00324

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

12

FACULTAD DE CIENCIAS

"SOLUCION DE PROBLEMAS UTILIZADO GEOMETRIA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ALEJANDRO ESTRELLA HERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS
M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

2003

PAGINACION
DISCONTINUA

DRA. MA. DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"SOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO GEOMETRÍA"

realizado por el pasante ALEJANDRO ESTRELLA HERNÁNDEZ

con número de cuenta 6407206 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

MATEMÁTICAS

dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Propietario M. en E. MARIA EDDA SANDRA VALENCIA MONTALVÁN

Propietario Dr. FERNANDO BRAMBILA PAZ

Suplente M. en C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Suplente DR. JUAN MORALES RODRÍGUEZ Juan Morales R

Consejo Departamental de MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTAL

1-a

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A la memoria de mi Padre.
Juan Pánfilo Estrella Rayón

A mi madre.
Sofía Hernández Mares

A mis hermanos.
Alma Gloria, Roberto, María de Lourdes,
Yolanda Gabriela, Mauricio Raúl e Ivan Arturo

A mi esposa.
Cecilia Gutiérrez Martínez

A mis hijos.
Siddhartha e Hypatia Deyanira

1.b

Al Director de mi tesis
M. en C. Alejandro Bravo Mojica
Por su infinita paciencia y comprensión
que tuvo en el desarrollo de esta tesis.

A mis sinodales.

- M. en C. María Edda Sandra Valencia M.
- Dr. Fernando Brambila Paz
- M. en C. Agustín Ontiveros Pineda
- Dr. Juan Morales Rodríguez

A mis conocidos.
Que gracias a ellos, logré encontrar
soluciones óptimas y sencillas para
llegar a las respuestas de los
problemas que me plantearon.

A mis amigos y alumnos del CCHV
A mi exalumna del CCHV
L. C. María Isabel Rodríguez Hernández

ÍNDICE

ENCONTRAR EL CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA.

El ejercicio que se da a continuación, está relacionado con la circunferencia y sus elementos, centro y radio. En el que, para encontrar la solución, también entran en juego los conceptos de punto medio de un segmento, recta que pasa por dos puntos, trazo de una recta perpendicular a una recta dada, y finalmente concepto de rectas mediatrices.

Todos estos conceptos son utilizados conjuntamente para encontrar la solución del problema.

El procedimiento que se da en esta práctica es con una serie de pasos para llegar a la solución.

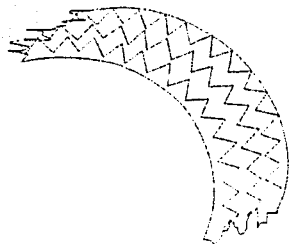
Finalmente se coloca un cuestionario-guía, con el fin de sistematizar las ideas que se utilizaron para llegar al objetivo.

OBJETIVO.

Encontrar el centro de una circunferencia.

EJERCICIO.

Un arqueólogo, en sus excavaciones, encontró un fragmento de rueda.



Encontrar el tamaño de la rueda a partir de su figura a tamaño natural.

PROCEDIMIENTO.

1) Marcar tres puntos en el borde de la rueda de la parte exterior.

2) Trazar la recta que pase por dos de estos puntos.

3) Encontrar el punto medio de esta recta.

4) Trazar la recta perpendicular que pase por este punto medio.

5) Trazar otra recta que pase por dos puntos, pero utilizando el tercer punto.

6) Encontrar el punto medio de esta nueva recta.

7) Trazar otra recta perpendicular que pase por este nuevo punto medio.

Las rectas del paso 4) y paso 7), se cortan en algún punto del interior de la rueda. Ese punto es el centro de la circunferencia.

PREGUNTAS.

1. El radio de la rueda mide ________________.

2. Así que el diámetro mide _________________.

3. La longitud de la circunferencia está dada por la fórmula ___________. En donde el símbolo π tiene por valor ____________, mientras que la letra d es el __________________.

4. Entonces la longitud de la rueda es

    _____________ x ______________ = _______________ cm

5. La recta que pasa por el punto medio perpendicular a la primer recta se llama ____________________________.

6. Describe con tus propias palabras, que es una recta perpendicular

    ____

7. ¿Las rectas que se cruzan para encontrar el centro de la circunferencia se llaman? ____

8. Así que, una recta mediatriz es aquella que

    ____

9. El punto que se localiza en donde se cruzan las mediatrices se llama ____________________________________

10. Aparte de ser el centro de la circunferencia (de la rueda en este caso), este punto tiene un nombre muy especial llamado: ____________________________________

11. Entonces el circuncentro es aquel que ____________________________________

UNA APLICACIÓN DEL CÍRCULO CIRCUNSCRITO

En este ejercicio se trata de encontrar el círculo circunscrito a un triángulo cualquiera.

Para darle una aplicación práctica a nuestros alumnos, la intensión es con el fin de poner a pensar al alumno en un acontecimiento que esté relacionado con algo físico, es decir, que sienta la necesidad de tratar de resolver el problema. Por esta razón, se introduce una figura geométrica, con la finalidad de que el alumno efectúe los trazos que sean necesarios.

Los conceptos que se utilizan son: el de mediatriz y el del círculo circunscrito.

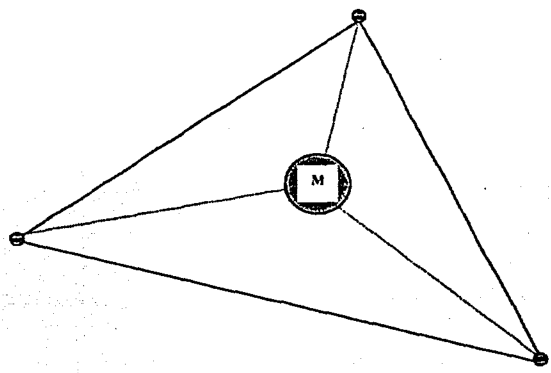
OBJETIVO.

Encontrar el centro del círculo circunscrito de un triángulo acutángulo.

PROBLEMA.

Un accionista compró un terreno de forma triangular, y observó en los planos de éste que era un triángulo acutángulo, (ver figura), él desea construir una alberca y colocar locales comerciales. Con este fin, contrata los servicios de un arquitecto para que haga, sobre los planos el proyecto que tiene en mente. El accionista le indica al arquitecto que su deseo es colocar en las esquinas de este terreno locales comerciales; mientras que la alberca se instale en algún lugar, de manera que, estando desde la alberca el paseante no tenga preferencia por algún local, pues éstos deberán estar localizados a la misma distancia de la alberca.

¿Cuáles fueron los trazos geométricos que realizó el arquitecto para dejar satisfecho a su cliente?



SOLUCIÓN.

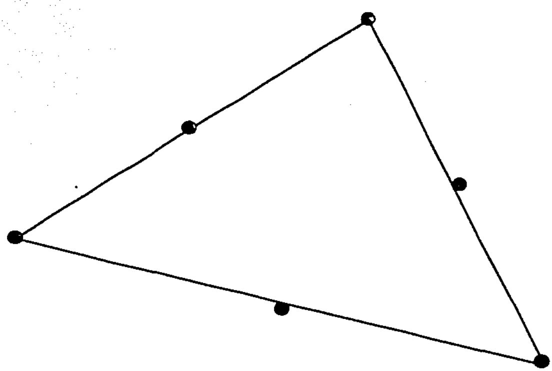
Para localizar ese lugar, el arquitecto hizo lo siguiente:

1) Con sus escuadras, trazó las mediatrices del triángulo.

2) Donde esas tres mediatrices se cruzan , colocó el punto M.

3) Ese punto M es en donde quedará instalada la alberca.

4) La figura de abajo es para que tú hagas los trazos de las tres mediatrices.



PREGUNTAS Y ACTIVIDADES.

1) Ponle letras al triángulo que esta en la figura anterior ________________, ____________________ y ______________________.

2) Mide las longitudes del punto M a cada vértice. Así que:

   a) La longitud desde M al primer vértice es _______________
   b) La longitud desde M al segundo vértice es _______________
   c) La longitud desde M al tercer vértice es _________________

3) De lo anterior se concluye que las tres longitudes son ________________

4) ¿El problema esta resuelto? _______________ especifica __________________

Actividades complementarias.

1) La mediatriz de un lado del triángulo es ________________________.
2) Donde se interceptan las mediatrices se llama _____________________.
3) Al trazar la circunferencia con centro en M a cualquier vértice vemos que son __________________.

ENCONTRANDO UNA DISTANCIA MÍNIMA

El desarrollo de la geometría que se utiliza al querer aplicarla a un problema específico que puede ayudar para encontrar su solución, es en algunas ocasiones efectuando trazos geométricos, que en este caso son segmentos de rectas.

Esta actividad es para recordar el concepto de simetría, así como el de segmentos de recta y de línea mixta o quebrada.

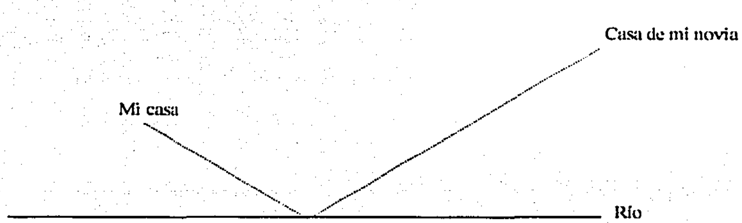
En el siguiente ejercicio utilizamos el concepto de segmentos de recta y el punto de simetría con respecto a una línea recta.

OBJETIVO.

Utilizar el concepto de simetría y recta mixta.

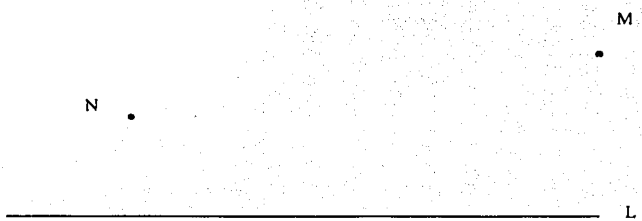
PROBLEMA.

La casa de mi novia se localiza aproximadamente a dos kilómetros de la mía, cuando voy a visitarla, casi siempre voy al río a darme un chapuzón y es que no muy lejos de nuestros hogares pasa ese río. El dirigirme primero al río es porque nuestras casas se encuentran del mismo lado de éste; cierto día se me hizo tarde para ir a verla y en consecuencia no fui al río a darme el chapuzón de rigor quizás la costumbre o llegar todo sucio me forzó a recapacitar y en consecuencia, me hizo buscar otro camino para no caminar de más. Es decir, traté de encontrar la forma y lo logré, de que cuando fuera a ver mi novia, lo primero que haría es dirigirme al río para mi chapuzón y después pasar por ella. La figura de abajo muestra las dos casas y el río. ¿Cuál fue el camino que encontré para no caminar de más?

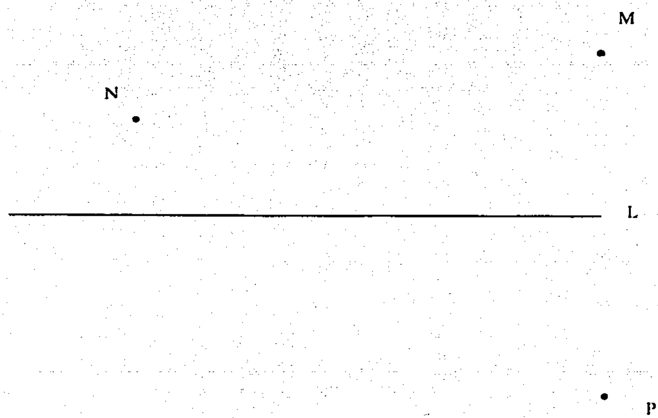


SOLUCIÓN.

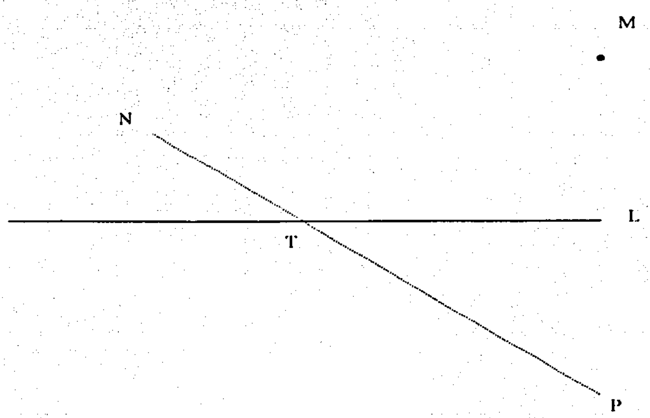
1) Representamos al río con la recta L y a cada casa con las letras N y M respectivamente.



