



00384  
1  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS**

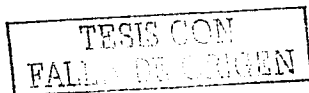
**PRODUCTOS SIMÉTRICOS.**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
**DOCTOR EN CIENCIAS**  
(MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A :  
**M. en C. Enrique Castañeda Alvarado**

DIRECTOR DE TESIS: DR ALEJANDRO ILLANES MEJÍA



MÉXICO , D.F.

FEBRERO, 2003

**A**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la memoria de mi padre:*

*Francisco Castañeda G.*

*A mis hijos y mi esposa:*

*Celeste Marian, Jair Isaac y María Remedios*

*A quien ha sido más que una madre:*

*Concepción García*

*A:*

*Diego y Ana*

**B**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento, al Dr. Alejandro Illanes Mejía, primero por haber aceptado dirigir este trabajo, segundo por la infinita paciencia y tolerancia que ha tenido a lo largo de estos últimos años para conmigo y, finalmente, por las enseñanzas que me ha brindado. (*¡GRACIAS! ALEJANDRO*).

Al Dr. Francisco Javier González Acuña, por ayudarme en la parte de teoría de nudos

A los profesores Dr. Francisco Javier González Acuña, Dr. Sergio Macías Álvarez, Dra. Marfa Isabel Puga Espinosa, Dr. Vladimir Tkachuk Vladimirovich, Dr. Janusz Jerzy Charatonik, Dr. Angel Tamariz Mascartúa, por haber aceptado revisar este trabajo.

Finalmente quiero agradecer a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México el apoyo que me brindaron para poder realizar todos mis estudios.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Productos Simétricos

Enrique Castañeda

0

|                              |
|------------------------------|
| TESIS CON<br>FALLA DE ORIGEN |
|------------------------------|

# Contenido

|  |    |
|--|----|
| Introducción                             | 1  |
| 1 Unicoherencia de $F_2(X)$              | 3  |
| 1.1 Introducción                         | 3  |
| 1.2 El ejemplo                           | 4  |
| 2 Encajando $F_n(X)$ en $\mathbb{R}^n$   | 13 |
| 2.1 Introducción                         | 13 |
| 2.2 Encajando $F_2(X)$ en $\mathbb{R}^3$ | 13 |
| 2.3 Encajando $F_2(X)$ en el plano       | 24 |
| 2.4 Encajando $F_3(X)$ en $\mathbb{R}^3$ | 26 |
| 2.5 Problemas                            | 26 |
| 3 Hiperespacios únicos                   | 29 |
| 3.1 Introducción                         | 29 |
| 3.2 Continuos localmente conexos         | 30 |
| 3.3 Gráficas, el caso $n \geq 4$         | 34 |
| 3.4 Gráficas, el caso $n \leq 3$         | 39 |
| 3.5 Productos simétricos únicos          | 52 |
| 4 Comparando con conos y productos       | 55 |
| 4.1 Introducción                         | 55 |
| 4.2 Resultados                           | 56 |
| Bibliografía                             | 65 |

# INTRODUCCIÓN

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no degenerado. Dado un continuo  $X$ , un hiperespacio de  $X$  es una cierta familia de subconjuntos de  $X$ . Los más estudiados son ( $n$  es un entero positivo):

$$\begin{aligned}2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \text{ y} \\F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.\end{aligned}$$

A estos hiperespacios se les dota de una métrica llamada *métrica de Hausdorff*, que se denota por  $H$ .

También se pueden definir hiperespacios para todos los espacios topológicos. Sin embargo, la riqueza de estructura que los continuos heredan a sus hiperespacios es muy amplia. Los hiperespacios de los continuos tienen propiedades tan agradables como la metrizableidad, la compacidad y la conexidad. Además  $2^X$ ,  $C(X)$  y  $C_n(X)$  son conexos por trayectorias no importando si en  $X$  no existe una sola trayectoria.

Los hiperespacios  $F_n(X)$  también son llamados *productos simétricos*. Y fueron introducidos por K. Borsuk y S. Ulam en 1931.

En este trabajo abordamos, para  $F_n(X)$ , algunos problemas naturales que habían sido abordados preferentemente para  $2^X$  y  $C(X)$ .

Empezamos mencionando que S. B. Nadler, Jr., probó que  $2^X$  y  $C(X)$  son unicoherentes. Para  $F_n(X)$  el comportamiento de la unicoherencia es diferente y hasta este trabajo, en el Capítulo 1 se muestra, un ejemplo de un continuo unicoherente  $X$  tal que  $F_2(X)$  no es unicoherente.

En el segundo capítulo abordamos la problemática de cuándo un producto simétrico  $F_n(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ . Aquí obtuvimos algunos resultados interesantes (juzgue usted). Los siguientes son los principales:

Una caracterización completa de los (siete) continuos de Peano  $X$  tales que  $F_2(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ .

El intervalo  $[0, 1]$  es el único continuo tal que  $F_2(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^2$ .

Para ningún continuo  $X$  y ninguna  $n \geq 4$ ,  $F_n(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ .

El tercer capítulo está dedicado al problema de la unicidad de hiperespacios  $F_n(X)$ . En México se han hecho muchos avances en los problemas de determinar qué continuos tienen hiperespacios únicos  $C(X)$  y  $2^X$ . Aquí contribuimos a esta línea de investigación con el resultado que dice que si  $X$  es una gráfica y  $Y$  es un continuo tales que  $F_n(X)$  y  $F_n(Y)$  son homeomorfos, entonces  $X$  y  $Y$  son homeomorfos.

Finalmente, el cuarto capítulo lo dedicamos a determinar cuándo un hiperespacio  $F_n(X)$  es homeomorfo a un producto cartesiano o a un cono. Como lo narramos en la introducción de ese capítulo, el problema de determinar cuándo  $C(X)$  es un producto o un cono, es un problema de gran tradición en los hiperespacios. Aquí mostramos que si  $X$  es una gráfica, entonces  $F_2(X)$  es un producto de dos continuos no degenerados si y sólo si  $X$  es un arco, además;  $F_2(X)$  es un cono si y sólo si  $X$  es un arco o un  $n$ -odo simple.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



# Capítulo 1

## Unicoherencia de $F_2(X)$

### 1.1 Introducción

En 1931, K. Borsuk y S. Ulam ([5]), propusieron la siguiente pregunta. ¿Si  $X$  es un continuo localmente conexo y unicoherente, entonces  $F_n(X)$  es unicoherente? La respuesta a esta pregunta es afirmativa y fue dada por T. Ganea en [14]. De hecho Ganea probó el siguiente teorema.

**Teorema 1.1** ([14]). Si  $X$  es un espacio de Hausdorff, conexo, localmente conexo y unicoherente, entonces  $F_n(X)$  es unicoherente para toda  $n$ .

Para cada espacio topológico  $Y$ , definamos

$$b_0(Y) = (\text{el número de componentes de } Y) - 1,$$

si tal número es finito, y  $b_0(Y) = \infty$  en otro caso. El *grado de multicoherencia*,  $r(X)$ , de un espacio conexo  $X$  se define por

$$r(X) = \sup\{b_0(H \cap K) : H \text{ y } K \text{ son subconjuntos cerrados y conexos de } X \text{ y } X = H \cup K\}.$$

Observemos que  $X$  es unicoherente si y sólo si  $r(X) = 0$ . Un continuo se llama *multicoherente* si  $r(X) \neq 0$ . En [17], A. Illanes probó los siguientes resultados:

**Teorema 1.2** ([17, Teorema 2.6]). Si  $X$  es arco-conexo, localmente conexo y de Hausdorff, entonces  $F_n(X)$  es unicoherente para toda  $n \geq 3$ .

**Teorema 1.3** ([17, Teorema 1.6]). Si  $F_2(X)$  es normal y  $X$  es un espacio de Hausdorff, conexo, localmente conexo y multicoherente, entonces  $r(F_2(X)) = 1$ .

Recientemente S. Macías en [31] probó los siguientes resultados.

**Teorema 1.4** ([31, Teorema 8]). Si  $X$  es un continuo, entonces  $F_n(X)$  es unicoherente para cada  $n \geq 3$ .

**Teorema 1.5** ([31]) Si  $X$  es un continuo, entonces  $r(F_2(X)) \leq 1$ .

En ([15, Problema 4]) A. García-Máynez y A. Illanes, hicieron la siguiente pregunta. ¿Si  $X$  es un continuo unicoherente, entonces  $F_2(X)$  es unicoherente? Observemos que la respuesta a esta pregunta cierra totalmente el problema de la unicoherencia en productos simétricos de continuos. En este capítulo respondemos esta pregunta en forma negativa. Concretamente, construimos un continuo unicoherente y plano  $X$  tal que  $F_2(X)$  no es unicoherente.

## 1.2 El ejemplo

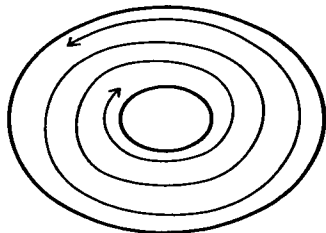
Definamos

$$S_1 = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}, \quad S_2 = \{3e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

y

$$Y = \left\{ \left( \frac{t}{1+|t|} + 2 \right) e^{it} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hagamos  $X = S_1 \cup Y \cup S_2$ . El continuo  $X$  es la unión de dos círculos y una espiral la cual se enreda asintóticamente a los dos círculos, como se muestra en la siguiente figura.



Obsérvese que  $X$  es un continuo. Además, un subcontinuo no degenerado de  $X$  tiene las siguientes posibilidades:

- que sea un subcontinuo de  $S_1$ , de  $Y$  o de  $S_2$ ,
- que sea homeomorfo a la unión de  $S_1$  (resp.,  $S_2$ ) y una parte de la espiral  $Y$ , enredándose asintóticamente a  $S_1$  (resp.,  $S_2$ ),
- que sea  $X$  mismo.

Veamos primero que  $X$  es unicoherente. Para esto, sean  $A$  y  $B$  dos subcontinuos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Obsérvese que si  $A$  es un subcontinuo de  $S_1$ , de  $Y$  o de  $S_2$  entonces  $B$  tiene que ser igual a  $X$ , por lo que  $A \cap B = A$ . Supongamos entonces que  $A$  es homeomorfo a la unión de  $S_1$  y una parte de la espiral  $Y$ , enredándose asintóticamente a  $S_1$ , entonces  $B$  tiene que ser de alguna de las siguientes formas:

(a)  $B$  es homeomorfo a la unión de  $S_2$  y una parte de la espiral  $Y$ , enredándose asintóticamente a  $S_2$ , en este caso se tiene que existen  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $A = S_1 \cup Y_1$  y  $B = S_2 \cup Y_2$ , donde

$$Y_1 = \left\{ \left( \frac{t}{1+|t|} + 2 \right) e^{it} : t \in (-\infty, t_1] \right\} \text{ y}$$

$$Y_2 = \left\{ \left( \frac{t}{1+|t|} + 2 \right) e^{it} : t \in [t_2, \infty) \right\}.$$

Dado que  $X = A \cup B$ , entonces  $t_2 \leq t_1$ . Por tanto

$$A \cap B = Y_1 \cap Y_2 = \left\{ \left( \frac{t}{1+|t|} + 2 \right) e^{it} : t \in [t_2, t_1] \right\}$$

que es un conjunto conexo.

(b)  $B = X$ , en este caso se tiene que  $A \cap B = A$ .

La última posibilidad es que  $A = X = B$ , entonces  $A \cap B = X$ .

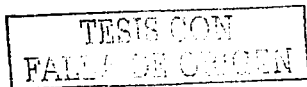
En cualquier caso se concluye que  $A \cap B$  es conexo. Por tanto, el continuo  $X$  es unicoherente.

Ahora probaremos que  $F_2(X)$  no es unicoherente. Sean

$$A = \{ \{z, w\} \in F_2(X) : \text{Im}(zw) \geq 0 \} \text{ y}$$

$$B = \{ \{z, w\} \in F_2(X) : \text{Im}(zw) \leq 0 \},$$

donde  $\text{Im}(zw)$  significa la parte imaginaria del número complejo  $zw$ . Es claro que  $A \cup B = F_2(X)$ .



Veamos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son cerrados.

Consideremos la función  $G: X \times X \rightarrow F_2(X)$  dada por  $G(w, z) = \{w, z\}$ . Dado que  $G$  es continua y  $X \times X$  es compacto,  $G$  es una identificación. Sea  $P: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  la función producto de números complejos dada por  $P(w, z) = wz$ . Como el producto  $P$  es conmutativo,  $P$  preserva las fibras de  $G$  por lo que podemos aplicar el Teorema de la Transgresión (11. Teorema 3.2, Capítulo VI) y obtener que la función de  $F_2(X)$  en  $\mathbb{C}$  que envía a  $\{z, w\}$  en  $zw$  es continua. Y como la función que a un número complejo le asocia su parte imaginaria es continua, concluimos que tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{B}$  son cerrados en  $F_2(X)$ .

Ahora probaremos que  $\mathcal{A}$  es conexo.

Sea  $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ , donde

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset Y\} \text{ y } \mathcal{E} = \{\{z, w\} \in \mathcal{A} : z \in S_1, w \in S_2\}.$$

**Afirmación 1.**  $\mathcal{C}$  es un subconjunto conexo de  $\mathcal{A}$ .

Sea  $P = \{e^{iu}, 3e^{iv}\} \in \mathcal{E}$ . Entonces  $\text{Im}(3e^{i(u+v)}) \geq 0$ . Primero veamos que  $\mathcal{E}$  es conexo. Para esto mostraremos la existencia de un subconjunto conexo  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{E}$  tal que  $P$  y  $\{1, 3\} \in \mathcal{L}$ . Supongamos, por ejemplo, que  $0 \leq u \leq v \leq 2\pi$ . Entonces  $0 \leq u + v \leq 4\pi$ . Dado que  $\text{Im}(3e^{i(u+v)}) \geq 0$ ,  $0 \leq u + v \leq \pi$  o  $2\pi \leq u + v \leq 3\pi$ . Consideremos los siguientes dos casos:

**Caso I.**  $0 \leq u + v \leq \pi$ .

Definimos el conjunto

$$\mathcal{L} = \{\{e^{i(u+r)}, 3e^{i(v-r)}\} : r \in [0, (v-u)/2]\} \cup$$

$$\{\{e^{ir}, 3e^{ir}\} : r \in [0, (u+v)/2]\}.$$

Nótese que  $\mathcal{L}$  contiene a los elementos  $P$  y  $\{1, 3\}$ . Observemos también que  $\mathcal{L}$  es la unión de dos conjuntos conexos que tienen en común al punto

$$\{e^{i(u+v)/2}, 3e^{i(u+v)/2}\}.$$

Entonces  $\mathcal{L}$  es conexo. Para ver que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ . Tomemos un punto  $Q \in \mathcal{L}$ . Entonces tenemos las siguientes dos posibilidades:

a) si  $Q = \{e^{i(u+r)}, 3e^{i(v-r)}\}$ , entonces

$$\text{Im}((e^{i(u+r)})(3e^{i(v-r)})) = \text{Im}(3e^{i(u+v)}) \geq 0.$$

b) si  $Q = \{e^{ir}, 3e^{ir}\}$  con  $r \in [0, (u+v)/2]$ , entonces  $0 \leq r \leq \pi/2$ . Así,

$$\operatorname{Im}((e^{ir})(3e^{ir})) = \operatorname{Im}(3e^{2ir}) \geq 0.$$

En conclusión  $Q \in \mathcal{E}$ . Por tanto  $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ .

**Caso II.**  $2\pi \leq u+v \leq 3\pi$ .

Sea  $l = ((u+v)/2) - \pi$ . Entonces  $0 \leq l \leq \pi/2$ . Notemos que  $0 \leq 2\pi - v \leq (u-v)/2 + \pi$ . Definamos el conjunto

$$\mathcal{L} = \{\{e^{i(u-r)}, 3e^{i(u+r)}\} : r \in [0, (u-v)/2 + \pi]\} \cup \{\{e^{ir}, 3e^{ir}\} : r \in [0, l]\}.$$

Notemos que  $\mathcal{L}$  contiene a los elementos  $P$  y  $\{1, 3\}$ . También en este caso  $\mathcal{L}$  es la unión de dos conjuntos conexos que tienen en común al punto

$$\{e^{il}, 3e^{i(l+2\pi)}\} = \{e^{il}, 3e^{il}\}.$$

Así,  $\mathcal{L}$  es conexo. Para ver que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ . Tenemos en este caso también dos posibilidades; sea  $Q \in \mathcal{L}$  entonces

a) si  $Q = \{e^{i(u-r)}, 3e^{i(u+r)}\}$ , entonces

$$\operatorname{Im}((e^{i(u-r)})(3e^{i(u+r)})) = \operatorname{Im}(3e^{i(u+v)}) \geq 0.$$

b) si  $Q = \{e^{ir}, 3e^{ir}\}$  con  $r \in [0, l]$ , entonces  $0 \leq r \leq l \leq \pi/2$ . Así,

$$\operatorname{Im}((e^{ir})(3e^{ir})) = \operatorname{Im}(3e^{2ir}) \geq 0.$$

En conclusión  $Q \in \mathcal{E}$ . Por tanto  $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ .

En los dos casos  $\mathcal{L}$  es un conexo contenido en  $\mathcal{E}$  y contiene tanto a  $P$  como a  $\{1, 3\}$ . Así,  $\mathcal{E}$  es conexo.

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , sea

$$g(t) = \left(\frac{t}{1+|t|} + 2\right)e^{it}.$$

Para completar la prueba de que  $\mathcal{C}$  es conexo, tomemos un punto arbitrario  $A \in \mathcal{D}$ . Mostraremos que existe un subconjunto conexo  $\mathcal{F}_0$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $A \in \mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ . Notemos que  $A$  es de la forma  $\{g(t), g(s)\}$ , donde  $t, s \in \mathbb{R}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $t \leq s$ . Sea  $m = (t+s)/2$ . Definamos

$$\mathcal{F} = \{\{g(t-r), g(s+r)\} : r \in \mathbb{R}\}$$

Dado que la función  $g$  es continua,  $\mathcal{F}$  es conexo.

Veamos que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ .

Sea  $R \in \mathcal{F}$ , entonces  $R = \{g(t-r), g(s+r)\}$  para alguna  $r \in \mathbb{R}$ , por la definición de  $R$  tenemos que  $R \subset Y$ , observemos además que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g(t-r)g(s+r)) &= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{t-r}{1+|t-r|} + 2\right)e^{i(t-r)}\left(\frac{s+r}{1+|s+r|} + 2\right)e^{i(s+r)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{t-r}{1+|t-r|} + 2\right)\left(\frac{s+r}{1+|s+r|} + 2\right)e^{i(t+s)}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g(t)g(s)) &= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{t}{1+|t|} + 2\right)e^{it}\left(\frac{s}{1+|s|} + 2\right)e^{is}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{t}{1+|t|} + 2\right)\left(\frac{s}{1+|s|} + 2\right)e^{i(t+s)}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto  $R \in \mathcal{A}$ . Así que  $R \in \mathcal{D}$ . Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos

$$B_n = \{g(t+s-m-2\pi n), g(t+s-m+2\pi n)\}.$$

Dado que  $t+s-m = m$  entonces

$$\begin{aligned} B_n &= \{g(m-2\pi n), g(m+2\pi n)\} \\ &= \left\{ \left(\frac{m-2\pi n}{1+|m-2\pi n|} + 2\right)e^{im}, \left(\frac{m+2\pi n}{1+|m+2\pi n|} + 2\right)e^{im} \right\}, \end{aligned}$$

Así que  $B_n$  converge a  $\{e^{im}, 3e^{im}\}$ . Además, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n \in \mathcal{F}$  pues si  $r = (t-s)/2 + 2\pi n$ , entonces

$$\{g(t-r), g(s+r)\} = \left\{ g\left(\frac{t+s}{2} - 2\pi n\right), g\left(\frac{t+s}{2} + 2\pi n\right) \right\} = B_n.$$

Esto prueba que  $M = \{e^{im}, 3e^{im}\}$  pertenece a la cerradura de  $\mathcal{F}$ . Entonces  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \{M\}$  es conexo,  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ . Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

**Afirmación 2.**  $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{C}}$ .

Sea  $B \in \mathcal{A}$ , mostraremos una sucesión  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $B_n$  converge a  $B$ . A continuación, consideraremos todas las posibilidades para  $B$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

(a)  $B = \{e^{it}, e^{is}\}$  con  $e^{it}, e^{is} \in S_1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hagamos  $B_n = \{g(t - 2\pi n), g(s - 2\pi n)\}$ . Obsérvese que  $\{g(t - 2\pi n)\}$  converge a  $e^{it}$  y  $\{g(s - 2\pi n)\}$  converge a  $e^{is}$ , entonces  $B_n$  converge a  $B$  y, claramente,  $B_n \in C$ ,

(b)  $B = \{3e^{it}, 3e^{is}\}$  con  $3e^{it}, 3e^{is} \in S_2$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hagamos  $B_n = \{g(t + 2\pi n), g(s + 2\pi n)\}$ . Obsérvese que  $\{g(t + 2\pi n)\}$  converge a  $3e^{it}$  y  $\{g(s + 2\pi n)\}$  converge a  $3e^{is}$ , entonces  $B_n$  converge a  $B$  y, claramente,  $B_n \in C$ ,

(c)  $B = \{e^{it}, g(s)\}$  con  $e^{it} \in S_1$  y  $g(s) \in Y$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hagamos  $B_n = \{g(t - 2\pi n), g(s)\}$ . Obsérvese que  $\{g(t - 2\pi n)\}$  converge a  $e^{it}$ , entonces  $B_n$  converge a  $B$  y, claramente,  $B_n \in C$ .

(d)  $B = \{g(t), 3e^{is}\}$  con  $3e^{is} \in S_2$  y  $g(t) \in Y$ . Haciendo  $B_n = \{g(t), g(s + 2\pi n)\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $B_n$  converge a  $B$  y, claramente,  $B_n \in C$ .

Con esto completamos la prueba de la Afirmación 2. Por la Afirmación 1,  $C$  es conexo y dado que la cerradura de un conexo es conexa, por la Afirmación 2, obtenemos que  $A$  es conexo.

Ahora definamos  $h : X \rightarrow X$  por

$$h(z) = \begin{cases} e^{i(t+\pi/2)}, & \text{si } z = e^{it} \in S_1, \\ 3e^{i(t+\pi/2)}, & \text{si } z = 3e^{it} \in S_2, \\ g(t + \pi/2), & \text{si } z = g(t) \in Y. \end{cases}$$

Observemos que  $h$  es una función definida en partes y es continua en cada una de ellas. También obsérvese que  $h$  es continua. Definamos  $H : F_2(X) \rightarrow F_2(X)$  como  $H(\{w, z\}) = \{h(w), h(z)\}$ . Para ver que  $H$  es continua, simplemente observemos que  $H$  es la función inducida por  $h$  en  $F_2(X)$  (ver [25, Lema 13.3]).

Mostraremos ahora que  $H(A) = B$ .

Sea  $A = \{z, w\} \in A$ . Entonces se tienen las siguientes posibilidades:

(a) si  $z = e^{it}$  y  $w = e^{is}$ , entonces

$$\text{Im}(h(z)h(w)) = \text{Im}(e^{i(t+\pi/2)}e^{i(s+\pi/2)}) = \text{Im}(e^{i(s+t+\pi)}) \leq 0$$

pues

$$\text{Im}(zw) = \text{Im}(e^{i(t+s)}) \geq 0,$$

(b) si  $z = e^{it}$  y  $w = 3e^{is}$ , entonces

$$\text{Im}(h(z)h(w)) = \text{Im}(e^{i(t+\pi/2)}3e^{i(s+\pi/2)}) = \text{Im}(3e^{i(s+t+\pi)}) \leq 0$$

pues

$$\text{Im}(zw) = \text{Im}(3e^{i(t+s)}) \geq 0,$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

(c) si  $z = e^{it}$  y  $w = g(s)$ , entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(h(z)h(w)) &= \operatorname{Im}(e^{i(t+\pi/2)}g(s+\pi/2)) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{s+\pi/2}{1+|s+\pi/2|} + 2\right)e^{i(s+t+\pi)}\right) \leq 0\end{aligned}$$

pues

$$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}\left(\left(\frac{s}{1+|s|} + 2\right)e^{i(t+s)}\right) \geq 0,$$

(d) si  $z = 3e^{it}$  y  $w = 3e^{is}$ , entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(h(z)h(w)) &= \operatorname{Im}(3e^{i(t+\pi/2)}3e^{i(s+\pi/2)}) \\ &= \operatorname{Im}(9e^{i(s+t+\pi)}) \leq 0\end{aligned}$$

pues

$$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}(9e^{i(t+s)}) \geq 0,$$

(e) si  $z = 3e^{it}$  y  $w = g(s)$ , entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(h(z)h(w)) &= \operatorname{Im}(3e^{i(t+\pi/2)}g(s+\pi/2)) \\ &= \operatorname{Im}\left(3\left(\frac{s+\pi/2}{1+|s+\pi/2|} + 2\right)e^{i(s+t+\pi)}\right) \leq 0\end{aligned}$$

pues

$$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}\left(3\left(\frac{s}{1+|s|} + 2\right)e^{i(t+s)}\right) \geq 0,$$

(f) si  $z = g(t)$  y  $w = g(s)$ , entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(h(z)h(w)) &= \operatorname{Im}(g(t+\pi/2)g(s+\pi/2)) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{t+\pi/2}{1+|t+\pi/2|} + 2\right)\left(\frac{s+\pi/2}{1+|s+\pi/2|} + 2\right)e^{i(s+t+\pi)}\right) \leq 0\end{aligned}$$

pues

$$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}\left(\left(\frac{t}{1+|t|} + 2\right)\left(\frac{s}{1+|s|} + 2\right)e^{i(t+s)}\right) \geq 0.$$

Por tanto, en cualquier caso se tiene que  $H(A) \in \mathcal{B}$ . Ahora sea  $B = \{z, w\} \in \mathcal{B}$ , entonces se tienen las siguientes posibilidades:

(a) si  $z = e^{it}$  y  $w = e^{is}$ , entonces  $H(\{e^{i(t-\pi/2)}, e^{i(s-\pi/2)}\}) = B$ ,

(b) si  $z = e^{it}$  y  $w = 3e^{is}$ , entonces  $H(\{e^{i(t-\pi/2)}, 3e^{i(s-\pi/2)}\}) = B$ ,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



- (c) si  $z = e^{it}$  y  $w = g(s)$ , entonces  $H(\{e^{i(t-\pi/2)}, g(s - \pi/2)\}) = B$ ,  
 (d) si  $z = 3e^{it}$  y  $w = 3e^{is}$ , entonces  $H(\{3e^{i(t-\pi/2)}, 3e^{i(s-\pi/2)}\}) = B$ ,  
 (e) si  $z = 3e^{it}$  y  $w = g(s)$ , entonces  $H(\{3e^{i(t-\pi/2)}, g(s - \pi/2)\}) = B$ ,  
 (f) si  $z = g(t)$  y  $w = g(s)$ , entonces  $H(\{g(t - \pi/2), g(s - \pi/2)\}) = B$ .

