UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCION DE MEDIDAS DE DEPENDENCIA POR MEDIO DE COPULAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

P R E S E N T A

ARTURO ERDELY RUIZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSE MARIA GONZALEZ-BARRIOS MURGUIA

MEXICO, D.F. ENERO DE 2003

Construcción de medidas de dependencia por medio de cópulas

Arturo Erdely Ruiz

Enero de 2003

2

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo tiene por objetivo la construcción de medidas de dependencia entre variables aleatorias mediante la utilización de cópulas.

En el presente capítulo se revisan algunos conceptos matemáticos preliminares para poder tratar en el capítulo siguiente los conceptos y resultados básicos sobre cópulas, en particular aquéllos que se utilizarán en la construcción de medidas de dependencia.

En el tercer y último capítulo se definen y construyen medidas de dependencia.

1.1. Definiciones preliminares

Primero establecemos algo de notación a utilizar:

$$\mathbf{R} :=]-\infty, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty\},$$

$$\overline{\mathbf{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

$$\overline{\mathbf{R}}^2 := \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}.$$

1.1.1. Definición. *Un rectángulo en $\overline{\mathbf{R}}^2$ es un subconjunto $B \subset \overline{\mathbf{R}}^2$ que puede expresarse como producto cartesiano de dos intervalos cerrados, es decir, si existen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tales que $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ para $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$.*

A los puntos $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)$ y (x_2, y_2) los llamamos vértices del rectángulo B. En particular denotaremos al cuadrado unitario por $\mathbf{I}^2 := \mathbf{I} \times \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} := [0, 1]$.

1.1.2. Definición. *Una función real de doble entrada es una función H tal que su dominio $\mathrm{Dom}\, H$ es un subconjunto de $\overline{\mathbf{R}}^2$ y su rango $\mathrm{Ran}\, H$ un subconjunto de $\mathbf{R}$.*

1.1.3. Definición. *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbf{R}}$ y sea H una función tal que $Dom\, H = S_1 \times S_2$. Sea $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo cuyos vértices están en $Dom\, H$. El H-volumen de B está dado por*

$$V_H(B) := H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)\,.$$

1.1.4. Ejemplo. Sea una función no negativa $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, dxdy < \infty\,.$$

Podemos definir la función $H : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de modo que

$$H(x, y) := \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dudv\,.$$

Si tenemos al rectángulo $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset Dom\, H$ entonces

$$V_H(B) = \iint_B f(x, y) dB\,.$$

Es decir, en este caso particular el H-volumen de B resulta ser precisamente el volumen bajo la superficie $f(x, y)$ y sobre el rectángulo B.

Sin embargo no hay que perder de vista que el concepto de H-volumen de un rectángulo es mucho más general y sólo se pide que los vértices del mismo estén en $Dom\, H$.

1.1.5. Definición. *Decimos que una función real de doble entrada H es 2-creciente si $V_H(B) \geq 0$ para todos los rectángulos B cuyos vértices están en $Dom\, H$.*

1.1.6. Ejemplo. Continuando con el Ejemplo 1.1.4, tenemos que el volumen signado bajo la superficie $f(x, y)$ es no negativo y por lo tanto la función H ahí definida es 2-creciente.

En el Ejemplo 1.1.6 podemos notar también que las funciones de una variable $H(\cdot, y_0)$ y $H(x_0, \cdot)$ son monótonas crecientes para y_0 y x_0 fijos, pero esto no es una regla general. El que una función H sea 2-creciente no implica necesariamente que sea monótona creciente en cada uno de sus argumentos, ni viceversa, como se ilustra en los siguientes ejemplos:

1.1.7. Ejemplo. Sea la función $H : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $H(x, y) := \max\{x, y\}$. Entonces para valores fijos y_0 y x_0 podemos definir las funciones $F, G : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ de la siguiente manera:

$$F(x) := H(x, y_0) = \max\{x, y_0\} = \begin{cases} y_0 & si \quad x < y_0\,, \\ x & si \quad x \geq y_0\,. \end{cases}$$

$$G(y) := H(x_0, y) = \max\{x_0, y\} = \begin{cases} x_0 & si \quad y < x_0\,, \\ y & si \quad y \geq x_0\,. \end{cases}$$

F y G resultan ser funciones monótonas crecientes; sin embargo, H no es 2-creciente ya que al calcular, por ejemplo, el H-volumen de $\mathbf{I}^2$ obtenemos

$$V_H(\mathbf{I}^2) = H(1,1) - H(1,0) - H(0,1) + H(0,0) = -1 < 0 .$$

1.1.8. Ejemplo. Sea la función $H : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida como

$$H(x,y) := (2x-1)(2y-1),$$

y sea un rectángulo cualquiera $B \subset \mathbf{I}^2$ definido por $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Entonces

$$V_H(B) = 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0 ,$$

por lo que H es 2-creciente. Sin embargo, para una valor fijo y_0 tenemos que

$$F(x) := H(x, y_0) = [2(2y_0 - 1)]x - (2y_0 - 1) ,$$

esto es, una recta con pendiente $2(2y_0 - 1)$ que resulta negativa para $y_0 < \frac{1}{2}$, y en tal caso tendríamos que H es decreciente en su primer argumento, a pesar de ser 2-creciente.

1.1.9. Lema. *Sean S_1 y S_2 subconjuntos no-vacíos de $\overline{\mathbf{R}}$, y sea H una función 2-creciente tal que $Dom\, H = S_1 \times S_2$. Sean x_1, x_2 elementos de S_1 tales que $x_1 \leq x_2$ y sean y_1, y_2 elementos de S_2 tales que $y_1 \leq y_2$. Entonces la función $t \longmapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es monótona creciente en S_1, y la función $t \longmapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es monótona creciente en S_2.*

Demostración: Sean la función $F(t) := H(t, y_2) - H(t, y_1)$ y el rectángulo $B := [t, t+h] \times [y_1, y_2] \subset Dom\, H$. Como H es 2-creciente tenemos que $V_H(B) \geq 0$ y entonces

$$H(t+h, y_2) - H(t+h, y_1) \geq H(t, y_2) - H(t, y_1) ,$$

por lo que $F(t+h) \geq F(t)$ y por lo tanto F es monótona creciente en S_1. Un argumento idéntico demuestra que $G(t) := H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es monótona creciente en S_2. □

1.1.10. Definición. *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbf{R}}$ tales que $a_1 := \inf(S_1) \in S_1$ y $a_2 := \inf(S_2) \in S_2$. Decimos que la función real $H : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbf{R}$ está fijada si $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$, para todo (x, y) en $S_1 \times S_2$.*

1.1.11. Lema. *Sean S_1 y S_2 subconjuntos no-vacíos de $\overline{\mathbf{R}}$, y sea H una función fijada 2-creciente tal que $Dom\, H = S_1 \times S_2$. Entonces H es monótona creciente en cada uno de sus argumentos.*

Demostración: Utilizamos el Lema 1.1.9 con $x_1 := a_1$, $y_1 := a_2$. □

1.1.12. Definición. *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbf{R}}$ tales que $b_1 := \sup(S_1) \in S_1$ y $b_2 := \sup(S_2) \in S_2$. Decimos entonces que la función $H : S_1 \times S_2 \to \mathbf{R}$ tiene marginales y que las marginales de H son las funciones F y G dadas por*

$$F : S_1 \to \mathbf{R} \qquad F(x) := H(x, b_2),$$
$$G : S_2 \to \mathbf{R} \qquad G(y) := H(b_1, y).$$

1.1.13. Ejemplo. Sea la función $H : [-1, 1] \times [0, \infty] \to \mathbf{R}$ definida por

$$H(x, y) := \frac{(x+1)(1-e^{-y})}{2},$$

y sea el rectángulo $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset Dom\, H$. Tenemos que

$$\begin{aligned} 2V_H(B) &= (x_2+1)(1-e^{-y_2}) - (x_2+1)(1-e^{-y_1}) - (x_1+1)(1-e^{-y_2}) \\ &\quad + (x_1+1)(1-e^{-y_1}) \\ &= (x_2 - x_1)(e^{-y_1} - e^{-y_2}) \geq 0, \end{aligned}$$

por lo que H es 2-creciente. Como $H(x, 0) = 0 = H(-1, y)$ entonces por la Definición 1.1.10 tenemos que H está fijada. Las marginales de H son

$$F(x) := H(x, \infty) = \frac{x+1}{2},$$
$$G(y) := H(-1, y) = 1 - e^{-y},$$

que son funciones monótonas crecientes, tal cual lo garantiza el Lema 1.1.11 .

1.1.14. Lema. *Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbf{R}}$, sea la función fijada, 2-creciente y con marginales $H : S_1 \times S_2 \to \mathbf{R}$, y sean los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_1 \times S_2$. Entonces*

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Demostración: Sea $x_1 \leq x_2$. Por Lema 1.1.9 tenemos que

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2),$$

y como $H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es monótona creciente para todo t en S_2, entonces

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2) = F(x_2) - F(x_1),$$
$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|,$$

y por un argumento idéntico para $y_1 \leq y_2$ en S_2

$$|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|,$$

y por lo tanto $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$. □

Capítulo 2

Cópulas

En el presente capítulo revisaremos aquellas definiciones y resultados sobre cópulas que serán de utilidad para la construcción de medidas de dependencia en el capítulo siguiente.

En términos generales podemos decir que una cópula bidimensional es una función que contiene información relacionada con la dependencia entre dos variables aleatorias, pero a diferencia de una función de distribución conjunta, la cópula tiene la ventaja de estar siempre acotada, en principio, por el intervalo unitario. En cierto modo las cópulas son una especie de "estandarización" de las funciones de distribución conjunta, con una serie de propiedades adicionales que facilitan el estudio de la dependencia.

El resultado más importante que revisaremos es el *Teorema de Sklar* que establece la relación existente entre funciones de distribución conjunta y cópulas.

2.1. Subcópulas y cópulas

2.1.1. Definición. *Una subcópula bidimensional (o alternativamente una 2-subcópula o bien simplemente subcópula) es una función C' que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathit{Dom}\, C' = S_1 \times S_2$ *, donde* $\{0,1\} \subset S_j \subset \mathbf{I} \quad j = 1,2$.

2. *C' es 2-creciente y fijada.*

3. *Para todo u en S_1 y v en S_2 : $C'(u,1) = u$ y $C'(1,v) = v$.*

Observación: Lo anterior implica que para todo $(u,v) \in \mathit{Dom}\, C'$ tenemos que $0 \leq C'(u,v) \leq 1$, por lo que $\mathit{Ran}\, C' \subset \mathbf{I}$.

2.1.2. Definición. *Una cópula bidimensional (o alternativamente una 2-cópula o bien simplemente cópula) es una 2-subcópula C tal que $\mathit{Dom}\, C = \mathbf{I}^2$, esto es una función $C : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que:*

1. *Para todo u, v en $\mathbf{I}$ se cumple*

$$C(u,0) = 0 = C(0,v)\,, \tag{2.1}$$

$$C(u,1) = u \quad y \quad C(1,v) = v\,. \tag{2.2}$$

2. *Para todo u_1, u_2, v_1, v_2 en $\mathbf{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$ se cumple que*

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0\,. \tag{2.3}$$

Observación: $C(u,v) = V_C([0,u] \times [0,v])$ (ver Definición 1.1.3) y además la ecuación (2.3) equivale a que $V_C([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) \geq 0$.

2.1.3. Ejemplo. Sea la función $\Pi : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que $\Pi(u,v) := uv$.

1. Tenemos que para todo u, v en $\mathbf{I}$

$$\Pi(u,0) = u \cdot 0 = 0 = 0 \cdot v = \Pi(0,v)\,,$$

$$\Pi(u,1) = u \cdot 1 = u \quad , \quad \Pi(1,v) = 1 \cdot v = v\,.$$

2. Para todo u_1, u_2, v_1, v_2 en $\mathbf{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$ tenemos que

$$\begin{aligned} V_\Pi([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) &= u_2v_2 - u_2v_1 - u_1v_2 + u_1v_1 \\ &= (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq 0\,; \end{aligned}$$

y por lo tanto Π es cópula.

2.1.4. Ejemplo. Sea la función $M : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que $M(u,v) := \min\{u,v\}$.

1. Para todo u, v en $\mathbf{I}$ tenemos que

$$M(u,0) = \min\{u,0\} = 0 = \min\{0,v\} = M(0,v)\,,$$

$$M(u,1) = \min\{u,1\} = u \quad , \quad M(1,v) = \min\{1,v\} = v\,.$$

2. Si definimos el conjunto $A := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : u \leq v\}$ se tiene que $M(u,v) = (u-v)\mathbf{1}_A(u,v) + v$, por lo que

$$\begin{aligned} V_M([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) = (u_2 - v_2)\mathbf{1}_A(u_2,v_2) - (u_2 - v_1)\mathbf{1}_A(u_2,v_1) \\ - (u_1 - v_2)\mathbf{1}_A(u_1,v_2) + (u_1 - v_1)\mathbf{1}_A(u_1,v_1)\,. \end{aligned}$$

En caso de que los cuatro vértices estén en A o en $\mathbf{I}^2 \setminus A$ entonces $V_M = 0$. Si únicamente $(u_1,v_2) \in A$ entonces $V_M = v_2 - u_1 \geq 0$. Si únicamente $(u_2,v_1) \in \mathbf{I}^2 \setminus A$ entonces $V_M = u_2 - v_1 \geq 0$. Si únicamente $(u_1,v_1),(u_1,v_2) \in A$ entonces $V_M = v_2 - v_1 \geq 0$. Si únicamente $(u_1,v_2),(u_2,v_2) \in A$ entonces $V_M = u_2 - u_1 \geq 0$. Por lo tanto tenemos que $V_M([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) \geq 0$ y así concluimos que M es cópula.

2.1.5. Ejemplo. Definimos la función $W : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{I}$ de modo que $W(u,v) := \text{máx}\{u+v-1, 0\}$.

1. Para todo u, v en $\mathbf{I}$ tenemos que

$$W(u,0) = \text{máx}\{u-1,0\} = 0 = \text{máx}\{v-1,0\} = W(0,v),$$

$$W(u,1) = \text{máx}\{u,0\} = u \quad , \quad W(1,v) = \text{máx}\{v,0\} = v.$$

2. Si definimos el conjunto $B := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : u+v-1 \geq 0\}$ se tiene que $W(u,v) = (u+v-1)\mathbf{1}_B(u,v)$, por lo que

$$\begin{aligned} V_W([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) = (u_2+v_2-1)\mathbf{1}_B(u_2,v_2) - (u_2+v_1-1)\mathbf{1}_B(u_2,v_1) \\ - (u_1+v_2-1)\mathbf{1}_B(u_1,v_2) + (u_1+v_1-1)\mathbf{1}_B(u_1,v_1). \end{aligned}$$

En caso de que los cuatro vértices estén en B o en $\mathbf{I}^2 \setminus B$ entonces $V_W = 0$. Si únicamente $(u_2,v_2) \in B$ entonces $V_W = u_2+v_2-1 \geq 0$. Si únicamente $(u_1,v_1) \in \mathbf{I}^2 \setminus B$ entonces $V_W = -(u_1+v_1-1) > 0$. Si únicamente $(u_2,v_1),(u_2,v_2) \in B$ entonces $V_W = v_2 - v_1 \geq 0$. Si únicamente $(u_1,v_2),(u_2,v_2) \in B$ entonces $V_W = u_2 - u_1 \geq 0$. Por lo tanto $V_W([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) \geq 0$ y así concluimos que W es cópula.

2.1.6. Teorema. *Sea C' una subcópula. Entonces para todo $(u,v) \in Dom\, C'$ se cumple*

$$W(u,v) \leq C'(u,v) \leq M(u,v).$$

Demostración: Por la definición 2.1.1 C' es fijada y 2-creciente, así que C' es monótona creciente en cada argumento por el Lema 1.1.11 y entonces para todo $(u,v) \in Dom\, C'$ tenemos que $C'(u,v) \leq C'(u,1) = u$ y que $C'(u,v) \leq C'(1,v) = v$, por lo que $C'(u,v) \leq \text{mín}\{u,v\} = M(u,v)$. Por la definición 2.1.1 tenemos que $(1,1) \in Dom\, C'$ y por lo tanto $V_{C'}([u,1] \times [v,1]) \geq 0$, es decir

$$\begin{aligned} C'(1,1) - C'(1,v) - C'(u,1) + C'(u,v) &\geq 0, \\ 1 - v - u + C'(u,v) &\geq 0, \\ C'(u,v) &\geq u+v-1. \end{aligned}$$

Como $C'(0,0) = 0$ y C' es monótona creciente en cada argumento entonces para todo $(u,v) \in S_1 \times S_2$ tenemos que $C'(u,v) \geq 0$ así que

$$C'(u,v) \geq \text{máx}\{u+v-1,0\} = W(u,v),$$

y por lo tanto $W(u,v) \leq C'(u,v) \leq M(u,v)$, para todo $(u,v) \in Dom\, C'$. □

Como toda cópula es subcópula entonces para toda cópula C y para todo $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ se cumple

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v). \tag{2.4}$$

A W y M se les conoce como *cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding* para cópulas. A la cópula Π del ejemplo 2.1.3 se le conoce como *cópula producto*.

2.1.7. Ejemplo. Sean C_0 y C_1 dos cópulas cualesquiera y sea $\alpha \in \mathbf{I}$. Definimos la función $C := \alpha C_0 + (1-\alpha)C_1$. Veremos que C es también cópula:

$$C(u,0) = \alpha C_0(u,0) + (1-\alpha)C_1(u,0) = 0\,,$$

y de manera análoga $C(0,v) = 0$.

$$C(u,1) = \alpha C_0(u,1) + (1-\alpha)C_1(u,1) = \alpha u + (1-\alpha)u = u\,,$$

y de manera análoga $C(1,v) = v$. Ahora sea $B := [u_1,u_2] \times [v_1,v_2]$. Entonces

$$\begin{aligned}
V_C(B) &= C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1)\\
&= \alpha C_0(u_2,v_2) + (1-\alpha)C_1(u_2,v_2)\\
&\quad - \alpha C_0(u_2,v_1) - (1-\alpha)C_1(u_2,v_1)\\
&\quad - \alpha C_0(u_1,v_2) - (1-\alpha)C_1(u_1,v_2)\\
&\quad + \alpha C_0(u_1,v_1) + (1-\alpha)C_1(u_1,v_1)\\
&= \alpha V_{C_0}(B) + (1-\alpha)V_{C_1}(B) \geq 0\,,
\end{aligned}$$

y por lo tanto C es cópula.

Observación: Del ejemplo 2.1.7 se sigue que cualquier combinación lineal convexa de cópulas es cópula.

2.1.8. Ejemplo. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{I}$ tales que $\alpha + \beta \leq 1$ y definimos la función $C : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{I}$ de la siguiente manera:

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) := \alpha M(u,v) + (1-\alpha-\beta)\Pi(u,v) + \beta W(u,v)\,.$$

Por el resultado del ejemplo 2.1.7 tenemos que $C_{\alpha,\beta}$ es cópula. Esta familia de cópulas $\{C_{\alpha,\beta} : \alpha,\beta \in \mathbf{I}\,,\ \alpha+\beta \leq 1\}$ fue propuesta por M. Fréchet. Caso similar es el de la familia $\{C_\theta : \theta \in [-1,1]\}$ donde

$$C_\theta(u,v) := \frac{\theta^2(1+\theta)}{2}M(u,v) + (1-\theta^2)\Pi(u,v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2}W(u,v)\,.$$

Esta familia de cópulas fue propuesta por K.V. Mardia.

El ejemplo 2.1.8 motiva la siguiente:

2.1.9. Definición. *Una familia de cópulas que incluye a M, Π y W se le denomina familia comprensiva.*

2.1.10. Teorema. *Sea C' una subcópula. Tenemos entonces que para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathrm{Dom}\, C'$ se cumple*

$$|C'(u_2,v_2) - C'(u_1,v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|\,, \tag{2.5}$$

esto es, C' es uniformemente continua en su dominio.

Demostración: Por el Lema 1.1.14 y la Definición 2.1.1 . □

2.1.11. Definición. *Sea C una cópula y sea $a \in \mathbf{I}$. La sección horizontal de C en a es una función $\jmath_C : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ dada por $\jmath_C(t) := C(t, a)$; la sección vertical de C en a es una función $\ell_C : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ dada por $\ell_C(t) := C(a, t)$; la sección diagonal de C es una función $\delta_C : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ dada por $\delta_C(t) := C(t, t)$.*

2.1.12. Corolario. *Las secciones horizontal, vertical y diagonal de una cópula C son monótonas crecientes y uniformemente continuas en $\mathbf{I}$.*

Demostración: Por Lema 1.1.11 y Teorema 2.1.10 . □

2.1.13. Teorema. *Sea C una cópula. Para cualquier $v \in \mathbf{I}$ la derivada parcial $\partial C/\partial u$ existe para casi toda u (en el sentido de Lebesgue) y para tales u, v:*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1 . \tag{2.6}$$

Y para cualquier $u \in \mathbf{I}$ la derivada parcial $\partial C/\partial v$ existe para casi toda v y para tales u, v:

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1 . \tag{2.7}$$

Más aún, las funciones $u \longmapsto \partial C(u, v)/\partial v$, $v \longmapsto \partial C(u, v)/\partial u$ están definidas y son monótonas crecientes casi en todos lados en $\mathbf{I}$.

Demostración: La existencia de las derivadas parciales $\partial C/\partial u$, $\partial C/\partial v$ está garantizada por el hecho de que las funciones monótonas son derivables casi en todos lados (en el caso particular que nos ocupa, las secciones horizontal y vertical de la cópula). Del Teorema 2.1.10 y utilizando el hecho de que C es monótona creciente en cada uno de sus argumentos tenemos para todo incremento $\Delta u > 0$ que

$$\begin{aligned}
|C(u + \Delta u, v) - C(u, v)| \leq \Delta u \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{\Delta u \to 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1 ,
\end{aligned}$$

y de manera análoga se obtiene que $0 \leq \partial C(u, v)/\partial v \leq 1$. Finalmente, del Lema 1.1.9 tenemos que si $v_1 \leq v_2$ entonces la función $u \longmapsto C(u, v_2) - C(u, v_1)$ es monótona creciente por lo que $\partial(C(u, v_2) - C(u, v_1))/\partial u$ está definida y es no negativa casi en todos lados en $\mathbf{I}$ de donde se sigue que la función $v \longmapsto \partial C(u, v)/\partial u$ está definida y es monótona creciente casi en todos lados en $\mathbf{I}$. De manera análoga la función $u \longmapsto \partial C(u, v)/\partial v$ está definida y es monótona creciente casi en todos lados en $\mathbf{I}$. □

2.2. El Teorema de Sklar

2.2.1. Definición. *Una función de distribución es una función $F : \overline{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ tal que:*

1. *F es monótona creciente.*
2. *$F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.*

2.2.2. Ejemplo. Sea $a \in \mathbf{R}$ y sea el conjunto $B(a) \subset \overline{\mathbf{R}}$ tal que $B(a) := [a, \infty]$. Entonces la función indicador $\mathbf{1}_{B(a)} : \overline{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ es función de distribución.

2.2.3. Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbf{R}$ tal que $a < b$ y sea la función $U_{ab} : \overline{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ tal que:

$$U_{ab}(x) := \frac{x-a}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x) + \mathbf{1}_{]b,\infty]}(x) .$$

Entonces U_{ab} es fución de distribución, conocida como *distribución uniforme.*

2.2.4. Definición. *Una función de distribución conjunta es una función $H : \overline{\mathbf{R}}^2 \to \mathbf{R}$ tal que:*

1. *H es 2-creciente.*
2. *$H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ y $H(\infty, \infty) = 1$.*

Observación: La definición anterior implica que H es fijada y que tiene marginales dadas por $F(x) := H(x, \infty)$ y $G(y) := H(\infty, y)$ y por el Corolario 2.1.12 tenemos que F y G son funciones de distribución.

2.2.5. Ejemplo. Sea la función $H : \overline{\mathbf{R}}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$H(x, y) := \frac{(x+1)(1-e^{-y})}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]\times[0,\infty]}(x, y) + (1 - e^{-y})\mathbf{1}_{]1,\infty]\times[0,\infty]}(x, y) .$$

Retomando parte del Ejemplo 1.1.13 tenemos que H es 2-creciente y fijada y además $H(\infty, \infty) = 1$ y por lo tanto H es una función de distribución conjunta. Las marginales de H son las funciones de distribución:

$$F = U_{-1,1} \quad , \quad G(y) = (1 - e^{-y})\mathbf{1}_{[0,\infty]}(y) .$$

2.2.6. Lema. *Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G. Entonces existe una única subcópula C' tal que:*

1. *$\operatorname{Dom} C' = \operatorname{Ran} F \times \operatorname{Ran} G$.*
2. *$H(x, y) = C'(F(x), G(y))$ para todo $x, y \in \overline{\mathbf{R}}$.*

Demostración: Sea la relación $C' : Ran\, F \times Ran\, G \to \mathbf{R}$ definida por

$$(F(x), G(y)) \mapsto H(x,y)\,, \text{ para todo } x, y \in \overline{\mathbf{R}}\,.$$

Sean $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Entonces por el Lema 1.1.14

$$|H(x_2,y_2) - H(x_1,y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|\,,$$

por lo que si $F(x_1) = F(x_2)$ y $G(y_1) = G(y_2)$ entonces $H(x_2,y_2) = H(x_1,y_1)$, lo que implica que C' es en efecto una función. Veremos ahora que C' cumple con la Definición 2.1.1 de subcópula:

1. Como H es función de distribución entonces $Dom\, H = \overline{\mathbf{R}}^2$ lo que a su vez implica que sus marginales son funciones de distribución y por tanto $F(-\infty) = 0 = G(-\infty)$ y $F(\infty) = 1 = G(\infty)$ por lo que se tiene que $0, 1 \in Ran\, F, Ran\, G$.

2. Tenemos que

$$\begin{aligned} C'(F(x), 0) &= C(F(x), G(-\infty)) \\ &= H(x, -\infty) \\ &= 0\,, \quad \text{porque } H \text{ es función de distribución conjunta;} \end{aligned}$$

   y análogamente $C'(0, G(y)) = 0$ y por lo tanto C' está fijada.
   Por otro lado, tenemos que:

$$V_{C'}([F(x_1), G(y_1)] \times [F(x_2), G(y_2)]) = V_H([x_1, y_1] \times [x_2, y_2]) \geq 0\,;$$

   esto último porque al ser H función de distribución conjunta esto implica que es 2-creciente y por lo tanto C' es 2-creciente.

3. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} C'(F(x), 1) &= C'(F(x), G(\infty)) \\ &= H(x, \infty) \\ &= F(x)\,, \quad \text{porque } H \text{ es función de distribución conjunta;} \end{aligned}$$

   y análogamente $C'(1, G(y)) = G(y)$ y por lo tanto C' es subcópula.