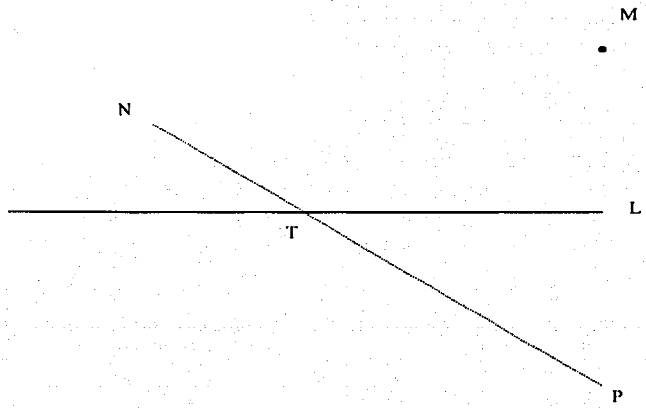
2) Trazamos el punto P simétrico a M con respecto a L.



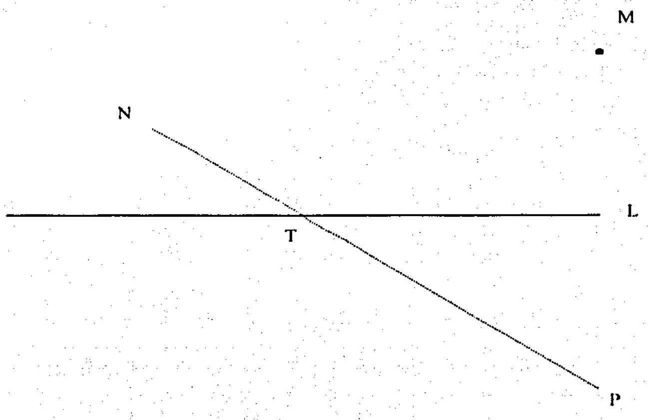
3) Trazar la recta que pasa por N y P.



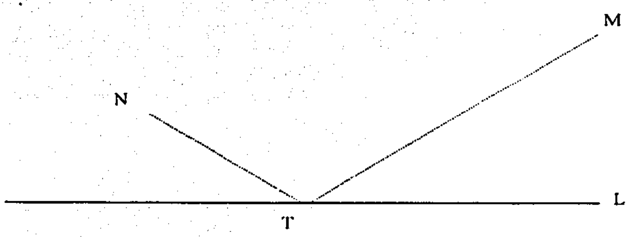
4) Esta recta cruza a la recta L en el punto T.



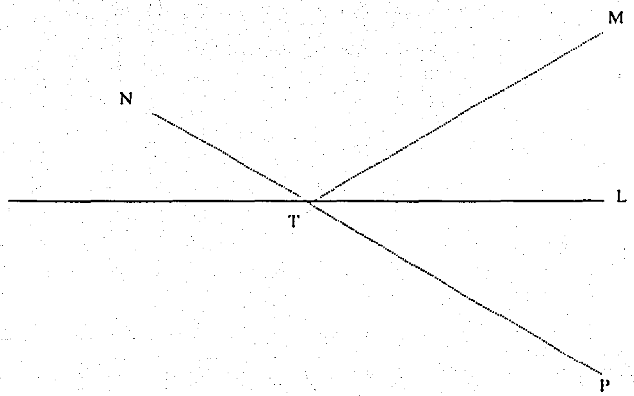
5) Obsérvese que los puntos N, T y P pertenecen a una misma recta, es decir, a la recta NTP.



6) Trazar la recta que pasa por T y M.



7) La recta TM y TP son iguales porque el punto P es simétrico a L.



Entonces, la línea quebrada NT + TM es igual a la línea recta NT + TP.

Pero recuerda que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta, en consecuencia se ha encontrado que el punto T es el que hace la longitud más corta para llegar a la casa de mi novia.

MEDICIÓN DE LA DISTANCIA DE UN ÁRBOL A LA BANQUETA

Este ejemplo nos proporciona por medio de la construcción geométrica de dos triángulos iguales a motivar al alumno a utilizar el concepto de igualdad de triángulos, así como a recordar la medida del ángulo recto y en consecuencia reconocer que los triángulos construidos son triángulos rectángulos.

OBJETIVO.

Medir la distancia de un árbol a la banqueta, en donde el árbol está protegido con una barra de alambre.

Material

- Un árbol que esté colocado con una protección de alambre.
- Una cinta métrica.
- Una escuadra.
- Gises de colores.

Mecanismo de Control

Esta práctica se debe realizar en un día que no este lloviendo y en donde el suelo este a nivel, es decir, que no haya desniveles sobre el suelo.

PROCEDIMIENTO

1) Nos colocamos frente al árbol y lo más cerca de la protección de alambre para trazar una recta sobre el suelo hasta llegar a la banqueta.
2) Esta recta, tiene la condición de formar un ángulo recto –con esta banqueta- esto lo puedes efectuar con la ayuda de una escuadra.
3) El punto donde termina la recta con la banqueta coloréalo con gris.

4) Desde ese punto mide sobre la banqueta con la cinta métrica dos metros de uno en uno y marcando con otro gis de color cada metro.
5) Nos colocamos en este último punto y caminamos en sentido opuesto al árbol tantos pasos para que queden alineados al árbol, el punto donde termina el primer metro y la persona que esta caminando.
6) En el momento que quedan alineadas estas tres partes, medir con el metro esta distancia caminada.

PREGUNTAS

1) Esta última distancia caminada nos da la solución, ¿por qué? ______________________________

2) El tipo de construcción nos ha originado dos triángulos, dibújalos en tu cuaderno de notas.

3) Notarás que estos triángulos son triángulos ________________

4) Estos triángulos se llaman así porque tienen un ángulo __________ el cual mide __________

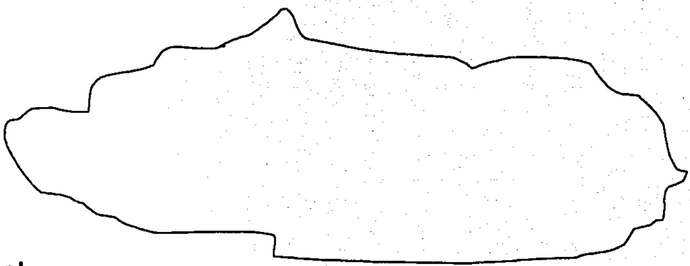
5) Además, si te fijas, estos dos triángulos son iguales, ¿por qué? ______________________________

MIDIENDO EL ANCHO DE UN LAGO

Nuestros estudiantes manejan los conceptos de rectas paralelas, que algo este a nivel, incluso reconoce que es perpendicular así como también sabe lo que es un rectángulo. El ejercicio que se presenta a continuación tiene la finalidad de que aplique estos conceptos para llegar a la solución del problema.

OBJETIVO

Medir el ancho de un lago.



Material

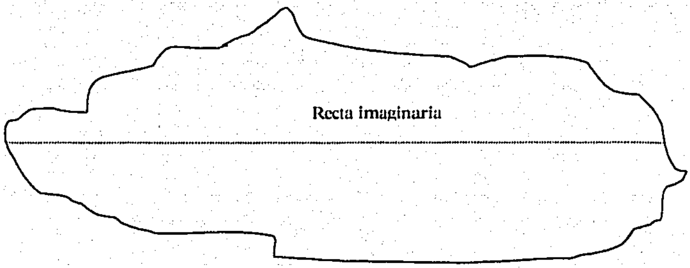
- Una cinta métrica.
- Una escuadra.
- 4 señalamientos.

Mecanismo de control

Esta práctica debe realizarse en un día no lluvioso y donde el suelo, de preferencia esté a nivel.

MÉTODO

1) Colocamos dos señalamientos en el ancho del lago y trazamos dos rectas paralelas, una para cada señalamiento.
   Estas rectas paralelas deben ser trazadas con respecto a la recta imaginaria del ancho del lago.



2) Usemos el tercer señalamiento sobre una de las rectas (para colocarlo donde termina el lago o más allá del lago).
3) Con la escuadra, marcamos la recta que pase por el tercer señalamiento y que sea paralela a la recta imaginaria del ancho del lago.
4) La recta que se construyó con la escuadra, cortará en algún punto a la otra recta paralela; a tal punto le ponemos el último señalamiento.
5) Medir la distancia del tercer señalamiento al cuarto señalamiento.

PREGUNTAS

1) ¿Cuánto mide el ancho del lago? ______________________________

2) Si las rectas no se hubieran trazado paralelas, hubieras encontrado el ancho del lago _______________ ¿por qué? _________________

3) ¿Por qué se pide que el suelo este a nivel? ________________________

4) Cuando hablamos de rectas paralelas, la recta que pasa por los dos primeros señalamientos tiene un nombre especial, esta recta se llama ______________________________

5) ¿Es necesario utilizar la escuadra para trazar la última recta? ______________ ¿por qué? ____________________________

6) La figura geométrica que se forma con los cuatro señalamientos se conoce con el nombre de __________________________________

EL PROBLEMA DE THALES DE MILETO

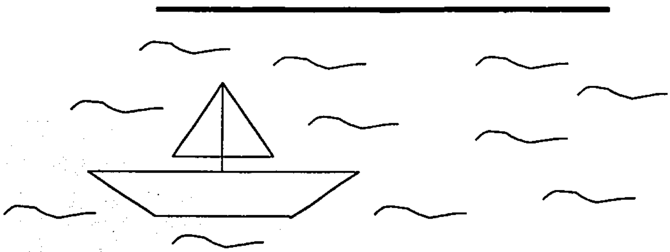
Este ejercicio consiste en un diálogo entre dos personas para encontrar la distancia a la que se localiza un barco de la costa. La búsqueda de la solución es algo parecido a cómo resolvia problemas Sócrates. Es decir, por medio de un diálogo, Sócrates va conduciendo a la persona hacia la solución con una gran variedad de preguntas.

Considero que este ejercicio es interesante, porque los únicos objetos geométricos que se utilizan para llegar a la solución, son triángulos rectángulos; así como con la colocación de éstos, (en donde la parte medular para llegar a la solución es por medio de los vértices de los triángulos y con la ayuda de la igualdad de triángulos, se llega a argumentar que la respuesta no puede tener error).

OBJETIVO

Encontrar la distancia entre un barco anclado y la costa.

Problema de Thales de Mileto



En una ocasión, en el atardecer de un día soleado, sin nubarrones en el cielo y con el mar en calma, se encontraba caminando Thales de Mileto, acompañado por su novia Hypatia, sobre una playa de la Grecia Antigua y observaron que estaba anclado un barco en la costa. Hypatia entonces le preguntó a Thales si podría saber como encontrar la distancia entre el barco y la costa.

Iniciándose el siguiente diálogo:

Thales. Entonces le dijo: Primero tratemos de colocarnos enfrente del barco.
Hypatia. Bueno, ya nos hemos colocado enfrente de éste y ¿ahora que hago?
Thales. Ahora observa sobre el barco algo que te llame más la atención.
Hypatia. Lo que más me agrada es la estatua que está amarrada al frente del barco.
Thales. Muy bien, ahora observa en particular la cara de esa estatua y tracemos una línea recta imaginaria desde su cara hasta nosotros.
Hypatia. ¿Oye Thales? ¿Esa línea recta que me indicas es desde la cara de la estatua hasta nosotros o se continúa en ambas direcciones?
Thales. ¿A qué te refieres?
Hypatia. Sí, sí, ¿quiero decir si nada más va a ser un pedacito de la línea recta?
Thales. Eso que preguntas, está muy bien. Va a ser como tú dices un pedacito de línea recta. Y yo te digo que se llama segmento de línea recta.
Hypatia. ¿Cómo? No, no te entiendo.
Thales. Si, mira, cuando te dije que trazaras esa línea recta imaginaria es en el sentido de tratar de medir la distancia del barco a la costa.
Hypatia. O sea que al querer encontrar esa distancia, ¿te estás refiriendo a que vamos a medir ese segmento de línea recta?
Thales. Así es.
Hypatia. ¿Bueno y después qué sigue?
Thales. Ahora, lo que vas a hacer es caminar seis pasos sobre la playa.
Hypatia. ¿Esos seis pasos que me indicas, en qué dirección lo hago?
Thales. Digamos que paralelo a lo largo de la playa, o mejor dicho como si fuera parte del vaivén de las olas.
Hypatia. Está bien, ya caminé esos seis pasos paralelamente a la playa.
Thales. Ahora, coloca una marca visible en el último paso que efectuaste.