Con esto concluimos que  $H(\mathcal{A}) = B$ . Por tanto, dado que  $B$  es la imagen de  $\mathcal{A}$  bajo la función continua  $H$  y dado que  $\mathcal{A}$  es conexo, obtenemos que  $B$  es conexo.

**Afirmación 3.**  $\mathcal{A} \cap B$  no es conexo.

Sea

$$\mathcal{H} = \{\{z, w\} : zw \in \mathbb{R} \text{ y } zw \geq 0\} \text{ y}$$

$$\mathcal{K} = \{\{z, w\} : zw \in \mathbb{R} \text{ y } zw \leq 0\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cap B &= \{\{z, w\} \in F_2(X) : \text{Im}(zw) = 0\} \\ &= \{\{z, w\} \in F_2(X) : zw \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\{z, w\} \in F_2(X) : zw \in \mathbb{R} \text{ y } zw \geq 0\} \cup \\ &\quad \{\{z, w\} \in F_2(X) : zw \in \mathbb{R} \text{ y } zw \leq 0\} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Claramente,  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{K}$  son dos subconjuntos cerrados de  $F_2(X)$ . Si ocurriera que existe un elemento  $\{z, w\} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ , tendríamos que  $zw = 0$ , así que  $z = 0$  o  $w = 0$ . Esto es imposible pues  $0 \notin X$ . Por tanto  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$ . Así, concluimos que  $\mathcal{A} \cap B$  no es conexo. Por tanto  $\mathcal{A}$  y  $B$  son dos subconjuntos de  $F_2(X)$ , cuya unión es  $F_2(X)$  y su intersección no es conexa. Entonces  $F_2(X)$  no es unicoherente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Capítulo 2

## Encajando $F_n(X)$ en $\mathbb{R}^m$

### 2.1 Introducción

Cuando K. Borsuk y S. Ulam introdujeron en [5] los productos simétricos también probaron que, para  $n = 1, 2$  y  $3$ ,  $F_n([0, 1])$  es homeomorfo a  $[0, 1]^n$ , y que, para  $n \geq 4$ ,  $F_n([0, 1])$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$  (esto último también se deduce de nuestro Lema 3.10). Después, en [34, Teorema 1], R. Molski probó que  $F_2([0, 1]^2)$  es una 4-celda, además de que, para  $n \geq 3$  ninguno de los espacios  $F_n([0, 1]^2)$  y  $F_2([0, 1]^n)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Siguiendo esta línea de estudio, en este capítulo analizamos bajo qué condiciones el  $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo  $X$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$ .

Nuestros principales resultados son:

Una caracterización completa de los (siete) continuos de Peano  $X$  tales que  $F_2(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$  (Teorema 2.15).

El intervalo  $[0, 1]$  es el único continuo cuyo segundo producto simétrico puede ser encajado en  $\mathbb{R}^2$  (Teorema 2.19).

Para ningún continuo  $X$  y ninguna  $n \geq 4$ ,  $F_n(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$  (Corolario 2.21).

### 2.2 Encajando $F_2(X)$ en $\mathbb{R}^3$

En esta sección, estudiamos cuándo el segundo producto simétrico de un continuo se puede encajar en el espacio euclidiano de dimensión 3. Empezaremos mencionando algunas convenciones.

Para empezar, recordemos que una base para la topología de  $2^X$  ([36, Teorema 0.13]) la constituyen los conjuntos de la forma  $\{U_1, \dots, U_m\} = \{A \in 2^X : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_m \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para toda } i \in \{1, \dots, m\}\}$ , donde  $m \in \mathbb{N}$  y los conjuntos  $U_1, \dots, U_m$  son abiertos en  $X$ . De manera que una base para la topología de  $F_n(X)$  son los conjuntos de la forma  $\{U_1, \dots, U_m\}_n = \{U_1, \dots, U_m\} \cap F_n(X)$ , donde, por supuesto,  $m \in \mathbb{N}$  y los conjuntos  $U_1, \dots, U_m$  son abiertos en  $X$ .

Dados un continuo  $X$ ,  $A \in 2^X$ ,  $p \in X$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos  $B_X(\varepsilon, p)$  la  $\varepsilon$ -bola abierta centrada en  $p$  y de radio  $\varepsilon$  y  $N_X(\varepsilon, A) = \bigcup \{B_X(\varepsilon, p) : p \in A\}$ .

Un *continuo de Peano* es un continuo localmente conexo. Dado un subconjunto  $R$  de un continuo  $X$ , denotaremos por  $F_n(R)$  al conjunto de elementos de  $F_n(X)$  que están contenidos en  $R$ . Un *n-odo simple* ( $n \geq 3$ ) es un continuo  $T_n$  que es una unión de  $n$  arcos que se intersecan dos a dos en un punto  $p$ , el cual es llamado *el corazón de  $T_n$*  y, además,  $p$  es un punto extremo de cada uno de esos  $n$  arcos. Dada una gráfica  $X$  y dos vértices  $u, v$  denotaremos por  $uv$  la arista de  $X$  que los une. La *gráfica completa*  $K_n$  ( $n \geq 3$ ) consiste de  $n$  vértices y  $\frac{n(n-1)}{2}$  aristas que unen a todos los vértices entre sí. Dada  $n, m \geq 3$ , la *gráfica bipartita completa*  $K_{n,m}$  consta de un conjunto de  $n + m$  vértices  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$  y todas las posibles aristas de la forma  $v_i w_j$ .

Cuando tomemos una gráfica  $X$ , supondremos que su métrica  $d$  es la métrica inducida por la longitud de arco y que cada una de sus aristas tiene longitud 1.

Dado un conjunto  $V$  denotaremos por  $|V|$  su cardinalidad, y por  $\text{Fr}_Z(V)$  su frontera en  $Z$ . Más adelante necesitaremos la noción de orden que definiremos a continuación. Sea  $Z$  un espacio topológico. Sea  $\beta$  un número cardinal. Decimos que un punto  $p \in Z$  es de orden menor o igual que  $\beta$  en  $Z$ , y escribimos  $\text{ord}(p, Z) \leq \beta$  si para cada abierto  $U$  de  $Z$  tal que  $p \in U$ , existe un abierto  $V$  de  $Z$  tal que  $p \in V \subset U$  y  $|\text{Fr}_Z(V)| \leq \beta$ . Decimos que  $p$  es de orden  $\beta$  en  $Z$ , y escribimos  $\text{ord}(p, Z) = \beta$  si  $\text{ord}(p, Z) \leq \beta$  y no ocurre que  $\text{ord}(p, Z) \leq \alpha$  para ningún cardinal  $\alpha < \beta$ . A los puntos de orden 1 les llamaremos puntos terminales.

Constantemente usaremos el siguiente resultado que caracteriza a las gráficas.

**Teorema 2.1** (ver [37, Teorema 9.10]). Un continuo  $Z$  es una gráfica si y sólo si se satisfacen las siguientes dos condiciones.

- $\text{ord}(p, Z) < \aleph_0$  para todo  $p \in Z$ , y
- $\text{ord}(p, Z) \leq 2$  para todos, salvo un número finito, de puntos  $p \in Z$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Otro resultado clásico que usaremos constantemente es el siguiente (ver [27, 6, §51, II, pag. 277]):

**Teorema 2.2.** Sean  $Y$  un continuo de Peano y  $p \in Y$ . Si  $\text{ord}(p, Y) \geq n \geq 3$ , entonces existe un  $n$ -odo  $T_n$  contenido en  $Y$  tal que  $p$  es el corazón de  $T_n$ .

**Lema 2.3.** Si  $T_n$  es un  $n$ -odo simple, entonces  $F_2(T_n)$  es homeomorfo al cono sobre un continuo  $Z$ .

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$T_n = \bigcup_{i=1}^n \overline{oe_i},$$

donde  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $o$  es el origen de  $\mathbb{R}^n$  y  $\overline{oe_i}$  denota el segmento convexo en  $\mathbb{R}^n$  que une a  $o$  con  $e_i$ . Mostraremos que  $F_2(T_n)$  es homeomorfo al cono sobre un continuo  $Z$ . Sea

$$Z = \{A \in F_2(T_n) : e_i \in A \text{ para alguna } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

**Afirmación 1.**  $Z$  es conexo.

Dados  $A, B \in Z$  mostraremos que existe un subconjunto conexo  $\mathcal{A}$  de  $Z$  que contiene a  $A$  y  $B$ . Podemos suponer que  $A = \{e_i, x\}$  y  $B = \{e_j, y\}$  con  $x \in \overline{oe_k}$ ,  $y \in \overline{oe_l}$  donde  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ . Sean

$$\mathcal{H} = \{\{e_i, z\} \in F_2(T_n) : z \in \overline{ox}\} \cup \{\{e_i, z\} \in F_2(T_n) : z \in \overline{oj}\} \quad y$$

$$\mathcal{K} = \{\{e_j, z\} \in F_2(T_n) : z \in \overline{oy}\} \cup \{\{e_j, z\} \in F_2(T_n) : z \in \overline{ox}\}.$$

Observemos que tanto  $\mathcal{H}$  como  $\mathcal{K}$  son la unión de dos conjuntos conexos cuya intersección es el elemento  $\{e_i, o\}$  y  $\{e_j, o\}$ , respectivamente. Por tanto  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{K}$  son conexos. Hagamos  $\mathcal{A} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ . Dado que  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \{e_i, e_j\}$ , tenemos que  $\mathcal{A}$  es conexo y contiene a  $A$  y a  $B$ . Con esto terminamos de mostrar la Afirmación 1.

**Afirmación 2.**  $Z$  es compacto.

Notemos que  $Z = \{A \in F_2(X) : A \cap \{e_1, \dots, e_n\} \neq \emptyset\}$ . Por lo que  $F_2(X) - Z = \{A \in F_2(X) : A \subset X - \{e_1, \dots, e_n\}\} = \langle X - \{e_1, \dots, e_n\} \rangle_2$  que es un conjunto abierto en  $F_2(X)$ . Esto muestra que  $Z$  es cerrado en  $F_2(X)$  y, por tanto,  $Z$  es compacto.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Con las Afirmaciones 1 y 2 obtenemos que  $Z$  es un continuo.

Ahora, sea  $F : Z \times [0, 1] \rightarrow F_2(T_n)$  definida como  $F(A, t) = (1-t)A$ , donde  $(1-t)A = \{(1-t)a : a \in A\}$ . Claramente  $F$  es continua. Nótese que  $F(A, 0) = A$  y  $F(A, 1) = \{o\}$  para cada  $A \in Z$ .

**Afirmación 3.**  $F|Z \times [0, 1]$  es inyectiva.

Sean  $s, t \in [0, 1]$  y  $A, B \in Z$  tales que  $F(A, t) = F(B, s)$ . Sin pérdida de generalidad, supóngase que  $A = \{e_i, x\}$  y  $B = \{e_j, y\}$  donde  $x = (0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0)$  y  $y = (0, \dots, 0, y_l, 0, \dots, 0)$ . Consideremos dos casos:

Caso I.  $(1-t)e_i = (1-s)e_j$  y  $(1-t)x = (1-s)y$ . En este caso,  $i = j$  y  $t = s$ . Entonces  $e_i = e_j$  y  $x = y$ . Por tanto  $A = B$ .

Caso II.  $(1-t)e_i = (1-s)y$  y  $(1-t)x = (1-s)e_j$ . En este caso  $(1-t) = (1-s)y_l$  y  $(1-t)x_k = (1-s)$ . Entonces  $1-t = (1-t)y_l x_k$ . Por lo que  $x_k y_l = 1$ . Ya que  $0 \leq y_l, x_k \leq 1$ , esto ocurre si  $y_l = 1 = x_k$ . Esto implica que  $s = t$ . Por tanto  $A = B$ .

Por tanto,  $F|Z \times [0, 1]$  es inyectiva.

**Afirmación 4.**  $F$  es suprayectiva.

Sea  $B = \{x, y\} \in F_2(T_n)$ , donde  $x = ae_i$  y  $y = be_j$ . Podemos suponer que  $0 \leq a \leq b \leq 1$ . Si  $b = 0$ , entonces  $B = F(\{e_1\}, 1)$ . Si  $b > 0$ , entonces  $B = F(\{\frac{a}{b}e_i, e_j\}, 1-b)$ . Por tanto,  $F$  es suprayectiva.

Nótese que  $F(A, t) = \{o\}$  si y sólo si  $t = 1$ . Esto implica que existe una función inducida  $\bar{F} : \text{cono}(Z) \rightarrow F_2(T_n)$  y por las Afirmaciones 3 y 4,  $\bar{F}$  es un homeomorfismo. ■

**Lema 2.4.** Sean  $T_n$  un  $n$ -odo simple y  $e_1, \dots, e_n$  los puntos terminales de  $T_n$ . Sea  $Z = \{A \in F_2(T_n) : e_i \in A \text{ para alguna } i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Entonces  $Z$  contiene a la gráfica completa  $K_n$ . Además  $Z$  es la unión de  $K_n$  y  $n$  arcos ajenos dos a dos tales que cada uno de ellos intersecciona a  $K_n$  en exactamente uno de sus vértices.

**Demostración.** Para construir  $K_n$ , necesitamos  $n$  vértices y arcos que los unan. Consideremos los siguientes  $n$  elementos de  $Z$  como vértices de  $K_n$ ,  $\{e_1, o\}, \{e_2, o\}, \dots, \{e_n, o\}$ , donde  $o$  es el corazón de  $T_n$ . Ahora, para cada  $i \neq j$  en  $\{1, 2, \dots, n\}$ , sea

$$A_{i,j} = \{\{e_i, x\} \in Z : x \in \overline{o e_j}\} \cup \{\{e_j, x\} \in Z : x \in \overline{o e_i}\}.$$

Obsérvese que  $A_{i,j}$  es la unión de dos arcos los cuales tienen en común al punto  $\{e_i, e_j\}$ . Entonces  $A_{i,j}$  es un arco, con puntos extremos  $\{e_i, o\}$  y  $\{e_j, o\}$ . Ahora veamos cuál es la intersección de cualesquiera dos arcos de éstos.

Sean  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ , consideremos  $A_{i,j}$  y  $A_{k,l}$  tales que  $\{i, j\} \neq \{k, l\}$ . Supongamos que existe un elemento  $A \in A_{i,j} \cap A_{k,l}$ .

Podemos suponer que  $A = \{e_i, z_1\} = \{e_k, z_2\}$ , con  $z_1 \in \overline{\partial e_j}$  y  $z_2 \in \overline{\partial e_l}$ . Si  $i = k$ , entonces  $e_i = e_k$ ,  $j \neq l$  y  $z_1 = z_2 \in \overline{\partial e_j} \cap \overline{\partial e_l}$ . De manera que  $z_1 = z_2 = o$ . Así que  $A = \{e_i, o\}$ . Si  $i \neq k$ , entonces  $e_i = z_2$  y  $e_k = z_1$ . De modo que  $e_i \in \overline{\partial e_l}$  y  $e_k \in \overline{\partial e_j}$ . Así que  $i = l$  y  $k = j$  lo que implica que  $\{i, j\} = \{k, l\}$ , contrario a lo que supusimos. Esto muestra que este caso es imposible.

Por tanto, si dos arcos  $A_{i,j}$  y  $A_{k,l}$  se intersectan, sólo lo hacen en uno de sus puntos extremos. Notemos, además, que sólo hay  $\frac{n(n-1)}{2}$  conjuntos de la forma  $A_{i,j}$ .

Por tanto, podemos ver que  $K_n$  es homeomorfo a

$$K = \bigcup \{A_{i,j} : i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ y } j \neq i\}.$$

Ahora hagamos  $B_i = \{\{e_i, x\} \in Z : x \in \overline{\partial e_i}\}$ .

Observemos que cada  $B_i$  es un arco. Además, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $B_i \cap K = \{e_i, o\}$ . Para ver esto, sean  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  y supongamos que existe un elemento  $A \in B_i \cap A_{k,l}$ . Entonces podemos suponer que  $A = \{e_i, z_1\} = \{e_k, z_2\}$ , donde  $z_1 \in \overline{\partial e_i}$  y  $z_2 \in \overline{\partial e_l}$ . Si ocurriera que  $i \neq k$ , entonces  $e_i = z_2 \in \overline{\partial e_l}$  y  $e_k = z_1 \in \overline{\partial e_i}$ . De modo que  $i = l$  y  $k = i$ . Así que  $l = k$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $i = k$ . De manera que  $i \neq l$  y  $z_1 = z_2 \in \overline{\partial e_i} \cap \overline{\partial e_l}$ . Por tanto  $A = \{e_i, o\}$ .

Por tanto, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $B_i \cap K = \{e_i, o\}$ .

Por otro lado, observemos también que  $B_1, \dots, B_n$  son ajenos dos a dos y que  $Z = K \cup (\bigcup_{i=1}^n B_i)$ . ■

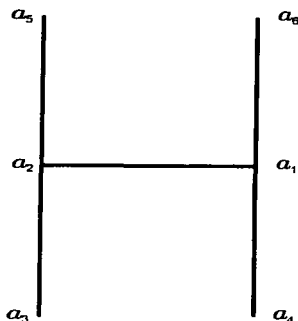
**Lema 2.5.** Si  $X$  tiene la forma de la letra  $H$ , entonces  $F_2(X)$  contiene una copia topológica del cono sobre  $K_{3,3}$ .

**Demostración.** Sea  $X$  un continuo con la forma de la letra  $H$ . Supongamos que

$$X = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup$$

$$\{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Sean  $a_1 = (1, 0)$ ,  $a_2 = (0, 0)$ ,  $a_3 = (0, -1)$ ,  $a_4 = (1, -1)$ ,  $a_5 = (0, 1)$  y  $a_6 = (1, 1)$ . Para  $k, l = 1, 2, 3$ , sean  $\alpha_{1,2l} : [0, 1] \rightarrow a_1 a_{2l}$  y  $\alpha_{2k-1,2} : [0, 1] \rightarrow a_{2k-1} a_2$  homeomorfismos lineales tales que  $\alpha_{1,2l}(0) = a_1$ ,  $\alpha_{1,2l}(1) = a_{2l}$ ,  $\alpha_{2k-1,2}(0) = a_{2k-1}$  y  $\alpha_{2k-1,2}(1) = a_2$  (véase la Figura 2.1).



Ahora, para construir  $K_{3,3}$  en  $F_2(X)$  necesitamos 6 vértices y una partición de los mismos en dos conjuntos  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$ , tal que para cada elemento de  $\mathcal{U}$  exista un arco que lo una con cada elemento de  $\mathcal{V}$ .

Hagamos  $\mathcal{U} = \{\{a_1\}, \{a_3, a_1\}, \{a_5, a_1\}\}$  y  $\mathcal{V} = \{\{a_2\}, \{a_4, a_2\}, \{a_6, a_2\}\}$ .

Ahora, para  $k, l = 1, 2, 3$ , definamos

$$\mathcal{A}_{2k-1,2l} = \{\{\alpha_{2k-1,2}(t), \alpha_{1,2l}(t)\} \in F_2(X) : t \in [0, 1]\}.$$

Obsérvese que, para cada  $k$  y  $l$ ,  $\mathcal{A}_{2k-1,2l}$  es un arco que une a  $\{a_{2k-1}, a_1\}$  y  $\{a_2, a_{2l}\}$ . Sean  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ . Supongamos que existe un elemento  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{2k-1,2l} \cap \mathcal{A}_{2i-1,2j}$  y  $k \neq i$  o  $l \neq j$ . Entonces existen  $t, s \in [0, 1]$  tales que

$$\mathcal{A} = \{\alpha_{2k-1,2}(t), \alpha_{1,2l}(t)\} = \{\alpha_{2i-1,2}(s), \alpha_{1,2j}(s)\}.$$

Consideremos las siguientes dos posibilidades:

(a)  $\alpha_{2k-1,2}(t) = \alpha_{2i-1,2}(s)$  y  $\alpha_{1,2l}(t) = \alpha_{1,2j}(s)$ .

Si  $k = i$  entonces  $t = s$  y  $l \neq j$ . Por lo que  $\alpha_{1,2l}(t) = \alpha_{1,2j}(t)$ . Esto implica que  $t = 0$ . Por tanto  $\mathcal{A} = \{a_{2k-1}, a_1\}$ . Ahora si  $k \neq i$ , dado que  $\alpha_{2k-1,2}(t) = \alpha_{2i-1,2}(s)$  se sigue que  $t = s = 1$ . Entonces  $\mathcal{A} = \{a_2, a_{2l}\} = \{a_2, a_{2j}\}$ . Así que  $l = j$ .

(b)  $\alpha_{2k-1,2}(t) = \alpha_{1,2j}(s)$  y  $\alpha_{1,2l}(t) = \alpha_{2i-1,2}(s)$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Entonces  $\alpha_{2k-1,2}(t) = \alpha_{1,2j}(s) \in a_{2k-1}a_2 \cap a_1a_{2j}$ , esto sólo es posible si  $\alpha_{2k-1,2}(t) = \{a_2\}$  o a  $\{a_1\}$ . Similarmente, como  $\alpha_{1,2l}(t) = \alpha_{2i-1,2}(s) \in a_1a_{2i} \cap a_{2i-1}a_2$ , obtenemos que  $\alpha_{1,2l}(t) = \{a_2\}$  o a  $\{a_1\}$ . Si  $\alpha_{2k-1,2}(t) = \{a_2\}$ , entonces  $t = 1$ , así que  $\alpha_{1,2l}(t) = \{a_2\}$ , y en el caso en que  $\alpha_{2k-1,2}(t) = \{a_1\}$ , similarmente se obtiene que  $\alpha_{1,2l}(t) = \{a_1\}$ . En resumen, en este caso, obtenemos que  $A = \{a_1\}$  o  $A = \{a_2\}$ .

Hemos probado que dos arcos diferentes de la forma  $A_{2k-1,2l}$  pueden intersectarse sólo en sus puntos extremos. Esto implica que

$$Z = \bigcup \{A_{2k-1,2l} : k, l = 1, 2, 3\}$$

es homeomorfo la gráfica a  $K_{3,3}$ .

Ahora definamos  $F : Z \times [0, 1] \rightarrow F_2(X)$  como sigue: dada  $A \in Z$ , existen  $k, l \in \{1, 2, 3\}$  y  $t \in [0, 1]$  tales que  $A = \{\alpha_{2k-1,2}(t), \alpha_{1,2l}(t)\}$ . Sea

$$F(A, s) = \{\alpha_{2k-1,2}(s + (1-s)t), \alpha_{1,2l}((1-s)t)\}.$$

Entonces  $F(A, 0) = A$  y  $F(A, 1) = \{a_1, a_2\}$  para cada  $A \in Z$ .

**Afirmación.**  $F|Z \times [0, 1]$  es inyectiva.

Sean  $A, B \in Z$  y  $s, r \in [0, 1]$  tales que  $F(A, s) = F(B, r)$ . Supongamos que  $A = \{\alpha_{2k-1,2}(t_1), \alpha_{1,2l}(t_1)\}$  y  $B = \{\alpha_{2i-1,2}(t_2), \alpha_{1,2j}(t_2)\}$ . Consideremos dos posibilidades:

(a)  $\alpha_{2k-1,2}(s + (1-s)t_1) = \alpha_{2i-1,2}(r + (1-r)t_2)$  y  $\alpha_{1,2l}((1-s)t_1) = \alpha_{1,2j}((1-r)t_2)$ . Supongamos primero que  $l = j$ . Entonces  $(1-s)t_1 = (1-r)t_2$ . En el caso en que  $k \neq i$ ,  $s + (1-s)t_1 = 1 = r + (1-r)t_2$ . Entonces  $t_1 = 1 = t_2$ . Así que,  $s = r$ . Se sigue que  $A = \{a_2, a_{2l}\}$  y  $B = \{a_2, a_{2j}\}$ . Por tanto,  $A = B$ . En el caso en que  $k = i$ ,  $s + (1-s)t_1 = r + (1-r)t_2$ . Entonces  $s = r$ . Así que  $t_1 = t_2$  y  $A = B$ .

Ahora supongamos que  $l \neq j$ . Entonces  $(1-s)t_1 = 0 = (1-r)t_2$ . Dado que  $s \neq 1 \neq r$ ,  $t_1 = 0 = t_2$  y  $\alpha_{2k-1,2}(s) = \alpha_{2i-1,2}(r)$ . En el caso en que  $k = i$ , dado que  $\alpha_{2k-1,2}$  es inyectiva, tenemos que  $s = r$  y  $A = \{a_{2k-1,2}, a_1\}$  y  $B = \{a_{2i-1,2}, a_1\}$ . Por tanto  $A = B$ . En el caso en que  $k \neq i$ , tenemos que  $s = r = 1$  lo cual es una contradicción.

(b)  $\alpha_{2k-1,2}(s + (1-s)t_1) = \alpha_{1,2j}((1-r)t_2)$  y  $\alpha_{1,2l}((1-s)t_1) = \alpha_{2i-1,2}(r + (1-r)t_2)$ . Es fácil ver que, en este caso,  $A = \{a_1\} = B$  y  $r = 0 = s$  o  $A = \{a_2\} = B$  y  $r = 0 = s$ , o  $k = j = l = i = 1$ , en el caso en que  $k = j = l = i = 1$ ,  $s + (1-s)t_1 = (1-r)t_2$  y  $(1-s)t_1 = r + (1-r)t_2$ .

Entonces  $r = -s$ . Así que,  $r = s = 0$  y  $\alpha_{1,2}(t_1) = \alpha_{1,2}(t_2)$ . Dado que  $\alpha_{1,2}$  es inyectiva concluimos que  $A = B$ .

