

0324



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

18

EL CATENOIDE ELIPTICO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A:
HUGO JIMENEZ PEREZ

DIRECTOR DE TESIS:
SANTIAGO LOPEZ DE MEDRANO SANCHEZ



2003

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION DE GRADUADOS

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“El catenoide elíptico”

realizado por **Hugo Jiménez Pérez**
con número de cuenta 8434166-8, quien cubrió los créditos de la carrera de:
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis	Dr.	Santiago López de Medrano Sánchez	<i>[Signature]</i>
Propietario	Dr.	Oscar Alfredo Palmas Velasco	<i>[Signature]</i>
Propietario	Dra.	Ana Margarita Guzmán Gómez	<i>[Signature]</i>
Suplente	M. en C.	Guillermo Gómez Alcaraz	<i>[Signature]</i>
Suplente	M. en C.	José Luis Lugo Goytia	<i>[Signature]</i>

Consejo Departamental de Matemáticas

[Signature]
M. en C. José Antonio Gómez Ortega



FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

1-1

TESIS COM
FALLA DE

EL CATENOIDE ELÍPTICO

Hugo Jiménez Pérez

Febrero del 2003.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A mi esposa Diane y mi hija Iris...

**En la eternidad de nuestros sueños
siempre estaremos juntos.**

Contenido

Capítulo 1. Introducción	5
Capítulo 2. Funciones elípticas de Jacobi	11
2.1. Definición de las funciones elípticas de Jacobi	11
2.2. Propiedades de las funciones elípticas	13
2.3. Derivadas de las funciones elípticas	15
2.4. Teorema de la adición	16
2.5. Periodicidad y polos	19
2.6. Transformaciones del módulo	24
Capítulo 3. Superficies mínimas	27
3.1. Antecedentes	27
3.2. Definición de Superficie mínima	28
3.3. El Problema de Björling	32
3.4. Simetrías en Superficies mínimas	33
3.5. Curvas planas como generatrices para la solución de Schwarz	34
3.6. Ejemplos	35
3.7. Dualidad de Björling	38
Capítulo 4. El catenoide elíptico	41
4.1. Catenoide elíptico	41
4.2. Helicoide elíptico	44
4.3. Un paso a la generalización	47
Capítulo 5. En busca de una fórmula general	53
Capítulo 6. Curvas duales.	59
6.1. Curva conjugada a la circunferencia	59
6.2. Curva conjugada a la parábola	60
6.3. Curva conjugada de la elipse	61
6.4. Curva conjugada de la Hipérbola	64
APÉNDICE A	67
Ruletas Elípticas	67
Bibliografía	77

CAPÍTULO 1

Introducción

Alfred Gray (1939 – 1998¹) fue uno de los matemáticos contemporáneos que hizo grandes contribuciones a la geometría diferencial moderna. En geometría riemanniana, estudió los volúmenes de tubos y los teoremas de comparación, con un especial interés en el caso de las variedades de Kähler y las relaciones con clases características. Una gran parte de ese trabajo se ha recopilado en la monografía "Tubes" (1990). Gray fue una figura central en el desarrollo de la geometría compleja e hizo importantes contribuciones al estudio de las variedades simplécticas, antes de la explosión de actividades en esta área en los años 80s y 90s. El trabajo de Gray y sus colaboradores sobre la teoría de Rham de variedades complejas y simplécticas inició una fuerte interacción entre la teoría de homotopía racional, topología diferencial, geometría diferencial y variedades complejas.

En el área de geometría diferencial, una de las herramientas teóricas favoritas de Gray era la solución al Problema de Björling. En términos coloquiales, el problema de Björling es el siguiente:

Dada una curva plana, se debe encontrar una superficie mínima en \mathbb{R}^3 que la contenga como geodésica.

Las condiciones necesarias son que la curva sea analítica y regular (inversa). Estas condiciones también son suficientes y la representación de Weierstrass proporciona una solución explícita de este problema: Si $(x(t), y(t))$ es una parametrización analítica de la curva, la solución al problema de Björling se obtiene mediante la parametrización

$$\Phi(z) = \Re(x(z), y(z), i \int_{z_0}^z \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du) \quad (1.1)$$

donde $x(z), y(z)$ son extensiones de las funciones analíticas $x(t), y(t)$ a funciones de una variable compleja z . Cuando tomamos la parte imaginaria de la expresión, en lugar de la parte real como se hizo anteriormente, obtenemos otra superficie mínima conocida como la superficie conjugada de la primera. (La fórmula también se aplica a curvas singulares y, por supuesto, produce superficies singulares; vea [G1], en este trabajo no se considerará dicho caso.)

Gray utilizaba la solución al problema de Björling para producir muchas bellas imágenes de superficies mínimas. Probablemente sea menos conocido el hecho que también puede utilizarse como una herramienta teórica

para problemas de existencia, entre otras cosas. He aquí un ejemplo: un día preguntamos a Gray qué orden de contacto podría tener una superficie mínima en un punto de auto-intersección; sin pensarlo un segundo contestó "Cualquier orden de contacto: toma una curva plana analítica con un contacto de orden n en un punto de autointersección y entonces toma la solución del problema de Björling". ¡Un teorema instantáneo!

TEOREMA 1. *Para cualquier entero positivo n existe una superficie mínima en \mathbb{R}^3 con un punto de auto intersección tal que dos ramas tienen contacto de orden n .*

La solución explícita del problema de Björling, puede ingresarse a la computadora para producir muchos bellos ejemplos (en una vecindad de la curva seleccionada). Sin embargo, la fórmula posee algunos problemas cuando tratamos de obtener la imagen global, debido a que contiene una integral de una función que en muchos casos es multivaluada. Como ejemplo, tomemos la parábola $(2t, t^2)$. La superficie que la contiene como geodésica está dada por la fórmula

$$\Phi(z) = \Re(2z, z^2, 2i \int_0^z \sqrt{1+u^2} du) \quad (1.2)$$

que el lector puede escribir en su paquete de gráficos favorito... ¡y obtener la imagen errónea! (Figura 1.1(a)). El problema se debe a que el integrando se bifurca en los puntos i y $-i$. Cuando integramos desde 0 hasta, digamos, $2i$ a lo largo de dos trayectorias, una que pasa a la derecha de i y otra que pasa por su izquierda se obtienen diferentes valores con la misma parte imaginaria. Esto produce una arista afilada que es incompatible con el concepto de superficie mínima. El problema se vuelve más evidente si consideramos la superficie conjugada (Figura 1.1(b)). Aquí los valores que difieren no producen una arista sino una discontinuidad en la superficie, que la computadora trata de asociar generando una cara plana.

Una alternativa para resolver este problema es hacer una reparametrización (es decir, encontrar una superficie de Riemann donde la función esté bien definida). En este caso se obtiene con la sustitución $z = \sinh(w)$ y la superficie se convierte en: $\Re(2 \sinh(w), \sinh(w)^2, 2i(\cosh(w) \sinh(w) + w))$ que producirá la imagen correcta (Figura 1.2(a)). La superficie continúa más allá de la arista angular que realmente es una línea de auto-intersección, generando un patrón periódico. La superficie resulta ser la conocida superficie de Catalán, que contiene una geodésica perpendicular a la parábola que es la cicloide. De esta manera, la superficie de Catalán puede describirse como la solución del problema de Björling para la cicloide (Figura 1.2(a)). La figura 1.2(b) nos muestra la superficie conjugada dibujada correctamente.

El ejemplo anterior muestra una relación interesante entre la parábola y la cicloide: ambas producen la misma superficie cuando resolvemos el problema de Björling para ellas. A esta característica le llamaremos la "Dualidad de Björling" que estudiaremos en el capítulo 3, "Superficies mínimas".

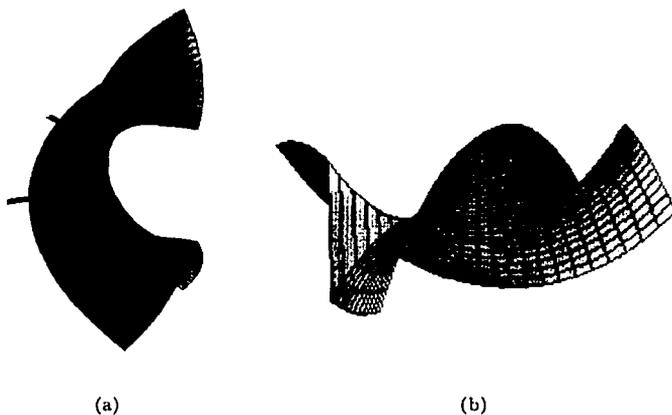


FIGURA 1.1. La solución incorrecta a la parábola. Observe las partes recta en (a) y plana en (b).

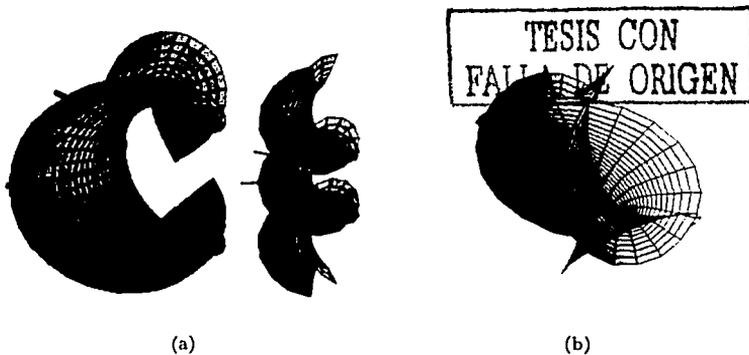
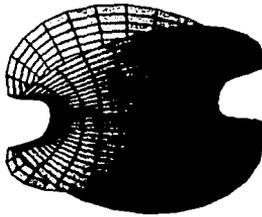
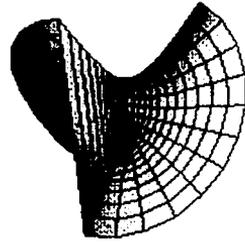


FIGURA 1.2. La superficie de Catalán y su conjugada

Un ejemplo más interesante surge cuando aplicamos la fórmula (1.1) para resolver el problema de Björling a una elipse de semi-ejes a y b , tal que $a > b$. Aplicando la forma paramétrica de la elipse obtenemos la siguiente expresión:



(a)



(b)

FIGURA 1.3. El catenoide y el helicoido elíptico erróneos

$$\Phi(z) = \Re(b \cos(z), a \sin(z), i a \int_0^z \sqrt{1 - e^2 \sin(u)^2} du) \quad (1.3)$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. Si colocamos esta expresión directamente en MapleV o Mathematica obtendremos las imágenes para la superficie y su conjugada que se muestran en la figura (1.3).

Nuevamente vemos que la superficie tiene algunos canales: regiones donde la curvatura seccional es cercana a cero y en el sentido transversal su curvatura es muy grande. Nuevamente... ¿esto no puede ser una superficie mínima! pues ambas curvaturas deben tener el mismo valor absoluto. (El hecho de que obtengamos un canal o una arista realmente depende del número de puntos de la malla que se utilizó para dibujar la superficie). La superficie conjugada presenta nuevamente el problema observado en el ejemplo anterior. Las imágenes que Gray obtuvo de estas superficies en [G1], presentan el mismo problema.

Este no es un problema perteneciente al sistema de software usado para dibujar la superficie, tanto Maple(utilizado para dibujar las primeras superficies) como Mathematica muestran esencialmente la misma imagen. El problema se genera nuevamente en la integral de una función multi-valuada. Quizá Gray estuvo ajeno al conocimiento de este problema en [G1] ya que no utilizó directamente la fórmula, en su lugar eligió una función elíptica para la parametrización (utilizó la función integral elíptica de segunda especie $E(z, e)$ que se encuentra dentro de las bibliotecas de Mathematica y MapleV).

Como se puede ver en la fórmula (1.3), la tercera componente es una integral elíptica de segunda especie, lo que indica que debemos utilizar

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

alguna herramienta relacionada con funciones e integrales elípticas. Por suerte para nosotros, existen las funciones elípticas de Jacobi que están definidas en términos de la función inversa de la integral elíptica de primera especie. A lo largo del presente trabajo se presentarán las definiciones y principales propiedades de las funciones elípticas de Jacobi que utilizaremos para resolver el problema de Björling para la elipse y posteriormente para la hipérbola. Finalmente, obtendremos las imágenes correctas para el Catenoides y el Helicoides elípticos.

Funciones elípticas de Jacobi

Como en todas las áreas de las matemáticas, existen diversas definiciones para los entes matemáticos, y las funciones elípticas de Jacobi no podrían ser la excepción. El primer enfoque que conocí y utilizaré en este trabajo establece las definiciones de las funciones elípticas de Jacobi en términos de la función inversa de la integral elíptica de primera especie y construye el marco de trabajo de dichas funciones por su similitud con las funciones trigonométricas, lo que establece un acercamiento desde el punto de vista geométrico. Este enfoque es bastante intuitivo y, tal vez, sea el preferido por los estudiantes de matemáticas que se inician en el área de las funciones elípticas. Un análisis detallado de las funciones elípticas de Jacobi vistas como una generalización de las funciones trigonométricas, puede revisarse en [M1].

Otro de los enfoques establecidos para definir las funciones elípticas de Jacobi es a través de las funciones teta $(\theta_i(z), i = 0..4)$. Para ello, se requieren conocimientos en series de Fourier y funciones especiales, así como teoría de funciones analíticas, mecánica y termodinámica. El lector puede ver que este es un enfoque predominantemente físico y se utilizará en pocas ocasiones en este trabajo por ser menos intuitivo. Para aquellos que estén interesados en conocer las definiciones de las funciones elípticas de Jacobi desde este punto de vista, pueden recurrir a [L1].

2.1. Definición de las funciones elípticas de Jacobi

Se define al *seno elíptico de Jacobi* como la función inversa de la integral elíptica de primera especie:

$$u = \int_0^\phi \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (2.1)$$

por lo tanto $sn(u, k) = \phi$ donde $0 < k < 1$ es el módulo de la función. A esta función también se le conoce como seno de amplitud [M1], que estudiaremos en la sección (2.3), "Derivadas de las funciones de Jacobi".

A partir de esta función se definen otras dos funciones elípticas, de la manera siguiente:

$$cn(u, k) = \sqrt{1 - sn^2(u, k)} \quad (2.2)$$

conocida como coseno elíptico de Jacobi y

$$dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)} \quad (2.3)$$

que es la función *delta* de Jacobi.

Inmediatamente de la definición de estas funciones podemos establecer las siguientes identidades:

$$cn^2(u, k) + sn^2(u, k) = 1 \quad (2.4)$$

$$dn^2(u, k) + k^2 sn^2(u, k) = 1 \quad (2.5)$$

donde notamos la gran semejanza con las funciones trigonométricas $\sin(t)$ y $\cos(t)$.

Como se mencionó anteriormente, el seno elíptico de Jacobi se define como la función inversa de la integral elíptica de primera especie. Cuando el límite superior de la integral es la constante 1, a la expresión resultante se le conoce como integral elíptica *completa* de primera especie,

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (2.6)$$

así que formalmente a la expresión de la ecuación (2.1) se le nombra la *integral elíptica incompleta de primera especie*. El lector debe notar que esta integral está completamente definida por el módulo k .

Finalmente, debemos establecer una identidad adicional que será indispensable para realizar las transformaciones del módulo, que veremos en la sección (6). Estas transformaciones se aplican en la solución del problema de Björling para las hipérbolas, así como en la obtención de las funciones componentes para realizar los cálculos relacionados a la creación de las superficies en la computadora.

Definimos el módulo complementario k' de la siguiente manera:

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad 0 < k < 1, \quad (2.7)$$

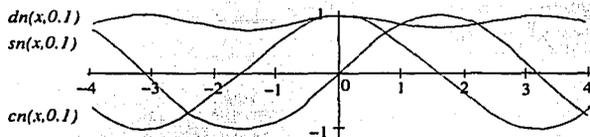
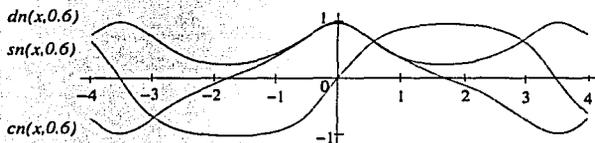
de donde obtenemos la identidad

$$k'^2 + k^2 = 1 \quad (2.8)$$

de esta forma, $0 < k' < 1$ siempre que $0 < k < 1$. Evidentemente, podemos obtener la integral completa K' directamente si definimos $K' = K(k')$.

Existen varias propiedades que pueden deducirse directamente de las definiciones. De las expresiones (2.2) y (2.3) vemos que las funciones $cn(u, k)$ y $dn(u, k)$ son pares con respecto de u . A partir de la ecuación (2.1), podemos ver que cuando el módulo k de la función $sn(u, k)$ es igual a cero, entonces:

$$\int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$$

FIGURA 2.1. Gráfica de las funciones elípticas para $k = 0.1$.FIGURA 2.2. Gráfica de las funciones elípticas para $k = 0.6$.

de donde:

$$\begin{aligned} sn(u, 0) &= \sin(u), \\ cn(u, 0) &= \cos(u), \\ dn(u, 0) &= 1, \\ K &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

lo que nos permite ver que las funciones elípticas de Jacobi son una generalización de las funciones trigonométricas.

El lector se preguntará...¿ y qué sucede cuando $k \rightarrow 1$? Para responder a esta pregunta, necesitamos ver cómo se comportan estas funciones con argumentos imaginarios. La siguiente sección nos proporcionará las herramientas necesarias.

2.2. Propiedades de las funciones elípticas

La finalidad de esta sección es conocer el comportamiento de las funciones elípticas cuando rotamos el dominio mediante el cambio de variable $z = i\phi$. Las expresiones que encontraremos aquí serán de gran ayuda para definir las curvas y superficies como funciones de $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; es decir, encontrar una parametrización explícita que pueda usarse para crear las imágenes de dichos elementos en la computadora. También podremos ver la relación existente entre las funciones con módulo k y con módulo complementario k' .