Hypatia. ¿Te parece bien que haga un montecito con la arena de la playa?

Thales. Si ese es tu sentir, hazlo.

Hypatia. Mira Thales, ese montecito que he hecho, incluso para que llame más la atención le he colocado este caracol de mar.

Thales. Ahora, desde ese montecito, continua avanzando otros seis pasos en la misma dirección, como al inicio y coloca otra marca.

Hypatia. Ya estoy colocada en el último paso que hice y ahora he hecho otro montecito, pero con caracoles de mar. Ahora ¿qué sigue? ¿dímelo por favor? (En este momento, Hypatia siente que se está demorando mucho y está a punto de dejar todo por la paz).

Thales. Ahora, desde ese último paso que realizaste, camina playa adentro, es decir, alejándote del mar, y al mismo tiempo observa el caracol que colocaste en el montecito de la primera marca.

Hypatia. Estoy alejándome de la costa como tú me lo dices y observo a la vez el caracol que coloqué en el montecito de la primera marca que hice.

Thales. Continua avanzando así como me lo dices.

Hypatia. ¿Hasta cuando voy a dejar de alejarme?

Thales. Hasta que la cabeza de la estatua, la primera marca que colocaste y tú misma estén los tres en línea recta.

Hypatia. He llegado al lugar en donde me dices que estoy coincidiendo con la cabeza de la estatua, la primera marca que puse y yo misma. ¿Y ahora qué?

Thales. Muy bien, pues ya tienes la solución.

Hypatia. ¿Cómo? (Hypatia se quedó asombrada, pues de pronto no tuvo idea de lo que había realizado). No, no te entiendo eso que me dices que ya tengo la solución.

Thales. Sí, observa que con lo que has caminado y con las marcas que pusiste sobre la arena has construido un triángulo.

Hypatia. (Un poco sorprendida, le contesto) Sí, sí tengo ese triángulo que dices sobre la arena, ¿Y?.

Thales. Pero también tienes otro triángulo que se forma con la cabeza de la estatua, donde empezaste a caminar y el primer montecito que colocaste, que por cierto le pusiste un caracol de mar.

Hypatia. Ah. Sí, tienes razón, tengo dos triángulos.

Thales. Oye, ¿y cómo son esos dos triángulos?

Hypatia. Pues yo los veo iguales, (contestó algo molesta)

Thales. Bueno, entonces si esos dos triángulos son iguales...

Hypatia. (No dejó que terminara de hablar Thales y atropelladamente dijo lo siguiente). Sí, tienes razón, en efecto como tú dices esos dos triángulos son iguales, y al ser iguales, entonces, la distancia del barco a la costa está siendo reflejada entre la marca del segundo montecito y donde estoy yo parada. Oh!! Thales, de verdad que como dicen los del pueblo, en verdad eres maravilloso resolviendo problemas geométricos.

Thales. No Hypatia, tú lo has resuelto; yo lo único que hice fue guiar tus ideas para que encontraras la solución.

Hypatia. Pero ahora me surgió una duda.

Thales. ¿A qué te refieres?

Hypatia. ¿Cómo sé que lo que hicimos no tiene errores?

LAS PIRÁMIDES DE EGIPTO Y THALES DE MILETO

Este problema está colocado después del diálogo que se entabla con Thales y su novia, para ver que en estas dos soluciones, (para llegar a ellas), lo que hace Thales, es utilizar el concepto de rectas paralelas. Pero lo que considero más importante en este caso, es que, en el problema anterior utiliza la igualdad de triángulos, mientras que este problema que se da a continuación es el de igualdad de segmentos de recta.

En este problema, Thales hace uso de los triángulos rectángulos, así como de igualdad de longitudes.

OBJETIVO

Encontrar la altura de una pirámide.

PROBLEMA

En otra ocasión, cuando Thales andaba de comerciante en el Egipto antiguo, en una caravana, en compañía de un Rey de Egipto cuyo nombre era Amasis, a lo lejos se llegó a divisar las pirámides que fueron utilizadas como última morada para los Reyes de Egipto. Aprovechando este acontecimiento el Rey Amasis, conociendo la fama de Thales, le hizo la siguiente pregunta:

Oh, Thales, conociendo tu talento y abusando de la paciencia que nos has mostrado en este viaje a través del desierto y estando tan cerca de estas pirámides que han servido como última morada para mis antecesores también Reyes, perdona mi atrevimiento de pedirte que me saques de la duda que me ha surgido. ¿Me podrías decir qué altura tienen las pirámides?

A lo que Thales le contestó. No es ningún atrevimiento el que me pides Rey Amasis. Y veamos de que manera podría yo encontrar la forma de responderte para disipar esa duda que ha surgido de tus pensamientos. Pero para ello, permite que algunos de tus esclavos me ayuden para encontrar la respuesta que tanto anhelas.

El Rey le preguntó entonces ¿Qué es lo que necesitas de mis esclavos?

A lo que Thales le respondió; necesito a seis de tus esclavos, así como un bastón.

Al Rey le sorprendió esa petición, pues él creyó que era otra cosa lo que necesitaba, sin embargo accedió y mandó llamar a seis de sus esclavos, mientras que el bastón se lo entregó personalmente.

Entonces Thales dirigiéndose a los esclavos les dio las siguientes instrucciones:

Ustedes tres junto con el bastón harán ésto, colocarán el bastón bien paradito en el suelo y medirán la sombra del bastón que se proyecta en el suelo, cuando la sombra del bastón tenga el mismo tamaño de éste, me lo harán saber. Enseguida Thales caminó hacia la pirámide para colocarse cerca de uno de los lados de ésta, pero no fue a cualquier lado, pues buscó el que no mostraba sombra.

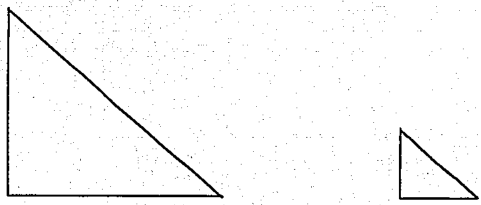
Dirigiéndose a los otros tres esclavos, Thales le dijo a uno de ellos, tú te pondrás a la mitad del lado de la pirámide (haciéndole señas con las manos para que se colocara en el lado que no mostraba sombra) y no te muevas de ahí. O coloca una marca.

Al segundo esclavo le dijo, tú te pondrás en la posición, como si estuvieras caminando en la dirección de la sombra que proyecta la pirámide, o bueno, como si fueras a perseguir tu sombra, y al tercer esclavo le dijo tú colócate enfrente de tus dos compañeros, pero en donde termine la sombra de la pirámide. A este último esclavo le dijo: cuando oigas gritar que la sombra del bastón mide lo mismo que éste, entonces ahí donde estés, ya no te muevas.

Pasó un rato y se oyó finalmente el grito esperado, entonces Thales en ese momento se dirigió al Rey Amasis para decirle lo siguiente:

Ha llegado el momento de cumplir tu deseo, pues ya tengo la respuesta a tu pregunta. Y tomando una vara con sus manos hizo dos figuras geométricas en la arena que parecían dos triángulos rectángulos. Observa ahora lo que les he indicado a tus esclavos, tres de ellos midieron la sombra del bastón al momento de tener el mismo tamaño de éste. Los otros tres se colocaron en la dirección de la sombra de la pirámide. (Haciendo las figuras en la arena)

Y continuó diciendo, observa Rey Amasis, al momento de que el bastón y la sombra tienen el mismo tamaño, entonces la sombra de la pirámide está indicando la altura de la pirámide.



Por un instante, se oyó un silencio, incluso se llegó a oír el ulular del viento; y de súbito se escuchó un murmullo que se empezó a generalizar para convertirse en asombro. A lo cual el Rey hizo una señal para que se callaran y le dijo a Thales, de verdad me has convencido de tu sagacidad para encontrar la solución a los problemas que se te plantean.

EL PROBLEMA DE LAS BOLAS DE BILLAR

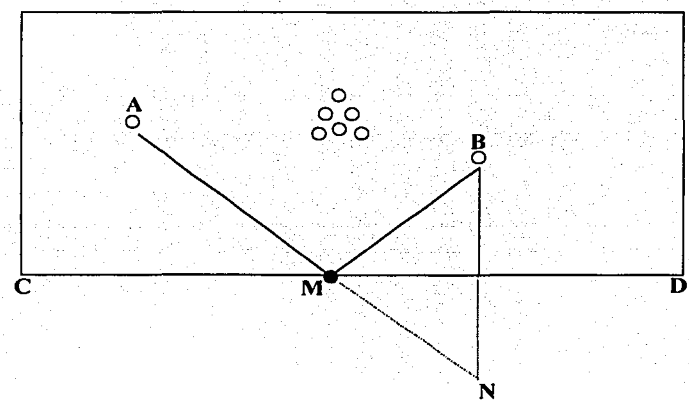
Del problema que se da a continuación, por lo general, los alumnos que frecuentan el billar dan la respuesta en forma inmediata. Sin embargo, cuando el profesor le sugiere que argumenten su respuesta, no saben cómo.... y en consecuencia pierden el interés en resolverlo.

OBJETIVO

Localizar el punto en donde debe pegar la bola de billar sobre la banda de la mesa de billar.

Ejercicio

Una mesa de billar tiene 8 bolas de billar, como se ve en la figura, ¿dónde debe pegar la bola A, sin efecto sobre la banda CD para golpear a la bola B?



SOLUCIÓN

El punto N es el punto simétrico de B con respecto a la banda CD. Trazar la recta que pasa por el punto A y el punto N, observa que esta recta cruza la banda CD en algún punto al cual le llamaremos punto M. Regresemos a nuestro problema de las bolas de billar, ese punto M es donde va a pegar la bola en la banda CD para después dirigirse hacia la bola B. Al contestar las preguntas y actividades que están a continuación, justificarás que el punto M es el que da la respuesta al ejercicio.

PREGUNTAS Y ACTIVIDADES.

1) Traza la recta que pasa por los puntos M y B.
2) Las letras N, M y B forman un triángulo, éste lo puedes simbolizar así _____.
3) Este triángulo a su vez contiene a dos triangulitos. Coloca la letra que falta para localizarlos. Así que la letra es ______.
4) Los dos triangulitos se pueden entonces simbolizar así: Para el triangulito uno _____________, para el triangulito dos _________________.
5) El segmento NB esta formando cuatro ángulos con respecto a la banda CD, luego ellos son ____________________, ______________________, ____________________ y __________________.
6) Esos triangulitos son iguales por el criterio L. A. L. es decir:

   _________________ = _________________ (Lado)
   _________________ = _________________ (Angulo)
   _________________ = _________________ (Lado)

   y por ser iguales estos triangulitos se concluye que MN = MB. Pero MB es parte de la trayectoria de la bola de billar es A, así que A chocará con la bola B.

CONECTÁNDOSE A UNA AUTOPISTA

Por lo general, los estudiantes se hacen preguntas, tales como ¿qué sentido tiene saber lo que es una mediatriz?, yo no le veo sentido para que me puede servir. Si yo voy a estudiar leyes.... y .... que yo sepa, en la facultad de Derecho no se ve mediatriz.

El siguiente problema nos muestra que aún cuando no vaya a estudiar una carrera que no lleve geometría, se tiene una aplicación.

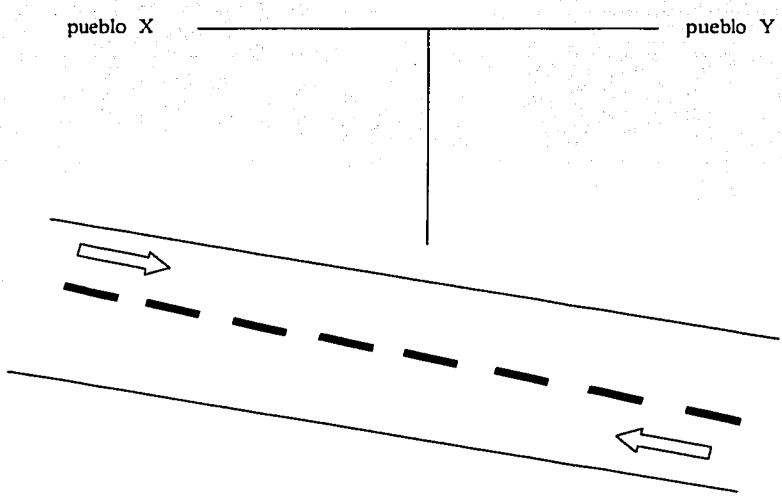
OBJETIVO.

Aplicando la mediatriz de un segmento de recta.

EJERCICIO

Desde que se tiene memoria, dos pueblos han tenido intercambios, tanto culturales como de abastos. En tiempos recientes, el Gobierno Federal construyó una autopista, pasando ésta muy cerca de ellos.

Aprovechando este acontecimiento, los Presidentes Municipales se reunieron para ver si era posible conectarse a la autopista. Para evitar dos carreteras independientes se buscó la forma de construir una sola carretera que los uniera a la autopista. Ver figura.



Para lo cual se propuso lo siguiente:
Primero se construye la carretera en línea recta entre los dos pueblos. Después para unirla con la autopista, se construye el otro tramo trazando la mediatriz entre los dos pueblos, todos quedaron de acuerdo y se procedió a la construcción.

Instrucciones y Preguntas de Control

1) Hacer una figura geométrica del problema.
2) Construir la figura geométrica de la solución que proponen los Presidentes Municipales.

3) Coloca letras mayúsculas para diferenciar a los pueblos, así como para saber donde empieza la mediatriz y en donde se cruza la autopista.
4) Hay dos distancias iguales, ellas son ____________________ y ____________________
5) La distancia desde donde empieza la mediatriz hasta donde se cruza con la autopista está simbolizada por ____________________
6) El primer pueblo para llegar a la autopista esta dada por dos tramos de carretera, ellos son ____________________ y ____________________
7) El segundo pueblo para llegar a la autopista esta dada por dos tramos de carretera, ellos son ____________________ y ____________________
8) Así que para llegar a la autopista, para cada pueblo es la misma distancia ¿por qué? ____________________

CONSTRUYENDO UN TRIÁNGULO

Porqué es necesario tomar en cuenta las medidas de los lados de un triángulo y porqué también es necesaria otra condición.

EJERCICIO

¿Con tres segmentos de recta siempre se podrá construir un triángulo?

¿Podrías construir un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 10 cm? Indica la forma en que lo harías. Con las medidas de los segmentos se formará el triángulo?

SI ☐ NO ☐

Construye la figura para afirmar tu aseveración.

LA CONDICIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA

Un problema típico es el que vemos a continuación, aquí lo importante es la pregunta que se le hace al alumno para que se concientice de que no siempre se va a formar un triángulo, es decir, que se deben de cumplir ciertos requisitos para hacer la construcción geométrica del triángulo.

OBJETIVO

Encontrar cuáles son las condiciones para construir un triángulo cualquiera.

MATERIAL

- Una regla
- Compás

MECANISMO DE CONTROL

Esta práctica se hará en dos partes.

La primera parte se te indicará cómo se construye un triángulo cualquiera cuando se te dan tres segmentos con medidas 6 cm, 5 cm y 9 cm. La segunda parte consiste de algo similar, pero tendrás la habilidad de entender porque no es posible construir otro con medidas arbitrarias.

PROCEDIMIENTO

1) Trazar un segmento de 9 cm.

2) Desde uno de los extremos de ese segmento, trazar una circunferencia que tenga por radio 6 cm.

3) Utilizando el otro extremo del segmento, trazar otra circunferencia pero de radio 5 cm.

4) ¿Esas dos circunferencias, se cruzan? ____________________________

5) ¿Por qué? ____

6) Así que estas circunferencias se cortan en dos puntos.

7) Nos fijamos en uno de estos puntos del paso número 6 y trazamos los segmentos que pasan por los extremos del segmento de 9 cm para formar el triángulo.

8) Repetir los pasos anteriores, pero ahora los segmentos miden 3, 4 y 10 cm.

9) ¿Se cruzan las circunferencias que trazaste por los extremos del segmento de 10 cm? ____________

10) Esto se debe a que: ____

11) Entonces para construir un triángulo, debe tenerse en cuenta que.

____

12) ¿Será cierto siempre que dados 3 segmentos con medidas arbitrarias se pueda concluir un triángulo? __________

¿Por qué? ____

13) Por lo tanto, para que se pueda trazar un triángulo debe tenerse que:

____

____,

lo cual es una condición necesaria y suficiente para construir un triángulo dados 3 segmentos arbitrarios.

LA SOMBRA Y LOS ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

En este ejercicio, el alumno encontrará donde están localizados los ángulos correspondientes, es decir, la geometría que se les enseña en la Escuela Secundaria, se les indica cuales son los ángulos correspondientes, cuando se les menciona de dos rectas cortadas por una transversal, a veces también se les enseña, en el caso muy especial, de cuando las dos rectas son paralelas y son cortadas por una transversal de una manera abstracta; por ello, a continuación se da un ejercicio de dónde están estos ángulos correspondientes.

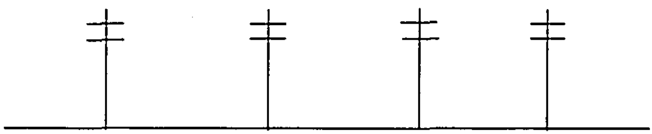
Ángulos Correspondientes.

OBJETIVO

Encontrar los ángulos correspondientes que se localizan entre rectas paralelas cortadas por una recta transversal.

EJERCICIO

Comprobar que los postes de alumbrado público que se encuentran a lo largo de una calle, proyectan todos a la vez su sombra cuando sale el Sol.



Material.

- Una calle que tenga postes de alumbrado
- Un transportador
- Un equipo de 4 alumnos

Mecanismo de control

Esta práctica se debe realizar en un día que esté el cielo sin nubes.

Procedimiento

1) Con el transportador, mide el ángulo de la sombra que se forma con el poste.
2) Hacer lo mismo con los otros postes, pero evitando que transcurra mucho tiempo.
3) Hacer un dibujo del problema para indicar la medición de cada ángulo.

4) Hacer otro dibujo para indicar la inclinación de la sombra y la banqueta.

Preguntas

1) El ángulo que se forma con el primer poste mide ____________ grados.

2) El ángulo que se forma con el segundo poste mide ___________ grados.

3) El ángulo que se forma con el tercer poste mide _________ grados.

4) Al observar las sombras del segundo dibujo que hiciste, (las sombras) notarás que se forman rectas ordenadas, estas rectas se llaman rectas ________________. Mientras que la recta que forma la banqueta se llama recta ___________________; y los ángulos que mediste se llaman ángulos ____________.

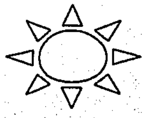
5) ¿Por qué se pide que en la medición de los ángulos no transcurra mucho tiempo? Ello se debe a ___________________________

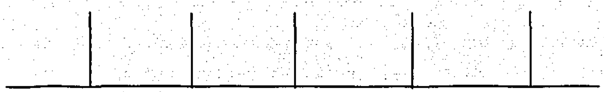
OTRO EJEMPLO DE ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

La siguiente práctica se deja de tarea a los estudiantes para que la desarrollen en su casa en un fin de semana, esto es para que observen el ángulo que se forma con la sombra y el suelo, así como también inducirlos a identificar el nombre de estos ángulos.

EJERCICIO

Coloca 5 palitos en línea recta sobre el suelo, de tal manera que estén perpendiculares al suelo y espera a que proyecten sombra cuando salga el sol.





Los ángulos que se forman con la sombra y el suelo ¿miden lo mismo?:

SI ☐ NO ☐

Ello se debe a que ______________________________

Estos ángulos se llaman ángulos correspondientes.

LOS OBJETOS FÍSICOS Y LOS ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

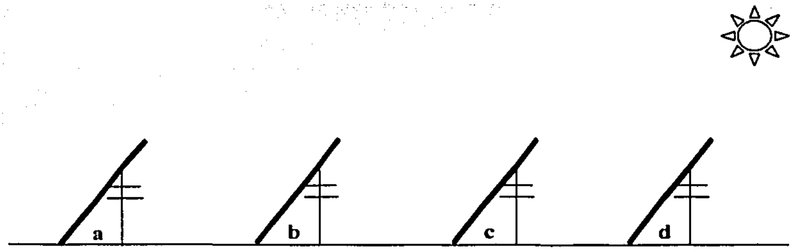
Todos los objetos físicos que están aislados y expuestos a la intemperie proyectan sombra en presencia del Sol, por supuesto siempre y cuando no esté nublado. El ejemplo que se da a continuación es con el propósito de que los alumnos vean que tienen un nombre muy particular, el ángulo que se forma cuando se habla de líneas paralelas cortadas por una transversal, es decir, que se den cuenta que estos ángulos no están fuera de la realidad y que no son entes abstractos.

OBJETIVO

Que el alumno analice y argumente, dónde se localizan los ángulos correspondientes.

PROBLEMA

Los postes de alumbrado que se encuentran a lo largo de una calle, proyectan todos a la vez su sombra cuando sale el sol, indica ¿por qué los ángulos a, b, c y d son iguales y cómo se llaman estos ángulos?



PREGUNTAS

1) ¿Los ángulos son iguales?, ¿por qué?

____

2) ¿Esos ángulos se llaman ángulos? ____________________, por que los postes de alumbrado forman rectas ____________________ y lo largo de la calle forma la recta ____________________.

LOS ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

En los dos ejercicios siguientes, se hace un intento para introducir al alumno de manera natural a las demostraciones en geometría, de manera más o menos formal, el fin de hacerlo así es para que se vaya familiarizando con el método científico para hacer estas demostraciones.

OBJETIVO

Identificar cuáles son los ángulos opuestos por el vértice y comprobar que son iguales.

Material.

- Un salón de C.C.H.
- Un equipo de 4 alumnos.

Procedimiento

1) En el salón de clases, observa los reforzamientos contra temblores que están colocados en alguno de los ventanales y haz la figura geométrica.

2) Localiza dónde están colocados los ángulos opuestos por el vértice.
3) Márcalos con algún símbolo.

PREGUNTAS

1) ¿En qué lugar encontraste estos ángulos opuestos por el vértice? ______________________________

2) ¿Indica cuáles son? ______________________

3) Si les pones la letra N a uno de ellos y al otro la letra M, estos ángulos estarán indicados así: ____________________________ y ____________________

4) Aparte de estos dos ángulos, sobre la misma figura anterior, ¿hay más ángulos opuestos por el vértice? ________________________

5) Ponle otras letras para saber cuáles son ______ y ______

6) Estos están colocados en la figura geométrica de esta forma __________

7) Con esta figura geométrica, observa a tres de estos ángulos e indica cuáles son ____________________, ____________________ y ____________________

8) Si te das cuenta, al sumar el primer ángulo y el segundo ángulo se tiene por medidas 180°, indícalo _______ + __________ = 180°

9) Algo similar sucede con el 2° y 3° ángulo. Es decir _____ + _____ =

10)Luego, estas dos parejas de ángulos dan 180°, entonces se tiene que la primera pareja de ángulos es igual a la segunda pareja de ángulos. Es decir ____________ + ___________ = _____________ + ______________

11)Observa que en esta igualdad, dos de los 4 ángulos son iguales, así que, éstos se pueden cancelar si lo pasamos al otro miembro. Por lo que nos queda un ángulo de cada lado. Es decir __________ y _________

12)Pero estos últimos ángulos quedaron expuestos uno frente a otro del signo igual. Así que se tiene: ____________________ = ______________

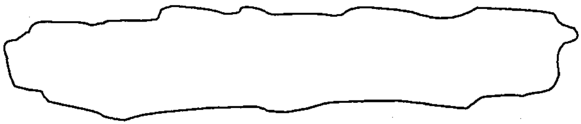
13)Luego, hemos comprobado que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

El siguiente ejercicio está encaminado para utilizar alguno de los criterios de igualdad de triángulos, es decir, la solución está siendo encontrada a partir de la aplicación de alguno de ellos, por supuesto que no es la única forma para llegar a lo deseado. Aquí lo que se pretende es que el estudiante se de cuenta por él mismo de que forma se aplica la geometría del triángulo (igualdad de triángulos) para obtener la solución.

OBJETIVO

Utilizar igualdad de triángulos, indicando cual criterio se está aplicando, ésto es, (ALA, LAL, LLL).