□

2.2.7. Lema. *Sea C' una subcópula. Entonces existe una cópula C tal que $C\restriction_{Dom\, C'} = C'$.*

Demostración: Sea $Dom\, C' := S_1 \times S_2$ donde $\{0,1\} \subset S_j \subset \mathbf{I}$, $j = 1, 2$. Tenemos que por el Teorema 2.1.10 C' es uniformemente continua en $Dom\, C'$ y como este último está acotado entonces por el teorema de extensión continua de Tietze (Bartle, 1987) se puede definir una función continua $C'' : \overline{S}_1 \times \overline{S}_2 \to \mathbf{R}$ tal que $C''\restriction_{Dom\, C'} = C'$, donde $\overline{S}_j$ es la cerradura de S_j. Primero demostraremos que dicha extensión C'' es también subcópula:

1. Tenemos que $Dom\, C'' = \overline{S}_1 \times \overline{S}_2$ donde $\{0, 1\} \subset S_j \subset \overline{S}_j \subset \mathbf{I}$.

2. Si $u \in S_1$ entonces $C''(u, 0) = C'(u, 0) = 0$ ya que $(u, 0) \in Dom\, C' \subset Dom\, C''$. Si $u \in \overline{S}_1 \setminus S_1$ entonces

$$\begin{aligned} C''(u,0) &= \lim_{x \to u,\, x \in S_1} C'(x,0) \\ &= \lim_{x \to u} 0 \\ &= 0\,, \text{ para todo } u \in \overline{S}_1\,. \end{aligned}$$

De manera análoga $C''(0, v) = 0$ para todo $v \in \overline{S}_2$ y por lo tanto C'' está fijada. Por el teorema de extensión continua tenemos que

$$C''(u,v) = \begin{cases} C'(u,v) & si \quad u \in S_1\,,\ v \in S_2\,, \\ \lim_{x \to u} C'(x,v) & si \quad u \in \overline{S}_1 \setminus S_1\,,\ v \in S_2\,, \\ \lim_{y \to v} C'(u,y) & si \quad u \in S_1\,,\ v \in \overline{S}_2 \setminus S_2\,, \\ \lim_{(u,v) \to (u,v)} C'(x,y) & si \quad u \in \overline{S}_1\,,\ v \in \overline{S}_2\,, \end{cases}$$

y como C' es 2-creciente entonces C'' es 2-creciente.

3. Si $u \in S_1$ entonces $C''(u, 1) = C'(u, 1) = u$ ya que $(u, 1) \in Dom\, C' \subset Dom\, C''$. Si $u \in \overline{S}_1 \setminus S_1$ entonces

$$\begin{aligned} C''(u,1) &= \lim_{x \to u,\, x \in S_1} C'(x,1) \\ &= \lim_{x \to u} x \\ &= u\,, \text{ para todo } u \in \overline{S}_1 \end{aligned}$$

y de manera análoga $C''(1, v) = v$ para todo $v \in \overline{S}_2$. Por todo lo anterior concluimos que C'' es subcópula.

Ahora extenderemos a C'' a una función C tal que $C : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{R}$ y que $C \restriction_{Dom\, C''} = C''$. Sea $(a, b) \in \mathbf{I}^2$. Sean $a_1, a_2 \in \overline{S}_1$ el máximo y mínimo elemento de $\overline{S}_1$, respectivamente, tales que $a_1 \leq a \leq a_2$ y sean $b_1, b_2 \in \overline{S}_2$ el máximo y mínimo elemento de $\overline{S}_2$, respectivamente, tales que $b_1 \leq b \leq b_2$ (Nótese que si $a \in \overline{S}_1$ entonces $a_1 = a = a_2$ y algo análogo para b, por lo que la extensión se dará como tal cuando $(a, b) \in \mathbf{I}^2 \setminus \overline{S}_1 \times \overline{S}_2$). Ahora definimos:

$$\lambda_1 := \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} \mathbf{1}_{\{a_1 < a_2\}} + \mathbf{1}_{\{a_1 = a_2\}}\,,$$

$$\mu_1 := \frac{b - b_1}{b_2 - b_1} \mathbf{1}_{\{b_1 < b_2\}} + \mathbf{1}_{\{b_1 = b_2\}}\,,$$

lo que implica que

$$1 - \lambda_1 = \frac{a_2 - a}{a_2 - a_1} \mathbf{1}_{\{a_1 < a_2\}}\,,\ 1 - \mu_1 = \frac{b_2 - b}{b_2 - b_1} \mathbf{1}_{\{b_1 < b_2\}}\,.$$

Ahora definimos:

$$C(a,b) := (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1 C''(a_1,b_2) + \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2,b_1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2,b_2). \tag{2.8}$$

Nótese que

$$(1-\lambda_1)(1-\mu_1) + (1-\lambda_1)\mu_1 + \lambda_1(1-\mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 1,$$

es decir, la manera que se propone de extender la cópula $C'' : \overline{S}_1 \times \overline{S}_2 \longrightarrow \mathbf{I}$ a una función $C : \mathbf{I}^2 \longrightarrow \mathbf{I}$ es mediante una interpolación bilineal de los cuatro puntos en $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$ que están más cercanos al punto (a,b), y por lo tanto $Dom\, C = \mathbf{I}^2$ y $C \restriction_{Dom\, C''} = C''$.

Y para concluir demostraremos que la función C definida por la ecuación (2.8) es una cópula:

1. Como $0 \in \overline{S}_2$ entonces $b_1 = 0 = b_2$ y entonces $\mu_1 = 1$ así que $C(u,0) = (1-\lambda_1)C''(a_1,0) + \lambda_1 C''(a_2,0) = 0$ y análogamente $C(0,v) = 0$.

2. Como $1 \in \overline{S}_1$ entonces $a_1 = 1 = a_2$ y entonces $\lambda_1 = 1$ así que $C(1,v) = (1-\mu_1)C''(1,b_1) + \mu_1 C''(1,b_2) = (1-\mu_1)b_1 + \mu_1 b_2$. Si $v \in \overline{S}_2$ entonces $b_1 = v = b_2$ y por lo tanto $C(1,v) = v$. Si $v \in \mathbf{I}^2 \setminus \overline{S}_2$ entonces

$$\begin{aligned} C(1,v) &= (1-\mu_1)b_1 + \mu_1 b_2 \\ &= \frac{b_2 - v}{b_2 - b_1} b_1 + \frac{v - b_1}{b_2 - b_1} b_2 \\ &= \frac{1}{b_2 - b_1}(b_1 b_2 - b_1 v + b_2 v - b_1 b_2) \\ &= v, \end{aligned}$$

y análogamente se tiene que $C(u,1) = u$.

3. Por demostrar que para todo $a,b,c,d \in \mathbf{I}$ tales que $a \le c$ y $b \le d$ se cumple:

$$V_C(B) = C(c,d) - C(c,b) - C(a,d) + C(a,b) \ge 0$$

donde $B := [a,c] \times [b,d]$. Para ello, de manera análoga a lo definido para λ_1 y μ_1, sean $c_1, c_2 \in \overline{S}_1$ el máximo y mínimo elemento de $\overline{S}_1$, respectivamente, tales que $c_1 \le c \le c_2$ y sean $d_1, d_2 \in \overline{S}_2$ el máximo y mínimo elemento de $\overline{S}_2$, respectivamente, tales que $d_1 \le d \le d_2$. Ahora definimos:

$$\lambda_2 := \frac{c - c_1}{c_2 - c_1}\mathbf{1}_{\{c_1 < c_2\}} + \mathbf{1}_{\{c_1 = c_2\}},$$

$$\mu_2 := \frac{d - d_1}{d_2 - d_1}\mathbf{1}_{\{d_1 < d_2\}} + \mathbf{1}_{\{d_1 = d_2\}},$$

lo que implica que

$$1 - \lambda_2 = \frac{c_2 - c}{c_2 - c_1}\mathbf{1}_{\{c_1 < c_2\}}, \quad 1 - \mu_2 = \frac{d_2 - d}{d_2 - d_1}\mathbf{1}_{\{d_1 < d_2\}}.$$

Son varios los casos a considerar para calcular $V_C(B)$ dependiendo de si existe o no un punto en $\overline{S}_1$ estrictamente entre a y c y de si existe o no un punto en $\overline{S}_2$ estrictamente entre b y d. Bastará con demostrar el caso más simple y el más complejo.

Para el caso más simple supondremos que no existe punto en $\overline{S}_1$ estrictamente entre a y c, y que no existe punto en $\overline{S}_2$ estrictamente entre b y d. Esto implica entonces que $a_1 = c_1, a_2 = c_2, b_1 = d_1, b_2 = d_2$ y en tal caso obtenemos:

$$V_C(B) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \geq 0 .$$

El caso más complejo resulta cuando existe al menos un punto en $\overline{S}_1$ estrictamente entre a y c, y existe al menos un punto en $\overline{S}_2$ estrictamente entre b y d. Esto implica entonces que $a < a_2 \leq c_1 < c$ y $b < b_2 \leq d_1 < d$, y en este caso obtenemos:

$$\begin{aligned} V_C(B) =& (1-\lambda_1)\mu_2 V_{C''}([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \mu_2 V_{C''}([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) \\ &+ \lambda_2\mu_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + (1-\lambda_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) \\ &+ V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \lambda_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\ &+ (1-\lambda_1)(1-\mu_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \\ &+ (1-\mu_1)V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) \\ &+ \lambda_2(1-\mu_1)V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) , \end{aligned}$$

en donde tenemos que $V_C(B)$ es combinación lineal de $H-$volúmenes no negativos por lo que $V_C(B) \geq 0$ y por lo tanto C es cópula.

□

Observación: De la demostración anterior se ve que la extensión de una subcópula a una cópula no es única porque fue arbitrario el decidir hacer una interpolación bilineal entre los puntos de $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$ más cercanos al punto $(a, b) \in \mathbf{I}^2 \setminus \overline{S}_1 \times \overline{S}_2$, bien se pudo haber utilizado otra forma hacer la extensión de la subcópula, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

2.2.8. Ejemplo. Sea el punto $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ y consideremos la función de distribución conjunta $H(x, y) := \mathbf{1}_{[a,\infty]\times[b,\infty]}(x, y)$ cuyas marginales resultan ser

$$F(x) = H(x, \infty) = \mathbf{1}_{[a,\infty]}(x) , \; G(y) = H(\infty, y) = \mathbf{1}_{[b,\infty]}(y) ,$$

y en donde $Ran\, F = \{0, 1\} = Ran\, G$. Por el Lema 2.2.6 obtenemos la siguiente subcópula C' con $Dom\, C' = \{0, 1\}^2$:

$$C'(u, v) = \mathbf{1}_{\{(1,1)\}}(u, v) .$$

Ahora utilizando el Lema 2.2.7 extendemos la subcópula C' a una cópula C mediante la ecuación (2.8) y observando que en este caso particular $C'' = C'$:

$$C(u, v) = \lambda_1\mu_1 C'(1, 1) ,$$

donde $\lambda_1 = u, \mu_1 = 1, C'(1,1) = 1$ por lo que $C(u,v) = uv = \Pi(u,v)$. Sin embargo, para la subcópula C' que se obtuvo tenemos que cualquier cópula C satisface $C \restriction_{Dom\, C'} = C'$ y por tanto sería extensión de C'.

2.2.9. Teorema. **(Sklar)** *Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G. Entonces existe una cópula C tal que*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) \quad , \text{ para todo } x, y \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Además si F y G son continuas entonces C es única, de otro modo C es única solamente en $Ran\, F \times Ran\, G$.

En sentido inverso, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución entonces la función H definida por $H(x,y) := C(F(x), G(y))$ es una función de distribución conjunta con marginales F y G.

Demostración:

1. Por el Lema 2.2.6 existe una única subcópula C' tal que $H(x,y) = C'(F(x), G(y))$ con $Dom\, C' = Ran\, F \times Ran\, G$. Por el Lema 2.2.7 C' se puede extender a una cópula C. Si F y G son continuas entonces $Ran\, F = Ran\, G = \mathbf{I}$ y por lo tanto la única subcópula es una cópula.

2. Sea C una cópula y sean F y G funciones de distribución. Definimos la función $H(x,y) := C(F(x), G(y))$. Utilizando la Definición 2.2.4:

   a) Sea $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Entonces

   $$\begin{aligned} V_H(B) &= C(F(x_2), G(y_2)) - C(F(x_2), G(y_1)) - C(F(x_1), G(y_2)) \\ &\quad + C(F(x_1), G(y_1)) \\ &= V_C([F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]) \geq 0, \end{aligned}$$

   y por lo tanto H es 2-creciente.

   b) $H(x, -\infty) = C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0$ y de manera análoga $H(-\infty, y) = 0$. $H(\infty, \infty) = C(F(\infty), G(\infty)) = C(1,1) = 1$.

   Por lo tanto H es función de distribución conjunta con marginales

   $$H(x, \infty) = C(F(x), 1) = F(x) \; , \; H(\infty, y) = C(1, G(y)) = G(y) \, .$$

$\square$

2.2.10. Definición. *Sea F una función de distribución. La cuasi-inversa de F es cualquier función $F^{(-1)}$ con $Dom\, F^{(-1)} = \mathbf{I}$ tal que:*

1. *Si $t \in Ran\, F$ entonces $F^{(-1)}(t)$ es cualquier número $x \in \overline{\mathbf{R}}$ tal que $F(x) = t$, esto es:*

$$F(F^{(-1)}(t)) = t \quad , \text{ para todo } t \in Ran\, F \, .$$

2. *Si $t \in \mathbf{I} \setminus Ran\, F$ entonces*

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\} = \sup\{x : F(x) \leq t\}.$$

Observación: Si F es estrictamente creciente su cuasi-inversa es única y de hecho $F^{(-1)} = F^{-1}$, donde F^{-1} es la inversa usual.

2.2.11. Ejemplo. Continuando con el Ejemplo 2.2.2, tenemos que $Ran\,\mathbf{1}_{B(a)} = \{0, 1\}$ y por lo tanto la familia de funciones cuasi-inversas de $\mathbf{1}_{B(a)}$ queda definida por

$$\mathbf{1}^{(-1)}_{B(a)}(t) = a_0\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + a\mathbf{1}_{]0,1[}(t) + a_1\mathbf{1}_{\{1\}}(t),$$

donde a_0 y a_1 son números cualesquiera en $\overline{\mathbf{R}}$ tales que $a_0 \leq a \leq a_1$.

Utilizando cuasi-inversas de funciones de distribución obtenemos el siguiente corolario del Lema 2.2.6:

2.2.12. Corolario. *Sean H, F, G, C' como en el Lema 2.2.6 y sean $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F y G, respectivamente. Entonces*

$$C'(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \quad , \text{ para todo } (u,v) \in Dom\, C'. \tag{2.9}$$

Demostración:

$$H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) = C'(F(F^{(-1)}(u)), G(G^{(-1)}(v))),$$

y si $(u, v) \in Dom\, C' = Ran\, F \times Ran\, G$ entonces tenemos que

$$H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) = C'(u,v).$$

□

Observación: Si F y G son continuas entonces por el Teorema 2.2.9 el resultado anterior es válido para cópulas también.

2.2.13. Ejemplo. Del Ejemplo 2.2.5 tenemos la función de distribución

$$H(x,y) := \frac{(x+1)(1-e^{-y})}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]\times[0,\infty]}(x,y) + (1-e^{-y})\mathbf{1}_{]1,\infty]\times[0,\infty]}(x,y),$$

con marginales

$$F(x) = \frac{x+1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,\infty]}(x), \quad G(y) = (1-e^{-y})\mathbf{1}_{[0,\infty]}(y),$$

y con cuasi-inversas

$$F^{(-1)}(u) = a_0\mathbf{1}_{\{0\}}(u) + (2u-1)\mathbf{1}_{]0,1[}(u) + a_1\mathbf{1}_{\{1\}}(u),$$

donde a_0 es cualquier número en $[-\infty, -1]$ y a_1 es cualquier número en $[1, \infty]$, y

$$G^{(-1)}(v) = b_0\mathbf{1}_{\{0\}}(v) - \ln(1-v)\mathbf{1}_{]0,1]}(v),$$

donde b_0 es cualquier número en $[-\infty, 0]$.

Como $Ran\,F = Ran\,G = \mathbf{I}$ tenemos que

$$C(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)),$$

donde C es cópula porque F y G son continuas. Si escogemos $a_0 = -1, a_1 = 1, b_0 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} C(u,v) &= H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \\ &= uv = \Pi(u,v). \end{aligned}$$

Observación: Se puede extender el dominio de una cópula C de $\mathbf{I}^2$ a $\overline{\mathbf{R}}^2$ y así obtener una función de distribución conjunta $H_C : \overline{\mathbf{R}}^2 \to \mathbf{R}$ tal que $H_C \restriction_{\mathbf{I}^2} = C$ y cuyas marginales sean $F = G = U_{0,1}$:

$$H_C(x,y) := C(x,y)\mathbf{1}_{\mathbf{I}^2}(x,y) + x\mathbf{1}_{\mathbf{I}\times]1,\infty]}(x,y) + y\mathbf{1}_{]1,\infty]\times\mathbf{I}}(x,y) + \mathbf{1}_{]1,\infty]\times]1,\infty]}(x,y).$$

2.3. Cópulas y variables aleatorias

2.3.1. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G, respectivamente, y con función de distribución conjunta H. Entonces existe una cópula C tal que $H(x,y) = C(F(x), G(y))$. Si F y G son continuas entonces C es única, de lo contrario C es única solamente en $Ran\,F \times Ran\,G$.*

Demostración: El resultado es inmediato a partir del Teorema 2.2.9 . □

Se utiliza también la notación C_{XY} para referirse a la cópula de X, Y.

2.3.2. Teorema. *Las variables aleatorias continuas X, Y son independientes si y sólo si $C_{XY} = \Pi$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} X, Y \text{independientes} \quad &\Leftrightarrow \quad H(x,y) = F(x)G(y), \\ &\Leftrightarrow \quad H(x,y) = C(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

en donde $C(u,v) = uv = \Pi(u,v)$, y como F y G son continuas entonces C es única. □

2.3.3. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY}. Si α y β son funciones estrictamente crecientes en $Ran\,X$ y $Ran\,Y$, respectivamente, entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$.*

Demostración: Sean F_1, G_1, F_2 y G_2 las funciones de distribución de $X, Y, \alpha(X)$ y $\beta(Y)$, respectivamente. Como α y β son estrictamente crecientes entonces $F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x))$ y análogamente $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$, por lo que, para todo $x, y \in \overline{\mathbf{R}}$

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
&= C_{XY}(F_2(x), G_2(y))\,;
\end{aligned}
$$

como X, Y son continuas entonces $Ran\, F_2 = Ran\, G_2 = \mathbf{I}$ y por lo tanto $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ en $\mathbf{I}^2$. □

2.3.4. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY}. Sean α y β funciones estrictamente monótonas en $Ran\, X$ y $Ran\, Y$, respectivamente:*

1. *Si α es estrictamente creciente y β estrictamente decreciente entonces*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)\,.$$

2. *Si α es estrictamente decreciente y β estrictamente creciente entonces*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)\,.$$

3. *Si α y β son estrictamente decrecientes entonces*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)\,.$$

Demostración: Sean F_1, G_1, F_2 y G_2 las funciones de distribución de $X, Y, \alpha(X)$ y $\beta(Y)$, respectivamente, sea H_{XY} la función de distribución conjunta de X, Y y sea $H_{\alpha(X)\beta(Y)}$ la función de distribución conjunta de $\alpha(X)$ y $\beta(Y)$:

1. Supongamos que α es estrictamente creciente y β estrictamente decreciente, entonces

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= H_{\alpha(X)\beta(Y)}(x, y) \\
&= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= P[\alpha(X) \leq x] - C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
&= F_2(x) - C_{XY}(P[X \leq \alpha^{-1}(x)], P[Y \leq \beta^{-1}(y)]) \\
&= F_2(x) - C_{XY}(P[\alpha(X) \leq x], P[\beta(Y) \geq y]) \\
&= F_2(x) - C_{XY}(F_2(x), 1 - G_2(y))\,,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$.

2. Supongamos que α es estrictamente decreciente y β estrictamente creciente, entonces por simetría con lo anterior tenemos que $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = v - C_{XY}(1-u,v)$.

3. Supongamos que α y β son estrictamente decrecientes, entonces

$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x),G_2(y)) &= H_{\alpha(X)\beta(Y)}(x,y)\\
&= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y]\\
&= P[X \geq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)]\\
&= 1 - P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[Y \leq \beta^{-1}(y)]\\
&\quad + P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)]\\
&= 1 - P[\alpha(X) \geq x] - P[\beta(Y) \geq y]\\
&\quad + H_{XY}(\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y))\\
&= 1 - (1 - F_2(x)) - (1 - G_2(y))\\
&\quad + C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y)))\\
&= F_2(x) + G_2(y) - 1\\
&\quad + C_{XY}(P[X \leq \alpha^{-1}(x)], P[Y \leq \beta^{-1}(y)])\\
&= F_2(x) + G_2(y) - 1\\
&\quad + C_{XY}(P[\alpha(X) \geq x], P[\beta(Y) \geq y])\\
&= F_2(x) + G_2(y) - 1\\
&\quad + C_{XY}(1 - F_2(x), 1 - G_2(y))\,,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = u + v - 1 + C_{XY}(1-u, 1-v)$.

□

Observación: Los teoremas 2.3.3 y 2.3.4 pueden extenderse al caso de que α y β sean estrictamente crecientes o decrecientes casi seguramente (en el sentido de Lebesgue).

2.3.5. Ejemplo. Sean las variables aleatorias continuas $U, V \sim Unif(0,1)$ con función de distribución conjunta H. Sean F y G las funciones de distribución de U y V, respectivamente. Entonces por el Teorema 2.3.1 existe una única cópula C tal que $H(u,v) = C(F(u), G(v))$ y como

$$F(u) = u\mathbf{1}_{[0,1]}(u) + \mathbf{1}_{]1,\infty]}(u)\ ,\ G(v) = v\mathbf{1}_{[0,1]}(v) + \mathbf{1}_{]1,\infty]}(v)\,,$$

entonces

$$C(F(u),G(v)) = C(u,v)\mathbf{1}_{\mathbf{I}^2}(u,v) + C(1,1)\mathbf{1}_{]1,\infty]^2}(u,v)\,,$$

$$H(u,v) = C(u,v)\mathbf{1}_{\mathbf{I}^2}(u,v) + \mathbf{1}_{]1,\infty]^2}(u,v)\,,$$

de donde

$$C(u,v) = H(u,v) \quad , \quad u,v \in \mathbf{I}^2\,.$$

Observación: En pocas palabras, el ejemplo anterior nos dice que si las marginales de una función de distribución conjunta H son uniformes entonces la cópula asociada es

$$C = H \restriction_{\mathbf{I}^2} .$$

2.3.6. Ejemplo. Continuando con el Ejemplo 2.3.5, si U y V son independientes entonces

$$H(u,v) = uv\mathbf{1}_{\mathbf{I}^2}(u,v) + \mathbf{1}_{]1,\infty]}(u,v) ,$$

y por lo tanto $C = H \restriction_{\mathbf{I}^2}$, esto es $C = \Pi$, tal cual lo establece el Teorema 2.3.2 .

2.3.7. Lema. *Sea la variable aleatoria continua X. Entonces:*

1. $C_{X,X} = M$.

2. $C_{X,-X} = W$.

Demostración: Sea F la función de distribución de X. Por Teorema 2.3.1:

1.

$$\begin{aligned} C_{X,X}(F(x),F(y)) &= P[X \le x, X \le y] \\ &= P[X \le \min\{x,y\}] \\ &= P[X \le x]\mathbf{1}_{\{x \le y\}} + P[X \le y]\mathbf{1}_{\{x > y\}} \\ &= F(x)\mathbf{1}_{\{F(x) \le F(y)\}} + F(y)\mathbf{1}_{\{F(x) > F(y)\}} \\ &= \min\{F(x), F(y)\} , \end{aligned}$$

así que $C_{X,X}(u,v) = \min\{u,v\}$ y por lo tanto $C_{X,X} = M$.

2. Sea G la función de distribución de $-X$, entonces $G(y) = 1 - F(-y)$ y se tiene que

$$\begin{aligned} C_{X,-X}(F(x),G(y)) &= P[X \le x, -X \le y] \\ &= P[-y \le X \le x] \\ &= [F(x) - F(-y)]\mathbf{1}_{\{-y < x\}} \\ &= [F(x) + (1 - F(-y)) - 1]\mathbf{1}_{\{F(-y) < F(x)\}} \\ &= [F(x) + G(y) - 1]\mathbf{1}_{\{1 - G(y) < F(x)\}} \\ &= [F(x) + G(y) - 1]\mathbf{1}_{\{F(x) + G(y) - 1 > 0\}} \\ &= \max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} , \end{aligned}$$

de donde $C_{X,-X}(u,v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ y por lo tanto $C_{X,-X} = W$.

□

2.3.8. Corolario. *Sean las variables aleatorias continuas X, Y y sea α una función estrictamente monótona en $\operatorname{Ran} X$ tal que $Y = \alpha(X)$ casi seguramente:*

1. *Si α es estrictamente creciente, entonces*

$$C_{XY} = M.$$

2. *Si α es estrictamente decreciente, entonces*

$$C_{XY} = W.$$

Demostración:

1. Por el Teorema 2.3.3 y el Lema 2.3.7 tenemos que

$$C_{XY} = C_{X\alpha(X)} = C_{XX} = M.$$

2. Sea G la función de distribución de Y, entonces $G(y) = 1 - F(\alpha^{-1}(y))$ y se tiene que

$$\begin{aligned}
C_{XY}(F(x), G(y)) &= P[X \leq x, Y \leq y] \\
&= P[X \leq x, \alpha(X) \leq y] \\
&= P[X \leq x, X \geq \alpha^{-1}(y)] \\
&= P[\alpha^{-1}(y) \leq X \leq x] \\
&= [F(x) - F(\alpha^{-1}(y))]\mathbf{1}_{\{\alpha^{-1}(y)<x\}} \\
&= [F(x) + (1 - F(\alpha^{-1}(y))) - 1]\mathbf{1}_{\{F(\alpha^{-1}(y))<F(x)\}} \\
&= [F(x) + G(y) - 1]\mathbf{1}_{\{1-G(y)<F(x)\}} \\
&= [F(x) + G(y) - 1]\mathbf{1}_{\{F(x)+G(y)-1>0\}} \\
&= \text{máx}\,\{F(x) + G(y) - 1, 0\}\,,
\end{aligned}$$

de donde $C_{XY}(u, v) = \text{máx}\,\{u + v - 1, 0\}$ y por lo tanto $C_{XY} = W$.