Primero se expresará a $sn(iu, k) = w$ en términos de $sn(u, k)$, entonces tomamos la función inversa

$$iu = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

haciendo el cambio de variable $z = i\phi$, y posteriormente el cambio $\phi = \frac{\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}$ tendremos:

$$\begin{aligned} iu &= \int_0^{-iw} \frac{id\phi}{\sqrt{(1+\phi^2)(1+k^2\phi^2)}} \\ &= i \int_0^{-i\frac{w}{\sqrt{1+w^2}}} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\psi^2)(1-(1-k^2)\psi^2)}} \\ &= i \int_0^{-i\frac{w}{\sqrt{1+w^2}}} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\psi^2)(1-k'^2\psi^2)}} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\operatorname{sn}(u, k') = -i \frac{w}{\sqrt{1+w^2}}$$

que implica:

$$w = i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k')}}}$$

finalmente, obtenemos la relación:

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k')}}}$$

aplicando el resultado anterior a las tres funciones, obtenemos:

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')} \quad (2.9)$$

$$\operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')} \quad (2.10)$$

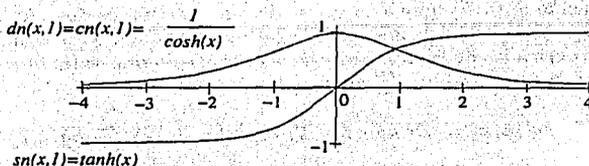
$$\operatorname{dn}(iu, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')} \quad (2.11)$$

cambiando en las fórmulas anteriores u por iu

$$\operatorname{sn}(u, k) = -i \frac{\operatorname{sn}(iu, k')}{\operatorname{cn}(iu, k')}$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(iu, k')}$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{\operatorname{dn}(iu, k')}{\operatorname{cn}(iu, k')}$$

FIGURA 2.3. Gráfica de las funciones elípticas para $k = 1$.

y observando que cuando $k = 1$, $k' = 0$, entonces:

$$sn(u, 1) = -i \frac{sn(iu, 0)}{cn(iu, 0)} = -i \frac{\sin(iu)}{\cos(iu)}$$

$$cn(u, 1) = \frac{1}{cn(iu, 0)} = \frac{1}{\cos(iu)}$$

$$dn(u, 1) = \frac{dn(iu, 0)}{cn(iu, 0)} = \frac{1}{\cos(iu)}$$

que genera

$$sn(u, 1) = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} \quad (2.12)$$

$$cn(u, 1) = \frac{1}{\cosh(u)} \quad (2.13)$$

$$dn(u, 1) = \frac{1}{\cosh(u)} \quad (2.14)$$

De manera muy interesante vemos que las funciones de Jacobi se transforman en cocientes de las funciones hiperbólicas cuando $k = 1$.

2.3. Derivadas de las funciones elípticas

Para poder encontrar las derivadas de las funciones elípticas de Jacobi, necesitamos definir una función adicional llamada la *función amplitud de Jacobi*. Aunque existen otros métodos para realizar la diferenciación, desde el punto de vista geométrico este método es el más sencillo. La función amplitud se define de la siguiente manera:

$$am(u, k) = \int_{u_0}^u dn(z, k) dz \quad (2.15)$$

A partir de esta definición, podemos redefinir la función seno elíptico de Jacobi como el seno de la función amplitud, i.e:

$$sn(u, k) = \sin(am(u, k)) \quad (2.16)$$

esta definición parece ser más sencilla y elegante que la primera definición que usamos. Sin embargo, el problema que presenta para tomarla formalmente como una definición primaria, es que se define en términos de la

función $dn(u, k)$, que a su vez se define en términos de la función $sn(u, k)$... lo que nos lleva al problema de la gallina y el huevo. Vamos ahora a encontrar las derivadas de las funciones de Jacobi. Dado que $sn(u, k) = \sin(am(u, k))$, y ya que $am(u, k) = \int_{u_0}^u dn(z, k) dz$, tenemos:

$$sn'(u, k) = (\sin \circ am)'(u, k) = \cos(am(u, k)) \frac{d}{du} am(u, k)$$

$$cn'(u, k) = (\cos \circ am)'(u, k) = -\sin(am(u, k)) \frac{d}{du} am(u, k)$$

$$dn'(u, k) = \frac{d}{du} \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)} = \frac{-2k^2 sn(u, k) cn(u, k) dn(u, k)}{2\sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)}}$$

de donde:

$$sn'(u, k) = cn(u, k) dn(u, k) \quad (2.17)$$

$$cn'(u, k) = -sn(u, k) dn(u, k) \quad (2.18)$$

$$dn'(u, k) = -k^2 sn(u, k) cn(u, k) \quad (2.19)$$

en la sección (5), "Periodicidad y polos", se establece que las singularidades de los miembros derechos de las expresiones (2.17), (2.18) y (2.19) son polos dobles con residuos igual a cero. Esto implica que la integral de dichas expresiones no depende de la trayectoria de integración y entonces están bien definidas.

2.4. Teorema de la adición

A continuación enunciaremos el teorema de la adición para las funciones elípticas de Jacobi. Para una referencia completa de la demostración del teorema de la adición, el capítulo 4 de [M1] está dedicado a este tema; también pueden leer la sección 2.4 de [L1].

TEOREMA 2. Sean α y β dos números complejos en el dominio de $sn(z, k)$, entonces se tiene que

$$sn(u + v, k) = \frac{sn(u, k)cn(v, k)dn(v, k) + sn(v, k)cn(u, k)dn(u, k)}{1 - k^2 sn^2(u, k)sn^2(v, k)} \quad (2.20)$$

La idea de la demostración del teorema de la adición se basa en encontrar una integral algebraica a partir de una ecuación diferencial como se explicará a continuación.

Sean α , β y γ números complejos cualesquiera en el dominio de $sn(z, k)$, tal que $\gamma = \alpha + \beta$. Como $sn(z, k) : \mathbb{C} - \{\text{polos}\} \rightarrow \mathbb{C}$, entonces existen $u, v, w \in \mathbb{C}$ tal que

$$sn(\alpha, k) = u,$$

$$sn(\beta, k) = v,$$

$$sn(\gamma, k) = w.$$

por lo tanto

$$\alpha = \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad \beta = \int_0^v \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

$$\gamma = \int_0^w \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Si α y β varían de modo que su suma γ permanezca constante:

$$\alpha + \beta = \gamma = \text{const}, \quad (2.21)$$

entonces

$$d(\alpha + \beta) = 0,$$

es decir,

$$d \left(\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + \int_0^v \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \right) = 0,$$

o bien

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = 0. \quad (2.22)$$

Esta es una ecuación diferencial que vincula los valores $u = sn(\alpha, k)$ y $v = sn(\beta, k)$ dada la condición (2.21).

Para encontrar la integral algebraica de la ecuación (2.22) emplearemos el método de Euler. Tomemos la siguiente ecuación algebraica de cuarto grado que relaciona a u y v

$$u^2 + v^2 + Au^2v^2 + 2Buv - C^2 = 0 \quad (2.23)$$

donde A , B y C son parámetros arbitrarios.

Diferenciándola obtenemos

$$(u + Bv + Au^2v)du + (v + Bu + Au^2v)dv = 0 \quad (2.24)$$

ahora escribamos la expresión (2.23) en la forma

$$(Av^2 + 1)u^2 + 2Bvu + (v^2 - C^2) = 0 \quad (2.25)$$

y multiplicando todo por $Av^2 + 1$ y formando el cuadrado perfecto, tenemos

$$[(Av^2 + 1)u + Bv]^2 - [(C^2 - v^2)(Av^2 + 1) + B^2v^2] = 0 \quad (2.26)$$

de donde

$$u + Bv + Au^2v = \sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)v^2 - Av^4} \quad (2.27)$$

como la ecuación (2.23) es simétrica respecto de u y v , se tiene también que

$$v + Bu + Au^2v = \sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)u^2 - Au^4} \quad (2.28)$$

Sustituyendo las expresiones (2.27) y (2.28) en la ecuación (2.24), obtenemos

$$\frac{\sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)v^2 - Av^4} du + \sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)u^2 - Au^4} dv = 0$$

o bien

$$\frac{du}{\sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)u^2 - Au^4}} + \frac{dv}{\sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)v^2 - Av^4}} = 0 \quad (2.29)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.23) es una integral algebraica de (2.29). Finalmente escogimos los valores de A , B y C para que (2.29) y (2.22) sean idénticas. Sustituyendo

$$B^2 + AC^2 - 1 = -(1 + k^2)C^2 \quad y \quad A = -k^2C^2.$$

en (2.29) y multiplicando todo por C , obtenemos

$$\frac{du}{\sqrt{1 - (1 + k^2)u^2 + k^2u^4}} + \frac{dv}{\sqrt{1 - (1 + k^2)v^2 + k^2v^4}} = 0$$

o bien

$$\frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}} + \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}} = 0.$$

La integral algebraica expresada en la fórmula (2.23), se convierte en

$$u^2 + v^2 - k^2C^2u^2v^2 + 2\sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2C^2)uv} - C^2 = 0 \quad (2.30)$$

Despejando a C en los siguientes pasos obtenemos

$$\begin{aligned} [u^2 + v^2 - (k^2u^2v^2 + 1)C^2]^2 &= 4(1 - (1 + k^2)C^2 + k^2C^4)u^2v^2, \\ (1 - k^2u^2v^2)^2C^4 - 2[(1 + k^2u^2v^2)(u^2 + v^2) - 2(1 + k^2)u^2v^2]C^2 &+ \\ &+ (u^2 - v^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación general de segundo grado, se tiene

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{(1 + k^2u^2v^2)(u^2 + v^2) - 2(1 + k^2)u^2v^2}{(1 - k^2u^2v^2)^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{[(1 + k^2u^2v^2)(u^2 + v^2) - 2(1 + k^2)u^2v^2]^2 - (u^2 - v^2)^2(1 - k^2u^2v^2)^2}}{(1 - k^2u^2v^2)^2}, \\ C^2 &= \frac{u^2(1 - (1 + k^2)v^2 + k^2v^4) + v^2(1 - (1 + k^2)u^2 + k^2u^4)}{(1 - k^2u^2v^2)^2} + \\ &+ \frac{2uv\sqrt{(1 - (1 + k^2)u^2 + k^2u^4)(1 - (1 + k^2)v^2 + k^2v^4)}}{(1 - k^2u^2v^2)^2} \end{aligned}$$

y finalmente

$$C = \frac{u\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)} + v\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{1-k^2u^2v^2}. \quad (2.31)$$

La función algebraica:

$$F(u, v) = \frac{u\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)} + v\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{1-k^2u^2v^2}$$

nos ofrece la solución para el teorema de la adición, mediante la relación $sn(\alpha + \beta, k) = F[sn(\alpha, k), sn(\beta, k)]$. Explícitamente:

$$sn(\alpha + \beta) = \frac{sn(\alpha)cn(\beta)dn(\beta) + sn(\beta)cn(\alpha)dn(\alpha)}{1 - k^2sn^2(\alpha)sn^2(\beta)} \quad (2.32)$$

donde hemos omitido el módulo por cuestiones de espacio. El lector debe interpretar $sn(u) = sn(u, k)$ a menos que se especifique lo contrario.

Ahora utilizaremos las definiciones de $cn()$ y $dn()$, para encontrar las siguientes relaciones:

$$cn(\alpha + \beta) = \frac{cn(\alpha)cn(\beta) - sn(\alpha)sn(\beta)dn(\alpha)dn(\beta)}{1 - k^2sn^2(\alpha)sn^2(\beta)} \quad (2.33)$$

$$dn(\alpha + \beta) = \frac{dn(\alpha)dn(\beta) - k^2sn(\alpha)sn(\beta)cn(\alpha)cn(\beta)}{1 - k^2sn^2(\alpha)sn^2(\beta)} \quad (2.34)$$

2.5. Periodicidad y polos

En esta sección utilizaremos un enfoque distinto para establecer la periodicidad de las funciones elípticas de Jacobi. Hasta este momento, nuestro enfoque era constructivo, pero por cuestiones de espacio, debemos recurrir a una definición general de todas las funciones elípticas y tomar a las funciones de Jacobi como un subconjunto de ellas. Para ello, enunciaremos la siguiente definición y posteriormente encontraremos los periodos de cada función de Jacobi.

DEFINICIÓN 1. Sea $L = L(\lambda_1, \lambda_2)$ una retícula del plano complejo de la forma $L = \{m\lambda_1 + n\lambda_2 \in \mathbb{C}; m, n \in \mathbb{Z}, \Im(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \neq 0\}$. Una función meromorfa $f: \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama función elíptica con respecto de L si para todos los $z \in \mathbb{C}$ y $\Omega \in L$, $f(z + \Omega) = f(z)$.

En otras palabras, toda función elíptica es una función meromorfa, doblemente periódica sobre el plano complejo. De esta manera, las funciones de Jacobi, como un subconjunto de las funciones elípticas, son funciones meromorfas, doblemente periódicas. Una discusión más amplia sobre funciones elípticas y superficies mínimas se puede encontrar en [C1].

Ahora bien, anteriormente definimos la integral elíptica completa de primera especie como:

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

donde la integración se realiza a lo largo del segmento del eje real que une los puntos 0 y 1 de modo que K es un número real positivo. De aquí se deduce que

$$\operatorname{sn}(K, k) = 1, \quad (2.35)$$

$$\operatorname{cn}(K, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(K, k)} = 0, \quad (2.36)$$

$$\operatorname{dn}(K, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K, k)} = \sqrt{1 - k^2} = k' \quad (2.37)$$

si utilizamos el teorema de la adición con el argumento $K - t$, con $t \in \mathbb{R}$, obtenemos:

$$\operatorname{sn}(K - t, k) = \frac{\operatorname{cn}(t, k)}{\operatorname{dn}(t, k)}, \quad (2.38)$$

$$\operatorname{cn}(K - t, k) = k' \frac{\operatorname{sn}(t, k)}{\operatorname{dn}(t, k)}, \quad (2.39)$$

$$\operatorname{dn}(K - t, k) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(t, k)} \quad (2.40)$$

ahora sustituyendo t por $-t$, tenemos:

$$\operatorname{sn}(K + t, k) = \frac{\operatorname{cn}(t, k)}{\operatorname{dn}(t, k)} = \operatorname{sn}(K - t, k), \quad (2.41)$$

$$\operatorname{cn}(K + t, k) = -k' \frac{\operatorname{sn}(t, k)}{\operatorname{dn}(t, k)} = -\operatorname{cn}(K - t, k), \quad (2.42)$$

$$\operatorname{dn}(K + t, k) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(t, k)} = \operatorname{dn}(K - t, k) \quad (2.43)$$

y nuevamente cambiando t por $K + t$, encontramos

$$\operatorname{sn}(t + 2K, k) = -\operatorname{sn}(t, k), \quad (2.44)$$

$$\operatorname{cn}(t + 2K) = -\operatorname{cn}(t, k), \quad (2.45)$$

$$\operatorname{dn}(t + 2K) = \operatorname{dn}(t, k) \quad (2.46)$$

de donde se deduce que uno de los periodos de $\operatorname{dn}(t, k)$ es $2K$. Finalmente, cambiando t por $t + 2K$ en las dos primeras fórmulas, obtenemos:

$$\operatorname{sn}(t + 4K, k) = \operatorname{sn}(t, k), \quad \operatorname{cn}(t + 4K, k) = \operatorname{cn}(t, k).$$

Una vez establecida la periodicidad en el sentido del eje real, las fórmulas (2.9), (2.10) y (2.11) nos llevan a obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(i(u + 2K'), k) &= i \frac{\operatorname{sn}(u + 2K', k')}{\operatorname{cn}(u + 2K', k')} \\ &= i \frac{-\operatorname{sn}(u, k')}{-\operatorname{cn}(u, k')} \\ &= \operatorname{sn}(iu, k') \\ \operatorname{cn}(i(u + 2K'), k) &= i \frac{1}{\operatorname{cn}(u + 2K', k')} \\ &= i \frac{1}{-\operatorname{cn}(u, k')} \\ &= -\operatorname{cn}(iu, k') \\ \operatorname{dn}(i(u + 2K'), k) &= i \frac{\operatorname{dn}(u + 2K', k')}{\operatorname{cn}(u + 2K', k')} \\ &= i \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{-\operatorname{cn}(u, k')} \\ &= -\operatorname{dn}(iu, k') \end{aligned}$$

donde vemos que $\operatorname{sn}()$ tiene un periodo $i2K'$. Aplicando nuevamente el argumento $i(u + 2K')$ a las dos últimas fórmulas, tendremos que tanto $\operatorname{cn}()$ como $\operatorname{dn}()$ tienen periodos $i4K'$. Así, los periodos de las funciones de Jacobi son los siguientes:

$$w_1 = 4mK + i2nK', \quad \operatorname{sn}(u, k), \quad (2.47)$$

$$w_2 = 4mK + i4nK', \quad \operatorname{cn}(u, k), \quad (2.48)$$

$$w_3 = 2mk + i4nK', \quad \operatorname{dn}(u, k), \quad (2.49)$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ahora utilicemos el teorema de la adición y las fórmulas (2.9), (2.10) y (2.11) para obtener los polos de estas funciones. Si $z = x + iy$, entonces:

$$\operatorname{sn}(x + iy, k) = \frac{\operatorname{sn}(x, k) \operatorname{dn}(y, k') + i \operatorname{sn}(y, k') \operatorname{cn}(x, k) \operatorname{cn}(y, k') \operatorname{dn}(x, k)}{\operatorname{cn}^2(y, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(x, k) \operatorname{sn}^2(y, k')}$$

$$\operatorname{cn}(x + iy, k) = \frac{\operatorname{cn}(x, k) \operatorname{cn}(y, k') - i \operatorname{sn}(x, k) \operatorname{sn}(y, k') \operatorname{dn}(x, k) \operatorname{dn}(y, k')}{\operatorname{cn}^2(y, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(x, k) \operatorname{sn}^2(y, k')}$$

$$\operatorname{dn}(x + iy, k) = \frac{\operatorname{dn}(x, k) \operatorname{cn}(y, k') \operatorname{dn}(y, k') - ik^2 \operatorname{sn}(x, k) \operatorname{cn}(x, k) \operatorname{sn}(y, k')}{\operatorname{cn}^2(x, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(x, k) \operatorname{sn}^2(y, k')}$$

debido a que las funciones sn , cn y dn , definidas sobre el plano complejo de la manera anterior, son fraccionales, entonces estas funciones tienen sus polos en aquellos valores de $z = x + iy$ que anulen al denominador. Esto nos lleva a la relación:

$$\operatorname{cn}^2(y, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(x, k) \operatorname{sn}^2(y, k') = 0$$

donde $0 < k, k' < 1$. Ya que x, y son reales, la relación anterior se cumple si se dan simultáneamente las siguientes condiciones

$$cn(y, k') = 0, \quad sn(x, k) sn(y, k') = 0$$

pero si $cn(y, k') = 0$, entonces $sn(y, k') = \pm 1$, por lo tanto $sn(x, k)$ debe ser cero. De aquí se deduce que

$$x = 2mK, \quad y = (2n - 1)K'$$

o que

$$z = 2mK + i(2n - 1)K' \quad (2.50)$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$. Estos valores de z representan todos los polos posibles de las funciones elípticas de Jacobi.