Por tanto, en cualquier caso obtenemos que  $A = B$  y  $s = r$ . Esto concluye la prueba de la afirmación.

Ahora supongamos que existe  $(A, s) \in Z \times [0, 1]$  tal que  $F(A, s) = \{a_1, a_2\}$ . Esto implica que  $s + (1-s)t = 0$  y  $(1-s)t = 1$  o  $s + (1-s)t = 1$  y  $(1-s)t = 0$ . El primer caso es imposible y el segundo implica que  $s = 1$ . Esto prueba que  $F^{-1}(\{a_1, a_2\}) = Z \times \{1\}$ . Dado que  $F$  es continua, la función inducida  $\bar{F} : \text{cono}(Z) \rightarrow F_2(X)$  es un encaje. Esto completa la prueba del lema. ■

**Definición 2.6.** Un espacio  $E \subset \mathbb{R}^3$  es un *enlace* si  $E$  es homeomorfo a una unión finita de circunferencias ajenas entre sí.

Dadas dos circunferencias  $\alpha$  y  $\beta$  en  $\mathbb{R}^3$ , denotaremos por  $\text{lk}(\alpha, \beta)$  al número de enlace de  $\alpha$  y  $\beta$  tal y como se define en las páginas 132-135 de [41].

**Definición 2.7.** Un enlace  $E$  de dos componentes  $\alpha$  y  $\beta$  es  $L$ -trivial si  $\text{lk}(\alpha, \beta) = 0$ .

El siguiente resultado se sigue de la Proposición 1 de la página 137 de [41].

**Proposición 2.8.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos copias topológicas de  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\alpha$  es la frontera de una 2-celda  $D$  en  $\mathbb{R}^3 - \beta$ , entonces  $\text{lk}(\alpha, \beta) = 0$ .

**Definición 2.9.** Dada una gráfica  $K$ , diremos que un encaje  $e : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *lineal por pedazos* si  $e(K)$  es una unión finita de segmentos (convexos) en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 2.10.** Sea  $e : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  un encaje, donde  $K$  es una gráfica. Entonces para toda  $\varepsilon > 0$ , existe un encaje lineal por pedazos  $e' : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\|e(x) - e'(x)\| < \varepsilon$  para toda  $x \in K$ .

**Demostración.** Por simplicidad identifiquemos a los puntos de  $K$  con su imagen bajo  $e$ . Sean  $V$  el conjunto de vértices de  $K$ ,  $\delta > 0$  tal que  $\delta \leq \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, d_0\}$ , donde

$$d_0 = \min\{\|v - v'\| : v, v' \in V\}.$$

Para cada  $v \in V$ , sea  $B_v$  la bola cerrada de radio  $\delta$  y centro en  $v$ . Dados dos vértices adyacentes  $v$  y  $v'$  en  $V$ , denotemos por  $\alpha$  la correspondiente

arista entre los vértices  $v$  y  $v'$ . Sea  $v_\alpha$  el último punto en  $\alpha$  en  $B_v$  cuando vamos de  $v$  a  $v'$  y denotemos por  $\alpha'$  la parte de  $\alpha$  de  $v_\alpha$  a  $v'_\alpha$ . Ahora sea  $\eta > 0$  tal que si  $\alpha \neq \beta$ , entonces  $\alpha'$  y  $\beta'$  están a una distancia mayor que  $3\eta \geq \varepsilon$ . Por la continuidad uniforme de  $e$  cada  $\alpha'$  puede aproximarse por un polígono  $\alpha''$  de  $v_\alpha$  a  $v'_\alpha$ , a una distancia menor que  $\eta$ . Para obtener una representación lineal por pedazos de  $K$ , reemplazamos cada  $\alpha$  por el polígono obtenido de  $\alpha''$  y la unión de los segmentos  $vv_\alpha$  y  $v'_\alpha v'$ . ■

La demostración del siguiente lema fue sugerida por el Dr. Francisco González Acuña.

**Lema 2.11.** Sea  $X$  homeomorfo a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ . Entonces el cono sobre  $X$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ .

**Demostración.** Supóngase que  $\text{cono}(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $e : \text{cono}(X) \rightarrow \mathbb{R}^3$  un encaje. Pensaremos que el  $\text{cono}(X)$  está contenido en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $v$  el vértice del cono de  $X$ . Sea  $Q = X \cup \text{cono}(V)$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices de  $X$ . Aquí hay que aclarar que  $\text{cono}(V)$  no es el cono en  $\mathbb{R}^3$  de  $V$  sino la imagen del  $\text{cono}(V)$  bajo el encaje.

Primero veremos que todo enlace  $E \subset Q$  de dos componentes es L-trivial. Para ver esto, basta con probar que una de las componentes de  $E$  es la frontera (como variedad) de un disco contenido en el complemento en  $\mathbb{R}^3$  de la otra componente.

Sean pues  $C$  y  $D$  las componentes de  $E$ . Como  $E$  es un enlace,  $C$  y  $D$  son curvas cerradas simples. Ya que  $Q$  es una gráfica, cada uno de los conjuntos  $C$  y  $D$  es una subgráfica de  $Q$ . Podemos suponer que el vértice  $v$  no pertenece a  $C$ . Si  $v \notin D$ , entonces el cono sobre  $C$  es una 2-celda en el  $\text{cono}(X)$  cuya frontera es igual a  $C$  y es ajena a  $D$ . Si  $v \in D$ , entonces el cono sobre los segmentos de  $D$  que no contienen a  $v$  es una 2-celda en el  $\text{cono}(X)$  la cual tiene su frontera igual a  $D$  y es ajena a  $C$ . Esto prueba que  $E$  es L-trivial.

Ahora sean  $e_1, e_2, \dots$  encajes (lineales por pedazos) de  $Q$  en  $\mathbb{R}^3$  tales que  $\|e(x) - e_n(x)\| < 1/n$  para toda  $x \in Q$  y toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por el Teorema 1 de [7], si  $X = K_5$ , o página 235 de [42], si  $X = K_{3,3}$ , existe un enlace  $L_n$  contenido en  $Q$  tal que  $e_n(L_n)$  no es L-trivial. Dado que  $Q$  contiene una cantidad finita de enlaces, entonces existen  $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$  tales que  $L$  corresponde con los mismos enlaces  $L_{i_1}, L_{i_2}, L_{i_3}, \dots$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e_{i_n}|L_{i_n}) = e|L$ . Dado que para cada  $n$ ,  $e_{i_n}(L)$  no es L-trivial, entonces  $e(L)$  no es L-trivial (éste es un hecho conocido en la Teoría de Nudos). Esto es una contradicción. Por tanto el cono sobre  $X$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Teorema 2.12.** Si  $T_m$  es un  $m$ -odo simple, donde  $m \geq 5$ , entonces

$F_2(T_m)$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ .

**Demostración.** Por los Lemas 2.3 y 2.4.  $F_2(T_m)$  contiene una copia homeomorfa del cono sobre  $K_5$ . Por el Lema 2.11 el cono sobre  $K_5$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $F_2(T_m)$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Teorema 2.13.** Si  $X$  tiene la forma de la letra  $H$ , entonces  $F_2(X)$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ .

**Demostración.** Por el Lema 2.5.  $F_2(X)$  contiene una copia homeomorfa del cono sobre  $K_{3,3}$ . Por el Lema 2.11 el cono sobre  $K_{3,3}$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $F_2(X)$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Corolario 2.14.** Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  contiene un 5-odo simple o la forma de la letra  $H$ , entonces  $F_2(X)$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ .

Una *paleta* es un continuo que es la unión de una circunferencia  $C$  y un arco  $A$  tales que  $C \cap A$  consiste exactamente de un punto que es un punto extremo de  $A$ . Una *medalla* es un continuo que es la unión de una circunferencia  $C$  y un arco  $A$  tales que  $C \cap A$  consiste exactamente de un punto que no es un punto extremo de  $A$ .

**Teorema 2.15.** Sea  $X$  un continuo de Peano. Entonces  $F_2(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si  $X$  es homeomorfo a alguno de los siguientes espacios: un arco, un triodo simple, un 4-odo simple, una circunferencia, una paleta, una medalla o una figura ocho.

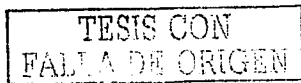
**Demostración.** (Necesidad). Dado que  $F_2(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ , por el Corolario 2.14,  $X$  no contiene un 5-odo simple. Por tanto, para todo punto  $p \in X$ ,  $\text{ord}(p, X) < 5$ .

**Afirmación.**  $X$  contiene a lo más un punto  $p$  tal que  $\text{ord}(p, X) \geq 3$ .

Supongamos que  $p, q$  son puntos de  $X$  tales que  $p \neq q$  y  $\text{ord}(p, X), \text{ord}(q, X) \geq 3$ . Entonces toda vecindad  $U_p$  de  $p$ , respectivamente,  $U_q$  de  $q$ , contiene un triodo simple. Así que existen dos triodos ajenos  $T_1$  y  $T_2$  en  $X$ . Dado que  $X$  es arco conexo, unimos a  $T_1$  y  $T_2$  por un arco, así que es posible construir una copia topológica del espacio que tiene la forma de la letra  $H$ . Por el Corolario 2.14, esto es una contradicción. Por tanto la afirmación es cierta.

Entonces por el Teorema 2.1 concluimos que  $X$  es una gráfica.

Analicemos las siguientes tres posibilidades:



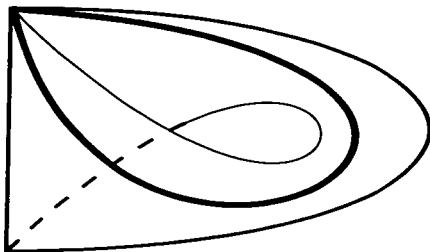
- (a)  $\text{ord}(p, X) = 4$  para algún punto  $p \in X$ . Por la afirmación previa, para todo punto  $q \in X \setminus \{p\}$  se tiene que  $\text{ord}(q, X) \leq 2$ . Por tanto  $X$  es homeomorfo a un 4-odo simple, una medalla o una figura ocho.
- (b)  $\text{ord}(p, X) = 3$  para algún punto  $p \in X$ . Por la afirmación previa, para todo punto  $q \in X \setminus \{p\}$  se tiene que  $\text{ord}(q, X) \leq 2$ . Por tanto,  $X$  es homeomorfo a triodo simple o una paleta.
- (c) para todo punto  $p \in X$ ,  $\text{ord}(p, X) \leq 2$ , entonces por la Proposición 9.5 de [37]  $X$  es un arco o una circunferencia.

(Suficiencia). Para esta parte, dado que cada uno de los continuos mencionados está contenido en la figura ocho, es suficiente ver que si  $X$  es la figura ocho, entonces  $F_2(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ . Para esto, construiremos un modelo geométrico para  $F_2(X)$ . Sea  $X = C_1 \cup C_2$  donde  $C_1 \cap C_2 = \{p\}$  y  $C_1, C_2$  son curvas cerradas simples.

Cada elemento  $A = \{x, y\} \in F_2(X)$ , satisface una de las siguientes tres posibilidades:

- (a)  $A \subset C_1$ .  
 (b)  $A \subset C_2$  o  
 (c)  $x \in C_1$  y  $y \in C_2$ .

El conjunto  $\mathcal{A}$ , de elementos de  $F_2(X)$  que satisface (a), puede ser representado como una banda de Möbius. Lo mismo se cumple para el conjunto  $\mathcal{B}$ , de elementos de  $F_2(X)$  que satisfacen (b). El conjunto  $\mathcal{C}$ , de elementos que satisface (c) es homeomorfo al toro  $C_1 \times C_2$ . Entonces,  $F_2(X) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ . Ahora, si  $c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ , entonces  $c = \{x, y\}$  con  $x, y \in C_1$  y  $x \in C_1, y \in C_2$ . Por lo que,  $y = p$ . De aquí que,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{\{x, p\} \in F_2(X) : x \in C_1\}$ . Similarmente,  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{\{x, p\} \in F_2(X) : x \in C_2\}$ . Es fácil ver que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  es representado, en la banda de Möbius, como una circunferencia que toca a la frontera en un punto como se muestra en la Figura 2.2. En  $C_1 \times C_2$ ,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  puede ser representado como una circunferencia horizontal. Observe que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{p\}$ . Es fácil ver que la banda de Möbius  $\mathcal{B}$  puede ser encajada en la parte interior del toro  $C_1 \times C_2$  de tal forma que la circunferencia correspondiente  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$  en  $\mathcal{B}$  y en  $C_1 \times C_2$  sean identificados. La banda de Möbius  $\mathcal{A}$  puede ser encajada en la parte exterior de  $C_1 \times C_2$  en tal forma que las circunferencias representadas por  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  en  $\mathcal{A}$  y en  $C_1 \times C_2$  son identificados. Por tanto,  $F_2(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . ■



### 2.3 Encajando $F_2(X)$ en el plano

En esta sección, daremos condiciones necesarias y suficientes para que  $F_2(X)$  pueda ser encajado en el plano. Mostramos que, el segundo producto simétrico de un continuo  $X$  puede ser encajado en el plano si y sólo si  $X$  es un arco.

Una  $n$ -sombrija es un continuo que es unión de una  $n$  celda  $K = [0, 1]^n$  y un arco  $J$  tales que  $K \cap J = \{q\}$ , donde  $q$  es un punto terminal de  $J$  y también es el punto que corresponde al punto  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  en  $K$ .

**Lema 2.16.** Supongamos que  $X$  es una  $n$ -sombrija o bien  $X$  es homeomorfo a un producto de la forma  $T \times [0, 1]^{n-1}$ , donde  $T$  es un triodo simple. Entonces,  $X$  no es encajable en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración.** Sea  $T$  el triodo simple  $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1])$ . Entonces, el producto  $T \times [0, 1]^{n-1}$  contiene al espacio  $(([0, 1] \times \{0\}) \times [0, 1]^{n-1}) \cup ((\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]) \times \{(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})\})$  el cual claramente es una  $n$ -sombrija. De manera que para probar el lema, es suficiente con probar que ninguna  $n$ -sombrija se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ .

Supongamos por el contrario que  $X$  es una  $n$ -sombrija y que  $X$  está contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Pongamos a  $X$  como  $X = K \cup J$ , donde  $K = [0, 1]^n$  es una  $n$ -celda,  $J$  es un arco y  $K \cap J = \{q\}$ , donde  $q$  es un punto terminal de  $J$  y también es el punto que corresponde al punto  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  en  $K$ .

Sea  $K'$  el interior como variedad de  $K$ . Entonces  $K'$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Por el Teorema de la Invarianza del Dominio (Teorema VI 9 del Capítulo VI.

§6, página 95 de [16]),  $K'$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . En particular el punto  $q$  es un punto interior de  $K'$ . Como  $q$  se puede aproximar por puntos de  $J$ , existe  $q' \in J - \{q\}$  tal que  $q' \in K'$ . Entonces  $q' \in K \cap J - \{q\}$ . Esta contradicción termina la prueba del lema. ■

**Lema 2.17.** Sea  $X$  un triodo simple. Entonces  $F_n(X)$  no es encajable en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración.** Escojamos un subtriodo  $T$  de  $X$  y  $n - 1$  subarcos  $J_2, \dots, J_n$  de  $X$  tales que  $T, J_2, \dots, J_n$  sean ajenos dos a dos. Consideremos el conjunto  $\langle T, J_2, \dots, J_n \rangle_n$ . Notemos que la función  $\varphi: T \times J_2 \times \dots \times J_n \rightarrow \langle T, J_2, \dots, J_n \rangle_n$  dada por  $\varphi(t, y_2, \dots, y_n) = \{t, y_2, \dots, y_n\}$  es un homeomorfismo. De manera que  $T \times J_2 \times \dots \times J_n$  se puede encajar en  $F_n(X)$  y, como  $T \times J_2 \times \dots \times J_n$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$  (Lema 2.16), tenemos que  $F_n(X)$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Teorema 2.18.** Sea  $X$  un continuo tal que  $F_n(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $X$  es hereditariamente localmente conexo.

**Demostración.** Podemos suponer que  $F_n(X)$  está contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $X$  no es localmente conexo, entonces existe un continuo de convergencia  $C_0$  (véase Teorema 5.12 de [37]). Sea  $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$  una sucesión de subcontinuos de  $X$  tal que  $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$  converga a  $C_0$  y  $C_i \cap C_j = \emptyset$  si  $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $i \neq j$ . Elegimos subcontinuos no degenerados y ajenos dos a dos  $D_1, D_2, \dots, D_n$  de  $C_0$ . Entonces  $\dim(D_k) \geq 1$  para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Ya que  $X$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ , cada  $D_k$  tiene dimensión finita. Entonces  $D_k$  contiene un subconjunto compacto  $E_k$  tal que  $\dim(E_k) = 1$ . Ya que el espacio  $\langle E_1, E_2, \dots, E_n \rangle_n$  es homeomorfo a  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ , por el comentario al final de la primera observación de la página 34 de [16], tenemos que  $\dim(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = n$ . Por tanto,  $\dim(F_n(C_0)) \geq n$ . Por los Teoremas IV.3, VI.9 de [16], el interior de  $F_n(C_0)$  en  $\mathbb{R}^n$  es no vacío, por lo que existe un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y un conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset C_0$  tal que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in U \subset F_n(C_0)$ . Dado que  $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $C_0$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$  y cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  podemos elegir un punto  $y_{im} \in C_m$  de tal forma que  $\{y_{im}\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x_i$ . Por tanto  $\{y_{im}^1, y_{im}^2, \dots, y_{im}^n\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Dado que  $C_m \cap C_0 = \emptyset$  para  $m \geq 1$ ,  $F_n(C_m) \cap F_n(C_0) = \emptyset$ . Esto implica que  $\{y_{im}^1, y_{im}^2, \dots, y_{im}^n\} \cap U = \emptyset$  para cada  $m \geq 1$ . Esto es absurdo ya que  $\{y_{im}^1, y_{im}^2, \dots, y_{im}^n\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset U$ . Por tanto  $X$  es localmente conexo. ■

**Teorema 2.19.** Sea  $X$  un continuo. Entonces  $F_2(X)$  puede ser encajado

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

en el plano si y sólo si  $X$  es un arco.

**Demostración.** (Necesidad). Por el Teorema 2.18,  $X$  es localmente conexo. Por el Lema 2.17,  $X$  no contiene triodos simples. Por tanto, por 8.40 (b) de [37]  $X$  es un arco o una curva cerrada simple. Dado que  $F_2(S^1)$  es homeomorfo a una banda de Möbius la cual no puede ser encajada en el plano. Concluimos que  $X$  es un arco.

(Suficiencia) Esta implicación es clara dado que  $F_2([0, 1])$  es homeomorfo a  $[0, 1]^2$ . ■

## 2.4 Encajando $F_3(X)$ en $\mathbb{R}^3$

En esta sección, mostramos que, el tercer producto simétrico de un continuo  $X$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si  $X$  es un arco. Y  $F_n(X)$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$  para cada  $n \geq 4$ .

**Corolario 2.20.** Sea  $X$  un continuo. Entonces,  $F_3(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si  $X$  es un arco.

**Demostración.** (Necesidad). Supóngase que  $F_3(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . Por el Teorema 2.18,  $X$  es localmente conexo. Por el Lema 2.17,  $X$  no contiene triodos. Por tanto, por 8.40 (b) de [37],  $X$  es un arco o una circunferencia. Pero R. Bott en [6] probó que  $F_3(S^1)$  es homeomorfo a  $S^3$ , el cual no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ . Así que,  $X$  es un arco.

(Suficiencia). Esta implicación es clara, dado que K. Borsuk y S. Ulam en el Teorema 6 de [5] probaron que  $F_3([0, 1])$  es homeomorfo a  $[0, 1]^3$ . ■

**Corolario 2.21.** Para ningún continuo  $X$  y ninguna  $n \geq 4$ ,  $F_n(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración.** Supongamos que existe un continuo  $X$  tal que  $F_n(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$  para alguna  $n \geq 4$ . Por el Teorema 2.18,  $X$  es localmente conexo. Así que  $X$  contiene un arco  $J$ . Entonces,  $F_n(J) \subset F_n(X)$ . Por tanto,  $F_n(J)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$  para alguna  $n \geq 4$ . Esto es una contradicción al Teorema 7 de [5]. ■

## 2.5 Problemas

Para finalizar este capítulo presentamos los siguientes problemas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



**Problema 2.22.** ¿Existe  $n \geq 4$  tal que  $F_n([0, 1])$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ?

**Problema 2.23.** ¿Existe un continuo  $X$ , que no sea localmente conexo tal que  $F_2(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ ?

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 3

# Hiperespacios únicos

### 3.1 Introducción

Además de los hiperespacios  $F_n(X)$  que hemos estudiado hasta ahora, otros hiperespacios que se estudian en un continuo  $X$  son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\ &\text{y si } n \text{ es un entero positivo,} \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

Se dice que el continuo  $X$  tiene *hiperespacio único*  $C(X)$  (resp.,  $2^X$ ,  $C_n(X)$  y  $F_n(X)$ ) si cuando  $Y$  es un continuo y  $C(Y)$  (resp.,  $2^Y$ ,  $C_n(Y)$  y  $F_n(Y)$ ) es homeomorfo a  $C(X)$  (resp.,  $2^X$ ,  $C_n(X)$  y  $F_n(X)$ ) entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . Una clase de continuos  $\mathcal{C}$  se dice que es *C-determinada* cuando ocurre lo siguiente: si  $X, Y \in \mathcal{C}$  y  $C(X)$  es homeomorfo a  $C(Y)$  entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

Lo más destacado que se conoce hasta ahora, relacionado con estos conceptos es lo siguiente.

Se sabe que los continuos que pertenecen a cada una de las siguientes clases tienen hiperespacio único  $C(X)$ :

(a) Gráficas diferentes del arco y la circunferencia (R. Duda, [10, 9.1], ver [1, Teorema 3.3]).

(b) Continuos hereditariamente indescomponibles (S. B. Nadler, Jr., [36, 0.60], ver [1, Teorema 3.4]).

- (c) Abanicos suaves (C. Eberhart y S. B. Nadler, Jr., [12, Corolario 3.3]).  
 (d) Continuos indescomponibles cuyos subcontinuos propios no degenerados son arcos (S. Macías, [29]).  
 (e) Compactaciones métricas del rayo  $[0, \infty)$  con residuo no degenerado (G. Acosta, [1, Teorema 5.3]).

También se sabe que:

Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $2^X$  (S. Macías, [32]).

Las gráficas tienen hiperespacio único  $C_2(X)$  (A. Illanes, [22]).

A. Illanes ha mostrado que los continuos encadenables y los abanicos no son C-determinados ([19] y [20]). En [23] se presentan resultados acerca de la unicidad del hiperespacio  $F_2(X)$ , cuando  $X$  es una dendrita.

Las siguientes preguntas aún no se responden.

**Pregunta 3.1** ([36, Question 0.62]). ¿Es C-determinada la clase de continuos circulares (circle-like)?

**Pregunta 3.2** ([22, Question 7]). ¿Será cierto que las gráficas tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ , para  $n \geq 3$ ?

**Pregunta 3.3** ([23]). ¿Tienen los continuos hereditariamente indescomponibles hiperespacio único  $F_2(X)$ ?

El objetivo de este capítulo es el de probar que las gráficas tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ . El caso  $n \geq 4$  se le debe a A. Illanes, lo incluimos aquí para que este trabajo quede completo. Empezaremos probando algunas propiedades de los continuos localmente conexos.

### 3.2 Continuos localmente conexos

Para un continuo localmente conexo  $Z$ , definimos  $\mathcal{E}_n(Z) = \{A \in F_n(Z) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(Z) \text{ homeomorfa a } [0, 1]^n\}$ .

**Lema 3.4.** Si  $Z$  es un continuo localmente conexo y  $A \in \mathcal{E}_n(Z)$ , entonces ningún punto de  $A$  puede ser el corazón de un triodo simple de  $Z$ .

**Demostración.** Supongamos por el contrario que  $A \in \mathcal{E}_n(Z)$  y que  $A$  tiene un punto  $p$  que es el corazón de un triodo simple  $T_0$  de  $Z$ . Mostraremos que toda vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$  contiene una copia topológica de  $T \times$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$[0, 1]^{n-1}$ , donde  $T$  es un triodo simple y, como este espacio no se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$  (Lema 2.16) obtendremos una contradicción. Sea  $\mathcal{U}$  una vecindad abierta cualquiera de  $A$  en  $F_n(X)$ . Supongamos que  $\varepsilon > 0$  es tal que  $B_{F_n(X)}(\varepsilon, A) \subset \mathcal{U}$ .

Supongamos que  $A = \{p, x_2, \dots, x_m\}$ , donde  $m \leq n$  y  $x_2, \dots, x_m$  son diferentes entre sí. Eligiendo puntos diferentes y cercanos a  $x_m$ , podemos elegir  $B \in B_{F_n(X)}(\varepsilon, A)$  de la forma  $B = \{p, x_2, \dots, x_n\}$ , donde  $p, x_2, \dots, x_n$  son diferentes entre sí.

Sea  $\delta > 0$  con la propiedad de que  $B_{F_n(X)}(\delta, B) \subset \mathcal{U}$  y las vecindades  $B_X(\delta, p), B_X(\delta, x_2), \dots, B_X(\delta, x_n)$  son ajenas entre sí. También elegimos subarcs  $I_2, \dots, I_n$  de  $X$  tales que  $x_i \in I_i$  y diámetro  $(I_i) < \delta$ , para toda  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Además elegimos un subtriodo simple  $T \subset Z$  tal que  $p$  es el vértice de  $T$  y diámetro  $(T) < \delta$ . Entonces  $\langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n \subset B_{F_n(X)}(\delta, B) \subset \mathcal{U}$ . Como  $T \subset B_X(\delta, p)$ ,  $I_2 \subset B_X(\delta, x_2), \dots, I_n \subset B_X(\delta, x_n)$ , tenemos que  $T, I_2, \dots, I_n$  son ajenos entre sí. Así que  $T \times I_2 \times \dots \times I_n$  es homeomorfo a  $\langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n$  (usando el homeomorfismo que envía a  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  en  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ). De manera que el espacio  $T \times I_2 \times \dots \times I_n$  puede ser encajado en  $\mathcal{U}$ . Por tanto  $\mathcal{U}$  no puede encajarse en  $\mathbb{R}^n$ . Esta contradicción completa la prueba del lema. ■

**Lema 3.5.** Si  $Z$  es un continuo localmente conexo que no es una gráfica, entonces, para toda  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Z$  contiene una gráfica con por lo menos  $k$  aristas.

