

00323
15



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERCA DE LA NO CONMUTATIVIDAD
EN LOS ÁMBITOS DE LA MECÁNICA CLÁSICA
Y LA MECÁNICA CUÁNTICA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
F Í S I C O
P R E S E N T A :
IGNACIO / CORTÉSE MOMBELLI

DIRECTOR: DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO



2003

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Acerca de la No Conmutatividad en los Ambitos de la Mecánica Clásica
y la Mecánica Cuántica"

realizado por Cortese Mombelli Ignacio

con número de cuenta 9677083-6, quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis
Propietario

Dr. José Antonio García Zenteno

Propietario

Dr. Rocio Jáuregui Renaud

Propietario

Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero

Suplente

Dr. José David Vergara Oliver

Suplente

Dr. Miriam Mondragón Ceballos

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLUSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Acerca de la No Conmutatividad
en los ámbitos de la Mecánica Clásica
y la Mecánica Cuántica**

A papá y mamá por su paciencia, y a mi hermano
por aguantar los días en que no lo dejé dormir.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a Antonio la implacable guía y el trabajo que dedicó en la dirección de esta tesis, así como los recursos (económicos y académicos) que me facilitó a lo largo de los últimos 18 meses. También agradezco a Luis Urrutia por el interés que manifestó en este trabajo y la ayuda que me ofreció para imprimirlo.

Agradezco también a Rodolfo, David, Rocío, Myriam, Alberto y Luis haber aceptado ser sinodales para la evaluación de este trabajo, así como sus observaciones, propuestas y referencias.

Gracias.

**“Quizá la historia universal
es la historia de unas cuantas metáforas.
Bosquejar un capítulo de esa historia es el fin de esta nota.”**
Jorge Luis Borges

**“Me gusta pensar en éste
como el tiempo histórico en el cual
al fin el libre albedrío entrará a desempeñar un papel.”**
Immanuel Wallerstein

ÍNDICE

Prólogo	I
Introducción	VII

PARTE I: MECÁNICA CLÁSICA NO CONMUTATIVA

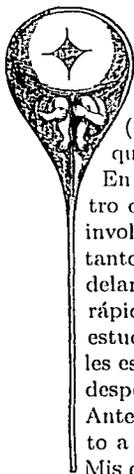
1 Repaso de la formulación convencional de la Mecánica Clásica	1
1.1 La formulación Lagrangiana	2
1.2 El principio de Hamilton en el espacio fase (o principio de Hamilton modificado)	7
1.3 La formulación Simpléctica	11
2 Sistemas Dinámicos Hamiltonianos, Lagrangianos de primer orden y Re-definiciones de variables	19
2.1 Sistemas Dinámicos Hamiltonianos	20
2.2 Lagrangianos de primer orden	21
2.3 Teorema de Darboux	23
2.4 Transformaciones de variables, su impacto sobre el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas	24
3 Formulación de la Mecánica Clásica No Conmutativa	29
3.1 Dinámica Hamiltoniana y el Lagrangiano No Conmutativo	30
3.2 Breve exploración en el campo central	35
3.3 Lagrangiano No Conmutativo de segundo orden	41
3.4 Transformando las variables no conmutativas	51
3.5 Algunos sistemas tratados transformando las variables no conmutativas en conmutativas	57

PARTE II: MECÁNICA CUÁNTICA NO CONMUTATIVA

4 Dos cuantizaciones: la Integral Funcional y el Principio de Acción	63
4.1 La Integral Funcional	63
4.2 El Principio de Acción	72
4.3 Deducción de la ecuación de Schrödinger de la Mecánica	

Cuántica No Conmutativa mediante la Integral Funcional	80
4.4 Teorema de incertidumbres	84
5 Aplicaciones usando las dos formas de cuantización	89
5.1 Cálculo del propagador del oscilador armónico cambiando las variables a "amplitudes de modo"	90
5.2 El propagador del oscilador armónico obtenido a través del Principio de Acción de Schwinger	100
6 Deformaciones de álgebras y la Mecánica Cuántica	109
6.1 Geometría no conmutativa	109
6.2 La Mecánica Cuántica No Conmutativa	115
Conclusiones y perspectivas	121
Apéndices	
A: Variaciones a parámetro fijo vs. variaciones funcionales	123
B: Invariantes adiabáticos y el ángulo de Hannay	126
Bibliografía	133

Prólogo



Quiero presentar este trabajo primero estableciendo una posición (creo que lo puedo decir así) con respecto a la disciplina en la que quiero trabajar, y con respecto tal vez a la ciencia en general.

En muchos de los cursos a los que uno asiste como estudiante, dentro de diversas conferencias, en el estudio de muchos problemas que involucran a nuestra circunstancia, con objetos concretos y tangibles tanto como con abstractos, nos preguntamos si el objeto que tenemos delante es algo "real", algo "que existe". Mucha gente resuelve muy rápido esta interrogante para después desarrollar sus actividades y estudios con la tranquilidad que eso les puede conceder, si el tema les es objeto de preocupación; algunos nos demoramos más tiempo en despejar esta duda.

Antes de abordar los tres puntos que me interesa destacar con respecto a la idea de "realidad", vale la pena hacer la siguiente acotación.

Mis escasas lecturas en filosofía de la ciencia me han proporcionado la diferencia entre los conceptos de ontología y epistemología. El carácter *ontológico* de una afirmación, estudio o problema es el que trata con lo que es, mientras que el carácter *epistemológico* incumbe al **cómo conozco aquello que es**, de tal suerte que los problemas que uno suele estudiar son ontológicos, epistemológicos o ambos, y no siempre es explícito su carácter. Y a veces no es fácil distinguir y asumir cuál es este tipo. Decir "Yo estoy estudiando esto que es real y lo hago porque puedo conocerlo", es asumir una forma de enfrentar los fenómenos y conceptos que se encuentran en el mundo. Esta no es la única forma de acercarse y animarse a establecer relaciones, motivos y consecuencias de lo que solemos llamar Naturaleza. Otra puede ser opacar el carácter ontológico de una situación, y concentrarse en el epistemológico, es decir, en la manera en la que conozco o podría conocer esa realidad.

Descubrimiento o invento

No le pasa a pocos, que en algún momento de nuestras carreras, caminando con un grupo de compañeros, nos preguntamos por ejemplo si la realidad que estudia las Matemáticas, vista como un mundo habitado por cierta clase

particular de objetos, reglas de comportamiento y relaciones que se pueden establecer entre ellos, se descubren o si se inventan. Pienso que la respuesta está en preguntarse si de hecho se puede descubrir algo, o inventar algo, no sólo estudiando Matemáticas, sino cualquier disciplina en la que se investigue. Yo creo que las Matemáticas, así como toda manera de aprehender al mundo, se inventan; el descubrimiento es un invento también: sube a la superficie de lo que lo oculta cuando, después de insistir en la forma o aplicación de cierta estructura, se hace aparente *su* orden (es la creación de un contraste con respecto a lo que lo rodea). Está mal decir que “América fue descubierta”; dejar la sentencia así, sin hacer referencia de para quién fue descubierta, develada, no tiene la propiedad de sujeto invariancia que se le debe asignar a toda sentencia para que hable de una verdad del mundo (y el problema aparece desde que se nombra). América fue inventada cuando un hombre se topó con un elemento de la realidad (un continente que le era desconocido) y le adjudicó ciertas cualidades que la diferenciaban de lo que se pensaba que allí *existía* o estaba.

Es inevitable preguntarse entonces qué son y qué hacen las “evidencias” experimentales si no es descubrir que los objetos están ahí, y que nadie tuvo que imaginárselos para que fuera así. Los experimentos o evidencias experimentales no están carentes de un fondo interpretativo, el que nos dice cómo es el mundo o como debería encontrarse al buscarlo y preguntar por él. Descubrir es buscar y encontrar un objeto que encaje en algún espacio que dejan los modelos que tratan de describir el mundo. Cuando el objeto candidato no encaja exactamente, uno se regresa al modelo y hace las alteraciones pertinentes para que encaje, con ciertas limitaciones por supuesto: la consistencia y la propia existencia del modelo. Si ésta debe ser sobrepasada para que el objeto encaje en algún lado, a veces suceden cambios profundos en y de los modelos, para que los nuevos ofrezcan espacios donde encajen tales objetos, estos cambios pueden llegar a cuestionar nuestras ideas alrededor de lo que el mundo es, y el carácter mismo del objeto encontrado; así se inventa lo “objetivo” de los objetos.

P. Miramontes [56] escribe alrededor de la teoría del preformacionismo en la que creían Leeuwenhoek (el primer hombre que miró a los seres pequeños a través de su microscopio primitivo), Hartosek y Swammerdam: “Ahora, en los albores del siglo XXI, sabemos con certeza que los espermatozoides no contienen en su interior a una personita, a un homúnculo, sin embargo, debemos preguntarnos ¿Cómo es posibles que personas serias, eruditas y excelentes naturalistas lo hubieran visto? Éste es un ejemplo (el de los canales

de Marte es otro) que nos debe prevenir contra el uso indiscriminado de la información sensorial como evidencia científica dura. Tanto los astrónomos observacionales como los microscopistas viven en una sociedad que posee un cuerpo de ideas dominantes que constituyen el 'saber colectivo' y que normalmente se cuestiona. Los preformacionistas encontraron homúnculos porque estaban buscando homúnculos, porque sus instrumentos de trabajo eran imperfectos y porque tenían una pasión desbordante por llegar a grandes descubrimientos científicos." Se podría decir que aquellos que buscaron en el pasado lo hicieron mal y se equivocaron. Está bien..., pero esta sólo es una picardía de la que el hombre, y en especial el científico, moderno se puede valer para hacer juicios sobre los trabajos de los otros en el pasado. Pero vale la pena, aunque sea trillado, traer la historia y preguntarse si nosotros no estamos viendo "homúnculos" en donde otra "realidad" dice que hay la mitad del potencial de un ser.

El Problema de lo Real

Me parece que no puedo empezar mejor este párrafo de otra manera que con la siguiente cita de B. Russell [61]: "(...)Si tomamos un objeto cualquiera, de la clase que suponemos conocer por los sentidos, lo que los sentidos nos dicen *inmediatamente* no es la verdad acerca del objeto tal como es aparte de nosotros, sino solamente la verdad sobre ciertos datos de los sentidos, que, por los que podemos juzgar, dependen de las relaciones entre nosotros y el objeto. Así, lo que vemos y tocamos directamente es simplemente una 'apariciencia', que creemos ser el signo de una 'realidad' que está tras ella. Pero si la realidad no es lo que aparenta ¿tenemos algún medio de conocer si en efecto existe una realidad? Y en caso afirmativo ¿tenemos algún medio para descubrir en qué consiste?"

El problema de lo real es al que se llega cuando surge la pregunta acerca de la existencia de un mundo, un universo, externo e independiente de la conciencia. Es decir, si existe efectivamente un mundo habitado por *objetos* (una realidad objetiva) cognocibles para el que indaga sobre ellos. En adelante me referiré a los elementos de ese mundo como objetos, y al que apunta a indagar sobre ellos como sujeto. Cabe mercedamente la aclaración de que los sujetos también pertenecen al mundo de los objetos; los sujetos son objetos que indagan sobre otros objetos. Esta indagación tiene como resultado los "datos de los sentidos" (como los llama Russell) que se presentan en los sujetos a través de la sensación, y son causados por los objetos.

Si leo caminando, prestando entera conciencia y atención al irregular

vaivén de letras, signos y palabras, y un instante después me encuentro sorpresivamente dentro de un pozo, semioscuro, al que caí por no fijarme en el suelo que pisaba (incluso si voy leyendo por ejemplo "Drácula", es decir, algo que nada tiene que ver con caerse en pozos), lo que inmediatamente se me ocurre (no ahora que estoy escribiendo esto, sino en ese momento) es que el pozo existía ahí y yo no lo vi; que estaba ahí antes de que yo lo conociera y que de ninguna manera es producto de mi imaginación o conciencia (pues yo no pude decidir sobre la existencia del pozo ya que estaba concentrado sobre los encantos de los vampiros). Puedo creer, pero no puedo mostrar, que el pozo existe y existirá ahí aunque yo no lo vea: "(...) En cierto modo, debe admitirse que no podremos jamás *demostrar* la existencia de cosas distintas de nosotros mismos y de nuestras experiencias [61]." Nunca voy a poder averiguar esta existencia; tampoco lograré demostrar la ausencia, es decir, que no existen "realidades" (en este texto, objetos). Sin embargo, otra vez Russell: "(...) Es fácil ver que se llega a una mayor simplicidad suponiendo que hay realmente objetos físicos." Simplicidad que tiene un carácter fundamental en la Física. Si uno lo hace, empieza con ventaja. La ventaja es que *postulo* la existencia de lo real y me concentro en los datos de las sensaciones o "apariciencia" de eso que es real, pero nunca llegaré a conocerlo (porque tendría que determinar su existencia o ausencia lo que es imposible).

La ciencia va transformando sus postulados (y acá no puedo evitar seguir a Kuhn [50]) a partir de, y gracias a, las apariciencias. Ahora, para hablar de "todas" las apariciencias que nuestros sentidos pueden recoger, hay que extender un poco la definición de lo que son los "sentidos". Los sentidos son más de los inmediatamente distinguibles. También es un sentido aquel por el que entran las impresiones que nos dejan los objetos que no pueden impactarnos con luz, ni sonido, ni nada que se le parezca, es decir, los objetos abstractos.

Entonces, definitivamente **existe** un mundo donde habitan los objetos, y lo que sigue es preguntarse cómo conozco o puedo conocerlos. El problema empieza desde que quiero etiquetarlos, llamarles de alguna manera (pozo, libro, raqueta, electrón), referirme a ellos como lo presente e independiente del sujeto. Para proceder y trabajar con los objetos hace falta antes que nada ponerle un mapa al mundo, un filtro entre lo que éste es y el impacto que tienen los objetos en mis sentidos. El mundo es como una montaña de barro que se debe moldear antes de decir algo sobre él o apreciarlo. Este hecho puede tener dos efectos sobre las personas (probablemente de manera simultánea), nos puede hacer sentir alivio o terror, y en ello está una muestra

de la necesidad de un molde como intermediario: si se siente alivio es señal de que se sabe que siempre hay que agarrarse de algún lado para dar un paso, que nada sale de la nada, no se ve al mapa o molde como un factor que aprisiona, sino como una máquina que mueve las cosas, algo que puede multiplicar las alternativas y por lo tanto permitir el desarrollo (pues los modelos son algo cognoscible); el terror puede ser provocado por un profundo temor de que este hecho sea un síntoma de que en verdad nunca llegará el día en que toquemos a la realidad objetiva, que todos los modelos y las teorías son fantasmas que gravitan el lugar donde están las cosas que son (los objetos).

Es muy divertido pasar del alivio y la calma al terror y al revés, una y otra vez. En ello está la esencia de lo "pánico" según Jodorowsky [48]: "(...) En alguna ocasión hemos comparado a nuestra actual civilización con un gran circo. Es del circo de donde extrajimos nuestra palabra. El personaje que más obedecería a la conducta pánica en el circo es el *payaso*, a quién constantemente está tratando de limitar en sus 'extravagancias' el lógico señor *augusto*, hombre vestido de común, algunas veces de frac, que simula ser el dueño o el empresario del circo y da pie a que el payaso se desate ante cada una de sus definitorias frases en una infinita multiplicidad de respuestas no-lógicas. Este inmenso circo está casi repleto de una masa inerte, la mayor parte del tiempo inactiva, que es el público: seres humanos relegados a la más baja categoría del espíritu, que es la del 'espectador', hombre que no participa en la existencia pero que cree o quiere 'conocerla' sin abandonar su butaca. El circo tiene mil pistas en las que se desarrollan mil *shows* diferentes. Cada pista tiene a su señor Augusto creyendo dirigir todo. Los que se mueven bajo la férula del agosto nunca sobrepasan los límites de su pista, excepto los payasos que en demencial grupo rompen todas las leyes y saltan de círculo en círculo haciendo perder la gravedad de los augustos y quitando, por su sola irrupción, la sacralidad de los objetos que están en juego. Los payasos hacen de todo; los augustos saben hacer una sola cosa y el público ninguna."

El problema de lo real es tan "real", que establecer lo que es real es realmente importante, de hecho es tema de serias discusiones en ámbitos tan disciplinados como el estudio de la Mecánica Cuántica. La hilera de citas que el artículo de Einstein, Podolsky y Rosen [26] ha generado no deja de tocar en muchas este tema [22]; de hecho, una de las ramas en la discusión versa sobre la conveniencia del "criterio de realidad" que los autores asumen justo al inicio del artículo para terminar con que la Mecánica Cuántica no es una teoría completa.

La Ciencia en su Sociedad

En el lenguaje y el intercambio de ideas cotidiano difícilmente se puede escuchar hablar de la ciencia (dentro y fuera de los círculos de gente que se prepara para desarrollar una disciplina científica) sin que se la relacione con el "progreso", el de las áreas de la actividad humana relacionadas con ésta, y el de la ciencia en sí. De hecho, el progreso con el que contribuya algún resultado científico es una medida de lo bueno que es y hasta de su verdad [17]. Pero lo que casi nunca se aclara es que tal progreso, y lo verdadero que hace al resultado científico del que se deriva, no es un concepto absoluto, siempre es relativo a una sociedad en particular, su cultura, su ideología (para definir un proceso económico por ejemplo), sus ambiciones y el entrono general de actividad humana que lo rodea.

Cierto es que cada vez se abandona con más convicción la noción de la ciencia sólo como una permanente acumulación de información, datos, conexiones y conocimiento en general. Es cada vez más sabido que la actividad científica no está aislada ni se desarrolla independientemente del entorno social en el que están embebidas las personas que hacen la ciencia (y el discurso científico que profesan); pero esto no quiere decir que los juicios y los métodos en la ciencia no gocen de cierta autonomía. Sin embargo, esta autonomía tampoco es por sí sola: está sostenida por una red de relaciones que la tolera (en el sentido amplio, en el que "tolerar" no significa "soportar") llamada Estado.

La actividad científica, en tanto actividad humana, impacta a la historia, y comprenderla es entender sus relaciones con el resto de las actividades humanas. En la ciencia, en sus métodos, sus objetivos, sus maneras de entender el concepto de "producción", en sus instrumentos se pueden encontrar las huellas para rastrear la relación social que la alimenta y a la que pertenece.

Introducción

En la Mecánica Cuántica los operadores que actúan sobre las funciones de onda son elementos de álgebras. Una medición, la determinación de una variable física, se calcula por el valor medio de un operador Hermitiano (u observable) particular que representa a tal cantidad, y hay ciertas cantidades cuyos operadores que las representan no conmutan en dicha álgebra. En este sentido, esta teoría ya es no conmutativa.

Decir que se planteará una Mecánica Cuántica No Conmutativa puede sonar redundante, pero se emplea este nombre para establecer una manera de referirse (como circula en literatura reciente) a una teoría cuántica para el plano donde los operadores que representan a las posiciones no conmuten (contrario a lo que sucede en el caso ordinario en el que sí lo hacen), y además su conmutador cuántico entregue una constante. Es decir, si la posición, por ejemplo, de una partícula en el plano se especifica por dos operadores x y y , no es lo mismo aplicar (multiplicar en el álgebra de operadores) x seguida de y que al revés, aplicar primero x y luego y . Esto implica que, como la posición es un observable, no es lo mismo medir primero la coordenada y y luego la x , que medir primero x y luego y . En el caso de la Mecánica Clásica, las álgebras de funciones son conmutativas, y lo van a seguir siendo en el caso de la Mecánica Clásica No Conmutativa. La idea de no conmutatividad en el caso de la Mecánica Clásica está en otro lado, en la definición del paréntesis de Poisson (particularmente en el resultado de calcular éste para las coordenadas del plano), y el adjetivo "no conmutativa" está heredado de la Mecánica Cuántica No Conmutativa.

El teorema general de incertidumbres en la Mecánica Cuántica implica que si dos observables no conmutan, no pueden tomar valores determinados simultáneamente. La determinación de uno implica la completa incerteza acerca del otro, de manera que lo más que se puede lograr al querer conocer los valores de estos observables, es una incerteza mínima para cada uno. Ahora, este detalle sobre la incertidumbre en el conocimiento de los valores para observables depende de la concepción de simultaneidad. En esta tesis el tiempo es el ordinario, absoluto, el tiempo newtoniano (el que se puede usar como parámetro). No se planteará algo diferente a lo común en Mecánica Clásica o Cuántica con respecto a la relación del tiempo con las variables del espacio fase o en general con cualquier otra variable. La idea de simultaneidad será la idea convencional: dos eventos son simultáneos cuando se manifiestan para un mismo valor del tiempo. Entonces, cuando dos observables no conmutan

no se pueden hacer mediciones que entreguen valores medios específicos y simultáneos para ambos. Con esta relación entre la incerteza y la no conmutatividad de observables, mediante la introducción de una no conmutatividad entre las coordenadas del plano, se trata de modelar la idea de una distancia mínima más allá de la cual no se pueden determinar las posiciones. No se puede hacer una medición certera y simultánea de las dos coordenadas que definen a la posición de un sistema físico en el plano.

En esta tesis se estudiará por simplicidad el caso de dos dimensiones del espacio configuración (el "plano no conmutativo"). No se analizarán las consecuencias de hipótesis similares para más dimensiones, ni para todos los diversos aspectos de la Mecánica Clásica y Cuántica estándar; en este sentido, uno de los propósitos es construir las relaciones dinámicas básicas (a través de cuantizaciones conocidas) entre la teoría cuántica y la clásica correspondiente. Otro más, es estudiar algunas de las alteraciones a la dinámica cuando las relaciones de conmutación entre las variables del espacio fase son un poco distintas con respecto al caso convencional. Sobre los objetivos y la caracterización del tema, se abunda en las introducciones de cada una de las dos partes de esta tesis.

i.

Desde que quedó instalada la teoría general de la relatividad, y estaba germinando la teoría cuántica, ha existido la pregunta sobre la formulación de una gravedad cuántica. A mediados del siglo XX, con la llegada de la idea de cuantización por integrales de camino formulada por Feynman, y el establecimiento del modelo estándar que unifica tres de las cuatro interacciones que existen, la teoría que uniera la gravedad con \hbar encontró dificultades para ser renormalizable debido al carácter no lineal inherente de la relatividad general y las singularidades de los diagramas de Feynman. En los años 60, de las teorías de cuerdas se desprendieron sugerencias en el intento de construir una teoría de la cual se pudieran obtener todas las interacciones.

El final del siglo veinte retomó el tema de la cuantización de la gravedad estableciéndose dos frentes, basados ambos en las ideas de dualidad y la posible existencia de una constante fundamental llamada la longitud de onda de Planck ($\sqrt{\alpha'} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-33}$ cm). Uno de estos frentes es el programa "Loop Quantum Gravity" (Gravedad Cuántica de Lazos, también llamado Geometría Cuántica), que ofrece dos propuestas o aproximaciones a la cuan-

tización de la gravedad: la primera considera fundamental la invariancia ante difeomorfismos y trata de preservar esta simetría, y la segunda trata como fundamental a la estructura simpléctica de la Mecánica Cuántica. Este camino o programa sugiere un cambio en la concepción del espacio-tiempo, abandonar la idea del continuo por una discretización a las escalas de la longitud de onda de Planck, y ha encontrado dificultades para hacer emerger de esta estructura la forma clásica (o macroscópica) en la que aparece la gravedad en la teoría general de la relatividad [12].

El otro frente es la propuesta de la teoría de cuerdas que cambia el concepto de objeto puntual como unidad fundamental por el de algo extendido en una dimensión espacial, distinguible a la escala de la longitud de onda de Planck, para el que entonces las trayectorias o líneas de mundo (y en especial sentido en los diagramas de Feynman) se vuelven "tubos" de mundo. En las teorías de cuerdas se ha sugerido una solución al problema de la renormalización presente en las teorías de campo, pero las conclusiones que se obtienen requieren de muy altas energías para su verificación en laboratorio.

ii.

Una referencia (histórica por decirlo de alguna manera) sobre coordenadas no conmutativas es un artículo de Snyder [68] (cuya idea principal se puede rastrear hasta Heisenberg). Ahí, se construye un espacio-tiempo cuantizado que es invariante de Lorentz, en el que cambiando la noción continua (y de valores simultáneos) de las variables del espacio-tiempo por una invariancia de su espectro ante transformaciones de Lorentz, se encuentra una unidad de longitud mínima natural. El objetivo es introducir esta unidad de longitud para curar algunas de las divergencias presentes en teorías de campo, y en el proceso, esta introducción requiere abandonar las relaciones usuales (conmutativas) de los operadores correspondientes a las variables del espacio-tiempo en el conmutador cuántico (si estas variables conmutaran, darían origen a espectros continuos de sus valores posibles). Los conmutadores entre coordenadas y momentos también sufren cambios, apreciables para valores grandes de los últimos; de manera que cálculos en una teoría de campo con el espacio-tiempo cuantizado darán los mismos resultados que una teoría de campo ordinaria para procesos que no involucran a grandes valores para los momentos (pero los resultados serán distintos en el caso de altas energías).

Recientemente se ha encontrado que relaciones de conmutación del tipo $[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$, con $\theta_{\mu\nu}$ un tensor antisimétrico constante de dimensiones $[L]^2$, pueden construirse de manera natural como límites de baja energía de teorías de cuerdas. Sin embargo, esta no conmutatividad no resuelve los problemas de divergencias ultravioletas en la teoría cuántica de campo, y el que las teorías de campo resultantes no son unitarias ni causales cuando el tiempo se incluye en las relaciones de no conmutación [35].

En el análisis perturbativo de la teoría de cuerdas las diferentes vibraciones de la cuerda representan las partículas. Éstas se acomodan en un espectro de estados que comienza en uno de masa cero y los siguientes de masa que se escalan con la longitud de cuerdas $l_c^{-2} \equiv 2\pi T_F$, donde T_F es la tensión de la cuerda. Los estados de masa cero del espectro se interpretan como campos que tienen una acción asociada. En el análisis no perturbativo de la teoría de cuerdas aparecen ciertos objetos extendidos que son soluciones de las ecuaciones de campo (análogos a los solitones en la teoría cuántica de campos) llamados Dp-branas. Estos objetos son subvariedades del espacio-tiempo (que pueden ser copias de R^1 embebidas en R^{10}) que contienen las condiciones de frontera de las cuerdas, y que heredan de ellas algunas propiedades cuánticas: sus fluctuaciones se describen mediante el espectro perturbativo de las cuerdas. En las Dp-branas se pueden plantear campos de norma. Las coordenadas que se usan en estos campos, bajo ciertas condiciones, son las que manifiestan la no conmutatividad.

Cuando se considera una Dp-brana con un campo transversal constante F_{ij} ($B_{ij} = 0$ puede realizarse escogiendo apropiadamente la norma) y se toma el límite para cuando $l_c \rightarrow 0$ se obtiene una teoría de SYM no conmutativa en $p+1$ dimensiones [64]. La no conmutatividad es de tipo espacio y es proporcional al inverso del campo magnético F_{ij} . Del mismo modo si el campo es longitudinal F_{0i} constante, el límite para cuando $l_c \rightarrow 0$ produce una teoría de cuerdas abiertas no conmutativa en $p+1$ dimensiones [36, 65]. Estas teorías contienen el espectro perturbativo usual de cuerdas abiertas, no contienen cuerdas cerradas (teorías sin gravedad) y tienen no conmutatividad espacio-temporal. Generalizaciones al caso de membranas de este límite pueden construirse y la teoría resultante es conocida como teoría de membranas abiertas (OM) [37].

Un punto importante relacionado con las Dp-branas es su acoplamiento con cuerdas cerradas; una cuerda abierta cuyos extremos terminan en una brana, puede cerrarse y regresar el espacio-tiempo 10-dimensional. Esto significa, en particular, que las Dp-branas son fuente para los campos de su-

pergravedad y por tanto, un número grande de D_p -branas puede usarse para describir (a bajas energías) una solución macroscópica de la supergravedad. Tales soluciones solitónicas se conocen como p -branas negras [46].

iii.

En los contextos de supersimetría y supergravedad (las extensiones de la relatividad especial y general respectivamente que incluyen simetrías de fermiones con bosones) aparece el concepto de dualidad. Existen cinco teorías de supercuerdas (en 10 dimensiones) y una para la supergravedad (en 11 dimensiones). Una de las grandes novedades de los últimos años de la década de los 90's fue el que las teorías de cuerdas y la supergravedad en el régimen de acoplamiento débil están conectadas por una red de dualidades [73]. Cuando una descripción (usando una de las teorías) deja de funcionar porque algún parámetro de acoplamiento se hace grande, otra descripción (que viene de otra de las teorías) toma su lugar. Por ejemplo, el límite del acoplamiento fuerte para la teoría de cuerdas tipo I es el acoplamiento débil de $SO(32)$; el de tipo IIA está relacionado con la supergravedad de 10 dimensiones; el de IIB con la misma teoría pero en el régimen de acoplamiento débil; y el de $E_8 \times E_8$ vuelve a relacionarse con supergravedad. Por este fenómeno se sospecha que las teorías de cuerdas y la supergravedad orbitan una teoría, llamada teoría-M (de 11 dimensiones), que las unifica.

Las teorías de cuerdas requieren espacios de diez dimensiones, y para que describan el espacio-tiempo clásico de cuatro, todas las demás deben esconderse. Se ha sugerido que estas dimensiones extras se enredan en una variedad compacta a las escalas de la longitud de onda de Planck, o, también, que los procesos clásicos se dan en hipersuperficies contenidas en espacios de muchas más dimensiones.

Se tienen algunas pistas de la teoría no perturbativa (la teoría-M) desconocida, de la que se piensa que las teorías de cuerdas son, en su forma perturbativa, expansiones asintóticas:

→ Las dualidades implican un radio mínimo en la compactificación de las dimensiones para las cuerdas [72]. Para investigar en estas pequeñas distancias hay que agrandar mucho los momentos. Como la energía requerida para incrementar el momento de una cuerda también incrementa su tamaño, se piensa que las relaciones de incertidumbre entre coordenadas y momentos se

verían modificadas como

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + L^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (1)$$

(con L del orden de la longitud de onda de Planck), de manera que grandes momentos no dejarán ver pequeñas distancias, sino la propagación de grandes cuerdas.

→ Una de las exploraciones en la teoría-M ha sugerido que se deben abandonar las ideas de localidad comunes en las teorías de campo, lo cual no es del todo irracional desde que una gravedad cuántica necesitaría que los observables fueran no-locales. Esto va aparejado con la dificultad de obtener un universo local en el límite clásico. Un trabajo muy conocido en el estudio de la teoría -M es [18].

→ Bajo ciertas circunstancias, las coordenadas de las teorías de norma contenidas en las D-branas son no conmutativas. Esto ha sugerido poner atención en la geometría no conmutativa incluso tal vez como un reemplazo de la geometría Riemmaniana [12], y en un espacio-tiempo en donde las coordenadas se reinterpretan como no conmutativas. Algo como lo sucedido a las variables del espacio fase cuando la Mecánica Cuántica determinó que $\hbar \neq 0$.

→ Incluso en el régimen perturbativo que se conoce para las teorías de cuerdas, hay varias sugerencias para responder a varios problemas que podría traer consigo una gravedad cuántica: eliminan las singularidades, permiten cambiar la topología del espacio, proveen una descripción microscópica para la entropía de algunos hoyos negros, entre otros.

iiii.

Esta tesis está dividida en dos partes, y cada una de éstas en tres capítulos. La primera parte está dedicada a la formulación de la Mecánica Clásica No Conmutativa a través del formalismo canónico, y la segunda a la de la Mecánica Cuántica No Conmutativa usando la integral funcional de Feynman y el principio de acción de Schwinger. Lo "no conmutativo" de la Mecánica Clásica se refiere a una definición específica del paréntesis de Poisson, y en la Mecánica Cuántica al hecho de que los operadores asociados a las coordenadas no conmuten.

Los primeros dos capítulos son un repaso de los formalismos Lagrangiano, Hamiltoniano y Simpléctico de la Mecánica Clásica, y una exposición de los

conceptos de Lagrangianos de primer orden y la redefinición de variables. En el tercer capítulo se formula la Mecánica Clásica No Conmutativa, utilizando una estructura simpléctica constante específica para construir el Lagrangiano No Conmutativo de primer orden. Una sección está dedicada a la construcción del Lagrangiano de segundo orden y otra a la redefinición de las variables del espacio fase como técnica para el tratamiento de la no conmutatividad de las coordenadas. Se ilustran las modificaciones a la dinámica con unos breves ejemplos (entre los que se incluye el cálculo del ángulo de Hannay del péndulo de Foucault).

De entre los resultados de esta tesis está la definición del Lagrangiano No Conmutativo de primer orden, y la construcción del Lagrangiano en el espacio configuración a partir de éste, que en el caso usual o "conmutativo" es de segundo orden, pero en el caso no conmutativo depende de las derivadas de orden infinito de las coordenadas. Otro de los resultados es que el ángulo de Hannay se ve modificado por una fase extra proporcional al parámetro que caracteriza la no conmutatividad de las coordenadas.

En el cuarto capítulo se construye la integral funcional de la Mecánica Cuántica No Conmutativa, introduciendo como ingredientes principales las relaciones de conmutación entre los operadores asociados a las variables del espacio fase en la manera de trasladar una representación del espacio de Hilbert. Además se presentan las nuevas relaciones de incertidumbre entre las coordenadas del plano, y una deducción de la ecuación de Schrödinger no conmutativa (ecuación dinámica de las "funciones de onda" escritas en una representación que incluye a una coordenada y a un momento). En este mismo capítulo se hace la cuantización a través del principio de acción de Schwinger, que parte de la forma del Lagrangiano No Conmutativo de primer orden planteado en la Mecánica Clásica No Conmutativa. El quinto capítulo está dedicado al cálculo del propagador del oscilador armónico usando las dos formas de cuantización del cuarto capítulo. El capítulo seis es un recuento de las ideas principales que se emplean en una manera de cuantizar que involucra la deformación del álgebra de funciones clásicas sobre el espacio fase para obtener un álgebra no conmutativa de operadores sobre el espacio de Hilbert, deformación que se lleva a cabo sustituyendo el producto usual del álgebra original por un producto no local y asociativo, llamado producto estrella o de Moyal, que se representa por la exponenciación de ciertas derivadas parciales. La última sección de este capítulo tiene el carácter de perspectiva para la construcción de la Mecánica Cuántica No Conmutativa usando un producto estrella específico.

Se empleará el símbolo $[,]$ indistintamente para denotar el paréntesis de Poisson de la Mecánica Clásica en el formalismo canónico y el conmutador cuántico entre operadores. En algunos párrafos se hablará del "caso conmutativo". Esto se refiere a la Mecánica (Clásica o Cuántica indistintamente) donde la forma del paréntesis de Poisson y las relaciones de conmutación en el caso cuántico son las canónicas.

Hay que mencionar que las relaciones de conmutación entre las variables del espacio fase son los objetos esenciales del desarrollo. Es a partir de éstas que se formularán la Mecánica Clásica y Cuántica No Conmutativas. Se mantendrán las relaciones usuales de conmutación entre cada coordenda y su momento conjugado.

Finalmente, para encontrar discusiones sobre la parte fenomenológica de la no conmutatividad de las coordenadas, se pueden consultar las referencias [3, 9].

PARTE I
Mecánica Clásica No Conmutativa

“Hora Prima del segundo día
(...) Para que haya un espejo del mundo
es preciso que el mundo tenga una forma.”

Umberto Eco

La Mecánica Clásica que se formula en esta tesis está planteada para un espacio configuración de dos dimensiones (y espacio fase de cuatro). Por Mecánica Clásica No Conmutativa, se entiende una mecánica en la que el paréntesis de Poisson (definido para funciones del espacio fase por una estructura simpléctica) es tal que cuando se calcula para las coordenadas del espacio configuración, entrega una constante diferente de cero (situación distinta a la del paréntesis de Poisson usual). El adjetivo “no conmutativo” no es propio de la Mecánica Clásica, ni apropiado para referirse a una particularidad del paréntesis de Poisson (éste ya es una operación no conmutativa desde que es antisimétrico por definición); de hecho, está heredado del lenguaje que se encuentra en literatura reciente dedicada al tratamiento y formulación de una Mecánica Cuántica No Conmutativa [1, 16, 31, 32, 55, 67]. Ahí lo no conmutativo se refiere a que el conmutador cuántico entre los operadores asociados a las coordenadas da como resultado una cantidad constante diferente de cero. Se formula una Mecánica Clásica No Conmutativa con el afán de formular una teoría clásica susceptible de cuantizarse para construir una Mecánica Cuántica No Conmutativa. Éste es uno de los objetivos de la tesis en esta primera parte: plantear una Mecánica Clásica que al cuantizarla por algún método conocido, de origen a una Mecánica Cuántica No Conmutativa.

Otro de los objetivos es estudiar algunas modificaciones, con respecto al caso usual o “conmutativo”, de la dinámica de los sistemas físicos cuando se cambia la estructura simpléctica que define al paréntesis de Poisson (haciéndolo para un caso particular, una matriz simpléctica específica). Para esto se trabajará con Lagrangianos de primer orden, definidos a partir de un Hamiltoniano y una estructura simpléctica dada, de los que se derivan ecuaciones de movimiento de primer orden para todas las variables del espacio fase. También se planteará la construcción de un Lagrangiano en el espacio configuración para el caso específico de estructura simpléctica que se propone.

Para tratar las cosas en un nivel un poco más general, se establecerá desde el principio que los momentos “no conmuten” también (en el mismo sentido que las coordenadas, es decir, que el paréntesis de Poisson calculado entre los momentos entregue una constante distinta de cero), aunque la no

conmutatividad que más interesa es la de las coordenadas; un ejemplo de momentos no conmutativos se puede encontrar en los momentos canónicos de partículas cargadas que se mueven en un campo magnético constante [47, 58, 75].

Esta primera parte de la tesis está dividida en tres capítulos. Los primeros dos se dedican a exponer de manera general la forma en que se construye una Mecánica Clásica con el formalismo canónico, y se repasan algunas particularidades teóricas que serán necesarias para desarrollar varios resultados. En el tercer capítulo se aprovechan estas ideas teóricas para formular una teoría en la que las coordenadas y los momentos no conmuten (en el sentido expresado en los párrafos anteriores), y se presenta una manera de tratar esta teoría haciendo una transformación (de Darboux) de coordenadas y momentos a un conjunto canónico de variables para el espacio fase (es decir, a coordenadas y momentos tales que el paréntesis de Poisson calculado para estas variables entre sí, de como resultado las relaciones usuales).

Capítulo 1

Repaso de la formulación convencional de la Mecánica Clásica

En este capítulo se expone de manera breve el formalismo canónico de la Mecánica Clásica en tres secciones. No se pretende hacer una exposición completa que incluiría el modelo del cuerpo rígido, los sistemas con restricciones, la teoría de oscilaciones, y otros aspectos de la Mecánica Clásica como la teoría de perturbaciones. Sólo se repasarán las características fundamentales de la Mecánica Clásica analítica en las versiones Lagrangiana, Hamiltoniana y Simpléctica.

En la sección 1.1, dedicada al formalismo Lagrangiano, se parte del principio de Hamilton, se muestran las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, sus cantidades conservadas y la transformación de Legendre del Lagrangiano con la que se construye al Hamiltoniano asociado al sistema que se trate. La sección 1.2 se dedica al principio de Hamilton modificado, y se muestra cómo es el regreso a la formulación Lagrangiana cuando se parte de una formulación Hamiltoniana. La sección 1.3, en la que se expone el formalismo simpléctico, está dedicada al planteamiento de la estructura simpléctica usual o canónica (o, como se le llamará más adelante, "conmutativa"), la forma de las ecuaciones de movimiento en ese contexto, y un breve repaso del concepto de transformación canónica.

1.1 La formulación Lagrangiana

1.1.1 El principio de Hamilton

Para un sistema físico con n grados de libertad o n -dimensional, se definen n coordenadas generalizadas $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ y n velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$, que describen su posición y velocidad respectivamente. El formalismo Lagrangiano parte del principio de Hamilton que establece que la trayectoria clásica \mathbf{x}_c seguida por un sistema es un valor extremo del funcional de acción $S[\mathbf{x}(t)]$ definido a continuación. Este funcional toma trayectorias que unan puntos o posiciones inicial y final (dadas para tiempos inicial y final respectivamente) en el espacio de configuración, y su variación δS es cero para la trayectoria clásica

$$S[\mathbf{x}(t)] \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L(x^i, \dot{x}^i, t), \quad \delta S[\mathbf{x}_c] = 0. \quad (1.1)$$

Se varían las trayectorias que unen los puntos inicial y final en el espacio configuración (sin variar el tiempo), manteniendo las puntas fijas, es decir, $\delta x^i(t_0) = \delta x^i(t_1) = 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. L es la función Lagrangiana, o Lagrangiano (en el espacio configuración), que depende de las coordenadas y velocidades generalizadas, y tal vez del tiempo. El Lagrangiano es definido por el problema o sistema físico que se trate, y para muchos sistemas donde la energía se conserva (que son el tipo de problemas a los que están enfocados los resultados de esta tesis) el Lagrangiano se escribe como la diferencia entre la energía cinética y el potencial del problema: $L = T - V$. La energía cinética en coordenadas cartesianas de una partícula de masa m es $T = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^n \dot{x}_i^2$, y para muchos problemas o sistemas físicos el potencial sólo depende de las coordenadas $V(x^i)$.

Calculando δS cuando se hace una variación de la trayectoria clásica $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \delta \mathbf{x}$ (sin hacer variaciones en el tiempo), se puede ver que

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) dt \\ \Rightarrow \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \delta x^i dt \end{aligned}$$

(se está tomando la convención de suma sobre índices repetidos de Einstein) habiendo hecho una integración por partes y usado que cuando no se varía el tiempo entonces $\delta \dot{x}^i = \dot{x}^i - \dot{x}_c^i = \frac{d(x^i - x_c^i)}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x^i$; si se pide que la última expresión sea cero para variaciones arbitrarias δx^i , entonces tiene que pasar que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad (1.2)$$

para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema con Lagrangiano L . Son n ecuaciones de segundo orden que requieren de $2n$ condiciones iniciales para determinar su solución.