El desarrollo en serie en una vecindad del $u = 0$ de las funciones elípticas se ve de la siguiente manera:

$$sn(u, k) = u - \frac{1}{3!}(1 + k^2)u^3 + \frac{1}{5!}(1 + 14k^2 + k^4)u^5 - \dots \quad (2.51)$$

$$cn(u, k) = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}(1 + 4k^2)u^4 - \dots, \quad (2.52)$$

$$dn(u, k) = 1 - \frac{1}{2!}k^2u^2 + \frac{1}{4!}(4k^2 + k^4)u^4 - \dots \quad (2.53)$$

Como las singularidades de las tres funciones elípticas se encuentran en $u = 2mK + i(2n - 1)K'$, en un dominio fundamental $D(0)^1$ de la función $sn(u, k)$ existen dos singularidades, en $u = iK'$ y $u = 2K + iK'$. Aplicando el teorema de la adición con argumento $z = x + iy$ obtenemos:

$$sn(iK' + u) = \frac{1}{ksn(u, k)} \quad (2.54)$$

y obteniendo el desarrollo en serie en una vecindad de $u = 0$ tenemos:

$$sn(iK' + u) = \frac{1}{ku} + \frac{1}{6k}(1 + k^2)u + \dots, \quad (2.55)$$

de donde vemos que sn tiene un polo simple en $u = iK'$ con residuo $1/k$. La otra singularidad que existe dentro del dominio fundamental $D(0)$ es $u = 2K + iK'$ y calculando tenemos:

$$sn(2K + iK' + u) = -sn(iK' + u) = -\frac{1}{ku} + \dots, \quad (2.56)$$

por lo tanto, sn tiene un polo simple en $u = 2K + iK'$ con residuo $-1/k$.

Aplicando el mismo procedimiento para $cn()$ y $dn()$, obtendremos los residuos de las singularidades correspondientes. Sin embargo, sabemos que los dominios fundamentales de ambas funciones son diferentes (tomados a partir de las fórmulas (2.47), (2.48) y (2.49)). En un dominio fundamental $D_{cn}(0)$ tenemos las singularidades $u = iK'$ y $u = 2K + iK'$, mientras que en

¹Un dominio fundamental de una función elíptica f con respecto de una retícula L basado en z_0 , es el conjunto $D_f(z_0) = \{z_0 + \mu\lambda_1 + \delta\lambda_2 \in \mathbb{C}; 0 \leq \mu, \delta < 1\}$.

un dominio $D_{dn}(0)$ para la función dn , tenemos las singularidades $u = iK'$ y $u = 3iK'$.

Para cn tenemos:

$$cn(iK' + u) = \frac{dn(u, k)}{ik \operatorname{sn}(u, k)} \quad (2.57)$$

$$cn(2K + iK' + u) = -cn(iK' + u) \quad (2.58)$$

y utilizando el desarrollo en serie alrededor de $u = 0$ tenemos:

$$cn(iK' + u) = \frac{1}{iku} + \frac{1}{6ik} (1 - 2k^2)u + \dots, \quad (2.59)$$

$$cn(2K + iK' + u) = -\frac{1}{iku} - \frac{1}{6ik} (1 - 2k^2)u + \dots, \quad (2.60)$$

mostrando que cn tiene un polo simple con residuo $-i/k$ en $u = iK'$, mientras el polo simple en $u = 2K + iK'$ tiene residuo i/k .

Finalmente, para dn tenemos:

$$dn(iK' + u) = \frac{cn(u, k)}{i \operatorname{sn}(u, k)} \quad (2.61)$$

$$dn(3iK' + u) = -dn(iK'). \quad (2.62)$$

nuevamente utilizando el desarrollo en serie alrededor de $u = 0$ tenemos:

$$dn(iK' + u) = \frac{1}{iu} - \frac{1}{6i} (2 - k^2)u + \dots, \quad (2.63)$$

$$dn(3iK' + u) = -\frac{1}{iu} + \frac{1}{6i} (2 - k^2)u + \dots, \quad (2.64)$$

de donde podemos ver que dn tiene dos polos simples en $u = iK'$ y $u = 3iK'$ con residuos $-i$ e i respectivamente.

Utilizando un poco de álgebra podemos ver que el producto de cualesquiera dos de estas funciones produce polos dobles en cada singularidad (por la fórmula (2.50), las tres funciones comparten el mismo conjunto de singularidades), con residuo cero. Por lo tanto, las integrales

$$\int cn(u, k) dn(u, k) du = sn(u, k), \quad (2.65)$$

$$\int -sn(u, k) dn(u, k) du = cn(u, k), \quad (2.66)$$

$$\int -k^2 sn(u, k) cn(u, k) du = dn(u, k) \quad (2.67)$$

están bien definidas y son univaluadas, entonces $\int sn'(u, k) = sn(u, k)$ está bien definida. Esto mismo sucede con las integrales de los cuadrados de las

funciones de Jacobi:

$$\int sn^2(u, k) du, \quad (2.68)$$

$$\int cn^2(u, k) du, \quad (2.69)$$

$$\int dn^2(u, k) du \quad (2.70)$$

En particular, la última integral se conoce como la función E de Jacobi:

$$E(u, k) = \int_0^u dn^2(v, k) dv \quad (2.71)$$

Esta integral es de fundamental importancia para encontrar la imagen correcta del catenoide elíptico.

2.6. Transformaciones del módulo

El concepto geométrico de la excentricidad e de una elipse se ve reflejado en las funciones elípticas de Jacobi mediante el módulo k de cada función. Sin embargo, las propiedades mostradas hasta el momento sólo se aplican a funciones con módulo $0 \leq k \leq 1$, que se asocian a toda la familia de elipses incluyendo a la parábola y la circunferencia. Para ampliar el dominio de curvas utilizadas a toda la familia de cónicas, es necesario establecer una relación con la familia de hipérbolas cuya excentricidad es $1 < e$. En esta sección veremos como se transforman las funciones de Jacobi cuando el módulo es $1 < k$. El método es realizar un cambio de variable de la forma:

$$\phi = k z \quad (2.72)$$

y establecer las funciones de Jacobi con módulo $1 < \kappa$ en términos de funciones con módulo $0 < k < 1$.

Sea $sn(w, k) = \varphi$, entonces:

$$w = \int_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (2.73)$$

Aplicando el cambio de variable (2.72) en la fórmula (2.73), tenemos $z = \frac{\phi}{k}$ y $dz = \frac{d\phi}{k}$, de aquí:

$$w = \frac{1}{k} \int_0^{k\varphi} \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - \frac{\phi^2}{k^2})(1 - \phi^2)}},$$

$$kw = \int_0^{k\varphi} \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - \frac{\phi^2}{k^2})(1 - \phi^2)}}$$

con lo cual el nuevo módulo de la función es $\frac{1}{k} < 1$. Aplicando la función $sn(\cdot)$ a ambos lados de la igualdad anterior tenemos:

$$sn(kw, \frac{1}{k}) = k\varphi,$$

$$\frac{1}{k} sn(kw, \frac{1}{k}) = \varphi$$

finalmente, sabemos que $\frac{1}{k} sn(kw, \frac{1}{k}) = \varphi = sn(w, k)$, por lo que las funciones de Jacobi quedarán de la siguiente manera:

$$sn(w, k) = \frac{1}{k} sn(kw, \frac{1}{k})$$

$$cn(w, k) = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} sn^2(kw, \frac{1}{k})}$$

$$= dn(kw, \frac{1}{k})$$

$$dn(w, k) = \sqrt{1 - k^2 (\frac{1}{k^2} sn^2(kw, \frac{1}{k}))}$$

$$= cn(kw, \frac{1}{k})$$

o alternativamente:

$$sn(w, k) = \kappa sn(\frac{w}{\kappa}, \kappa)$$

$$cn(w, k) = dn(\frac{w}{\kappa}, \kappa)$$

$$dn(w, k) = cn(\frac{w}{\kappa}, \kappa)$$

donde $\kappa = \frac{1}{k}$.

Existen varias transformaciones adicionales para el módulo, que pueden generalizarse considerando una transformación del tipo:

$$k_1 = \frac{c + d k}{a + b k},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < (ad - cb)$. Sin embargo, las transformaciones aquí enunciadas ($k' = \sqrt{1 - k^2}$ y $\kappa = \frac{1}{k}$), serán las únicas que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Para una discusión más extensa acerca de las transformaciones modulares, el lector puede revisar el capítulo 9 de [L1].

26

CAPÍTULO 3

Superficies mínimas

3.1. Antecedentes

La geometría diferencial ha sido, desde mediados del siglo XVIII, una de las áreas de estudio más fascinantes para los estudiantes e investigadores matemáticos. Los cursos de Geometría diferencial, en contraste con los de funciones especiales (en particular, funciones elípticas), son atendidos por un buen porcentaje de los académicos en las carreras de matemáticas de las distintas universidades. Por esta razón, este capítulo no profundizará en los conceptos generales de la geometría diferencial básica; sólo se dará un panorama general de las superficies mínimas y se enunciarán los resultados más relevantes para llegar a nuestro objetivo: El catenoide elíptico. Si se desea tener una mejor perspectiva de estos conceptos, se puede consultar un libro de texto de geometría diferencial como [Ca1]; para conocer un análisis más profundo, se puede revisar [D1].

Iniciaremos definiendo los conceptos de superficie mínima, superficie adjunta y curva isotrópica. En términos generales, se puede definir a una superficie mínima como aquella cuya función de curvatura $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ es idénticamente nula. En la expresión anterior, k_1 y k_2 es la magnitud de los vectores de curvatura obtenidos tomando un vector en una dirección arbitraria y el correspondiente perpendicular, ambos sobre el plano tangente a la superficie en el punto seleccionado, como se muestra en la figura 3.1. Posteriormente, se calcula la curvatura de la superficie en las direcciones seleccionadas y esos valores corresponderán a k_1 y k_2 .

Para que podamos obtener la solución $H = 0$, se tiene que cumplir que $k_1 = -k_2$ o $k_1 = k_2 = 0$, es decir, cada punto de la superficie sólo puede ser un punto hiperbólico o un punto plano.

Ahora bien, si tomamos a los valores k_1 y k_2 como la magnitud de fuerzas físicas, se puede considerar a las superficies mínimas como las soluciones de equilibrio para problemas de capilaridad. Y en efecto, una de las soluciones más conocidas de este tipo es la creación de superficies mediante películas de jabón. Muchos estudiantes de ciencias físicas y matemáticas y muchos aficionados a los problemas matemáticos saben que si se toma un trozo de alambre y se crea un contorno cerrado con él, podemos generar una superficie al introducir y sacar el contorno de alambre en una sustancia jabonosa. Lo que tal vez muchos de ellos no sepan, es que la superficie creada con este método corresponde a una superficie mínima. Como comentábamos

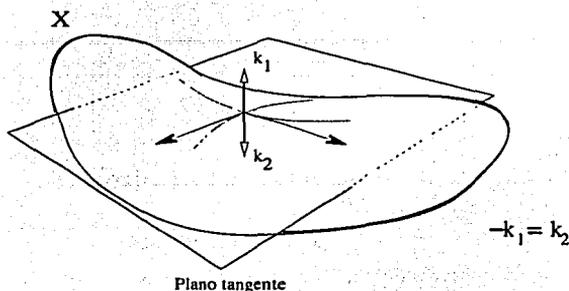


FIGURA 3.1. Vectores de curvatura k_1 y k_2 .

anteriormente, la superficie mínima es la idealización de esa película de jabón si eliminamos el peso de la película y la fuerza de gravedad.

El ejemplo anterior es una muestra de lo que se ha nombrado el Problema de Plateau, en honor del físico belga J.A.F. Plateau, aunque ya se había formulado anteriormente por Lagrange, Meusnier y otros matemáticos. El problema consiste en encontrar una superficie con la menor área posible, acotada por una curva cerrada de Jordan (Γ). En nuestro ejemplo, la curva cerrada de Jordan es el contorno de alambre, y la superficie de área mínima es la película de jabón. Para cada superficie obtenida de esta forma, la teoría de capilaridad asocia una energía potencial que es proporcional al área de la superficie; a menor área, menor energía potencial. Por lo tanto, por el principio de Bernoulli de trabajo virtual¹, las películas de jabón en equilibrio estable corresponden a superficies de área mínima.

Estas superficies necesariamente deben satisfacer la condición $H = 0$ y en consecuencia se les nombró superficies mínimas. Esto fue probado implícitamente por Lagrange para superficies no paramétricas en 1760 y posteriormente por Meusnier en 1776, quien usó la expresión analítica para la curvatura media y determinó dos superficies mínimas: el catenoide y el helicoide[D11].

3.2. Definición de Superficie mínima

A continuación enunciamos formalmente la definición de superficie mínima.

¹El Principio o Teorema de Johann Bernoulli, es un caso especial de la ley de conservación de la energía para fluidos en movimiento y establece que un fluido en equilibrio estable tiene una energía potencial igual a cero.

DEFINICIÓN 1a. Una superficie $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 es una superficie mínima si su función de curvatura media H satisface

$$H = 0. \quad (3.1)$$

El estudio de las superficies mínimas tuvo que evolucionar por muchos años antes de poder encontrar otra superficie diferente al catenoide y al helicoide (más de un siglo transcurrido). Durante ese tiempo y hasta la fecha, se han encontrado un sinnúmero de propiedades y características y uno de los puntos más relevantes para su evolución fue el descubrimiento de una estrecha relación que tienen la teoría de superficies mínimas y la teoría de variable compleja. De hecho, a partir de este descubrimiento (o de haber establecido esa relación), se incorporaron un conjunto de técnicas y formulaciones para encontrar explícitamente superficies mínimas

Conozcamos algunos resultados que establecen esa conexión. Para ver más detalles, puede consultar [Di1] pp 64.

TEOREMA 1. Sea $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$ una superficie mínima no paramétrica de clase C^2 definida en algún dominio convexo Ω de \mathbb{R}^2 . Entonces existe un difeomorfismo real analítico $\phi : \Omega \rightarrow \Omega^*$ de Ω sobre un dominio Ω^* simplemente conexo, con inversa real analítica $\psi : \Omega^* \rightarrow \Omega$, tal que $Z(u, v) = X(\psi(u, v))$ satisface las condiciones de conformalidad:

$$|Z_u|^2 = |Z_v|^2, \quad \langle Z_u, Z_v \rangle = 0. \quad (3.2)$$

TEOREMA 2. Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie regular de clase C^2 con curvatura media H y con un mapeo esférico $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces

$$\Delta_x X = 2HN,$$

donde Δ_x denota el operador de Laplace-Beltrami² sobre la superficie X .

Esto implica la siguiente caracterización de las superficies mínimas:

COROLARIO 1. Una superficie regular X de clase C^2 es una superficie mínima si y sólo si se cumple que

$$\Delta_x X = 0 \quad (3.3)$$

COROLARIO 2. Si $X(u, v)$ es una superficie regular de clase C^2 representada mediante una parametrización conforme, entonces

$$\Delta X = 2HX_u \wedge X_v, \quad (3.4)$$

En particular, X es una superficie mínima si y sólo si se cumple que

$$\Delta X = 0. \quad (3.5)$$

donde Δ denota el operador ordinario de Laplace $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$

Con los resultados anteriores, podemos dar una nueva definición para el concepto de superficie mínima, de la siguiente forma:

²El operador de Laplace-Beltrami sobre X se define como $\Delta_x f := \text{div}_x (\nabla_x f)$

DEFINICIÓN 1b. Una superficie $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 es una superficie mínima si satisface las ecuaciones

$$\Delta X = 0 \quad (3.6)$$

$$|X_u|^2 = |X_v|^2, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0 \quad (3.7)$$

sobre Ω .

La última definición utiliza las relaciones de conformalidad y considera superficies con puntos singulares o puntos de ramificación (*branch points*). Es decir, ya no es necesario que la superficie mínima sea una superficie regular en todos sus puntos, lo cual se necesita para el corolario (1).

Establezcamos ahora la definición de superficie adjunta.

DEFINICIÓN 2. Si una superficie mínima

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (3.8)$$

está definida sobre un dominio simplemente conexo Ω de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, definimos una superficie adjunta a $X(u, v)$ sobre Ω , mediante una parametrización

$$X^*(u, v) = (x^*(u, v), y^*(u, v), z^*(u, v)) \quad (3.9)$$

donde X_u^* y X_v^* satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$X_u = X_v^*, \quad X_v = -X_u^* \quad (3.10)$$

en Ω .

De la definición vemos que todas las superficies adjuntas a una superficie mínima dada X , difieren entre sí sólo por un vector constante; podríamos así hablar de la superficie adjunta $X^*(u, v)$ de alguna superficie mínima $X(u, v)$ definida sobre un dominio simplemente conexo de \mathbb{R}^2 .

De las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.10) deducimos que

$$\begin{aligned} \Delta X^* &= 2HX_u^* \wedge X_v^* \\ &= -2HX_v \wedge X_u \\ &= 2HX_u \wedge X_v \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$|X_u^*|^2 = |X_v^*|^2, \quad \langle X_u^*, X_v^* \rangle = 0,$$

esto es, la superficie adjunta X^* de una superficie mínima X es una superficie mínima.

Consideremos un mapeo armónico arbitrario $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un dominio simplemente conexo Ω de $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, y sea X^* el mapeo armónico adjunto a X . Entonces

$$f(w) := X(u, v) + iX^*(u, v), \quad w = u + iv \in \Omega \quad (3.11)$$

es un mapeo holomorfo de Ω sobre \mathbb{C}^3 con componentes

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= x(u, v) + ix^*(u, v) \\ \psi(w) &= y(u, v) + iy^*(u, v) \\ \chi(w) &= z(u, v) + iz^*(u, v)\end{aligned}$$

que puede considerarse como una curva holomorfa in \mathbb{C}^3 . Su derivada compleja $f' = \frac{df}{dw}$ está dada por

$$f' = X_u + iX_v^* = X_u - iX_v, \quad (3.12)$$

de donde se sigue que

$$\langle f', f' \rangle = |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2i \langle X_u, X_v \rangle. \quad (3.13)$$

Consecuentemente, las relaciones de conformalidad (3.7) se satisfacen si y solo si la relación de isotropía

$$\langle f', f' \rangle = 0 \quad (3.14)$$

se cumple.

Una curva holomorfa que satisface la relación (3.14) es llamada una *curva isotrópica*.

Utilizando lo anterior, obtenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 1. *Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie mínima sobre un dominio paramétrico simplemente conexo Ω en \mathbb{R}^2 , entonces la curva holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por (3.10) y (3.11), es una curva isotrópica. Recíprocamente, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ es una curva isotrópica en \mathbb{C}^3 , entonces*

$$X(u, v) := \Re(f(w)), \quad X^*(u, v) := \Im(f(w)) \quad (3.15)$$

definen dos superficies mínimas $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre Ω , siendo o no Ω simplemente conexo.