**Demostración.** Si existieran dos arcos  $\alpha$  y  $\beta$  en  $Z$  cuya intersección tuviera una infinidad de componentes, entonces  $\alpha \cap \beta$  es un cerrado en  $\alpha$  con una infinidad de componentes. De manera que  $\alpha - (\alpha \cap \beta)$  tiene una infinidad de componentes. Elegimos  $k$  componentes  $J_1, \dots, J_k$  de  $\alpha - (\alpha \cap \beta)$ , entonces  $\beta \cup (J_1 \cup \dots \cup J_k)$  es una gráfica con al menos  $k$  aristas. Como en este caso ya acabaríamos, podemos suponer que  $\alpha \cap \beta$  tiene un número finito de componentes para cualesquiera arcos  $\alpha$  y  $\beta$  en  $Z$ . Entonces, si  $\alpha$  y  $\beta$  son arcos en  $Z$  y  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , se tiene que  $\alpha \cup \beta$  es una gráfica.

Por el Teorema 2.1, dado que  $Z$  no es una gráfica, debe ocurrir alguna de las siguientes dos cosas:

- (a) hay una infinidad de puntos  $p \in Z$  tales que  $\text{ord}(p, Z) > 2$ ,
- (b) existe un punto  $q \in Z$  tal que  $\text{ord}(q, Z) \geq \aleph_0$ .

Analicemos primero el caso (a). En este caso existe una sucesión de puntos  $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$  tales que  $\text{ord}(p_m, Z) > 2$ ,  $\lim p_m = p$  para alguna  $p \in Z$  tal que  $p \neq p_m$  para toda  $m \in \mathbb{N}$  y todos los puntos  $p_m$  son diferentes entre sí.

De acuerdo con el Teorema 2.2, cada  $p_m$  es el corazón de un triodo simple  $T_m$  en  $Z$ .

Tomemos arcos respectivos  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$  de  $p$  a cada uno de los puntos  $p_1, \dots, p_{k+1}$ . Por lo que supusimos en el primer párrafo de la prueba, el continuo  $Y = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k+1} \cup T_1 \cup \dots \cup T_{k+1}$  es una unión finita de arcos de  $Z$  por lo que  $Y$  es una gráfica. Cada uno de los puntos  $p_i$  es un punto de ramificación de  $Y$ . Si tomamos una subgráfica mínima  $W$  de  $Y$  que contiene a todos los vértices  $p_i$ , entonces  $W$  es un árbol que tiene  $k$  aristas. Por tanto  $W$  tiene al menos  $k$  aristas. Esto termina el análisis de este caso.

Ahora analicemos el caso en que existe un punto  $q \in Z$  tal que  $\text{ord}(q, Z) \geq N_0$ . Por lo que existe un  $k$ -odo simple  $Y$  tal que  $q$  es el corazón de  $Y$  (Teorema 2.2). Entonces  $Y$  tiene  $k$  aristas. Esto termina la prueba del lema. ■

**Lema 3.6.** Si  $\alpha$  es un arco en  $F_n(Z)$  que une a dos elementos  $A$  y  $B$ , entonces  $\bigcup \alpha$  tiene un número finito de componentes, cada una de ellas es un continuo localmente conexo que intersecta tanto a  $A$  como a  $B$ .

**Demostración.** Sea  $E = \bigcup \alpha$ . Es fácil ver que  $E$  tiene a lo más  $n$  componentes. Por el Lemma 2.2 de [8],  $E$  es un espacio localmente conexo, por lo que las componentes  $E_1, \dots, E_m$  de  $E$  son también localmente conexas. Si ocurriera, por ejemplo que  $A$  no intersecta a  $E_1$ , entonces  $m \geq 2$  y podemos hacer  $\mathcal{A} = \{C \in \alpha : C \cap E_1 \neq \emptyset\}$  y  $\mathcal{B} = \{C \in \alpha : C \cap E_1 = \emptyset\} = \{C \in \alpha : C \subset E_2 \cup \dots \cup E_m\}$ . Entonces  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  constituyen una separación de  $\alpha$ . Este es un absurdo que completa la prueba del lema. ■

**Lema 3.7.** Si  $Z$  es un continuo localmente conexo que no es una gráfica, entonces  $\mathcal{E}_n(Z)$  no puede ser un subconjunto abierto denso de  $F_n(Z)$ , con un número finito de arco componentes.

**Demostración.** Supongamos, por el contrario, que  $\mathcal{E}_n(Z)$  es un subconjunto abierto denso de  $F_n(Z)$  y que tiene  $r$  arco componentes ( $r \in \mathbb{N}$ ). Por el Lema 3.5, existe una gráfica  $Y \subset Z$  tal que  $Y$  tiene al menos  $k = 2r + 1$  aristas. Elegimos aristas diferentes  $J_1, \dots, J_k$  de  $Y$  y puntos  $p_i \in \text{int}_Y(J_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Escojamos abiertos conexos y ajenos entre sí  $V_1, \dots, V_k$  de  $Z$  tales que  $p_i \in V_i$  y  $V_i \cap Y \subset \text{int}_Y(J_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Dada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , como  $\{p_i\}$  es denso, podemos elegir un elemento  $A_i \in (V_i)_n \cap \mathcal{E}_n(Z)$ . Ya que  $\mathcal{E}_n(Z)$  es un abierto de un continuo localmente conexo, tenemos que las componentes y las arco componentes de  $\mathcal{E}_n(Z)$  coinciden véase [37. 8.26].

Heimos tomado véase elementos  $A_1, \dots, A_{2r+1}$  de  $\mathcal{E}_n(Z)$  el cual tiene  $r$  componentes, por lo que debe existir una componente  $C$  de  $\mathcal{E}_n(Z)$  tal que tres de los  $A_i$  pertenecen a  $C$ . Supongamos, por ejemplo, que  $A_1, A_2$  y  $A_3 \in C$ . Como

$C$  es arco conexo, existen dos arcos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en  $C$  tales que  $\alpha_1$  une a  $A_3$  con  $A_1$  y  $\alpha_2$  une a  $A_3$  con  $A_2$ . Elegimos un punto  $x \in A_3$ . Sean  $C_1$  y  $C_2$  las componentes de  $\bigcup \alpha_1$  y  $\bigcup \alpha_2$ , respectivamente, tales que  $x \in C_1 \cap C_2$ . Por el Lema 3.6, el continuo  $C = C_1 \cup C_2$  es un subcontinuo localmente conexo de  $(\bigcup \alpha_1) \cup (\bigcup \alpha_2)$  que intersecta a  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ .

Notemos que dado un punto  $p \in C$ ,  $p$  pertenece a un elemento de  $\mathcal{E}_n(Z)$ . Por el Lema 3.4,  $p$  no es el vértice de ningún triodo simple de  $Z$ . En particular,  $C$  no contiene triodos simples. Por 8.40 (b) de [37],  $C$  es un arco o una curva cerrada simple. Por tanto, existe un subarco  $\beta$  de  $C$  que intersecta a  $A_1$ ,  $A_2$  y a  $A_3$  y ningún punto de  $\beta$  es el vértice de un triodo simple de  $Z$ . Podemos suponer que  $\beta$  es un arco que une a un punto  $a_1 \in A_1$  con un punto  $a_2 \in A_2$  y que  $a_3$  es un punto de  $A_3 \cap \beta - \{a_1, a_2\}$ . Como  $a_3 \in V_3$  y  $V_3$  es arco conexo (véase [37, 8.26]) entonces existe un arco  $\alpha$  en  $V_3$  que une a  $a_3$  con  $p_3$ . Como los extremos de  $\beta$  no están en  $V_3$ , los extremos de  $\beta$  tampoco están en  $\alpha$ . Ya que los puntos de  $\beta$  no son vértices de triodos simples de  $Z$ , tenemos que  $\alpha \subset \beta$ . Entonces  $\beta$  intersecta a la arista  $J_3$  que es un arco o una curva cerrada simple. Como  $Y$  tiene  $2r + 1$  aristas,  $J_3$  tiene un vértice  $v$  de  $Y$ , que es un vértice de un triodo simple de  $Z$  por lo que  $v \notin \beta$ . Por tanto,  $J_3$  no está contenido en  $\beta$ . De manera que uno de los extremos de  $\beta$  pertenece a  $J_3$ , pues de lo contrario  $J_3$  entra y sale de  $\beta$  sin tocar a sus extremos formando algún triodo simple de  $Z$  con vértice en  $\beta$ . Podemos suponer que  $a_1 \in J_3$ . Entonces  $a_1 \in V_1 \cap J_3$ . Pero habíamos pedido que  $V_1 \cap Y \subset \text{int}_Y(J_1)$ . De manera que  $\text{int}_Y(J_1) \cap J_3 \neq \emptyset$ . Esto no puede ocurrir con las aristas de una gráfica. Esta contradicción completa la prueba del lema. ■

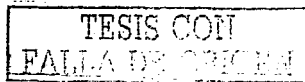
Dada una gráfica  $X$ , denotaremos por  $R(X)$  al conjunto de puntos de ramificación de  $X$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$R_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap R(X) \neq \emptyset\}.$$

Observemos que  $R_1(X) = F_1(R(X))$ . En el caso en que  $X$  es una curva cerrada simple,  $R(X) = \emptyset$  y  $R_n(X) = \emptyset$ .

**Lema 3.8.** Sean  $Z$  un continuo y  $C_1, \dots, C_m$  subconjuntos conexos ajenos dos a dos y no vacíos de  $Z$ , entonces,  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle_n$  es un subconjunto conexo de  $F_n(Z)$ .

**Demostración.** Consideremos la función  $G : Z^n \rightarrow F_n(Z)$  dada por  $G(z_1, \dots, z_n) = \{z_1, \dots, z_n\}$ . Claramente, la función  $G$  es continua.



Primero observemos que si  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle_n$  es no vacío entonces existe un elemento  $A \in F_n(X)$  que interseca a todos los conjuntos  $C_i$ . Como los conjuntos  $C_1, \dots, C_m$  son ajenos entre sí,  $m$  es menor o igual que el número de elementos de  $A$ . Así que  $m \leq n$ .

Ahora veremos que

$$\langle C_1, \dots, C_m \rangle_n = \bigcup \{G(C_{i_1} \times \dots \times C_{i_n})\} : \{C_1, \dots, C_m\} = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_n}\}.$$

Dado un elemento  $A \in \langle C_1, \dots, C_m \rangle_n$ , para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$ , hacemos  $A \cap C_k = \{a_{i_1}^{(k)}, \dots, a_{i_{r_k}}^{(k)}\}$ . Entonces

$$A = \{a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_{r_1}}^{(1)}, a_{i_1}^{(2)}, \dots, a_{i_{r_2}}^{(2)}, \dots, a_{i_1}^{(m)}, \dots, a_{i_{r_m}}^{(m)}\} = \\ G(a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_{r_1}}^{(1)}, a_{i_1}^{(2)}, \dots, a_{i_{r_2}}^{(2)}, \dots, a_{i_1}^{(m)}, \dots, a_{i_{r_m}}^{(m)}, a_{i_{r_m}}^{(m)}).$$

El último elemento se repite las veces que sea necesario para que se completen  $n$  coordenadas. Notemos que este elemento pertenece a  $G(C_{i_1} \times \dots \times C_{i_1} \times C_2 \times \dots \times C_2 \times \dots \times C_m \times \dots \times C_m \times C_m \times \dots \times C_m)$ . En este producto, el conjunto  $C_1$  se pone  $r_1$  veces, el  $C_2$  se pone  $r_2, \dots$ , el  $C_m$  primero se pone  $r_m$  veces y al final  $C_m$  se pone el número de veces necesarias para completar  $n$  factores. Hemos probado entonces que  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle_n \subset \bigcup \{G(C_{i_1} \times \dots \times C_{i_n})\} : \{C_1, \dots, C_m\} = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_n}\}$ . La otra contención es clara.

Elijamos puntos  $p_1 \in C_1, \dots, p_m \in C_m$ . Si tomamos una familia  $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_n}\}$  tal que  $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_n}\} = \{C_1, \dots, C_m\}$ , se tiene que

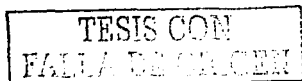
$$\{p_1, \dots, p_m\} = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_n}\} = G(p_{i_1}, \dots, p_{i_n}) \in G(C_{i_1} \times \dots \times C_{i_n}).$$

Con esto ya podemos concluir que  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle_n$  es conexo pues es la unión de conjuntos conexos que tienen al elemento común  $\{p_1, \dots, p_m\}$ . ■

### 3.3 Gráficas, el caso $n \geq 4$

**Lema 3.9.** Sea  $X$  una gráfica; entonces las componentes de  $F_n(X) - R_n(X)$  son todos los conjuntos de la forma  $\langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_r) \rangle_n$ , donde  $I_1, \dots, I_r$  son aristas de  $X$ , diferentes entre sí y el número  $r$  varía en el conjunto  $\{1, \dots, n\}$ .

**Demostración.** Por el Lema 3.8, cada conjunto que es de la forma  $\langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_r) \rangle_n$  también es conexo, notemos que además es abierto.





Veamos ahora que estos conjuntos son ajenos dos a dos. Para esto, tomemos dos colecciones diferentes de aristas  $I_1, \dots, I_r$  y  $J_1, \dots, J_s$ . Podemos suponer que  $I_1 \notin \{J_1, \dots, J_s\}$ . Si ocurriera que existe un elemento  $A \in \langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_r) \rangle_n \cap \langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_s) \rangle_n$  entonces tendríamos que  $\emptyset \neq A \cap I_1 \subset \text{int}_X(J_1) \cup \dots \cup \text{int}_X(J_s)$ . Esto implica que  $I_1 \cap \text{int}_X(J_j) \neq \emptyset$  para alguna  $j$ . Ya que  $I_1$  y  $J_j$  son aristas de  $X$ , se concluye que  $I_1 = J_j$ , lo cual es absurdo. Por tanto  $\langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_r) \rangle_n \cap \langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_s) \rangle_n = \emptyset$ .

Para terminar la prueba del lema, sólo nos falta probar que la unión de estos conjuntos es igual  $F_n(X) - R_n(X)$ . Pero esto se sigue de que  $X - R(X) = \bigcup \{ \text{int}_X(J) : J \text{ es arista de } X \}$ . ■

**Lema 3.10** (A. Illanes). Si  $X$  es una gráfica,  $A \in F_{n-1}(X)$  y  $n \geq 4$ , entonces ninguna vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{U}$  una vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$ . Como  $A \in F_{n-1}(X)$ , completando con puntos cercanos a un punto de  $A$ , es posible encontrar puntos  $p_1, \dots, p_{n-1}$  de  $X$  y subarcos ajenos entre sí  $I_1, \dots, I_{n-1}$  de  $X$  tales que  $p_i \in I_i$  pero  $p_i$  no es un punto terminal de  $I_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $\langle I_1, I_2, \dots, I_{n-1} \rangle_n \subset \mathcal{U}$ .

Dada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , sabemos que hay un homeomorfismo  $f_i: [0, 1]^2 \rightarrow F_2(I_i)$  tal que  $f_i([0, 1] \times \{0\}) = F_1(I_i)$  y  $f_i(\frac{1}{2}, 0) = \{p_i\}$ . Sea  $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow F_1(I_i)$  dada por  $\alpha_i(t) = f_i(t, 0)$ .

Definimos  $\varphi: [0, 1]^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  dada por  $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) =$

$$\begin{cases} f_1(t_1, t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}), & \text{si } t_n \geq 0, \\ \alpha_1(t_1) \cup f_2(t_2, -t_n) \cup \alpha_3(t_3) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}), & \text{si } t_n \leq 0. \end{cases}$$

Si  $t_n = 0$ , ambas definiciones de  $\varphi$  toman el valor de  $\alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1})$ . Dada  $z \in [0, 1]^{n-1} \times [-1, 1]$ ,  $\varphi(z)$  es la unión de un conjunto de a lo más dos puntos con  $n-2$  conjuntos de un solo punto, por lo que  $\varphi(z)$  tiene a lo más  $n$  puntos. Por tanto  $\varphi(z) \in F_n(X)$ . Claramente  $\varphi(z)$  está contenido en  $I_1 \cup \dots \cup I_{n-1}$  e intersecta a cada uno de los intervalos  $I_1, \dots, I_{n-1}$ . Por tanto  $\varphi(z) \in \langle I_1, I_2, \dots, I_{n-1} \rangle_n \subset \mathcal{U}$ . Esto termina la prueba de que  $\varphi$  está bien definida.

Claramente  $\varphi$  es continua.

Ahora veamos que  $\varphi$  es inyectiva. Supongamos que  $\varphi(t_1, \dots, t_n) = \varphi(s_1, \dots, s_n)$ . En el caso en que  $t_n, s_n \geq 0$ , tenemos que  $f_1(t_1, t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = f_1(s_1, s_n) \cup \alpha_2(s_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(s_{n-1})$ . Ya que  $I_1, \dots, I_{n-1}$  son ajenos entre sí, se obtiene que  $f_1(t_1, t_n) = f_1(s_1, s_n)$ ,  $f_2(t_2, 0) = f_2(s_2, 0)$ , ...,

$f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = f_{n-1}(s_{n-1}, 0)$ . La inyectividad de las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$  implica que  $(t_1, \dots, t_n) = (s_1, \dots, s_n)$ . El caso en que  $t_n, s_n \leq 0$  se trata de manera similar. Ahora supongamos que  $s_n \leq 0 \leq t_n$ . Entonces  $f_1(t_1, t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = \alpha_1(s_1) \cup f_2(s_2, -s_n) \cup \alpha_3(s_3) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(s_{n-1})$ . Procediendo como antes obtenemos que  $f_1(t_1, t_n) = f_1(s_1, 0)$ ,  $f_2(t_2, 0) = f_2(s_2, -s_n)$ ,  $f_3(t_3, 0) = f_3(s_3, 0)$ , ...,  $f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = f_{n-1}(s_{n-1}, 0)$ . La inyectividad de las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$  implica que  $(t_1, \dots, t_{n-1}) = (s_1, \dots, s_{n-1})$  y  $t_n = 0 = s_n$ .

Por tanto,  $\varphi$  es inyectiva.

Sea  $C = \text{Im } \varphi$ . Entonces  $C$  es una  $n$ -celda en  $\mathcal{U}$ . Ahora consideremos el arco  $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}\} \cup f_3(\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1])$ . Es claro que  $\mathcal{A}$  es un subarco de  $\mathcal{U}$ . Notemos que el punto  $\varphi(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0) = f_1(\frac{1}{2}, 0) \cup f_2(\frac{1}{2}, 0) \cup \dots \cup f_{n-1}(\frac{1}{2}, 0) = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  pertenece a  $\mathcal{A}$ . Por otra parte, si  $t > 0$ , el conjunto  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}\} \cup f_3(\frac{1}{2}, t)$  tiene dos puntos en el arco  $I_3$  y que, para toda  $z = (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n-1} \times [-1, 1]$ ,  $\varphi(z) \cap I_3 = \alpha_3(t_3)$  que consta de sólo un punto (aquí es donde estamos usando que  $n \geq 4$ , pues esto es lo que se necesita para que el término  $\alpha_3(t_3)$  aparezca en  $\varphi(z)$ ). Esto muestra que  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}\} \cup f_3(\frac{1}{2}, t)$  no pertenece a  $C$  para ninguna  $t > 0$ . Por tanto  $\mathcal{A} \cap C = \{\varphi(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0)\}$ . Entonces  $C \cup \mathcal{A}$  es una  $n$ -sombrilla. Como una  $n$ -sombrilla no se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$  (Lema 2.16), tenemos que  $\mathcal{U}$  tampoco se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Lema 3.11.** Si  $X$  es una gráfica y  $A \in F_n(X) - (F_{n-1}(X) \cup R_n(X))$ , entonces  $A$  tiene una vecindad en  $F_n(X)$  que es una  $n$ -celda.

**Demostración.** Supongamos que  $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , donde los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son diferentes entre sí. Como ninguno de los puntos  $p_i$  es de ramificación, entonces existen arcos ajenos entre sí  $J_1, J_2, \dots, J_n$  que son vecindades de los respectivos puntos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Dado que  $\langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$  es una vecindad de  $A$  homeomorfa a  $J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ , también es homeomorfa a  $I^n$ . Por tanto, la vecindad  $\langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$  es una  $n$ -celda. ■

**Lema 3.12** (A. Illanes). Sean  $X$  una gráfica,  $n \geq 4$  y  $A \in F_n(X)$ . Entonces,  $A$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  en  $F_n(X)$  tal que, para cada  $U \in \mathcal{B}$ ,  $U \cap \mathcal{E}_n(X)$  es arco conexo y  $A \notin \mathcal{E}_n(X)$  si y sólo si  $A \in F_1(X) - R_n(X)$ .

**Demostración.** (Necesidad). Como  $A \notin \mathcal{E}_n(X)$ , entonces  $A \in R_n(X) \cup F_{n-1}(X)$ . Supongamos que existe la base de vecindades  $\mathcal{B}$  con las propiedades mencionadas. Supongamos que  $A = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ , donde  $1 \leq r \leq n$  y los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  son diferentes entre sí. Sea  $\delta_1 > 0$  tal que los conjuntos

$B_X(\delta_1, p_1), \dots, B_X(\delta_1, p_r)$  son ajenos entre sí y  $\delta_1 < \frac{1}{3}$ . Elegimos  $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$  tal que  $\mathcal{U} \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$ . Sea  $\delta > 0$  tal que  $B_{F_n(X)}(\delta, A) \subset \mathcal{U}$ .

Veamos primero qué ocurre cuando  $A \in \tilde{R}_n(X)$ . En este caso podemos suponer que  $p_r \in R(X)$ . Sean  $J$  y  $L$  aristas de  $X$  tales que  $J \neq L$  y  $p_r \in J \cap L$ . Consideremos dos subconjuntos de  $n$  puntos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  y  $\{y_1, \dots, y_n\}$  de  $X - R(X)$  tales que  $d(x_i, p_i), d(y_i, p_i) < \delta$  para toda  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ .  $\{x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\} \subset B_X(\delta, p_r) \cap J$  y  $\{y_r, y_{r+1}, \dots, y_n\} \subset B_X(\delta, p_r) \cap L$ . Entonces los conjuntos  $B = \{x_1, \dots, x_n\}$  y  $C = \{y_1, \dots, y_n\}$  pertenecen a  $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$ . Por la elección de  $\mathcal{B}$ , existe una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X) \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$  tal que  $\alpha(0) = B$  y  $\alpha(1) = C$ .

Notemos que  $p_r$  es un punto que separa a  $B_X(\delta_1, p_r)$  en dos conjuntos abiertos  $U, V$  tales que  $\{x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\} \subset U$  y  $\{y_r, y_{r+1}, \dots, y_n\} \subset V$ . Dada  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha(t) \in \mathcal{E}_n(X)$ , de manera que  $\alpha(t)$  no tiene puntos de ramificación y tiene  $n$  elementos. En particular,  $p_r \notin \alpha(t)$ . Además  $\alpha(t) \in \mathcal{U}$ , por lo que  $\alpha(t) \in B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$ , así que  $\alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_r) - \{p_r\} = B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup U \cup V$ .

Sean  $K_1 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup U\}$  y  $K_2 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \cap V \neq \emptyset\}$ . Por la contención final del párrafo anterior,  $[0, 1] = K_1 \cup K_2$ . Como  $V$  es ajeno a  $B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup U$ , tenemos que  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ . Claramente  $K_1$  y  $K_2$  son abiertos en  $[0, 1]$ . Como  $\alpha(0) = B$  y  $\alpha(1) = C$ , tenemos que  $0 \in K_1$  y  $1 \in K_2$ . Entonces  $K_1$  y  $K_2$  forman una separación de  $[0, 1]$ , lo que contradice su conexidad. Esto muestra que  $A$  no puede pertenecer a  $R_n(X)$ .

Por tanto  $A \in F_{n-1}(X) - R_n(X)$ .

Ahora, supongamos que  $A$  no es degenerado, es decir, supongamos que  $r > 1$ . Elegimos dos subconjuntos  $\{x_{r+1}, \dots, x_n\} \subset B_X(\delta, p_1) - \{p_1\}$  y  $\{y_{r+1}, \dots, y_n\} \subset B_X(\delta, p_r) - \{p_r\}$ , donde los puntos  $x_{r+1}, \dots, x_n$  son todos diferentes y lo mismo ocurre con los puntos  $y_{r+1}, \dots, y_n$ . Formamos los conjuntos  $B = \{p_1, \dots, p_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$  y  $C = \{p_1, \dots, p_r, y_{r+1}, \dots, y_n\}$ . Entonces los conjuntos  $B$  y  $C$  pertenecen a  $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$ . Por la elección de  $\mathcal{B}$ , existe una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X) \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$  tal que  $\alpha(0) = B$  y  $\alpha(1) = C$ .

Sean  $K_1 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \text{ tiene un y sólo un punto en } B_X(\delta_1, p_1)\}$  y  $K_2 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \text{ tiene más de un punto en } B_X(\delta_1, p_1)\}$ . Claramente  $[0, 1] = K_1 \cup K_2$ ,  $1 \in K_1$ ,  $0 \in K_2$  y  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ .

Mostraremos que  $K_1$  y  $K_2$  son abiertos en  $[0, 1]$ .

Dada  $t \in K_2$ , supongamos que  $\alpha(t) = \{w_1, \dots, w_n\}$ , donde todos los pun-

tos  $w_1, \dots, w_n$  son diferentes entre sí. Sabemos que  $\alpha(t)$  tiene al menos dos elementos en  $B_X(\delta_1, p_1)$ . Supongamos que  $w_1$  y  $w_2 \in B_X(\delta_1, p_1)$ . Tomemos  $\delta_0 > 0$  tal que  $B_X(\delta_0, w_1), \dots, B_X(\delta_0, w_n)$  sean ajenos entre sí y  $B_X(\delta_0, w_1) \cup B_X(\delta_0, w_2) \subset B_X(\delta_1, p_1)$ . Para los números  $s$  en una vecindad de  $t$ ,  $\alpha(s)$  tiene un elemento en  $B_X(\delta_0, w_1)$  y otro (diferente) en  $B_X(\delta_0, w_2)$  y ambos están en  $B_X(\delta_1, p_1)$ . Por tanto, todos esos números  $s$  están en  $K_2$ . Esto muestra que  $K_2$  es abierto.