1.1.2 No unicidad del Lagrangiano

Si a un Lagrangiano L dado se le suma la derivada total respecto del tiempo de cualquier función de las coordenadas generalizadas y del tiempo para formar otro Lagrangiano $L' = L + \frac{dF}{dt}$, la variación de la acción S' definida por el Lagrangiano L' es la misma que la variación de la acción S definida por el Lagrangiano L :

$$\begin{aligned} \delta S' &= \delta \int_{t_0}^{t_1} dt L' = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left(L + \frac{dF}{dt} \right) \\ &= \delta S + \delta [F]_{t_0}^{t_1} = \delta S + \delta [F(t_1) - F(t_0)] \\ &= \delta S, \end{aligned}$$

pues

$$\delta [F(t_1) - F(t_0)] = \frac{\partial F}{\partial x^i} \delta x^i \Big|_{t=t_1} - \frac{\partial F}{\partial x^i} \delta x^i \Big|_{t=t_0} = 0, \quad (1.3)$$

desde que $\delta x^i(t_j) = 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{0, 1\}$. De manera que L y L' definen dos acciones diferentes que tienen los mismos puntos (funciones) extremos. Por lo tanto puede haber más de un Lagrangiano que de origen a las mismas ecuaciones de movimiento y así a la misma trayectoria seguida por el sistema físico descrito por ellos.

1.1.3 Cantidades Conservadas (Teorema de Noether)

Definiendo las cantidades

$$p_i = p_i(x^i, \dot{x}^i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad (1.4)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir como

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}; \quad (1.5)$$

p_i se llama momento conjugado de la coordenada x^i . Si una coordenada generalizada no aparece explícitamente en el Lagrangiano, se le dice cíclica y es tal que su momento conjugado es una constante, como se puede ver de la ecuación de movimiento (1.5) que le corresponde.

Al calcular la derivada total respecto del tiempo del Lagrangiano sobre la trayectoria clásica se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \dot{p}_i \dot{x}^i + p_i \ddot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (p_i \dot{x}^i - L) &= -\frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

de manera que si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la cantidad, que se define como la energía del sistema, $E = p_i \dot{x}^i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L$, es una constante de movimiento. Los momentos aquí son funciones de las coordenadas y las velocidades. Si la energía se escribe en términos de estas variables, recordando que $L = T - V$, se puede ver que $E = T + V$.

Existe una manera general de conocer las cantidades conservadas que posee un sistema, y se hace relacionándolas con las simetrías que éste tenga. En términos elementales, se dice que un sistema posee una simetría si cuando se le aplica una transformación de coordenadas (una rotación por ejemplo) el espacio de soluciones no cambia. La conexión entre las simetrías que puede poseer un sistema y las cantidades conservadas que se le pueden asociar está establecida por el teorema de Noether.

Teorema de Noether: Sea un Lagrangiano $L(x^i, \dot{x}^i, t)$ y una transformación infinitesimal arbitraria del sistema de coordenadas generalizadas y del tiempo tal que las nuevas coordenadas son

$$\begin{aligned} x^i &= x^i - \epsilon \eta_i(x^j, t) \\ t' &= t - \epsilon \eta_0(x^j, t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

(con $\epsilon \ll 1$ y η_i funciones arbitrarias del espacio y el tiempo para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$). Se definen un nuevo Lagrangiano L'

$$L'(x^i, \dot{x}^i, t') dt' = L(x^i, \dot{x}^i, t) dt, \quad (1.8)$$

y la variación

$$\delta L = L'(x^i, \dot{x}^i, t) - L(x^i, \dot{x}^i, t) \quad (1.9)$$

que se puede escribir como

$$\delta L = \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{\eta}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \eta_0 + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i) \dot{\eta}_0 \right]. \quad (1.10)$$

Existe una diferencia entre variaciones δ (variación "funcional" manejan algunos autores) cuando el parámetro como el tiempo también varía, y variaciones δ_* en las que el parámetro no varía. Esta diferencia, y lo que significa para el cálculo de las ecuaciones de movimiento, se expone en el apéndice A.

La transformación (1.7) se llama simetría de Noether si, y sólo si, para ésta se tiene que $\delta L = -\frac{dF}{dt}$, con F cualquier función de las coordenadas y del tiempo. Si esto es así, las ecuaciones de movimiento de L' y L son las mismas. Si la transformación (1.7) es una simetría de Noether, entonces la cantidad

$$K = \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \eta_i + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i) \eta_0 + F \right] \quad (1.11)$$

se conserva, es decir,

$$\frac{d}{dt} K \equiv \left[-\frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t} \right] K = 0 \quad (1.12)$$

(donde $-\frac{\partial V}{\partial x^i}$ viene de las ecuaciones de Euler-Lagrange para $L = T - V$; $\dot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial \dot{x}^i}$).

Empleando este teorema, se puede averiguar que las tres componentes del vector de momento angular definido por $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ son cantidades conservadas (\times es el producto cruz ordinario en un espacio vectorial), donde $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ y las coordenadas son las cartesianas. En particular, la componente en la dirección z del momento angular se escribe (para la masa igual a uno)

$$l_z = \dot{x}y - y\dot{x}. \quad (1.13)$$

La conservación del momento angular está conectada con las simetrías rotacionales que pueda tener un sistema. En general, cuando el momento angular se conserva, el movimiento queda restringido a un plano.

Más detalles sobre el teorema de Noether pueden encontrarse en la referencia [43].

1.1.4 El Hamiltoniano y sus ecuaciones de movimiento

El espacio fase (de $2n$ dimensiones) asociado a un sistema físico es aquel que pertenecen los puntos dados por las coordenadas \mathbf{x} y los momentos \mathbf{p} (todas éstas variables independientes). Dado un Lagrangiano, por medio de una transformada de Legendre se construye la función Hamiltoniana o Hamiltoniano, que dependerá de coordenadas y momentos (las velocidades son las variables que se eliminan mediante la transformación). Si de las definiciones de los últimos (1.4) se resuelve para las velocidades en términos de coordenadas y momentos, entonces

$$H(x^i, p_i, t) \equiv \dot{x}^i(x^i, p_i, t)p_i - L(x^i, \dot{x}^i(x^i, p_i, t), t). \quad (1.14)$$

La diferencial total del Lagrangiano evaluada en la trayectoria clásica es

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} d\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) dx^i + p_i d\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{p}_i dx^i + p_i d\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{p}_i dx^i + d(p_i \dot{x}^i) - \dot{x}^i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ \Rightarrow d(\dot{x}^i p_i - L) &= dH = \dot{x}^i dp_i - \dot{p}_i dx^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt; \end{aligned}$$

comparando la última igualdad con la diferencial total del Hamiltoniano, se identifican las ecuaciones de Hamilton para el problema asociado al Lagrangiano L

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} = \dot{H}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

(Para obtener la última igualdad se usó (1.6).) Las primeras dos de estas ecuaciones son un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden que requiere $2n$ condiciones iniciales para determinar su solución particular.

Si en la expresión para calcular el Hamiltoniano (1.14) se sustituyen las velocidades generalizadas en términos de los momentos y las coordenadas, cuando $L = T - V$ el Hamiltoniano adquiere la forma de la energía pero escrita en términos de estas variables: $H = T + V$. La energía cinética T

en términos de los momentos para una partícula de masa m tiene la forma

$$T = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

1.2 El principio de Hamilton en el espacio fase (o principio de Hamilton modificado)

1.2.1 El problema de valores extremos en el espacio fase

Se puede formular el principio variacional de Hamilton en las variables del espacio fase buscando el elemento o trayectoria $z = (z^1, \dots, z^{2n}) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ que hace al funcional de acción

$$S[z(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(z^i, \dot{z}^i, t) dt \quad (1.16)$$

tomar un valor extremo, manteniendo fijas las puntas de la trayectoria que se hace variar. Ahora, mantener las puntas fijas en el espacio fase pidiendo que tanto los valores de las coordenadas como los de los momentos en los tiempos inicial y final no deban variar, es pedir más que en el principio de Hamilton en el espacio configuración y posiblemente sobredeterminar el problema. Sólo se debe pedir que la mitad de las variables del espacio fase¹ no varíen en los tiempos inicial y final. El principio de Hamilton modificado entrega las mismas ecuaciones de movimiento, para las variables del espacio fase, que las que se derivan del Hamiltoniano definido por un Lagrangiano mediante la transformada de Legendre.

Para encontrar el extremo de $S[z(t)]$ se calcula δS cuando se varían las trayectorias en el espacio fase, y se iguala a cero. La existencia del extremo de este funcional se garantiza pidiendo que el integrando L , función que depende de todas las variables del espacio fase y sus velocidades, sea C^1 en el intervalo $\prod_{i=1}^{2n} [z^i(t_0), z^i(t_1)] \times [\dot{z}^i(t_0), \dot{z}^i(t_1)]$.

¹Para determinar la solución o trayectoria de un sistema en n dimensiones, se puede fijar cualquier conjunto que contenga "una" mitad de las variables del espacio fase, tomadas de entre coordenadas o momentos.

Supongamos que se dispone de una función $L(z^i, \dot{z}^i, t)$ continua y de primeras derivadas parciales también continuas ($L \in C^1$) en el intervalo mencionado. Plántese el problema de extremos

$$\delta S[z(t)] = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(z^i, \dot{z}^i, t) dt = 0,$$

con puntas fijas

$$z^{ik}(t_0) = z_0^{ik}, \quad z^{ik}(t_1) = z_1^{ik},$$

es decir, $\delta z^{ik}(t_j) = 0$ para $k \in \{1, \dots, n\}$, $i_k \in \{1, \dots, 2n\}$, y $j \in \{0, 1\}^2$. Para calcular la variación δS , ésta se puede intercambiar con la integral para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial z^i} \delta z^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i} \delta \dot{z}^i \right) dt \\ \Rightarrow 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial z^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i} \right) \right] \delta z^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i} \delta z^i \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

(si se hacen solamente variaciones de la trayectoria que conecta a las dos puntas límites de la integral de la acción $z' = z + \delta z$, con $\dot{z}' = \dot{z} + \delta \dot{z}$ sin trasladar o variar el tiempo, entonces $\delta \left(\frac{dz}{dt} \right) = \dot{z}' - \dot{z} = \dot{z} + \delta \dot{z} - \dot{z} = \frac{d}{dt}(\delta z)$ [54]). Como esta ecuación debe valer para toda variación δz^i con las puntas fijas, entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z^i} = 0 \quad (1.17)$$

para $i \in \{1, \dots, 2n\}$.

Al operador diferencial

$$E_i := \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}^i} - \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (1.18)$$

se le llama de Euler-Lagrange, y las ecuaciones (1.17) se escriben $E_i L = 0$. Esta forma de calcular las ecuaciones de movimiento en el espacio fase es la que se empleará en el caso no conmutativo, cuando quede definido el Lagrangiano que corresponde a una estructura simpléctica en la que las coordenadas no conmutan.

²Se podría también calcular el extremo del funcional de acción fijando todas las variables del espacio fase en un sólo tiempo (que son también $2n$ condiciones iniciales).

Como en el principio de Hamilton (en el espacio configuración), en el modificado se pueden añadir al integrando derivadas totales respecto del tiempo de funciones que dependen de las variables del espacio fase y tal vez explícitamente del tiempo, y las ecuaciones de movimiento permanecen inalteradas.

El orden en la derivación respecto del tiempo del operador de Euler-Lagrange, corresponde al hecho de que el Lagrangiano al que se le aplica depende de las variables del espacio fase hasta sus primeras derivadas respecto del mismo.

Ordinariamente, a partir de la expresión (1.14), se construye al Lagrangiano en términos del Hamiltoniano H como una transformada de Legendre (que elimina los momentos y regresa las velocidades). Esta expresión para L es la que se utiliza como el integrando del funcional de acción del principio de Hamilton modificado. A través del cálculo del extremo del funcional

$$S[z(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt (\dot{x}^i p_i - H(x^i, p_i, t)), \quad (1.19)$$

se conocen las ecuaciones de movimiento de la trayectoria (o línea de mundo) seguida por un sistema en el espacio fase. Estas ecuaciones resultan ser exactamente las primeras dos de (1.15). La tercera de estas ecuaciones se obtiene utilizando las primeras dos en la derivada total respecto del tiempo del Hamiltoniano.

1.2.2 Ecuaciones de movimiento de órdenes superiores

En general, para Lagrangianos que dependen no sólo de las variables de definición y sus primeras derivadas respecto del tiempo, sino también de derivadas de órdenes superiores, se pueden definir operadores de órdenes correspondientes que generan las ecuaciones de movimiento de tales Lagrangianos [28]. En el cálculo clásico de variaciones, se llama problema de derivadas superiores con extremos fijos al cálculo del extremo del funcional

$$S[z(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(z^i, z^{i(1)}, z^{i(2)}, \dots, z^{i(l)}), \quad (1.20)$$

con $z^{i(k)}(t_j) = z_j^{i(k)}$ constantes para $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{0, \dots, l-1\}$ y $j \in \{0, 1\}$. Si el integrando L del funcional S satisface las condiciones de suavidad

dadas por $\frac{\partial L}{\partial z^{i(k)}} \in C^k$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \{0, \dots, n\}$ en el intervalo de definición, entonces el valor (la función) extremo de este funcional satisface las ecuaciones

$$\sum_{k=0}^l (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial L}{\partial z^{i(k)}} = 0 \quad (1.21)$$

llamadas de Euler-Poisson, para $i \in \{1, \dots, n\}$. (**Observación:** Pensando en una dimensión para no complicar la notación, el problema de derivadas superiores es equivalente a uno de derivadas de primer orden, pero en un número más grande de variables [28]. Es decir, es lo mismo calcular el extremo de

$$S[z(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(l)}) \quad (1.22)$$

con puntas $z^{(k)}(t_j) = z^k_j$ constantes para $k \in \{0, \dots, l-1\}$ y $j \in \{0, 1\}$, que, definiendo las variables $z^k = z^{(k-1)}$ para $k \in \{1, \dots, l\}$, encontrar el extremo del problema

$$S[z(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(z^1, z^2, z^3, \dots, z^l, \dot{z}^l) \quad (1.23)$$

(donde $\dot{z}^k = z^{k+1}$), y puntas $z^k(t_j) = z^{k-1}_j$ constantes para $k \in \{1, \dots, l\}$ y $j \in \{0, 1\}$.)

Sabiendo que existe la solución para el problema de derivadas superiores (siempre finitas) si el integrando del funcional (1.20) satisface condiciones de suavidad, un par de preguntas que vale la pena hacerse son: ¿existe el extremo del funcional que tiene como integrando una función que depende de las derivadas de las variables de definición hasta orden infinito? Y si sí, ¿qué ecuaciones satisface este extremo?. Lo primero que puede pensarse es que, si existe el extremo, las ecuaciones de movimiento que satisface son como las de Euler-Poisson (1.21) pero haciendo l tender a infinito. Las respuestas a estas preguntas serían útiles en la sección 3.3, donde al calcular el Lagrangiano No Conmutativo en el espacio configuración, aparece una dependencia de éste en derivadas de orden infinito.

1.3 La formulación Simpléctica

1.3.1 La matriz simpléctica J

Para todo sistema mecánico con n grados de libertad (o n -dimensional) se definen n variables geométricas o coordenadas generalizadas x^i , y n variables dinámicas o momentos generalizados p_i , para $i \in \{1, \dots, n\}$. En este formalismo, ambas, coordenadas y momentos, son las variables con las que se describe al sistema. Los momentos son variables independientes de las coordenadas y de las velocidades generalizadas.

Sean z^j , las variables para un sistema con $j \in \{1, \dots, 2n\}$, tales que $z^j = x^i$ para $j = i$ y $z^j = p_i$ para $j = i + n$ (con $i \in \{1, \dots, n\}$). El Hamiltoniano es una función del espacio fase, y tal vez explícitamente del tiempo, que describe la dinámica de los sistemas a través del paréntesis de Poisson definido por

$$[f, g] \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial z^k} J \frac{\partial g}{\partial z^l} = \frac{\partial f}{\partial z^k} \alpha^{kl} \frac{\partial g}{\partial z^l} \quad (1.24)$$

($\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$ es un vector renglón y $\frac{\partial g}{\partial z}$ es una columna), para $k, l \in \{1, \dots, 2n\}$, $f = f(z)$ y $g = g(z)$ funciones del espacio fase, y J una matriz antisimétrica (llamada *matriz simpléctica*) dada por

$$J = (\alpha^{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

(cada elemento de J aquí es una matriz de $n \times n$).

Sea una función del espacio fase y del tiempo $f(x^i, p_i, t)$. Su derivada total respecto del tiempo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.26)$$

se puede reescribir, usando las ecuaciones de movimiento de Hamilton (1.15) y la definición del paréntesis de Poisson (1.24), como

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Se puede formular la dinámica de las funciones del espacio fase directamente con un Hamiltoniano y un paréntesis de Poisson como (1.24), definiendo la derivada respecto del tiempo como la ecuación (1.27). Tomando como f

a las variables mismas del espacio fase, la dinámica descrita por el paréntesis de Poisson se determina por las ecuaciones

$$\frac{dz^i}{dt} = \dot{z}^i \equiv [z^i, H] = \alpha^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} \quad (1.28)$$

para $i \in \{1, \dots, 2n\}$. En una notación más compacta, se escribe

$$\dot{z} = [z, H] = J \frac{\partial H}{\partial z},$$

donde \dot{z} y $\frac{\partial H}{\partial z}$ son vectores columna.

En términos de x 's y p 's, las ecuaciones de movimiento se escriben

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= [x^i, H] \\ \dot{p}_i &= [p_i, H] \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

la última de las cuales se sigue porque el paréntesis de Poisson del Hamiltoniano con sí mismo es cero, pues

$$\begin{aligned} [H, H] &= \frac{\partial H}{\partial z^i} \alpha^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial z^j} \alpha^{ji} \frac{\partial H}{\partial z^i} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial z^i} \alpha^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

(en el segundo renglón se utilizó la propiedad de antisimetría de J y en el tercero se renombraron a los índices), ya que sólo el cero es igual a su inverso aditivo.

1.3.2 De la formulación Simpléctica a la Lagrangiana

Existe un procedimiento general para construir el Lagrangiano de segundo orden partiendo de un conjunto de ecuaciones de movimiento dado. Tal procedimiento se llama problema inverso del cálculo de variaciones. Una exposición de este problema puede hallarse en [44]. Lo que a continuación se describe es la manera de construir el Lagrangiano de segundo orden partiendo de uno de primer orden, definido por una transformación de Legendre del

Hamiltoniano. En el capítulo 3 (sección 3.3), este procedimiento es el que se utiliza para construir un Lagrangiano en el espacio configuración, a partir de uno de primer orden definido por un Hamiltoniano y una estructura simpléctica dada.

Para recuperar el Lagrangiano y sus ecuaciones de movimiento a partir del Hamiltoniano y las ecuaciones (1.29) calculadas con el paréntesis de Poisson de la formulación simpléctica, se plantea la transformada de Legendre que elimine los momentos del Hamiltoniano dada por

$$L(x^i, \dot{x}^i, t) \equiv \dot{x}^i p_i - H(x^i, p_i, t). \quad (1.31)$$

Resolver los momentos en términos de las coordenadas y sus derivadas y sustituirlos en esta expresión para el Lagrangiano, es eliminar las variables auxiliares de su expresión. Una variable es auxiliar si se puede despejar algebraicamente de sus propias ecuaciones de movimiento en términos del resto de las variables y sus derivadas respecto del tiempo.

Si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo y es de la forma $H = T + V$, con T escrita en términos de los momentos y V una función sólo de las coordenadas, entonces de las primeras ecuaciones de (1.29) resulta que $p_i = m\dot{x}^i$, y sustituyendo esto en la expresión para el Lagrangiano (1.31),

$$L(x^i, \dot{x}^i) = m(\dot{x}^i)^2 - H(x^i, m\dot{x}^i), \quad (1.32)$$

se puede ver que éste tiene la forma $L = T - V$. De este Lagrangiano se siguen las ecuaciones de movimiento calculadas con el operador de Euler-Lagrange

$$E_i L = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \quad (1.33)$$

1.3.3 Transformaciones Canónicas

Las transformaciones canónicas son aquellas que dejan invariantes las ecuaciones de Hamilton. Dado un conjunto de variables $z = (x^i, p_i)$ y un Hamiltoniano $H(z, t)$ para el que se tienen las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \\ \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

una transformación $Z = Z(z, t)$ entre las variables $z = (x^i, p_i)$ y $Z = (X^i, P_i)$ es canónica si existe un Hamiltoniano $K(Z, t)$, tal que

$$\begin{aligned}\dot{X}^i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial X^i}.\end{aligned}\quad (1.35)$$

Es decir, la transformación $Z = Z(z)$ es canónica si existe un Hamiltoniano $K(Z, t)$ tal que simultáneamente pase que

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt (\dot{x}^i p_i - H(x^i, p_i, t)) = 0 \quad (1.36)$$

y

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt (\dot{X}^i P_i - K(X^i, P_i, t)) = 0. \quad (1.37)$$

Para que esto suceda, es suficiente que los integrandos difieran por la derivada total de una función $F(z^i, z^i, t)$ de los espacios fases a donde pertenecen los puntos z y Z , y del tiempo:

$$\dot{x}^i p_i - H = \dot{X}^i P_i - K + \frac{dF}{dt}. \quad (1.38)$$

El último término de esta expresión contribuye a la variación de la acción sólo en los puntos para los tiempos inicial y final, y la variación de tal contribución se anulará si F es función de las variables que se anulan en las puntas tomadas de entre los conjuntos z , Z o una mezcla entre ambos. A la función F se la denomina función generatriz de la transformación canónica, y existen cuatro tipos de éstas: las que dependen sólo de coordenadas $F_1(x^i, X^i)$, de coordenadas viejas y momentos nuevos $F_2(x^i, P_i)$, de momentos viejos y coordenadas nuevas $F_3(p_i, X^i)$, y sólo de momentos $F_4(p_i, P_i)$. En todos los casos se tiene que el nuevo Hamiltoniano se escribe como $K = H + \frac{\partial F_j}{\partial t}$, y las derivadas parciales de las funciones F_j respecto de las variables de las que dependen, entregan el resto de las variables ($j \in \{1, \dots, 4\}$). A estas ecuaciones y la que define al nuevo Hamiltoniano K , se denominan ecuaciones de transformación.

La función generatriz de la transformación canónica identidad, en la que las nuevas variables del espacio fase son las viejas, es del tipo F_2 . Tal función

es $I(x^i, P_i) = x^i P_i$. Las ecuaciones de transformación que se derivan de I son

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial I}{\partial x_i} = P_i \\ X^i &= \frac{\partial I}{\partial P_i} = x^i \\ K &= H. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Estas ecuaciones (y las correspondientes para cada tipo de función generatriz) se deducen de la ecuación (1.38).

Se pueden ver a las transformaciones canónicas en términos del paréntesis de Poisson como sigue. En la notación matricial, las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z};$$

sea una transformación invertible $Z(z)$ independiente del tiempo, tal que $\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial z} \dot{z}$ y $H(Z) = H(z(Z))$, con $\frac{\partial Z}{\partial z}$ la matriz Jacobiana. Entonces, de las ecuaciones de movimiento para z se tiene que

$$\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial z} J \frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial z} \frac{\partial H(Z)}{\partial Z}$$

($\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial z}$ es la matriz transpuesta de $\frac{\partial Z}{\partial z}$). Para que la estructura de las ecuaciones de Hamilton no cambie, y así la transformación de variables sea canónica, debe pasar que

$$\frac{\partial Z}{\partial z} J \frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial z} = J.$$

Esta condición se conoce como la "condición simpléctica".

Se puede ver que la matriz simpléctica J tiene la propiedad $J^2 = -1$. Usando ésta, y el hecho de que la matriz transpuesta de la inversa es la inversa de la transpuesta, la condición simpléctica se puede escribir como

$$\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial z} J \frac{\partial Z}{\partial z} = J.$$

De la condición simpléctica se tiene que bajo las transformaciones canónicas el paréntesis de Poisson es tal que

$$[f, g]_{(z)} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z} J \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overline{\partial f}}{\partial \overline{Z}} \frac{\partial \overline{Z}}{\partial z} J \frac{\overline{\partial Z}}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \overline{Z}} \\
&= \frac{\partial f}{\partial \overline{Z}} J \frac{\partial g}{\partial \overline{Z}} \\
&= [J, g]_{(z)}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Por lo tanto, se dice que una transformación es canónica si, y sólo si, deja invariante al paréntesis de Poisson.

1.3.4 Transformaciones Canónicas Infinitesimales y Cantidades Conservadas

Hay un tipo de transformación canónica especial llamada la transformación canónica infinitesimal (TCI). Ésta es generada por una función que difiere de la función generatriz de la identidad de manera proporcional a un parámetro continuo e infinitesimal. Se escribe a F la función generatriz de la TCI (del tipo F_2) como

$$F(x^i, P_i) = I(x^i, P_i) + \epsilon G(x^i, P_i), \tag{1.41}$$

para G cualquier función del tipo F_2 y $\epsilon \ll 1$. Como el parámetro ϵ se toma infinitesimal, las nuevas variables Z diferirán de las viejas z por una cantidad infinitesimal

$$Z = z + \delta z, \tag{1.42}$$

donde δz se puede escribir como (empleando las ecuaciones de transformación, pero sustituyendo a P_i por p_i en G y las derivadas parciales respecto de P_i porque los momentos viejos y nuevos están sólo infinitesimalmente separados)

$$\delta z = \epsilon J \frac{\partial G(z)}{\partial z} = \epsilon [z, G] \tag{1.43}$$

(la última igualdad viene de la definición del paréntesis de Poisson).

Si se toma como parámetro infinitesimal a la diferencial del tiempo, $\epsilon = dt$, y como función generadora al Hamiltoniano, se tiene que

$$\delta z = dt [z, H] = \dot{z} dt = dz. \tag{1.44}$$

Esta ecuación establece que la TCI con el Hamiltoniano como función generadora, lleva las variables del espacio fase al tiempo t a sus valores al tiempo $t + dt$. Es decir, el movimiento de un sistema en el tiempo dt se puede des-

cribir por una TCI generada por su Hamiltoniano, y el movimiento en un intervalo finito se da por una sucesión de TCI's de este tipo.

Hay una manera de identificar cuándo una cantidad es conservada usando el concepto de TCI y el paréntesis de Poisson. Sea f una función de las variables del espacio fase, pero no explícitamente del tiempo. Cuando las variables se transforman por una TCI generada por una función G del tipo F_2 , el cambio en f se puede escribir como

$$\partial f = f(z + \delta z) - f(z). \quad (1.45)$$

Haciendo una expansión de Taylor del primer término del miembro derecho y dejándola hasta el primer orden en el parámetro infinitesimal, se tiene que

$$\partial f = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \delta z = \epsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} J \frac{\partial G}{\partial z} = \epsilon [f, G], \quad (1.46)$$

donde la última igualdad se obtiene usando la definición del paréntesis de Poisson.

Si se usa como función generadora al Hamiltoniano, y se tiene una cantidad f tal que el paréntesis de Poisson de ésta con H es cero, entonces para esa TCI (la que genera al movimiento en dt) se tiene que

$$0 = \epsilon [f, H] = \partial f = f(z + \delta z) - f(z). \quad (1.47)$$

Por lo tanto, el valor de f en el punto de la trayectoria infinitesimalmente separado de z es el mismo que el valor de f en z . Es decir, f se conserva en el movimiento de z a $z + \delta z$ cuando el tiempo corre de t a $t + dt$. De la misma manera se puede concluir que una cantidad (que no depende explícitamente del tiempo) se conserva, para cualquier intervalo finito de tiempo, si su paréntesis de Poisson con el Hamiltoniano se anula (desde que el movimiento en un intervalo finito es una sucesión de movimientos en intervalos infinitesimales).

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos Hamiltonianos, Lagrangianos de primer orden y Redefiniciones de variables

Se introducirán algunas ideas y teoremas a los que será necesario referirse en el capítulo 3, donde se estudia una estructura simpléctica particular. Las ideas principales giran alrededor de los Lagrangianos de primer orden y la redefinición de variables.

El presente capítulo cuenta con cuatro secciones. En la 2.1 se introducen los elementos y características de un Sistema Dinámico Hamiltoniano para una matriz simpléctica general, con la cual se define un paréntesis de Poisson que da origen a las ecuaciones de movimiento (en el capítulo 3 se definirá la Mecánica Clásica No Conmutativa a través de una matriz simpléctica particular). La sección 2.2 está dedicada a definir al Lagrangiano de primer orden a partir del Hamiltoniano y una estructura simpléctica dada. Las secciones 2.3 y 2.4 exponen el teorema de Darboux y el concepto de redefinición de variables que se utilizarán en el capítulo 3 para construir una transformación de coordenadas y momentos que “no conmutan” a un conjunto de variables para el espacio fase que sí lo hacen.

2.1 Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

La matriz (1.25) de la formulación simpléctica de la sección 1.2, que define al paréntesis de Poisson que da origen a las ecuaciones de movimiento, es un caso particular de una manera general de formular una dinámica a partir de una matriz simpléctica y un Hamiltoniano. Se pueden definir más de una matriz o estructura simpléctica que de origen a una teoría o Mecánica Clásica. Dada una matriz simpléctica, se define con ella un paréntesis de Poisson con el que se calculan las ecuaciones de movimiento de acuerdo a una ecuación como (1.27). En general, para un mismo problema (es decir, para un mismo Hamiltoniano), con estructuras simplécticas diferentes se obtendrán ecuaciones de movimiento diferentes.

De manera general, se le llama sistema dinámico Hamiltoniano, de n grados de libertad, a aquel que se describe por la ecuación

$$\frac{df}{dt} = [f, H]_W + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.1)$$

para alguna función del espacio fase y del tiempo $f = f(z, t)$, y $[\ , \]_W$ el paréntesis de Poisson definido como

$$[f, g]_W \equiv \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} W \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z^i} w^{ij} \frac{\partial g}{\partial z^j} \quad (2.2)$$

($\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$ es la matriz transpuesta de $\frac{\partial f}{\partial z}$), para $W = (w^{ij})$ una matriz simpléctica de $2n \times 2n$ (cuyas entradas pueden ser funciones de z^i). El paréntesis definido por esta matriz debe satisfacer las propiedades de

i) antisimetría: $[f, g]_W = -[g, f]_W$,

ii) la identidad de Jacobi: $[[f, g]_W, h]_W + [[g, h]_W, f]_W + [[h, f]_W, g]_W = 0$.

Si el paréntesis de Poisson no se definiera como en (2.2), se debe pedir además que satisfaga la propiedad de

iii) derivación (de Leibnitz): $[f, gh]_W = [f, g]_W h + g[f, h]_W$;

pero en este caso el paréntesis (2.2) ya es una derivación.

Dado un Hamiltoniano y la matriz W que define al paréntesis de Poisson, tomando como f a las variables del espacio fase en (2.1), las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{z}^i = [z^i, H]_W = \frac{\partial z^i}{\partial z^j} w^{jk} \frac{\partial H}{\partial z^k} = \delta_{ij} w^{jk} \frac{\partial H}{\partial z^k} = w^{ik} \frac{\partial H}{\partial z^k}, \quad (2.3)$$

para $i, j \in \{1, \dots, 2n\}$. Usando la definición (2.2), se tiene que

$$[z^i, z^j]_W = \frac{\partial z^i}{\partial z^k} w^{kl} \frac{\partial z^j}{\partial z^l} = \delta_{ik} w^{kl} \delta_{jl} = w^{ij}, \quad (2.4)$$

es decir, mediante el cálculo del paréntesis de Poisson entre las variables z^i del espacio fase, se pueden identificar los elementos de la matriz W que lo define.

Transformaciones Canónicas y Cantidades Conservadas. Como en el caso de la estructura simpléctica dada por la matriz J , una transformación canónica en el caso de una matriz simpléctica W general, es una transformación de variables del espacio fase que deja invariante la estructura de las ecuaciones de Hamilton, $\dot{z}^i = [z^i, H]_W$. O, dicho de otro modo, una transformación es canónica si deja invariante al paréntesis de Poisson definido por la matriz W .

Como en la subsección 1.3.4, se puede mostrar que cualquier función $f(z)$ del espacio fase que no depende explícitamente del tiempo y que "conmute" con el Hamiltoniano, es decir, tal que $[H, f]_W = 0$, es una constante de movimiento. Este hecho también puede verse de la definición (2.1).

2.2 Lagrangianos de primer orden

El Lagrangiano que define al funcional del principio de Hamilton en el espacio fase, y que da origen a las ecuaciones de movimiento (1.17), se puede construir a partir de un Hamiltoniano y una estructura simpléctica dada.

Se le dice Lagrangiano de primer orden al Lagrangiano más general lineal en las velocidades, o primeras derivadas de las variables del espacio fase,

$$L(z^i, \dot{z}^i, t) = l_i(z^j) \dot{z}^i - H(z^i, t) \quad (2.5)$$

(con $l_i(z)$ y $H(z)$ algunas funciones sólo de z 's) que da origen a ecuaciones de movimiento de primer orden. Calculando éstas mediante el operador de Euler-Lagrange (1.18) que se conoce a partir del principio de Hamilton modificado (sección 1.3), se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^j} = l_j,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z^j} &= \frac{\partial l_i}{\partial z^j} z^i - \frac{\partial H}{\partial z^j}, \\ \Rightarrow E_j L &= \left(\frac{\partial l_j}{\partial z^i} - \frac{\partial l_i}{\partial z^j} \right) z^i - \frac{\partial H}{\partial z^j} = 0. \end{aligned}$$

Denotando por $w_{ji} \equiv \frac{\partial l_i}{\partial z^j} - \frac{\partial l_j}{\partial z^i}$, las ecuaciones de movimiento se escriben

$$w_{ji} \dot{z}^i = \frac{\partial H}{\partial z^j}. \quad (2.6)$$

Para obtener este resultado se han calculado las ecuaciones de movimiento de primer orden que vienen de un Lagrangiano lineal en las velocidades lo más general posible, utilizando el principio de Hamilton en el "espacio fase".¹ Comparando estas ecuaciones con (2.3), las que se obtienen con el paréntesis de Poisson, se deduce que H debe ser el Hamiltoniano del sistema que se trate y w_{ji} los elementos de la matriz inversa de W (la matriz que define al paréntesis de Poisson). Cuando W es una matriz constante, es suficiente escribir $l_i = \frac{1}{2} w_{ji} z^j$ para satisfacer la relación $\frac{\partial l_j}{\partial z^i} - \frac{\partial l_i}{\partial z^j} = w_{ji}$ (recordando que W^{-1} , como W , es una matriz antisimétrica ($w_{ij} = -w_{ji}$)).

Al sustituir las funciones l_i y a H como el Hamiltoniano en (2.5), se obtiene que el Lagrangiano de primer orden se escribe

$$L(z^i, \dot{z}^i, t) = \frac{1}{2} w_{ij} z^i \dot{z}^j - H(z^i, t)^2. \quad (2.7)$$

Dado que w_{ij} son los elementos de la matriz inversa de la que define al paréntesis de Poisson, el Lagrangiano de primer orden que se define con un Hamiltoniano particular, depende además de la matriz simpléctica que se esté utilizando.

La forma (2.7) para el Lagrangiano, definido por un Hamiltoniano y una estructura simpléctica constante, es la que se utilizará para construir el Lagrangiano No Conmutativo.

¹Se está denominando espacio fase a aquel al que pertenecen los puntos $z = (z^1, \dots, z^{2n})$, aunque los momentos de la $2n$ -ada mencionada probablemente no sean las velocidades generalizadas (como son en el caso de la matriz simpléctica $W = J$ usual o conmutativa) cuando la matriz simpléctica que define al paréntesis de Poisson es arbitraria.

²En la subsección 1.2.1 se habló de las condiciones de borde de la definición de un problema de valor extremo (pie de la página 7). Si la acción del principio de Hamilton modificado se define con un Lagrangiano como (2.7), su estructura particular va a fijar las variables para las que se deben establecer las condiciones de borde: serán aquellas que aparezcan derivadas respecto del tiempo en el término "cinético" (el que no tiene que ver con el Hamiltoniano).

2.3 Teorema de Darboux

Del teorema de Darboux se desprende el hecho de que, desde un sistema de coordenadas y momentos, se puede hacer una transformación de variables del espacio fase, tal que para el nuevo sistema de coordenadas y momentos la matriz simpléctica es la canónica o usual. En general, los elementos de la matriz inversa de la matriz simpléctica son $w_{ji} = \Omega(e_i, e_j)$, donde Ω es una dos-forma que toma parejas de vectores del espacio fase, y $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, 2n\}}$ una base ortonormal para el mismo [53]; en el caso canónico, la matriz J está dada por $\Omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp_i$ (\wedge indica el producto exterior de dos uno-formas).

El teorema de Darboux será una herramienta muy importante para el desarrollo de los resultados de la sección 3.4 del tercer capítulo de esta tesis. En tal sección se presenta una técnica para el tratamiento de la no conmutatividad que involucra una transformación del conjunto de variables no conmutativas en uno en el que las coordenadas y los momentos conmutan (en el sentido de que el paréntesis de Poisson calculado para las coordenadas y los momentos entre sí da cero). A continuación se presenta el fundamento que garantiza que esto se puede hacer.

Teorema de Darboux: Sea Ω una dos forma diferencial cerrada³ y no degenerada, en una vecindad de $z \in \mathbf{R}^{2n}$. Entonces existe una vecindad de z en la que se puede elegir un sistema de coordenadas y momentos $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ tal que Ω tiene la forma canónica y constante $\Omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp_i$. (Una demostración del teorema puede encontrarse en [4].)

Este sistema de coordenadas y momentos que se puede elegir en el que la dos forma Ω es la canónica, es el conjunto de variables para el espacio fase para el que la matriz simpléctica es J de (1.25). Para verlo: denótese por Ω^i , para $i \in \{1, 2\}$, dos uno-formas en V un espacio vectorial de dimensión n finita, que toman vectores $v \in V$ y devuelven elementos del campo. El producto exterior de dos uno-formas $\Omega^2 = \Omega^1 \wedge \Omega^1$ es una dos-forma que toma parejas de vectores en V y entrega elementos del campo. Por definición [4], se tiene que

$$\Omega^2(v_1, v_2) = \Omega^1 \wedge \Omega^1(v_1, v_2) = \Omega^1(v_1)\Omega^1(v_2) - \Omega^1(v_2)\Omega^1(v_1).$$

³Una forma diferencial Ω en una variedad M es cerrada si su derivada exterior es cero: $d\Omega = 0$. Una forma cerrada es el análogo en muchas dimensiones de un fluido incompresible, cuyo flujo a través de la frontera de una región es cero.

Ahora, la diferencial de un campo escalar es una uno-forma, y en particular la diferencial de una coordenada cartesiana z^i (para $i \in \{1, \dots, 2n\}$) evaluada en los vectores de la base canónica $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, 2n\}}$ es $dz^i(e_j) = \delta_{ij}$. De manera que para las variables del espacio fase, objetos como $dx^i \wedge dp_i$, se escriben $dz^i \wedge dz^{n+i}$, y evaluados en parejas (e_j, e_k) de la base canónica para el espacio fase (tal que $z \in \mathbb{R}^{2n}$ se escribe $z = \sum_{i=1}^{2n} z^i e_i$) da como resultado

$$dz^i \wedge dz^{n+i}(e_j, e_k) = \delta_{ij}\delta_{n+i,k} - \delta_{ik}\delta_{n+i,j}. \quad (2.8)$$

Sumando sobre i de 1 hasta n las dos-formas $dz^i \wedge dz^{n+i}$ se obtiene Ω , la dos forma del párrafo anterior, que evaluada sobre las parejas de vectores de la base (e_j, e_k) da como resultado

$$\Omega(e_j, e_k) = \delta_{n+j,k} - \delta_{n+k,j} = \begin{cases} \delta_{n+j,k}, & j \in \{1, \dots, n\} \\ -\delta_{n+k,j}, & j \in \{n+1, \dots, 2n\} \end{cases} \quad (2.9)$$

(y $k \in \{1, \dots, 2n\}$). Por lo tanto, de la definición para la matriz inversa de la matriz simpléctica W , $w_{kj} = \Omega(e_j, e_k)$, se tiene que $W = (w^{jk})$ de $2n \times 2n$ es la matriz J de (1.25).

La utilidad que se le dará al teorema de Darboux en esta tesis es que, una vez construido el Lagrangiano No Conmutativo definido por una matriz simpléctica y un Hamiltoniano de acuerdo con (2.7), garantizará la existencia de un sistema de coordenadas y momentos para el que la matriz simpléctica es J . Es decir, se podrá intentar transformar las variables no conmutativas, en las que estará definido el Lagrangiano No Conmutativo, a un conjunto de coordenadas y momentos conmutativos entre sí.

2.4 Transformaciones de variables, su impacto sobre el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas

Para establecer el tipo de cosas que se hacen en la sección 3.4, cuando se transforman las variables no conmutativas del espacio fase a un sistema de coordenadas y momentos conmutativos entre sí, se expone el efecto de las transformaciones de variables (las redefiniciones de coordenadas y momentos) sobre el Lagrangiano y sus ecuaciones de movimiento.