□

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Un vector aleatorio es una función $\mathcal{F}$-medible $(X, Y) : \Omega \to \mathbf{R}^2$, e induce una medida de probabilidad P_{XY} en el espacio medible $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2))$, donde $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ es el σ-álgebra de Borel generado por todos los abiertos en $\mathbf{R}^2$. Sea $\mathcal{J} := \{\,]-\infty, x]\times]-\infty, y] : x, y \in \mathbf{R}\}$. Como $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2) = \sigma(\mathcal{J})$, donde $\sigma(\mathcal{J})$ es el mínimo σ-álgebra generado por la clase $\mathcal{J}$ (Clarke, 1975), entonces la medida de probabilidad P_{XY} para cualquier elemento de $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ queda totalmente especificada si tan solo se conoce la medida de probabilidad de los elementos de la clase $\mathcal{J}$. Sea la función $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $H(x, y) := P_{XY}(\,]-\infty, x]\times]-\infty, y]\,)$. H es entonces lo que se conoce como la función de distribución conjunta de X, Y. Así, dada una función de distribución conjunta H tenemos que H induce una medida de probabilidad en $\mathbf{R}^2$. De acuerdo a las Definiciones 1.1.3 y 2.2.4 tenemos también que

$$H(x, y) = V_H(\,]-\infty, x]\times]-\infty, y]).$$

En el Ejemplo 2.3.5 se vio que si las marginales de una función de distribución conjunta H son uniformes entonces la cópula asociada es $C = H\restriction_{\mathbf{I}^2}$. Esto implica que podemos ver a las cópulas como funciones de distribución conjunta con marginales $Unif(0,1)$ y por lo tanto una cópula C induce una medida de probabilidad en $\mathbf{I}^2$ por medio de $V_C([0,u]\times[0,v]) = C(u,v)$ y entonces la C-*medida* de un conjunto en $\mathbf{I}^2$ es su C-volumen V_C.

Un vector aleatorio (X,Y) es absolutamente continuo si tiene una función de densidad conjunta de probabilidades, es decir, una función $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$-medible $h:\mathbf{R}^2\to[0,\infty[$ tal que

$$P_{XY}(B) = \iint_B h(x,y)\,dxdy \quad , \text{ para todo } B\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)\,,$$

y en tal caso, si $J =]-\infty,x]\times]-\infty,y]$ entonces

$$P_{XY}(J) = H(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} h(x,y)\,dxdy\,,$$

o bien

$$h(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}H(x,y)\,,$$

lo cual motiva las siguientes definiciones:

2.3.9. Definición. *La parte absolutamente continua de una cópula C es*

$$A_C(u,v) := \int_0^u\int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}C(s,t)\,dtds\,.$$

2.3.10. Definición. *La parte singular de una cópula C es*

$$S_C(u,v) := C(u,v) - A_C(u,v)\,.$$

Las definiciones anteriores implican que:

$$C(u,v) = A_C(u,v) + S_C(u,v) \tag{2.10}$$

2.3.11. Definición. *Si $C = A_C$ en $\mathbf{I}^2$ (esto es, si vemos a C como una función de distribución conjunta y tiene función de densidad conjunta $\partial^2C(u,v)/\partial u\partial v$) decimos que la cópula C es absolutamente continua. Si $C = S_C$ en $\mathbf{I}^2$ (esto es, si $\partial^2C(u,v)/\partial u\partial v = 0$ casi en todos lados en $\mathbf{I}^2$) decimos entonces que la cópula C es singular. En cualquier otro caso decimos que la cópula C tiene parte absolutamente continua A_C y parte singular S_C.*

2.3.12. Definición. *La C-medida de la parte absolutamente continua de la cópula C la definimos como $A_C(1,1)$ y la C-medida de la parte singular de C la definimos como $S_C(1,1)$.*

El *soporte* de una función de distribución conjunta H es el complemento de la unión de todos los conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^2$ con H-medida cero, por lo que:

2.3.13. Definición. *El soporte de una cópula C es el complemento de la unión de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbf{I}^2$ con C-medida cero. Cuando el soporte de C es todo $\mathbf{I}^2$ decimos que C tiene soporte completo.*

Observación: Si la cópula C es singular entonces su soporte tiene medida de Lebesgue cero y viceversa. Sin embargo, es posible tener cópulas con soporte completo que tienen tanto parte absolutamente continua como singular.

2.3.14. Ejemplo. El soporte de M (la cota superior de Fréchet-Hoeffding) es la diagonal principal de $\mathbf{I}^2$, es decir el conjunto $\{(u, u) : u \in \mathbf{I}\}$ ya que la M-medida de cualquier rectángulo abierto que esté enteramente por arriba o por abajo de la diagonal principal es cero. Incluso tenemos que $\partial^2 M/\partial u \partial v = 0$ casi en todos lados en $\mathbf{I}^2$ y por lo tanto M es singular. De manera análoga se tiene que el soporte de W (la cota inferior de Fréchet-Hoeffding) es el conjunto $\{(u, 1-u) : u \in \mathbf{I}\}$ y por lo tanto W es singular también.

2.3.15. Ejemplo. La cópula producto $\Pi(u, v) = uv$ es absolutamente continua ya que para todo $(u, v) \in \mathbf{I}^2$:

$$A_{\Pi}(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Pi(s, t)\, dtds = \int_0^u \int_0^v dtds = uv = \Pi(u, v)\,.$$

Una cópula con soporte completo pero que tiene tanto parte absolutamente continua como singular la veremos en el Ejemplo 2.5.8 de la sección *Cópulas de sobrevivencia.*

2.4. Cotas de Fréchet-Hoeffding para distribuciones conjuntas

Del Teorema 2.1.6 y la ecuación (2.4) tenemos que

$$W(u,v) = \max\{u+v-1, 0\} \leq C(u,v) \leq \min\{u,v\} = M(u,v) \quad , \quad u,v \in \mathbf{I},$$

y como consecuencia del Teorema de Sklar (Teorema 2.2.9), si X, Y son variables aleatorias con función de distribución conjunta H y marginales F y G, respectivamente, tenemos que

$$\max\{F(x)+G(y)-1, 0\} \leq H(x,y) \leq \min\{F(x), G(y)\} \ , \ x,y \in \overline{\mathbf{R}}. \qquad (2.11)$$

A las cotas de la expresión anterior se les conoce como *cotas de Fréchet-Hoeffding para funciones de distribución* H con marginales F y G. En esta sección buscamos entender el tipo de relación entre las variables aleatorias X, Y si su función de distribución conjunta H es igual a alguna de las cotas de Fréchet-Hoeffding.

2.4.1. Definición. *Un conjunto* $S \subset \overline{\mathbf{R}}^2$ *es no-decreciente si para cualesquiera* $(x,y), (u,v) \in S$ *se tiene que si* $x < u$ *entonces* $y \leq v$. *Similarmente, un conjunto* $S \subset \overline{\mathbf{R}}^2$ *es no-creciente si para cualesquiera* $(x,y), (u,v) \in S$ *se tiene que si* $x < u$ *entonces* $y \geq v$.

2.4.2. Lema. *Sea un conjunto* $S \subset \overline{\mathbf{R}}^2$. S *es no-decreciente si y sólo si para cada* $(x,y) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ *se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *Si* $u \leq x$ *entonces* $v \leq y$, *para todo* $(u,v) \in S$.
2. *Si* $v \leq y$ *entonces* $u \leq x$, *para todo* $(u,v) \in S$.

Demostración: (Por contradicción)

1. Supongamos que S es no-decreciente pero que ninguna de las dos condiciones anteriores se cumplen, entonces existen puntos $(a,b), (c,d) \in S$ tales que $a \leq x, b > y, d \leq y, c > x$ de donde $a < c$, $b > d$ y se concluiría que S no es no-decreciente (contradicción).

2. Ahora supongamos que las condiciones 1 y 2 se cumplen pero que S no es no-decreciente, entonces existen puntos $(a,b), (c,d) \in S$ tales que $a < c$, $b > d$. Definimos el punto

$$(x,y) := \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right),$$

así que $a < x < c$ y por tanto $a \leq x$, de donde por la condición 1 tenemos que $b \leq y$, lo cual es una contradicción puesto que $d < y < b$.

□

2.4.3. Lema. *Sean X, Y variables aleatorias y sea H su función de distribución conjunta. H es igual a la cota superior de Fréchet-Hoeffding si y sólo si para todo $(x, y) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ se cumple ya sea $P[X > x, Y \leq y] = 0$ o bien $P[X \leq x, Y > y] = 0$.*

Demostración: Sean F y G las marginales de H. Entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X \leq x, Y > y] \\ &= H(x, y) + P[X \leq x, Y > y]\,, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} G(y) &= P[Y \leq y] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X > x, Y \leq y] \\ &= H(x, y) + P[X > x, Y \leq y]\,, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} H(x, y) = M(F(x), G(y)) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{mín}\,\{P[X \leq x, Y > y], P[X > x, Y \leq y]\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P[X \leq x, Y > y] = 0 \text{ ó } P[X > x, Y \leq y] = 0\,. \end{aligned}$$

□

2.4.4. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias y sea H su función de distribución conjunta. H es idénticamente igual a su cota superior de Fréchet-Hoeffding si y sólo si el soporte de H es un subconjunto no-decreciente de $\overline{\mathbf{R}}^2$.*

Demostración: Sean F y G las marginales de H.

1. Supongamos que H es idénticamente igual a M. Sea S el soporte de H y sea (x, y) cualquier punto en $\overline{\mathbf{R}}^2$. La condición 1 del Lema 2.4.2 es verdadera
   $\Leftrightarrow \{(u, v) : u \leq x\ ,\ v > y\} \cap S = \emptyset$,
   $\Leftrightarrow P[X \leq x, Y > y] = 0$.
   Por otro lado, la condición 2 del Lema 2.4.2 es verdadera
   $\Leftrightarrow \{(u, v) : u > x\quad v \leq y\} \cap S = \emptyset$,
   $\Leftrightarrow P[X > x, Y \leq y] = 0$.
   Por hipótesis tenemos que $H(x, y) = M(F(x), G(y))$, entonces por Lema 2.4.3 tenemos que $P[X \leq x, Y \leq y] = 0$ o bien $P[X > x, Y > y] = 0$, y por lo tanto por Lema 2.4.2 concluimos que S es no-decreciente.

2. Supongamos que S es no-decreciente. Entonces por Lema 2.4.2 tenemos que

   $$\{(u, v) : u \leq x\ ,\ v > y\} \cap S = \emptyset \quad \text{o bien} \quad \{(u, v) : u > x\ ,\ v \leq y\} \cap S = \emptyset$$

   y entonces $P[X \leq x, Y > y] = 0$ o bien $P[X > x, Y \leq y] = 0$, por lo tanto por Lema 2.4.3 concluimos que $H \equiv M$.

□

2.4.5. Lema. *Sea un conjunto $S \subset \overline{\mathbf{R}}^2$. S es no-creciente si y sólo si para cada punto $(x, y) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *Si $u \leq x$ entonces $v > y$, para todo $(u, v) \in S$.*
2. *Si $v > y$ entonces $u \leq x$, para todo $(u, v) \in S$.*

Demostración: (Por contradicción)

1. Supongamos que S es no-creciente pero que ninguna de las dos condiciones anteriores se cumplen, entonces existen puntos $(a, b), (c, d) \in S$ tales que $a \leq x, b \leq y, d > y, c > x$ de donde $a < c$ y $b < d$ y se concluiría que S no es no-creciente (contradicción).

2. Ahora supongamos que las condiciones 1 y 2 se cumplen pero que S no es no-creciente, entonces existen puntos $(a, b), (c, d) \in S$ tales que $a < c$ y $b < d$. Definimos el punto

$$(x, y) := \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right),$$

entonces $a < x < c$ de donde $a \leq x$ y entonces por la condición 1 tenemos que $b > y$, lo cual es una contradición puesto que $b < y < d$.

□

2.4.6. Lema. *Sean X, Y variables aleatorias y sea H su función de distribución conjunta. H es igual a la cota inferior de Fréchet-Hoeffding si y sólo si para todo $(x, y) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ se cumple ya sea $P[X > x, Y > y] = 0$ o bien $P[X \leq x, Y \leq y] = 0$.*

Demostración: Sean F y G las marginales de H. Entonces

$$1 - F(x) = P[X > x] = P[X > x, Y \leq y] + P[X > x, Y > y],$$

$$G(y) = P[Y \leq y] = P[X > x, Y \leq y] + P[X \leq x, Y \leq y],$$

de donde

$$F(x) + G(y) - 1 = P[X \leq x, Y \leq y] - P[X > x, Y > y],$$

por lo que

$$\begin{aligned}
&H(x, y) = \max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \\
&\Leftrightarrow \quad H(x, y) = \max\{P[X \leq x, Y \leq y] - P[X > x, Y > y], 0\}, \\
&\Leftrightarrow \quad P[X > x, Y > y] = 0 \text{ ó } P[X \leq x, Y \leq y] = 0.
\end{aligned}$$

□

2.4.7. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias y sea H su función de distribución conjunta. H es idénticamente igual a su cota inferior de Fréchet-Hoeffding si y sólo si el soporte de H es un subconjunto no-creciente de $\overline{\mathbf{R}}^2$.*

Demostración: Sean F y G las marginales de H. Entonces

1. Supongamos que H es idénticamente igual a W. Sea S el soporte de H y sea (x, y) cualquier punto en $\overline{\mathbf{R}}^2$. La condición 1 del Lema 2.4.5 es verdadera

   $\Leftrightarrow \{(u, v) : u \leq x \quad v \leq y\} \cap S = \emptyset$,

   $\Leftrightarrow P[X \leq x, Y \leq y] = 0$,

   y por otro lado, la condición 2 del Lema 2.4.5 es verdadera

   $\Leftrightarrow \{(u, v) : u > x \ , \ v > y\} \cap S = \emptyset$,

   $\Leftrightarrow P[X > x, Y > y] = 0$,

   pero por hipótesis tenemos que $H(x, y) = W(F(x), G(y))$ y entonces por Lema 2.4.6 $P[X \leq x, Y \leq y] = 0$ o bien $P[X > x, Y > y] = 0$, y por lo tanto por Lema 2.4.5 S es no-creciente.

2. Supongamos ahora que S es no-creciente, entonces por Lema 2.4.5

   $$\{(u, v) : u \leq x \ , \ v \leq y\} \cap S = \emptyset \quad \text{ó} \quad \{(u, v) : u > x \ , \ v > y\} \cap S = \emptyset,$$

   y entonces $P[X \leq x, Y \leq y] = 0$ o bien $P[X > x, Y > y] = 0$ y por lo tanto por Lema 2.4.6 concluimos que $H \equiv W$.

□

Cuando X, Y son continuas el soporte de H no puede tener segmentos de recta horizontales ni verticales y en tal caso tenemos que

$$Y \text{ es casi seguramente función creciente de X} \Leftrightarrow C_{XY} = M\,, \tag{2.12}$$

$$Y \text{ es casi seguramente función decreciente de X} \Leftrightarrow C_{XY} = W\,. \tag{2.13}$$

2.4.8. Ejemplo. Sean U, V variables aleatorias $Unif(0, 1)$. Si su función de distribución conjunta es M entonces $P[U = V] = 1$. Si su función de distribución conjunta es W entonces $P[V = 1 - U] = 1$.

2.5. Cópulas de sobrevivencia

2.5.1. Definición. *Sea X una variable aleatoria y sea F su función de distribución. La función de sobrevivencia de X se define como*

$$\overline{F}(x) := P[X > x] = 1 - F(x)\,.$$

Observación: Normalmente $Ran\,\overline{F} = [0, \infty[$; sin embargo, para nuestros fines extenderemos la Definición 2.5.1 de modo que $Ran\,\overline{F} = \overline{\mathbf{R}}$.

2.5.2. Definición. *Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H. La función de sobrevivencia conjunta de X, Y se define como*

$$\overline{H}(x, y) := P[X > x, Y > y]\,,$$

y las funciones marginales de sobrevivencia de H están definidas por

$$\overline{F}(x) := \overline{H}(x, -\infty) \quad , \quad \overline{G}(y) := \overline{H}(-\infty, y)\,.$$

2.5.3. Lema. *Sean X, Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G, respectivamente, con función de distribución conjunta H y con cópula C. Entonces la función de sobrevivencia conjunta de X, Y se puede expresar en términos de sus funciones marginales de sobrevivencia.*

Demostración: Utilizando el Teorema 2.2.9 y las dos definiciones anteriores

$$\begin{aligned} \overline{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y))\,. \end{aligned}$$

□

2.5.4. Lema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C y sea la función $\hat{C} : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$ dada por*

$$\hat{C}(u, v) := u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)\,.$$

Entonces $\hat{C}$ es cópula.

Demostración: Utilizando el Teorema 2.3.4 con $\alpha = -1 = \beta$ obtenemos que la cópula de las variables aleatorias $-X$ y $-Y$ es

$$C_{-X,-Y}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) = \hat{C}(u, v)\,,$$

y por lo tanto $\hat{C}$ es cópula. □

El resultado anterior motiva la siguiente:

2.5.5. Definición. *A la cópula $\hat{C}$ la denominamos cópula de sobrevivencia.*

2.5.6. Corolario. *Sean X, Y variables aleatorias coninuas con función de sobrevivencia conjunta $\overline{H}$ y con marginales de sobrevivencia $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Entonces*

$$\overline{H}(x,y) = \hat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)).$$

Demostración: Sean F_{-X} y G_{-Y} las funciones de distribución de $-X$ y $-Y$, respectivamente. Por Lema 2.5.4 tenemos que $C_{-X,-Y} = \hat{C}$ y por el Teorema 2.2.9 (Sklar) se tiene $C_{-X,-Y}(F_{-X}(-x), G_{-Y}(-y)) = P[-X \le -x, -Y \le -y]$, así que

$$\begin{aligned}
\hat{C}(F_{-X}(-x), G_{-Y}(-y)) &= P[-X \le -x, -Y \le -y] \\
&= P[X > x, Y > y] \\
&= \overline{H}(x,y),
\end{aligned}$$

pero $F_{-X}(-x) = P[-X \le -x] = P[X > x] = \overline{F}(x)$; de igual modo $G_{-Y}(-y) = \overline{G}(y)$, y por lo tanto $\overline{H}(x,y) = \hat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y))$. □

2.5.7. Corolario. *Sean $\overline{H}, \overline{F}, \overline{G}$ y $\hat{C}$ como en el Corolario 2.5.6 y sean $\overline{F}^{(-1)}$ y $\overline{G}^{(-1)}$ las cuasi-inversas de $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Entonces*

$$\hat{C}(u,v) = \overline{H}(\overline{F}^{(-1)}(u), \overline{G}^{(-1)}(v)) \quad , \textit{ para todo } (u,v) \in \mathbf{I}^2 .$$

Demostración: Por el Corolario 2.5.6 y la Definición 2.2.10 tenemos que

$$\overline{H}(\overline{F}^{(-1)}(u), \overline{G}^{(-1)}(v)) = \hat{C}(\overline{F}(\overline{F}^{(-1)}(u)), \overline{G}(\overline{G}^{(-1)}(v))) = \hat{C}(u,v).$$

□

2.5.8. Ejemplo. Supongamos que tenemos un sistema que consta de dos componentes sometidos a descargas eléctricas intempestivas que pueden llegar a ocasionar que uno o ambos componentes dejen de funcionar. Sean X, Y las variables aleatorias que representan el tiempo de vida de los componentes 1 y 2, respectivamente.

Entonces la función de sobrevivencia conjunta está dada por:

$$\overline{H}(x,y) = P[X > x, Y > y].$$

Supongamos que los dos componentes conforman tres procesos de Poisson independientes con parámetros (positivos) λ_1, λ_2 y λ_{12}, dependiendo si la descarga daña únicamente al componente 1, únicamente al componente 2, o bien a ambos simultáneamente. Entonces los tiempos de ocurrencia para los eventos mencionados y que denotaremos T_1, T_2 y T_{12} son variables aleatorias exponenciales independientes con parámetros λ_1, λ_2 y λ_{12}, respectivamente. Entonces

$$X = \min\{T_1, T_{12}\} \quad , \quad Y = \min\{T_2, T_{12}\},$$

y por lo tanto para todo $x, y \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{H}(x,y) &= P[\min\{T_1, T_{12}\} > x, \min\{T_2, T_{12}\} > y] \\
&= P[T_1 > x, T_2 > y, T_{12} > \max\{x,y\}] \\
&= P[T_1 > x]P[T_2 > y]P[T_{12} > \max\{x,y\}] \\
&= \exp[-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max\{x,y\}] .
\end{aligned}$$

A partir de lo anterior obtenemos las funciones marginales de sobrevivencia

$$\overline{F}(x) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x] \quad , \quad \overline{G}(y) = \exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12})y] ,$$

es decir, X, Y resultan ser variables aleatorias exponenciales con parámetros $(\lambda_1 + \lambda_{12})$ y $(\lambda_2 + \lambda_{12})$, respectivamente. Utilizando el hecho de que $\max\{x,y\} = x + y - \min\{x,y\}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\overline{H}(x,y) &= exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - (\lambda_2 + \lambda_{12})y + \lambda_{12} \min\{x,y\}] \\
&= \overline{F}(x)\,\overline{G}(y) \min\{\exp(\lambda_{12}x), \exp(\lambda_{12}y)\} .
\end{aligned}$$

Sean $u = \overline{F}(x)$ y $v = \overline{G}(y)$, y definimos

$$\alpha := \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \quad , \quad \beta := \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}} ,$$

entonces utilizando el Corolario 2.5.6 obtenemos la cópula de sobrevivencia de X, Y

$$\hat{C}(u,v) = uv \min\{u^{-\alpha}, v^{-\beta}\} = \min\{u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\} ,$$

en donde $\alpha, \beta \in]0,1[$. A la familia de cópulas $\{C_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in]0,1[\}$ dada por

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \min\{u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\} = u^{1-\alpha}v\mathbf{1}_{\{u^\alpha > v^\beta\}} + uv^{1-\beta}\mathbf{1}_{\{u^\alpha \leq v^\beta\}} ,$$

se le conoce como la *familia Marshall-Olkin*. Esta familia de cópulas es un ejemplo de cópulas con soporte completo pero que cuenta tanto con parte absolutamente continua como singular:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{\alpha,\beta}(u,v) = (1-\alpha)u^{-\alpha}\mathbf{1}_{\{u^\alpha > v^\beta\}} + (1-\beta)v^{-\beta}\mathbf{1}_{\{u^\alpha < v^\beta\}} ,$$

y por la Definición 2.3.9 tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A_{\alpha,\beta}(u,v) &= \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C_{\alpha,\beta}(s,t)\, dtds \\
&= (1-\alpha)\int_0^u s^{-\alpha}\int_0^v \mathbf{1}_{\{t<s^{\alpha/\beta}\}}\, dtds + (1-\beta)\int_0^u \int_0^v t^{-\beta}\mathbf{1}_{\{t>s^{\alpha/\beta}\}}\, dtds \\
&= (1-\alpha)\int_0^u s^{-\alpha}\int_0^{\min\{v, s^{\alpha/\beta}\}} dtds + (1-\beta)\int_0^u \mathbf{1}_{\{v>s^{\alpha/\beta}\}}\int_{s^{\alpha/\beta}}^v t^{-\beta}\, dtds \\
&= (1-\alpha)\int_0^u s^{-\alpha}\mathbf{1}_{\{s\geq v^{\beta/\alpha}\}} ds + (1-\alpha)\int_0^u s^{\alpha/\beta-\alpha}\mathbf{1}_{\{s<v^{\beta/\alpha}\}} ds \\
&\quad + v^{1-\beta}\min\{u, v^{\beta/\alpha}\} - \frac{\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}\min\{u, v^{\beta/\alpha}\}^{\alpha/\beta-\alpha+1} \\
&= \mathbf{1}_{\{u^\alpha<v^\beta\}}\left[uv^{1-\beta} - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}u^{\alpha/\beta-\alpha+1}\right] \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{u^\alpha>v^\beta\}}\left[u^{1-\alpha}v - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}v^{\beta/\alpha-\beta+1}\right] \\
&= \left[uv^{1-\beta}\mathbf{1}_{\{u^\alpha\leq v^\beta\}} + u^{1-\alpha}v\mathbf{1}_{\{u^\alpha>v^\beta\}}\right] \\
&\quad - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}\left[u^{\alpha/\beta-\alpha+1}\mathbf{1}_{\{u^\alpha<v^\beta\}} + v^{\beta/\alpha-\beta+1}\mathbf{1}_{\{u^\alpha>v^\beta\}}\right] \\
&= C_{\alpha,\beta}(u,v) - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}\left[\min\{u^\alpha, v^\beta\}\right]^{1/\alpha+1/\beta-1},
\end{aligned}
$$

y por la Definición 2.3.10 tenemos que

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha,\beta}(u,v) &= \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}\left[\min\{u^\alpha, v^\beta\}\right]^{1/\alpha+1/\beta-1} \\
&= \int_0^{\min\{u^\alpha, v^\beta\}} t^{1/\alpha+1/\beta-2} dt.
\end{aligned}
$$

De la Definición 2.3.12 tenemos que la C-medida de la parte singular de C es

$$
S_{\alpha,\beta}(1,1) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta},
$$

lo cual significa que si U y V son dos variables aleatorias $Unif(0,1)$ cuya función de distribución conjunta es la cópula $C_{\alpha,\beta}$, entonces

$$
P[U^\alpha = V^\beta] = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}.
$$

2.6. Orden

2.6.1. Definición. *Sean C_1, C_2 dos cópulas. Definimos la relación de orden entre cópulas $\prec$ como sigue:*

$$C_1 \prec C_2 \Leftrightarrow C_1(u,v) \leq C_2(u,v) \quad , \text{ para todo } (u,v) \in \mathbf{I}^2,$$

y en este caso decimos que la cópula C_1 es menor que la cópula C_2 (o bien que la cópula C_2 es mayor que la cópula C_1).

2.6.2. Ejemplo. En el Ejemplo 2.1.7 se vio que cualquier combinación lineal convexa de cópulas es cópula. Sea entonces la cópula C definida por la media aritmética de las cotas de Fréchet-Hoeffding:

$$C(u,v) := \frac{W(u,v) + M(u,v)}{2}.$$

Esta cópula no es comparable con la cópula Π ya que $C(1/4, 1/4) > \Pi(1/4, 1/4)$ pero $C(1/4, 3/4) < \Pi(1/4, 3/4)$ por lo que ni $C \prec \Pi$ ni $\Pi \prec C$ se cumplen.

2.6.3. Definición. *Sea $\{C_\theta\}$ una familia de cópulas parametrizada en θ. Decimos que $\{C_\theta\}$ es una familia ordenada positivamente si $C_\alpha \prec C_\beta$ siempre que $\alpha \leq \beta$. Decimos que $\{C_\theta\}$ es una familia ordenada negativamente si $C_\alpha \succ C_\beta$ siempre que $\alpha \leq \beta$.*

2.6.4. Ejemplo. Continuando con la familia de cópulas Marshall-Olkin obtenida en el Ejemplo 2.5.8 consideremos el caso particular en que $\alpha = \beta = \theta$. De este modo obtenemos la familia de cópulas $\{C_\theta\}$ conocida como familia Cuadras-Augé

$$C_\theta(u,v) = \min\{u^{1-\theta}v, uv^{1-\theta}\} = [\min\{u,v\}]^\theta [uv]^{1-\theta},$$

en donde $\theta \in \mathbf{I}$. Nótese que $C_0 = \Pi$ y que $C_1 = M$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{I}$ tales que $\alpha \leq \beta$. Entonces para todo $u, v \in \mathbf{I}$ tenemos que

$$\frac{C_\alpha(u,v)}{C_\beta(u,v)} = \left(\frac{uv}{\min\{u,v\}}\right)^{\beta-\alpha} \leq 1,$$

de donde

$$C_\alpha \prec C_\beta,$$

y por lo tanto la familia Cuadras-Augé está positivamente ordenada.

2.7. Cópulas n-dimensionales

2.7.1. Definición. *Por espacio n-dimensional extendido entendemos el conjunto*

$$\overline{\mathbf{R}}^n := \prod_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{R}}\,.$$

2.7.2. Definición. *Sean* $\preceq$ *y* $\prec$ *relaciones definidas en* $\overline{\mathbf{R}}^n$ *de modo que si* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{\mathbf{R}}^n$*, donde* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *,* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, entonces*

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_k \leq y_k \quad , \textit{para todo } k \in \{1, \ldots, n\}\,,$$

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \Leftrightarrow x_k < y_k \quad , \textit{para todo } k \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Observación: La relación $\preceq$ *es lo que se conoce como un orden parcial (por ser reflexiva, antisimétrica y transitiva). No es el caso de* $\prec$*. Sin embargo, ninguna de las dos es un orden total ya que existen elementos en* $\overline{\mathbf{R}}^n$ *que no se relacionan bajo* $\preceq$ *ni* $\prec$*.*

2.7.3. Definición. *Un n-rectángulo en* $\overline{\mathbf{R}}^n$ *es un subconjunto* $B \subset \overline{\mathbf{R}}^n$ *que puede expresarse como producto cartesiano de n intervalos cerrados, es decir, si existen* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{\mathbf{R}}^n$ *tales que* $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ *y que*

$$B = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} := \prod_{k=1}^{n} [\, x_k, y_k \,]\,,$$

y usamos la notación $[\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\,]$ *para referirnos a* B*. Los vértices del n-rectángulo* $B = [\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\,]$ *son los puntos*

$$\{\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n : c_k = x_k \textit{ ó } c_k = y_k\}\,.$$

En particular definimos al n-cubo unitario por el conjunto

$$\mathbf{I}^n := \prod_{k=1}^{n} \mathbf{I}\,.$$

2.7.4. Definición. *Una función real de n entradas es una función* H *tal que su dominio* $\mathit{Dom}\, H \subset \overline{\mathbf{R}}^n$ *y su rango* $\mathit{Ran}\, H \subset \mathbf{R}$*.*

2.7.5. Definición. *Sea* B *el n-rectángulo* $[\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\,]$ *y sea* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ *un vértice de* B*. Si los vértices de* B *son todos distintos, es decir, si* $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ *entonces definimos la función*

$$sgn_B(\mathbf{c}) := \begin{cases} +1 & \textit{si } c_k = x_k \textit{ para un número par de } k\textit{'s}\,, \\ -1 & \textit{si } c_k = y_k \textit{ para un número impar de } k\textit{'s}\,, \end{cases}$$

y si los vértices de B *no son todos distintos entonces* $sgn(\mathbf{c}) := 0$*.*

2.7.6. Ejemplo. Sea B el 2-rectángulo $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = [x_1,y_1]\times[x_2,y_2]$. Entonces sus vértices son $(x_1,x_2),(y_1,x_2),(y_1,y_2)$ y (x_1,y_2). Si estos vértices son todos distintos entonces

$$\mathrm{sgn}(x_1,x_2) = 1 = \mathrm{sgn}(y_1,y_2) \quad , \quad \mathrm{sgn}(x_1,y_2) = -1 = \mathrm{sgn}(y_1,x_2)\,.$$

2.7.7. Definición. *Sean $S_1,\ldots,S_n$ subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbf{R}}$ y sea H una función real de n entradas tal que su dominio $Dom\,H = S_1\times\cdots\times S_n$ Sea $B := [\mathbf{x},\mathbf{y}]$ un n-rectángulo cuyos vértices están en $Dom\,H$. Definimos el H-volumen de B mediante*

$$V_H(B) := \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}} sgn_B(\mathbf{c})H(\mathbf{c})\,,$$

donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de vértices de B.

2.7.8. Ejemplo. Continuando con el Ejemplo 2.7.6 sea H una función de 2 entradas tal que los vértices de B estén en $Dom\,H$, entonces

$$V_H(B) = H(y_1,y_2) - H(x_1,y_2) - H(y_1,x_2) + H(x_1,x_2)\,.$$

2.7.9. Ejemplo. Sea H una función real de 3 entradas tal que $Dom\,H = \overline{\mathbf{R}}^3$ y sea B el 3-rectángulo $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = [x_1,y_1]\times[x_2,y_2]\times[x_3,y_3]$ tal que $\mathbf{x}\prec\mathbf{y}$, entonces

$$\begin{aligned}V_H(B) = {} & H(y_1,y_2,y_3) - H(x_1,y_2,y_3) - H(y_1,x_2,y_3) - H(y_1,y_2,x_3)\\ & + H(x_1,x_2,y_3) + H(x_1,y_2,x_3) + H(y_1,x_2,x_3) - H(x_1,x_2,x_3)\,.\end{aligned}$$

2.7.10. Definición. *Una función real de n entradas H es n-creciente si $V_H(B)\geq 0$ para cualquier n-rectángulo B cuyos vértices estén en $Dom\,H$.*

2.7.11. Definición. *Sea H una función real de n entradas con $Dom\,H = S_1\times\cdots\times S_n$ tal que $\inf(S_k)\in S_k$ para todo $k\in\{1,\ldots,n\}$. Decimos que H está fijada si $H(x_1,\ldots,x_n) = 0$ para todo $(x_1,\ldots,x_n)\in Dom\,H$ tal que $x_k = \inf(S_k)$ para por lo menos un k.*

2.7.12. Lema. *Sea H n-creciente y fijada. Entonces H es monótona creciente en cada entrada, es decir, sean $x<y$:*

Si $(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n)\in Dom\,H$,

entonces

$H(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n)\leq H(x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n)$, *para todo* k.

Demostración: Sea $a_j := \inf(S_j)$ de acuerdo a la Definición 2.7.11 y sea $B := [(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n), (x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)]$. Entonces los vértices de B están en $Dom\, H$. Como H es n-creciente tenemos que $V_H(B) \geq 0$ y además como está fijada entonces al calcular $V_H(B)$ todos los sumandos son cero excepto dos:

$$V_H(B) = H(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n) - H(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \geq 0$$

y por lo tanto H es monótona creciente en la k-ésima entrada, para todo k. $\square$

2.7.13. Definición. *Sea H una función real de n entradas con $Dom\, H = S_1 \times \cdots \times S_n$ tal que $\sup(S_k) \in S_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Decimos entonces que H tiene marginales. Las marginales unidimensionales de H son las funciones $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ tales que*

$$Dom\, H_k = S_k \quad , \quad k \in \{1, \ldots, n\} ,$$

$$H_k(x) := H(b_1, \ldots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \ldots, b_n) ,$$

donde $b_j := \sup(S_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Las marginales de dimensión superior a uno se obtienen fijando un número menor de entradas. Así, para $1 \leq m \leq n$ una m-marginal se obtiene fijando $n - m$ entradas.

2.7.14. Ejemplo. Sea H una función real de 3 entradas tal que

$$Dom\, H := [-1, 1] \times [0, \infty] \times [0, \pi/2] ,$$

$$H(x_1, x_2, x_3) := \frac{(x_1 + 1)(1 - e^{-x_2}) \operatorname{sen} x_3}{2} .$$

Tenemos que H está fijada ya que $H(-1, x_2, x_3) = 0$, $H(x_1, 0, x_3) = 0$ y $H(x_1, x_2, 0) = 0$. Las marginales unidimensionales de H están dadas por

$$H_1(x) = H(x, \infty, \pi/2) = \frac{x + 1}{2} ,$$

$$H_2(x) = H(1, x, \pi/2) = 1 - e^{-x} ,$$

$$H_3(x) = H(1, \infty, x) = \operatorname{sen} x ,$$

y sus 2-marginales están dadas por

$$H_{1,2}(x, y) = H(x, y, \pi/2) = \frac{(x + 1)(1 - e^{-y})}{2} ,$$

$$H_{1,3}(x, y) = H(x, \infty, y) = \frac{(x + 1) \operatorname{sen} y}{2} ,$$

$$H_{2,3}(x, y) = H(1, x, y) = (1 - e^{-x}) \operatorname{sen} y .$$

2.7.15. Corolario. *Sea H una una función n-creciente, fijada y con marginales. Entonces cada una de las marginales unidimensionales H_k de H es monótona creciente, y si $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in Dom\, H$ entonces*

$$0 \leq H(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \leq H_k(x),$$

y lo anterior se cumple también en la correspondiente expresión para marginales de dimensión mayor a uno.

Demostración: Por Lema 2.7.12 y Definición 2.7.13 . □

2.7.16. Lema. *Sea H n-creciente, fijada y con marginales. Para cualquier $k \in \{1, \ldots, n\}$ sean $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ y $(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ elementos de $Dom\, H$ tales que $x < y$. Entonces*

$$H(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n) - H(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \leq H_k(y) - H_k(x)$$

Demostración: Sean $\{a_j\}_{j=1}^n$ y $\{b_j\}_{j=1}^n$ como en la demostración del Lema 2.7.12 y en la Definición 2.7.13. Para el caso $n = 2$ definimos los 2-rectángulos B_1 y B_2 con vértices en $Dom\, H$:

$$B_1 := [\,(x, x_2), (y, b_2)\,] \quad , \quad B_2 := [\,(x_1, x), (b_1, y)\,] .$$

Por hipótesis tenemos que H es 2-creciente, por lo que

$$\begin{aligned}
&V_H(B_1) \geq 0 \\
&H(y, b_2) - H(x, b_2) - H(y, x_2) + H(x, x_2) \geq 0 \\
&H_1(y) - H_1(x) - H(y, x_2) + H(x, x_2) \geq 0 \\
&H(y, x_2) - H(x, x_2) \leq H_1(y) - H_1(x) ;
\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}
&V_H(B_2) \geq 0 \\
&H(b_1, y) - H(b_1, x) - H(x_1, y) + H(x_1, x) \geq 0 \\
&H_2(y) - H_2(x) - H(x_1, y) + H(x_1, x) \geq 0 \\
&H(x_1, y) - H(x_1, x) \leq H_2(y) - H_2(x) ,
\end{aligned}$$

y por lo tanto el lema se cumple para $n = 2$. Si $n > 2$ definimos los n-rectángulos $B_1, \ldots, B_{n-1}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
B_1 &:= [\,(x_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n), (b_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,] \\
B_2 &:= [\,(a_1, x_2, \ldots, a_{m-1}, x, a_{m+1}, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,] \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
B_{n-1} &:= [\,(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, x_n), (b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, y, b_{k+1}, \ldots, b_n)\,]
\end{aligned}$$

(Con la consecuente modificación en caso de que x, y se encuentren en la posición $k = 1$ o $k = n$). Como H es n-creciente entonces $V_H(B_m) \geq 0$ para todo m y por lo tanto

$$\sum_{m=1}^{n-1} V_H(B_m) \geq 0. \tag{2.14}$$

Como H está fijada entonces para cada m tenemos que el H-volumen de B_m se reduce a

$$\begin{aligned} V_H(B_m) &= \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_m} \operatorname{sgn}_{B_m}(\mathbf{c})H(\mathbf{c}) \\ &= H(b_1,\ldots,b_m,\ldots,y,\ldots,x_n) - H(b_1,\ldots,b_m,\ldots,x,\ldots,x_n) \\ &\quad - H(b_1,\ldots,x_m,\ldots,y,\ldots,x_n) + H(b_1,\ldots,x_m,\ldots,x,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (2.14) obtenemos una suma telescópica que se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} V_H(B_m) &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_m} \operatorname{sgn}_{B_m}(\mathbf{c})H(\mathbf{c}) \\ &= H(b_1,\ldots,b_{k-1},y,b_{k+1},\ldots,b_n) - H(b_1,\ldots,b_{k-1},x,b_{k+1},\ldots,b_n) \\ &\quad - H(x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n) + H(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n) \\ &= H_k(y) - H_k(x) \\ &\quad - H(x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n) + H(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n), \end{aligned}$$

y como $\sum_{m=1}^{n-1} V_H(B_m) \geq 0$, entonces

$$H(x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n) - H(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n) \leq H_k(y) - H_k(x)$$

□

2.7.17. Lema. *Sea H como en el Lema 2.7.16 y sean $(x_1,\ldots,x_n)$ y $(y_1,\ldots,y_n)$ puntos cualesquiera de Dom H. Entonces*

$$|H(x_1,\ldots,x_n) - H(y_1,\ldots,y_n)| \leq \sum_{k=1}^{n} |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

Demostración: Por los Lemas 2.7.12 y 2.7.16 tenemos que para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$

$$|H(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n) - H(x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n)| \leq |H_k(x) - H_k(y)|$$

se cumple para todo $(x_1,\ldots,x,\ldots,x_n), (x_1,\ldots,y,\ldots,x_n) \in$ *Dom H* y por lo tanto

$$|H(x_1,\ldots,x_n) - H(y_1,\ldots,y_n)| \leq \sum_{k=1}^{n} |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

□

2.7.18. Definición. *Sea $n \in \{2,3,\dots\}$. Una subcópula n-dimensional (o alternativamente una n-subcópula) es una función C' que tiene las siguientes propiedades:*

1. $Dom\, C' = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ *, donde* $\{0,1\} \subset S_k \subset \mathbf{I}$, $k \in \{1,\dots,n\}$.
2. C' *es n-creciente y fijada.*
3. C' *tiene marginales (unidimensionales)* $\{C'_k\}_{k=1}^n$ *tales que*

$$C'_k(u) = u \quad , \text{ para todo } u \in S_k .$$

2.7.19. Definición. *Una cópula n-dimensional (o alternativamente una n-cópula) es una n-subcópula C tal que $Dom\, C = \mathbf{I}^n$, esto es una función $C : \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que*

1. *Para todo* $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbf{I}^n$

$$C(\mathbf{u}) = 0 \quad , \quad \text{si existe } i \in \{1,\dots,n\} \text{ tal que } u_i = 0 .$$

2. *Si* $\mathbf{u} = (1,\dots,1,u_j,1,\dots,1)$ *entonces* $C(\mathbf{u}) = u_j$.
3. *Para todo* $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{I}^n$ *tal que* $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ *se cumple* $V_C[\mathbf{u},\mathbf{v}] \geq 0$.

Analizaremos las versiones n-dimensionales de las 2-cópulas Π, M y W de los Ejemplos 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5, aunque con la diferencia de que en el caso de W no obtenemos una cópula n-dimensional.

2.7.20. Ejemplo. Sea la función $\Pi^{(n)} : \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que

$$\Pi^{(n)}(u_1,\dots,u_n) := u_1 u_2 \cdots u_{k-1} u_k u_{k+1} \cdots u_n \quad , \text{ para todo } (u_1,\dots,u_n) \in \mathbf{I}^n .$$

1. $\Pi^{(n)}(u_1,\dots,u_{k-1},0,u_{k+1},\dots,u_n) = 0$.
2. $\Pi^{(n)}(1,\dots,1,u_k,1,\dots,1) = u_k$.
3. Sea el n-rectángulo $B := [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ con vértices en $\mathbf{I}^n$ y sea $\mathcal{V}$ el conjunto de vértices de B :

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{c} = (c_1,\dots,c_n) \in \mathbf{I}^n \ : \ c_k = a_k \text{ ó } c_k = b_k\} ,$$

entonces el $\Pi^{(n)}$-volumen de B está dado por

$$V_{\Pi^{(n)}}(B) \;=\; \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}} \mathrm{sgn}_B(\mathbf{c})\Pi^{(n)}(\mathbf{c}) .$$

Si los vértices de B no son todos distintos entonces $\mathrm{sgn}(\mathbf{c}) = 0$ y por tanto $V_{\Pi^{(n)}}(B) = 0$. En caso contrario, tenemos que

$$V_{\Pi^{(n)}}(B) \;=\; \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_2} c_1\cdots c_n - \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_1} c_1\cdots c_n ,$$

en donde $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ es una partición de $\mathcal{V}$ de tal modo que $\mathcal{V}_2$ contiene todos los vértices de B que tienen un número par de componentes a_k. Ahora sólo falta notar que

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n) = \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_2} c_1 \cdots c_n - \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_1} c_1 \cdots c_n \,,$$

y como $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ entonces $V_{\Pi^{(n)}}(B) \geq 0$, lo que significa que $\Pi^{(n)}$ es n-creciente, y por lo tanto $\Pi^{(n)}$ es n-cópula.

2.7.21. Ejemplo. Sea la función $M^{(n)} : \mathbf{I}^n \to \mathbf{I}$ tal que

$$M^{(n)}(u_1, \ldots, u_n) := \text{mín}\,\{u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}\,, \text{ para todo } (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{I}^n\,.$$

1. $M^{(n)}(u_1, \ldots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n) = 0$.
2. $M^{(n)}(1, \ldots, 1, u_k, 1, \ldots, 1) = u_k$.
3. Sea el n-rectángulo $B := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ con vértices en $\mathbf{I}^n$ y sea $\mathcal{V}$ el conjunto de vértices de B:

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{I}^n \,:\, c_k = a_k \text{ ó } c_k = b_k\}\,.$$

Entonces el $M^{(n)}$-volumen de B está dado por

$$V_{M^{(n)}}(B) \quad = \quad \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}} \text{sgn}_B(\mathbf{c}) M^{(n)}(\mathbf{c})\,.$$

Si los vértices de B no son todos distintos entonces $\text{sgn}(\mathbf{c}) = 0$ y por tanto $V_{M^{(n)}}(B) = 0$. En caso contrario, tenemos que

$$V_{M^{(n)}}(B) \quad = \quad \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_2} \text{mín}\,\{c_1, \ldots, c_n\} - \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}_1} \text{mín}\,\{c_1, \ldots, c_n\}\,,$$

en donde $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ es una partición de $\mathcal{V}$ de tal modo que $\mathcal{V}_2$ contiene todos los vértices de B que tienen un número par de componentes a_k. Veremos que $V_{M^{(n)}}(B) \geq 0$ para $n = 3$ y luego el resultado general se sigue inductivamente. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} V_{M^{(3)}}(B) = {} & \text{mín}\,\{b_1, b_2, b_3\} - \text{mín}\,\{a_1, b_2, b_3\} - \text{mín}\,\{b_1, a_2, b_3\} \\ & - \text{mín}\,\{b_1, b_2, a_3\} + \text{mín}\,\{a_1, a_2, b_3\} + \text{mín}\,\{a_1, b_2, a_3\} \\ & + \text{mín}\,\{b_1, a_2, a_3\} - \text{mín}\,\{a_1, a_2, a_3\}\,, \end{aligned}$$

y utilizando la fórmula

$$\text{mín}\,\{x, y, z\} = \frac{x + y - |x - y| + 2z - |x + y - |x - y| - 2z|}{2}\,,$$

y el hecho de que $M^{(n)}$ es intercambiable, es decir que

$$M^{(n)}(c_1,\ldots,c_n) = M^{(n)}(c_{\rho(1)},\ldots,c_{\rho(n)}),$$

donde $\{\rho(1),\ldots,\rho(n)\}$ es cualquier permutación de $\{1,\ldots,n\}$, nos permite suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, y esto combinado con el hecho de $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ nos arroja la expresión

$$V_{M^{(3)}}(B) = \frac{1}{2}\big[\,|\min\{b_1,b_2\} - a_3| - |\min\{b_1,b_2\} - b_3| + |\min\{b_1,a_2\} - b_3| - |\min\{b_1,a_2\} - a_3|\,\big].$$

Analizando todos los casos posibles obtenemos que

$$V_{M^{(3)}}(B) = \begin{cases} b_{(1)} - a_{(3)} & \text{si } a_{(3)} \leq b_{(1)}, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso}, \end{cases}$$

en donde $b_{(1)} := \min\{b_1,b_2,b_3\}$ y $a_{(3)} := \max\{a_1,a_2,a_3\}$, o lo que es lo mismo

$$V_{M^{(3)}}(B) = \max\{\min\{b_1,b_2,b_3\} - \max\{a_1,a_2,a_3\}, 0\},$$

e inductivamente se obtiene para cualquier $n \geq 3$

$$V_{M^{(n)}}(B) = \max\{\min\{b_1,\ldots,b_n\} - \max\{a_1,\ldots,a_n\}, 0\},$$

y entonces $V_{M^{(n)}}(B) \geq 0$, lo que significa que $M^{(n)}$ es n-creciente y por lo tanto $M^{(n)}$ es n-cópula.

2.7.22. Ejemplo. Sea la función $W^{(n)} : \mathbf{I}^n \to \mathbf{I}$ tal que

$$W^{(n)}(u_1,\ldots,u_n) := \max\{u_1 + \ldots + u_n - n + 1, 0\}, \text{ para todo } (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbf{I}^n.$$

Veremos por qué $W^{(n)}$ no puede ser n-cópula. Sea el n-rectángulo $B := [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ con $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{I}^n$ tal que $\mathbf{a} := (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ y $\mathbf{b} := (1,1,\ldots,1)$. Entonces $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$, esto es, todos los vértices de B son distintos y por tanto $\operatorname{sgn}_B(\mathbf{c}) \neq 0$ para todo vértice $\mathbf{c}$ de B. Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de vértices de B, es decir

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n) \in \mathbf{I}^n : c_k = 1/2 \text{ ó } c_k = 1\}.$$

Calculamos ahora el $W^{(n)}$-volumen de B:

$$\begin{aligned} V_{W^{(n)}}(B) &= \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}} \operatorname{sgn}_B(\mathbf{c}) W^{(n)}(\mathbf{c}) \\ &= \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}} \operatorname{sgn}_B(c_1,\ldots,c_n) W^{(n)}(c_1,\ldots,c_n) \\ &= \sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{V}} \operatorname{sgn}_B(c_1,\ldots,c_n) \max\{c_1 + \ldots + c_n - n + 1, 0\}. \end{aligned}$$

Nótese que la gran mayoría de los sumandos son cero ya que la expresión $\max\{c_1 + \ldots + c_n - n + 1, 0\} > 0$ si y sólo si hay por lo menos $(n - 1)$ unos en el vector $\mathbf{c}$, o equivalentemente que haya 0 ó 1 componentes $\frac{1}{2}$, en cuyo caso tendremos que $\operatorname{sgn}_B(\mathbf{c}) = +1$ y $\max\{c_1 + \ldots + c_n - n + 1, 0\} = 1$ si tenemos 0 componentes $\frac{1}{2}$ (y contamos con un sólo vértice que lo cumple, el vértice $\mathbf{c} = \mathbf{b}$), o bien $\operatorname{sgn}_B(\mathbf{c}) = -1$ y $\max\{c_1 + \ldots + c_n - n + 1, 0\} = \frac{1}{2}$ si tenemos 1 componente $\frac{1}{2}$ (y contamos con n vértices de este tipo), y entonces

$$V_{W^{(n)}}(B) = 1 - \frac{n}{2},$$

pero

$$\begin{aligned} V_{W^{(n)}}(B) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{n}{2} \geq 0, \\ &\Leftrightarrow n \leq 2, \end{aligned}$$

y por lo tanto $W^{(n)}$ no es cópula para $n > 2$.

2.7.23. Lema. *Sea C una n-cópula tal que $n \geq 3$. Entonces para cualquier k tal que $2 \leq k \leq n$ tenemos que la k-marginal de C es una k-cópula.*

Demostración: Sea $\{m_1, \ldots, m_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Por la Definición 2.7.13 tenemos que una k-marginal de C está definida por

$$C_{m_1,\ldots,m_k}(x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}) := C(u_1, \ldots, u_n),$$

en donde

$$u_r := \begin{cases} x_r & \text{si} \quad r \in \{m_1, \ldots, m_k\}, \\ 1 & \text{si} \quad r \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{m_1, \ldots, m_k\}. \end{cases}$$

1. Sin pérdida de generalidad sea $x_{m_1} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} C_{m_1,\ldots,m_k}(0, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}) &= C(u_1, \ldots, u_{m-1}, 0, u_{m+1}, \ldots, u_n) \\ &= 0 \quad \text{(porque } C \text{ es cópula)}, \end{aligned}$$

   y por lo tanto $C_{m_1,\ldots,m_k}$ está fijada.

2. Sin pérdida de generalidad tenemos que

$$\begin{aligned} C_{m_1,\ldots,m_k}(x_{m_1}, 1, \ldots, 1) &= C(1, \ldots, 1, x_{m_1}, 1, \ldots, 1) \\ &= x_{m_1} \quad \text{(porque } C \text{ es cópula)}, \end{aligned}$$

   y por lo tanto $C_{m_1,\ldots,m_k}$ tiene marginales (unidimensionales) identidad.

3. Sean $\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)} \in \mathbf{I}^k$ tales que $\mathbf{x}^{(k)} \preceq \mathbf{y}^{(k)}$. Definimos al k-rectángulo $B^* := [\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}]$ y sea $\mathcal{V}_k$ el conjunto de vértices $\mathbf{c}^{(k)} = (c_1^{(k)}, \ldots, c_k^{(k)})$ de B^*, entonces

$$V_{C_{m_1,\ldots,m_k}}(B^*) = \sum_{\mathbf{c}^{(k)} \in \mathcal{V}_k} \operatorname{sgn}_{B^*}(\mathbf{c}^{(k)}) C_{m_1,\ldots,m_k}(\mathbf{c}^{(k)}).$$

Al k-rectángulo $B^* \in \mathbf{I}^k$ lo podemos extender a un n-rectángulo $B := [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathbf{I}^n$ que tenga el mismo H-volumen mediante el conjunto $\mathcal{V}$ de vértices $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{I}^n$ donde

$$c_r = c_r^{(k)} \text{ si } r \in \{m_1, \ldots, m_k\},$$

$$c_r \in \{0, 1\} \text{ si } r \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{m_1, \ldots, m_k\},$$

y por lo tanto

$$V_{C_{m_1,\ldots,m_k}}(B^*) = V_C(B) \geq 0 \quad \text{(porque } C \text{ es cópula)},$$

y por lo tanto $C_{m_1,\ldots,m_k}$ es k-creciente.

De todo lo anterior concluimos que la k-marginal $C_{m_1,\ldots,m_k}$ es k-cópula. □

2.7.24. Ejemplo. Sea la función $C : \mathbf{I}^3 \to \mathbf{I}$ definida por $C(u, v, w) := w \min\{u, v\}$. Entonces

1. $C(0, v, w) = 0 = C(u, 0, w) = C(u, v, 0)$ y por lo tanto C está fijada.
2. $C(u, 1, 1) = u, C(1, v, 1) = v, C(1, 1, w) = w$ y por lo tanto C tiene marginales (unidimensionales) identidad.
3. Sea el 3-rectángulo $B := [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \times [x_3, y_3]$ tal que $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$, entonces

$$\begin{aligned} V_C(B) = {} & C(y_1, y_2, y_3) - C(x_1, y_2, y_3) - C(y_1, x_2, y_3) - C(y_1, y_2, x_3) \\ & + C(x_1, x_2, y_3) + C(x_1, y_2, x_3) + C(y_1, x_2, x_3) - C(x_1, x_2, x_3) \\ & (y_3 - x_3)(\min\{y_1, y_2\} - \min\{x_1, y_2\} - \min\{y_1, x_2\} + \min\{x_1, x_2\}) \\ & (y_3 - x_3) V_M([x_1, y_1] \times [x_2, y_2]) \geq 0, \end{aligned}$$

ya que M es una 2-cópula (ver Ejemplo 2.1.4), y por lo tanto C es 3-cópula.

Además las 2-marginales de C son las 2-cópulas:

$$C_{1,2}(u, v) = C(u, v, 1) = 1 \cdot \min\{u, v\} = M(u, v),$$

$$C_{1,3}(u, w) = C(u, 1, w) = w \min\{u, 1\} = uw = \Pi(u, v),$$

$$C_{2,3}(v, w) = C(1, v, w) = w \min\{1, v\} = vw = \Pi(v, w).$$

2.7.25. Lema. *Una n-subcópula C' es uniformemente continua en su dominio y para cualquier $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} C'$ tenemos que*

$$0 \leq C'(\mathbf{u}) \leq M^{(n)}(\mathbf{u}).$$

Demostración: Dada $\epsilon > 0$ sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Dom\, C'$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k - v_k| < \epsilon,$$

entonces por el Lema 2.7.17 y la Definición 2.7.18(3) tenemos que

$$|C'(\mathbf{u}) - C'(\mathbf{v})| < \epsilon,$$

y por lo tanto C' es uniformemente continua en $Dom\, C'$. Luego, por el Corolario 2.7.15 y la Definición 2.7.18(3) tenemos que

$$0 \leq C'(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \leq C'_k(u_k) = u_k \quad , \text{ para todo } k \in \{1, \ldots, n\},$$

y por lo tanto $0 \leq C'(\mathbf{u}) \leq \min\{u_1, \ldots, u_n\} = M^{(n)}(\mathbf{u})$. □

2.7.26. Teorema. *Sea una n-subcópula C'. Entonces para todo $\mathbf{u} \in Dom\, C'$ se tiene que*

$$W^{(n)} \leq C'(\mathbf{u}) \leq M^{(n)}(\mathbf{u}).$$

Demostración: Por el Lema 2.7.25 y la definición de $W^{(n)}$ basta demostrar que

$$C'(\mathbf{u}) \geq u_1 + \ldots + u_n - n + 1.$$

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{I}^n$ tal que $\mathbf{v} := (1, 1, \ldots, 1)$, entonces $\mathbf{v} \in Dom\, C'$ y además $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$. Por el Lema 2.7.17 tenemos que

$$|C'(\mathbf{v}) - C'(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^{n} |1 - u_k|.$$

Como C' es n-subcópula entonces $C'(\mathbf{v}) = 1 \geq C'(\mathbf{u})$ y como $u_k \leq 1$, la expresión anterior queda

$$1 - C'(\mathbf{u}) \leq n - (u_1 + \ldots + u_n),$$

y por lo tanto $C'(\mathbf{u}) \geq u_1 + \ldots + u_n - n + 1$. □

Y como toda n-cópula es n-subcópula entonces para toda n-cópula C y para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$ tenemos que

$$W^{(n)}(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^{(n)}(\mathbf{u}). \tag{2.15}$$

2.7.27. Definición. *Sea $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Una función de distribución n-dimensional (que denotaremos n-f.d.) es una función real H que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\mathrm{Dom}\, H = \overline{\mathbf{R}}^n$.*

2. *H es n-creciente y fijada.*

3. *$H(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1$.*

Una función de distribución conjunta (f.d-conjunta) es una función H para la cual existe $n \in \{2, 3, \ldots\}$ tal que H es una n-f.d.

Observación: Por el Lema 2.7.12 tenemos que cada marginal unidimensional de una f.d-conjunta es una función de distribución (ver Definición 2.2.1). Denotaremos a estas marginales unidimensionales de una n-f.d. H por medio de $F_1, \ldots, F_n$ en vez de $H_1, \ldots, H_n$ y nos referiremos a ellas simplemente como marginales.

2.7.28. Teorema. *Sea H una n-f.d. con marginales $F_1, \ldots, F_n$. Entonces existe una única n-subcópula C' con dominio $\mathrm{Dom}\, C' = \mathrm{Ran}\, F_1 \times \cdots \times \mathrm{Ran}\, F_n$ tal que*

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C'(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)) \quad , \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n .$$

La n-subcópula C' está dada por

$$C'(y_1, \ldots, y_n) = H(F_1^{(-1)}(y_1), \ldots, F_n^{(-1)}(y_n)) \text{ , para todo } (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{Dom}\, C' ,$$

donde $F_k^{(-1)}$ es la cuasi-inversa de F_k (ver Definición 2.2.10). Si además las funciones $F_1, \ldots, F_n$ son continuas entonces C' es una n-cópula.

En sentido inverso, sean $F_1, \ldots, F_n$ funciones de distribución y sea C' cualquier n-subcópula tal que su dominio $\mathrm{Dom}\, C' \supset \mathrm{Ran}\, F_1 \times \cdots \times \mathrm{Ran}\, F_n$ y sea H una función definida por

$$H(x_1, \ldots, x_n) := C'(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)) \quad , \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n ,$$

entonces H es una n-f.d. con marginales $F_1, \ldots, F_n$.

Demostración: Sea H una n-f.d. con marginales $F_1, \ldots, F_n$. Del Lema 2.7.17 tenemos que si $F_1(x_1) = F_1(y_1), \ldots, F_n(x_n) = F_n(y_n)$ para $x_j, y_j \in \overline{\mathbf{R}}$ $(j = 1, \ldots, n)$, entonces $H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{y})$, esto es, el valor de $H(\mathbf{x})$ depende únicamente de los números $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ y por lo tanto existe una única función C' con $\mathrm{Dom}\, C' = \mathrm{Ran}\, F_1 \times \cdots \times \mathrm{Ran}\, F_n$ tal que

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C'(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)) \quad , \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n .$$

Ahora veremos que dicha función C' es una n-subcópula:

1. Como $F_1, \ldots, F_n$ son funciones de distribución entonces $\mathrm{Ran}\, F_j \supset \{0, 1\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ por lo que el dominio de C' es de la forma $\mathrm{Dom}\, C' = S_1 \times \cdots \times S_n$ donde $\{0, 1\} \subset S_j \subset \mathbf{I}$.

2. Como H es n-f.d. entonces

$$\begin{aligned} & C'(F_1(x_1),\ldots,F_{k-1}(x_{k-1}),0,F_{k+1}(x_{k+1}),\ldots,F_n(x_n)) \\ &= C'(F_1(x_1),\ldots,F_{k-1}(x_{k-1}),F_k(-\infty),F_{k+1}(x_{k+1}),\ldots,F_n(x_n)) \\ &= H(x_1,\ldots,x_{k-1},-\infty,x_{k+1},\ldots,x_n) \\ &= 0 \quad (\text{porque } H \text{ está fijada})\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto C' está fijada.
Sea el n-rectángulo $B := \prod_{k=1}^{n}[\,x_k, y_k\,]$. Entonces tenemos que también $B' := \prod_{k=1}^{n}[\,F_k(x_k), F_k(y_k)\,]$ es un n-rectángulo y entonces

$$V_{C'}(B') = V_H(B) \geq 0 \qquad (\text{porque } H \text{ es } n\text{-creciente})\,,$$

y por lo tanto C' es n-creciente.

3. Para todo $x \in Ran\,F_k$ tenemos que existe $x_k \in \overline{\mathbf{R}}$ tal que $F_k(x_k) = x$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} C'_k(x) &= C'(1,\ldots,1,x,1,\ldots,1) \\ &= C'(F_1(\infty),\ldots,F_{k-1}(\infty),F_k(x),F_{k+1}(\infty),\ldots,F_n(\infty)) \\ &= H(\infty,\ldots,\infty,x_k,\infty,\ldots,\infty) \\ &= F_k(x_k) \\ &= x\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto C' es una n-subcópula.

Como para todo $y_k \in Ran\,F_k$ tenemos que $F_k(F_k^{(-1)}(y_k)) = y_k$ (ver Definición 2.2.10) se sigue que

$$\begin{aligned} H(F_1^{(-1)}(y_1),\ldots,F_n^{(-1)}(y_n)) &= C'(F_1(F_1^{(-1)}(y_1)),\ldots,F_n(F_n^{(-1)}(y_n))) \\ &= C'(y_1,\ldots,y_n)\ ,\ \text{para todo } (y_1,\ldots,y_n) \in Dom\,C'\,, \end{aligned}$$

y si además cada F_k es continua entonces $Dom\,C' = \mathbf{I}^n$ y por lo tanto C' es cópula.

En el sentido inverso, sean $F_1,\ldots,F_n$ funciones de distribución y sea C' cualquier n-subcópula tal que su dominio $Dom\,C' \supset Ran\,F_1 \times \cdots \times Ran\,F_n$ y sea H una función definida por

$$H(x_1,\ldots,x_n) := C'(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n))\ ,\ \text{para todo } (x_1,\ldots,x_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n\,.$$

1. Como cada F_k es función de distribución tenemos que $Dom\,F_k = \overline{\mathbf{R}}$ y por lo tanto $Dom\,H = \overline{\mathbf{R}}^n$.

2. Sea el n-rectángulo $B := \prod_{k=1}^{n}[\,x_k, y_k\,]$. Entonces tenemos que también $B' := \prod_{k=1}^{n}[\,F_k(x_k), F_k(y_k)\,]$ es un n-rectángulo y entonces

$$V_H(B) = V_{C'}(B') \geq 0 \qquad (\text{porque } C' \text{ es } n\text{-creciente})\,,$$

y por lo tanto H es n-creciente.

Además

$$\begin{aligned} & H(x_1, \ldots, x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ &= C'(F_1(x_1), \ldots, F_{k-1}(x_{k-1}), F_k(-\infty), F_{k+1}(x_{k+1}), \ldots, F_n(x_n)) \\ &= C'(F_1(x_1), \ldots, F_{k-1}(x_{k-1}), 0, F_{k+1}(x_{k+1}), \ldots, F_n(x_n)) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

y por lo tanto H está fijada.

3. Finalmente,

$$\begin{aligned} H(\infty, \ldots, \infty) &= C'(F_1(\infty), \ldots, F_n(\infty)) \\ &= C'(1, \ldots, 1) \\ &= 1 , \end{aligned}$$

y por lo tanto H es una n-f.d.

Además para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} & H(\infty, \ldots, \infty, x, \infty, \ldots, \infty) \\ &= C'(F_1(\infty), \ldots, F_{k-1}(\infty), F_k(x), F_{k+1}(\infty), \ldots, F_n(\infty)) \\ &= C'(1, \ldots, 1, F_k(x), 1, \ldots, 1) \\ &= F_k(x) , \end{aligned}$$

y por lo tanto H tiene marginales $F_1, \ldots, F_n$. □

2.7.29. Teorema. *Toda n-subcópula puede ser extendida a una n-cópula, esto es, dada una n-subcópula C' existe una n-cópula C tal que*

$$C(\mathbf{y}) = C'(\mathbf{y}) \quad , \textit{ para todo } \mathbf{y} \in \ Dom\, C' .$$

Demostración: La demostración es análoga a la del Lema 2.2.7 . Sea C' una n-subcópula, por Lema 2.7.25 sabemos que es uniformemente continua en su dominio $Dom\, C'$ así que por el teorema de extensión continua de Tietze (Bartle, 1987) extendemos C' a una subcópula C'' con dominio $Dom\, C''$ igual a la cerradura de $Dom\, C'$. Si $Dom\, C'' = \mathbf{I}^n$ ya terminamos. Si no, entonces definimos una función C de modo que $C\restriction_{Dom\, C''} = C''$ y para aquellos puntos $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n \setminus Dom\, C''$ aprovechamos el hecho de que $Dom\, C'$ es un producto cartesiano y por ello existe un n-rectángulo B cuyos vértices están en $Dom\, C''$ y definimos

$$C(\mathbf{u}) := \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) C''(\mathbf{v}) ,$$

donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de vértices de B y los coeficientes $\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ hacen una interpolación multilineal de los valores de C'' valuada en los vértices de B:

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1 \quad \text{y} \quad \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{I} ,$$

de modo que $Dom\, C = \mathbf{I}^n$ y de manera análoga al Lema 2.2.7 tenemos que C es cópula. □

2.7.30. Teorema. **(Sklar)** *Sea H una n-f.d. con marginales $F_1, \ldots, F_n$. Entonces existe una n-cópula C (no necesariamente única) tal que*

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)), \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n.$$

Si $F_1, \ldots, F_n$ son continuas entonces C es única, de lo contrario C está determinada de manera única sólo en $\prod_{k=1}^n Ran\, F_k$. Además, la n-cópula está dada por

$$C(u_1, \ldots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \ldots, F_n^{(-1)}(u_n)), \text{ para todo } (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{I}^n.$$

En sentido inverso, Si C es una n-cópula y $F_1, \ldots, F_n$ son funciones de distribución entonces la función H definida por

$$H(x_1, \ldots, x_n) := C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)), \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n,$$

es una n-f.d. con marginales $F_1, \ldots, F_n$.

Demostración: Por los Teoremas 2.7.28 y 2.7.29. □

2.7.31. Ejemplo. Sea el punto fijo $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ y consideremos la n-f.d. $H_\mathbf{a}$ definida por

$$H_\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \mathbf{1}_{\{\mathbf{a} \preceq \mathbf{x}\}}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n.$$

Entonces su marginales (unidimensionales) están dadas por

$$\begin{aligned} F_k(x) &= H_\mathbf{a}(\infty, \ldots, \infty, x, \infty, \ldots, \infty), \text{ para todo } k \in \{1, \ldots, n\}, \\ &= \mathbf{1}_{\{(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \preceq (\infty, \ldots, \infty, x, \infty, \ldots, x_n)\}} \\ &= \mathbf{1}_{\{a_k \le x\}}. \end{aligned}$$

Como $Ran\, F_k = \{0, 1\}$ tenemos que cualquier cópula C satisface

$$H_\mathbf{a}(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)),$$

lo cual cumple con lo obtenido en el Teorema 2.7.30 en el sentido de que existe tal cópula C pero que no es necesariamente única.

La versión n-dimensional del Teorema de Sklar para variables aleatorias es inmediata para los siguientes resultados:

2.7.32. Teorema. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables alcatorias (definidas en un espacio de probabildiad común) con funciones de distribución $F_1, \ldots, F_n$, respectivamente, y con función de distribución conjunta H. Entonces existe una n-cópula C tal que para todo $\mathbf{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n$*

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)).$$

Si $F_1, \ldots, F_n$ son todas continuas entonces C es única, de otro modo C está determinada de manera única en $\operatorname{Ran} F_1 \times \cdots \times \operatorname{Ran} F_n$.

2.7.33. Teorema. *Para $n \geq 2$ sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas con funciones de distribución $F_1, \ldots, F_n$, respectivamente. Entonces $X_1, \ldots, X_n$ son independientes si y sólo si la (única) cópula de $X_1, \ldots, X_n$ es $\Pi^{(n)}$.*

2.7.34. Teorema. *Para $n \geq 2$ sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas con funciones de distribución $F_1, \ldots, F_n$, respectivamente, con función de distribución conjunta H y cópula C. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ funciones estrictamente crecientes $\alpha_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Entonces $\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n)$ son variables aleatorias (definidas en el mismo espacio de probabilidad que $X_1, \ldots, X_n$) con cópula C. Esto es, C es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de $X_1, \ldots, X_n$.*

Capítulo 3

Dependencia

Uno de los principales problemas estudiados en probabilidad y estadística es el de las relaciones de *dependencia* entre variables aleatorias. El problema se simplifica bastante si hacemos supuestos *a priori* sobre el tipo de relación de dependencia (lineal, monótona, etc.), lo cual en ocasiones resulta imposible o bien bastante aventurado.

Un ejemplo de lo anterior es el coeficiente de correlación lineal que, bajo el supuesto de que la relación entre un par de variables aleatorias sea lineal, mide el grado de dependencia lineal; sin embargo, es posible que el tipo de relación entre dichas variables sea no lineal, y aún así el mencionado coeficiente reportará el grado de dependencia lineal de dichas variables.

De aquí la necesidad de definir *medidas de dependencia* que no hagan supuestos *a priori* acerca de la relación de dependencia que se desea estudiar.

Entre los intentos por medir el grado de dependencia entre variables aleatorias están las medidas basadas en *concordancia* (la τ de Kendall y la ρ de Spearman, entre otras), que si bien se trata de medidas no paramétricas tienen el defecto de no caracterizar completamente la independencia; por ejemplo, si X, Y son variables aleatorias independientes entonces $\tau_{XY} = 0$ pero el que $\tau_{XY} = 0$ no implica necesariamente que X, Y sean independientes.

En el presente capítulo se analizan distintos tipos de dependencia, se define en general una medida de dependencia δ_{XY} que entre otras características incluye la propiedad de que $\delta_{XY} = 0$ si y sólo si X, Y son independientes. Finalmente se analizan algunas medidas de dependencia particulares y se revisan algunos ejemplos en los que se ilustra que las medidas de concordancia no detectan ciertas relaciones de dependencia.

3.1. Dependencia de cuadrante

3.1.1. Definición. *Decimos que las variables aleatorias X, Y son dependientes en cuadrante positivamente, y lo denotamos por $DCP(X, Y)$, si para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se cumple*

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y],$$

y decimos que dicha dependencia es estricta si la desigualdad es estricta para al menos un $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Observación: Si X, Y tienen función de distribución conjunta H con marginales continuas F y G, respectivamente, y cópula C entonces

$$DCP(X, Y) \Leftrightarrow H(x, y) \geq F(x)G(y) \text{ , para todo } (x, y) \in \mathbf{R}^2 , \qquad (3.1)$$

y si además X, Y son continuas, aplicando el Teorema 2.2.9 (Sklar)

$$DCP(X, Y) \Leftrightarrow C \succ \Pi . \qquad (3.2)$$

3.1.2. Definición. *Decimos que las variables aleatorias X, Y son dependientes en cuadrante negativamente, y lo denotamos por $DCN(X, Y)$, si para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se cumple*

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x]P[Y \leq y],$$

y decimos que dicha dependencia es estricta si la desigualdad es estricta para al menos un $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Observación: Si X, Y tienen función de distribución conjunta H con marginales continuas F y G, respectivamente, y cópula C entonces

$$DCN(X, Y) \Leftrightarrow H(x, y) \leq F(x)G(y) \text{ , para todo } (x, y) \in \mathbf{R}^2 , \qquad (3.3)$$

y si además X, Y son continuas, aplicando el Teorema 2.2.9 (Sklar)

$$DCN(X, Y) \Leftrightarrow C \prec \Pi . \qquad (3.4)$$

3.1.3. Lema. *Sean X, Y variables aleatorias. Entonces*

1. $DCP(X, Y) \Leftrightarrow P[X > x, Y > x] \geq P[X > x]P[Y > y]$.
2. $DCN(X, Y) \Leftrightarrow P[X > x, Y > x] \leq P[X > x]P[Y > y]$.

Demostración:

$DCP(X,Y) \Leftrightarrow P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y]$
$\Leftrightarrow 1 - P[X > x] - P[Y > y] + P[X > x, Y > y] \geq (1 - P[X > x])(1 - P[Y > y])$
$\Leftrightarrow P[X > x, Y > x] \geq P[X > x]P[Y > y]$,

y la demostración para DCN es análoga. □

Observación: En términos de función conjunta de sobrevivencia y cópula de sobrevivencia, si X, Y son variables aleatorias continuas entonces utilizando el Corolario 2.5.6 tenemos que

$$DCP(X,Y) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{H}(x,y) \geq \overline{F}(x)\overline{G}(y)\ ,\ \text{para todo } (x,y) \in \mathbf{R}^2\ .$$

$$DCN(X,Y) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{H}(x,y) \leq \overline{F}(x)\overline{G}(y)\ ,\ \text{para todo } (x,y) \in \mathbf{R}^2\ .$$

3.1.4. Ejemplo. En el Ejemplo 2.6.4 se vio que la familia de cópulas Cuadras-Augé $\{C_\theta : \theta \in \mathbf{I}\}$ está positivamente ordenada y que además $C_0 = \Pi$ y $C_1 = M$, por lo que $C_\theta \succ \Pi$, para todo $\theta \in \mathbf{I}$. Si tenemos las variables aleatorias X, Y con cópula C_θ de esta familia entonces $DCP(X,Y)$.

3.1.5. Lema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas. Entonces:*

1. $DCP(X,X)$.
2. $DCP(X,Y) \Leftrightarrow DCN(X,-Y)$.
3. *Si $DCP(X,Y)$ entonces $DCP(\alpha(X),\beta(Y))$ para cualesquiera funciones α y β tales que ambas sean estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes.*
4. *Si α es una función estrictamente creciente y tenemos que $Y = \alpha(X)$ casi seguramente, entonces $DCP(X,Y)$. Si α es una función estrictamente decreciente y tenemos que $Y = \alpha(X)$ casi seguramente, entonces $DCN(X,Y)$.*

Demostración:

1. Del Lema 2.3.7 y la ecuación (2.4) tenemos que $C_{X,X} = M \succ \Pi$ y por lo tanto $\mathrm{DCP}(X,X)$.
2. Utilizando el Teorema 2.3.4 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{DCP}(X,Y) \quad &\Leftrightarrow \quad C_{X,Y} \succ \Pi \\
&\Leftrightarrow \quad C_{X,Y}(u, 1-v) \geq \Pi(u, 1-v) = u(1-v)\ ,\ (u,v) \in \mathbf{I}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad u - C_{X,Y}(u, 1-v) \leq u - u(1-v) = \Pi(u,v) \\
&\Leftrightarrow \quad C_{X,-Y} \prec \Pi \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{DCN}(X,-Y)\ .
\end{aligned}$$

3. Analizamos los dos casos por separado:

   a) Sean α y β funciones estrictamente crecientes, entonces por Teorema 2.3.3 tenemos que $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$. Si DCP$(X,Y)$ entonces $C_{X,Y} \succ \Pi$ de donde $C_{\alpha(X),\beta(Y)} \succ \Pi$ y por lo tanto DCP$(\alpha(X),\beta(Y))$.

   b) Sean α y β funciones estrictamente decrecientes. Utilizando nuevamente el Teorema 2.3.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Si DCP}(X,Y) &\Rightarrow C_{X,Y} \succ \Pi \\ &\Rightarrow C_{X,Y}(1-u,1-v) \geq (1-u)(1-v)\ ,\ (u,v) \in \mathbf{I}^2 \\ &\Rightarrow u+v-1+C_{X,Y}(1-u,1-v) \geq uv \\ &\Rightarrow C_{\alpha(X),\beta(Y)} \succ \Pi\,,\end{aligned}$$

   y por lo tanto DCP$(\alpha(X),\beta(Y))$.

4. Si α es estrictamente creciente, entonces por el Corolario 2.3.8 tenemos que $C_{X,Y} = M \succ \Pi$ y por lo tanto $DCP(X,Y)$.

   Si α es estrictamente decreciente entonces por el Corolario 2.3.8 tenemos que $C_{X,Y} = W \prec \Pi$ y por lo tanto $DCN(X,Y)$.

$\square$

3.1.6. Lema. *Sean X,Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H y marginales F y G, respectivamente. Entonces:*

1. $DCP(X,Y) \Leftrightarrow H(x,y)\overline{H}(x,y) \geq P[X \leq x, Y > y]P[X > x, Y \leq y]$.
2. $DCN(X,Y) \Leftrightarrow H(x,y)\overline{H}(x,y) \leq P[X \leq x, Y > y]P[X > x, Y \leq y]$.

Demostración:

$$\begin{aligned}&\text{DCP}(X,Y) \Leftrightarrow H(x,y) \geq F(x)G(y) \\ &\Leftrightarrow H(x,y) - F(x)H(x,y) - G(y)H(x,y) + H^2(x,y) \\ &\qquad\qquad \geq F(x)G(y) - F(x)H(x,y) - G(y)H(x,y) + H^2(x,y) \\ &\Leftrightarrow H(x,y)\left[1 - F(x) - G(y) + H(x,y)\right] \geq \left[F(x) - H(x,y)\right]\left[G(y) - H(x,y)\right],\end{aligned}$$

y por lo tanto $H(x,y)\overline{H}(x,y) \geq P[X \leq x, Y > y]P[X > x, Y \leq y]$, y un argumento análogo para DCN. $\square$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente:

3.1.7. Corolario. *Sean X,Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces:*

1. $DCP(X,Y) \Leftrightarrow C(u,v)[1-u-v+C(u,v)] \geq [u - C(u,v)][v - C(u,v)]$.
2. $DCN(X,Y) \Leftrightarrow C(u,v)[1-u-v+C(u,v)] \leq [u - C(u,v)][v - C(u,v)]$.

Demostración: El resultado es inmediato aplicando el Teorema 2.2.9 (Sklar) al Lema 3.1.6. □

Abordaremos ahora el Lema de Hoeffding (1940), por la relación que tiene con el tipo de dependencia que se está tratando. Para demostrar dicho lema es necesario hacer uso de la Identidad de Franklin (Shea, 1983):

3.1.8. Lema. *Sean las funciones $\alpha, \beta : \mho \longrightarrow \mathbf{R}$, donde $\mho$ es un conjunto arbitrario. Sea μ una medida tal que $\mu(\mho) < \infty$ y supongamos que α, β y $\alpha\beta$ son integrables respecto a μ. Entonces*

$$\int_\mho\int_\mho[\alpha(x) - \alpha(y)][\beta(x) - \beta(y)]\, d\mu(x)d\mu(y) = 2\Big[\mu(\mho)\int_\mho \alpha\beta\, d\mu - \int_\mho \alpha\, d\mu \int_\mho \beta\, d\mu\Big]$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\int_\mho\int_\mho[\alpha(x) - \alpha(y)][\beta(x) - \beta(y)]\, d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_\mho \left[\int_\mho \Big\{\alpha(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta(y) - \beta(x)\alpha(y) + \alpha(y)\beta(y)\Big\}\, d\mu(x)\right] d\mu(y) \\
&= \int_\mho \left[\int_\mho \alpha\beta\, d\mu - \beta(y)\int_\mho \alpha\, d\mu - \alpha(y)\int_\mho \beta\, d\mu + \alpha(y)\beta(y)\mu(\mho)\right] d\mu(y) \\
&= \mu(\mho)\int_\mho \alpha\beta\, d\mu - \int_\mho \alpha\, d\mu\int_\mho \beta\, d\mu - \int_\mho \alpha\, d\mu\int_\mho \beta\, d\mu + \mu(\mho)\int_\mho \alpha\beta\, d\mu \\
&= 2\Big[\mu(\mho)\int_\mho \alpha\beta\, d\mu - \int_\mho \alpha\, d\mu \int_\mho \beta\, d\mu\Big].
\end{aligned}$$

□

Consecuencia inmediata de lo anterior es el siguiente:

3.1.9. Corolario. *Sean los vectores aleatorios independientes $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ ambos con función de distribución H. Entonces*

$$2[\,\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1)\,] = \mathbb{E}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)]\,,$$

(siempre que las esperanzas anteriores existan).

Demostración: Por el Lema 3.1.8 con:

$$\mu = H\,,\ \mho = \mathbf{R}^2\,,\ \alpha(x,y) = x\,,\ \beta(x,y) = y\,.$$

□

3.1.10. Lema. (Hoeffding) *Sean X, Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G, respectivamente, y función de distribución conjunta H. Entonces:*

$$[\,\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1)\,] = \iint_{\mathbf{R}^2}[H(x,y) - F(x)G(y)]\, dxdy\,,$$

(siempre que las esperanzas anteriores existan).

Demostración: Sea $\nu(u) := \mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}} - \mathbf{1}_{\{u\geq X_2\}}$. Si $X_1 = X_2$ entonces $\nu(u) = 0$. Si $X_1 < X_2$ entonces $\nu(u) = \mathbf{1}_{[X_1,X_2[}(u)$ y si $X_1 > X_2$ entonces $\nu(u) = -\mathbf{1}_{[X_2,X_1[}(u)$ por lo que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \nu(u)\,du &= \int_{\mathbf{R}} [\mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}} - \mathbf{1}_{\{u\geq X_2\}}]\,du \\ &= \mathbf{1}_{\{X_1<X_2\}}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{[X_1,X_2[}(u)\,du - \mathbf{1}_{\{X_1>X_2\}}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{[X_2,X_1[}(u)\,du \\ &= (X_2 - X_1)\mathbf{1}_{\{X_1<X_2\}} - (X_1 - X_2)\mathbf{1}_{\{X_1>X_2\}} \\ &= X_1 - X_2\,.\end{aligned}$$

Aplicando lo anterior junto con el Corolario 3.1.9 si tenemos los vectores aleatorios independientes (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) ambos con función de distribución H tenemos que

$$\begin{aligned}&2[\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)] = \mathbb{E}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)] \\ &\quad= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbf{R}} [\mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}} - \mathbf{1}_{\{u\geq X_2\}}]\,du \cdot \int_{\mathbf{R}} [\mathbf{1}_{\{v\geq Y_1\}} - \mathbf{1}_{\{v\geq Y_2\}}]\,dv\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\left[\iint_{\mathbf{R}^2} [\mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}} - \mathbf{1}_{\{u\geq X_2\}}][\mathbf{1}_{\{v\geq Y_1\}} - \mathbf{1}_{\{v\geq Y_2\}}]\,dudv\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\Big[\iint_{\mathbf{R}^2} \Big\{\mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}}\mathbf{1}_{\{v\geq Y_1\}} - \mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}}\mathbf{1}_{\{v\geq Y_2\}} - \mathbf{1}_{\{u\geq X_2\}}\mathbf{1}_{\{v\geq Y_1\}} \\ &\qquad\qquad + \mathbf{1}_{\{u\geq X_2\}}\mathbf{1}_{\{v\geq Y_2\}}\Big\}\,dudv\Big]\,,\end{aligned}$$

y como $\mathbb{E}|XY|$, $\mathbb{E}|X|$, $\mathbb{E}|Y|$ son finitas (por hipótesis) entonces

$$\begin{aligned}&2[\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)] \\ &\quad= 2\iint_{\mathbf{R}^2} \left[\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}}\mathbf{1}_{\{v\geq Y_1\}}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{u\geq X_1\}})\mathbb{E}(\mathbf{1}_{v\geq Y_1})\right]dudv \\ &\quad= 2\iint_{\mathbf{R}^2} [H(u,v) - F(u)G(v)]\,dudv\,.\end{aligned}$$

□

Observación: Modificando en la demostración anterior la definición de ν por $\nu(u) := \mathbf{1}_{\{u<X_1\}} - \mathbf{1}_{\{u<X_2\}}$ obtenemos

$$[\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1)] = \iint_{\mathbf{R}^2} [\overline{H}(x,y) - \overline{F}(x)\overline{G}(y)]\,dxdy\,.$$

Como consecuencia del Lema de Hoeffding para la DCP tenemos el siguiente:

3.1.11. Corolario. *Sean las variables aleatorias X, Y con función de distribución conjunta H y marginales F y G, respectivamente, tales que $DCP(X,Y)$ y que $\mathbb{E}|XY|$, $\mathbb{E}|X|$, $\mathbb{E}|Y|$ son finitas. Entonces*

$$\mathbb{E}(XY) \geq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

cumpliéndose la igualdad si y sólo si X, Y son independientes.

Demostración: Si $DCP(X,Y)$ entonces de (3.1) tenemos que

$$H(x,y) - F(x)G(y) \geq 0$$

y por el Lema de Hoeffding

$$[\,\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\,] = \iint_{\mathbf{R}^2} [H(x,y) - F(x)G(y)]\, dxdy \;\geq\; 0.$$

Supongamos ahora que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Como $DCP(X,Y)$, por el Lema de Hoeffding esto implica que $H(x,y) = F(x)G(y)$ excepto posiblemente en algún conjunto de medida de Lebesgue cero, pero como las funciones de distribución (de probabilidad) son continuas por la derecha entonces $H(x,y) = F(x)G(y)$ en todos lados y por lo tanto X, Y son independientes. $\square$

3.2. Monotonicidad de cola

3.2.1. Definición. *Sean X, Y variables aleatorias. Decimos que:*

1. *Y es decreciente de cola izquierda en X, y lo denotamos por $DCI(Y|X)$, si*

   $$P[Y \leq y | X \leq x] \quad \textit{es función monótona decreciente de } x\,,\ \textit{para todo } y\,.$$

2. *X es decreciente de cola izquierda en Y, y lo denotamos por $DCI(X|Y)$, si*

   $$P[X \leq x | Y \leq y] \quad \textit{es función monótona decreciente de } y\,,\ \textit{para todo } x\,.$$

Observación: De la Definición 3.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned} DCP(X,Y) \quad &\Leftrightarrow \quad P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y] \\ &\Leftrightarrow \quad P[Y \leq y | X \leq x] \geq P[Y \leq y] \\ &\Leftrightarrow \quad P[Y \leq y | X \leq x] \geq P[Y \leq y | X \leq \infty]\,, \end{aligned}$$

por lo que pedir para cada $y \in \mathbf{R}$ que la función

$$p_1(x) := P[Y \leq y | X \leq x]\,,$$

sea una función monótona decreciente de x hace de DCI una condición más fuerte que DCP. Además nótese que, si H es la función de distribución conjunta de X, Y y F y G sus marginales, respectivamente:

$$\begin{aligned}
DCI(Y|X) &\Leftrightarrow p_1(x) \geq p_1(x+h) \quad , \quad h > 0 \\
&\Leftrightarrow P[Y \leq y|X \leq x] \geq P[Y \leq y|X \leq x+h] \\
&\Leftrightarrow \frac{P[X \leq x, Y \leq y]}{P[X \leq x]} \geq \frac{P[X \leq x+h, Y \leq y]}{P[X \leq x+h]} \\
&\Leftrightarrow \frac{H(x,y)}{F(x)} \geq \frac{H(x+h,y)}{F(x+h)} \\
&\Leftrightarrow \frac{F(x+h)}{F(x)} \geq \frac{H(x+h,y)}{H(x,y)} .
\end{aligned}$$

3.2.2. Definición. *Sean X, Y variables aleatorias. Decimos que:*

1. *Y es creciente de cola derecha en X, y lo denotamos por $CCD(Y|X)$, si*
$$P[Y > y|X > x] \quad \text{es función monótona creciente de } x \text{ para todo } y .$$
2. *X es creciente de cola derecha en Y, y lo denotamos por $CCD(X|Y)$, si*
$$P[X > x|Y > y] \quad \text{es función monótona creciente de } y \text{ para todo } x .$$

Observación: Del Lema 3.1.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
DCP(X,Y) &\Leftrightarrow P[X > x, Y > y] \geq P[X > x]P[Y > y] \\
&\Leftrightarrow P[Y > y|X > x] \geq P[Y > y] \\
&\Leftrightarrow P[Y > y|X > x] \geq P[Y > y|X > -\infty] ,
\end{aligned}$$

Por lo que pedir para cada $y \in \mathbf{R}$ que la función

$$p_2(x) := P[Y > y|X > x] ,$$

sea una función monótona creciente de x hace de CCD una condición más fuerte que DCP. Además nótese que, si H es la función de distribución conjunta de X, Y y F y G sus marginales, respectivamente

$$\begin{aligned}
CCD(Y|X) &\Leftrightarrow p_2(x) \leq p_2(x+h) \quad , \quad h > 0 \\
&\Leftrightarrow P[Y > y|X > x] \leq P[Y > y|X > x+h] \\
&\Leftrightarrow \frac{P[X > x, Y > y]}{P[X > x]} \leq \frac{P[X > x+h, Y > y]}{P[X > x+h]} \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{H}(x,y)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{H}(x+h,y)}{\overline{F}(x+h)} \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{H}(x,y)}{\overline{H}(x+h,y)} \leq \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x+h)} .
\end{aligned}$$

3.2.3. Teorema. *Sean las variables aleatorias X, Y tales que al menos una de las condiciones siguientes se cumple: DCI$(Y|X)$, DCI$(X|Y)$, CCD$(Y|X)$ o CCD$(X|Y)$. Entonces DCP(X, Y).*

Demostración:

1.
$$\begin{aligned}
\text{Si DCI}(Y|X) \;&\Rightarrow\; P[Y \leq y|X \leq x] \geq P[Y \leq y|X \leq \infty] = P[Y \leq y] \\
&\Rightarrow\; P[X \leq x]P[Y \leq y|X \leq x] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y] \\
&\Rightarrow\; P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y],
\end{aligned}$$
y por lo tanto DCP(X, Y).

2. Por simetría con lo anterior, si DCI$(X|Y)$ entonces DCP(X, Y).

3.
$$\begin{aligned}
\text{Si CCD}(Y|X) \;&\Rightarrow\; P[Y > y|X > -\infty] \leq P[Y > y|X > x] \\
&\Rightarrow\; P[Y > y] \leq P[Y > y|X > x] \\
&\Rightarrow\; P[X > x]P[Y > y] \leq P[X > x]P[Y > y|X > x] \\
&\Rightarrow\; P[X > x]P[Y > y] \leq P[Y > y, X > x],
\end{aligned}$$
y por lo tanto DCP(X, Y).

4. Por simetría con lo anterior, si CCD$(X|Y)$ entonces DCP(X, Y).

□

Observación: Sin embargo, DCP(X, Y) no implica ninguno de los tipos de dependencia de las Definiciones 3.2.1 y 3.2.2, como se verá en el Ejemplo 3.2.6.

3.2.4. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces:*

1. *DCI$(Y|X)$ $\Leftrightarrow$ para todo $v \in \mathbf{I}$ $\quad C(u, v)/u$ es monótona decreciente en u.*
2. *DCI$(X|Y)$ $\Leftrightarrow$ para todo $u \in \mathbf{I}$ $\quad C(u, v)/v$ es monótona decreciente en v.*
3. *CCD$(Y|X)$ $\Leftrightarrow$ para todo $v \in \mathbf{I}$ $\quad [1 - u - v + C(u, v)]/(1 - u)$ es monótona creciente en u, o equivalentemente, si $[v - C(u, v)]/(1 - u)$ es monótona decreciente en u.*
4. *CCD$(X|Y)$ $\Leftrightarrow$ para todo $u \in \mathbf{I}$ $\quad [1 - u - v + C(u, v)]/(1 - v)$ es monótona creciente en v, o equivalentemente, si $[u - C(u, v)]/(1 - v)$ es monótona decreciente en v.*

Demostración: Sea H la función de distribución conjunta de X, Y y sean F y G sus marginales.

1. Por la Definición 3.2.1 y el Teorema 2.2.9 (Sklar)

$$\begin{aligned}
\mathrm{DCI}(Y|X) &\Leftrightarrow P[Y \le y|X \le x] \ge P[Y \le y|X \le x+h] \quad , h > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{H(x,y)}{F(x)} \ge \frac{H(x+h,y)}{F(x+h)} \\
&\Leftrightarrow \frac{C(F(x),G(y))}{F(x)} \ge \frac{C(F(x+h),G(y))}{F(x+h)}.
\end{aligned}$$

Hacemos la transformación de probabilidades $u := F(x), v := G(y)$ y como F es estrictamente creciente entonces existe $h^* > 0$ tal que $u + h^* = F(x+h)$ por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{DCI}(Y|X) &\Leftrightarrow \frac{C(u,v)}{u} \ge \frac{C(u+h^*,v)}{u+h^*} \\
&\Leftrightarrow \frac{C(u,v)}{u} \text{ es monótona decreciente en } u \text{ , para todo } v \in \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

2. Por simetría con lo anterior tenemos que

$$\mathrm{DCI}(X|Y) \Leftrightarrow \frac{C(u,v)}{v} \text{ es monótona decreciente en } v \text{ , para todo } u \in \mathbf{I}.$$

3. Por la Definición 3.2.2 y el Teorema 2.2.9 (Sklar)

$$\begin{aligned}
\mathrm{CCD}(Y|X) &\Leftrightarrow P[Y > y|X > x] \le P[Y > y|X > x+h] \quad , h > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{H}(x,y)}{\overline{F}(x)} \le \frac{\overline{H}(x+h,y)}{\overline{F}(x+h)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1-F(x)-G(y)+C(F(x),G(y))}{1-F(x)} \le \frac{1-F(x+h)-G(y)+C(F(x+h),G(y))}{1-F(x+h)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1-u-v+C(u,v)}{1-u} \le \frac{1-(u+h^*)-v+C(u+h^*,v)}{1-(u+h^*)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1-u-v+C(u,v)}{1-u} \text{ es monótona creciente en } u \text{, para todo } v \in \mathbf{I},
\end{aligned}$$

y como

$$\frac{1-u-v+C(u,v)}{1-u} = 1 - \frac{v-C(u,v)}{1-u},$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1-u-v+C(u,v)}{1-u} \text{ es monótona creciente en } u \\
&\Leftrightarrow \frac{v-C(u,v)}{1-u} \text{ es monótona decreciente en } u.
\end{aligned}$$

4. Por simetría con lo anterior tenemos que para toda $u \in \mathbf{I}$

$$\mathrm{CCD}(X|Y) \Leftrightarrow \frac{1-u-v+C(u,v)}{1-v} \text{ es monótona creciente en } v$$
$$\Leftrightarrow \frac{u-C(u,v)}{1-v} \text{ es monótona decreciente en } v\,.$$

□

3.2.5. Corolario. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces:*

1. *DCI$(Y|X) \Leftrightarrow$ para cualquier $v \in \mathbf{I}$ se cumple para casi toda u*
$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq \frac{C(u,v)}{u}\,.$$

2. *DCI$(X|Y) \Leftrightarrow$ para cualquier $u \in \mathbf{I}$ se cumple para casi toda v*
$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq \frac{C(u,v)}{v}\,.$$

3. *CCD$(Y|X) \Leftrightarrow$ para cualquier $v \in \mathbf{I}$ se cumple para casi toda u*
$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \geq \frac{v-C(u,v)}{1-u}\,.$$

4. *CCD$(X|Y) \Leftrightarrow$ para cualquier $u \in \mathbf{I}$ se cumple para casi toda v*
$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \geq \frac{u-C(u,v)}{1-v}\,.$$

Demostración: Utilizando el Teorema 2.1.13:

1. Sea $g(u) := C(u,v)/u$. Por el Teorema 3.2.4 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{DCI}(Y|X) \quad &\Leftrightarrow \quad g(u) \text{ es monótona decreciente en } u \\
&\Leftrightarrow \quad g'(u) \leq 0 \text{ para casi toda } u \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{u\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} - C(u,v)}{u^2} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq \frac{C(u,v)}{u} \text{ para casi toda } u \in \mathbf{I}\,.
\end{aligned}$$

2. Por simetría con lo anterior tenemos que:

$$\mathrm{DCI}(X|Y) \Leftrightarrow \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq \frac{C(u,v)}{v} \text{ para casi toda } u \in \mathbf{I}\,.$$

3. Sea $g(u) := [v - C(u,v)]/(1-u)$. Por el Teorema 3.2.4

$$\begin{aligned}
\mathrm{CCD}(Y|X) &\Leftrightarrow g(u) \text{ es monótona decreciente en } u \\
&\Leftrightarrow g'(u) \leq 0 \text{ para casi toda } u \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow \frac{-(1-u)\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} + [v - C(u,v)]}{(1-u)^2} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (1-u)\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} + [C(u,v) - v] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \geq \frac{v - C(u,v)}{1-u} \text{ para casi toda } u \in \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

4. Por simetría con lo anterior:

$$\mathrm{CCD}(X|Y) \Leftrightarrow \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \geq \frac{u - C(u,v)}{1-v} \text{ para casi toda } v \in \mathbf{I}.$$

□

Utilizando el Corolario 3.2.5 podemos demostrar que DCP(X,Y) no implica ninguno de los tipos de dependencia de las Definiciones 3.2.1 y 3.2.2, por medio del siguiente:

3.2.6. Ejemplo. Consideremos la siguiente cópula, con $\theta \in]\,\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$:

$$C(u,v) := \begin{cases} \theta + W(u,v) & \text{si} \quad (u,v) \in [\theta, 1-\theta]^2, \\ M(u,v) & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Primero demostraremos que si X, Y son variables aleatorias continuas con cópula como la anterior entonces $DCP(X,Y)$. De (3.2) tenemos que $DCP(X,Y) \Leftrightarrow C \succ \Pi$.

Sea $\{A, B, K, D\}$ una partición de $\mathbf{I}^2$ dada por:

$$A := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \setminus [\theta, 1-\theta]^2 : u \leq v\}$$

$$B := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \setminus [\theta, 1-\theta]^2 : u > v\}$$

$$K := \{(u,v) \in [\theta, 1-\theta]^2 : 1-u > v\}$$

$$D := \{(u,v) \in [\theta, 1-\theta]^2 : 1-u \leq v\}$$

Si $(u,v) \in A$ entonces $C(u,v) = u$ y como $v \in \mathbf{I}$ entonces $uv \leq u$ de donde $\Pi(u,v) \leq C(u,v)$ y por lo tanto $C \succ \Pi$ en A.

Si $(u,v) \in B$ entonces $C(u,v) = v$ y como $u \in \mathbf{I}$ entonces $uv \leq v$ de donde $\Pi(u,v) \leq C(u,v)$ y por lo tanto $C \succ \Pi$ en B.

Si $(u,v) \in K$ entonces $C(u,v) = \theta \in]\,\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$. Como $u \in [\theta, 1-\theta]$ y $v \in [\theta, 1-u]$ entonces $uv \leq u(1-u)$. Sea $\alpha(u) := u(1-u)$ entonces $\alpha(u)$ tiene máximo en $u = \frac{1}{2}$ y $\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Como $uv \leq u(1-u)$ entonces $uv \leq \frac{1}{4} < \theta = C(u,v)$ y por lo tanto $C \succ \Pi$ en K.

Si $(u,v) \in D$ entonces $\Rightarrow C(u,v) = u+v+\theta-1$. Como $u \in [\theta, 1-\theta]$ y $v \in [1-u, 1-\theta]$ si $u = \theta$ entonces $uv = \theta v$ y $C(u,v) = u+v+\theta-1 \geq \theta \geq \theta v = uv$. En el otro extremo, si $u = 1-\theta$ entonces $uv = (1-\theta)v$ y $C(u,v) = u+v+\theta-1 = v \geq (1-\theta)v = uv$. Si $\alpha(u) := uv$ y $\beta(u) := u+v+\theta-1$ entonces $\alpha'(u) = v < 1 = \beta'(u)$ y por lo tanto $C \succ \Pi$ en D.

Por todo lo anterior tenemos que DCP(X,Y).

Ahora veremos que ninguna de las Definiciones 3.2.1 y 3.2.2 se cumplen, utilizando el Corolario 3.2.5 :

1. Sea $(u,v) \in D$ entonces $C(u,v) = u+v+\theta-1$ y en tal caso, para $\theta < u < 1-\theta$ y $1-u < v < 1-\theta$, tenemos que $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u} = 1$ y que $\dfrac{C(u,v)}{u} = 1 + \dfrac{v+\theta-1}{u}$. Escogemos en particular $(u,v) \in D$ tal que $(u,v) = (1-\theta-\rho, \frac{1}{2})$ para algún $\rho > 0$ y entonces $\dfrac{C(u,v)}{u} = 1 + \dfrac{\theta-\frac{1}{2}}{1-\theta-\rho}$ y como $\theta < \dfrac{1}{2}$ entonces $\dfrac{C(u,v)}{u} < 1 = \dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ y por lo tanto DCP(X,Y) no implica DCI$(Y|X)$.

2. Por simetría con lo anterior DCP(X,Y) tampoco implica DCI$(X|Y)$.

3. Sea $(u,v) \in K$ entonces $C(u,v) = \theta$ y en tal caso, para $\theta < u < 1-\theta$ y $1-\theta < v < 1-u$, tenemos que $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u} = 0$ y que $\dfrac{v - C(u,v)}{1-u} = \dfrac{v-\theta}{1-u}$ de donde $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u} < \dfrac{v-C(u,v)}{1-u}$ y por lo tanto DCP(X,Y) no implica CCD$(Y|X)$.

4. Por simetría con lo anterior DCP(X,Y) no implica CCD$(X|Y)$.

3.3. Monotonicidad estocástica

3.3.1. Definición. *Sean las variables aleatorias X, Y. Decimos que:*

1. *Y es estocásticamente creciente en X, y lo denotamos por $EC(Y|X)$, si*

   $P[Y > y|X = x]$ *es función monótona creciente de x , para todo y.*

2. *X es estocásticamente creciente en Y, y lo denotamos por $EC(X|Y)$, si*

   $P[X > x|Y = y]$ *es función monótona creciente de y , para todo x.*

3. *Y es estocásticamente decreciente en X, y lo denotamos por $ED(Y|X)$, si*

   $P[Y > y|X = x]$ *es función monótona decreciente de x , para todo y.*

4. *X es estocásticamente decreciente en Y, y lo denotamos por $ED(X|Y)$, si*

$$P[X > x|Y = y] \quad \textit{es función monótona decreciente de } y \textit{, para todo } x\,.$$

O equivalentemente, como $P[Y > y|X = x] = 1 - P[Y \leq y|X = x]$:

1. *$EC(Y|X)$ si $P[Y \leq y|X = x]$ es función monótona decreciente de x, para todo y.*
2. *$EC(X|Y)$ si $P[X \leq x|Y = y]$ es función monótona decreciente de y, para todo x.*
3. *$ED(Y|X)$ si $P[Y \leq y|X = x]$ es función monótona creciente de x, para todo y.*
4. *$EC(X|Y)$ si $P[X \leq x|Y = y]$ es función monótona creciente de y, para todo x.*

Observación: En Lehmann(1966) se hace referencia a este tipo de dependencia como dependencia en regresión positiva, $DRP(Y|X)$, en el caso de $EC(Y|X)$, y dependencia en regresión negativa, $DRN(Y|X)$, en el caso de $ED(Y|X)$, terminología que se justifica con el siguiente:

3.3.2. Ejemplo. Sean las variables aleatorias X, Y tales que para las constantes α y β tengamos que $Y := \alpha + \beta X + U$ en donde U es una variable aleatoria independiente de X. En este caso la distribución condicional de Y dado que $X = x$ es la misma que la de $\alpha + \beta x + U$ y por lo tanto $\mathrm{EC}(Y|X)$ (es decir $\mathrm{DRP}(Y|X)$) si $\beta \geq 0$ y $\mathrm{ED}(Y|X)$ si $\beta \leq 0$.

3.3.3. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces:*

1. *$EC(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en $\mathbf{I}$ y para casi toda u tenemos que $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ es monótona decreciente en u;*
2. *$EC(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en $\mathbf{I}$ y para casi toda v tenemos que $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ es monótona decreciente en v.*

Demostración: Como las marginales F y G de X, Y respectivamente son monótonas crecientes entonces $P[Y \leq y|X = x] = P[V \leq v|U \leq u]$ donde U y V son variables aleatorias uniformes en $(0,1)$ con distribución conjunta C por lo que $\mathrm{EC}(Y|X)$ si y sólo si $P[V \leq v|U \leq u]$ es función monótona decreciente en u, para cualquier v. Por el Teorema 2.1.13 tenemos que para cualquier v la derivada parcial $\partial C/\partial u$ existe para casi toda u por lo que, para casi toda u se cumple:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} &= \lim_{\Delta u \to 0^+} \frac{C(u+\Delta u, v) - C(u,v)}{\Delta u} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0^+} \frac{P[u \leq U \leq u + \Delta u, V \leq v]}{P[u \leq U \leq u + \Delta u]} \\
&= P[V \leq v|U = u],
\end{aligned}$$

y por lo tanto EC $(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en $\mathbf{I}$ y para casi toda u tenemos que $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ es monótona decreciente en u. $\square$

Consecuencia inmediata de lo anterior es el siguiente:

3.3.4. Corolario. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces:*

1. *$EC(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en $\mathbf{I}$ tenemos que $C(u,v)$ es función cóncava de u,*
2. *$EC(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en $\mathbf{I}$ tenemos que $C(u,v)$ es función cóncava de v.*

3.3.5. Ejemplo. Sean las variables aleatorias continuas X, Y con cópula $C_{\alpha,\beta}$ de la familia Marshall-Olkin (ver Ejemplo 2.5.8) con parámetros $\alpha, \beta \in]0,1[$. Por lo analizado en dicho ejemplo tenemos que para cualquier v fija en $\mathbf{I}$ la función $\psi(u) := C_{\alpha,\beta}(u,v)$ es derivable en $]0,1[\setminus\{v^{\beta/\alpha}\}$:

$$\psi'(u) = \frac{\partial C_{\alpha,\beta}(u,v)}{\partial u} = \begin{cases} (1-\alpha)u^{-\alpha}v & \text{si} \quad u > v^{\beta/\alpha} \\ v^{1-\beta} & \text{si} \quad u < v^{\beta/\alpha} \end{cases}$$

y como $\psi'(u)$ es monótona decreciente en u entonces concluimos que EC$(Y|X)$.

3.3.6. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces:*

1. *si $EC(Y|X)$ entonces $DCI(Y|X)$ y $CCD(Y|X)$,*
2. *si $EC(X|Y)$ entonces $DCI(X|Y)$ y $CCD(X|Y)$.*

Demostración: Sea la función $\psi(w) := \partial C(w,v)/\partial w$ para una v fija en $\mathbf{I}$ y para casi toda w en $\mathbf{I}$. Por el Teorema 2.1.13 tenemos que $0 \le \psi(w) \le 1$. Tenemos además que $C(u,v) = \int_0^u \psi(w)\,dw + \xi(v)$ pero por la condición de frontera $C(0,v) = 0$ tenemos que $\xi(v) = 0$. Definimos $\alpha(u) := C(u,v)/u$ para casi toda u en $\mathbf{I}$. Demostraremos que $\alpha(u)$ es monótona decreciente y por Teorema 3.2.4 esto implicará que DCI $(Y|X)$. Por teorema de valor medio para integrales existe un K en $\mathbf{I}$ tal que $u\alpha(u) = \int_0^u \psi(w)\,dw = Ku$. Por otro lado para $u' > u$ tenemos que $u'\alpha(u') = \int_0^{u'} \psi(w)\,dw = Ku + \int_u^{u'} \psi(w)\,dw$. Nuevamente por el teorema del valor medio para integrales existe un K' tal que $\int_0^{u'} \psi(w)\,dw = K'(u'-u)$. Como por hipótesis tenemos que EC $(Y|X)$ entonces por Teorema 3.3.3 tenemos que $\psi(w)$ es monótona decreciente y esto implica que $\psi(u') \le K' \le \psi(u) \le K$ por lo que

$$u'\alpha(u') = Ku + K'(u'-u) \le Ku + K(u'-u) = Ku',$$

de donde $\alpha(u) \ge \alpha(u')$ para $u < u'$ y por lo tanto DCI $(Y|X)$.

Ahora veremos que EC $(Y|X)$ implica CCD $(Y|X)$. Sea v_0 un punto fijo de $\mathbf{I}$. Por la ecuación (2.4) sabemos que $W(u,v_0) \leq C(u,v_0) \leq M(u,v_0)$, pero además $W(1,v_0) = C(1,v_0) = M(1,v_0) = v_0$. Por hipótesis tenemos que EC $(Y|X)$ así que por el Corolario 3.3.4 $C(u,v_0)$ es función cóncava de u por lo que la cota inferior para la cópula mejora a $v_0 u \leq C(u,v_0) \leq M(u,v_0)$ y por lo tanto $v_0 - M(u,v_0) \leq v_0 - C(u,v_0) \leq v_0(1-u)$ en donde todos los miembros de la desigualdad son funciones convexas de u y además monótonas decrecientes. Definimos $\alpha_1(u) := \frac{v_0 - M(u,v_0)}{1-u}$ y $\alpha_2(u) := v_0$. Entonces $\alpha_1(u) \leq \frac{v_0 - C(u,v_0)}{1-u} \leq \alpha_2(u)$. Como $M(u,v_0) = \min\{u,v_0\}$ entonces $\alpha_1'(u) = \frac{v_0-1}{(1-u)^2} < 0$ si $0 < u < v_0$ y $\alpha_1'(u) = 0$ si $v_0 < u < 1$ por lo que $\alpha_1(u)$ es monótona decreciente, que es el mismo caso de $\alpha_2(u)$ por ser constante y por lo tanto $\frac{v_0 - C(u,v_0)}{1-u}$ es monótona decreciente en u y por el Teorema 3.2.4 CCD $(Y|X)$. □

Sin embargo, monotonicidad de cola no implica necesariamente monotonicidad estocástica, como lo ilustra el siguiente:

3.3.7. Ejemplo. Sean X, Y variables aleatorias con cópula dada por:

$$C(u,v) = \begin{cases} \dfrac{3uv}{2} - \dfrac{u+v-1}{2} & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq v \leq 1-u \leq \frac{2}{3}, \\[2ex] \dfrac{3uv}{2} & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq 1-u \leq v \leq \frac{2}{3}, \\[2ex] M(u,v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Utilizaremos el Teorema 3.2.4 para verificar que DCI $(Y|X)$, DCI $(X|Y)$, CCD $(Y|X)$ y CCD $(X|Y)$. Primero reescribimos la cópula como:

$$C(u,v) = \begin{cases} \dfrac{3uv}{2} - \dfrac{u+v-1}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in A, \\ \dfrac{3uv}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in B, \\ u & \text{si} \quad (u,v) \in K, \\ v & \text{si} \quad (u,v) \in D, \end{cases}$$

en donde $A := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : \frac{1}{3} \leq v \leq 1-u \leq \frac{2}{3}\}$, $B := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : \frac{1}{3} \leq 1-u \leq v \leq \frac{2}{3}\}$, $K := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \setminus (A \cup B) : u \leq v\}$ y $D := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \setminus (A \cup B) : u > v\}$. De lo anterior tenemos que:

$$\frac{C(u,v)}{u} = \begin{cases} \dfrac{3v}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1-v}{2u} & \text{si} \quad (u,v) \in A, \\[2ex] \dfrac{3v}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in B, \\[2ex] 1 & \text{si} \quad (u,v) \in K, \\[2ex] \dfrac{v}{u} & \text{si} \quad (u,v) \in D, \end{cases}$$

de donde tenemos que $\dfrac{C(u,v)}{u}$ es función monótona decreciente en u por lo que por el Teorema 3.2.4 tenemos que DCI $(Y|X)$, y por simetría con lo anterior se concluye también DCI $(X|Y)$. También tenemos que:

$$\frac{v-C(u,v)}{1-u}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{v(1-3u)}{2(1-u)} & \text{si} \quad (u,v)\in A,\\[2ex] \dfrac{v(2-3u)}{1-u} & \text{si} \quad (u,v)\in B,\\[2ex] \dfrac{v-u}{1-u} & \text{si} \quad (u,v)\in K,\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (u,v)\in D,\end{cases}$$

de donde tenemos que $\dfrac{v-C(u,v)}{1-u}$ es función monótona decreciente en u por lo que por el Teorema 3.2.4 tenemos que CCD $(Y|X)$, y por simetría con lo anterior se concluye también CCD $(X|Y)$. Ahora veremos que ni EC $(Y|X)$ ni EC $(X|Y)$ porque:

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}=\begin{cases}\dfrac{3v}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad (u,v)\in A,\\[2ex] \dfrac{3v}{2} & \text{si} \quad (u,v)\in B,\\[2ex] 1 & \text{si} \quad (u,v)\in K,\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (u,v)\in D,\end{cases}$$

y si definimos $\alpha(u) := \dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}|_{v=\frac{1}{2}}$ y utilizamos $u_1=\frac{5}{12}$ y $u_2=\frac{7}{12}$ obtenemos que $u_1<u_2$ pero $\alpha(u_1)=\frac{1}{4}<\alpha(u_2)=\frac{3}{4}$ de donde $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ no es monótona decreciente en u y por el Teorema 3.3.3 concluimos que Y no es EC en X, y por un argumento simétrico al anterior también se concluye que X no es EC en Y.

3.4. Monotonicidad de conjunto esquina

3.4.1. Definición. *Sean X, Y variables aleatorias. Decimos que:*

1. *X, Y son decrecientes en el conjunto de la esquina izquierda, y lo denotamos por $DCEI(X,Y)$, si $P[X\le x, Y\le y|X\le x', Y\le y']$ es monótona decreciente en x', y' para todo x, y;*

2. *X, Y son crecientes en el conjunto de la esquina derecha, y lo denotamos por $CCED(X,Y)$, si $P[X>x, Y>y|X>x', Y>y']$ es monótona creciente en x', y' para todo x, y.*

3.4.2. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con distribución conjunta H:*

1. *$DCEI(X, Y)$ si y sólo si $H(x, y)H(x', y') \geq H(x, y')H(x', y)$,*
2. *$CCED(X, Y)$ si y sólo si $\overline{H}(x, y)\overline{H}(x', y') \geq \overline{H}(x, y')\overline{H}(x', y)$,*

para cualesquiera x, y, x', y' en $\overline{\mathbf{R}}$ tal que $x \leq x'$, $y \leq y'$.

Demostración: Primero supongamos que DCEI (X, Y). Entonces por la Definición 3.4.1 tenemos que $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$ es monótona decreciente en x', y' para cualesquiera x, y, así que en particular para $y = \infty$ tenemos que $P[X \leq x | X \leq x', Y \leq y']$ es monótona decreciente en x', y' para toda x. Si $x \leq x'$ entonces $\dfrac{P[X \leq x, Y \leq y']}{P[X \leq x', Y \leq y']}$ es monótona decreciente en y' porque $P[X \leq x | X \leq x', Y \leq y'] = \dfrac{P[X \leq x, Y \leq y']}{P[Y \leq y']}$ es monótona decreciente en y'. Entonces para $y \leq y'$ tenemos que $\dfrac{P[X \leq x, Y \leq y]}{P[X \leq x', Y \leq y]} \geq \dfrac{P[X \leq x, Y \leq y']}{P[X \leq x', Y \leq y']}$ y por lo tanto $H(x, y)H(x', y') \geq H(x, y')H(x', y)$. En el otro sentido, supongamos ahora que $H(x, y)H(x', y') \geq H(x, y')H(x', y)$. Entonces $P[X \leq x | X \leq x', Y \leq y']$ es monótona decreciente en x', y' para toda x, y $P[Y \leq y | X \leq x', Y \leq Y']$ es monótona drecreciente en x', y' para toda y. Se analizan los cuatro casos posibles:

i) Si $x \leq x'$, $y \leq y'$ entonces $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y'] = \dfrac{H(x, y)}{H(x', y')}$, en donde el segundo miembro de la ecuación es claramente decreciente en x', y' y por lo tanto DCEI (X, Y).

ii) Si $x > x'$, $y \leq y'$ entonces $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y'] = P[Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$, en donde el segundo miembro es monótono decreciente en x', y' y por lo tanto DCEI (X, Y).

iii) Si $x \leq x'$, $y > y'$ entonces $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y'] = P[X \leq x | X \leq x', Y \leq y']$, en donde el segundo miembro es monótono decreciente en x', y' y por lo tanto DCEI (X, Y).

iv) Si $x > x'$, $y > y'$ entonces $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y'] = 1$ y por tanto monótona decreciente en x', y' y se concluye que DCEI (X, Y).

La demostración para CCED (X, Y) es totalmente análoga. □

3.4.3. Ejemplo. Sean X, Y variables aleatorias con distribución exponencial bivariada de Marshall-Olkin (ver Ejemplo 2.5.8) con parámetros λ_1, λ_2 y λ_{12}. Si $\overline{H}$ denota la función conjunta de sobrevivencia de X, Y, entonces:

$$\overline{H}(x, y) = \exp\left[-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max\{x, y\}\right].$$

Por lo que

$$\overline{H}(x,y)\overline{H}(x',y') = \exp\left[-\lambda_1(x+x')-\lambda_2(y+y')-\lambda_{12}(\text{máx}\{x,y\}+\text{máx}\{x',y'\})\right]$$

y

$$\overline{H}(x',y)\overline{H}(x,y') = \exp\left[-\lambda_1(x+x')-\lambda_2(y+y')-\lambda_{12}(\text{máx}\{x',y\}+\text{máx}\{x,y'\})\right].$$

Así que si $0 \leq x \leq x'$ y $0 \leq y \leq y'$, entonces $\text{máx}\{x,y\} + \text{máx}\{x',y'\} \leq \text{máx}\{x',y\}+\text{máx}\{x,y'\}$, con lo que obtenemos $\overline{H}(x,y)\overline{H}(x',y') \geq \overline{H}(x,y')\overline{H}(x',y)$ y por el Teorema 3.4.2 concluimos que CCED (X,Y).

En términos de la cópula y la cópula de sobrevivencia de las variables aleatorias continuas X, Y, tenemos el siguiente:

3.4.4. Corolario. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C:*

1. *DCEI(X,Y) si y sólo si $C(u,v)C(u',v') \geq C(u,v')C(u',v)$,*
2. *CCED(X,Y) si y sólo si $\hat{C}(u,v)\hat{C}(u',v') \geq \hat{C}(u,v')\hat{C}(u',v)$,*

para cualesquiera u, v, u', v' en $\mathbf{I}$ tal que $u \leq u'$, $v \leq v'$.

Demostración: Por Teorema 3.4.2, Teorema 2.2.9 y Corolario 2.5.6. □

3.4.5. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias.*

1. *Si DCEI(X,Y) entonces DCI$(Y|X)$ y DCI$(X|Y)$;*
2. *Si CCED(X,Y) entonces CCD$(Y|X)$ y CCD$(X|Y)$.*

Demostración:

1. Si DCEI (X,Y) entonces $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$ es monótona decreciente en x', y' para toda x, y. Sean $x = \infty$ e $y' = \infty$, entonces $P[Y \leq y | X \leq x']$ es monótona decreciente en x' para toda y y por lo tanto DCI $(Y|X)$. De manera similar con $y = \infty$ y $x' = \infty$ concluimos que DCI $(X|Y)$.

2. Si CCED (X,Y) entonces $P[X > x, Y > y | X > x', Y > y']$ es monótona creciente en x', y' para toda x, y. Sean $x = -\infty$ e $y' = -\infty$, entonces $P[Y > y | X > x']$ es monótona creciente en x' para toda y y por lo tanto CCD $(Y|X)$. De manera similar con $y = -\infty$ y $x' = -\infty$ concluimos que CCD $(X|Y)$.

□

Y como es de esperarse la monotonicidad de cola no implica monotonicidad en el conjunto esquina, por ser esta última una condición más fuerte, como se ilustra en el siguiente:

3.4.6. Ejemplo. Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula:

$$C(u,v) = \begin{cases} \min\left\{\frac{u}{2}, v\right\} & \text{si} \quad 0 \leq v \leq \frac{1}{2}, \\ \min\left\{u, \frac{u}{2} + v - \frac{1}{2}\right\} & \text{si} \quad 0 \leq v \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Primero demostraremos que DCI $(Y|X)$ y CCD $(Y|X)$. Reexpresamos la cópula:

$$C(u,v) = \begin{cases} u & \text{si} \quad (u,v) \in A, \\ \dfrac{u}{2} + v - \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in B, \\ \dfrac{u}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in K, \\ v & \text{si} \quad (u,v) \in D, \end{cases}$$

donde $A := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : \frac{u}{2} + \frac{1}{2} < v \leq 1\}$, $B := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : \frac{1}{2} < v \leq \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\}$, $K := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : \frac{u}{2} < v \leq \frac{1}{2}\}$ y $D := \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 : 0 \leq v \leq \frac{u}{2}\}$. De lo anterior obtenemos:

$$\frac{C(u,v)}{u} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (u,v) \in A, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{2v-1}{2u} & \text{si} \quad (u,v) \in B, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in K, \\ \dfrac{v}{u} & \text{si} \quad (u,v) \in D, \end{cases}$$

y como $\dfrac{C(u,v)}{u}$ es monótona decreciente en u entonces por el Teorema 3.2.4 concluimos que DCI $(Y|X)$. Ahora obtenemos:

$$\frac{v - C(u,v)}{1-u} = \begin{cases} \dfrac{v-u}{1-u} & \text{si} \quad (u,v) \in A, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in B, \\ \dfrac{v-\frac{1}{2}}{1-u} & \text{si} \quad (u,v) \in K, \\ 0 & \text{si} \quad (u,v) \in D, \end{cases}$$

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (u,v) \in A \setminus \{(u,1) \in \mathbf{I}^2\}, \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in B \setminus \{(u, \frac{u}{2} + \frac{1}{2}) : u \in \mathbf{I}\}, \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad (u,v) \in K \setminus \{(u, \frac{1}{2}) \in \mathbf{I}^2\}, \\ 0 & \text{si} \quad (u,v) \in D \setminus (\{(u, \frac{u}{2}) : u \in \mathbf{I}\} \cup \{(u,0) \in \mathbf{I}^2\}), \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u} \geq \dfrac{v - C(u,v)}{1-u}$ para cualquier v en $\mathbf{I}$ y para casi toda u, y por el Corolario 3.2.5 concluimos que CCD $(Y|X)$. Ahora veremos que DCEI (X,Y) y CCED (X,Y) no se cumplen. Sean $u = v = \frac{1}{3}$ y $u' = v' = \frac{2}{3}$. Entonces tenemos que $u < u'$ y $v < v'$ pero $C(u,v) = \frac{1}{6}$, $C(u',v') = \frac{1}{2}$, $C(u,v') = C(u'v) = \frac{1}{3}$ de donde se tiene que $C(u,v)C(u',v') < C(u,v')C(u',v)$ y por tanto por el Corolario 3.4.4 no se cumple que DCEI (X,Y). Finalmente, al obtener la cópula de sobrevivencia mediante el Lema 2.5.4 encontramos que $\hat{C} = C$ y por lo tanto los mismos valores de u, v, u', v' nos permiten concluir que $\hat{C}(u,v)\hat{C}(u',v') < \hat{C}(u,v')\hat{C}(u',v)$ y por lo tanto por el Corolario 3.4.4 no se cumple que CCED (X,Y).

3.4.7. Corolario. *Sean X, Y variables aleatorias continuas:*

$$\begin{array}{ccccc} EC(Y|X) & \Rightarrow & CCD(Y|X) & \Leftarrow & CCED(X,Y) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ DCI(Y|X) & \Rightarrow & DCP(X,Y) & \Leftarrow & CCD(X|Y) \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ DCEI(X,Y) & \Rightarrow & DCI(X|Y) & \Leftarrow & EC(X|Y) \end{array}$$

y donde ninguna de las implicaciones son equivalencias.

Demostración: Por Teoremas 3.2.3, 3.3.6 y 3.4.5, así como por los Ejemplos 3.2.6, 3.3.7 y 3.4.6. □

3.5. Dependencia en cociente de verosimilitud

3.5.1. Definición. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $h(x,y)$. Decimos que X, Y son dependientes en cociente de verosimilitud positivamente, y lo denotamos por $CVP(X,Y)$, si h satisface:*

$$h(x,y)h(x',y') \geq h(x,y')h(x',y)$$

para cualesquiera x, y, x', y' en $\overline{\mathbf{R}}$ tal que $x \leq x'$, $y \leq y'$. De manera análoga se define la dependencia en cociente de verosimilitud negativamente, $CVN(X,Y)$, con la desigualdad en el otro sentido.

3.5.2. Ejemplo. Sea el vector aleatorio (X, Y) con distribución normal bivariada y con parámetros $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ y ρ. Entonces (X, Y) tiene densidad conjunta:

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2 - 2\rho xy + y^2] \right\}.$$

Sean $x \leq x'$, $y \leq y'$. Entonces

$$\frac{h(x,y)}{h(x,y')} = \exp\left\{ -\frac{y'-y}{2(1-\rho^2)}[2\rho x - (y+y')] \right\},$$

de donde CVP (X, Y) si y sólo si $\rho \geq 0$ y CVN (X, Y) si y sólo si $\rho \leq 0$.

3.5.3. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución absolutamente continua. Si CVP (X, Y) entonces EC $(Y|X)$, EC $(X|Y)$, DCEI (X, Y) y CCED (X, Y).*

Demostración: Sean h, f y g las densidades conjunta y marginales de X, Y. Como CVP (X, Y), si $x \leq x'$, $t \leq t'$ y $f(x), f(x') > 0$ entonces

$$\frac{h(x,t)h(x',t')}{f(x)f(x')} \geq \frac{h(x,t')h(x',t)}{f(x)f(x')},$$

$$h(t|x)h(t'|x') \geq h(t'|x)h(t|x'),$$

$$\int_y^\infty \int_{-\infty}^y h(t|x)h(t'|x')\, dt dt' \geq \int_y^\infty \int_{-\infty}^y h(t'|x)h(t|x')\, dt dt',$$

para cualquier y, de donde

$$P[Y \leq y|X = x]P[Y > y|X = x'] \geq P[Y \leq y|X = x']P[Y > y|X = x].$$

Sumando $P[Y > y|X = x']P[Y > y|X = x]$ en ambos miembros de la desigualdad obtenemos

$$P[Y > y|X = x'] \geq P[Y > y|X = x],$$

lo que implica que $P[Y > y|X = x]$ es monótona creciente en x, para toda y, y por la Definición 3.3.1 concluimos que EC $(Y|X)$. De manera análoga se concluye que EC $(X|Y)$.

Ahora demostraremos que CVP (X, Y) implica DCEI (X, Y). Si $x \leq x'$, $y \leq y'$ entonces $P[X \leq x, Y \leq y|X \leq x', Y \leq y'] = \dfrac{H(x,y)}{H(x',y')}$, que es monótona decreciente en x', y'. Si $x > x'$, $y > y'$ entonces $P[X \leq x, Y \leq y|X \leq x', Y \leq y'] = 1$ es monótona decreciente en x', y'. Si $x > x'$, $y \leq y'$ entonces

$$P[X \leq x, Y \leq y|X \leq x', Y \leq y'] = P[Y \leq y|X \leq x', Y \leq y'] = \frac{H(x',y)}{H(x',y')},$$

que es claramente monótona decreciente en y'. Veremos que también lo es en x'. Sea x'' tal que $x' \leq x''$. Como CVP (X, Y), si $s \leq s'$ y $t \leq t'$ tenemos que $h(s,t)h(s',t') \geq h(s,t')h(s',t)$ y entonces

$$\int_y^{y'}\int_{-\infty}^{y}\int_{x'}^{x''}\int_{-\infty}^{x'} h(s,t)h(s',t')\, dsds'dtdt' \geq \int_y^{y'}\int_{-\infty}^{y}\int_{x'}^{x''}\int_{-\infty}^{x'} h(s,t')h(s',t)\, dsds'dtdt'$$

de donde

$$P[X\leq x', Y\leq y]P[x'<X\leq x'', y<Y\leq y'] \geq P[X\leq x', y<Y\leq y']P[x'<X\leq x'', Y\leq y]\,.$$

Sumando $P[X \leq x', Y \leq y]P[x' < X \leq x'', Y \leq y]$ en ambos miembros la desigualdad obtenemos

$$P[X\leq x', Y\leq y]P[x'< X\leq x'', Y\leq y'] \geq P[X\leq x', Y\leq y']P[x'< X\leq x'', Y\leq y]\,,$$

y sumando $P[X \leq x', Y \leq y]P[X \leq x', Y \leq y']$ la desigualdad anterior se simplifica a

$$P[X \leq x', Y \leq y]P[X \leq x'', Y \leq y'] \geq P[X \leq x', Y \leq y']P[X \leq x'', Y \leq y]\,,$$

$$H(x',y)H(x'',y') \geq H(x',y')H(x'',y)\,,$$
$$\frac{H(x',y)}{H(x',y')} \geq \frac{H(x'',y)}{H(x'',y')}\,,$$

de donde se tiene que $P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$ es también monótona decreciente en x'. Se obtiene la misma conclusión para el caso $x \leq x'$, $y > y'$, así que por la Definición 3.4.1 concluimos que DCEI (X, Y). La demostración para CCED (X, Y) es análoga. □

Observación: Como resultado del teorema anterior y del Corolario 3.4.7 tenemos que la dependencia en cociente de verosimilitud implica todos los tipos de dependencia anteriores.

3.6. Medidas de dependencia

3.6.1. Definición. *Una medida de dependencia para un par de variables aleatorias X, Y es un número que denotaremos $\delta_{X,Y}$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\delta_{X,Y}$ está definida para todo par de variables aleatorias continuas X, Y ,*
2. *$\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$,*
3. *$0 \leq \delta_{X,Y} \leq k$, para algún $k > 0$,*
4. *$\delta_{X,Y} = 0$ si y sólo si X, Y son independientes,*
5. *Si α y β son funciones estrictamente crecientes en $\operatorname{Ran} X$ y $\operatorname{Ran} Y$, respectivamente, entonces $\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y}$.*

En particular la propiedad 5 nos garantiza que la medida de dependencia sea invariante ante cambios de escala en las variables aleatorias. Respecto a la propiedad 3, es común que se escoja $k = 1$ pero lo importante realmente es que la medida de dependencia esté acotada. La propiedad 4 no se cumple en las medidas de concordancia, como la τ de Kendall, la ρ de Spearman, entre otras; esto es, el que una medida de concordancia sea cero no implica necesariamente que las variables aleatorias sean independendientes, por lo que las medidas de dependencia resultan especialmente más adecuadas si se desea estudiar independencia.

Del Teorema 2.3.2 tenemos que las variables aleatorias continuas X, Y son independientes si y sólo si su cópula es la cópula producto (i.e. $C_{XY} = \Pi$), y por ello una forma de construir una medida de dependencia entre variables aleatorias continuas es por medio distancias L_p entre la cópula de las variables y la cópula que representa la independencia (Π), como es el caso de la σ de Schweizer y Wolff (1981), que es una distancia L_1 :

$$\sigma_{X,Y} := 12\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{XY}(u,v) - uv|\, du dv \,. \tag{3.5}$$

3.6.2. Teorema. *Sean las variables aleatorias continuas X, Y con cópula C_{XY}. Entonces la $\sigma_{X,Y}$ de Schweizer y Wolff dada por (3.5) es una medida de dependencia.*

Demostración:

1. Como X, Y son variables aleatorias continuas entonces por el Teorema 2.2.9 (Sklar) existe una única cópula C_{XY} y como $\sigma_{X,Y}$ depende tan solo de C_{XY} entonces está bien definida para todo par de variables aleatorias.

2. Sea H la función de distribución conjunta de X, Y y sean F y G sus marginales, respectivamente. Utilizando el Corolario 2.2.12 y el Teorema de Fubini (Dudley, 1989) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{X,Y} &= 12\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{XY}(u,v) - uv|\, du dv = 12\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{XY}(u,v) - uv|\, dv du \\
&= 12\iint_{\mathbf{I}^2} |H_{XY}(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) - vu|\, dv du \\
&= 12\iint_{\mathbf{I}^2} |P[X \leq F^{(-1)}(u), Y \leq G^{(-1)}(v)] - vu|\, dv du \\
&= 12\iint_{\mathbf{I}^2} |P[Y \leq G^{(-1)}(v), X \leq F^{(-1)}(u)] - vu|\, dv du \\
&= 12\iint_{\mathbf{I}^2} |H_{YX}(G^{(-1)}(v), F^{(-1)}(u)) - vu|\, dv du \\
&= 12\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{YX}(v,u) - vu|\, dv du \\
&= \sigma_{Y,X}\,.
\end{aligned}$$

3. Utilizando las cotas de Fréchet-Hoeffding (2.4) tenemos que:

$$\begin{aligned}
&W(u,v) - uv \leq C(u,v) - uv \leq M(u,v) - uv\,, \\
&0 \leq |C(u,v) - uv| \leq \text{máx}\,\{M(u,v) - uv, uv - W(u,v)\}\,,
\end{aligned}$$

De donde obtenemos, por un lado, que:

$$0 \leq 12\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{XY}(u,v) - uv|\, du dv = \sigma_{X,Y}\,,$$

y por el otro lado:

$$\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{XY}(u,v) - uv|\, du dv \leq \text{máx}\left\{\iint_{\mathbf{I}^2} [M(u,v) - uv]\, du dv, \iint_{\mathbf{I}^2} [uv - W(u,v)]\, du dv\right\},$$

$$\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{XY}(u,v) - uv|\, du dv \leq \frac{1}{12}\,,$$

y por lo tanto $0 \leq \sigma_{X,Y} \leq 1$.