Ahora tomemos una  $t \in K_1$ . Supongamos que  $\alpha(t) = \{w_1, \dots, w_n\}$ , donde todos los puntos  $w_1, \dots, w_n$  son diferentes entre sí. Supongamos que  $w_1$  es el único elemento de  $\alpha(t)$  que pertenece a  $B_X(\delta_1, p_1)$ . Como  $\alpha(t) \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_r)$ , de manera que podemos tomar  $\delta_0 > 0$  tal que los conjuntos  $B_X(\delta_0, w_1), \dots, B_X(\delta_0, w_n)$  son ajenos entre sí y cada uno de ellos está contenido en algún conjunto de la forma  $B_X(\delta_1, p_j)$ . Como sólo  $w_1$  pertenece a  $B_X(\delta_1, p_1)$ , tenemos que  $B_X(\delta_1, p_1) \cap (B_X(\delta_0, w_2) \cup \dots \cup B_X(\delta_0, w_n)) = \emptyset$ . Tomemos un número  $s \in [0, 1]$  tal que  $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta_0$ , entonces  $\alpha(s)$  interseca a cada uno de los conjuntos de la forma  $B_X(\delta_0, w_i)$  y está contenido en su unión. Entonces  $\alpha(s)$  tiene  $n - 1$  elementos en  $B_X(\delta_0, w_2) \cup \dots \cup B_X(\delta_0, w_n)$  y uno en  $B_X(\delta_0, w_1)$ . De ellos, el único en  $B_X(\delta_1, p_1)$  es el de  $B_X(\delta_0, w_1)$ . Por tanto,  $\alpha(s)$  tiene exactamente un elemento en  $B_X(\delta_1, p_1)$ . De modo que  $s \in K_1$ . Esto termina la prueba de que  $K_1$  es abierto.

Hemos encontrado nuevamente una desconexión de  $[0, 1]$ . Como esto es imposible, podemos concluir que  $A$  es degenerado.

Por tanto,  $A \in F_1(X) - R_n(X)$ .

(Suficiencia). Ahora estamos suponiendo que  $A \in F_1(X) - R_n(X)$ . Entonces,  $A = \{p\}$  para algún punto  $p \in X - R(X)$ . Entonces, existe  $\delta > 0$  tal que  $B_X(\delta, p)$  está contenido en algún segmento  $J$  de  $X$  y  $B_X(\delta, p) \cap R(X) = \emptyset$ . Entonces,  $B_X(\delta, p)$  es homeomorfo a un subintervalo  $L$  de  $[0, 1]$ . Identificaremos a  $B_X(\delta, p)$  con  $L$ . Sea  $B = \{B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) : 0 < \eta < \delta\}$ . Tenemos que probar que si  $0 < \eta < \delta$  y  $B, C \in B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$  entonces  $B$  y  $C$  se pueden conectar por un arco en  $B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$ . Como  $B, C \subset B_X(\delta, p) = L$ , podemos suponer que  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  y  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ , donde  $b_1 < \dots < b_n$  y  $c_1 < \dots < c_n$ . Entonces definimos  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$  por  $\alpha(t) = \{tb_1 + (1-t)c_1, \dots, tb_n + (1-t)c_n\}$ . Es fácil ver que cada  $\alpha(t)$  tiene  $n$  elementos y ninguno de ellos es de ramificación. Por tanto,  $\alpha$  está bien definida.  $\alpha(0) = C$  y  $\alpha(1) = B$ . De manera que  $B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$  es arco conexo. Como  $A$  es degenerado,  $A \notin \mathcal{E}_n(X)$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Con esto terminamos la prueba del lema. ■

**Teorema 3.13** (A. Illanes). Sean  $X$  y  $Y$  gráficas, supongamos que  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$  y  $n \geq 4$ . Entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

**Demostración.** Sea  $h: F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  un homeomorfismo.

Notemos que  $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$  pues un elemento  $A \in F_n(X)$  tiene una vecindad que es una  $n$ -celda en  $F_n(X)$  si y sólo si lo mismo ocurre con  $h(A)$  en  $F_n(Y)$ . Sea  $A \in F_1(X) - R_n(X)$ . Por el Lema 3.12,  $A$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  en  $F_n(X)$  tal que, para cada  $U \in \mathcal{B}$ ,  $U \cap \mathcal{E}_n(X)$  es arco conexo y  $A \notin \mathcal{E}_n(X)$ . Ya que  $h$  es homeomorfismo,  $h(A)$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}_1$  en  $F_n(Y)$  tal que, para cada  $V \in \mathcal{B}_1$ ,  $V \cap \mathcal{E}_n(Y)$  es arco conexo y  $h(A) \notin \mathcal{E}_n(Y)$ . Aplicando otra vez el Lema 3.12 obtenemos que  $h(A) \in F_1(Y) - R_n(Y)$ . Hemos demostrado que  $h(F_1(X) - R_n(X)) \subset F_1(Y)$ . Como  $F_1(X) - R_n(X)$  es denso en  $F_1(X)$  y  $F_1(Y)$  es compacto, concluimos que  $h(F_1(X)) \subset F_1(Y)$ . Similarmenete,  $h^{-1}(F_1(Y)) \subset F_1(X)$ . De manera que  $h(F_1(X)) = F_1(Y)$ . Por tanto  $F_1(X)$  es homeomorfo a  $F_1(Y)$  y, en consecuencia,  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . ■

### 3.4 Gráficas, el caso $n \leq 3$

**Lema 3.14.** Sean  $X$  una gráfica y  $A \in F_3(X) - R_3(X)$ . Entonces  $A \in \mathcal{E}_3(X)$ .

**Demostración.** Primero supongamos que  $A = \{x\}$  para algún  $x \in X$ . Como  $x$  no es un punto de ramificación, existe una vecindad  $J$  de  $x$  tal que  $J$  es un arco. Entonces  $A \in \langle J \rangle_3$  y  $\langle J \rangle_3 = F_3(J)$  es una vecindad de  $A$  en  $F_3(X)$  que es homeomorfa a  $[0, 1]^3$  (ver Teorema 6 de [3]).

Ahora supongamos que  $A = \{x, y\}$ , donde  $x \neq y$ . Sean  $J_1$  y  $J_2$  arcos ajenos en  $X$  tales que  $J_1$  y  $J_2$  son vecindades de  $x$  y de  $y$ , respectivamente. Entonces  $\langle J_1, J_2 \rangle_3$  es una vecindad de  $A$ .

Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , existe un homeomorfismo  $f_i: [0, 1]^2 \rightarrow F_2(J_i)$  tal que  $f_i([0, 1] \times \{0\}) = F_1(J_i)$ . Sea  $\varphi: [0, 1]^2 \times [-1, 1] \rightarrow \langle J_1, J_2 \rangle_3$  dada por

$$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} f_1(t_1, t_2) \cup f_2(t_2, 0), & \text{si } t_3 \geq 0, \\ f_1(t_1, 0) \cup f_2(t_2, -t_3), & \text{si } t_3 \leq 0. \end{cases}$$

Es fácil ver  $\varphi$  es un homeomorfismo. Por tanto,  $\langle J_1, J_2 \rangle_3$  es una 3-celda y concluimos que  $A \in \mathcal{E}_3(X)$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Sólo nos falta analizar el caso en que  $A = \{x, y, z\}$ , donde  $x, y, y z$  son puntos diferentes. Pero este caso se sigue directamente del Lema 3.11. ■

**Lema 3.15.** Sean  $X$  una gráfica y  $A \in F_2(X) - R_2(X)$ . Entonces  $A \in \mathcal{E}_2(X)$ .

**Demostración.** Primero supongamos que  $A = \{x\}$  para algún  $x \in X$ . Como  $x$  no es un punto de ramificación, existe una vecindad  $J$  de  $x$  tal que  $J$  es un arco. Entonces  $A \in \langle J \rangle_2$  y  $\langle J \rangle_2 = F_2(J)$  es una vecindad de  $A$  en  $F_2(X)$  que es homeomorfa a  $[0, 1]^2$ .

Ahora supongamos que  $A = \{x, y\}$ , donde  $x \neq y$ . Este caso se sigue directamente del Lema 3.11. ■

Sean  $Z$  un continuo y  $\mathcal{W} \subset Z$  un abierto fijo. Para cada abierto  $U$  en  $Z$ , sea  $c(U)$  el número de componentes de  $U \cap \mathcal{W}$ . Para cada  $p \in \text{cl}_Z(\mathcal{W})$ , definimos  $v(p) = \min(\{m \in \mathbb{N} : p \text{ tiene una base de vecindades } \mathcal{B} \text{ tal que } c(U) = m \text{ para toda } U \in \mathcal{B}\} \cup \{\infty\})$ . En estos términos tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.16.** Sean  $Z$  un continuo,  $p \in Z$ ,  $\mathcal{W}$  un abierto de  $Z$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $p$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  tal que, para toda  $U \in \mathcal{B}$ ,  $c(U) = m$  y, además, para toda componente  $C$  de  $U \cap \mathcal{W}$ ,  $p \in \text{cl}_Z(C)$ . Entonces  $v(p) = m$ .

**Demostración.** De acuerdo con la definición de  $v(p)$ ,  $m$  pertenece al conjunto que define a  $v(p)$ . De manera que  $v(p) \leq m$ . Por definición,  $p$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}_1$  tal que  $c(U) = v(p)$  para toda  $U \in \mathcal{B}_1$ . Sean  $V \in \mathcal{B}_1$  y  $U \in \mathcal{B}_1$  tales que  $U \subset V$ . Por hipótesis  $V \cap \mathcal{W}$  tiene  $m$  componentes  $C_1, \dots, C_m$ . También por hipótesis,  $p \in \text{cl}_Z(C_i)$  para toda  $i \in \{1, \dots, m\}$ . De manera que  $U \cap C_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Por tanto  $U \cap \mathcal{W} = U \cap V \cap \mathcal{W} = (U \cap C_1) \cup \dots \cup (U \cap C_m)$ . Como los conjuntos en esta unión están mutuamente separados y son no vacíos, tenemos que  $U \cap \mathcal{W}$  tiene al menos  $m$  componentes. Es decir,  $v(p) = c(U) \geq m$ . Por tanto  $v(p) = m$ . ■

En el siguiente lema supondremos que  $X$  es una gráfica, que  $p, q, y r$  son puntos de ramificación de  $X$ ,  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ ,  $\text{ord}(q, X) = m \geq 3$  y  $\text{ord}(r, X) = l \geq 3$ . Además  $x, y, y z \in X$  no son puntos de ramificación.

**Lema 3.17.** Sea  $\mathcal{W} = F_3(X) - R_3(X)$ . Para cada  $A \in F_3(X)$ , sea  $v(A)$  como se definió antes. Entonces  $v(A)$  tiene los siguientes posibles valores:

(a) si  $A = \{p\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- (b) si  $A = \{p, x\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2}$ ,  
 (c) si  $A = \{p, x, y\}$  y  $x \neq y$ , entonces  $v(A) = n$ ,  
 (d) si  $A = \{p, q\}$ ,  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = n \cdot \binom{n}{2} + m \cdot \binom{n}{2} + n \cdot m$ ,  
 (e) si  $A = \{p, q, x\}$ ,  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = n \cdot m$ ,  
 (f) si  $A = \{p, q, r\}$  y  $p, q$  y  $r$  son diferentes entre sí, entonces  $v(A) = n \cdot m \cdot l$ ,  
 (g) si  $A = \{x, y, z\}$  (aquí puede ocurrir que  $A$  tenga uno, dos o tres puntos), entonces  $v(A) = 1$ .

**Demostración.** Usaremos el Lema 3.16. Sea  $\delta_0 > 0$  tal que  $N_X(\delta_0, A) \cap R(X) = A \cap R(X)$ ,  $N_X(\delta_0, A)$  tiene tantas componentes como elementos tiene  $A$  y  $\delta_0 < \frac{1}{3}$ . Sea  $\mathcal{B} = \{B_{F_3(X)}(\delta, A) \subset F_3(X) : 0 < \delta < \delta_0\}$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es una base de vecindades para  $A$  en  $F_3(X)$ .

(a) Supongamos que  $A = \{p\}$ . Sea  $\delta \in (0, \delta_0)$ . Así,  $\text{cl}_X(N_X(\delta, A))$  es un  $n$ -odo,  $\text{cl}_X(N_X(\delta, A)) = J_1 \cup \dots \cup J_n$ , donde  $J_i \cap J_j = \{p\}$ , si  $i \neq j$  y cada  $J_i$  es un arco que tiene por extremos a  $p$  y a un punto  $a_i$ . Observe que un elemento  $B \in F_3(X)$  pertenece a  $B_{F_3(X)}(\delta, A)$  si y sólo si  $B \subset N_X(\delta, A) = \text{cl}_X(N_X(\delta, A)) - \{a_1, \dots, a_n\}$ . Entonces  $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{W}$  si y sólo si  $B \subset N_X(\delta, A) - \{p\} = (J_1 - \{p\}) \cup \dots \cup (J_n - \{p\})$ . Procediendo como en el Lema 3.9, tenemos que las componentes de  $B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{W}$  son los conjuntos de la forma  $\langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3$ , donde  $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$  son números distintos entre sí y el número  $r$  varía en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . De manera que  $c(B_{F_3(X)}(\delta, A)) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ . Por otra parte, si tomamos un conjunto de la forma  $\langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3$  como antes, podemos elegir un punto en cada uno de los conjuntos  $J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\}$  tan cercano a  $p$  como queramos y el conjunto que consta de esos puntos elegidos pertenece a  $\langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3$  y estará tan cercano a  $A$  como queramos. Esto muestra que  $A \in \text{cl}_X(\langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3)$ . Por tanto se satisfacen las hipótesis del Lema 3.16 y podemos concluir que  $v(A) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ .

La demostración de los incisos (b)-(g) es similar. ■

En el siguiente lema supondremos que  $X$  es una gráfica, que  $p$  y  $q$  son puntos de ramificación de  $X$ ,  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$  y  $\text{ord}(q, X) = m \geq 3$ . Además,  $x$  y  $y \in X$  no son puntos de ramificación.

**Lema 3.18.** Sea  $\mathcal{W} = F_2(X) - R_2(X)$ . Para cada  $A \in F_2(X)$ , sea  $v(A)$  como se definió antes. Entonces  $v(A)$  tiene los siguientes posibles valores:

- (a) si  $A = \{p\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2}$ ,  
 (b) si  $A = \{p, x\}$ , entonces  $v(A) = n$ .  
 (c) si  $A = \{p, q\}$  y  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = n \cdot m$ .

(d) si  $A = \{x, y\}$  (aquí puede ocurrir que  $A$  tenga uno o dos puntos), entonces  $v(A) = 1$ .

**Demostración.** La demostración es similar a la del Lema 3.17. ■

**Lema 3.19.** Sean  $X$  y  $Y$  gráficas. Supongamos que existe un homeomorfismo  $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ . Si  $p$  es un punto de ramificación de  $X$ , entonces  $h(\{p\}) = \{u\}$  para algún punto de ramificación  $u$  de  $Y$ .

**Demostración.** Sean  $\mathcal{W} = F_3(X) - R_3(X)$  y  $\mathcal{W}_1 = F_3(Y) - R_3(Y)$ . Por los Lemas 3.4 y 3.14, un elemento  $A \in F_3(X)$  tiene una vecindad que es una 3-celda si y sólo si  $A \in F_3(X) - R_3(X)$ . Como algo similar ocurre con  $Y$ , concluimos que  $h(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_1$  y  $h(R_3(X)) = R_3(Y)$ . En particular,  $h(\{p\}) \in R_3(Y)$ . Podemos definir  $v$  en  $F_3(X)$  usando  $\mathcal{W}$  y también definir  $v_1$  en  $F_3(Y)$  usando  $\mathcal{W}_1$ . Como las definiciones de  $v$  y  $v_1$  son topológicas, tenemos que, para cada  $A \in F_3(X)$ ,  $v(A) = v_1(h(A))$ .

Dada  $A \in F_3(X)$ , si  $A$  tiene un punto  $x$  que no es de ramificación, entonces existe un arco  $J$  de  $X$  tal que  $x \in J$ ,  $J \cap R(X) = \emptyset$  y  $J \cap A = \{x\}$  y, usando el Lema 3.17,  $v(A) = v((A - \{x\}) \cup \{y\})$ , para toda  $y \in J$ . Esto muestra que, para toda vecindad  $\mathcal{U}$  de  $A$  en  $F_3(X)$ ,  $v(A)$  coincide con  $v(A_1)$  para una finitud de elementos  $A_1$  de  $\mathcal{U}$ .

Dada  $A \in F_3(X)$ , si  $A$  sólo consta de puntos de ramificación,  $A$  es de alguna de las formas (a), (d) o (f) descritas en el Lema 3.17. Si  $A$  es de la forma (a) entonces los elementos  $A_1$  de  $F_3(X)$  cercanos a  $A$  y que son diferentes de  $A$  son de alguna de las formas (b), (c) o (g) y, para cualesquiera de ellas,  $v(A_1) < v(A)$ . Por tanto,  $v$  alcanza un máximo absoluto en alguna vecindad de  $A$ . Similarmente, si  $A$  es de alguna de las formas (d) o (f) entonces  $v(A)$  alcanza un máximo absoluto en alguna vecindad de  $A$ .

Por tanto, dada  $A \in F_3(X)$ ,  $A \subset R(X)$  si y sólo si  $v(A)$  alcanza un máximo absoluto en alguna vecindad de  $A$ .

Como la definición de  $v$  es topológica, lo mismo ocurre para  $v_1$ . Esto muestra que  $A \subset R(X)$  si y sólo si  $h(A) \subset R(Y)$ .

De manera que  $h(\{p\})$  es de alguna de las siguientes formas:

$h(\{p\}) = \{u\}$ ,  $\{u, z\}$ ,  $\{u, z, w\}$ , donde  $u, z, w \in R(Y)$  y son diferentes entre sí.

Analícemos el caso en que  $h(\{p\}) = \{u, z\}$ , con  $u \neq z$ , donde  $\text{ord}(p, X) = n$ ,  $\text{ord}(u, Y) = r$  y  $\text{ord}(z, Y) = s$ . Como  $v(\{p\}) = v_1(\{u, z\})$ , tenemos que

$$n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = r \cdot \binom{s}{2} + s \cdot \binom{r}{2} + r \cdot s$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



De acuerdo con el Lema 3.17, los valores que toma  $v$  en los elementos de  $F_3(X)$  cercanos a  $\{p\}$  y diferentes de  $\{p\}$  son  $n + \binom{n}{2}$ ,  $n$  y 1. Por otra parte, los valores que toma  $v_1$  en los elementos de  $F_3(Y)$  cercanos a  $\{u, z\}$  y diferentes de  $\{u, z\}$  son  $r + \binom{r}{2}$ ,  $s + \binom{s}{2}$ ,  $r \cdot s$ ,  $r$ ,  $s$  y 1. Como estos conjuntos de valores deben coincidir,  $r + \binom{r}{2}$ ,  $r$  son dos valores del conjunto  $\{n + \binom{n}{2}, n\}$ . De manera que  $r = n$ . Similarmente,  $s = n$ . Pero entonces  $r \cdot s = n^2$  debe ser igual a  $n + \binom{n}{2}$  o a  $n$ . Es claro que  $n^2 \neq n$ , y si ocurriera que  $n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2}$ , tendríamos que  $2n = 2 + n - 1$ . Así que  $n = 1$ , lo que no puede ser cierto. Esto muestra que es imposible que  $h(\{p\}) = \{u, z\}$ .

Ahora analicemos el caso en que  $h(\{p\}) = \{u, z, w\}$ , donde  $u, z, w$  son diferentes entre sí,  $\text{ord}(p, X) = n$ ,  $\text{ord}(u, Y) = r$ ,  $\text{ord}(z, Y) = s$  y  $\text{ord}(w, Y) = t$ . Como  $v(\{p\}) = v_1(\{u, z, w\})$ , tenemos que

$$n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = r \cdot s \cdot t$$

De acuerdo con el Lema 3.17, los valores que toma  $v$  en los elementos de  $F_3(X)$  cercanos a  $\{p\}$  y diferentes de  $\{p\}$  son  $n + \binom{n}{2}$ ,  $n$  y 1. Por otra parte, los valores que toma  $v_1$  en los elementos de  $F_3(Y)$  cercanos a  $\{u, z, y\}$  y diferentes de  $\{u, z, y\}$  son  $r, s, t, r \cdot s, r \cdot t, s \cdot t, 1$ . Como estos conjuntos de valores deben coincidir,  $r$  y  $r \cdot s$  deben pertenecer al conjunto  $\{n + \binom{n}{2}, n\}$ . Por tanto  $r = n$ . Similarmente,  $s = n = t$ . De manera que  $n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2}$ , con lo que se obtiene la misma contradicción que en el caso anterior. Por tanto  $h(\{p\})$  tampoco puede ser un conjunto de tres elementos.

Hemos demostrado que la única opción para  $p$  es que  $h(\{p\})$  sea de la forma  $h(\{p\}) = \{u\}$ , donde  $u \in R(Y)$ . ■

**Lema 3.20.** Sean  $X$  y  $Y$  gráficas. Supongamos que existe un homeomorfismo  $h: F_2(X) \rightarrow F_2(Y)$ . Si  $p$  es un punto de ramificación de  $X$ , entonces  $h(\{p\}) = \{u\}$  para algún punto de ramificación  $u$  de  $Y$ .

**Demostración.** Sean  $\mathcal{W} = F_2(X) - R_2(X)$  y  $\mathcal{W}_1 = F_2(Y) - R_2(Y)$ . Por los Lemas 3.4 y 3.15, un elemento  $A \in F_2(X)$  tiene una vecindad que es una 2-celda si y sólo si  $A \in F_2(X) - R_2(X)$ . Como algo similar ocurre con  $Y$ , concluimos que  $h(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_1$  y  $h(R_2(X)) = R_2(Y)$ .

En particular,  $h(\{p\}) \in R_2(Y)$ . Podemos definir  $v$  en  $F_2(X)$  usando  $\mathcal{W}$  y también definir  $v_1$  en  $F_2(Y)$  usando  $\mathcal{W}_1$ . Como las definiciones de  $v$  y  $v_1$  son topológicas, tenemos que, para cada  $A \in F_2(X)$ ,  $v(A) = v_1(h(A))$ .

Dada  $A \in F_2(X)$ , si  $A$  tiene un punto  $x$  que no es de ramificación entonces existe un arco  $J$  de  $X$  tal que  $x \in J$ ,  $J \cap R(X) = \emptyset$  y  $J \cap A$  y, usando el Lema

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

3.17,  $v(A) = v((A - \{x\}) \cup \{y\})$ , para toda  $y \in J$ . Esto muestra que, para toda vecindad  $\mathcal{U}$  de  $A$  en  $F_2(X)$ ,  $v(A)$  coincide con  $v(A_1)$  para una infinidad de elementos  $A_1$  de  $\mathcal{U}$ .

Dada  $A \in F_2(X)$ , si  $A$  sólo consta de puntos de ramificación,  $A$  es de alguna de las formas (a) o (c) descritas en el Lema 3.18. Si  $A$  es de la forma (a) entonces los elementos  $A_1$  de  $F_2(X)$  cercanos a  $A$  y que son diferentes de  $A$  son de alguna de las formas (b) o (d) y, para cualesquiera de ellas,  $v(A_1) < v(A)$ . Por tanto,  $v$  alcanza un máximo absoluto en alguna vecindad de  $A$ . Similarmente, si  $A$  es de la forma (c), entonces  $v(A)$  alcanza un máximo absoluto en alguna vecindad de  $A$ .

Por tanto, dada  $A \in F_2(X)$ ,  $A \in R(X)$  si y sólo si  $v(A)$  alcanza un máximo absoluto en alguna vecindad de  $A$ .

Como la definición de  $v$  es topológica, lo mismo ocurre para  $v_1$ . Esto muestra que  $A \in R(X)$  si y sólo si  $h(A) \in R(Y^*)$ .

De manera que  $h(\{p\})$  es de alguna de las siguientes formas:

$h(\{p\}) = \{u\}$  o  $\{u, z\}$ , donde  $u, z \in R(Y^*)$  y son diferentes entre sí.

Analícemos el caso en que  $h(\{p\}) = \{u, z\}$ , con  $u \neq z$ , donde  $\text{ord}(p, X) = n$ ,  $\text{ord}(u, Y^*) = r$  y  $\text{ord}(z, Y^*) = s$ . Como  $v(\{p\}) = v_1(\{u, z\})$ , tenemos que

$$n + \binom{n}{2} = r \cdot s$$

De acuerdo con el Lema 3.18, los valores que toma  $v$  en los elementos de  $F_2(X)$ , cercanos a  $\{p\}$  y diferentes de  $\{p\}$  son  $n + 1$ . Por otra parte, los valores que toma  $v_1$  en los elementos de  $F_2(Y^*)$  cercanos a  $\{u, z\}$  y diferentes de  $\{u, z\}$  son  $r, s$  y 1. Como estos conjuntos de valores deben coincidir,  $r = n = s$ . Pero entonces  $n + \binom{n}{2} = n^2$ . Así que  $n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2}$ , lo cual implica que  $n = 1$ , lo que es imposible. Esto muestra que no se puede dar la igualdad  $h(\{p\}) = \{u, z\}$ .

Hemos demostrado que la única opción para  $p$  es que  $h(\{p\})$  sea de la forma  $h(\{p\}) = \{u\}$ , donde  $u \in R(Y^*)$ . ■

**Teorema 3.21.** Sean  $X$  y  $Y$  gráficas, supongamos que  $F_3(X)$  es homeomorfo a  $F_3(Y^*)$ . Entonces,  $X$  es homeomorfo a  $Y^*$ .

**Demostración.** Sea  $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y^*)$  un homeomorfismo. De acuerdo con el Lema 3.19, dado un punto  $p \in R(X)$ , existe un punto  $k(p) \in R(Y^*)$  tal que  $h(\{p\}) = \{k(p)\}$ . Entonces  $h^{-1}(\{k(p)\}) = \{p\}$ .