Dado un Lagrangiano de primer orden $L = L(z^i, \dot{z}^i)$ (para $i \in \{1, \dots, 2n\}$ si hay n grados de libertad), sea una transformación invertible, no infinitesimal y no necesariamente canónica, que lleva las variables z^i del espacio fase a las Z^j , en general, de otro espacio fase ($Z = Z(z)$, con $\dot{Z} = \dot{Z}(z, \dot{z})$, $z = z(Z)$ y $\dot{z} = \dot{z}(Z, \dot{Z})$), y el Lagrangiano L al $\bar{L} = \bar{L}(Z, \dot{Z}) \equiv L(z(Z), \dot{z}(Z, \dot{Z}))$. Usando las identidades

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{Z}}{\partial \dot{z}} &= \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{Z}}{\partial z} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial Z}{\partial z},\end{aligned}$$

se puede ver que

$$\begin{aligned}E_i L(z, \dot{z}) &= E_i L(z(Z), \dot{z}(Z, \dot{Z})) = E_i \bar{L} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{z}^i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial z^i} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial \dot{z}^i} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Z}^j} \frac{\partial \dot{Z}^j}{\partial \dot{z}^i} \right) - \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial z^i} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Z}^j} \frac{\partial \dot{Z}^j}{\partial z^i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial Z^j} \right) \frac{\partial Z^j}{\partial \dot{z}^i} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Z}^j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Z^j}{\partial z^i} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial z^i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Z}^j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{Z}^j}{\partial z^i} \right) \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial Z^j} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Z^j} \right] \frac{\partial Z^j}{\partial \dot{z}^i} = [\bar{E}_j \bar{L}(Z, \dot{Z})] \frac{\partial Z^j}{\partial \dot{z}^i},\end{aligned}\quad (2.10)$$

con $\bar{E}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial Z^j} \right) - \frac{\partial}{\partial Z^j}$ el operador de Euler-Lagrange en las variables Z^j . Es decir, las ecuaciones de movimiento en uno y otro sistemas de coordenadas y momentos son proporcionales a través del Jacobiano de la transformación. Lo anterior implica que, resolver el problema de encontrar la solución z^c que satisfice las ecuaciones $E_i L(z^c, \dot{z}^c) = 0$, es equivalente a resolver el problema de encontrar la solución Z^c que satisfice las ecuaciones $\bar{E}_j \bar{L}(Z^c, \dot{Z}^c) = 0$.

En conexión con la sección anterior, sobre la existencia de una vecindad para todo punto del espacio fase en la que se tiene un sistema de coordenadas y momentos en el que la estructura simpléctica es la canónica o usual, si a un conjunto de variables para el espacio fase se le aplica una transformación que define otro conjunto de variables para el que la matriz simpléctica es la canónica, hay un requisito que debe satisfacer tal transformación. Tal requisito se muestra a continuación.

Las transformaciones canónicas dejan al paréntesis de Poisson invariante. Una transformación no canónica cambia necesariamente la estructura simpléctica que define a las ecuaciones de movimiento. En particular, supóngase

que con un mismo Hamiltoniano se construyen un par de Lagrangianos de primer orden con W y W' dos matrices de diferentes estructuras simplécticas, ambas constantes,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} w_{ij} z^i \dot{z}^j - H(z) \\ \bar{L} &= \frac{1}{2} w'_{ij} Z^i \dot{Z}^j - H(Z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

El paréntesis de Poisson (definido por una y otra matriz simpléctica) calculado en cada conjunto de variables para el espacio fase (z y Z) entrega resultados distintos. Supóngase además que hay una transformación lineal e invertible entre las variables z y Z

$$\begin{aligned} Z &= Z(z) = Az \\ (Z^i &= a_{ij} z^j \Rightarrow \frac{\partial Z^i}{\partial z^j} = a_{ij}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

El sistema físico es el mismo (con $H(Z) \equiv H(z(Z))$), pero expresado en distintas variables; variables de distintos espacios fases. Las ecuaciones de movimiento para cada uno de estos Lagrangianos son

$$\begin{aligned} w_{ij} \dot{z}^j &= \frac{\partial H(z)}{\partial z^i} \\ w'_{kl} \dot{Z}^l &= \frac{\partial H(Z)}{\partial Z^k}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Las segundas ecuaciones en términos de las variables z , mediante la transformación (2.12), se convierten en

$$w'_{kl} \frac{\partial Z^l}{\partial z^j} \dot{z}^j = \frac{\partial H(Z(z))}{\partial z^i} \frac{\partial z^i}{\partial Z^k}. \quad (2.14)$$

En forma matricial, esta última ecuación se ve

$$(W')^{-1} A \dot{z} = (\bar{A})^{-1} \frac{\partial H(z)}{\partial z}, \quad (2.15)$$

entonces,

$$\bar{A} (W')^{-1} A \dot{z} = \frac{\partial H(z)}{\partial z} \quad (2.16)$$

(\bar{A} es la matriz transpuesta de A), o,

$$\frac{\partial Z^k}{\partial z^i} w'_{kl} \frac{\partial Z^l}{\partial z^j} \dot{z}^j = \frac{\partial H(z)}{\partial z^i}. \quad (2.17)$$

Usando que los elementos \tilde{a}_{ji} de la matriz transpuesta de A son tales que $\tilde{a}_{ji} = a_{ij}$, la ecuación anterior establece que

$$a_{ki} w_{kl} a_{lj} = w_{ij}. \quad (2.18)$$

Una transformación que satisface (2.18) (llamada transformación de Darboux), define una estructura simpléctica a partir de otra.

Una transformación que lleve una estructura simpléctica constante arbitraria a la canónica o usual, tiene que ser una transformación de Darboux para que transforme las ecuaciones de movimiento para una estructura simpléctica arbitraria en las ecuaciones de movimiento para la estructura simpléctica canónica o usual.

Los dos Lagrangianos (2.11) se definen por Hamiltonianos que vienen del mismo problema. Estos sistemas están relacionados entre sí por un cambio de variable. Simplemente se ha cambiado la manera de describirlo, es decir, las variables con las que se describe su evolución: un sistema de coordenadas y momentos satisface ciertas relaciones en el paréntesis de Poisson y el otro otras.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Capítulo 3

Formulación de la Mecánica Clásica No Conmutativa

Se aborda el problema de construir una Mecánica Clásica en dos dimensiones, en la que calcular el paréntesis de Poisson (denotado por $[,]$) para las coordenadas y los momentos entre sí de como resultado constantes distintas de cero (manteniendo además la relación usual entre cada coordenada y su momento conjugado). En otras palabras, se busca una estructura en la que

$$\begin{aligned}[x, y] &= 0 \neq 0 \\ [p_x, p_y] &= \sigma \neq 0 \\ [x, p_x] &= 1 \\ [y, p_y] &= 1,\end{aligned}$$

es decir, las coordenadas y los momentos sean “no conmutativos”.

En la sección 3.1 se construye el Lagrangiano No Conmutativo de primer orden, utilizando la estructura que este tipo de Lagrangianos tienen (expuesta en la sección 2.2). La sección 3.2 es un breve vistazo a la manera en la que se presenta el campo central en este contexto, definiendo un par de constantes de movimiento y estudiando la integración de las ecuaciones de movimiento que se tienen para este problema. La sección 3.3 está dedicada a la construcción del Lagrangiano No Conmutativo en el espacio configuración, el que depende sólo de coordenadas y sus derivadas respecto del tiempo. El resultado que se obtiene en esta tesis es que éste depende de derivadas de orden infinito de las coordenadas. También en esta sección se estudian las ecuaciones de movimiento de este Lagrangiano y algunos casos límites. En la sección 3.4 se utiliza el teorema de Darboux para definir una transformación de variables

del espacio fase que lleva las coordenadas y momentos no conmutativos a un conjunto de variables canónicas, cuyas ecuaciones de movimiento en el formalismo simpléctico se calculan con la matriz "conmutativa" J . Al final de esta sección se presenta una breve discusión acerca de la equivalencia entre los problemas que se tienen antes y después de esta transformación.

Para ilustrar las alteraciones en la dinámica debidas a la introducción de los parámetros no conmutativos θ y σ , se presentarán en las secciones 3.1 y 3.2 los ejemplos de la partícula libre y el oscilador armónico, y en la sección 3.5 se estudiarán los Hamiltonianos que corresponden al último y al péndulo de Foucault aplicando la técnica de transformación de variables de la sección 3.4.

3.1 Dinámica Hamiltoniana y el Lagrangiano No Conmutativo

Para formular la Mecánica Clásica a través de un sistema dinámico Hamiltoniano, de acuerdo con lo expuesto en la sección 2.1 del capítulo 2, se requiere de una función Hamiltoniana y una matriz simpléctica con la cual se defina un paréntesis de Poisson.

Se define el plano no conmutativo ($z^1 = x, z^2 = y, z^3 = p_x$ y $z^4 = p_y$) tomando la matriz simpléctica

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & -1 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

(con θ y σ constantes) que define el paréntesis de Poisson entre dos funciones del espacio fase dado por

$$[f, g]_W \equiv \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z^i} W^{ij} \frac{\partial g}{\partial z^j} = \frac{\partial f}{\partial z^k} w^{ki} \frac{\partial g}{\partial z^i}. \quad (3.2)$$

Para definir la matriz W , sus elementos w^{ij} se identifican mediante la relación que guardan con los resultados de calcular el paréntesis de Poisson entre coordenadas y momentos (2.4). Es decir, si se quiere que $[z^i, z^j]_W = w^{ij}$, éste debe ser el elemento (ij) 'ésimo de la matriz W .

Sea un sistema físico descrito por el Hamiltoniano $H(z^i, t)$. Sus ecuaciones de movimiento se calculan usando el resultado (2.3),

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= [z^1, H]_W = w^{1j} \frac{\partial H}{\partial z^j} = [z^1, z^j]_W \frac{\partial H}{\partial z^j} = \theta \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p_x} \\
 \dot{y} &= [z^2, H]_W = w^{2j} \frac{\partial H}{\partial z^j} = [z^2, z^j]_W \frac{\partial H}{\partial z^j} = -\theta \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \\
 \dot{p}_x &= [z^3, H]_W = w^{3j} \frac{\partial H}{\partial z^j} = [z^3, z^j]_W \frac{\partial H}{\partial z^j} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \sigma \frac{\partial H}{\partial p_y} \\
 \dot{p}_y &= [z^4, H]_W = w^{4j} \frac{\partial H}{\partial z^j} = [z^4, z^j]_W \frac{\partial H}{\partial z^j} = -\frac{\partial H}{\partial y} - \sigma \frac{\partial H}{\partial p_x}.
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

En adelante se omitirá el subíndice W que acompaña al paréntesis de Poisson para recordar la matriz simpléctica que lo define. El paréntesis que se utilizará a partir de ahora será el definido por la matriz (3.1).

Para construir el Lagrangiano No Conmutativo en el espacio fase, definido a partir de un Hamiltoniano y la matriz simpléctica que se propone, se calcula la matriz inversa de (3.1), y se escriben sus elementos en el Lagrangiano de primer orden de acuerdo con la forma (2.7) de la sección 2.2. El Lagrangiano No Conmutativo (LNC) de primer orden es

$$L = \left(\frac{1}{1 - \sigma\theta} \right) (\dot{x}p_x - y\dot{p}_y + \theta\dot{p}_y p_x - \sigma\dot{x}y) - H(x, y, p_x, p_y). \quad (3.4)$$

Dada la forma del término cinético de (3.4) como irremediablemente aparecen los términos $\theta\dot{p}_y p_x$ y $\sigma\dot{x}y$, se deben fijar en las condiciones de borde uno de los momentos y una de las coordenadas (no se pueden fijar sólo las coordenadas o sólo los momentos). Este Lagrangiano es el punto de partida para estudiar la Mecánica Clásica No Conmutativa. Además, será, en la segunda parte de esta tesis, el objeto que se cuantizará para construir una Mecánica Cuántica No Conmutativa mediante la integral funcional de Feynman y el principio de acción de Schwinger.

Introduciendo este Lagrangiano en el principio de Hamilton para el espacio fase de la sección 1.2, se obtienen las ecuaciones de movimiento que de él resultan. Usando el operador de Euler-Lagrange (1.18) sobre el LNC (3.4), las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}
 \alpha(\dot{x} + \theta\dot{p}_y) - \frac{\partial H}{\partial p_x} &= 0 \\
 \alpha(\dot{y} - \theta\dot{p}_x) - \frac{\partial H}{\partial p_y} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(-\dot{p}_x + \sigma \dot{y}) - \frac{\partial H}{\partial x} &= 0 \\ \alpha(-\dot{p}_y - \sigma \dot{x}) - \frac{\partial H}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\quad (3.5)$$

con $\alpha = \frac{1}{1-\theta\sigma}$. Por supuesto, estas ecuaciones coinciden con las calculadas mediante el paréntesis de Poisson (3.3). Las ecuaciones de movimiento para la estructura simpléctica (3.1) regresan a la forma canónica o usual cuando los parámetros no conmutativos se hacen cero (como debe ser, pues si $\theta = \sigma = 0$ la matriz W es la matriz J).

En las referencias [23, 24, 25] se pueden hallar estudios sobre el grupo extendido ("exótico") de simetrías de Galileo asociado a las ecuaciones de movimiento de teorías no conmutativas, donde el parámetro θ , involucrado en la definición del paréntesis de Poisson, modifica las simetrías asociadas a las rotaciones y traslaciones Galileanas.

Tal vez valga la pena ilustrar las modificaciones de las ecuaciones de movimiento con un ejemplo (el más sencillo). El Hamiltoniano $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$, del sistema físico que se llama "partícula libre no conmutativa", da origen a las ecuaciones de movimiento de primer orden

$$\begin{aligned}\alpha(\dot{x} + \theta \dot{p}_y) - \frac{p_x}{m} &= 0 \\ \alpha(\dot{y} - \theta \dot{p}_x) - \frac{p_y}{m} &= 0 \\ -\dot{p}_x + \sigma \dot{y} &= 0 \\ -\dot{p}_y - \sigma \dot{x} &= 0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

De estas se pueden obtener dos de segundo orden para las coordenadas

$$\begin{aligned}m\ddot{x} - \sigma \dot{y} &= 0 \\ m\ddot{y} + \sigma \dot{x} &= 0.\end{aligned}\quad (3.7)$$

No son las de la partícula libre usual (en la que los momentos son constantes de movimiento). Lo que se obtiene por "partícula libre" (usando el Hamiltoniano que es sólo la energía cinética) podrían ser las ecuaciones de una partícula cargada eléctricamente en un campo magnético B constante, donde $B = \frac{e\sigma}{c}$, c la velocidad de la luz, y e la carga eléctrica. Decirle al problema con Hamiltoniano $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$ partícula libre es sólo por darle el mismo nombre que tiene en el caso usual o conmutativo. En la Mecánica Clásica No Conmutativa este Hamiltoniano puede representar a una carga eléctrica en un campo magnético constante [52] representado por el parámetro σ .

Se pueden desacoplar las ecuaciones (3.7) derivando respecto del tiempo la primera y en ésta sustituir la segunda, para obtener

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ddot{x} + \frac{\sigma^2}{m^2}\dot{x} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\ddot{y} + \frac{\sigma^2}{m^2}\dot{y} &= 0.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Con una primera integración de estas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x} + \frac{\sigma^2}{m^2}x &= A_x \\ \dot{y} + \frac{\sigma^2}{m^2}y &= A_y,\end{aligned}\quad (3.9)$$

un sistema de dos ecuaciones de segundo orden inhomogéneo (con A_x y A_y constantes de integración). Una solución particular de este sistema es $(x(t), y(t)) = (\frac{m^2}{\sigma^2}A_x, \frac{m^2}{\sigma^2}A_y)$, y, si la solución general para el sistema homogéneo asociado es

$$\begin{aligned}x(t) &= B_x e^{i\frac{\sigma}{m}t} + C_x e^{-i\frac{\sigma}{m}t} \\ y(t) &= B_y e^{i\frac{\sigma}{m}t} + C_y e^{-i\frac{\sigma}{m}t},\end{aligned}\quad (3.10)$$

la solución general de las ecuaciones (3.9) es

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{m^2}{\sigma^2}A_x + B_x e^{i\frac{\sigma}{m}t} + C_x e^{-i\frac{\sigma}{m}t} \\ y(t) &= \frac{m^2}{\sigma^2}A_y + B_y e^{i\frac{\sigma}{m}t} + C_y e^{-i\frac{\sigma}{m}t}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (3.7) se puede ver que los coeficientes de x y y no son independientes, de hecho $B_y = iB_x$ y $C_y = -iC_x$. Sabiendo esto, y si las condiciones iniciales¹ son

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_x(0) = v_{x0} \\ y(0) &= y_0, \quad \dot{y}(0) = v_y(0) = v_{y0},\end{aligned}\quad (3.12)$$

¹Poner estas condiciones iniciales es consistente con introducir el LNC $L = \frac{\sigma}{2}(\dot{x}p_x - xp_x + \dot{y}p_y - yp_y + \theta\dot{p}_x p_x - \theta\dot{p}_x p_y + \sigma\dot{y}x - \sigma\dot{x}y) - H$ (equivalente a (3.4) por una derivada total) en el cálculo del extremal de acción $S = \int L dt$ cuando se fijan todas las variables del espacio fase en un sólo tiempo (ver pie de página 8), pues en este ejemplo de la partícula libre los momentos son la masa por las velocidades.

entonces las constantes A 's B 's y C 's son

$$\begin{aligned} A_x &= x_0 + \frac{m}{\sigma} v_{y_0} \\ A_y &= y_0 - \frac{m}{\sigma} v_{x_0} \\ B_x &= -\frac{m}{2\sigma} (v_{y_0} + i v_{x_0}) \\ C_x &= -\frac{m}{2\sigma} (v_{y_0} - i v_{x_0}) = \bar{B}_x, \end{aligned} \quad (3.13)$$

y por lo tanto, las soluciones para las coordenadas de la partícula libre son

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x_0 + \frac{m}{\sigma} v_{y_0}\right) + \frac{m}{\sigma} v_{x_0} \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{m} t\right) - \frac{m}{\sigma} v_{y_0} \cos\left(\frac{\sigma}{m} t\right) \\ y(t) &= \left(y_0 - \frac{m}{\sigma} v_{x_0}\right) + \frac{m}{\sigma} v_{x_0} \cos\left(\frac{\sigma}{m} t\right) + \frac{m}{\sigma} v_{y_0} \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{m} t\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora, sustituyendo las dos últimas ecuaciones de (3.6) en las dos primeras, se tiene que $p_x = m\dot{x}$ y $p_y = m\dot{y}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} p_x(t) &= m[v_{x_0} \cos\left(\frac{\sigma}{m} t\right) + v_{y_0} \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{m} t\right)] \\ p_y(t) &= m[-v_{x_0} \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{m} t\right) + v_{y_0} \cos\left(\frac{\sigma}{m} t\right)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Las soluciones para las coordenadas (3.14) y para los momentos (3.15), forman la solución completa de la "partícula libre" en el espacio fase.

Regresando a las ecuaciones de movimiento (3.5), si el Hamiltoniano es del tipo $H = T + V$ (con $T = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2)$), las ecuaciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \alpha(\dot{x} + \theta p_y) - p_x &= 0 \\ \alpha(\dot{y} - \theta p_x) - p_y &= 0 \\ \alpha(-\dot{p}_x + \sigma \dot{y}) - \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \alpha(-\dot{p}_y - \sigma \dot{x}) - \frac{\partial V}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sumando y restando términos apropiados en las dos primeras ecuaciones (que corresponden a las definiciones de los momentos en la transformada de Legendre del caso conmutativo) se obtiene

$$\alpha \dot{x} + \alpha \theta \left(\dot{p}_y + \sigma \dot{x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial y} \right) - p_x - \alpha \theta \left(\sigma \dot{x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0$$

$$\alpha \dot{y} - \alpha \theta \left(\dot{p}_x - \sigma \dot{y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right) - p_y + \alpha \theta \left(-\sigma \dot{y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Derivando estas dos ecuaciones y sumando y restando nuevamente términos apropiados resultan las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \sigma \dot{y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} - \theta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ + \alpha \theta \frac{d}{dt} \left(\dot{p}_y + \sigma \dot{x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \left(-\dot{p}_x + \sigma \dot{y} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0 \\ \ddot{y} + \sigma \dot{x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial y} + \theta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ + \alpha \theta \frac{d}{dt} \left(\dot{p}_x - \sigma \dot{y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \left(-\dot{p}_y - \sigma \dot{x} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Usando el segundo par de ecuaciones del conjunto (3.16) y sus derivadas se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \sigma \dot{y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} - \theta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) &= 0 \\ \ddot{y} + \sigma \dot{x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial y} + \theta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aunque este sistema de ecuaciones de segundo orden involucra solamente a las coordenadas, esta correctamente definido en el espacio fase. Resolver el sistema de ecuaciones (3.18) para hallar las soluciones para las coordenadas y después encontrar las soluciones para los momentos, es encontrar la solución completa en el espacio fase, el movimiento del sistema con Hamiltoniano H .

3.2 Breve exploración en el campo central

$$V(r)$$

En la Mecánica Clásica usual el problema de dos cuerpos en el espacio sujetos a una fuerza entre ellos, es equivalente al problema en el plano de un cuerpo en un campo central, con el origen en el centro de masa de los cuerpos (que se mueve con velocidad constante). Este problema requiere cuatro integraciones o cuadraturas para resolverlo; dos de éstas las proporcionan la energía y el momento angular (cantidades que se conservan para las ecuaciones de movimiento).

En el caso no conmutativo, se podría hacer una primera aproximación al problema del campo central resolviendo las ecuaciones (3.18) de manera análoga al caso conmutativo, para $V = V(r)$. Para hacerlo, como son dos ecuaciones de segundo orden, se requieren de cuatro cuadraturas o integrales, dos de las cuales las proporcionan también la energía y el momento angular no conmutativos (definidos a continuación). Se escribirán las ecuaciones (3.18) en coordenadas polares.

3.2.1 Constantes de las ecuaciones (3.18)

Se puede mostrar, de manera análoga a como se muestra en (1.30) (usando la antisimetría de W), que el Hamiltoniano a partir del cual está definido el Lagrangiano (3.4), es una constante de movimiento (mientras no dependa explícitamente del tiempo).

Cuando el Hamiltoniano tiene la forma $H(x, y, p_x, p_y) = T + V = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$, usando las ecuaciones de movimiento (3.5), H se puede escribir en términos de coordenadas y velocidades como (habiendo tomado la masa $m = 1$)

$$E \equiv H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y) + \theta \left[\frac{\partial V}{\partial x} \dot{y} - \frac{\partial V}{\partial y} \dot{x} \right] + \frac{\theta^2}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (3.19)$$

Dado que esta cantidad es el Hamiltoniano en términos de coordenadas y velocidades, se le llama la "energía" no conmutativa del sistema. Escrita en esta forma, la energía es una constante de las ecuaciones (3.18).

Si $H = T + V$ y además el potencial $V(r)$ del problema es central ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), éste satisface la propiedad

$$y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

y se tiene otra cantidad conservada de las ecuaciones (3.18):

$$l = x\dot{y} - y\dot{x} + \theta \left(x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} - V \right) + \frac{\sigma}{2} (x^2 + y^2). \quad (3.20)$$

Esta cantidad puede calcularse empleando el teorema de Noether usual (expuesto en la subsección 1.1.3), notando que el Hamiltoniano es invariante ante rotaciones (en el espacio fase). Se le llamará "momento angular" no conmutativo.

Quando los parámetros no conmutativos se hacen cero, tanto la energía E como el momento angular l no conmutativos adquieren las formas que tienen la energía y el momento angular usuales.

3.2.2 El problema central

Dado que para las ecuaciones de movimiento (3.18) se cuenta con las constantes (3.19) y (3.20), que se escriben en términos sólo de las coordenadas y las velocidades, se pueden utilizar como dos primeras integrales o cuadraturas para encontrar las soluciones a estas ecuaciones para las coordenadas. Una vez conocidas las soluciones para éstas, se pueden conocer las soluciones para los momentos usando las ecuaciones de movimiento de primer orden.

Si se toman las coordenadas polares r y β

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \beta &= \frac{y}{x}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

la energía y el momento angular E y l para el problema central, donde $V = V(r)$, se escriben en estas coordenadas como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2) + V(r) + \theta \frac{\partial V}{\partial r} r \dot{\beta} + \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 \\ l &= r^2 \dot{\beta} + \theta \left(\frac{\partial V}{\partial r} r - V(r) \right) + \frac{\sigma}{2} r^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Combinando las ecuaciones de movimiento para las coordenadas (3.18), se obtiene en coordenadas polares la ecuación

$$\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial r} - \dot{\beta}(\sigma r + \theta \frac{\partial V}{\partial r}) = 0. \quad (3.23)$$

Las cuadraturas E y l , se pueden utilizar para plantear las dos cuadraturas restantes. A partir de l se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{[l - \theta(\frac{\partial V}{\partial r} r - V) - \frac{\sigma}{2} r^2]}{r^2} \\ \Rightarrow E &= \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{[l - \theta(\frac{\partial V}{\partial r} r - V) - \frac{\sigma}{2} r^2]^2}{r^2} + V(r) \\ &\quad + \theta \frac{\partial V}{\partial r} \frac{[l - \theta(\frac{\partial V}{\partial r} r - V) - \frac{\sigma}{2} r^2]}{r} + \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si al tiempo inicial t_0 se tienen las coordenadas r_0 y β_0 , se puede ver que

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2\{E - V - \frac{1}{2}[\frac{l - \theta(\frac{\partial V}{\partial r}r - V) - \frac{q}{2}r^2]^2 - \theta\frac{\partial V}{\partial r}[\frac{l - \theta(\frac{\partial V}{\partial r}r - V) - \frac{q}{2}r^2] - \frac{\theta^2}{2}(\frac{\partial V}{\partial r})^2\}}}$$

$$\beta = \int_{t_0}^t dt \frac{[l - \theta(\frac{\partial V}{\partial r}r - V) - \frac{q}{2}r^2]}{r^2}. \quad (3.25)$$

La primera integral entregará al tiempo como función de r y las constantes E , l y r_0 . Invertiendo esta dependencia, se sustituye a $r(t, E, l, r_0)$ en la segunda integral para obtener la solución para β en términos del tiempo y todas las constantes: $\beta(t, E, l, r_0, \beta_0)$.

Con las funciones r y β , a partir de

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\beta) \\ y &= r \operatorname{sen}(\beta) \end{aligned} \quad (3.26)$$

se tienen las soluciones para las coordenadas cartesianas, y a partir de éstas se obtienen las soluciones para los momentos. La solución completa al problema del campo central en las variables del espacio fase incluye dar las expresiones tanto para coordenadas y para momentos.

Cabe preguntarse si el problema planteado en esta subsección, es el problema del campo central no conmutativo. Lo es en el sentido de que en el Hamiltoniano del Lagrangiano No Conmutativo (3.4) se introdujo un potencial que depende sólo de la variable r de las coordenadas polares. Mas este problema está inmerso en el espacio fase. No es el problema del campo central en el espacio configuración. Aunque se siga la misma línea de resolución para encontrar la expresión de las coordenadas, que se puede encontrar en los textos usuales como [33], aún se deben dar las soluciones también para los momentos, es decir, dar la solución en el espacio fase completo.

3.2.3 El Oscilador Armónico

El oscilador armónico no conmutativo, entendido como el problema con Hamiltoniano

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (3.27)$$

se puede abordar de manera sencilla en las coordenadas cartesianas.

Las ecuaciones de movimiento de primer orden de este sistema, calculadas de acuerdo con (3.3) o (3.5), son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta\omega^2 y + p_x \\ \dot{y} &= -\theta\omega^2 x + p_y \\ \dot{p}_x &= -\omega^2 x + \sigma p_y \\ \dot{p}_y &= -\omega^2 y - \sigma p_x,\end{aligned}\tag{3.28}$$

con las que se puede armar el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{aligned}\ddot{x} + (1 + \theta^2\omega^2)\omega^2 x - (\theta\omega^2 + \sigma)p_y &= 0 \\ \ddot{y} + (\omega^2 + \sigma^2)p_y - (\theta\omega^2 + \sigma)\omega^2 x &= 0.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Suponiendo que la solución para este sistema de ecuaciones va como

$$\begin{aligned}x(t) &= A_x e^{i\lambda_1 t} + B_x e^{-i\lambda_1 t} + C_x e^{i\lambda_2 t} + D_x e^{-i\lambda_2 t} \\ p_y(t) &= A_{p_y} e^{i\lambda_1 t} + B_{p_y} e^{-i\lambda_1 t} + C_{p_y} e^{i\lambda_2 t} + D_{p_y} e^{-i\lambda_2 t}\end{aligned}\tag{3.30}$$

(con $\lambda_1 \neq \lambda_2$), de acuerdo con las ecuaciones (3.29), sólo cuatro de los coeficientes que acompañan a las exponenciales son independientes; estos se pueden escribir en términos de las condiciones de borde

$$\begin{aligned}x(t') &= x', & x(t'') &= x'' \\ p_y(t') &= p'_y, & p_y(t'') &= p''_y,\end{aligned}\tag{3.31}$$

para dos tiempos $t'' > t'$. Además, resulta que las frecuencias $\lambda_1 \equiv \lambda_+^-$ y $\lambda_2 \equiv \lambda_+^+$ están dadas por dos frecuencias independientes que salen de

$$\lambda_{\pm}^{\pm} = \frac{\mp(\theta\omega^2 + \sigma) \pm \sqrt{(\theta\omega^2 + \sigma)^2 + 4\frac{\omega^2}{\alpha}}}{2},\tag{3.32}$$

donde el subíndice se toma de acuerdo al signo para el radical, y el superíndice de acuerdo al signo que tiene el primer término de (3.32) (Al Lagrangiano (3.4) no le afecta el signo de α , pero las λ 's no serían frecuencias si tuvieran parte imaginaria. Pero esto no sucede porque el número que está dentro del radical en (3.32) es positivo no importa si $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$).

Las soluciones se pueden escribir como

$$x(t) = \rho_1(B'\text{sen}_1'' + B''\text{sen}_1') - \rho_2(A'\text{sen}_2'' + A''\text{sen}_2'),$$

$$p_y(t) = (\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B'\text{sen}_1'' + B''\text{sen}_1'), \\ -(\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A'\text{sen}_2'' + A''\text{sen}_2'), \quad (3.33)$$

donde se ha usado la notación

$$\begin{aligned} B' &= [(\theta\omega^2 + \lambda_2)x' - p_y'], \\ B'' &= [(\theta\omega^2 + \lambda_2)x'' - p_y''], \\ A' &= [(\theta\omega^2 - \lambda_1)x' - p_y'], \\ A'' &= [(\theta\omega^2 - \lambda_1)x'' - p_y''], \\ \text{sen}_i'' &= \text{sen} \lambda_i(t'' - t), \\ \text{cos}_i'' &= \text{cos} \lambda_i(t'' - t), \\ \text{sen}_i' &= \text{sen} \lambda_i(t' - t), \\ \text{cos}_i' &= \text{cos} \lambda_i(t' - t), \\ \rho_1 &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\text{sen}(\lambda_1 T)}, \\ \rho_2 &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\text{sen}(\lambda_2 T)}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

para escribir de manera compacta las soluciones. Empleando la primera y cuarta ecuaciones del sistema (3.28), se pueden escribir las soluciones para el resto de las variables del espacio fase. Éstas son

$$\begin{aligned} y(t) &= -\rho_1(B'\text{cos}_1'' - B''\text{cos}_1') - \rho_2(A'\text{cos}_2'' - A''\text{cos}_2'), \\ p_x(t) &= (\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B'\text{cos}_1'' - B''\text{cos}_1') \\ &\quad + (\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A'\text{cos}_2'' - A''\text{cos}_2'). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Decirle al problema resuelto en esta subsección "oscilador armónico" es para, como en el caso de la partícula libre, nombrar al Hamiltoniano (3.27). Pero, en el caso no conmutativo, este Hamiltoniano podría representar por ejemplo a un oscilador en un campo magnético constante perpendicular al plano que lo contiene (con frecuencia $\omega^2 + (\frac{B}{2})^2$, y $B = \theta\omega^2 + \sigma$). Se dice esto porque las ecuaciones de segundo orden que se obtienen para las coordenadas

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1 - \sigma\theta)\omega^2 x - (\theta\omega^2 + \sigma)\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + (1 - \sigma\theta)\omega^2 y + (\theta\omega^2 + \sigma)\dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

son las de ese sistema [52] (que en el caso conmutativo tiene como Lagrangiano a $L = \frac{1}{2}[(\dot{x} - \frac{B}{2}y)^2 + (\dot{y} + \frac{B}{2}x)^2] - \frac{1}{2}[\omega^2 + (\frac{B}{2})^2](x^2 + y^2)$). Esta

es una interpretación común en referencias recientes sobre el tema acerca del efecto de la no conmutatividad (no sólo en el ámbito clásico, sino también en el cuántico) sobre los sistemas físicos [32, 55, 67].

3.3 Lagrangiano No Conmutativo de segundo orden

3.3.1 EL LNC en el espacio configuración

Para estudiar la dinámica de un sistema no conmutativo en el espacio configuración, se construye el Lagrangiano de segundo orden a partir del de primer orden (3.4) definido en la sección 3.1. Para esto se deben despejar sus variables auxiliares. Tanto en el caso usual como en el no conmutativo, las variables auxiliares del Lagrangiano de primer orden son los momentos conjugados de cada coordenada.

Partiendo del LNC de primer orden

$$L = \alpha(\dot{x}p_x - y\dot{p}_y + \theta\dot{p}_yp_x - \sigma\dot{x}y) - H(x, y, p_x, p_y), \quad (3.37)$$

usando sólo las ecuaciones de movimiento que corresponden a los momentos

$$\begin{aligned} (\delta p_x) \quad \alpha(\dot{x} + \theta\dot{p}_y) - \frac{\partial H}{\partial p_x} &= 0 \\ (\delta p_y) \quad \alpha(\dot{y} - \theta\dot{p}_x) - \frac{\partial H}{\partial p_y} &= 0 \end{aligned}$$

tomadas del conjunto (3.5), se resuelve para éstos en términos del resto de las variables y sus derivadas. Si el Hamiltoniano es del tipo $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$, entonces de las dos ecuaciones anteriores se puede escribir

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha(\dot{x} + \theta\dot{p}_y) \\ p_y &= \alpha(\dot{y} - \theta\dot{p}_x). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Derivando una vez respecto del tiempo la segunda ecuación y sustituyendo esta nueva expresión en la primera se obtiene que

$$p_x = \alpha[\dot{x} + \alpha\theta\dot{y} - \alpha\theta^2\dot{p}_x]; \quad (3.39)$$

tomando la segunda derivada respecto del tiempo de la primera ecuación de (3.38) y sustituyéndola en esta última expresión resulta que

$$p_x = \alpha[\dot{x} + \alpha\theta\dot{y} - \alpha^2\theta^2x^{(3)} - \alpha^2\theta^3p_y^{(3)}]. \quad (3.40)$$

Retomando la segunda ecuación de (3.38), derivándola tres veces y sustituyéndola en la última expresión, se obtiene una ecuación para p_x que involucra a la cuarta derivada respecto del tiempo de p_x . Realizando un procedimiento similar para p_y , con esta sucesión de sustituciones para despejar algebraicamente los momentos en términos del resto de las variables y sus derivadas, se llega a que

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [x^{(2n+1)} + (\alpha\theta)y^{(2n+2)}] \\ p_y &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [y^{(2n+1)} - (\alpha\theta)x^{(2n+2)}] \end{aligned} \quad (3.41)$$

(en los términos de las series, el exponente de las coordenadas denota los órdenes de derivación). Notar que en estas expresiones no aparece el parámetro σ . Si sólo las coordenadas no conmutaran pero los momentos sí, las expresiones para éstos serían las mismas salvo que α sería igual a 1.

Si al Lagrangiano de primer orden (3.37) se le suma la derivada total $-\frac{\alpha\theta}{2} \frac{d(p_x p_y)}{dt}$, utilizando las expresiones (3.38), éste se puede escribir como

$$L = \frac{\alpha}{2} (\dot{x}p_x + \dot{y}p_y) + \alpha\sigma yx - V(x, y) \quad (3.42)$$

(recordando que, con la masa igual a la unidad, $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$). Ahora, sustituyendo en esta expresión para el Lagrangiano la forma de los momentos (3.41), el Lagrangiano No Conmutativo como función de las coordenadas y sus derivadas es

$$\begin{aligned} L &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \dot{x}\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [x^{(2n+1)} + (\alpha\theta)y^{(2n+2)}] \right. \\ &\quad \left. + \dot{y}\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [y^{(2n+1)} - (\alpha\theta)x^{(2n+2)}] \right\} \\ &\quad + \alpha\sigma yx - V(x, y), \end{aligned} \quad (3.43)$$

que no es un Lagrangiano de segundo orden. Sustituir los momentos (3.41) en el Lagrangiano (3.37) introduce una no localidad, entendida como la pre-

sencia de infinitas derivadas respecto al tiempo de las coordenadas en el Lagrangiano (3.43). Esta no localidad tendrá como consecuencias al calcular las ecuaciones de movimiento la necesidad de infinitas condiciones iniciales. Como el procedimiento para obtener el Lagrangiano (3.43) es el mismo que se usa en el caso conmutativo para obtener el Lagrangiano de segundo orden a partir del de primer orden, se le llamará a (3.43) Lagrangiano No Conmutativo en el espacio configuración.

Este es uno de los resultados más notorios de esta tesis: Introducir la no conmutatividad de las coordenadas del espacio fase implica una no localidad del Lagrangiano No Conmutativo como función de las coordenadas y sus derivadas respecto del tiempo. El trabajo del que ha surgido esta tesis aún no ha avanzado en una línea de investigación que plantee cuantizar al LNC en el espacio configuración (3.43), sólo se ha cuantizado el de primer orden (3.37).

Como se observó en la subsección 1.2.2, resolver un problema de derivadas superiores es equivalente a resolver uno de primer orden pero en un número superior de variables. Se podría pensar (si se respondieran a las preguntas del final del párrafo y la subsección mencionados) que resolver un problema de infinitos órdenes de derivación es equivalente a resolver un problema con infinito número de variables (como un cuerpo rígido).

3.3.2 El LNC (3.43) escrito con un "producto- \star "

Los momentos despejados como variables auxiliares (3.41) se pueden re-escribir de la siguiente manera

$$p_x = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [\dot{x} + (\alpha\theta)\dot{y}]$$

$$p_y = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [\dot{y} - (\alpha\theta)\dot{x}].$$

Motivado por la forma de la serie para el inverso de $(1 + a)$

$$\frac{1}{1+a} = (1+a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n, \quad (3.44)$$

el operador que aparece en las expresiones anteriores para los momentos se puede recordar de acuerdo con

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} = [1 + (\alpha\theta)^2 \frac{d^2}{dt^2}]^{-1}, \quad (3.45)$$

de manera que las expresiones (3.44) se escriben como

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha[1 + (\alpha\theta)^2 \frac{d^2}{dt^2}]^{-1}[\dot{x} + (\alpha\theta)\dot{y}] \\ p_y &= \alpha[1 + (\alpha\theta)^2 \frac{d^2}{dt^2}]^{-1}[\dot{y} - (\alpha\theta)\dot{x}]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sea el operador \star definido por

$$\star \equiv \alpha^2[1 + (\alpha\theta)^2 \frac{d^2}{dt^2}]^{-1}. \quad (3.47)$$

Entonces, los momentos (3.44) en términos de este operador son

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{\alpha} \star [\dot{x} + (\alpha\theta)\dot{y}] \\ p_y &= \frac{1}{\alpha} \star [\dot{y} - (\alpha\theta)\dot{x}], \end{aligned} \quad (3.48)$$

y así, el LNC (3.43) se escribe como (sumando la derivada total de $-\frac{\alpha\sigma}{2}xy$)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} \star \dot{x} + \dot{y} \star \dot{y}) + \frac{\alpha\theta}{2}(\dot{x} \star \dot{y} - \dot{y} \star \dot{x}) + \frac{\alpha\sigma}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x, y). \quad (3.49)$$

En esta última expresión para el LNC en el espacio configuración (3.43), la no localidad debida a la no conmutatividad de las coordenadas está contenida en el operador \star , que se lo puede interpretar como un producto (no conmutativo en el sentido que no es lo mismo $a \star b$ que $b \star a$, pero sí asociativo) entre objetos que son derivadas de las coordenadas respecto del tiempo de órdenes mayores o iguales a uno. Esta interpretación reduce la no conmutatividad de las coordenadas a una característica (no local) del producto que se puede definir en los espacios a los que pertenecen las velocidades y las aceleraciones, y es a través de este producto que se ven afectadas las trayectorias del espacio configuración.

Los Lagrangianos no locales en teorías no conmutativas introducen consideraciones que vale la pena mencionar. La primera es de hecho la caracterización que se hizo de lo no local como la necesidad de infinitas condiciones iniciales. Este requerimiento es equivalente a introducir la trayectoria solución $q(t + \lambda)$, para todos los valores de λ , en el principio variacional (los parámetros, t y λ asumen el papel del tiempo, se vuelven como dos "tiempos"), y como consecuencia de esto, las ecuaciones de Euler-Lagrange se convierten en constricciones del problema. Si se insiste en definir la evolución

en el tiempo t para una determinada trayectoria $q(\lambda)$, se deben introducir nuevas variables dinámicas $Q(t, \lambda) = q(t + \lambda)$, para las que t funciona como parámetro de evolución y λ como un parámetro continuo que indica los grados de libertad. La evolución en los "tiempos" de las nuevas coordenadas $Q(t, \lambda)$ es representada por una membrana o sábana. La concepción de partícula deja de tener sentido cuando su estado se debe determinar con más de un "punto", y lo que emerge de esta idea es el concepto de "campo".

Para consultar los detalles sobre este análisis, el formalismo Hamiltoniano para teorías de campo no locales y consideraciones de su cuantización, se puede referir a [34].

Una prueba general de que el Lagrangiano de segundo orden no existe cuando las coordenadas no conmutan se puede encontrar en [45]. Ahí, se manifiesta también que si el Lagrangiano de segundo orden no existe, entonces podría no haber cuantización posible (en el espacio configuración) del problema que representa. La cuantización de la Mecánica Clásica No Conmutativa que se hace en esta tesis, en la segunda parte, considera al LNC de primer orden; una cuantización del LNC en el espacio configuración (3.43) es un problema abierto.

3.3.3 Ecuaciones de movimiento del LNC en el espacio configuración

Para calcular las ecuaciones de movimiento del Lagrangiano (3.43), que depende de infinitas derivadas de las coordenadas respecto del tiempo, se asumirá que tales ecuaciones son los límites de las ecuaciones que se obtienen al aplicar el operador de Euler-Poisson (1.21) a Lagrangianos de órdenes finitos que forman una sucesión que tiene como límite al LNC de segundo orden (3.43).