Ahora queremos definir la familia de *superficies mínimas asociadas* a una superficie mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada como la parte real de alguna curva isotrópica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$. Esto es

$$f(w) := X(u, v) + iX^*(u, v), \quad w = u + iv \in \Omega, \quad (3.16)$$

donde

$$\langle f'(w), f'(w) \rangle \equiv 0 \text{ sobre } \Omega \quad (3.17)$$

entonces, para toda $\theta \in \mathbb{R}$, la función

$$g(w, \theta) := e^{-i\theta} f(w), \quad w \in \Omega \quad (3.18)$$

describe una curva isotrópica, y

$$Z(w, \theta) := \Re \left\{ e^{-i\theta} f(w) \right\} = X(w) \cos(\theta) + X^*(w) \sin(\theta) \quad (3.19)$$

define una familia paramétrica de superficies mínimas con la propiedad que

$$Z(w, 0) = X(w), \quad Z\left(w, \frac{\pi}{2}\right) = X^*(w). \quad (3.20)$$

Las superficies $Z(w, \theta)$, $w \in \Omega$, son llamadas las *superficies mínimas asociadas* a la superficie $X(w)$, $w \in \Omega$. La relación (3.10) nos lleva a

$$\begin{aligned} Z_u &= X_u \cos \theta + X_u^* \sin \theta = X_u \cos \theta - X_v \sin \theta, \\ Z_v &= X_v \cos \theta + X_v^* \sin \theta = X_v \cos \theta + X_u \sin \theta, \end{aligned}$$

y utilizando la relación (3.7) tenemos

$$|Z_u|^2 = |Z_v|^2 = |X_u|^2 = |X_v|^2, \quad \langle Z_u, Z_v \rangle = 0. \quad (3.21)$$

de donde deducimos que cada una de las superficies que pertenece a la familia es una superficie mínima.

3.3. El Problema de Björling

Muchos de los más sofisticados ejemplos de superficies mínimas que podemos encontrar, provienen del uso de soluciones generales o de fórmulas de representación. En la última parte de la sección anterior, se presentó la superficie adjunta y la familia de superficies asociadas a una superficie mínima, que son una representación de superficies mínimas como la proyección de una curva isotrópica de \mathbb{C}^3 en \mathbb{R}^3 descubierta por Bonnet.

Dos de las fórmulas de representación más utilizadas son la fórmula de *Enneper-Weierstrass* y la fórmula de representación de *Weierstrass*. La fórmula de representación de *Enneper-Weierstrass* utiliza integrales que involucran una función holomorfa ϕ y una función meromorfa ψ para expresar a una superficie mínima siempre que $\phi\psi^2$ sea una función holomorfa. Por otro lado, la fórmula de representación de *Weierstrass* utiliza dos funciones holomorfas φ y η que no tengan ceros comunes, es decir, que $|\varphi|^2 + |\eta|^2 \neq 0$.

La solución encontrada por H.A. Schwarz para el Problema de Björling es otra fórmula de representación en términos de una curva analítica y una integral. Esta solución se utiliza para construir superficies mínimas muy interesantes que contienen a la curva como una geodésica o como una línea de curvatura. En esta sección enunciaremos el problema de Björling y los principales resultados de simetría encontrados por H.A. Schwarz.

Consideremos una banda real analítica

$$S = \{(c(t), n(t)) : t \in I\} \quad (3.22)$$

que consiste de una curva real-analítica $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\dot{c}(t) \neq 0$ (o al menos $\dot{c}(t) = 0$ en puntos aislados del intervalo I), y de un campo vectorial real-analítico $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a lo largo de c , con $|n(t)| \equiv 1$ y $\langle \dot{c}(t), n(t) \rangle \equiv 0$.

Asumamos que I es un intervalo abierto en \mathbb{R} .

El problema de Björling consiste en encontrar una superficie mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $J \subset \Omega$ tal que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$X(u, 0) = c(u) \text{ para } u \in J \quad (3.23)$$

$$N(u, 0) = n(u) \text{ para } u \in J \quad (3.24)$$

siendo N la normal de X , $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Como podemos ver en el planteamiento anterior, la banda real-analítica $S \subset \mathbb{R}^3$ es arbitraria. La única condición que se pide es que la curva $c(t)$ sea regular, o que su derivada se anule sólo en puntos aislados. La curva y el campo vectorial generan la banda que definirá a la superficie mínima.

A continuación se enunciarán una serie de resultados que nos permitirán trabajar con las superficies mínimas que nos competen.

TEOREMA 3. *Para cualquier banda real-analítica dada $S = \{(c(t), n(t)) : t \in I\}$, el correspondiente problema de Björling tiene exactamente una solución $X(u, v)$, dada por*

$$X(u, v) = \Re \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w n(z) \wedge dc(z) \right\}, \quad (3.25)$$

con $z = u + iv \in \Omega$, $u_0 \in I$, donde Ω es un dominio simplemente conexo con $I \subset \Omega$ y en el cual converge el desarrollo en serie de potencias tanto de c como de n .

El significado de la expresión (3.25) es el siguiente: primero se debe determinar una extensión holomorfa $c(u + iv)$ y $n(u + iv)$ de las funciones analíticas reales $c(t)$ y $n(t)$ con $t \in I$ para un dominio simplemente conexo Ω adecuado para contener a I y posteriormente se determina la integral de línea

$$\int_{u_0}^w n(z) \wedge dc(z) = \int_{u_0}^w n(z) \wedge c'(z) dz \quad (3.26)$$

donde $c'(z)$ es la derivada compleja de la función holomorfa $c(w)$.

COROLARIO 3. *Sea $X(u, v)$ la solución al problema de Björling dada por (3.25). Entonces se cumple que*

$$\tilde{X}(u, -v) = \Re \left\{ c(w) + i \int_{u_0}^w n(z) \wedge dc(z) \right\}, \quad (3.27)$$

con $w = u + iv$.

A partir de estos dos resultados se obtienen dos principios fundamentales de simetría para las superficies mínimas.

3.4. Simetrías en Superficies mínimas

Algunas de las propiedades de simetría de las superficies mínimas fueron descubiertas por H. A. Schwarz, aquí enunciaremos dos de estas propiedades y algunas de sus consecuencias en las superficies que hemos encontrado.

TEOREMA 4. *i) Toda línea recta contenida en una superficie mínima es un eje de simetría de dicha superficie.
ii) Si una superficie mínima interseca a algún plano E perpendicularmente, entonces E es un plano de simetría de la superficie.*

De hecho, este teorema es consecuencia inmediata de los siguientes

LEMA 1. Sea $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $w = u + iv \in \Omega$, una superficie mínima no constante cuyo dominio de definición Ω contiene algún intervalo I que pertenece al eje real.

i) Si para toda $u \in I$ los puntos $X(u, 0)$ están contenidos en el eje x , entonces tenemos

$$\begin{aligned}x(u, -v) &= x(u, v) \\y(u, -v) &= -y(u, v) \\z(u, -v) &= -z(u, v)\end{aligned}\tag{3.28}$$

ii) Si la curva $\Sigma = \{X(u, 0) : u \in I\}$ está contenida en el plano $E = xy$, y si la superficie X interseca E ortogonalmente en Σ , entonces se sigue que

$$\begin{aligned}x(u, -v) &= x(u, v) \\y(u, -v) &= y(u, v) \\z(u, -v) &= -z(u, v)\end{aligned}\tag{3.29}$$

LEMA 2. Sea $X(w)$, $w \in \Omega$ una superficie regular de clase $C^3(\Omega, \mathbb{R}^3)$, y sea $c(t) = X(\omega(t))$, $t \in I$, alguna curva regular sobre X definida por alguna C^3 -curva $\omega : I \rightarrow \Omega$ en Ω . Entonces

i) La curva c es una geodésica y una línea asintótica si y sólo si ésta es una línea recta.

ii) Sea c una geodésica sobre X . Entonces c es también una línea de curvatura si y sólo si ésta es una curva plana.

iii) Supóngase que c está contenida en un plano E . Entonces c es una línea de curvatura sobre X si y sólo si X interseca E a lo largo de c formando un ángulo constante φ (si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, entonces c es una geodésica)

La demostración de estos resultados puede ser consultada en [Di1], pp 123-134.

3.5. Curvas planas como generatrices para la solución de Schwarz

Como vimos en la sección (3.3), el planteamiento del problema de Björling requiere una curva real analítica $c(u) \subset \mathbb{R}^3$, $u \in I$ y un campo vectorial $n(u)$ que determinará a $c(u)$ como una línea de curvatura en una superficie mínima X . Sin embargo, la expresión utilizada por Gray para encontrar sus superficies mínimas es un caso particular de este planteamiento. Nuestro siguiente paso es tomar la condición inicial como una línea plana de curvatura contenida en uno de los planos xy , xz o yz , al igual que el campo vectorial $n(u)$. Las siguientes proposiciones nos llevarán a establecer la ecuación (1.1) a partir de la solución general (3.25).

PROPOSICIÓN 2. Sea $S = \{c(t), n(t) : t \in I\}$ una banda real analítica cuya línea de soporte $c(t)$, $t \in I$ es una línea recta. Entonces:

$$X(u, v) = \Re \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w n(z) \wedge dc(z) \right\}, \quad w = u + iv, \quad (3.30)$$

$u_0 \in I$, define una superficie mínima con $c(u) = X(u, 0)$ como geodésica. Además, c también es una línea asintótica de X , y la superficie normal $N(u, v)$ de X coincide con n sobre I , es decir, $N(u, 0) = n(u)$.

PROPOSICIÓN 3. Sea $c(t)$, $t \in I$ una curva regular real analítica contenida en el plano E con un vector normal e , sea φ un ángulo constante y sea

$$n(t) := e \cos(\varphi(t)) + \dot{c}(t) \wedge e \frac{1}{|c'(t)|} \sin(\varphi(t)),$$

Entonces, para $w = u + iv$ y $u_0 \in I$, tenemos:

$$X(w) = \Re \{ c(w) - ie \wedge [c(w) - c(u_0)] \cos(\varphi) \\ - i \sin(\varphi) \int_{u_0}^w \langle c'(z), c'(z) \rangle^{1/2} dz e \}$$

define una superficie mínima que contiene a $c(u) = X(u, 0)$ como una línea plana de curvatura. Además, X intersecta a E a lo largo de c en un ángulo constante φ . Finalmente, si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, entonces c se convierte en una geodésica plana sobre la superficie X dada por la expresión anterior.

Si elegimos a E como el plano xy , en particular obtenemos:

PROPOSICIÓN 4. Si $c(t) = (\xi(t), \zeta(t), 0)$, $t \in R$, es una curva regular real-analítica contenida en el plano $E = xy$, entonces

$$X(w) = \Re \left(\xi(w), \zeta(w), i \int_{\sigma}^w \sqrt{\xi'(z)^2 + \zeta'(z)^2} dz \right) \quad (3.31)$$

define una superficie mínima X que intersecta E perpendicularmente a lo largo de c . Más aún, la curva c es una línea plana de curvatura sobre X ; de hecho, c es una geodésica plana.

La demostración de que (3.31) define una superficie mínima en \mathbb{R}^3 es inmediata de la definición de curva isotrópica.

3.6. Ejemplos

Utilizando la expresión (3.31) podemos encontrar las dos primeras superficies mínimas que se descubrieron tomando al plano $E = xy$ y la curva

$c(t) = \{(\sin(t), \cos(t)), t \in [-\pi, \pi]\}$. La condición anterior define una circunferencia sobre el plano xy de radio unitario. Aplicando $c(t)$ en la expresión (3.31) obtenemos:

$$\begin{aligned} X(z) &= \Re \left(\sin(z), \cos(z), i \int_0^z dw \right), \quad z = x + iy, \\ &= \Re (\sin(z), \cos(z), iz), \\ &= (\sin(x) \cosh(y), \cos(x) \cosh(y), -y). \end{aligned}$$

que corresponde a la parametrización del catenoide. La figura (3.2(a)) muestra una imagen de esta superficie.

Ahora veamos como obtener la superficie adjunta mediante la expresión (3.31). Para ello deberemos considerar que

$$\begin{aligned} Z(w, \frac{\pi}{2}) &= \Re \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}} f(w) \right\} \\ &\Rightarrow \Im \left(\sin(z), \cos(z), i \int_0^z dw \right) \end{aligned}$$

donde $f(w) = X(w) + iX^*(w)$. Por lo tanto, la superficie adjunta la obtenemos mediante:

$$\begin{aligned} X^*(z) &= \Im \left(\sin(z), \cos(z), i \int_0^z dw \right) \\ &= \Im (\sin(z), \cos(z), iz), \\ &= (\sinh(y) \cos(x), \sinh(y) \sin(x), x) \end{aligned}$$

que corresponde a las ecuaciones paramétricas de la helicoides. La figura (3.2(b)) muestra una imagen de esta superficie.

El siguiente ejemplo que mostraremos es la superficie de Catalán. Sin embargo, no utilizaremos la cicloide

$$c(t) = (1 - \cos(t), t - \sin(t), 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

en su lugar utilizaremos la parábola

$$c(\varphi) = (\sinh(\varphi), \frac{\sinh^2(\varphi)}{2}, 0), \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

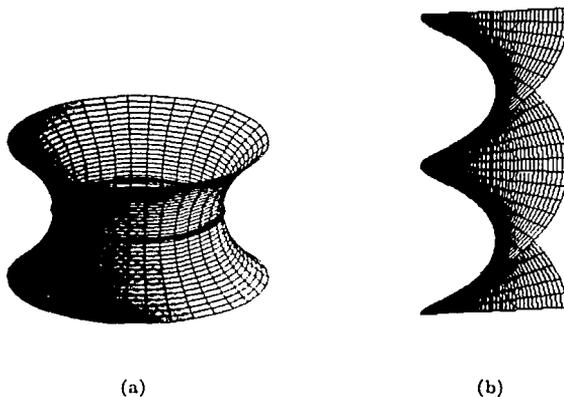


FIGURA 3.2. El catenoide y el helicoido

como lo mostramos en el capítulo 1. Entonces la parametrización de la superficie mínima es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \Re \left(\sinh(z), \frac{\sinh(z)^2}{2}, i \int_0^z \sqrt{1 + \sinh^2(w)} \cosh(w) dw \right), \quad z = x + iy, \\
 &= \Re \left(\sinh(z), \frac{\sinh(z)^2}{2}, i \int_0^z \cosh(w)^2 dw \right), \\
 &= \Re \left(\sinh(z), \frac{\sinh(z)^2}{2}, i(\cosh(z) \sinh(z) + z) \right) \\
 &= (\sinh(x) \cos(y), \\
 &\quad \frac{1}{2}(\sinh^2(x) \cos^2(y) - \cosh^2(x) \sin^2(y)), \\
 &\quad -(\sinh(x) \sin(y) \cos(y) + \cosh^2(x) \cos(y) \sin(y) + y))
 \end{aligned}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Las figuras (3.3(a)) y (3.3(b)) nos muestran las imágenes de la superficie de Catalán y de su conjugada, cuya ecuación es:

$$\begin{aligned}
 X^*(z) &= \Im \left(\sinh(z), \frac{\sinh(z)^2}{2}, i(\cosh(z) \sinh(z) + z) \right) \\
 &= (\cosh(x) \sin(y), \\
 &\quad \frac{1}{2} \sinh(x) \cos(y) \cosh(x) \sin(y), \\
 &\quad (\cosh(x) \cos(y)^2 \sinh(x) - \sinh(x) \sin(y)^2 \cosh(x) + x))
 \end{aligned}$$

NOO 1987
MAY 20 11:12

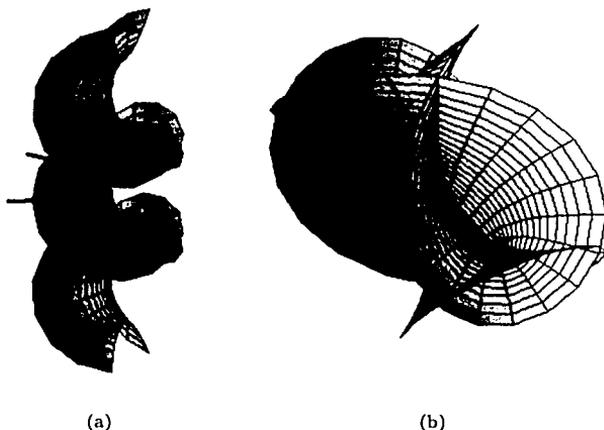


FIGURA 3.3. La superficie de Catalán y su conjugada

3.7. Dualidad de Björling

El ejemplo anterior muestra una interesante relación entre la parábola y la cicloide: ambas tienen la misma superficie de Björling. Por las propiedades de simetría enunciadas en la sección anterior, tenemos que un plano corta a una superficie mínima a lo largo de una geodésica si y sólo si el plano es un plano de simetría de la superficie que la corta perpendicularmente. Ahora, la superficie de Björling de una curva que tiene una línea de simetría tiene dos planos de simetría: el plano original que contiene a la curva y el plano perpendicular a éste que contiene a la línea de simetría.

Las propiedades de simetría nos indican que el segundo plano intersecta a la superficie en otra geodésica simétrica respecto a una línea. Estas observaciones se formalizan como una proposición que deriva del teorema (4):

PROPOSICIÓN 5. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie mínima tal que:

$$X(w) = \left(\operatorname{Re} \xi(w), \operatorname{Re} \zeta(w), \operatorname{Im} \int_0^w \sqrt{\xi'(w)^2 + \zeta'(w)^2} dw \right), \quad w = u + iv$$

donde $c(t) = (\xi(t), \zeta(t), 0)$, es una curva real analítica contenida en el plano $E = xy$, simétrica con respecto a una recta $l \subset E$, entonces:

- i) la superficie $X(u, v)$ tiene dos planos de simetría perpendiculares entre sí. El que contiene a la curva $c(t)$ y el que contiene a la línea de simetría l
- ii) La superficie $X(u, v)$ contiene, al menos, dos geodésicas planas

La demostración es un consecuencia directa del teorema (4)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

DEFINICIÓN 3. Sea $c(t), t \in \mathbb{R}$ una curva real-analítica simétrica con el eje y , y sea $X(u, v)$ la superficie mínima generada a través de la expresión (3.31), donde $X(u, 0) = c(u)$. Entonces $cp(v) = X(0, v)$ es una geodésica plana sobre X . A la curva $cp(t)$ se le llama la geodésica perpendicular conjugada a $c(t)$ bajo Björling.