Esto implica que  $R(X) = \emptyset$  si y sólo si  $R(Y^*) = \emptyset$ . Si  $X$  es un arco o una curva cerrada simple, entonces  $Y^*$  también es un arco o una curva cerrada

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

simple. Sea  $S^1$  la circunferencia unitaria en el plano. Como  $F_3([0, 1])$  es una 3-celda (Teorema 6 de [5]) y  $F_3(S^1)$  es homeomorfo a la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^1$  ([6]), obtenemos que  $F_3([0, 1])$  no es homeomorfo a  $F_3(S^1)$ , de manera que  $Y$  es un arco. Si  $X$  es una curva cerrada simple, un argumento similar muestra que  $Y$  es una curva cerrada simple. Por tanto, el teorema estaría terminado en los casos en que  $X$  es un arco o una curva cerrada simple. Esto nos permite suponer, de aquí en adelante, que  $X$  no es ninguno de estos dos continuos.

Aplicando ahora el Lema 3.19 a  $h^{-1}$ , para cada  $q \in R(Y)$ , existe un punto  $k'(q) \in R(X)$  tal que  $h^{-1}(\{q\}) = \{k'(q)\}$ . Dada  $p \in R(X)$ ,  $\{k'(k(p))\} = h^{-1}(\{k(p)\}) = \{p\}$ . Así que  $k'(k(p)) = p$ . Similarmente,  $k(k'(q)) = q$  para cada  $q \in R(Y)$ . Por tanto,  $k$  es una biyección entre  $R(X)$  y  $R(Y)$ . Probaremos el resto del teorema mediante una serie de pasos.

**Afirmación 1.** Sean  $p$  y  $x \in R(X)$ . Entonces  $p$  y  $x$  son vértices adyacentes de  $X$  si y sólo si  $k(p)$  y  $k(x)$  son vértices adyacentes de  $Y$ .

Por simetría, sólo necesitamos probar la necesidad de la Afirmación 1. Como  $p$  y  $x$  son vértices adyacentes de  $X$ , existe un arista  $L$  de  $X$  que tiene como extremos a  $p$  y a  $x$ . Consideremos el conjunto abierto  $U = \langle \text{int}_X(L) \rangle_3$  de  $F_3(X)$ . De acuerdo con el Lema 3.9,  $U$  es una componente de  $F_3(X) - R_3(X)$ . Por los Lemas 3.4 y 3.1.4,  $h(F_3(X) - R_3(X)) = F_3(Y) - R_3(Y)$ . De manera que  $h(U)$  es una componente de  $F_3(Y) - R_3(Y)$ . Por el Lema 3.9,  $h(U) = \langle \text{int}_Y(J_1), \dots, \text{int}_Y(J_r) \rangle_3$  para algunas aristas  $J_1, \dots, J_r$  de  $Y$  y alguna  $r \in \{1, 2, 3\}$ . Claramente,  $\{p\}, \{x\} \in \text{cl}_{F_3(X)}(U)$ , así que  $\{k(p)\}, \{k(x)\} \in \text{cl}_{F_3(Y)}(\langle \text{int}_Y(J_1), \dots, \text{int}_Y(J_r) \rangle_3)$ . Entonces existe una sucesión de elementos  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\langle \text{int}_Y(J_1), \dots, \text{int}_Y(J_r) \rangle_3$  tal que  $\text{lim} B_n = \{k(p)\}$ . Como cada  $B_n$  interseca a  $J_1$  y  $J_1$  es compacto, tenemos que  $J_1$  interseca a  $\{k(p)\}$ . Es decir,  $k(p) \in J_1$ . Similarmente,  $k(x) \in J_1$ . Por tanto,  $k(p)$  y  $k(x)$  son adyacentes.

**Afirmación 2.** Sean  $p$  y  $x \in R(X)$  tales que son adyacentes. Entonces, el número de aristas que unen a  $p$  y a  $x$  en  $X$  es igual al número de aristas que unen a  $k(p)$  y a  $k(x)$  en  $Y$ .

Para probar la Afirmación 2, consideremos diferentes aristas  $I_1, \dots, I_n$  de  $X$  que unen a  $p$  y a  $x$ .

Tomemos una componente  $C = \langle \text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r) \rangle_3$  de  $F_3(X) - R_3(X)$  tal que  $\{p\}, \{x\} \in \text{cl}_{F_3(X)}(C)$ . Procediendo como en la prueba de la Afirmación 1 se sigue que  $p, x \in L_1 \cap \dots \cap L_r$ . Por tanto  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es un subconjunto no vacío de  $\{I_1, \dots, I_n\}$  que tiene a lo más 3 elementos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por otra parte, si  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es no vacío, está contenido en  $\{I_1, \dots, I_n\}$  y tiene a lo más 3 elementos, claramente se tiene que  $\{p\}, \{x\} \in \text{cl}_{F_3(X)}(\{\text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r)\}_3)$ .

Esto prueba que el número de componentes  $\mathcal{C}$  de  $F_3(X) - R_3(X)$  que satisfacen  $\{p\}, \{x\} \in \text{cl}_{F_3(X)}(\mathcal{C})$  es igual al número de subconjuntos no vacíos de  $\{I_1, \dots, I_n\}$  que tienen a lo más 3 elementos. Por tanto, tal número de componentes es igual a  $n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ .

Como  $h$  es un homeomorfismo, este número de componentes debe ser igual al número de componentes de  $h(F_3(X) - R_3(X)) = F_3(Y) - R_3(Y)$  que tienen a  $h(\{p\}) = \{k(p)\}$  y a  $h(\{x\}) = \{k(x)\}$  en su cerradura. El cual, simillarmente, es igual a  $m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$ , donde  $m$  es el número de aristas de  $Y$  que unen a  $k(p)$  con  $k(x)$ . Entonces,  $n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$ . Como la función de los naturales en los naturales que asigna a  $r$  el número  $r + \binom{r}{2} + \binom{r}{3}$  es estrictamente creciente, tenemos que  $n = m$ . Lo cual concluye la prueba de la Afirmación 2.

**Afirmación 3.** Si  $p$  es un punto de ramificación de  $X$  de orden  $n$ , entonces  $k(p)$  es un punto de ramificación de  $Y$  de orden  $n$ .

Para probar la Afirmación 3, sean  $\mathcal{W} = F_3(X) - R_3(X)$  y  $\mathcal{W}_1 = F_3(Y) - R_3(Y)$ . Por los Lemas 3.4 y 3.14,  $h(R_3(X)) = R_3(Y)$  y  $h(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_1$ . Podemos definir la función  $v$  en  $F_3(X)$  usando  $\mathcal{W}$  y también definir  $v_1$  en  $F_3(Y)$  usando  $\mathcal{W}_1$ . Como las definiciones de  $v$  y  $v_1$  son topológicas, tenemos que, para cada  $A \in F_3(X)$ ,  $v(A) = v_1(h(A))$ . En particular,  $v(\{p\}) = v_1(\{k(p)\})$ .

Por el Lema 3.17, si  $k(p)$  es de orden  $m$ , entonces  $n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = v(\{p\}) = v_1(\{k(p)\}) = m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$ . De manera que  $n = m$ . Esto completa la prueba de la Afirmación 3.

**Afirmación 4.** Sea  $p$  un punto de ramificación de  $X$  tal que  $\text{ord}(p, X) = n$ . Supongamos que el número de lazos de  $X$  (resp.,  $Y$ ) conteniendo a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) es  $m$  (resp.,  $m'$ ), el número de puntos terminales de  $X$  (resp.,  $Y$ ) adyacentes a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) es  $r$  (resp.,  $r'$ ) y el número de aristas de  $X$  (resp.,  $Y$ ) que unen a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) con otro punto de ramificación de  $X$  (resp.,  $Y$ ) es  $s$  (resp.,  $s'$ ). Entonces  $m = m'$ ,  $r = r'$  y  $s = s'$ .

Probaremos la Afirmación 4. Por la Afirmación 3,  $\text{ord}(k(p), Y) = n$ . De manera que  $2m + r + s = n = 2m' + r' + s'$ .

Sean  $I_1, \dots, I_t$  las diferentes aristas de  $X$  que tienen a  $p$ . Entonces  $t = m + r + s$ .

Tomemos una componente  $\mathcal{C} = (\text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r))_3$  de  $F_3(X) - R_3(X)$  tal que  $\{p\} \in \text{cl}_{F_3(X)}(\mathcal{C})$ . Procediendo como en la prueba de la

Afirmación 1 se sigue que  $p \in L_1 \cap \dots \cap L_r$ . Por tanto  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es un subconjunto no vacío de  $\{I_1, \dots, I_t\}$  que tiene a lo más 3 elementos.

Por otra parte, si  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es no vacío, está contenido en  $\{I_1, \dots, I_n\}$  y tiene a lo más 3 elementos, claramente se tiene que

$$\{p\} \in \text{cl}_{F_3(X)}(\{\text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r)\}_3).$$

Esto prueba que el número de componentes  $C$  de  $F_3(X) - R_3(X)$  que satisfacen  $\{p\} \in \text{cl}_{F_3(X)}(C)$  es igual al número de subconjuntos no vacíos de  $\{I_1, \dots, I_t\}$  que tienen a lo más 3 elementos. Por tanto tal número de componentes es igual a  $t + \binom{t}{2} + \binom{t}{3}$ .

Como  $h$  es un homeomorfismo, este número de componentes debe ser igual al número de componentes de  $h(F_3(X) - R_3(X)) = F_3(Y) - R_3(Y)$  que tienen a  $h(\{p\}) = \{k(p)\}$  en su cerradura. El cual, similarmente, es igual a  $t' + \binom{t'}{2} + \binom{t'}{3}$ , donde  $t'$  es el número de aristas de  $Y$  que tienen a  $k(p)$ . Entonces  $t + \binom{t}{2} + \binom{t}{3} = t' + \binom{t'}{2} + \binom{t'}{3}$ . Por tanto  $t = t'$ . Como  $t' = m' + r' + s'$ , concluimos que  $m + r + s = m' + r' + s'$ . Como sabíamos que  $2m + r + s = 2m' + r' + s'$ , obtenemos que  $m = m'$  y  $r + s = r' + s'$ .

Por definición  $s$  (resp.,  $s'$ ) es el número de aristas que conectan a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) con otro elemento de  $R(X)$ . Sean  $p_1, \dots, p_M$  los diferentes elementos de  $R(X)$  adyacentes a  $p$ . Por la Afirmación 1, los elementos de  $R(Y)$  adyacentes a  $k(p)$  son los puntos  $k(p_1), \dots, k(p_M)$ . Si representamos por  $s_i$  al número de aristas de  $X$  que unen a  $p$  con  $p_i$  entonces, por la Afirmación 2, el número de aristas de  $Y$  que unen a  $k(p)$  con  $k(p_i)$  también es igual a  $s_i$ . En estos términos, podemos escribir  $s = s_1 + \dots + s_M$  y  $s'$  también es igual a  $s_1 + \dots + s_M$ . Por tanto  $s = s'$ . En consecuencia  $r = r'$ . Esto completa la demostración de la Afirmación 4.

Estamos listos para probar que las gráficas  $X$  y  $Y$  son equivalentes como gráficas y que entonces ellas representan continuos homeomorfos.

Dados dos puntos de ramificación adyacentes  $p$  y  $x$  de  $X$ , definimos  $\mathcal{A}(p, x) = \{J : J \text{ es una arista de } X \text{ y } J \text{ une a } p \text{ con } x\}$  y sea  $\mathcal{A}'(p, x) = \{L : L \text{ es una arista de } Y \text{ y } L \text{ une a } k(p) \text{ con } k(x)\}$ . Por la Afirmación 2, podemos escoger una biyección  $k(p, x)$  de  $\mathcal{A}(p, x)$  sobre  $\mathcal{A}'(p, x)$ . Dado un punto de ramificación  $p$  de  $X$ , sea  $\mathcal{B}(p) = \{J : J \text{ es un lazo de } X \text{ y } p \in J\}$ ,  $\mathcal{B}'(p) = \{L : L \text{ es un lazo de } Y \text{ y } k(p) \in L\}$ ,  $\mathcal{C}(p) = \{J : J \text{ es una arista de } X \text{ y } J \text{ une a } p \text{ con un punto terminal de } X\}$  y  $\mathcal{C}'(p) = \{L : L \text{ es una arista de } Y \text{ y } L \text{ une a } k(p) \text{ con un punto terminal de } Y\}$ . Por la Afirmación 4, es posible escoger biyecciones  $k_1(p) : \mathcal{B}(p) \rightarrow \mathcal{B}'(p)$  y  $k_2(p) : \mathcal{C}(p) \rightarrow \mathcal{C}'(p)$ .

Sea  $\mathcal{S}(X)$  (resp.,  $\mathcal{S}(Y)$ ) el conjunto de aristas de  $X$  (resp.,  $Y$ ). Ya que al variar los puntos  $p$  y  $x$  obtenemos conjuntos ajenos  $\mathcal{A}(p, x)$ ,  $\mathcal{B}(p)$  y  $\mathcal{C}(p)$ , y la unión de todos ellos es  $\mathcal{S}(X)$ , podemos definir una extensión común  $K: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$  de todas las funciones de la forma  $k(p, x)$ ,  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$ , y  $K$  es una biyección.

Sea  $\mathcal{V}(X)$  (resp.,  $\mathcal{V}(Y)$ ) el conjunto de vértices de  $X$  (resp.,  $Y$ ). Ahora, extenderemos la función  $k$  (definida en el conjunto de puntos de ramificación de  $X$ ) a  $\mathcal{V}(X)$ . Dado un punto terminal  $x$  de  $X$ , existe una arista  $J$  de  $X$  que une a  $x$  con un punto de ramificación  $p$  de  $X$ . Entonces  $K(J)$  contiene exactamente un punto terminal  $y$  de  $Y$  definamos  $k(x) = y$ . Es claro que  $k$  es una biyección.

Entonces hemos definido una biyección  $K: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$  y una biyección  $k: \mathcal{V}(X) \rightarrow \mathcal{V}(Y)$  tal que  $p \in J$  si y sólo si  $k(p) \in K(J)$ . Además, para cada lazo  $L$  de  $X$ ,  $K(L)$  es un lazo de  $Y$ .

Esto prueba que las gráficas  $X$  y  $Y$  son isomorfas. Por tanto,  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . ■

**Teorema 3.22.** Sean  $X$  y  $Y$  gráficas; supongamos que  $F_2(X)$  es homeomorfo a  $F_2(Y)$ . Entonces,  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

**Demostración.** Sea  $h: F_2(X) \rightarrow F_2(Y)$  un homeomorfismo. De acuerdo con el Lema 3.20, dado un punto  $p \in R(X)$ , existe un punto  $k(p) \in R(Y)$  tal que  $h(\{p\}) = \{k(p)\}$ . Entonces  $h^{-1}(\{k(p)\}) = \{p\}$ .

Esto implica que  $R(X) = \emptyset$  si y sólo si  $R(Y) = \emptyset$ . Si  $X$  es un arco o una curva cerrada simple, entonces  $Y$  también es un arco o una curva cerrada simple. Sea  $S^1$  la circunferencia unitaria en el plano. Como  $F_2([0, 1])$  es una 2-celda y  $F_2(S^1)$  es homeomorfo a la Banda de Moebius, obtenemos que  $F_2([0, 1])$  no es homeomorfo a  $F_2(S^1)$ , de manera que  $Y$  es un arco. Si  $X$  es una curva cerrada simple, un argumento similar muestra que  $Y$  es una curva cerrada simple. Por tanto el teorema estaría terminado en los casos en que  $X$  es un arco o una curva cerrada simple. Esto nos permite suponer, de aquí en adelante, que  $X$  no es ninguno de estos dos continuos.

Aplicando ahora el Lema 3.20 a  $h^{-1}$ , para cada  $q \in R(Y)$ , nos cercioramos de que existe un punto  $k'(q) \in R(X)$  tal que  $h^{-1}(\{q\}) = \{k'(q)\}$ . Dada  $p \in R(X)$ ,  $\{k'(k(p))\} = h^{-1}(\{k(p)\}) = \{p\}$ . Así que  $k'(k(p)) = p$ . Similarmente,  $k(k'(q)) = q$  para cada  $q \in R(Y)$ . Por tanto,  $k$  es una biyección entre  $R(X)$  y  $R(Y)$ . Probaremos el resto del teorema mediante una serie de pasos.

**Afirmación 1.** Sean  $p$  y  $x \in R(X)$ . Entonces  $p$  y  $x$  son vértices adyacentes de  $X$  si y sólo si  $k(p)$  y  $k(x)$  son vértices adyacentes de  $Y$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por simetría, sólo necesitamos probar la necesidad de la Afirmación 1. Como  $p$  y  $x$  son vértices adyacentes de  $X$ , existe un arista  $L$  de  $X$  que tiene como extremos a  $p$  y a  $x$ . Consideremos el conjunto abierto  $\mathcal{U} = \langle \text{int}_X(L) \rangle_2$  de  $F_2(X)$ . De acuerdo con el Lema 3.9,  $\mathcal{U}$  es una componente de  $F_2(X) - R_2(X)$ . Por los Lemas 3.4 y 3.15,  $h(F_2(X) - R_2(X)) = F_2(Y) - R_2(Y)$ . De manera que  $h(\mathcal{U})$  es una componente de  $F_2(Y) - R_2(Y)$ . Por el Lema 3.9,  $h(\mathcal{U}) = \langle \text{int}_Y(J_1), \dots, \text{int}_Y(J_r) \rangle_2$  para algunas aristas  $J_1, \dots, J_r$  de  $Y$  y alguna  $r \in \{1, 2\}$ . Claramente,  $\{p\}$  y  $\{x\} \in \text{cl}_{F_2(X)}(\mathcal{U})$ , así que  $\{k(p)\}$  y  $\{k(x)\} \in \text{cl}_{F_2(Y)}(\langle \text{int}_Y(J_1), \dots, \text{int}_Y(J_r) \rangle_2)$ . Entonces existe una sucesión de elementos  $\{B_n\}_{n=1}^\infty$  de  $\langle \text{int}_Y(J_1), \dots, \text{int}_Y(J_r) \rangle_2$  tal que  $\lim B_n = \{k(p)\}$ . Como cada  $B_n$  interseca a  $J_1$  y  $J_1$  es compacto, tenemos que  $J_1$  interseca a  $\{k(p)\}$ . Es decir,  $k(p) \in J_1$ . Similarmente,  $k(x) \in J_1$ . Por tanto,  $k(p)$  y  $k(x)$  son adyacentes.

**Afirmación 2.** Sean  $p$  y  $x \in R(X)$  tales que son adyacentes. Entonces, el número de aristas que unen a  $p$  y a  $x$  en  $X$  es igual al número de aristas que unen a  $k(p)$  y a  $k(x)$  en  $Y$ .

Para probar la Afirmación 2, consideremos diferentes aristas  $I_1, \dots, I_n$  de  $X$  que unen a  $p$  y a  $x$ .

Tomemos una componente  $\mathcal{C} = \langle \text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r) \rangle_2$  de  $F_2(X) - R_2(X)$  tal que  $\{p\}$  y  $\{x\} \in \text{cl}_{F_2(X)}(\mathcal{C})$ . Procediendo como en la prueba de la Afirmación 1 se sigue que  $p$  y  $x \in L_1 \cap \dots \cap L_r$ . Por tanto  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es un subconjunto no vacío de  $\{I_1, \dots, I_n\}$  que tiene a lo más 2 elementos.

Por otra parte, si  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es no vacío, está contenido en  $\{I_1, \dots, I_n\}$  y tiene a lo más 2 elementos, claramente se tiene que  $\{p\}$  y  $\{x\} \in \text{cl}_{F_2(X)}(\langle \text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r) \rangle_2)$ .

Esto prueba que el número de componentes  $\mathcal{C}$  de  $F_2(X) - R_2(X)$  que satisfacen  $\{p\}, \{x\} \in \text{cl}_{F_2(X)}(\mathcal{C})$  es igual al número de subconjuntos no vacíos de  $\{I_1, \dots, I_n\}$  que tienen a lo más 2 elementos. Por tanto, tal número de componentes es igual a  $n + \binom{n}{2}$ .

Como  $h$  es un homeomorfismo, este número de componentes debe ser igual al número de componentes de  $h(F_2(X) - R_2(X)) = F_2(Y) - R_2(Y)$  que tienen a  $h(\{p\}) = \{k(p)\}$  y a  $h(\{x\}) = \{k(x)\}$  en su cerradura. El cual, similarmente, es igual a  $m + \binom{m}{2}$ , donde  $m$  es el número de aristas de  $Y$  que unen a  $k(p)$  con  $k(x)$ . Entonces  $n + \binom{n}{2} = m + \binom{m}{2}$ . Como la función de los naturales en los naturales que asigna a  $r$  el número  $r + \binom{r}{2}$  es estrictamente creciente, tenemos que  $n = m$ . Lo cual concluye la prueba de la Afirmación 2.

**Afirmación 3.** Si  $p$  es un punto de ramificación de  $X$  de orden  $n$ ,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

entonces  $k(p)$  es un punto de ramificación de  $Y$  de orden  $n$ .

Para probar la Afirmación 3, sean  $\mathcal{W} = F_2(X) - R_2(X)$  y  $\mathcal{W}_1 = F_2(Y) - R_2(Y)$ . Por los Lemas 3.4 y 3.15,  $h(R_2(X)) = R_2(Y)$  y  $h(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_1$ . Podemos definir la función  $v$  en  $F_2(X)$  usando  $\mathcal{W}$  y también definir  $v_1$  en  $F_2(Y)$  usando  $\mathcal{W}_1$ . Como las definiciones de  $v$  y  $v_1$  son topológicas, tenemos que, para cada  $A \in F_2(X)$ ,  $v(A) = v_1(h(A))$ . En particular,  $v(\{p\}) = v_1(\{k(p)\})$ .

Por el Lema 3.18, si  $k(p)$  es de orden  $m$ , entonces  $n + \binom{n}{2} = v(\{p\}) = v_1(\{k(p)\}) = m + \binom{m}{2}$ . De manera que  $n = m$ . Esto completa la prueba de la Afirmación 3.

**Afirmación 4.** Sea  $p$  un punto de ramificación de  $X$  tal que  $\text{ord}(p, X) = n$ . Supongamos que el número de lazos de  $X$  (resp.,  $Y$ ) conteniendo a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) es  $m$  (resp.,  $m'$ ), el número de puntos terminales de  $X$  (resp.,  $Y$ ) adyacentes a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) es  $r$  (resp.,  $r'$ ) y el número de aristas de  $X$  (resp.,  $Y$ ) que unen a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) con otro punto de ramificación de  $X$  (resp.,  $Y$ ) es  $s$  (resp.,  $s'$ ). Entonces  $m = m'$ ,  $r = r'$  y  $s = s'$ .

Probaremos la Afirmación 4. Por la Afirmación 3,  $\text{ord}(k(p), Y) = n$ . De manera que  $2m + r + s = n = 2m' + r' + s'$ .

Sean  $I_1, \dots, I_t$  las diferentes aristas de  $X$  que tienen a  $p$ . Entonces  $t = m + r + s$ .

Tomemos una componente  $C = \langle \text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r) \rangle_2$  de  $F_2(X) - R_2(X)$  tal que  $\{p\} \in \text{cl}_{F_2(X)}(C)$ . Procediendo como en la prueba de la Afirmación 1 se sigue que  $p \in L_1 \cap \dots \cap L_r$ . Por tanto  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es un subconjunto no vacío de  $\{I_1, \dots, I_t\}$  que tiene a lo más 2 elementos.

Por otra parte, si  $\{L_1, \dots, L_r\}$  es no vacío, está contenido en  $\{J_1, \dots, J_n\}$  y tiene a lo más 2 elementos, claramente se sigue que

$$\{p\} \in \text{cl}_{F_2(X)}(\langle \text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_r) \rangle_2).$$

Esto prueba que el número de componentes  $C$  de  $F_2(X) - R_2(X)$  que satisfacen  $\{p\} \in \text{cl}_{F_2(X)}(C)$  es igual al número de subconjuntos no vacíos de  $\{I_1, \dots, I_t\}$  que tienen a lo más 2 elementos. Por tanto tal número de componentes es igual a  $t + \binom{t}{2}$ .

Como  $h$  es un homeomorfismo, este número de componentes debe ser igual al número de componentes de  $h(F_2(X) - R_2(X)) = F_2(Y) - R_2(Y)$  que tienen a  $h(\{p\}) = \{k(p)\}$  en su cerradura. El cual, similarmente, es igual a  $t' + \binom{t'}{2}$ , donde  $t'$  es el número de aristas de  $Y$  que tienen a  $k(p)$ . Entonces  $t + \binom{t}{2} = t' + \binom{t'}{2}$ . Por tanto  $t = t'$ . Y como  $t' = m' + r' + s'$ . Concluimos que

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



$m + r + s = m' + r' + s'$ . Y como sabíamos que  $2m + r + s = 2m' + r' + s'$ . Obtenemos que  $m = m'$  y  $r + s = r' + s'$ .

Por definición  $s$  (resp.,  $s'$ ) es el número de aristas que conectan a  $p$  (resp.,  $k(p)$ ) con otro elemento de  $R(X)$ . Sean  $p_1, \dots, p_M$  los diferentes elementos de  $R(X)$  adyacentes a  $p$ . Por la Afirmación 1, los elementos de  $R(Y)$  adyacentes a  $k(p)$  son los puntos  $k(p_1), \dots, k(p_M)$ . Si representamos por  $s_i$  al número de aristas de  $X$  que unen a  $p$  con  $p_i$  entonces, por la Afirmación 2, el número de aristas de  $Y$  que unen a  $k(p)$  con  $k(p_i)$  también es igual a  $s_i$ . En estos términos, podemos escribir  $s = s_1 + \dots + s_M$  y  $s'$  también es igual a  $s_1 + \dots + s_M$ . Por tanto  $s = s'$ . En consecuencia  $r = r'$ . Esto completa la demostración de la Afirmación 4.

Estamos listos para probar que las gráficas  $X$  y  $Y$  son equivalentes como gráficas y que entonces ellas representan continuos homeomorfos.