Se está asumiendo una respuesta afirmativa para la primera de las preguntas formuladas al final de la sección 1.2 (acerca de la existencia del extremo del funcional como el que define el LNC (3.43)), así como que las ecuaciones de movimiento que corresponden a un Lagrangiano que depende de derivadas de orden infinito, son el límite de las ecuaciones que se derivan del operador de Euler-Poisson (1.21) cuando $l \rightarrow \infty$.

De las expresiones (3.41), sean las sumas finitas

$$p_x^k \equiv \alpha \sum_{n=0}^k (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [x^{(2n+1)} + (\alpha\theta)y^{(2n+2)}]$$

$$p_y^k \equiv \alpha \sum_{n=0}^k (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [y^{(2n+1)} - (\alpha\theta)x^{(2n+2)}], \quad (3.50)$$

y las cantidades

$$\begin{aligned} L^k = & \frac{\alpha}{2} \left\{ \dot{x} \alpha \sum_{n=0}^k (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [x^{(2n+1)} + (\alpha\theta)y^{(2n+2)}] \right. \\ & \left. + \dot{y} \alpha \sum_{n=0}^k (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [y^{(2n+1)} - (\alpha\theta)x^{(2n+2)}] \right\} \\ & + \alpha\sigma \dot{y}x - V(x, y) \end{aligned} \quad (3.51)$$

("Lagrangianos de orden k ") para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Claramente, p_x^k , p_y^k y L^k tienden a p_x , p_y y L de (3.43) cuando $k \rightarrow \infty$. Para poder calcular las ecuaciones de movimiento del Lagrangiano L^k , éste debe ser tal que sus derivadas parciales respecto de las derivadas de las coordenadas de orden $2k+2$ sean al menos C^{2k+2} . Esto porque el operador de Euler-Poisson para calcular las ecuaciones de movimiento de L^k es el que llega hasta la $2k+2$ derivada respecto del tiempo (pues p_x^k y p_y^k tienen derivadas de las coordenadas hasta ese orden). Es decir,

$$EP_i^{2k+2} L^k = 0, \quad EP_i^k \equiv \sum_{n=0}^k (-1)^n \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial z^{i(n)}} \right), \quad (3.52)$$

genera las ecuaciones de movimiento de L^k para $i \in \{1, 2\}$, $z^1 = x$ y $z^2 = y$, si $\frac{\partial L^k}{\partial z^{i(2k+2)}} \in C^{2k+2}$. Este requisito se resume a que las mismas coordenadas sean C^{2k+2} (esto porque el término para $n=1$, y sólo este, del operador EP_i^{2k+2} , para $i \in \{1, 2\}$, sobre L^k requiere hacer derivadas respecto del tiempo de $x^{(2k+2)}$ y $y^{(2k+2)}$).

Haciendo los cálculos, las ecuaciones de movimiento para L^k son

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\sigma}{\alpha} \dot{y} + \sum_{n=0}^k (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [x^{(2n+2)} + (\alpha\theta)y^{(2n+3)}] \\ 0 &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\sigma}{\alpha} \dot{x} + \sum_{n=0}^k (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [y^{(2n+2)} - (\alpha\theta)x^{(2n+3)}]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tomando entonces el límite cuando $k \rightarrow \infty$ de estas ecuaciones, se tienen las ecuaciones de movimiento que corresponden al LNC en el espacio configuración (3.43).

$$0 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\sigma}{\alpha} \dot{y} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [x^{(2n+2)} + (\alpha\theta)y^{(2n+3)}]$$

$$0 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\sigma}{\alpha} \dot{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha\theta)^{2n} [y^{(2n+2)} - (\alpha\theta)x^{(2n+3)}]. \quad (3.54)$$

Notar que, como las series que aparecen en (3.54) son precisamente las derivadas de los momentos respecto del tiempo, estas ecuaciones se pueden ver como la segunda ley de Newton ($F = \dot{p}$, con p el momento y F la fuerza) cuando la fuerza viene de un potencial, y hay un momento angular proporcional a σ .

Si $\sigma \rightarrow 0$, no se modifican la estructura de los momentos (dado que este parámetro aparece en las expresiones de estos sólo en α), ni la del LNC en el espacio configuración (sólo desaparece σyx del término cinético). De manera que el caso $\sigma = 0$ no es muy diferente del caso en el que este parámetro es diferente de cero.

Cuando $\theta = 0$, de las expresiones (3.38) se ve que los momentos vuelven a su forma canónica (de la velocidad)

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{x} \\ p_y &= \dot{y}, \end{aligned}$$

y al sustituirlos en el Lagrangiano No Conmutativo de primer orden se obtiene al Lagrangiano como función de las coordenadas y las velocidades

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sigma yx - V(x, y). \quad (3.55)$$

Si se toma $\theta = \sigma = 0$, el Lagrangiano No Conmutativo (3.43) regresa la forma del Lagrangiano usual o conmutativo en el espacio configuración $L = T - V$ (de segundo orden), y se obtienen las ecuaciones de Newton ordinarias que vienen de éste

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \ddot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.3.4 Caso $\sigma \gg 1$

Si σ es muy grande, $|\alpha| = |\frac{1}{1-\sigma\theta}|$ se hace muy pequeño. Tomando en el LNC (3.43) $\sigma \gg 1$ pero tal que $\alpha\sigma$ es constante, se tiene que

$$L \approx \frac{\alpha\sigma}{2} (y\dot{x} - \dot{x}y) - V(x, y), \quad (3.57)$$

pues las series que vienen de la sustitución de los momentos están multiplicadas por $\alpha^2 \ll 1$ (lo que las hace despreciables). El problema dado por este Lagrangiano tiene mucha similitud con el del problema de Landau [58, 75] de una partícula cargada en un campo magnético intenso $B \gg 1$ y un potencial V

$$L_{\text{Landau}} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{B}{2}(\dot{y}x - \dot{x}y) - V(x, y) \approx \frac{B}{2}(\dot{y}x - \dot{x}y) - V(x, y), \quad (3.58)$$

donde la aproximación se hace porque el término del que es responsable el campo magnético domina al cuadrático en las velocidades. De la definición de los momentos (1.4), en este problema $p_x = -\frac{B}{2}y$ y $p_y = -\frac{B}{2}x$, y sucede que se satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} 1 &= [x, p_x] = [x, -\frac{B}{2}y] \\ \Rightarrow [x, y] &= -\frac{2}{B} \quad \text{y} \quad [p_x, p_y] = -\frac{B}{2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Al problema de Landau, podría vérselo como el problema del potencial $V(x, y)$ en coordenadas y momentos no conmutativos (donde $\sigma \gg 1$).

3.3.5 Caso a orden θ lineal

Un manera de abordar el problema con el Lagrangiano (3.43) que da origen a las ecuaciones (3.54), podría ser asumir que θ es pequeña y despreciar los términos acompañados por potencias de θ igual y arriba de dos. Tomando $\sigma = 0$ (para no considerar lo que sucedería con los productos por ejemplo de $\theta\sigma$), si $\theta \ll 1$, entonces las ecuaciones de movimiento (3.54) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} 0 &\approx \frac{\partial V}{\partial x} + \ddot{x} + \theta y^{(3)} \\ 0 &\approx \frac{\partial V}{\partial y} + \ddot{y} - \theta x^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Resolver este par de ecuaciones (de tercer orden) requiere de seis condiciones de borde o iniciales. Entonces, aunque θ sea pequeño, la no localidad deja rastros no como la necesidad de infinitas condiciones iniciales, sino como la insuficiencia de cuatro para un problema en dos dimensiones.

Un tratamiento perturbativo de Lagrangianos que dependen de las derivadas de infinito orden de las coordenadas, se puede encontrar con mucho

detalle en [15]. Para lidiar con los términos de derivadas de alto orden, se hace notar que hay muchas dimensiones del espacio fase que no son accesibles para el régimen de bajas energías. La idea principal es proyectar la estructura simpléctica de todo el espacio fase sobre las dimensiones que sí son accesibles para éste.

Supóngase que el Lagrangiano tiene la forma general

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}q^2 - gV(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots). \quad (3.61)$$

Aunque en el tratamiento exacto todas las $q^{(n)}$ son independientes, en la aproximación a primer orden de g (bajas energías) sólo q y \dot{q} son independientes tomando

$$q^{(n)} \approx \begin{cases} (-m^2)^{\frac{n}{2}} q, & (n \text{ par}) \\ (-m^2)^{\frac{(n-1)}{2}} \dot{q}, & (n \text{ impar}) \end{cases} \quad (3.62)$$

La variación de la acción entrega, además de las ecuaciones de movimiento, los términos de borde

$$[(\dot{q} - g\phi_0)\delta q - g\phi_1\delta\dot{q}]_t^t, \quad (3.63)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2k+1}^{\infty} (-m^2)^k \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-2k-1} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}} \\ \phi_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2k+2}^{\infty} (-m^2)^k \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-2k-2} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Se definen las variables $x = q + g\phi_1$ y $p = \dot{q} - g\phi_0$, tales que el Hamiltoniano $H = (\dot{q} - g\phi_0)\dot{q} + (-g\phi_1)\ddot{q} - L$ resulta

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{m^2}{2}x^2 + g\tilde{V}(x, p), \quad (3.65)$$

con $\tilde{V}(x, p) = V(x, p, -m^2x, \dots)$ (la definición del potencial \tilde{V} depende del orden en la perturbación). El Lagrangiano en las coordenadas x es

$$\tilde{L} = p\dot{x} - H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{m^2}{2}x^2 - g\tilde{V}(x, \dot{x}), \quad (3.66)$$

cuyas ecuaciones de movimiento están de acuerdo con las originales a primer orden en g .

Razonamientos similares se pueden hacer para todos los órdenes en g , obteniendo para cada uno un Lagrangiano que sólo depende de hasta las primeras derivadas respecto del tiempo de sus variables. La cuantización de los Lagrangianos que se obtienen perturbativamente se hace de la manera usual.

3.3.6 Ecuaciones (3.54) vs. (3.18)

Vale la pena comparar las ecuaciones (3.54) con las (3.18) que se tienen para las coordenadas del espacio fase (sección 3.2). En aquel caso, como se mencionó, al resolver ese sistema de ecuaciones se tienen que usar las soluciones de las coordenadas para dar las de los momentos (que no son en general las velocidades), y tomar a las soluciones para estas cuatro funciones como "la solución" del problema.

Es importante recalcar que **encontrar la solución para el sistema (3.18) no significa que se esté resolviendo el problema en el espacio configuración**. En el caso usual o conmutativo, se usa la ecuación para el momento $p_x = \dot{x}$ en $-\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \dot{p}_x$ para obtener que $\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ (la ecuación de Euler-Lagrange). Es lo mismo que despejar al momento como variable auxiliar (ver subsección 1.3.2). Es decir, usando que $p_x = \dot{x}$ en el Lagrangiano de primer orden para el caso conmutativo, se obtiene el Lagrangiano de segundo orden que da origen a la ecuación $\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ usando el operador de Euler-Lagrange. Este procedimiento (despejar a los momentos como variables auxiliares) transporta el problema en el espacio fase al espacio configuración.

En el caso de las dos ecuaciones de segundo orden (3.18) no se están despejando a los momentos como variables auxiliares. Simplemente para obtenerlas se usaron las cuatro ecuaciones de primer orden (3.5). El problema descrito por las ecuaciones (3.18) sigue estando en el espacio fase, y una vez que se tienen las soluciones para las coordenadas, se deben utilizar para dar las soluciones también para los momentos.

En el procedimiento para obtener las ecuaciones (3.18) se puede ver cómo se usan las segundas ecuaciones de (3.16) (que son las ecuaciones que portan la información dinámica), en particular se emplea la derivada de una de estas ecuaciones de movimiento. Este hecho pone en entredicho la relevancia o validez de las ecuaciones de segundo orden resultantes para las coordenadas: derivar una ecuación de movimiento puede estar generando una fuga de información o de su contenido. Una manera de verlo es que el procedimiento

realizado para obtener las ecuaciones (3.18) lleva cuatro ecuaciones de primer orden en dos de segundo, pero el regreso, que parte de las últimas para reproducir las cuatro de primer orden originales, puede tener como resultado detalles de integrabilidad que en el camino de ida no estaban presentes. Esta sutileza en el empleo de las ecuaciones de movimiento no ha sido estudiada por el trabajo que dio origen a esta tesis hasta sus últimas consecuencias.

El procedimiento desarrollado en la subsección 3.3.1, que elimina los momentos como variables auxiliares del Lagrangiano (3.4), es la manera de llevar el problema del espacio fase al espacio configuración, y el resultado es que al despejar los momentos el LNC en el espacio configuración depende de las derivadas de infinito orden de las coordenadas. En la construcción del LNC en el espacio configuración, la solución a las ecuaciones (3.54) para las coordenadas es "la solución", en el sentido que se ha llevado el problema del espacio fase al espacio configuración, y ahí, sólo es pertinente dar las soluciones para las coordenadas.

Tanto en el problema de la "partícula libre" como en el del "oscilador armónico" (sección 3.1 y subsección 3.2.3 respectivamente), las ecuaciones (3.18) que resultan para las coordenadas de cada uno de estos problemas no son las ecuaciones para una partícula y un oscilador en un campo magnético constante (como se mencionó respectivamente) en el espacio configuración. En general, las ecuaciones de segundo orden (para las coordenadas o cualquier par de variables del espacio fase) que se pueden armar con las de primer orden (3.5) siguen siendo ecuaciones para las variables del espacio fase.

3.4 Transformando las variables no conmutativas

Dado que existen varias definiciones y resultados establecidos para un sistema de coordenadas y momentos ligado a la matriz simpléctica usual, para aprovechar tales definiciones en el caso de la Mecánica Cuántica No Conmutativa se plantea transformar el conjunto de variables no conmutativas del espacio fase a uno de variables conmutativas.

Por ejemplo, la definición de las variables ángulo-acción (expuesta en el apéndice B) parte de una transformación canónica de las variables conmutativas del espacio fase. Transformando las variables no conmutativas a conmutativas, y luego éstas a variables ángulo-acción, es un camino para definir

estas variables para problemas no conmutativos.

Se busca entonces una transformación de las variables no conmutativas que de origen a un sistema de coordenadas y momentos para el que la matriz simpléctica tenga la forma

$$J = (\alpha^{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El que una transformación tal se puede encontrar está garantizado por el teorema de Darboux, como se expone en la sección 2.3.

La equivalencia entre los problemas que se tienen en cada conjunto de variables (no conmutativas y conmutativas) ha sido expuesta en la sección 2.4. Como las ecuaciones de movimiento en uno y otro sistemas de coordenadas están relacionadas por el Jacobiano de la transformación de variables (como se explica en la sección 2.4), una solución para un conjunto de ecuaciones, da la solución para el otro mediante la transformación de variables.

3.4.1 Una transformación que hace conmutativas a las variables del espacio fase

De la relación $w_{ji} = \Omega(e_i, e_j)$, que define a los elementos de la matriz inversa de la simpléctica, y una base para el espacio fase $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, 2n\}}$ tal que para z ahí, $z = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{2n} z^i e_i$, la dos-forma que da origen a la matriz inversa de la matriz simpléctica (3.1) es

$$\Omega^{NC} = \sum_{i=1}^2 (dx^i \wedge dp_i) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\theta}{2} \epsilon^{ij} (dx^i \wedge dx^j) + \frac{\sigma}{2} \epsilon^{i+2, j+2} (dp_i \wedge dp_j), \quad (3.67)$$

con ϵ^{ij} el tensor totalmente antisimétrico de dos dimensiones y $\epsilon^{12} = 1$. La transformación de variables que entrega un sistema de coordenadas x'^i y momentos p'_i en términos del cual la dos-forma que da origen a la matriz simpléctica canónica sea

$$\Omega = \sum_{i=1}^2 dx'^i \wedge dp'_i, \quad (3.68)$$

se puede averiguar de la forma del término cinético en el LNC de primer orden (3.4).

De acuerdo con la relación $\frac{\partial l_i}{\partial z_i'} - \frac{\partial l_i}{\partial z_j'} = w_{ji}'$ entre las funciones l_i del Lagrangiano de primer orden (2.5), y los elementos w_{ij}' de la matriz inversa a la matriz simpléctica, para que el Lagrangiano de primer orden tenga la forma canónica o usual (1.31) que depende de variables conmutativas, hace falta que el término $\frac{1}{2} w_{ij} z^i z^j$ del LNC para la matriz W de (3.1) se transforme en el término $(x'p_x' + y'p_y')$ para el Lagrangiano de primer orden como función de las nuevas variables.

La transformación $z' = Az$, con A una matriz constante dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha\sigma & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

(con $\alpha = \frac{1}{1-\theta\sigma}$), hace que el LNC (3.4) se transforme en

$$L = \dot{x}'p_x' + \dot{y}'p_y' - H(x' - \theta p_y', y', p_x', p_y' - \sigma x'). \quad (3.70)$$

Aplicando la relación $\frac{\partial l_i}{\partial z_i'} - \frac{\partial l_i}{\partial z_j'} = w_{ji}'$ a las funciones $l_1 = p_x'$, $l_2 = p_y'$, $l_3 = 0$ y $l_4 = 0$ (que aparecen en el Lagrangiano de primer orden (3.70)), se ve que las variables de las que depende ahora el Lagrangiano son conmutativas (pues de (2.4), para la matriz simpléctica nueva W' , sus elementos se identifican con la relación $w'^{ij} = [z'^i, z'^j]_{W'}$).

Las ecuaciones de movimiento análogas a las ecuaciones (3.5) para el LNC (3.70) (con $H(z') = H(z(z'))$)

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \frac{\partial H(z')}{\partial p_x'} \\ \dot{y}' &= \frac{\partial H(z')}{\partial p_y'} \\ \dot{p}_x' &= -\frac{\partial H(z')}{\partial x'} \\ \dot{p}_y' &= -\frac{\partial H(z')}{\partial y'}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

son las ecuaciones de movimiento canónicas para el espacio fase.

Como se menciona al final de la sección 2.3, por hacer el cambio de variables dado por la matriz A no se está cambiando de problema. El Hamiltoniano como función de las variables conmutativas corresponde al mismo problema. De acuerdo al sistema físico que se trate, el Hamiltoniano después de la transformación de variables puede no verse fácil de abordar, aunque en las otras variables sí lo sea. Por ejemplo, el Hamiltoniano del oscilador armónico, después de la transformación de variables, tiene la misma estructura en las variables conmutativas pero con la masa y la frecuencia reparametrizadas (aún constantes). Sin embargo, en el caso del potencial de Kepler el Hamiltoniano que resulta después de la transformación se ve mucho más complicado por el término que va originalmente como $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (los nuevos momentos van a aparecer en el denominador). Este hecho se va a propagar en una complicación desagradable de las ecuaciones de movimiento que se obtengan para las variables conmutativas (del problema de Kepler).

En el caso en que $\sigma = 0$, el Lagrangiano No Conmutativo (3.4) es equivalente mediante la derivada total $-\frac{d}{dt} \frac{\partial(p_y p_x)}{dt}$ al Lagrangiano

$$\begin{aligned} L &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \frac{1}{2}\theta(\dot{p}_y p_x - \dot{p}_x p_y) - H(x, y, p_x, p_y; t) \\ &= \frac{d}{dt}(x + \frac{1}{2}\theta p_y)p_x + \frac{d}{dt}(y - \frac{1}{2}\theta p_x)p_y - H. \end{aligned} \quad (3.72)$$

En este caso, la transformación de coordenadas que cambia al paréntesis de Poisson por el usual es

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{1}{2}\theta p_y \\ y' &= y - \frac{1}{2}\theta p_x \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y, \end{aligned} \quad (3.73)$$

transformando al Lagrangiano (3.72) en

$$L = \dot{x}'p'_x + \dot{y}'p'_y - H(x' - \frac{1}{2}\theta p'_y, y' + \frac{1}{2}\theta p'_x, p'_x, p'_y). \quad (3.74)$$

Las ecuaciones de movimiento para el LNC (3.74) están dadas también por el conjunto (3.71), sólo que en este caso la transformación que lleva a las variables conmutativas es diferente de la que se usa en el caso en que $\sigma \neq 0$,

y por lo tanto el aspecto del Hamiltoniano (para el mismo sistema físico) también es diferente.

Las expresiones (3.70) y (3.74) representan uno de los resultados más importantes de esta tesis. Con ellos se podrían abordar problemas no conmutativos en coordenadas que conmutan cuando sea necesario emplear definiciones que no están planteadas para coordenadas no conmutativas.

De los resultados (3.70) y (3.74) se concluye que una manera de abordar los problemas en el contexto no conmutativo a partir de un Lagrangiano No Conmutativo (3.4) es transformar las variables para obtener un conjunto de variables conmutativas, pagando a cambio una traslación en el Hamiltoniano. En cada caso o sistema físico se debe determinar la conveniencia de la transformación de las variables de acuerdo a lo complicado que pueda resultar la nueva expresión para el Hamiltoniano (y la forma de las nuevas ecuaciones de movimiento) comparada con la del Hamiltoniano en variables no conmutativas.

Si en un problema con un Hamiltoniano dado se establece la conveniencia de transformar las variables en conmutativas, las ecuaciones de movimiento que se deben resolver son las canónicas dadas por (3.71), con el Hamiltoniano trasladado según el caso (si σ es igual o distinta de cero). A partir los Lagrangianos (3.70) o (3.74) se va a poder construir el Lagrangiano de segundo orden (para el nuevo espacio configuración), despejando los momentos como variables auxiliares de sus propias ecuaciones de movimiento, es decir, de las primeras dos de (3.71)

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \frac{\partial H}{\partial p'_x} \\ \dot{y}' &= \frac{\partial H}{\partial p'_y}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

si la forma del potencial lo permite. Esto porque, con la traslación que se hace del Hamiltoniano cuando se transforman las variables no conmutativas en conmutativas, el potencial va a ser una función de los momentos como $V(x' - \theta p'_y, y')$ en el caso en que $\sigma \neq 0$, y una como $V(x' - \frac{1}{2}\theta p'_y, y' + \frac{1}{2}\theta p'_x)$ en el caso en que $\sigma = 0$ (de acuerdo con las transformaciones de variables que se sugirieron).

Sin embargo, el Lagrangiano de segundo orden que se construya (en el caso que se pueda) para un caso particular en variables conmutativas, será un Lagrangiano aún en el espacio fase de las variables no conmutativas (pues

al menos una de las nuevas coordenadas es función de la corespondiente co-ordenada y un momento no conmutativos). Como se está considerando que estas variables son las originales y adecuadas para el espacio fase, las soluciones para el movimiento del problema físico que se trate debieran referirse a estas variables.

En [23, 24], donde se habla del grupo extendido de simetrías de Galileo para teorías no conmutativas, se presentan también transformaciones de variables del espacio fase que resultan en coordenadas y momentos canónicos, que, al cuantizarlos, representan las relaciones usuales bajo el conmutador cuántico.

3.4.2 La equivalencia de las soluciones antes y después de la transformación de variables (que lleva las no conmutativas a conmutativas)

Una simetría es una transformación de las variables de una variedad en sí misma tal que el espacio de soluciones de las ecuaciones de movimiento es invariante bajo la misma. El tipo de transformación que se ha aplicado a las variables no conmutativas en esta sección no es una simetría, es una redefinición de variables; es una transformación que va de un espacio fase a otro, llevando las soluciones o líneas de mundo de un problema en el primero a las soluciones para el mismo problema en el segundo. En el proceso, el Hamiltoniano, las ecuaciones de movimiento y las soluciones cambian de aspecto, mas siguen representando al movimiento del mismo sistema físico pero en dos espacios distintos. En este sentido es que las soluciones sean equivalentes: se puede ir de la solución en un espacio a la solución en el otro mediante la transformación o redefinición de variables.

En la segunda parte de esta tesis se sugieren dos formas de cuantización de la Mecánica Clásica No Conmutativa. Una de ellas, la del principio de acción de Schwinger, emplea de manera fundamental al Lagrangiano de primer orden (3.4). Una cuestión que debe plantearse necesariamente es la relación entre las Mecánicas Cuánticas No Conmutativas que se obtienen mediante la cuantización de los Lagrangianos (3.4) y (3.70) (o (3.74)).

La Mecánica Clásica No Conmutativa se formuló en variables no conmutativas a través de la matriz simpléctica (3.1). Transformando estas variables a un conjunto de coordenadas y momentos conmutativos no ha producido que desaparezca la no conmutatividad; sólo se ha construído un cambio de

variables a unas que tienen ciertas ventajas para la construcción de algunas definiciones. La Mecánica Clásica No Conmutativa, tratada con el Lagrangiano (3.70) (o (3.74)) en variables conmutativas, no deja de ser No Conmutativa. Es decir, se ha asumido (o supuesto) que las variables originales o adecuadas para la teoría clásica son las no conmutativas, y una redefinición de éstas no cambia su carácter fundamental.

La pregunta de si son equivalentes (o de cual es la relación entre) las teorías que se obtienen cuantizando el LNC (3.4) y el (3.70) (o el (3.74)) es un problema abierto.

3.5 Algunos sistemas tratados transformando la variables no conmutativas a conmutativas

Para discutir lo que hacen las transformaciones que hacen conmutativas las variables no conmutativas, se aplica esta técnica a dos sencillos ejemplos. El primero es el Hamiltoniano del "oscilador armónico", y el segundo es el cálculo del ángulo de Hannay para un péndulo de Foucault (cuyo concepto se expone en el apéndice B).

3.5.1 El Oscilador Armónico

Se tiene al LNC de primer orden (3.70)

$$L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - H(x - \theta p_y, y, p_x, p_y - \sigma x), \quad (3.76)$$

que viene de la transformación de variables no conmutativas en conmutativas (por comodidad en la notación se escribirá que las variables no conmutativas son las que tienen barras y las nuevas, conmutativas, las que no)

$$\begin{aligned} x &= \alpha(\bar{x} + \theta\bar{p}_y), \\ y &= \bar{y}, \\ p_x &= \bar{p}_x, \\ p_y &= \alpha(\bar{p}_y + \sigma\bar{x}). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Las ecuaciones de movimiento de primer orden para el Hamiltoniano del oscilador armónico ($H = \frac{1}{2}(\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$) escrito en las variables

conmutativas $H = \frac{1}{2}[p_x^2 + (1 + \theta^2 \omega^2)p_y^2] + \frac{1}{2}[(\omega^2 + \sigma^2)x^2 + \omega^2 y^2] - (\theta \omega^2 + \sigma)x p_y$, de acuerdo con (3.71) son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x, \\ \dot{y} &= (1 + \theta^2 \omega^2)p_y - (\theta \omega^2 + \sigma)x, \\ \dot{p}_x &= -(\omega^2 + \sigma^2)x + (\theta \omega^2 + \sigma)p_y, \\ \dot{p}_y &= -\omega^2 y.\end{aligned}\tag{3.78}$$

Para resolver este sistema de cuatro ecuaciones de primer orden (que requiere cuatro condiciones de frontera) se puede pasar al siguiente sistema de dos ecuaciones de segundo orden (que también requiere cuatro condiciones de frontera)

$$\begin{aligned}\ddot{x} + (\omega^2 + \sigma^2)x - (\theta \omega^2 + \sigma)p_y &= 0 \\ \ddot{p}_y + \omega^2(1 + \theta^2 \omega^2)p_y - \omega^2(\theta \omega^2 + \sigma)x &= 0.\end{aligned}\tag{3.79}$$

Se puede resolver este problema como se hizo para el oscilador armónico en variables no conmutativas en la sección 3.2. Se suponen soluciones de la forma

$$\begin{aligned}x(t) &= A_x e^{i\nu_1 t} + B_x e^{-i\nu_1 t} + C_x e^{i\nu_2 t} + D_x e^{-i\nu_2 t} \\ p_y(t) &= A_{p_y} e^{i\nu_1 t} + B_{p_y} e^{-i\nu_1 t} + C_{p_y} e^{i\nu_2 t} + D_{p_y} e^{-i\nu_2 t}\end{aligned}\tag{3.80}$$

(para $\nu_1 \neq \nu_2$). Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (3.79) se obtiene que cuatro de los ocho coeficientes son independientes, además de que los valores de las frecuencias son precisamente los dados por (3.32) con $\nu_1 = \lambda_1 = \lambda_1^-$ y $\nu_2 = \lambda_2 = \lambda_2^+$. Tomando como condiciones de borde dos valores de estas funciones para dos tiempos dados t' y $t'' (> t')$: $x(t') = x'$, $x(t'') = x''$, $p_y(t') = p_y'$ y $p_y(t'') = p_y''$, en términos de los cuales se pueden escribir los cuatro coeficientes independientes de (3.80), se tiene el resultado final para la solución en el espacio fase del oscilador armónico en variables conmutativas

$$\begin{aligned}x(t) &= \left(\frac{-1}{(\Omega_1 - \Omega_2)\text{sen}(\nu_1 T)}\right)[(\Omega_2 x' + p_y')\text{sen}'_1 + (\Omega_2 x'' + p_y'')\text{sen}'_1] \\ &\quad + \left(\frac{1}{(\Omega_1 - \Omega_2)\text{sen}(\nu_2 T)}\right)[(\Omega_1 x' + p_y')\text{sen}''_2 + (\Omega_1 x'' + p_y'')\text{sen}''_2], \\ p_y(t) &= \left(\frac{\Omega_1}{(\Omega_1 - \Omega_2)\text{sen}(\nu_1 T)}\right)[(\Omega_2 x' + p_y')\text{sen}'_1 + (\Omega_2 x'' + p_y'')\text{sen}'_1] \\ &\quad + \left(\frac{-\Omega_2}{(\Omega_1 - \Omega_2)\text{sen}(\nu_2 T)}\right)[(\Omega_1 x' + p_y')\text{sen}''_2 + (\Omega_1 x'' + p_y'')\text{sen}''_2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left(\frac{\Omega_1 \frac{\nu_1}{\omega^2}}{(\Omega_1 - \Omega_2) \text{sen}(\nu_1 T)} \right) [(\Omega_2 x' + p'_y) \cos'' - (\Omega_2 x'' + p''_y) \cos'_1] \\
&\quad + \left(\frac{-\Omega_2 \frac{\nu_2}{\omega^2}}{(\Omega_1 - \Omega_2) \text{sen}(\nu_2 T)} \right) [(\Omega_1 x' + p'_y) \cos'' - (\Omega_1 x'' + p''_y) \cos'_2], \\
p_x(t) &= \left(\frac{\nu_1}{(\Omega_1 - \Omega_2) \text{sen}(\nu_1 T)} \right) [(\Omega_2 x' + p'_y) \cos'' - (\Omega_2 x'' + p''_y) \cos'_1] \\
&\quad + \left(\frac{-\nu_2}{(\Omega_1 - \Omega_2) \text{sen}(\nu_2 T)} \right) [(\Omega_1 x' + p'_y) \cos'' - (\Omega_1 x'' + p''_y) \cos'_2] \quad (3.81)
\end{aligned}$$

(se ha empleado la notación (3.34) que está al final del problema del oscilador armónico de la sección 3.2 para reducir la extensión de las expresiones) con

$$\Omega_i = \frac{\nu_i^2 - (\omega^2 + \sigma^2)}{(\theta\omega^2 + \sigma)} = \frac{\omega^2(\theta\omega^2 + \sigma)}{\nu_i^2 - \omega^2(1 + \theta^2\omega^2)} \text{ constantes.}$$

Reconociendo las siguientes relaciones entre Ω_i y las frecuencias $\nu_i = \lambda_i$ (de (3.32)) para $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{\omega^2(\theta\omega^2 + \sigma)}{(\lambda_1 - \theta\omega^2)(\lambda_1 - \lambda_2)} \\
\Omega_2 &= \frac{\omega^2(\theta\omega^2 + \sigma)}{(\lambda_2 + \theta\omega^2)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (3.82)
\end{aligned}$$

además de las identidades

$$\begin{aligned}
\Omega_1 - \Omega_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\
1 + \theta\Omega_1 &= \frac{\lambda_1}{\omega^2}(\lambda_2 + \theta\omega^2) \\
1 + \theta\Omega_2 &= \frac{\lambda_2}{\omega^2}(\lambda_1 - \theta\omega^2) \\
\Omega_1 + \sigma &= \lambda_1 \\
\Omega_2 + \sigma &= -\lambda_2 \\
\Rightarrow \\
\frac{\Omega_1 + \sigma}{1 + \theta\Omega_1} &= (\lambda_1 - \theta\omega^2) \\
\frac{\Omega_2 + \sigma}{1 + \theta\Omega_2} &= -(\lambda_2 + \theta\omega^2), \quad (3.83)
\end{aligned}$$

al aplicar a las soluciones (3.81) la transformación inversa que regresa las coordenadas no conmutativas (identificando las relaciones entre las condiciones de borde), se obtienen para éstas precisamente las soluciones dadas por (3.33) y (3.35). Las soluciones para los dos conjuntos de variables son distintas, pero se mapean unas en otras a través de la transformación que hace conmutativas a las variables y su inversa. La equivalencia de los dos problemas, el del Hamiltoniano H en variables no conmutativas y el del Hamiltoniano "trasladado" en coordenadas y momentos que conmutan, está dada por este hecho.

3.5.2 El ángulo de Hannay del péndulo de Foucault

Se trabajará este ejemplo en el caso en que sólo las coordenadas no conmutan (tomando $\sigma = 0$).

El teorema adiabático establece que la variable de acción es un invariante de procesos que dependen de parámetros que cambian lentamente (ver apéndice B).

Se presenta el péndulo de Foucault, aproximado por un oscilador armónico en el campo central, desde el sistema de referencia de la Tierra, y se calcula el ángulo de Hannay que este sistema presenta al rotar la Tierra en el caso no conmutativo. Para hacerlo, las coordenadas cartesianas que se empleen deben ser conmutativas; esto para poder usar el teorema adiabático como se conoce. A partir de las cartesianas conmutativas se calcularán las variables ángulo-acción que se usan para obtener el ángulo de Hannay.

En [49] se puede ver el Hamiltoniano del péndulo de Foucault sobre la superficie de la Tierra, que gira con una velocidad angular Ω , aproximado por un oscilador armónico de masa m y de frecuencia ω (a una latitud α):

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2}(\Omega^2 + \omega^2)(x'^2 + y'^2) + \Omega(\alpha)(p_y'x' - p_x'y'). \quad (3.84)$$

Tomando el Lagrangiano (3.74) para este Hamiltoniano, éste se traslada al hacer la transformación de variables no conmutativas por conmutativas

$$\begin{aligned} x &= x' + \frac{1}{2}\theta p_y' \\ y &= y' - \frac{1}{2}\theta p_x' \\ p_x &= p_x' \\ p_y &= p_y' \end{aligned} \quad (3.85)$$

(como en el caso del oscilador armónico, las variables conmutativas son las que no están primadas) de acuerdo con

$$H = \frac{1}{2m'}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2}(\Omega^2 + \omega^2)(x^2 + y^2) + \Omega'(p_yx - p_xy), \quad (3.86)$$

tal que

$$\frac{1}{m'} = \frac{1}{m} + \frac{m\theta^2(\Omega^2 + \omega^2)}{4} - \theta\Omega$$

$$\Omega' = \Omega - \frac{m\theta(\Omega^2 + \omega^2)}{2}. \quad (3.87)$$

El Hamiltoniano que resulta es el mismo en su estructura; sólo fueron redefinidos algunos parámetros. Las ecuaciones que se derivan de este Hamiltoniano para las variables conmutativas son las canónicas. De alguna manera se podría decir que el problema No Conmutativo que representa el Hamiltoniano (3.84) es el del péndulo de Foucault sobre la superficie de la Tierra, pues éste Hamiltoniano en la estructura simpléctica canónica o usual representa ese problema. No debe olvidarse que las variables que aquí son "coordenadas" conmutativas, son mezcla de coordenadas no conmutativas y sus momentos conjugados. No se ha salido del espacio fase, pero esto no es ningún problema pues los resultados que se presentan son precisamente para las variables de este espacio.

El Hamiltoniano (3.86) en coordenadas polares ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\beta = \arctan \frac{y}{x}$) se escribe

$$E := H(r, p_r, p_\beta) = \frac{p_r^2}{2m'} + \frac{p_\beta^2}{2m'r^2} + \frac{m}{2}(\Omega^2 + \omega^2)r^2 + \Omega' p_\beta. \quad (3.88)$$

La coordenada β es cíclica, y por lo tanto p_β es una cantidad conservada. Se toma a esta constante como una de las variables de acción de acuerdo a la definición

$$J_\beta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\beta d\beta = p_\beta, \quad (3.89)$$

que sustituida en (3.88) se puede usar para resolver p_r como

$$p_r = \sqrt{-mm'(\Omega^2 + \omega^2)r^2 + 2m'(E - \Omega' J_\beta) - \frac{J_\beta^2}{r^2}}.$$

La variable de acción para el radio está dada por

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{-mm'\omega_0^2 r^2 + 2m'(E - \Omega' J_\beta) - \frac{J_\beta^2}{r^2}} dr, \end{aligned} \quad (3.90)$$

con $\omega_0^2 := \Omega^2 + \omega^2$. Llevando la integración al plano complejo alrededor de las raíces del radical, resulta que

$$J_r = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{m}} \right) \left(\frac{E - \Omega' J_\beta}{\omega_0} \right) - |J_\beta| \right]. \quad (3.91)$$

Ahora, el Hamiltoniano en términos de las constantes del problema se ve así:

$$H = E = \Omega' J_\beta + \left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m'}}\right)\omega_0(2J_r + |J_\beta|), \quad (3.92)$$

del cual, por ecuaciones de movimiento se tiene que

$$\dot{\phi}_r = \frac{\partial H}{\partial J_r} = 2\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m'}}\right)\omega_0.$$

De la ecuación (83) del apéndice B, se ve que para este caso $\delta\dot{\phi}_r=0$, y por consiguiente de la fórmula (85) del mismo se concluye que no hay ángulo de Hannay asociado a la variable ϕ_r , como sucede también en el caso ordinario o conmutativo. Lo que sí se obtiene diferente es un cambio en la frecuencia asociado a la reparametrización del Hamiltoniano que introduce la no conmutatividad de las coordenadas. Esta nueva frecuencia es $\sqrt{\frac{m}{m'}}$ veces ω_0 (la del caso usual). Para que la frecuencia sea un número real, debe pasar que $\theta > \frac{1}{m\Omega}$, es decir, para que la frecuencia asociada a la variable angular del radio tenga el sentido estricto de "frecuencia" para el movimiento periódico (como lo es el péndulo de Foucault en la superficie de la Tierra), hay una cota inferior (en función de la masa) para el parámetro no conmutativo θ .

En el otro ángulo se presenta una fase extra a la ordinaria. Como

$$\dot{\phi}_\beta = \frac{\partial H}{\partial J_\beta} = \pm\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m'}}\right)\omega_0 + \Omega',$$

de acuerdo con (83) del apéndice B, $\delta\dot{\phi}_\beta = \Omega'$, y por lo tanto, de (85) del mismo,

$$\begin{aligned} \delta\phi_\beta &= \int_0^T \Omega' dt = \int_0^T \left(\Omega - \frac{m\theta}{2}\omega_0^2\right) dt \\ &= \left(\Omega - \frac{m\theta}{2}\omega_0^2\right)T = \Omega T - \frac{m\theta}{2}\omega_0^2 T \\ &= \frac{2\pi}{\text{dia}} \text{sen}(\alpha)T - \frac{m\theta}{2}\omega_0^2 T \\ &= (AH_{\text{tipico}}) - \frac{m\theta}{2}\omega_0^2 T, \end{aligned} \quad (3.93)$$

para el ángulo ϕ_β se presenta una fase o ángulo de Hannay extra debido a que θ no es cero.

PARTE II
Mecánica Cuántica No Conmutativa

"I have often thought that if physics has been developed on thousands of planets throughout our universe, then those planets can be sorted into eight classes according to which of the three great ideas -general relativity, supersymmetry and Yang-Mills theory- predate string theory and which are regarded as consequences of it. We happen to live on a planet of type +-+."

Edward Witten

Existe un reciente interés para plantear una Mecánica Cuántica en la que las coordenadas y momentos no conmuten entre sí [1, 16, 31, 32, 55], motivado entre otras cosas por el hecho de que aparecen coordenadas no conmutativas en campos contenidos en D-branas (como se menciona en la Introducción de esta tesis).

La Mecánica Cuántica no relativista (ordinariamente) ya es no conmutativa desde que no todos los operadores que se emplean en ella conmutan entre sí (operadores que actúan sobre espacios de Hilbert, cuyos elementos son los estados que caracterizan a los sistemas físicos). Por Mecánica Cuántica No Conmutativa se entiende una Mecánica Cuántica para el plano cuyas coordenadas y momentos (los operadores que los representan) satisfacen las relaciones $[x, y] = i\theta$ y $[p_x, p_y] = i\sigma$ respectivamente, con $[A, B] = AB - BA$ el conmutador cuántico entre operadores.

Para formular la Mecánica Cuántica No Conmutativa, en el capítulo 4 de esta segunda parte, se cuantiza la Mecánica Clásica No Conmutativa preparada en la primera parte. La primera construcción (sección 4.1) se hace a partir de la manera de trasladar las variables que definen un sistema ortonormal y completo común a dos operadores que conmutan (o representación) para un espacio de Hilbert; las relaciones de conmutación entre los operadores asociados a las variables del espacio fase se utilizan directamente como ingredientes principales. Se calcula el propagador entre dos estados a tiempos distintos, y con éste se deduce la ecuación de Schrödinger que dicta la dinámica de la función de onda (que por definición es amplitud de probabilidad, pero no función de las coordenadas, por la imposibilidad de construir una representación exclusivamente para éstas). La segunda formulación que se hace (sección 4.2) utiliza el LNC de primer orden dado por (3.4) en el principio de acción de Schwinger.

Se plantean las cuantizaciones mencionadas y no la canónica que manda el paréntesis de Poisson clásico al conmutador cuántico, a las coorde-

nadas a sus operadores típicos (que sólo "multiplican"), los momentos a las derivadas parciales, y define la ecuación de Schrödinger como la que determina la dinámica de la función de onda, porque esta cuantización requiere de una representación de coordenadas o de momentos, cosa que no se puede construir cuando ni las coordenadas ni los momentos conmutan entre sí. Es necesario partir de un punto previo (la forma de las traslaciones en el espacio de definición) para averiguar cómo van a actuar los operadores asociados a las variables del espacio fase, y sobre qué van a actuar (quiénes van a ser las "funciones de onda").