Las curvas $c(t)$ y $cp(t)$ son, de cierto modo, curvas duales entre ellas. Para ser más precisos: la dualidad se da entre los objetos que consisten de una curva y un punto de intersección de la curva con una línea de simetría. Nosotros podremos llamar a este par de curvas *curvas Björling duales* entre ellas. Así, el círculo y la catenaria son *Björling duales* cuya superficie común es el catenoide, y la parábola y la cicloide tienen como superficie común a la superficie de Catalán.

40

El catenoide elíptico

4.1. Catenoide elíptico

Los ejemplos mostrados en el capítulo anterior (el catenoide y la superficie de Catalán) se concibieron para mostrar dos de las curvas más sencillas a las que se les podía aplicar la solución del problema de Björling: la circunferencia y la parábola. Ya que ambas pertenecen a la familia de las curvas cónicas, es inmediato pensar que sucede con la elipse y con la hipérbola. De esta forma, apliquemos la fórmula (3.31) a una elipse de semiejes $a, b > 0$ tal que $a > b$, parametrizada de la siguiente manera:

$$c(t) = (b \cos(t), a \sin(t), 0) \quad (4.1)$$

entonces tendremos que:

$$X(z) = \Re \left(b \cos(z), a \sin(z), i \int_0^z \sqrt{b^2 \sin^2(w) + a^2 \cos^2(w)} dw \right) \quad (4.2)$$

o lo que es lo mismo:

$$X(z) = \Re \left(b \cos(z), a \sin(z), ai \int_0^z \sqrt{1 - e^2 \sin^2(w)} dw \right) \quad (4.3)$$

donde e es la excentricidad de la elipse dada por: $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. La integral en la fórmula anterior no puede ser resuelta directamente por MapleV ni Mathematica más allá de los puntos de ramificación, y se debe a que tenemos una función multivaluada como integrando.

Utilizando las funciones elípticas de Jacobi, haremos el cambio de variable $sn(u, e) = \sin(z)$ para obtener:

$$z = \arcsin(sn(u, e)) \quad (4.4)$$

de donde

$$\begin{aligned} dz &= \frac{sn'(u, e) du}{\sqrt{1 - sn^2(u, e)}} \\ &= \frac{cn(u, e) dn(u, e) du}{cn(u, e)} \\ &= dn(u, e) du \end{aligned}$$

así nuestra expresión queda de la manera siguiente:

$$\Re \left(b \operatorname{cn}(w, e), a \operatorname{sn}(w, e), -ia \int_0^w \operatorname{dn}^2(\eta, e) d\eta \right) \quad (4.5)$$

En base a lo expuesto en el capítulo 2, "Funciones elípticas de Jacobi", nuestra superficie se expresa en términos de funciones meromorfas y doblemente periódicas. Sin embargo, el integrando en la fórmula anterior es una función meromorfa con la característica de que todos sus polos tienen residuo cero. Lo anterior nos indica que el integrando es una función bien definida de la variable $w \in \mathbb{C} - \{\text{polos}\}$. Para obtener la imagen correcta del catenoide elíptico, tenemos que mapear distintas regiones del dominio de manera independiente para evitar los polos. Debido a que las funciones de Jacobi tienen un dominio fundamental paralelo a los ejes real e imaginario, las regiones también se tomarán paralelas a los ejes.

Consideremos la región $L = \{(x, y) \mid -\frac{1}{2}K' < y < \frac{1}{2}K'\}$. La figura (4.1) muestra un comportamiento muy semejante al catenoide (de donde obtuvo su nombre de catenoide elíptico). Sin embargo, no presenta canales ni aristas como sucede con las imágenes obtenidas a través de la parametrización original. Por supuesto, esto se debe a que no tocamos los puntos de ramificación.

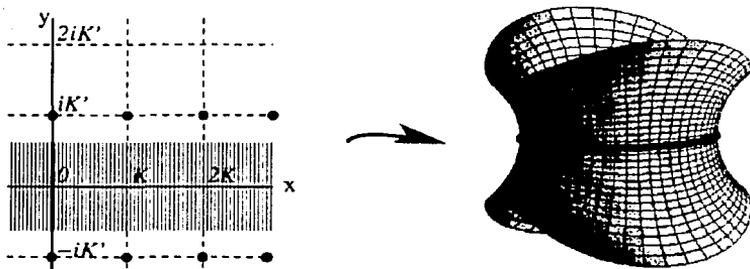


FIGURA 4.1. Una sección horizontal del catenoide elíptico

Ahora consideremos la región $L = \{(x, y) \mid \frac{K}{2} < x < \frac{3K}{2}\}$. En esta región se presentan los puntos de ramificación de la superficie, sin embargo, se obtiene el comportamiento correcto a través de la integral $\int dn^2(w, e)dw$. La figura (4.2) nos muestra ese segmento de la superficie de manera correcta. Es interesante ver que el catenoide elíptico tenga un comportamiento muy similar al presentado por la superficie de Catalán.

Veamos ahora que si tomamos la región $L = \{(x, y) \mid \frac{3K'}{2} < y < \frac{5K'}{2}\}$, obtenemos un segmento similar a la primera banda, pero ahora se obtiene el sentido inverso en la superficie. De esta forma: si recorremos la línea $y = 2K'$ a partir de $x = 0$ y en sentido positivo (de izquierda a derecha) de las x 's, la superficie se construirá en sentido negativo de derecha a izquierda. Al contrario de la línea $y = 0$ que conserva el sentido de izquierda a derecha en la superficie. Por lo tanto, un dominio fundamental sobre el cero para el

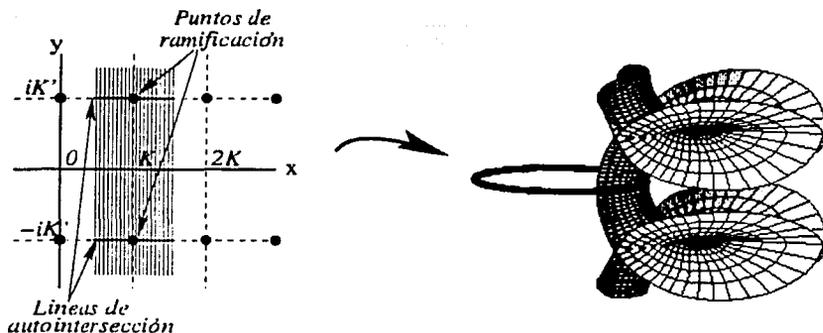


FIGURA 4.2. Una sección vertical del catenoide elíptico

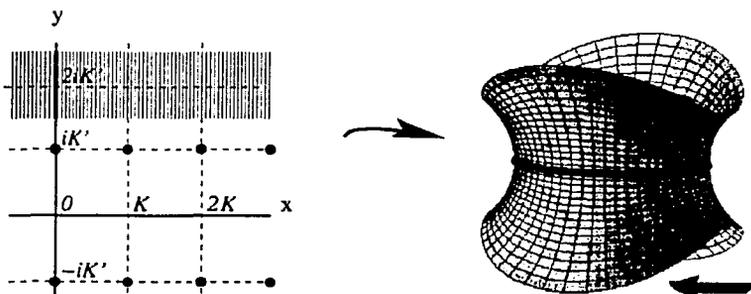


FIGURA 4.3. Otra sección horizontal del catenoide elíptico

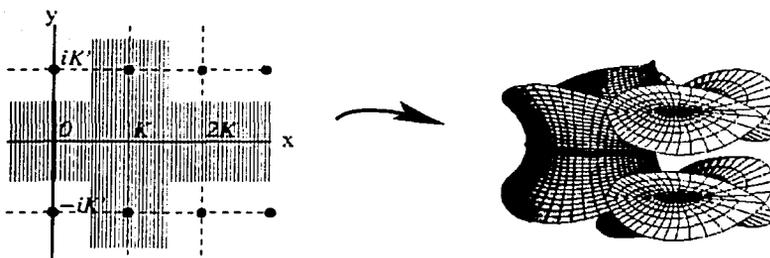


FIGURA 4.4. Dos secciones del catenoide elíptico

catenoide elíptico es:

$$D(0) = \{z = x + iy : -2K < x < 2K, -K' < y < 3K'\} \quad (4.6)$$

asimismo, vemos que la superficie es periódica en el sentido del eje real, por lo que solo bastará considerar una banda de anchura $4K$ para obtener toda la superficie.

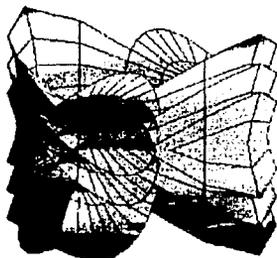


FIGURA 4.5. El catenoide elíptico

4.2. Helicoide elíptico

La superficie mínima adjunta del catenoide es el helicoide que se muestran en la sección 3.6 del capítulo anterior; por este motivo, Gray consideró nombrar a la superficie mínima adjunta del catenoide elíptico el *Helicoide elíptico*.

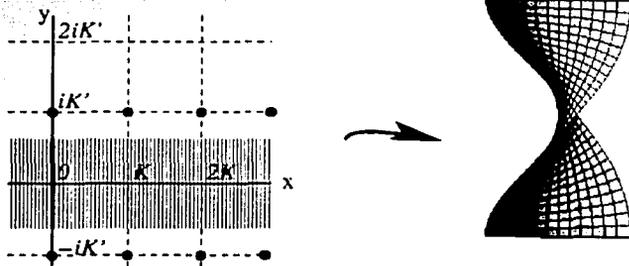


FIGURA 4.6. Una sección horizontal del helicoide elíptico

Por construcción, la superficie mínima adjunta se encuentra al obtener la parte imaginaria de la curva isotrópica $f(w)$ con $w = u + iv$, tal que:

$$f(w) := X(w) + iX^*(w)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Aplicado la solución de Schwarz para el problema de Björling, la superficie mínima adjunta se obtiene de la siguiente manera:

$$X^*(w) = \Im \left(\xi(w), \zeta(w), i \int_0^w \sqrt{\xi'(z)^2 + \zeta'(z)^2} dz \right)$$

donde $c(t) = (\xi(t), \zeta(t))$ es una curva real analítica.

Considerando ahora nuestro caso concreto, tomemos nuevamente la curva $c(t) = (b \operatorname{cn}(t, e), a \operatorname{sn}(t, e))$, $t \in \mathbb{R}$ y $a > b$, la cual es una elipse de excentricidad $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ en términos de las funciones elípticas de Jacobi. La superficie mínima adjunta del catenoide elíptico se encuentra mediante la expresión:

$$X^*(w) = \Im \left(b \operatorname{cn}(w, e), a \operatorname{sn}(w, e), i a \int_0^w dn^2(\eta, e) d\eta \right),$$

que es una superficie bien definida fuera de los polos de $dn^2(w, e)$.

Para proceder a analizar el comportamiento de esta superficie, nuevamente utilizaremos distintas regiones del dominio y revisaremos su comportamiento sobre la superficie. Iniciemos con la región $L = \{(x, y) \mid -\frac{K'}{2} < y < \frac{K'}{2}\}$. En la figura (4.6) vemos un segmento de esta banda.

La selección de la región anterior se concibe como una vecindad del eje real, que genera una superficie similar a la helicoide. Este es el mismo comportamiento que tiene el "catenoide elíptico" de manera local, sin embargo, si tomamos una vista superior del helicoide elíptico, podemos ver que no "gira en círculos", sino en forma de flor de dos pétalos. Esto puede verse en la figura (4.7) donde, los puntos más alejados del centro, corresponden a los puntos cercanos a $2mK + iK'$ y $2mK - iK'$, con $m \in \mathbb{Z}$, mientras que los puntos donde se contrae la superficie hacia su eje (hacia el centro de la helicoide) corresponden a puntos cercanos a $(2m-1)K + iK'$ y $(2m-1) - iK'$.

En la figura (4.7) las dos imágenes superiores corresponden al mismo segmento de la superficie pero con vistas distintas. en ellas se puede ver un comportamiento similar a la helicoide y se aprecia ligeramente la deformación en la vista superior. Por el contrario, las dos imágenes inferiores corresponden a un dominio más amplio y la deformación en ambas vistas es evidente. Las secciones angulares que se ven en estas dos imágenes se generan por la construcción de la malla (ya que no se realiza una interpolación de puntos). No obstante, son excelentes ejemplos para apreciar las deformaciones que sufre el helicoide cuando tratamos de obtener la superficie desde un dominio más amplio.

A continuación, consideramos la región $L = \{(x, y) \mid \frac{K}{2} < x < \frac{3K}{2}\}$. Esta es la misma región que consideramos en el segundo caso para el catenoide elíptico. Si revisamos el comportamiento de dicha región en el catenoide (elíptico), encontramos una gran similitud con la superficie de Catalán (de manera cualitativa), así que esperamos un comportamiento similar a la superficie adjunta de Catalán para esta superficie adjunta. Efectivamente ese

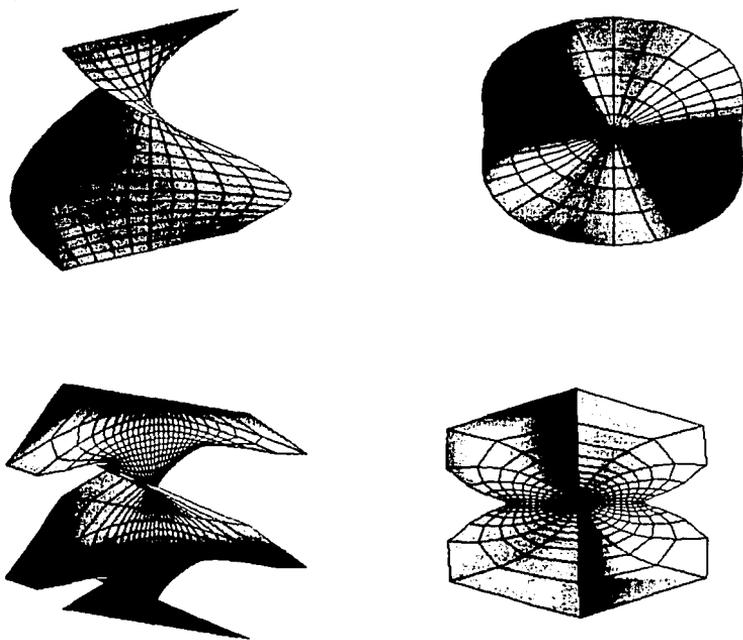


FIGURA 4.7. Dos secciones verticales del helicoido elíptico

comportamiento puede verse en la figura (4.8), donde también puede observarse que la superficie es periódica en el sentido del eje imaginario (que también es una característica de la superficie de Catalán). Ambos comportamientos (por un lado la similitud con la helicoido de manera local y por otro la similitud con la superficie de Catalán) son imaginables si consideramos a la superficie de Catalán y al Catenoide como casos particulares de las superficies obtenidas a partir de curvas cónicas. Al final de este capítulo, se revisará brevemente el caso en el cual la curva generatriz para el problema de Björling sea una hipérbola.

La siguiente región por considerar será $L = \{(x, y) | \frac{3K'}{2} < y < \frac{5K'}{2}\}$. Para el caso del catenoide elíptico, esta región generaba una superficie similar a la región $\{(x, y) | -\frac{K'}{2} < y < \frac{K'}{2}\}$, pero desplazada verticalmente y con sentido inverso. En la superficie adjunta, no existe el desplazamiento

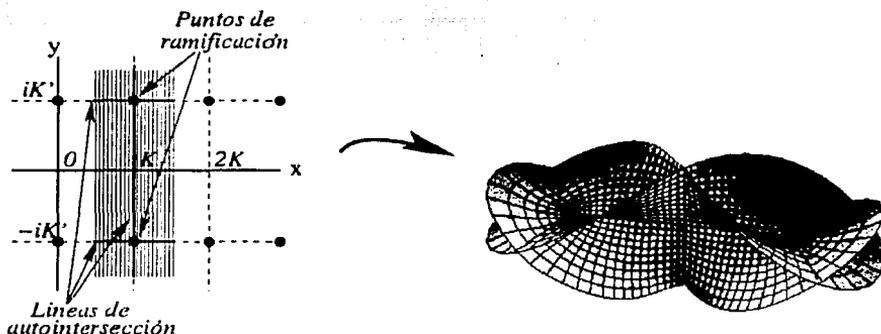


FIGURA 4.8. Una sección vertical del helicoide elíptico

vertical, pero el sentido inverso se mantiene, lo que genera una superficie helicoidal en sentido inverso a la primera región, como puede verse en la figura (4.9). La figura (4.10) muestra una superposición de las tres regiones anteriores. Como podemos deducir de la figura (4.8), la superficie es periódica en sentido del eje imaginario, así que solo necesitaremos una región de anchura $4iK'$ para obtener la superficie completa. Como las hélices se desarrollan a lo largo de las regiones de manera continua, la superficie estará compuesta de una infinidad de "moños" como el que observamos en la figura (4.8), uno arriba del otro.

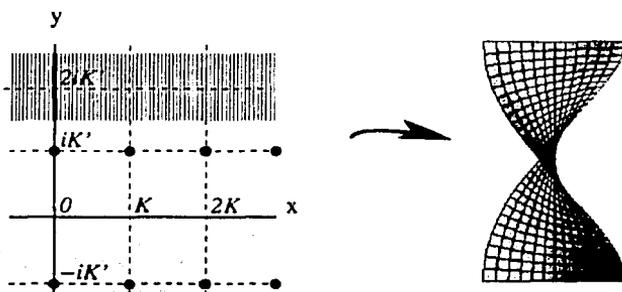


FIGURA 4.9. Otra sección horizontal del helicoide elíptico

4.3. Un paso a la generalización

Las funciones elípticas de Jacobi nos permitieron encontrar las superficies correctas para el catenoide y el helicoide elípticos. De hecho, lo que

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

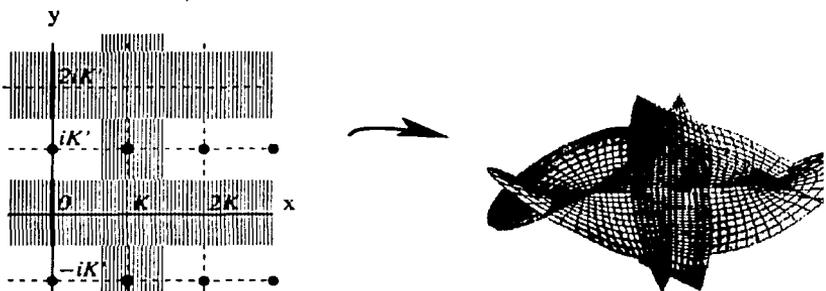


FIGURA 4.10. Superposición de secciones del helicoides elíptico

obtuvimos anteriormente es una familia de superficies que dependen de un parámetro $k = e$, que corresponde a la excentricidad de la elipse que se toma como generatriz. De esta forma, una circunferencia es una elipse de excentricidad $e = 0$ y por las características de las funciones de Jacobi, observamos que $sn(w, 0) = \sin(w)$, $cn(w, 0) = \cos(w)$ y $dn(w, 0) = 1$. Por lo tanto, el catenoide y el helicoides son casos particulares de las familias encontradas anteriormente.

Sin embargo, el catenoide se construye a partir de una función simplemente periódica, y se debe al límite obtenido cuando $e \rightarrow 0$. La retícula creada para las funciones de Jacobi, tienen como base K y K' . Cuando $e \rightarrow 0$ entonces $K \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y $K' \rightarrow \infty$, razón por la cual, la retícula generada por $L(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 = 2iK'$, $\lambda_2 = 4K$ degenera en un dominio simplemente periódico de bandas de anchura 2π .

La superficie de Catalán también es un caso particular de esta familia, donde $e \rightarrow 1$. Para obtener dicho límite, primero debemos hacer otra parametrización de la curva generatriz. El problema que se presenta con la parametrización actual es que las elipses tienen su centro en el origen y cuando $e \rightarrow 1$ pueden suceder dos cosas: a) la elipse degenera en un segmento de recta si a permanece fija y b tiende a cero; b) la elipse degenera en un par de rectas si b permanece fija y a tiende a infinito. El siguiente capítulo está dedicado a encontrar esa parametrización y obtener los límites cuando $e \rightarrow 0$ y $e \rightarrow 1$.

Ahora falta un caso más relevante: encontrar la solución al problema de Björling asociada a una hipérbola. Aunque las cosas parecen complicarse un poco, las funciones de Jacobi también nos ofrecen una solución para este caso: una curva cónica de excentricidad $e > 1$.

Para encontrar la superficie cuya generatriz es una hipérbola, haremos un pequeño truco: rotaremos el plano complejo 90° de la siguiente manera:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$(a \cosh(i z), b \sinh(i z)) = (a \cos(z), i b \sin(z))$ para obtener:

$$X(z) = \Re \left(a \cos(z), i b \sin(z), i \int_0^z \sqrt{a^2 \sin^2(w) - b^2 \cos^2(w)} dw \right) \quad (4.7)$$

trabajando con el integrando tenemos:

$$\begin{aligned} i \sqrt{a^2 \sin^2(w) - b^2 \cos^2(w)} &= \sqrt{b^2 \cos^2(w) - a^2 \sin^2(w)} \\ &= \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2(w) - a^2 \sin^2(w)} \\ &= b \sqrt{1 - \frac{b^2 + a^2}{b^2} \sin^2(w)} \end{aligned}$$

y haciendo el cambio de variable $\sin(z) = sn(w, e)$ tendremos una situación análoga a la presentada en la elipse, como se ve a continuación:

$$X(z) = \Re \left(a \operatorname{cn}(w, e), i b \operatorname{sn}(w, e), b \int_0^w \operatorname{dn}^2(\eta, e) d\eta \right) \quad (4.8)$$

con la diferencia que en este caso la excentricidad $e > 1$.

Utilizando las ecuaciones de transformación del módulo, y poniendo el nuevo módulo como $\kappa = \frac{1}{e} < 1$ obtendremos:

$$X(w) = \Re \left(a \operatorname{dn}\left(\frac{w}{\kappa}, \kappa\right), i b \kappa \operatorname{sn}\left(\frac{w}{\kappa}, \kappa\right), b \int_0^w \operatorname{cn}^2\left(\frac{\eta}{\kappa}, \kappa\right) d\eta \right) \quad (4.9)$$

o de otra manera:

$$X(w) = \Re \left(a \operatorname{dn}(ew, \frac{1}{e}), i \frac{b}{e} \operatorname{sn}(ew, \frac{1}{e}), b \int_0^w \operatorname{cn}^2(e\eta, \frac{1}{e}) d\eta \right) \quad (4.10)$$

Finalmente, sabemos que los polos del producto de cualesquiera dos funciones de Jacobi (sn , cn o dn) tienen residuo cero, en particular $\operatorname{cn}^2(e\eta, e)$, debido a que las tres funciones elípticas de Jacobi comparten los mismos polos. Lo anterior indica que la integral $\int \operatorname{cn}^2(e\eta, \frac{1}{e}) d\eta$ es univaluada y está bien definida en $C - \{\text{polos}\}$.

Un caso muy especial se genera con la hipérbola equilátera, donde $a = b$. Si tomamos la hipérbola equilátera unitaria, obtendremos:

$$X(w) = \Re \left(\operatorname{cn}(w, \sqrt{2}), i \operatorname{sn}(w, \sqrt{2}), \int_0^w \operatorname{dn}^2(\eta, \sqrt{2}) d\eta \right), \quad (4.11)$$

y aplicando las transformaciones del módulo se obtiene:

$$X(w) = \Re \left(\operatorname{dn}(\sqrt{2}w, \frac{1}{\sqrt{2}}), \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sn}(\sqrt{2}w, \frac{1}{\sqrt{2}}), \int_0^w \operatorname{cn}^2(\sqrt{2}\eta, \frac{1}{\sqrt{2}}) d\eta \right) \quad (4.12)$$

Como dato interesante, la expresión anterior puede traducirse en funciones lemniscáticas de la siguiente forma:

$$X(w) = \Re \left(\frac{1}{\sqrt{1 + sl^2(w)}}, i \frac{sl^2(w)}{\sqrt{1 + sl^2(w)}}, \int_0^w cl^2(\eta) d\eta \right) \quad (4.13)$$

donde la función *seno lemniscático* se define como la función inversa de la integral

$$w = \int_0^\varphi \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}} d\eta, \quad (4.14)$$

por lo tanto

$$sl(w) = \varphi. \quad (4.15)$$

Las funciones elípticas de Jacobi nos ofrecen una mejor comprensión del comportamiento de las superficies mínimas además de ser funciones generalizadas. Para las personas interesadas en el estudio de las funciones lemniscáticas, pueden revisar [M1].

Regresemos al análisis de la superficie obtenida a partir de la hipérbola. El procedimiento será idéntico al que utilizamos para las dos superficies anteriores, así que nuestro primer paso será definir las regiones que se utilizarán como parte del dominio. La primera región es la misma que hemos utilizado anteriormente: $L = \{(x, y) | -\frac{K'}{2} < y < \frac{K'}{2}\}$. La parametrización que utilizamos para la hipérbola, hace una rotación del plano complejo en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, por lo que la hipérbola será creada por el eje imaginario, al contrario de la elipse que se dibujaba con el eje real. La figura (4.11) muestra el segmento de superficie donde el eje imaginario se mapea a la hipérbola dibujada en el centro de la superficie y el eje real se mapea verticalmente.

Ahora vemos que las singularidades se encuentran sobre el eje real. Nuevamente, esto se debe a la parametrización de la hipérbola, que se obtuvo mediante una rotación del plano complejo. Como se aprecia en la imagen, el comportamiento es cualitativamente similar al de la superficie de Catalán y al del catenoide elíptico en sus vértices de mayor curvatura.

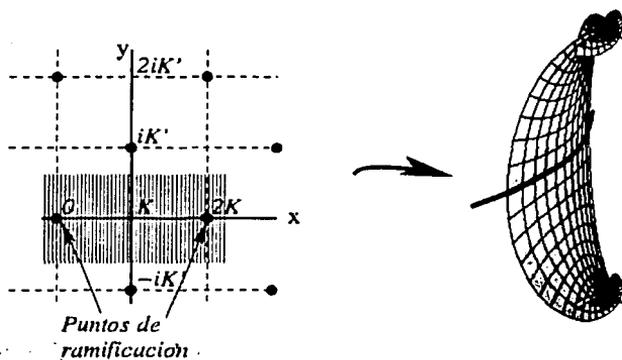


FIGURA 4.11. Una sección horizontal de la hipérbola

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

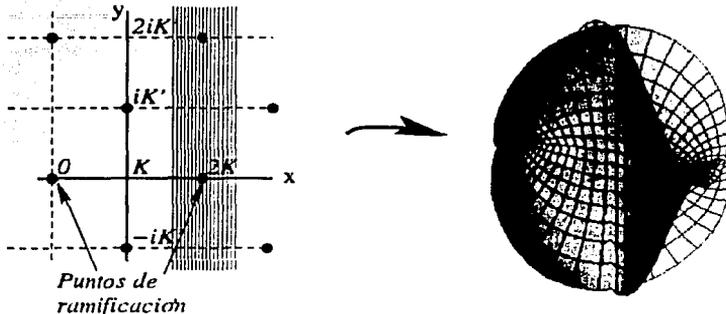


FIGURA 4.12. Una sección vertical de la hipérbola

La siguiente región resulta ser muy interesante, por su parecido con las superficies adjuntas y no con los *Björlings* originales. Esta banda corre en el sentido del eje imaginario y toma valores reales entre $\frac{K}{2}$ y $\frac{3K}{2}$. La similitud con las superficies adjuntas a Catalán y al catenoide elíptico es asombrosa, lo que podría establecer una relación estrecha entre las superficies originales y sus superficies adjuntas... ¡sería maravilloso! La figura (4.12) muestra el gran parecido con la superficie adjunta del catenoide elíptico, y de la misma forma, tenemos una superficie que es periódica en el sentido del eje imaginario.

La última región que visualizaremos, es $L = \{(x, y) | \frac{3K'}{2} < y < \frac{5K'}{2}\}$. Esta región dibuja la superficie correspondiente a la segunda hoja de la hipérbola, y el eje imaginario recorre a dicha hoja en el mismo sentido de izquierda a derecha (desde el centro de la hipérbola, una hoja se recorre en el sentido de las manecillas del reloj mientras que la otra hoja se recorre en sentido inverso). La figura (4.13) muestra las tres secciones superpuestas que dan una idea de la superficie global.

La figura (4.14) contiene imágenes obtenidas en MapleV para la superficie adjunta en tres vistas diferentes. La imagen (4.14.b) es una vista lateral de la superficie, mientras que la imagen (4.14.c) es una vista superior de la misma superficie.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

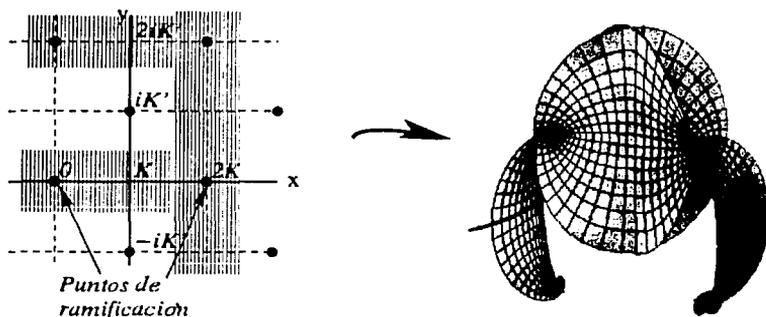


FIGURA 4.13. Tres secciones superpuestas de la hipérbola

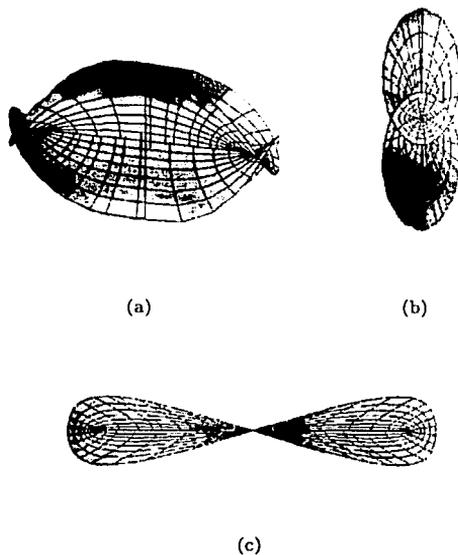


FIGURA 4.14. Tres vistas de la superficie adjunta

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 5

En busca de una fórmula general

Ya que las superficies anteriores fueron generadas a partir de las curvas cónicas sin ningún problema, nuestra tarea en esta sección es crear una forma general para estas superficies, basada en una generalización de la ecuación polar.

Definamos una curva cónica C , como el conjunto de puntos cuya distancia al foco $F = (0, a)$, es proporcional a la línea recta $L = (x, -\frac{a}{e})$, de la siguiente manera:

$$d(F, p) = e d(p, L) \tag{5.1}$$

donde $p = (x, y)$ es cualquier punto sobre la curva y e es la excentricidad de la curva cónica. Realizando las operaciones y sustituciones obtenemos la siguiente ecuación:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = e \sqrt{(x-x)^2 + (y+\frac{a}{e})^2} \tag{5.2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = e y + a \tag{5.3}$$

$$x^2 + y^2 - 2a y + a^2 = e^2 y^2 + 2ae y + a^2 \tag{5.4}$$

$$x^2 + y^2 = e^2 y^2 + 2a y + 2ae y \tag{5.5}$$

y sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $y = r \sin(\phi)$ obtendremos:

$$r^2 = e^2 r^2 \sin^2(\phi) + 2a(1+e)r \sin(\phi) \tag{5.6}$$

como r no puede ser nulo, obtenemos la ecuación:

$$r = \frac{2a(1+e) \sin(\phi)}{1 - e^2 \sin^2(\phi)} \tag{5.7}$$

esta ecuación polar nos genera una familia de curvas cónicas con vértice en el origen y foco en el punto $F = (0, a)$. Cuando $e \geq 1$, existirán puntos de discontinuidad en $e^2 \sin^2(\phi) = 1$. Sin embargo, esta ecuación genera a todas las curvas cónicas, incluso ambas ramas de las hipérbolas.

El siguiente paso es encontrar el valor de a que nos facilitará la resolución de Superficie de Catalán. Tomemos la ecuación $x^2 + y^2 = e^2 y^2 + 2a(1+e)y$. Una parábola puede ser vista como una elipse de excentricidad 1. Así, la

sustitución de éste valor para e nos lleva a la ecuación:

$$x^2 + y^2 = y^2 + 4a y \quad (5.8)$$

$$x^2 = 4a y \quad (5.9)$$

Para obtener la superficie de Catalán, buscamos la parábola con ecuación $x^2 = 2y$, entonces $a = \frac{1}{2}$.

Veamos como se comporta en los valores $e = 1$ y $e = 0$. Sea la ecuación paramétrica de esta familia de cónicas

$$C_e = (r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \quad (5.10)$$

$$= \left(\frac{(1+e) \sin(\phi)}{1-e^2 \sin^2(\phi)} \cos(\phi), \frac{(1+e) \sin(\phi)}{1-e^2 \sin^2(\phi)} \sin(\phi) \right) \quad (5.11)$$

para $e = 0$ tenemos:

$$(\sin(\phi) \cos(\phi), \sin^2(\phi)) \quad (5.12)$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro en $c = (0, \frac{1}{2})$. Por otro lado, si $e = 1$ tenemos:

$$(2 \tan(\phi), 2 \tan^2(\phi)) \quad (5.13)$$

$$\left(2 \tan(\phi), \frac{1}{2} (2 \tan(\phi))^2 \right) \quad (5.14)$$

haciendo el cambio de variable $t = 2 \tan(\phi)$, obtenemos:

$$\left(t, \frac{1}{2} t^2 \right) \quad (5.15)$$

que es la ecuación paramétrica de una parábola con vértice en el origen y foco en $F = (0, \frac{1}{2})$.

Ahora que hemos encontrado una forma general para expresar a las curvas cónicas en términos de su excentricidad, utilicemos ésta ecuación para definir las superficies mínimas a partir de la solución al problema de Björling. Primero debemos utilizar el cambio de variable propuesto en secciones anteriores, para hacer uso de las funciones elípticas de Jacobi. El cambio de variable $\sin(\phi) = \text{sn}(u, e)$ nos lleva a la siguiente ecuación paramétrica:

$$C_e = \left(\frac{(1+e) \text{sn}(u, e) \text{cn}(u, e)}{dn^2(u, e)}, \frac{(1+e) \text{sn}^2(u, e)}{dn^2(u, e)} \right) \quad (5.16)$$

$$= (1+e) \left(\frac{\text{sn}(u, e) \text{cn}(u, e)}{dn^2(u, e)}, \frac{\text{sn}^2(u, e)}{dn^2(u, e)} \right) \quad (5.17)$$

Estas curvas tienen una extensión analítica fuera de los ceros de $dn(u, e)$. Para construir la superficie mínima que contenga a dichas curvas como geodésicas, aplicaremos la fórmula (3.31) a la familia de curvas mostrada en la expresión anterior. Antes de ello, encontraremos las derivadas de cada coordenada y los cuadrados correspondientes haciendo la simplificación de manera independiente. Por simplicidad, utilizaremos sn en lugar de $\text{sn}(u, e)$.

Como la variable u y el parámetro e no se modifican no existirá ambigüedad en este proceso.

Siendo que:

$$sn'(u, e) = cn(u, e) dn(u, e) \quad (5.18)$$

$$cn'(u, e) = -sn(u, e) dn(u, e) \quad (5.19)$$

$$dn'(u, e) = -e^2 sn(u, e) cn(u, e) \quad (5.20)$$

$$(dn^2(u, e))' = -2e^2 dn(u, e) sn(u, e) cn(u, e) \quad (5.21)$$

$$(sn^2(u, e))' = 2sn(u, e) cn(u, e) dn(u, e) \quad (5.22)$$

busquemos las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{sn \, cn}{dn^2}\right)' &= \frac{(sn'cn + cn'sn)dn^2 - sn \, cn(-2e^2dn \, cn \, sn)}{dn^4} \\ &= \frac{(cn^2dn - sn^2dn)dn^2 + 2e^2dn \, cn \, sn}{dn^4} \\ &= \frac{(cn^2 - sn^2)dn^2 + 2e^2sn^2cn^2}{dn^3} \\ &= \frac{(1 - sn^2 - sn^2)(1 - e^2sn^2) + 2e^2sn^2(1 - sn^2)}{dn^3} \\ &= \frac{1 - 2sn^2 + e^2sn^2}{dn^3} \\ &= \frac{2cn^2 - dn^2}{dn^3} \end{aligned} \quad (5.23)$$

por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{sn^2}{dn^2}\right)' &= \frac{2sn \, cn \, dn \, dn^2 - (-2e^2dn \, sn \, cn)sn^2}{dn^4} \\ &= \frac{2sn \, cn \, dn^2 + 2e^2cn \, sn^3}{dn^3} \\ &= \frac{2cn \, sn(dn^2 + e^2sn^2)}{dn^3} \\ &= \frac{2cn \, sn}{dn^3} \end{aligned} \quad (5.24)$$

aplicando la fórmula (3.31) a la ecuación paramétrica obtenemos:

$$\begin{aligned} X(z) &= (1 + e) \Re \left(\frac{sn(z, e) \, cn(z, e)}{dn^2(z, e)}, \frac{sn^2(z, e)}{dn^2(z, e)} \right) \\ &= i \int_{z_0}^z \sqrt{\left(\frac{2cn(w, e) - dn^2(w, e)}{dn^3(w, e)}\right)^2 + \left(\frac{2cn(w, e)sn(w, e)}{dn^3(w, e)}\right)^2} dw \end{aligned}$$

desarrollando el radicando en la tercera expresión tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2cn^2 - dn^2}{dn^3}\right)^2 + \left(\frac{2cn sn}{dn^3}\right)^2 &= \frac{4cn^4 - 4cn^2 dn^2 + dn^4 + 4cn^2 sn^2}{dn^6} \\ &= \frac{4cn^2(cn^2 - dn^2 + sn^2) + dn^4}{dn^6} \\ &= \frac{4e^2 cn^2 sn^2 + dn^4}{dn^6} \end{aligned}$$

de donde la ecuación de Björling se convierte en:

$$X(z) = (1 + e)\Re \left(\frac{sn(z, e) cn(z, e)}{dn^2(z, e)}, \frac{sn^2(z, e)}{dn^2(z, e)}, i \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{4e^2 cn^2(w, e) sn^2(w, e) + dn^4(w, e)}{dn^6(w, e)}} dw \right) \quad (5.25)$$

bastará un poco de álgebra para determinar la correspondencia con el Catenoide y la Superficie de Catalán.

Sustituyendo $e = 0$ en la expresión anterior y considerando la identidad $sn(z, 0) = \sin(z)$ tendremos:

$$X = \Re (\sin(z) \cos(z), \sin^2(z), i(z - z_0)) \quad (5.26)$$

que corresponde a la ecuación del catenoide con centro en el punto $P = (0, \frac{1}{2}, 0)$.

Ahora hagamos $e = 1$, por la correspondencia estipulada en la sección (2.2), tenemos:

$$sn(u, 1) = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} \quad (5.27)$$

$$cn(u, 1) = \frac{1}{\cosh(u)} \quad (5.28)$$

$$dn(u, 1) = \frac{1}{\cosh(u)} \quad (5.29)$$

$$X(z) = 2\Re \left(\frac{\sinh(z) \cosh^2(z)}{\cosh^2(z)}, \frac{\sinh^2(z, e) \cosh^2(z)}{\cosh^2(z)}, i \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{(1 + 4 \sinh^2(w)) \cosh^6(w)}{\cosh^4(w)}} dw \right) \quad (5.30)$$

$$= 2\Re \left(\sinh(z), \sinh^2(z), i \int_{z_0}^z \cosh(w) \sqrt{1 + 4 \sinh^2(w)} dw \right) \quad (5.31)$$

mediante el cambio de variable $2 \sinh(z) = \sinh(\rho)$, es decir, $z = \sinh^{-1}(\frac{\sinh(\rho)}{2})$ y $dz = \frac{\cosh(\rho)}{\sqrt{1+4 \sinh(\rho)}} d\rho$ tendremos:

$$X = \Re \left(\sinh(\rho), \frac{1}{2} \sinh^2(\rho), i \int_{\rho_0}^{\rho} \cosh^2(v) dv \right) \quad (5.32)$$

$$= \Re \left(\sinh(\rho), \frac{1}{2} \sinh^2(\rho), i(\rho - \rho_0) + \cosh(\rho) \sinh(\rho) \right) \quad (5.33)$$

que es la ecuación de la superficie de Catalán.

58

7

CAPÍTULO 6

Curvas duales.

En el capítulo "Superficies Mínimas" establecimos los resultados de simetría en superficies mínimas, siempre que el plano de simetría corte perpendicularmente a la superficie. Cuando la generatriz de la superficie (de la solución al problema de Björling) es una curva simétrica transversalmente con respecto a una recta, la superficie generada tendrá dos planos de simetría: el que contiene a la generatriz y el que contiene a la recta de simetría de la generatriz.

Como la generatriz corta perpendicularmente a la recta de simetría, entonces el plano de simetría que contiene a la recta corta perpendicularmente a la superficie, generando otra geodésica plana, que nombramos *geodésica perpendicular conjugada*. Por la unicidad de la solución de Schwarz al problema de Björling (teorema (3)), sabemos entonces que esa geodésica generará la misma solución al problema de Björling; de esta forma establecemos la *dualidad* entre ambas curvas.

Para encontrar la curva *dual* de cada una de las cónicas, primero debemos encontrar el o los ejes de simetría y posteriormente tomar la trayectoria paralela al eje imaginario. Si nuestra curva se encuentra parametrizada como $c(u) = (\xi(u), \zeta(u))$, entonces la solución al problema de Björling es la superficie

$$X(u, v) = \Re \left(\xi(u, v), \zeta(u, v), i \int_0^{u+iv} \sqrt{\xi'^2(z) + \zeta'^2(z)} dz \right),$$

de donde obtenemos la trayectoria buscada mediante $z = (u_0 + i v)$ de la siguiente forma

$$X(u_0, v) = \Re \left(\xi(u_0, v), \zeta(u_0, v), i \int_{u_0}^{u_0+iv} \sqrt{\xi'^2(z) + \zeta'^2(z)} dz \right).$$

donde el punto $(u_0, 0)$ corresponde al punto de intersección de la curva generatriz con el eje de simetría.

6.1. Curva conjugada a la circunferencia

Veamos cuál es la curva perpendicular conjugada de la circunferencia. En este caso, todos los puntos de la curva son apropiados para obtener un eje de simetría, en particular, tomaremos el punto $(0, 0)$ y utilizaremos la trayectoria $z = (0, t)$.

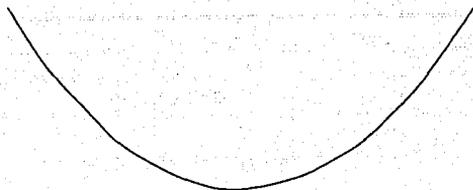


FIGURA 6.1. La catenaria



FIGURA 6.2. Cicloide

Ya vimos que la superficie que se obtiene de una circunferencia mediante la solución de Schwarz al problema de Bjorling es :

$$(\Re(a \cos(z)), \Re(a \sin(z)), \Re(iaz)) \quad (6.1)$$

sobre la trayectoria it obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Re(a \cos(it), a \sin(it), ai(it)) &= \Re(a \cosh(t), i a \sinh(t), -at) \\ &= (a \cosh(t), 0, -at) \end{aligned}$$

de donde vemos que la curva perpendicular conjugada es la catenaria, como ya se conocía.

6.2. Curva conjugada a la parábola

Ahora comprobemos que la conjugada a la parábola es una cicloide. Con la parametrización $c(t) = (2 \sinh(t), \sinh^2(t))$ obtenemos:

$$\Re(2 \sinh(z), \sinh^2(z), i(\cosh(z) \sinh(z) + z)) \quad (6.2)$$

y viendo la curva que se genera cuando $z = it$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Re(2 \sinh(it), \sinh^2(it), i(\cosh(it) \sinh(it) + it)) &= \\ &= (0, -\sin^2(t), -(\cos(t) \sin(t) + t)) \\ &= (0, -(1 - \cos(2t)), -(\sin(2t) + t)) \\ &= \left(0, -(1 - \cos(u)), \sin(u) - \frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

donde $u = -2t$. Esta última es la ecuación de una cicloide.

6.3. Curva conjugada de la elipse

La siguiente curva que analizaremos es la perpendicular conjugada de la elipse. Como sabemos, la elipse tiene dos ejes de simetría, por lo que se tendrán tres planos perpendiculares de simetría en la superficie mínima. Los puntos de intersección entre la elipse y su eje de simetría menor son $2mK$ con $m \in \mathbb{Z}$, mientras que las intersecciones con el eje mayor están dadas por $(2m - 1)K$. Será suficiente tomar los valores $\{0, K\}$ para encontrar las geodésicas conjugadas.

Dada la parametrización de la superficie como:

$$\left(\Re(bcn(w, e)), \Re(asn(w, e)), -a\Im\left(\int_{w_0}^w dn^2(\eta, e)d\eta\right) \right) \quad (6.3)$$

Las dos curvas se encuentran sustituyendo: i) $w = it$ y ii) $w = K + it$ en la parametrización dada.

Veamos el caso i) $w = it$:

Revisando las expresiones (2.9), (2.10) y (2.11), podemos ver que $\Re(bcn(it, e)) = \frac{b}{cn(t, e')}$ y $\Re(asn(it, e)) = 0$. Por lo tanto trabajemos en la integral:

$$\begin{aligned} \Im\left(\int_0^{it} dn^2(\eta, e)d\eta\right) &= \Im\left(\int_{\gamma} dn^2(\eta, e)d\eta\right), \quad \gamma = it. \\ &= \Im\left(\int_0^t dn^2(iv, e) \cdot idv\right), \\ &= \int_0^t \frac{dn^2(v, e')}{cn^2(v, e')} dv \\ &= t + \frac{dn(t, e')sn(t, e')}{cn(t, e')} - \int_0^t dn^2(v, e') dv \end{aligned}$$

si $t_0 = 0$ entonces tenemos a la curva parametrizada como:

$$\left(\frac{b}{cn(t, e')}, 0, at + a \frac{dn(t, e')sn(t, e')}{cn(t, e')} - aE(t, e') \right), t \in (-K', K') \quad (6.4)$$

Podemos ver que cuando $t \rightarrow K'$ ambas componentes tienden a $+\infty$, mientras que si $t \rightarrow -K'$ entonces $\frac{b}{cn(t, e')} \rightarrow +\infty$, pero $a(t + \frac{dn(t, e')sn(t, e')}{cn(t, e')}) - E(t, e') \rightarrow -\infty$, por lo que obtenemos una curva no cíclica en $t \in (-K', K')$.

Si derivamos ambas componentes con respecto de t obtenemos:

$$\left(b \frac{sn(t, e')dn(t, e')}{cn^2(t, e')}, a \frac{dn^2(t, e')}{cn^2(t, e')} \right),$$

vemos que la primera componente es negativa en $t \in (-K', 0)$, es cero si $t = 0$ y es positiva si $t \in (0, K')$, mientras que la segunda componente siempre es positiva en todo el intervalo $(-K', K')$. Si analizamos la segunda derivada, encontraremos que no existen puntos donde el producto de ambas componentes cambie de signo, y esto se debe a que sólo la función sn cambia



FIGURA 6.3. Conjugada perpendicular a le elipse en sus vértices de menor curvatura ($e = 0.7$)

de signo en ese intervalo, pero lo hará en ambas componentes, mientras que las funciones cn y dn siempre son positivas.

Esto nos indica que la curva es cualitativamente parecida a una catenaria, pero más abierta.

Veamos ahora el caso ii) $w = K + it$.

Utilizando los teoremas de adición tendremos:

$$\begin{aligned} sn(K + it, e) &= \frac{sn(K, e)dn(t, e') + isn(t, e')cn(K, e)cn(t, e')dn(K, e)}{cn^2(t, e') + e^2sn^2(K, e)sn^2(t, e')} \\ &= \frac{dn(t, e')}{cn^2(t, e') + e^2sn^2(t, e')} \\ &= \frac{dn(t, e')}{1 - sn^2(t, e') + e^2sn^2(t, e')} \\ &= \frac{dn(t, e')}{1 - e'^2sn^2(t, e')} \\ &= \frac{1}{dn(t, e')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cn(K + it, e) &= \frac{cn(K, e)cn(t, e') - isn(K, e)sn(t, e')dn(K, e)dn(t, e')}{cn^2(t, e') + e^2sn^2(K, e)sn^2(t, e')} \\ &= -i \frac{e' sn(t, e') dn(t, e')}{dn^2(t, e')} \\ &= -ie' \frac{sn(t, e')}{dn(t, e')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dn(K + it) &= \frac{dn(K, e)cn(t, e')dn(t, e') - ie^2sn(K, e)cn(K, e)sn(t, e')}{cn^2(t, e') + e^2sn^2(K, e)sn^2(t, e')} \\ &= \frac{e' cn(t, e') dn(t, e')}{dn^2(t, e')} \\ &= e' \frac{cn(t, e')}{dn(t, e')} \end{aligned}$$

Ahora, deseamos tener parametrizada la curva de tal forma que inicie en uno de los puntos singulares (ver figura (6.4)). Para ello, deberemos iniciar la integración en cualquiera de los puntos $(2m-1)K + i(2n-1)K'$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Tomemos como inicio el punto (K, K') y que el contorno de integración vaya en sentido negativo, es decir, que la curva de integración sea $\gamma = \{z = K + i(K' - t) : t \in \mathbb{R}\}$. Con esta condición, encontremos la integral de línea

$$\begin{aligned} \Im \left(\int_{K+iK'}^{K+i(K'-t)} dn^2(\eta, e) d\eta \right) &= \Im \left(\oint_{\gamma} dn^2(\eta, e) d\eta \right), \\ &= \Im \left(\int_0^t dn^2(K + i(K' - v)), e \cdot (-i) dv \right), \\ &= - \int_0^t e'^2 \frac{cn^2(K' - v, e')}{dn^2(K' - v, e')} dv, \\ &= - \int_0^t e'^2 sn^2(v, e') dv, \end{aligned}$$

pero todas las integrales de los cuadrados de las funciones elípticas de Jacobi se pueden reducir a la integral de $dn^2(u)$, con el mismo módulo ([L1], pp 65). Por lo tanto, utilizemos la identidad

$$\begin{aligned} dn^2(u, e) &= 1 - e^2 sn^2(u, e), \\ \Rightarrow \int dn^2(u, e) du &= u - e^2 \int sn^2(u, e) du. \end{aligned}$$

para obtener

$$\Im \left(\int_{K+iK'}^{K+i(K'-t)} dn^2(\eta, e) d\eta \right) = \int_0^t dn^2(v, e') dv - t. \quad (6.5)$$

Como $dn^2(t, e') \leq 1$ para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^t dn^2(v, e') dv - t < 0.$$

Si recorremos la línea en sentido inverso, obtendremos el sentido opuesto en la integral. Además, como $sn(K + i(K' - t)) = \frac{1}{e} dn(t, e')$ y como dn es una función par, tenemos

$$\left(0, \frac{a}{e} dn(t, e'), a \int_0^t dn^2(v, e') dv - at \right), \quad (6.6)$$

la cual tiene una forma muy parecida a la ecuación del movimiento del centro de una elipse que rueda sin deslizar sobre el eje x . La ecuación de dicha curva

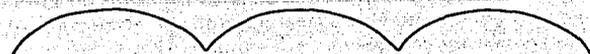


FIGURA 6.4. Conjugada perpendicular a la elipse en sus vértices de mayor curvatura ($e = 0.7$)

se puede ver en funciones elípticas¹ como:

$$\left(a \operatorname{dn}(t, e), a \int_0^t \operatorname{dn}^2(v, e) dv \right) \quad (6.7)$$

si vemos a la geodésica encontrada como la suma de dos curvas tendremos:

$$c(t) = \left(\frac{a}{e} \operatorname{dn}(t, e'), a \int_0^t \operatorname{dn}^2(v, e') dv - at \right) \quad (6.8)$$

$$= \left(a \operatorname{dn}(t, e'), a \int_0^t \operatorname{dn}^2(v, e') dv \right) - \left(a \left(1 - \frac{1}{e} \right) \operatorname{dn}(t, e), at \right) \quad (6.9)$$

que podríamos ver como una elipse de semeje mayor a y excentricidad e' rodando sin deslizar sobre el eje x' , en un marco de referencia móvil $x'y'$ sobre la segunda curva.

6.4. Curva conjugada de la Hipérbola

Veamos ahora cómo es la curva conjugada de la hipérbola que tiene como parametrización:

$$\left(\Re(\operatorname{adn}(ew, \frac{1}{e})), \Re(\frac{ib}{e} \operatorname{sn}(ew, \frac{1}{e})), \Re(b \int_{w_0}^w \operatorname{cn}^2(e\eta, \frac{1}{e}) d\eta) \right) \quad (6.10)$$

ya que la parametrización original de la curva fue $(a \cosh(it), b \sinh(it))$ nuestra trayectoria será ahora $z = t$, así:

$$\left(\Re(\operatorname{adn}(et, \frac{1}{e})), \Re(\frac{ib}{e} \operatorname{sn}(et, \frac{1}{e})), \Re(b \int_{t_0}^t \operatorname{cn}^2(e\eta, \frac{1}{e}) d\eta) \right) \quad (6.11)$$

De esta manera el argumento siempre es real; por lo tanto tendremos:

$$\left(\operatorname{adn}(et, \frac{1}{e}), 0, b \int_{t_0}^t \operatorname{cn}^2(e\eta, \frac{1}{e}) d\eta \right) \quad (6.12)$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} c(t) &= \left(\operatorname{adn}(et, \frac{1}{e}), 0, \frac{b}{e^2} \int_{t_0}^t \operatorname{dn}^2(e\eta, \frac{1}{e}) d\eta - b \frac{(\frac{1}{e})^2}{2} t \right) \\ &= \left(\operatorname{adn}(et, \frac{1}{e}), 0, e^2 b \int_{t_0}^t \operatorname{dn}^2(e\eta, \frac{1}{e}) d\eta + e^2 b t \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

¹Ver Apéndice A



FIGURA 6.5. Conjugada perpendicular a una rama de una hipérbola de excentricidad $e = 1.8$

66

APÉNDICE A

El estudio de las curvas conjugadas en el catenoide elíptico (sección 6.3), nos llevó a una expresión de la forma

$$cp(t) = \left(\frac{a}{e} dn(t, e'), a \int_0^t dn^2(x, e') dx - at \right). \quad (A-1)$$

que corresponde a una curva con características muy semejantes a una cicloide. Esto nos lleva a suponer que existe una relación entre la expresión anterior y las ruletas elípticas con excentricidad e' . Este apéndice está dedicado a encontrar las ecuaciones del centro de una elipse que rueda sin deslizar sobre el eje x , motivado por el razonamiento de M. Sturm en la nota del artículo [D1], pp 315. Adicionalmente, se escribe dicha ecuación en términos de las funciones elípticas de Jacobi.

Ruletas Elípticas

Ecuaciones del movimiento de un foco de una elipse, que rueda sin deslizar a lo largo del eje x . De estas ecuaciones obtenemos también las ecuaciones del centro y de los vértices.

Sea la elipse parametrizada por $\mathcal{E}(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ con $a > b$, y sea $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; veamos cuál es la distancia entre el foco y cualquier punto de la elipse. Designemos por r a la norma del vector $(P - F)$, ver figura (A-1).

$$\begin{aligned} r &= \|P - F\| \\ &= \|(a \cos(t), b \sin(t)) - (c, 0)\| \\ &= \sqrt{(a \cos(t) - c)^2 + b^2 \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2(t) - 2ac \cos(t) + c^2 + b^2 \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{a^2 - 2ac \cos(t) + c^2 - (a^2 - b^2) \sin^2(t)}, \quad c^2 = a^2 - b^2 \\ &= \sqrt{a^2 - 2ac \cos(t) + c^2 \cos^2(t)}, \quad c = ea \\ &= \sqrt{(a - ea \cos(t))^2} \\ &= |a - ex_1| \end{aligned}$$

viendo que $e < 1$ y que $|x_1| \leq a$ entonces $0 < a - ex_1$ por lo tanto:

$$r = a - ex_1 \quad (A-2)$$

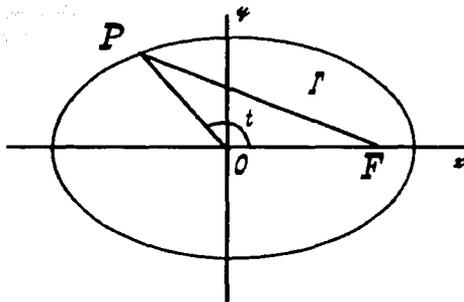


FIGURA A-1. Elipse

Veamos ahora la figura (A-2), nuestra intención es parametrizar la elipse en términos del ángulo α . Sabemos que la perpendicular a la tangente en P bisecta al ángulo FPF' , así mismo sabemos que la distancia entre F y F' es $2c$, y la distancia $s = 2a - r$. Con todo lo anterior y usando la ley de los cosenos tenemos:

$$r^2 + (2a - r)^2 - 2r(2a - r) \cos(2\alpha) = (2c)^2$$

$$r^2 + 4a^2 - 4ar + r^2 - 4ar \cos(2\alpha) + 2r^2 \cos(2\alpha) = 4c^2 \quad \text{reacomodando}$$

$$2r^2(1 + \cos(2\alpha)) - 4ar(1 + \cos(2\alpha)) + 4(a^2 - c^2) = 0,$$

usando la identidad $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha)$ tenemos

$$\cos^2(\alpha)r^2 - 2a \cos^2(\alpha)r + (a^2 - c^2) = 0$$

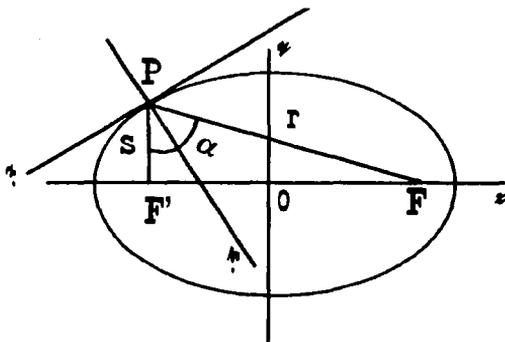


FIGURA A-2. Nuevo marco de referencia

utilizando la regla general para ecuaciones de segundo grado tenemos:

$$\begin{aligned} r &= \frac{2a \cos^2(\alpha) \pm \sqrt{(2a \cos^2(\alpha))^2 - 4(\cos^2(\alpha))((a^2 - c^2))}}{2 \cos^2(\alpha)} \\ &= a \pm \sqrt{\frac{a^2 \cos^2(\alpha) - a^2 + c^2}{\cos^2(\alpha)}} \\ &= a \pm \sqrt{\frac{c^2 - a^2 \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}, \quad c = ea \\ &= a \pm \frac{a}{\cos(\alpha)} \sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

pero sabemos que $r = a - ex_1$, de aquí:

$$x_1 = \frac{a}{e \cos(\alpha)} \sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \quad (\text{A-3})$$

ya que $\cos(\alpha)$ toma valores tanto negativos como positivos.

Finalmente encontraremos y_1 mediante el teorema de Pitágoras. Analizando la figura A-2 podemos ver que:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{r^2 - (c - x_1)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2aex_1 + e^2x_1^2 - c^2 + 2cx_1 - x_1^2} \\ &= \sqrt{(a^2 - c^2) + (e^2 - 1)x_1^2} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)e^2 \cos^2(\alpha) + a^2(e^4 - e^2 - e^2 \sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))}{e^2 \cos^2(\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{c^2 e^2 \sin^2(\alpha) - 2c^2 \sin^2(\alpha) + a^2 \sin^2(\alpha)}{e^2 \cos^2(\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2(e^4 - 2e^2 + 1) \sin^2(\alpha)}{e^2 \cos^2(\alpha)}} \end{aligned}$$

finalmente obtenemos

$$y_1 = \frac{a(e^2 - 1)}{e} \tan(\alpha) \quad (\text{A-4})$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} r &= a - ex_1, \\ x_1 &= \frac{a}{e \cos(\alpha)} \sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}, \\ y_1 &= \frac{a(e^2 - 1)}{e} \tan(\alpha) \end{aligned}$$

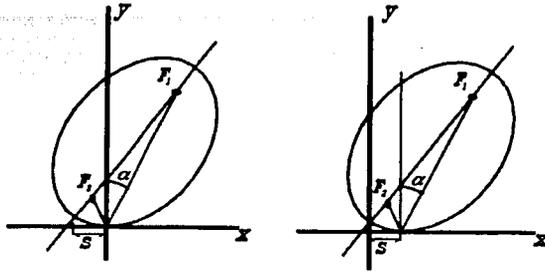


FIGURA A-3. Desplazamiento

Ya que tenemos la parametrización del movimiento del foco en términos del ángulo α , cambiaremos de marco de referencia(ver figura (A-3)):

$$r \cos(\alpha) = a \cos(\alpha) - a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \quad (\text{A-5})$$

$$r \sin(\alpha) = a \sin(\alpha) - a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \tan(\alpha)$$

encontrando quien es $ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2}$ tendremos:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(\frac{a \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{e \cos(\alpha) \sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}} - \frac{a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}}{e \cos(\alpha)} \tan(\alpha) \right) d\alpha \\ &= \frac{a \sin(\alpha)}{e \cos^2(\alpha)} \left(\frac{\cos^2(\alpha) - e^2 + \sin^2(\alpha)}{\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}} \right) d\alpha \\ &= \frac{a \sin(\alpha)(1 - e^2)}{e \cos^2(\alpha) \sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}} d\alpha \end{aligned}$$

$$dx_1 = \frac{a \sin(\alpha)(1 - e^2)}{e \cos^2(\alpha) \sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}} d\alpha \quad (\text{A-6})$$

mientras que:

$$dy_1 = \frac{a(e^2 - 1)}{e \cos^2(\alpha)} d\alpha \quad (\text{A-7})$$

de donde:

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{a(e^2 - 1)}{e \cos^2(\alpha)} \sqrt{\frac{\sin^2(\alpha)}{e^2 - \sin^2(\alpha)} + 1} \right) d\alpha \\ &= \frac{a(e^2 - 1)d\alpha}{\cos^2(\alpha) \sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$s = \int_0^{\phi} \frac{a(e^2 - 1)d\alpha}{\cos^2(\alpha)\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}} \quad (\text{A-8})$$

finalmente las ecuaciones del foco quedan de la siguiente manera

$$x = r \sin(\alpha) + s$$

$$y = r \cos(\alpha)$$

$$x = a \sin(\alpha) - a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \tan(\alpha) + \int_0^{\phi} \frac{a(e^2 - 1)d\alpha}{\cos^2(\alpha)\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)}}$$

$$y = a \cos(\alpha) - a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \quad (\text{A-9})$$

de la figura anterior podemos ver que el mayor valor que toma α es cuando el punto P es $(0, b)$ o $(0, -b)$ de donde $|\sin(\alpha)| \leq e$. Haciendo el cambio de variable $\sin(\alpha) = e \operatorname{sn}(u, e)$ tendremos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} \\ &= \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2(u, e)} \\ &= \operatorname{dn}(u, e) \\ d\alpha &= \frac{e \operatorname{cn}(u, e) \operatorname{dn}(u, e)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2(u, e)}} du \\ &= e \operatorname{cn}(u, e) du \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en las expresiones (A-9)

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{csn}(u, e) - \frac{ae^2 \operatorname{cn}(u, e) \operatorname{sn}(u, e)}{\operatorname{dn}(u, e)} + \int_0^u \frac{a(e^2 - 1) \operatorname{cn}(u, e) du}{\operatorname{dn}^2(u, e) \sqrt{1 - \operatorname{sn}(u, e)}} \\ &= c \operatorname{sn}(u, e) - a \left(e^2 \int_0^u \frac{du}{\operatorname{dn}^2(u, e)} - e^2 \frac{\operatorname{cn}(u, e) \operatorname{sn}(u, e)}{\operatorname{dn}(u, e)} \right) \\ y &= a \operatorname{dn}(u, e) - c \operatorname{cn}(u, e) \quad c = ae \end{aligned}$$

pero tenemos que

$$\int_0^u \frac{du}{\operatorname{dn}^2(u, e)} = \frac{1}{e^2} \left(\int_0^u \operatorname{dn}^2(u, e) + e^2 \frac{\operatorname{cn}(u, e) \operatorname{sn}(u, e)}{\operatorname{dn}(u, e)} \right) \quad (\text{A-10})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{csn}(u, e) - a \int_0^u \operatorname{dn}^2(u, e) du \\ y &= a \operatorname{dn}(u, e) - \operatorname{ccn}(u, e) \end{aligned}$$

Éstas son las ecuaciones de uno de los focos en términos de las funciones elípticas de Jacobi. Las ecuaciones para el otro foco se encuentran sustituyendo $u + 2K$ en las ecuaciones anteriores. Estas ecuaciones se aplican para cualquier curva cónica de excentricidad e , con centro.

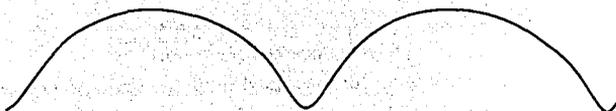


FIGURA A-4. Trayectoria del foco de una elipse de excentricidad $e = 0.9$

Ya que el centro de una elipse es el punto medio entre los focos, podemos encontrar sus ecuaciones paramétricas en términos de funciones elípticas. De las ecuaciones (A-5) tenemos:

$$F_1 \left\{ \begin{array}{l} r \sin(\alpha) = a \sin(\alpha) - a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \tan(\alpha) \\ r \cos(\alpha) = a \cos(\alpha) - a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \end{array} \right\}$$

$$F_2 \left\{ \begin{array}{l} (2a - r) \sin(\alpha) = a \sin(-\alpha) + a\sqrt{e^2 - \sin^2(-\alpha)} \tan(-\alpha) \\ (2a - r) \cos(\alpha) = a \cos(-\alpha) + a\sqrt{e^2 - \sin^2(-\alpha)} \end{array} \right\}$$

Calculando las coordenadas del punto medio entre estos dos puntos tenemos:

$$C_x = a\sqrt{e^2 - \sin^2(\alpha)} \tan(\alpha)$$

$$C_y = a \cos(\alpha)$$

que son las ecuaciones del centro en términos del argumento α , siempre que el punto de contacto entre la elipse y el eje x sea el origen. Finalmente le sumaremos a la ecuación de C_x el desplazamiento que se obtiene, es decir le sumaremos la longitud de arco s . Ya que si la elipse se desplaza hacia la derecha el argumento α decrece, entonces u será cambiada por $-u$ y s será positiva. Haciendo nuevamente el cambio de variable $\sin(\alpha) = e \operatorname{sn}(u, e)$ tendremos:

$$C_x = \frac{ae^2 \operatorname{cn}(-u, e) \operatorname{sn}(-u, e)}{\operatorname{dn}(-u, e)} + \int_0^u \frac{a(e^2 - 1) du}{\operatorname{dn}^2(u, e)}$$

$$C_y = a \operatorname{dn}(-u, e)$$

finalmente como $\operatorname{sn}(u, e)$ es una función impar, mientras que $\operatorname{cn}(u, e)$ y $\operatorname{dn}(u, e)$ son funciones pares obtendremos:

$$C_x = a \left(e^2 \int_0^u \frac{du}{\operatorname{dn}^2(u, e)} - e^2 \frac{\operatorname{cn}(u, e) \operatorname{sn}(u, e)}{\operatorname{dn}(u, e)} \right)$$

$$C_y = a \operatorname{dn}(u, e)$$



FIGURA A-5. Trayectoria del centro de una elipse de excentricidad $e = 0.9$

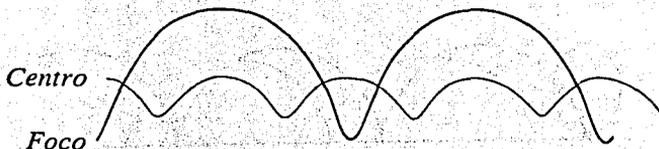


FIGURA A-6. Trayectoria del centro y de un foco de una elipse de excentricidad $e = 0.9$

y por (3)

$$C_x = a \int_0^u dn^2(u, e) du$$

$$C_y = a \int_0^u dn(u, e) du$$

las cuales son las ecuaciones del centro de elipse que rueda sin deslizar a lo largo del eje x .

Sin embargo, como lo hemos mencionado en párrafos anteriores, estas ecuaciones también se aplican a las demás curvas cónicas, por lo que podemos revisar el comportamiento de la ruleta en términos de su excentricidad. Ver [D1]. Un método alternativo para encontrar las ecuaciones de la traza de los focos de las curvas cónicas con centro se puede revisar [E1] y el ejemplo 6 del capítulo VIII de [Z1].

Por un pequeño análisis de las curvas anteriores, podemos ver inmediatamente que la ecuación de los focos se obtiene al sumar

$$x^* = c \operatorname{sn}(u, e),$$

$$y^* = c \operatorname{cn}(u, e).$$

a las ecuaciones del centro de la cónica. Donde $c = ae = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ es la distancia del centro a cada uno de los focos. El signo de b^2 dependerá de la curva: si es una elipse el signo es negativo y si es una hipérbola el signo es

positivo. Por lo tanto, los vértices de mayor curvatura se localizarán con las ecuaciones

$$x^* = a \operatorname{sn}(u, e),$$

$$y^* = a \operatorname{cn}(u, e).$$

de esta manera, las ecuaciones de la traza de los vértices de mayor curvatura se ve de la siguiente manera

$$V_{1x} = a \int_0^u \operatorname{dn}^2(u, e) du - a \operatorname{sn}(u, e), \quad (\text{A-11})$$

$$V_{1y} = a \operatorname{dn}(u, e) - a \operatorname{cn}(u, e) \quad (\text{A-12})$$

mientras que los vértices de menor curvatura se obtienen mediante

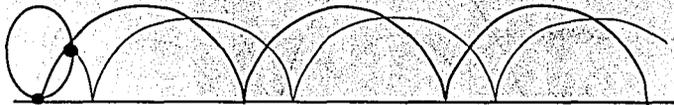


FIGURA A-7. Trayectoria de los vértices de una elipse de excentricidad $e = 0.5$

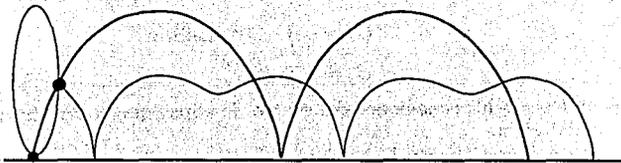


FIGURA A-8. Trayectoria de los vértices de una elipse de excentricidad $e = 0.9$

$$V_{2x} = a \int_0^u \operatorname{dn}^2(u, e) du + b \operatorname{cn}(u, e), \quad (\text{A-13})$$

$$V_{2y} = a \operatorname{dn}(u, e) - b \operatorname{sn}(u, e) \quad (\text{A-14})$$

que es equivalente a

$$V_{2x} = a \int_0^u \operatorname{dn}^2(u, e) du - b \operatorname{sn}(u + K, e), \quad (\text{A-15})$$

$$V_{2y} = a \operatorname{dn}(u, e) - b \operatorname{cn}(u + K, e) \quad (\text{A-16})$$

y en general, cualquier punto del plano que se identifique como

$$x_0 = r \operatorname{cn}(u_0, e),$$

$$y_0 = r \operatorname{sn}(u_0, e)$$

en la parametrización del marco de referencia original (ver figura (A-9)),

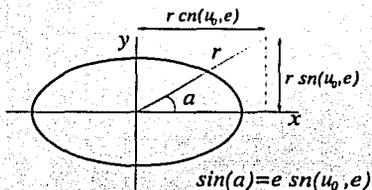


FIGURA A-9. Parametrización del punto

las ecuaciones de la traza de dicho punto cuando la elipse rueda sin deslizar sobre el eje x , serán las siguientes:

$$P_x = a \int_0^u \operatorname{dn}^2(u, e) du - r \operatorname{cn}(u - u_0, e),$$

$$P_y = a \operatorname{dn}(u, e) - r \operatorname{sn}(u - u_0, e).$$

Bibliografia

- [B1] Baker, Arthur L., *Elliptic Functions. An Elementary Text-Book for Students of Mathematics*. John Wiley & Sons, New York, 1890.
- [Bo1] Booth, James, *The Theory of Elliptic Integrals, and the Properties of Surfaces of the Second Order*. George Bell, Fleet Street, Cambridge, 1851.
- [C1] da Costa, Celso José, *Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínicas* 180. Colóquio Brasileiro de Matemática IMPA, 1991.
- [Ca1] do Carmo, Manfredo Perdigão, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [Cy2] Cayley, Arthur, *an Elementary Treatise on Elliptic Functions*. George Bell and Sons, Cambridge, 1895.
- [D1] Delaunay, Ch., *Sur la surface du révolution dont la courbure moyenne est constante* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, pp 309-320, Tomo VI, Agosto 1841.
- [Di1] Dierkes, Hildebrant, Küster y Wohlrab, *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, 1992.
- [E1] Eells, James, *The Surfaces of Delaunay*, The mathematical Intelligencer Vol. 9 No. 1, Springer-Verlag, 1987.
- [G1] Gray, Alfred, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, 2nd Edition, 1998.
- [H1] Hancock, Harris, *Lectures on the Theory Of Elliptic Functions*. John Wiley & Sons, New York, 1910.
- [H2] Hancock, Harris, *Elliptic Integrals. Mathematical Monographs* John Wiley & Sons, New York, 1917.
- [J-LdM] Jiménez, H., López de Medrano, S., *On Alfred Gray's elliptical catenoid*, in *Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray* CONM 288, AMS, 2001.
- [L1] Lawden, D. *Elliptic Functions and Applications*, App.Math.Sci.80, Springer-Verlag 1989.
- [M1] Markusevich, A.I., *The Remarkable Sine Functions*. Elsevier, New York, 1966.
- [M2] Marsden, Jerrold E., Hoffman, Michael J., *Análisis Básico de Variable Compleja*, Trillas, 1996.
- [Z1] Zwicker, C. *The advanced Geometry of planes curves and their applications*. Dover, 1963.