Dados dos puntos de ramificación adyacentes  $p$  y  $x$  de  $X$ , definimos  $\mathcal{A}(p, x) = \{J : J \text{ es una arista de } X \text{ y } J \text{ une a } p \text{ con } x\}$  y sea  $\mathcal{A}'(p, x) = \{L : L \text{ es una arista de } Y \text{ y } L \text{ une a } k(p) \text{ con } k(x)\}$ . Por la Afirmación 2, podemos escoger una biyección  $k(p, x)$  de  $\mathcal{A}(p, x)$  sobre  $\mathcal{A}'(p, x)$ . Dado un punto de ramificación  $p$  de  $X$ , sea  $\mathcal{B}(p) = \{J : J \text{ es un lazo de } X \text{ y } p \in J\}$ ,  $\mathcal{B}'(p) = \{L : L \text{ es un lazo de } Y \text{ y } k(p) \in L\}$ ,  $\mathcal{C}(p) = \{J : J \text{ es una arista de } X \text{ y } J \text{ une a } p \text{ con un punto terminal de } X\}$  y  $\mathcal{C}'(p) = \{L : L \text{ es una arista de } Y \text{ y } L \text{ une a } k(p) \text{ con un punto terminal de } Y\}$ . Por la Afirmación 4, es posible escoger biyecciones  $k_1(p) : \mathcal{B}(p) \rightarrow \mathcal{B}'(p)$  y  $k_2(p) : \mathcal{C}(p) \rightarrow \mathcal{C}'(p)$ .

Sea  $\mathcal{S}(X)$  (resp.,  $\mathcal{S}(Y)$ ) el conjunto de aristas de  $X$  (resp.,  $Y$ ). Ya que al variar los puntos  $p$  y  $x$  obtenemos conjuntos ajenos  $\mathcal{A}(p, x)$ ,  $\mathcal{B}(p)$  y  $\mathcal{C}(p)$ , y la unión de todos ellos es  $\mathcal{S}(X)$ , podemos definir una extensión común  $K : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$  de todas las funciones de la forma  $k(p, x)$ ,  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$ , y  $K$  es una biyección.

Sea  $\mathcal{V}(X)$  (resp.,  $\mathcal{V}(Y)$ ) el conjunto de vértices de  $X$  (resp.,  $Y$ ). Ahora, extenderemos la función  $k$  (definida en el conjunto de puntos de ramificación de  $X$ ) a  $\mathcal{V}(X)$ . Dado un punto terminal  $x$  de  $X$ , existe una arista  $J$  de  $X$  que une a  $x$  con un punto de ramificación  $p$  de  $X$ . Entonces  $K(J)$  contiene exactamente un punto terminal  $y$  de  $Y$ , definamos  $k(x) = y$ . Es claro que  $k$  es una biyección.

Entonces hemos definido una biyección  $K : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$  y una biyección  $k : \mathcal{V}(X) \rightarrow \mathcal{V}(Y)$  tal que  $p \in J$  si y sólo si  $k(p) \in K(J)$ . Además, para cada lazo  $L$  de  $X$ ,  $K(L)$  es un lazo de  $Y$ .

Esto prueba que las gráficas  $X$  y  $Y$  son isomorfas. Por tanto,  $X$  es

homeomorfo a  $Y$ . ■

**Corolario 3.23** (E. Castañeda y A. Illanes). Sean  $X$  y  $Y$  gráficas, supongamos que  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ . Entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

### 3.5 Productos simétricos únicos

**Lema 3.24.** Si  $X$  es una gráfica, entonces  $\mathcal{E}_n(X)$  es un subconjunto abierto denso de  $F_n(X)$ , con un número finito de arco componentes.

**Demostración.** Si  $n = 2$  o  $3$ , por los Lemas 3.4, 3.14 y 3.15,  $\mathcal{E}_n(X) = F_n(X) - R_n(X)$ . Si  $n \geq 4$ , por los Lemas 3.4, 3.10 y 3.11,  $\mathcal{E}_n(X) = F_n(X) - (F_{n-1}(X) \cup R_n(X))$ . Por tanto, en ambos casos, el conjunto  $\mathcal{G}_n(X) = F_n(X) - (F_{n-1}(X) \cup R_n(X))$  está contenido en  $\mathcal{E}_n(X)$ . Por definición  $F_n(X) - R_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap R(X) = \emptyset\} = \{A \in F_n(X) : A \subset X - R(X)\}$ . Claramente, éste es un conjunto abierto en  $F_n(X)$  y, por tanto,  $R_n(X)$  es cerrado en  $F_n(X)$ . Recordemos que  $F_{n-1}(X)$  es compacto.

De aquí se sigue que  $\mathcal{E}_n(X)$  es abierto en  $F_n(X)$ .

Dada  $A \in F_n(X)$ , como  $X - R(X)$  es un abierto denso en  $X$ , existe un elemento  $B \in F_n(X)$  tal que  $B \subset X - R(X)$  y  $B$  está tan cercano a  $A$  como queramos, completándole puntos a  $B$ , lo podemos conseguir de manera que  $B$  tiene  $n$  puntos y entonces  $B \in \mathcal{G}_n(X)$ . Por tanto  $\mathcal{G}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ . Como  $\mathcal{G}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$ , concluimos que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

Como  $\mathcal{E}_n(X)$  es un abierto en un continuo localmente conexo, las componentes y las arco componentes de  $\mathcal{E}_n(X)$  coinciden.

En el caso en que  $n = 2$  o  $3$ ,  $\mathcal{E}_n(X) = F_n(X) - R_n(X)$ . Por el Lema 3.9 las componentes de  $F_n(X) - R_n(X)$  son todos los conjuntos de la forma  $\langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_r) \rangle_n$ , donde  $I_1, \dots, I_r$  son aristas de  $X$ , diferentes entre sí y el número  $r$  varía en el conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . El número de tales posibles combinaciones claramente es finito. Por tanto, en este caso,  $\mathcal{E}_n(X)$  tiene un número finito de componentes.

Supongamos ahora que  $n \geq 4$ .

Dada  $A \in \mathcal{E}_n(X)$  sabemos que  $A \cap R(X) = \emptyset$  (véase Lema 3.4), por lo que existen aristas  $J_1, \dots, J_m$  de  $X$  tales que  $A \subset (J_1 \cup \dots \cup J_m) - R(X)$  y  $A \cap J_i \neq \emptyset$  para toda  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Es decir,  $A \in (\text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_m))_n$ . Ahora si  $B \in (\text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_m))_n$  es tal que  $|A \cap \text{int}_X(J_i)| = |B \cap \text{int}_X(J_i)|$  para toda  $i \in \{1, \dots, m\}$ , entonces  $B$  también tiene  $n$  elementos, por lo que

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$B \in \mathcal{E}_n(X)$ . Veremos que  $A$  y  $B$  están en la misma componente de  $\mathcal{E}_n(X)$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , podemos identificar a  $\text{int}_X(J_i)$  con un subintervalo de  $[0, 1]$ . Si  $A \cap \text{int}_X(J_i) = \{x_1^{(i)}, \dots, x_{r_i}^{(i)}\}$ , donde  $x_1^{(i)} < \dots < x_{r_i}^{(i)}$  y  $B \cap \text{int}_X(J_i) = \{y_1^{(i)}, \dots, y_{r_i}^{(i)}\}$ , donde  $y_1^{(i)} < \dots < y_{r_i}^{(i)}$ . Simplemente definimos  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}_n(X)$  por:

$$\alpha(t) = \bigcup \{ \{ (1-t)x_1^{(i)} + ty_1^{(i)}, \dots, (1-t)x_{r_i}^{(i)} + ty_{r_i}^{(i)} \} : i \in \{1, \dots, m\} \}.$$

Claramente  $\alpha$  está bien definida,  $\alpha(0) = A$  y  $\alpha(1) = B$ .

Ahora ya podemos ver que  $\mathcal{E}_n(X)$  tiene un número finito de componentes. Para empezar, sólo hay un número finito de conjuntos de la forma  $\langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_m) \rangle_n$ , donde  $m \leq n$  y cada  $J_i$  es una arista de  $X$ . Dado un conjunto de la forma  $\langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_m) \rangle_n$ , sólo hay un número finito de maneras de escribir a  $n$  como suma de  $m$  números naturales positivos,  $n = r_1 + \dots + r_m$  (en orden). Dada una suma de la forma  $n = r_1 + \dots + r_m$ , por lo que vimos en el párrafo anterior, cualquier conjunto de la forma  $\{A \in \mathcal{E}_n(X) : A \in \langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_m) \rangle_n \text{ y } |A \cap \text{int}_X(J_i)| = r_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}$  es un subconjunto conexo de  $\mathcal{E}_n(X)$ , la unión de todos ellos es  $\mathcal{E}_n(X)$  y sólo hay un número finito. Por tanto  $\mathcal{E}_n(X)$  tiene un número finito de componentes. ■

**Teorema 3.25.** Sea  $X$  una gráfica y  $Z$  un continuo tales que  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Z)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Z$ .

**Demostración.** De acuerdo con el Corolario 3.23, sólo tenemos que probar que  $Z$  también es una gráfica. Por la propiedad (a) de la página 877 de [5],  $F_n(X)$ ,  $F_n(Z)$  y  $Z$  son localmente conexos. Supongamos, por el contrario, que  $Z$  no es una gráfica. Por el Lema 3.7,  $\mathcal{E}_n(Z)$  no puede ser un subconjunto abierto y denso de  $F_n(Z)$ , con un número finito de arco componentes. Pero  $\mathcal{E}_n(X)$  sí es un subconjunto abierto denso de  $F_n(X)$ , con un número finito de arco componentes y, por la forma en que se definió  $\mathcal{E}_n(X)$ , si  $h$  es un homeomorfismo de  $F_n(X)$  sobre  $F_n(Z)$  entonces  $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Z)$ , así que  $\mathcal{E}_n(Z)$  debería ser un subconjunto abierto denso de  $F_n(Z)$ , con un número finito de arco componentes. Esto es absurdo e implica que  $Z$  es una gráfica finita. ■

**Pregunta 3.26.** ¿Existirán una gráfica  $X$ , un continuo  $Z$  y números  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_m(Z)$  pero  $X$  no sea homeomorfo a  $Z$ ? Por el Teorema 3.25, si la respuesta a esta pregunta es afirmativa entonces  $n$  no puede ser igual a  $m$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 4

# Comparando con conos y productos

### 4.1 Introducción

El problema de determinar los continuos de dimensión finita tales que su hiperespacio  $C(X)$  es homeomorfo a su cono ha sido extensamente estudiado. Esto se puede ver en [2], [9], [18], [21], [24], [26], [28], [30], [35], [38], [39], [40] y [43]). Una discusión detallada sobre este tema puede ser encontrada en las secciones 7 y 80 de [25]. El caso en que  $X$  es hereditariamente descomponible fue resuelto completamente por S. B. Nadler, Jr., en [35]. Él mostró que existen exactamente ocho de esos continuos que se ilustran en la figura de la página 63 de [25]. En el caso en que  $X$  contiene un subcontinuo indescornpible, se sabe que  $Y$  es único (ver el Teorema 80.12 de [25]), que  $X - Y$  es conexo por trayectorias y que  $Y$  tiene la propiedad del cono = hiperespacio. Recientemente, A. Illanes dio una caracterización de los continuos que tienen la propiedad del cono = hiperespacio en [21].

Los continuos  $X$  para los que existe un continuo de dimensión finita  $Z$  tales que  $C(X)$  es homeomorfo al cono de  $Z$  han sido descritos completamente. Usando un resultado previo de S. Macías [30], A. Illanes y M. de J. López dieron una lista de tales continuos, cuando  $X$  es hereditariamente descomponible ([24]). El caso en que  $X$  no es hereditariamente descomponible fue completamente resuelto en [28].

Con respecto a los productos, A. Illanes mostró que un continuo  $X$  tiene la propiedad de que  $C(X)$  es homeomorfo al producto de dos continuos no

degenerados y de dimensión finita si y sólo si  $X$  es un arco o una curva cerrada simple ([25, Teorema 79.2]).

En este capítulo consideramos estas problemáticas para el hiperespacio  $F_2(X)$ . Probamos que:

**Teorema 4.12.** Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $F_2(X)$  es homeomorfo al producto de dos continuos no degenerados si y sólo si  $X$  es un arco.

**Teorema 4.15.** Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $F_2(X)$  es homeomorfo al cono sobre un continuo  $Z$  si y sólo si  $X$  es un  $n$ -odo simple o un arco.

## 4.2 Resultados

**Lema 4.1.** Sean  $T_n$  y  $T_m$  un  $n$ -odo y un  $m$ -odo simples, respectivamente. Si  $2 \leq m < n$ , entonces  $T_n \times [0, 1]$  no se puede encajar en  $T_m \times [0, 1]$ .

**Demostración.** Sean  $X = T_n \times [0, 1]$  y  $Y = T_m \times [0, 1]$ , ponemos  $T_n = pa_1 \cup \dots \cup pa_n$  y  $T_m = qb_1 \cup \dots \cup qb_m$ , donde los conjuntos  $pa_i$  y  $qb_j$  son arcos,  $pa_i \cap pa_j = \{p\}$ , si  $i \neq j$  y  $qb_k \cap qb_r = \{q\}$ , si  $k \neq r$ . Sean  $C_X = \{p\} \times [0, 1]$ ,  $C'_X = \{p\} \times (0, 1)$ ,  $C_Y = \{q\} \times [0, 1]$  y  $C'_Y = \{q\} \times (0, 1)$ . Supongamos que existe un encaje  $h: X \rightarrow Y$ .

**Afirmación.**  $h(C_Y) \subset C_Y$ .

Suponga por el contrario que existe un punto  $(p, t) \in C_X$  tal que  $h(p, t) = (y, s)$  y  $y \neq q$ . Podemos suponer que  $y \in qb_1 - \{q\}$ . Por continuidad, existe un  $n$ -odo simple  $T \subset T_n$  y un arco  $J \subset [0, 1]$  tal que  $(p, t) \in T \times J$  y  $h(T \times J) \subset (qb_1 - \{q\}) \times [0, 1]$ . Esto implica que el producto  $T \times J$  puede ser encajado en  $[0, 1]^2$ . Esto contradice el Lema 2.16 y completa la prueba de la afirmación.

Fijemos un punto  $x_0 \in C'_X$ . Ya que  $h(C'_X)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$  y está contenido en el arco  $C_Y$ , tenemos que  $C_Y - h(C'_X)$  es compacto y  $x_0 \notin h^{-1}(C_Y - h(C'_X))$ . Entonces existe un  $n$ -odo simple  $T \subset T_n$  y un arco  $J \subset (0, 1)$  tal que  $x_0 \in T \times J \subset X - h^{-1}(C_Y - h(C'_X))$ . Sea  $D = \{p\} \times J$ . Dado un punto  $x \in (T \times J) - D$ , se tiene que  $h(x) \notin C_Y - h(C'_X)$ . En efecto, pues si  $h(x) \in C_Y$ , entonces  $h(x) \in h(C'_X)$ . De manera que  $x \in C'_X \cap (T \times J) = D$ . Esto contradice la elección de  $x$  y prueba que  $h(x) \notin C_Y$ . Hemos demostrado que  $h((T \times J) - D) \subset Y - C_Y$ . Supongamos que  $T = pc_1 \cup \dots \cup pc_n$ , donde cada  $c_i \in pa_i - \{p\}$ . Ya que las componentes de  $h((T \times J) - D)$  son los conjuntos  $h((pc_1 - \{p\}) \times J), \dots, h((pc_n - \{p\}) \times J)$  y las componentes de  $Y - C_Y$  son

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

los conjuntos (separados)  $(qb_1 - \{q\}) \times [0, 1], \dots, (qb_m - \{q\}) \times [0, 1]$  y  $m < n$ , podemos suponer que  $h((pc_1 - \{p\}) \times J) \cup h((pc_2 - \{p\}) \times J) \subset (qb_1 - \{q\}) \times [0, 1]$  y  $h((pc_3 - \{p\}) \times J) \subset ((qb_1 - \{q\}) \cup (qb_2 - \{q\})) \times [0, 1]$ . Así que

$$h(((pc_1 - \{p\}) \cup (pc_2 - \{p\}) \cup (pc_3 - \{p\})) \times J) \subset (qb_1 \cup qb_2) \times [0, 1].$$

Por tanto,  $h((pc_1 \cup pc_2 \cup pc_3) \times J) \subset (qb_1 \cup qb_2) \times [0, 1]$ . Esto es imposible ya que el producto de un triodo simple y un arco no se puede encajar en el plano (Lema 2.16). Con esto, la prueba del lema queda completa. ■

**Lema 4.2.** Sean  $T_n$  y  $T_m$  un  $n$ -odo y un  $m$ -odo simples, respectivamente. Entonces  $T_n \times T_m$  es homeomorfo al cono sobre la gráfica completa bipartita  $K_{n,m}$ .

**Demostración.** Supongamos que  $T_n = \bigcup_{i=1}^n \theta e_i$  y  $T_m = \bigcup_{j=1}^m \theta' e'_j$ , donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$  son las respectivas bases canónicas de los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente. Supondremos que  $\{e_1, \dots, e_n\} \cap \{e'_1, \dots, e'_m\} = \emptyset$ , además  $\theta$  y  $\theta'$  son los respectivos orígenes de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , además  $\theta e_i$  y  $\theta' e'_j$  son los segmentos que unen a  $\theta$  con  $e_i$  y  $\theta'$  con  $e'_j$ , respectivamente.

Sea  $Z = \{(x, y) \in T_n \times T_m : x \in \{e_1, \dots, e_n\} \text{ o } y \in \{e'_1, \dots, e'_m\}\}$ .

**Afirmación.**  $Z$  es homeomorfo a  $K_{n,m}$ .

Para probar esta afirmación, necesitamos definir los vértices y las aristas de  $Z$ . Sean  $\mathcal{U} = \{(e_i, \theta') : i \in \{1, \dots, n\}\}$  y  $\mathcal{V} = \{(\theta, e'_j) : j \in \{1, \dots, m\}\}$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , sea

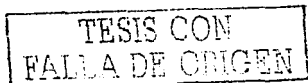
$$A_{i,j} = (\{e_i\} \times \theta' e'_j) \cup (\theta e_i \times \{e'_j\}).$$

Claramente,  $A_{i,j}$  es un arco que une a  $(e_i, \theta')$  con  $(\theta, e'_j)$ . Ahora supongamos que existe un punto  $(x, y) \in A_{i,j} \cap A_{k,r}$  y  $(i, j) \neq (k, r)$ . Consideramos cuatro casos:

Caso 1.  $(x, y) \in (\{e_i\} \times \theta' e'_j) \cap (\{e_k\} \times \theta' e'_r)$ . Entonces  $e_i = e_k$  y  $y \in \theta' e'_j \cap \theta' e'_r$ . De modo que,  $i = k$ ,  $j \neq r$  y  $y = \theta'$ . Así que  $(x, y) = (e_i, \theta')$ .

Caso 2.  $(x, y) \in (\{e_i\} \times \theta' e'_j) \cap (\theta e_k \times \{e'_r\})$ . Entonces  $x = e_i \in \theta e_k$  y  $y = e'_r \in \theta' e'_j$ . De manera que  $e_i = e_k$  y  $e'_r = e'_j$ . Así que  $i = k$  y  $r = j$ , lo que es una contradicción. Por tanto, este caso es imposible.

Caso 3.  $(x, y) \in (\theta e_i \times \{e'_j\}) \cap (\theta e_k \times \{e'_r\})$ . Como en el Caso 1, se llega a que  $(x, y) = (\theta, e'_j) = (\theta, e'_r)$ .



Caso 4.  $(x, y) \in (\theta e_i \times \{e'_j\}) \cap (\{e_k\} \times \theta' e'_r)$ . Como en el Caso 2, se sigue que también el Caso 4 es imposible.

Por tanto, dos arcos diferentes  $\mathcal{A}_{i,j}$  y  $\mathcal{A}_{k,r}$  sólo se pueden intersectar en sus extremos.

Hemos mostrado entonces que el conjunto de vértices  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  y el conjunto de aristas  $\mathcal{A}_{i,j}$  forman una gráfica completa bipartita la cual es equivalente a  $K_{n,m}$ .

Ya que  $Z = \bigcup \{\mathcal{A}_{i,j} : i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } j \in \{1, \dots, m\}\}$ , la afirmación queda probada.

Ahora tomamos  $F : \text{cono}(Z) \rightarrow T_n \times T_m$  dada por  $F((x, y), t) = ((1-t)x, (1-t)y)$ . Claramente,  $F$  es continua. Para mostrar que  $F$  es inyectiva, supongamos que  $F((x, y), t) = F((u, v), s)$ . Entonces  $(1-t)x = (1-s)u$  y  $(1-t)y = (1-s)v$ . De la definición de  $Z$ , podemos suponer que  $x = e_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Consideremos cuatro casos:

Caso 1.  $u = e_k$  para alguna  $k \in \{1, \dots, n\}$  y  $t \neq 1$ . Ya que  $(1-t)e_i = (1-s)e_k$ , se sigue que  $t = s$  y  $e_i = e_k$ . Ya que  $(1-t)y = (1-s)v$ , concluimos que  $y = v$ .

Caso 2.  $u = e_k$  para alguna  $k \in \{1, \dots, n\}$  y  $t = 1$ . Ya que  $(1-t)e_i = (1-s)e_k$ , se sigue que  $s = 1$ . Entonces,  $((x, y), t)$  y  $((u, v), s)$  representan el mismo punto en  $\text{cono}(Z)$ .

Caso 3.  $v = e'_r$  para alguna  $r \in \{1, \dots, m\}$  y  $t \neq 1$ . Ya que  $(1-t)e_i = (1-s)u$ ,  $|(1-t)e_i| = |(1-s)u|$ . Esto implica que  $1-t \leq 1-s$ . Por otra parte,  $|(1-t)y| = |(1-s)v|$  esto implica que  $1-t \geq 1-s$ . Entonces  $s = t$ . Así que  $u = e_i = x$  y  $y = e'_r = v$ .

Caso 4.  $v = e'_r$  para alguna  $r \in \{1, \dots, m\}$  y  $t = 1$ . Entonces  $\theta = (1-t)y = (1-s)e'_r$ . Esto implica que  $s = 1$ . De manera que,  $((x, y), t)$  y  $((u, v), s)$  representan el mismo punto de  $\text{cono}(Z)$ .

Ahora mostraremos que  $F$  es suprayectiva. Sea  $(x, y) \in T_n \times T_m$ . Entonces  $x = ae_i$  y  $y = be'_j$  para algunas  $a, b \in [0, 1]$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Podemos suponer que  $a \leq b$ . Si  $b = 0$ , entonces  $(x, y) = (x, \theta) = F((e_i, \theta), (1-a))$ . Si  $b \neq 0$ , entonces  $(x, y) = F(((a/b)e_i, e'_j), (1-b))$ . Esto completa la prueba de que  $F$  es suprayectiva. Por tanto,  $F$  es un homeomorfismo y termina la prueba del lema. ■

**Convenciones 4.3.** Dados unos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  y puntos  $p \in X$  y  $q \in Y$ , escribimos  $(X, p) \approx (Y, q)$  si existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(p) = q$ . Dado un  $n$ -odo  $T_n$  con corazón  $z$  y puntos



terminales  $z_1, \dots, z_n$ , sea  $Z_n = \{A \in F_2(T_n) : z_i \in A \text{ para alg\u00fan } i \in \{1, \dots, n\}\}$ . En el Lema 2.3 se demostr\u00f3 que  $F_2(T_n)$  es homeomorfo a  $\text{cono}(Z_n)$ .

**Lema 4.4.** Sean  $X$  una gr\u00e1fica y  $p, q \in X$ . Entonces el elemento  $A = \{p, q\}$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  en  $F_2(X)$  con la propiedad de que para cada  $U \in \mathcal{B}$ :

- (a) si  $\text{ord}(p, X) = 1$  o  $2$  y  $\text{ord}(q, X) = 1$ , entonces  $(U, A) \approx ([0, 1]^2, (0, 0))$ ,
- (b) si  $\text{ord}(p, X) = 2$ ,  $p \neq q$  y  $\text{ord}(q, X) = 2$ , entonces  $(U, A) \approx ([0, 1]^2, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ ,
- (c) si  $\text{ord}(p, X) = 2$  y  $p = q$ , entonces  $(U, A) \approx ([0, 1]^2, (0, 0))$ ,
- (d) si  $\text{ord}(p, X) = 1$  y  $\text{ord}(q, X) = m \geq 3$ , entonces  $(U, A) \approx ([0, 1] \times T_m, (0, z))$ , donde  $T_m$  es un  $m$ -odo simple y  $z$  es el coraz\u00f3n de  $T_m$ ,
- (e) si  $\text{ord}(p, X) = 2$  y  $\text{ord}(q, X) = m \geq 3$ , entonces  $(U, A) \approx ([0, 1] \times T_m, (\frac{1}{2}, z))$ , donde  $T_m$  es un  $m$ -odo simple y  $z$  es el coraz\u00f3n de  $T_m$ ,
- (f) si  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ ,  $p \neq q$  y  $\text{ord}(q, X) = m \geq 3$ , entonces  $(U, A) \approx (\text{cono}(K_{n,m}), v)$ , donde  $v$  es el v\u00e9rtice de  $\text{cono}(K_{n,m})$ ,
- (g) si  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ , y  $p = q$ , entonces  $(U, A) \approx (\text{cono}(Z_n), v)$ , donde  $v$  es el v\u00e9rtice de  $\text{cono}(Z_n)$  y  $Z_n$  fue descrito en Ajenas 4.3.

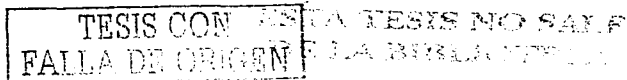
**Demostraci\u00f3n.** Dados puntos  $p, q \in X$  tales que  $p \neq q$ , existen bases de vecindades cerradas y conexas  $K$  y  $L$  de  $p$  y  $q$ , respectivamente, en  $X$  tales que: (i) si  $\text{ord}(p, X) = 1$ , entonces  $K$  es un arco y  $p$  es un punto terminal de  $K$  (ii) si  $\text{ord}(p, X) = 2$ , entonces  $K$  es un arco y  $p$  no es un punto terminal de  $K$  (iii) si  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ , entonces  $K$  es un  $n$ -odo simple y  $p$  es el coraz\u00f3n de  $K$ . El conjunto  $L$  satisface propiedades an\u00e1logas, dependiendo de  $\text{ord}(q, X)$ . Notemos que podemos pedir que  $K$  y  $L$  son ajenas, as\u00ed que  $K \times L$  es homeomorfo a la vecindad  $(K, L)_2$  de  $A = \{p, q\}$  en  $F_2(X)$  (con el homeomorfismo que env\u00eda al par  $(x, y)$  en el conjunto  $\{x, y\}$ ).