Se presenta en el capítulo 5 el cálculo del propagador, en la Mecánica Cuántica No Conmutativa, para el oscilador armónico de dos maneras (entendiendo por este sistema al Hamiltoniano conocido que lo representa en la Mecánica Cuántica usual); a través de la integral funcional y del principio de acción de Schwinger.

En el capítulo 6 se expone una forma de cuantización mediante "deformaciones" de álgebras, en la que se sustituyen los productos ordinarios por productos estrella, o de Moyal. En trabajos recientes se ha intentado introducir la no conmutatividad mediante esta forma de cuantización [55], definiendo un producto estrella particular que contiene al parámetro no conmutativo θ . En la segunda sección del capítulo 6 se plantea como perspectiva construir la Mecánica Cuántica No Conmutativa (en el contexto de deformaciones de álgebras) desde un punto de vista un tanto diferente al que se encuentra en la literatura. Se propone hacer la deformación debida a los parámetros θ y σ en el mismo producto estrella que contiene las deformaciones debidas a \hbar .

Capítulo 4

Dos cuantizaciones: la Integral Funcional y el Principio de Acción

En este capítulo se aborda la construcción de una Mecánica Cuántica en dos dimensiones para la que ni los operadores asociados a las coordenadas ni los de los momentos conmuten entre sí. Se emplean dos formas de cuantización, que son contemporáneas, en las que el objetivo es calcular el propagador entre dos estados a tiempos distintos: la de la integral funcional, desarrollada originalmente por Feynman y ampliamente utilizada en teorías de campo, y la formulación menos utilizada a través del principio de acción de Schwinger. En el capítulo 5 se abordará el problema de calcular el propagador del oscilador armónico utilizando ambas técnicas.

4.1 La Integral Funcional

La integral funcional conecta dos estados a tiempos distintos. Esta integral representa la amplitud de transición entre esos estados, lo cual la hace el propagador para la función de onda del sistema en cuestión, que, integrado sobre las variables del espacio de definición para un tiempo particular, permite construir el estado del sistema para cualquier tiempo deseado.

Se sigue una manera típica de construcción del propagador: se supone que el estado de un sistema para un tiempo determinado t es igual al operador de evolución $U = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$ aplicado sobre el estado que describe al sistema al

tiempo inicial t_0 (el operador \hat{H} es la cuantización del Hamiltoniano clásico para el problema que se trate); después se emplean la expansión del operador unidad en una representación y la fórmula de los cambios de base para calcular las amplitudes de transición entre dos estados separados infinitesimalmente en el tiempo. Una exposición detallada del proceso de construcción de la integral funcional puede hallarse en [11, 21].

En el formalismo de Heisenberg (donde los operadores dependen del tiempo), utilizando la notación de Dirac, un observable $A(t)$ sobre sus autoestados (elementos de un espacio de Hilbert) actúa de la siguiente manera:

$$A(t)|a, t\rangle = |a, t\rangle a,$$

y por tanto

$$\langle a, t|A(t) = a\langle a, t|,$$

donde $\langle a, t|$ son elementos del dual del espacio al que pertenecen los estados $|a, t\rangle$ (letras mayúsculas son operadores y letras minúsculas son autovalores).

Lo que la Mecánica Cuántica debe responder es que si en un tiempo inicial t_i tengo un sistema en el estado $|a, t_i\rangle$, autoestado de cierto operador A con autovalor a , ¿cuál es la probabilidad de que en un tiempo $t_f > t_i$ el estado del sistema sea $|b, t_f\rangle$, tal que entregue el autovalor b para cualquier operador B ? La respuesta de la interpretación convencional de la Mecánica Cuántica es que la amplitud de probabilidad es el número complejo $\langle b, t_f|a, t_i\rangle$, que denota al producto escalar entre dos estados, y la probabilidad el módulo al cuadrado de este número $|\langle b, t_f|a, t_i\rangle|^2 = \langle b, t_f|a, t_i\rangle \langle b, t_f|a, t_i\rangle^* = \langle b, t_f|a, t_i\rangle \langle a, t_i|b, t_f\rangle$ (* es la operación de conjugación, que en ocasiones se denotará con una barra encima del número complejo que se conjuga). Estas amplitudes de probabilidad se pueden calcular en términos de los productos $\langle q, t_f|q', t_i\rangle$ entre estados que forman un sistema ortonormal y completo (SOC) o representación $\{|q, t\rangle\}_{q \in \mathfrak{R}}$, con $Q|q, t\rangle = q|q, t\rangle$ y Q el operador de posición por ejemplo, en términos de la cual el operador identidad (o unidad, tal que $1|q, t\rangle = |q, t\rangle$) se escribe

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q|.$$

Usando esta forma de la unidad, la amplitud $\langle b, t_f|a, t_i\rangle$ en términos de $\langle q, t_f|q', t_i\rangle$ se escribe

$$\langle b, t_f|a, t_i\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq dq' \langle b, t_f|q, t_f\rangle \langle q, t_f|q', t_i\rangle \langle q', t_i|a, t_i\rangle. \quad (4.1)$$

A los objetos como $\langle q, t|a, t\rangle$ se los interpreta como las componentes del estado $|a, t\rangle$ sobre cada elemento del SOC al tiempo t .

4.1.1 Un sistema ortogonal y completo para el espacio de estados, y sus traslaciones en el espacio de definición

Sea entonces la Mecánica Cuántica No Conmutativa en el plano, tal que para los operadores asociados a las variables del espacio fase Z^i con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ($Z^1 = X$, $Z^2 = Y$ son las coordenadas, y $Z^3 = P_x$, $Z^4 = P_y$ son los momentos) se tienen las relaciones en el conmutador cuántico $[A, B] = AB - BA$ (para A y B operadores que actúan sobre los elementos de un espacio de Hilbert asociado a un sistema físico particular)

$$[Z^i, Z^j] = iw^{ij} \quad (4.2)$$

para una matriz $W = (w^{ij})$ como

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \theta & \hbar & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & \hbar \\ -\hbar & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & -\hbar & -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

con θ y σ constantes (W así es la más general en dos dimensiones, pues si se tomaran a los conmutadores $[X, P_y]$ y $[Y, P_x]$ distintos de cero, todos los operadores serían proporcionales entre sí [1] y el problema sería entonces unidimensional). Las unidades de θ son las de coordenadas al cuadrado: $[L]^2$; y las de σ son unidades de momento al cuadrado. Estas últimas multiplicadas por las unidades de coordenadas, entregan unidades de acción, las unidades de \hbar .

Sea un SOC o representación común por ejemplo a los operadores X y P_y (que aún conmutan)

$$\{|x, p_y\rangle\}_{x, p_y \in \mathbb{R}}, \quad (4.4)$$

que genera al espacio de Hilbert asociado al sistema físico que se trate, en términos de la cual los elementos $|\psi\rangle$ ahí se expanden como

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' dp'_y \lambda_{x', p'_y} |x', p'_y\rangle, \quad (4.5)$$

con λ_{x,p_y} los coeficientes de la expansión.

Los operadores X y P_y actúan sobre la representación de manera directa

$$\begin{aligned} \langle x, p_y | X &= x \langle x, p_y | \\ \langle x, p_y | P_y &= p_y \langle x, p_y |. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Los "bras" y "kets" dependen del tiempo ($\langle x, p_y | = \langle x, p_y; t |$); sin embargo, si no se hace explícita esta variable, todos los estados que se mencionen están dados para el mismo tiempo. El conjunto de operadores formado por X y P_y no abarca la totalidad de los atributos (cantidades o propiedades físicas, como la posición en el espacio fase completo) de un sistema físico (en el caso de dos dimensiones) [63]; otro conjunto de operadores que proporcionan otras características (de hecho complementario al primero) es el formado por Y y P_x . La forma en la que operan Y y P_x sobre la representación (4.4) se averigua un poco más adelante.

Dada la forma del SOC (4.4), la función de onda ψ que determina el estado del sistema físico particular que se trate se escribe

$$\psi(x, p_y; t) \equiv \langle x, p_y; t | \psi \rangle. \quad (4.7)$$

El número $\psi(x, p_y; t)$ es la componente de estado $|\psi\rangle$ sobre el elemento $|x, p_y\rangle$ del SOC o representación (4.4) (en otras palabras, el elemento λ_{x,p_y}).

Se debe hacer especial hincapié en el objeto $\psi(x, p_y; t)$. La función de onda (4.7), que depende de una coordenada y un momento, tiene el significado usual de amplitud de probabilidad por definición: su módulo al cuadrado determina la probabilidad de que el estado del sistema físico $|\psi\rangle$ se encuentre en el elemento $|x, p_y; t\rangle$ (autoestado común de X y P_y) del SOC que genera al espacio de Hilbert asociado a tal sistema, al tiempo t . No se puede construir una "función de onda" $\psi' = \psi'(x, y)$ que dependa de las coordenadas dado que no es posible obtener un SOC del tipo $\{|x, y\rangle\}$ pues X y Y son operadores que no conmutan. Aun si se pudiera construir un objeto cuántico función de las coordenadas, habría que preguntarse si tal función tendría el sentido convencional de amplitud de probabilidad, y de si se podría usar para medir por ejemplo las posiciones x y y de algún sistema particular. La construcción sistemática de una Mecánica Cuántica basada en funciones de cuasiprobabilidad (funciones de operadores que no conmutan entre sí, como la posición q y el momento p) fue desarrollada por Wigner [71]. De las funciones de Wigner se pueden obtener las distribuciones de probabilidad integrando sobre alguna de las variables q o p de las que dependen.

Sea un operador unitario infinitesimal que hace las traslaciones del SOC en el espacio de definición no conmutativo (la norma de los estados permanece invariante en tales traslaciones)

$$\begin{aligned} U &= 1 + i\delta x P_x - i\delta p_y Y \\ (U^{-1} &= 1 - i\delta x P_x + i\delta p_y Y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

(con δx y δp_y cantidades infinitesimales). Conociendo las composiciones (utilizando la información contenida en W)

$$\begin{aligned} UXU^{-1} &= X + \hbar\delta x - \theta\delta p_y \\ UP_yU^{-1} &= P_y + \hbar\delta p_y - \sigma\delta x, \end{aligned} \quad (4.9)$$

se puede ver cómo actúan los operadores X y P_y sobre los estados $\langle x, p_y|U$:

$$\begin{aligned} (\langle x, p_y|U)X &= \langle x, p_y|(UXU^{-1})U = (x + \hbar\delta x - \theta\delta p_y)\langle x, p_y|U \\ (\langle x, p_y|U)P_y &= \langle x, p_y|(UP_yU^{-1})U = (p_y + \hbar\delta p_y - \sigma\delta x)\langle x, p_y|U. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el estado $\langle x, p_y|U$ es el elemento del SOC (4.4) con autovalores $(x + \hbar\delta x - \theta\delta p_y)$ y $(p_y + \hbar\delta p_y - \sigma\delta x)$, para X y P_y respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, p_y|U &= \langle x + \hbar\delta x - \theta\delta p_y, p_y + \hbar\delta p_y - \sigma\delta x| \\ &\approx \langle x, p_y| \\ &\quad + i\delta x(-i)(\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \sigma\frac{\partial}{\partial p_y})\langle x, p_y| - i\delta p_y(i)(\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} - \theta\frac{\partial}{\partial x})\langle x, p_y| \\ &= \langle x, p_y| + i\delta x\langle x, p_y|P_x - i\delta p_y\langle x, p_y|Y, \end{aligned} \quad (4.10)$$

la segunda línea obtenida con una expansión de Taylor a primer orden, y la tercera por la definición de U . Se puede ahora identificar cómo actúan los operadores Y y P_x sobre el SOC elegido para definir los estados del espacio de Hilbert:

$$\begin{aligned} \langle x, p_y|P_x &= -i(\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \sigma\frac{\partial}{\partial p_y})\langle x, p_y| \\ \langle x, p_y|Y &= i(\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} - \theta\frac{\partial}{\partial x})\langle x, p_y|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tanto P_x como Y van a trasladar al SOC de manera muy similar; si se intentara hacer que P_x y Y actuaran sin compartir elementos (ambos tienen

derivadas parciales respecto a x y p_y), el resultado sería que hay que alterar radicalmente la forma de W de (4.3), y se distorsionaría el carácter de la Mecánica Cuántica No Conmutativa.

La elección del SOC (4.4) fue deliberada. Por supuesto, en vez de haber tomado éste, se pudo tomar un SOC como

$$\{ |y, p_x\rangle \}_{y, p_x \in \mathbb{R}}, \quad (4.12)$$

tal que

$$\begin{aligned} \langle y, p_x | P_x &= p_x \langle y, p_x | \\ \langle y, p_x | Y &= y \langle y, p_x |. \end{aligned}$$

La manera de pasar de un SOC o representación a otra se establece conociendo las componentes de una en otra $\langle x, p_y | y, p_x \rangle$. Para calcularlas se tiene la ecuación diferencial

$$\langle x, p_y | y, p_x \rangle p_x = \langle x, p_y | P_x | y, p_x \rangle = -i \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \sigma \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \langle x, p_y | y, p_x \rangle$$

que tiene como solución a

$$\langle x, p_y | y, p_x \rangle = A e^{(\frac{i}{\hbar^2 - \sigma^2})[\hbar(x p_x - y p_y) + \theta p_x p_y - \sigma x y]} = A e^{\frac{i\alpha}{\hbar} [x p_x - y p_y + \beta p_x p_y - \gamma x y]} \quad (4.13)$$

(con $\alpha = \frac{1}{1 - \beta\gamma}$, $\beta = \frac{\theta}{\hbar}$ y $\gamma = \frac{\sigma}{\hbar}$; β tiene unidades de coordenada sobre momento, y γ de momento sobre coordenada, de manera que α no tiene unidades y todos los términos de la exponencial se pueden sumar con unidades de acción que se cancelan con las unidades de \hbar). Esta solución también satisface la otra ecuación diferencial que se puede plantear

$$\langle x, p_y | y, p_x \rangle y = \langle x, p_y | Y | y, p_x \rangle = i \left(\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} - \theta \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle x, p_y | y, p_x \rangle.$$

Los operadores identidad se pueden escribir en términos de cada uno de los SOC's (4.4) y (4.12) como

$$1 = \int dx dp_y |x, p_y\rangle \langle x, p_y| \quad (4.14)$$

$$1 = \int dy dp_x |y, p_x\rangle \langle y, p_x|, \quad (4.15)$$

donde los límites de las integrales son los extremos de todos los posibles valores que pueden tomar las variables del espacio fase, que, como se está tratando el caso del espectro continuo, corren de $-\infty$ a ∞ .

4.1.2 Construcción de la integral funcional

Sea una partición del intervalo de tiempo $t_i < t < t_f$ en $N + 1$ intervalos de longitud $\Delta t = \epsilon = t_k - t_{k-1}$, para t_i el tiempo en el que está dado un estado inicial $\langle x', p'_y; t_i |$, y t_f el tiempo en el que se tiene un estado final $\langle x, p_y; t_f |$. La amplitud de transición $\langle x, p_y; t_f | x', p'_y; t_i \rangle$ se calcula introduciendo N unidades como (4.14) entre los estados inicial y final, de manera que se obtienen $N + 1$ amplitudes de transición para un intervalo de tiempo de tamaño ϵ , y se toma el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} K &\equiv \langle x, p_y; t_f | x', p'_y; t_i \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N dx_k dp_{y_k} \langle x, p_y; t_f | x_N, p_{y_N}; t_N \rangle \langle x_N, p_{y_N}; t_N \\ &\quad | x_{N-1}, p_{y_{N-1}}; t_{N-1} \rangle \dots \langle x_1, p_{y_1}; t_1 | x', p'_y; t_i \rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para calcular los términos $K_k = \langle x_k, p_{y_k}; t_k | x_{k-1}, p_{y_{k-1}}; t_{k-1} \rangle$ para cada $k \in \{1, \dots, N + 1\}$ (con $x_0 = x'$, $x_{N+1} = x$, $p_{y_0} = p'_y$, $p_{y_{N+1}} = p_y$, $t_0 = t_i$ y $t_{N+1} = t_f$), que son como los propagadores entre dos estados separados infinitesimalmente en el tiempo, se escribe a cada "bra" y cada "ket" en términos de su forma al tiempo inicial con la ayuda del operador de evolución.

Suponiendo que $|x, p_y; t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(X, P_y, Y, P_x)(t-t_0)} |x, p_y; t_0\rangle$, se tiene que

$$\begin{aligned} K_k &= \langle x_k, p_{y_k}; t_k | x_{k-1}, p_{y_{k-1}}; t_{k-1} \rangle \\ &= \langle x_k, p_{y_k}; t_0 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_k-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_{k-1}-t_0)} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}}; t_0 \rangle \\ &= \langle x_k, p_{y_k} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \epsilon} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}} \rangle, \end{aligned} \quad (4.17)$$

y se introduce una unidad como (4.15) antes del operador de evolución

$$\begin{aligned} K_k &= \langle x_k, p_{y_k} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \epsilon} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}} \rangle \\ &= \int dy_k dp_{x_k} \langle x_k, p_{y_k} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \epsilon} | y_k, p_{x_k} \rangle \langle y_k, p_{x_k} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

En el factor que tiene al operador de evolución se debe elegir un orden para los productos de operadores entre coordenadas y momentos cuando se cuantiza el Hamiltoniano clásico (haciendo operadores a las variables del espacio fase). Dada la no conmutatividad expresada por los valores no nulos de θ y σ , se deberá también elegir un orden para los posibles términos cruzados (productos entre coordenadas o entre momentos). Se tomará un orden "normal" con la convención de poner los operadores que tienen como representación

común a (4.4) a la izquierda de los que tienen como representación común a (4.12).

Entonces, para un Hamiltoniano del tipo $H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + V(X, Y)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 K_k &= \int dy_k dp_{xk} \langle x_k, p_{yk} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^{on} \epsilon} | y_k, p_{xk} \rangle \langle y_k, p_{xk} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}} \rangle \\
 &= \int dy_k dp_{xk} \langle x_k, p_{yk} | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon (\frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \hat{V}^{on}(X, Y))} | y_k, p_{xk} \rangle \\
 &\quad \langle y_k, p_{xk} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}} \rangle \\
 &= \int dy_k dp_{xk} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon (\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x_k, y_k))} \\
 &\quad \langle x_k, p_{yk} | y_k, p_{xk} \rangle \langle y_k, p_{xk} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}} \rangle
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

(\hat{H}^{on} y \hat{V}^{on} significa que los operadores \hat{H} y \hat{V} están escritos con el orden normal). Usando los cambios de base dados por (4.13) para sustituir a los "brackets" $\langle x_k, p_{yk} | y_k, p_{xk} \rangle$ y $\langle y_k, p_{xk} | x_{k-1}, p_{y_{k-1}} \rangle$, resulta que

$$\begin{aligned}
 K_k &= \int dy_k dp_{xk} e^{-\frac{i}{\hbar} H} |A|^2 e^{\frac{i\hbar}{\hbar} [x_k p_{xk} - y_k p_{yk} + \beta p_{xk} p_{y_{k-1}} - \gamma x_{k-1} y_k]} \\
 &\quad e^{-\frac{i\hbar}{\hbar} [x_{k-1} p_{xk} - y_k p_{y_{k-1}} + \beta p_{xk} p_{y_{k-1}} - \gamma x_{k-1} y_k]} \\
 &= |A|^2 \int dy_k dp_{xk} \\
 &\quad e^{\frac{i\hbar}{\hbar} [p_{xk} (x_k - x_{k-1}) - y_k (p_{yk} - p_{y_{k-1}}) + \beta p_{xk} (p_{yk} - p_{y_{k-1}}) - \gamma y_k (x_k - x_{k-1})]} \\
 &\quad e^{-\frac{i}{\hbar} H(x_k, y_k, p_{xk}, p_{yk})}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Sustituyendo esto por cada uno de los factores del integrando de (4.16), el propagador entonces es

$$\begin{aligned}
 K &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} \int \prod_{k=1}^N dx_k dp_{yk} \prod_{k=1}^{N+1} dy_k dp_{xk} \\
 &\quad e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \alpha [p_{xk} (x_k - x_{k-1}) - y_k (p_{yk} - p_{y_{k-1}}) + \beta p_{xk} (p_{yk} - p_{y_{k-1}}) - \gamma y_k (x_k - x_{k-1})]} \\
 &\quad e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} -H(x_k, y_k, p_{xk}, p_{yk})} \epsilon
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Para hacer más compacta la notación, se escribe $Dz^i = \prod_{k=1}^N dz^i_k$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, de tal manera que

$$K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} \int Dx Dp_y Dp_x dy_{N+1} dp_{x_{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} S_k}, \tag{4.22}$$

con

$$\begin{aligned}
 S_k &= \epsilon \left\{ \alpha \left[p_{xk} \frac{(x_k - x_{k-1})}{\epsilon} - y_k \frac{(p_{yk} - p_{y_{k-1}})}{\epsilon} + \beta p_{xk} \frac{(p_{yk} - p_{y_{k-1}})}{\epsilon} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \gamma y_k \frac{(x_k - x_{k-1})}{\epsilon} \right] - H(x_k, y_k, p_{xk}, p_{yk}) \right\} \\
 &\equiv \epsilon L_k.
 \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, en el argumento de la exponencial de la integral anterior se obtiene exactamente

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \epsilon L_k &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L \\
 &= \frac{i}{\hbar} S,
 \end{aligned}$$

con $L = \alpha(\dot{x}p_x - y\dot{p}_y + \beta\dot{p}_y p_x - \gamma y\dot{x}) - H(x, y, p_x, p_y)$ el Lagrangiano de primer orden clásico del sistema que se trate. Este es el Lagrangiano No Conmutativo (3.4) que se construyó en la primera parte de esta tesis. Las unidades de S son unidades de acción, dado que $\alpha = \frac{1}{1-\beta\gamma}$ no tiene unidades. Entonces el propagador (4.16) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 K &= \langle x, p_y; t_f | x', p'_y; t_i \rangle \\
 &= \int \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} D x D p_y D y D p_x d y_{N+1} d p_{x_{N+1}} \right] e^{i S}, \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

con $S[z(t)]$ el funcional de acción clásico definido por el LNC de primer orden, que da origen a las ecuaciones de movimiento para las variables del espacio fase $z(t)$.

Existen trabajos sobre esta formulación de la Mecánica Cuántica No Conmutativa en términos de la integral funcional [1], con aplicaciones a sistemas rotantes [16].

4.1.3 Comentario sobre la dificultad que enfrenta la construcción de la integral funcional en el espacio configuración

Para construir el propagador (4.22) de la subsección anterior se utilizó de inicio el SOC (4.4) para el espacio de Hilbert común a los operadores X y P_y . Dada la no conmutatividad de las coordenadas, no se puede definir una

representación común a los operadores X e Y , y por lo tanto, no se puede construir el propagador en el espacio configuración de manera análoga al procedimiento que se sigue en textos usuales [11, 21].

Hay otra dificultad para construir la integral funcional en el espacio configuración, que tiene que ver con el Lagrangiano No Conmutativo que depende sólo de las coordenadas y sus derivadas respecto del tiempo. En la sección 3.3 de la primera parte de esta tesis, se mostró la inexistencia del LNC de segundo orden: Al despejar los momentos del Lagrangiano de primer orden (3.37), el LNC en el espacio configuración (3.43) depende de las coordenadas y de las derivadas de infinito orden respecto del tiempo de las mismas. Feynman, en su artículo sobre la integral funcional [27], es muy explícito cuando dice que la función con la que se calcula la amplitud de probabilidad para un camino o trayectoria (en el espacio configuración) debe depender de las coordenadas y sus derivadas respecto del tiempo sólo hasta el primer orden:

No hay dificultad para calcular la integral de acción por los cambios súbitos de la velocidad que se presentan en los tiempos t_k -de la partición- en tanto L no dependa de las derivadas de la posición respecto del tiempo de mayor orden que el primero. (...) Escrita de esta manera -la integral de acción-, la única cosa que solicitamos a la mecánica clásica es que nos proporcione una función Lagrangiana.¹

En [15], donde se presenta un tratamiento perturbativo para Lagrangianos con derivadas de infinito orden, se menciona que en la cuantización por integral funcional cuyo punto de partida es la integral $\int DqDp e^{\int dt(p\dot{q}-H)}$, la fórmula $\int Dq e^{\int dt L}$ puede o no ser correcta. Cuando el Lagrangiano depende de derivadas de orden infinito, se observa en muchos ejemplos una violación de unitariedad si se usa tal fórmula para definir un sistema cuántico.

4.2 El Principio de Acción

El Principio de Acción de Schwinger es una formulación de la Mecánica Cuántica que, así como la integral de Feynman de la sección 4.1, le da un

¹El texto sigue: "De hecho, uno puede considerar el postulado dos simplemente diciendo, 'Φ -la función que determina la contribución de un camino a la amplitud de probabilidad- es la exponencial de i veces la integral de una función real de $x(t)$ y su primera derivada respecto del tiempo.' (...) Entonces, se puede mostrar que la función de x y \dot{x} es el Lagrangiano clásico con un factor constante."

papel protagonista al Lagrangiano como función ahora de los operadores asociados a las coordenadas y los momentos, y a las ecuaciones de movimiento para éstos.

4.2.1 Funciones de transformación

En el libro de Julian S. Schwinger [63] se puede encontrar una buena exposición de la formulación de la Mecánica Cuántica a través del principio de acción que se presenta a continuación. Ahí, se definen los "símbolos de medición" (y el álgebra que constituyen) para A un conjunto completo de cantidades físicas compatibles susceptibles de medirse. Un sistema físico puede poseer sólo un número finito de valores a_1, a_2, a_3, \dots para todas las cantidades $A_1, A_2, A_3, \dots \in A$ simultáneamente (este es el sentido de compatibilidad de las cantidades). Cuando un sistema físico es descrito por la determinación de todas las propiedades que engloba el conjunto A , se dice que está en un estado a' ; el símbolo $M(a')$ denota una medición selectiva que acepta a los sistemas que tienen el valor a' para la propiedad A . Cuando un sistema está en el estado a' relativo al conjunto de cantidades A , no quiere decir que no pueda estar en el estado b' relativo al conjunto de cantidades B al que pertenecen otras propiedades físicas, incompatibles con las del conjunto A ; pero, si en una medición de dos etapas, la primera determina al estado a' , la segunda posterior para determinar al b' destruye lo definido del estado a' .

El símbolo $M(a', a'')$ denota un proceso de medición que acepta sistemas en el estado a'' y los deja salir en el estado a' . Para A, B, C y D cuatro conjuntos completos de cantidades físicas, $M(a', b')M(c', d') = \langle b' | c' \rangle M(a', d')$ denota dos mediciones sucesivas (se lee de derecha a izquierda) que acepta sistemas en el estado d' y los deja salir en el estado c' en la primera etapa, y los acepta en el estado b' y los deja salir en el estado a' al final de la segunda etapa y de la medición. El "bracket" o función de transformación $\langle b' | c' \rangle$ representa la proporción de los sistemas que estando en el estado c' al final de la primera etapa, también están en el estado b' al inicio de la segunda etapa.

Al número $\langle a' | b' \rangle$ se lo puede considerar como una función del símbolo $M(b', a')$; de hecho, se tiene entre estos objetos que tal correspondencia viene dada por la traza

$$\langle a' | b' \rangle = \text{tr} M(b', a'), \quad (4.24)$$

considerando a $M(b', a')$ como una matriz donde sus elementos están dados

por

$$[M(b', a')]'' = \langle c' | M(b', a') | c'' \rangle. \quad (4.25)$$

Las funciones de transformación tiene una interpretación estadística: el número

$$p(a', b') = \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle, \quad (4.26)$$

es la probabilidad de observar el estado a' en una medición efectuada sobre un sistema que se sabe está en el estado b' .

4.2.2 El principio dinámico

El problema de calcular las funciones de transformación (o propagadores) $\langle a'', t'' | b', t' \rangle$ se aborda mediante el principio de acción de Schwinger que establece que las variaciones infinitesimales de estos objetos vienen dadas por los elementos de matriz correspondientes al operador de acción de la siguiente manera

$$\delta \langle a'', t'' | b', t' \rangle = i \langle a'', t'' | \delta \left(\int_{t'}^{t''} L dt \right) | b', t' \rangle, \quad (4.27)$$

donde L es el operador Lagrangiano de primer orden, de tal manera que toda la información dinámica es contenida por el Hamiltoniano que lo define (por simplicidad en la notación se emplearán letras minúsculas para notar a los operadores y las mismas pero primadas para notar a los autovalores que les corresponden).

A esta conclusión se llega de la siguiente manera. Las propiedades de un sistema están relacionadas con la medición que se haga de ellas a un tiempo dado. Estas propiedades para distintos tiempos deben estar vinculadas por una transformación unitaria, pues estas transformaciones hacen que el espectro no se mueva (el espectro es la colección de valores de los estados para una propiedad dada). La conexión entre las propiedades a distintos tiempos se establece por la que hay entre los estados que corresponden a aquellas para esos tiempos, y tal conexión depende de la historia dinámica del sistema en todo el intervalo de tiempo considerado. Por lo tanto, las propiedades de los sistemas particulares deben estar contenidas en un principio dinámico que caracterize a la función de transformación general.

Las variaciones de las funciones de transformación $\langle a'', t'' | a', t' \rangle$ que relacionan dos descripciones arbitrarias, de las cuales son casos particulares las del tipo $\langle a', t | b', t \rangle$ que conectan dos descripciones incompatibles al mismo tiempo, y las del tipo $\langle a'', t'' | a', t' \rangle$ que relacionan propiedades análogas a

distintos tiempos, son los elementos de matriz de un operador infinitesimal Hermitiano

$$\delta \langle a_2'', t'' | a_1', t' \rangle = i \langle a_2'', t'' | \delta W_{12} | a_1', t' \rangle, \quad (4.28)$$

que tiene propiedades consistentes con las propiedades fundamentales de las funciones de transformación de composición multiplicativa y de conjugación

$$\begin{aligned} \sum_{b'} \langle a_1' | a_3' \rangle \langle a_3' | a_2' \rangle &= \langle a_1' | a_2' \rangle \\ \langle a_1' | a_2' \rangle^* &= \langle a_2' | a_1' \rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Estas propiedades se expresan como la ley de composición aditiva y la Hermiticidad para el operador δW_{12}

$$\begin{aligned} \delta W_{12} &= \delta W_{13} + \delta W_{32} \\ \delta W_{12}^* &= \delta W_{12} \end{aligned} \quad (4.30)$$

(donde \star en el caso del operador significa la operación de tomar el adjunto del mismo). Tomando en cuenta esto, se establece el *postulado dinámico*: Existe una clase especial de variaciones infinitesimales para las cuales los operadores δW_{12} asociados a éstas se obtienen por la variación de un sólo operador, el operador de "acción" W_{12} ; es decir

$$(\delta W_{12}) = \delta(W_{12}). \quad (4.31)$$

El operador de acción comparte las propiedades de aditividad y Hermiticidad que tienen los operadores infinitesimales que de él se obtienen, consistentemente con las propiedades de las funciones de transformación establecidas hasta ahora.

Si se piensa a la transformación de la descripción a_1' al tiempo t' a la descripción a_2'' al tiempo t'' , que ocurre en el tiempo de manera continua, como una sucesión infinita de descripciones que difieren una de otra de manera infinitesimal, la propiedad de aditividad de los operadores asociados a cada elemento de la sucesión establece que

$$W_{12} = \sum_{t'}^{t''} W_{t+dt, t}. \quad (4.32)$$

Escribiendo a los operadores que se emplean para llevar una descripción a la que está infinitesimalmente separada de ésta proporcionales a la distancia en el tiempo que las separan

$$W_{t+dt, t} = L(t)dt \quad (4.33)$$

con $L(t)$ el Lagrangiano de primer orden del sistema que se estudia, en el límite continuo (cuando la separación en el tiempo entre las descripciones tiende a cero) se tiene que

$$W_{12} = \int_{t'}^{t''} L(t) dt. \quad (4.34)$$

De esta ecuación junto con (4.28) se desprende la ecuación (4.27) que relaciona al operador de acción con la variación de la función de transformación. En la ecuación (4.34), $L(t)$ es el Lagrangiano porque la evolución o desarrollo de las variables dinámicas durante un intervalo infinitesimal de tiempo es descrito por una transformación infinitesimal unitaria, lo que implica ecuaciones diferenciales de movimiento de primer orden para estas variables que es precisamente lo que ofrece el Lagrangiano de primer orden. El Lagrangiano de primer orden se escribe

$$L(z, \dot{z}; t) = \frac{1}{2} [z^i \frac{1}{2} w_{ij} \dot{z}^j - \dot{z}^i \frac{1}{2} w_{ij} z^j] - H(z; t), \quad (4.35)$$

donde el término cinético (todo lo que no tiene que ver con el Hamiltoniano $H(z)$) está simetrizado para satisfacer la condición de Hermiticidad de $L(t)$ y así la del operador de acción. Por la misma razón, la matriz (w_{ij}) debe ser antisimétrica.

El Hamiltoniano que entra en la definición del Lagrangiano (4.35), se hereda de la información clásica de la que se disponga del sistema físico, y para cuantizarlo (haciendo operadores las variables de las que depende) hace falta escoger cierto orden en sus variables. Este detalle se propaga hacia el Lagrangiano completo, de manera que el término "cinético" también se verá afectado por el criterio de orden que se asuma. Si se emplea el orden de Weyl (orden que tiene la propiedad de simetrizar los términos en los que aparecen multiplicados potencias de las variables dinámicas en el Lagrangiano clásico) para hacer la cuantización, el operador Lagrangiano obtenido será consistente con el hecho de que el operador de acción debe ser Hermitiano. Las variaciones que se hagan del operador de acción se harán efectivas como variaciones de las variables del espacio fase. Será necesario asumir que éstas variaciones, aunque siguen siendo operadores, se comportarán como números y conmutarán con cualquier otro operador. Este carácter es propio de lo que Schwinger llama variables de primera clase [69].

4.2.3 El caso no conmutativo

Sea un espacio de Hilbert asociado a cierto sistema físico embebido en un mundo de dos dimensiones, equipado con un sistema ortonormal y completo común a los operadores x y p_y (como se hizo en la sección 4.1 que trata sobre la integral funcional de Feynman)

$$\{|x', p'_y; t'\rangle\}_{x', p'_y \in \mathbb{R}}. \quad (4.36)$$

Considerando Hamiltonianos independientes del tiempo, todos los posibles cambios de la función de transformación están dados por cambios en los estados inicial y final, y éstos a su vez por las variaciones $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta p'_y$, $\delta p''_y$, $\delta t'$ y $\delta t''$ de las variables correspondientes. Estas variaciones o cambios inducirán variaciones en los estados del sistema a través de un operador unitario infinitesimal de acuerdo con

$$\delta|x', p'_y; t'\rangle = -iG(t')|x', p'_y; t'\rangle. \quad (4.37)$$

El Lagrangiano no conmutativo clásico, simetrizado con el orden de Weyl, en la forma en que quedan fijas en los estados inicial y final las variables x y p_y , es

$$L = \frac{\alpha}{2}[\dot{x}p_x + p_x\dot{x} - y\dot{p}_y - \dot{p}_y y + \theta(\dot{p}_y p_x + p_x \dot{p}_y) - \sigma(\dot{x}y + y\dot{x})] - H(x, y, p_x, p_y). \quad (4.38)$$

(En esta sección, se está tomando $\hbar = 1$ sin unidades, de manera que θ ahora tiene unidades de coordenada sobre momento, como el caso de β de la subsección 4.1.1, pues de hecho ahora $\beta = \frac{\theta}{\hbar} = \theta$. De manera similar, σ tiene unidades de momento sobre coordenada y $\gamma = \frac{\sigma}{\hbar} = \sigma$. La constante $\alpha = \frac{1}{1-\theta\sigma}$ no tiene unidades.) La variación de la función de transformación dada por el operador Hermitiano $G(t)$, de acuerdo con (4.37), es

$$\delta\langle x'', p''_y; t''|x', p'_y; t'\rangle = i\langle x'', p''_y; t''|G(t'') - G(t')|x', p'_y; t'\rangle. \quad (4.39)$$

Empleando (4.27) y (4.39) se puede hacer la correspondencia

$$\delta\left(\int_{t'}^{t''} L dt\right) = G(t'') - G(t'). \quad (4.40)$$

Ahora, para realizar la variación que se encuentra en el miembro izquierdo de (4.40) conviene parametrizar la integral respecto de otra variable τ , pues

el tiempo tendrá que sufrir una transformación infinitesimal de la misma manera en que lo hacen las coordenadas y los momentos. Es decir, se escribe

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t'=\tau'}^{t''=\tau''} L dt &= \delta \int_{\tau'}^{\tau''} L \frac{dt}{d\tau} d\tau \\
 &= \delta \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{dt}{d\tau} d\tau \left\{ \frac{\alpha}{2} [\dot{x}p_x + p_x\dot{x} - y\dot{p}_y - \dot{p}_y y + \theta(\dot{p}_y p_x + p_x \dot{p}_y) \right. \\
 &\quad \left. - \sigma(\dot{x}y + y\dot{x})] - H \right\} \\
 &= \delta \int_{\tau'}^{\tau''} \left\{ \frac{\alpha}{2} [dxp_x + p_x dx - ydp_y - dp_y y + \theta(dp_y p_x + p_x dp_y) \right. \\
 &\quad \left. - \sigma(dx y + y dx)] - H dt \right\}.
 \end{aligned}$$

El parámetro τ no sufre cambios (no varía), y por lo tanto se puede intercambiar la variación δ con la integral sobre τ . Después, usando que la variación de la diferencial es la diferencial de la variación, recordando que las coordenadas y los momentos son variables de primera clase y así sus variaciones se comportan como números, y sumando y restando la expresión $\pm \frac{d}{dt}[\alpha(p_x \delta x - y \delta p_y + \theta p_x \delta p_y - \sigma y \delta x) - H \delta t] dt$ al integrando de la expresión anterior, se obtiene el siguiente resultado para el miembro izquierdo de (4.40)

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\int_{t'}^{t''} L dt \right) &= \int_{\tau'}^{\tau''} \left\{ \alpha [dx \delta p_x - dp_y \delta y + \theta dp_y \delta p_x - \sigma dx \delta y - dp_x \delta x + dy \delta p_y \right. \\
 &\quad \left. - \theta dp_x \delta p_y + \sigma dy \delta x] + dH \delta t - dt \delta H \right\} \\
 &+ \int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt} [\alpha (p_x \delta x - y \delta p_y + \theta p_x \delta p_y - \sigma y \delta x) - H \delta t] dt \\
 &= [\alpha (p_x \delta x - y \delta p_y + \theta p_x \delta p_y - \sigma y \delta x) - H \delta t]_{t'}^{t''} \\
 &+ \int_{t'}^{t''} dt [\alpha (\dot{x} \delta p_x - \dot{p}_y \delta y + \theta \dot{p}_y \delta p_x - \sigma \dot{x} \delta y \\
 &\quad - \dot{p}_x \delta x + \dot{y} \delta p_y - \theta \dot{p}_x \delta p_y + \sigma \dot{y} \delta x) + \dot{H} \delta t - \delta H]. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

La correspondencia (4.40) establece que la variación del operador de acción debe depender sólo de las condiciones en los tiempos inicial y final (y de las variaciones de los operadores de coordenadas y momentos para esos tiempos), por lo tanto, el integrando del segundo término en la expresión anterior debe anularse por sí solo, pues depende de la trayectoria completa; esto resulta en que

$$\delta H = \alpha [(\sigma \dot{y} - \dot{p}_x) \delta x - (\sigma \dot{x} + \dot{p}_y) \delta y + (\theta \dot{p}_y + \dot{x}) \delta p_x + (\dot{y} - \theta \dot{p}_x) \delta p_y] + \dot{H} \delta t$$

$$= \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial y} \delta y + \frac{\partial H}{\partial p_x} \delta p_x + \frac{\partial H}{\partial p_y} \delta p_y + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \quad (4.42)$$

(el segundo renglón es la variación del Hamiltoniano por definición), de lo que se obtienen las ecuaciones de Heisenberg para los operadores de las coordenadas y los momentos

$$\begin{aligned} \alpha(\dot{p}_x - \sigma \dot{y}) &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \alpha(\dot{p}_y + \sigma \dot{x}) &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \alpha(\dot{x} + \theta \dot{p}_y) &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \alpha(\dot{y} - \theta \dot{p}_x) &= \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

que son precisamente las ecuaciones de movimiento clásicas para las variables del espacio fase, pero ahora para los operadores que les corresponden.

El primer término de la última igualdad de (4.41) corresponde así al miembro derecho de (4.40), o sea

$$G(t) = \alpha[p_x(t)\delta x(t) - y(t)\delta p_y(t) + \theta p_x(t)\delta p_y(t) - \sigma y(t)\delta x(t)] - H(t)\delta t. \quad (4.44)$$

De esta manera queda determinado la forma del operador infinitesimal que genera las variaciones de los estados $|x, p_y; t\rangle$. Cabe mencionar que de haber escogido la otra representación posible en términos de los operadores y y p_x , el operador G hubiera resultado de una manera muy similar pero con los papeles de x y p_y intercambiados con los de y y p_x . Esto se puede ver de manera inmediata si se identifica que x con p_x y p_y con y se comportan de manera conjugada siendo los segundos los generadores de las traslaciones de los primeros (en los espacios de definición que mezclan una coordenada y un momento) y viceversa.

Las relaciones de conmutación entre los operadores asociados a las variables del espacio fase se pueden deducir de la siguiente manera. La regla general para conocer la variación de un operador bajo una transformación infinitesimal unitaria generada por cierto operador G es

$$\delta_* F(t) = \frac{1}{i}[F(t), G(t)], \quad (4.45)$$

donde la variación del miembro izquierdo denota una variación para tiempos fijos (ver apéndice A). De hecho

$$\delta_* F = \delta F - \dot{F} \delta t, \quad (4.46)$$

con δF la variación "funcional" de F en el tiempo y el espacio de definición.