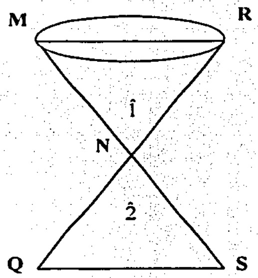


Material

- 5 estacas
- Un martillo
- Cuerda
- Cinta métrica

Ejercicio.

Un lago está de la forma como se presenta en la figura anterior, construir dos triángulos para encontrar el largo del lago y después aplicar alguno de los criterios de igualdad de triángulos para comprobar que lo realizado no tiene errores.



Procedimiento.

1) Dos de las estacas clavarlas en los extremos del largo del lago, le llamamos punto M y R respectivamente.

2) Clavar una de las estacas un poco alejado del lago y le llamamos punto N.

3) Atamos la cuerda en la estaca M para dirigirla al punto N, la fijamos para que quede recta y medimos esa longitud.

4) Esa misma longitud, colocarla en NS, es decir, hacemos MN=NS (ver figura).

5) Desde la estaca R atamos otra cuerda hacia la estaca N y medimos la longitud RN para colocarla en NQ, es decir, RN=NQ.

6) De esta forma se puede encontrar la medida de QS.

Preguntas

1) Cuanto mide MN = ______________

2) Cuanto mide NS = _______________

3) Cuanto mide RN = _______________

4) Cuanto mide NQ = _______________

5) Cuanto mide QS = ________________

6) Cuantos triángulos están formados en la figura __________

7) Estos triángulos son _____________ y _________________

8) Hacer la figura geométrica del paso anterior

9) Los triángulos 1 y 2 son iguales, porque ______________________________

10) Observemos ahora los dos triángulos, entonces veremos que: MN, NR y RM son los lados de uno de los triángulos, mientras que los lados del otro triángulo son ________________________, ________________________ y ____________________________

11) Finalmente estos dos triángulos son iguales por el criterio LAL, pues se cumple que:

a) MN = NS

b) $\hat{1} = \hat{2}$

c) RN = NQ

12) De donde se deduce que por ser triángulos iguales se tiene MR = ______________

13) Pero como la medida de QS = __________, entonces MR = __________ que es la longitud del lago.

14) ¿Si el punto N hubiera estado alineado con MR, hubieras podido hacer los pasos anteriores? _____.

Explica

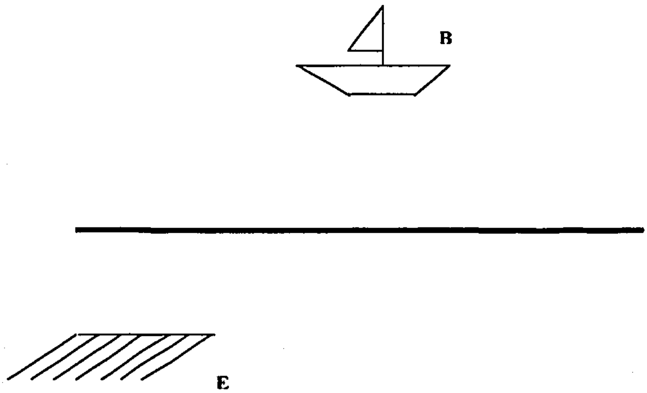
____

DISTANCIA ENTRE UN BARCO ANCLADO Y EL EMBARCADERO

Este ejercicio es parecido al número 6, pero su solución no es el mismo procedimiento, es decir, se muestra de manera diferente con la finalidad de que el alumno vea que la respuesta al ejercicio se puede hacer de otra forma. Aquí se hace uso, tanto de la igualdad de triángulos como el invertir un triángulo de ángulos consecutivos para llegar a la solución del problema. Veamos en qué consiste este procedimiento.

OBJETIVO

Utilizar igualdad de triángulos para llegar a encontrar la distancia entre el barco y el embarcadero.



EJERCICIO

Un barco (B) está anclado en la costa y el embarcadero (E) se localiza sobre la costa. Encontrar la distancia que existe entre el barco y el embarcadero.

Material

- Pupitre del salón de clases
- Un transportador
- Una regla graduada
- Un equipo de 4 alumnos

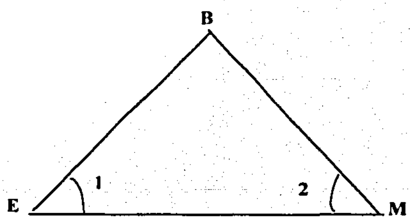
PROCEDIMIENTO

Esta práctica se hará en el salón de clases para que se vea cómo se podría encontrar en un hecho real.

1) Desde cualquier punto M que este en la costa, trazar una recta que pase por el punto E.

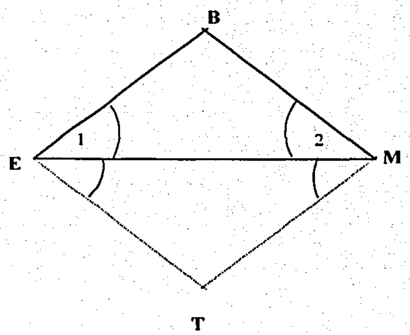
2) Con la regla medir esa distancia EM

3) Trazar las rectas que pasan por EB y BM



4) Con el transportador, medir el ángulo 1 y el ángulo 2 como se aprecia en la figura.

5) Esos dos ángulos los trasladamos en sentido opuesto a la figura geométrica y donde se cruzan le llamamos punto T.



PREGUNTAS

1) ¿Cuánto mide el ángulo 1? ________________

2) ¿Cuánto mide el ángulo 2? ________________

3) ¿Cuánto mide el segmento EM? ______________

4) ¿Cuánto mide el segmento ET? ________________

5) Se han formado dos triángulos. El triángulo EBM y el triángulo ________

6) Los lados del triángulo EBM son EB, BM y EM; mientras que los lados del otro triángulo son ____, ____ y ____

7) Como hubo un traslado de ángulos, resulta que los ángulos consecutivos son iguales y ellos son ______________ y ____________ así como este _________________ y ____________________.

8) Estos dos triángulos son iguales por el criterio ALA de igualdad de triángulos, pues el criterio se cumple de la siguiente forma:
   - Dos ángulos consecutivos son iguales. Ellos son: ____ y ____.
   - Un lado es común a los dos triángulos y éste es _________.
   - Los otros dos ángulos consecutivos son iguales. Ellos son ____ y ____.
   - Así que ET = EB esto es cierto, ¿por qué? ________________.
   - Luego entonces, la distancia del barco anclado al embarcadero es: ____________________________________.

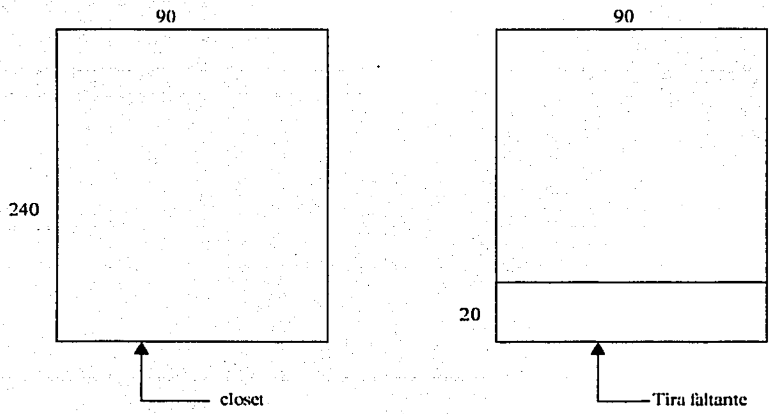
ENSAMBLANDO UNA PUERTA DE CLOSET

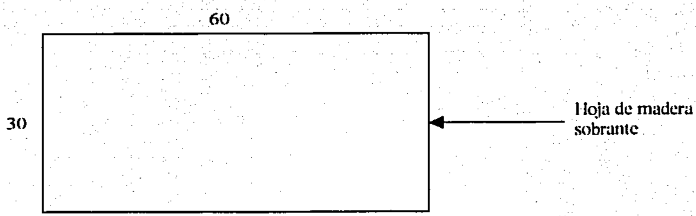
En este ejercicio, se le presenta al alumno para que recuerde el concepto de líneas paralelas y de rectas transversales, así como expresar sus ideas verbalmente.

EJERCICIO

Un carpintero, al estar ensamblando un closet, se da cuenta de que para terminarlo le hace falta una tira de madera con medidas de 20 x 90 cm, pero por más que la busca, se da cuenta que la dejó en su taller; sin embargo, dentro de la madera que le sobra, observa que tiene una hoja de madera con medidas de 30 x 60 cm y que además coincide con la forma de la veta de la madera colocada al closet. Así que el carpintero le hace tres cortes a ésta con el serrote y de esta forma logra terminar el closet.

¿Dónde hizo los cortes el carpintero a la hoja de madera?

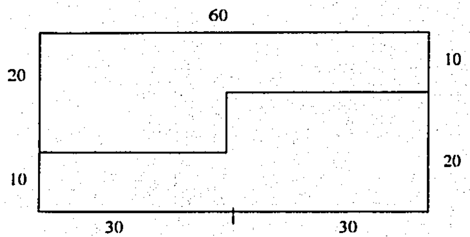


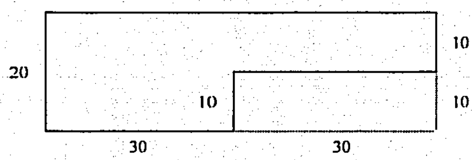


¿Dónde hará los tres cortes?

Sugerencias.

- Si de los 30 cm la corta por la mitad, lo que obtiene, es dos tiras de 15 x 60 y no resuelve el problema.
- Si de los 60 cm, el corte se hace por la mitad, lo que se obtendrán son dos tiras de:_________.
- Si hace el corte a manera de 20 en 20, el problema se le resuelve en parte, pero la forma de la veta de la madera no coincide con la del closet.
- ¿Resolverá el problema?_________
- ¿Entonces qué fue lo que hizo? ______________________________
- Mira la figura de abajo y di con tus propias palabras los cortes que hizo ______________________________


60
20
10
10
20
30
30


20
10
10
10
30
30

Preguntas.

1) Uno de los cortes es paralelo a la longitud más grande, el otro corte es ______________ a la longitud _________________ y el último corte que hizo el carpintero es _________________ a la longitud más ____________

2) Si consideramos a la tabla que serruchó el carpintero como un rectángulo, entonces los cortes vendrían siendo segmentos de recta y estos segmentos tienen un nombre particular en geometría, ¿dime cómo se llaman? ____

____

3) Hablando de rectas paralelas y de recta transversal, indica cuáles son las rectas paralelas y cuál es la recta transversal.

____

USANDO EL TRANSPORTADOR

Aquí presentamos un ejercicio, en el que al hacer uso de un transportador o una escuadra de juego de geometría para comprobar que el ángulo a utilizar deberá medir 90° y en consecuencia el alumno deberá concluir que todos los objetos colocados de cierta forma, éstos cruzarán el centro de la Tierra.

OBJETIVO

Te des cuenta que cualquier recta perpendicular a la Tierra pasa por el centro de la misma.

PROBLEMA

Mostrar que cualquier recta perpendicular a la Tierra pasa por el centro de ella.

Material

- El asta bandera del C.C.H.
- Un transportador o escuadra

PROCEDIMIENTO

Observa y mide el ángulo que se forma en la base del asta bandera.

PREGUNTAS

1) ¿Cuánto mide el ángulo? ______________________________

2) ¿Este ángulo se llama?, ángulo ____________________ porque mide _______ grados

3) Si trazamos una recta por el asta bandera, ésta cruza por el centro de la Tierra, ¿por qué? ______________________________

4) ¿Cruzará el centro de la Tierra si el ángulo no mide 90°?, explica ______________________________

5) ¿Cualquier asta bandera que forme un ángulo recto con el suelo, su recta pasa por el centro de la Tierra?, explica porqué ______________________________
____

LOCALIZANDO RECTAS TRANSVERSALES

Siempre se ha mencionado que en el salón de clases no es fácil encontrar un uso adecuado para la geometría, el alumno no se convence fácilmente dónde está una aplicación de la geometría.

Por ello, el siguiente ejemplo muestra una posible respuesta al alumno, de que en efecto, la geometría tiene un uso adecuado en el salón de clases.

OBJETIVO

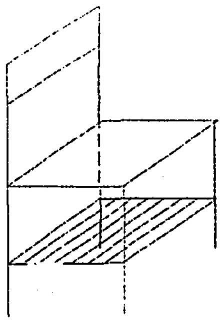
Las rectas paralelas cortadas por rectas transversales tienen aplicaciones en el salón de clases.