En el caso de que  $p = q$ , podemos escoger una base de vecindades  $K$  de  $p$  como en el p\u00e1rrafo anterior y, en este caso, el conjunto  $(K)_2 = F_2(K)$  es una vecindad de  $A = \{p\}$ .

Con las observaciones de los p\u00e1rrafos anteriores y el Lema 4.2, la demostraci\u00f3n de este lema ya es clara. ■

El siguiente lema nos da una descripci\u00f3n de las vecindades de un punto en el producto de dos gr\u00e1ficas. La demostraci\u00f3n es inmediata ((e) se sigue del Lema 4.2).

**Lema 4.5.** Sean  $Y$  y  $Z$  gr\u00e1ficas  $y \in Y$  y  $z \in Z$ . Entonces el elemento  $A = (y, z)$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  con la propiedad de que, para cada  $U \in \mathcal{B}$ :



- (a) si  $\text{ord}(y, Y) = 1$  o  $2$  y  $\text{ord}(z, Z) = 1$ , entonces  $(\mathcal{U}, A) \approx ([0, 1]^2, (0, 0))$ .  
 (b) si  $\text{ord}(y, Y) = 2$  y  $\text{ord}(z, Z) = 2$ , entonces  $(\mathcal{U}, A) \approx ([0, 1]^2, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ .  
 (c) si  $\text{ord}(y, Y) = 1$  y  $\text{ord}(z, Z) = m \geq 3$ , entonces  $(\mathcal{U}, A) \approx ([0, 1] \times T_m, (0, z))$ , donde  $T_m$  es un  $m$ -odo simple y  $z$  es el corazón de  $T_m$ .  
 (d) si  $\text{ord}(y, Y) = 2$  y  $\text{ord}(z, Z) = m \geq 3$ , entonces  $(\mathcal{U}, A) \approx ([0, 1] \times T_m, (\frac{1}{2}, z))$ , donde  $T_m$  es un  $m$ -odo simple y  $z$  es el corazón de  $T_m$ .  
 (e) si  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$  y  $\text{ord}(q, X) = m \geq 3$ , entonces  $(\mathcal{U}, A) \approx (\text{cono}(K_{n,m}), v)$ , donde  $v$  es el vértice de  $\text{cono}(K_{n,m})$ .

**Lema 4.6.** Supongamos que  $T_3$  y  $T_n$  denotan un triodo y un  $n$ -odo simples, respectivamente. Entonces  $F_2(T_3)$  no se puede encajar en  $T_n \times [0, 1]$ .

**Demostración.** Supongamos, por el contrario, que existe un encaje  $h: F_2(T_3) \rightarrow T_n \times [0, 1]$ . Sean  $p$  el corazón de  $T_3$  y  $T = \{\{p, x\} \in F_2(T_3) : x \in T_3\}$ . Notemos que  $T$  es homeomorfo a  $T_3$ . Sea  $z$  el corazón de  $T_n$ . Dado  $x \in T_3 - \{p\}$ , existe un arco  $J$  en  $T_3$  tal que  $J$  es una vecindad de  $x$  y  $p \notin J$ . De modo que existe un subtriodo simple  $S$  de  $T_3$  tal que  $p$  es el corazón de  $S$  y  $S \cap J = \emptyset$ . Entonces cada vecindad de  $\{p, x\}$  en  $F_2(T_3)$  que está contenido en  $\langle T, J \rangle_3$  contiene una copia topológica del producto  $S \times J$ . Ya que este espacio no puede ser encajado en el plano y las componentes de  $(T_n \times [0, 1]) - (\{z\} \times [0, 1])$  son conjuntos aplanables, concluimos que  $h(\{p, x\}) \in \{z\} \times [0, 1]$  para cada  $x \neq p$ . Por la continuidad de  $h$ ,  $h(T) \subset \{z\} \times [0, 1]$ . Esto es imposible ya que un arco no contiene un triodo simple (esto es bastante claro, pero aprovechando el lenguaje que hemos usado en este trabajo, podemos decir que un triodo simple es una 1-sombilla que no puede ser encajada en  $\mathbb{R}^1$ ). Esta contradicción prueba el lema. ■

**Lema 4.7.** Sea  $T_n$  un  $n$ -odo simple con corazón  $p$ . Entonces no existe un continuo  $Z$  que tenga un punto  $z \in Z$  y vecindades cerradas  $A$  y  $B$  de  $z$  en  $Z$  tales que  $A \subset B$ ,  $(B, z) \approx (\text{cono}(K_{r,m}), \text{vértice de } \text{cono}(K_{r,m}))$  y  $(A, z) \approx (F_2(T_n), \{p\})$ .

**Demostración.** Supongamos, por el contrario que existen un continuo  $Z$ , un punto  $z \in Z$  y vecindades cerradas  $A$  y  $B$  de  $z$  en  $Z$  tales que  $A \subset B$ ,  $(B, z) \approx (\text{cono}(K_{r,m}), \text{vértice de } \text{cono}(K_{r,m}))$  y  $(A, z) \approx (F_2(T_n), \{p\})$ . Sean  $h: B \rightarrow \text{cono}(K_{r,m})$  y  $g: F_2(T_n) \rightarrow A$  homeomorfismos tales que  $h(z) = v$  y  $g(\{p\}) = z$ , donde  $v$  es el vértice de  $\text{cono}(K_{r,m})$ . Sea  $W$  un subconjunto abierto de  $Z$  tal que  $z \in W \subset A - h^{-1}(K_{r,m} \times \{0\})$ . Sea  $q \in T_n - \{p\}$  tal que  $g(\{q\}) \in W$ . Entonces existe un arco  $J \subset T_n - \{p\}$  tal que  $J$  tiene puntos terminales  $u$  y  $v$ ,  $J - \{u, v\}$  es un subconjunto abierto

de  $T_n$ ,  $q \in J - \{u, v\}$  y  $g(F_2(J)) \subset W$ . Así que  $g(F_2(J - \{u, v\}))$  es un subconjunto abierto de  $A$ . De modo que, existe un subconjunto abierto  $U$  de  $Z$  tal que  $g(F_2(J - \{u, v\})) = A \cap U = A \cap U \cap W = U \cap W$ . Así que  $g(F_2(J - \{u, v\}))$  es un subconjunto abierto de  $Z$  que contiene a  $g(\{q\})$ . Ya que  $(F_2(J - \{u, v\}), \{q\}) \approx ([0, 1]^2, (0, 0))$ , tenemos que  $(h(g(F_2(J - \{u, v\})), h(g(\{q\}))) \approx ([0, 1]^2, (0, 0))$ .

Por otra parte, el conjunto  $V = h(g(F_2(J - \{u, v\})))$  es un subconjunto abierto de cono( $K_{r,m}$ ) -  $(K_{r,m} \times \{0\})$  que contiene el punto  $y = h(g(\{q\}))$  y satisface  $(V, y) \approx ([0, 1]^2, (0, 0))$ . Sin embargo, es fácil mostrar que  $K_{r,m}$  es una gráfica sin puntos terminales. De modo que, es imposible que el punto  $y \in \text{cono}(K_{r,m}) - (K_{r,m} \times \{0\})$  tenga una vecindad  $V$  tal que  $(V, y) \approx ([0, 1]^2, (0, 0))$ . Esta contradicción prueba el lema. ■

**Lema 4.8.** Sean  $X$  una gráfica y  $Y$  un continuo de Peano. Si  $Y \times [0, 1]$  puede ser encajado en  $F_2(X)$ , entonces  $\text{ord}(y, Y)$  es finito para toda  $y \in Y$ .

**Demostración.** Supongamos, por el contrario, que existe un punto  $y \in Y$  tal que  $\text{ord}(y, Y)$  es infinito y supongamos también que existe un encaje  $h : Y \times [0, 1] \rightarrow F_2(X)$ . Sea  $\mathcal{R} = \{A \in F_2(X) : \text{cada elemento de } A \text{ es un punto de ramificación de } X\}$ . Ya que  $\mathcal{R}$  es finito,  $h^{-1}(\mathcal{R})$  es finito. De modo que, existe un subarco  $J$  de  $[0, 1]$  tal que  $h(\{y\} \times J) \subset F_2(X) - \mathcal{R}$ . Sea  $m = \max\{\text{ord}(x, X) : x \in X\}$ . Ya que  $\text{ord}(y, Y)$  es infinito, existe un  $(m+1)$ -odo simple  $T_{m+1}$  en  $Y$  tal que  $y$  es el corazón de  $T_{m+1}$  (Teorema 2.2). Fijemos  $t \in J$ . Ya que  $h(y, t) \in F_2(X) - \mathcal{R}$ ,  $h(y, t)$  es un elemento de  $F_2(X)$  de una de las formas descritas en los incisos (a), (b), (c), (d) o (e) del Lema 4.4. tenemos que  $h(y, t)$  tiene una vecindad  $U$  en  $F_2(X)$  de la forma  $T \times [0, 1]$ , donde  $T$  es un arco o un  $r$ -odo simple para alguna  $r \leq m$ . Por la continuidad de  $h$ , existe un subarco  $L$  de  $J$  y un  $(m+1)$ -odo simple  $S_{m+1}$ , contenido en  $T_{m+1}$  tal que  $h(S_{m+1} \times L) \subset U$ . De modo que, es posible encajar producto  $S_{m+1} \times L$  en  $T \times [0, 1]$ . Esto contradice el Lema 4.1 y completa la demostración de este lema. ■

**Lema 4.9.** Sean  $T_n$  un  $n$ -odo simple y  $Y$  un continuo de Peano. Si  $Y \times [0, 1]$  puede ser encajado en  $T_n \times [0, 1]$ , entonces el número de puntos  $y \in Y$  tales que  $\text{ord}(y, Y) > 2$  es finito.

**Demostración.** Sea  $p$  el corazón de  $T_n$ . Supongamos, por el contrario, que el número de puntos  $y \in Y$  tales que  $\text{ord}(y, Y) > 2$  es infinito y que existe un encaje  $h : Y \times [0, 1] \rightarrow T_n \times [0, 1]$ . Escojamos una sucesión de puntos diferentes  $y_1, y_2, \dots$  tal que  $\text{ord}(y_i, Y) > 2$  para cada  $i \in N$  y supongamos que

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$\lim y_n = y_0$  para algún  $y_0 \in Y$ .

Dada,  $n \in \mathbb{N}$  y  $t \in [0, 1]$ , por el Teorema 2.2 cada vecindad de  $h(y_n, t)$  contiene una copia topológica del conjunto  $T_3 \times [0, 1]$ , donde  $T_3$  es un triodo simple. Como  $(T_n \times [0, 1]) - (\{p\} \times [0, 1])$  es una unión finita de conjuntos abiertos homeomorfos al espacio  $(0, 1] \times [0, 1]$ , tenemos que  $h(y_n, t) \in \{p\} \times [0, 1]$ . Hemos mostrado que  $h(\{y_n\} \times [0, 1]) \subset \{p\} \times [0, 1]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por la continuidad de  $h$ ,  $h(\{y_0\} \times [0, 1]) \subset \{p\} \times [0, 1]$ . De modo que, los conjuntos  $h(\{y_1\} \times [0, 1])$ ,  $h(\{y_2\} \times [0, 1])$ , ... son continuos no degenerados, ajenos dos a dos y contenidos en el arco  $\{p\} \times [0, 1]$  y que convergen a  $h(\{y_0\} \times [0, 1])$ . Esto no puede ocurrir en un arco. Esta contradicción completa la prueba del lema. ■

**Lema 4.10.** Sean  $X$  una gráfica y  $Y$  un continuo de Peano. Si  $Y \times [0, 1]$  puede ser encajado en  $F_2(X)$ , entonces el número de puntos  $y \in Y$  tales que  $\text{ord}(y, Y) > 2$  es finito.

**Demostración.** Supongamos, por el contrario, que el número de puntos  $y \in Y$  tales que  $\text{ord}(y, Y) > 2$  es infinito y que existe un encaje  $h : Y \times [0, 1] \rightarrow F_2(X)$ . Escojamos una sucesión de puntos diferentes entre sí  $y_1, y_2, \dots$  tal que  $\text{ord}(y_i, Y) > 2$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  y supongamos que  $\lim y_n = y_0$  para algún  $y_0 \in Y$ .

Dada  $t \in [0, 1]$ , cada vecindad de  $h(y_0, t)$  contiene puntos de la forma  $h(y_n, t)$ , y entonces por el Teorema 2.2 cada una contiene copias topológicas del conjunto  $T_3 \times [0, 1]$ , donde  $T_3$  es un triodo simple. De modo que  $h(y_0, t)$  no es de ninguna de las formas descritas en los incisos (a), (b) y (c) del Lema 4.1.

Sea  $\mathcal{A} = \{A \in F_2(X) : A \subset R(X)\}$ . Ya que  $\mathcal{A}$  es finito, existe un arco  $J \subset [0, 1]$  tal que  $h(\{y_0\} \times J) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ . Entonces,  $h(y_0, t)$  no es de ninguna de las formas descritas en los incisos (f) y (g) del Lema 4.1 para ninguna  $t \in J$ .

Fijemos  $t_0 \in J$ . Por los párrafos previos,  $h(y_0, t_0)$  es de una de las formas (d) o (e). En ambos casos,  $h(y_0, t_0)$  tiene una vecindad  $\mathcal{U}$  de la forma  $T_n \times [0, 1]$  para algún  $n$ -odo simple  $T_n$ . Sea  $Y_1$  una vecindad cerrada, conexa y localmente conexa de  $y_0$  en  $Y$  y  $L$  un subarco de  $J$  tal que  $h(Y_1 \times L) \subset \mathcal{U}$ . Ya que  $Y_1$  contiene una infinidad de puntos  $y$  tales que  $\text{ord}(y, Y) > 2$ , obtenemos una contradicción con el Lema 4.9. Esto termina la demostración de este lema. ■

**Lema 4.11.** Sea  $X$  una gráfica. Si  $F_2(X)$  es homeomorfo al producto de dos continuos no degenerados  $Y$  y  $Z$ , entonces  $Y$  y  $Z$  son gráficas.

**Demostración.** Ya que  $X$  es localmente conexo,  $F_2(X)$  también es localmente conexo. De modo que  $Y$  y  $Z$  son localmente conexos. Fijemos un arco  $J$  en  $Z$ . Entonces  $Y \times J$  puede ser encajado en  $F_2(X)$ . Por los Lemas 4.8 y 4.10,  $\text{ord}(y, Y)$  es finito para toda  $y \in Y$  y el número de puntos  $y \in Y$  tales que  $\text{ord}(y, Y) > 2$  es finito. Por el Teorema 2.1,  $Y$  es un gráfica. Similarmente,  $Z$  es un gráfica. ■

**Teorema 4.12.** Sea  $X$  una gráfica. Entonces  $F_2(X)$  es homeomorfo al producto de dos continuos no degenerados  $Y$  y  $Z$  si y sólo si  $X$  es un arco.

**Demostración.** Ya que  $F_2([0, 1])$  es homeomorfo a  $[0, 1]^2$ , la suficiencia es inmediata.

Ahora probemos la necesidad.

Primero mostraremos que  $X$  no contiene puntos de ramificación. Supongamos, por el contrario, que  $X$  contiene un punto de ramificación  $p$ . Sea  $h : F_2(X) \rightarrow Y \times Z$  un homeomorfismo. Por el Lema 4.11,  $Y$  y  $Z$  son gráficas.

Ya que el punto  $p$  tiene una base de vecindades en  $X$  de la forma  $T_m$ , donde  $T_m$  es un  $m$ -odo simple,  $p$  es el corazón de  $T_m$  y  $m = \text{ord}(p, X)$ , tenemos que  $\{p\}$  tiene una base de vecindades en  $F_2(X)$  de la forma  $F_2(T_m)$ . Por el Lema 4.6, los conjuntos de la forma  $F_2(T_m)$  no pueden ser encajados en conjuntos de la forma  $T_n \times [0, 1]$ , donde  $T_n$  es un  $n$ -odo simple. Usando el Lema 4.5,  $h(p)$  es de la forma  $h(p) = (y, z)$  para algún  $y \in Y$  y algún  $z \in Z$  tales que  $\text{ord}(y, Y) = r \geq 3$  y  $\text{ord}(z, Z) = s \geq 3$ . Por la parte (e) del Lema 4.5,  $(y, z)$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  en  $Y \times Z$  con la propiedad de que, para cada  $U \in \mathcal{B}$ ,  $(U, (y, z)) \approx (\text{cono}(K_{r,s}), v)$ , donde  $v$  es el vértice de  $\text{cono}(K_{r,s})$ . Ya que  $h$  es un homeomorfismo  $(y, z)$  también tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}_0$  en  $Y \times Z$  con la propiedad de que, para cada  $V \in \mathcal{B}_0$ ,  $(V, (y, z)) \approx (F_2(T_m), \{p\})$ . De acuerdo con el Lema 4.7, esto es absurdo. Hemos probado que  $X$  no contiene puntos de ramificación. De modo que  $X$  es un arco o una curva cerrada simple. Si  $X$  es una circunferencia, entonces  $F_2(X)$  es homeomorfo a la banda de Möbius. De modo que  $F_2(X)$  no es homeomorfo al producto de dos continuos no degenerados. Esto prueba que  $X$  no es una curva cerrada simple. Por tanto,  $X$  es un arco. ■

**Teorema 4.13.** Sea  $X$  una gráfica. Si  $F_2(X)$  es homeomorfo al cono sobre un continuo  $Y$ , entonces  $Y$  es una gráfica.

**Demostración.** Ya que  $X$  es localmente conexo,  $F_2(X)$  también es localmente conexo, de manera que  $Y$  es localmente conexo. Ya que  $Y \times [0, \frac{1}{2}]$



puede ser encajado en  $F_2(X)$ , por los Lemas 4.8 y 4.10,  $\text{ord}(y, Y)$  es finito para toda  $y \in Y$  y el número de puntos  $y \in Y$  tal que  $\text{ord}(y, Y) > 2$  es finito. Por el Teorema 2.1,  $Y$  es una gráfica. ■

**Lema 4.14.** Sea  $X$  una gráfica. Si  $F_2(X)$  es homeomorfo al cono sobre un continuo  $Y$ , entonces  $X$  es unicolherente.

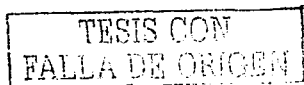
**Demostración.** Supongamos, por el contrario que  $X$  no es unicolherente. El espacio  $X$  es un continuo localmente conexo, lo cual implica (Teorema 1.3) que  $F_2(X)$  no es unicolherente. Por [13, Teoremas 2 y 3] y [33], existe una función continua  $f : F_2(X) \rightarrow S^1$ , donde  $S^1$  es la circunferencia unitaria en el plano, tal que  $f$  no es homotópica a una función constante. Como  $\text{cono}(Y)$  es contraíble,  $F_2(X)$  es contraíble, entonces toda función continua de  $F_2(X)$  a  $S^1$  es homotópica a una función constante. Esta contradicción completa la demostración del lema. ■

**Teorema 4.15.** Sea  $X$  una gráfica. Entonces  $F_2(X)$  es homeomorfo al cono sobre un continuo  $Y$  si y sólo si  $X$  es un  $n$ -odo simple o un arco.

**Demostración.** (Necesidad). Por el Lema 4.13,  $Y$  es una gráfica. Sea  $h : F_2(X) \rightarrow \text{cono}(Y)$ . Primero mostraremos que si  $p$  es un punto de ramificación de  $X$  y  $v$  es el vértice de  $\text{cono}(Y)$  entonces  $h(\{p\}) = v$ . Supongamos por el contrario que  $h(\{p\}) = (y, t)$  para alguna  $t \in [0, 1)$ . Ya que  $Y$  es una gráfica,  $(y, t)$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  en  $\text{cono}(Y)$  tal que, para cada  $U \in \mathcal{B}$ ,  $U$  es de la forma  $[0, 1] \times T$ , donde  $T$  es un arco o un  $r$ -odo simple. Por otra parte,  $\{p\}$  tiene una base de vecindades de la forma  $F_2(T_m)$ , donde  $m = \text{ord}(p, X)$  y  $T_m$  es un  $m$ -odo simple. Por el Lema 4.6, las vecindades básicas de  $\{p\}$  no pueden ser encajadas en las vecindades básicas de  $(y, t)$ . Esta contradicción prueba que  $h(\{p\}) = v$ .

Como  $h$  es inyectiva, concluimos que  $X$  tiene a lo más un punto de ramificación. Dado que  $X$  es unicolherente (Lema 4.14), obtenemos que  $X$  es un arco o un  $n$ -odo simple.

(Suficiencia). Es inmediata del Lema 2.3. ■



# Bibliografía

- [1] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 230, Marcel Dekker 2002, 33-49.
- [2] F. D. Ancel y S. B. Nadler, Jr., *Cones that are cells, and an application to hyperspaces*, Topology Appl., 98 (1999), 19-33.
- [3] B. Bollobás, *Graph theory, An introductory course*, Springer-Verlag, New York Inc., vol. 63, 1979.
- [4] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math., 36 (1949), 235-244.
- [5] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.
- [6] R. Bott, *On the third symmetric potency of  $S_1$* , Fund. Math., 39 (1952), 364-368.
- [7] J. H. Conway y C. McA. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, J. Graph. Theory, 7 (1983), 445-453.
- [8] D. Curtis y N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to  $\aleph_0$ -dimensional linear metric spaces*, Topology Appl., 19 (1985), 251-260.
- [9] A. M. Dilks y J. T. Rogers, Jr., *Whitney stability and contractible hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 83 (1981), 633-640.
- [10] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I*, Fund. Math., 69 (1968), 265-286.
- [11] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [12] C. Eberhart y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979), 279-288.
- [13] S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math., 26 (1936), 61-112.
- [14] T. Ganea, *Symmetrisch potenzen topologischer raume*, Math. Nachr., 11 (1954), 305-316.

- [15] A. García-Máynez y A. Illanes, *A survey on unicoherence and related properties*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México, 29 (1989), 17-67.
- [16] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1969.
- [17] A. Illanes, *Multicoherence of symmetric products*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México, 25 (1985), 11-24.
- [18] A. Illanes, *Hyperspaces homeomorphic to cones*, Glasnik Mat., 30 (50) (1995), 285-294.
- [19] A. Illanes, *Chainable continua are not C-determined*, Topology Appl., 98 (1997), 211-216.
- [20] A. Illanes, *Fans are not C-determined*, Colloq. Math., 81 (1999), 299-308.
- [21] A. Illanes, *The cone = hyperspace property, a characterization*, Topology Appl., 113 (2001), 61-67.
- [22] A. Illanes, *The hyperspace  $C_2(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, por aparecer en Glasnik Mat.
- [23] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $F_2(X)$* , JP Jour. Geometry & Topology, 2 (1), (2002), 75-96.
- [24] A. Illanes y M. de J. López, *Hyperspaces homeomorphic to cones II*, Topology Appl., 126 (2002), 377-391.
- [25] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1999.
- [26] W. T. Ingram y D. D. Sherling, *Two continua having the property of J. L. Kelley*, Canad. Math. Bull., 34 (1991), 351-356.
- [27] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Polish Scientific Publishers and Academic Press, 1968.
- [28] M. de J. López, *Hyperspaces homeomorphic to cones*, Topology Appl., 126 (2002), 361-376.
- [29] S. Macías, *On C-determined continua*, Glasnik Mat., 32 (52), (1997), 259-262.
- [30] S. Macías, *Hyperspaces and cones*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 3069-3073.
- [31] S. Macías, *On symmetric products of continua*, Topology Appl., 92 (1999), 173-182.
- [32] S. Macías, *Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace  $2^X$* , Bol. Soc. Mat. Mexicana, 6, (1999), 415-418.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



- [33] S. Mardesic, *Equivalence of singular and Čech homology for ANR-s. Application to unicoherence*. Fund. Math., 46 (1958), 29-45.
- [34] R. Molski, *On symmetric products*. Fund. Math. 44 (1957) 165-170.
- [35] S. B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*. Trans. Amer. Math. Soc., 230 (1977). 321-345.
- [36] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49. Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1978.
- [37] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An Introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1992.
- [38] J. T. Rogers, Jr., *Embedding the hyperspaces of circle-like plane continua*. Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 165-168.
- [39] J. T. Rogers, Jr., *the cone = hyperspace property*, Canad. J. Math., 24 (1972), 279-285.
- [40] J. T. Rogers, Jr., *Continua with cones homeomorphic to hyperspaces*, General Topology Appl., 3 (1973), 283-289.
- [41] D. Rolfsen. *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc. 1976.
- [42] H. Sachs, *On spatial representation of finite graphs*, (Proceedings of a conference held in Lagów, February 10-13. 1981, Poland), Lecture Notes in Math., vol. 1018. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg, New York and Tokio, 1983.
- [43] D. D. Sherling, *Concerning the cone = hyperspace property*, Canad. J. Math.. 35 (1983). 1030-104.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Abstract

A metric, compact, connected space is a *continuum*. For a given positive integer  $n$  and a continuum  $X$  the  $n^{\text{th}}$ -symmetric product of  $X$  is the space consisting of all nonempty subsets of  $X$ , having at most  $n$  elements. with the Hausdorff metric, in this work, the following results are shown:

1. An example of a unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent.

2. The  $n^{\text{th}}$ -symmetric product of  $X$  can be embedded in the  $n$ -dimensional euclidean space ( $n = 2, 3$ ) if and only if  $X$  is an arc.

3. If  $X$  contains a simple 5-od or a homeomorphic copy of the capital letter H then its second symmetric product cannot be embedded in the 3-dimensional euclidean space. Moreover, we characterize locally connected continua  $X$  for which its second symmetric product is embeddable in the 3-dimensional euclidean space.

4. If  $n^{\text{th}}$ -symmetric product of  $X$  is homeomorphic to  $n^{\text{th}}$ -symmetric product of  $Y$ , where  $X$  is a finite graph and  $Y$  is a continuum, then  $X$  is homeomorphic to  $Y$ .

5. If  $X$  is a finite graph, then the second symmetric product of  $X$  is the cone over some continuum  $Y$  if and only if  $X$  is a simple  $n^{\text{th}}$ -od or an arc.

6. If  $X$  is a finite graph, then the second symmetric product is a product of two nondegenerate continua if and only if  $X$  is an arc.

68

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN