-cociente generada por f.*

PROPOSICIÓN 2.21. *Sean X y E espacios cualesquiera, Y un conjunto y $f : X \longrightarrow (Y,\sigma)$ una función E-cociente. Entonces, si $\mathcal{L} = \{g \in E^Y : f^\sharp(g) \in C(X,E)\}$, se tiene:*

[6]Recordar definición 1.46

(1) *$f : X \longrightarrow (Y,\sigma)$ es continua y $C((Y,\sigma),E)$ es Top-fuente inicial.*
(2) *Si (Y,σ) es T_0 o $C((Y,\sigma),E)$ separa puntos de Y, $(Y,\sigma) \in R(E)$.*
(3) *Si τ es una topología sobre Y tal que $f : X \longrightarrow (Y,\tau)$ es continua y para la cual $\mathcal{L} \subseteq C((Y,\tau),E)$, entonces $\mathcal{L} = C((Y,\tau),E)$. En particular $\mathcal{L} = C((Y,\sigma),E)$.*
(4) *Si τ es una topología sobre Y tal que $\mathcal{L} = C((Y,\tau),E)$ y $\mathcal{L}$ es Top-fuente inicial, entonces $\tau = \sigma$.*
(5) *σ es la topología más fuerte respecto de todas las topologías τ sobre Y tales que $C((Y,\tau),E)$ es Top-fuente inicial y $f : X \longrightarrow (Y,\tau)$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. (1) La topología σ es inicial respecto a $\mathcal{L}$ y para cada $g \in \mathcal{L}$, $g \circ f$ es continua. Por la proposición 1.3, $f : X \longrightarrow (Y,\sigma)$ es continua. Como $\mathcal{L} \subseteq F(Y,E) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(Y,E^n)$, σ es la topología inicial de Y respecto a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C((Y,\sigma),E^n)$ (por el corolario 1.24), y por la proposición 1.18, $C((Y,\sigma),E)$ es Top-fuente inicial.
(2) Si (Y,σ) es T_0 o $C((Y,\sigma),E)$ separa puntos de Y, el resultado se sigue de (1) y del corolario 1.23 o del corolario 1.24.
(3) Sea τ una topología sobre Y tal que $f : X \longrightarrow (Y,\tau)$ es continua y para la cual $\mathcal{L} \subseteq C((Y,\tau),E)$. Sea $\mathcal{L}' = C((Y,\tau),E)$. Probaremos que $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$: si $g \in \mathcal{L}'$, $g \circ f \in C(X,E)$. Por consiguiente $g \in \mathcal{L}$.
(4) Sea τ una topología sobre Y tal que $\mathcal{L} = C((Y,\tau),E)$ y $\mathcal{L}$ es Top-fuente inicial. Entonces τ es la topología inicial de Y respecto a $\mathcal{L}$, así que $\tau = \sigma$.
(5) Sea τ una topología en Y tal que $f : X \longrightarrow (Y,\tau)$ es continua y $C((Y,\tau),E)$ es Top-fuente inicial. Probaremos que $\tau \subseteq \sigma$ viendo que $1_Y : (Y,\sigma) \longrightarrow (Y,\tau)$ es continua. Como τ es la topología inicial de Y respecto a $C((Y,\tau),E)$, basta demostrar que, para cada $g \in C((Y,\tau),E)$, $g \circ 1_Y : (Y,\tau) \longrightarrow E$ es continua. Pero si $g \in C((Y,\tau),E)$, $g \circ f \in C(X,E)$, y por consiguiente $g \in \mathcal{L}$. Como por (3) $\mathcal{L} = C((Y,\sigma),E)$, $g : (Y,\sigma) \longrightarrow E$ es continua.

□

De (5) de la proposición anterior se deduce fácilmente que toda función cociente es E-cociente. Ahora viene la caracterización anunciada antes:

PROPOSICIÓN 2.22. *Sean E un espacio de Hausdorff, X, Y espacios tales que $C(Y,E)$ es Top-fuente inicial, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Supongamos además que $C(Y,E)$ es denso en E^Y. Entonces f es E-cociente si y sólo si $f^\sharp(C(Y,E))$ es cerrado en $C_p(X,E)$ y f es suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero la suficiencia: Supongamos que f es sobre y $f^\sharp(C(Y,E))$ es cerrado en $C_p(X,E)$. Como $C(Y,E)$ es denso en E^Y y $f^\sharp$ es continua, $f^\sharp(C(Y,E))$ es denso en $f^\sharp(E^Y)$. Por hipótesis $f^\sharp(C(Y,E)) \subseteq C_p(X,E)$, así que si $\mathcal{L} = \{g \in E^Y : g \circ f \in C_p(X,E)\}$, $f^\sharp(C(Y,E)) \subseteq C_p(X,E) \cap f^\sharp(E^Y) = f^\sharp(\mathcal{L})$. Por lo tanto, como $f^\sharp(C(Y,E))$ es cerrado en $C_p(X,E)$, es cerrado en $f^\sharp(\mathcal{L})$, y como $f^\sharp(C(Y,E))$ es denso en $f^\sharp(E^Y)$, también lo es en $f^\sharp(\mathcal{L})$. Por consiguiente, $f^\sharp(C(Y,E)) = f^\sharp(\mathcal{L})$. Como f es suprayectiva, $f^\sharp$ es inyectiva y, por ende, $C(Y,E) = \mathcal{L}$. Dado que $C(Y,E)$ es inicial, por (4) de 2.21 la topología de Y es la topología E-cociente generada por f, es decir, f es E-cociente.
Abordemos la necesidad: Si f es E-cociente, es suprayectiva por definición y, por (3) de 2.21, $\mathcal{L} = C(Y,E)$, donde $\mathcal{L} = \{g \in E^Y : g \circ f \in C_p(X,E)\}$. Por consiguiente $f^\sharp(C(Y,E)) = f^\sharp(\mathcal{L}) = C(X,E) \cap f^\sharp(E^Y)$. Como f es suprayectiva y E es de

Hausdorff, $f^\sharp$ es encaje cerrado (ver (1) de 2.15), así que $f^\sharp(E^Y)$ es cerrado en E^X y con ello $f^\sharp(C(Y,E))$ es cerrado en $C_p(X,E)$. □

Desde la proposición 2.16 se han usado hipótesis como que $C(X,E)$ separa puntos de X, o que $C(X,E)$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial, o que $C(X,E)$ es denso en E^Y, o incluso que E es un espacio Puebla. Sabemos que para cualquier espacio E, si $X \in R(E)$ entonces $C(X,E)$ separa puntos y es $\mathcal{T}op$-fuente inicial. Ahora veremos que si además E es un espacio Puebla, $C(X,E)$ es denso en E^X.

PROPOSICIÓN 2.23. *Si E es un espacio Puebla y $X \in R(E)$, entonces $C_p(X,E)$ es denso en E^X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $W = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$ un básico no vacío de E^X. Se puede suponer que $x_1, \ldots, x_n$ son distintos entre sí, así que si tomamos una $f \in W$, como $X \in R_\infty(E)$ (ver 1.46), existe $g \in C(X,E)$ tal que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $g(x_j) = f(x_j)$. Por lo tanto $g \in W \cap C(X,E)$. □

Usando este resultado, las proposiciones 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.22 se sintetizan en las siguientes, cuando E es un espacio Puebla y los espacios X y Y son E-regulares.

COROLARIO 2.24. *Supongamos que E es un espacio Puebla y es Hausdorff. Sean X y Y dos espacios E-regulares y $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. Entonces:*

(1) *f es continua $\iff f^\sharp(C(Y,E)) \subseteq C(X,E)$.*
(2) *f es condensación $\iff f^\sharp(C(Y,E))$ es denso en $C_p(X,E)$.*
(3) *f es E-cociente $\iff f^\sharp(C(Y,E))$ es cerrado en $C_p(X,E)$.*
(4) *f es homeomorfismo $\iff f^\sharp(C(Y,E)) = C_p(X,E)$.*

En el ejemplo (7) de la colección de ejemplos 2.11 concluimos que si X y E son espacios cualesquiera, siempre es posible obtener un espacio E-regular $\alpha_E X$, y una función continua y suprayectiva $\alpha_E : X \longrightarrow \alpha_E X$ tales que $\alpha_E^\sharp : C_p(\alpha_E X, E) \longrightarrow C_p(X,E)$ es homeomorfismo o, en su caso, isomorfismo topológico. Podemos demostrar ahora que α_E es una función E-cociente:

PROPOSICIÓN 2.25. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera. Entonces la función $\alpha_E : X \longrightarrow \alpha_E X$ es E-cociente.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $C(X,E) = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, y sea $i : \alpha_E X \hookrightarrow E^\Lambda$ la inclusión. Sea $\mathcal{L} = \{g \in E^{\alpha_E X} : \alpha_E^\sharp(g) \in C(X,E)\}$. Para probar que la topología que tiene $\alpha_E X$ como subespacio de E^Λ coincide con la topología E-cociente sobre $\alpha_E X$ generada por α_E, veremos que $\mathcal{L} = C(\alpha_E X, E)$ y que $\mathcal{L}$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial (ver (4) de 2.21). Sea $g \in \mathcal{L}$. Entonces $\alpha_E^\sharp(g) = g \circ \alpha_E \in C(X,E)$, así que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $f_\lambda = g \circ \alpha_E$. Si $\pi_\lambda : E^\Lambda \longrightarrow E$ es la λ-ésima proyección, entonces $\pi_\lambda \circ i \circ \alpha_E = f_\lambda = g \circ \alpha_E$ y, como $\alpha_E : X \longrightarrow \alpha_E X$ es suprayectiva, es cancelable por la derecha (epimorfismo en $\mathcal{C}on$), lo que implica que $\pi_\lambda \circ i = g$. En otras palabras, g es continua. Por consiguiente, $g \in C(\alpha_E X, E)$ y $\mathcal{L} \subseteq C(\alpha_E X, E)$. Como $\alpha_E : X \longrightarrow \alpha_E X$ es continua, por (3) de 2.21, $\mathcal{L} = C(\alpha_E X, E)$. Como $\alpha_E X \in R(E)$, $C(\alpha_E X, E)$ es $\mathcal{T}op$-fuente inicial. □

Observación 2.26. Una forma muy socorrida de demostrar que para dos espacios topológicos cualesquiera X y E siempre existen un espacio E-regular X' y una función continua y suprayectiva $p : X \longrightarrow X'$ tal que $p^* : C_p(X', E) \longrightarrow C_p(X, E)$ es homeomorfismo, es mediante la relación de equivalencia sobre X definida del siguiente modo:

$$x \sim x' \iff \text{para cada } f \in C(X, E), f(x) = f(x').$$

Sean $X' = X/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia y $p : X \longrightarrow X'$ la proyección natural, es decir, la función tal que a cada $x \in X$ le asocia su clase de equivalencia $p(x)$. Sea τ la topología E-cociente generada en X' por p. Entonces $p : X \longrightarrow (X', \tau)$ es continua y suprayectiva, lo que permite usar (5) de los ejemplos 2.11 para deducir que $p^* : C_p((X', \tau), E) \longrightarrow C_p(X, E)$ es encaje. Para convencerse de que p^* es inyectiva, sea $f \in C_p(X, E)$. Como para cualesquiera elementos x y x' de X, $p(x) = p(x') \Longrightarrow x \sim x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$, por el lema 2.12 existe una función $h : X' \longrightarrow E$ tal que $h \circ p = f$. Dado que $p : X \longrightarrow (X', \tau)$ es E-cociente, por 2.21(3) $\mathcal{L} = C((X', \tau), E)$, donde $\mathcal{L} = \{g \in E^{X'} : g \circ p \in C_p(X, E)\}$. Entonces $h \in \mathcal{L}$ y $p^* = h \circ p = f$. Por consiguiente p^* es suprayectiva y por consiguiente es homeomorfismo. Como p es E-cociente y claramente $C((X', \tau), E)$ separa puntos de X', por 2.21(2) $(X', \tau) \in R(E)$.

En realidad este espacio (X', τ) es el mismo, salvo por homeomorfismo, que el espacio $\alpha_E X$ definido en la notación que antecede a la proposición 1.59. Más precisamente, como demostraremos a continuación, existe un homeomorfismo $h : X' \longrightarrow \alpha_E X$ tal que $h \circ p = \alpha_E$. Sean x_1 y x_2, elementos de X tales que $\alpha_E(x_1) \neq \alpha_E(x_2)$. Como $C(\alpha_E, E)$ separa puntos de $\alpha_E X$, existe $f \in C(\alpha_E X, E)$ tal que $f(\alpha_E(x_1)) \neq f(\alpha_E(x_2))$. Sea $g = \alpha_E^*(f)$. Entonces $g \in C_p(X, E)$ y $g(x_1) = \alpha_E^*(f)(x_1) = f \circ \alpha_E(x_1) \neq f \circ \alpha_E(x_2) = g(x_2)$. Por consiguiente $x_1 \not\sim x_2$, es decir, $p(x_1) \neq p(x_2)$.
Por otro lado, si $p(x_1) \neq p(x_2)$, existe $g \in C(X, E)$ tal que $g(x_1) \neq g(x_2)$ y, como $\alpha_E^* : C_p(\alpha_E X, E) \longrightarrow C_p(X, E)$ es homeomorfismo, existe $f \in C(\alpha_E X, E)$ tal que $\alpha_E^*(f) = g$. Por consiguiente, $f(\alpha_E(x_1)) \neq g(x_1) = g(x_2) = f(\alpha_E(x_2))$, así que $\alpha_E(x_1) \neq \alpha_E(x_2)$.

Se ha demostrado entonces que para cualesquiera x_1 y x_2 en X, se tiene que $\alpha_E(x_1) \neq \alpha_E(x_2)$ si y sólo si $p(x_1) \neq p(x_2)$ o, lo que es lo mismo, que $\alpha_E(x_1) = \alpha_E(x_2)$ si y sólo si $p(x_1) = p(x_2)$. Esto quiere decir que α_E y p tienen las mismas fibras y como estas funciones son suprayectivas, 2.12(1) permite deducir que existen $h : X' \longrightarrow \alpha_E X$ y $k : \alpha_E X \longrightarrow X'$ tales que $h \circ p = \alpha_E$ y $k \circ \alpha_E = k$. También usando 2.12(1) se puede ver fácilmente que $h = k^{\leftarrow}$. Sólo resta demostrar que h y k son continuas. Probaremos que k es continua. Como $p : X \longrightarrow X'$ es E-cociente, X' tiene la topología inicial respecto a la familia $\mathcal{L}_1 = \{g \in E^{X'} : g \circ p \in C(X, E)\}$, por lo que basta mostrar que para toda $g \in \mathcal{L}_1$, $g \circ k$ es continua. Para ello tomemos g en $\mathcal{L}_1$; entonces $(g \circ k) \circ \alpha_E = g \circ (k \circ \alpha_E) = g \circ p \in C(X, E)$, así que $g \circ k \in \mathcal{L}_2$, donde $\mathcal{L}_2 = \{f \in E^{\alpha_E X} : f \circ \alpha_E \in C(X, E)\}$. Mas, dado que α_E también es E-cociente, por 2.21 $\mathcal{L}_2 = C(\alpha_E X, E)$. Por lo tanto $g \circ k \in C(\alpha_E X, E)$. Esto prueba, como ya dijimos, que k es continua. En forma análoga se demostraría que h es continua, con lo que también es homeomorfismo.

En los párrafos anteriores hemos estudiado propiedades de f^{Ξ} o f^*, principalmente cuando f es suprayectiva. Serán útiles también algunas propiedades de dichas funciones, cuando f es inyectiva. Por (4) de los ejemplos 2.11, si $f : X \longrightarrow Y$

es una función inyectiva y $X \neq \emptyset$, entonces $f^\sharp : E^Y \longrightarrow E^X$ es suprayectiva y más aún, existen una retracción $r : E^Y \longrightarrow Z$ y un homeomorfismo $h : Z \longrightarrow E^X$ tales que $f = h \circ r$.

Con el funtor $C_p(-, E)$ tenemos algo diferente: Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua e inyectiva, o incluso encaje, no necesariamente f es suprayectiva. Claro está que si f es encaje y $f(X)$ es retracto de Y, entonces f tiene inversa izquierda (ver (2) de 2.11) y f^* tendrá por lo tanto inversa derecha (recordar que $C_p(-, E)$ es funtor contravariante) y por lo tanto no solamente será suprayectiva, sino que existen una retracción $r : C_p(Y, E) \longrightarrow Z$ y un homeomorfismo $h : Z \longrightarrow C_p(X, E)$ tales que $f = h \circ r$. Cuando f es solamente encaje, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.27. *Sean E un espacio Puebla, $Y \in R(E)$ y $f : X \longrightarrow Y$ un encaje. Entonces $f^*(C(Y, E))$ es denso en $C_p(X, E)$.*

Demostración. Sea $W = \langle x_1, \dots, x_n; U_1 \dots, U_n\rangle$ un básico canónico no vacío de $C_p(X, E)$, donde $x_1, \dots, x_n$ son elementos de X y $U_1, \dots U_n$ son abiertos de E. Entonces el conjunto $V = \langle f(x_1), \dots, f(x_n); U_1, \dots U_n\rangle$ es un básico canónico de E^Y. Tomemos $h \in W$ y $e \in E$, y definamos $g : Y \longrightarrow E$ tal que, para toda $j \in \{1, \dots, n\}$, $g(f(x_j)) = h(x_j)$, y $g(Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}) \subseteq \{e\}$. Entonces $g \in V$ y por eso V es un abierto no vacío en E^Y. Por la proposición 2.23 $C(Y, E)$ es denso en E^Y, así que existe $k \in C(Y, E) \cap V$. Dado que $k \in V$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ $k(f(x_j)) \in U_j$ y con ello $f^*(k)(x_j) = k \circ f(x_j) = k(f(x_j)) \in U_j$. Por esta razón $f^*(k) \in f^*(C(Y, E)) \cap W$. □

Definición 2.28. *Si E y Y son espacios topolgicos, X es subespacio de Y y $j : X \hookrightarrow Y$ es la inclusión, entonces $j^* : C_p(Y, E) \longrightarrow C_p(X, E)$ suele ser llamado* **mapeo de restricción** *y denotado por r_X, mientras que al subespacio $r_X(C_p(Y, E))$ de $C_p(X, E)$, a veces se le representa por $C(X \mid Y, E)$.*

Proposición 2.29. *Sean E un espacio de Hausdorff, Y un espacio cualquiera y X un subespacio denso de Y. Entonces $r_X : C_p(Y, E) \longrightarrow C_p(X, E)$ es inyectiva y por lo tanto $r_X|_{C_p(Y,E)}^{C_p(X|Y,E)}$ es condensación.*

Demostración. Sean f_1 y f_2 elementos de $C_p(Y, E)$ tales que $r_X(f_1) = r_X(f_2)$. Entonces $f_1 \mid_X = f_2 \mid_X$ y como X es denso en el espacio de Hausdorff Y y f_1, f_2 son continuas, $f_1 = f_2$. □

Proposición 2.30. *Sean Y y E espacios cualesquiera y X un subespacio E-encajado en Y. Entonces r_X es suprayectiva.*

Demostración. El que X esté E-encajado en Y implica que para toda $f \in C(X, E)$ existe $g \in C(Y, E)$ tal que $g \mid_X = f$. Pero $g \mid_X = r_X(g)$, por lo que r_X es suprayectiva. □

4. El funtor $C(X, -)$

Sean ahora X un conjunto, Y y Z espacios topológicos cualesquiera y $g \in C(Y, Z)$. Para cada $x \in X$, sean $\pi_x : Y^X \longrightarrow Y$ y $\pi'_x : Z^X \longrightarrow Z$ las respectivas x-ésimas proyecciones canónicas. Definamos $g_\sharp = \triangle_{x\in X}(g \circ \pi_x) : Y^X \longrightarrow Z^X$, es decir, $g_\sharp$ es la única función continua tal que, para todo $x \in X$, $\pi'_x \circ g_\sharp = \pi_x$. Notemos que si $f \in Y^X$, $g_\sharp(f) : Y \longrightarrow Z$ es la función tal que para todo $x \in X$,

$g_\sharp(f)(x) = \pi'_x(g_\sharp(f)) = g\circ\pi_x(f) = g(f(x)) = g\circ f(x)$. En otras palabras, para cada $f \in Y^X$, $g_\sharp(f) = g\circ f$, y se nos revela una especie de dual de las funciones del tipo $g^\sharp$ que ya estudiamos.

Ahora bien, si C es la categoría de estructuras algebraico-topológicas de cierto tipo, entonces, para todo C-morfismo $g : Y \longrightarrow Z$, $g_\sharp : Y^X \longrightarrow Z^X$ es un C-morfismo, ya que si $*$ es una operación en Y^X (que supondremos binaria para simplificar) y si $\star$ es la correspondiente operación en Z^X, y si f, h son elementos de Y^X y $x \in X$, tenemos que: $g_\sharp(f * h)(x) = (g\circ(f*h))(x) = g(f(x) *_Y h(x)) = g(f(x)) \star_Z g(h(x)) = g\circ f(x) \star_Z g\circ h(x) = (g_\sharp(f)\star g_\sharp(h))(x)$ y por lo tanto, $g_\sharp(f*h) = g_\sharp(f)\star g_\sharp(h)$. Si ρ^{Y^X} es una relación (también binaria por simplicidad) en Y^X y f, h son elementos de Y^X tales que $f\rho^{Y^X}h$, entonces, para todo $x\in X$, $f(x)\rho^Y h(x)$ y como g es C-morfismo, $g(f(x))\rho^Z g(h(x))$, es decir, $g\circ f(x)\rho^Z g\circ h(x)$. Por consiguiente $g_\sharp(f)\rho^{Z^X} g_\sharp(h)$. Podemos entonces concluir lo siguiente:

PROPOSICIÓN 2.31. *Sea X un conjunto cualquiera. Sea C la categoría Top o una categoría de estructuras algebraico-topológicas de cierto tipo. Obtenemos un funtor covariante*

$$C(X,-) : C \longrightarrow C$$

si a cada objeto Y de C le asociamos el C-objeto Y^X y a cada C-morfismo $g : Y \longrightarrow Z$ le asociamos el C-morfismo $g_\sharp : Y^X \longrightarrow Z^X$ tal que, para toda $f\in Y^X$, $g_\sharp(f) = g\circ f$.

Aparte de las ventajas y propiedades que tienen las funciones $g_\sharp$ por tratarse de imágenes de C-morfismos bajo un funtor covariante, tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.32. *Sean X un conjunto, Y y Z espacios topológicos cualesquiera y $g : Y \longrightarrow Z$ una función continua. Entonces:*

(1) *Si g es encaje, $g_\sharp$ también.*
(2) *Si g es encaje cerrado, $g_\sharp$ también.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $g_\sharp = \triangle_{x\in X}(g\circ\pi_x)$, así que $g_\sharp$ es encaje si la fuente $\{g\circ\pi_x : Y^X \longrightarrow Z : x\in X\}$ es Top-fuente inicial y separa puntos de Y^X. Pero dicha fuente es la composición de las Top-fuentes iniciales $\{\pi_x : Y^X \longrightarrow Y : x \in X\}$ y $\{g : Y \longrightarrow Z\}$, las cuales separan puntos de sus respectivos dominios.

(2) Por el inciso (1), basta probar que $g_\sharp(Y^X)$ es cerrado en Z^X. Sea $l \in Z^X \setminus g_\sharp(Y^X)$. Entonces $g\circ h \neq l$, para cada $h\in Y^X$. Si para toda $x\in X$, $l(x)\in g(Y)$, existiría una única $y_x\in Y$ tal que $g(y_x) = l(x)$ y podríamos definir una función $h : X \longrightarrow Y$ tal que $h(x) = y_x$; pero eso sería una contradicción, pues se tendría que $h\in Y^X$ y $g\circ h = l$. Por consiguiente, existe $x_0\in X$ tal que $l(x_0)\in Z\setminus g(Y)$. Como $Z\setminus g(Y)$ es abierto en Z, $\pi_{x_0}^{-}(Z\setminus g(Y))$ es abierto en Z^X. Ahora es fácil comprobar que $l \in \pi_{x_0}^{-}(Z\setminus g(Y)) \subseteq Z^X \setminus g_\sharp(Y^X)$.

□

OBSERVACIÓN 2.33. Supongamos ahora que X es un espacio topológico y que C es la categoría Top o una categoría de estructuras algebraico-topológicas de cierto tipo. Sean Y y Z objetos de C y $g\in C(Y,Z)$. Para cada $f\in C(X,Y)$, $g\circ f\in$

$C_p(X, Z)$, es decir, $g_\sharp(C(X, E)) \subseteq C(X, Z)$. Podemos entonces obtener el funtor covariante

$$C_p(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

asociando a cada $\mathcal{C}$-objeto Y el $\mathcal{C}$-objeto $C_p(X, Y)$ y a cada $\mathcal{C}$-morfismo $g : Y \longrightarrow Z$, el $\mathcal{C}$-morfismo $g_* : C_p(X, Y) \longrightarrow C_p(X, Z)$ definido como la restricción de $g_\sharp$ a $C_p(X, E)$, es decir. para cada $f \in C_p(X, E)$, $g_*(f) = g \circ f$.
Se obtiene de inmediato que si g es encaje, g_* también lo es y, siguiendo una demostración completamente análoga a la de la proposición anterior, concluimos que si g es encaje cerrado, g_* es encaje cerrado también.

EJEMPLOS 2.34. (1) Como $\mathbf{2}$ es cerrado en $\mathbb{Z}$, la inclusión $i : \mathbf{2} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ es encaje cerrado, así que $i_* : C_p(X, \mathbf{2}) \longrightarrow C_p(X, \mathbb{Z})$ también es encaje cerrado. Entonces $C_p(X, \mathbf{2})$ es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$. Pero $\mathbf{2}$ es retracto de $\mathbb{Z}$, pues $r : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que $r|_{\mathbb{N}} = 1$ y $r|_{\mathbb{Z}-\cup\{0\}} = 0$, es retracción. En pocas palabras, $i : \mathbf{2} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ es $\mathcal{T}op$-sección (ver 2.11(2)). Por (3)(iv) de las observaciones 2.10, i_* es también sección, es decir, $C_p(X, \mathbf{2})$ es retracto de $C_p(X, \mathbb{Z})$. De hecho, por la misma observación 2.10(3)(iv):

(2) Si $r : Y \longrightarrow Z$ es retracción y X es cualquier espacio topológico, $r_* : C_p(X, Y) \longrightarrow C_p(X, Z)$ es retracción.

(3) $\mathbb{Z}$ también es cerrado en $\mathbb{Q}$. Más aún: $\mathbb{Z}$ es retracto de $\mathbb{Q}$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea $a_n \in (n, n+1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Para toda $q \in \mathbb{Q}$, definamos:

$$r(q) = n + 1, \text{ si } q \in (a_n, a_{n+1}).$$

Entonces $r : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una función continua, ya que

$$\mathcal{A} = \{(a_n, a_{n+1}) \cap \mathbb{Q} : n \in \mathbb{Z}\}$$

es cubierta abierta de $\mathbb{Q}$ tal que, para toda $n \in \mathbb{Z}$, $r|_{(a_n, a_{n+1}) \cap \mathbb{Q}}$ es continua. Además, $r|_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}}$. Así pues, r es retracción, lo que implica, como acabamos de ver, que $r_* : C_p(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_p(X, \mathbb{Z})$ es también retracción.

(4) Si $X \in R(\mathbb{Q})$, o sea, si X es cero-dimensional (ver 1.31 y 1.33), $C_p(X, \mathbb{Q})$ es denso en $C_p(X)$ ya que si $W = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ es un básico canónico no vacío de $C_p(X)$ y tomamos un elemento f de W y, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, un elemento $q_j \in U_j \cap \mathbb{Q}$, existe $g \in C(X, \mathbb{Q})$ tal que $g(x_j) = q_j$, pues $\mathbb{Q}$ es un espacio Puebla y $X \in R(\mathbb{Q})$. Así $g \in C_p(X, \mathbb{Q}) \cap W$.

(5) $C_p(X, \mathbb{Q})$ no puede ser homeomorfo a $C_p(X)$ para ningún espacio topológico X, pues $C_p(X, \mathbb{Q})$ es cero-dimensional porque $\mathbb{Q}^X$ lo es. En cambio, $C_p(X)$ nunca puede ser cero-dimensional, dado que $\mathbb{R}$ no lo es y es un subespacio de $C_p(X)$, como demostraremos en seguida. De hecho, probaremos algo más general:

PROPOSICIÓN 2.35. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera y $\xi_E : E \longrightarrow C_p(X, E)$ la función tal que, para cada $e \in E$, $\xi_E(e)$ es la función constante $\underline{e} : X \longrightarrow E$ tal que $\underline{e}(x) = e$, para toda $x \in X$. Entonces:*

(1) *ξ_E es encaje.*
(2) *Si E es de Hausdorff, ξ_E es encaje cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Para cada $x \in X$, sea $f_x = 1_E$. Entonces $\{f_x : x \in X\}$ es $\mathcal{T}op$-fuente que separa puntos y puntos de cerrados de X, así que $f = \triangle_{x \in X} f_x : E \longrightarrow E^X$ es encaje (recordar (5) de 1.11). Pero si, para cada $x \in X$, $\pi_x : E^X \longrightarrow E$ es la x-ésima proyección canónica, entonces, para toda $e \in E$, $\pi_x(f(e)) = \pi_x \circ f(e) = f_x(e) = e = \underline{e}(x) = \pi_x(\underline{e}) = \pi_x(\xi_E(e))$. Por consiguiente, para toda $e \in E$, $f(e) = \xi_E(e)$, es decir, $f = \xi_E$. De este modo $\xi_E : E \longrightarrow E^X$ es encaje; mas, como para toda $e \in E$, $\underline{e} \in C_p(X,E)$, $\xi_E : E \longrightarrow C_p(X,E)$ es encaje.

(2) Supongamos que E es de Hausdorff y que $f \in C_p(X,E) \setminus \xi_E(E)$. Entonces f no es constante y por eso existen dos elementos de X, x_1 y x_2, tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$, y como E es de Hausdorff, hay abiertos ajenos U_1 y U_2 en E tales que $f(x_1) \in U_1$ y $f(x_2) \in U_2$. Entonces $f \in \langle x_1, x_2; U_1, U_2\rangle \subseteq C_p(X,E) \setminus \xi_E(E)$.

□

COROLARIO 2.36. *Sean $\mathcal{P}$ una propiedad topológica y X, E espacios topológicos. Entonces:*

(1) *Si E no satisface $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es hereditaria, entonces $C_p(X,E)$ no satisface $\mathcal{P}$.*
(2) *Si E es de Hausdorff, no satisface $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es débilmente hereditaria (es decir, que se hereda en subespacios cerrados), entonces $C_p(X,E)$ no satisface $\mathcal{P}$.*

EJEMPLOS 2.37. (1) Como $\mathbb{R}$ no es cero-dimensional, $C_p(X)$ no es cero-dimensional para ningún espacio X.

(2) Para cualquier espacio topológico X, $C_p(X,\mathbb{Z})$ y $C_p(X)$ no son compactos ni numerablemente compactos. Por otro lado, si X es discreto, $C_p(X,\mathbf{2}) = \mathbf{2}^X$ que sí es compacto.

(3) Ahora estudiemos cómo es $C_p(X,\mathbb{Z})$ dentro de $C_p(X)$, si X es un espacio infinito y de Tychonoff. En este caso, $int_{C_p(X)} C_p(X,\mathbb{Z}) = \emptyset$. En efecto, sea $W = \langle x_1,\dots,x_n; U_1,\dots,U_n\rangle$ un básico canónico no vacío de $C_p(X)$. Sean $f \in W$, $x_0 \in X \setminus \{x_1,\dots,x_n\}$ y $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Como X es de Tychonoff, existe $g \in C_p(X)$ tal que para cada $j \in [n]$, $g(x_i) = f(x_i)$ y $g(x_0) = r$. Por lo tanto $g \in W$, pero $g \notin C_p(X,\mathbb{Z})$. Así que $W \not\subseteq C_p(X,\mathbb{Z})$. Por lo tanto $C_p(X,\mathbb{Z})$ no contiene abiertos no vacíos de $C_p(X)$.

(4) Si X es finito, digamos, $|X| = n$ para algún entero no vacío n, entonces $C_p(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ es discreto en $\mathbb{R}^n = C_p(X) = \mathbb{R}^n$. En cambio $\mathbb{Z}^\omega$ no es discreto en $\mathbb{R}^\omega$. Es más, ningún elemento de $\mathbb{Z}^\omega$ es aislado en $\mathbb{R}^\omega$, o sea, $C_p(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\omega$ es denso en sí mismo en $C_p(\omega) = \mathbb{R}^\omega$. Esto se deduce de la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.38. *Sean E y F dos espacios tales que F no es discreto, $R(E) = R(\mathbf{2})$, $X \in R(E)$ y E es discreto en F. Entonces $C_p(X,E)$ es denso en sí mismo en $C_p(X,F)$ si y sólo si $|X| \geq \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es muy sencilla: si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = |X|$, entonces $C_p(X,E) = E^n$ es discreto en $F^n = C_p(X,F)$, por lo que $C_p(X,E)$ no es denso en sí mismo en $C_p(X,F)$.

Para ver la suficiencia, supongamos que $|X| \geq \aleph_0$. Sean $f \in C_p(X,E)$ y $W = \langle x_1,\dots,x_n; A_1,\dots,A_n\rangle$ un básico canónico de $C_p(X,F)$ tal que $f \in W$, y en el que los puntos x_i son distintos entre sí. Como X es infinito, existe $x_0 \notin \{x_1,\dots,x_n\}$ y, dado que X es cero-dimensional, existen cerrabiertos ajenos $U_0,\dots,U_n$ tales que, para cada $j \in \{0,\dots,n\}$, $x_j \in U_j$. Como E tiene por lo menos dos puntos, escojamos $e \in E \setminus \{f(x_0)\}$ y definamos la función $g : X \longrightarrow E$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x_j) & si\ j \in \{1,\dots,n\}\ y\ x \in U_j \\ e & si\ x \notin \bigcup_{j=1}^{n} U_j. \end{cases}$$

Como $\{U_1, \ldots, U_n, X\setminus\bigcup_{j=1}^{n} U_j\}$ es una cubirta de cerrabiertos ajenos entre sí de X, g es continua. Además $g(x_0) = e \neq f(x_0)$. Por lo tanto $g \neq f$ y $g \in W \cap C_p(X, E)$. Así, f no es aislado en $C_p(X, F)$. □

La proposición 2.35 muestra que podemos considerar a todo espacio E como subespacio de $C_p(X, E)$, y si además E es de Hausdorff, E será un subesapacio cerrado de $C_p(X, E)$. Será útil en capítulos posteriores saber cómo y cuándo podemos ver a un espacio X como subespacio de $C_p(C_p(X, E), E)$. Comencemos nuestra indagación de esto con una definición:

DEFINICIÓN 2.39. *Sean X un conjunto, E un espacio topológico, $\mathcal{F} \subseteq E^X$ y $x \in X$.* **La evaluación de la familia $\mathcal{F}$ en x** *es la función $e_x : \mathcal{F} \longrightarrow E$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$, $e_x(f) = f(x)$, es decir, es la restricción a $\mathcal{F}$ de la x-ésima proyección natural $\pi_x : E^X \longrightarrow E$.*

Recordemos que en el caso en que X es un espacio topológico y $\mathcal{F} = C_p(X, E)$, hemos denotado a la función e_x por $\hat{x}$ (ver definición 2.8).

DEFINICIÓN 2.40. *Si X es un conjunto, E es un espacio topológico y $\mathcal{F} \subseteq E^X$, a la función $\psi_{\mathcal{F}} : X \longrightarrow C(\mathcal{F}, E)$ tal que, para cada $x \in X$, $\psi_{\mathcal{F}}(x) = e_x$, se le llama* **la evaluación canónica asociada a la familia $\mathcal{F}$**.[7]

OBSERVACIÓN 2.41. Si X y E son espacios topológicos y $\mathcal{F} \subseteq C_p(X, E)$, $\psi_{\mathcal{F}}$ es una función continua, ya que coincide con la función continua $\triangle\mathcal{F} : X \longrightarrow E^{\mathcal{F}}$. En efecto, para cada $f \in \mathcal{F}$, si $\pi_f : E^{\mathcal{F}} \longrightarrow E$ es la f-ésima proyección canónica y $x \in X$, $\pi_f \circ \psi_{\mathcal{F}}(x) = \pi_f(e_x) = e_x(f) = f(x)$.

También por este hecho y por 1.11, obtenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.42. *Si X y E son espacios topológicos y $\mathcal{F} \subseteq C_p(X, E)$, entonces:*

(1) *Si $\mathcal{F}$ separa puntos, $\psi_{\mathcal{F}} : X \longrightarrow C_p(\mathcal{F}, E)$ es inyectiva.*
(2) *Si X es T_0 y $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, o si $\mathcal{F}$ separa puntos y es Top-fuente inicial, $\psi_{\mathcal{F}}$ es encaje.*

Y usando 1.23, se obtiene el siguiente:

COROLARIO 2.43. *Si E es un espacio topológico no vacío y $X \in R(E)$, entonces*

$$\psi_{C(X,E)} : X \longrightarrow C_p(C_p(X, E), E)$$

es encaje.

5. $L_p(X, E)$

En esta sección escribiremos $C_{p,2}(X, E)$ para referirnos al espacio topológico $C_p(C_p(X, E), E)$, donde X y E son espacios cualesquiera, y supondremos que $(E, +, \cdot)$ es un campo topológico. Si tal es el caso, $C_{p,2}(X, E)$ es un espacio vectorial topológico sobre E y si X es un espacio E-regular, por el corolario 2.43 la función

$$\psi_{C(X,E)} : X \longrightarrow C_{p,2}(X, E)$$

es encaje, por lo que podemos identificar a X con el subespacio $\psi_{C(X,E)}(X)$ de $C_{p,2}(X, E)$. Con esta identificación cada elemento x de X queda representado

[7] Ver [62], pág. 22

por medio de una función $x : C_p(X,E) \longrightarrow E$ tal que para toda $f \in C_p(X,E)$, $x(f) = f(x)$ que, como sabemos, es continua por ser la restricción de la proyección canónica $\pi_x : E^X \longrightarrow E$ (ver definición 2.39). Además esta función x es claramente una función lineal entre espacios vectoriales topológicos sobre E y entonces es un elemento del espacio dual de $C_p(X,E)$, según la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.44. *Si E es un campo topológico y L es un espacio vectorial topológico sobre E, el* **dual de** L, L', *es el espacio de todas las funciones lineales continuas $f : L \longrightarrow E$, dotado de la topología de la convergencia puntual, es decir, como subespacio topológico de $C_p(L,E)$.*

OBSERVACIÓN 2.45. Con la identificación $X \xleftrightarrow{\psi} \psi(X)$, no sólo cada elemento de X es un elemento de $(C_p(X,E))'$, sino también toda combinación lineal finita de elementos de X. En otras palabras, todo elemento de $C_{p,2}(X,E)$ de la forma

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

donde $x_1, \ldots x_n \in X$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in E$, y $n \in \mathbb{N}$, pertenece a $(C_p(X,E))'$. El conjunto de todas estas combinaciones lineales recibe un nombre especial:

DEFINICIÓN 2.46. *Si E es un campo topológico y $X \in R(E)$,* **la E-envolvente lineal topológica de** X *es el conjunto algebraicamente generado por X en el espacio vectorial $C_{p,2}(X,E)$, es decir, es el conjunto:*

$$\{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in C_{p,2}(X,E) : x_1, \ldots x_n \in X,\ \lambda_1, \ldots \lambda_n \in E,\ n \in \mathbb{N}\},$$

que denotaremos por $L_p(X,E)$.[8]

OBSERVACIÓN 2.47. Si E es un campo topológico y $X \in R(E)$, entonces $L_p(X,E)$ es subespacio vectorial topológico de $C_{p,2}(X,E)$ y es el más pequeño subespacio lineal de $C_{p,2}(X,E)$ que contiene a X (es decir, a $\psi_{C(X,E)}(X)$).

La observación 2.45 no es otra cosa que la afirmación de que $L_p(X,E) \subseteq (C_p(X,E))'$. En el teorema que sigue demostraremos la otra contención para cierto tipo de campos topológicos que precisaremos a continuación.

Sea E un campo de característica cero. Entonces E contiene un subcampo, llamado **el campo primo de E** [9], que es isomorfo al campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales y que suele identificarse con $\mathbb{Q}$, como aquí haremos.

DEFINICIÓN 2.48. (1) *Sea E un campo de característica cero.* **Una norma en** E *es una función $\| \ \|: E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ que satisface las siguientes propiedades:*
(N1) $\|e\| = 0$ *si y sólo si $e = \underline{0}$ (aquí $\underline{0}$ es el elemento cero en E).*
(N2) *Para toda $\lambda \in \mathbb{Q}$ y para toda $e \in E$, $\|\lambda e\| = |\lambda|\ \|e\|$.*
(N3) *Para cualesquiera e y e' en E, $\|e + e'\| \leq \|e\| + \|e'\|$.*

(2) *LLamaremos* **campo normado** *a una pareja $(E, \| \ \|)$, donde E es un campo de característica cero y $\| \ \|$ es una norma en E.*

OBSERVACIÓN 2.49. Se puede comprobar que un campo normado $(E, \| \ \|)$ es un espacio métrico cOn la métrica definida por $d(x,y) = \|x - y\|$.

---

[8] Este espacio también se puede llamar el **E-espacio débil lineal libre de** X, ya que autores tales como Oleg Okunev se han referido a $L_p(X)$ como el espacio débil lineal de X (ver "Memorias de las Terceras Jornadas Veraniegas de Topología, Puebla, Pue., aún por redactarse.)

[9] Ver la definición en la página 66 de [46]

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si e_0 es un elemento de E y $\delta > 0$, al conjunto $\{e \in E : \|e - e_0\| < \delta\}$, lo denotaremos por $B_\delta(e_0)$.

Tampoco es difícil corroborar que con la métrica d definida como hemos indicado, las operaciones de suma y producto en el campo E son continuas, con lo cual podemos afirmar que E es un campo topológico con la topología generada por su norma

DEFINICIÓN 2.50. *Un* **campo discreto** *es un campo E que también es un espacio topológico discreto.*

OBSERVACIÓN 2.51. Todo campo discreto es también es un campo topológico que además es un espacio Puebla, por ser discreto.

LEMA 2.52. *Sea E un campo discreto o bien un campo normado. Supongamos que $X \in R(E)$ y que $\phi : C_p(X,E) \longrightarrow E$ es una función lineal y continua. Entonces existe una colección finita $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de elementos de X, tal que, para toda $g \in C_p(X,E)$, $\phi(g) = 0$ si $g(x_i) = 0$ para cada $i \in [n]$.*

DEMOSTRACIÓN. Como ϕ es lineal, $\phi(\underline{0}) = 0$.[10]

(a) Si E es un campo discreto, como ϕ es continua en $\underline{0}$, existen una vecindad U de 0 en E y un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X, tales que $\phi(W) \subseteq \{0\}$, donde W es la vecindad básica $\langle \underline{0}; x_1, \ldots, x_n; U\rangle$ de $\underline{0}$ en $C_p(X,E)$. Entonces, si $g \in C_p(X,E)$ y para cada $i \in [n]$ $g(x_i) = 0$, se tiene que $g \in W$ y por lo tanto que $\phi(g) = 0$.

(b) Supongamos ahora que E es un campo normado y que su norma es la función $\| \, \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Como ϕ es continua, existe una vecindad canónica $W = \langle \underline{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon\rangle$ de $\underline{0}$ en $C_p(X,E)$, con $\epsilon > 0$, tal que $\phi(W) \subseteq B_1(0)$.

Sea $g \epsilon C_p(X,E)$ tal que $g(x_i) = 0$ para toda $i \in [n]$. Si $k \in \mathbb{N}$, entonces $kg \in W$ y con ello $\|\phi(kg)\| < 1$. Por lo tanto, para cada natural k, se tiene que $k\|\phi(g)\| = |g| \, \|\phi(g)\| = \|k\phi(g)\| < 1$, es decir,

$$\text{para cada } k \in \mathbb{N}, \quad \|\phi(g)\| < \frac{1}{k}.$$

Esto equivale a afirmar que $\phi(g) = 0$.

$\square$

TEOREMA 2.53. *Si E es un campo discreto o un campo normado Puebla y $X \in R(E)$, entonces*

$$L_p(X,E) = (C_p(X,E))'.$$

DEMOSTRACIÓN. Como recalcamos en la observación 2.47, en 2.45 afirmamos que $L_p(X,E) \subseteq (C_p(X,E))'$. Probaremos la otra contención.
Sea $\phi \in C_{p,2}(X,E)$ tal que $\phi : C_p(X,E) \longrightarrow E$ es lineal y continua. Por el lema 2.52, existe un subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de X tal que, para cada $g \in C_p(X,E)$ que se anule en todos los elementos de X, se tiene que $\phi(g) = 0$.

Como E es un espacio Puebla y $X \in R(E)$, para cada $i \in [n]$, existe $g_i \in C_p(X,E)$ tal que $g_i(x_i) = 1$ y para toda $j \in [n] \setminus \{i\}$, $g_i(x_j) = 0$.

[10] En este lema estamos representando con 0 al elemento nulo en E y con $\underline{0}$ al elemento nulo en $C_p(X,E)$.

También para cada $i \in [n]$, pongamos $\lambda_i = \phi(g_i)$. Mostraremos a continuación que $\phi = \sum_{i\in[n]} \lambda_i x_i$. Sea $g \in C_p(X,E)$. Definamos la función g' como la siguiente combinación lineal en $C_p(X,E)$:

$$g' = g - g(x_1)g_1 - \ldots - g(x_n)g_n.$$

Entonces $g' \in C_p(X,E)$ y, como para cada $i \in [n]$ $g'(x_i) = 0$, se tiene que $\phi(g') = 0$. Así pues,

$$0 = \phi(g') = \phi(g) - \phi(\sum_{i\in[n]} g(x_i)g_i).$$

Por lo tanto,

$$\phi(g) = \phi(\sum_{i\in[n]} g(x_i)g_i) = \sum_{i\in[n]} g(x_i)\phi(g_i) = \sum_{i\in[n]} \lambda_i g(x_i) = \sum_{i\in[n]} \lambda_i x_i(g).$$

Como esto es para toda $g \in C_p(X,E)$, hemos logrado probar que $\phi = \sum_{i\in[n]} \lambda_i x_i$, y con ello que $\phi \in L_p(X,E)$. □

TEOREMA 2.54. *Sean E es un espacio topológico y $X \in R(E)$. Entonces:*

(1) *Si E es un campo topológico Puebla y de Hausdorff, X es cerrado en $L_p(X,E)$.*
(2) *Si E es un campo discreto o un campo normado, entonces $L_p(X,E)$ es cerrado en $C_{p,2}(X,E)$.*
(3) *Si E es un campo discreto o un campo normado Puebla, entonces X es cerrado en $C_{p,2}(X,E)$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Representemos por $\bar{X}$ a la cerradura de X en $L_p(X,E)$ y supongamos que existe $y \in \bar{X} \setminus X$.

Sea $Y = X \cup \{y\}$. Como $y \in L_p(X,E)$, existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$, tales que $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Notemos que $Y \in R(E)$. Entonces, como $y \neq x_i$ para toda $i \in [n]$, y E es un espacio Puebla, existe $g \in C_p(X,E)$ tal que $g(y) = 1$ y, para toda $i \in [n]$, $g(x_i) = 0$. Entonces $f = g|_X \in C_p(X,E)$ satisface que $f(x_i) = 0$ para toda $i \in [n]$ y

$$y(f) = \lambda_1 x_1(f) + \ldots + \lambda_n x_n(f) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) = 0. \quad (\star)$$

Como E es de Hausdorff, existen abiertos ajenos G y H en E, tales que $1 \in G$ y $0 \in H$. Dado que g es continua y $g(y) = 1$, existe una vecindad V de y en Y tal que $g(V) \subseteq G$. También existe una vecindad V' de y en $L_p(X,E)$ tal que $V = V' \cap Y$.

Sea $A = \{x \in X : f(x) \in G\}$. Mostraremos que $y \in cl_{L_p(X,E)}A$.

Si U es una vecindad de y en $L_p(X,E)$, entonces $U \cap V'$ lo es también y, como $y \in \bar{X}$, $U \cap V' \cap X \neq \emptyset$. Note que $U \cap V' \cap X = U \cap V \cap X$. Sea $x \in U \cap V \cap X$. Se tiene que $f(x) = g(x) \in G$, con lo que $U \cap A \neq \emptyset$.

Hemos visto entonces que $y \in cl_{L_p(X,E)}A$ y como $y(f) = 0$ (por $(\star)$), $W = L_p(X, E) \cap \langle y; f; H\rangle$ es vecindad de y en $L_p(X,E)$, por lo que existe $z \in A \cap W$. Ahora bien, como $z \in A$, entonces $z(f) \in G$, y como $z \in W$, se tiene que $z(f) \in H$. Esto constituye una contradicción que provino de suponer que $\bar{X} \setminus X \neq \emptyset$.

(2) Ahora denotaremos por $\overline{L_p(X,E)}$ a la cerradura de $L_p(X,E)$ en $C_{p,2}(X,E)$. Sea $\phi \in \overline{L_p(X,E)}$. En vista de 2.53, para demostrar que $\phi \in L_p(X,E)$, sólo hay que mostrar que es lineal. Haremos esto a continuación en cada uno de

los dos casos de la hipótesis: cuando E es un campo discreto y cuando E es un campo normado Puebla.

(a) Supongamos que E es un campo discreto. Sean f y g elementos de $C_p(X, E)$ y $k \in E \setminus \{0\}$. Consideremos las siguientes vecindades canónicas de ϕ en $C_{p,2}(X, E)$:

$$A = \langle \phi; f; \{\phi(f)\} \rangle, \quad B = \langle \phi; g; \{\phi(g)\} \rangle, \quad C = \langle \phi; f + kg; \{\phi(f + kg)\} \rangle.$$

Los conjuntos $A \cap B \cap C$ es una vecindad de ϕ en $C_{p,2}(X, E)$ y, como $\phi \in \overline{L_p(X, E)}$, existe $\eta \in A \cap B \cap C \cap L_p(X, E)$. Entonces η es lineal y por lo tanto, $\eta(f + kg) = \eta(f) + k\eta(g)$. Esto implica que:

$$\phi(f + kg) \overset{\eta \in C}{=} \eta(f + kg) = \eta(f) + k\eta(g) \overset{\eta \in A \text{ y } \eta \in B}{=} \phi(f) + k\phi(g).$$

(b) Supongamos ahora que E es un campo con una norma $\| \; \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y que, con la topología generada por esta norma, E es un espacio Puebla.

Sean f, $g \in C_p(X, E)$ y $k \in E \setminus \{0\}$. Para comprobar que $\phi(f + kg) = \phi(f) + k\phi(g)$, demostraremos que, para toda $\varepsilon > 0$,

$$\| \phi(f) + k\phi(g) - \phi(f + kg) \| < \varepsilon.$$

Sea pues $\varepsilon > 0$. Consideremos las siguientes vecindades locales de ϕ en $C_{p,2}(X, E)$:

$A = \langle \phi; \; f; \; B_{\frac{\varepsilon}{3}}(\phi(f)) \rangle$, $\quad B = \langle \phi; \; kg; \; B_{\frac{\varepsilon}{3\|k\|}}(\phi(kg)) \rangle \quad$ y
$C = \langle \phi; \; f + kg; \; B_{\frac{\varepsilon}{3}}(\phi(f + kg)) \rangle$.

$A \cap B \cap C$ es una vecindad de ϕ en $C_{p,2}(X, E)$, así que como $\phi \in \overline{L_p(X, E)}$, se tiene que $A \cap B \cap C \cap L_p(X, E) \neq \emptyset$.

Sea $\eta \in A \cap B \cap C \cap L_p(X, E)$. Como η es lineal, $\eta(f + kg) = \phi(f) + k\phi(g)$. Se tiene entonces que:

$\| \phi(f) + k\phi(g) - \phi(f + kg) \| =$
$= \| \phi(f) - \eta(f) + k\phi(g) - k\eta(g) + \eta(f) + k\eta(g) - \phi(f + kg) \| =$
$= \| (\phi(f) - \eta(f)) + k(\phi(g) - \eta(g)) + (\eta(f + kg) - \phi(f + kg)) \| \leq$
$\leq \| \phi(f) - \eta(f) \| + \| k \| \; \| \phi(g) - \eta(g) \| + \| \eta(f + kg) - \phi(f + kg) \| \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \| k \| \; \frac{\varepsilon}{3\|k\|} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

(3) Inmediato de (1) y (2).

□

PROPOSICIÓN 2.55. *Si E es un campo topológico y $X \in R(E)$ entonces, para toda $f \in C_p(X, E)$, existe una única funcional lineal continua $\hat{f} : L_p(X, E) \longrightarrow E$ tal que $\hat{f}|_X = f$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C_{p,3}(X, E) = C_p(C_p(C_p(X, E), E), E)$.
Como $C_p(X, E) \in R(E)$, por 2.43 la función:

$$\psi_{C_{p,2}(X,E)} : C_p(X, E) \longrightarrow C_{p,3}(X, E),$$

a la que denotaremos aquí por ψ, es encaje; así es que si $f \in C_p(X, E)$, entonces $\psi(f) \in (C_{p,2}(X, E))'$, por la observación posterior a 2.44, es decir, $\psi(f) : C_{p,2}(X, E) \longrightarrow E$ es lineal y continua. Como $L_p(X, E) \subseteq C_{p,2}(X, E)$, basta definir $\hat{f} = \psi(f)|_{L_p(X,E)}$. Ahora bien, para toda $x \in X$, $\psi(f)(x) = x(f) = f(x)$, con lo que obtenemos, como queríamos, que $\hat{f}|_X = f$.

Para demostrar la unicidad de $\hat{f}$, supongamos que $\check{f} : L_p(X,E) \longrightarrow E$ es una funcional lineal continua tal que $\check{f}|_X = f$. Para toda $y \in L_p(X,E)$ existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$, tales que $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Por lo tanto, dado que $\hat{f}$ y $\check{f}$ son lineales,
$\hat{f}(y) = \lambda_1 \hat{f}(x_1) + \ldots \lambda_n \hat{f}(x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) = \lambda_1 \check{f}(x_1) + \ldots + \lambda_n \check{f}(x_n) = \check{f}(y)$. □

Nótese que si $j : L_p(X,E) \longrightarrow C_{p,2}(X,E)$ es la inclusión entonces, para cada $f \in C_p(X,E)$, la funcional $\hat{f}$ construida en la demostración anterior, no es más que la aplicación a f de la composición siguiente, a la que denotaremos con la letra ϑ:

$$C_p(X,E) \xrightarrow{\psi} C_{p,3}(X,E) \xrightarrow{j^*} C_p(L_p(X,E),E).$$

Como vimos también en la prueba anterior, $\vartheta(C_p(X,E)) \subseteq (L_p(X,E),E))'$ y, al probar la unicidad de $\hat{f}$, en cierta forma se ha demostrado la inyectividad de ϑ. Esta función es continua. En el siguiente teorema probaremos que la función

$$\vartheta : C_p(X,E) \longrightarrow (L_p(X,E),E))'$$

es suprayectiva y que su inversa

$$\xi : (L_p(X,E),E))' \longrightarrow C_p(X,E)$$

también es continua y lineal, y entonces podremos afirmar que ϑ es homeomorfismo lineal:

TEOREMA 2.56. *Si E es un campo topológico y $X \in \mathcal{R}(E)$, entonces $C_p(X,E)$ es canónicamente isomorfo al espacio $(L_p(X,E))'$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos entonces que la función ϑ definida en la nota de arriba, es suprayectiva. Tomemos $g \in (L_p(X,E))'$. Entonces $g|_X \in C_p(X,E)$ y $\vartheta(g|_X)$ es el único elemento de $(L_p(X,E))'$ tal que $\vartheta(g|_X)|_X = g|_X$. Entonces este elemento no es otro que g. Por lo tanto, $g \in \vartheta(C_p(X,E))$.

Esto nos muestra quién es ξ, la inversa de ϑ; es la función restricción de la función $i^* : C_p(L_p(X,E),E) \longrightarrow C_p(X,E)$ a $(L_p(X,E))'$, donde $i : X \hookrightarrow L_p(X,E)$ es la inclusión. Como sabemos, i^* es continua y lineal, así que ξ lo es también. □

Combinando los dos resultados duales enunciados en los teoremas 2.53 y 2.56, obtenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 2.57. *Si E es un campo discreto o un campo normado Puebla y X y Y son espacios E-regulares, entonces $L_p(X,E)$ es linealmente homeomorfo a $L_p(Y,E)$ si y solamente si $C_p(X,E)$ es linealmente homeomorfo a $C_p(Y,E)$.*

OBSERVACIÓN 2.58. Si E es un campo topológico y $X \in \mathcal{R}(E)$, entonces tanto E como $C_p(X,E)$ son anillos topológicos, conmutativos y con elemento unidad, $\underline{1}$. Con este hecho a la mano podemos caracterizar de otra manera al espacio X identificado con $\psi_{C_p(X,E)}(X)$ como subespacio de $L_p(X,E)$, cuando E es además un espacio discreto o su topología está generada por una norma en E que lo hace además un espacio Puebla. Será útil dar antes el siguiente concepto:

DEFINICIÓN 2.59. *Si E es un campo topológico y $X \in \mathcal{R}(E)$, diremos que una funcional lineal $\varphi : C_p(X,E) \longrightarrow E$ es* **multiplicativa** *si para cualesquiera $f, g \in C_p(X,E)$, $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$.*

Denotaremos con $X_E^\bullet$ al conjunto

$$\{\varphi \in (C_p(X,E))' : \varphi \textit{ es multiplicativa } \}.$$

TEOREMA 2.60. *Sean E un campo discreto o un campo normado Puebla y $X \in R(E)$. Entonces $X = X_E^\bullet$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $(C_p(X,E))' = L_p(X,E)$ (teorema 2.53), resulta que $X_E^\bullet \subseteq L_p(X,E)$. Por otro lado $X \subseteq X_E^\bullet$, ya que para cualesquiera elementos f y g de $C_p(X,E)$, $x(f \cdot g) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x(f) \cdot x(g)$.
Veamos que $X_E^\bullet \subseteq X$.
Sea $\varphi \in X_E^\bullet$. Como $\varphi \in L_p(X,E)$, existen $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E \setminus \{0\}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$, tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $\varphi = \lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n$.

- Si $n > 1$, como E es un espacio Puebla, existen f_1 y f_2 en $C_p(X,E)$ tales que $f_1(x_1) = \frac{1}{\lambda_1}$ y $f_1(x_j) = 0$ si $j \in [n] \setminus \{1\}$; $f_2(x_2) = \frac{1}{\lambda_2}$ y $f_2(x_j) = 0$ si $j \in [n] \setminus \{2\}$.
  Entonces, para cada $i \in \{1,2\}$, $\varphi(f_i) = 1$. Sin embargo,
  $\varphi(f_1 \cdot f_2) = \lambda_1 f_1(x_1) \cdot f_2(x_1) + \lambda_2 f_1(x_2) \cdot f_2(x_2) + \ldots + \lambda_n f_1(x_n) \cdot f_2(x_n) = 0$,
  así que $\varphi(f_1 \cdot f_2) \neq \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$, contradiciendo la suposición de que $\varphi \in X^\bullet$.
  Entonces este caso, en que $n > 1$, no ocurre. Por lo tanto, $n = 1$.

•• Si $n = 1$ entonces $\varphi = \lambda_1 x_1$ y como $\varphi \neq \underline{0}$, $\lambda_1 \neq 0$. Denotemos por f_0 a la función constante $\underline{1}$ de $C_p(X,E)$. Entonces $f_0 = f_0^2$ y $\varphi(f_0) \cdot \varphi(f_0) = \varphi(f_0^2) = \varphi(f_0) = \lambda_1 x_1(f_0) = \lambda_1 f_0(x_1) = \lambda_1$, es decir, $\lambda_1^2 = \lambda_1$ y, como $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_1 = 1$, con lo que se concluye que $\varphi = x_1 \in X$.

□

CAPÍTULO 3

Homeomorfismos canónicos de espacios, inducidos por isomorfismos de estructuras de espacios de funciones

Hay varios resultados fundamentales relacionados con homeomorfismos de espacios topológicos inducidos por isomorfismos de estructuras (ya sea topológicas, algebraicas o algebraicas topológicas) de sus espacios de funciones, y que constituyen importantes puentes entre álgebra, topología y análisis funcional. El primero que recordaremos es el Teorema de Gelfand-Kolmogorov, que en principio nos habla de que, para cada fenómeno topológico que ocurre en un compacto X, hay un fenómeno algebraico observable en el anillo $C(X)$.

TEOREMA 3.1 (de Gelfand-Kolmogorov (1939)) ([**11**], pág. 88). *Si X y Y son espacios compactos para los cuales los anillos $C(X)$ y $C(Y)$ son algebraicamente isomorfos, entonces X y Y son homeomorfos.*

Hay ejemplos ([**11**]) que muestran que este teorema no se extiende a cualquier clase de espacios no compactos, mas es un hecho de suma consideración que sí se pueda extender a los espacios realcompactos:

TEOREMA 3.2 (Hewitt (1948)) ([**11**], pág. 90). *Si X y Y son espacios realcompactos y $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, entonces X es homeomorfo a Y.*

Este teorema suele enunciarse brevemente diciendo que la estructura de anillo de $C(X)$ determina la topología de X. Sin embargo, también la determina la estructura de retículo de $C(X)$ (ver [**59**]). Asimismo, puede el lector hallar en [**23**], en [**50**] o en [**28**] pruebas de que, para un espacio $\mathbb{N}$-compacto, tanto la estructura de anillo como la de retículo de $C(X, \mathbb{Z})$, determinan la topología de X. Nagata probó en 1949 que los homeomorfismos de los espacios X y Y aparecen también como consecuencia de los correspondientes isomorfismos entre los anillos topológicos de funciones:

TEOREMA 3.3 (Nagata (1949) (ver [**11**], pág. 91). *Sean X y Y espacios de Tychonoff. Entonces los anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos si y sólo si los espacios X y Y son homeomorfos.*

Las premisas de este teorema son sin duda más fuertes que las del de Hewitt, pero el resultado que pregona es válido para todos los espacios de Tychonoff, no solamente para los realcompactos. Usando el teorema 2.60, daremos a continuación una versión del teorema de Nagata para espacios E-regulares, donde E es un campo normado Puebla o un campo discreto.

TEOREMA 3.4. *Sea E un campo discreto o un campo normado Puebla y sean X y Y espacios E-regulares. Entonces existe un isomorfismo de anillos topológicos $h : C_p(X,E) \longrightarrow C_p(Y,E)$ que deja fijo*[1] *al espacio E si y sólo si X y Y son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Como la suficiencia es clara, sólo demostraremos la necesidad. Sea $h : C_p(X,E) \longrightarrow C_p(Y,E)$ un isomorfismo de anillos topológicos. Entonces

$$h^* : C_{p,2}(Y,E) \longrightarrow C_{p,2}(X,E)$$

es también un isomorfismo de anillos topológicos (ver 2.10 (11) y 2.11 (6)). Sea ahora $f \in Y$. Por el teorema 2.60, podemos identificar Y con Y_E^*, que como se recordará, es el conjunto de los elementos multiplicativos de $(C_p(Y,E))'$, y entonces considerar a f como una funcional lineal continua y multiplicativa sobre $C_p(Y,E)$. Como h es un isomorfismo de anillos que deja fijo a E, $h^*(f) = f \circ h : C_p(X,E) \longrightarrow E$ es una funcional lineal[2] continua sobre $C_p(X,E)$, así que para ver que $h^*(f) \in X$, sólo falta demostrar que es una funcional multiplicativa (ya que $X = X_E^*$, como en 2.60), lo cual es muy sencillo pues si g y k son elementos de $C_p(X,E)$, entonces, tomando en cuenta que h es isomorfismo de anillos,

$$h^*(f)(g \cdot k) = (f \circ h)(g \cdot k) = f(h(g \cdot k)) =$$

$$= f(h(g) \cdot h(k)) \overset{f \in Y^*}{=} f(h(g)) \cdot f(h(k)) = h^*(f)(g) \cdot h^*(f)(k).$$

Se ha demostrado entonces que $h^*(Y) \subseteq X$. Procediendo de la misma forma pero con $h^{\leftarrow}$, obtenemos que $(h^{\leftarrow})^*$, que es la inversa de h^*, manda X en Y. Esto demuestra que $h^*|_Y : Y \longrightarrow X$ es un homeomorfismo. □

Estos y otros teoremas del mismo tipo han motivado preguntas como la del siguiente problema, que los autores de [**14**] consideran básico para las aplicaciones de los funtores en topología general:

PROBLEMA GENERAL 1: Si E es una estructura algebraica y es a la vez un espacio topológico (por ejemplo si es una estructura algebraico-topológica), ¿qué tipo de estructura algebraica (o algebraico-topológica) sobre $C(X,E)$ (o $C_p(X,E)$) determina la topología de X?

Algunas estructuras algebraicas en $C(X,E)$ o en $C_p(X,E)$ no determinan la topología de X, pero sí algunas otras propiedades topológicas de X. Por ejemplo, la estructura de grupo de $C(X,\mathbb{Z})$ en general no determina la topología del espacio X, pero como se demuestra en [**23**], si X y Y son espacios **2**-compactos, entonces los grupos $C(X,\mathbb{Z})$ y $C(Y,\mathbb{Z})$ son isomorfos si y sólo si $w(X) = w(Y)$. [3]

Así pues, conviene plantearse un problema más general que el problema general 1:

PROBLEMA GENERAL 2: Sea Φ un funtor de alguna subcategoría plena, $\mathcal{S}$, de $\mathcal{T}op$ en alguna otra categoría $\mathcal{C}$. ¿Qué tan parecidas entre sí son las propiedades de los espacios topológicos X y Y en $\mathcal{S}$ si los $\mathcal{C}$-objetos $\Phi(X)$ y $\Phi(Y)$ son objetos

---

[1] El espacio E se puede considerar como subespacio del espacio $C_p(Z,E)$, para cualquier espacio Z, como vimos en 2.35(1).

[2] En efecto, para cualesquiera g y g' elementos de $C_p(X,E)$ y $k \in E$, se tiene: $f \circ h(g+kg') = f(h(g+kg')) = f(h(g)+h(\underline{k})h(g')) = f(h(g)+\underline{k}h(g')) = f(h(g))+kf(h(g')) = f \circ h(g)+kf \circ h(g')$.

[3] Ver página 17 para recordar el concepto de peso.

$\mathcal{C}$-isomorfos?

Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathcal{S}$ es una subcategoría plena de Top y $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor, ya sea covariante o contravariante, definimos en la clase T de objetos de $\mathcal{S}$, la siguiente relación que resulta ser de equivalencia:

$$X \overset{\Phi}{\simeq} Y \text{ si y sólo si } \Phi(X) \text{ es } \mathcal{C}\text{-isomorfo a } \Phi(X).$$

DEFINICIÓN 3.5. *Diremos que los espacios X y Y* **son Φ-equivalentes o Φ-homeomorfos** *si $X \overset{\Phi}{\simeq} Y$.*

El problema general 2 se puede ahora reformular diciendo:

¿Qué propiedades deben tener en común los espacios Φ-equivalentes?

Dado un funtor $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$ como arriba, en la práctica suele ser muy difícil determinar todas las propiedades que tienen en común dos espacios Φ-equivalentes, pero pueden darse respuestas parciales estudiando si alguna propiedad topológica concreta $\mathcal{P}$ que sea poseída por un espacio X, la tienen también todos los espacios Φ-equivalentes a X.

DEFINICIÓN 3.6. *Dado un funtor $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$, como arriba, y una propiedad topológica $\mathcal{P}$, diremos que $\mathcal{P}$ es una propiedad Φ-invariante, si es preservada por Φ-equivalencia, es decir, si siempre que $\Phi(X)$ y $\Phi(Y)$ sean $\mathcal{C}$-isomorfos y X tenga $\mathcal{P}$, entonces Y también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Por ejemplo, si F es el funtor que a cada espacio topológico X le asocia el grupo topológico libre sobre X, $F(X)$, entonces la compacidad es F-invariante (ver **[36]**).

A la luz de la definición anterior, podemos replantear los problemas precedentes del modo siguiente:

PROBLEMA GENERAL 3: Dado un funtor Φ (covariante o contravariante) de una subcategoría plena de Top en una categoría $\mathcal{C}$, ¿Qué propiedades topológicas son Φ invariantes?

En la siguiente sección mencionaremos algunos resultados sencillos, pero de gran utilidad, relacionados con los anteriores problemas, principalmente cuando Φ es el funtor $C_p(-,E) : Top \longrightarrow \mathcal{C}$, donde E es una estructura algebraica topológica y $\mathcal{C}$ es la categoría cuyos objetos son las estructuras algebraicas del mismo tipo que E.

1. $C_p(-,E)$-equivalencia

Quedamos pues en que el símbolo $X \overset{C_p(-,E)}{\simeq} Y$ significa que $C_p(X,E)$ es $\mathcal{C}$-isomorfo a $C_p(Y,E)$.

Tanto cuando E es un espacio vectorial topológico como cuando E es simplemente un espacio topológico, usaremos denominaciones más sencillas:

DEFINICIÓN 3.7. *Sean X y E espacios topológicos:*

(1) *Diremos que X y Y* **son t_E-equivalentes** *si $C_p(X,E)$ es homeomorfo a $C_p(Y,E)$.*

(2) *Si E es un espacio vectorial topológico,* **diremos que X y Y son l_E-equivalentes** *si $C_p(X,E)$ es linealmente isomorfo (es decir, isomorfos como espacios vectoriales topológicos) a $C_p(Y,E)$.*

(3) *En el caso en que $E=\mathbb{R}$, se suele omitir el subíndice E y hablar simplemente de* **espacios t-equivalentes o l-equivalentes.**

NOTACIONES. Si X y Y son espacios topológicos, entonces:

(1) La proposición X y Y son t_E-equivalentes se representará así: $X \overset{t_E}{\sim} Y$.

(2) La proposición X y Y son l_E-equivalentes se representará así: $X \overset{l_E}{\sim} Y$.

EJEMPLOS 3.8. (1) La compacidad es l-invariante, mas no t-invariante:

$$C_p(\mathbb{I}) \cong C_p(\mathbb{R}),$$

como demostraron Gul'ko y Khmyleva en [**37**].

(2) La σ-compacidad es t-invariante (Okunev).

(3) La propiedad de Lindelöf es l-invariante (Veličko).

(4) La clase *Sil* [4] es también t-invariante (demostrado por Okunev en [**53**]).

En las siguientes tres proposiciones supondremos que $\mathcal{C}$ es una categoría cuyos objetos son las estructuras algebraico-topológicas de cierto tipo y en la que, para cualquier familia $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $\mathcal{C}$-objetos, el producto topológico $\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ es también un objeto de $\mathcal{C}$. Son de este tipo las categorías de espacios topológicos ($\mathcal{T}op$), de grupos topológicos ($\mathcal{G}rp\mathcal{T}op$)[5] y de espacios vectoriales topológicos ($\mathcal{EVT}$).[6] Para cada familia $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ de espacios topológicos, denotaremos por $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ a la suma topológica libre de los espacios X_α. Las demostraciones de las primeras dos de las tres proposiciones mencionadas, pueden consultarse en [**62**].

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean X un espacio topológico y, para cada $\alpha\in\Lambda$, Y_α un $\mathcal{C}$-objeto. Si $Y=\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ es el $\mathcal{C}$-producto de la familia $\{Y_\alpha\}$, entonces $C_p(X,Y)$ es $\mathcal{C}$-isomorfo a $\prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(X,Y_\alpha)$.*

PROPOSICIÓN 3.10. *Sean $X=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, la suma topológica de los espacios X_α, y Y un $\mathcal{C}$-objeto. Entonces $C_p(X,Y)$ es $\mathcal{C}$-isomorfo a $\prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(X_\alpha,Y)$.*

PROPOSICIÓN 3.11. *Si E es un $\mathcal{C}$-objeto y, para cada $\alpha\in\Lambda$, X_α y Y_α también lo son, entonces $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ son $C_p(-,E)$-equivalentes si para cada $\alpha\in\Lambda$, X_α y Y_α son $C_p(-,E)$-equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\beta\in\Lambda$, sean $h_\beta : C_p(X_\beta,E)\longrightarrow C_p(Y_\beta,E)$ un $\mathcal{C}$-isomorfismo y $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(X_\alpha,E)\longrightarrow C_p(X_\beta,E)$ y $q_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(Y_\alpha,E)\longrightarrow C_p(Y_\beta,E)$ la β-ésimas proyecciones. Sea

$$h : \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(X_\alpha,E)\longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(Y_\alpha,E)$$

el único $\mathcal{C}$-morfismo tal que para toda $\beta\in\Lambda$, el diagrama siguiente conmuta:

[4] Manuel Ibarra llamó en [45] clase *Sil* a la clase de los Σ-espacios Lindelöf. Dicho trabajo es una buena introducción al estudio de esta clase de espacios.

[5] Ver la sección 1.4 de [63]

[6] Ver la sección 7 del capítulo 2 de [44]

$$\begin{tikzcd} \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(X_\alpha, E) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_\beta"'] & \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(Y_\alpha, E) \arrow[d, "q_\beta"] \\ C_p(X_\beta, E) \arrow[r, "h_\beta"'] & C_p(Y_\beta, E) \end{tikzcd}$$

Como cada h_β es C-isomorfismo, h también lo es.
Por la proposición 3.10, existen C-isomorfismos $l_1 : C_p(X,E) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(X_\alpha, E)$ y $l_2 : C_p(Y,E) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} C_p(Y_\alpha, E)$, así que $l_2^{-} \circ h \circ l_1 : C_p(X,E) \longrightarrow C_p(Y,E)$ es C-isomorfismo. □

DEFINICIÓN 3.12. *Si X es un espacio topológico, $A \subseteq X$, C es una de las categorías EVT, $GrpTop$, y E es un C-objeto, denotaremos por $C_{p,A}(X,E)$ al subespacio (subobjeto) de $C_p(X,E)$ que consta de todas las funciones tales que $f \restriction A \equiv 0$. Si $A = \{a\}$, $C_{p,A}(X,E)$ se representará sencillamente por $C_{p,a}(X,E)$.*

PROPOSICIÓN 3.13. *Si X y Y son espacios topológicos, $A \subseteq X$, C es una de las categorías EVT, $GrpTop$, y E es un C-objeto, entonces $C_{p,A}(X,E) \times C_p(Y,E)$ es C-isomorfo a $C_{p,A}(X \oplus Y, E)$.*

DEMOSTRACIÓN. La función $G : C_p(X,E) \times C_p(Y,E) \longrightarrow C_p(X \oplus Y, E)$ tal que $G(f,g) \restriction X = f$ y $G(f,g) \restriction Y = g$, es C-isomorfismo. Ahora bien, si $(f,g) \in C_{p,A}(X,E) \times C_p(Y,E)$, entonces, para toda $a \in A$, $G(f,g)(a) = G(f,g) \restriction X(a) = f(a) = 0$, así que $G(f,g) \in C_{p,A}(X \oplus Y, E)$. Por otro lado, si $h \in C_{p,A}(X \oplus Y, E)$ entonces $h \restriction X(a) = h(a) = 0$, para cada $a \in A$, por lo que $l = (h \restriction X, h \restriction Y) \in C_{p,A}(X,E) \times C_p(Y,E)$ y $G(l) = h$. En pocas palabras, $G(C_{p,A}(X,E) \times C_p(Y,E)) = C_{p,A}(X \oplus Y, E)$. □

DEFINICIÓN 3.14. *Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto cerrado no vacío de X, entonces X/A será el espacio cociente obtenido de X identificando A en un sólo punto al que denotaremos por ∞.*

Note que si $p : X \longrightarrow X/A$ es la función cociente canónica, p es cerrada.

PROPOSICIÓN 3.15. *Si $C \in \{EVT, GrpTop\}$, E es un C-objeto, X es cualquier espacio y A es un subconjunto no vacío y cerrado de X, entonces $C_{p,A}(X,E)$ es C-isomorfo a $C_{p,\infty}(X/A, E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $p : X \longrightarrow X/A$ es cociente y para cada $f \in C_{p,A}(X,E)$, las fibras de p están contenidas en las fibras de f, por el lema 2.12(2), existe una función continua $\bar{f} : X/A \longrightarrow E$ tal que $\bar{f} \circ p = f$. Además, para cada $f \in C_{p,A}(X,E)$, $\bar{f}(\infty) = \bar{f}(p(a)) = f(a) = 0$, donde a es algún elemento de A. Se tiene así una función $H : C_{p,A}(X,E) \longrightarrow C_{p,\infty}(X/A, E)$ tal que, para toda $f \in C_{p,A}(X,E)$, $H(f) = \bar{f}$.
Ahora, sea p^* el mapeo dual de p (o sea, el funtor $C_p(-,E)$ aplicado a p). Como p es suprayectivo, 2.11(5) implica que p^* es encaje. Si $f \in C_{p,\infty}(X/A, E)$ y $a \in A$, $p^*(f)(a) = f \circ p(a) = f(p(a)) = f(\infty) = 0$. Por consiguiente, restringiendo p^* a $C_{p,\infty}(X/A, E)$, obtenemos $p\prime : C_{p,\infty}(X/A, E) \longrightarrow C_{p,A}(X,E)$, que también es encaje. Además, para cada $f \in C_{p,A}(X,E)$, $p\prime \circ H(f) = p\prime(\bar{f}) = \bar{f} \circ p = f$. Por eso,

$p' \circ H = 1_{C_{p,A}(X,E)}$. Así, p' tiene inversa derecha y esto implica que es suprayectiva y, con ello, homeomorfismo. Como p^* es C-morfismo, p' también, lo que nos permite concluir que es C-isomorfismo. □

2. E-extensores

Una aproximación especialmente adecuada en el estudio de $C_p(-, E)$-equivalencias, está basado en el concepto de extensor:

DEFINICIÓN 3.16. *Sean X y E espacios toplógicos y $Y \subseteq X$.*

(1) **Un E-extensor continuo de Y a X** *es una función continua*
$$\varphi : C_p(Y, E) \longrightarrow C_p(X, E)$$
tal que para toda $f \in C_p(Y, E)$, $\varphi(f)|_Y = f$.

(2) *Si C es una categoría de estructuras algebraico-topológicas y E es un objeto de C,* **un $C(-, E)$-extensor de Y a X** *es un C-morfismo $\varphi : C_p(Y, E) \longrightarrow C_p(X, E)$ tal que para toda $f \in C_p(Y, E)$, $\varphi(f)|_Y = f$.*

(3) *Si C es una categoría de estructuras algebraico-topológicas y E es un C-objeto, diremos que Y* **está $C(-, E)$-encajado en** *X, $Y \subset_{C(-,E)} X$, si existe un $C(-, E)$-extensor de Y a X.*

(4) *Y* **está t_E-encajado en** *X (resp.,* **l_E-encajado en** *X) si $Y \subset_{C(-,E)} X$, donde C es la categoría Top (resp., la categoría EVT). En este caso se escribirá sencillamente $Y \subset_{t_E} X$ (resp., $Y \subset_{l_E} X$).*

(5) *Si $E = \mathbb{R}$, diremos que Y* **está t-encajado (resp., l-encajado) en** *X, si está t_E-encajado (resp., l_E-encajado) en X.*

Notemos que un $Top(-, E)$-extensor de Y a X es sencillamente un E-extensor continuo de Y a X (ver 2.10 (1)). Por eso, Y está t_E-encajado en X si y sólo si existe un extensor continuo de Y a X.

EJEMPLO 3.17. Sean X y Y espacios topológicos y $r : X \longrightarrow Y$ una retracción.

(i) Si E es un espacio topológico, entonces Y está t_E-encajado en X, ya que $r^* : C_p(Y, E) \longrightarrow C_p(X, E)$ es una E-extensor continuo de Y a X.

(ii) Si E es una estructura algebraico-topológica y C es la categoría cuyos objetos son las estructuras algebraico-topológicas del mismo tipo que E, Y está $C(-, E)$-encajado en X, pues r^* es C-morfismo y para cada $f \in C_p(Y, E)$, $r^*|_Y = f$.

DEFINICIÓN 3.18 (Van Douwen ([**66**])). *Un espacio X es* **retractificable** *si todo subespacio cerrado no vacío de X es un retracto de X.*

EJEMPLOS 3.19. (1) Todos los espacios compactos cero-dimensionales y linealmente ordenados son retractificables ([**66**]).

(2) Por 3.17, todo subespacio cerrado no vacío de un espacio retractificable es $C(-, E)$-encajado en él, donde C es Top o una categoría de estructuras algebraico-topológicas, y E es un C-objeto, así que una generalización del concepto de retractificable es el de $C(-, E)$-extendial:

DEFINICIÓN 3.20. *Si C es la categoría de estructuras algebraico-topológicas de cierto tipo y E es un C-objeto, un espacio X se llama:*

(1) **t_E-extendial** *(resp.,* **l_E-extendial***) si todo subespacio cerrado de X está t_E-encajado (resp., l_E-encajado) en él.*

(2) t-**extendial** *(resp.,* l-**extendial***) si está* $t_{\mathbb{R}}$*-extendial (resp.,* $l_{\mathbb{R}}$*-extendial).*
(3) $C(-,E)$-**extendial** *si todo subespacio cerrado de* X *está* $C(-,E)$*-encajado en* X.

EJEMPLO 3.21. Todos los espacios metrizables son extendiales (véase por ejemplo el teorema 2.3.1 de [**16**]), mientras que $[0,1]$ no es retractificable (ver [**24**]).

PROPOSICIÓN 3.22. *Sean* $(E,+)$ *un grupo topológico abeliano,* X *un espacio cualquiera,* $A \subseteq X$ *y* $Z = C_{p,A}(X,E) \times C_p(A,E)$.

(1) *Si* A *está* t_E*-encajado en* X*, entonces* $C_p(X,E) \cong Z$.
(2) *Si* $(E,+)$ *es un espacio vectorial topológico y* A *está* l_E*-encajado, entonces* $C_p(X,E)$ *es linealmente isomorfo a* Z.

DEMOSTRACIÓN. [de (1)] Como A está t_E-encajado en X, existe un extensor continuo $\Phi : C_p(A,E) \longrightarrow C_p(X,E)$. En particular, para toda $f \in C_p(A,E)$, $\Phi(f) \in C_p(X,E)$ es tal que $\Phi(f)|_A = f$, es decir, A está E-encajado en X, así que el mapeo restricción [7] $r_A : C_p(X,E) \longrightarrow C_p(A,E)$ es suprayectivo. Además $r_A \circ \Phi = 1_{C_p(A,E)}$. Sea

$$l = 1_{C_p(X,E)} - \Phi \circ r_A : C_p(X,E) \longrightarrow C_p(X,E).$$

Entonces l es continua y para toda $f \in C_p(X,E)$, $l(f) \in C_{p,A}(X,E)$, ya que si $a \in A$, $l(f)(a) = f(a) - \Phi \circ r_A(f)(a) = f(a) - \Phi(f|_A)(a) = f(a) - \Phi(f|_A)|_A(a) = f(a) - f|_A(a) = 0$.
Sea $\xi = \triangle\{l, r_A\} : C_p(X,E) \longrightarrow C_{p,A}(X,E) \times C_p(A,E)$; es decir, ξ es la única función continua tal que, para toda $f \in C_p(X,E)$, $\xi(f) = (l(f), r_A(f))$.
Si $i : C_{p,A}(X,E) \hookrightarrow C_p(X,E)$ es la inclusión, también es continua la composición:

$$\psi \overset{\mathrm{def}}{=} C_{p,A}(X,E) \times C_p(A,E) \xrightarrow{i\times\Phi} C_p(X,E) \times C_p(X,E) \xrightarrow{+} C_p(X,E).$$

Esta función es tal que, para toda $(f,g) \in C_{p,A}(X,E) \times C_p(A,E)$,

$$\psi(f,g) = + \circ i \times \Phi(f,g) = +(f, \Phi(g)) = f + \Phi(g).$$

Ahora bien, para cada $f \in C_p(X,E)$, $\psi \circ \xi(f) = \psi(l(f), r_A(f)) = l(f) + \Phi(r_A(f)) = (1_{C_p(X,E)} - \Phi \circ r_A)(f) + \Phi(r_A(f)) = f - \Phi \circ r_A(f) + \Phi \circ r_A(f) = f$, es decir, $\psi \circ \xi = 1_{C_p(X,E)}$.
Por otro lado, si $(f,g) \in C_{p,A}(X,E) \times C_p(A,E)$, $\xi \circ \psi(f,g) = \xi(f + \Phi(g)) = (l(f + \Phi(g)),\ r_X(f + \Phi(g))) = (f + \Phi(g) - \Phi \circ r_X(f + \Phi(g)),\ f|_A + \Phi(g)|_A) =$

$$(f + \Phi(g) - \Phi(f|_A + \Phi(g)|_A),\ f|_A + g) \overset{\text{pues } f|_A = 0}{\stackrel{\downarrow}{=}} (f + \Phi(g) - \Phi(g),\ g) = (f,g).$$

Entonces $\xi \circ \psi = 1_{C_{p,A} \times C_p(A,E)}$.
De este modo concluimos que ξ es un homeomorfismo.

La demostración de (2) es exactamente la misma, pero observando que si A es t_E-encajado en X, el extensor Φ es lineal y continuo, lo cual implica que también lo son l, ξ y ψ, y la conclusión será que ξ es un homeomorfismo lineal. □

Aplicando 3.22 y 3.15, obtenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 3.23. *Sean* $(E,+)$ *un grupo topológico abeliano,* X *un espacio topológico y* A *un subespacio no vacío y cerrado en* X

[7] Ver definición 2.28

(1) *Si A está t_E-encajado en X, $C_p(X,E) \cong C_{p,\infty}(X/A,E) \times C_p(A,E)$.*
(2) *Si $(E,+)$ es un espacio vectorial topológico y A está l_E-encajado en X, $C_p(X,E)$ es linealmente homeomorfo a $C_{p,\infty}(X/A,E) \times C_p(A,E)$.*

Demostraremos que todo espacio metrizable y fuertemente cero-dimensional, (en particular todo espacio metrizable, separable y cero-dimensional[8]) es t_2-extendial, pero antes daremos dos definiciones y recordaremos algunos resultados:

DEFINICIÓN 3.24. *Sea Y un espacio de Hausdorff.*

(1) *Si $f : Y \longrightarrow \mathbb{Q}$ es continua,* **el soporte de** f *es el conjunto* $sop(f) = cl_Y\{y \in Y : f(y) \neq 0\}$.
(2) *Una familia $\{k_\alpha : Y \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1] : \alpha \in \Lambda\}$ de funciones continuas es* **una partición racional de la unidad sobre** Y, *si:*
   (i) *Los soportes de las k_α forman una cubierta cerrada localmente finita de Y.*
   (ii) $\sum_{\alpha\in\Lambda} k_\alpha(y) = 1$ *para toda $y \in Y$.*[9]
(3) *Si $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ es una cubierta abierta de Y, decimos que una partición racional de la unidad sobre Y, $\{k_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$,* **está subordinada a** $\mathcal{U}$ *si para toda $\beta \in \mathcal{B}$, $sop(k_\beta) \subseteq U_\beta$.*

DEFINICIÓN 3.25. *Un refinamiento $\{B_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ de la cubierta $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de un espacio X* **es preciso** *si $\mathcal{B} = \Lambda$ y, para cada $\alpha \in \Lambda$, $B_\alpha \subseteq A_\alpha$.*

El siguiente teorema está demostrado como teorema III, 1.4 de **[22]**:

TEOREMA 3.26. *Si la cubierta $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de Y tiene un refinamiento localmente finito $\{B_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$, entonces tiene un refinamiento preciso localmente finito $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Además, si cada B_β es un abierto, se puede escoger cada C_α abierto.*

TEOREMA 3.27. *Sea Y un espacio paracompacto fuertemente cero-dimensional. Entonces, para cada cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de Y, hay una partición racional de la unidad sobre Y que está subordinada a $\mathcal{U}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ un refinamiento abierto preciso y localmente finito de $\mathcal{U}$. Como Y es normal, por el teorema VII, 6.1 de **[22]**, [10] existe una cubierta $\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de Y tal que para toda $\alpha \in \Lambda$, $cl_Y V_\alpha \subseteq U'_\alpha$ y $V_\alpha \neq \emptyset$ si $U'_\alpha \neq \emptyset$. Como Y es normal y fuertemente cero-dimensional, para cada $\alpha \in \Lambda$ existe un cerrabierto W_α de Y tal que

$$cl_Y V_\alpha \subseteq W_\alpha \subseteq U'_\alpha. \qquad (*)$$

Claramente $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es un refinamiento abierto preciso y localmente finito de $\mathcal{U}$.
Para toda $\alpha \in \Lambda$, sea $g_\alpha : Y \longrightarrow \mathbf{2}$ una función continua tal que $g_\alpha|_{W_\alpha} = 1$ y $g_\alpha|_{Y\setminus W_\alpha} = 0$. Entonces, para toda $\alpha \in \Lambda$, g_α es continua en Y y $sop(g_\alpha) = cl_Y\{y \in$

[8] Si X es metrizable, es paracompacto. Si además es separable, es de Lindelöf, y todo cero dimensional de Lindelöf es fuertemente cero-dimensional.

[9] Esta suma está bien definida pues cada $y \in Y$ está en el soporte de a lo más un número finito de índices k_α.

[10] Tal teorema afirma que son equivalentes el que Y sea un espacio normal con el hecho de que, para toda cubierta abierta punto-finita (y en particular localmente finita), $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de Y, existe una cubierta abierta $\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de Y tal que, para cada $\alpha \in \Lambda$, $cl_Y V_\alpha \subseteq U_\alpha$ y $V_\alpha \neq \emptyset$ si $U_\alpha \neq \emptyset$.

$Y : g_\alpha(y) \neq 0\} = W_\alpha \subseteq U_\alpha$.
Para cada $y \in Y$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $y \in W_\alpha$, así que $g_\alpha(y) = 1$ y existe a lo más un número finito de α's tales que $y \in W_\alpha$. Por lo tanto la función $h : Y \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que para cualquier $y \in Y$, $h(y) = \sum_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha(y)$, está bien definida, nunca toma el valor cero y es continua, pues si $y \in Y$, existe $V \in \mathcal{V}_Y(y)$ tal que $|\{\alpha \in \Lambda : V \cap W_\alpha \neq \emptyset\}| = n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Si ponemos $\{\alpha \in \Lambda : V \cap W_\alpha \neq \emptyset\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, entonces $h|_V = (g_{\alpha_1} + \cdots + g_{\alpha_n})|_V$, y por lo tanto $h|_V$ es continua. En particular h es continua en y.
Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $k_\alpha : Y \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que para toda $y \in Y$ $k_\alpha(y) = \frac{g_\alpha(y)}{h(y)}$. La función k_α está bien definida, es continua y, si $y \notin W_\alpha$, $k_\alpha = 0$, mientras que si $y \in W_\alpha$, $k_\alpha = \frac{1}{h(y)} \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Así que $sop(k_\alpha) = W_\alpha$ y por lo tanto $\{sop(k_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta cerrada localmente finita de Y que es refinamiento de $\mathcal{U}$. Además, para toda $y \in Y$,

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} k_\alpha(y) = \frac{\sum_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha(y)}{\sum_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha(y)} = 1.$$

$\square$

TEOREMA 3.28. *Si X es metrizable y fuertemente cero-dimensional, entonces X es l_2-extendial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio metrizable y fuertemente cero-dimensional. Por 4.1.13 de **[24]**, X es normal. Sea A un subconjunto cerrado en X. Probaremos primero que existe una función continua

$$\Phi : C_p(A, 2) \longrightarrow C_p(X, \mathbb{Q})$$

tal que para cada $f \in C_p(A, 2)$, $\Phi(f) \restriction A = f$.

Para cada $x \in X \setminus A$, sea B_x la bola con centro en x y radio $\frac{1}{4}d(x, A)$, donde d es una métrica en X compatible con su topología. La familia $\mathcal{A} = \{B_x : x \in X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus A$, el cual es paracompacto[11] y fuertemente cero-dimensional.

Sean $\mathcal{U}$ un refinamiento localmente finito de $\mathcal{A}$ y $\{\lambda_U : U \in \mathcal{A}\}$ una partición racional de la unidad sobre $X \setminus A$, subordinada a $\mathcal{U}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, sean $x_U \in U$ y $a_U \in A$ tales que $d(x_U, a_U) < 2d(x_U, A)$.
Dada una función cualquiera $f \in C(A, 2)$, definimos $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A \\ \sum_{U\in\mathcal{U}} \lambda_U(x) f(a_U) & si\ x \notin A. \end{cases}$$

Como para cada $x \in X \setminus A$ hay sólo un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ en los que x está, $\sum_{U\in\mathcal{U}} \lambda_U(x) f(a_U)$ está bien definida porque solamente para esas U, $\lambda_U(x) f(a_U)$ puede no ser cero (si $x \notin U \Longrightarrow x \notin sop(\lambda_U) \Longrightarrow \lambda_U(x) = 0$).
Veamos que $\tilde{f}$ es continua en x, para toda $x \in X$.
Sea $x \in X$.

[11] Todo espacio métrico es paracompacto (IX, 5.3 de [22])

(i) Si $x \in X \setminus A$, existe una vecindad abierta W de x en $X \setminus A$ que intersecta solamente a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $U_1, \ldots, U_n$. Por lo tanto

$$\tilde{f} \restriction W = f(a_{U_1})\lambda_{U_1} + f(a_{U_2})\lambda_{U_2} + \cdots + f(a_{U_n})\lambda_{U_n}$$

que es continua. Como W es abierto en X, $\tilde{f}$ es continua en x.

Para demostrar que $\tilde{f}$ es continua en todo punto x de A, probemos la siguiente

Afirmación: Si $a \in A$ y $V \in \mathcal{V}_X^0(a)$, existe $W \in \mathcal{V}_X(a)$ tal que, para toda $U \in \mathcal{U}$, $U \cap W \neq \emptyset \Longrightarrow U \subseteq V$.

Demostración de la afirmación: Sean $a \in A$, $V \in \mathcal{V}_X^0(a)$, $\varepsilon = d(a, X \setminus V)$ y $W = B(a, \frac{\varepsilon}{2})$. Para $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap W \neq \emptyset$, tomamos $z \in U \cap W$. Como $U \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es refinamiento de $\mathcal{A}$, existe $x \in X \setminus A$ tal que $U \subseteq B_x$. Sea $y \in U$; entonces se tiene

$$d(x,a) \leq d(x,z) + d(z,a) < \frac{1}{4}d(x,A) + d(z,a) < \frac{1}{2}d(x,a) + d(z,a).$$

Por consiguiente, $\frac{1}{2}d(x,a) < d(z,a)$; así que

$$d(y,a) \leq d(y,z) + d(z,a) \leq diam B_x + d(z,a) < \frac{1}{2}d(x,A) + d(z,a) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}d(x,a) + d(z,a) < 2d(z,a) < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon = d(a, X \setminus V)$, $y \notin X \setminus V$, es decir, $y \in V$. Por lo tanto $U \subseteq V$. Aquí concluye la prueba de nuestra afirmación.

Continuemos ahora con la demostración de que $\tilde{f}$ es continua en todo punto de A.

(ii) Sean $x \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $\tilde{f} \restriction A = f$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_A(x,\delta)) \subseteq B_{\mathbb{Q}}(f(x), \varepsilon)$. Por la afirmación de arriba, existe $W \in \mathcal{V}_X(x)$ tal que si $U \in \mathcal{U}$ y $U \cap W \neq \emptyset$, $U \subseteq B_X(x, \frac{\delta}{3})$.
Sea $W' = W \cap B_X(x,\delta)$. Probaremos que $\tilde{f}(W') \subseteq B_{\mathbb{Q}}(f(x), \varepsilon)$.
(a) Si $y \in (X \setminus A) \cap W'$, existen $U_1, \ldots, U_n$ en $\mathcal{U}$ tales que, para toda $U \in \mathcal{U}$, $(y \in U \Longleftrightarrow U \in \{U_1, \ldots, U_n\})$ y $\tilde{f}(y) = \lambda_{U_1}(y)f(a_{U_1}) + \cdots + \lambda_{U_n}(y)f(a_{U_n})$. Además, como para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, $U_j \cap W \neq \emptyset$, se tiene que $U_j \subseteq B_X(x, \frac{\delta}{3})$. Así que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x_{U_j} \in B_X(x, \frac{\delta}{3})$. Por ende, $d(x, a_{U_j}) \leq d(x, x_{U_j}) + d(x_{U_j}, a_{U_j}) \leq d(x, x_{U_j}) + 2d(x_{U_j}, A) \leq 3d(x, x_{U_j}) < \delta$. Por lo tanto, $a_{U_j} \in B_A(x,\delta)$, así que $f(a_{U_j}) \in B_{\mathbb{Q}}(f(x), \varepsilon)$. Por lo tanto, $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_{U_j}(y)f(a_{U_j})| = |\sum_{j=1}^n \lambda_{U_j}(y)f(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_{U_j}(y)f(a_{U_j})| = |\sum_{j=1}^n \lambda_{U_j}(f(x) - f(a_{U_j}))| \leq \sum_{j=1}^n \lambda_{U_j}(y)|f(x) - f(a_{U_j})| < (\sum_{j=1}^n \lambda_{U_j})\varepsilon = \varepsilon$.
Por consiguiente, $\tilde{f}(y) \in B_{\mathbb{Q}}(f(x), \varepsilon)$.
(b) Sea ahora $y \in A \cap W'$. Entonces $y \in B_X(x,\delta) \cap A = B_A(x,\delta)$. Por lo tanto, $f(y) \in B_{\mathbb{Q}}(f(x), \varepsilon)$.
Por (a) y (b) se concluye que $\tilde{f}(W') \subseteq B_{\mathbb{Q}}(f(x), \varepsilon)$ y con ello que $\tilde{f}$ es continua en x.

Por (i) y (ii), $\tilde{f}$ es continua en X.

A continuación, llamemos

$$\Phi : C_p(A, \mathbf{2}) \longrightarrow C_p(X, \mathbb{Q})$$

a la función tal que para toda $f \in C_p(A, \mathbf{2})$, $\Phi(f) = \tilde{f}$. Entonces $\Phi(f) \restriction A = \tilde{f} \restriction A = f$, para toda $f \in C_p(A, \mathbf{2})$. Probaremos en seguida que Φ es continua. Sea $f \in C_p(A, \mathbf{2})$ y sea $W = \langle \Phi(f); x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n; \varepsilon \rangle$ una vecindad canónica de $\tilde{f}$ en $C_p(X, \mathbb{Q})$, acerca de la cual podemos suponer que $x_1, \ldots, x_l$ son elementos de A, mientras que $x_{l+1}, \ldots, x_n$ están en $X \setminus A$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n-l\}$, sea $\mathcal{U}_j = \{U \in \mathcal{U} : x_{l+j} \in U\}$. Como cada $\mathcal{U}_j$ es finito, también lo es $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{n-l}$. Pongamos $\mathcal{U}^* = \{U_1, \ldots, U_m\}$ y sea $V = \langle f; x_1, \ldots, x_l; a_{U_1}, \ldots, a_{U_m}; \varepsilon \rangle$. Si $g \in V$, entonces para toda $j \in \{1, \ldots, l\}$, $|\tilde{f}(x_j) - \tilde{g}(x_j)| = |f(x_j) - g(x_j)| < \varepsilon$ y, para toda $j \in \{1, \ldots, n-l\}$,

$$|\tilde{f}(x_{l+j}) - \tilde{g}(x_{l+j})| = |\sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U(x_{l+j}) f(a_U) - \sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U(x_{l+j}) g(a_U)| =$$

$$= |\sum_{U \in \mathcal{U}^*} \lambda_U(x_{l+j}) f(a_U) - \sum_{U \in \mathcal{U}^*} \lambda_U(x_{l+j}) g(a_U)| =$$

$$= |\sum_{U \in \mathcal{U}^*} \lambda_U(x_{l+j})(f(a_U) - g(a_U))| \leq \sum_{U \in \mathcal{U}^*} \lambda_U(x_{l+j}) |(f(a_U) - g(a_U))| < \varepsilon$$

Sean $r_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{2}$ y $r_2 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ las retracciones definidas en los ejemplos (1) y (3) de 2.34, respectivamente. Entonces $r' = r_1 \circ r_2 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{2}$ es una retracción, así que por el ejemplo (2) de 2.34, $r'_* : C_p(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_p(X, \mathbf{2})$ es una retracción.[12] Por consiguiente,

$$r'_* \circ \Phi : C_p(A, \mathbf{2}) \longrightarrow C_p(X, \mathbf{2})$$

es una función continua y tal que

$$\forall g \in C_p(A, \mathbf{2}) : \ (r'_* \circ \Phi)(g) \restriction A = r'_*(\Phi(g)) \restriction A = (r' \circ \Phi(g)) \restriction A =$$

$$= r' \circ (\Phi(g) \restriction A) = r' \circ g = r'_*(g) = g.$$

En otras palabras, $r'_* \circ \Phi$ es un extensor continuo de A en X. En conclusión, A está t_2-encajado en X. □

COROLARIO 3.29. *Si X es un espacio métrico y fuertemente cero-dimensional y A es cerrado en X, entonces:*

$$C_p(X, \mathbf{2}) \cong C_{p,A}(X, \mathbf{2}) \times C_p(A, \mathbf{2}).$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del teorema anterior y de la proposición 3.22. □

COROLARIO 3.30. *Si X es un espacio métrico y fuertemente cero-dimensional, y A es cerrado en X, entonces:*

$$C_p(X, \mathbf{2}) \cong C_{p,\infty}(X/A, \mathbf{2}) \times C_p(A, \mathbf{2}).$$

DEMOSTRACIÓN. Es corolario del teorema 3.28 y del corolario 3.23. □

[12] Recordar que r'_* es tal que, para cada $g \in C_p(X, \mathbb{Q})$, $r'_*(g) = r' \circ g$.

En lo que resta del capítulo, aplicaremos los resultados obtenidos en esta sección para estudiar algunas cuestiones de los espacios $C_p(X, \mathbf{2})$, y más generalmente $C_p(X, \mathbf{n})$, donde $\mathbf{n}$ es el espacio discreto de n elementos (y $n \in \mathbb{N}$), principalmente cuando X es un espacio de ordinales, así que recordemos algunos interesantes hechos acerca de estos espacios en la sección que sigue.

3. Espacios de ordinales

En esta sección enunciaremos muchas definiciones y proposiciones que no probaremos, pero que puede el lector encontrar principalmente en el capítulo 2 de [**16**].

DEFINICIÓN 3.31. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$.*

(1) **El conjunto derivado de A en X, A^d,** *es el conjunto de puntos de acumulación de A en X.*
(2) *Para todo ordinal α, definimos $X^{(\alpha)}$,* **el α-ésimo derivado de X**, *por inducción transfinita:*
   - $X^0 = X$.
   - *Si α es sucesor, digamos $\alpha = \beta + 1$, entonces $X^{(\alpha)} = (X^{(\beta)})^d$.*
   - *Si α es límite, $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$.*

OBSERVACIÓN 3.32. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$.

(1) No necesariamente $A^d \subseteq A$.
(2) $A^d \subseteq cl_X A$ y A^d es cerrado en X.
(3) $X^{(1)}$ es el conjunto derivado de X en X.
(4) $X^{(1)}$ se obtiene de X desechando todos sus puntos aislados.
(5) $A^{(1)}$ es el conjunto derivado de A en A y por lo tanto $A^{(1)} \subseteq A$. Como no necesariamente $A^d \subseteq A$, se colige que no necesariamente $A^{(1)} = A^d$. De hecho:
(6) $A^{(1)} = A^d \cap A$.

PROPOSICIÓN 3.33 ([**16**], 2.2.2 y 2.2.3). *Sean X un espacio topológico. y α y β ordinales tales que $\alpha \leq \beta$. Entonces:*

(1) *$X^{(\alpha)}$ es cerrado en X.*
(2) $X^{(\beta)} \subseteq X^{(\alpha)}$.
(3) $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})^{(1)}$.

PROPOSICIÓN 3.34 ([**16**], 2.2.4). *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces, para cada ordinal α,*

(1) $A^{(0)} \subseteq X^{(\alpha)}$.
(2) *Si A es abierto, entonces $A^{(\alpha)} = A \cap X^{(\alpha)}$.*

Es pertinente en este momento recordar una notación que introdujimos en la página 30: si α es un ordinal mayor que 1, denotaremos al espacio $[1, \alpha)$ por $[\alpha)$ y al espacio $[1, \alpha]$ por $[\alpha]$.

PROPOSICIÓN 3.35 ([**16**], 2.2.5). *Sean α un ordinal y $X = [\omega^\alpha]$. Entonces $X^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha\}$.*

Es útil recordar, antes de dar la siguiente definición, que si X es un espacio topológico y A es un subespacio de X, entonces A es denso en sí mismo (en X) si $A \subseteq A^d$.[13]

DEFINICIÓN 3.36. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es* **disperso (en X)** *si A no contiene subconjuntos no vacíos densos en sí mismos (en X), es decir, si todo subconjunto no vacío de A contiene puntos aislados de X.*

TEOREMA 3.37 (Cantor-Bendixson). *Sea X un espacio topológico. Entonces existe un ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. Para esta α, $X^{(\alpha)}$ es cerrado, denso en sí mismo y $S = X \setminus X^{(\alpha)}$ es disperso. En particular X es disperso si y sólo si $X^{(\alpha)} = \emptyset$. Además, si X es segundo numerable, S es numerable.*

DEFINICIÓN 3.38. *Si X es un espacio disperso,* **la altura de dispersión de X**, *$\kappa(X)$ es el mínimo ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = \emptyset$.*

OBSERVACIÓN 3.39.
(1) Si X es compacto y disperso, entonces $\kappa(X)$ es un sucesor, digamos $\alpha + 1$, y $X^{(\alpha)}$ contiene un número finito de puntos.
(2) Si X es segundo numerable y disperso, entonces $\kappa(X)$ es numerable.
(3) $\kappa([\omega^\alpha]) = \alpha + 1$ (por 3.35).
(4) Todo espacio de Hausdorff compacto y numerable es disperso. En efecto, si X es de Hausdorff compacto y numerable, es segundo numerable [14] y regular, con lo que es metrizable [15]. Como X es numerable, es también cero-dimensional (por ser de Lindelöf). Supongamos que X no es disperso. Entonces, por el teorema de Cantor-Bendixson, existe un ordinal α tal que $X^{(\alpha)}$ es cerrado, denso en sí mismo y no vacío. Por lo tanto $X^{(\alpha)}$ es un espacio compacto, métrico, cero-dimensional, separable y sin puntos aislados. Entonces $X^{(\alpha)} \cong \mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de Cantor.[16] Por lo tanto $X^{(\alpha)}$ es no numerable y con ello, X también es no numerable, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, X debe ser disperso.

TEOREMA 3.40 (Sierpin'ski-Mazurkiewicz). *Sea X un espacio de Hausdorff, compacto, numerable. Si $\kappa(X) = \alpha + 1$ y $X^{(\alpha)}$ contiene m puntos ($m < \omega$), entonces $X \cong [\omega^\alpha \cdot m]$.* [17]

OBSERVACIÓN 3.41. Si $X = [\omega^{\alpha \cdot m}]$, con α numerable y $m \in \mathbb{N}$, entonces $\kappa(X) = \alpha + 1$ y $X^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha \cdot 1, \ldots, \omega^\alpha \cdot m\}$ (ver 3.25).

LEMA 3.42 ([**16**], 2.2.9). *Sean X un espacio topológico, α un ordinal tal que $A = X^{(\alpha)} \neq \emptyset$, $Y = X/A$ el espacio cociente obtenido de X identificando A en un sólo punto ∞, y $p : X \longrightarrow X/A$ la función cociente. Entonces:*
(1) *Para toda $\beta \leq \alpha$, $p(X^{(\beta)}) = Y^{(\beta)}$, y*
(2) *$Y^{(\alpha)} = \{\infty\}$.*

---

[13] O, equivalentemente, si $A = A^{(1)}$ (por 3.32(6)). Esto significa que A no contiene puntos aislados

[14] [**24**], teorema 3.1.21 o [**43**], teorema 7.2

[15] [**24**], teorema 4.2.9

[16] [**24**], problema 6.2.A(c).

[17] Para la prueba de este teorema, Baars y de Groot nos mandan a S. Mazurkiewicz and W. Sierpiński: *Contributions à la topologie des ensembles dénumerables*. Fund. Math. 1 (1920) 17–27.

COROLARIO 3.43 (2.2.10 de [**16**]). *Sea X un espacio compacto, numerable y de Hausdorff, y sea $A = X^{(\alpha)}$ para alguna $\alpha < \kappa(X)$. Entonces $X/A \cong [\omega^\alpha]$. En particular, si $X = [\omega^\alpha \cdot n]$ para cierta $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \omega_1$ (y con ello $A = X^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha \cdot 1, \ldots, \omega^\alpha \cdot n\}$), entonces $X/A \cong [\omega^\alpha]$.*

OBSERVACIÓN 3.44. Si $X = [\omega^\alpha \cdot n]$ y $\alpha \geq \omega_1$, no necesariamente $X/A \cong [\omega^\alpha]$, con $A = X^{(\alpha)}$. Por ejemplo, sea $X = [\omega^{\omega_1} \cdot 2] = [\omega_1 \cdot 2]$ (aquí se está usando que $\omega^{\omega_1} = \omega_1$). Sea $A = X^{(\alpha)} = \{\omega_1, \omega_1 \cdot 2\}$.
$(X/A) \setminus \{\infty\}$ contiene dos subconjuntos ajenos y cerrados, $E = p([\omega_1))$ y $F = p([\omega_1 + 1, \omega_1 \cdot 2))$, cuyas cerraduras en $X \setminus A$, $\bar{E}$ y $\bar{F}$, tienen intersecciones no vacías. En cambio, en $[\omega_1]$, para todo par E y F de cerrados ajenos en $[\omega_1)$, $cl_{[\omega_1]}E$ y $cl_{[\omega_1]}F$ son ajenos (ver ejercicio 3.1.27 de [**24**]).
Entonces X/A y $[\omega_1]$ no son homeomorfos.

PROPOSICIÓN 3.45. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < \omega$, $X = \omega^\alpha \cdot n$ y $A = X^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha \cdot 1, \ldots, \omega^\alpha \cdot n\}$. Entonces A es retracto de X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $r : X \longrightarrow A$ tal que para toda $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $r|_{[\omega^\alpha \cdot k+1,\, \omega^\alpha \cdot (k+1)]} = \underline{\omega^\alpha \cdot (k+1)}$ (o sea la constante con valor $\omega^\alpha \cdot (k+1)$). Como $X = \bigoplus_{k=0}^{n-1} [\omega^\alpha \cdot k + 1,\ \omega^\alpha \cdot (k+1)]$, r es continua, y claramente $r \restriction A = 1_A$. □

COROLARIO 3.46. *Si n, α, X y A son como en 3.45, si $\mathcal{C}$ es $\mathcal{T}op$ o una categoría de estructuras algebraico-topológicas y E es un $\mathcal{C}$-objeto, A está $\mathcal{C}$-encajado en X.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de 3.45 y de (ii) del ejemplo 3.17. □

COROLARIO 3.47. *Sean E un espacio vectorial topológico, y n, α, X y A como en 3.45. Entonces $C_p(X, E)$ es linealmente homeomorfo a $C_{p,A}(X, E) \times C_p(A, E)$ y a $C_{p,\infty}(X/A, E) \times C_p(A, E)$.*

PROPOSICIÓN 3.48. *Sean $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq 1$ ordinales y E un espacio vectorial topológico. Entonces los siguientes espacios son linealmente homeomorfos:*

$$C_p([\alpha + \beta], E), \quad C_p([\alpha], E) \times C_p([\beta], E), \quad C_p([\beta], E) \times C_p([\alpha], E) \quad y$$
$$C_p([\beta + \alpha], E).$$

También $C_{p,\{\alpha+\beta\}}([\alpha + \beta], E)$ es linealmente homeomorfo a

$$C_p([\alpha], E) \times C_{p,\{\beta\}}([\beta], E).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : [\alpha + \beta] \longrightarrow [\alpha] \oplus [\beta]$ tal que, para cada $\gamma \in [\alpha + \beta]$,

$$h(\gamma) = \begin{cases} (\gamma, 0) & si\ \gamma \leq \alpha \\ (\gamma - \alpha, 1) & si\ \gamma > \alpha. \end{cases}$$[18]

Esta función tiene una inversa $h^{-} : [\alpha] \oplus [\beta] \longrightarrow [\alpha + \beta]$ definida, para cada $\gamma \in [\alpha] \oplus [\beta]$, como

$$h^{-}(\gamma, i) = \begin{cases} \gamma & si\ \gamma \in [\alpha]\ e\ i = 0 \\ \alpha + \gamma & si\ \gamma \in [\beta]\ e\ i = 1. \end{cases}$$

[18] Recordar que para $\gamma < \alpha$, hay un único ordinal η tal que $\gamma = \alpha + \eta$. Dicho ordinal se denota por $\gamma - \alpha$ (ver [**16**]). También recordemos que los elementos en $[\alpha] \oplus [\beta]$ son parejas: $[\alpha] \oplus [\beta] = ([\alpha] \times \{0\}) \cup ([\beta] \times \{1\})$

Ambas funciones son continuas, lo que hace de h un homeomorfismo. Por eso $[\alpha+\beta] \overset{LE}{\cong} [\alpha]\oplus[\beta]$ y $C_{p,\{\alpha+\beta\}}([\alpha+\beta],E)$ es linealmente homeomorfo a $C_{p,\{\beta\}}([\alpha]\oplus[\beta],E)$.

Ahora bien, por la proposición 3.10, $C_p([\alpha]\oplus[\beta],E)$ es linealmente homeomorfo a $C_p([\alpha],E)\times C_p([\beta],E)$. Así se demuestra la primera afirmación.

Por la proposición 3.13, $C_{p,\{\beta\}}([\beta],\ E)\times C_p([\alpha],\ E)$ es linealmente homeomorfo a $C_{p,\{\beta\}}([\alpha]\oplus[\beta],\ E)$ que es linealmente homeomorfo a $C_{p,\{\alpha+\beta\}}([\alpha+\beta],\ E)$, como ya dijimos. Esto prueba la segunda afirmación. □

NOTACIONES. (1) Dados dos espacios vectoriales topológicos X y Y, la proposición *"X es linealmente homeomorfo a Y"* se denotará por $X\sim Y$.

(2) Si $m\in\mathbb{N}$, el espacio discreto de m elementos se representará por $\mathbf{m}$.

PROPOSICIÓN 3.49. *Sean $\alpha\geq\omega$ un ordinal, y $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Entonces:*

(1) $C_p([\alpha],\mathbf{n})\cong C_{p,\alpha}([\alpha],\mathbf{n})$

(2) *Si n es primo,* $C_p([\alpha],\mathbf{n})\sim C_{p,\alpha}([\alpha],\mathbf{n})$[19].

DEMOSTRACIÓN. Sean $n\in\mathbb{N}$ y $\Phi : C_p([\alpha],\mathbf{n})\longrightarrow C_{p,\alpha}([\alpha],\mathbf{n})$ tal que, para toda $f\in C_p([\alpha],\mathbf{n})$, $\Phi(f):[\alpha]\longrightarrow\mathbf{n}$ es tal que para toda $\beta\in[\alpha]$,

$$\Phi(f)(\beta)=\begin{cases} f(\beta-1)-f(\alpha)^{20} & si\ 1<\beta\leq\alpha\\ f(\alpha) & si\ \beta=1.\end{cases}$$

Como $\beta-1=\beta$ para toda $\beta\geq\omega$, $\Phi(f)(\alpha)=0$ y, para terminar de ver que Φ está bien definida, hay que mostrar que, para cada $f\in C_p([\alpha],\mathbf{n})$, $\Phi(f)$ es continua. Para lograrlo, tomemos $f\in C_p([\alpha],\mathbf{n})$, y supongamos que $f(\alpha)=m$. Dado que f es continua en α, existe $\beta<\alpha$ tal que $f((\beta,\alpha])\subseteq\{m\}$. Sea $\gamma>\beta+1$. Si $\beta<\omega$, $\gamma-1>\beta$, lo que implica que $\Phi(f)(\gamma)=f(\gamma-1)-f(\alpha)=m-m=0$. Si $\beta\geq\omega$, $\beta-1=\beta$ y $\gamma-1=\gamma>\beta$, así que de nuevo $\Phi(f)(\gamma)=f(\gamma-1)-f(\alpha)=m-m=0$. En cualquier caso se tiene que $\Phi(f)((\beta+1,\alpha])\subseteq\{0\}$.
Para demostrar que Φ es continua, sean $f\in C_p([\alpha],\mathbf{n})$ y

$$W=\langle\Phi(f);\gamma_1,\ldots,\gamma_k;\{r_1\},\ldots,\{r_k\}\rangle$$

una vecindad básica canónica de $\Phi(f)$ en $C_p([\alpha],\mathbf{n})$, donde podemos suponer que $\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_k$, e incluso que $\gamma_1=1$. Definamos:

$$V=\langle f;\gamma_2-1;\ldots,\gamma_k-1,\alpha\,;\{f(\gamma_2-1)\},\ldots,\{f(\gamma_k-1)\},\{f(\alpha)\}\rangle.$$

Si $g\in V$, entonces $g(\alpha)=f(\alpha)$ y $g(\gamma_j-1)=f(\gamma_j-1)$, para toda $j\in\{2,\ldots,k\}$. Por consiguiente, para cada una de estas j, $\Phi(g)(\gamma_j)=g(\gamma_j-1)-g(\alpha)=f(\gamma_j-1)-f(\alpha)=\Phi(f)(\gamma_j)=r_j$ y $\Phi(g)(\gamma_1)=g(\alpha)=f(\alpha)=\Phi(f)(\gamma_1)=r_1$. Por lo tanto, $\Phi(g)\in W$. Con esto se prueba que $\Phi(V)\subseteq W$ y con ello, que Φ es continua. Es fácil comprobar que Φ es lineal.
Definamos ahora

$$\psi : C_{p,\alpha}([\alpha],\mathbf{n})\longrightarrow \mathbf{C_p}([\alpha],\mathbf{n}),$$

[19] Si n es primo, $\mathbb{Z}_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$, con las operaciones módulo n, es un campo. En particular puede considerarse como espacio vectorial topológico (con la topología discreta) sobre sí mismo, es decir, es el espacio topológico $\mathbf{n}$ considerado como EVT.

[20] Esta operación es módulo $\mathbf{n}$

mediante la regla: $\psi(f)(\beta) = f(1+\beta) + f(1)$, para toda $\beta \in [\alpha]$. Como en el caso anterior, no es difícil probar que ψ es una función lineal y continua.
Sea $f \in C_{p,\alpha}([\alpha], \mathbf{n})$. Notemos que $1 + (\beta - 1) = \beta$. Así, si $\beta \neq 1$, se tiene:

$$\Phi \circ \psi(f)(\beta) = \psi(f)(\beta - 1) - \psi(f)(\alpha) = f(1 + (\beta - 1)) + f(1) - f(1+\alpha) - f(1) =$$
$$= f(\beta) - f(\alpha) = f(\beta).$$

Además:

$$\Phi \circ \psi(f)(1) = \psi(f)(\alpha) = f(1+\alpha) + f(1) = f(1).$$

Por consiguiente, $\Phi \circ \psi(f) = f$ y como esto es para cualquier f, se tiene que

$$\Phi \circ \psi = 1_{C_{p,\alpha}([\alpha],\mathbf{n})}.$$

Ahora tomemos $f \in C_p([\alpha], \mathbf{n})$ y $\beta \in [\alpha]$. Como $1 + (\beta - 1) = \beta$,

$$(\psi \circ \Phi)(f)(\beta) = \Phi(f)(1+\beta) + \Phi(f)(1) = f((1+\beta) - 1) - f(\alpha) + f(\alpha) = f(\beta),$$

lo cual prueba que

$$\psi \circ \Phi = 1_{C_p([\alpha],\mathbf{n})}.$$

□

Para aplicar estos resultados, es menester dar el concepto no muy conocido de componente prima. En esta parte también seguiremos a Baars y de Groot en [**16**]. Allí se hallan las pruebas de los resultados cuyas demostraciones no incluimos aquí.

Definición 3.50. *Un ordinal ρ es una* **componente prima** *si satisface la siguiente condición: Si para algunos ordinales β y γ, $\rho = \beta + \gamma$, entonces $\gamma = 0$ o $\gamma = \rho$.*

Ejemplos 3.51. 0 y 1 son las únicas componentes primas finitas. Los ordinales 3, $\omega + 1$ y $\omega \cdot 2$ no son componentes primas, pero ω y ω_1 sí son componentes primas.

Proposición 3.52 (Teorema 2.1.15 de [**16**]). *Un ordinal ρ es una componente prima si y sólo si, para todo ordinal $\beta < \rho$, $\rho = \beta + \rho$.*

Proposición 3.53 (Teorema 2..1.16 de [**16**]). *Para todo ordinal $\alpha > 0$ existe un ordinal β y una componente prima $\rho > 0$ tal que $\alpha = \beta + \rho$, donde $\beta = 0$ o $\beta \geq \rho$.*

Proposición 3.54 (Lema 2.1.17 de [**16**]). *Si P es un conjunto de componentes primas, entonces $supP$ es una componente prima.*

Corolario 3.55. *Sea α un ordinal. Entonces, si*

$$\alpha' = sup\{\rho \leq \alpha : \rho \text{ es componente prima}\},$$

α' es la mayor componente prima que es menor o igual que α.

Proposición 3.56. *Si $\alpha > 0$, es un ordinal, $\alpha\omega$ es la menor componente prima más grande que α.*

Corolario 3.57. *Si α es un ordinal y α' es como en el corolario 3.55, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $\gamma < \alpha'$ tales que $\alpha = \alpha' \cdot n + \gamma$.*

Teorema 3.58 (2.1.21 de [**16**]). *Un ordinal $\rho > 0$ es una componente prima si y sólo si hay un ordinal μ tal que $\rho = \omega^{\mu}$.*

TEOREMA 3.59. *(22.1.23 de* **[16]***) Todo ordinal inicial es una componente prima.*

COROLARIO 3.60. *Si ω^τ es inicial, entonces τ es una componente prima.*

LEMA 3.61. *Si $\omega \leq \alpha < \omega_1$ es una componente prima y n, $m \in \mathbb{N}$, entonces $[\alpha \cdot n] \stackrel{t_m}{\approx} [\alpha]$, y si m es primo, $[\alpha \cdot n] \stackrel{l_m}{\approx} [\alpha]$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 3.58, hay un ordinal μ tal que $\alpha = \omega^\mu$. Así, si $X = [\alpha \cdot n]$ y $A = \{\omega^\mu \cdot 1, \ldots, \omega^\mu \cdot n\}$, se tiene, por 3.47, que

$$C_p([\alpha \cdot n], \mathbf{m}) = C_p([\omega^\mu \cdot n], \mathbf{m}) \cong C_{p,\infty}(X/A, \mathbf{m}) \times C_p(A, \mathbf{m}).$$

Como $X/A \cong [\omega^\mu]$, así que:

$$C_p([\alpha \cdot n], \mathbf{m}) \cong C_{p,\omega^\mu}([\omega^\mu], \mathbf{m}) \times C_p(\omega^\mu \cdot 1, \ldots, \omega^\mu \cdot n, \mathbf{m}).$$

Pero por 3.13,

$$C_{p,\omega^\mu}([\omega^\mu], \mathbf{m}) \times C_p(\omega^\mu \cdot 1, \ldots, \omega^\mu \cdot n, \mathbf{m}) \cong C_{p,\omega^\mu}([0, \omega^\mu] \oplus \{\omega^\mu, \ldots, \omega^\mu \cdot n\}, \mathbf{m}) \cong$$
$$\cong C_{p,\omega^\mu}([0, \omega^\mu], \mathbf{m}) \cong C_p([\alpha], \mathbf{m}).$$

□

COROLARIO 3.62. *Sea $\omega \leq \alpha < \omega_1$ un ordinal y m un natural. Entonces*
(1) *$C_p([\alpha], \mathbf{m}) \cong C_p([\alpha'], \mathbf{m})$, donde α' es la componente prima de α.*
(2) *Si m es primo, $C_p([\alpha], \mathbf{m})$ es linealmente homeomorfo a $C_p([\alpha'], \mathbf{m})$.*

Por último, demostraremos un lema que nos será de gran utilidad en la siguiente sección. Para enunciarlo necesitamos una notación:

NOTACIÓN. Sean α un ordinal cualquiera, $\mathcal{C} \in \{EVT,\ GrpTop,\ RingTop\}$ y E un $\mathcal{C}$-objeto. Denotaremos por G_α^E al siguiente subespacio de $C_p([\alpha],\ E)$:

$G_\alpha^E = \{f \in C_p([\alpha],\ E) :$ existe $\lambda < \alpha$ tal que para cada $\lambda < \beta < \alpha,\ f(\beta) = 0\}$.[21]

LEMA 3.63. *Sean α un ordinal cualquiera y n un natural. Entonces:*
(1) *$G_\alpha^{\mathbf{n}} \cong C_{p,\alpha}([\alpha], \mathbf{n})$.*
(2) *Si n es primo, $G_\alpha^{\mathbf{n}}$ es un subespacio vectorial topológico de $C_p([\alpha], \mathbf{n})$, y es linealmente homeomorfo a $C_{p,\alpha}([\alpha], \mathbf{n})$.*

DEMOSTRACIÓN. (1): Sea $\varphi : G_\alpha^{\mathbf{n}} \longrightarrow C_p([\alpha], \mathbf{n})$, dada de la siguiente manera: Si $f \in G_\alpha^{\mathbf{n}}$, $\varphi(f) : [\alpha] \longrightarrow \mathbf{n}$ es la función tal que:

$$\varphi(f)(\lambda) = \begin{cases} f(0) & si\ \lambda = \alpha \\ f(\lambda) + f(0).^{22} & si\ \lambda < \alpha \end{cases}$$

Como siempre, varios pasos nos llevarán a la conclusión de que φ es un homeomorfismo:

(a) *Para cada $f \in G_\alpha^{\mathbf{n}}$, $\varphi(f)$ es continua.* En efecto, $\varphi(f)|_{(\alpha)} = f + \underline{f(0)}$, y $\varphi(f)$ es continua en α porque, en vista de que existe $\lambda < \alpha$ tal que para cada $\lambda < \beta < \alpha$, $f(\beta) = 0$, se tiene que $\varphi(f)((\lambda,\ \alpha]) \subseteq \{f(0)\} \subseteq \{\varphi(f)(\alpha)\}$.

[21] Es decir, G_α^E es el conjunto de las funciones en $C_p([\alpha],\ E)$ que se hacen cero en un segmento final de $[\alpha)$

[22] Recordar: la suma es módulo n.

(b) *φ es continua:* Sea $f \in G_\alpha^{\mathbf{n}}$ y sea $W = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \alpha; n_1, \ldots, n_m, f(0)\rangle$ una vecindad canónica de $\varphi(f)$ en $C_p([\alpha], \mathbf{n})$. Si llamamos U al básico canónico $\langle 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m;\ f(0), n_1 - f(0), \ldots, n_m - f(0)\rangle$ en $G_\alpha^{\mathbf{n}}$, entonces $f \in U$ y $\varphi(U) \subseteq W$, como es fácil comprobar.

(c) *φ es abierta:* Si $U = \langle \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m;\ n_0, \ldots, n_m\rangle$ es un básico canónico en $C_p([0,\alpha), \mathbf{n})$ y $f \in U \cap G_0^{\mathbf{n}}$, se puede suponer que $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m$, y:
- Si $\lambda_0 \neq 0$, sea $W = \langle \lambda_0, \ldots, \lambda_m, \alpha\,; n_0 + f(0), \ldots, n_m + f(0), f(0)\rangle$
- Si $\lambda_0 = 0$, sea $W = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \alpha\,; n_1 + f(0), \ldots, n_m + f(0), f(0)\rangle$.

En ambos casos $\varphi(f) \in W$ y así, $\varphi(U \cap G_\alpha^{\mathbf{n}}) \subseteq W$. Para demostrar la igualdad de estos dos conjuntos, tomemos un elemento cualquiera g de W. Como g es continua en α y $g(\alpha) = f(0)$, existe $\lambda_0 < \alpha$ tal que para toda $\lambda_0 < \eta < \alpha$, $g(\eta) = f(0)$, así que si definimos $h : [0,\ \alpha) \longrightarrow \mathbf{n}$ tal que

$$h(\lambda) = \begin{cases} g(\alpha) & si\ \lambda = 0 \\ g(\lambda) - g(\alpha) & si\ \lambda > 0 \end{cases}$$

se tendrá que $h(\lambda) = 0$ para toda $\lambda > \lambda_0$ y por consiguiente, que $h \in G_\alpha^{\mathbf{n}}$. Además, para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$ (o $j \in \{1, \ldots, m\}$, según sea el caso), $h(\lambda_j) = g(\lambda_j) - g(\alpha) = n_j + f(0) - f(0) = n_j$, con lo que $h \in U$.
Como

$$\varphi(h)(\lambda) = \begin{cases} h(0) & si\ \lambda = \alpha \\ h(\lambda) + h(0) & si\ \lambda < \alpha \end{cases} = \begin{cases} g(\alpha) & si\ \lambda = \alpha \\ g(\lambda) & si\ \lambda < \alpha \end{cases} = g(\lambda),$$

resulta que $\varphi(h) = g$ y por lo tanto $g \in \varphi(U \cap G_\alpha^{\mathbf{n}})$. Por todo esto y tal como anunciamos antes, $\varphi(U \cap G_\alpha^{\mathbf{n}}) = W$, que es un abierto en $C_p([\alpha],\ \mathbf{n})$.

(d) *φ es suprayectiva:* Si $g \in C_p([\alpha],\ \mathbf{n})$, definiendo h como en (c), se tiene que $h \in G_\alpha^{\mathbf{n}}$ y $\varphi(h) = g$.

(e) *φ es inyectiva:* Si f_1 y f_2 son elementos distintos de $G_\alpha^{\mathbf{n}}$, entonces existe $\lambda < \alpha$ tal que $f_1(\lambda) \neq f_2(\lambda)$.
$\lambda = 0 \Longrightarrow \varphi(f_1)(\alpha) = f_1(0) \neq f_2(0) = \varphi(f_2)(\alpha) \Longrightarrow \varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$
$\lambda \neq 0 \Longrightarrow f_1(\lambda) + f(0) \neq f_2(\lambda) + f(0) \Longrightarrow \varphi(f_1)(\lambda) \neq \varphi(f_2)(\lambda) \Longrightarrow \varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$.

(2) Si n es primo, es fácil percatarse de que $G_\alpha^{\mathbf{n}}$ es un subespacio vectorial topológico de $C_p([\alpha), \mathbf{n})$ y que φ es un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos. □

4. Aplicaciones

En esta sección aplicaremos los resultados de las anteriores secciones para analizar los siguientes problemas:

1. Dada $n \in \mathbb{N}$, con $n > 2$, ¿para qué clase de espacios X se tiene que $C_p(X, \mathbf{2}) \cong C_p(X, \mathbf{n})$?
2. ¿Para qué clase de espacios X se cumple que $C_p(X, \mathbf{2})$ es homeomorfo a su cuadrado, es decir, a $(C_p(X, \mathbf{2}))^2$?

Estos problemas no son ajenos entre sí. Por ejemplo, si un espacio X es tal que, $C_p(X, \mathbf{2}) \cong C_p(X, \mathbf{4})$, entonces $C_p(X, \mathbf{2})$ es homeomorfo a su cuadrado, ya que tendríamos que, como $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \cong \mathbf{4}$, por 3.9, $C_p(X, \mathbf{2}) \cong C_p(X, \mathbf{4}) \cong C_p(X, \mathbf{2} \times \mathbf{2}) \cong (C_p(X, \mathbf{2}))^2$.

Vamos a darles un nombre más moderno a los espacios X que cumplen la propiedad pregonada en el segundo problema:

Definición 3.64. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera.*

(1) *Se dice que X es* **débilmente t-aditivo** *(resp.* **débilmente l-aditivo***), si $X \oplus X$ es t-equivalente (resp. l-equivalente) a X. En otras palabras, si $C_p(X)$ es homeomorfo (resp. linealmente homeomorfo) a su cuadrado (ver proposición 3.10).*

(2) *Se dice que X es* **débilmente t_E-aditivo** *(resp.* **débilmente l_E-aditivo***), si $X \oplus X$ es t_E-equivalente (resp. l_E-equivalente) a X.*

Continuemos analizando los problemas planteados. En 1910, Brouwer demostró el siguiene teorema:

TEOREMA 3.65 (Teorema de Brouwer). *Todo espacio topológico denso en sí mismo, compacto, metrizable y cero-dimensional, es homeomorfo al conjunto de Cantor $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.*[23]

Como corolario de este teorema, tenemos:

COROLARIO 3.66. *Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ entonces $\mathbf{n}^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.*

OBSERVACIÓN 3.67. (1) No es difícil construir explícitamente un homeomorfismo $H^2_{\mathbf{n}}$ entre $\mathbf{n}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ de tal suerte que mande al conjunto $\{f \in \mathbf{n}^{\mathbb{N}} : \exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq m_0,\ f(m) = 0\}$ en el conjunto $\{g \in \mathbf{2}^{\mathbf{n}} : \exists l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall l \geq l_0,\ g(l) = 0\}$. Con la notación introducida antes de la proposición 3.63, lo anterior significa que $H^2_{\mathbf{n}}(G^{\mathbf{n}}_\omega) = G^2_\omega$.

(2) Ahora supongamos que X es un espacio discreto de cardinalidad $\alpha > \omega$. Entonces existe una partición de X en conjuntos numerables, es decir, una partición $\mathcal{P} = \{X_\beta : \beta < \alpha\}$ tal que:
   (i) $X = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$.
   (ii) Si $\beta_1 \neq \beta_2$, con $\beta_1 < \alpha$ y $\beta_2 < \alpha$, $X_{\beta_1} \cap X_{\beta_2} = \emptyset$.
   (iii) Para toda $\beta < \alpha$, $|X_\beta| = \aleph_0$.

Por consiguiente, $X = \bigoplus_{\beta<\alpha} X_\beta$ y, por 3.10, $C_p(X, \mathbf{n}) \cong \prod_{\beta<\alpha} C_p(X_\beta, \mathbf{n})$, para todo natural $n > 1$. Como cada X_β es numerable, por el corolario 3.66 se tiene que $C_p(X_\beta, \mathbf{n}) \cong C_p(\mathbb{N}, \mathbf{n}) \cong \mathbf{n}^{\mathbb{N}} \cong \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \cong C_p(X_\beta, \mathbf{2})$, para toda $\beta < \alpha$. Así, $C_p(X, \mathbf{n}) \cong \prod_{\beta<\alpha} C_p(X_\beta, \mathbf{n}) \cong \prod_{\beta<\alpha} C_p(X_\beta, \mathbf{2}) \cong C_p(X, \mathbf{2})$.

Resumiendo:

PROPOSICIÓN 3.68. *Para todo espacio discreto infinito X, y para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $C_p(X, \mathbf{n}) \cong C_p(X, \mathbf{2})$.*

COROLARIO 3.69. *Todo espacio discreto infinito X es débilmente t_2-aditivo.*

PROPOSICIÓN 3.70. *Si $\omega \leq \alpha < \omega_1$ es un ordinal límite y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces $C_p([\alpha), \mathbf{2}) \cong C_p([\alpha), \mathbf{n})$ con un homeomorfismo que manda G^2_α sobre $G^{\mathbf{n}}_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean α y n como en las hipótesis. Probaremos, por inducción transfinita, que existe un homeomorfismo $H : C_p([\alpha), \mathbf{2}) :\longrightarrow C_p([\alpha), \mathbf{n})$ tal que :
(a) $H(G^2_\alpha) = G^{\mathbf{n}}_\alpha$
(b) $H(0) = 0$ (es decir, a la función constante 0 de $[\alpha)$ en $\mathbf{2}$ le asocia la función constante 0 de $[\alpha)$ en $\mathbf{n}$).

Por la observación 3.67(1), $C_p([\omega), \mathbf{2}) \cong C_p([\omega), \mathbf{n})$ con un homeomorfismo H que satisface las correspondientes propiedades (a) y (b).

Ahora, la hipótesis de inducción transfinita es:

[23] En la página 285 de [31] se da una demostración de este teorema.

Para cada ordinal β tal que $\omega \leq \beta < \alpha$, existe un homeomorfismo

$$H_\beta : C_p([\beta), \mathbf{2}) \longrightarrow C_p([\beta), \mathbf{n})$$

que cumple (a) y (b), es decir:

(a) *$H_\beta(f)$ es eventualmene $0 \iff f$ es eventualmente 0.*
(b) *$H_\beta(\mathit{0}) = \mathit{0}$.*

Como α es ordinal límite y $cf(\alpha) \leq \alpha < \omega_1$, entonces $cf(\alpha) = \omega$ porque $cf(\alpha)$ es un cardinal.[24] Por el lema 3.8.2 de [**20**], existe una sucesión $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \cdots < \alpha$ en $[\alpha)$ que converge a α en $[\alpha]$. Podemos suponer que $\alpha_1 = 1$. Entonces $[\alpha) = \{1\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\ \alpha_{j+1}]$ y todos estos uniendos son abiertos en $[\alpha)$, ajenos entre sí. Por eso $[\alpha) = \{\alpha_1\} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\ \alpha_{j+1}]$. Si $i_0 : \{1\} \hookrightarrow [\alpha)$ y, para toda $j \in \mathbb{N}$, $i_j : (\alpha_j,\ \alpha_{j+1}]$ son las inclusiones, entonces la amalgama

$$\triangle_{k=0}^{\infty} i_k^* : C_p([\alpha), \mathbf{2}) \longrightarrow P,$$

es un homeomorfismo, donde P es el producto $C_p(\{1\}, \mathbf{2}) \times \prod_{k=1}^{\infty} C_p((\alpha_k,\ \alpha_{k+i}])$ y, para toda $k \in \mathbb{N}$, i_k^* es el correspondiente mapeo restricción (recordar definición 2.28).

Notemos que si $f \in G_\alpha^{\mathbf{2}}$, entonces existe $\lambda < \alpha$ tal que para toda $\gamma > \lambda$ (con $\gamma < \alpha$), $f(\gamma) = 0$. En particular, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $j \geq j_0$, $f((\alpha_j,\ \alpha_{j+1}]) = 0$, es decir, para toda $j \geq j_0$, $\pi_j \circ \triangle_{k=0}^{\infty} i_k^*(f) = i_j^*(f) = \mathit{0}$, donde $\pi_j : P \longrightarrow C_p((\alpha_j,\ \alpha_{j+1}], \mathbf{2})$ es la j-ésima proyección. Inversamente, si tal cosa ocurre, es decir, si todas las coordenadas de $\triangle_{k=0}^{\infty} i_k^*(f)$ son cero, excepto un número finito de ellas, entonces $f \in G_\alpha^{\mathbf{2}}$.

Para toda $j \in \mathbb{N}$, existe $\beta_j < \alpha$ y un homeomorfismo $[\beta_j) \overset{h_j}{\cong} (\alpha_j,\ \alpha_{j+1}]$. También hay un homeomorfismo $[2) \overset{h_0}{\cong} \{0,\ 1\}$ (que de hecho es la identidad).

Entonces, para cada $j < \omega$, $h_j^* : C_p((\alpha_j,\ \alpha_{j+1}], \mathbf{2}) \longrightarrow C_p([\beta_j), \mathbf{2})$ es homeomorfismo. Nuevamente observemos que $h_j^*(\mathit{0}) = \mathit{0}$ y que $\prod_{j<\omega} h_j^* : P \longrightarrow \prod_{j<\omega} C_p([\beta_j), \mathbf{2})$ es un homeomorfismo tal que si $f \in P$, entonces, para toda $j \in \mathbb{N}$, $f|_{(\alpha_j, \alpha_{j+1}]} = \mathit{0}$ si y sólo si $f|_{[\beta_j)} = \mathit{0}$.

Hemos demostrado entonces que existe un homeomorfismo:

$$L_{\mathbf{2}} : C_p([\alpha), \mathbf{2}) \longrightarrow \prod_{j<\omega} C_p([\beta_j), \mathbf{2})$$

tal que $L_{\mathbf{2}}(G_\alpha^{\mathbf{2}}) = \Sigma_{\mathbf{2}}$, donde $\Sigma_{\mathbf{2}} = \{f \in \prod_{j<\omega} C_p([\beta_j), \mathbf{2}) : \exists j_0 < \omega \text{ tal que } \forall j \geq j_0,\ f|_{[\beta_j)} = \mathit{0}\}$.

Análogamente se puede demostrar que existe un homeomorfismo

$$L_{\mathbf{n}} : C_p([\alpha), \mathbf{n}) \longrightarrow \prod_{j<\omega} C_p([\beta_j), \mathbf{n})$$

tal que $L_{\mathbf{n}}(G_\alpha^{\mathbf{n}}) = \Sigma_{\mathbf{n}}$. Sin embargo, por la hipótesis de inducción transfinita, para cada $j > \omega$, existe un homeomorfismo $H_{\beta_j} : C_p([\beta_j), \mathbf{2}) \longrightarrow C_p([\beta_j), \mathbf{n})$ que satisface las propiedades (a) y (b) del enunciado de dicha hipótesis. Por ende,

$$\prod_{j<\omega} H_{\beta_j} : \prod_{j<\omega} C_p([\beta_j), \mathbf{2}) \longrightarrow \prod_{j<\omega} C_p([\beta_j), \mathbf{n})$$

[24] Para recordar el concepto de cofinalidad de un ordinal α y resultados sencillos acerca de ordinales y cardinales, como los aquí usados, consúltense [**20**] o [**39**].

es un homeomorfismo tal que $\prod_{j<\omega} H_{\beta_j}(\Sigma_2) = \Sigma_{\mathbf{n}}$. Por consiguiente

$$H = L_{\mathbf{n}}^{\leftarrow} \circ \prod_{j<\omega} H_{\beta_j} \circ L_2 : C_p([\alpha), \mathbf{2}) \longrightarrow C_p([\alpha), \mathbf{n})$$

es un homeomorfismo que satisface (a) y (b). □

PROPOSICIÓN 3.71. *Si $\omega \leq \alpha < \omega_1$ es un ordinal y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces $C_p([\alpha], \mathbf{2}) \cong C_p([\alpha], \mathbf{n})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea α' la componente prima más grande que es menor o igual que α.[25]. α' es un ordinal límite, por lo que:

$$C_p([\alpha'], \mathbf{2}) \overset{3.63}{\cong} G^{\mathbf{2}}_{\alpha'} \overset{3.70}{\cong} G^{\mathbf{n}}_{\alpha'} \cong C_p([\alpha'], \mathbf{n}).$$

El resto se sigue de 3.62(1). □

COROLARIO 3.72. *Si $\omega \leq \alpha < \omega_1$ es un ordinal y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces $[\alpha]$ y $[\alpha)$ son débilmente t_2-aditivos.*

COROLARIO 3.73. *Si X es un espacio compacto, numerable y Hausdorff y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces $C_p(X, \mathbf{2}) \cong C_p(X, \mathbf{n})$ y en particular X es débilmente t_2-aditivo.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Sierpin'skii-Mazurkiewicz (3.40), si X es un espacio compacto numerable y Hausdorff, $X \cong [\omega^{\alpha} \cdot m]$, donde $\alpha = \kappa(X)$ [26] es numerable (3.39(2)) y $m \in \mathbb{N}$. En pocas palabras, $X \cong [\beta]$ para alguna $\omega \leq \beta < \omega_1$, y el resultado se sigue de 3.71 y de 3.72. □

DEFINICIÓN 3.74. *Un ordinal α es un σ-**ordinal**, si es cofinal con ω, es decir, si $cf(\alpha) \leq \omega$. Si además es un ordinal límite (resp. componente prima, inicial) se le llamará σ-**ordinal límite** (resp. σ-**componente prima**, σ-**inicial**).*

PROPOSICIÓN 3.75 (Lema 2.7.1 de [**16**]). *Si X es numerable, métrico, localmente compacto pero no compacto, entonces existe un σ-ordinal límite α tal que $X \cong [\alpha)$.*

COROLARIO 3.76. *Si X es numerable, métrico, localmente compacto pero no compacto y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $C_p(X, \mathbf{2})$ es homeomorfo a $C_p(X, \mathbf{n})$ y en particular, X es débilmente t_2-aditivo.*

S. P. Gul'ko probó en [**36**] que ni $[\omega_1)$ ni $[\omega_1]$ son t-aditivos. Imitando su prueba lograremos ver, en las páginas que siguen, que estos espacios tampoco son t_2-aditivos.

LEMA 3.77 ([**5**]). *Sea S un subespacio denso en el producto $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ tal que $hd(\prod_{\alpha \in B} X_\alpha) \leq \tau$, para toda $B \subseteq A$ con $|B| \leq \tau$. Entonces, para cada función continua $f : S \longrightarrow Y$, donde $\chi(Y) \leq \tau$, hay un subconjunto B de A, de cardinalidad $\leq \tau$, y una función continua $g : \pi_B(S) \longrightarrow Y$ tal que $f = g \circ p_B \restriction S$.*

[25] Recordar el corolario 3.55

[26] Recordar: $\kappa(X)$ es la altura de dispersión de X. Ver 3.38

LEMA 3.78. *Sean $E \in \mathbb{P}_\infty$, segundo numerable, $X \in R(E)$, D denso en $C_p(X,E)$, $T : D \longrightarrow C_p(Y,E)$ continua y B un subconjunto numerable de Y. Entonces existe $A \subseteq X$, numerable, tal que*

$$\forall f,\ g\ \in D : f \restriction A = g \restriction A \Longrightarrow Tf \restriction B = Tg \restriction B.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $i : B \hookrightarrow Y$ la inclusión y $r_B : C_p(Y,E) \longrightarrow C_p(B,E)$ el mapeo restricción , es decir, la función que a cada $g \in C_p(Y,E)$ le asocia el elemento $g \restriction B$ de $C_p(B,E)$. Entonces $r_B \circ T : D \longrightarrow C_p(B,E)$ es continua y para toda $g \in D$, $r_B \circ T(g) = Tg \restriction B$. D es denso en $C_p(X,E)$ que a su vez es denso en E^X, porque E es un espacio Puebla. [27].
Para cada $y \in B$, sea $p_y : E^B \longrightarrow E$ la y-ésima proyección. Como E es primero-numerable, todo punto de E es G_δ; entonces, por el lema anterior, para cada $y \in B$ existen $A_y \subseteq X$, numerable y $g_y : \pi_{A_y}(D) \longrightarrow E$, continua, donde $\pi_{A_y} : E^X \longrightarrow E^{A_y}$ es la proyección a la cara A_y-ésima de E^X, tales que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "p_y \circ r_B \circ T"] \arrow[d, "\pi_{A_y}|_D"'] & & E \\
\pi_{A_y}(D) \arrow[urr, "g_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sea $A = \bigcup_{y \in B} A_y$. A es numerable y si f y g son elementos de D, entonces $f \restriction A = g \restriction A$. Por lo tanto, para cada $y \in B$, $p_y \circ Tf \restriction B = p_y \circ (r_B \circ T)(f) = g_y \circ \pi_{A_y} \restriction D\ (f) = g_y \circ \pi_A(f) = g_y \circ \pi_A(g) = p_y \circ Tg \restriction B$. $\square$

LEMA 3.79. *Sean E un espacio Puebla de Hausdorff y segundo numerable, y X y Y espacios E-regulares. Sean también $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ familias de conjuntos numerables tales que:*

(i) *$X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ y $Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.*
(ii) *Si $\alpha < \beta$, $A_\alpha \subseteq A_\beta$ y $B_\alpha \subseteq B_\beta$.*
(iii) *Si γ es ordinal límite, $A_\gamma \in \{\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha,\ cl_X \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha\}$ y $B_\gamma \in \{\bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha,\ cl_Y \bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha\}$*

Sean C y D subespacios densos de $C_p(X,E)$ y $C_p(Y,E)$, respectivamente, y $T : C \longrightarrow D$ un homeomorfismo. Entonces el conjunto

$$L = \{\alpha \in \omega_1 \backslash \{0\} :\ \textit{para cada } f,\ g\ \in C,\ f \restriction A_\alpha = g \restriction A_\alpha \Longleftrightarrow Tf \restriction B_\alpha = Tg \restriction B_\alpha\}$$

es no numerable y cerrado en $[\omega_1)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha_1 \in \omega_1$ un ordinal arbitrario. B_{α_1} es numerable en Y, así que por el lema anterior, existe $A' \subseteq X$ tal que $|A'| \leq \aleph_0$ y, para cada par de elementos de C, f y g, $f \restriction A' = g \restriction A' \Longrightarrow Tf \restriction B_{\alpha_1} = Tg \restriction B_{\alpha_1}$. Como A' es numerable, existe $\alpha_2 \in \omega_1$ tal que $A' \subseteq A_{\alpha_2}$ y $\alpha_2 > \alpha_1$. Entonces,

$$\forall f,\ g\ \in C : f \restriction A_{\alpha_2} = g \restriction A_{\alpha_2} \Longrightarrow f \restriction A' = g \restriction A' \Longrightarrow Tf \restriction B_{\alpha_1} = Tg \restriction B_{\alpha_1}$$

[27] Por la proposición 2.23

Usando ahora $T^{\leftarrow} : D \longrightarrow C$ y el lema anterior, existe $B' \subseteq Y$ tal que $|B'| \leq \aleph_0$ y, para cualquier pareja de elementos de D, f y g, $f \restriction B' = g \restriction B' \Longrightarrow T^{\leftarrow} f \restriction A_{\alpha_2} = T^{\leftarrow} g \restriction A_{\alpha_2}$. Como existe $\alpha_3 > \alpha_2$ (con $\alpha_3 \in \omega_1$) tal que $B' \subseteq B_{\alpha_3}$, tenemos que,

$$\forall f,\ g\ \in D : f \restriction B_{\alpha_3} = g \restriction B_{\alpha_3} \Longrightarrow f \restriction B' = g \restriction B' \Longrightarrow T^{\leftarrow} f \restriction A_{\alpha_2} = T^{\leftarrow} g \restriction A_{\alpha_2}.$$

Procediendo por inducción matemática, existe una sucesión creciente $(\alpha_n)_{n<\omega}$, de ordinales en ω_1, tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$n \text{ impar} \Longrightarrow (\forall f, g\ \in C : f \restriction A_{\alpha_{n+1}} = g \restriction A_{\alpha_{n+1}} \Longrightarrow Tf \restriction B_{\alpha_n} = Tg \restriction B_{\alpha_n}).$$

$$n \text{ par} \Longrightarrow (\forall f', g'\ \in D : f' \restriction B_{\alpha_{n+1}} = g' \restriction B_{\alpha_{n+1}} \Longrightarrow T^{\leftarrow} f' \restriction A_{\alpha_n} = T^{\leftarrow} g' \restriction A_{\alpha_n}).$$

Tomemos $\alpha = sup\{\alpha_n : n < \omega\}$, que es menor que ω_1.
Sean f y g dos elementos de C, y supongamos que $f \restriction A_\alpha = g \restriction A_\alpha$. Si $\gamma < \alpha$, existe n impar tal que $\gamma < \alpha_n < \alpha$. Pero $A_\alpha \in \{\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta,\ cl_X(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)\}$, pues α es ordinal límite. Así, $A_{\alpha_{n+1}} \subseteq A_\alpha$ y $f \restriction A_{\alpha_{n+1}} = g \restriction A_{\alpha_{n+1}}$, con lo que $Tf \restriction B_{\alpha_n} = Tg \restriction B_{\alpha_n}$. Como $B_\gamma \subseteq B_{\alpha_n}$, $Tf \restriction B_\gamma = Tg \restriction B_\gamma$. Entonces $Tf \restriction \bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma = Tg \restriction \bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma$ y, por supuesto, $Tf \restriction cl_Y(\bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma) = Tg \restriction cl_Y(\bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma)$.
Procediendo análogamente se prueba que $Tf \restriction B_\alpha = Tg \restriction B_\alpha \Longrightarrow f \restriction A_\alpha = g \restriction A_\alpha$.
Por lo tanto, $\alpha \in L$. Entonces, para cada $\alpha_1 \in L$ hemos hallado $\alpha \in L$ tal que $\alpha > \alpha_1$, con lo que se tiene que L es no numerable.
Probaremos que L es cerrado en $[\omega_1)$.
Sea $\alpha \in cl_{[\omega_1)} L$

- Si $\alpha = \gamma + 1$, entonces $(\gamma, \alpha + 1) \cap [\omega_1) = \{\alpha\}$ es vecindad de α en $[\omega_1)$, por lo que $\{\alpha\} \cap L \neq \emptyset$, es decir, $\alpha \in L$.
- Si α es ordinal límite, entonces $A_\alpha \in \{\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta,\ cl_X(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)\}$. Para probar que $\alpha \in L$, sean $f,\ g \in C$ y supongamos que $f \restriction A_\alpha = g \restriction A_\alpha$.
  Si $\gamma < \alpha$ ($\gamma \geq 1$), existe $\eta \in (\gamma, \alpha + 1) \cap L$. Si $\eta = \alpha$, $\alpha \in L$. Si $\eta \neq \alpha$, entonces $\gamma \leq \eta < \alpha$, así que $A_\eta \leq A_\alpha$ y por consiguiente $f \restriction A_\eta = g \restriction A_\eta$. Como $\eta \in L$, $Tf \restriction B_\eta = Tg \restriction B_\eta$ y como $B_\gamma \subseteq B_\eta$, $Tf \restriction B_\gamma = Tg \restriction B_\gamma$.
  Por lo tanto, $\forall \gamma < \alpha : Tf \restriction B_\gamma = Tg \restriction B_\gamma$, por lo que $Tf \restriction \bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma = Tg|_{\bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma}$ y con ello, $Tf \restriction B_\alpha = Tg \restriction B_\alpha$.
  Análogamente probaríamos que $Tf \restriction B_\alpha = Tg \restriction B_\alpha \Longrightarrow T^{\leftarrow}Tf \restriction A_\alpha = T^{\leftarrow}Tg \restriction A_\alpha \Longrightarrow f \restriction A_\alpha = g \restriction A_\alpha$. Esto implicaría finalmente que $\alpha \in L$

Hemos probado entonces que $cl_{[\omega_1)} L \subseteq L$, es decir, que L es cerrado en $[\omega_1)$. □

La demostración del siguiente lema es muy parecida (puede verse en **[36]**).

LEMA 3.80. *Sean X y Y espacios topológicos, $T : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ familias de subespacios cerrados y separables de X y Y, respectivamente, y tales que:*

- *Si $\alpha \leq \beta$, entonces $A_\alpha \subseteq A_\beta$ y $B_\alpha \subseteq B_\beta$.*
- *Si α es ordinal límite, $A_\alpha \in \{\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma,\ cl_X(\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma)\}$ y $B_\alpha \in \{\bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma,\ cl_Y(\bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma)\}$.*
- *$X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ y $Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.*

Entonces $M = \{\alpha \in \omega_1 : T(A_\alpha) = B_\alpha\}$ es no numerable y es cerrado en ω_1.

Antes de demostrar que $[\omega_1)$ no es débilmente l_2-aditivo, recordemos algunas definiciones y hechos básicos acerca de espacios vectoriales topológicos.

OBSERVACIÓN 3.81. Si X es un espacio vectorial sobre un campo K y M es un subespacio vectorial de X, entonces $Z = X/M$ es el espacio vectorial sobre K cuyo conjunto subyacente es el conjunto de clases de equivalencia de elementos de X bajo la relación:

$$x \sim y \iff x - y \in M$$

y cuyas operaciones son las funciones:

$$+ : X/M \times X/M \longrightarrow X/M \quad y \quad p_e : K \times X/M \longrightarrow X/M$$
$$(\bar{x},\ \bar{y}) \longmapsto \overline{x+y} \qquad\qquad (k,\ \bar{x}) \longmapsto \overline{kx}$$

Con estas operaciones la función $g : X \longrightarrow X/M$ que a cada $x \in X$ le asocia su clase de equivalencia, $\bar{x}$, es lineal y suprayectiva. Si además Y es otro espacio vectorial sobre K, $f : X \longrightarrow Y$ es lineal y $M \subseteq Kerf$, entonces las fibras de g están contenidas en las de f y la única función $h : Z \longrightarrow Y$ tal que $h \circ g = f$, resulta ser lineal. Si $M = Kerf$, h es inyectiva, y si f es epimorfismo, h es epimorfismo. Entonces si $M = Kerf$ y f es sobre, h es isomorfismo.

Si ahora X es un espacio vectorial topológico sobre un campo K (que sea también un espacio toplógico), M es un subespacio lineal de X y damos al espacio vectorial cociente X/M la topología cociente, entonces la función $g : X \longrightarrow X/M$ definida arriba, no solamente es una identificación (o sea una función cociente) y un epimorfismo, sino que es una función abierta. Ello se debe a que si A es abierto en X, también lo es $A+x$, para cada $x \in X$, pues las traslaciones son homeomorfismos. Con ello $A + M = \bigcup_{x \in M} A + x$ es también abierto en X. Como g es una función cociente y $g^{\leftarrow}(g(A)) = A + M$, $g(A)$ es abierto en X/M. Ahora es fácil probar que las operaciones mencionadas antes, $+$ y p_e, son continuas.

Recordemos que si X es un espacio vectorial sobre un campo K, X^* suele denotar al espacio vectorial dual o conjugado, cuyos elementos son las funciones lineales de X en K.

El lema siguiente se demuestra en [**19**]:

LEMA 3.82. *Sean X un espacio vectorial sobre un campo K, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto linealmente independiente en X^* y $G = \{x \in X : u_i(x) = 0$ para toda $i \in [n]\}$. Entonces G es subespacio vectorial de X, X/G es isomorfo a K^n y, en particular, $|X/G| = |K|^n$*

COROLARIO 3.83. *Sean X y Y dos espacios vectoriales sobre un campo K, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ conjuntos linealmente independientes en X^* y Y^*, respectivamente, y $G = \{x \in X :$ para cada $i \in [n]$, $u_i(x) = 0\}$ y $H = \{y \in Y :$ para cada $j \in [m]$, $v_j(y) = 0\}$. Entonces, si $n \neq m$, para cualquier isomorfismo lineal $T : X \longrightarrow Y$ se cumple que $T(G) \neq H$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo de espacios vectoriales y supongamos que $T(G) = H$.
Sean $g_1 : X \longrightarrow X/G$ y $g_2 : Y \longrightarrow Y/H$ los epimorfismos lineales canónicos. Entonces $g_2 \circ T : X \longrightarrow Y/H$ es epimorfismo y $G = Ker(g_2 \circ T)$, ya que

$$x \in Ker(g_2 \circ T) \iff g_2 \circ T(x) = 0 \iff T(x) \in H \iff x \in G.$$

Así que por las observaciones hechas en 3.81, existe un isomorfismo $h : X/G \longrightarrow Y/H$ tal que $h \circ g_1 = g_2 \circ T$.
Por otro lado, el lema 3.82 nos informa que X/G es isomorfo a K^n y Y/H es isomorfo

a K^m, que son espacios vectoriales de dimensiones n y m sobre K, respectivamente. Como h es isomorfismo, K^n es isomorfo a K^m y por consiguiente, $n = m$. □

OBSERVACIÓN 3.84.

Sean X y Y dos espacios vectoriales topológicos sobre un campo K, G un subespacio vectorial topológico de X, H un subespacio vectorial topológico de Y, $T : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo tal que $T(G) = H$. Con estas hipótesis, hagámonos la siguiente pregunta:

Si a los espacios vectoriales cociente, X/G y Y/H, los dotamos con las respectivas topologías cociente, ¿será cierto que X/G es homeomorfo a Y/H?

Si suponemos que T es además lineal, es decir, que es isomorfismo topológico, la respuesta a esta pregunta es sí, como muestra la prueba de 3.83. Gul'ko demostró en [**36**] que si los espacios vectoriales topológicos X y Y son localmente convexos sobre el campo $\mathbb{R}$, la respuesta es también afirmativa. Usando esto él probó que $[\omega_1)$ y $[\omega_1]$ no son t-aditivos.
Si la respuesta a la pregunta planteada arriba fuera afirmativa cuando el campo sobre el que están definidos los espacios vectoriales topológicos X y Y es $\mathbf{2}$, podríamos demostrar que:

Si X y Y son espacios vectoriales topológicos sobre $\mathbf{2}$, si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son conjuntos linealmente independientes de funcionales continuas en X^* y Y^*, respectivamente, y si G y H son como en 3.83, entonces, si $n \neq m$, para cualquier homeomorfismo $T : X \longrightarrow Y$ se tiene que $T(G) \neq H$. (Este sería el análogo del lema 4 de [**36**])

Con este resultado a la mano ya podríamos probar que ni $[\omega_1)$ ni $[\omega_1]$ son débilmente l_2-aditivos. Queda pues abierto este problema y mientras probemos que dichos espacios no son débilmente l_2- aditivos:

TEOREMA 3.85. *Si $E = C_p([\omega_1), \mathbf{2})$ ó $E = C_p([\omega_1], \mathbf{2})$, entonces no hay dos potencias finitas de E, E^n y E^m, con $n \neq m$, que sean linealmente homeomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. I) Sea $E = C_p([\omega_1), \mathbf{2})$.
Para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$[n] \times [\omega_1) = \bigoplus_{j \in [n]} \{j\} \times [\omega_1) \text{ y } \forall j \in [n] : \ \{j\} \times [\omega_1) \cong [\omega_1).$$

Entonces $C_p([n] \times [\omega_1), \mathbf{2}) = C_p(\bigoplus_{j \in [n]} \{j\} \times [\omega_1), \mathbf{2}) \cong \prod_{j \in [n]} C_p([\omega_1), \mathbf{2}) = E^n$.
Sean $n \neq m$ *y supongamos que existe un homeomorfismo lineal* $T : E^n \longrightarrow E^m$. $(\star)$
Para toda $\alpha < \omega_1$, sean $B_\alpha = [m] \times [1, \alpha)$ y $A_\alpha = [n] \times [1, \alpha)$. Entonces:

(i) $[n] \times [\omega_1) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$ y $[m] \times [\omega_1) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} B_\alpha$.
ii) $\alpha \leq \beta \Longrightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta$ y $B_\alpha \subseteq B_\beta$.
(iii) Si γ es ordinal límite, $[\gamma) = \bigcup_{\alpha < \gamma} [\alpha)$ y por consiguiente, $A_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha$, pues si $(j, \eta) \in A_\gamma$, existe $\xi < \gamma$ tal que $\eta < \xi$ (ya que γ es límite). Así pues, $(j, \eta) \in [n] \times [\xi) = A_\xi \subseteq A_\gamma$.
(iv) Análogamente, si γ es límite, se tiene que $B_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} B_\alpha$.

Por el lema 3.79, el conjunto

$$L = \{\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} : \forall f, \ g \ \in C_p([n] \times [\omega_1), \mathbf{2}), \ f|_{A_\alpha} = g|_{A_\alpha} \Longleftrightarrow Tf|_{B_\alpha} = Tg|_{B_\alpha}\}$$

es no numerable y cerrado en $[\omega_1)$.
Para cada $\alpha < \omega_1$, sea $E^n_\alpha = \{f \in E^n : \forall j \in [n] : \forall \beta \geq \alpha : f(j,\beta) = f(j,\alpha)\}$.
Mostremos que $E^n = cl_{E^n} \bigcup_{\alpha<\omega_1} E^n_\alpha$.

Sean $f \in E^n$ y $W = \langle f;\ (j_1,\alpha_1),\dots,(j_s,\alpha_s);\ \{l_1\},\dots,\{l_s\}\rangle$ una vecindad básica de f en E^n. Como $[n] \times [\omega_1)$ es cero-dimensional y podemos suponer que $(j_1,\alpha_1),\dots,(j_s,\alpha_s)$ son distintos entre sí, existen cerrabiertos en $[n] \times [\omega_1)$, $V_1,\dots,V_s$, tales que para toda $k \in [s]$, $(j_k,\ \alpha_k) \in V_k$ y $V_1,\dots,V_s$ son ajenos entre sí. Si $\alpha_0 = sup\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$ y, para cada $k \in [s]$, $U_k = V_k \cap ([n] \times [\alpha_0 + 1))$, entonces $U_1,\dots,U_s$ son cerrabiertos en $[n] \times [\omega_1)$, ajenos dos a dos y, para toda $k \in [s]$, $(j_k,\alpha_k) \in U_k$, con lo cual la función

$$g : [n] \times [\omega_1) \longrightarrow \mathbf{2}$$

tal que $\forall k \in [s]$, $g|_{U_k} = \underline{l_k}$ y $g|_{[n]\times[\omega_1)\setminus\bigcup_{k\in[s]} U_k} = 1$, es continua, $g \in W$ y, si $\beta \geq \alpha_0 + 1$, entonces $\forall j \in [n] : \forall k \in [s] : (j,\ \beta) \notin U_k$, con lo que $g(j,\ \beta) = 1 = g(j,\ \alpha_0 + 1)$. Por lo tanto $g \in E^n_{\alpha_0+1} \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} E^n_\alpha$. Por consiguiente, $W \cap [n] \times [\omega_1) \neq \emptyset$ y, como W es cualquier vecindad de f, $f \in cl_{E^n} \bigcup_{\alpha<\omega_1} E^n_\alpha$.

Además:

(a) Para toda $\alpha < \omega_1$, E^n_α es subespacio vectorial de E_n, como puede corroborarse con facilidad.
(b) Para toda $\alpha < \omega_1$, E^n_α es cerrado en E^n, ya que si $f \notin E^n_\alpha$, existen $j \in [n]$ y $\beta \geq \alpha$ tales que $f(j,\beta) \neq f(j,\alpha)$. Si $l = f(j,\beta)$, entonces $\langle f;\ (j,\beta);\ \{l\}\rangle$ es una vecindad de f en E^n, contenida en $E^n \setminus E^n_\alpha$.
(c) Si $\alpha \leq \beta$, claramente $E^n_\alpha \subseteq E^n_\beta$.
(d) Para toda $\alpha < \omega_1$, E^n_α es segundo numerable y, por ende, separable.
(e) Si γ es ordinal límite, entonces $E^n_\gamma = cl_{E^n} \bigcup_{\alpha<\gamma} E^n_\alpha$.

Huelga hacer hincapié en el hecho de que la colección $\{E^m_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ cumple con propiedades análogas a las enunciadas en $(a), (b), (c), (d)$ para la colección $\{E^n_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Por el lema 3.80, el conjunto $M = \{\alpha < \omega_1 : T(E^n_\alpha) = E^m_\alpha\}$ es no numerable y cerrado en $[\omega_1)$.
Para cada $\alpha \in L$, sea α^+ el mínimo ordinal en M mayor que α, y sean:

$$E^n(\alpha,\ \alpha^+) = \{f \in E^n_{\alpha^+} : f \restriction A_\alpha = \underline{0}\},$$

$$E^m(\alpha,\ \alpha^+) = \{f \in E^m_{\alpha^+} : f \restriction A_\alpha = \underline{0}\}.$$

Si $\alpha \in L$ y f es cualquier elemento de $E^n(\alpha,\ \alpha^+)$, es fácil ver que $T(f) \in E^m(\alpha,\ \alpha^+)$, con lo cual se tiene:

$$T(E^n(\alpha,\ \alpha^+)) \subseteq E^m(\alpha,\ \alpha^+).$$

Para demostrar la igualdad, sea $g \in E^m(\alpha,\ \alpha^+)$. Como $\alpha^+ \in M$ y $g \in E^m_{\alpha^+}$, existe $f \in E^n_{\alpha^+}$ tal que $T(f) = g$.
$Tf = g \in E^m(\alpha,\ \alpha^+) \Longrightarrow Tf \in E^m_{\alpha^+}$ y $Tf \restriction B_\alpha = \underline{0} \restriction B_\alpha = T\underline{0} \restriction B_\alpha$.
Ahora bien, $\alpha^+ \in M \Longrightarrow \alpha \in L \Longrightarrow f \restriction A_\alpha = \underline{0} \restriction A_\alpha$ y, como $f \in E^n_{\alpha^+}$, $f \in E^n(\alpha,\ \alpha^+)$, con lo que $g \in T(E^n(\alpha,\ \alpha^+))$.
Por lo tanto, $T(E^n(\alpha,\ \alpha^+)) = E^m(\alpha,\ \alpha^+)$.

Además $E^n(\alpha,\ \alpha^+)$ y $E^m(\alpha,\ \alpha^+)$ son subespacios vectoriales cerrados de $E^n_{\alpha^+}$ y de $E^m_{\alpha^+}$, respectivamente, como puede uno comprobar, y por lo tanto también son subespacios vectoriales cerrados de E^n y de E^m, respectivamente.

Fijemos $\alpha \in L$ y consideremos las funcionales $u_1, \ldots, u_n \in (E^n(\alpha, \alpha^+))^*$ y $v_1, \ldots, v_n \in (E^m(\alpha, \alpha^+))^*$, tales que, si $f \in E^n(\alpha, \alpha^+)$ y $g \in E^m(\alpha, \alpha^+)$, entonces:

$$\forall i \in [n] : u_i(f) = f(i, \alpha^+) \quad \text{y}$$
$$\forall j \in [m] : v_j(g) = g(j, \alpha^+) .$$

Es fácil ver que tanto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son conjuntos linealmente independientes en $(E^n(\alpha, \alpha^+))^*$ y en $(E^m(\alpha, \alpha^+))^*$, respectivamente.
Por lo tanto, si

$$G_\alpha = \{f \in E^n(\alpha, \alpha^+) : \forall i \in [n],\ u_i(f) = 0\} \text{ y}$$
$$H_\alpha = \{g \in E^m(\alpha, \alpha^+) : \forall j \in [m],\ v_j(g) = 0\},$$

entonces $T(G_\alpha) \neq H_\alpha$, por el corolario 3.83.
Así es que, para cada $\alpha \in L$, $T(G_\alpha) \not\subseteq H_\alpha$ ó $T^{-}(H_\alpha) \not\subseteq G_\alpha$. Podemos suponer, para fijar ideas, que existe un subconjunto no numerable, L', de L tal que, para toda $\alpha \in L'$, $T(G_\alpha) \not\subseteq H_\alpha$. Por consiguiente, para cada $\alpha \in L'$, existe $f_\alpha \in G_\alpha$ tal que $Tf_\alpha \notin H_\alpha$, es decir, para toda $\alpha \in L'$, existe $j_\alpha \in [m]$ tal que $Tf_\alpha(j_\alpha, \alpha^+) = v_{j_\alpha}(Tf_\alpha) = 1$.
Como L' es no numerable y $[m]$ es finito, existen $j_0 \in [m]$ y $L'' \subseteq L'$, no numerable, tales que, para toda $\alpha \in L''$, $Tf_\alpha(j_0, \alpha^+) = 1$. Entonces el hecho de que $\alpha \in L''$ implica:

- $(\cdot)$ que como $f_\alpha \in G_\alpha$, entonces $f_\alpha \in E^n(\alpha, \alpha^+)$ y para toda $i \in [n]$, $f_\alpha(i, \alpha^+) = 0$, lo que implica que $f_\alpha \in E^n_{\alpha^+}$, $f_\alpha \restriction A = \underline{0}$ y, para toda $i \in [n]$, $f_\alpha(i, \alpha^+) = 0$. De esto se sigue que para cualesqiocra $i \in [m]$ y $\beta \geq \alpha^+$, $f_\alpha(i, \beta) = f_\alpha(i, \alpha^+) = 0$ y finalmente que, para cualesquiera $i \in [m]$ y $\beta \in [\alpha) \cup [\alpha^+, \omega_1)$, $f_\alpha(i, \beta) = 0$.
- $(\cdot\cdot)$ $Tf_\alpha \in E^m(\alpha, \alpha^+)$ y $Tf_\alpha(j_0, \alpha^+) = 1 \implies Tf_\alpha \in E^m_{\alpha^+}$ y $Tf_\alpha(j_0, \alpha^+) = 1 \implies \forall \beta \geq \alpha^+ : Tf_\alpha(j_0, \beta) = 1 \implies Tf_\alpha \restriction \{j_0\} \times [\alpha^+, \omega_1) = \underline{1}$

Escojamos una sucesión $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de L'' tales que $\forall k \in \mathbb{N} : \alpha_{k+1} \geq \alpha_k^+$. $\forall k \in \mathbb{N}$ se tiene:
$f_{\alpha_k}(i, \beta) \neq 0 \xrightarrow{(\cdot)} (i, \beta) \in [m] \times [\alpha_k, \alpha_k^+) \implies \forall l > k : (i, \beta) \in [m] \times [\alpha_l) \implies \forall l > k : f_{\alpha_k}(i, \beta) = 0$.
En pocas palabras, $(f_{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\underline{0}$, es decir, $lim_{k \to \infty} f_{\alpha_k} = \underline{0}$ en $E^n(\alpha, \alpha^+)$.

Por otro lado, si $\gamma = sup\{\alpha_k^+ : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\gamma \in [\alpha_k^+, \omega_1)$, para toda $k \in \mathbb{N}$, y por consiguiente, $Tf_{\alpha_k}(j_0, \gamma) = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, así que $lim_{k \to \infty} Tf_{\alpha_k} \neq \underline{0}$ en $E^m(\alpha, \alpha^+)$, y esto contradice la continuidad de T.
Como esta contradicción fue producida por la suposición $(\star)$, tal supuesto es entonces falso.

II. Sea $E = C_p([\omega_1], 2)$.
Por la proposición 3.49, E es linealmente homeomorfo a $C_{p,\omega_1}([\omega_1], 2)$ que, como se recordará (ver la definición 3.12), es el subespacio vectorial topológico de $C_p([\omega_1], 2)$ que consta de las funciones que se anulan en ω_1. De acuerdo con el lema 3.63, este espacio $C_{p,\omega_1}([\omega_1], 2)$ es a su vez, linealmente homeomorfo a $E' \overset{def}{=} G^2_{\omega_1}$, que es el subespacio vectorial topológico de $C_p([\omega_1), 2)$ que consta de las funciones que se hacen cero en un segmento final de $[\omega_1)$.
Si como obramos en I, vemos a $C_p([\omega_1), 2)$ como el espacio vectorial topológico

$C_p([n] \times [\omega_1), \mathbf{2})$, entonces $(E')^n$ será el subespacio siguiente, denso en E^n (como puede probarse fácilmente):

$$(E')^n = \{f \in C_p([n] \times [\omega_1), \mathbf{2}) : \forall i \in [n] : \exists \alpha < \omega_1 : f \restriction \{i\} \times [\alpha, \omega_1) = \underline{0}\}.$$

Si para cada $\alpha < \omega_1$, ponemos $E^n_\alpha = \{f \in (E')^n : \forall i \in [n] : f \restriction \{i\} \times [\alpha, \omega_1) = \underline{0}\}$, entonces $(E')^n = \bigcup_{\alpha<\omega_1} E^n_\alpha$. Como en el caso I, se puede demostrar que:

(a) Para toda $\alpha < \omega_1$, E^n_α es subespacio vectorial cerrado de $(E')^n$.
(b) Si $\alpha \leq \beta$, claramente $E^n_\alpha \subseteq E^n_\beta$.
(c) Para toda $\alpha < \omega_1$, E^n_α es separable.
(d) Si γ es ordinal límite, entonces $E^n_\gamma = cl_{(E')^n} \bigcup_{\alpha<\gamma} E^n_\alpha$.

Definiciones y propiedades análogas se tienen para $(E')^m$ y para la familia $\{E^m_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

($\bullet$) Supongamos que existe un homeomorfismo lineal $T : (E')^n \longrightarrow (E')^m$ y que $n \neq m$.

Como en I, y en vista de las propiedades anteriores y del lema 3.80, el conjunto

$$M = \{\alpha \in \omega_1 : T(E^n_\alpha) = E^m_\alpha\}$$

es cerrado en ω_1 y no numerable, y si definmos, para cada $\alpha < \omega_1$, $B_\alpha = [m] \times [\alpha]$ y $A_\alpha = [n] \times [\alpha]$, por el lema 3.81 y, como se hizo en I, se tiene que el conjunto:

$$L = \{\alpha \in \omega_1 : \forall f,\ g \in (E')^n : f \restriction A_\alpha = g \restriction A_\alpha \Leftrightarrow Tf \restriction B_\alpha = Tg \restriction B_\alpha\}$$

es también numerable y cerrado en ω_1. Por lo tanto también es numerable y cerrado en ω_1 el conjunto $L \cap M$.

Sea $\alpha \in L \cap M$ un ordinal límite y, para toda $i \in [n]$ y $j \in [j]$, sean $u_i : (E')^n \longrightarrow \mathbf{2}$ y $v_j : (E')^m \longrightarrow \mathbf{2}$ las funciones tales que si $f \in (E')^n$ y $g \in (E')^m$, entonces $u_i(f) = f(i,\ \alpha)$ y $u_i(g) = g(j,\ \alpha)$.

No es difícil probar que para toda $(i, j) \in [n] \times [m]$, $u_i \in ((E')^n)^*$, $v_j \in ((E')^m)^*$ y que los conjuntos $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$, son linealmente independientes en $((E')^n)^*$ y $((E')^m)^*$, respectivamente. Por lo tanto, por el corolario 3.83, $T(G) \neq H$, donde

$$G = \{f \in (E')^n : \forall i \in [n] :\ u_i(f) = 0\} \text{ y } H = \{g \in (E')^m : \forall j \in [m] :\ v_j(g) = 0\}$$

Por otro lado, si $f \in G$, definimos $f' : [n] \times [\omega_1) \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que $f' \restriction [n] \times [\alpha] = f$ y $f' \restriction [n] \times [\alpha,\ \omega_1) = \underline{0}$.

Como $f \in G$, para toda $i \in [n]$ $f(i,\ \alpha) = u_i(f) = 0$, así que f' está bien definida y es continua. Además $f' \in E^n_\alpha$ y, dado que $\alpha \in M$, $Tf \in E^m_\alpha$. Pero

$$f' \restriction A_\alpha = f \restriction A_\alpha \text{ y } \alpha \in L \Longrightarrow Tf' \restriction B_\alpha = Tf \restriction B_\alpha$$

y como Tf' y Tf son continuas y α es ordinal límite, para toda $j \in [m]$, $Tf(j,\ \alpha) = Tf'(j,\ \alpha)$.

En vista de que $Tf' \in E^m_\alpha$, $Tf'(j,\ \alpha) = 0$, para toda $j \in [m]$, así que para cada $j \in [m]$, $Tf(j,\ \alpha) = 0$.

En otras palabras, $Tf \in H$.

Hemos probado entonces que $T(G) = H$. En forma análoga se puede probar que $T^{\leftarrow}(H) \subseteq G$, con lo que $T(G) = H$, lo cual contradice el que $T(G) \neq H$, que ya teníamos.

Esta contradicción muestra que ($\bullet$) es falso.

Por lo tanto, no existe un homeomorfismo lineal entre $(E')^n$ y $(E')^m$, si $n \neq m$, ni entre $(C_p([\omega_1], \mathbf{2}))^n$ y $(C_p([\omega_1], \mathbf{2}))^m$. □

CAPÍTULO 4

Funciones Cardinales en $C_p(X,E)$

1. Funciones cardinales elementales en $C_p(X,E)$

En esta sección indagaremos acerca del comportamiento de las más famosas funciones cardinales, como la cardinalidad, el peso, la densidad, la celularidad, la amplitud, el grado de Lindelöf, la extensión, el peso red, el i-peso, el π-peso, la estrechez, el carácter, el π-carácter, el pseudo-carácter y una que otra más, en los espacios de funciones $C_p(X,E)$. Para recordar las definiciones y propiedades básicas de estas funciones para espacios en general, recomendamos el artículo **[43]**.

Los primeros tres resultados son consecuencias inmediatas de las definiciones de peso y 2.6 (recordar también las notaciones posteriores a 2.9):

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de E. Entonces la familia*

$$\{W = \langle x_1, \ldots, x_n; U_1 \ldots, U_n\rangle : n \in \mathbb{N},\ \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X,\ \{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{B}\}$$

es base para la topología de $C_p(X,E)$.

COROLARIO 4.2. *Para cualesquiera espacios topológicos X y E, se tiene que $w(C_p(X,E)) \leq |X|\, w(E)$.*

PROPOSICIÓN 4.3. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera y, para cada $e \in E$, sea $\mathcal{B}_E(e)$ una base local de e en E. Si $f \in C_p(X,E)$, la familia*

$$\{\langle f;\ x_1 \ldots, x_n;\ B_1, \ldots, B_n\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall j \in [n] : x_j \in X,\ B_j \in \mathcal{B}_E(f(x_j))\}$$

es base local para f en $C_p(X,E)$.

COROLARIO 4.4. *Para cualesquiera espacios topológicos X y E, se tiene que $\chi(C_p(X,E)) \leq |X|\, \chi(E)$.*[1]

DEMOSTRACIÓN. Sean $f \in C_p(X,E)$ y, para cada $e \in E$, $\mathcal{B}(e)$ una base local de e en E tal que $|\mathcal{B}(e)| = \chi(e,E)$. Por la proposición anterior,

$$\mathcal{B}(f) = \{\langle f;\ x_1 \ldots, x_n;\ B_1, \ldots, B_n\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall j \in [n] : x_j \in X,\ B_j \in \mathcal{B}_E(f(x_j))\}$$

es base local de f en $C_p(X,E)$. Ahora bien, $|\mathcal{B}(f)| \leq |\{F \subseteq X : F \text{ es finito }\}||\{\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_E(f(x)) : \mathcal{F} \text{ es finito }\}| \leq |X||\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_E(f(x))| \leq |X| \sum_{x\in X} |\mathcal{B}_E(f(x))| \leq |X| \sum_{x\in X} \chi(f(x),E) \leq |X||X|\, \chi(E) \leq |X|\, \chi(E)$.
Por consiguiente $\chi(f,\ C_p(X,E)) \leq |X|\ \chi(E)$ y, como esto es para toda $f \in C_p(X,E)$, $\chi(C_p(X,E)) \leq |X|\, \chi(E)$. □

Esta última desigualdad y la pregonada por 4.2, se truecan en igualdades si E es un espacio Puebla y $X \in R(E)$. Veamos cómo es esto:

[1] Si X es un espacio topológico y $p \in X$, el carácter local de X en p es $\chi(p,X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es base local de p en $X\}$ y el carácter de X es: $\chi(X) = sup\{\chi(p,X) : p \in X\} + \aleph_0$.

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea $E \in \mathbb{P}_\infty \cap T_2$ con más de un punto, y sea $X \in R(E)$. Entonces:*

(1) $\chi(C_p(X,E)) = |X|\,\chi(E)$.
(2) $w(C_p(X,E)) = |X|\,w(E)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) : Primero probaremos que $\chi(C_p(X,E)) \geq |X|$:
Sean e_1 y e_2 dos puntos distintos en E. Como el espacio es T_2, existen abiertos ajenos U_1 y U_2 en E tales que $e_1 \in U_1$ y $e_2 \in U_2$.
Supongamos que $\chi(C_p(X,E)) < |X|$. Esto implica que $|X| > \aleph_0$ y que si $\underline{e_2}$ es la función constante de X en E con valor e_2,

$$\chi(\underline{e_2}, C_p(X,E)) \leq \chi(C_p(X,E)) < |X|.$$

Existe entonces una base local, $\mathcal{V}$, de $\underline{e_2}$ en $C_p(X,E)$ tal que $|\mathcal{V}| < |X|$. Podemos suponer que los elementos de $\mathcal{V}$ son básicos canónicos de $C_p(X,E)$. Ahora, para cada $W = \langle \underline{e_2};\ x_1,\dots,x_n;\ V_1,\dots,V_n\rangle \in \mathcal{V}$, denotemos con $K(W)$ al conjunto $\{x_1,\dots,x_n\}$. Poniendo $Y = \bigcup_{W\in\mathcal{V}} K(W)$, se tiene que

$$|Y| \leq \sum_{W\in\mathcal{V}} K(W) \leq \aleph_0|\mathcal{V}| < |X|,$$

por lo que existe $x^* \in X \setminus Y$.

$V = \langle \underline{e_2};\ x^*;\ U_2\rangle$ es una vecindad de $\underline{e_2}$ en $C_p(X,E)$ y, para llegar a una contradicción, probaremos que ningún elemento de $\mathcal{V}$ puede estar contenido en V, lo que contradirá el hecho de que $\mathcal{V}$ es base local de $\underline{e_2}$ en $C_p(X,E)$:

Sea $W = \langle \underline{e_2};\ x_1,\dots,x_n;\ V_1,\dots,V_n\rangle \in \mathcal{V}$. Entonces $x^* \notin K(W)$ y, como $K(W)$ es cerrado en X y $X \in R(E) = R_\infty(E)$, existe $f \in C_p(X,E)$ tal que $f(x^*) = e_1$ y $f(K(W)) \subseteq \{e_2\}$. Así, $f \in W \setminus V$, lo que implica que $W \not\subseteq V$. Entonces ningún elemento de $\mathcal{V}$ puede estar contenido en V y esto, como hemos indicado, es una vil contradicción. Se ha demostrado que $\chi(C_p(X,E)) \geq |X|$.

Por 4.4, $\chi(C_p(X,E)) \leq |X|\chi(E)$. Pero por la afirmación que acabamos de probar,
$|X|\chi(E) \leq \chi(C_p(X,E))\chi(E) = \chi(C_p(X,E))$,
ya que $\chi(E) \leq \chi(C_p(X,E))$, puesto que χ es una función monótona [2] y E es subespacio de $C_p(X,E)$. [3]

(2) $w(C_p(X,E)) \leq |X|w(E)$, por 4.2. Pero $|X|w(E) \leq \chi(C_p(X,E))w(E)$, por la afirmación demostrada al inicio del inciso (1). Como $\chi(C_p(X,E)) \leq w(C_p(X,E))$ y también $w(E) \leq w(C_p(X,E))$, ya que w es monótona y $E \subset_{Top} C_p(X,E)$, se tiene que

$$|X|w(E) \leq \chi(C_p(X,E))w(E) \leq w(C_p(X,E)).$$

Por consiguiente $w(C_p(X,E)) = |X|w(E)$.

□

OBSERVACIÓN 4.6. En la prueba de la proposición anterior, usamos que por ser E subespacio de $C_p(X,E)$ se tiene que $w(E) \leq w(C_p(X,E))$ y que $\chi(E) \leq$

[2] Ver [43], pág. 17
[3] Ver 2.35 (1).

$\chi(C_p(X, E))$, para todo espacio topológico X. En general, si F es una función cardinal monótona, se tiene:

$$F(E) \leq F(C_p(X, E)).$$

En 2.35 (2), se probó que si E es de Hausdorff, entonces $E \subset_{cl} C_p(X, E)$. Entonces, si F es una función cardinal monótona en subespacios cerrados, se tiene que $F(E) \leq F(C_p(X, E))$. Por ejemplo[4]:

$$l(E) \leq l(C_p(X, E)) \quad \text{y} \quad e(E) \leq e(C_p(X, E)).$$

Recordemos que si X es un espacio topológico, una red para X es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que todo conjunto abierto en X es la unión de elementos de $\mathcal{N}$, y que el peso red de X es $nw(X) = min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red para } X\} + \aleph_0$. A continuación damos unos resultados duales acerca de los pesos red de $C_p(X, E)$ y de X.

PROPOSICIÓN 4.7. *Si X y E son cualesquiera espacios topológicos,*

$$w(E)nw(X) \geq nw(C_p(X, E)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{N}$ una red en X tal que $|\mathcal{N}| = nw(X)$ y sea $\mathcal{B}$ una base para E de cardinalidad $\leq w(E)$. Si $k \in \mathbb{N}$, $S_1, \ldots, S_k$ son elementos de $\mathcal{N}$ y $U_1, \ldots, U_k$ son elementos de $\mathcal{B}$, denotaremos por $\langle S_1, \ldots, S_k;\ U_1, \ldots, U_k\rangle$ al conjunto $\{f \in C(X, E) : \forall j \in [k] : f(S_j) \subseteq U_j\}$. Sea $\mathcal{M} = \{\langle S_1, \ldots, S_k;\ U_1, \ldots, U_k\rangle : k \in \mathbb{N},\ \{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \mathcal{N},\ \{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{B}\}$. Probaremos que $\mathcal{M}$ es una red en $C_p(X, E)$:
Sean $f \in C_p(X, E)$ y $\langle f;\ x_1 \ldots, x_k;\ V_1, \ldots, V_k\rangle$ una vecindad canónica de f en $C_p(X, E)$. Podemos suponer que cada vez que $i \neq j$, $x_i \neq x_j$. Como $\mathcal{B}$ es base de E, para cada $j \in [k]$, existe $U_j \in \mathcal{B}$ tal que $f(x_j) \in U_j \subseteq V_j$ y, en vista de que f es continua en x_j, existe $S_j \in \mathcal{N}$ tal que $x_j \in S_j$ y $f(S_j) \subseteq U_j$. De este modo se tiene que $f \in \langle S_1, \ldots, S_k;\ U_1, \ldots, U_k\rangle \subseteq \langle f;\ x_1 \ldots, x_k;\ V_1, \ldots, V_k\rangle$. $\mathcal{M}$ es entonces una red en $C_p(X, E)$ y $|\mathcal{M}| \leq |[\mathcal{N}]^{<\omega}|\ |[\mathcal{B}]^{<\omega}| = |\mathcal{N}|\ |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{N}| w(E) = nw(X)w(E)$. Por lo tanto

$$nw(C_p(X, E)) \leq nw(X)w(E).$$

□

Cuando aplicamos este resultado al espacio $C_p(X, E)$, obtenemos:

COROLARIO 4.8. *Si X y E son espacios topológicos,*

$$nw(C_p(C_p(X, E),\ E)) \leq w(E)nw(C_p(X, E)).$$

Ahora dualizaremos:

PROPOSICIÓN 4.9. *Si E es un espacio topológico y $X \in R(E)$, entonces*
(1) $nw(X) \leq w(E)nw(C_p(X, E))$.
(2) $nw(X)w(E) = w(E)nw(C_p(X, E))$.
(3) *Si E es segundo numerable,* $nw(X) = nw(C_p(X, E))$.

[4] Para todo espacio X, $l(X)$ es el grado de Lindelöf y $e(X)$ la extensión del espacio X.

DEMOSTRACIÓN. (1) Por el corolario 2.43, $X \subset_{Top} C_p(C_p(X, E), E)$ y como nw es una función monótona ([43], página 14),

$$nw(X) \leq nw(C_p(C_p(X, E), E)).$$

Por el corolario anterior, se tiene (1).

(2) Acabamos de ver que $nw(X) \leq w(E)nw(C_p(X, E))$. Entonces, aplicando 4.7, obtenemos:

$$nw(X)w(E) \leq w(E)nw(C_p(X, E)) \leq w(E)nw(X).$$

y por ende la igualdad requerida. □

COROLARIO 4.10. *Si E es un espacio topológico no vacío y X y Y son espacios E-regulares t_E-equivalentes, entonces*

$$nw(X)w(E) = nw(Y)w(E).$$

En particular, si E es segundo numerable, el peso red en espacios E-regulares es preservado por la t_E-equivalencia.

Recordemos que si X y E son espacios topológicos, el i-peso de X es

$$iw(X) = min\{w(Y) : Y \text{ es de Tychonoff y } X \text{ puede ser condensado en } Y\} + \aleph_0.$$

De modo parecido definimos el i-peso de X con respecto a E:

$$iw_E(X) = min\{w(Y) : Y \in R(E) \text{ y } X \text{ puede ser condensado en } Y\} + \aleph_0.$$

El siguiente resultado relaciona el i-peso de $C_p(X, E)$ con su pseudo-carácter[5]:

PROPOSICIÓN 4.11. *Si X es un espacio topológico y E es T_1, entonces:*

$$\psi(C_p(X, E)) \leq iw(C_p(X, E)).$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que $iw(C_p(X, E))$ es una cota superior del conjunto $\{\psi(f, C_p(X, E)) : f \in C_p(X, E)\}$: Sea $f \in C_p(X, E)$ y sea Y un espacio de Tychonoff tal que $w(Y) = iw(C_p(X, E))$ y para el cual existe una condensación $g : C_p(X, E) \longrightarrow Y$. Sean $\mathcal{B}$ una base de Y tal que $|\mathcal{B}| \leq iw(C_p(X, E))$ y $\mathcal{S} = \{g^{\leftarrow}(B) : B \in \mathcal{B} \text{ y } f \in g^{\leftarrow}(B)\}$. Notemos que $|\mathcal{S}| \leq |\mathcal{B}|$, así que viendo que $\mathcal{S}$ es pseudo-base para f en $C_p(X, E)$, se podrá concluir que $\psi(f, C_p(X, E)) \leq iw(C_p(X, E))$.
Mostremos entonces que $\bigcap \mathcal{S} = \{f\}$. Si $h \in C_p(X, E)$ y $g(h) \neq g(f)$, existen A y B en $\mathcal{B}$ tales que $g(h) \in A \setminus B$ y $g(f) \in B \setminus A$, pues Y es T_1. Entonces $g^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{S}$ y $h \notin g^{\leftarrow}(B)$. Por eso $h \notin \bigcap \mathcal{S}$. Hemos probado que, si $h \in C_p(X, E)$ y $g(h) \neq g(f)$, entonces $h \notin \bigcap \mathcal{S}$ o, equivalentemente, que si $h \in \bigcap \mathcal{S}$ entonces $g(h) = g(f)$ y, como g es inyectiva, esto implica que $f = h$. Así que $\bigcap \mathcal{S} \subseteq \{f\}$. Pero es claro que $f \in \bigcap \mathcal{S}$, obteniéndose la igualdad $\bigcap \mathcal{S} = \{f\}$. □

Con una demostración completamente análoga, se puede ver que:

[5] Para recordar: Una colección $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos de un espacio T_1, X, es *pseudo-base local para un punto p en X* si $\bigcap \mathcal{V} = \{p\}$. Así, el *pseudo-carácter del punto p en X* es $\psi(p, X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es pseudo-base local de } p \text{ en } X\}$. Finalmente, el *pseudo-carácter de X* es $\psi(X) = sup\{\psi(p, X) : p \in X\}$.

PROPOSICIÓN 4.12. *Si X es un espacio topológico cualquiera, y E_1 y E_2 son espacios T_1, entonces:*

$$\psi(C_p(X,E_1)) \leq iw_{E_2}(C_p(X,E_1)).$$

PROPOSICIÓN 4.13. *Si $E_1 \in R(E_2) \cap T_2$ entonces*

$$iw_{E_2}(C_p(X,E)) \leq d(X)w(E_1).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\tau = d(X)$ y Y un subespacio denso de X tales que $|Y| \leq \tau$. Como Y es denso en X, el mapeo restricción, $r_Y : C_p(X,E_1) \longrightarrow C_p(Y,E_1)$ tal que $r_Y(f) = f \restriction Y$, es condensación a su imagen $Z = r_Y(C_p(Y|X,E_1))$ (ver proposición 2.29). Como $E_1 \in R(E_2)$, también $Z \in R(E_2)$, así que
$iw_{E_2}(C_p(X,E_1)) \leq w(Z) \leq w(C_p(Y,E_1)) = |Y|\, w(E_1) \leq d(X)w(E_1)$. □

PROPOSICIÓN 4.14. *Supongamos que $E \in \mathbb{P}_\infty$ y que tiene por lo menos dos elementos. Si $X \in R(E)$, $d(X) \leq \psi(C_p(X,E))$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean e_1 y e_2 dos puntos distintos en E. Sea $\mathcal{B}$ una pseudo-base formada por vecindades canónicas de $\underline{e_1}$ en $C_p(X,E)$. Para cada $W = \langle \underline{e_1};\ x_1,\dots,x_n;\ U_1,\dots,U_n\rangle \in \mathcal{B}$, sea $K(W) = \{x_1,\dots,x_n\}$.

Pongamos $Y = \bigcup_{W\in\mathcal{B}} K(W)$ y notemos que $|Y| \leq |\mathcal{B}|$. Probaremos que Y es denso en X. Supongamos que existe $x^* \in X \setminus cl_X Y$. Como $R(E) = R_\infty(E)$, existe $f \in C_p(X,E)$ tal que $f(x^*) = e_2$ y $f(cl_X Y) \subseteq \{e_1\}$.

Si $W = \langle \underline{e_1};\ x_1,\dots,x_n;\ U_1,\dots,U_n\rangle \in \mathcal{B}$ entonces $f(x_j) = e_1 \in U_j$, para cada $j \in [n]$, y por eso $f \in W$. Por lo tanto $f \in \bigcap \mathcal{B} = \{\underline{e_1}\}$, lo cual es una contradicción, ya que $f \neq \underline{e_1}$. Se colige que $X = cl_X Y$ y con ello, que $d(X) \leq |Y| + \aleph_0 \leq |\mathcal{B}| + \aleph_0$ y, como $\mathcal{B}$ es una pseudo-base cualquiera de e_1 en $C_p(X,E)$, $d(X) \leq \psi(\underline{e_1}, C_p(X,E)) + \aleph_0 \leq \psi(C_p(X,E))$ □

COROLARIO 4.15. *Si E_2 es de Hausdorff, $E_1 \in R(E_2) \cap \mathbb{P}_\infty$ y tiene por lo menos dos elementos, y si $X \in R(E_1)$, se tiene:*

$$d(X)w(E_1) = \psi(C_p(X,E_1))w(E_1) = iw_{E_2}(C_p(X,E_1))w(E_1).$$

DEMOSTRACIÓN. Por 4.14, $d(X)w(E_1) \leq \psi(C_p(X,E_1))w(E_1)$.
Por 4.12, $\psi(C_p(X,E_1))w(E_1) \leq iw_{E_2}(C_p(X,E_1))w(E_1)$.
Por 4.13, $iw_{E_2}(C_p(X,E)) \leq d(X)w(E_1)$. □

COROLARIO 4.16. *Si X es cero-dimensional, entonces*

$$d(X) = \psi(C_p(X,\mathbf{2})) = iw(C_p(X,\mathbf{2})) = iw_2(C_p(X,\mathbf{2})).$$

PROPOSICIÓN 4.17. *Si $E_2 \in T_2$, $E_1 \in R(E_2)$ y $X \in R(E_1)$,*

$$iw_{E_2}(X) \leq d(C_p(X,E_2))w(E_1).$$

DEMOSTRACIÓN. Como $X \in R(E_1)$, 2.43 implica que $X \subset_{Top} C_p(C_p(X,E_1),E_1)$, así que $iw_{E_2}(X) \leq iw_{E_2}(C_p(C_p(X,E_1),E_1))$ y, por 4.13, $iw_{E_2}(C_p(C_p(X,E_1),E_1)) \leq d(C_p(X,E_1))w(E_1)$. □

PROPOSICIÓN 4.18. *Si* $E_1 \in \mathbb{P}_\infty$ *y* $E_2 \in R(E_1)$*:*

$$d(C_p(X, E_1)) \leq iw_{E_2}(X)w(E_1)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y \in R(E_2)$ tal que $w(Y) = iw_{E_2}(X)$ y existe una condensación $f : X \longrightarrow Y$. Por 4.7, $nw(C_p(Y, E_1)) \leq w(E_1)nw(Y) \leq w(Y)w(E_1)$. Por lo dicho en el ejemplo (5) de la colección 2.11, $f^* : C_p(Y, E_1) \longrightarrow C_p(X, E_1)$ es encaje y, por consiguiente, $nw(C_p(Y, E_1)) = nw(f^*(C_p(Y, E_1)))$. Por lo tanto $nw(f^*(C_p(Y, E_1))) \leq w(Y)w(E_1)$. Como f es condensación, $E_1 \in \mathbb{P}_\infty$ y $Y \in R(E_1)$, por 2.19 $f^*(C_p(Y, E_1))$ es denso en $C_p(X, E_1)$, así que $d(C_p(X, E_1)) \leq d(f^*(C_p(Y, E_1)))$. Por eso: $d(C_p(X, E_1)) \leq d(f^*(C_p(Y, E_1))) \leq nw(f^*(C_p(Y, E_1)))$ $\leq w(Y)w(E_1) = iw_{E_2}(X)w(E_1)$ □

Combinando los dos últimos resultados se obtiene el siguiente:

COROLARIO 4.19. *Si* $E_1 \in T_2 \cap \mathbb{P}_\infty$, $R(E_1) = R(E_2)$ *y* $X \in R(E_1)$, *entonces*

$$iw_{E_2}(X)w(E_2) = d(C_p(X, E_1))w(E_1)$$

COROLARIO 4.20. (1) $iw_2(X) = d(C_p(X, \mathbf{2}))$, *si* X *es cero-dimensional.*
(2) $iw(X) = d(C_p(X))$, *si* X *es de Tychonoff.*
(3) *Si* X *es cero-dimensional,* $iw(X) \leq d(C_p(X, E))$.

OBSERVACIÓN 4.21. Podemos preguntarnos:
Si X es cero-dimensional, ¿será cierto que $iw(X) = iw_2(X)$**?**

El corolario 4.16 resuelve parcialmente la pregunta anterior: La respuesta es sí cuando X es de la forma $C_p(Y, \mathbf{2})$, con Y cero-dimensional. Por otro lado, el corolario 4.20 convierte la pregunta en esta nueva:
Si X es cero-dimensional ¿será cierto que $d(C_p(X))) = d(C_p(X, \mathbf{2}))$**?**

COROLARIO 4.22. *Si* E *es un espacio Puebla de Hausdorff con más de un punto, entonces, para cualesquiera dos espacios* E*-regulares* X *y* Y, t_E*-equivalentes entre sí, se tiene:*

(1) $|X|w(E) = |Y|w(E)$.
(2) $|X|\chi(E) = |Y|\chi(E)$. *En particular, si* E *es primero-numerable, se tiene que* $|X| = |Y|$.
(3) $d(X)w(E) = d(Y)w(E)$.
(4) *Si* E' *es otro espacio tal que* $R(E) = R(E')$,

$$iw_{E'}(X)w(E) = iw_E(X)w(E).$$

Así, si E *es un espacio Puebla, de Hausdorff, segundo numerable y con más de un punto, la cardinalidad, la densidad e* $iw_{E'}$ *(donde* E' *es tal que* $R(E') = R(E)$*) en espacios* E*-regulares, son preservadas por la* t_E*-equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN. (1) y (2) se siguen de 4.5, (3) se deduce de 4.15, y (4) se obtiene de 4.19 □

OBSERVACIÓN 4.23. Sabemos (ver [**43**]) que para todo espacio topológico X, se tiene:

(1) $\pi w(X) \leq w(X)$. [6]

[6] Una π-base para un espacio X es una colección $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos en X tal que si U es un abierto no vacío en X, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$. El π-peso de X se define como: $\pi w(X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es π-base para $X\} + \aleph_0$.

(2) $\pi\chi(X) \le \chi(X)$.[7]
(3) $\pi w(X) \le d(X) \cdot \pi\chi(X)$.

Así, para cualesquiera espacios topológicos X y E:

(4) $\pi\chi(C_p(X,E)) \le \pi\chi(C_p(X,E)) \cdot d(C_p(X,E)) = \pi w(C_p(X,E))$.

También:

(5) $\pi\chi(C_p(X,E)) \le \chi(C_p(X,E)) \le |X|\,\chi(X)$, por 4.4.
(6) $\pi w(C_p(X,E)) \le w(C_p(X,E)) \le |X|\,w(X)$, por 4.2.

Entonces, si E es un espacio primero numerable, $\pi\chi(C_p(X,E)) \le |X|$, y si E es segundo numerable, $\pi w(C_p(X,E)) \le |X|$. Ahora bien, si $E \in \mathbb{P}_\infty$, podemos asegurar que se cumplen las desigualdades simétricas:

PROPOSICIÓN 4.24. *Si $E \in \mathbb{P}_\infty \cap T_2$ es un espacio con por lo menos dos puntos y $X \in R(E)$, entonces $|X| \le \pi\chi(C_p(X,E))$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\pi\chi(C_p(X,E)) < |X|$. Sean e_1 y e_2 puntos distintos de E. Se tiene entonces que: $\pi\chi(\underline{e_1}, C_p(X,E)) + \aleph_0 = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es π-base para $\underline{e_1}$ en $C_p(X,E)\} + \aleph_0 < |X|$ y por consiguiente existe una π-base local para $\underline{e_1}$ en $C_p(X,E)$ tal que $|\mathcal{B}| < |X|$.

Para cada $B \in \mathcal{B}$ existen $f_B \in B$ y W_B, vecindad básica de $f_B \in C_p(X,E)$ tal que $W_B \subseteq B$. Cada vez que $B \in \mathcal{B}$ y $W_B = \langle f_B;\ x_1,\dots,x_n;\ A_1,\dots,A_n\rangle$, denotaremos por $K(W_B)$ al conjunto $\{x_1,\dots,x_n\}$. Si $Y = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} K(W_B)$, entonces $|Y| \le |\mathcal{B}| < |X|$, y existe $x^* \in X \setminus Y$. Como e_1 y e_2 son elementos distintos del espacio de Hausdorff E, existen abiertos ajenos U y V de E tales que $e_1 \in U$ y $e_2 \in V$. Probaremos que la vecindad $\langle \underline{e_1};\ x^*;\ U\rangle$ no contiene a ningún elemento de $\mathcal{B}$, lo que contradirá al hecho de que $\mathcal{B}$ es π-base local de $\underline{e_1}$ en $C_p(X,E)$: Sean $B \in \mathcal{B}$ y $W_B = \langle f_B;\ x_1,\dots,x_n;\ A_1,\dots,A_n\rangle$. Como $x^* \notin K(W_B)$, $x^* \ne x_j$, para cada $j \in [n]$. Podemos suponer que los x_j son distintos entre sí y entonces, como $X \in R(E)$ y E es un espacio Puebla, existe $g \in C_p(X,E)$ tal que $g(x^*) = e_2$ y $g(x_j) = f_B(x_j)$, para cada $j \in [n]$. Entonces $g \in W_B \subseteq B$, pero $g \notin \langle \underline{e_1};\ x^*;\ U\rangle$. □

COROLARIO 4.25. *Si $E \in \mathbb{P}_\infty \cap T_2$ y tiene por lo menos dos puntos, y $X \in R(E)$, entonces:*

(1) $\pi\chi(C_p(X,E)) = |X|\,\chi(E)$
(2) $\pi w(C_p(X,E)) = |X|\,w(E)$

DEMOSTRACIÓN. $|X|\,\chi(E) \le \pi\chi(C_p(X,E))\chi(E)$, por la proposición anterior. Pero por 4.23 (5), $\pi\chi(C_p(X,E))\chi(E) \le |X|\,\chi(E)$ y por 4.24 y 4.2 (4), $|X|\,w(E) \le \pi\chi(C_p(X,E))w(E) \le \pi w(C_p(X,E))w(E)$. En vista de 4.23(6), $\pi w(C_p(X,E)) \le |X| w(E)$. □

El "Lema de Jones" señala que si X es normal entonces, para todo cerrado discreto D en X, $2^{|D|} \le 2^{d(X)}$. Una demostración de este lema hállase en **[43]**, en donde también se encuentra la siguiente generalización (ver sección 10 de **[43]**)[8]:

[7] Si X es un espacio topológico, $p \in X$ y $\mathcal{V}$ es una colección de abiertos no vacíos en X, se dice que $\mathcal{V}$ es π-base local de p en X si, para toda vecindad U de p en X, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$. Se define entonces la función cardinal local siguiente: $\pi\chi(p,X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es π-base local para $p\}$. Finalmente, el π-carácter de X se definen así: $\pi\chi(X) = sup\{\pi\chi(p,X) : p \in X\} + \aleph_0$

[8] Es una generalización del Lema de Jones, pues D es un denso en X tal que $|D| \le d(X)$, $|C(X)| \le |\{f : D \longrightarrow \mathbb{R} : f$ es función $\}| = |\mathbb{R}^D| = 2^{\aleph_0\,|D|} = 2^{|D|} \le 2^{d(X)}$

Si X es normal, para todo cerrado y discreto $D \subseteq X$, $2^{|D|} \leq |C(X)|$. Es claro que, para todo espacio topológico X, $|C(X,\mathbf{2})| \leq |C(X)|$, así que tener $2^{|D|} \leq |C(X,\mathbf{2})|$ para todo subespacio cerrado y discreto, D de X, sería una cota mejor que la dada por Hodel. Veamos a continuación que esta cota se logra cuando, por ejemplo, X es normal y fuertemente cero-dimensional, es decir, cuando $\mathrm{Ind}X = 0$ (ver la observación 1.73). Antes recordemos este conocido lema:

LEMA 4.26. *Si X es normal entonces, dados cualesquiera dos subespacios de X, uno cerrado, F, y el otro abierto, W, tales que $F \subseteq W$, existe una vecindad nula N de X tal que $F \subseteq N \subseteq W$.*

COROLARIO 4.27. *Si X es normal entonces cualesquiera dos cerrados ajenos en X están contenidos en vecindades nulas ajenas.*

PROPOSICIÓN 4.28. *Si $\mathrm{Ind}X = 0$ entonces, para todo subespacio D, cerrado y discreto en X, se tiene $2^{|D|} \leq |C(X,\mathbf{2})|$*

DEMOSTRACIÓN. Sea D un subespacio cerrado y discreto de X. Para cada $E \subseteq D$, E y $D \setminus E$ son cerrados ajenos en D y por lo tanto en X, por lo que están contenidos, respectivamente, en vecindades nulas Z_1 y Z_2, ajenas entre sí. Como X es fuertemente cero-dimensional, existe un cerrabierto A_E en X tal que $Z_1 \subseteq A_E$ y $Z_2 \cap A_E = \emptyset$. En particular $E \subseteq A_E$ y $D \setminus E \subseteq X \setminus A_E$.

Dado que A_E es cerrabierto en X, la función característica de A_E, $\chi_{A_E} : X \longrightarrow \mathbf{2}$ es continua. Esto define una función:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P}(D) &\longrightarrow C(X,\mathbf{2}) \\ E &\longmapsto \chi_{A_E} \end{aligned}$$

que es inyectiva porque, si $E \neq E'$ entonces $E \not\subseteq E'$ o $E' \not\subseteq E$. Supongamos que $E' \not\subseteq E$ (el otro caso se trataría análogamente). Existe $x \in E' \setminus E \subseteq D \setminus E \subseteq X \setminus A_E$, así que $\chi_{A_E}(x) = 0$ y $\chi_{A_{E'}}(x) = 1$. Por eso $\chi_{A_E} \neq \chi_{A_{E'}}$, es decir, $\phi(E) \neq \phi(E')$. Se colige que $|\mathcal{P}(D)| \leq |C(X,\mathbf{2})|$, es decir, $2^{|D|} \leq |C(X,\mathbf{2})|$. □

2. El número de Lindelöf de un espacio $C_p(X, E)$

En esta sección analizaremos brevemente algunas de las consecuencias sencillas que se obtienen por suponer que $C_p(X, E)$ es un espacio de Lindelöf.

PROPOSICIÓN 4.29. *Sean X y Y espacios topológicos cualesquiera. Si Y está E-encajado en X y $C_p(X, E)$ es de Lindelöf, entonces $C_p(Y, E)$ es de Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN. Si $i : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión, como Y está E-encajado en X, $i^* : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ es continua y sobre (ver proposición 2.30). Entonces $C_p(Y, E)$ también es de Lindelöf. □

PROPOSICIÓN 4.30. *Si $\omega \subset_{cl} E$ [9] y $|Y| > \aleph_0$, entonces E^Y no es de Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que E^Y es de Lindelöf. Como $\omega \subset_{cl} E$, existe un cerrado F en E tal que $\omega \cong F$. Entonces $\omega^{\omega_1} \cong F^{\omega_1}$ y F^{ω_1} es cerrado en E^{ω_1}. Pero como $|Y| \geq \aleph_1$, $E^{\omega_1} \subset_{cl} E^Y$. Por consiguiente $\omega^{\omega_1} \subset_{cl} E^Y$ y por lo tanto ω^{ω_1} es un espacio de Lindelöf, lo cual es falso. □

[9] Recordar la notación que sigue a la definición 1.51.

COROLARIO 4.31. *Si $\omega \subset_{cl} E$ y $C_p(X,E)$ es de Lindelöf, entonces, para todo subespacio Y discreto y E-encajado en X, se tiene que $|Y| \leq \aleph_0$.*

DEFINICIÓN 4.32. *Si E es un espacio topológico,* **la E-extensión** *es la función cardinal que a cada espacio X le asocia:*

$$e_E(X) = sup\{|A| : \text{ si } A \text{ es discreto y } E\text{-encajado en } X\}.$$

COROLARIO 4.33. *Si $\omega \subset_{cl} E$ y $C_p(X,E)$ es de Lindelöf, entonces $e_E(X) \leq \aleph_0$.*

TEOREMA 4.34. *Si $\omega \subset_{cl} E$, $E \in \mathbb{P}_1$ y $X \in R(E)$ es tal que $C_p(X,E)$ es de Lindelöf, entonces toda familia discreta de abiertos en X es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia discreta de abiertos en X. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $x_\alpha \in U_\alpha$. Pongamos $Y = \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Veamos que Y está E-encajado en X. Sean $e_0 \in E$ y $f : Y \longrightarrow E$ continua. Como $X \in R(E)$ y $E \in \mathbb{P}_1$, para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $g_\alpha \in C_p(X,E)$ tal que $g_\alpha(x_\alpha) = f(x_\alpha)$ y $g(X \setminus U_\alpha) \subseteq \{e_0\}$. Sea $g : X \longrightarrow E$ tal que, para toda $\alpha \in \Lambda$, $g|_{U_\alpha} \equiv g_\alpha|_{U_\alpha}$ y $g|_{X \setminus \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha} \equiv \underline{e_0}$. Probaremos que g es continua en X:

Sea $x \in X$. Como $\mathcal{F}$ es discreta, existe una vecindad V_x de x en X tal que V_x intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{F}$.

(i) Supongamos que $x \in U_\alpha$, para alguna $\alpha \in \Lambda$. Sea A una vecindad de $g(x)$ en E. Entonces $g_\alpha(x) \in A$ y, como g_α es continua en x, existe W_x, vecindad de x en X tal que $g_\alpha(W_x) \subseteq A$. Por lo tanto, $W_x \cap U_\alpha$ es vecindad de x en X y $g(W_x \cap U_\alpha) = g_\alpha(W_x \cap U_\alpha) \subseteq A$.

(ii) Supongamos que $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Sea A una vecindad de $g(x)$ en E.
Si $V_x \cap (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) = \emptyset$, entonces $g(V_x) \subseteq \{e_0\} = \{g(x)\} \subseteq A$. Si $V_x \cap (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \neq \emptyset$, entonces existe una única $\alpha \in \Lambda$ tal que $V_x \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Como g_α es continua en x, existe una vecindad W de x en X tal que $g_\alpha(W) \subseteq A$. Por lo tanto,
$g_\alpha(W \cap V_x) \subseteq g_\alpha(W) \subseteq A$.
Pero $g(W \cap V_x) = g_\alpha(W \cap V_x)$, ya que, para toda $y \in W \cap V_x$, si $y \in U_\alpha$ entonces $g(y) = g_\alpha(y)$, y si $y \notin U_\alpha$, entonces $y \notin \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ y por lo tanto, $g(y) = e_0 = g_\alpha(y)$.

Entonces Y es discreto y E-encajado en X. Por el corolario 4.31, $|Y| \leq \aleph_0$. Por eso $|\mathcal{F}| = |Y| \leq \aleph_0$. □

COROLARIO 4.35. *Si $\omega \subset_{cl} E$, $E \in \mathbb{P}_1$ y $X \in R(E)$ es tal que $C_p(X,E)$ es de Lindelöf, entonces toda base σ-discreta en X es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una base σ-discreta en X. Pongamos $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, donde cada $\mathcal{B}_n$ es una familia discreta en X. Por el teorema anterior, para toda $n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{B}_n| \leq \aleph_0$. Por lo tanto, $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. □

COROLARIO 4.36. *Si $\omega \subset_{cl} E$, $E \in \mathbb{P}_1$ y $X \in R(E)$ es tal que $C_p(X,E)$ es de Lindelöf y X es metrizable, entonces $w(X) = \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de metrización de Bing (4.4.8 de **[24]**), X tiene una base σ-discreta. El resultado se sigue del corolario anterior. □

LEMA 4.37. *Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$, E un espacio T_1, Z un subespacio Lindelöf de $C_p(X,E)$ y $f : Y \longrightarrow E$ una función que satisface la siguiente condición:*

$$(\alpha) \quad \forall A \subseteq Y : \ |A| \leq \aleph_0 \Longrightarrow \exists g \in Z : g|_A = f|_A.$$

Entonces existe $\tilde{f} \in Z$ tal que $\tilde{f}|_Y = f$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\eta = [Y]^{\leq \aleph_0}$ el conjunto de subconjuntos a lo más numerables de Y. Para cada $A \in \eta$, sea $F_A = \{g \in Z : g|_A = f|_A\}$, y sea $\xi = \{f_A : A \in \eta\}$. Veamos que ξ satisface la propiedad de intersección numerable (la p.i.n.): Sea $\eta' \subseteq \eta$ tal que η' es numerable. Entonces $B = \bigcup \eta'$ es numerable y $B \subseteq Y$, así que por la propiedad (α) existe $g \in Z$ tal que $g|_B = f|_B$. Por lo tanto, $g \in Z$ y para toda $A \in \eta'$, $g|_A = f|_A$, es decir, $g \in F_A$. Por lo tanto, $g \in \bigcap_{A \in \eta'} F_A$.

Ahora probaremos que para toda $A \in \eta$, A es cerrado en Z: Sea $h \in Z \setminus F_A$. Entonces $h|_A \neq f|_A$, por lo que existe $y \in A$ tal que $h(y) \neq f(y)$. Como E es T_1, existe un abierto U en E tal que $f(y) \notin U$ y $h(y) \in U$. Sea $W = \langle h; y; U \rangle \cap Z$; W es una vecindad básica canónica de h en Z y claramente $W \subseteq Z \setminus F_A$. Así $Z \setminus F_A$ es abierto en Z.

Dado que Z es de Lindelöf y ξ es una familia de cerrados en Z con la p.i.n., $\bigcap \xi \neq \emptyset$. Sea $\tilde{f} \in \bigcap \xi$. Entonces $\tilde{f} \in Z$ y si $y \in Y$, $F_{\{y\}} \in \xi$. Por lo tanto, $\tilde{f} \in F_{\{y\}}$, es decir, $\tilde{f}|_{\{y\}} = f|_{\{y\}}$. Por consiguiente, $\tilde{f}|_Y = f$. □

COROLARIO 4.38. *Sean X un espacio topológico y E un espacio T_1 tal que $C_p(X,E)$ es de Lindelöf. Si Y es un subespacio de X tal que todo subconjunto numerable de Y está E-encajado en X, entonces Y está E-encajado en X.*

COROLARIO 4.39. *Supongamos que E es un espacio T_1, que $\omega \subset_{cl} E$ y que X es un espacio tal que $C_p(X,E)$ es de Lindelöf y todos sus subconjuntos cerrados, discretos y numerables están E-encajados en X. Entonces $e(X) = \aleph_0$.*[10]

DEMOSTRACIÓN. Sea Y un subespacio discreto y cerrado en X. Para probar que $|Y| \leq \aleph_0$, por 4.31 bastará demostrar que Y está E-encajado en X. Ahora bien, para probar que Y está E-encajado en X, emplearemos el corolario 4.38, es decir, mostraremos que todo subconjunto numerable en Y está E-encajado en X: Para ello, sea A un subconjunto numerable de Y; entonces A es cerrado, discreto y numerable en X. Por hipótesis, está E-encajado en X. □

DEFINICIÓN 4.40 (3.21 de [**48**]). *Sean X y E espacios cualesquiera.*

(1) *X es E-**Hausdorff** si $C_p(X,E)$ separa puntos de X.*[11]
(2) *X es E-**normal** si para cualesquiera dos cerrados ajenos A y B de X existen dos E-cerrados*[12] *ajenos A' y B' de X, tales que $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$.*
(3) *X es **fuertemente E-normal** si para cualesquiera dos cerrados ajenos A y B de X existen $n \in \mathbb{N}$, $f \in C(X,E^n)$ dos cerrados ajenos F_1 y F_2 en E^n, tales que $A \subseteq f^{\leftarrow}(F_1)$ y $B \subseteq f^{\leftarrow}(F_2)$*

[10] Recordemos que $e(X)$ es la extensión de X y se define por $e(X) = sup\{|D| : D$ es cerrado y discreto en $X\} + \aleph_0$.

[11] Cuando $E = \mathbb{I}$, a los espacios E-Hausdorff se les suele llamar **espacios funcionalmente hausdorff**.

[12] Ver definición 1.15

PROPOSICIÓN 4.41. *Sea E un espacio T_1 no trivial. Sean e_0 y e_1 dos elementos de E. Supongamos que X es tal que $C_p(X,E)$ es de Lindelöf y satisface la siguiente condición:*

(β) *Para dos conjuntos numerables arbitrarios A y B en X tales que $cl_X A \cap cl_X B = \emptyset$, hay una función $g \in C_p(X,E)$ tal que $g(A) \subseteq \{e_0\}$ y $g(B) \subseteq \{e_1\}$.*

Entonces X es E-fuertemente normal y si E es funcionalmente Hausdorff, X es normal.

DEMOSTRACIÓN. Sean G y H dos cerrados ajenos en X y sea $Y = G \cup H$. Definimos $f : Y \longrightarrow E$ tal que $f|_G = \underline{e_0}$ y $f|_H = \underline{e_1}$.

Si $A \subseteq Y$ es numerable, entonces $A \cap G$ y $A \cap H$ son dos subconjuntos numerables de X tales que

$$cl_X(A \cap G) \cap cl_X(A \cap H) \subseteq cl_X(G) \cap cl_X(H) = G \cap H = \emptyset.$$

Por la propiedad (β), existe $g \in C_p(X,E)$ tal que $g(A \cap G) \subseteq \{e_0\}$ y $g(A \cap H) \subseteq \{e_1\}$. Como $A = A \cap Y = (A \cap G) \cup (A \cap H)$, resulta que $g|_A = f|_A$. Se satisface así la condición (α) de 4.37 para esta f. Por lo tanto existe $\tilde{f} \in C_p(X,E)$ tal que $\tilde{f}|_Y = f$, es decir, $\tilde{f}(G) \subseteq \{e_0\}$ y $\tilde{f}(H) \subseteq \{e_1\}$. Entonces X es E-fuertemente normal.

Ahora supongamos que E es funcionalmente Hausdorff. Entonces existe $h : E \longrightarrow \mathbb{I}$ tal que $h(e_0) = 0$ y $h(e_1) = 1$. De este modo, $h \circ \tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{I}$ y $h \circ \tilde{f}(G) \subseteq \{0\}$ y $h \circ \tilde{f}(H) \subseteq \{1\}$. ☐

DEFINICIÓN 4.42. *Un espacio topológico es $\aleph_0$-***acotado**[13] *si la cerradura de cualesquiera de sus subconjuntos numerables es compacto.*

PROPOSICIÓN 4.43. *Si E es un espacio T_1 no trivial y si X es un espacio $\aleph_0$-acotado, cero-dimensional y tal que $C_p(X,E)$ es de Lindelöf, entonces X es fuertemente E-normal. Si además E es funcionalmente Hausdorff, X es normal.*

DEMOSTRACIÓN. Sean e_1 y e_2 dos elementos distintos de E. Vamos a demostrar que X satisface la condición (β) de 4.41: Sean A y B subconjuntos numerables de X tales que $cl_X A \cap cl_X B = \emptyset$. Como X es $\aleph_0$-acotado, $cl_X A$ y $cl_X B$ son subconjuntos compactos y ajenos de X. Dado que X es cero-dimensional, para cada $x \in cl_X A$ existe un cerrabierto U_x de X, tal que $x \in U_x \subseteq X \setminus cl_X B$. $\{U_x : x \in cl_X A\}$ es una cubierta abierta de $cl_X A$, así que existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in cl_X A$ tales que $cl_X A \subseteq \bigcup_{j \in [n]} U_{x_j} \subseteq X \setminus cl_X B$.

Como $U = \bigcup_{j \in [n]} U_{x_j}$ es cerrabierto en X, la función $f : X \longrightarrow E$ tal que $f \restriction U = \underline{0}$ y $f \restriction X \setminus U = \underline{e_1}$. Por lo tanto X satisface la condición (β) de la proposición 4.41 y por eso es fuertemente E-normal. ☐

3. Estrechez y número de Lindelöf

DEFINICIÓN 4.44. *Dada una función cardinal ϕ, definimos la función cardinal ϕ^* de modo que, para cada espacio topológico X,*

$$\phi^* = sup\{\phi(X^n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

[13] Algunos autores como Vaughan en [67] prefieren usar el término ω-acotado.

Un célebre teorema de M. O. Asanov señala que para todo espacio de Tychonoff X, $t^*(X) \leq l(C_p(X))$.[14] Basándonos en la demostración que de este resultado presenta Arkhangel'skii en [9], damos la siguiente ligera generalización:

TEOREMA 4.45. *Si $E \in \mathbb{P}_\infty \cap T_2$ y tiene más de un punto, y si $X \in R(E)$,*

$$t^*(X) \leq l(C_p(X, E))$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\eta = l(C_p(X, E))$, $n \in \mathbb{N}$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$. Probaremos que $t(x, X^n) \leq \eta$.

Sea $A \subseteq X^n$ y supongamos que $x \in cl_{X^n} A$. Como $X \in R(E)$, es un espacio de Hausdorff, lo que implica que es posible escoger conjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ en X, tales que :

(i) Para toda $j \in [n], x_j \in U_j$
(ii) Si i, $j \in [n]$ y $x_j = x_i$, entonces $U_i \neq U_j$.
(iii) Si i, $j \in [n]$ y $x_j \neq x_i$, entonces $U_i \cap U_j = \emptyset$

Ahora bien, $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ es vecindad de x en X^n.
Sea $A' = A \cap U$. Como $x \in cl_{X^n} A$, para toda vecindad W de x en X^n se tiene que $W \cap (A \cap U) = (W \cap U) \cap A \neq \emptyset$, y esto implica que también $x \in cl_{X^n} A'$. Escojamos un punto e_1 en E y pongamos $F = \{f \in C_p(X, E) : \forall j \in [n],\ f(x_j) = e_1\}$. F es cerrado en $C_p(X, E)$ debido a que $F = \hat{x}_1^{\leftarrow}(\{e_1\}) \cap \ldots \cap \hat{x}_n^{\leftarrow}(\{e_1\})$. Por lo tanto, $l(F) \leq l(C_p(X, E))$.

Como E es de Hausdorff, si e_2 es otro punto de E, distinto de e_1, existe un abierto O_1 en E, tal que $e_1 \in O_1$ y $e_2 \notin O_1$. Para cada $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A'$, pongamos

$$V_y = \{g \in C_p(X, E) : \forall j \in [n],\ g(y_j) \in O_1\},$$

es decir, V_y es el básico canónico $\langle y_1, \ldots, y_n; O_1, \ldots, O_1 \rangle$. Mostraremos que $F \subseteq \bigcup_{y \in A'} V_y$.

Sea $f \in F$. Para cada $j \in [n]$, como f es continua en x_j y $f(x_j) = e_1 \in O_1$, existe V_j, vecindad de x_j en X, tal que $f(V_j) \subseteq O_1$. Dado que $x \in cl_{X^n} A'$ y $V = V_1 \times \ldots \times V_n$ es una vecindad de x en X^n, existe $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A' \cap V$. Entonces, para cada $j \in [n]$, $f(y_j) \in O_1$, es decir, $f \in V_y$. Hemos demostrado que $F \subseteq \bigcup_{y \in A'} V_y$.

En vista de que $l(F) \leq \eta$, existe $B \subseteq A'$ tal que $|B| \leq \eta$ y $F \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y$.
Demostraremos a continuación que $x \in cl_{X^n} B$: Supongamos que $x \notin cl_{X^n} B$. Entonces existe $W_1 \times \ldots \times W_n$, vecindad abierta básica de x en X^n, tal que $(W_1 \times \ldots \times W_n) \cap B = \emptyset$. Se puede suponer que $W_i = W_j$ si $x_i = x_j$ $(i, j \in [n])$. Para cada $j \in [n]$, sea $U'_j = U_j \cap W_j$. Usando (i), (ii) y (iii) se deduce que:

($\cdot$) $x \in U'_1 \times \ldots \times U'_n$.
($\cdot\cdot$) $x_i = x_j \Longrightarrow U'_i = U'_j$
($\cdot\cdot\cdot$) $x_i \neq x_j \Longrightarrow U'_i \cap U'_j = \emptyset$.
($\cdot\cdot\cdot\cdot$) $(U'_1 \times \ldots \times U'_n) \cap B = \emptyset$.

Como $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap X \setminus \bigcup_{j \in [n]} U'_j = \emptyset$ y los espacios $X \setminus \bigcup_{j \in [n]} U'_j$ y X están en la clase $R_\infty(E)$, existe $h \in C(X, E)$ tal que, para cada $j \in [n]$, $h(x_j) = e_1$ y $h(X \setminus \bigcup_{j \in [n]} U'_j) \subseteq \{e_2\}$.

[14] Recordemos que si X es un espacio topológico y $x \in X$, la estrechez de X en el punto x es $t(x, X) = min\{\kappa \in \mathfrak{C} : \forall Y \subseteq X : [x \in cl_X Y \Longrightarrow (\exists A \subseteq Y : x \in cl_X A \ \ y \ \ |A| \leq \kappa)]\}$. La estrechez de X es entonces $t(X) = sup\{t(x, X) : x \in X\} + \aleph_0$.

Notemos que $h \in F \subseteq \bigcup_{y\in B} V_y$, así que existe $y' \in B$ tal que $h \in V_{y'}$. Pongamos $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$. Como $h \in V_{y'}$, dada una $i \in [n]$, $h(y'_i) \in O_1$ y, por consiguiente, $h(y'_i) \neq e_2$ y $y'_i \in \bigcup_{k\in[n]} U'_k$. Entonces existe $j \in [n]$ tal que $y'_i \in U'_j \subseteq U_j$. Pero $y' \in B \subseteq A' \subseteq U$, y por eso $y'_i \in U_i$. Como $U_i = U_j$ o $U_i \cap U_j = \emptyset$, entonces $U_i = U_j$, es decir, $x_i = x_j$, con lo que $U'_i = U'_j$. Así, para cada $i \in [n]$, $y'_i \in U'_i$. Por lo tanto, $y' \in (U'_1 \times \ldots \times U'_n) \cap B$ y esto es una contradicción que se produjo por suponer que $x \notin cl_{X^n} B$. Por lo tanto, $x \in cl_{X^n} B$ y $|B| \leq \eta$. Entonces $t(x, X^n) \leq \eta$.

Con ello, $t(X^n) \leq \eta$ y, como esto es para cada $n \in \mathbb{N}$, $t^*(X) \leq \eta$. □

La desigualdad que pregona el teorema anterior, no siempre es igualdad. Por ejemplo, si X es un espacio discreto numerable, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, X^n es discreto y $t(X^n) \leq \aleph_0$, así que $t^*(X) = \aleph_0$. Sin embargo, $C_p(X) = \mathbb{R}^X$ y este espacio no es de Lindelöf. Afortunadamente contamos con un teorema dual al de Asanov, para el caso en que $E = \mathbb{R}$; es el de E. G. Pytkeev presentado en (1) del siguiente teorema:

TEOREMA 4.46. *Para todo espacio de Tychonoff X,*

(1) *(E. G. Pytkeev) $l^*(X) \leq t(C_p(X))$.*
(2) *(A. V. Arkhangel'skii) $t(C_p(X)) \leq l^*(X)$.*

Sendas demostraciones de (1) y (2) del teorema anterior pueden consultarse en II.1.1 de [**9**].

Ahora presentaremos una generalización de (1) del teorema 4.46:

TEOREMA 4.47. *Si E es un espacio Puebla con más de un punto y $X \in R(E)$, entonces*

$$l^*(X) \leq t(C_p(X, E))$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\tau = t(C_p(X, E))$, $n \in \mathbb{N}$ y γ una cubierta abierta de X^n. Diremos que un conjunto finito μ de abiertos en X es **γ-pequeño** si para cada $V_1, \ldots, V_n \in \mu$, existe $G \in \gamma$ tal que $V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq G$.

Sea $\mathcal{E}$ la clase de todos los conjuntos γ-pequeños de abiertos de X. Para cada $\mu \in \mathcal{E}$, sea $A_\mu = \{f \in C_p(X, E) : f(X \setminus \bigcup \mu) = \{e_0\}\}$, donde e_0 es un elemento seleccionado de E. Poniendo $A = \bigcup_{\mu\in\mathcal{E}} A_\mu$, afirmamos que

- $cl_{C_p(X,E)} A = C_p(X, E)$.
  Para demostrar esta afirmación, sean $f \in C_p(X, E)$ y $K \subseteq X$ finito. Para cada $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, existe $G_{\bar{y}} \in \gamma$ tal que $\bar{y} \in G_{\bar{y}}$, pues γ es cubierta de X^n, y existen abiertos $V_1^{\bar{y}}, \ldots, V_n^{\bar{y}}$ de X, tales que $V_1^{\bar{y}} \times \ldots \times V_n^{\bar{y}} \subseteq G_{\bar{y}}$. Denotemos por $\mathcal{V}_{\bar{y}}$ al conjunto $\{V_1^{\bar{y}}, \ldots, V_n^{\bar{y}}\}$ y por θ_K al conjunto $\bigcup_{\bar{y}\in K^n} \mathcal{V}_{\bar{y}}$. Como se ve, θ_K es finito y $K \subseteq \bigcup \theta_K$. Para cada $x \in K$, sea $W_x = \bigcap\{V \in \theta_K : x \in V\}$ y sea $\mu_K = \{W_x : x \in K\}$. También $K \subseteq \bigcup \mu_k$. Veamos que μ_K es un conjunto γ-pequeño de abiertos de X: Sean $W_{x_1}, \ldots, W_{x_n}$ elementos de μ_K. Entonces $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ y como ya vimos, existen $G_{\bar{x}} \in \gamma$ y $V_1, \ldots, V_n \in \theta_K$ tales que $\bar{x} \in V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq G_{\bar{x}}$. Para cada $i \in [n]$, $x_i \in V_i$ y $V_i \in \theta_K$, así que $W_{x_i} \subseteq V_i$. Por consiguiente $W_{x_1} \times \ldots \times W_{x_n} \subseteq V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq G_{\bar{x}}$. Aquí termina la prueba de que μ_K es un conjunto γ-pequeño de abiertos de X. Supongamos ahora que los elementos de K son $x_1, \ldots, x_n$. Como $X \in R(E) = R_\infty(E)$, existe $g \in C_p(X, E)$ tal que para toda $i \in [n]$, $g(x_i) = f(x_i)$ y $g(X \setminus \bigcup \mu_K) = \{e_0\}$.

Si $W = \langle f;\, x_1, \ldots, x_n;\, U_1, \ldots, U_n\rangle$ es una vecindad local canónica de f en $C_p(X,E)$, $g \in W \cap A_\mu \subseteq W \cap A$. Por tal motivo $f \in cl_{C_p(X,E)}A$. Con esto probamos la afirmación de arriba.

Sea e_1 otro punto de E, distinto de e_0, y $f_1 : X \longrightarrow E$ la constante con valor e_1. Entonces $f_1 \in cl_{C_p(X,E)}A$ y como $t(C_p(X,E)) = \tau$, existe $B \subseteq A$ tal que $|B| \leq \tau$ y $f_1 \in cl_{C_p(X,E)}B$. Dado que $B \subseteq A \subseteq \bigcup_{\mu\in\mathcal{E}} A_\mu$, para cada $f \in B$ existe $\mu_f \in \mathcal{E}$ tal que $f \in A_{\mu_f}$. Si ahora $\mathcal{E}_0 = \{\mu_f : f \in B\}$, entonces $|\mathcal{E}_0| \leq |B| \leq \tau$ y $B \subseteq \bigcup_{\mu\in\mathcal{E}_0} A_\mu$.
Sea $\mu \in \mathcal{E}_0$. Para cada $\xi = (V_1, \ldots, V_n) \in \mu^n$, sea $G_\xi \in \gamma$ tal que $V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq G_\xi$, y sea $\gamma_\mu = \{G_\xi : \xi \in \mu^n\}$. Como μ es un conjunto finito, γ_μ es una familia finita, así que si ponemos $\tilde{\gamma} = \bigcup_{\mu\in\mathcal{E}_0}\gamma_\mu$, entonces $\tilde{\gamma} \subseteq \gamma$ y :

$$|\tilde{\gamma}| \;\leq\; \sum_{\mu\in\mathcal{E}_0} |\gamma_\mu| \;\leq\; |\mathcal{E}_0| sup\{|\gamma_\mu| \;:\mu \in \mathcal{E}_0\} \leq \tau\aleph_0 = \tau.$$

Veamos por último que $\tilde{\gamma}$ cubre a X^n:
Sean $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ y $U = \{f \in C_p(X,E) :\ \text{para cada } j \in [n],\ f(x_j) = e_1\}$, es decir, $U = \langle x_1, \ldots, x_n;\, e_1, \ldots, e_1\rangle$. $f_1 \in U$ y, como $f_1 \in cl_{C_p(X,E)}B$ y $B \subseteq \bigcup_{\mu\in\mathcal{E}_0} A_\mu$, existe $\mu_0 \in \mathcal{E}_0$ tal que $U \cap A_{\mu_0} \neq \emptyset$. Sea $g \in U \cap A_{\mu_0}$. Entonces, para cada $j \in [n]$, $g(x_j) = e_1$ y $g(X \setminus \bigcup \mu_0) = \{e_0\}$, lo que implica que $x_j \notin X \setminus \bigcup\mu_0$, es decir, $x_j \in \bigcup\mu_0$. Por ende, existe $V_j \in \mu_0$ tal que $x_j \in V_j$. Entonces $\xi = (V_1, \ldots, V_n) \in \mu_0^n$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq G_\xi \in \gamma_{\mu_0} \subseteq \tilde{\gamma}$. Por lo tanto existe $G_\xi \in \tilde{\gamma}$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \in G_\xi$ □

En (4.3.2) de [**3**] se enuncia sin prueba la siguiente generalización de (2) del teorema 4.46: *Si $l^*(X) \leq \tau$ y si E es un espacio de Tychonoff con $w(E) \leq \tau$, entonces $t(C_p(X,E)) \leq \tau$*. Como es de interés para nuestro trabajo, enunciaremos y demostraremos este resultado con las elegantes ideas de Oleg Okunev:

TEOREMA 4.48. *Si E es un espacio de Tychonoff entonces, para todo espacio topológico X,*

$$t(C_p(X,E)) \leq l^*(X)w(E).$$

DEMOSTRACIÓN. Como E es de Tychonoff, por el corolario 1.27 existe un encaje $j : E \longrightarrow \mathbb{R}^{w(E)}$. Por la observación 2.33 $j_* : C_p(X,E) \longrightarrow C_p(X,\ \mathbb{R}^{w(E)})$ es también encaje. Por otro lado, la proposición 3.9 implica que $C_p(X,\ \mathbb{R}^{w(E)}) \cong C_p(X,\ \mathbb{R})^{w(E)}$ y este último espacio es homeomorfo a $C_p(X \times w(E), \mathbb{R})$. [15]

Usando que t es monótona y el teorema 4.46 (2),

$$t(C_p(X,E)) \leq t(C_p(X \times w(E))) \leq l^*(X \times w(E)).$$

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(X \times w(E))^n \cong X^n \times w(E)^n \cong X^n \times w(E)$ y, como para cada $\lambda < w(E)$, $X^n \times \{\lambda\} \cong X^n$, es fácil percatarse de que $l(X^n \times w(E)) \leq l(X^n)w(E)$.
Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, $l((X \times w(E))^n) \leq l(X^n)w(E) \leq l^*(X)w(E)$ y con ello, $l^*(X \times w(E)) \leq l^*(X)w(E)$. Así, $t(C_p(X,E)) \leq l^*(X)w(E)$. □

[15] Aquí $w(E)$ se está considerando como el espacio discreto de cardinalidad $w(E)$, por lo cual la suma topológica $\bigoplus_{\lambda<w(E)} X \cong X \times w(E)$ y se está usando la proposición 3.10.

COROLARIO 4.49. *Si E es de Tychonoff con más de un punto y $X \in R(E)$, entonces*
$$l^*(X) \leq t(C_p(X,E)) \leq l^*(X)w(E).$$
Si además E es segundo numerable, $l^*(X) = t(C_p(X,E))$.

COROLARIO 4.50. *Si X es compacto y E-regular, entonces $t(C_p(X,E)) = \aleph_0$, para todo espacio de Tychonoff E, segundo numerable y con más de un punto.*

COROLARIO 4.51. *Si E es un espacio de Tychonoff, segundo numerable y tiene por lo menos dos puntos, l^* es t_E-invariante en espacios E-regulares.*

4. Estrechez débil y estrechez funcional

DEFINICIÓN 4.52. *Sean X y Y espacios topológicos, τ un cardinal y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que:*

(1) *f es* **τ-continua** *si para todo subespacio A de X, de cardinalidad a lo más τ, la restricción $f|_A : A \longrightarrow Y$ es continua.*
(2) *f es* **estrictamente τ-continua** *si para todo subespacio A de X, de cardinalidad a lo más τ, existe $g \in C(X,Y)$ tal que $g|_A = f|_A$.*

DEFINICIÓN 4.53. *Sean X y E espacios topológicos cualesquiera.*

(1) *La* **estrechez débil de X**, *$t_c(X)$, es el más pequeño cardinal infinito τ tal que la siguiente condición se cumple:*
   - *Si un conjunto $A \subseteq X$ no es cerrado en X, entonces existen un punto $x \in (cl_X A) \setminus A$, un conjunto $B \subseteq A$ y un conjunto $C \subseteq X$, para los cuales $x \in cl_X B$, $B \subseteq cl_X C$ y $|C| \leq \tau$.*
(2) *La* **E-estrechez funcional de X**, *$Et_0(X)$, es el mínimo cardinal infinito τ tal que toda función τ-continua, $f : X \longrightarrow E$, es continua.*
(3) *La* **E-estrechez funcional débil de X**, *$Et_R(X)$, es el mínimo cardinal infinito τ tal que toda función estrictamente τ-continua, $f : X \longrightarrow E$, es continua.*
(4) *Si $E = \mathbb{R}$, hablaremos sencillamente de la* **estrechez funcional** *y de la* **estrechez funcional débil** *de X, en vez de la E-estrechez y de la E-estrechez débil, respectivamente, y las denotaremos también sin la E: $t_0(X)$ y $t_R(X)$.*[16]

Antes de dar las primeras relaciones entre estas funciones cardinales, probemos el siguiente lema:

LEMA 4.54. *Si τ es un cardinal infinito y $f : X \longrightarrow Y$ es τ-continua, entonces, para todo subconjunto A de X, de cardinalidad a lo más τ, $f(cl_X A) \subseteq cl_Y f(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $A \subseteq X$ tal que $|A| \leq \tau$, $b \in cl_X A$ y $Z = A \cup \{b\}$. Entonces $|Z| \leq \tau$ y $f|_Z : Z \longrightarrow Y$ es continua. Así que si V es una vecindad abierta de $f(b)$ en Y, existe U, abierto en X, tal que $b \in U$ y $f(U \cap Z) \subseteq V$. Como $b \in cl_X A$, existe $a \in U \cap A$, por lo que $f(a) \in f(U \cap Z) \subseteq V$ y $f(a) \in f(A)$. Por consiguiente $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Esto muestra que $f(b) \in cl_Y f(A)$. □

PROPOSICIÓN 4.55. *Dados dos espacios X y E, se tiene:*

(1) $Et_R(X) \leq Et_0(X)$.

[16] Ver la sección II.4 de [9] para estudiar estas funciones cardinales.

(2) *Si E es regular, $Et_\theta(X) \leq t_c(X)$*
(3) $t_c(X) \leq t(X)$
(4) $t_c(X) \leq d(X)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Note que toda función estrictamente τ-continua es τ-continua.

(2) Sean $\tau = t_c(X)$ y $C = \{\kappa : \ \forall f \in E^X, \ (f \ \kappa\text{-continua} \Longrightarrow f \text{ continua})\}$.

Probaremos que $\tau \in C$:

Sea $f : X \longrightarrow E$ τ-continua. Para mostrar que es continua, veremos que $f(cl_X P) \subseteq cl_E f(P)$, para todo $P \subseteq X$:

Sean $P \subseteq X$ y $A = \{x \in cl_X P : \ f(x) \in cl_E f(P)\}$. Entonces $P \subseteq A \subseteq cl_X A$ y $A \subseteq cl_X P \Longrightarrow cl_X A \subseteq cl_X P$. Por eso $cl_X A = cl_X P$. Queremos ver que $A = cl_X P$. Supongamos que no es así, es decir, que $A \neq cl_X P$. Entonces $A \neq cl_X A$ y como $\tau = t_c(X)$, existe $x \in cl_X A \setminus A$ y existen $B \subseteq A$ y $C \subseteq X$ tales que $x \in cl_X B$, $B \subseteq cl_X C$ y $| C | \leq \tau$. Si lográramos demostrar que $f(x) \in cl_E f(B)$, llegaríamos a que $f(x) \in cl_E f(A)$; pero por definición de A, $f(A) \subseteq cl_E f(P)$, y tendríamos que $f(x) \in cl_E f(P)$ y $x \in cl_X A = cl_X P$, lo que implicaría que $x \in A$, lo que constituiría una contradicción al hecho de que $x \notin A$. Entonces, para llegar a una contradicción por suponer que $A \neq cl_X P$, hay que ver que esta hipótesis implica que $f(x) \in cl_E f(B)$:

Si $y \in E \setminus cl_E f(B)$, existe una vecindad abierta V de y en E tal que $V \cap f(B) = \emptyset$ y, como E es regular, existe un abierto W en E tal que $y \in cl_E W \subseteq V$. Si llamamos U a $E \setminus cl_E W$, U es abierto en E y, en vista de que $cl_E W \cap f(B) = \emptyset$, $f(B) \subseteq U$. Como $W \cap U = \emptyset$, $y \notin cl_E U$. Entonces $y \notin \bigcap\{cl_E U : U \text{ es abierto en } E \text{ y } f(B) \subseteq U\}$. Sea $D = \bigcap\{cl_E U : U \text{ es abierto en } E \text{ y } f(B) \subseteq U\}$. Hemos demostrado que $D \subseteq cl_E f(B)$. Por lo tanto, para concluir que $f(x) \in cl_E f(B)$, basta ver que $f(x) \in D$:

Sea U un abierto en E tal que $f(B) \subseteq U$ y pongamos $C_0 = \{c \in C : f(c) \in U\}$ y $C_1 = C \setminus C_0$. Entonces $B \subseteq cl_X C = cl_X(C_0 \cup C_1) = cl_X C_0 \cup cl_X C_1$ y, si $b \in cl_X C_1$, por el lema 4.54 $f(b) \in f(cl_X C_1) \subseteq cl_Y f(C_1)$. Como $f(C_1) \cap U = \emptyset$ y U es abierto E, $f(b) \notin U$. Dado que $f(B) \subseteq U$, $b \notin B$. Entonces $B \cap cl_X C_1 = \emptyset$ y por lo tanto $B \subseteq cl_X C_0$. En vista de que $x \in cl_X B \subseteq cl_X C_0$, nuevamente el lema 4.54 implica que $f(x) \in f(cl_X C_0) \subseteq cl_Y f(C_0)$. Como $f(C_0) \subseteq U$, $f(x) \in cl_E U$.

Así, $f(x) \in D$.

(3) y (4) Son muy sencillas (ver II.4.2 de [9]).

□

PROPOSICIÓN 4.56. *Si τ es un cardinal infinito, $E \in \mathbb{P}_1$[17] y es un espacio de Hausdorff con más de un punto, y si $X \in R(E)$, entonces se tiene:*

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d),$$

donde:

(a) *Para toda $Y \subseteq X$, $Et_\theta(Y) \leq \tau$.*
(b) *Para toda $Y \subseteq X$, $Et_R(Y) \leq \tau$.*
(c) $t(X) \leq \tau$
(d) *Para toda $Y \subseteq X$, $t_c(Y) \leq \tau$.*

Si además E es regular, $(d) \Longrightarrow (a)$.

[17] Recordar definición 1.46

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Longrightarrow (b)$, $(c) \Longrightarrow (d)$ y $(d) \Longrightarrow (a)$ (cuando E es regular), se siguen de la proposición 4.55.

$(b) \Longrightarrow (c)$: Sean $A \subseteq X$ y $P = \bigcup\{cl_X B : B \subseteq A \text{ y } |B| \leq \tau\}$.

$A \subseteq P$ ya que si $a \in A$, $cl_X\{a\} \in \{cl_X B : B \subseteq A \text{ y } |B| \leq \tau\}$ y por lo tanto $a \in P$. Sin embargo, $P \subseteq cl_X A$, así que $cl_X A = cl_X P$.

Probaremos que $P = cl_X A$: Supongamos que $P \neq cl_X A$. Sea $y \in cl_X A \setminus P$. Si $Y = P \cup \{y\}$ y e_1 y e_2 son dos puntos distintos de E, la función $f : Y \longrightarrow E$ tal que $f(P) \subseteq \{e_1\}$ y $f(y) = e_2$, es estrictamente τ-continua. En efecto, si $C \subseteq Y$ y $|C| \leq \tau$, poniendo $C_0 = C \cap A$ se tiene que $|C_0| \leq \tau$ y $C_0 \subseteq A$, con lo que $y \notin cl_X C_0$, pues $y \notin P$. Como $X \in R(E) = R_1(E)$ [18], existe $g \in C(X, E)$ tal que $g(y) = e_2$ y $g(cl_X C_0) \subseteq \{e_1\}$. Si $c \in C$ y $c = y$, $g(c) = g(y) = e_2 = f(y) = f(c)$; si $c \in C$ y $c \neq y$, entonces $c \in P \subseteq cl_X A$, por lo que $c \in C \cap cl_X A \subseteq cl_X C_0$ y $g(c) = e_1 = f(c)$. Por lo tanto $f|_C = g|_C$ lo que implica que $f|_C$ es continua. f es entonces estrictamente τ-continua y como $Et_R(Y) \leq \tau$, f es continua. Esto contradice el que $f(y) = e_2$, $f(P) \subseteq \{e_1\}$ y $y \in cl_X P$.

Por consiguiente, $P = cl_X A$ y así, $t(X) \leq \tau$. □

DEFINICIÓN 4.57. *Sean X un espacio topológico, τ un cardinal y $A \subseteq X$. Entonces:*

(1) *A* **es del tipo G_τ en X** *si existe una familia γ de abiertos en X, tal que $A = \bigcap \gamma$ y $|\gamma| \leq \tau$.*
(2) *A* **está τ-colocado en X** [19] *si para toda $x \in X \setminus A$, hay un conjunto P de tipo G_τ tal que $x \in P \subseteq X \setminus A$*

OBSERVACIÓN 4.58. (1) Si $X \subseteq Y \subseteq Z$ con X τ-colocado en Y y Y τ-colocado en Z, entonces X está τ-colocado en Z.
(2) Si X es de Tychonoff y está τ-colocado en alguna de sus compactaciones, entonces X está τ-colocado en βX.
(3) Si X es E-regular y está τ-colocado en alguna de sus extensiones E-compactas, está τ-colocado en $\beta_E X$.

DEFINICIÓN 4.59. *sean E un espacio cualquiera y $X \in R(E)$. Definimos:*

$$q_E(X) = min\{\tau \geq \aleph_0 : X \text{ está } \tau\text{-colocado en } \beta_E X\}$$

OBSERVACIÓN 4.60. (1) Si $E = \mathbb{I}$, $q_E(X)$ suele denotarse por $q(X)$ y llamarse **el número de Hewitt–Nachbin** de X.
(2) Un resultado conocido (ver [**15**], problemas 82 u 86, cap. 4) afirma que si X es completamente regular entonces:

$$X \text{ es realcompacto } \Longleftrightarrow X \text{ está } \delta\text{-colocado en } \beta X \Longleftrightarrow q(X) \leq \aleph_0$$

(3) Si X es cero-dimensional, entonces:

$$X \text{es } \mathbb{N}\text{-compacto} \Longleftrightarrow X \text{ está } \delta\text{-colocado en } \beta_2 X \Longleftrightarrow q_2(X) \leq \aleph_0$$ [20]

[18] Definición 1.43
[19] En [**23**] en vez de que A está τ-colocado en X dicen: A es G_τ-cerrado en X
[20] Ver corolario 2.9 en [**23**]

(4) Si X es cerrado en Y entonces $q_E(X) \leq q_E(Y)$. Esto se sigue de que, si X es cerrado en Y, está τ-colocado en Y para cualquier $\tau \geq \aleph_0$, y si $\tau = q_E(Y)$, entonces Y está τ-colocado en $\beta_E Y$ y $X \subseteq Y \subseteq \beta_E Y$. Esto implica que X está τ-colocado en $\beta_E Y$. Así que por la observación 4.58(3), X está τ-colocado en $\beta_E X$. Por eso $q_E(X) \leq \tau$.

DEFINICIÓN 4.61. *Si X es un espacio topológico y τ es un cardinal, entonces:*

(1) *Un subconjunto F de X es* **cerrado canónico** *en X si es la cerradura de un abierto en X.*

(2) *X es un* **m_τ-espacio** *si para cada cerrado canónico F en X y cada $x \in F$, existe un conjunto P de tipo G_τ en X tal que $x \in P \subseteq F$.*

(3) *$m(X) = min\{\tau \geq \aleph_0 : X$ es un m_τ-espacio$\}$.*[21]

(4) *X es un* **espacio Moscú** *si $m(X) \leq \aleph_0$.*

OBSERVACIÓN 4.62. (1) Si $\tau = |X|$ y X es T_1, entonces X es un m_τ-espacio. ([**9**])

(2) Si todo cerrado canónico en X es de tipo G_δ entonces X es un espacio Moscú. ([**9**])

(3) $\mathbb{R}^A$ y todo subespacio denso en él, son espacios Moscú. ([**9**])

(4) $m(C_p(X)) \leq \aleph_0$. ([**9**])

(5) Todos los espacios diádicos compactos son espacios Moscú (ver ejemplo 3 de [**4**]). En particular, para cualquier X, $\mathbf{2}^X$ es Moscú.

(6) Todo subespacio denso en un espacio Moscú es también Moscú. ([**9**])

PROPOSICIÓN 4.63. *Sea Y un espacio cero-dimensional tal que $m(Y) \leq \tau$ y sea X un subespacio denso en Y tal que $q_2(X) \leq \tau$. Entonces X está τ-colocado en Y.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in Y \setminus X$. Como X es denso en Y y Y es denso en $B = \beta_2 Y$, B es extensión $\mathbf{2}$-compacta de X, así que existe $f : \beta_2 X \longrightarrow B$ tal que $f|_X = 1|_X$ y $f(\beta_2 X \setminus X) \subseteq B \setminus X$.
Dado que f es continua de un compacto en un Hausdorff, es cerrada y, como $X = f(X) \subseteq f(\beta_2 X)$, se tiene que $Y = cl_Y X \subseteq cl_B X \subseteq cl_B f(\beta_2 X) = f(\beta_2 X)$.
Entonces $|f^{\leftarrow}(y)| \geq 1$.

(i) Supongamos que $|f^{\leftarrow}(y)| = 1$. Existe entonces $z \in \beta_2 X \setminus X$ tal que $f^{\leftarrow}(y) = \{z\}$. Como $q_2(X) \leq \tau$, existe una familia γ de abiertos en $\beta_2 X$ tal que $z \in \bigcap \gamma \subseteq \beta_2 X \setminus X$ y $|\gamma| \leq \tau$.
Para cada $U \in \gamma$, sea $V_U = B \setminus f(\beta_2 X \setminus U)$. Este conjunto es abierto en B y $y = f(z) \in V_U$ ($z \in U \Longrightarrow z \notin \beta_2 X \setminus U$). Por lo tanto $y \in \bigcap \lambda$, donde $\lambda = \{V_U : U \in \gamma\}$.
Notemos que $|\lambda| \leq |\gamma| \leq \tau$. Por otro lado, $\bigcap \lambda = B \setminus \bigcup\{f(\beta_2 X \setminus U) : U \in \gamma\} = B \setminus f(\bigcup\{\beta_2 X \setminus U : U \in \gamma\})$ y $\bigcap \gamma \subseteq \beta_2 X \setminus X \Longrightarrow X \subseteq \beta_2 X \setminus \bigcap \gamma = \bigcup\{\beta_2 X \setminus U : U \in \gamma\} \Longrightarrow X = f(X) \subseteq f(\bigcup\{\beta_2 X \setminus U : U \in \gamma\})$.
Por consiguiente, $\bigcap \gamma \subseteq B \setminus X$.
Sea $P = (\bigcap \gamma) \cap Y$. Entonces P es de tipo G_τ en Y y $y \in P \subseteq Y \setminus X$.

(ii) Supongamos que $|f^{\leftarrow}(y)| \geq 2$. Sean $z_1, z_2 \in f^{\leftarrow}(y)$ con $z_1 \neq z_2$. Notar que ni z_1 ni z_2 son elementos de X.
Existen O_1 y O_2, vecindades abiertas de z_1 y z_2 en $\beta_2 X$, respectivamente, tales que $cl_{\beta_2 X} O_1 \cap cl_{\beta_2 X} O_2 = \emptyset$. Para cada $i \in [2]$, sean $V_i = O_i \cap X$

[21] A $m(X)$ se le ha llamado la modalidad de X (ver [**4**])

y $F_i = cl_Y V_i$. Entonces $z_i \in cl_{\beta_2 X} O_i = cl_{\beta_2 X} V_i$ y, como f es continua, $f(V_i) = V_i$ y $y = f(z_i)$, se tiene que $y \in f(cl_{\beta_2 X} V_i) \subseteq cl_B f(V_i) = cl_B V_i = cl_B V_i \cap Y = cl_Y V_i = F_i$.
Pero $F_1 \cap F_2 = (cl_Y V_1 \cap cl_Y V_2) \cap X = cl_X V_1 \cap cl_X V_2 = cl_{\beta_2} V_1 \cap cl_{\beta_2} V_2 \cap X \subseteq cl_{\beta_2} O_1 \cap cl_{\beta_2} O_2 = \emptyset$. Por lo tanto $F_1 \cap F_2 \subseteq Y \setminus X$.
Para cada $i \in [2]$, sea W_i un abierto en Y tal que $W_i \cap X = V_i$. Así $cl_Y W_i = cl_Y(W_i \cap X) = cl_Y V_i = F_i$ y entonces F_i es un cerrado canónico en Y.
Como $m(Y) \leq \tau$, para cada $i \in [2]$, existe una familia γ_i de abiertos en Y tal que $y \in \bigcap \gamma_i \subseteq F_i$ y $|\gamma_i| \leq \tau$. Sea $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$. Entonces $|\gamma| \leq \tau$ y $y \in \bigcap \gamma = (\bigcap \gamma_1) \cap (\bigcap \gamma_2) \subseteq F_1 \cap F_2 \subseteq Y \setminus X$.
□

PROPOSICIÓN 4.64. *Sea E un espacio tal que todo singulete de él es de tipo G_τ. Si Y es un espacio tal que $Et_R(Y) \leq \tau$, entonces $C_p(Y, E)$ está τ-colocado en E^Y.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in E^Y \setminus C_p(Y, E)$.
Como $Et_R(Y) \leq \tau$, entonces g no es estrictamente τ-continua, lo que implica que existe $A \subseteq Y$ tal que $|A| \leq \tau$ y $g|_A$ no es continua, así que, para toda $f \in C_p(Y, E)$ se tiene que $f|_A \neq g|_A$.
Si $i : A \hookrightarrow Y$ es la inclusión e $i^\sharp : E^Y \longrightarrow E^A$ es el mapeo dual definido en (3) de la observación 2.5, entonces $i^\sharp(g) \in E^A \setminus Z$, donde $Z = i^\sharp(C_p(Y, E))$. Pero todo singulete en E^A es del tipo G_τ (en efecto, si $\hat{e} = (e_a)_{a \in A}$ es un elemento de E^A, para cada $a \in A$ existe una familia de abiertos en E, γ_a, tal que $\{e_a\} = \bigcap \gamma_a$ y $|\gamma_a| \leq \tau$. Así, $\{\hat{e}\} = \bigcap_{a \in A} \bigcap_{U \in \gamma_a} [a;\ U]$ [22]y la familia $\gamma = \{[a;\ U] : a \in A,\ U \in \gamma_a\}$ tiene cardinalidad menor o igual que τ). Entonces $P = (i^\sharp)^{\leftarrow}(\{i^\sharp(g)\})$ es del tipo G_τ en E^Y y $g \in P \subseteq E^Y \setminus C_p(Y, E)$. □

PROPOSICIÓN 4.65. *Sean X y E espacios cualesquiera. Si $C_p(X, E)$ está τ-colocado en E^X, entonces $Et_R(X) \leq \tau$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : X \longrightarrow E$ estrictamente τ-continua. Probaremos que $g \in C_p(X, E)$.

Supongamos que $g \notin C_p(X, E)$. Como $C_p(X, E)$ está τ-colocado en E^X, existe un conjunto P de tipo G_τ en E^X tal que $g \in P \subseteq E^X \setminus C_p(X, E)$. Sea $P = \bigcap_{\lambda < \tau} A_\lambda$, donde cada A_λ es abierto en E^X. Para toda $\lambda < \tau$, existe una vecindad canónica $\widetilde{W_\lambda}$ de g en E^X tal que $g \in \widetilde{W_\lambda} \subseteq A_\lambda$, con soporte S_λ.[23]

Sea $A = \bigcup_{\lambda < \tau} S_\lambda$. Entonces $|A| \leq \tau$.

Si $f \in E^X$ es tal que $f|_A = g|_A$ se tiene que $\forall \lambda < \tau\ \forall x \in S_\lambda :\ f(x) = g(x)$ y por lo tanto $\forall \lambda < \tau :\ f \in \widetilde{W_\lambda}$, así que $f \in P$. Tenemos entonces que $g \in \{f \in E^X :\ f|_A = g|_A\} \subseteq P$.

Ahora bien, como g es estrictamente τ-continua y $|A| \leq \tau$, existe $h \in C_p(X, E)$ tal que $h|_A = g|_A$, lo que implica que $h \in P$ y $P \cap C_p(X, E) \neq \emptyset$, una contradicción. Así pues $g \in C_p(X, E)$. □

[22] Ver las notaciones que anteceden a 2.10.

[23] Si $\widetilde{W_\lambda} = [x_1, \ldots, x_n;\ U_1, \ldots, U_n]$, su soporte es el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

COROLARIO 4.66. *Si E es tal que todo singulete de él es G_τ entonces:*

$$C_p(X,E) \text{ está } \tau \text{ colocado en } E^X \iff Et_R(X) \leq \tau.$$

PROPOSICIÓN 4.67. *Para cualquier espacio X cero-dimensional,*

$$\mathbf{2}t_R(X) = q_\mathbf{2}(C_p(X,\mathbf{2})).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = \mathbf{2}t_R(X)$. Por el corolario anterior, $C_p(X,\mathbf{2})$ está τ-colocado en $\mathbf{2}^X$, que es una extensión $\mathbf{2}$-compacta de $C_p(X,\mathbf{2})$. Por (3) de 4.59, $C_p(X,\mathbf{2})$ está τ-colocado en $\beta_\mathbf{2}(C_p(X,\mathbf{2}))$, así que $q_\mathbf{2}(C_p(X,\mathbf{2})) \leq \tau$. Por lo tanto:

$$q_\mathbf{2}(C_p(X,\mathbf{2})) \leq \mathbf{2}t_R(X).$$

Ahora sea $\lambda = q_\mathbf{2}(C_p(X,\mathbf{2}))$
Por (5) de 4.62, $\mathbf{2}^X$ es un espacio Moscú, es decir, $m(\mathbf{2}^X) = \aleph_0 \leq \lambda$. Además $C_p(X,\mathbf{2})$ es denso en $\mathbf{2}^X$. Por la proposición 4.63, $C_p(X,\mathbf{2})$ está λ-colocado en $\mathbf{2}^X$.
Por el corolario anterior, $\mathbf{2}t_R(X) \leq \lambda$
Por lo tanto, $\mathbf{2}t_R(X) \leq q_\mathbf{2}(C_p(X,\mathbf{2}))$. □

COROLARIO 4.68. *Sea X cero-dimensional. Entonces $C_p(X,\mathbf{2})$ es $\mathbb{N}$-compacto si y sólo si $\mathbf{2}t_R(X) = \aleph_0$.*

COROLARIO 4.69. *Para los espacios cero-dimensionales X y Y, se tiene:*

$$C_p(X,\mathbf{2}) \cong C_p(Y,\mathbf{2}) \Longrightarrow \mathbf{2}t_R(X) = \mathbf{2}t_R(Y).$$

COROLARIO 4.70. *Si X es cero-dimensional, $q_\mathbf{2}(X) \leq \mathbf{2}t_R(C_p(X,\mathbf{2}))$.*

DEMOSTRACIÓN. Por 4.67, $\mathbf{2}t_R(C_p(X,\mathbf{2})) = q_\mathbf{2}(C_p(C_p(X,\mathbf{2}),\mathbf{2}))$. Pero por el teorema 2.54 (3), X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $C_p(C_p(X,\mathbf{2}),\mathbf{2})$. Por (4) de 4.60, $q_\mathbf{2}(X) \leq q_\mathbf{2}(C_p(C_p(X,\mathbf{2}),\mathbf{2})) = \mathbf{2}t_R(C_p(X,\mathbf{2}))$. □

NOTACIÓN: Si X es un espacio topológico, $A \subseteq X$ y τ es un cardinal, entonces $[A]_\tau$ denotará al conjunto $\bigcup\{cl_X B : B \subseteq A \text{ y } |B| \leq \tau\}$.

LEMA 4.71. *Supongamos que:*

(i) *$f : Y \longrightarrow Z$ es continua y suprayectiva,*
(ii) *$\mathbf{2}t_0(Y) \leq \tau$, donde τ es un cardinal infinito,*
(iii) *existe una base $\mathcal{B}$ de Y tal que, para cada $V \in \mathcal{B}$, hay un abierto G de Z tal que $f(V) \subseteq G \subseteq [f(V)]_\tau$.*

Entonces $\mathbf{2}t_0(Z) \leq \tau$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\phi : Z \longrightarrow \mathbf{2}$ τ-continua y $z_0 \in Z$. Probaremos que ϕ es continua en z_0:
Sea $y_0 \in f^{\leftarrow}(z_0)$. Como f es continua, $\phi \circ f : Y \longrightarrow \mathbf{2}$ es τ-continua y, dado que $\mathbf{2}t_0(Y) \leq \tau$, $\phi \circ f$ es continua. Entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $y_0 \in V$ y $\phi \circ f(V) \subseteq \{\phi(z_0)\}$.
Por hipótesis, como $V \in \mathcal{B}$, existe un abierto G en Z tal que $f(V) \subseteq G \subseteq [f(V)]_\tau$; por eso $z_0 \in G$ y $\phi(G) \subseteq \phi([f(V)]_\tau)$. Entonces basta demostrar que $\phi([f(V)]_\tau) \subseteq \{\phi(z_0)\}$. Sea $B \subseteq f(V)$ tal que $|B| \leq \tau$. Como ϕ es τ-continua, por el lema 4.54 se tiene que $\phi(cl_Z B) \subseteq cl_\mathbf{2}\phi(B) \subseteq cl_\mathbf{2}\phi(f(V)) = \{\phi(z_0)\}$
Por consiguiente, $\phi([f(V)]_\tau) = \{\phi(z_0)\}$. □

TEOREMA 4.72. *Sea X un espacio cero-dimensional. Entonces*

$$2t_\theta(C_p(X,\mathbf{2})) \leq q_2(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = q_2(X)$. Si $i : X \hookrightarrow \beta_2 X$ es la inclusión, el mapeo restricción, $i^* : C_p(\beta_2 X, \mathbf{2}) \longrightarrow C_p(X,\mathbf{2})$ es condensación a su imagen (ver 2.29); pero como X está $\mathbf{2}$-encajado en $\beta_2 X$, i^* es sobreyectiva (ver 2.30). Por (2) y (3) de 4.55, $2t_\theta(C_p(\beta_2 X,\mathbf{2})) \leq t(C_p(\beta_2 X,\mathbf{2})) \leq \aleph_0$. La última desigualdad se debe a la proposición 4.50, ya que $\beta_2 X$ es compacto.

Entonces se cumplen:

(i) $i^* : C_p(\beta_2 X, \mathbf{2}) \longrightarrow C_p(X,\mathbf{2})$ es continua y sobreyectiva.

(ii) $2t_\theta(C_p(\beta_2 X,\mathbf{2})) \leq \aleph_0 \leq \tau$.

Y si logramos probar que:

(iii) existe una base $\mathcal{B}$ de $C_p(\beta_2 X,\mathbf{2})$ tal que para cada $V \in \mathcal{B}$ existe un abierto G en $C_p(X,\mathbf{2})$ tal que $i^*(V) \subseteq G \subseteq [i^*(V)]_\tau$,

ya habremos acabado, en vista del lema anterior.

Probaremos entonces (iii). Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $C_p(\beta_2 X,\mathbf{2})$ cuyos elementos son los conjuntos de la forma $\langle x_1,\dots,x_n;\ \{m_1\},\dots,\{m_n\}\rangle$, donde $x_1,\dots,x_n \in \beta_2 X$ y $\{m_1\},\dots,\{m_n\}$ son singuletes en $\mathbf{2}$.

Sea $V = \langle x_1^*,\dots,x_l^*,\ x_1,\dots,x_n;\ \{m_1\},\dots,\{m_l\},\ \{\tilde{n}_1\},\dots,\{\tilde{n}_n\}\rangle$ un elemento cualquiera de $\mathcal{B}$, en el que podemos suponer que:

$\forall j \in [l]$, $x_j^* \in \beta_2 X \setminus X$,
$\forall j \in [n]$, $x_j \in X$,
$\forall i \in [l]$ y $\forall j \in [n]$, $m_i \in \mathbf{2}$ y $\tilde{n}_j \in \mathbf{2}$.

Sea $G = \langle x_1,\dots,x_n;\ \{\tilde{n}_1\},\dots,\{\tilde{n}_n\}\rangle$. G es un básico canónico de $C_p(X,\mathbf{2})$ e $i^*(V) \subseteq G$.

Resta probar que $G \subseteq [i^*(V)]_\tau$. Manos a la obra. Sean $f \in G$ y $K = \{x_1^*,\dots,x_l^*\}$. Como $q_2(X) \leq \tau$, X está τ-colocado en $\beta_2 X$. Entonces, para cada $j \in [l]$, existe una familia de abiertos en $\beta_2 X$, γ_j, tal que $|\gamma_j| \leq \tau$ y $x_j^* \in \bigcap \gamma_j \subseteq \beta_2 X \setminus X$.

Sea $\xi = \{V_1 \cup \dots \cup V_l : \forall j \in [l],\ V_j \in \gamma_j\}$. Nótese que cada elemento de ξ es abierto en $\beta_2 X$ y que $|\xi| \leq |\gamma_1 \times \dots \times \gamma_l| \leq \tau$.

Sea γ la familia de intersecciones finitas de elementos de ξ. Cada elemento de γ es abierto en $\beta_2 X$ y $|\gamma| \leq \tau$. Probaremos en seguida que $K \subseteq \bigcap\gamma$. Sean $U \in \gamma$ y $x_{i_0}^* \in K$. Existen $L_1,\dots,L_k \in \xi$ tales que $U = \bigcap_{j\in[k]} L_j$ y para toda $j \in [k]$ existe $(V_1^j,\dots,V_l^j) \in \gamma_1 \times \dots \times \gamma_l$ tal que $L_j = V_1^j \cup \dots \cup V_l^j$. Como $V_{i_0}^j \in \gamma_{i_0}$ y $x_{i_0}^* \in \bigcap\gamma_{i_0}$, $x_{i_0}^* \in V_{i_0}^j \subseteq L_j$. Así, para toda $j \in [k]$, $x_{i_0}^* \in L_j$, lo que implica que $x_{i_0}^* \in U$. Por consiguiente $K \subseteq U$ y como esto es para toda $U \in \gamma$, se concluye que $K \subseteq \bigcap\gamma$.

Si $F = \{y_1,\dots,y_p\}$ es un subconjunto finito de X, entonces, como para toda $j \in [l]$, $\bigcap\gamma_j \subseteq \beta_2 X \setminus X$, un elemento cualquiera y_i de F no está en $\bigcap\gamma_j$ y por lo tanto existe $V_j^i \in \gamma_j$ tal que $y_i \notin V_j^i$. Esto quiere decir, a la postre, que $y_i \notin V_1^i \cup \dots \cup V_l^i \in \xi$. Se tiene entonces que $F \cap (L_1 \cap \dots \cap L_p) = \emptyset$ y $L_1 \cap \dots \cap L_p \in \gamma$. Hemos demostrado en este párrafo que para cada conjunto finito F de X existe $U \in \gamma$ tal que $F \cap U = \emptyset$

Pongamos $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, donde $|\Lambda| \leq \tau$ y, para toda $\alpha \in \Lambda$, sea $P_\alpha = X \setminus U_\alpha$. Entonces $P_\alpha = X \cap (\beta_2 X \setminus U_\alpha)$ es cerrado en X y, por lo demostrado en el párrafo anterior, $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$. Denotemos por $\bar{P}_\alpha$ al conjunto $cl_{\beta_2 X} P_\alpha$. Sea

$\alpha \in \Lambda$. Observemos primero que $K \cap \bar{P}_\alpha \subseteq U_\alpha \cap \bar{P}_\alpha = \emptyset$. Como $\beta_2 X$ es compacto y Hausdorff, es normal, Ahora bien, la función

$$f_\alpha : K \cup \bar{P}_\alpha \cup \{x_1, \dots , x_n\} \longrightarrow \mathbf{2}$$

tal que $f_\alpha(x_j^*) = m_j$, para toda $j \in [l]$ y $f_\alpha|_{\bar{P}_\alpha \cup \{x_1,\dots,x_n\}} = \tilde{f}|_{\bar{P}_\alpha \cup \{x_1,\dots,x_n\}}$, donde $\tilde{f} \in C_p(\beta_2 X, \mathbf{2})$ es la función tal que $\tilde{f}|_X = f$ (ver el teorema 1.67), es continua y el conjunto $K \cup \bar{P}_\alpha \cup \{x_1, \dots , x_n\}$ es cerrado en $\beta_2 X$. Por consiguiente, como $\beta_2 X$ es compacto y Hausdorff y por lo tanto normal, existe $\tilde{f}_\alpha \in C_p(\beta_2 X, \mathbf{2})$ tal que $\tilde{f}_\alpha|_{K \cup \bar{P}_\alpha \cup \{x_1,\dots,x_n\}} = f_\alpha$. Nótese que para toda $\alpha \in \Lambda$ $\tilde{f}_\alpha \in V$.
Sea $B = \{i^*(\tilde{f}_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$. Entonces $B \subseteq i^*(V)$ y $|B| \leq |\Lambda| \leq \tau$.

Sólo falta ver que $f \in cl_{C_p(X,\mathbf{2})} B$. Sea $W = \langle z_1, \dots , z_k;\ f(z_1), \dots , f(z_k)\rangle$ una vecindad canónica básica de f en $C_p(X, \mathbf{2})$. Sea $F = \{z_1, \dots , z_k\}$. Como $F \subseteq X$ es finito, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $U_\alpha \cap F = \emptyset$. Por lo tanto $F \subseteq P_\alpha$, $i^*(\tilde{f}_\alpha) \in B$ y $\forall j \in [k]$, $i^*(\tilde{f}_\alpha)(z_j) = \tilde{f}_\alpha|_{X(=\bigcup P_\alpha)}(z_j) = \tilde{f}_\alpha|_{P_\alpha}(z_j) = \tilde{f}_\alpha(z_j) = f(z_j)$. Por lo tanto $i^*(\tilde{f}_\alpha) \in B \cap W$.

Esto muestra que $f \in cl_{C_p(X,\mathbf{2})} B$ y posteriormente que $f \in [i^*(V)]_\tau$. □

COROLARIO 4.73. *Si X es cero-dimensional,*

$$q_2(X) = 2t_R(C_p(X, \mathbf{2})) = 2t_\theta(C_p(X, \mathbf{2})).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$q_2(X) \overset{4.70}{\leq} 2t_R(C_p(X, \mathbf{2})) \overset{4.55(1)}{\leq} 2t_\theta(C_p(X, \mathbf{2})) \overset{4.72}{\leq} q_2(X).$$

□

COROLARIO 4.74. *Si X y Y son cero-dimensionales y $C_p(X, \mathbf{2})$ y $C_p(Y, \mathbf{2})$ son homeomorfos, entonces $q_2(X) = q_2(Y)$. En particular, si X es $\mathbb{N}$-compacto, Y también lo es.*

COROLARIO 4.75. *$C_p([0, \omega_1), \mathbf{2})$ no es homeomorfo a $C_p([0, \omega_1], \mathbf{2})$.*

DEMOSTRACIÓN. $[0, \omega_1]$ es $\mathbb{N}$-compacto,[24] así que si $C_p([0, \omega_1), \mathbf{2})$ fuera homeomorfo a $C_p([0, \omega_1], \mathbf{2})$, por el corolario anterior $[0, \omega_1)$ sería $\mathbb{N}$-compacto, lo cual es falso pues, como $[0, \omega_1]$ es la G_δ-cerradura de $[0, \omega_1)$ en $\beta_2[0, \omega_1) = [0, \omega_1]$,[25] $\beta_{\mathbb{N}}[0, \omega_1) = \beta_2[0, \omega_1) = [0, \omega_1] \neq [0, \omega_1)$ □

LEMA 4.76. *Supongamos que $\mathrm{Ind}X = 0$ (recuérdese la proposición 1.72) Entonces toda función τ-continua $f : X \longrightarrow \mathbf{2}$ es estrictamente τ-continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \longrightarrow \mathbf{2}$ una función τ-continua. Probaremos que f es estrictamente τ-continua:
Sea A un subconjunto de X de cardinalidad menor o igual que τ.
Si denotamos con $\bar{A}$ a la cerradura de A en X, probaremos a continuación que $f|_{\bar{A}} : \bar{A} \longrightarrow \mathbf{2}$ es δ-continua, para toda $\delta \leq \tau$:
Supongamos que $B \subseteq \bar{A}$ y $|B| \leq \delta$. Entonces $B \subseteq X$ y $|B| \leq \tau$. Como $f : X \longrightarrow \mathbf{2}$ una función τ-continua, $f|_{\bar{A}}|_B = f|_B : B \longrightarrow \mathbf{2}$ es continua. Esto prueba que $f|_{\bar{A}}$

[24] Porque es cero-dimensional y de Lindelöf (ver teorema 3.11 de [23]).
[25] Ver el teorema 2.8 de [23]

es δ-continua.
En particular, $f|_{\bar{A}}$ es η-continua, donde $\eta = \mathbf{2}t_\theta(\bar{A})$, ya que por la proposición 4.55,

$$\mathbf{2}t_\theta(\bar{A}) \leq t_c(\bar{A}) \leq d(\bar{A}) \leq d(A) \leq |A| \leq \tau.$$

Por lo tanto, $f|_{\bar{A}}$ es continua. Pero por la proposición 1.72, $\bar{A}$ está $\mathbf{2}$-encajado en X, por lo que existe $g \in C_p(X, \mathbf{2})$ tal que $g|_{\bar{A}} = f|_{\bar{A}}$. En particular $g|_A = f|_A$, y esto termina la prueba de que f es estrictamente τ-continua. □

COROLARIO 4.77. *Si $IndX = 0$, entonces $\mathbf{2}t_R(X) = \mathbf{2}t_\theta(X)$.*

COROLARIO 4.78. *Si $IndX = 0$, entonces $\mathbf{2}t_\theta(X) = q_2(C_p(X, \mathbf{2}))$.*

DEMOSTRACIÓN. $\mathbf{2}t_\theta(X) = \mathbf{2}t_R(X) \overset{4.67}{=} q_2(C_p(X, \mathbf{2}))$. □

COROLARIO 4.79. *Si $IndX = 0 = IndY$ y si $C_p(X, \mathbf{2}) = C_p(Y, \mathbf{2})$, entonces $\mathbf{2}t_\theta(X) = \mathbf{2}t_\theta(Y)$. En pocas palabras, en el universo de los espacios con Ind igual a cero, $\mathbf{2}t_\theta$ es t_2-invariante.*

El corolario 4.77 y el corolario 4.73, responden parcialmente a la pregunta: **¿Para qué espacios Y se tiene que $\mathbf{2}t_\theta(Y) = \mathbf{2}t_R(Y)$?** El corolario 4.73 responde que para espacios Y del tipo $C_p(X, \mathbf{2})$, cuando ind$X = 0$; el corolario 4.77 añade los espacios Y tales que Ind$Y = 0$.

5. La propiedad de Fréchet–Urysohn, la secuencionalidad y la propiedad k en $C_p(X, \mathbf{2})$ y $C_p(X, \mathbb{Z})$.

DEFINICIÓN 4.80. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es:*

(1) **Secuencial** *si para cada subconjunto A no cerrado en X, hay una sucesión en A que converge a algún punto en $X \setminus A$.*
(2) **k-espacio** *si es de Hausdorff y si resulta cerrado en X todo conjunto cuya intersección con cada compacto $K \subseteq X$ es cerrado en K.*
(3) **Fréchet-Urysohn** *si para cada $A \subseteq X$ y $x \in X$, $x \in cl_X A$ si y sólo si existe una sucesión en A que converge a x.*

OBSERVACIÓN 4.81. Todo espacio Fréchet-Urysohn es secuencial y todo espacio secuencial y de Hausdorff es k-espacio (ver sección II.3 de [**9**]).

DEFINICIÓN 4.82 (II.3 de [**9**]). *Sea X un conjunto:*

(1) *Una* **ω-cubierta de** X *es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que, para cada conjunto finito $K \subseteq X$, existe $U \in \mathcal{A}$ tal que $K \subseteq U$.*
(2) *Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son ω-cubiertas de X, diremos que $\mathcal{A}_1$* **está inscrita en** *$\mathcal{A}_2$ si para cada $U \in \mathcal{A}_1$ existe $V \in \mathcal{A}_2$ tal que $U \subseteq V$. La proposición "$\mathcal{A}_1$ está inscrita en $\mathcal{A}_2$" se denotará por $\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2$.*
(3) *Si $\xi = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de subconjuntos de X, el conjunto $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap_{i\geq n} A_i)$ se llama* **límite inferior de la sucesión** *ξ. La proposición "B es el límite inferior de la sucesión ξ" se denotará por $B = lim\ inf\ \xi$, o por $lim\ inf\ \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ o simplemente por $A_n \longrightarrow B$.*

OBSERVACIÓN 4.83. [26] Sea X un conjunto:

[26] Ver sección II.3 de [9]

(1) Si C_ω es la familia de ω-cubiertas de X y $>$ es la relación en C_ω definida arriba, entonces $(C_\omega, >)$ es un conjunto dirigido.
En efecto, $>$ es reflexiva y transitiva en C_ω y, si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son ω-cubiertas de X, la familia $\mathcal{A} = \{U_1 \cap U_2 : U_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ y } U_2 \in \mathcal{A}_2\}$ es ω-cubierta de X, $\mathcal{A} > \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A} > \mathcal{A}_2$.

(2) Si $\xi = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de subconjuntos de X y $B = \lim\inf \xi$, entonces $x \in B \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 : x \in A_n$.

(3) Si ξ es una sucesión de subconjuntos de X y $X = \lim\inf \xi$, entonces ξ es ω-cubierta de X.

(4) Si $\mathcal{A}$ es una familia finita de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{A}$ es ω-cubierta de X si y sólo si existe $A \in \mathcal{A}$ talque $X = A$.

NOTACIONES:

(1) Si $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica y X es un espacio topológico, la proposición "X tiene la propiedad $\mathcal{P}$" se denotará por $X \vdash \mathcal{P}$.

(2) Denotaremos por γ a la propiedad siguiente: Para toda ω-cubierta abierta η de X, existe una sucesión $\xi \subseteq \eta$ tal que $\lim\inf \xi = X$.

(3) Denotaremos por γ_1 a la propiedad siguiente: Para toda sucesión $\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$ de ω-cubiertas abiertas de X y para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n \in \eta_n$ tal que $\lim\inf \{U_n : n \in \mathbb{N}\} = X$.

(4) Denotaremos por ϕ a la propiedad siguiente: Para toda ω-cubierta η de X, si $\eta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$, donde $\eta_n \subseteq \eta_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una familia $\xi = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ η_n es una ω-cubierta de X_n, y $\lim\inf \xi = X$.

(5) Denotaremos por ε a la propiedad siguiente: Toda cubierta abierta de X tiene una "ω-subcubierta" numerable.

PROPOSICIÓN 4.84 (II.3.3 y II.3.4 de [9]). *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

(1) $X \vdash \gamma \implies X \vdash \gamma_1$.
(2) $X \vdash \gamma \iff X \vdash \phi$ *y* $X \vdash \varepsilon$.
(3) *Si* $X \vdash \phi$, *entonces:*
   (a) *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es continua y supravectiva,* $Y \vdash \phi$.
   (b) *Si* Z *es cerrado en* X, $Z \vdash \phi$.

TEOREMA 4.85. *Sean E un espacio de Hausdorff con más de un punto y X un espacio cero-dimensional. Entonces, si $C_p(X, E)$ es Fréchet–Urysohn, $X \vdash \gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea η una ω-cubierta abierta de X. Sean e_0 y e_1 dos puntos distintos de E y $A = \{f \in C_p(X, E) : cl_X f^{\leftarrow}(E \setminus \{e_0\}) \subseteq U, \text{ para algún } U \in \eta\}$.

Probaremos que $\underline{e_1} \in cl_{C_p(X,E)} A$.

Sea $W = \langle \underline{e_1}; x_1, \ldots, x_n; L_1, \ldots, L_n \rangle$ una vecindad canónica de $\underline{e_1}$ en $C_p(X, E)$. Como η es ω-cubierta de X, existe $U \in \eta$ tal que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq U$; pero, dado que X es cero-dimensional, existe un cerrabierto V de X tal que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V \subseteq U$. Sea $f : X \longrightarrow E$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} e_0 & si\ x \notin V \\ e_1 & si\ x \in V. \end{cases}$$

Entonces f es continua, $f^{\leftarrow}(E \setminus \{e_0\}) = V \subseteq U$ y para toda $j \in [n]$, $f(x_j) = e_1 \in L_j$, es decir, $f \in W$. Por ende, $f \in W \cap A$. Así que efectivamente $\underline{e_1} \in cl_{C_p(X,E)} A$.

Ahora, por ser $C_p(X,E)$ Fréchet–Urysohn, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ que converge a f en $C_p(X,E)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $f_n \in A$ entonces existe $U_n \in \eta$ tal que $f_n^{\leftarrow}(E\setminus\{e_0\}) \subseteq U_n$.

Veamos que si $\xi = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\xi \longrightarrow X$: Sea $x \in X$, y sea L una vecindad de e_1 que no contenga a e_0. Como $Q = \langle \underline{e_1};\ x;\ L\rangle$ es una vecindad de $\underline{e_1}$ en $C_p(X,E)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, $f_n \in Q$, con lo cual $x \in f_n^{\leftarrow}(E\setminus\{e_0\}) \subseteq U_n$. Por consiguiente, $X = lim\, inf\ \xi$ y $X \vdash \gamma$. □

Antes de dar el siguiente teorema, recordemos que un espacio topológico X es **homogéneo**, si para cualesquiera dos elementos x y y de X, existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(x) = y$. No es difícil corroborar cada una de los siguientes hechos:

- El producto topológico de cualquier familia de espacios homogéneos es también un espacio homogéneo.
- Si E es un espacio homogéneo y X es cualquier espacio topológico, entonces $C_p(X,E)$ es un espacio homogéneo.
- Todo grupo topológico es un espacio homogéneo (ver corolario 1.4 en [**63**]).
- Si X es un espacio homogéneo, entonces X es Fréchet-Urysohn si y sólo si hay al menos un elemento $x_0 \in X$ tal que para toda $A \subseteq X$, si $x_0 \in cl_X A$, entonces existe una sucesión en A que converge a x_0 (un elemento con ésta propiedad se llama **punto Fréchet-Urysohn de** X).

TEOREMA 4.86. *Sea E un espacio homogéneo, primero numerable y regular. Entonces, para todo espacio X se tiene:*

$$X \vdash \gamma_1 \implies (C_p(X,E))^{\aleph_0} \text{ es Fréchet–Urysohn.}$$

DEMOSTRACIÓN. Como sabemos, $(C_p(X,E))^{\aleph_0}$ es homeomorfo a $C_p(X,E^{\aleph_0})$. Sean $c_0 \in E^{\aleph_0}$ y $\mathcal{B} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local numerable de c_0 en $E^{\aleph_0}$ tal que $cl_{E^{\aleph_0}} O_{n+1} \subseteq O_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$ ($E^{\aleph_0}$ es también regular y primero numerable[27]).

Como E es homogéneo, $C_p(X,E)^{\aleph_0}$ también lo es, así que basta probar que existe $h \in C_p(X,E)^{\aleph_0}$ tal que h es un punto Fréchet–Urysohn de $C_p(X,E^{\aleph_0})$.

Sea $h = \underline{c_0}$. Recordemos que la familia de conjuntos de la forma $\langle h;\ K;\ O_n\rangle = \{f \in C_p(X,E^{\aleph_0}) :\ f(K) \subseteq O_n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y K es un subconjunto finito de X, es una base local de h en $C_p(X,E^{\aleph_0})$. Sea $A \subseteq C_p(X,E^{\aleph_0})$ tal que $h \in cl_{C_p(X,E^{\aleph_0})} \setminus A$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $\hat{\gamma}_n = \{f^{\leftarrow}(O_n) : f \in A\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\hat{\gamma}_n$ es una ω-cubierta de X pues si $K \subseteq X$ es finito, como $h \in cl_{C_p(X,E^{\aleph_0})}$, existe $f \in \langle h;\ K;\ O_n\rangle \cap A$ y por lo tanto, $K \subseteq f^{\leftarrow}(O_n)$, así que $\{\hat{\gamma}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de ω-cubiertas de X. Como $X \vdash \gamma_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in A$ y, si $\xi = \{f_n^{\leftarrow}(O_n) : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $lim\, inf\ \xi = X$.

Mostremos que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a h en $C_p(X,\ E^{\aleph_0})$: Sean $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq X$ finito y $V = \langle h;\ K;\ O_n\rangle$. Como $\xi \longrightarrow X$, para toda $x \in K$ existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq n(x)$, $x \in f_k^{\leftarrow}(O_k)$. Si $m = max\{n(x) : x \in K\}$ entonces, para toda $k \geq m$, $K \subseteq f_k^{\leftarrow}(O_k)$. Si $k \geq l$, donde $l = max\{m, n\}$, se tiene que $K \subseteq f_k^{\leftarrow}(O_k)$, lo que implica que $f_k \subseteq O_k \subseteq O_l \subseteq O_n$ y por consiguiente, $f_k \in V$.

Hemos probado que para toda $k \geq l$, $f_k \in V$, lo cual implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a h en $C_p(X,E^{\aleph_0})$. □

[27] Ver 2.3.14 de [**24**]

Como todo subespacio cerrado de un espacio Fréchet-Urysohn es también Fréchet-Urysohn, y como $C_p(X, E)$ es cerrado en $C_p(X, E)^{\aleph_0}$, obtenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 4.87. *Si E es un espacio homogéneo, T_3, con más de un punto y primero-numerable, y si X es cero-dimensional, son equivalentes las siguientes propiedades:*

(a) *$C_p(X, E)$ es Fréchet–Urysohn.*
(b) $X \vdash \gamma$.
(c) $X \vdash \gamma_1$.
(d) *$(C_p(X, E))^{\aleph_0}$ es Fréchet–Urysohn.*

COROLARIO 4.88. *Para todo espacio cero-dimensional X, $X \vdash \gamma \iff X \vdash \gamma_1$.*

DEMOSTRACIÓN. $X \vdash \gamma_1 \iff C_p(X, \mathbf{2})$ es Fréchet–Urysohn $\iff X \vdash \gamma$. □

La equivalencia $X \vdash \gamma \iff X \vdash \gamma_1$ es demostrada por Arkhangelskii en II.3.2 de [9], en donde prueba las equivalencias de (a), (b), (c) y (d) de 4.87 cuando $E = \mathbb{R}$ y X es de Tychonoff. Con ayuda de este teorema, podemos afirmar:

COROLARIO 4.89. *Si E es un espacio homogéneo, T_3, con más de un punto y primero numerable, y si X es cero–dimensional, son equivalentes las siguientes propiedades:*

(a) $X \vdash \gamma_1$.
(b) $X \vdash \gamma$.
(c) *$C_p(X)$ es Fréchet–Urysohn.*
(d) *$C_p(X, E)$ es Fréchet–Urysohn.*
(e) *$C_p(X, \mathbb{R}^{\aleph_0})$ es Fréchet–Urysohn.*
(f) *$C_p(X, E^{\aleph_0})$ es Fréchet–Urysohn.*

LEMA 4.90. *Si X es cero–dimensional y $C_p(X, \mathbb{Z})$ es un k-espacio, entonces $X \vdash \phi$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $C_p(X, \mathbb{Z})$ es un k-espacio pero $X \not\vdash \phi$. Hay entonces una ω-cubierta abierta $\eta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$ de X, en la que $\eta_n \subseteq \eta_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y que refuta el hecho de que $X \vdash \phi$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $X(f < n) = \{x \in X : f(x) < n\}$ y $A_n = \{f \in C_p(X, \mathbb{Z}) : X(f < n)$ es ω-cubierto por la familia $\eta_n\}$.

Sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Por un lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$ ya que si $f \in C_p(X, \mathbb{Z}) \setminus A_n$, entonces $X(f < n)$ no es ω-cubierto por η_n, por lo que existe un subconjunto finito, F, de $X(f < n)$ tal que ningún elemento de η_n contiene a F. Sea $U = \{z \in \mathbb{Z} : z < n\}$. U es abierto en $\mathbb{Z}$ y $W = \langle f;\ F;\ U \rangle$ es una vecindad canónica de f en $C_p(X, \mathbb{Z})$. Además $W \subseteq C_p(X, \mathbb{Z}) \setminus A_n$, pues dada $g \in W$, $F \subseteq X(g < n)$ y ningún elemento de η_n contiene a F.

Para llegar a una contradicción probaremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A_n no es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$: Sea $f_0 = \underline{0}$. Entonces $f_0 \in cl_{C_p(X,\mathbb{Z})} A \setminus A$. Veamos el porqué: Sea $V = \langle f_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ \{0\} \rangle$ una vecindad canónica de f_0 en $C_p(X, \mathbb{Z})$. Como η es ω-cubierta de X, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $U \in \eta_{n_0}$ tales que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq U$ y, dado que X es cero–dimensional, existe un cerrabierto L en X tal que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L \subseteq U$. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ es tal que $f|_L \equiv 0$ y $f|_{X \setminus L} \equiv n_0$, entonces $L = X(f < n_0) \subseteq U \in$

η_{n_0}, es decir, η_{n_0} es una ω-cubierta de $X(f < n_0)$ y eso implica que $f \in A_{n_0} \subseteq A$. Además $f \in V$. Así, $f \in V \cap A$ y $V \cap A \neq \emptyset$. Por ende, $f_0 \in cl_{C_p(X,\mathbb{Z})}A$.

Ahora veamos que $f_0 \notin A$. Si $f_0 \in A$, existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_0 \in A_{n_0}$ y $X = X(f_0 < n_0)$ estaría ω-cubierto por la familia η_{n_0} y por lo tanto, por la familia η_n, para cada $n \geq n_0$. Escogiendo $X_n \in \eta_n$ si $n < n_0$ y $X_n = X$ si $n \geq n_0$, lo anterior implicaría que para cada $n \in \mathbb{N}$, η_n es ω-cubierta de X_n y que $X_n \longrightarrow X$, lo cual contradiría la suposición inicial acerca de η.

Entonces A no es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$ y como éste es k-espacio por hipótesis, existe un compacto $C \subseteq C_p(X, \mathbb{Z})$ tal que $C \cap A$ no es cerrado en C. Si para cada $x \in X$, $\pi_x : \mathbb{Z}^X \longrightarrow \mathbb{Z}$ es la x-ésima proyección natural, entonces $\pi_x(C)$ es finito en $\mathbb{Z}$, por lo que existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $f \in C$, $f(x) = \pi_x(f) < n(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = \{x \in X : n(x) \leq n\}$. Entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subseteq X_{n+1}$, así que para toda $x \in X$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_n$, lo que implica que $X_n \longrightarrow X$. Como η refuta el que $X \vdash \phi$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que ninguna η_k es ω-cubierta de X_m. Con esto podemos ver que si $n > m$, $C \cap A_n = \emptyset$, ya que si $f \in A_n$, con $n > m$, $X(f < n)$ está ω-cubierto por η_n. Pero η_n no es ω-cubierta de X_m, por lo cual existe un subconjunto finito S de X_m que no está contenido en ningún elemento de η_n. Como $X(f < n)$ sí está ω-cubierto por η_n, $S \nsubseteq X(f < n)$. Entonces existiría $x \in S \setminus X(f < n) \subseteq X_m \setminus X(f < n)$, con lo que se tiene que $n(x) \leq m < n \leq f(x)$ y con ello, que $f \notin C$. entonces, en efecto, $C \cap A_n = \emptyset$, para cada $n > m$.

Finalmente, $C \cap A = C \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}})A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(C \cap A_n) = \bigcup_{k\leq m}(C \cap A_k)$. Ya sabemos que para toda $k \leq m$, A_k es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$, entonces $C \cap A_k$ es cerrado en C, para cada $k \leq m$ y con ello $C \cap A$ es cerrado en C, lo cual contradice la definición de C. Por consiguiente existe $k \leq m$ tal que A_k no es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$, y llegamos a la contradicción buscada. □

TEOREMA 4.91. *Si $C_p(X, \mathbb{Z})$ es un k-espacio y X es cero-dimensional, entonces $X \vdash \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $C_p(X, \mathbb{Z})$ es k-espacio y X es cero-dimensional, por el lema anterior $X \vdash \phi$.

Supongamos que $X \nvdash \varepsilon$. Existe, por tanto una ω-cubierta abierta de X, η, sin ω-cubiertas numerables.

Sea $A = \{f \in C_p(X, \mathbb{Z}) : f(X) \subseteq \{0, 1\}$ y $Z(f) = f^{\leftarrow}(0)$ puede ser ω-cubierto por una subfamilia numerable de $\eta\}$.

Veamos que A no es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$: Si $f_0 = \underline{0}$ entonces $f_0 \notin A$ porque $Z(f_0) = X$ y X no puede ser ω-cubierto por una subfamilia de η, según supusimos. Pero $f_0 \in cl_{C_p(X,\mathbb{Z})}A$, pues si $W = \langle f_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ \{0\}\rangle$ es una vecindad local canónica de f_0 en $C_p(X, \mathbb{Z})$, como η es ω-cubierta de X, existe $U \in \eta$ tal que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq U$ y, como X es cero-dimensional, existe un cerrabierto V de X tal que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V \subseteq U$. Entonces la función $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f|_V = \underline{0}$ y $f|_{X\setminus V} = \underline{1}$ es continua y tal que $Z(f) = V \subseteq U$ y por ende puede ser ω-cubierta por $\{U\} \subseteq \eta$, con lo que $f \in A$. Además $f(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \{0\}$ y por lo tanto $f \in W$. Por eso $W \cap A \neq \emptyset$.

Así pues, $f_0 \in cl_{C_p(X,\mathbb{Z})}A$ y A no es cerrado en $C_p(X, \mathbb{Z})$. Sin embargo, como veremos a continuación, la cerradura en $C_p(X, \mathbb{Z})$ de todo subconjunto numerable de A está en A. Sean $B \subseteq A$, con $|B| \leq \aleph_0$, y $g \in cl_{C_p(X,\mathbb{Z})}B$. Notemos que $g(X) \subseteq \{0, 1\}$ ya que si $x \in X$, $W_1 = \langle g;\ x;\ \{g(x)\}\rangle$ es una vecindad local canónica de g en $C_p(X,\mathbb{Z})$ y por consiguiente existe $f \in W_1 \cap B \subseteq A$. Por lo tanto, $g(x) = f(x) \in \{0,1\}$. Ahora veamos que $Z(g)$ puede ser ω-cubierto por una subfamilia numerable de η: Para cada $f \in B$ existe $\eta_f \subseteq \eta$ numerable, tal que η_f es ω-cubierta de $Z(f)$. Sea $\eta_0 = \bigcup_{f\in B} \eta_f$. Entonces η_0 es una ω-cubierta numerable de $Z(f)$. Veremos que también lo es de g. Sea $F \subseteq Z(g)$ finito. Se tiene que $W_2 = \langle g;\ F;\ \{0\}\rangle$ es una vecindad local canónica de g en $C_p(X,\mathbb{Z})$ y por lo tanto existe $f \in B \cap W_2$. Pero $f \in W_2 \Longrightarrow F \subseteq Z(f)$ y $f \in B \Longrightarrow Z(f)$ está ω-cubierto por η_0. Así que $f \in B \cap W_2 \Longrightarrow \exists U \in \eta_0 : F \subseteq U$. Esto demuestra que $Z(g)$ está ω-cubierto por η_0 y que $g \in A$.

Como $C_p(X,\mathbb{Z})$ es k-espacio, existe un compacto $C \subseteq C_p(X,\mathbb{Z})$ tal que $C \cap A$ no es cerrado en C. Sean $g \in cl_{C_p(X,\mathbb{Z})}(C \cap A) \setminus A$ y $S = Z(g)$.

Notemos que $g(X) \subseteq \{0,1\}$ y que S es cerrabierto en X. Como $g \notin A$, S no puede ser ω-cubierto por ninguna subfamilia numerable de η. Notar también que $C \cap A$ es numerablemente compacto, ya que si H es numerable y $H \subseteq C \cap A$, entonces $cl_C H = cl_{C_p(X,\mathbb{Z})} H \cap C \subseteq A \cap C$, porque la cerradura de todo numerable en A está en A. Por 3.10.3 de **[24]**, $A \cap C$ es numerablemente compacto.

Construiremos, por inducción transfinita, una sucesión $\{(f_\xi,\ \eta_\xi,\ F_{\xi+1}) : \xi < \omega_1\}$ tal que:

(i) $f_\xi \in C \cap A$, $\eta_\xi \subseteq \eta$ es numerable, $F_{\xi+1}$ es un subconjunto finito de S.
(ii) Si $\xi_1 < \xi_2 < \omega_1$, $\eta_{\xi_1} \subseteq \eta_{\xi_2}$.
(iii) η_ξ es una ω-cubierta de $Z(f_\xi)$ pero no de $F_{\xi+1}$.
(iv) Si $\xi_1 + 1 \leq \xi_2 < \omega_1$ entonces $F_{\xi_1+1} \subseteq Z(f_{\xi_2})$.

Sean $f_0 \in C \cap A$, arbitraria y $\eta_0 \subseteq \eta$ una ω-cubierta numerable de $Z(f_0)$. Como η_0 no es ω-cubierta de S, hay un subconjunto finito, F_1, de S tal que ningún elemento de η_0 contiene a F_1. Sea $\alpha < \omega_1$ y sea $(f_\xi,\ \eta_\xi,\ F_{\xi+1})$ construído para cada $\xi < \alpha$. Consideremos dos casos:

Caso 1) α es ordinal límite:
Como $cof(\alpha) = \omega$, existe una sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \alpha$ tal que $lim\ \xi_n = \alpha$. Sea f_α un punto límite de $(f_{\xi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_p(X,\mathbb{Z})$. Como $C \cap A$ es numerablemente compacto, $f_\alpha \in C \cap A$.
$\eta_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \eta_\xi$ es una subfamilia numerable de η.
Sea $F_{\alpha+1}$ un subconjunto finito de S que no está contenido en ningún elemento de η_α. Notemos que η_α es una ω-cubierta de $Z(f_\alpha)$: Si $F \subseteq Z(f_\alpha)$ es finito, entonces $W = \langle f_\alpha;\ F;\ \{0\}\rangle$ es una vecindad local canónica de f_α en $C_p(X,\mathbb{Z})$ y como f_α es punto límite de $(f_{\xi_n})_{n\in\mathbb{N}}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_{\xi_n} \in W$. Por lo tanto, $F \subseteq Z(f_{\xi_n})$. Dado que $\xi_n < \alpha$, η_{ξ_n} es una ω-cubierta de $Z(f_{\xi_n})$, así que existe $U \subseteq \eta_{\xi_n} \subseteq \eta_\alpha$ tal que $F \subseteq U$. Se cumple entonces (iii) para $\xi = \alpha$. Supongamos que $\xi_1 + 1 \leq \alpha$. Como α es límite, $\xi_1 + 1 < \alpha$. Sea $F_{\xi_1+1} = \{x_1, \ldots, x_n\}$; entonces $V = \langle f_\alpha;\ x_1, \ldots, x_n;\ \{f_\alpha(x_1)\}, \ldots, \{f_\alpha(x_n)\}\rangle$ es una vecindad canónica de f_α en $C_p(X,\mathbb{Z})$. Por lo tanto existe $\xi_n > \xi_1 + 1$ tal que $f_{\xi_n} \in V$.
Por hipótesis de inducción, $F_{\xi_1+1} \subseteq Z(f_{\xi_n})$. Por lo tanto, para toda $j \in [n]$, $f_\alpha(x_j) = f_{\xi_n}(x_j) = 0$, es decir, $F_{\xi_1+1} \subseteq Z(f_\alpha)$. Se cumplen entonces (i), (ii), (iii) y (iv) para $\xi = \alpha$.

Caso 2) Supongamos que $\alpha = \beta + 1$.
Afirmación: Si $M \subseteq S$ es numerable, existe $f \in C \cap A$ que se hace cero en M:
En efecto, sea $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$. Como $g \in cl_{C_p(X,\mathbb{Z})}(C \cap A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in C \cap A$ tal que f_n se hace cero en el conjunto

$\{x_k : k < n\}$. En efecto, al ser $\langle g;\ x_1, \ldots, x_n;\ \{0\}\rangle$ vecindad de g en $C_p(X, \mathbb{Z})$, existe $f_n \in W \cap C \cap A$.

Sea f un punto límite arbitrario de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C \cap A$. Si $x_n \in M$, entonces, para toda $m > n$, $f_m(x_n) = 0$ y por consiguiente, $f(x_n) = lim_{n\to\infty} f_m(x_n) = 0$. Esto prueba la afirmación.

Como $\bigcup_{\xi\leq\beta} F_{\xi+1} \subseteq S$ y es numerable, por la afirmación anterior, existe $f_\alpha \in C \cap A$ que se hace cero en $\bigcup_{\xi\leq\beta} F_{\xi+1}$. Como $f_\alpha \in A$, $Z(f_\alpha)$ puede ser ω-cubierto por una subfamilia numerable, η_α, de η (si no, escogemos $\eta_\alpha \cup \eta_\beta$). Pero S no está ω-cubierto por η_α, así que existe $F_{\alpha+1} \subseteq S$ finito, que no está contenido en ningún elemento de η_α. Entonces:

(i) $f_\alpha \in C \cap A$, $\eta_\alpha \subseteq \eta$ es numerable, $F_{\alpha+1} \subseteq S$ es finito.

(ii) Si $\xi < \alpha$ entonces $\xi \leq \beta$ y, por hipótesis de inducción $\eta_\xi \subseteq \eta_\beta \subseteq \eta_\alpha$.

(iii) η_α es ω-cubierta de $Z(f_\alpha)$ pero no de $F_{\alpha+1}$.

(iv) Para ver esta parte, supongamos que $\xi_1 + 1 \leq \xi_2 < \omega_1$. Si $\xi_2 = \alpha$, por hipótesis de inducción, $F_{\xi_1+1} \subseteq Z(f_{\xi_2})$.
Si $\xi_2 = \alpha + 1$, entonces $\xi_1 \leq \beta$ y f_α se hace cero en F_{ξ_1+1}. Por lo tanto, $F_{\xi_1+1} \subseteq Z(f_{\xi_2})$.

Aquí termina la construcción de la sucesión pedida. Para toda $\xi < \omega_1$, sea $Z_\xi = Z(f_\xi)$.

◦ Note que $\forall\alpha,\ \beta \in \omega_1 : F_{\alpha+1} \subseteq Z_\beta \iff \alpha + 1 \leq \beta$:
En efecto, si $F_{\alpha+1} \subseteq Z_\beta$, entonces η_β es ω-cubierta de Z_β y, porlo tanto de $F_{\alpha+1}$. Como η_α no es ω-cubierta de $F_{\alpha+1}$, entonces $\eta_\beta \not\subseteq \eta_\alpha$ y por lo tanto, $\alpha < \beta$, es decir, $\alpha + 1 \leq \beta$.
Por otro lado, si $\alpha + 1 \leq \beta$, se tiene, por el inciso (iv), que $F_{\alpha+1} \subseteq Z_\beta$.

Mostraremos que $\{F_{\xi+1} : \xi < \omega_1\}$ satisface la siguiente condición:

$*$ Para todo subconjunto finito, K, de X, existe un subconjunto abierto, G, en X tal que $|\{\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq G\}| < \aleph_0$ y $K \subseteq G$.

Sea h un punto de acumulación completa en C de la familia $\{f_\xi : \xi < \omega_1\}$. Notar que $T = Z(h) \cap S$ es cerrabierto en X, pues S y $Z(h)$ lo son. Notar también que $\bigcup_{\xi<\omega_1} F_{\xi+1} \subseteq T$, ya que si $\xi_1 < \omega_1$ y $F_{\xi_1+1} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, poniendo $W = \langle h;\ x_1, \ldots, x_n;\ \{h(x_1)\}, \ldots, \{h(x_n)\}\rangle$, como h es punto de acumulación completa de $(f_\xi)_{\xi<\omega_1}$, existe $\xi_2 < \omega_1$ tal que $\xi_2 > \xi_1 + 1$ y $f_{\xi_2} \in W$. Por la propiedad (iv), $F_{\xi+1} \subseteq Z(f_{\xi_2})$, así que para toda $i \in [n]$, $h(x_i) = f_{\xi_2}(x_i) = 0$. Por eso $F_{\xi_1+1} \subseteq Z(h)$, y como $\forall\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq S$, se tiene que $\bigcup_{\xi<\omega_1} F_{\xi+1} \subseteq T$. Si lográsemos demostrar que:

$**$ Para todo subconjunto finito, F, de T, existe un subconjunto abierto, H, de T tal que $F \subseteq H$ y $|\{\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq H\}| < \aleph_0$,

entonces tendríamos $*$: En efecto, sea $K \subseteq X$ finito. Por $**$, existe un abierto H en T tal que $|\ \{\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq H\}\ | < \aleph_0$ y $F = K \cap T \subseteq H$. Sea $G = H \cup X \setminus T$. Como T es cerrabierto en X, G es abierto en X y $K \subseteq G$. Dado que para cada $\xi < \omega_1$, $F_{\xi+1} \subseteq T$, se tiene que $\forall\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq G \iff F_{\xi+1} \subseteq G \cap T = H$. De aquí que $|\{\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq G\}| = |\{\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq H\}| < \aleph_0$. Entonces se cumple $*$.

Sea $K \subseteq T$ finito, y sea $V = \langle h;\ K;\ \{0\}\rangle$. Como h está en la cerradura de $\{f_\xi : \xi < \omega_1\}$ en C, existe $f_\alpha \in V \cap C$ y, por lo tanto, $K \subseteq Z_\alpha$.

Sea $\alpha_K = min\{\alpha : \alpha < \omega_1 \text{ y } K \subseteq Z_\alpha\}$. Veamos que α_K no puede ser ordinal límite: Supongamos que lo es. Entonces existe una sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en α_k tal que

$\xi_n \longrightarrow \alpha_k$. Como en este caso f_{α_K} es punto límite de $(f_{\xi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (por la construcción en el caso 1)) y $L = \langle f_{\alpha_K}; K; \{0\}\rangle$ es vecindad de f_{α_K}, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{\xi_{n_0}} \in L$, con $\xi_{n_0} < \alpha_K$ y $K \subseteq Z_{\xi_{n_0}}$. Esto es una contradicción, lo que prueba que α_K no es ordinal límite.

Apoyados en estas observaciones, demostraremos $**$. Sea $F \subseteq T$ finito. Pongamos $K_0 = F$. Si $\alpha_{K_0} = 0$, sea $G = Z(f_0)$. Entonces G es abierto, $K_0 \subseteq G$ y $|\{\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq G\}| = 0 < \aleph_0$. Supongamos ahora que $\alpha_{K_0} \neq 0$. Entonces existe $\beta_{K_0} < \omega_1$ tal que $\alpha_{K_0} = \beta_{K_0} + 1$. Sea $\xi_0 = \beta_{K_0}$. Entonces $\alpha_{K_0} = \xi_0 + 1$.

Dado que $\xi_0 + 1$ es el mínimo ordinal menor o igual que ω_1 tal que $K_0 \subseteq Z_{\xi_0+1}$, entonces $K_0 \not\subseteq Z_{\xi_0}$ y sea $K_1 = K_0 \cap Z_{\xi_0}$. Notemos que $K_1 \neq K_0$. Si $\alpha_{K_1} = 0$, detenemos el proceso. Si $\alpha_{K_1} \neq 0$, existe $\beta_{K_1} < \omega_1$ tal que $\alpha_{K_1} = \beta_{K_1} + 1$. Sea $\xi_1 = \beta_{K_1}$. Entonces $K_1 \subseteq Z_{\xi_1+1}$ pero $K_1 \not\subseteq Z_{\xi_1}$. Sea $K_2 = K_1 \cap Z_{\xi_1}$. Se tiene que $K_2 \subseteq K_1$, pero $K_2 \neq K_1$. Si $\alpha_{K_2} = 0$, detenemos el proceso. Si $\alpha_{K_2} \neq 0$, existe $\beta_{K_2} < \omega_1$ tal que $\alpha_{K_2} = \beta_{K_2} + 1$ y llamamos ξ_2 a β_{K_2}, com lo que $K_2 \not\subseteq Z_{\xi_2}$, etc., etc.. Como los conjuntos K_0, $K_1, \ldots$ que se van obteniendo son finitos, el proceso termina en algún momento. De hecho, el proceso termina cuando:

- tenemos una cadena $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n$ [28] y $K_n = \emptyset$,.

o bien:

•• tenemos una cadena $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n$ y $\alpha_{K_n} = 0$, es decir, $K_n \subseteq Z_0$.

En ambos casos, para cada $k < n$, sea:

$$G_k = (Z_{\xi_k+1} \setminus Z_{\xi_k}) \cap (\bigcap_{j<k} Z_{\xi_j+1})$$

Como cada Z_{ξ_k} es cerrabierto en X, G_k es abierto en X y $G = \bigcup_{k<n} G_k$ es abierto en X. Supongamos primero que se cumple el caso •. Sea $x \in F = K_0$, y sea $i = max\{j \in [n] : x \in K_j\}$. Entonces $x \in K_j$, para cada $j \leq i$ y $x \notin K_{i+1}$. Como para cada $k \in [n]$, $\xi_k + 1 = \alpha_K$ es el mínimo ordinal tal que $K_k \subseteq Z_{\xi_k+1}$, se tiene que $x \in G_k = (Z_{\xi_i+1} \setminus Z_{\xi_i}) \cap (\bigcap_{j<i} Z_{\xi_j+1}) = G_i \subseteq G$. Se ve entonces que $F \subseteq G$. Sea ahora $\xi < \omega_1$ tal que $\xi \neq \xi_i$ para cada $i < n$. Cada vez que $\xi < \xi_i$ se tiene que $F_{\xi+1} \subseteq Z_{\xi_i}$, por la propiedad (iv) de nuestra familia $\{(f_\xi, \eta_\xi, F_\xi + 1) : \xi < \omega_1\}$ y, como $G_i \subseteq X \setminus Z_{\xi_i}$, resulta que $F_{\xi+1} \cap G_i = \emptyset$. Entonces, para cada $i < n$, $\xi < \xi_i \implies F_{\xi+1} \cap G_i = \emptyset$ y por consiguiente, $F_{\xi+1} \cap G = \emptyset$. En particular, $F_{\xi+1} \not\subseteq G$, y si $\xi > \xi_i$ para alguna $i < n$, sea k_0 el menor natural tal que $\xi_{k_0} < \xi$. Entonces, para cada $k < k_0$, $\xi < \xi_k$ y, por la observación de arriba, $F_{\xi+1} \cap G_k = \emptyset$. Así, $F_{\xi+1} \cap \bigcup_{k<k_0} G_k = \emptyset$. Por otro lado, por la definición de cada G_k, si $k \geq k_0$, entonces $G_k \subseteq Z_{\xi_{k_0}+1}$ y, por ende, $\bigcup_{k\geq k_0} G_k \subseteq Z_{\xi_0+1}$. Además, como $\xi_{k_0} < \xi$, se tiene que $\xi_{k_0} + 1 < \xi + 1$, es decir, no se tiene que $\xi_{k_0} + 1 \geq \xi + 1$ y por lo tanto tampoco se tiene que $F_{\xi+1} \subseteq Z_{\xi_{k_0}+1}$, por la propiedad $\diamond$. Por consiguiente, $F_{\xi+1} \not\subseteq \bigcup_{n>k\geq k_0} G_k$ y como $F_{\xi+1} \cap \bigcup_{k<k_0} G_k = \emptyset$, $F_{\xi+1}$ no está contenido en G. Entonces $|\ \{\xi < \omega_1 : F_{\xi+1} \subseteq G\}\ | < \aleph_0$.

Ahora supongamos que se cumple ••. Si ponemos $Z_{-1} = \emptyset$, $K_{n+1} = \emptyset$ y construimos los conjuntos G_k para la cadena $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_{n+1} = \emptyset$, este caso se reduce al caso •.

Hemos demostrado entonces $**$ y por lo tanto $*$.

Pongamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \{G \subseteq X : G$ es abierto en X y $|\{\xi < \omega_1 : F_\xi \subseteq G\}| \leq n\}$ y $\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$. Por la propiedad $*$, λ es ω-cubierta de X y $\lambda_n \subseteq \lambda_{n+1}$. Por el lema anterior, $X \vdash \phi$ y por consiguiente, existe una familia

[28] Aquí estamos usando el símbolo $\supset$ para indicar que se cumple $\supseteq$ pero no la igualdad.

$\xi = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que λ_n es ω-cubierta de X_n, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mathit{lim\ inf}\ \xi = X$. Como λ_n ω-cubre a X_n, cada X_n contiene a lo más n conjuntos $F_{\xi+1}$. En efecto, si $F_{\xi_1+1}, \ldots, F_{\xi_{n+1}+1}$ estuvieran contenidos en X_n, $\bigcup_{j\in[n+1]} F_{\xi_j+1}$ es subconjunto finito de X_n, por lo cual existe $G \in \lambda_n$ tal que $\bigcup_{j\in[n+1]} F_{\xi_j+1} \subseteq G$. Pero G puede contener a lo más n conjuntos F_ξ, así que $F_{\xi_j+1} = F_{\xi_i+1}$ para algunas $i,\ j \in [n+1]$. Como $\mathit{lim\ inf}\ \xi = X$, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Por lo anterior la familia $\{F_\xi : \xi < \omega_1\}$ sería numerable, lo cual es una contradicción, pues nuestra construcción de esta familia muestra que si $\xi_1 \neq \xi_2$, con $\xi_1,\ \xi_2 < \omega_1$, entonces $F_{\xi_1} \neq F_{\xi_2}$. □

COROLARIO 4.92. *Si X es cero–dimensional, son equivalentes:*
(a) *$C_p(X, \mathbb{Z})$ es k-espacio.*
(b) *$C_p(X, \mathbb{Z})$ es secuencial.*
(c) *$C_p(X, \mathbb{Z})$ es Fréchet–Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN. Por 4.81, (c)$\Longrightarrow$(b)$\Longrightarrow$(a).
Por 4.90 y 4.91, (a)$\Longrightarrow$ $X \vdash \phi$ y $X \vdash \varepsilon$, pero esto implica, por 4.84 (2), que $X \vdash \gamma$ y esto a su vez implica que $C_p(X, \mathbb{Z})$ es Fréchet–Urysohn (por 4.87). □

CAPÍTULO 5

Propiedades tipo compacidad

En este capítulo discutiremos las propiedades topológicas que un espacio X debe satisfacer para que $C_p(X,\mathbf{2})$ o $C_p(X,\mathbb{Z})$ posean propiedades tipo compacidad, como la compacidad numerable, la seudocompacidad, la σ-compacidad, la σ-compacidad numerable, la σ-seudocompacidad y la compacidad misma. Como en los capítulos anteriores, trataremos de apoyarnos en resultados conocidos acerca de estas propie–dades en $C_p(X)$ y en $C_p(X,\mathbb{I})$. Sin embargo, aquí mostraremos que algunos de dichos resultados no se pueden trasladar completamente a los que serían sus análogos para $C_p(X,\mathbb{Z})$ y $C_p(X,\mathbf{2})$. Esto tiene su lado positivo porque nos revela a $C_p(X,\mathbb{Z})$ y $C_p(X,\mathbf{2})$ como espacios no tan simples que sus propiedades sean siempre "copias" de lo que sucede en $C_p(X)$ y en $C_p(X,\mathbb{I})$. Por supuesto, no dejarán de aparecer situaciones compartidas por éstos y aquéllos espacios. A continuación damos dos ejemplos:

Como consecuencia inmediata del corolario 2.36 (2), $C_p(X)$ y $C_p(X,\mathbb{Z})$ no son numerablemente compactos (y por lo tanto no son compactos). Estos espacios tampoco son seudocompactos; en efecto, si $E\in\{\mathbb{Z},\mathbb{R}\}$, basta observar que la función evaluación en $C_p(X,E)$, es decir, la función $e_x : C_p(X,E) \longrightarrow E$ definida por $e_x(f)=f(x)$,[1] no es una función acotada.

Para espacios del tipo $C_p(X)$ con X de Tychonoff, hay un interesante resultado que identifica en ellos a la σ-compacidad con la σ-compacidad numerable y que muestra que estas propiedades son poseídas por esos espacios, si y sólo si X es finito:

TEOREMA 5.1 (Velichko, Tkachuk-Shakhmatov [2]). *Si X es un espacio de Tychonoff, las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) *X es finito.*
(b) *$C_p(X)$ es σ-compacto.*
(c) *$C_p(X)$ es σ-numerablemente compacto.*

Como veremos en el ejemplo 5.10, si X_1 es el espacio de ordinales $\omega+1$ (es decir, la compactación de Alexandroff de ω), X_1 no es discreto (aunque sí es cero-dimensional), pero $C_p(X_1,\mathbb{Z})$ es σ-compacto, así que la σ-compacidad de los espacios $C_p(X,\mathbb{Z})$ no es equivalente al hecho de que X sea discreto. En la sección 4 de este capítulo, caracterizaremos la σ-compacidad en los espacios $C_p(X,\mathbb{Z})$, cuando X es cero-dimensional, y demostraremos que si además X es normal, la σ-compacidad, la σ-compacidad numerable y la σ-seudocompacidad, son propiedades equivalentes en $C_p(X,\mathbb{Z})$.

[1] Ver la definición 2.39

[2] (a)$\Longleftrightarrow$ (b) fue probado por Velichko en [68], y (c)$\Longleftrightarrow$ (a) por Tkachuk y Shakhmatov en [64]

Antes, abordemos un problema más simple: caracterizar la compacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$.

1. Compacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$

El siguiente es un conocido resultado que da condiciones equivalentes a la compacidad de $C_p(X, \mathbb{I})$.

TEOREMA 5.2 (Tkachuk-Shakhmatov [**64**]). *Si X es un espacio de Tychonoff, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) *X es discreto*
(b) *$C_p(X, \mathbb{I})$ es compacto.*
(c) *$C_p(X, \mathbb{I})$ es σ-compacto.*
(d) *$C_p^*(X)$ es σ-compacto.*

Si X es un espacio cero-dimensional, $C_p(X, \mathbf{2})$ es denso en $\mathbf{2}^X$, como demostramos en 2.23. Con ayuda de este hecho podemos obtener fácilmente una caracterización de la compacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$ análoga a la equivalencia entre (a) y (b) del teorema anterior.

PROPOSICIÓN 5.3. *Si X es cero-dimensional, $C_p(X, \mathbf{2})$ es compacto si y sólo si X es discreto.*

Trataremos de generalizar este resultado a espacios que no necesariamente son cero-dimensionales. Para ello usaremos el siguiente lema, fácil de demostrar:

LEMA 5.4. *Si E es discreto, toda función continua $f : X \longrightarrow E$ es constante en toda casi-componente de X.*[3]

OBSERVACIÓN 5.5. Sea X un espacio cualquiera. Para cada elemento x de X denotaremos por Q_x a la casi-componente de x en X. La relación $\approx$ definida en X por

$$x \approx y \iff Q_x = Q_y,$$

es de equivalencia. Sean $X/_\approx$ el conjunto de clases de equivalencia y $q : X \longrightarrow X/_\approx$ la función canónica, aquélla que a cada elemento de x le asocia su clase de equivalencia Q_x. Daremos a $X/_\approx$ una topología ζ que lo convierta en un espacio topológico cero-dimensional y de Hausdorff tal que $q : X \longrightarrow (X/_\approx, \zeta)$ sea continua y $C_p(X, E) \cong C_p((X/_\approx, \zeta)$, para todo espacio E discreto con más de un elemento (para un espacio tal, 1.33 muestra que $R(E) = R(\mathbf{2})$):

Sea $\mathcal{B} = \{B \subseteq X/_\approx : q^{\leftarrow}(B)$ es cerrabierto en $X\}$. $\mathcal{B}$ resulta ser base de una topología ζ sobre X. Además todos los elementos de $\mathcal{B}$ resultan cerrabiertos en $\tilde{X} = (X/_\approx, \zeta)$.

Sea E un espacio discreto con más de un elemento. Para demostrar que $\tilde{X} \in R(E)(= R(\mathbf{2}))$, veremos que $\tilde{X}$ es un espacio T_1: Sean $q(x)$ y $q(y)$ elementos distintos en $\tilde{X}$. Por consiguiente $x \notin Q_y$ y $y \notin Q_x$, así que existen cerrabiertos U y V en X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$. $U = q^{\leftarrow}(q(U))$ [4] y $V = q^{\leftarrow}(q(V))$. Por ende, $q(U)$ y $q(V)$ son elementos de $\mathcal{B}$, $q(x) \in q(U) \setminus q(V)$ y $q(y) \in q(V) \setminus q(U)$. Por lo tanto $\tilde{X}$ es T_1.

---

[3] Si X es un espacio topológico y $x \in X$, **la casi-componente de x en X** es la intersección de todos los subconjuntos cerrabiertos de X que contienen al punto x (ver [**24**], pág. 356).

[4] $z \in q^{\leftarrow}(q(U)) \implies q(z) \in q(U) \implies (\exists w \in U : q(z) = q(w)) \implies z \in Q_w \subseteq U$, pues U es un cerrabierto que contiene w.

Es claro que $q : X \longrightarrow \tilde{X}$ es continua. Notemos además que ζ es un máximo de $\mathcal{T} = \{\tau$, topología de $X/_{\approx}$: $q : X \longrightarrow (X/_{\approx}, \tau)$ es continua y $(X/_{\approx}, \tau) \in R(E)\}$, ya que si $\sigma \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{B}_\sigma$ es una base de cerrabiertos de $(X/_{\approx}, \sigma)$, como $q : X \longrightarrow (X/_{\approx}, \sigma)$ es continua, para toda $B \in \mathcal{B}_\sigma$ $q^{\leftarrow}(B)$ es cerrabierto en X, con lo que $B \in \mathcal{B} \in \mathcal{B}$. Así, $\mathcal{B}_\sigma \subseteq \mathcal{B}$ y $\sigma \subseteq \zeta$.

Usando el lema 5.4, no es difícil percatarse de que:

$$x \approx y \iff (\forall f \in C(X,E) : f(x) = f(y))$$

y entonces la relación $\approx$ coincide con la definida en la observación 2.26, para este espacio discreto E, por lo que nuestro espacio $\tilde{X}$ coincide con el espacio (X', τ) allí construído, donde la topolgía τ es la topología E-cociente generada en X' por la función p que aquí corresponde a nuestra función q. En dicha observación se probó entonces que $C_p(X,E) \cong C_p(\tilde{X}, E)$.

Definición 5.6. *Un espacio topológico X es un* **P-espacio** *si todo subconjunto de tipo G_δ es abierto, y es un* **$P_{\mathbb{Z}}$-espacio** *si la intersección de cualquier familia numerable de cerrabiertos de X es abierto en X.*

Proposición 5.7. *Sean X un espacio topológico cualquiera y $\tilde{X}$ el espacio* **2**-*regular (es decir, cero dimensional) definido en la observación 5.5. Entonces:*

(1) *X es la suma topológica de sus casi-componentes si y sólo si $\tilde{X}$ es discreto.*
(2) *X es $P_{\mathbb{Z}}$-espacio si y sólo si $\tilde{X}$ es P-espacio.*

Demostración. Sea $q : X \longrightarrow \tilde{X}$ la función **2**-cociente canónica definida en 5.5.

(1) X es la suma topológica de sus casi-componentes $\iff$ para cada $x \in X$, $q^{\leftarrow}(\{q(x)\}) = Q_x$ es abierto en $X \iff$ para cada $x \in X$, $\{q(x)\}$ es abierto en $\tilde{X} \iff \tilde{X}$ es discreto.
(2) Supongamos que X es $P_{\mathbb{Z}}$-espacio. Sea $G = \bigcap_{n<\omega} A_n$ un G_δ en $\tilde{X}$. Si $G = \emptyset$, entonces G es abierto en $\tilde{X}$. Supongamos que $G \neq \emptyset$ y tomemos $q(x) \in G$. Sabemos que $\mathcal{B} = \{B \subseteq \tilde{X} : q^{\leftarrow}(B)$ es cerrabierto en $X\}$ es base de la topología de $\tilde{X}$, así que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $q(x) \in B_n \subseteq A_n$. Por lo tanto, $x \in q^{\leftarrow}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} q^{\leftarrow}(B_n) \subseteq q^{\leftarrow}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
Como X es $P_{\mathbb{Z}}$-espacio y para cada $n \in \mathbb{N}$, $q^{\leftarrow}(B_n)$ es cerrabierto en X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} q^{\leftarrow}(B_n)$ es abierto y, por ende cerrabierto, en X. Por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$. Entonces G es vecindad de cada uno de sus puntos y con ello, es abierto en $\tilde{X}$. Por lo tanto $\tilde{X}$ es P-espacio.
Ahora supongamos que $\tilde{X}$ es P-espacio y que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde para toda $n \in \mathbb{N}$, A_n es cerrabierto en X. Para cada uno de estos nmeros n se tiene que $A_n = q^{\leftarrow}(q(A_n))$ y por eso $q(A_n)$ es abierto en $\tilde{X}$, y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} q(A_n)$ es abierto en $\tilde{X}$ porque $\tilde{X}$ es P-espacio. Esto implica que $C = q^{\leftarrow}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} q(A_n))$ es abierto en X.

$\square$

Corolario 5.8. *Si X es cero-dimensional, entonces X es P-espacio si y sólo si es $P_{\mathbb{Z}}$-espacio.*

Corolario 5.9. *Sea X un espacio cualquiera. Son equivalentes:*

(a) *$C_p(X,\mathbf{2})$ es compacto.*
(b) *X es la suma topológica libre de sus casi-componentes.*

DEMOSTRACIÓN. $C_p(X, \mathbf{2})$ es compacto si, y solamente si $C_p(\tilde{X}, \mathbf{2})$ es compacto lo cual es equivalente a que $\tilde{X}$ sea discreto, y esto último se cumple si y sólo si X es la suma topológica libre de sus casi-componentes. □

EJEMPLO 5.10. Si X es el espacio de ordinales $\omega+1$ (es decir, la compactación de Alexandroff de ω), X es cero-dimensional pero no es discreto. Por consiguiente $C_p(X, \mathbf{2})$ no es compacto.

X no es P espacio, pues $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(n,\omega] = \{\omega\}$ es un subconjunto G_δ de X que no es abierto en X.

Por otro lado, tanto $C_p(X, \mathbf{2})$ como $C_p(X, \mathbb{Z})$ son σ-compactos. Veamos porqué: X es homeomorfo al espacio $X_1 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$.

Notemos que toda función continua de X_1 a $\mathbb{Z}$ es eventualmente constante, es decir,

Si $f \in C_p(X_1, \mathbb{Z})$ y $f(0) = j$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq K$, $f(\frac{1}{n}) = j$.

Para toda $j \in \mathbb{Z}$ y toda $k \in \mathbb{N}$, pongamos

$$A_{j,\,k} = \{f \in C_p(X_1, \mathbb{Z}) : \forall n \geq k : f(\frac{1}{n}) = j\}.$$

Entonces

(i) $A_{j,\,k} \cong \mathbb{Z}^k$ que es σ-compacto.

(ii) $C_p(X_1, \mathbb{Z}) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{j,\,k}$.

Entonces $C_p(X_1, \mathbb{Z})$ es σ-compacto y, como $C_p(X_1, \mathbf{2})$ es un subespacio cerrado de $C_p(X_1, \mathbb{Z})$, también es σ-compacto (y por lo tanto ambos espacios son σ-numerablemente compactos)

Este ejemplo muestra que, aun en el universo de los espacios cero–dimensionales, se tiene:

(1) $C_p(X, \mathbb{Z})$ σ-compacto $\not\Longleftrightarrow$ X es finito.

(2) $C_p(X, \mathbb{Z})$ σ-numerablemente compacto $\not\Longleftrightarrow$ X es finito.

(3) $C_p(X, \mathbf{2})$ σ-compacto $\not\Longleftrightarrow$ $C_p(X, \mathbf{2})$ es compacto.

(4) $C_p(X, \mathbf{2})$ σ-compacto $\not\Longleftrightarrow$ X es discreto.

Antes de concluir esta sección mencionaremos algunos resultados sencillos pero básicos para el desarrollo ulterior de este capítulo:

- El espacio $C_p^*(X, \mathbb{Z}) = \{f \in C_p(X, \mathbb{Z}) : f(X)$ está acotado en $\mathbb{Z}\}$ es denso en $C_p(X, \mathbb{Z})$.
- Si m y n son números naturales y si $m \geq n$, entonces $C_p(X, \mathbf{n})$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X, \mathbf{m})$ y también es un subconjunto cerrado de cada uno de los espacios $C_p(X, \mathbb{Z})$ y $C_p^*(X, \mathbb{Z})$.
- $C_p(X, \mathbb{Z})$ es cerrado en $C_p(X)$.
- Para todo número natural n, $C_p(X, \mathbf{2}^n) \cong C_p(X, \mathbf{2})^n$.
- $C_p^*(X, \mathbb{Z})$ es homeomorfo al subespacio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} C_p(X, \mathbf{n})$ de $\mathbb{Z}^X$.

Como un corolario de estos hechos obtenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5.11. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad finitamente productiva y débilmente hereditaria,*[5] *entonces:*

[5] Recordemos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es **finitamente productiva** si el producto topológico de Tychonoff de una colección finita de espacios que tienen $\mathcal{P}$, también tiene $\mathcal{P}$. Una

(1) *Dados* $n,\ m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $C_p(X,\mathbf{n})$ *tiene* $\mathcal{P}$ *si y sólo si* $C_p(X,\mathbf{m})$ *tiene* $\mathcal{P}$.
(2) $C_p(X,\mathbf{n})$ *tiene* σ-$\mathcal{P}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, *si y sólo si* $C_p^*(X,\mathbb{Z})$ *tiene* σ-$\mathcal{P}$.

DEMOSTRACIÓN. [de la suficiencia en (2)] Si $C_p^*(X,\mathbb{Z})$ tiene σ-$\mathcal{P}$, entonces $C_p^*(X,\mathbb{Z}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, donde cada A_k tiene la propiedad $\mathcal{P}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$,

$$C_p(X,\mathbf{n}) = C_p(X,\mathbf{n}) \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(C_p(X,\mathbf{n}) \cap A_k)$$

Como cada $C_p(X,\mathbf{n}) \cap A_k$ es cerrado en A_k, hereda de éste la propiedad $\mathcal{P}$. □

COROLARIO 5.12. *Sea* X *un espacio cualquiera y* $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. *Son equivalentes:*
(a) $C_p(X,\mathbf{n})$ *es compacto.*
(b) X *es la suma topológica de sus casi-componentes.*

Ahora estudiaremos la compacidad numerable en $C_p(X,\mathbf{2})$.

2. Compacidad numerable en $C_p(X,2)$

Comencemos repasando los teoremas que hay acerca de la compacidad numerable y de la σ-compacidad numerable en $C_p(X,\mathbb{I})$. El primer teorema que mencionaremos caracteriza ambas propiedades y muestra la coincidencia de ellas en $C_p(X,\mathbb{I})$:

TEOREMA 5.13 (Tkachuk-Shakhmatov [**64**]). *Si* X *es un espacio de Tychonoff, las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) X *es* P*-espacio.*
(b) $C_p(X,\mathbb{I})$ *es numerablemente compacto.*
(c) $C_p(X,\mathbb{I})$ *es* σ*-numerablemente compacto.*
(d) C_p^* *es* σ*-numerablemente compacto.*

El ejemplo 5.10 nos hace ver que no siempre es cierta la implicación $C_p(X,\mathbf{2})$ σ-numerablemente compacto $\Longrightarrow$ X es P-espacio. También nos provee de un espacio X (que es el espacio de ordinales $\omega+1$) tal que $C_p(X,\mathbf{2})$ es σ-numerablemente compacto pero no numerablemente compacto. Este hecho se deduce del siguiente lema:

LEMA 5.14. *Si* X *es cero-dimensional y* $C_p(X,\mathbf{2})$ *es numerablemente compacto, entonces* X *es* P*-espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ un subconjunto G_δ en X. Podemos suponer que $G \neq \emptyset$ y que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} \subseteq G_n$. Sea $x_0 \in G$. Como X es cero-dimensional, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in C_p(X,\mathbf{2})$ tal que $f_n(x_0) = 1$ y $f_n(X\setminus G_n) \subseteq \{0\}$. Dado que $C_p(X,\mathbf{2})$ es numerablemente compacto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación h en $C_p(X,\mathbf{2})$. Si $x \notin G$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin G_{n_0}$ y por lo tanto, para toda $n \geq n_0$, $x \notin G_n$ y $f_n(x) = 0$.
Si $h(x) = r$, $\langle x;\ r\rangle$ es vecindad de h en $C_p(X,\mathbf{2})$ y como h es punto de acumulación de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A = \{n \in \mathbb{N} : f_n \in \langle x;\ r\rangle\}$ es infinito. En particular existe $m \geq n_0$ tal que $m \in A$. Entonces $0 = f_m(x) = r$. Así, $h(x) = 0$. Por consiguiente, para toda

propiedad topológica $\mathcal{P}$ es **débilmente hereditaria o hereditaria en cerrados** si siempre que un espacio topológico tiene $\mathcal{P}$, también posee esta propidad cualquier subespacio cerrado de él.

$x \in X$, si $x \notin G$, entonces $x \notin h^{\leftarrow}(1)$, es decir, si $x \in h^{\leftarrow}(1)$, entonces $x \in G$. Por lo tanto $U = h^{\leftarrow}(1)$ es un abierto contenido en G y que contiene a x_0. □

Por supuesto, la misma prueba nos permite demostrar que:

COROLARIO 5.15. *Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, X es cero-dimensional y $C_p(X, \mathbf{n})$ es numerablemente compacto, entonces X es P-espacio.*

Como veremos a continuación, el recíproco de este resultado también es cierto, obteniéndose así una caracterización de la compacidad numerable en los espacios $C_p(X, \mathbf{n})$, con $n \in \mathbb{N}$ y X cero-dimensional, paralela a la equivalencia entre (a) y (b) del teorema 5.13. Probaremos, sin embargo, un lema que nos permitirá deducir algo más fuerte: Que si X es un P-espacio cero-dimensional y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_p(X, \mathbf{n})$ es $\aleph_0$-acotado. Esta última propiedad la definimos en 4.42. Será necesario, para demostrar el susodicho lema, definir lo siguiente:

DEFINICIÓN 5.16. *Sea X un espacio topológico.*

(1) *Si $r \in \omega^*$ y $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ es una sucesión, diremos que un elemento x de X es **r-límite** de f si, para toda vecindad U de x en X, $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \in U\} \in r$.*
(2) *Se dice que X es **r-compacto**, con $r \in \omega^*$, si toda sucesión en X tiene un punto r-límite en X.*

En [**67**] se demuestra que todo espacio $\aleph_0$-acotado es r-compacto, para toda $r \in \omega^*$, y que asimismo es numerablemente compacto todo espacio que es r-compacto para alguna $r \in \omega^*$.

LEMA 5.17. *Si K es un espacio compacto y de Hausdorff y X es un P-espacio de Tychonoff, $C_p(X, K)$ es $\aleph_0$-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $C_p(X, K)$ no es $\aleph_0$-acotado. Entonces, por la última parte de la observación 5.19, existe $r \in \omega^*$ tal que $C_p(X, K)$ no es r-compacto. Por lo tanto existe una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow C_p(X, K)$ que no tiene puntos r-límite en $C_p(X,\ K)$. Pero K^X es compacto y por lo tanto ω-acotado, así que φ tiene un punto límite, f, en K^X. Como $f \notin C_p(X,\ K)$, existe un punto x_0 en donde f no es continua. Por lo tanto existe una vecindad abierta de $f(x_0)$ en K, digamos U, tal que, para toda vecindad V de x_0 en X, $f(V) \not\subseteq U$. Como K es regular, existe U', vecindad abierta de $f(x_0)$ en K, tal que $f(x_0) \in \bar{U}' \subseteq U$.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \in [x_0;\ U']\}$. Como f es r-límite de φ en K^X y $[x_0;\ U']$ es vecindad de f en K^X, $A \in r$. Entonces A es infinito. Sea $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Para toda $k \in \mathbb{N}$, sean $f_k = \varphi(n_k)$ y $V_k = f_k^{\leftarrow}(U')$ y $W = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$. Notemos que $x_0 \in W$ y que W es G_δ en X.

Demostraremos que W no es abierto en X. Si W fuera abierto en X, sería vecindad de x_0 y $f(W) \not\subseteq U$, así que existe $y \in W$ tal que $f(y) \notin U$. Por lo tanto $f(y) \notin \bar{U}'$. Por consiguiente, $[x_0;\ U'] \cap [y;\ K \setminus \bar{U}']$ es vecindad de f en K^X y por lo tanto $B = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \in [x_0;\ U'] \cap [y;\ K \setminus \bar{U}']\} \in r$. $B \subseteq A$ y como $B \neq \emptyset$ (pues $B \in r$), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \in B$. Por lo tanto $f_k \in [y;\ K \setminus \bar{U}']$ y $f_k(y) \notin U'$, contradiciendo que $y \in V_k$. □

En [**67**] se estudian otras propiedades que, como la $\aleph_0$-acotabilidad y la r-compacidad para cualquier $r \in \omega^*$, están relacionadas con la compacidad numerable y son en general más fuertes que ella. Definiremos ahora dos de ellas que son más débiles que la de ser $\aleph_0$-acotado.

DEFINICIÓN 5.18. *Un espacio topológico X es:*

(1) **De clase** $\mathcal{F}$ [6] *si para todo espacio numerablemente compacto Y, $X \times Y$ es numerablemente compacto.*

(2) **Totalmente numerablemente compacto** *si toda sucesión en X tiene una subsucesión contenida en un subconjunto compacto de X.*

OBSERVACIÓN 5.19. Como se prueba en [**67**], para espacios Tychonoff son válidas las siguientes implicaciones:

(i) secuencialmente compacto [7] $\Longrightarrow$ totalmente numerablemente compacto $\Longrightarrow$ clase $\mathcal{F}$ $\Longrightarrow$ numerablemente compacto.

(ii) $\aleph_0$-acotado $\Longrightarrow$ totalmente numerablemente compacto.

En [**67**] se dan ejemplos de que las recíprocas de las implicaciones anteriores no siempre son válidas. También allí se demuestra que si X es T_3, entonces X es $\aleph_0$-acotado si y sólo si, para cada $r \in \omega^*$, X es r-compacto. Cuando un espacio X satisface esta última propiedad, suele decirse que X es **ultracompacto** ([**17**])

En [**58**], Manuel Sanchis y Ángel Tamariz dan el siguiente concepto, ya usado por ellos implícitamente en [**57**]:

DEFINICIÓN 5.20. *Si X es un espacio topológico y $r \in \beta^*$, diremos que X es* **casi-r-compacto** *si para cada sucesión infinita $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en X, existen $x \in X$ y una sucesión $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $|f(B)| = \aleph_0$, para toda $B \in r$, y $x = r\text{-}lim(x_{f(n)})$.*

OBSERVACIÓN 5.21. Para toda $r \in \beta^*$, la casi-r-compacidad es una propiedad entre la ultracompacidad y la compacidad numerable (véase [**58**]), así que por este hecho, por el teorema 5.13, el lema 5.17 y por las observaciones hechas en 5.19, se obtiene la siguiente generalización del teorema 5.13, que fue casi totalmente establecido en el teorema 2.1 de [**58**]. Para simplificar su enunciado como lo hacen los autores de este artículo, denoteremos por $\mathcal{Q}$ a cualesquiera de las siguientes propiedades: $\aleph_0$-acotabilidad, ultracompacidad, r-compacidad para alguna $r \in \omega^*$, casi-r-compacidad para toda $r \in \omega^*$, casi-r-compacidad para alguna $r \in \omega^*$, pertenecer a la clase $\mathcal{F}$, compacidad numerable totalmente y compacidad numerable.

TEOREMA 5.22. *Si X es de Tychonoff, y $\mathcal{Q}$ es cualesquiera de las propiedades establecidas en la observación 5.21, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) *X es un P-espacio.*

(b) *$C_p(X, \mathbb{I})$ tiene $\mathcal{Q}$.*

(c) *$C_p(X, \mathbb{I})$ tiene σ-$\mathcal{Q}$.*

(d) *$C_p^*(X)$ tiene σ-$\mathcal{Q}$.*

Es un hecho subrayable el que $C_p(X, \mathbb{I})$ tiene $\mathcal{Q}$ si y sólo $C_p(X, \mathbb{I})$ tiene σ-$\mathcal{Q}$. Esto fue consecuencia del teorema 5.13. Mas como observamos en el comentario que antecede al lema 5.14, no ocurre lo mismo para los espacios $C_p(X, \mathbf{2})$, aunque X sea cero-dimensional. Sin embargo, haciendo uso del teorema 5.22, del corolario 5.15 y del lema 5.17, llegamos a la siguiente caracterización de la compacidad numerable, y de cualquier propiedad $\mathcal{Q}$, en $C_p(X, \mathbf{2})$ para X cero-dimensional.

---

[6] A veces se dice que un espacio X pertenece a la clase de Frolik $\mathcal{F}$ para indicar que es de clase $\mathcal{F}$

[7] Un espacio X es **secuencialmente compacto** si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente

TEOREMA 5.23. *Sea $\mathcal{Q}$ cualesquiera de las propiedades mencionadas en 5.21. Si X es cero-dimensional y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ son equivalentes las siguientes propiedades;*

(a) *X es un P-espacio.*
(b) *$C_p(X, \mathbf{n})$ tiene $\mathcal{Q}$.*
(c) *$C_p(X, \mathbb{I})$ tiene $\mathcal{Q}$.*
(d) *$C_p(X, \mathbb{I})$ tiene σ-$\mathcal{Q}$.*
(e) *$C_p^*(X)$ tiene σ-$\mathcal{Q}$.*

Cuando X no es cero-dimensional, podemos recurrir a (2) de la proposición 5.7 para obtener una caracterización de cualquier propiedad $\mathcal{Q}$ en $C_p(X, \mathbf{n})$ en términos de propiedades de X, pero no necesariamente en términos de la correspondiente propiedad $\mathcal{Q}$ en $C_p(X, \mathbb{I})$:

TEOREMA 5.24. *Sea $\mathcal{Q}$ una de las propiedades mencionadas en 5.21, X un espacio topológico cualquiera, y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces son equivalentes las propiedades siguientes:*

(a) *$C_p(X, \mathbf{n})$ tiene $\mathcal{Q}$.*
(b) *X es un $P_{\mathbb{Z}}$-espacio.*

EJEMPLOS 5.25. (1) La propiedad de ser secuencialmente compacto no puede ser incluida en la lista de propiedades $\mathcal{Q}$, porque no es equivalente a ellas. En efecto, se demuestra en **[67]** que $\mathbf{2}^{\mathfrak{c}}$ no es secuencialmente compacto. Por lo tanto, si X es un espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces $C_p(X, \mathbf{2}) = \mathbf{2}^X$ no es secuencialmente compacto. Sin embargo, este espacio X es P-espacio cero-dimensional y por el teorema 5.23, el espacio $C_p(X, \mathbf{2})$ resulta ser $\aleph_0$-acotado.

(2) Ahora sea $X = L(\omega_1)$ la extensión de Lindelöff por un punto del espacio discreto de cardinalidad $\aleph_1$. Este espacio se obtiene añadiendo al espacio discreto de cardinalidad $\aleph_1$, un nuevo punto, p_{ω_1} y estableciendo que las vecindades de p_{ω_1} son aquellos subconjuntos de X que contienen a p_{ω_1} y cuyos complementos son numerables.

Probaremos a continuación que $C_p(L(\omega_1), \mathbf{2})$ **es secuencialmente compacto**:

Para cada $i \in \{0, 1\}$, sea

$$T_i = \{f \in C_p(L(\omega_1), \mathbf{2}) : f(\omega_1) = i\}$$

Entonces $C_p(L(\omega_1), \mathbf{2}) = T_0 \cup T_1$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_p(L(\omega_1), \mathbf{2})$ entonces uno por lo menos de los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : f_n \in T_0\}$ y $\{n \in \mathbb{N} : f_n \in T_1\}$ es infinito. Supongamos que $\{n \in \mathbb{N} : f_n \in T_0\}$ es infinito o, para mayor comodidad, supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en T_0. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $\xi_n < \omega_1$ tal que $\forall \eta < \omega_1 : \eta > \xi_n \Longrightarrow f_n(\eta) = 0$. Sea $\bar{\xi} = sup\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto $\bar{\xi} < \omega_1$, así que $\mathbf{2}^{\bar{\xi}}$ es secuencialmente compacto (ver 5.9 de **[67]** [8]) y entonces la sucesión $(f_n|_{\bar{\xi}})_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(f_{n_k}|_{\bar{\xi}})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a una función $\hat{g} : \bar{\xi} \longrightarrow \mathbf{2}$. Sea $g : L(\omega_1) \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que:

$$g(\xi) = \begin{cases} \hat{g}(\xi) & si\ \xi < \bar{\xi} \\ 0 & si\ \xi \geq \bar{\xi}. \end{cases}$$

Entonces $g \in T_0$ y $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a g en T_0.

[8] Todo espacio compacto de cardinalidad menor que 2^{ω_1} es secuencialmente compacto.

Hemos entonces probado que $C_p(L(\omega_1), \mathbf{2})$ es secuencialmente compacto y por lo tanto, numerablemente compacto (por la observación 5.19(i)). Como consecuencia del teorema 5.24, $L(\omega_1)$ es $P_{\mathbf{2}}$-espacio, y por lo tanto P espacio, ya que es cero-dimensional; sin embargo, como no es discreto, $C_p(L(\omega_1), \mathbf{2})$ no es σ-compacto

En particular se deduce que:

$C_p(X, \mathbf{2})$ es σ-numerablemente compacto $\not\Longrightarrow$ $C_p(X, \mathbf{2})$ es σ-compacto .

Pasemos al estudio de la propiedad de la seudocompacidad y de la σ-seudocompacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$.

3. Seudocompacidad en $C_p(X, \mathbf{2})$.

Para recordar dos resultados muy conocidos de V. V. Tkačuk, necesitamos definir lo siguiente:

DEFINICIÓN 5.26. *Sea X un espacio de Tychonoff.*

(1) *Un subespacio Y de X* **está acotado en** *X si para toda $f \in C(X)$, $f|_Y \in C^*(Y)$, es decir, es una función acotada.*
(2) *X es* **ω-discreto** *si todo subconjunto numerable de X es discreto.*
(3) *X es* **b-discreto** *si todo subconjunto numerable de X es discreto y C^*-encajado en X.*

OBSERVACIÓN 5.27. (1) Todo espacio seudocompacto Y es un subconjunto acotado en todo superespacio Z de Y.
(2) Un espacio X es seudocompacto si y sólo si está acotado en sí mismo.
(3) (Ver [**58**]) Si X es un espacio topológico y $Y \subseteq X$, entonces Y es acotado en X si y sólo si cualquier sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de abiertos ajenos entre sí en X que intersectan a Y, tiene un punto de acumulación en X.[9]

Ahora podemos enunciar los dos resultados de Tkačuk:

TEOREMA 5.28 ([**65**]). *Si X es un espacio de Tychonoff, son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(a) *X es seudocompacto y b-discreto.*
(b) *$C_p(X)$ es σ-seudocompacto.*
(c) *$C_p(X)$ es σ-acotado.*

TEOREMA 5.29 ([**65**]). *Si X es un espacio de Tychonoff, son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(a) *X es b-discreto*
(b) *$C_p(X, \mathbb{I})$ es seudocompacto.*
(c) *$C_p(X, \mathbb{I})$ es σ-seudocompacto.*
(d) *$C_p^*(X)$ es σ-seudocompacto.*
(e) *$C_p(X, \mathbb{I})$ es σ-acotado.*
(f) *$C_p^*(X)$ es σ-acotado.*

[9] Una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X se acumula en $x \in X$ si para cada vecindad V de x, $|\{n \in \mathbb{N} : A_n \cap V \neq \emptyset\}| = \aleph_0$. Decimos entonces que x es un punto de acumulación de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ver [61])

Estos teoremas han sido generalizados en varios sentidos por García, Sanchis y Tamariz en [**30**] y en [**58**]. Comenzaremos a explicar esto definiendo ciertos conceptos que generalizan la seudocompacidad y que son analizados con detalle en el citado artículo [**30**].

DEFINICIÓN 5.30. *Sean α un número cardinal infinito y E un espacio topológico.*

(1) *Un espacio topológico X es* α-**discreto** *si todo subconjunto de X de cardinalidad $\leq \alpha$ es discreto o, equivalentemente, es cerrado en X.*
(2) *Un espacio topológico X es* α-b_E-**discreto** *si todo subconjunto Y de X de cardinalidad a lo más α es discreto y E-encajado en X.*
(3) *Un espacio topológico X es* α-b-**discreto** *si es α-b_I-discreto.*[10]
(4) *Un espacio topológico X es* b_E-**discreto** *si es $\aleph_0$-b_E-discreto.*
(5) *Un subconjunto Y de un producto de Tychonoff $X = \prod_{j\in J} X_j$ es* α-**denso en X** *si para todo subconjunto K de J, de cardinalidad a lo más α, tenemos que $\pi_K(Y) = \prod_{j\in K} X_j$.* [11]
(6) *([**29**]) Un subconjunto B de un espacio topológico X es* C-**compacto en** X *si $f(B)$ es compacto en $\mathbb{R}$, para toda $f \in C(X)$.*
(7) *Un subconjunto B de un espacio X es* C_α-**compacto en** X *si $f(B)$ es compacto en $\mathbb{R}^\alpha$, para toda $f \in C(X, \mathbb{R}^\alpha)$.*
(8) *Un espacio X es* α-**seudocompacto** *si es C_α-compacto en sí mismo.*
(9) *Un subconjunto Y de X es* G_δ-**denso en** X *si cada G_δ no vacío en X intersecta a Y.*

Otras clases de propiedades se definen usando el concepto de convergencia de sucesiones de subconjuntos de un espacio X, módulo un ultrafiltro libre ([**17**]).

DEFINICIÓN 5.31. *Sean $r \in \omega^*$ y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de un espacio X. Un punto $x \in X$ es un punto r-límite de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en símbolos $x = r\text{-lim}\ (S_n)$, si para toda vecindad de x en X, $\{n \in \mathbb{N} : V \cap S_n \neq \emptyset\} \in r$.*

DEFINICIÓN 5.32. *Sean $r \in \omega^*$ y X un espacio topológico.*

(1) *Un subconjunto A de X está* r-**acotado en** X *si para toda sucesión $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X, ajenos dos a dos y tales que $A \cap V_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x \in X$ tal que $x = r\text{-lim}\ (V_n)$.*
(2) *X es* r-**seudocompacto** *si es r-acotado en sí mismo.*
(3) *Un subconjunto A de X está* **casi-r-acotado en** X *si para toda sucesión $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que $A \cap V_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $x \in X$ y $f : \omega \longrightarrow \omega$ tales que $|f(B)| = \aleph_0$ para toda $B \in p$ y $x = p\text{-lim}\ (V_{f(n)})$.*
(4) *X es* **casi-r-seudocompacto** *si es casi-r-acotado en sí mismo.*

DEFINICIÓN 5.33. *Sea X un espacio topológico. Se dirá que X* **es ultraseudocompacto** *si es r-seudocompacto para toda $r \in \omega^*$.*

OBSERVACIÓN 5.34 ([**57**]). (1) La r-seudocompacidad y la ultracompacidad son productivas y preservadas por funciones continuas.

---

[10] Esto implica α-b-discreto en el sentido de la definición 1.3 de [60]

[11] Algunos autores como Oleg Okunev prefieren decir que Y **llena las caras de cardinalidad a lo más α de X.**

(2) Si A es un subconjunto de un espacio X y $r \in \omega^*$, entonces, si A está r-acotado en X, entonces A está casi-r-acotado en X y esto a su vez implica que A está acotado en X.
(3) Todo espacio ultraseudocompacto es r-seudocompacto y casi- r-compacto, para toda $r \in \omega^*$.
Además la r-seudocompacidad implica la casi-r-seudocompacidad, y cada una de estas propiedades implica la seudocompacidad.
(4) Otra propiedad que se encuentra entre la ultraseudocompacidad y la seudocompacidad, es la propiedad de pertenecer a la clase $\mathcal{F}'$: Se dice que un espacio X **pertenece a la clase de Frolík** $\mathcal{F}'$, si su producto con cualquier espacio seudocompacto es seudocompacto.

OBSERVACIÓN 5.35. Como se hace en **[58]** para simplificar los enunciados de los teoremas, denotaremos con la letra $\mathcal{S}$ a cualesquiera de las siguientes propiedades: ultraseudocompacidad, r-seudocompacidad para alguna $r \in \omega^*$, casi-r-seudocompacidad para toda $r \in \omega^*$, casi-r-seudocompacidad para alguna $r \in \omega^*$, seudocompacidad, pertenecer a la clase de Frolík $\mathcal{F}'$. También usaremos la letra $\mathcal{T}$ para representar a calesquiera de las siguientes propiedades: r-acotabilidad para toda $r \in \omega^*$, r-acotabilidad para alguna $r \in \omega^*$, casi-r-acotabilidad para toda $r \in \omega^*$, casi-r-acotabilidad para alguna $r \in \omega^*$, acotabilidad.

En **[58]** Sanchis y Tamariz demuestran el siguiente teorema:

TEOREMA 5.36 (3.2 de **[58]**). *Sea $\mathcal{S}$ alguna de las propiedades citadas en 5.35; sean J un conjunto, $X = \prod_{j \in J} X_j$ un producto de espacios compactos metrizables y Y un subconjunto denso de X. Para toda $r \in \omega^*$, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) *Y es $\aleph_0$-denso en X.*
(b) *Y es G_δ-denso en X.*
(C) *Y es C-compacto en X.*
(d) *Y tiene $\mathcal{S}$.*

Con este teorema, los mismos investigadores obtienen una muy interesante generalización de 5.29:

TEOREMA 5.37 (3.2 de **[58]**). *Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ propiedades como las mencionadas en 5.35. Si X es un espacio de Tychonoff, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) *X es b-discreto.*
(b) *$C_p(X, \mathbb{I})$ es C-compacto en $\mathbb{I}^X$.*
(c) *$C_p(X, \mathbb{I})$ tiene $\mathcal{S}$.*
(d) *$C_p(X, \mathbb{I})$ tiene σ-$\mathcal{S}$.*
(e) *$C_p^*(X)$ tiene σ-$\mathcal{S}$.*
(f) *$C_p(X, \mathbb{I})$ tiene σ-$\mathcal{T}$.*
(g) *$C_p^*(X)$ tiene σ-$\mathcal{T}$.*

En **[58]** aparece también esta generalización del teorema 5.28:

TEOREMA 5.38. *Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ propiedades como las mencionadas en 5.35. Si X es un espacio de Tychonoff, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) *X es seudocompacto y b-discreto.*
(b) *$C_p(X)$ tiene σ-$\mathcal{S}$.*

(c) $C_p(X)$ *tiene* σ-$\mathcal{T}$.

En [30] hallamos la siguiente extensión del teorema 5.36:

PROPOSICIÓN 5.39 (Lema 4.7 de [30]). *Sean* α *un cardinal infinito y* $X = \prod_{j\in J} X_j$ *un producto de espacios compactos de peso menor o igual que* α *y* $|\alpha| \leq J$. *Entonces, si* Y *es denso en* X, *son equivalentes:*

(a) Y *es* α*-seudocompacto.*
(b) Y *es* C_α*-compacto en* X.
(c) Y *es* α*-denso en* X.

Con el cual obtenemos:

COROLARIO 5.40. *Sean* α *un cardinal,* E *un espacio Puebla,de peso menor o igual que* α, *compacto, y* $X \in R(E)$. *Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) $C_p(X, E)$ *es* α*-seudocompacto.*
(b) $C_p(X, E)$ *es* C_α*-compacto en* E^X.
(c) $C_p(X, E)$ *es* α*-denso en* E^X.

DEMOSTRACIÓN. Si E es un espacio Puebla y X es E-regular, $C_p(X, E)$ es denso en E^X. El resultado se sigue entonces de la proposición anterior, tomando en cuenta que $w(E) \leq \alpha$. $\square$

Otro interesante resultado es el siguiente:

PROPOSICIÓN 5.41. *Dados un espacio cualquiera* X, *un espacio* T_0 E *con más de un punto y un número cardinal infinito* α, *entonces* X *es* α-b_E*-discreto si y sólo si* $C_p(X, E)$ *es* α*-denso en* E^X.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero la necesidad: Supongamos que X es α-b_E-discreto y que K es un subconjunto de X de cardinalidad menor o igual que α. Mostraremos que $p_K(C_p(X, E)) = E^K$, donde $p_K : E^X \longrightarrow E^K$ es la proyección canónica a la K-ésima cara de E^X:
Sea h un elemento de E^K. Como K es discreto, h es continua y, como K es E-encajado en X, existe $\hat{h} \in C(X, E)$ tal que $\hat{h}|_K = h$. Por consiguiente, $p_K(\hat{h}) = \hat{h}|_K = h$. Por consiguiente $h \in p_K(C_p(X, E))$. Esto muestra que $p_K(C_p(X, E)) \subseteq E^K$ y, por supuesto, la igualdad entre ambos conjuntos.
Ahora demostraremos la suficiencia: Supongamos que $C_p(X, E)$ es α-denso en E^X. Sea K un subconjunto de X de cardinalidad a lo más α. Entonces $p_K(C_p(X, E)) = E^K$, es decir, para toda $f \in E^K$ existe $g \in C_p(X, E)$ tal que $g|_K = f$. Esto implica que K es E-encajado en X y también que para toda $f \in E^K$, f es continua y, por lo tanto, que K es discreto. Por todo esto X es α-b_E-discreto. $\square$

Este resultado y el corolario 5.40 implican lo siguiente:

COROLARIO 5.42. *Sean* α *un cardinal infinito,* E *un espacio Puebla, de peso menor o igual que* α *y compacto. Sea* X *un espacio* E*-regular. Son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(a) X *es* α-b_E*-discreto.*
(b) $C_p(X, E)$ *es* α*-seudocompacto.*

(c) *$C_p(X,E)$ es C_α-compacto en E^X,*
(d) *$C_p(X,E)$ es α-denso en E^X.*

Haciendo $\alpha = \aleph_0$, obtenemos:

COROLARIO 5.43. *Sean E un espacio Puebla, separable y compacto, y X un espacio E-regular. Son equivalentes las afirmaciones siguientes:*
(a) *X es b_E-discreto.*
(b) *$C_p(X,E)$ es seudocompacto.*
(c) *$C_p(X,E)$ es $C_{\aleph_0}$-compacto en E^X*
(d) *$C_p(X,E)$ es $\aleph_0$-denso en E^X.*

En vista del teorema 5.36, el corolario anterior puede extenderse al siguiente:

TEOREMA 5.44. *Sean E un espacio Puebla, métrico, compacto, y $X \in R(E)$. Son equivalentes:*
(1) *X es b_E-discreto.*
(2) *$C_p(X,E)$ tiene $\mathcal{S}$*
(3) *$C_p(X,E)$ es $C_{\aleph_0}$-compacto en E^X*
(4) *$C_p(X,E)$ es $\aleph_0$-denso en E^X.*

COROLARIO 5.45. *Sea $\mathcal{S}$ alguna de las propiedades mencionadas en 5.35. Si X es cero-dimensional y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(a) *X es $b_{\mathbf{n}}$-discreto.*
(b) *$C_p(X,\mathbf{n})$ tiene $\mathcal{S}$.*
(c) *$C_p(X,\mathbf{n})$ es $C_{\aleph_0}$-compacto en $\mathbf{n}^X$.*
(c) *$C_p(X,\mathbf{n})$ es $\aleph_0$-denso en $\mathbf{n}^X$.*

EJEMPLO 5.46. Sea X es espacio de ordinales $\omega + 1$. ω es un subespacio de él que es discreto y numerable; sin embargo la función $f : \omega \longrightarrow \mathbf{2}$ que vale 1 en los números pares y 0 en los impares, no tiene una extensión continua a X, porque dicha extensión tendría que ser eventualmente constante. Entonces ω no está $\mathbf{2}$-encajado en X, y esto prueba que este espacio no es b_2-discreto y, por el teorema anterior, $C_p(X,\mathbf{2})$ no es seudocompacto. Sin embargo, como vimos en 5.10, $C_p(X,\mathbf{2})$ es σ-compacto y por lo tanto es σ-seudocompacto. He aquí un ejemplo que demuestra que las propiedades $\mathcal{S}$ y σ-$\mathcal{S}$, no son equivalentes en los espacios del tipo $C_p(X,\mathbf{n})$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Como en el caso de la compacidad numerable, ésta es una diferencia con lo que acontece para $C_p(X,\mathbb{I})$.

Pasemos ahora a analizar la σ-compacidad en $C_p(X,\mathbf{2})$ y $C_p(X,\mathbb{Z})$.

4. σ-compacidad en $C_p(X,\mathbf{2})$ y $C_p(X,\mathbb{Z})$

Como la σ-compacidad en $C_p(X,\mathbb{I})$ y en $C_p(X)$ fue recordada ya en los teoremas 5.1 y 5.2, comenzaremos ahora con una definición:

DEFINICIÓN 5.47. *Diremos que una sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de un espacio Y* **converge a un punto** *$g \in Y$, si para toda vecindad V de g en Y, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S_n \subseteq V$, para toda $n \geq n_0$.*

DEFINICIÓN 5.48. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica.*

(1) *Diremos que $\mathcal{P}$ es* **una propiedad convergente** *si para todo espacio topológico Y y toda sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente a un elemento g de Y, de subconjuntos de Y que tienen la propiedad $\mathcal{P}$, se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \cup \{g\}$ tiene $\mathcal{P}$.*
(2) *Diremos que $\mathcal{P}$ es* **una propiedad suprayectiva** *si la imagen bajo una función continua de un espacio que tiene $\mathcal{P}$, también tiene $\mathcal{P}$.*
(3) *Diremos que $\mathcal{P}$ es* **una propiedad sk-dirigida** *si es finitamente productiva, débilmente hereditaria,*[12] *suprayectiva y tal que todo espacio compacto tiene $\mathcal{P}$.*
(4) *Diremos que $\mathcal{P}$ es* **una propiedad agradable**[13] *si es convergente, suprayectiva y todo espacio que tiene $\mathcal{P}$ contiene un espacio σ-seudocompacto denso.*
(4) *Diremos que $\mathcal{P}$ es* **una propiedad finitamente aditiva** *si la unión de toda colección finita de espacios que tienen $\mathcal{P}$ tiene también esta propiedad.*

Como ejemplos de propiedades agradables tenemos a la compacidad, la ultracompacidad, la r-compacidad, para cada $r \in \omega^*$; también la $\aleph_0$-acotabilidad, las clases de Frolik $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$, la compacidad numerable y la seudocompacidad.

Inspirados en la demostración del teorema III.1.11 de [**9**], demostraremos una generalización de él:

PROPOSICIÓN 5.49. *Sean $\mathcal{P}$ una propiedad topológica convergente y X un espacio de Tychonoff que tiene σ-$\mathcal{P}$. Entonces existe un espacio F que satisface $\mathcal{P}$, tal que $C_p(X) \subset_{Top} C_p(F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y = C_p(X)$. Como X es de Tychonoff, por el corolario 2.43 la función evaluación canónica de la familia $C(X)$,

$$\psi : X \longrightarrow C_p(Y),$$

es inmersión. Pongamos $Z = \psi(X)$; entonces Z es homeomorfo a X y por eso tiene σ-$\mathcal{P}$.
Como subconjunto de C(Y), Z es Top-fuente inicial. En efecto, $\{g^{\leftarrow}(U) : g \in Z$ y U es abierto en $\mathbb{R}\} = \{\psi(x)^{\leftarrow}(U) : x \in X$ y U es abierto en $\mathbb{R}\} = = \{\hat{x}^{\leftarrow}(U) : x \in X$ y U es abierto en $\mathbb{R}\}$ es subbase de la topología de Y (ver 2.9(2)). La fuente Z también separa puntos de Y, porque si f y g son dos elementos distintos de Y, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, es decir, $\hat{x}(f) \neq \hat{x}(g)$, y $\hat{x} = \psi(x) \in Z$.

Sea ahora $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,\ 1)$ un homeomorfismo. Por la observación 2.33,

$$\varphi_* : C_p(Y) \longrightarrow C_p(Y, (-1,\ 1))$$

es también un homeomorfismo. Así, $\varphi_*(Z)$ es un subespacio de $C_p(Y, (-1,\ 1))$ que tiene σ-$\mathcal{P}$, y es fácil corroborar que separa puntos de Y y que es Top-fuente inicial.

Como $\varphi_*(Z)$ tiene σ-$\mathcal{P}$, podemos escribir $\varphi_*(Z) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, donde cada F_i es un subespacio de $C_p(Y, (-1,\ 1))$ que tiene $\mathcal{P}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, la función $l_i : C_p(Y, (-1, 1)) \longrightarrow C_p(Y)$ es encaje, así que $G_i = l_i(F_i)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Es sencillo ver que $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de $C_p(Y)$ que converge a la función constante $\underline{0}$. Entonces, dado que $\mathcal{P}$ es una propiedad convergente, $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i \cup \{\underline{0}\}$ es un subconjunto de $C_p(Y)$ que tiene $\mathcal{P}$. Por otro lado,

[12] Ver la definición de estas dos propiedades en la nota al pie de la página 125
[13] Del inglés nice.

también es fácil ver que G separa puntos de Y y que es Top-fuente inicial; por (2) de la proposición 2.42, se deduce que

$$\psi_G : Y \longrightarrow C_p(G)$$

es encaje. □

COROLARIO 5.50 (III.1.11 de [9]). *Si X es un espacio de Tychonoff σ-compacto, entonces existe un compacto F tal que $C_p(X) \subset_{Top} C_p(F)$.*

A los espacios que cumplen la propiedad expresada en el consecuente del corolario anterior, se les da un nombre especial:

DEFINICIÓN 5.51. *Se dice que un espacio topológico X es:*

(1) **De Eberlein–Grothendieck o espacio E-G** *si existe un compacto de Hausdorff C tal que $X \subset_{Top} C_p(C)$.*
(2) **Compacto de Eberlein** *si X es un espacio E-G y es compacto.*

Entonces el corolario 5.50 asegura que si X es un espacio de Tychonoff σ-compacto, entonces $C_p(X)$ es un espacio E-G.

COROLARIO 5.52. *Sea X un espacio topológico y supongamos que existe un subespacio Y de $C_p(X)$, σ-compacto y que es una Top-fuente inicial que separa los puntos de X. Entonces X es un espacio E-G.*

DEMOSTRACIÓN. Como Y es σ-compacto y de Tychonoff, $C_p(Y)$ es espacio E-G, por el corolario 5.50. Pero la función

$$\psi : X \longrightarrow C_p(Y)$$

definida en 2.40 es encaje (ver corolario 2.43). Por lo tanto, X es espacio E-G. □

COROLARIO 5.53. *Sea $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Si X es cero-dimensional y $C_p(X,\mathbf{n})$ es σ-compacto, entonces X es un espacio E-G.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el corolario 5.52 al espacio $C_p(X,\mathbf{n})$. En efecto, $C_p(X,\mathbf{n})$ es un subespacio σ-compacto de $C_p(X)$ (por hipótesis) que, como Top-fuente, separa puntos de X y es inicial, porque $X \in R(\mathbf{2})$ (véase el corolario 1.23). □

Con ayuda de 5.49 demostraremos un resultado que generaliza a este corolario después del siguiente lema y de la definición que le sigue.

LEMA 5.54. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica suprayectiva y finitamente aditiva. Si un producto topológico $X = \prod_{n\in\mathbf{N}} X_n$ satisface la propiedad σ-$\mathcal{P}$, entonces todos los espacios X_n satisfacen la propiedad σ-$\mathcal{P}$ y todos, excepto quizá un número finito de ellos, satisfacen $\mathcal{P}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como X tiene σ-$\mathcal{P}$, existe una familia $\{K_n : n \in \mathbf{N}\}$ de espacios, cada uno de los cuales tiene la propiedad $\mathcal{P}$, tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n$. Si para cada $n \in \mathbf{N}$, $\pi_n : X \longrightarrow X_n$ es la proyección natural, entonces

$$X_n = \pi_n(X) = \pi_n(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} K_j) = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} \pi_n(K_j)$$

y $\pi_n(K_j)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, porque esta propiedad es suprayectiva. Por lo tanto, cada espacio X_n tiene la propiedad σ-$\mathcal{P}$.

Para demostrar la segunda parte de la conclusión, pongamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \bigcup_{j\in[n]} K_j$ y $A = \{n \in \mathbb{N} : X_n \text{ no satisface } \mathcal{P}\}$.
Supongamos que $|A| = \aleph_0$.
Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}\setminus A$, sea x_n cualquier elemento de X_n y, para cada $n \in A$, sea x_n un elemento de $X_n \setminus \pi_n(Z_n)$ (este elemento existe porque como $\mathcal{P}$ es suprayectiva y finitamente aditiva, $\pi_n(Z_n)$ tiene $\mathcal{P}$ y por lo tanto no coincide con X_n).
Sea $\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} \in K_{n_0}$. Como A es infinito, existe $n \in A$ tal que $n \geq n_0$. Por consiguiente, $\bar{x} \in Z_n$ y con ello, $x_n \in \pi_n(Z_n)$, lo cual es una contradicción. □

DEFINICIÓN 5.55. *Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{R}$ propiedades topológicas.*

(1) *Se dice que $\mathcal{R}$* $C_p(\mathbf{2})$**-determina a** $\mathcal{P}$ *si para todo espacio cero-dimensional X, se tiene que X tiene $\mathcal{R}$ si y sólo si $C_p(X, \mathbf{2})$ tiene $\mathcal{P}$.*
(2) NOTACIÓN *Si X es un espacio topológico, denotaremos por $A_{\mathcal{R}}$ a la unión de todos los subespacios abiertos de X que tienen la propiedad $\mathcal{R}$, y representaremos con $X_{\mathcal{R}}$ al conjunto $X \setminus A_{\mathcal{R}}$.*

EJEMPLOS 5.56. (1) *La discretez $C_p(\mathbf{2})$-determina a la compacidad.*
(2) *Ser P-espacio $C_p(\mathbf{2})$-determina a cada una de las propiedades representadas por $\mathcal{Q}$ en 5.21.*
(3) *Ser un espacio α-b_2-discreto $C_p(\mathbf{2})$-determina a cada una de las propiedades representadas por $\mathcal{S}$ en 5.35.*
(4) *Si $\mathcal{R}$ es la discretez, entonces $X_{\mathcal{R}} = X'$, el conjunto de puntos que no son aislados en X.*
(5) *Si $\mathcal{R}$ es la propiedad de ser P-espacio, entonces $X_{\mathcal{R}} = \ddot{X}$, el conjunto de los puntos de X que no son P-puntos.*

PROPOSICIÓN 5.57. *Sean X un espacio cero-dimensional, $\mathcal{P}$ una propiedad agradable y $\mathcal{R}$ una propiedad que $C_p(\mathbf{2})$-determina a $\mathcal{P}$. Si uno de los espacios $C_p(X,\mathbb{Z})$ o $C_p^*(X,\mathbb{Z})$ o $C_p(X,\mathbf{n})$ para alguna $n \in \mathbb{N}\setminus\{2\}$ tienen $\sigma-\mathcal{P}$, entonces existe un espacio F que tiene $\mathcal{P}$ tal que $X \subset_{Top} C_p(F)$ y $X_{\mathcal{R}}$ es acotado en X.*

DEMOSTRACIÓN. Daremos sólo la prueba del caso en que $C_p(X, \mathbf{2})$ tiene σ-$\mathcal{P}$, porque la de los otros casos es similar.

$X \subset_{Top} C_p(C_p(X,\mathbf{2}),\mathbf{2})$. Entonces, como $C_p(X,\mathbf{2})$ tiene σ-$\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es convergente, entonces, por 5.49 hay un espacio F que satisface $\mathcal{P}$ tal que $X \subset_{Top} C_p(F)$.

Ahora demostraremos que $X_{\mathcal{R}}$ es acotado en X. Supogamos que no lo es; entonces existe una sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrabiertos de X, ajenos entre sí, tales que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap X_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ y la sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene un punto de acumulación en X. De este modo, X puede ser partido en una colección numerable infinita de subconjuntos cerrabiertos $Y_0 = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $Y_1 = U_0, \dots, Y_{k+1} = U_k, \dots$, tales que $Y_i \cap X_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, para toda $i > 0$. Pero esto implica que $C_p(X,\mathbf{2}) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} C_p(Y_n,\mathbf{2})$
Para $n > 0$ $Y_n \cap X_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, con lo que Y_n no satisface $\mathcal{R}$. Entonces, como $\mathcal{P}$ suprayectiva y finitamente aditiva, por el lema 5.54, $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_p(Y_n,\mathbf{2})$ no puede tener σ-$\mathcal{P}$. Entonces $C_p(X,\mathbf{2})$ no tiene σ-$\mathcal{P}$, lo cual es una contradicción. □

COROLARIO 5.58. *Si a las suposiciones hechas en la proposición 5.57 les añadimos la normalidad de X, entonces $X_{\mathcal{R}}$ es un compacto de Eberlein.*

DEMOSTRACIÓN. Por 5.57, $X_{\mathcal{R}}$ es acotado en X y existe un espacio F que tiene $\mathcal{P}$ y tal que $X \subset_{Top} C_p(F)$. Como X es normal y $X_{\mathcal{R}}$ es cerrado en X, $X_{\mathcal{R}}$ es seudocompacto. Por 3.10.21 de [**24**] y dado que X es normal, $X_{\mathcal{R}}$ es numerablemente compacto
Como F tiene $\mathcal{P}$, contiene un subespacio denso σ-seudocompacto, así que el resultado se sigue del teorema III.4.23 de [**9**].[14] □

Tomando en cuenta 5.56 (4) y (5), obtenemos los siguientes dos corolarios:

COROLARIO 5.59. *Si X es normal y cero-dimensional y $C_p(X,E)$ es σ-compacto, entonces X es un espacio EG y X' es un compacto de Eberlein.*

COROLARIO 5.60. *Sea $\mathcal{Q}$ alguna de las propiedades mencionadas en 5.21. Si X es normal y cero-dimensional y $C_p(X,E)$ tiene σ-$\mathcal{Q}$, entonces existe un espacio F que tiene $\mathcal{Q}$ tal que $X \subset_{Top} C_p(F)$ y $cl_X \ddot{X}$ es un compacto de Eberlein.*

En la dirección opuesta tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 5.61. *Si X es un espacio E-G y X' es compacto, se tiene que $C_p(X,\mathbf{2})$ es σ-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este teorema se logra adaptando la demostración del teorema 1.1 de [**54**]. En nuestro caso se tiene que, como X es E-G, existe un compacto Y tal que $X \subset_{Top} C_p(Y)$ y, si para toda $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{\varphi \in C_p(X,\mathbf{2}) : \exists(y_1,\ldots,y_n) \in Y^n : \forall f \in X' : \varphi(\langle f;\, y_1,\ldots,y_n;\, \frac{1}{n}\rangle) \subseteq \{\varphi(f)\}\}$, resulta que F_n es compacto y que $C_p(X,\mathbf{2}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. □

En resumen, se tiene el siguiente resultado probado independientemente por Oleg Okunev:

TEOREMA 5.62. *Si X es un espacio cero-dimensional y normal, entonces $C_p(X,\mathbf{2})$ es σ-compacto si y sólo si X es un espacio E-G y X' es compacto.*

Sería deseable, para mejorar este teorema, poder contestar afirmativamente al siguiente problema:

PROBLEMA: Si X es cero-dimensional y $C_p(X,E)$ es σ-compacto, ¿X es normal?

Mientras tanto mostremos que en $C_p(X,\mathbb{Z})$ las cosas salen mejor. Para ello comencemos con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.63. *Sea X un espacio topológico.*

(1) *X es* **$\mathbb{Z}$-acotado en** *un superespacio Y si para toda $f \in C_p(Y,\mathbb{Z})$ tenemos que $f|_X \in C_p^*(X,\mathbb{Z})$.*
(2) *X es* **$\mathbb{Z}$-seudocompacto**([**55**]) *si es $\mathbb{Z}$-acotado en sí mismo.*

OBSERVACIÓN 5.64. (1) X es $\mathbb{Z}$-seudocompacto si y sólo si no existe una partición infinita de X , es decir, una familia numerable de conjuntos abiertos ajenos no vacíos cuya unión es X (ver lema 1.8.2 de [**55**]).

[14] Teorema III.4.23 de [**9**]: Si Y contiene un subespacio denso σ-seudocompacto, entonces todo subespacio numerablemente compacto de $C_p(Y)$ es compacto de Eberlein.

(2) Si X es un espacio topológico cualquiera y $\tilde{X}$ es el espacio cero-dimensional definido en la observación 5.5, entonces X es $\mathbb{Z}$-seudocompacto si y sólo si $\tilde{X}$ es seudocompacto. (Ver [**55**]).
(3) Si X es cero-dimensional, entonces X es seudocompacto si y sólo si X es $\mathbb{Z}$-seudocompacto.

PROPOSICIÓN 5.65. *Si X es cero-dimensional y $C_p(X,\mathbb{Z})$ es σ-numerablemente compacto entonces X es $\mathbb{Z}$-seudocompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X no es $\mathbb{Z}$-seudocompacto. Entonces existe una partición infinita de X, $\epsilon = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ (por 5.64 (1)). Se puede suponer que todos los elementos de ϵ no son vacíos, así que podemos escoger, para cada n, un punto x_n en U_n.

Como $C_p(X,\mathbb{Z})$ es σ-numerablemente compacto, $C_p(X,\mathbb{Z}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, donde cada Z_n es numerablemente compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \tilde{x}_n(Z_n)$.[15]. Por 3.10.6 de [**24**], para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n es acotado y, por consiguiente, finito. Entonces podemos elegir en cada conjunto $\mathbb{Z} \setminus B_n$, un elemento a_n.

Si definimos la función $g : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ de tal forma que para toda $n \in \mathbb{N}$, $g|_{U_n} = \underline{a_n}$, entonces $g \in C_p(X,\mathbb{Z})$, por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g \in Z_{n_0}$. Esto implica que $a_{n_0} = g(x_{n_0}) = \tilde{x}_{n_0}(g) \in \tilde{x}_{n_0}(Z_{n_0}) = B_{n_0}$, lo cual es una contradicción. □

LEMA 5.66 (IV.5.5 de [**9**]). *Sean X un compacto y Y un subespacio seudocompacto de $C_p(X)$. Entonces Y es un compacto de Eberlein y es cerrado en $C_p(X)$.*

TEOREMA 5.67. *Si X es cero-dimensional entonces*

$$C_p(X,\mathbb{Z}) \text{ es } \sigma\text{-compacto} \iff X \text{ es compacto de Eberlein}$$

DEMOSTRACIÓN. $\Longrightarrow$) Si $C_p(X,\mathbb{Z})$ es σ-compacto entonces X es seudocompacto (por 5.65) y $C_p(X,\mathbf{2})$ es σ-compacto. Por lo tanto X es espacio E-G (por 5.53) y seudocompacto, así que es un subespacio seudocompacto de un espacio $C_p(K)$ con K compacto. Por 5.66, X es compacto de Eberlein.

$\Longleftarrow$) Si X es compacto de Eberlein entonces X es EG y X' es compacto. Por lo tanto X es seudocompacto y $C_p(X,\mathbf{2})$ es σ-compacto (por 5.61). Como X es seudocompacto, es $\mathbb{Z}$-seudocompacto y por lo tanto
$C_p(X,\mathbb{Z}) = C_p^*(X,\mathbb{Z}) \cong C_p^*(X,\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_p(X,\mathbf{2}^n) \cong \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_p(X,\mathbf{2})^n$
y cada uniendo $C_p(X,\mathbf{2})^n$ es σ-compacto.[16] Por lo tanto $C_p(X,\mathbb{Z})$ es σ-compacto.

□

[15] Ver la definición de la función $\tilde{x}_n$ en 2.8
[16] El producto finito de espacios σ-compactos es σ-compacto.

Bibliografía

[1] Anderson, F. W.; Kent R. F. Kent, *Rings and categories of modules*, Graduate Texts in Mathematics 13, Springer-Verlag, (1974).

[2] Angoa-Amador, J. J., *Σ-productos de espacios topológicos*, Tesis de maestría, UNAM, (1999).

[3] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants*, Russian Math. Surveys 33:6, 33–96, (1978).

[4] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Functional tighness, Q-spaces and τ-embeddings*, Comm. Math. Univ. Carolin. 24: 1, pp.105–120, (1983).

[5] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Continuous mappings, factorization theorems and function spaces*, Trans. Moscow Math. Soc., vol. 47, (1984).

[6] Arkhangel'skiĭ, A. V.,*A survey of C_p-Theory*, Q and A in General Topology 5 (1987), special issue.

[7] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Some results and problems in C_p-Theory*, Proc. Sixth Prague Topological Sympos., (1988), pp. 11–31.

[8] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Problems in C_p-Theory*, Open Problems in Topology, North-Holland, (1990), pp. 601–615.

[9] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Topological function spaces*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, (1992).

[10] Arkhangel'skiĭ, A. V.,*C_p-theory*, in M. Hušek and J.van Mill, eds., Recent Progress in General Topology (North-Holland, Amsterdam), (1992), Chapter 1, 1-56.

[11] Arkhangel'skiĭ, A. V., *General topology III. Capítulo II. Spaces of mapping and rings of continuous functions*, Springer-Verlag, (1995).

[12] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Some recent results and open problems in General Topology*, Uspekhi Mat. Nauk 52 (1997), 45–70. (Russian).

[13] Arkhangel'skiĭ, A. V., *Some observations on C_p-theory and bibliography*, Topology Appl. 89 (1998) 203–221.

[14] Arkhangel'skiĭ, A. V.; Čoban, M. M., *$C_p(X)$ and some other functors in General Topology. Continuous extenders*, in: J. Adamek and S. MacLane, eds., Categorical Topology (World Scientific, London, 1989), 432-445.

[15] Arkhangel'skiĭ, A. V.; Ponomarev, N.I., *Fundamentals of general topology: problems and excercises*, Reidel, (1984). (Translated from the Russian.)

[16] Baars, J.A.; de Groot, J. A. M., *On topological and linear Equivalence of certain function spaces* , Centrum voor Wiskunde en informatica (CWI Tract) 86, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1992).

[17] Bernstein, A. R., *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. 66 (1970), 185–193.

[18] Contreras-Carreto, A.; Tamariz-Mascarúa, A., *On compact like properties in $C_p(X, 2)$ and $C_p(X, \mathbb{Z})$ spaces*, rpote de investigación No. 6-02, recibido el 2 de mayo de 2002, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, enviado para su publicacón a Comment. Math. Univ. Carolin.

[19] Day, M. M, *Normed linear spaces*, Springer–Verlag (3rd. edn.), Berlin, (1973).

[20] Devlin, K., *The joy of sets. Fundamentals of contemporary set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, Second Edition, (1993).

[21] de Groot, J., *Groups represented by homeomorphism groups I.*, Math. Ann. 138, 80-102, (1959).

[22] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon Inc., (1966)

[23] Eda, K; Kiyosawa, T; Ohta, H., *N-compactness and its applications*, En Topics in General Topology. K. Morita, J. Nagata, Eds., Elsevier Science Publishers B.V., (1989).
[24] Engelking, R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, (1989).
[25] Engelking, R., *On functions defined on Cartesian products*, Fundamenta Mathematicae Lix, pp. 221–231, (1966).
[26] , Engelking, R; Mrówka, S., *On E-compact spaces*, Bull. Acad. Polo. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys., 6 (1958), 429–436.
[27] Fedorchuk, V. V., *General Topology I. Capítulo II. The fundamentals of dimension theory*, Springer-Verlag, (1980).
[28] Font, J. J.; Sanchis, M., *An algebraic characterization of $\mathcal{N}$-compactness.*
[29] García-Ferreira, S.; García-Maynez, A. *On weakly-pseudocompact spaces*, Houston J. Math. 20, (1990), 145–159.
[30] García-Ferreira, S.; Sanchis, M.; Tamariz-Mascarúa, A. *On C_α-compact subsets*, Topology Appl. 77, (1997), 139-160.
[31] García-Máynez, A.; Tamariz Mascarúa, A., *Topología general*, Editorial Porrúa, México, (1988).
[32] Gelfand, I.; Kolmogoroff, A., *On rings of continuous functions on topological spaces*, Doklady Akad. Nauk SSR 22, 11–15, (1939)
[33] Gillman, L., *Rings of continuous functions are rings*, Ordered Algebraic Structures, J. Martínez (ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, (1985)
[34] Gillman, L.; Jerison, M., *Rings of continuous functions*, Graduate Texts in Mathematics 43, Springer-Verlag, (1960).
[35] Graev, M.I., *Free topological groups*, Izvestja Akad. Nauk SSSR, ser. Math., 12, 279-324. In: Topology and Topological Algebra, Translations Amer. Math. Soc. Series, vol. 8 pp. 304-364, (1948).
[36] Gul'ko, S. P., *Spaces of continuous functions on ordinals and ultrafilters*, Kuibyshev State University, Tomsk. Translated from Matematicheskie Zametki, Vol. 47, N0. 4, pp. 26–34, April, (1990).
[37] Gul'ko, S. P.; Khmyleva, T. E., *Compactness is not preserved by the relation of t-equivalence*, Math Notes, 39(5-6), 484-488 (1986).
[38] Henriksen, M., *Rings of continuous functions in the 1950s*, En Handbook of the History of General Topology, Volume I, 243-253, Kluwer Academic Publishers, (1997).
[39] Hernández Hernández F., *Teoría de conjuntos*, Aportaciones Matemáticas No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, (1998).
[40] Herrlich, H.; Strecker, G. E., *Category theory, an introduction*, Allyn and Bacon Inc., Boston, (1973).
[41] Herrlich, H.; Strecker, G.E., *Categorical Topology–its origins, as exemplified by the unfolding of the theory of topological reflections and coreflections before 1971*, En Handbook of the History of General Topology, Volume I, 255–341, Kluwer Academic Publishers, (1997).
[42] Hewitt, E., *Rings of real-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 64, 54–99, (1948).
[43] Hodel, R., *Cardinal functions I*, En Handbook of Set-Theoretic Topology, Edited by K. Kunen and J. E. Vaughan, Elsevier Science Publishers B. V., (1984).
[44] Horváth, J., *Topological vector spaces and distributions, Vol. I*, Addison-Wesley Series in Mathtmatics, (1971).
[45] Ibarra Contreras M., *Sigma-espacios Lindelöf. Tesis de maestría, UNAM, (1999).*
[46] Lang, S., *Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 4177, (1971).
[47] McCoy, R. A.; Ntantu, I., *Topological properties of spaces of continuous functions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1315, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, (1988).
[48] Mròwka, S., *Further results on E-compact spaces I.* Acta Math. 120, 161-185, (1968).
[49] Mròwka, S., *Structures of continuous functions I.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. Tomus 21 (3-4), (1970), pp.239-259.
[50] Mròwka, S., *Structures of continuous functions III. Rings and lattices of integer-valued continuous functions*, Indag. Math. 27, 74–82.
[51] Nagata, J., *On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces*, Osaka Math. J., 1(2), 166–181.

[52] Nyikos, P. J.; Reichel, H. C., *On th structure of zerodimentional spaces*, Indagationes Mathematicae, (to appear).

[53] Okunev, O. G., *Weak topology of associated space and a $t-$equivalence*, Mat Zametki, 46(1), 53-59. Math. Notes 46 (1-2), (1990), 534-538.

[54] Okunev, O. G., *On Lindelöf Σ-spaces of continuous functions in the pointwise topology*, Topology Appl., 49, (1993) 149-166, North-Holland.

[55] Pierce, R. S., *Rings of integer-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 100, 371-394.

[56] Porter, J. R.; Woods R.G., *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces.*, Springer-Verlag.

[57] Sanchis, M.; Tamariz-Mascarúa, A., *On Quasi-p-bounded subsets*, Colloquium Mathematicum, Vol. 80 No.2, (1999).

[58] Sanchis, M.; Tamariz-Mascarúa. A., *A Note on p-pounded and quasi-p-bounded subsets*, Houston Journal of Mathematics, University of Houston.

[59] Shirota, T., *A generalization of a theorem of I. Kaplansky*, Osaka Math. J. 4, 121–132, (1952).

[60] Tamariz-Mascarúa, A., *α-pseudocompactness in C_p-spaces*, Topology Proceedings. Volume 23, Summer (1998), 349-362.

[61] Tamariz Mascarúa, A., *Topología de Conjuntos*, Manuscrito de la conferencia dictada en Noviembre de 1999 en el Palacio de Minería durante la celebración del 60 aniversario de la Facultad de Ciencias, UNAM.

[62] Tamariz Mascarúa, A.; Casarrubias-Segura, F; Hernández-Hernández, F., *Notas sobre espacios de funciones continuas*, Manuscrito, UNAM, (1997).

[63] Tkachenko, M.; Villegas-Silva, L. M.; Hernández-García, C.; Rendón-Gómez, O., *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Mtropolitana, Unidad Iztapalapa, (1997).

[64] Tkačuk, V. V.; Shakhmatov, D.B., *When is the space $C_p(X)$ σ-countably compact?*, Vesnik Mosk. Univ. Matematika, 41 (1986), 70–72

[65] Tkačuk, V. V., The spaces $C_p(X)$: descomposition into a countable union of bounded subspaces and completeness properties, Topology Appl. 22 (1986), 241–253.

[66] Van Douwen, F. K., *Simultaneous extensions of continuous functions*, Dissertation, Amsterdam, (1975).

[67] Vaughan, J. E., *Countably compact and sequentially compact spaces*, Capítulo 12 (pp. 569-602) del Handbook of Set-Theoretic Topology. Edited by K. Kunen and J. E. Vaughan, Elsevier Science Publishers B.V., (1984).

[68] Velichko, N. V., *Continuous mappings and spaces of continuous mappings*, Tyumen-Moscow, (1983).

[69] Walker, R. C., *The Stone-Čech compactification*, Springer-Verlag, (1974).

[70] Willard, S., *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, (1970).