Introduciendo esto y la forma de G de acuerdo con (4.44) en la regla (4.45), la posibilidad de hacer variaciones independientes en la coordenada x , el momento p_y y el tiempo t tiene como consecuencia que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\alpha}{i} ([F, p_x] - \sigma[F, y]), \\ \frac{\partial F}{\partial p_y} &= \frac{\alpha}{i} (\theta[F, p_x] - [F, y]), \\ \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{i} [F, H]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Tomando $F = x$ y $F = p_y$, se calculan los conmutadores entre coordenadas y momentos resultando

$$\begin{aligned} [x, p_x] &= i \\ [p_y, y] &= i \\ [x, y] &= i\theta \\ [p_y, p_x] &= -i\sigma \end{aligned} \quad (4.48)$$

(que están de acuerdo con los ingredientes introducidos la construcción de la integral funcional, subsección 4.1.1, con $\hbar = 1$).

4.3 Deducción de la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica No Conmutativa mediante la Integral Funcional

Para ilustrar un poco las alteraciones no conmutativas en la construcción de la integral funcional, se deduce a partir de ésta la ecuación que dicta la dinámica de la función de onda $\psi(x, p_y) = \langle x, p_y | \psi \rangle$; ésta es amplitud de probabilidad para cierto tiempo pues es la superposición de las contribuciones de las amplitudes para un tiempo anterior "propagadas" desde todos los puntos del espacio de definición.

Recordando que el cambio de base (4.13) entre las representaciones $\{|y, p_x\rangle\}$ y $\{|x, p_y\rangle\}$ está dado por

$$\langle x, p_y | y, p_x \rangle = A e^{\frac{i\alpha}{\hbar} [x p_x - y p_y + \beta p_x p_y - \gamma x y]}, \quad (4.49)$$

se pueden expandir los elementos de un SOC en términos de los del otro multiplicándolos por el operador identidad escrito en la representación complementaria para cada caso:

$$\begin{aligned} \langle x, p_y | &= A \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x e^{\frac{i\alpha}{\hbar} [p_x (x + \beta p_y) - y (p_y + \gamma x)]} \langle y, p_x |, \\ \langle y, p_x | &= \bar{A} \int_{-\infty}^{\infty} dx dp_y e^{-\frac{i\alpha}{\hbar} [x (p_x - \gamma y) - p_y (y - \beta p_x)]} \langle x, p_y |. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Con base en las forma de las expansiones de una representación en la otra anteriores, se definen la transformación de Fourier entre los espacios de definición mixtos o "híbridos" (que cuentan con una coordenada y un momento) y su inversa como

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y, p_x) &= \left(\frac{\alpha}{4\pi^2 \hbar^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx dp_y f(x, p_y) e^{-\frac{i\alpha}{\hbar} [x (p_x - \gamma y) - p_y (y - \beta p_x)]}, \\ f(x, p_y) &= \left(\frac{\alpha}{4\pi^2 \hbar^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x \tilde{f}(y, p_x) e^{\frac{i\alpha}{\hbar} [p_x (x + \beta p_y) - y (p_y + \gamma x)]}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

(El factor $\frac{\alpha}{4\pi^2 \hbar^2}$ que está en la definición de la transformación de Fourier y su inversa, determinará a la constante A que aparece multiplicando al propagador (4.22), y, definido de esta manera, proporcionará la medida adecuada para el espacio fase como se establece en el resultado del ejercicio 15.5 del libro de Henneaux y Teitelboim [41], que dice que cuando la estructura simpléctica del espacio fase es arbitraria, la medida que va en el propagador debe ser $\frac{\sqrt{\det(W^{-1})}}{(2\pi\hbar)^n}$, con W la matriz simpléctica (3.1) (salvo que redefiniendo los parámetros β por θ y γ por σ) de la teoría clásica, y n la dimensión del espacio configuración). La función "delta de Dirac" es tal que

$$\begin{aligned} \delta(p_x - \gamma y) \delta(\beta p_x - y) &= \left(\frac{\alpha}{4\pi^2 \hbar^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx dp_y e^{-\frac{i\alpha}{\hbar} [x (p_x - \gamma y) - p_y (y - \beta p_x)]} = \delta(p_x) \delta(y) \\ \delta(x + \beta p_y) \delta(p_y + \gamma x) &= \left(\frac{\alpha}{4\pi^2 \hbar^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x e^{\frac{i\alpha}{\hbar} [p_x (x + \beta p_y) - y (p_y + \gamma x)]} = \delta(x) \delta(p_y). \end{aligned}$$

La última igualdad de la primera de estas fórmulas se da porque para que $\delta(p_x - \gamma y)\delta(\beta p_x - y)$ sea algo distinto de cero, debe pasar simultáneamente que $p_x - \gamma y = 0$ y $\beta p_x - y = 0 \Rightarrow p_x = \gamma y = \frac{y}{\beta} \Rightarrow (1 - \gamma\beta)y = 0$, y por lo tanto $y = 0 = p_x$ (pues $1 - \gamma\beta \neq 0$, porque si no, la matriz W de (3.1) no tendría inversa). El mismo argumento se puede usar para la segunda fórmula. Se tiene además la propiedad conocida para esta función

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx dp_y \quad f(x, p_y) \delta(x - x_0) \delta(p_y - p_{y0}) = f(x_0, p_{y0}). \quad (4.53)$$

Usando las definiciones de transformada de Fourier y las propiedades de las funciones delta de Dirac, se pueden calcular las transformadas de Fourier de y , p_x y el Hamiltoniano $H(x, p_y, y, p_x)$. De la segunda de (4.51) se tiene que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x \quad y \quad e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} \\ &= -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p_y} - \beta \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \left(\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x \quad e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} \right\} \\ &= -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p_y} - \beta \frac{\partial}{\partial x}\right) [\delta(x)\delta(p_y)], \end{aligned} \quad (4.54)$$

y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x \quad p_x \quad e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} \\ &= i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - \gamma \frac{\partial}{\partial p_y}\right) \left\{ \left(\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x \quad e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} \right\} \\ &= i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - \gamma \frac{\partial}{\partial p_y}\right) [\delta(x)\delta(p_y)]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ahora, la transformada de Fourier de cualquier potencia de y o de p_x es la aplicación de los operadores que son suma de derivadas parciales sobre el producto de funciones delta ese número de veces (la potencia), pues (denotando $-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial p_y} - \beta \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv (\partial)$)

$$y^m e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} = y^{m-1} (y \partial [e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]}])$$

$$\begin{aligned}
&= y^{m-1}(\partial) e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} = (\partial) y^{m-2} (y e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]}) \\
&= (\partial) y^{m-2} (\partial) e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} = (\partial)^2 y^{m-3} (y e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]}) \\
&= \dots \\
&= (\partial)^m e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

(con un argumento similar para las potencias de p_x). Por lo tanto, la transformada de Fourier de cualquier Hamiltoniano $H(x, p_y, y, p_x)$ que acepte una expansión en serie de potencias de las variables y y p_x es

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x H(x, p_y, y, p_x) e^{\frac{i\alpha}{\hbar}[p_x(x+\beta p_y)-y(p_y+\gamma x)]} \\
&= H\left[x, p_y, -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial p_y} - \beta\frac{\partial}{\partial x}\right), i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} - \gamma\frac{\partial}{\partial p_y}\right)\right] [\delta(x)\delta(p_y)] \\
&\equiv \hat{H}(x, p_y, Y, P_x) [\delta(x)\delta(p_y)].
\end{aligned} \tag{4.57}$$

La ecuación de Schrödinger La ecuación que se busca, congruente con que para cierto tiempo la función de onda sea la superposición de todas las contribuciones que pueden venir de todos los puntos del espacio de definición es la que sigue (utilizando a K como el propagador de esas contribuciones)

$$\psi(x_{N+1}, p_{y_{N+1}}; t_{N+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dp_{y_0} K \psi(x_0, p_{y_0}; t_0), \tag{4.58}$$

con el propagador K dado por (4.22)

$$K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} \int D x D p_y D y D p_x d y_{N+1} d p_{x_{N+1}} e^{i \sum_{k=1}^{N+1} S_k}. \tag{4.59}$$

Dando un sólo paso en el tiempo de tamaño ϵ , la función de onda en ese momento (si el tiempo inicial es cero) se puede calcular usando la expresión (4.22) para $N = 0$ ($x_1 = x$, $p_{y_1} = p_y$, $t_1 = \epsilon$),

$$\begin{aligned}
&\psi(x, p_y; \epsilon) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dp_{y_0} \psi(x_0, p_{y_0}; 0) |A|^2 \left(\frac{4\pi^2\hbar^2}{\alpha}\right) \\
&\quad \left[\left(\frac{\alpha}{4\pi^2\hbar^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy dp_x e^{-\frac{i\alpha}{\hbar} H(x, p_y, y, p_x)} e^{\frac{i\alpha}{\hbar} [p_x((x-x_0)+\beta(p_y-p_{y_0}))-y((p_y-p_{y_0})+\gamma(x-x_0))]} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dp_{y0} \psi(x_0, p_{y0}; 0) |A|^2 \left(\frac{4\pi^2 \hbar^2}{\alpha} \right) e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{H}} \delta(x - x_0) \delta(p_y - p_{y0}) \\
&= |A|^2 \left(\frac{4\pi^2 \hbar^2}{\alpha} \right) e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{H}} \psi(x, p_y; 0) \approx |A|^2 \left(\frac{4\pi^2 \hbar^2}{\alpha} \right) \left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{H} \right] \psi(x, p_y; 0) \quad (4.60)
\end{aligned}$$

(la segunda igualdad usando la transformada de Fourier del Hamiltoniano, y la tercera usando (4.53)). Por lo tanto, haciendo una expansión a primer orden en ϵ de ambos lados de la ecuación (4.60), y escogiendo a la constante A como

$$A = \begin{cases} \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi\hbar} \\ \pm i \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi\hbar} \end{cases} \quad (4.61)$$

para que $|A|^2 \left(\frac{4\pi^2 \hbar^2}{\alpha} \right) = 1$, se tiene que

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, p_y; t)}{\partial t} = \hat{H}(X, P_y, Y, P_x) \psi(x, p_y; t); \quad (4.62)$$

donde se ha sustituido en \hat{H} a x por X y p_x por P_x , porque estos operadores actúan sobre la representación en la que está escrita $\psi(x, p_y; t)$ de manera directa de acuerdo con (4.6).

4.4 Teorema de incertidumbres

El teorema de incertidumbres o incertezas establece que si dos observables (operadores Hermitianos) no conmutan, entonces existe una relación de incertidumbre mínima (distinta de cero) para sus valores esperados. Es decir, que no se puede determinar en una medición el valor para cada uno de estos observables de manera simultánea.

4.4.1 El teorema general

Con precisión el teorema dice: Sean A y B observables y $|\psi\rangle$ un estado físico arbitrario. Sean Δ_A y Δ_B las desviaciones estándar de A y B para el estado $|\psi\rangle$ (con $\Delta_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$, donde $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ es el valor medio o esperado de A). Entonces

$$\Delta_A^2 \Delta_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right)^2. \quad (4.63)$$

Demostración: Sean los operadores Hermitianos $A' = A - \langle A \rangle$ y $B' = B - \langle B \rangle$ y la familia de operadores $A' + i\lambda B'$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} J(\lambda) &\equiv \langle \psi | (A' - i\lambda B')(A' + i\lambda B') | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (A' + i\lambda B')^* (A' + i\lambda B') | \psi \rangle = |(A' + i\lambda B') | \psi \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

(* significa tomar el adjunto del operador), y por lo tanto

$$J(\lambda) = \langle A'^2 \rangle + \langle i[A', B'] \rangle \lambda + \langle B'^2 \rangle \lambda^2 \geq 0. \quad (4.65)$$

De $[A', B'] = [A, B]$, se obtiene que

$$J(\lambda) = (\Delta_B)^2 \lambda^2 + \langle i[A, B] \rangle \lambda + (\Delta_A)^2 \geq 0. \quad (4.66)$$

Como $i[A, B]$ es simétrico en su dominio de definición, los coeficientes de (4.65) son reales, y por lo tanto, (4.66) se satisface para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, pasa que

$$\langle i[A, B] \rangle^2 - 4(\Delta_A)^2 (\Delta_B)^2 \leq 0, \quad (4.67)$$

que es lo que se quería demostrar [29].

Se puede mostrar que el valor esperado del conmutador de dos operadores, cuando es diferente de cero, por ser anti-Hermitiano su valor medio es un número imaginario puro, y entonces el miembro derecho de (4.63) es igual a $(\frac{i}{2} \text{Im} \langle [A, B] \rangle)^2$. Si entonces A y B mantienen una relación de conmutación dada por $[A, B] = C$, la desigualdad (4.63) se escribe

$$\Delta_A \Delta_B \geq |\frac{1}{2} \text{Im} \langle C \rangle|. \quad (4.68)$$

4.4.2 Estados de incertezza mínima

Dada una relación de incertidumbre como (4.68), para que un estado determine la relación de incertezza mínima, es decir, para que se de la igualdad de (4.68), si $\Delta_A \Delta_B = 0$, entonces el miembro derecho de (4.68) es cero también y $|\psi\rangle$ es autoestado de A y B simultáneamente. Si $\Delta_A \Delta_B \neq 0$, para que (4.68) sea una igualdad debe pasar que

$$J(\lambda) = [\Delta_B \pm \Delta_A]^2 \geq 0 \quad (4.69)$$

y, como $\Delta_B \neq 0$, entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $J(\lambda) = 0$. De la definición de $J(\lambda)$ se tiene que $(A' + i\lambda B') | \psi \rangle = 0$, o, $|\psi\rangle$ debe ser solución de $(A - \langle A \rangle) | \psi \rangle = -i\lambda (B - \langle B \rangle) | \psi \rangle$. En esta ecuación, λ es la raíz doble de $J(\lambda) = 0$, es decir $\lambda = -\frac{\langle i[A, B] \rangle}{2(\Delta_B)^2}$.

4.4.3 Relaciones de incerteza entre X e Y , y P_x y P_y

Dado que en la Mecánica Cuántica No Conmutativa se tienen las relaciones de conmutación entre las variables del espacio fase

$$\begin{aligned} [X, P_x] &= i\hbar \\ [Y, P_y] &= i\hbar \\ [X, Y] &= i\theta \\ [P_x, P_y] &= i\sigma, \end{aligned} \quad (4.70)$$

entonces, además de las relaciones de incerteza usuales

$$\Delta_X \Delta_{P_x} \geq \frac{1}{2}\hbar, \quad \Delta_Y \Delta_{P_y} \geq \frac{1}{2}\hbar, \quad (4.71)$$

se tienen las relaciones dadas por

$$\Delta_X \Delta_Y \geq \frac{1}{2}\theta, \quad \Delta_{P_x} \Delta_{P_y} \geq \frac{1}{2}\sigma, \quad (4.72)$$

entre los operadores asociados a las coordenadas y los momentos entre sí.

Estas relaciones de conmutación (sobre todo la que hay entre las coordenadas, con θ del orden de la longitud de onda de Planck al cuadrado) representan, como se mencionó en la introducción de esta tesis, una forma de modelar el que la Mecánica Cuántica no puede investigar más allá de una cierta longitud, la longitud de Planck. Es decir, si una partícula se encuentra en el plano, dada la no conmutatividad de las coordenadas, hay una "caja" de lado $\sqrt{\theta}$ en cada punto del mismo dentro de la cual no se puede determinar la posición de la partícula.

De la relación de incertidumbre entre las coordenadas, si $\Delta_X \Delta_Y \neq 0$, entonces los estados $|\psi\rangle$ que tienen incerteza mínima para estos operadores están dados por la ecuación

$$(X - \langle X \rangle)|\psi\rangle = -\frac{i\theta}{2(\Delta_Y)^2}(Y - \langle Y \rangle)|\psi\rangle. \quad (4.73)$$

Supóngase que para el estado $|\psi\rangle$ se tiene que $\langle X \rangle = x_0$ y $\langle Y \rangle = y_0$, tal que sus incertidumbres alcanzan el valor mínimo $\Delta_X \Delta_Y = \frac{1}{2}\theta$. De (4.6) y (4.11) se sabe que X e Y se representan como

$$X = x1$$

$$Y = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} - \theta \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.74)$$

en la representación (4.4) tal que $\langle x, p_y | \psi \rangle = \psi(x, p_y)$. Entonces, la ecuación (4.73) se puede escribir como

$$(x - x_0)\psi(x, p_y) = -\frac{i\theta}{2(\Delta_Y)^2} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} - \theta \frac{\partial}{\partial x} - y_0 \right] \psi(x, p_y), \quad (4.75)$$

de la que se obtiene que los estados para los que la relación de incerteza entre las coordenadas es mínima son

$$\psi(x, p_y)_{(\Delta_X \Delta_Y = \frac{\theta}{2})} = D e^{-\frac{(\Delta_Y)^2}{\theta^2} (x-x_0)^2} e^{i \frac{y_0}{\hbar} p_y}, \quad (4.76)$$

con $D \in \mathbb{C}$ una constante arbitraria.

De manera análoga (si se tiene que $\langle P_y \rangle = p_{y0}$ y $\langle P_x \rangle = p_{x0}$), se obtiene que los estados para los que las relaciones de incerteza

$$\begin{aligned} \Delta_{P_x} \Delta_{P_y} &\geq \frac{1}{2} \sigma \\ \Delta_X \Delta_{P_x} &\geq \frac{1}{2} \hbar \\ \Delta_Y \Delta_{P_y} &\geq \frac{1}{2} \hbar \end{aligned} \quad (4.77)$$

alcanzan sus valores mínimos, son respectivamente

$$\begin{aligned} \psi(x, p_y)_{(\Delta_{P_x} \Delta_{P_y} = \frac{\sigma}{2})} &= D e^{-\frac{(\Delta_{P_x})^2}{\sigma^2} (p_y - p_{y0})^2} e^{i \frac{p_{x0}}{\hbar} x} \\ \psi(x, p_y)_{(\Delta_X \Delta_{P_x} = \frac{\hbar}{2})} &= D e^{-\frac{(\Delta_{P_x})^2}{\hbar^2} (x - x_0)^2} e^{-i \frac{p_{x0}}{\sigma} p_y} \\ \psi(x, p_y)_{(\Delta_Y \Delta_{P_y} = \frac{\hbar}{2})} &= D e^{-\frac{(\Delta_Y)^2}{\hbar^2} (p_y - p_{y0})^2} e^{-i \frac{y_0}{\theta} x} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Los estados para los que más de una relación de incerteza alcance su valor mínimo, son aquellos que satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son precisamente combinaciones de los estados (4.76) y (4.78).

Un trabajo que trata con la nueva relación de incertidumbre consecuencia del parámetro no conmutativo θ , se presenta en [10], donde además se consideran los autoestados del momento angular que es modificado por θ como: $\hat{l} = X P_y - Y P_x + \frac{\theta}{2\hbar} (P_x^2 + P_y^2)$.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Capítulo 5

Aplicaciones usando las dos formas de cuantización

En este capítulo se emplean las dos formas de cuantización expuestas en las secciones 4.1 y 4.2 del capítulo anterior, para calcular el propagador del oscilador armónico. En la sección 5.1 se cambian las variables de la integral funcional por “amplitudes de modo”, método que se expone con detalle en el libro de Lowel S. Brown [11]. En la sección 5.2 se aborda el cálculo de la función de transformación para el oscilador armónico resolviendo la ecuación (4.39).

En [58], donde se establece no sólo la no conmutatividad en el plano sino también en la dos-esfera (de hecho, se muestra que el caso del plano es el límite para grandes radios de la esfera), se puede encontrar el ejemplo de una partícula cargada en un campo magnético (el problema de Landau) con un potencial de oscilador armónico en el contexto de la Mecánica Cuántica No Conmutativa. El resultado que ahí se presenta para el oscilador en el campo magnético tiene las frecuencias características que se obtienen en este capítulo (iguales a las del ejercicio 3.2.3 para el oscilador armónico clásico).

Alrededor de la fenomenología de la no conmutatividad a las escalas de la longitud de onda de Planck, en [9] se plantea que aunque la descripción que se conoce de las interacciones entre partículas tiene algunos problemas a esas escalas, en física atómica se pueden diseñar experimentos que son muy sensibles a estas escalas cuando se hacen pequeños saltos de frecuencias (del orden de 1 mHz o menores). Si por ejemplo estos saltos se hacen a energías del orden de GeV, la sensibilidad que se puede detectar es del orden de 4×10^{-27} GeV. En el artículo mencionado, se hace referencia a posibles experimentos

que ofrezcan evidencias de nueva física a las escalas de la longitud de onda de Planck: éstos van en la búsqueda de rompimientos de simetrías CPT y de Lorentz.

Otro artículo donde se plantean posibles correcciones al momento magnético anómalo del muón debidas a la no conmutatividad de las coordenadas (sistema vinculado con el problema de Landau) es [70].

5.1 Cálculo del propagador para el oscilador armónico cambiando las variables a “amplitudes de modo”

5.1.1 Perturbación de la trayectoria clásica

En la sección 4.1 se llegó a la expresión para la integral funcional o amplitud de transición (4.23)

$$K = \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} D x D p_y D y D p_x d y_{N+1} d p_{x, N+1} e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (5.1)$$

con

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt L = i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\alpha}{\hbar} (\dot{x} p_x - y \dot{p}_y + \beta \dot{p}_y p_x - \gamma y \dot{x}) - \frac{1}{\hbar} H(x, y, p_x, p_y) \right] \\ &= i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} w_{ij} z^i z^j - \frac{1}{\hbar} H(z) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

la acción clásica para el Lagrangiano de primer orden L con Hamiltoniano H , multiplicada por $\frac{i}{\hbar}$. La matriz (w_{ij}) es la inversa de (4.3), la matriz de conmutadores entre los operadores asociados a las variables del espacio fase.

Se tiene que el integrando de K es oscilante, y, al efectuar las integrales sobre las variables del espacio fase, se anularán las contribuciones para valores grandes de S . Valores pequeños de ésta son los que van a contribuir al integrando. Las trayectorias $(z = (z^1, z^2, z^3, z^4) = (x, y, p_x, p_y))$ que interesan son entonces las cercanas a la trayectoria clásica. Se denota por z_c a la trayectoria clásica (la que resuelve las ecuaciones de movimiento del LNC). Sea $z_c + z$ una trayectoria cercana a z_c (es decir, z^i pequeños), de manera que la perturbación z evaluada en los tiempos inicial y final es tal que $x(t_1) = x(t_2) = p_y(t_1) = p_y(t_2) = 0$, es decir, la perturbación se anula en las puntas x_c y p_{y_c} para los tiempos t_1 y t_2 del problema (notar que y y p_x

no están sujetos a esta condición). Como z_c es una trayectoria específica que no se "mueve", $D(z_c^i + z^i) = Dz^i$, y

$$\frac{i}{\hbar}S = i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} w_{ij}(z_c^i + z^i)(\dot{z}_c^j + \dot{z}^j) - \frac{1}{\hbar} H(z_c + z) \right]. \quad (5.3)$$

Haciendo una expansión de Taylor para el Hamiltoniano alrededor de z_c

$$H(z_c + z) = H(z_c) + \frac{\partial H}{\partial z^j} \Big|_{z=z_c} z^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial z^k \partial z^j} \Big|_{z=z_c} z^k z^j + O[> (z)^3], \quad (5.4)$$

y usando las ecuaciones de movimiento clásicas, $w_{ji} z_c^i = \frac{\partial H}{\partial z^j} \Big|_{z=z_c}$, la expresión (5.3) se escribe (tomando hasta términos en z^2)

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}S &= i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} w_{ij}(z_c^i \dot{z}_c^j + z^i \dot{z}^j + z_c^i \dot{z}^j) - \frac{1}{\hbar} H(z_c) \right. \\ &\quad \left. - w_{ji} \dot{z}_c^i z^j - \frac{1}{2\hbar} \frac{\partial^2 H}{\partial z^k \partial z^j} \Big|_{z=z_c} z^k z^j \right] \\ &= i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} w_{ij} z_c^i \dot{z}_c^j - \frac{1}{\hbar} H(z_c) + \frac{1}{2} w_{ij} z^i \dot{z}^j - \frac{1}{2\hbar} \frac{\partial^2 H}{\partial z^k \partial z^j} \Big|_{z=z_c} z^k z^j \right] \\ &= \frac{i}{\hbar} S[z_c] + i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} w_{ij} z^i \dot{z}^j - \frac{1}{2\hbar} \frac{\partial^2 H}{\partial z^k \partial z^j} \Big|_{z=z_c} z^k z^j \right], \quad (5.5) \end{aligned}$$

donde $S[z_c]$ denota la acción S evaluada en la trayectoria clásica z_c . Sustituyendo esto en la integral funcional, ésta se separa en dos factores: uno que se presenta en cualquier problema que acepte el desarrollo en serie de Taylor de su Hamiltoniano y que es la exponencial de la acción evaluada en la trayectoria clásica multiplicada por $\frac{i}{\hbar}$, y otro que sólo tiene que ver con la perturbación que se hizo (tal que en las puntas vale cero). Este último se traduce en una constante que no depende de los estados inicial y final entre los que se está evaluando el propagador (sólo de los tiempos inicial y final, de hecho, del intervalo entre los dos). Entonces, la integral funcional se escribe

$$K = e^B e^{\frac{i}{\hbar} S[z_c]} \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} \left[\int D^4 z e^{i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} w_{ij} z^i \dot{z}^j - \frac{1}{2\hbar} \frac{\partial^2 H}{\partial z^k \partial z^j} \Big|_{z=z_c} z^k z^j \right]} \right]. \quad (5.6)$$

El primer factor e^B , viene de una constante de integración que aparece en el exponente de $e^{i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} w_{ij} z^i \dot{z}^j - \frac{1}{2\hbar} \frac{\partial^2 H}{\partial z^k \partial z^j} \Big|_{z=z_c} z^k z^j \right] + \frac{B}{i}}$. El propagador K está determinado hasta esta constante.

5.1.2 Cálculo del límite que multiplica a $e^{\frac{i}{\hbar}S[z_c]}$

Una exposición completa e ilustrativa de la interpretación de la integral funcional como integrales sobre trayectorias se puede encontrar en [11]. Ahí, se utilizan expansiones en "amplitudes de modo" de las funciones del espacio fase. Se parte de la noción de la integral funcional como la suma de las contribuciones a la amplitud de transición con las que participan todos los caminos (o trayectorias en el espacio fase $z^i(t)$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$) posibles entre un estado inicial y uno final. Cada contribución es tasada con un cierto peso dado por la acción clásica evaluada sobre tal camino (la acción calculada con el Lagrangiano de primer orden); noción que es equivalente a la forma de la integral funcional vista como el límite de la discretización del espacio fase y del tiempo, cuando los saltos entre punto y punto tienden a cero y la partición a tener un número infinito de elementos.

En esta subsección se utilizarán las técnicas empleadas en la fuente mencionada para calcular el factor que acompaña a $e^{\frac{i}{\hbar}S[z_c]}$ de la expresión (5.6).

Para lo que sigue será útil reparametrizar el tiempo para que (con $T = t_f - t_i$) $t_i = 0$ sea el tiempo inicial y $t_f = T$ el final. Si el propagador entre dos estados a tiempos t_i y t_f (con $Dz^i = \prod_{k=1}^N dz^i_k$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$) se escribe

$$K = \langle x'', p''_y; T | x', p'_y; 0 \rangle$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} \int Dx Dp_y Dy Dp_x dy_{N+1} dp_{x_{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} S_k} \quad (5.7)$$

con $S_k = \alpha[p_{x_k}(x_k - x_{k-1}) - y_k(p_{y_k} - p_{y_{k-1}})] + \beta p_{x_k}(p_{y_k} - p_{y_{k-1}}) - \gamma y_k(x_k - x_{k-1})] - \epsilon H(x_k, y_k, p_{x_k}, p_{y_k})$ (el intervalo de tiempo ha sido partido de manera que $T = (N + 1)\epsilon$), del resultado de la subsección anterior se tiene que si $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$, entonces

$$K = e^{\frac{i}{\hbar}S[z_c]}$$

$$\int \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} Dx Dp_y Dy Dp_x dy_{N+1} dp_{x_{N+1}} \right]$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \{ \alpha [\dot{x} p_x - y \dot{p}_y + \beta \dot{p}_y p_x - \gamma y \dot{x}] - \frac{1}{2} \{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} y^2 + p_x^2 + p_y^2 \} \}} \quad (5.8)$$

Las variables de integración ahora son las de la perturbación de la trayectoria clásica, donde $x(t)$ y $p_y(t)$ satisfacen las condiciones de borde

$$x(0) = 0$$

$$\begin{aligned}x(T) &= 0 \\p_y(0) &= 0 \\p_y(T) &= 0.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Se sugieren expansiones de Fourier para las variables de integración en términos de las amplitudes a_n , b_n , c_n y d_n como

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sqrt{2}}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{T} t \right) \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sqrt{2}}{T} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{T} t \right) \\ p_y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sqrt{2}}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{T} t \right) \\ \Rightarrow \dot{p}_y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{\sqrt{2}}{T} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{T} t \right),\end{aligned}\tag{5.10}$$

y

$$\begin{aligned}y(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{2} \cos \left(\frac{n\pi}{T} t \right) \\ p_x(t) &= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sqrt{2} \cos \left(\frac{n\pi}{T} t \right).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Las expansiones para las funciones x y p_y son sólo en términos de senos porque las trayectorias que unen los puntos inicial y final deben satisfacer las condiciones de borde (5.9); y las que se usan para y y p_x son en términos sólo de cosenos porque las ecuaciones de movimiento clásicas establecen que las soluciones y_c y p_{x_c} son proporcionales a las derivadas respecto del tiempo de x_c y p_{y_c} , y es razonable pensar que lo mismo pasa para las perturbaciones cercanas a la trayectoria clásica. Debe notarse la forma de los coeficientes en las series para x y p_y . El denominador que los acompaña tiene el papel de hacer que el término cinético de la acción S se transforme canónicamente. Es decir, se está efectuando un cambio de variable en donde las funciones $z^i(t)$ para $i \in \{1, \dots, 4\}$ se sustituyen por las amplitudes de modo que son los coeficientes de las series. Este cambio de variable o transformación de coordenadas debe ser canónico para que la estructura simpléctica no se altere. Esto es, en la integral de acción debe conservarse la forma diagonal

$$\int_0^T dt \alpha (\dot{x} p_x - y \dot{p}_y + \beta \dot{p}_y p_x - \gamma y \dot{x})\tag{5.12}$$

del Lagrangiano No Conmutativo de primer orden. En términos de la nuevas variables (las amplitudes), la forma diagonal se ve como

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (a_n d_n - b_n c_n + \beta b_n d_n - \gamma a_n c_n). \quad (5.13)$$

El propagador (5.8) en las nuevas variables toma la forma

$$K = e^{\frac{i}{\hbar} S[z_c]} \int \lim_{N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} DaDbDcDd J \\ e^{\frac{i\alpha}{\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n d_n - b_n c_n + \beta b_n d_n - \gamma a_n c_n)} \\ e^{-\frac{i}{2\hbar} \int_0^T dt \{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} y^2 + p_x^2 + p_y^2 \}}, \quad (5.14)$$

donde las integraciones sobre las variables de espacio fase fueron sustituidas por las integraciones sobre las amplitudes de modo multiplicadas por el Jacobiano J que viene del cambio de variable:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} Dx Dp_y Dy Dp_x dy_{N+1} dp_{x_{N+1}} \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} DaDbDcDd J$$

(con $DaDb = \prod_{n=1}^N da_n db_n$ y $DcDd = \prod_{n=0}^N dc_n dd_n$).

Para poder realizar las integraciones de (5.14) y calcular el Jacobiano J , es conveniente usar a la forma discreta de la integral funcional (5.8), que tiene la forma

$$K = e^{\frac{i}{\hbar} S[z_c]} \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} \int \prod_{k=1}^N (dx_k dp_{y_k} dy_k dp_{x_k}) dy_{N+1} dp_{x_{N+1}} \\ e^{\frac{i\alpha}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} [(x_k - x_{k-1})p_{x_k} - y_k(p_{y_k} - p_{y_{k-1}}) + \beta(p_{y_k} - p_{y_{k-1}})p_{x_k} - \gamma y_k(x_k - x_{k-1})]} \\ e^{-\frac{i}{2\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_k, y_k) x_k^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) x_k y_k + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_k, y_k) y_k^2 + p_{x_k}^2 + p_{y_k}^2 \}}, \quad (5.15)$$

para la cual, las variables de integración z^i_k se expanden como

$$x_k = \sum_{n=1}^N a_n g_n(k)$$

$$p_{yk} = \sum_{n=1}^N b_n g_n(k), \quad (5.16)$$

con $A_n = \frac{1}{2(N+1)\text{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]}$ y $g_n(k) = \sqrt{2}A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi k}{N+1}\right)$ para $n \geq 0$; y

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{n=0}^N c_n f_n(k) \\ p_{xk} &= \sum_{n=0}^N d_n f_n(k), \end{aligned} \quad (5.17)$$

con $f_n(k) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{n\pi(k-\frac{1}{2})}{N+1}\right]$ para $n > 0$ y $f_0(k) = 1$ (notar que se está utilizando que $\frac{1}{T} = \frac{k}{N+1}$). En las expansiones anteriores para las variables del espacio fase discretizadas, se usan N (para x y p_y) y $N+1$ (para y y p_x) amplitudes de modo porque esos son precisamente los números de x_k 's, p_{y_k} 's, y_k 's y p_{x_k} 's que se tienen en la discretización (es como si se cambiara un número finito de variables por otro conjunto de la misma cardinalidad). El coeficiente A_n y los argumentos de las funciones seno y coseno en las expansiones (5.16) y (5.17) están definidos de esta manera para que en el límite continuo se recuperen las expresiones (5.10) y (5.11). Se están aprovechando los elementos que se presentan en la referencia [11] para reproducir las nociones de integración y derivación en la forma discreta. Ahí, se ve que usando la serie geométrica

$$\sum_{k=0}^N z^k = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

se pueden calcular las identidades (escribiendo a $f_n(k)$ y $g_n(k)$ como sumas de exponenciales)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} f_n(k) f_m(k) &= (N+1) \delta_{n,m} \\ \sum_{k=1}^N g_n(k) g_m(k) &= A_n^2 (N+1) \delta_{n,m} \end{aligned} \quad (5.18)$$

y

$$\sum_{k=1}^{N+1} f_n(k) = 0. \quad (5.19)$$

(Las sumas desde $k = 1$ a N o $N + 1$ vienen a reemplazar en la forma discreta a las integrales sobre el tiempo de la forma continua.) Lo análogo a las derivadas respecto del tiempo de las funciones $g_n(k)$ está dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{g_n(k) - g_n(k-1)}{k - (k-1)} &= \sqrt{2} A_n \left\{ \text{sen} \left[\frac{n\pi(k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{N+1} \right] - \text{sen} \left[\frac{n\pi(k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{N+1} \right] \right\} \\
 &= 2A_n \text{sen} \left[\frac{n\pi}{2(N+1)} \right] f_n(k) \\
 &= 2 \frac{1}{2(N+1) \text{sen} \left[\frac{n\pi}{2(N+1)} \right]} \text{sen} \left[\frac{n\pi}{2(N+1)} \right] f_n(k) \\
 &= \frac{f_n(k)}{N+1}.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Ahora, de acuerdo con las expansiones (5.16), (5.17) y la forma de "derivar" (5.20) se tiene que

$$\begin{aligned}
 x_k - x_{k-1} &= \sum_{n=1}^N a_n [g_n(k) - g_n(k-1)] \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{N+1} f_n(k), \\
 p_{y_k} - p_{y_{k-1}} &= \sum_{n=1}^N b_n [g_n(k) - g_n(k-1)] \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{N+1} f_n(k), \\
 p_{x_k} - \gamma y_k &= \sum_{n=0}^N (d_n - \gamma c_n) f_n(k), \\
 y_k - \beta p_{x_k} &= \sum_{n=0}^N (c_n - \beta d_n) f_n(k),
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

y entonces, el exponente del integrando de (5.15) se puede escribir

$$\begin{aligned}
 &\frac{i\alpha}{\hbar} \sum_{n=1}^N [a_n(d_n - \gamma c_n) - b_n(c_n - \beta d_n)] - \frac{i\epsilon(N+1)}{2\hbar} [d_0^2 + \sum_{n=1}^N (d_n^2 + b_n^2 A_n^2)] \\
 &- \frac{i\epsilon}{2\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} |_{(x_k, y_k)} x_k^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} |_{(x_k, y_k)} x_k y_k + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} |_{(x_k, y_k)} y_k^2 \right],
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

donde en el último renglón falta sustituir las expansiones (5.16) y (5.17), pero eso sólo se puede hacer conociendo la forma del potencial.¹ Así, el propagador (5.15) se escribe en las nuevas variables como

$$\begin{aligned}
 K = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} |A|^{2(N+1)} \int \prod_{k=1}^N (da_k db_k dc_k dd_k) dc_0 dd_0 \\
 & e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^N [a_n(d_n - \gamma c_n) - b_n(c_n - \beta d_n)] - \frac{iT}{\hbar} (d_0^2 + \sum_{n=1}^N (d_n^2 + b_n^2 + a_n^2))} \\
 & - \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} |x_k, y_k\rangle x_k^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} |x_k, y_k\rangle x_k y_{k-1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} |x_k, y_k\rangle y_k^2 \right]
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

El Jacobiano del cambio de variable que aparece en la expresión (5.14) es el producto de cuatro determinantes: el de dos matrices de $N \times N$ formadas por los elementos $\alpha_1^{kn} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial a_n}$ una, y por $\alpha_4^{kn} \equiv \frac{\partial p_{y_k}}{\partial b_n}$ la otra (para $k = 1, \dots, N$ y $n = 1, \dots, N$), y dos de $(N+1) \times (N+1)$ formadas por $\alpha_2^{kn} \equiv \frac{\partial y_k}{\partial c_n}$ una, y por $\alpha_3^{kn} \equiv \frac{\partial p_{x_k}}{\partial d_n}$ la otra (para $k = 1, \dots, N, N+1$ y $n = 0, 1, \dots, N$). En la referencia [11] (páginas 50-51) están calculados estos determinantes y el Jacobiano para el caso unidimensional y conmutativo. El transporte para el caso que aquí se trata es directo y trivial. El resultado es que $J = 1$.

La expresión (5.23) para la integral funcional resulta más práctica y fácil de manejar por la manera en que se resuelven las integraciones de expresiones que contienen términos como $x_k - x_{k-1}$. En la forma (5.15) del propagador, al querer abordar, por ejemplo, la integración sobre x_l , debido a que S_k depende de $(x_k - x_{k-1})$, se deben considerar en el integrando a e^{S_l} y $e^{S_{l+1}}$. Con la identidad (5.20), en el propagador (5.23) las integraciones sobre, por ejemplo, a_l , sólo consideran a expresiones que tienen que ver con el índice l .

Hasta este punto, la técnica presentada en esta sección se puede aplicar a cualquier sistema físico tal que su Hamiltoniano sea de la forma $H = T + V$ y acepte una expansión de Taylor.

5.1.3 El propagador del oscilador armónico

A partir de la expresión (5.23) para escribir la última exponencial en términos de las amplitudes de modo, del Hamiltoniano del oscilador armónico $H =$

¹La primera suma finita en (5.22) manifiesta la conservación de la forma diagonal (5.13) en el caso discreto.

$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ se ve que sólo son distintos de cero los términos tales que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} |_{(x_k, y_k)} x_k^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} |_{(x_k, y_k)} y_k^2 = \omega^2 (x_k^2 + y_k^2). \quad (5.24)$$

De las expansiones (5.16) y (5.17) para las variables del espacio fase discretizadas se tiene que

$$\begin{aligned} x_k^2 &= \sum_{n,m=1}^N a_n a_m g_n(k) g_m(k) \\ y_k^2 &= c_0^2 + 2c_0 \sum_{n=1}^N c_n f_n(k) + \sum_{n,m=1}^N c_n c_m f_n(k) f_m(k). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Entonces, el término (5.24) de (5.23) que falta expresar en términos de las amplitudes de modo (habiendo intercambiado las sumas sobre n y m de (5.25) con la suma sobre k) resulta

$$\sum_{k=1}^{N+1} \omega^2 (x_k^2 + y_k^2) = \omega^2 (N+1) [c_0^2 + \sum_{n=1}^N (c_n^2 + a_n^2 A_n^2)] \quad (5.26)$$

Por lo tanto, el integrando completo de la expresión (5.23) se escribe

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ \frac{i\alpha}{\hbar} \sum_{n=1}^N [a_n (d_n - \gamma c_n) - b_n (c_n - \beta d_n)] - \frac{iT}{2\hbar} [d_0^2 + \sum_{n=1}^N (d_n^2 + b_n^2 A_n^2)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\epsilon(N+1)}{2\hbar} \omega^2 [c_0^2 + \sum_{n=1}^N (c_n^2 + a_n^2 A_n^2)] \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{i\alpha}{\hbar} \sum_{n=1}^N [a_n (d_n - \gamma c_n) - b_n (c_n - \beta d_n)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{iT}{2\hbar} \left[d_0^2 + \omega^2 c_0^2 + \sum_{n=1}^N [d_n^2 + b_n^2 A_n^2 + \omega^2 (c_n^2 + a_n^2 A_n^2)] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para aclarar el proceso de integración que se lleva a cabo, se escribe la expresión anterior dentro de la integral (5.23) separándola en los productos de exponenciales siguientes

$$K = e^{\frac{i}{\hbar} S[z_c]} \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha}{(2\pi\hbar)^2} \right]^{(N+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^N (db_n da_n dd_n dc_n) dd_0 dc_0$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{n=1}^N \exp\left\{-\frac{iT}{2\hbar} b_n^2 A_n^2\right\} \\
& \prod_{n=1}^N \exp\left\{-\frac{iT}{2\hbar} \omega^2 a_n^2 A_n^2\right\} \\
& \prod_{n=1}^N \exp\left\{-\frac{iT}{2\hbar} d_n^2 + \frac{i\alpha}{\hbar} d_n (a_n + \beta b_n)\right\} \\
& \prod_{n=1}^N \exp\left\{-\frac{iT}{2\hbar} \omega^2 c_n^2 - \frac{i\alpha}{\hbar} c_n (b_n + \gamma a_n)\right\} \\
& \exp\left\{-\frac{iT}{2\hbar} d_0^2\right\} \\
& \exp\left\{-\frac{iT}{2\hbar} \omega^2 c_0^2\right\}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

(el orden en el que están escritas las variables de integración, es el orden en el que serán tomadas las integrales leyendo de derecha a izquierda). Empleando la fórmula de la integral de Fresnel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i\lambda z^2 + \nu z} = e^{\frac{i\nu^2}{4\lambda}} \sqrt{\frac{i\pi}{\lambda}}, \tag{5.29}$$

para $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$ y $\nu \in \mathbf{C}$, el resultado de integrar todas las amplitudes de modo es

$$\begin{aligned}
K &= e^{\frac{i}{\hbar} S[z_c]} \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\pi\hbar} \right) \left(\frac{1}{iT\omega} \right) \right. \\
& \quad \left. \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{1}{1 - \left[\left(\frac{\gamma^2}{\omega^2} + 1 \right) + (1 + \omega^2 \beta^2) \right] T^2 \omega^2 A_n^2 + \frac{T^4 \omega^4}{\alpha^2} A_n^2}} \right\} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar} S[z_c]} \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\pi\hbar} \right) \left(\frac{1}{iT\omega} \right) \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{1}{[1 - \lambda_1^2 T^2 A_n^2][1 - \lambda_2^2 T^2 A_n^2]}} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

En la última igualdad, λ_1 y λ_2 son dos números que permiten la factorización del denominador de la primera igualdad (pero, estos "números" son precisamente las frecuencias características del oscilador armónico clásico). Los primeros dos factores de la expresión anterior se pueden sacar del límite (son constantes). Como $A_n = \frac{1}{2(N+1)\text{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]} \approx \frac{1}{n\pi}$ cuando $N \gg 1$, se puede usar la siguiente identidad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[1 - \left(\frac{\phi}{n\pi} \right)^2 \right] = \frac{\text{sen}(\phi)}{\phi} \tag{5.31}$$

para reconocer un producto de funciones seno en el tercer factor de (5.30)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N [1 - \lambda_1^2 T^2 A_n^2] [1 - \lambda_2^2 T^2 A_n^2] \\
 & \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N [1 - (\frac{\lambda_1 T}{n\pi})^2] [1 - (\frac{\lambda_2 T}{n\pi})^2] \\
 & = \frac{\text{sen}(\lambda_1 T) \text{sen}(\lambda_2 T)}{\lambda_1 \lambda_2 T^2}.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Por lo tanto, el propagador del oscilador armónico es

$$K = e^{\frac{i}{\hbar} S[z_c]} \left(\frac{\alpha}{2\pi \hbar i} \right) \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\text{sen}(\lambda_1 T) \text{sen}(\lambda_2 T)}} \tag{5.33}$$

(la constante B de (5.6) se ha escogido como $B = \ln \omega$ para que cancele al factor $\frac{1}{\omega}$ y se recupere bien el caso conmutativo cuando $\theta, \sigma \rightarrow 0$, como se ve al final de la siguiente sección). La diferencia entre este propagador y el del caso conmutativo para el oscilador armónico está en que la acción evaluada en la trayectoria clásica es distinta porque las soluciones del oscilador armónico clásico son distintas, y en las frecuencias características que aparecen en el factor de regularización que acompaña a la exponencial de $\frac{i}{\hbar} S[z_c]$.

5.2 El propagador del oscilador armónico obtenido a través del Principio de Acción de Schwinger

Se calcula el propagador o función de transformación para el oscilador armónico a través del principio de acción de Schwinger, integrando la ecuación (4.39)

$$\delta \langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle = i \langle x'', p_y''; t'' | G(t'') - G(t') | x', p_y'; t' \rangle, \tag{5.34}$$

con el Hamiltoniano del oscilador armónico en el generador G de la transformación unitaria infinitesimal que hace las variaciones de las puntas de la función de transformación. El Hamiltoniano es un operador, definido por los que están asociados a las variables del espacio fase (éstos se escriben con letras minúsculas, y sus autovalores con letras minúsculas primadas).

Sea entonces el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (5.35)$$

Las ecuaciones de movimiento para los operadores de coordenadas y momentos que se derivan de este Hamiltoniano son exactamente las ecuaciones clásicas para este sistema, y por lo tanto se tienen las soluciones (3.33) y (3.35) pero ahora en términos de operadores (en lo que sigue se toma la notación tal que $x'[p'_y] \equiv x[p_y](t')$ y $x''[p''_y] \equiv x[p_y](t'')$ con t' el tiempo inicial y t'' el final; entonces, por $\delta x'$ por ejemplo, se entiende la variación del operador $x(t')$, pero se debe recordar que como éste es de primera clase, tal variación se comporta como un número). Si las soluciones para las ecuaciones de movimiento de los operadores son

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho_1(B'\text{sen}_1'' + B''\text{sen}_1') - \rho_2(A'\text{sen}_2'' + A''\text{sen}_2') \\ p_y(t) &= (\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B'\text{sen}_1'' + B''\text{sen}_1') - (\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A'\text{sen}_2'' + A''\text{sen}_2') \\ y(t) &= -\rho_1(B'\text{cos}_1'' - B''\text{cos}_1') - \rho_2(A'\text{cos}_2'' - A''\text{cos}_2') \\ p_x(t) &= (\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B'\text{cos}_1'' - B''\text{cos}_1') + (\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A'\text{cos}_2'' - A''\text{cos}_2'), \end{aligned} \quad (5.36)$$

con la siguiente notación

$$\begin{aligned} B' &= [(\theta\omega^2 + \lambda_2)x' - p'_y] \\ B'' &= [(\theta\omega^2 + \lambda_2)x'' - p''_y] \\ A' &= [(\theta\omega^2 - \lambda_1)x' - p'_y] \\ A'' &= [(\theta\omega^2 - \lambda_1)x'' - p''_y] \\ \text{sen}_i'' &= \text{sen } \lambda_i(t'' - t) \\ \text{cos}_i &= \text{cos } \lambda_i(t'' - t), \\ \text{sen}_i &= \text{sen } \lambda_i(t - t') \\ \text{cos}_i &= \text{cos } \lambda_i(t - t') \\ \rho_1 &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\text{sen}(\lambda_1 T)} \\ \rho_2 &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\text{sen}(\lambda_2 T)}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

y el generador $G(t)$ es

$$G(t) = \alpha[p_x(t)\delta x(t) - y(t)\delta p_y(t) + \theta p_x(t)\delta p_y(t) - \sigma y(t)\delta x(t)] - H(t)\delta t, \quad (5.38)$$

la diferencia de éste para los tiempos inicial y final que se debe construir de acuerdo con (5.34), teniendo en cuenta que como el Hamiltoniano del sistema en cuestión no depende explícitamente del tiempo $H(t'') = H(t')$, y definiendo $T = t'' - t'$, resulta

$$\begin{aligned}
 G(t'') - G(t') &= \alpha[p_x(t'')(\delta x'' + \theta \delta p_y'') - p_x(t')(\delta x' + \theta \delta p_y')] \\
 &\quad - y(t'')(\delta p_y'' + \sigma \delta x'') + y(t')(\delta p_y' + \sigma \delta x') \\
 &\quad - H(t'')\delta(t'' - t') \\
 &= \alpha[p_x(t'')(\delta x'' + \theta \delta p_y'') - p_x(t')(\delta x' + \theta \delta p_y')] \\
 &\quad - y(t'')(\delta p_y'' + \sigma \delta x'') + y(t')(\delta p_y' + \sigma \delta x') \\
 &\quad - \left[\frac{1}{2}(p_x(t'')^2 + p_y(t'')^2) + \frac{\omega^2}{2}(x(t'')^2 + y(t'')^2)\right]\delta T.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Para lo que sigue serán útiles las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \theta\omega^2)(\lambda_2 + \theta\omega^2) &= \omega^2 \\
 (\theta\omega^2 - \lambda_1)^2 + \omega^2 &= (\lambda_1 - \theta\omega^2)(\lambda_1 + \lambda_2) \\
 (\theta\omega^2 + \lambda_2)^2 + \omega^2 &= (\lambda_2 + \theta\omega^2)(\lambda_1 + \lambda_2) \\
 \lambda_1 \lambda_2 &= \frac{\omega^2}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Utilizando las soluciones (5.36) en la diferencia (5.39), aparecerán términos del tipo $A'A''$ y $B'B''$ que no se pueden calcular sacando los autovalores a través de la punta adecuada, ya sea hacia la izquierda o la derecha, por lo que tales términos se sustituyen, calculando los conmutadores correspondientes, por las expresiones $A'A' + [A', A'']$ y $B'B' + [B', B'']$ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
 &G(t'') - G(t') \\
 = &\alpha\{[(\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B' - B'' \cos(\lambda_1 T)) \\
 &+ (\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A' - A'' \cos(\lambda_2 T))](\delta x'' + \theta \delta p_y'') \\
 &- [(\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B' \cos(\lambda_1 T) - B'') \\
 &+ (\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A' \cos(\lambda_2 T) - A'')](\delta x' + \theta \delta p_y') \\
 &- [\rho_1(B'' \cos(\lambda_1 T) - B') + \rho_2(A'' \cos(\lambda_2 T) - A')](\delta p_y'' + \sigma \delta x'') \\
 &+ [\rho_1(B'' - B' \cos(\lambda_1 T)) + \rho_2(A'' - A' \cos(\lambda_2 T))](\delta p_y' + \sigma \delta x')\} \\
 &- \left\{\frac{[(\theta\omega^2 - \lambda_1)^2 + \omega^2]}{2}\rho_1^2[B'^2 + B''^2 - (2B'B' + [B', B'']) \cos(\lambda_1 T)]\right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{[(\theta\omega^2 + \lambda_2)^2 + \omega^2]}{2} \rho_2^2 [A'^2 + A''^2 - (2A''A' + [A', A'']) \cos(\lambda_2 T)] \delta T \\
& \equiv U + H\delta T. \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Todo lo que no está multiplicado por δT (denotado por U) es lo que no tiene que ver con el Hamiltoniano.

En este momento ya se puede realizar de manera sencilla el "bracket" del miembro derecho de (5.34):

$$\begin{aligned}
& \langle x'', p_y''; t'' | G(t'') - G(t') | x', p_y'; t' \rangle \\
& = \{ \alpha \{ [(\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B' - B'' \cos(\lambda_1 T)) \\
& + (\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A' - A'' \cos(\lambda_2 T))] (\delta x'' + \theta\delta p_y'') \\
& - [(\theta\omega^2 - \lambda_1)\rho_1(B' \cos(\lambda_1 T) - B'') \\
& + (\theta\omega^2 + \lambda_2)\rho_2(A' \cos(\lambda_2 T) - A'')] (\delta x' + \theta\delta p_y') \\
& - [\rho_1(B'' \cos(\lambda_1 T) - B') + \rho_2(A'' \cos(\lambda_2 T) - A')] (\delta p_y'' + \sigma\delta x'') \\
& + [\rho_1(B'' - B' \cos(\lambda_1 T)) + \rho_2(A'' - A' \cos(\lambda_2 T))] (\delta p_y' + \sigma\delta x') \} \\
& - \{ \frac{[(\theta\omega^2 - \lambda_1)^2 + \omega^2]}{2} \rho_1^2 [B'^2 + B''^2 - (2B''B' + [B', B'']) \cos(\lambda_1 T)] \\
& + \frac{[(\theta\omega^2 + \lambda_2)^2 + \omega^2]}{2} \rho_2^2 [A'^2 + A''^2 - (2A''A' + [A', A'']) \cos(\lambda_2 T)] \} \delta T \} \\
& \langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle \\
& = (U + H\delta T) \langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle. \tag{5.42}
\end{aligned}$$

(En la última igualdad, el factor $U + H\delta T$) no es un operador. Todos los operadores se han aplicado sobre sus autoestados, de manera que lo que aparece multiplicando a la función de transformación son números.)

Para continuar con el cálculo, tanto en U como en $H\delta T$ conviene agrupar los términos por la función trigonométrica por la que estén multiplicados, para después identificar los términos que se corresponden para poder armar variaciones totales.

Usando que ρ_i para $i \in \{1, 2\}$ tiene un inverso multiplicativo del seno, U se escribe

$$\begin{aligned}
U & = - \frac{\alpha\lambda_2}{(\lambda_2 + \theta\omega^2)} \frac{\delta(B''B')}{(\lambda_1 + \lambda_2)\text{sen}(\lambda_1 T)} - \frac{\alpha\lambda_1}{(\lambda_1 - \theta\omega^2)} \frac{\delta(A''A')}{(\lambda_1 + \lambda_2)\text{sen}(\lambda_2 T)} \\
& + \frac{\alpha\lambda_2}{(\lambda_2 + \theta\omega^2)} \frac{\cot(\lambda_1 T)}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \delta[(B'')^2 + (B')^2] \\
& + \frac{\alpha\lambda_1}{(\lambda_1 - \theta\omega^2)} \frac{\cot(\lambda_2 T)}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \delta[(A'')^2 + (A')^2]. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Se pueden identificar en $H\delta T$ (en los términos que tienen como factores al inverso del seno al cuadrado y al inverso del seno por la cotangente respectivamente) las derivadas parciales respecto T de la cotangente y el inverso del seno. El cálculo de los conmutadores $[A', A'']$ y $[B', B'']$ utilizando las soluciones (5.36) y la estructura conocida

$$\begin{aligned} [x(t), p_x(t)] &= i \\ [p_y(t), y(t)] &= -i \\ [x(t), y(t)] &= i\theta \\ [p_y(t), p_x(t)] &= -i\sigma \end{aligned} \quad (5.44)$$

tiene como resultado

$$\begin{aligned} [A', A''] &= i \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + \theta\omega^2)\rho_2} \\ [B', B''] &= i \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \theta\omega^2)\rho_1}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

lo que hace que en los términos en los que están involucrados se pueda identificar una derivada parcial respecto de T del logaritmo del seno. El término que viene del Hamiltoniano se puede escribir como

$$\begin{aligned} H\delta T &= \frac{(\lambda_1 - \theta\omega^2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{[B''^2 + B'^2]}{2} \delta[\cot(\lambda_1 T)] - B'' B' \delta\left[\frac{1}{\text{sen}(\lambda_1 T)}\right] \right) \\ &\quad \frac{(\lambda_2 + \theta\omega^2)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{[A''^2 + A'^2]}{2} \delta[\cot(\lambda_2 T)] - A'' A' \delta\left[\frac{1}{\text{sen}(\lambda_2 T)}\right] \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \delta(\ln[\text{sen}(\lambda_1 T)\text{sen}(\lambda_2 T)]). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Combinando las expresiones (5.43) para U y (5.46) para $H\delta T$, agrupando los términos que forman variaciones totales, se puede escribir

$$\begin{aligned} U + H\delta T &= \frac{(\lambda_1 - \theta\omega^2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} \delta[\cot(\lambda_1 T)] \frac{[B''^2 + B'^2]}{2} - \frac{1}{\text{sen}(\lambda_1 T)} B'' B' \\ &\quad + \frac{(\lambda_2 + \theta\omega^2)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} \delta[\cot(\lambda_2 T)] \frac{[A''^2 + A'^2]}{2} - \frac{1}{\text{sen}(\lambda_2 T)} A'' A' \\ &\quad + \frac{i}{2} \delta(\ln[\text{sen}(\lambda_1 T)\text{sen}(\lambda_2 T)]). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Finalmente, se puede agrupar toda esta expresión bajo un sólo signo de variación tal que la ecuación (5.34) se ha convertido en

$$\delta\langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle = i\delta \left\{ \frac{(\lambda_1 - \theta\omega^2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_1 T)] \frac{[B''^2 + B'^2]}{2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\text{sen}(\lambda_1 T)} B'' B' \\
& + \frac{(\lambda_2 + \theta\omega^2)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_2 T) \frac{A''^2 + A'^2}{2}] \\
& - \frac{1}{\text{sen}(\lambda_2 T)} A'' A' \\
& + \frac{i}{2} \ln[\text{sen}(\lambda_1 T)\text{sen}(\lambda_2 T)] \langle x'', p''_y; t'' | x', p'_y; t' \rangle.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Pasando la función de transformación del miembro derecho dividiendo al miembro izquierdo, se puede escribir esta ecuación de manera que ambos miembros sean la variación de una expresión

$$\begin{aligned}
\delta[\ln \langle x'', p''_y; t'' | x', p'_y; t' \rangle] &= i\delta \left\{ \frac{(\lambda_1 - \theta\omega^2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_1 T) \frac{B''^2 + B'^2}{2}] \right. \\
& - \frac{1}{\text{sen}(\lambda_1 T)} B'' B' \\
& + \frac{(\lambda_2 + \theta\omega^2)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_2 T) \frac{A''^2 + A'^2}{2}] \\
& - \frac{1}{\text{sen}(\lambda_2 T)} A'' A' \\
& \left. + \frac{i}{2} \ln[\text{sen}(\lambda_1 T)\text{sen}(\lambda_2 T)] \right\},
\end{aligned} \tag{5.49}$$

la que se puede integrar directamente dando como resultado

$$\begin{aligned}
\langle x'', p''_y; t'' | x', p'_y; t' \rangle &= e^C \sqrt{\frac{1}{\text{sen}(\lambda_1 T)\text{sen}(\lambda_2 T)}} \\
& \exp \left\{ \frac{i(\lambda_1 - \theta\omega^2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_1 T) \frac{B''^2 + B'^2}{2}] - \frac{1}{\text{sen}(\lambda_1 T)} B'' B' \right\} \\
& + \frac{i(\lambda_2 + \theta\omega^2)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_2 T) \frac{A''^2 + A'^2}{2}] - \frac{1}{\text{sen}(\lambda_2 T)} A'' A' \}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

(con $C \in \mathbb{C}$ una constante de integración).

En esta última expresión se puede identificar a la exponencial de la acción evaluada en la trayectoria clásica. Para hacerlo se sustituyen las soluciones clásicas del oscilador armónico (3.33) y (3.35) para las variables del espacio fase en el el Lagrangiano de primer orden (3.4), y después de hacer las

integraciones pertinentes se ve que

$$S[z_c] = \frac{(\lambda_1 - \theta\omega^2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_1 T) \frac{[B''^2 + B'^2]}{2} - \frac{1}{\sin(\lambda_1 T)} B'' B'] \\ + \frac{(\lambda_2 + \theta\omega^2)}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} [\cot(\lambda_2 T) \frac{[A''^2 + A'^2]}{2} - \frac{1}{\sin(\lambda_2 T)} A'' A'], \quad (5.51)$$

y por lo tanto, (5.50) se puede escribir como

$$\langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle = e^C \sqrt{\frac{1}{\text{sen}(\lambda_1 T) \text{sen}(\lambda_2 T)}} e^{iS[z_c]} \\ = e^C \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega} \right) \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\text{sen}(\lambda_1 T) \text{sen}(\lambda_2 T)}} e^{iS[z_c]}, \quad (5.52)$$

resultado similar al obtenido en la sección anterior (5.33) (dentro del radical se ha utilizado la identidad $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\omega^2}{\alpha}$). La constante C se puede fijar para que esta fórmula tenga un buen límite para el caso conmutativo ($\theta, \sigma \rightarrow 0$).

El propagador del oscilador armónico en el caso conmutativo también tiene como factor la exponencial de la acción evaluada en la trayectoria clásica (con $\theta = \sigma = 0$), pero el primer factor tiene a la frecuencia ω del oscilador en el denominador [21], cosa que se recupera de la fórmula (5.52) cuando se hace $\theta, \sigma \rightarrow 0$ si $C = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\alpha \omega^2}{(2\pi i)^2} \right]$. (La parte imaginaria de C se puede obviar porque sólo proporcionaría una fase irrelevante desde que lo que van a ser probabilidades son los módulos al cuadrado de (5.52).) Entonces,

$$\langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle = e^{iS[z_c]} \left(\frac{\alpha}{2\pi i} \right) \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\text{sen}(\lambda_1 T) \text{sen}(\lambda_2 T)}}. \quad (5.53)$$

Las frecuencias características son $\lambda_1 \equiv \lambda_{\mp}$ y $\lambda_2 \equiv \lambda_{\pm}$ de acuerdo con

$$\lambda_{\pm}^{\pm} = \frac{\mp(\theta\omega^2 + \sigma) \pm \sqrt{(\theta\omega^2 + \sigma)^2 + 4\frac{\omega^2}{\alpha}}}{2}, \quad (5.54)$$

donde el subíndice se toma de acuerdo al signo para el radical, y el superíndice de acuerdo al signo que tiene el primer término de la expresión anterior. (El número que está dentro del radical es positivo no importa si $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$, pero por lo que se vio en la deducción de la ecuación de Schrödinger (sección 4.3), α debe ser mayor que cero, pues $\frac{\alpha}{4\pi^2 \hbar^2}$ tiene que ser el módulo al cuadrado de cierto número complejo.) En el límite $\theta, \sigma \rightarrow 0$, $\lambda_{\pm}^{\pm} = \pm\sqrt{\omega^2}$, de manera que $\lambda_{\mp} = \lambda_{\pm}$, y por lo tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \omega$. El límite cuando $\theta, \sigma \rightarrow 0$ de (5.50) es

$$\langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle = \frac{\omega}{2\pi i \text{sen}(\omega T)} e^{iS[z_c]_{(\theta=\sigma=0)}}, \quad (5.55)$$

que es el propagador del oscilador armónico [69] del caso conmutativo en dos dimensiones (cuando se fijan en las puntas a las variables x y p_y).

Las frecuencias características del oscilador armónico (cuántico y clásico) que aquí se obtienen, están en desacuerdo con las que se presentan en [1], además de que ahí no queda claro que el propagador se escribe como un factor multiplicando a la exponencial de la acción evaluada en la trayectoria clásica no conmutativa. Sin embargo, el resultado (5.53) está de acuerdo con la conclusión de la referencia mencionada alrededor de que el Hamiltoniano del oscilador armónico en el caso no conmutativo representa a un oscilador anisotrópico, pero con frecuencias características λ_1 y λ_2 . Éstas sí están de acuerdo con las obtenidas en [23, 24, 25].

El propagador para la partícula libre Con base en el hecho de que la expresión (5.53) para el propagador del oscilador armónico recupera bien el del caso conmutativo cuando los parámetros θ y σ tienden a cero, se calcula el propagador de la partícula libre en el caso no conmutativo haciendo tender a cero la frecuencia ω de (5.53). Considerando que el factor $e^{iS[z_c]}$ del propagador (5.50) al tomar $\omega \rightarrow 0$ recupera la exponencial de la acción evaluada en la trayectoria clásica de la partícula libre, para obtener el propagador de ésta sólo resta tomar el límite del primer factor cuando $\omega \rightarrow 0$. El propagador de la partícula libre en la Mecánica Cuántica No Conmutativa resulta ser

$$\langle x'', p_y''; t'' | x', p_y'; t' \rangle = \frac{\alpha}{2\pi i} \sqrt{\frac{\sigma}{T \text{sen}(\sigma T)}} e^{iS[z_c]_{PLNC}} \quad (5.56)$$

(*PLNC* denota "partícula libre no conmutativa").

**TESIS CON
FALTA DE ORIGEN**

Capítulo 6

Deformaciones de álgebras y la Mecánica Cuántica

En este capítulo se resumen las ideas contenidas en un método de cuantización que involucra la sustitución de los productos del álgebra asociada a una teoría clásica, por un producto no local asociativo llamado producto estrella (o de Moyal). En este sentido se habla de la deformación de un álgebra.

En la sección 6.1 se plantea la forma en que se trata a una geometría no conmutativa usando un álgebra no conmutativa, que es producto de la deformación de una conmutativa. Además, se ilustra cómo este procedimiento se puede emplear para hacer una cuantización de una teoría clásica que cuenta con un álgebra de funciones del espacio fase. En la sección 6.2 se expone la perspectiva de hacer una Mecánica Cuántica No Conmutativa por este método de cuantización.

6.1 Geometría no conmutativa

6.1.1 Aproximación a la geometría no conmutativa a través del álgebra

Es difícil explicar qué es la geometría no conmutativa. Es más fácil decir qué es un álgebra no conmutativa.

La estructura de una variedad conmutativa se puede trasladar al álgebra de todas las funciones suaves que van de la variedad a un campo (de manera biyectiva) con la multiplicación conmutativa de las funciones asumiendo el

papel del producto del álgebra [40]:

Geometría conmutativa \rightarrow Álgebra conmutativa

Cada elemento de la geometría tienen asociado uno y sólo uno en el álgebra; por ejemplo, a cada punto de la variedad se le asocia el conjunto de todas las funciones que se anulan ahí. La idea general para representar la geometría no conmutativa es deformar un álgebra conmutativa para obtener una que no lo es, modificando su producto de tal manera que el producto usual fg de dos funciones del álgebra conmutativa, se sustituye por un producto estrella (\star) definido por

$$f \star g = fg + \hbar P(f, g) + \dots, \quad (6.1)$$

donde P es un mapeo bilineal que toma parejas del álgebra y entrega un elemento de la misma, y \hbar es un parámetro constante. Es decir (de manera esquemática),

Geometría conmutativa \rightarrow Álgebra conmutativa

$\downarrow \star$

Geometría no conmutativa \leftarrow Álgebra no conmutativa

Por ejemplo, para trabajar con las herramientas asociadas a la Mecánica Cuántica (como el álgebra de operadores), se puede partir de un álgebra de funciones $f(q, p)$ conmutativa asociada a una teoría clásica; funciones que toman elementos del espacio fase clásico representado por \mathbf{R}^2 (para un grado de libertad), y equipado con un paréntesis de Poisson $[f, g]$ que funciona como el mapeo bilineal P del producto- \star

$$(f \star g)(x) = f(x)e^{\frac{i}{\hbar} w^{ij} \vec{\partial}_{x^i} \vec{\partial}_{x^j}} g(x) \quad (6.2)$$

($x = (x^1, x^2) = (q, p)$), con (w^{ij}) una matriz antisimétrica, no degenerada y constante (se está tomando la convención de suma sobre índices repetidos). De la definición anterior, si $[f, g]_{\star} \equiv f \star g - g \star f$, el producto- \star tiene como consecuencia para las variables del espacio fase que

$$\begin{aligned} [x^i, x^j]_{\star} &= iw^{ij} \\ ([q, p]_{\star}) &= iw^{12} \equiv i\hbar. \end{aligned} \quad (6.3)$$

El razonamiento para construir la Mecánica Cuántica deformando los productos de una teoría clásica es el siguiente. Partiendo del álgebra de funciones

$f(q, p)$ del espacio fase de una teoría clásica, se define el operador F asociado a f como

$$F(Q, P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau d\sigma dq dp e^{-i\tau(Q-q) - i\sigma(P-p)} f(q, p), \quad (6.4)$$

o, si

$$\tilde{f}(\tau, \sigma) = \int dq dp e^{i(\tau q + \sigma p)} f(q, p) \quad (6.5)$$

es una transformada de Fourier de f , el operador F se puede escribir

$$F(Q, P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau d\sigma U(\tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma), \quad (6.6)$$

donde

$$U(\tau, \sigma) = e^{-i(\tau Q + \sigma P)} \quad (6.7)$$

son los elementos de un grupo (el grupo de Weyl-Heisenberg) que tiene por álgebra de Lie a aquella representada por $[Q, P] = i\hbar$. Los operadores U actúan como traslaciones de los asociados a las variables del espacio fase. Tales operadores se componen como

$$U(\tau_1, \sigma_1) U(\tau_2, \sigma_2) = e^{-i(\tau_1 \sigma_2 - \sigma_1 \tau_2)} U(\tau_1 + \tau_2, \sigma_1 + \sigma_2)$$

(por la fase $e^{-i(\tau_1 \sigma_2 - \sigma_1 \tau_2)}$ se dice que se tiene una representación proyectiva del grupo Abelian de traslaciones en el espacio fase). A f suele llamársele el símbolo de Weyl (o solamente el "símbolo") del operador F .

Las funciones $f(q, p)$ se pueden recuperar de sus operadores asociados, usando un SOC, como por ejemplo $\{|q\rangle\}$, para el espacio de Hilbert sobre el cual actúa F a través de

$$f(q, p) = \int d\sigma' e^{-ip\sigma'} \langle q + \frac{\hbar}{2}\sigma' | F(Q, P) | q - \frac{\hbar}{2}\sigma' \rangle. \quad (6.8)$$

Las transformaciones (6.4) y (6.8) son las que permiten pasar del álgebra conmutativa o clásica (la de funciones f sobre el espacio fase) a la no conmutativa o cuántica (la de operadores F sobre el espacio de Hilbert).

Si $F = |\psi\rangle\langle\psi|$ es el operador de proyección sobre el estado puro $|\psi\rangle$, su símbolo o función clásica asociada es

$$f_{|\psi\rangle}(q, p) = \int d\sigma' e^{-ip\sigma'} \langle q + \frac{\hbar}{2}\sigma' | \psi \rangle \langle \psi | q - \frac{\hbar}{2}\sigma' \rangle$$

$$= \int d\sigma' e^{-ip\sigma'} \psi(q + \frac{\hbar}{2}\sigma') \bar{\psi}(q - \frac{\hbar}{2}\sigma'), \quad (6.9)$$

donde $\bar{\psi}$ es el complejo conjugado de ψ . Las funciones del tipo de $f_{|\psi\rangle}$ son conocidas como las funciones de Wigner. Éstas han sido usadas para definir una Mecánica Cuántica de funciones de operadores que no conmutan [57, 71].

El producto- \star entra en el razonamiento cuando surge la pregunta de cuál es el símbolo o función clásica asociada con el producto (o composición) de operadores. Si f es la función clásica de F y g la de G dadas por (6.8), entonces de (6.6) se tiene que

$$\begin{aligned} FG &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\sigma_1 d\tau_1 d\sigma_2 d\tau_2 U(\tau_2, \sigma_2) U(\tau_1, \sigma_1) \bar{f}(\tau_1, \sigma_1) \bar{g}(\tau_2, \sigma_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\sigma_1 d\tau_1 d\sigma_2 d\tau_2 U(\tau_1 + \tau_2, \sigma_1 + \sigma_2) e^{\frac{i\hbar}{2}(\tau_1\sigma_2 - \sigma_1\tau_2)} \bar{f}(\tau_1, \sigma_1) \bar{g}(\tau_2, \sigma_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma_3 d\tau_3 U(\tau_3, \sigma_3) \\ &\quad \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma_4 d\tau_4 e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma_3\tau_4 - \tau_3\sigma_4)} \bar{f}\left(\frac{\tau_3}{2} + \tau_4, \frac{\sigma_3}{2} + \sigma_4\right) \bar{g}\left(\frac{\tau_3}{2} - \tau_4, \frac{\sigma_3}{2} - \sigma_4\right) \right], \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde se han definido las variables $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$, $\tau_4 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{2}$, $\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$ y $\sigma_4 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$. Ahora, se puede ver que cuando el producto- \star es como el definido en (6.2), si \bar{f} es la transformada de Fourier de f y \bar{g} es la de g de acuerdo con (6.5), la de $f \star g$ es

$$\widetilde{f \star g}(\tau, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau' d\sigma' e^{\frac{i\hbar}{2}(\tau\sigma' - \sigma\tau')} \bar{f}\left(\frac{\tau}{2} + \tau', \frac{\sigma}{2} + \sigma'\right) \bar{g}\left(\frac{\tau}{2} - \tau', \frac{\sigma}{2} - \sigma'\right), \quad (6.11)$$

y por lo tanto, (6.10) se puede escribir como (para $\hbar = 1$)

$$FG = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma_3 d\tau_3 U(\tau_3, \sigma_3) \widetilde{f \star g}(\tau_3, \sigma_3), \quad (6.12)$$

es decir, el producto- \star entre dos funciones clásicas representa la composición de operadores del álgebra de operadores no conmutativa. En términos de las funciones f y g en vez de sus transformadas de Fourier:

$$FG = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma_3 d\tau_3 dq dp e^{i(\sigma_3 P - p) + \tau_3(Q - q)} f \star g(q, p). \quad (6.13)$$

6.1.2 Probabilidades, ortogonalidad y ecuaciones de movimiento

La función de Wigner (6.9) independiente del tiempo que le corresponde a $\psi(q)_n$ un estado puro que satisface la ecuación de autovalores $H\psi_n = E_n\psi_n$ con un espectro discreto, es un caso particular de la definición general de la función clásica asociada al operador $|\psi_n\rangle\langle\psi_m|$

$$\begin{aligned} f_{mn}(q, p) &= \int d\sigma' e^{-i\sigma'p} \langle q + \frac{\hbar}{2}\sigma' | \psi_n \rangle \langle \psi_m | q - \frac{\hbar}{2}\sigma' \rangle \\ &= \int d\sigma' \bar{\psi}_m(q - \frac{\hbar}{2}\sigma') e^{-i\sigma'p} \psi_n(q + \frac{\hbar}{2}\sigma') = \bar{f}_{nm}(q, p), \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde ψ_m y ψ_n son dos estados ortonormales que satisfacen la ecuación de autoestados mencionada. Con las funciones f_{nm} se puede construir la matriz densidad [20], donde los elementos de la diagonal están dados por $f_{nn} \equiv f_n$ las funciones de Wigner asociadas a los estados puros.

Entonces, si A es la función clásica de un operador A , definida de acuerdo con (6.8), sus elementos de matriz se calculan como

$$\langle \psi_m | A | \psi_n \rangle = \int dq dp \ a(q, p) f_{mn}(q, p), \quad (6.15)$$

y sus valores de espectación se obtienen por los elementos de la diagonal de esta matriz

$$\langle A \rangle = \int dq dp \ a(q, p) f_n(q, p). \quad (6.16)$$

Se tiene además la condición de normalización

$$\int dq dp f_n(q, p) = 1, \quad (6.17)$$

o más general, utilizando la ortogonalidad de los estados ψ_m y ψ_n ,

$$\int dq dp f_{mn}(q, p) = \int dq \bar{\psi}_n(q) \psi_m(q) = \delta_{mn}. \quad (6.18)$$

Con el paréntesis \star definido por $[f, g]_\star = f \star g - g \star f$, se puede ver que las funciones de Wigner que no dependen del tiempo $f(q, p)$ conmutan con el Hamiltoniano [19]

$$[f(q, p), H(q, p)]_\star = 0; \quad (6.19)$$

la dependencia del tiempo de las funciones de Wigner para estados puros está dada por la ecuación dinámica de Moyal [57]

$$i\hbar \frac{\partial f(q, p, t)}{\partial t} = [f(q, p, t), H(q, p, t)]_* \quad (6.20)$$

Se puede formalmente separar las variables de f en la parte temporal y la dependencia de las variables del espacio fase usando el operador de evolución- \star (con H el Hamiltoniano)

$$U_*(q, p, t) = e^{\frac{i\hbar}{\hbar} H} \equiv 1 + \frac{it}{\hbar} H + \left(\frac{it}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2!} H \star H + \left(\frac{it}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{3!} H \star H \star H + \dots$$

La separación es

$$f(q, p, t) = U_*^{-1}(q, p, t) \star f(q, p, 0) U_*(q, p, t) \quad (6.21)$$

(en el operador U_* el Hamiltoniano se sustituye por la energía E como constante de separación), donde $f(q, p, 0)$ es la función (estacionaria) de Wigner a un tiempo dado, que satisface la ecuación de auto- \star -valores [19]

$$H(q, p) \star f(q, p) = E f(q, p). \quad (6.22)$$

El producto- \star entre las funciones clásicas actúa sobre los argumentos de éstas, y como la acción de un operador de traslación sobre cualquier función de la variable que se traslada es tal que $e^{a\partial_q} h(q) = h(q+a)$, entonces

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q\right) g\left(q, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q\right) g(q, p). \quad (6.23)$$

Esto se puede usar para demostrar que la energía de cierto estado representado por la función $f(q, p)$, calculada como el valor esperado del Hamiltoniano, es

$$\begin{aligned} \langle H(q, p) \rangle &= \int dq dp H(q, p) f(q, p) \\ &= \int dq dp H(q, p) \star f(q, p) = E \int dq dp f(q, p) = E, \end{aligned} \quad (6.24)$$

es decir, se obtienen los mismos espectros para las funciones de Wigner f que los de la cuantización convencional para ψ . Además, la ecuación de auto- \star -valores se puede escribir como

$$H(q, p) \star f(q, p) = H\left(q, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q\right) f\left(q, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right)$$

$$= H(q + \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_q) f(q, p) = E f(q, p). \quad (6.25)$$

La moraleja es que deformando con un producto- \star el álgebra de funciones clásicas sobre un espacio fase, se obtiene el álgebra de operadores no conmutativa de la Mecánica Cuántica. El producto- \star interviene (al menos) en dos aspectos importantes: primero, la composición de operadores tiene asociada la función clásica que es el producto- \star de las funciones asociadas a cada uno de ellos; y segundo, es el producto que aparece en la ecuación de auto- \star -valores para las funciones de Wigner estacionarias y la definición del operador de evolución.

Este par de ideas fundamentales son la base de la propuesta que se presenta en la sección siguiente para formular una Mecánica Cuántica No Conmutativa.

6.2 La Mecánica Cuántica No Conmutativa

6.2.1 Deformación de un campo clásico $\psi(x, y)$

Es usada en literatura reciente [31, 32, 55, 67] una forma de introducir la no conmutatividad de las coordenadas para la Mecánica Cuántica mediante la deformación de un campo clásico, usando el producto estrella

$$\star = e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon^{ij} \theta \vec{\partial}_{x^i} \vec{\partial}_{x^j}}$$

((x^1, x^2) \equiv (x, y), con x e y coordenadas para el plano), con el que se plantea una ecuación de Schrödinger para funciones del tipo $\psi(x, y)$, y se obtienen coordenadas que satisfacen la relación de conmutación

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij} = i\theta \epsilon^{ij} \quad (6.26)$$

(bajo el conmutador ordinario $[A, B] = AB - BA$, donde $\epsilon^{12} = 1$).

Una ecuación de Schrödinger

Partiendo de una ecuación como

$$i \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial t} = \left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x, y) \right] \psi(x, y) \quad (6.27)$$

para el campo clásico $\psi(x, y)$, obtenida a partir de la acción

$$S = \int dt d^2x \bar{\psi}(x, y, t) \left[i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - V(\mathbf{x}) \right] \psi(x, y, t) \quad (6.28)$$

(con $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$), se deforman todos los productos sustituyéndolos por un producto- \star definido como [55]

$$(A \star B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) [e^{\frac{i}{2} \theta^{ij} \vec{\partial}_{x^i} \vec{\partial}_{x^j}}] B(\mathbf{x}) \quad (6.29)$$

($\mathbf{x} = (x^1, x^2)$), para A y B dos elementos en la teoría clásica que aparecen multiplicándose.

En la ecuación (6.27) el único término que va a sufrir cambios con respecto al producto usual (cuando se sustituye la producto- \star) es el potencial sobre el campo $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$V(\mathbf{x}) \star \psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(\mathbf{x}) \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \psi(\mathbf{x}). \quad (6.30)$$

Reemplazando a ∂_{j_k} por $i p_{j_k}$ e introduciendo las variables $\tilde{p}_{i_k} \equiv \theta^{i_k j_k} p_{j_k}$, se tiene la transformada de Fourier

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(\mathbf{x}) \tilde{p}_{i_1} \dots \tilde{p}_{i_n} \psi(\mathbf{x}) = i^n \int d^2k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} V(\mathbf{k}) (\mathbf{k}\tilde{\mathbf{p}})^n \psi(\mathbf{x}), \quad (6.31)$$

que sumando sobre n se obtiene que

$$V(\mathbf{x}) \star \psi(\mathbf{x}) = \int d^2k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{\frac{i}{2} \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{k}} V(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{x}). \quad (6.32)$$

Ahora, usando la ortogonalidad de p y \tilde{p} y las relaciones de conmutación usuales $[x^i, p_j] = i\delta_{ij}$, resulta que

$$V(\mathbf{x}) \star \psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{2}) \psi(\mathbf{x}). \quad (6.33)$$

Las nuevas coordenadas $\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{2}$ satisfacen las relaciones (6.26), y en la ecuación de movimiento (6.27) se reemplazan a \mathbf{x}' por \mathbf{x} en el Hamiltoniano para recuperar el producto anterior.

El resultado por lo tanto es que se pueden construir ciertas coordenadas que manifiestan la no conmutatividad (definiendo $x' = x + \frac{\theta}{2} p_y$ y $y' = y - \frac{\theta}{2} p_x$, con $[x'^i, x'^j] = i\theta^{ij}$) recuperando el producto usual al mismo tiempo

$$V(x, y) \star \psi(x, y; t) = V(x + \frac{\theta}{2} p_y, y - \frac{\theta}{2} p_x) \psi(x, y; t)$$

$$= V(x', y')\psi(x, y; t), \quad (6.34)$$

pero pagando una traslación en el potencial del problema.

Existen trabajos dedicados a la aplicación de este resultado a varios sistemas, como el campo central en general [30] (y el átomo de Hidrógeno [13] y el oscilador armónico [31, 55] en particular), el problema de Landau [32] y otros como la fase de Berry [2], el efecto Aharonov-Bohm [14] y el momento magnético del muón anómalo [70].

Discusión sobre la función $\psi(x, y)$

Los trabajos mencionados que aplican el resultado (6.34) utilizan “funciones de onda” $\psi(x, y)$ que dependen de las dos coordenadas; fundamentalmente las funciones que satisfacen la ecuación de Schrödinger (6.27).

La aproximación que se hizo en la sección 4.1 a la Mecánica Cuántica No Conmutativa Mediante la integral funcional de Feynman, utiliza un SOC para el espacio de Hilbert asociado a un sistema físico que es común a los operadores X y P_y , y por lo tanto, la función de onda depende de los autovalores de estos operadores (x y p_y). Como los operadores X y Y no conmutan no se puede construir una función de onda que dependa de sus autovalores (x e y) pues no se puede definir un SOC común a estos operadores. No es clara hasta este momento la relación de la función $\psi(x, y)$ que aparece en el resultado (6.34), si lo que se intenta a través de esta deformación con el producto- \star (6.29) es definir una Mecánica Cuántica, con la función de onda $\psi(x, p_y)$ de las construcciones del capítulo 4 de esta tesis.