Material

- El salón de clases
- Las mesas de trabajo con sus sillas

MECANISMO DE CONTROL

Para evitar que se disperse el objetivo, se le pedirá a cada equipo que observe la forma que tiene una silla (como se muestra en la figura), y determine dónde se encuentran rectas paralelas.



PROCEDIMIENTO

Cada equipo buscará en una silla, dónde se encuentran rectas paralelas cortadas por transversales.

PREGUNTAS

1) ¿Dónde encontraste rectas paralelas? ______________________

2) Menciona, al menos dos de ellas

____

3) ¿Cómo sabes que las rectas que encontraste, son paralelas?

____

4) ¿Tienen alguna aplicación estas rectas que están en la silla?, ¿por qué?

____

5) ¿Puedes mencionar algún otro objeto del salón de clase, en el que se encuentren rectas paralelas? _____ ¿cuál? ______________________

6) ¿Cómo se llaman las rectas que están sosteniendo a estas rectas paralelas? ______________________________
(Nota. *En geometría plana, a estas rectas se conocen como rectas transversales*)

7) ¿En la pregunta 5, existen rectas transversales? ______________

8) ¿Menciona un ejemplo de ellas? ______________________

LOS ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

En este ejercicio, se ve una aplicación de los ángulos complementarios, ésta consiste en construir un triángulo rectángulo y hacer el trazo de dos ángulos de la misma magnitud, ello con la finalidad de que el alumno se de cuenta que la construcción geométrica hecha de esta manera, nos conduce a un triángulo rectángulo isósceles y en consecuencia a la solución del ejercicio. Además de el uso de ángulos adyacentes y ángulos consecutivos.

OBJETIVO

Identificar en dónde se pueden encontrar ángulos complementarios.

Material

- Un edificio que tenga reforzamientos contra temblores.
  (Nota. *En el C.C.H., hay algunos edificios que tienen estos reforzamientos)*

PROCEDIMIENTO

1) Hacer una figura geométrica para indicar dónde están los reforzamientos.

2) Observa uno de los reforzamientos y haz su figura.

3) En la figura, a los ángulos que se forman, ponle las letras que desees (éstas deben ser diferentes)

PREGUNTAS

1) ¿Cuántos ángulos encontraste? ____,
¿cuáles? ____

2) ¿La suma de dos de sus ángulos es? ________, ¿por qué?
____

3) ¿La suma de 2 ángulos consecutivos es?
____

4) Al sumar 90°, estos ángulos reciben el nombre de:
____

5) De aquí, puedes entonces decirnos que si dos ángulos son __________, cuando su suma nos da _______ grados.

LOS ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Este ejercicio está motivando al alumno de hacer uso implícito del ángulo llano, o ángulo suplementario, además de la aplicación de puntos consecutivos y alineados para llegar a la solución de un problema sin necesidad de hacer cálculos engorrosos.

OBJETIVO

Encontrar la medida de los ángulos suplementarios.

Material

- Un poste que tenga cable tensor, para evitar que se ladee
- Un transportador
- Una regla

PROCEDIMIENTO

1) Buscar un poste que tenga un tensor, dibuja la figura que lo represente y traza una recta sobre el suelo que pase por la base del poste y la base del tensor.

2) La recta y la base del tensor está formado por dos ángulos.

3) Con el transportador, medir cada ángulo.

PREGUNTAS

1) ¿El ángulo mayor mide? ____________ ¿y el ángulo menor mide? ________________

2) ¿Al sumar estos dos ángulos se obtiene como resultado? ________

3) ¿Estos dos ángulos reciben el nombre de? ______________________
¿por qué? ____

Por lo tanto, el ángulo menor es un ángulo _______________ del ángulo mayor y viceversa.

4) ¿Es necesario que el poste esté vertical? ___________________

5) ¿Por qué no es necesario? __________________________________

Observación:

Los ángulos suplementarios, también reciben el nombre de ángulos llanos.

UNA APLICACIÓN DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

El siguiente ejercicio, es con la finalidad de que recuerdes el álgebra que haz estado utilizando en la secundaria, así como el concepto de triángulo isósceles para obtener una ecuación lineal y llegar a la solución.

OBJETIVO

Hacer el planteamiento de una ecuación lineal y obtener su solución, utilizando previamente el concepto de triángulo isósceles.

EJERCICIO

El frente de una tienda de campaña tiene la forma de un triángulo isósceles, la base es el doble de uno de sus lados. Si el perímetro mide 4.20 m encontrar cuánto mide cada lado.

Mecanismo de control.

Hacer equipos de cuatro alumnos

PROCEDIMIENTO

1) Hacer una figura geométrica del frente de la tienda de campaña.

2) La figura que haz dibujado es un ______________________________

3) Este triángulo se llama _________________________ porque 2 de sus lados son _____________________________.

4) Ponle letras a los lados del triángulo, pero recuerda que al menos dos de ellos son iguales, así que la letra para los lados iguales es ______ y para el lado diferente será ________.

5) El problema dice: *"La base es el doble de uno de sus lados"* . Así que simbólicamente el paso anterior nos dirá:
La base = al doble de uno de sus lados __________________ o sea que con las letras que colocaste en el punto anterior será:
____

6) Por otro lado, el perímetro del triángulo es la suma de sus tres lados, así que tendremos:
___________ + __________+ __________ = 4.20 m

7) Pero la base es el doble de uno de sus lados y al colocar esa doble se llega a tener:
___________ + __________+ __________ =

8) El resultado de esta suma es __________ = 4.20 m

9) Al despejar la letra _____ se tiene por resultado ________ m. Es decir, esa letra representa a uno de los lados del triángulo, así que, cada lado mide ______, mientras que la base de la tienda mide ______ m.

EL PROBLEMA DEL CARRETE DE HILO

Este ejercicio tiene un buen número de soluciones y de hecho el objetivo de colocarlo aquí es con la finalidad de que el alumno se de cuenta que existen problemas que tienen diferentes maneras para llegar a encontrar su solución.

EL PROBLEMA DEL CARRETE DE HILO

Un ingeniero agrónomo se dirige hacia el campo de cultivo para medir un terreno de 9 m de largo, pero cuando busca en su mochila la cinta métrica, por error guardó un carrete de hilo. (Lo que puede hacer el ingeniero es regresar por la cinta métrica, pero eso le quitaría mucho tiempo) para su buena suerte, observa que junto al terreno se localiza una cabaña de forma rectangular y que ésta mide 5 m de largo por 7 m de ancho.

PROBLEMA

¿Cómo encontrar las dimensiones del terreno utilizando el carrete de hilo y la cabaña?

MATERIAL

- Un carrete de hilo
- Conoce las dimensiones de la cabaña

PROCEDIMIENTO

1) Lo primero que hace el agrónomo es medir el ancho y largo de la cabaña, haciendo la diferencia entre esos valores para obtener 2 m.

2) Este valor lo duplica y obtiene 4 m.

3) Así ya tiene 5 y los 4 encontrados se obtiene por resultado 9.

El agrónomo no se convence con esta solución encontrada, entonces se le ocurre otra para evitar la duplicidad y la encuentra en cinco pasos o menos.

ACTIVIDAD

Encuentra la solución.

1) ______________
2) ______________
3) ______________
4) ______________
5) ______________

¿Podrás encontrar otra solución, evitando duplicidad? ________

Indícanos cuáles son: ____
____
____

Otra solución saldría en tres pasos, sumar 7 con 5 y el resultado dividirlo por 4, para después triplicarlo. Es decir: 7 + 5 = 12, el 12 dividirlo por 4 para obtener 3 y luego triplicar, pero recuerda que el agrónomo no desea encontrarla de esa forma. El agrónomo la encontró en dos pasos, encuéntrala.

FORMANDO TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS CON UNA VISERA O GORRA DE BASE BALL

El problema subsecuente, muestra una solución geométrica fuera de lo común, porque el desarrollo es utilizando una visera (gorra de base ball), así como dos triángulos rectángulos, considero que la manera de obtener la solución es más que nada novedosa y creativa para motivar a los alumnos de nuestro plantel, porque no es necesario utilizar escuadras, pero si utilizaría una cinta métrica.

OBJETIVO

Encontrar la distancia entre un árbol y nosotros.

PROBLEMA

Un bosque que se encuentra cerca de una alambrada. Se quiere saber, que tan lejos se encuentra uno de los árboles de nosotros si me encuentro fuera de la alambrada.

MATERIAL

- Una gorra con visera
- Un equipo de 4 personas
- Una cinta métrica

PROCEDIMIENTO

1) Colócate lo más cerca de la alambrada y ajusta la visera de la gorra de modo tal; que uno de tus ojos, la visera y la base de uno de los árboles queden en línea recta.

2) A la base del árbol le ponemos punto T.

3) En donde estás tú parado llámale punto P y el ojo que utilizaste le llamamos punto G.

4) Después date media vuelta y en la misma posición de la gorra, el mismo ojo y el mismo ajuste se encontrará la misma distancia, pero afuera de la alambrada.

Nota: Para evitar que se pierda esa distancia, se le pide a otra persona que se mueva en la dirección que esta apuntando el de la gorra para detenerse donde él le indique.

5) Donde se detiene la otra persona le llamamos punto F.

6) Después se procede a medir la distancia FP.

PREGUNTAS

1) Haz una construcción geométrica para visualizarla colocando las letras T, P, F, donde deben ir, digamos que la gorra le ponemos la letra G.

2) Se han formado dos triángulos pequeños, uno de ellos es ____________ mientras que el otro es ________________.

3) Pero esos dos triángulos son triángulos _______________________.

4) Entonces indica con algún símbolo dónde están los ángulos rectos. Luego uno de esos ángulos lo simbolizas con ____________________ y el otro con _______________________.

5) Esos dos triángulos tienen un lado común y este es __________________.

6) De esta forma, se tienen dos triángulos rectángulos que tienen un lado común y su ángulo recto, luego entonces estos dos triángulos ______________________ deben ser ___________________.

7) Así que, el lado FP es igual al lado _______.

8) Entonces, al ser iguales los triángulos, la distancia de la alambrada al árbol que utilizaste esta dada por el segmento ____________________.

9) Con la cinta métrica mide el segmento FP el cual nos da ________________, que es la distancia del árbol a la alambrada.

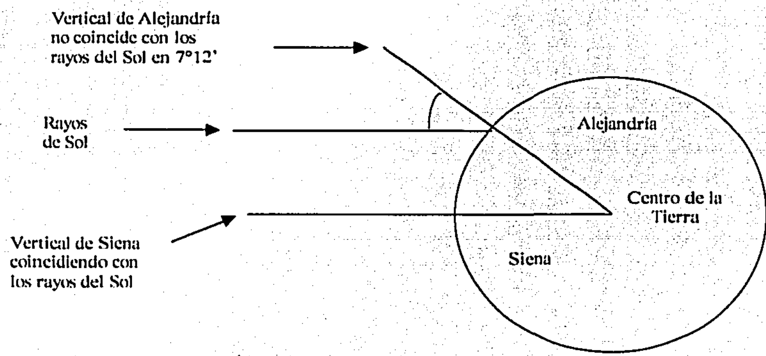
ERATÓSTENES Y LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO MÁXIMO DEL PLANETA TIERRA

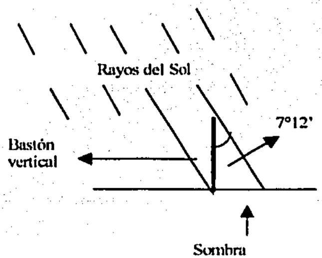
Podríamos decir que en el siguiente ejercicio (estos tipos de solución) que se plantea en este trabajo, ya ha sido utilizado desde la antigüedad. Es decir, este ejercicio lo resolvió un geómetra griego llamado Eratóstenes para encontrar la longitud de la circunferencia de la Tierra. En su solución, Eratóstenes utilizó conceptos como el arco de una circunferencia, grados, minutos y la longitud de la circunferencia entre otros.

OBJETIVO.

Que el alumno vea como un geómetra griego de la antigüedad llamado Eratóstenes midió la longitud de la circunferencia de la Tierra.

Él observó que en cierta época del año, en la Ciudad de Siena [cercano al río Nilo] los rayos del sol caían en línea vertical a la superficie de la Tierra, es decir, no había sombras que proyectaran las casas, mientras que en Alejandría, la sombra que proyectaban los objetos era de 7°12' al Sur con respecto a la vertical.





Él sabía que la distancia entre estas Ciudades era de 5000 estadios. Entonces sabiendo que cualquier vertical cruza el centro de la Tierra, se dio cuenta que la vertical de Alejandría viene siendo una recta transversal a los rayos del Sol, los cuales caen paralelos a la Tierra, así que por ser paralelas se tiene que los ángulos correspondientes son iguales (figura 2).

Nota: Un estadio es aproximadamente 158.6 m

Observa los ángulos correspondientes en la figura dos.

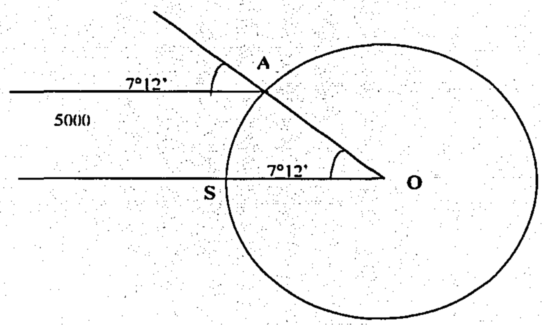


Figura 2

PREGUNTAS

1) Los ángulos correspondientes son ____________ y ____________ según la figura 2, y cada uno mide ____________.

2) El ángulo AOS de la circunferencia mide ________ porque este ángulo es un ángulo central.

3) También 12' puede ser expresado en grados dividiendo por 60, es decir, 12' = ______ de grados, esto es cierto porque 1° tiene __________________

4) Luego entonces, 7°12' se puede escribir así _______________ grados

5) La magnitud de toda la circunferencia medida en grados de la Tierra es __________ grados.

6) Ahora, al utilizar toda la circunferencia de la Tierra nuestro arco AS tendrá por longitud _________________.

7) Que al reducirlo queda _____________ de la circunferencia de la Tierra. Es decir, que 1/50 corresponde a los 7°12' de la medida del arco.

8) Así que este 1/50 equivale a los 5000 estadios que separan a las Ciudades Antiguas...

9) De aquí se tiene 2/50 equivaldrán a 10000 estadios mientras que 3/50 equivaldrán a 15000. Entonces la circunferencia total de la Tierra equivaldrá a _______________ estadios.

10) Pero como un estadio es aproximadamente igual a 158.6 m entonces _______________ x _______________ = _______________ la longitud de la Tierra.

11) La longitud de la circunferencia de la Tierra es aproximadamente de 40,000 Km, ¿el cálculo que realizó Eratóstenes fue una muy buena aproximación para su tiempo? _______.

IDENTIFICANDO UN LUGAR GEOMÉTRICO

Los lugares geométricos son muy importantes, porque nos ayudan a visualizar el problema y tratar de entender por donde va a estar la solución. Muchos alumnos no observan que en una máquina destructora, el alcance máximo a su alrededor forma una circunferencia y que los alcances mínimos forman el círculo.

OBJETIVO

Identificar algunos lugares geométricos.

A la entrada de una bahía hay un cañón, cuyo alcance es de 20 Km.

INSTRUCCIONES

1) Construir la figura geométrica del enunciado indicando dónde se encuentra el cañón así como su alcance.

2) ¿La figura geométrica está representada por una? ________________.

3) En donde se localiza el cañón, también se localiza el ______________ de esta circunferencia.

4) En este caso el radio de la circunferencia es ____________________

5) Así que una circunferencia se puede definir como _________________

6) Sombrea toda la zona geométrica antes del alcance.

7) Esa zona en geometría tiene un nombre muy particular así que se llama ______________________.

8) Entonces un círculo es ___________________________.

UNA DIFERENCIA DE ÁREAS

En el siguiente ejercicio se hace la aplicación de tener claro el concepto de cuadrado, así como las fórmulas de área del cuadrado y de la circunferencia; posteriormente hacer la diferencia entre estas áreas para llegar a la solución del problema.

OBJETIVO

Encontrar los metros cuadrados de pasto que no es maltratado.

MATERIAL

- Regla, compás y lápiz
- Un equipo de 4 personas

PROBLEMA

Un corral cuadrado de 20 m por lado tiene cuatro postes en las esquinas. Un burro se ata durante el día a uno de los cuatro postes con 8 m de cuerda, al día siguiente se ata a otro poste y así sucesivamente hasta el último poste.

INSTRUCCIONES

1) Construir un plano que indique la superficie en que el burro puede moverse por los cuatro postes.

2) La zona que recorre el burro por cada poste tiene la forma de ________________.

3) La región total que recorre el burro es de la forma de una ________________ y eso se debe a ____________________.

4) Así que esta circunferencia tiene por radio igual a _____________ m.

5) Entonces, el área de esta circunferencia es de ____________ m^2

6) Ahora, como el corral es cuadrado y mide por lado 20 m, entonces el área de este cuadrado es igual a __________ m^2.

7) Finalmente el pasto sin maltratar esta dado por la diferencia del área del cuadrado, menos el área de la circunferencia, o sea:
___________ - ____________ = ____________ m^2

UN EJERCICIO ALGEBRAICO UTILIZANDO SEGMENTOS PROPORCIONALES

Este ejercicio comprende una aplicación de semejanza de triángulos, en el que para llegar a su solución, el método a utilizar es por medio de segmentos proporcionales por medio de una figura geométrica triangular.

OBJETIVO

El alumno comprenderá una aplicación de semejanza de triángulos.

PROBLEMA

Un misil lanzado desde la Tierra, alcanza su objetivo a 1500 m de altura. Cuando tenía una altura de 25 m este habrá avanzado 50 m ¿Qué tanto se desplazó el misil antes del impacto?

SOLUCIÓN

1) Construye el triángulo que se obtiene de la trayectoria de un misil.

2) Coloca ahora la altura en donde se provocó el impacto.

3) Construye otro triángulo para indicar la altura avanzada de esos 50 m.

4) Observa que estos dos triángulos son semejantes, porque ambos tienen un ángulo recto y los ángulos agudos de la base son iguales, así que en este caso, las alturas son proporcionales y lo que avanza el misil también; es decir, las alturas ____ y ____ son proporcionales mientras que los avances del misil ____ y _____ también son proporcionales.

5) Si te das cuenta, una altura es 60 veces la otra altura, o sea _________ es _________, así es que con respecto al misil se tendrá que el avance debe ser también 60 veces más del primer avance. Es decir __________ x __________ =

6) Luego el misil viajó a una distancia de _______________ m.

CONSTRUYENDO UN CAMPO DE BASE BALL

En este problema, el alumno aplicará los conceptos de rectas perpendiculares, el de un cuadrado, así como el saber localizar puntos y dónde hay vértices.

OBJETIVO.

Construir un campo de Base Ball.

PROBLEMA.

Construir con las indicaciones que abajo se mencionan, un campo de Base Ball a escala.

Actividad a realizar.

Un campo de Base Ball tiene la forma de abanico, de tal forma que sus extremos son perpendiculares, el punto en donde se cruzan se llama el home; desde este punto se colocará un cuadrado. Este cuadrado, dos de sus lados coinciden con los extremos del abanico, cada lado mide 27.43 metros. Los vértices del cuadrado forman en orden progresivo el home o meta, la primera, segunda y tercera base respectivamente. Este cuadrado construido se le conoce con el nombre de diamante.

LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO Y EL CAMPO DE BASE BALL

En este problema vemos una aplicación de la bisectriz de un ángulo. Este está enfocado para que el alumno se de cuenta de que esa recta que pasa por el home tiene la cualidad de contener en su recorrido lo siguiente:

- Está colocado el pitcher.
- Está colocada la segunda base.
- Está colocado el jardinero central.
- Divide al campo en dos partes iguales.

OBJETIVO.

Construir la bisectriz de un ángulo.

PROBLEMA.

Utilizando la práctica anterior, localiza el diamante y el home. Construye la bisectriz con regla y compás que pasa por el home.

Actividades y preguntas.

1) La recta que cruza el home, en su recorrido también ¿cruza la segunda base? SI ☐ o NO ☐ Ello se debe a ______________________

2) Esta misma recta divide al abanico en dos partes iguales, la razón es porqué ____

3) También en esa recta, en su recorrido, a la distancia (empezando desde el home) de 60 pies y 6 pulgadas se localiza el pitcher o lanzador de pelotas. Coloca una marca en donde esta.

4) Por último, en esta recta, más allá de la segunda base se encuentra el jardinero central. ¿Dónde crees tú que se encuentre este jardinero?

____

AJUSTANDO RECTAS PARALELAS

Este ejercicio, se le presenta al alumno para que recuerde el concepto de líneas paralelas y de rectas transversales, así como expresar sus ideas verbalmente.

OBJETIVO.

Este ejercicio muestra una aplicación de cómo soluciona su problema un carpintero al cometer un error en el número de cortes que le indica el cliente. Aquí vemos la creatividad que efectúa este trabajador para no tener un problema más serio.

La idea de colocar este problema en este trabajo, es con la finalidad de que nuestros alumnos encuentren la solución al problema cuando aparentemente ya no hay nada por hacer.

PROBLEMA

Un empresario contrata a un carpintero para que le haga una puerta de baño que tenga 5 ranuras en la parte superior media; el carpintero se dispone a realizar la actividad encomendada, pero por descuido, a la puerta de baño le efectúa 6 ranuras. Sin embargo, el carpintero meditando un poco su error, observa que puede todavía evitar el enojo del empresario y lo que le hace a la puerta con el serrucho, es un corte longitudinal para enseguida ensamblar y asunto resuelto.

¿Qué tipo de corte efectuó el carpintero para quedar las 5 ranuras?

MECANISMO DE CONTROL

1) Hacer equipos de 4 personas
2) Unas tijeras

PROCEDIMIENTO

1) Hacer un dibujo geométrico para indicar la puerta.

2) Colocar las 6 ranuras que efectuó el carpintero.

3) Observar la primer ranura y la última ranura.

4) Dónde empieza la primer ranura y dónde termina la última ranura, trazar una recta que pase por esos dos extremos de tal suerte que llegue a cubrir toda la puerta.

5) Cortar el dibujo geométrico por la recta que trazaste.

6) Sin despegar el corte, deslizar la hoja a modo que coincida la primer ranura con el sobrante de la segunda ranura.

7) Fijarse que nos han quedado 5 ranuras.

8) Después lo que hace, es ensamblar las dos partes y asunto resuelto.

PREGUNTAS

1) Las ranuras que hizo el carpintero, en geometría se les conoce por el nombre de rectas ________________________.

2) Con tus propias palabras dinos que son rectas paralelas.
____
____

3) La recta que marcaste para efectuar el corte en geometría se llama recta ____________________.

4) ¿Porqué el número de ranuras se redujo a 5?
____

5) ¿Las nuevas ranuras son del mismo tamaño que las anteriores? _____.

6) Ello se debe a ______________________________________

DUPLICANDO EL ÁREA DE UN CUADRADO

Este ejercicio muestra al estudiante el procedimiento de manera geométrica para encontrar el área duplicada de un cuadrado, sin necesidad de utilizar demostraciones. Y si deseara comprobar que esa área ha sido duplicada, lo puede realizar dándole el valor del lado al cuadrado; y con ese dato, al trazar las diagonales obtendrá con el teorema de Pitágoras el valor de estas, este valor es precisamente el tamaño del nuevo cuadrado.

OBJETIVO

Duplicar el área de un cuadrado.

MECANISMO DE CONTROL

Hacer equipos de 4 alumnos.

PROBLEMA

Un reclusorio de forma de un cuadrado, en cada vértice esta colocada una torre de vigilancia, el Director del reclusorio observa que el espacio es insuficiente para dentro de 10 años; como cuenta con espacio para expandirse, proyecta duplicar el área del reclusorio, pero no desea remover las torres de vigilancia, así como tampoco hacer movimientos de reclusos ¿Cómo se debe de hacer el remodelamiento del reclusorio para duplicar su área?.

PROCEDIMIENTO

1) Hacer una figura geométrica del reclusorio indicando dónde están las torres de vigilancia.

2) Trazar las rectas diagonales del reclusorio.

3) Colocar letras a los vértices, así como en dónde se cruzan las diagonales.

PREGUNTAS

1) ¿Cuántos triángulos pequeños se formaron en tu figura geométrica? ______

2) Estos triángulos son ________, ________, ________, ________.

3) Los lados exteriores a la figura geométrica de estos triángulos son ________, ________, ________, ________.

4) Los lados interiores de cada triángulo en la figura geométrica son cuatro, indica cuáles son ________, ________, ________, ________.

5) Observa uno de los triangulitos y haz ésto: Gira ese triángulo afuera del cuadrado 180°, haz lo mismo con los otros tres triangulitos. La nueva figura que haz construido es un ______________.

6) Coloca la nueva figura geométrica que encontraste.

7) El área de esta nueva figura es el doble del área del reclusorio. Para comprobarlo, dale un valor cualquiera al lado del reclusorio, así que el valor para un lado del reclusorio es ______________.

8) Utiliza el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es una de las diagonales

______________ + ______________ = __________

9) Lo que obtienes es la media de la diagonal.

LA CONSTRUCCIÓN DE UN PUENTE

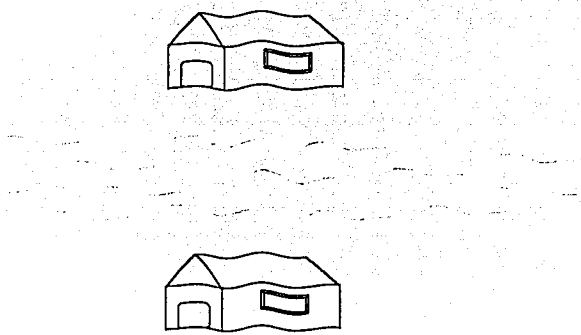
En este ejercicio, utilizamos las aplicaciones, tanto de ángulo, ángulos complementarios, ángulos interiores a un triángulo, triángulo isósceles, triángulo rectángulo, paralelismo, así como el saber la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

OBJETIVO.

Una aplicación de los ángulos complementarios para encontrar una longitud.

EJERCICIO.

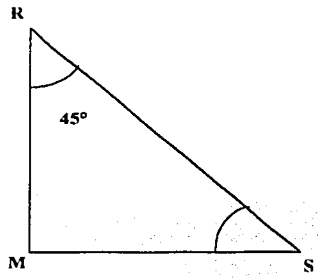
Un par de aldeas las separa un río y desean construir un puente ¿Cuánto medirá el puente?



PROCEDIMIENTO.

1) Del otro lado del río y muy cercanos a la orilla fijar algún punto llamativo para llamarle punto R, como se indica en la figura

2) Nos colocamos en el punto M y caminamos hacia la derecha paralelamente al río y nos detendremos hasta que se forme un ángulo de 45° con el punto R, a ese nuevo punto le llamamos punto S.



PREGUNTAS.

1) El ángulo M mide ___ grados, ¿porqué?

____

2) Luego el triángulo RMS es un triángulo ______________________.

3) Por medir el ángulo M = 90°, entonces el ángulo S más el ángulo R = 90° (o sea $\hat{S}+\hat{R}=90°$) ¿porqué? ____________________________

4) Entonces el ángulo S mide ___ grados ¿porqué? _________________

____

5) Por lo tanto, el ángulo S es el ángulo ______________________ del ángulo R.

6) Luego la suma de los dos ángulos R y S miden 90° así que estos dos ángulos son ____________________ (y en este caso son también ángulos iguales).

7) Por ser iguales estos ángulos, el triángulo rectángulo también es triángulo _____________________.

8) Pero al ser triángulo isósceles, resulta que dos de sus lado son _______ ___________________________

9) Por lo tanto, para saber el ancho del río, se debe medir el segmento ____ que está a un lado del río.

10) Y en consecuencia, el lado MR mide __________. Luego de esta forma, se ha encontrado cuanto va a medir el puente que se desea construir.

DOS JUGADORES EN EL CAMPO DE FUT BALL AMERICANO

En este ejercicio, utilizamos el postulado de la desigualdad del triángulo, así como la suma de segmentos de recta y el concepto de desigualdad, ello se hace para que el alumno se de cuenta que las desigualdades no se alteran cuando efectuamos operaciones de suma.

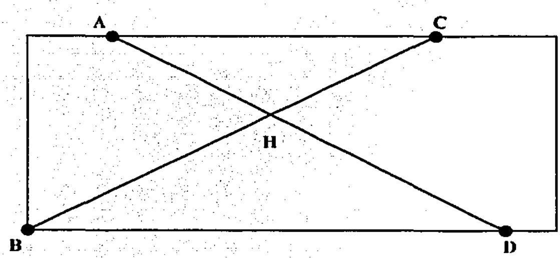
OBJETIVO.

Utilizar la desigualdad del triángulo.

PROBLEMA.

En un campo de Fut Ball Americano, se localizan dos jugadores, (ver figura) el jugador A corre hacia el punto D, en línea recta y el jugador B corre hacia el punto C, también en línea recta, ¿dónde debe ubicarse el punto H para que la longitud de las trayectorias de los jugadores sea mínima?

Es decir, AH + HB + HC + HD ¿es mínima distancia o hay otra?



SOLUCIÓN 1.

Para encontrar el punto H, notemos que ese punto está en la intersección de las rectas AD y BC y no hay otro punto, ello es debido a que H está alineado tanto a la recta AD como a la recta BC, es decir.

La distancia más corta entre dos puntos, es la recta que pasa por esos dos puntos. Si el punto H esta alineado con, por ejemplo, con los puntos A y D, entonces estos tres punto no formarán un triángulo y la distancia de AH sumada a la de DH es mínima, porque si no fuera así, se contradice el postulado que dice: *"la distancia más corta entre dos puntos, es la recta que pasa por ellos"* algo similar sucede con la recta BC.

Sin embargo, en Matemáticas, fundamentaciones como la anterior, no siempre se aceptan como demostraciones, porque da la impresión de que no se esta cimentando con suficiente rigor esos argumentos.

Aquí, se mostrará un acercamiento a una demostración conocida como reducción al absurdo, pero sin llegar al rigor necesario y suficiente. Antes de comenzar con esta demostración, quiero mencionar a groso modo lo que se entiende por reducción al absurdo, acoplándola a este problema de jugadores. Para encontrar el punto H, vamos a suponer que ese punto H no es el que nos da la solución y vamos a suponer entonces que existe otro, al que le pondremos punto H^1, al ir desarrollando la demostración, con la ayuda de la desigualdad del triángulo, vamos a llegar a concluir una contradicción, lo cual no puede ser cierta, y entonces esa contradicción nos va a dar la pauta de afirmar que H y H^1 son el mismo punto. Veamos pues, como utilizar esa desigualdad del triángulo.

El punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero ABCD sabemos que va a ser H y H es en donde se va a dar la longitud mínima de esos jugadores, así que supongamos que H^1 es otro punto diferente de H y que ese punto H^1 es en donde se va a dar la longitud mínima de esos jugadores.

Es decir, ese punto H^1 es el punto en donde se van a cruzar las trayectorias de los jugadores y entonces H^1 debe de estar más cerca de la suma de segmentos. Simbólicamente se debe de tener esta desigualdad:

$BH^1 + H^1C + AH^1 + H^1D < AH + HD + BH + CH$ I

donde debe quedar claro que: estas dos cosas:

*) $BH^1 + H^1C + AH^1 + H^1D$ es la longitud de la trayectoria más corta.

*) $AH + HD + BH + CH$ es la longitud de la trayectoria más larga.

Regresando a nuestro problema, vamos a suponer que H^1 es otro punto, diferente de H y utilicemos el postulado de la desigualdad del triángulo en los triángulos BCH^1 y ADH^1:

Para el triángulo BCH^1 se tiene: $BC < BH^1 + H^1C$

pero se sabe que $BC = BH + HC$

así que $BH + HC < BH^1 + H^1C$ II

Para el triángulo ADH^1 se tiene:

$AD < AH^1 + H^1D$

pero $AD = AH + HD$

así que: $AH + HD < AH^1 + H^1D$ II

Luego, sumando las desigualdades I y II se tiene:

$$AH + HD + BH + HC < BH^1 + H^1C + AH^1 + H^1D$$

Quizás el lector no observe aún que aquí ya hay una contradicción, porque debimos de haber concluido que $BH^1 + H^1C + AH^1 + H^1D < AH + HD + BH + CH$.

Y es que $AH + HD + BH + HC$ es la longitud de la trayectoria de los jugadores, así como también $BH^1 + H^1C + AH^1 + H^1D$ es la longitud de la trayectoria de los jugadores, pero ¿cuál es la más corta? O acaso ¿la H^1 que se supuso en realidad no da la longitud mínima? O para evitar contradicción ¿lo que sucede entonces es que H y H^1 coinciden?, dínoslo, (argumenta tu respuesta).

____.

____

SOLUCIÓN 2.

De hecho, no es otra solución, sino más bien resumida.

Para encontrar ese punto, no es complicado, pues el punto H esta en la intersección de las rectas AD y BC. Pero, supongamos que no fuera así y pongamos que el punto H^1 es el que nos da la solución.

Entonces utilicemos la desigualdad del triángulo en los triángulos que se forman con este punto H^1, es decir, en los triángulo BCH^1 y ADH^1.

Para el triángulo BCH^1 se tiene que $BC < BH^1 + H^1C$

así que $BH + HC < BH^1 + H^1C$ I

Para el triángulo ADH^1 se tiene que $AD < AH^1 + H^1D$

pero como $AD = AH + HD$

entonces se tiene que $AH + HD < AH^1 + H^1D$ II

Luego, sumando las desigualdades I y II obtenemos

$AH + HD + BH + HC < BH^1 + H^1C + AH^1 + H^1D$ III

la desigualdad III nos indica que $BH^1 + H^1C + AH^1 + H^1D$ es mayor que $AH + HD + BH + HC$.

Pero, como queremos que sea la misma longitud entre esos jugadores, entonces $AH + HD + BH + HC$ es la elegida.

BIBLIOGRAFÍA

1. **¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?**
   Y. JURGIN
   Ediciones de Cultura Popular, S, A. 1985
2. **EL DISCRETO ENCANTO DE LAS MATEMÁTICAS**
   MARIANO MATAIX LORDA
   Editores Boixareu. 1988
3. **MATEMÁTICAS PRÁCTICAS PARA TODOS**
   CARLOS SPANO
   Editorial de Vecchi, S. A. 1970
4. **EN BUSCA DE LA SOLUCIÓN**
   MARIANO MATAIX LORDA
   Editores Boixareu. 1989
5. **GEOMETRÍA**
   SEBASTIÁ XAMBO DESCAMPS
   Alfa Omega, Ediciones UPC
6. **GEOMETRÍA CON APLICACIONES Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS**
   STANLEY CLEMENS, PHARES G. O' DAFFER, THOMAS J. COONEY
   Addison – Wesley Iberoamericana. 1998
7. **GEOMETRÍA, UN ENFOQUE INTUITIVO**
   MARGARET WISCAMB HUTCHINSON
   Editorial Trillas. 1976
8. **MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEAS**
   JACK R. BRITTON, IGNACIO BELLO
   Editorial Harla, Segunda Edición. 1979

9. **HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS**
E. T. BELL
Editorial Fondo de Cultura Económica. 1995

10. **GEOMETRÍA Y EXPERIENCIAS**
JESÚS GARCÍA ARENAS, CELESTI BERTRÁN I. INFANTE
Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra. 1996

11. **GEOMETRÍA ELEMENTAL**
EDWIN M. HEMMERLING
Editorial Limusa – Wiley, S. A. 1971

12. **ENCICLOPEDIA JUVENIL GROLIER**
Editorial Cumbre, S. A. 1980

13. **BIBLIOTECA TEMÁTICA UTEHA**
Unión Tipográfica, Editorial Hispano Americana. 1980

14. **GEOMETRÍA MODERNA ESTRUCTURA Y MÉTODO**
RAY C. JURGENSEN, ALFRED J. DONELLY, MARY P. DOLCIAN
Publicaciones Cultural, S. A. 1972

15. **MATEMÁGICAS**
ROBERT MULLER
Editorial Tikal 2001

16. **MATEMÁTICAS BÁSICAS**
JOHN C. PETERSON
Editorial CECSA. 1998

17. **GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO**
JORGE WENTWORTH Y DAVID EUGENIO SMITH
Editorial Porrúa. 1977

18. TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA
AGUSTÍN ANFOSSI
Editorial Progreso. 1947

19. ESTUDIO DE LAS GEOMETRÍAS
HOWARD EVES
Editorial Uteha.

20. SIGMA EN EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS
J. R. NEWMAN
Editorial Grijalvo. 1969