El empleo de un SOC mixto o “híbrido” como lo son (4.4) o (4.12) está en la línea de trabajos como los de las referencias [23, 24, 25]. Allí se menciona la imposibilidad de definir una representación de coordenadas debido a que el grupo de Galileo de una teoría conmutativa sufre alteraciones asociadas a un parámetro “exótico” proporcional al no conmutativo θ .

6.2.2 Un producto- \star que introduce la no conmutatividad de las coordenadas

La perspectiva que se plantea en esta subsección para construir la Mecánica Cuántica No Conmutativa es deformando el álgebra de funciones clásicas sobre el espacio fase con el producto- \star dado por

$$\star \equiv e^{i\frac{\hbar}{2}(\vec{\partial}_{x_i} \vec{\partial}_{p_i} - \vec{\partial}_{p_i} \vec{\partial}_{x_i}) + i\frac{i\hbar^2}{2}\theta(\vec{\partial}_{x_i} \vec{\partial}_{x_j} - \vec{\partial}_{x_j} \vec{\partial}_{x_i}) + i\frac{i\hbar^2}{2}\alpha(\vec{\partial}_{p_i} \vec{\partial}_{p_j} - \vec{\partial}_{p_j} \vec{\partial}_{p_i})}, \quad (6.35)$$

con $i, j \in \{1, 2\}$, ϵ^{ij} el tensor totalmente antisimétrico de dos dimensiones, y $\epsilon^{12} = 1$ ($(x^1, x^2) \equiv (x, y)$ y $(p_1, p_2) \equiv (p_x, p_y)$). De esta manera, las ecuaciones de movimiento que resulten son ecuaciones para funciones clásicas; el producto- \star permite manipular objetos cuánticos en espacios clásicos.

La definición (6.35) está motivada por la forma del paréntesis de Poisson (2.2) definido por la matriz simpléctica (3.1) de la Mecánica Clásica No Conmutativa. Así, el paréntesis- \star definido con el producto (6.35) es tal que se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} [x, y]_{\star} &= i\theta \\ [p_x, p_y]_{\star} &= i\sigma \\ [x^i, p_j]_{\star} &= i\hbar\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Ahora las funciones de Wigner tendrá una expresión un poco más complicada cuando se escriben (de acuerdo con (6.9)) en términos del SOC $\{|x, p_y\}$ o el $\{|y, p_x\}$ para el espacio de Hilbert donde actúan los operadores que se definen con ellas. Este SOC es el mismo que se utilizó en las formulaciones de la Mecánica Cuántica No Conmutativa del capítulo 4. Pero, además hay otro detalle. El álgebra de Heisenberg representada por (6.36) es el álgebra de Lie del grupo de operadores que hacen las traslaciones en el espacio fase (análogo al que tiene como elementos a (6.7)) cuyos elementos son

$$U(\tau, \tau', \eta, \eta') = e^{-i(\tau X + \tau' P_y + \eta P_x + \eta' Y)}. \quad (6.37)$$

Con ellos se definen los operadores de la Mecánica Cuántica No Conmutativa asociados a las funciones clásicas del espacio fase de manera similar a (6.6). La forma de los operadores (6.37) es consistente con los operadores infinitesimales (4.8) que fueron utilizados en la subsección 4.1.1 para trasladar al SOC $\{|x, p_y\}$. (Operadores similares a (4.8) pero en términos de X y P_y trasladarían al SOC $\{|y, p_x\}$, por eso los que trasladan a todas las variables del espacio fase consideran a todos los operadores asociados a ellas. Esto tiene que ver con que en la Mecánica Cuántica No Conmutativa, a x no sólo la traslada P_x (como en el caso conmutativo) sino también Y , y a p_y lo trasladan los operadores Y y P_x ; en la otra representación, a y la traslada tanto P_y como X , y a p_x , X y P_y .)

Es de esperarse que para las funciones de Wigner $f(x, p_y, y, p_x)$ de la Mecánica Cuántica No Conmutativa se obtenga la ecuación de movimiento

$$i\hbar \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} = [f(x, p, t), H(x, p, t)]_{\star}, \quad (6.38)$$

con el producto \star dado por (6.35), así como la ecuación de auto- \star -valores

$$H(x, y, p_x, p_y) \star f(x, p_y, y, p_x) = E f(x, p_y, y, p_x) \quad (6.39)$$

y la regla que viene de la forma de las traslaciones $e^{a\partial_x} h(z) = h(z + a)$

$$f(x, p_y, y, p_x) \star g(x, p_y, y, p_x) = f(x', p_y', y', p_x') g(p_x, p_y, x, y), \quad (6.40)$$

con

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_{p_x} + i\theta \vec{\partial}_y \\ p_y' &= p_y - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_y - i\sigma \vec{\partial}_{p_x} \\ y' &= y + \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_{p_y} - i\theta \vec{\partial}_x \\ p_x' &= p_x - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_x + i\sigma \vec{\partial}_{p_y}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Con esta regla, la ecuación de auto- \star -valores para el Hamiltoniano $H = p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2$ del oscilador armónico (y $f \in C^2$) es

$$\begin{aligned} &(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2)f - \frac{\hbar^2}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_{p_x}^2 + \partial_{p_y}^2)f \\ &- [\sigma^2(\partial_{p_x}^2 + \partial_{p_y}^2) + \theta^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)]f + i\hbar(x\partial_{p_x} + y\partial_{p_y} - p_x\partial_x - p_y\partial_y)f \\ &+ 2i[\theta(x\partial_y - y\partial_x) + \sigma(p_x\partial_{p_y} - p_y\partial_{p_x})]f + \\ &\hbar[\theta(\partial_{p_y}\partial_x - \partial_{p_x}\partial_y) + \sigma(\partial_x\partial_{p_y} - \partial_y\partial_{p_x})]f = E f, \end{aligned} \quad (6.42)$$

que debería en algún momento manifestar a dos osciladores acoplados de acuerdo con las soluciones para el oscilador armónico clásico de la sección 3.2, y el propagador para este sistema del capítulo 5.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Conclusiones y perspectivas

En la primera parte de la tesis, en el capítulo 3, vimos que incluir relaciones de conmutación nuevas entre las coordenadas del plano tiene como consecuencia que el Lagrangiano en el espacio configuración no es de segundo orden, y sus ecuaciones de movimiento, tienen infinitas derivadas de las coordenadas respecto del tiempo. Este resultado es un indicio de que la no conmutatividad está relacionada con la no localidad para el espacio configuración. En el capítulo 4 recordamos la afirmación de Feynman sobre el requisito para el Lagrangiano clásico (de depender de hasta la primera derivada respecto del tiempo de las coordenadas) para construir la integral de camino en el espacio configuración. Claramente el LNC en este espacio tiene un problema con este hecho, y sería entonces interesante preguntarse cómo cuantizarlo, aunque en [45] se dice que esto no se puede hacer.

El LNC en el espacio configuración se puede escribir de manera que depende de hasta las segundas derivadas de las coordenadas respecto del tiempo, pero sustituyendo los productos entre velocidades y aceleraciones por un producto no local que tiene derivadas de orden infinito respecto del tiempo. No estamos librándonos de la no localidad (ni la no conmutatividad), sino que se está representando por un producto que se escribe como una serie. En el capítulo 6, de la segunda parte de la tesis, expusimos precisamente la forma de cuantización que involucra la sustitución de los productos del álgebra de funciones por un producto no local y asociativo, representado por la exponencial del paréntesis de Poisson, para construir un álgebra de operadores no conmutativa. Otra pregunta interesante es qué tiene que ver el producto no local con el que se escribe el LNC en el espacio configuración, con algún producto de los que se pueden usar para cuantizar una teoría clásica.

El problema del campo central estudiado con el procedimiento abordado en la sección 3.2, como dijimos, es un problema que está en el espacio fase. El mismo procedimiento en el caso conmutativo traslada el problema al espacio configuración, pues en ese caso el procedimiento está despejando a los momentos como variables auxiliares. Resolver el campo central directamente usando las ecuaciones de movimiento que vienen del LNC en el espacio configuración, es un problema abierto.

En el capítulo 6 comparamos las funciones $\psi(x, y)$ que se utilizan en la literatura reciente para formular una Mecánica Cuántica No Conmutativa con las funciones de onda del capítulo 4 que dependen de una coordenada y un momento $\psi(x, p_y)$. No nos queda claro aún la relación entre estas dos

funciones de onda (o si hay una relación). Las funciones $\psi(x, y)$ son parecidas a las funciones de Wigner del capítulo 6, pero de manera incompleta pues les faltan los dos momentos. De hecho, es una pregunta interesante el cómo construir funciones $f'(x, y)$ de las coordenadas a partir de las funciones de Wigner $f(x, p_y, y, p_x)$ que se utilizarían en la formulación de la Mecánica Cuántica No Conmutativa a través de la deformación del álgebra de funciones clásicas, usando un producto estrella como el propuesto en la sección 6.2. Esta formulación nos parece muy natural. Deformar al mismo tiempo el producto de un álgebra conmutativa con los parámetros no conmutativos θ, σ y \hbar , nos parece una manera adecuada para aproximarse a la Mecánica Cuántica No Conmutativa por este método. Esto también porque la no conmutatividad está planteada por definición en el espacio fase completo (es decir, a través del paréntesis de Poisson).

Como parte de las alteraciones no conmutativas a las soluciones para algunos sistemas físicos, vimos en la sección 3.5.2 que el ángulo de Hannay se ve modificado por la suma de un ángulo extra, además de que las frecuencias características de las variables angulares resultan reparametrizadas dependiendo de la masa del péndulo (aproximado por un oscilador). Una de las perspectivas que se desprenden de esta tesis es el estudio de las fases geométricas, como la fase de Berry y el ángulo de Hannay de la subsección 3.5.2, en el contexto de las Mecánicas Clásica y Cuánticas No Conmutativas. En la teoría de este tipo de fases se trabaja con espacios de variables rápidas y espacios de variables lentas. Las preguntas que nos hemos hecho son alrededor de las consecuencias que tendría hacer no conmutativo uno de estos espacios sobre el otro, o hacer no conmutativos a los dos. De hecho, estas preguntas fueron en gran medida las que dieron origen a varias de las líneas de investigación desarrolladas en la tesis.

Sería muy interesante estudiar el tipo de consecuencias fenomenológicas que podrían obtenerse en los sistemas que presentan fases geométricas cuando el espacio es no conmutativo. El hecho de que al menos el ángulo de Hannay para el péndulo de Foucault se ve modificado de manera proporcional a θ , se puede ver como un incentivo es esta dirección.

Un tema que podría valer la pena prestarle atención, es algún análisis perturbativo del LNC en el espacio configuración. Aunque hay que considerar que al cortar las series de los momentos despejados como variables auxiliares (si el análisis toma a θ como parámetro de perturbación) en realidad se está cortando la no conmutatividad. Es decir, la no conmutatividad del espacio fase es inseparable de la no localidad en el espacio configuración.

Apéndices

A: Variaciones a parámetro fijo vs. variaciones funcionales

El principio de Hamilton establece que las ecuaciones de movimiento de la Mecánica Clásica se obtienen calculando el extremo del funcional de acción cuando se varía la trayectoria en la que se evalúa. En esta variación el parámetro (como el tiempo) se mantiene fijo. Existe otro tipo de variación en la que también el parámetro se varía. Una exposición detallada del principio de Hamilton y los teoremas de conservación relacionados con éste se puede encontrar en [42]. En este apéndice se resume la lógica que sigue la deducción de las ecuaciones de movimiento, deteniéndose a ilustrar la diferencia entre los dos tipos de variaciones mencionados.

Sea un sistema físico con m variables independientes o parámetros t^k para $k \in \{1, \dots, m\}$ y n variables dependientes o coordenadas z^α para $\alpha \in \{1, \dots, n\}$. La idea esencial de encontrar el movimiento del sistema (o trayectoria) es determinar a las coordenadas como funciones de los parámetros $z^\alpha(t^k)$.

El principio de Hamilton indica que la trayectoria satisface las ecuaciones que se obtienen de la variación de la acción definida por

$$S = \int L(t^k, z^\alpha, \partial_k z^\alpha) d^m t \quad (43)$$

($\partial_k z^\alpha$ denota a la derivada $\frac{\partial z^\alpha}{\partial t^k}$), donde L , la función Lagrangiana depende de los parámetros, las coordenadas y hasta las primeras derivadas de las coordenadas respecto de los parámetros. La integral S se extiende sobre cualquier región del espacio de parámetros, en donde $d^m t$ es el elemento de volumen.

Se puede abordar el análisis de averiguar cómo cambia S cuando cambian las coordenadas de una manera más general permitiendo que los parámetros también cambien, es decir, que cambie o se transforme la región de integración. Sea la transformación infinitesimal de los parámetros

$$t'^k = t^k + \delta t^k, \quad \text{con } \delta t^k = \delta t^k(t^l). \quad (44)$$

Las coordenadas y sus derivadas cambiarán de acuerdo a

$$\begin{aligned} z'^\alpha(t'^k) &= z^\alpha(t^k) + \delta z^\alpha(t^k) \\ \partial_l z'^\alpha(t'^k) &= \partial_l z^\alpha(t^k) + \delta(\partial_l z^\alpha(t^k)) \end{aligned} \quad (45)$$

cuando cambian los parámetros; y la acción S cambiará como

$$\begin{aligned}\delta S &\equiv \int L(t'^k, z'^\alpha, \partial_l z'^\alpha) d^m t' - \int L(t^k, z^\alpha, \partial_l z^\alpha) d^m t \\ &= \int L(t^k + \delta t^k, z^\alpha + \delta z^\alpha, \partial_l z^\alpha + \delta(\partial_l z^\alpha)) d^m t' - \int L(t^k, z^\alpha, \partial_l z^\alpha) d^m t.\end{aligned}\quad (46)$$

A estas variaciones cuando el parámetro cambia se les dice variaciones funcionales.

Ahora, conviene expresar la integral sobre la región con elemento de volumen $d^m t'$ en términos de una integración sobre la región con elemento de volumen $d^m t$, haciendo un cambio de variables y con

$$d^m t' = d^m t \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\partial(\delta t^k)}{\partial t^k}, \quad (47)$$

siendo $\frac{\partial t'}{\partial t}$ el Jacobiano de la transformación (44). A primer orden se tiene que

$$\begin{aligned}L(t^k + \delta t^k, z^\alpha + \delta z^\alpha, \partial_l z^\alpha + \delta(\partial_l z^\alpha)) &= L(t^k, z^\alpha, \partial_l z^\alpha) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial t^k} \delta t^k + \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \delta z^\alpha + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \delta(\partial_k z^\alpha),\end{aligned}\quad (48)$$

donde toda la expresión del miembro derecho depende de t (se está usando la convención de índices repetidos índices que se suman sobre todos sus valores posibles).

Introduciendo esta expansión en (46), resulta

$$\delta S = \int \left[L \frac{\partial(\delta t^k)}{\partial t^k} + \frac{\partial L}{\partial t^k} \delta t^k + \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \delta z^\alpha + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \delta(\partial_k z^\alpha) \right] d^m t. \quad (49)$$

Para poder hacer el paso tradicional de factorizar a la variación δz^α (integración por partes mediante), se debe observar lo siguiente. De acuerdo a la definición (45), en general,

$$\delta(\partial_k z^\alpha) \neq \frac{\partial(\delta z^\alpha)}{\partial t^k}, \quad (50)$$

por lo que será conveniente definir otras variaciones (para las que los parámetros no varíen), de manera que la ecuación anterior sea una igualdad. Tales variaciones son

$$z'^\alpha(t'^k) = z^\alpha(t'^k) + \delta_* z^\alpha(t'^k)$$

$$\partial_t z^\alpha(t^k) = \partial_t z^\alpha(t^k) + \delta_*(\partial_t z^\alpha(t^k)), \quad (51)$$

y se tiene entonces

$$\delta_*(\partial_k z^\alpha) = \frac{\partial(\delta_* z^\alpha)}{\partial t^k}. \quad (52)$$

Las variaciones δ y δ_* no son independientes, de hecho

$$\begin{aligned} \delta z^\alpha &= \delta_* z^\alpha + \partial_t z^\alpha(t) \delta t^t \\ \delta(\partial_k z^\alpha) &= \delta_*(\partial_k z^\alpha) + \partial_{kt} z^\alpha(t) \delta t^t. \end{aligned} \quad (53)$$

Usando estas relaciones en (49), se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta S = \int & \left[L \frac{\partial(\delta t^k)}{\partial t^k} + \frac{\partial L}{\partial t^k} \delta t^k + \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \delta_* z^\alpha + \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} (\partial_k z^\alpha) \delta t^k \right. \\ & \left. + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \delta_*(\partial_k z^\alpha) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t z^\alpha)} (\partial_{tk} z^\alpha) \delta t^k \right] d^m t. \end{aligned} \quad (54)$$

Usando la notación

$$\frac{D}{Dt^k} \equiv \frac{\partial}{\partial t^k} + \partial_k z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \partial_{kt} z^\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_t z^\alpha)}, \quad (55)$$

la variación de la acción se escribe

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\frac{D(L\delta t^k)}{Dt^k} + \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \delta_* z^\alpha + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \delta_*(\partial_k z^\alpha) \right] d^m t \\ &= \int \left[\frac{D(L\delta t^k)}{Dt^k} + \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \delta_* z^\alpha + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \frac{\partial(\delta_* z^\alpha)}{\partial t^k} \right] d^m t. \end{aligned} \quad (56)$$

Ahora, haciendo una integración parcial del último término de la expresión anterior usando la fórmula

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \frac{\partial(\delta_* z^\alpha)}{\partial t^k} = \frac{D\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \delta_* z^\alpha\right]}{Dt^k} - \frac{D\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)}\right)}{Dt^k} \delta_* z^\alpha, \quad (57)$$

resulta

$$\delta S = \int \left\{ \frac{D}{Dt^k} [L\delta t^k + \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \delta_* z^\alpha\right)] + [L]_\alpha \delta_* z^\alpha \right\} d^m t$$

²Un caso particular de este operador de la derivada $\frac{d}{dt}$ de la subsección 1.1.3 sobre el teorema de Noether.

$$= \int \left\{ \frac{D}{Dt^k} [(L\delta_i^k - \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \partial_i z^\alpha) \delta t^i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} \delta z^\alpha] + [L]_\alpha (\delta z^\alpha - \partial_r z^\alpha \delta t^r) \right\} d^m t \quad (58)$$

(habiendo usado (53), y δ_i^k la delta de Kronecker), donde

$$[L]_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} - \frac{D}{Dt^k} \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)}. \quad (59)$$

Las ecuaciones de movimiento se siguen del hecho de pedir las condiciones de borde para la expresión (58) $\delta t^k(F) = 0$ y $\delta z^\alpha(F) = 0$, donde F es la frontera de la región de integración. Tal requerimiento tiene como resultado que

$$\delta S = \int [L]_\alpha \delta z^\alpha d^m t, \quad (60)$$

y, de acuerdo con el principio de Hamilton, la trayectoria debe satisfacer $\delta S = 0$ dentro de cualquier región de integración, y para cualquier δz^α . Por lo tanto, debe pasar que

$$[L]_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} - \frac{D}{Dt^k} \frac{\partial L}{\partial(\partial_k z^\alpha)} = 0. \quad (61)$$

B: Invariantes adiabáticos y el ángulo de Hannay

En este apéndice se presentan tres conceptos: las variables ángulo-acción, el teorema adiabático y el ángulo de Hannay.

Sea un sistema con Hamiltoniano $H(x, p)$. Si una coordenada x^i no aparece en la expresión para éste, entonces es cíclica y de acuerdo con la ecuación $\dot{p}_i = [x^i, H] = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = 0$ su momento conjugado es una constante. Ahora, el hecho de que para un sistema particular una coordenada sea cíclica depende de la elección de coordenadas generalizadas que se haga. Para cierto tipo de movimiento, existe un procedimiento general mediante una transformación canónica, para encontrar un conjunto de variables del espacio fase en el que todas las coordenadas son cíclicas y sus momentos conjugados constantes de movimiento. Estas variables se llaman ángulo-acción.

El teorema adiabático establece que la variable de acción, el momento canónico de la pareja ángulo-acción para el espacio fase, es una cantidad que se mantiene relativamente constante cuando el Hamiltoniano depende de un parámetro que cambia muy lentamente.

El concepto del ángulo de Hannay está inmerso en los estudios sobre fases geométricas en física, desarrolladas entre otros por M. Berry [6, 7, 8, 66]. Un ejemplo de fase geométrica es la que aparece en el efecto Aharonov-Bhom [16, 5].

Variables ángulo-acción

Supóngase que se cuenta con un sistema integrable, y que no depende explícitamente del tiempo (un sistema conservativo), definido por un Hamiltoniano $H(z) = H(x = (x^i), p = (p_i))$ para las variables del espacio fase (con $i \in \{1, \dots, n\}$). El sistema es integrable si se cuenta con n cantidades conservadas independientes

$$F_i(x^i, p_i) = F_i, \quad (62)$$

que a lo largo de la trayectoria clásica toman los valores F_i constantes (para $i \in \{1, \dots, n\}$). De estas ecuaciones, se pueden resolver los momentos p_i en términos de las coordenadas x^i y las constantes F_i .

Se puede pensar que las constantes F_i son los nuevos momentos P_i que se obtienen de una transformación canónica que tiene ese fin, hacer que los momentos sean constantes de movimiento, es decir, que todas las coordenadas nuevas X^i sean cíclicas. Si se piensa así, las ecuaciones de movimiento para las nuevas variables calculadas con el nuevo Hamiltoniano son

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= \dot{F}_i = -\frac{\partial \bar{H}(P_i)}{\partial X^i} = 0 \\ \dot{X}^i &= \frac{\partial \bar{H}(P_i)}{\partial P_i} = \frac{\partial \bar{H}(F_i)}{\partial F_i} = G_i, \end{aligned} \quad (63)$$

donde G_i es una constante. De estas ecuaciones se tiene que

$$X^i = G_i t + D_i \quad (64)$$

(D_i también es una constante). La función generadora de la transformación canónica entre (x^i, p_i) y (X^i, P_i) es

$$S(x^i, P_i) = \int_{x_0}^x p(x^i, P_i) \cdot dx = \int_{x_0}^x p(x^i, F_i) \cdot dx = S(x^i, F_i), \quad (65)$$

y se tienen las relaciones

$$X^i = \frac{\partial S(x^i, F_i)}{\partial F_i}$$

$$p_i = \frac{\partial S(x^i, F_i)}{\partial x^i}. \quad (66)$$

Como los nuevos momentos son todos constantes, estos definen un toro n -dimensional que es invariante: si una trayectoria está en el toro para un cierto tiempo, ahí se encontrará siempre. Las nuevas coordenadas son las coordenadas para ubicar un punto en el toro. Dado que se puede hacer una combinación de las constantes F_i para obtener otras constantes de movimiento, el toro definido por los momentos no es único. Sin embargo, existe una manera estándar para definir al toro invariante. Ésta, es la definición de las variables ángulo-acción:

$$\begin{aligned} \omega_i &= X^i \\ J_i &= P_i = F_i. \end{aligned} \quad (67)$$

La definición está basada en el hecho de que la función generadora (65) es en general multivaluada, depende de la trayectoria $x_0 \rightarrow x$. Para trayectorias que se pueden deformar unas en otras, S da el mismo valor, pues es solución de la ecuación

$$H\left(x^i, \frac{\partial S(x^i, F_i)}{\partial x^i}\right) = H(F_i) \quad (68)$$

(como S no depende explícitamente del tiempo, el nuevo Hamiltoniano es el mismo que el anterior). Esto significa que S es una función localmente univaluada. Por lo tanto para trayectorias cerradas en el toro invariante que se pueden encoger a un punto, $S = 0$. Pero en un toro n -dimensional existen n circuitos γ_i irreducibles a un punto, y estos circuitos definen n incrementos ΔS que S puede ganar al regresar al mismo punto. Las variables de acción se definen por

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot dx = \frac{\Delta S}{2\pi}, \quad (69)$$

con γ_i una trayectoria en el plano (x^i, p_i) .

Las variables ω_i se llaman ángulos porque cuando el sistema en el toro invariante sigue el circuito γ_i , éstas cambian por 2π . Esto significa que en la transformación canónica entre (x^i, p_i) y $(X^i, P_i) = (\omega_i, I_i)$, las variables x^i y p_i son funciones periódicas de ω_i con período 2π .

Esta manera compacta de introducir las variables ángulo-acción se puede encontrar en [8]. Ahí, se emplean estas variables para estudiar la estabilidad de las órbitas de algunos sistemas Hamiltonianos integrables.

Teorema Adiabático [49]

Sea un sistema mecánico en un movimiento finito (es decir, no infinitesimal) y periódico (con período T) en una dimensión, caracterizado por algún parámetro λ dentro del Hamiltoniano que especifica el estado del sistema $H = H(z; \lambda(t))$, de manera que para una trayectoria física o línea de mundo $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda}$. Se requiere que λ cambie muy lentamente con el tiempo de manera que $\dot{\lambda} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta t}$ sea constante y muy pequeña: $\dot{\lambda} \ll \frac{\dot{\lambda}}{T}$ (hipótesis adiabática). Al calcular el cambio que sufre el Hamiltoniano en un intervalo de tiempo Δt

$$H(\Delta t) - H(0) = \delta H = \int_0^{\Delta t} \dot{H} dt = \int_0^{\Delta t} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} dt, \quad (70)$$

que, usando la hipótesis adiabática, se vuelve

$$\Delta H = \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt. \quad (71)$$

Una trayectoria en el espacio fase $\gamma(0)$ para una energía constante $E(0) \equiv H(z; \lambda(0))$ se distorsiona en una trayectoria $\gamma(\Delta t)$ cuando transcurre un tiempo Δt gracias a la dependencia de λ con éste. Esta trayectoria no necesariamente será de energía constante, pero casi lo será si se sostiene la hipótesis adiabática: El "tubo" que lleva de $\gamma(0)$ a $\gamma(\Delta t)$ contiene las espirales que se generan cuando el sistema evoluciona partiendo de cada condición inicial (cada punto de $\gamma(0)$). Cuando λ no es constante, para distintos puntos de $\gamma(0)$, la integral (71) se toma sobre espirales que caen en un tubo distorsionado respecto del que habría si λ fuera cero, entregando distintos ΔH para cada espiral. Si la distorsión es pequeña, las espirales se parecerán mucho y así los valores de ΔH . La distorsión del tubo depende de como la expresión para H cambia con el tiempo, y esto depende de como λ cambia con el tiempo. La distorsión es pequeña en un período T si se pide que $\dot{\lambda} \ll \frac{\dot{\lambda}}{T}$, es decir, forzando que el cambio en λ en un período ($\dot{\lambda}T$) sea muy pequeño comparado con λ (o el tiempo Δt en el que se produce un cambio $\Delta \lambda$ tiene que ser muy largo comparado con T).

La energía E (dada por el Hamiltoniano) no se va a conservar pero va a cambiar con el tiempo también adiabáticamente. De acuerdo con $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$,

$$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda}. \quad (72)$$

Al tomar un promedio de esta ecuación durante un período T (del sistema), λ se mantiene casi constante [51] y así

$$\bar{E} = \lambda \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt. \quad (73)$$

Pero $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ y entonces

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} \\ \bar{E} &= \lambda \frac{\oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}}{\oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}} \end{aligned} \quad (74)$$

Para cada valor de λ se tiene una energía constante, y p se puede poner en función entonces de $p = p(q, E, \lambda)$. Como $H(z; \lambda(t)) = E$, entonces

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad (75)$$

entonces

$$\bar{E} = -\lambda \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \quad (76)$$

$$\Rightarrow \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\bar{E}}{dt} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0 \quad (77)$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0, \quad (78)$$

con $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$. I es entonces un invariante adiabático: en promedio, se mantiene constante cuando λ cambia adiabáticamente.

Del teorema de Liouville se desprende que el área encerrada por $\gamma(0)$ va a ser igual que el área encerrada por $\gamma(\Delta t)$. Como $\gamma(\Delta t)$ y $\gamma(0)$ son ambas de energía constante (aunque $E(\Delta t)$ se distinta de $E(0)$), se puede resolver $E := H(x, p; \lambda(t))$ para $p = p(x, E, \lambda(t))$ para cada t , y de

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx, \quad (79)$$

se puede ver que I =área encerrada por $\gamma(t)$ es la misma para todo t . Por lo tanto I (la variable de acción de acuerdo con (69)) es un *invariante adiabático*.

Para sistemas con más de una libertad, si se conoce desde el principio que algunas de las libertades cambian significativamente más lento que las otras, es posible tratar a las lentas como parámetros adiabáticos (λ 's) para un sistema reducido (el de las variables rápidas), con las siguientes condiciones: que las variables lentas satisfagan la hipótesis adiabática y que el sistema reducido sea integrable. Si se conoce *a priori* que el sistema reducido oscila muchas veces en el tiempo que le toma a las variables lentas sufrir cambios considerables, entonces el teorema adiabático se puede aplicar al sistema reducido.

El Ángulo de Hannay

Motivado por las fases geométricas desarrolladas por Berry, Simon [7, 66] y otros para sistemas periódicos en Mecánica Cuántica, J.H. Hannay [39] desarrolló un análogo de estas fases para sistemas clásicos.

Sea $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ los parámetros que dependen del tiempo dentro del Hamiltoniano $H(q, p; \lambda)$, con $\lambda(\epsilon T) = \lambda(0)$ para $\epsilon \ll 1$, y por lo tanto el Hamiltoniano tiene un período T . Para un valor determinado de λ se toman las variables ángulo-acción (I, ϕ) de manera que el Hamiltoniano escrito en estas variables es

$$K(I, \phi, \lambda) = \nu(\lambda)I + \frac{\partial S(q, I, \lambda)}{\partial t} = \nu(\lambda)I + K_1(I, \phi, \lambda), \quad (80)$$

con $K_1(I, \phi, \lambda) \equiv \frac{\partial S(q, I, \lambda)}{\partial t}$. Se averigua ahora el cambio total $\Delta\phi$ cuando el Hamiltoniano atraviesa un período T :

$$\dot{\phi} = [\phi, H] + \frac{\partial \phi(q, p, \lambda)}{\partial t}, \quad (81)$$

(si ϕ no fuera función explícita del tiempo entonces $\dot{\phi} = [\phi, H] = \nu$)

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \nu + \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (82)$$

Además por ecuaciones de movimiento $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu + \frac{\partial K_1}{\partial t}$.

Sea $\delta\dot{\phi} \equiv \frac{\partial K_1}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t \partial t}$, entonces

$$\delta\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k (\equiv \alpha^k \dot{\lambda}_k) \quad (83)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \int_0^T \dot{\phi} dt = \int_0^T \nu dt + \int_0^T \delta\dot{\phi} dt \equiv \delta\nu + \delta\phi \quad (84)$$

$$\Rightarrow \delta\phi = \int_0^T \delta\dot{\phi} dt = \int_0^T \frac{\partial K_1}{\partial I} dt. \quad (85)$$

A $\delta\phi$ se le llama ángulo de Hannay (AH).

Si K_1 no es conocido, entonces

$$\delta\phi = \int_0^T \delta\dot{\phi} dt = \int_0^T \alpha^k \dot{\lambda}_k dt = \int_0^T \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k dt, \quad (86)$$

pero hace falta conocer a ϕ como función del tiempo lo cual es tener resuelto el problema. Lo que se hace entonces es tomar un promedio:

$$\langle \delta\phi \rangle = \int_0^T A^k \dot{\lambda}_k dt \quad (87)$$

con

$$\begin{aligned} A^k &= A^k(I, \lambda) = \langle \alpha^k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha^k(\phi, I, \lambda) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} d\phi. \end{aligned} \quad (88)$$

Por hipótesis $\lambda(\epsilon T) = \lambda(0)$, entonces

$$\langle \delta\phi \rangle = \oint_C A^k d\lambda_k. \quad (89)$$

Integrar sobre la variedad C es lo que le da a $\delta\phi$ su carácter geométrico. El resultado es que $\langle \delta\phi \rangle$ no depende de T , sólo del camino C , siempre que λ cambie adiabáticamente.

Bibliografia

- [1] Acatrinei, C., *Path Integral Formulation of Noncommutative Quantum Mechanics*, hep-th/0107078.
- [2] Alavi, S. A., *Berry's phase in noncommutative spaces*, hep-th/0208098.
- [3] Amelino-Camelia, G., Doplicher, L., Nam, S., Seo, Y., *Phenomenology of particle production and propagation in string-motivated canonical noncommutative spacetime*, hep-th/0109191.
- [4] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, second edition (1989).
- [5] Baez J. y Muniain J. P., *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific.
- [6] Berry, M. V., *Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase*, J. Phys. A: Math. Gen. **18**(1985) 15-27.
- [7] Berry, M. V., *The Quantum Phase, Five Years After*, tomado de Geometric Phases in Physics, editado por Shapere, A., Wilczek, F., Advanced Series in Mathematical Physics, Vol.5, World Scientific (1989), 7-28.
- [8] Berry, M. V., *Regular and irregular motion*, tomado de Topics in Nonlinear Dynamics, A Tribute to Sir Edward Bullard, editado por Jorna, S., AIP Conference Proceedings Number 46, American Institute of Physics, New York (1978), 18-23.
- [9] Bluhm, R., *Probing the Planck scale in low-energy atomic physics*, hep-th/0111323.

- [10] Bolonek, K., Kosiński, P., *On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics*, hep-th/0208162.
- [11] Brown, L. S., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1992).
- [12] Carlip, S., *Quantum Gravity: a Progress Report*, gr-qc/0108040.
- [13] Chaichian, M., Sheikh-Jabbari, M. M., Tureanu, A., *Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED*, hep-th/0010175.
- [14] Chaichian, M., Demichev, A., Prešnajder, P., Sheikh-Jabbari, M. M., Tureanu, A., *Quantum Theories on Noncommutative Spaces with Non-trivial Topology: Aharonov-Bohm and Casimir Effects*, hep-th/0101209.
- [15] Cheng, T., Ho, P., Yeh, M., *Perturbative Approach to Higher Derivative and Nonlocal Theories*, hep-th/0111160.
- [16] Christiansen, H. R., Schaposnik, F. A., *Noncommutative Quantum Mechanics and rotating frames*, hep-th/0106181, junio 2001.
- [17] Cinni, M., *No neutralidad de la ciencia*, La revalorización social de la ciencia, Primer simposio de Ciencia y Sociedad (1979). Facultad de Ciencias, UNAM.
- [18] Connes, A., Douglas, M. R., Schwarz, A., *Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori*, hep-th/9711162.
- [19] Curtright, T., Fairlie, D., Zachos, C., *Features of time-independent Wigner Functions*, hep-th/9711183, marzo 1998.
- [20] Curtright, T., Uematsu, T., Zachos, C., *Generating all Wigner Functions*, hep-th/0011137, febrero 2001.
- [21] Das, A., *Field Theory: A path integral approach*, World Scientific (1993).
- [22] d'Espagnat, B., *The Quantum Theory and Realism*, Scientific American **241**, nov 1979, 158-181.
- [23] Duval, C., Horvathy, P. A., *Exotic galilean symmetry in the non-commutative plane, and Hall effect*, hep-th/0106089.

- [24] Duval, C., Horvathy, P. A., *Exotic galilean symmetry and the Hall effect*, hep-th/0111033.
- [25] Duval, C., Horvathy, P. A., *Spin and exotic Galilean symmetry*, hep-th/0209166.
- [26] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N., *Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete*, Physical Review **47** (1935), 777-780.
- [27] Feynman, R. P., *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Review of Modern Physics, Volume 20, Number 2, abril 1948, 367-387.
- [28] Galéev, E., Tijomírov, V., *Breve curso de la Teoría de Problemas Extremales*, MIR, Moscú (1991):
- [29] Galindo, A., Pascual, P., *Quantum Mechanics I*, Springer-Verlag, (1990).
- [30] Gamboa, J., Loewe, M., Mendez, F., Rojas, J. C., *Noncommutative Quantum Mechanics: The Two-Dimensional Central Field*, hep-th/0106125.
- [31] Gamboa, J., Loewe, M., Rojas, J. C., *Non-Commutative Quantum Mechanics*, hep-th/0010220.
- [32] Gamboa, J., Loewe, M., Mendez, F., Rojas, J. C., *The Landau problem and noncommutative quantum mechanics*, hep-th/0104224.
- [33] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, second edition (1981).
- [34] Gomis, J., Kamimura, K., Llosa, J., *Hamiltonian Formalism for Space-time Non-commutative Theories*, hep-th/0006235.
- [35] Gomis, J., Mehen, T., Nucl. Phys. **B591** 265 (2000), hep-th/0005015.
- [36] Gopakumar, R., Maldacena, J., Minwalla, S., Strominger, A., *S-duality and noncommutative gauge theory*, JHEP **0006** 036 (2000), hep-th/0005048.

- [37] Gopakumar, R., Minwalla, S., Sciberg, N., Strominger, A., *OM theory in diverse dimensions*, JHEP JHEP 0008 008 (2000).
- [38] Hacyan, S., *Espacio, tiempo y realidad. De la física cuántica a la metafísica kantiana*, Revista Ciencias No. 63, julio-septiembre 2001, 15-25.
- [39] Hannay, J. H., J. Phys. A **18**(1985) 221-230.
- [40] Harvey, J. A., *Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-Branes*, hep-th/0102076.
- [41] Henneaux, M., Teitelboim, C., *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1992).
- [42] Hill, E. L., *Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics*, Reviews of Modern Physics, **23** (3) (1951) 253-260.
- [43] Hojman, S., *Teorema de Noether: Simetrías y Cantidades Conservadas*, Cuadernos del Seminario Café t Matemáticas, No. 2, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México (1986).
- [44] Hojman, S., Shepley, L. C., *Lagrangianos Equivalentes*, Revista Mexicana de Física **28** No. 2, 149-205 (1982).
- [45] Hojman, S., Shepley, L. C., *No Lagrangian? No quantization!*, J. Math. Phys. **32** (1), 142-146, enero 1991.
- [46] Horowitz, G., Strominger, A., *Black Strings and p-branes*, Nucl. Phys. **B360**, 197 (1991).
- [47] Jackson, J. D., *Electrodinámica Clásica*, Alhambra Universidad, segunda edición (1980).
- [48] Jodorowsky, A., *Antología Pánica*, Joaquín Mortiz, México (1996).
- [49] José, J. V., Saletan, E. J., *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge university Press (1998).
- [50] Kuhn, T. S., *La Estructura de las Revoluciones Científicas*, Breviarios del Fondo de Cultura Económica, No. 213 (1971).

- [51] Landau, L., Lifshitz, E., *Mecánica y electrodinámica* (Curso Abreviado de Física Teórica, Libro 1), MIR, Moscú, cuarta edición (1987).
- [52] Landau, L., Lifshitz, E., *The Classical Theory of Fields, Vol. 2*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Pergamon Press (1959).
- [53] Marsden, E. J., Ratiu, T. S., *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, second edition (1999).
- [54] Mercier, A., *Analytical and Canonical Formalism in Physics*, Dover Publications, Inc., New York (1963).
- [55] Mezincescu, L., *Star operation in Quantum Mechanics*, hep-th/0007046, julio 2000.
- [56] Miramontes, P., *Paisajes embriológicos y genes*, Revista Ciencias No. 65, enero-marzo 2002, 4-13.
- [57] Moyal, J. E., *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Camb. Phil. Soc. 45, 99-124 (1949).
- [58] Nair, V. P., Polychronakos, A. P., *Quantum Mechanics on the Noncommutative Plane and Sphere*, hep-th/0011172.
- [59] Olivé, L., *Qué hace y qué hacer en la Filosofía de la Ciencia*, Revista Ciencias No. 19, julio 1990, 27-34.
- [60] Olivé, L., *La comunicación científica y la filosofía*, Revista Ciencias No. 46, abril-junio 1997, 48-56.
- [61] Russell, B., *Los Problemas de la Filosofía*, Ediciones Selectas, México D.F. (1982).
- [62] Savater, F., *Valores morales y valores científicos*, Revista Ciencias No. 63, julio-septiembre 2001, 4-10.
- [63] Schwinger, J. S., *Quantum Kinematics and Dynamics*, Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing, Co., Inc. (1991).
- [64] Seiberg, N., Witten, E., *String Theory and Noncommutative Geometry*, JHEP 9909 (1999) 032, hep-th/9908142.

- [65] Seiberg, N., Susskind, L., Toumbas, N., *Space/Time non-commutativity and causality*, JHEP 0006 044 (2000).
- [66] Simon, B., *Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase*, *Phy. Rev. Let.*, 51(24) (1983) 2167-2170.
- [67] Smailagic, A., Spallucci, E., *New isotropic vs anisotropic phase of non-commutative 2D harmonic oscillator*, hep-th/0108216.
- [68] Snyder, H. S., *Quantized Space-Time* *Physical Review*, Vol. 71, Num. 1 (1947) 38-41.
- [69] Urrutia, L. F, Hernández, E., *Calculation of the propagator for a Time-Dependent Damped, Forced Harmonic Oscillator Using the Schwinger Action Principle*, *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 23, No. 12 (1984) 1105-1127.
- [70] Wang, X., *Noncommutative QED and Muon Anomalous Magnetic Moment*, hep-th/0109095.
- [71] Wigner, E., *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*, *Physical Review*, Vol. 40 (1932) 749-759.
- [72] Witten, E., *Reflections on the Fate of Spacetime*, *Physics Today*, abril 1996, 24-30.
- [73] Witten, E., *Duality, Spacetime and Quantum Mechanics*, *Physics Today*, mayo 1997, 28-33.
- [74] Weinberg, S., *La gran reducción: la física en el siglo XX*, *Revista Ciencias* No. 62, abril-junio 2001, 51-62.
- [75] Zachos, C., *A survey of star product geometry*, hep-th/0008010.