4. Si X, Y son independientes entonces $C_{XY} = \Pi$ (por Teorema 2.3.2) y por lo tanto $\sigma_{X,Y} = 0$. En sentido inverso, si $\sigma_{X,Y} = 0$ entonces

$$\iint_{\mathbf{I}^2} |C_{XY}(u,v) - uv|\, du dv = 0\,,$$

y en consecuencia $|C_{XY}(u,v) - uv| = 0$ casi seguramente, pero por la continuidad de C_{XY} y Π tenemos que $|C_{XY}(u,v) - uv| = 0$ en todo $\mathbf{I}^2$ y entonces $C_{XY} = \Pi$ y por el Teorema 2.3.2 concluimos que X, Y son independientes.

5. Por el Teorema 2.3.3 tenemos que $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{XY}$ y como σ se define sólo en términos de la cópula concluimos que $\sigma_{\alpha(X),\beta(Y)} = \sigma_{X,Y}$, para α y β estrictamente crecientes en $Ran\,X$ y $Ran\,Y$, respectivamente.

Por todo lo anterior concluimos que $\sigma_{X,Y}$ es medida de dependencia. □

Ahora estamos en posición de mostrar que existen relaciones de dependencia entre variables aleatorias que medidas de concordancia como la τ de Kendall o la ρ de Spearman no detectan, pero que medidas que cumplen con la Definición 3.6.1 sí detectan. Primero revisaremos las definiciones de las antes mencionadas medidas de concordancia.

Decimos que una pareja de variables aleatorias es *concordante* si valores "grandes" ("pequeños") de una tienden a estar asociados con valores "grandes" ("pequeños") de la otra, y que es *discordante* si valores "grandes" ("pequeños") de una tienden a estar asociados con valores "pequeños" ("grandes") de la otra:

3.6.3. Definición. *Sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de un vector aleatorio (X, Y) de variableas aleatorias continuas. Decimos que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si $[(x_i < x_j\ ,\ y_i < y_j)$ ó $(x_i > x_j\ ,\ y_i > y_j)]$. De manera análoga decimos que son discordantes si $[(x_i < x_j\ ,\ y_i > y_j)$ ó $(x_i > x_j\ ,\ y_i < y_j)]$.*

Observación: (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si y sólo si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$, y son discordantes si y sólo si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

3.6.4. Definición. *(Versión muestral) Sea $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ una muestra aleatoria de n observaciones del vector aleatorio (X, Y) de variables aleatorias continuas. Sean c y d los números de pares concordantes y discordantes, respectivamente. La tau de Kendall muestral se define como:*

$$t := \frac{c-d}{c+d}\,.$$

Es decir, t es la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia para un par de observaciones $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ elegido aleatoriamente y sin reemplazo de la muestra.

Observación: Tenemos en total $\binom{n}{2}$ pares no ordenados distintos $\{(x_i, y_i), (x_j, y_j)\}$ de observaciones de la muestra por lo que $c + d = \binom{n}{2}$, casi seguramente.

3.6.5. Definición. *(Versión poblacional) Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, cada uno con función de distribución conjunta H. La tau de Kendall para el vector aleatorio (X, Y) se define como:*

$$\tau_{XY} := P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]\,.$$

3.6.6. Definición. *Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes de variables aleatorias continuas con funciones de distribución (conjunta) H_1 y H_2 pero con marginales comunes F (para X_1 y X_2) y G (para Y_1 y Y_2). La función de discordancia de los vectores aleatorios anteriores se define como:*

$$Q := P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] .$$

Es inmediato notar que si $H_1 = H_2 \Rightarrow Q = \tau$.

En el siguiente teorema se demostrará que Q depende de las distribuciones de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) tan sólo a través de sus respectivas cópulas:

3.6.7. Teorema. *Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes de variables aleatorias continuas con funciones de distribución conjunta H_1 y H_2, respectivamente, y marginales comunes F (para X_1 y X_2) y G (para Y_1 y Y_2). Sean C_1 y C_2 las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2), respectivamente. Entonces:*

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4\iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v)\, dC_1(u, v) - 1 . \tag{3.6}$$

Demostración: Como X_1, Y_1, X_2, Y_2 son variables aleatorias continuas entonces

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] + P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 1 . \tag{3.7}$$

Sustituyendo la ecuación (3.7) en la Definición 3.6.6 obtenemos la expresión alternativa:

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 , \tag{3.8}$$

pero de la Definición 3.6.3 tenemos que

$$\begin{aligned} & P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = \\ & = \; P[\{X_1 > X_2 , Y_1 > Y_2\} \text{ ó } \{X_1 < X_2 , Y_1 < Y_2\}] \\ & = \; P[X_1 > X_2 , Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2 , Y_1 < Y_2] . \end{aligned} \tag{3.9}$$

A continuación evaluaremos los dos sumandos de la ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2 , Y_1 > Y_2] &= P[X_2 \le X_1 , Y_2 \le Y_1] \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} P[X_2 \le x , Y_2 \le y]\, dP[X_1 \le x , Y_1 \le y] \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} H_2(x, y)\, dH_1(x, y) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} C_2(F(x), G(y))\, dC_1(F(x), G(y)) , \end{aligned}$$

y haciendo la transformación de probabilidades $u := F(x)$, $v := G(y)$:

$$P[X_1 > X_2 , Y_1 > Y_2] \;=\; \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v)\, dC_1(u, v) . \tag{3.10}$$

De manera análoga:

$$
\begin{aligned}
P[X_1 < X_2\,, Y_1 < Y_2] &= P[X_2 > X_1\,, Y_2 > Y_1] \\
&= \iint_{\mathbf{R}^2} P[X_2 > x\,, Y_2 > y]\, dP[X_1 \leq x\,, Y_1 \leq y] \\
&= \iint_{\mathbf{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + H_2(x,y)]\, dH_1(x,y) \\
&= \iint_{\mathbf{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))]\, dC_1(F(x), G(y)) \\
&= \iint_{\mathbf{I}^2} [1 - u - v + C_2(u,v)]\, dC_1(u,v) \\
&= \iint_{\mathbf{I}^2} dC_1(u,v) + \iint_{\mathbf{I}^2} u\, dC_1(u,v) \\
&\quad - \iint_{\mathbf{I}^2} v\, dC_1(u,v) + \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)\, dC_1(u,v) \\
&= 1 - \mathbb{E}(U) - \mathbb{E}(V) + \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)\, dC_1(u,v)\,,
\end{aligned}
$$

y como C_1 es la función de distribución conjunta de un par de variables aleatorias $U, V \sim Unif(0,1)$ tenemos que $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(V)$, por lo que

$$
P[X_1 < X_2\,, Y_1 < Y_2] = \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)\, dC_1(u,v)\,. \tag{3.11}
$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.10) y (3.11) en la ecuación (3.9):

$$
P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2\iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)\, dC_1(u,v)\,, \tag{3.12}
$$

y sustituyendo esto último en la ecuación (3.8):

$$
Q = 4\iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)\, dC_1(u,v) - 1\,.
$$

□

3.6.8. Corolario. *Sean C_1 y C_2 como en el Teorema 3.6.7. Entonces:*

1. $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$.
2. *Si para todo* $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ $\; C_1 \prec C_1'$ *y* $C_2 \prec C_2'$ *entonces* $Q(C_1, C_2) \leq Q(C_1', C_2')$.
3. $Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$ *donde* $\hat{C}_1$ *y* $\hat{C}_2$ *son las cópulas de sobrevivencia de* C_1 *y* C_2*, respectivamente.*

Demostración:

1. Q es simétrica ya que en el Teorema 3.6.7 se pudo haber elegido condicionar sobre (X_2, Y_2).

2. Por hipótesis tenemos que para todo $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ se cumple $C_1(u,v) \leq C_1'(u,v)$ y $C_2(u,v) \leq C_2'(u,v)$, por lo que:

$$\begin{aligned} Q(C_1, C_2) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)\, dC_1(u,v) - 1 \\ &\leq 4\iint_{\mathbf{I}^2} C_2'(u,v)\, dC_1(u,v) - 1 \\ &\leq 4\iint_{\mathbf{I}^2} C_2'(u,v)\, dC_1'(u,v) - 1 \\ &\leq Q(C_1', C_2'). \end{aligned}$$

3. Del Corolario 2.5.6 tenemos que

$$\overline{H}(x,y) = \hat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)) = \hat{C}(1 - F(x), 1 - G(y)),$$

por lo que

$$\begin{aligned} Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} \hat{C}_2(u,v)\, d\hat{C}_1(u,v) - 1 \\ &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} \hat{C}_2(u,v)\, dC_1(1-u, 1-v) - 1, \end{aligned}$$

y por el Lema 2.5.4 tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} [u + v - 1 + C_2(1-u, 1-v)]\, dC_1(1-u, 1-v) - 1 \\ &= -4\iint_{\mathbf{I}^2} (1-u)\, dC_1(1-u, 1-v) - 4\iint_{\mathbf{I}^2} (1-v)\, dC_1(1-u, 1-v) \\ &+ 4\iint_{\mathbf{I}^2} dC_1(1-u, 1-v) + 4\iint_{\mathbf{I}^2} C_2(1-u, 1-v)\, dC_1(1-u, 1-v) - 1 \\ &= -4(\tfrac{1}{2}) - 4(\tfrac{1}{2}) + 4 + \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)\, dC_1(u,) - 1 \\ &= Q(C_1, C_2). \end{aligned}$$

□

3.6.9. Corolario. *Sean $\{C_{1j}\}_{j=1}^m$ y $\{C_{2k}\}_{k=1}^n$ dos sucesiones finitas de cópulas y sean $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ dos sucesiones finitas en $\mathbf{R}$ tales que $\alpha_j, \beta_k \geq 0$ y que $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1 = \sum_{k=1}^n \beta_k$. Entonces:*

$$Q\Big(\sum_{j=1}^m \alpha_j C_{1j}\,, \sum_{k=1}^n \beta_k C_{2k}\Big) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k Q(C_{1j}, C_{2k}).$$

Demostración: Del Ejemplo 2.1.7 se tiene que $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j C_{1j}$ y $\sum_{k=1}^{n} \beta_k C_{2k}$ son cópulas por lo que:

$$\begin{aligned}
Q\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j C_{1j}\,,\sum_{k=1}^{n} \beta_k C_{2k}\Big) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} \sum_{k=1}^{n} \beta_k C_{2k}(u,v)\, d\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j C_{1j}(u,v)\Big) - 1 \\
&= 4\Big[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k \iint_{\mathbf{I}^2} C_{2k}(u,v)\, dC_{1j}(u,v)\Big] - 1 \\
&= 4\Big[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k \big(\frac{Q(C_{1j},C_{2k})+1}{4}\big)\Big] - 1 \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k Q(C_{1j},C_{2k})\,.
\end{aligned}$$

□

3.6.10. Ejemplo. En el Ejemplo 2.3.14 se vio que el soporte de la cópula M es el conjunto $\{(u,u) : u \in \mathbf{I}\}$ y el soporte de la cópula W es $\{(u,1-u) : u \in \mathbf{I}\}$. Si g es una función integrable en $\mathbf{I}^2$ entonces

$$\iint_{\mathbf{I}^2} g(u,v)\, dM(u,v) = \int_0^1 g(u,u)\, du \quad \text{y} \quad \iint_{\mathbf{I}^2} g(u,v)\, dW(u,v) = \int_0^1 g(u,1-u)\, du\,,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
Q(M,M) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} \min\{u,v\}\, dM(u,v) - 1 = 4\int_0^1 u\, du - 1 = 1\,, \\
Q(M,\Pi) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} uv\, dM(u,v) - 1 = 4\int_0^1 u^2\, du - 1 = \frac{1}{3}\,, \\
Q(M,W) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} \max\{u+v-1,0\}\, dM(u,v) - 1 = 4\int_{\frac{1}{2}}^1 (2u-1)\, du - 1 = 0\,, \\
Q(W,\Pi) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} uv\, dW(u,v) - 1 = 4\int_0^1 u(1-u)\, du - 1 = -\frac{1}{3}\,, \\
Q(W,W) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} \max\{u+v-1,0\}\, dW(u,v) - 1 = -1\,, \\
Q(\Pi,\Pi) &= 4\iint_{\mathbf{I}^2} uv\, d\Pi(u,v) - 1 = 4\int_0^1\int_0^1 uv\, dudv - 1 = 0\,.
\end{aligned}$$

3.6.11. Corolario. *Sea C una cópula. Entonces:*

$$Q(C,M) \in [0,1]\,,\; Q(C,W) \in [-1,0]\,,\; Q(C,\Pi) \in [-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}]\,,\; Q(C,C) \in [-1,1]\,.$$

Demostración: De la ecuación (2.4) y la Definición 2.6.1 tenemos que $W \prec C \prec M$ para toda cópula C. Por el Corolario 3.6.8 y el Ejemplo 3.6.10 tenemos que

$$Q(W,M) \leq Q(C,M) \leq Q(M,M) \text{ y por lo tanto } 0 \leq Q(C,M) \leq 1\,;$$
$$Q(W,W) \leq Q(W,C) \leq Q(W,M) \text{ y por lo tanto } -1 \leq Q(C,W) \leq 0\,;$$
$$Q(\Pi,W) \leq Q(\Pi,C) \leq Q(\Pi,M) \text{ y por lo tanto } -\frac{1}{3} \leq Q(C,\Pi) \leq \frac{1}{3}\,;$$
$$Q(W,W) \leq Q(C,C) \leq Q(M,M) \text{ y por lo tanto } Q(C,C) \in [-1,1]\,.$$

□

3.6.12. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces la versión poblacional de la tau de Kendall para X, Y (que se denotará indistintamente como $\tau_{X,Y}$ o bien τ_C) está dada por:*

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C,C) = 4\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\,dC(u,v) - 1\,.$$

Demostración: El resultado es inmediato a partir de las Definiciones 3.6.5 y 3.6.6 y del Teorema 3.6.7. □

Observación: Por el Ejemplo 2.3.5 podemos dar la siguiente interpretación a la tau de Kendall:

$$\tau_C = \mathbb{E}[C(U,V)] - 1\,,$$

en donde U y V son variables aleatorias Unif $(0,1)$ con función de distribución conjunta C.

Notación: Si C_θ pertenece a una familia paramétrica de cópulas escribiremos τ_θ en vez de τ_{C_θ}.

3.6.13. Ejemplo. Sea $C_{\alpha,\beta}$ una cópula de la familia Fréchet (ver Ejemplo 2.1.8) en donde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ y

$$C_{\alpha,\beta} = \alpha M + (1-\alpha-\beta)\Pi + \beta W\,;$$

entonces, utilizando el Corolario 3.6.9 y el Ejemplo 3.6.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha,\beta} &= Q(C_{\alpha,\beta}\,,\ C_{\alpha,\beta}) \\
&= Q(\alpha M + (1-\alpha-\beta)\Pi + \beta W\,,\ \alpha M + (1-\alpha-\beta)\Pi + \beta W) \\
&= \alpha^2 Q(M,M) + (1-\alpha-\beta)^2 Q(\Pi,\Pi) + \beta^2 Q(W,W) \\
&\quad + 2\left[\alpha(1-\alpha-\beta)Q(M,W) + \beta(1-\alpha-\beta)Q(W,\Pi) + \alpha\beta Q(M,W)\right] \\
&= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2)}{3}\,.
\end{aligned}$$

Nótese que:

α	β	$C_{\alpha,\beta}$	$\tau_{\alpha,\beta}$
1	0	M	1
0	1	W	-1
0	0	Π	0

3.6.14. Teorema. *Sea C una cópula. Entonces:*

$$\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\, dC(u,v) = \frac{1}{2} - \iint_{\mathbf{I}^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)\, du dv\,.$$

Demostración: Sean $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ dos particiones de $\mathbf{I}$ tales que

$$0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = 1 \quad \text{y} \quad 0 = v_0 < v_1 < \ldots < v_n = 1\,.$$

Definimos $\Delta u_i := u_i - u_{i-1}$ y $\Delta v_i := v_i - v_{i-1}$. Así, $\mathbf{I}^2$ queda particionado en mn rectángulos $R_{ij} := [u_{i-1}, u_i] \times [v_{i-1}, v_i]$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} - \iint_{\mathbf{I}^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)\, du dv = \ldots \\
&= \int_0^1 v\, dv - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\, du dv \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} v_j \Delta v_j \\
&\quad - \lim_{m,n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)}{\Delta u_i} \right] \left[\frac{C(u_{i-1}, v_j) - C(u_{i-1}, v_{j-1})}{\Delta v_j} \right] \Delta u_i \Delta v_j \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} v_j \Delta v_j - \lim_{m,n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [C(u_i, v_j) C(u_{i-1} v_j) - C(u_i, v_j) C(u_{i-1}, v_{j-1}) \\
&\qquad - C^2(u_{i-1}, v_j) + C(u_{i-1}, v_j) C(u_{i-1}, v_{j-1})]\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\, dC(u,v) &= \lim_{m,n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} C(u_i, v_j) V_C(R_{ij}) \\
&= \lim_{m,n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Big[\{C^2(u_i, v_j) - C(u_i, v_j) C(u_i, v_{j-1}) - C^2(u_{i-1}, v_j) \\
&\qquad + C(u_{i-1}, v_j) C(u_{i-1}, v_{j-1})\} - \{C(u_i, v_j) C(u_{i-1}, v_j) \\
&\qquad - C(u_i, v_j) C(u_{i-1}, v_{j-1}) - C^2(u_{i-1}, v_j) \\
&\qquad + C(u_{i-1}, v_j) C(u_{i-1}, v_{j-1})\} \Big]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \Big\{ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} [C^2(u_i,v_j) - C(u_i,v_j)C(u_i,v_{j-1})$$
$$- C^2(u_{i-1},v_j) + C(u_{i-1},v_j)C(u_{i-1},v_{j-1})]$$
$$- \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} [C(u_i,v_j)C(u_{i-1},v_j) - C(u_i,v_j)C(u_{i-1},v_{j-1})$$
$$- C^2(u_{i-1},v_j) + C(u_{i-1},v_j)C(u_{i-1},v_{j-1})] \Big\}$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \Big\{ T_{mn} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} [C(u_i,v_j)C(u_{i-1},v_j) - C(u_i,v_j)C(u_{i-1},v_{j-1})$$
$$- C^2(u_{i-1},v_j) + C(u_{i-1},v_j)C(u_{i-1},v_{j-1})] \Big\},$$

en donde T_{mn} representa la suma telescópica:

$$T_{mn} := \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \Big[C^2(u_i,v_j) - C(u_i,v_j)C(u_i,v_{j-1})$$
$$- C^2(u_{i-1},v_j) + C(u_{i-1},v_j)C(u_{i-1},v_{j-1}) \Big]$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \Big[(C^2(u_i,v_j) - C^2(u_{i-1},v_{j-1}))$$
$$- (C(u_i,v_j)C(u_i,v_{j-1}) - C(u_{i-1},v_j)C(u_{i-1},v_{j-1})) \Big]$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \Big[(C^2(1,v_j) - C^2(0,v_j)) - (C(1,v_j)C(1,v_{j-1}) - C(0,v_j)C(0,v_{j-1})) \Big]$$
$$= \sum_{j=1}^{m} [v_j^2 - v_j v_{j-1}] = \sum_{j=1}^{m} v_j \Delta v_j ,$$

por lo que

$$\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\, dC(u,v) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} v_j \Delta v_j \qquad \ldots$$
$$- \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{C(u_i,v_j) - C(u_{i-1},v_j)}{\Delta u_i} \right] \left[\frac{C(u_{i-1},v_j) - C(u_{i-1},v_{j-1})}{\Delta v_j} \right] \Delta u_i \Delta v_j ,$$

y por lo tanto

$$\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\, dC(u,v) = \frac{1}{2} - \iint_{\mathbf{I}^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)\, du dv .$$

□

El resultado anterior nos proporciona una forma altenativa para calcular la tau de Kendall, que resulta especialmente más fácil de calcular si se tiene que la cópula tiene tanto parte absolutamente continua como singular:

3.6.15. Corolario. *Sea C una cópula. Entonces:*

$$\tau_C = 1 - 4\iint_{\mathbf{I}^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)\, du dv\,.$$

Demostración: El resultado es inmediato a partir de los Teoremas 3.6.12 y 3.6.14. El Teorema 2.1.13 garantiza la existencia de las parciales de C. □

3.6.16. Ejemplo. En el Ejemplo 2.5.8 se vio que la familia de cópulas Marshall-Olkin tiene tanto parte absolutamente continua como singular:

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = u^{1-\alpha} v \mathbf{1}_{\{u^\alpha > v^\beta\}} + uv^{1-\beta} \mathbf{1}_{\{u^\alpha \leq v^\beta\}} \text{ con } \alpha, \beta \in]0,1[\,,$$

entonces

$$\frac{\partial C_{\alpha,\beta}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial C_{\alpha,\beta}(u,v)}{\partial v} = (1-\alpha) u^{1-2\alpha} v \mathbf{1}_{\{u^\alpha > v^\beta\}} + (1-\beta) uv^{1-2\beta} \mathbf{1}_{\{u^\alpha < v^\beta\}}\,,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha,\beta} &= 1 - 4\left\{ \iint_{\mathbf{I}^2 \cap \{u^\alpha > v^\beta\}} (1-\alpha) u^{1-2\alpha} v\, dudv + \iint_{\mathbf{I}^2 \cap \{u^\alpha < v^\beta\}} (1-\beta) uv^{1-2\beta}\, dudv \right\} \\
&= 1 - 4\left\{ \int_0^1 \int_{v^{\beta/\alpha}}^1 (1-\alpha) v u^{1-2\alpha}\, dudv + \int_0^1 \int_0^{v^{\beta/\alpha}} (1-\beta) v^{1-2\beta} u\, dudv \right\} \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} = S_{\alpha,\beta}(1,1)\,.
\end{aligned}$$

Ahora revisaremos otra medida de concordancia conocida como la ρ de Spearman:

3.6.17. Definición. *Sean $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ y (X_3, Y_3) tres vectores aleatorios independientes con función de distribución conjunta H, marginales F y G y cópula C. La ρ de Spearman se define como*

$$\rho = \rho_{XY} := 3\Big\{ P[\,(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[\,(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0] \Big\}\,,$$

es decir, la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia entre los vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_3).

Observación: Nótese que la función de distribución conjunta de (X_1, Y_1) es $H(x,y)$ mientras que la de (X_2, Y_3) es $F(x)G(y)$ ya que X_2 y Y_3 son variables aleatorias independientes. También, en la definición anterior da lo mismo utilizar el vector (X_3, Y_2) en vez de (X_2, Y_3).

3.6.18. Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces:*

$$\begin{aligned} \rho_{XY} = \rho_C &= 3Q(C,\Pi)\,, &(3.13)\\ &= 12\iint_{\mathbf{I}^2} uv\,dC(u,v) - 3\,, &(3.14)\\ &= 12\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\,du dv - 3\,. &(3.15) \end{aligned}$$

Demostración: Las expresiones anteriores se obtienen inmediatamente a partir de la Definición 3.6.17, el Teorema 3.6.7 y el Corolario 3.6.8(1). □

Observación: El coeficiente 3 en la Definición 3.6.17 es una constante de normalización para lograr que $\rho \in [-1, 1]$, ya que de acuerdo al Corolario 3.6.11 tenemos que $Q(C,\Pi) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Notación: Si C_θ pertenece a una familia paramétrica de cópulas escribiremos ρ_θ en vez de ρ_{C_θ}.

3.6.19. Ejemplo. Volviendo al caso de la familia de cópulas Marshall-Olkin (Ejemplo 3.6.16) tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{I}^2} C_{\alpha,\beta}\,d\Pi &= \int_0^1\int_{v^{\beta/\alpha}}^1 u^{1-\alpha} v\,du dv + \int_0^1\int_0^{v^{\beta/\alpha}} uv^{1-\beta}\,du dv\\ &= \frac{1}{2(2-\alpha)}\cdot\frac{2\alpha-\alpha\beta+2\beta-\alpha^2}{2\alpha-\alpha\beta+2\beta}\,, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\beta} &= \frac{6}{2-\alpha}\cdot\frac{2\alpha-\alpha\beta+2\beta-\alpha^2}{2\alpha-\alpha\beta+2\beta} - 3\\ &= \frac{3\alpha\beta}{2\alpha-\alpha\beta+2\beta}\,. \end{aligned}$$

Otra interpretación de la ρ de Spearman se puede obtener a partir de la segunda expresión en el Teorema 3.6.18:

$$\begin{aligned} \rho_{XY} = \rho_C &= 12\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\,du dv - 12(\frac{1}{4})\\ &= 12\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\,du dv - 12\iint_{\mathbf{I}^2} uv\,du dv\\ &= 12\iint_{\mathbf{I}^2} [C(u,v) - uv]\,du dv\,, &(3.16) \end{aligned}$$

es decir, ρ_C es proporcional al volumen signado entre las gráficas de C y Π en $\mathbf{I}^3$, esto es, una especie de "distancia promedio" entre la cópula de (X, Y) y la cópula que representa la independencia. La expresión anterior se parece mucho a la definición de la σ de Schweizer-Wolf salvo porque en este último caso tenemos la "distancia absoluta promedio".

A continuación mostramos un ejemplo en el que se define una relación de dependencia entre variables aleatorias que las medidas de concordancia antes mencionadas no detectan pero que las medidas de dependencia sí:

3.6.20. Ejemplo. Sea X una variable aleatoria continua uniforme en $[-1,1]$ y definimos la variable aleatoria $Y := |X|$. Sean F y G las funciones de distribución de X, Y, respectivamente, y sea H su función de distribución conjunta. Tenemos entonces que:

$$F(x) = \frac{x+1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,\infty[}(x) \quad , \quad G(y) = y\mathbf{1}_{[0,1]}(y) + \mathbf{1}_{]1,\infty[}(y)\,.$$

Obtendremos ahora la función de distribución conjunta H mediante (Laha, 1979):

$$H(x,y) = \int_{-\infty}^{x} F_{Y|X}(y|u)\, dF(u)\,,$$

en donde $F_{Y|X}(y|u) := P[Y \leq y | X = u] = \mathbf{1}_{[-y,y]}(u)\mathbf{1}_{]0,\infty[}(y)$. Al evaluar la integral obtenemos:

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} & \text{si} \quad 0 < y < 1\,, -y < x < y\,, \\ y & \text{si} \quad 0 < y < 1\,, x \geq y\,, \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si} \quad y \geq 1\,, -1 < x < 1\,, \\ 1 & \text{si} \quad y \geq 1\,, x \geq 1\,, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Mediante el Corolario 2.2.12 podemos obtener la cópula de X, Y calculando $C(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v))$, en donde $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ son cuasi-inversas de F y G, respectivamente, en el sentido de la Definición 2.2.10, y así obtenemos:

$$C(u,v) = \begin{cases} u - \dfrac{1-v}{2} & \text{si} \quad v \in \mathbf{I}\,, \frac{1-v}{2} \leq u \leq \frac{1+v}{2}\,, \\ v & \text{si} \quad v \in \mathbf{I}\,, u > \frac{1+v}{2}\,, \\ 0 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I}\,, u < \frac{1-v}{2}\,. \end{cases}$$

Ahora calcularemos la τ de Kendall, que puede obtenerse mediante el Corolario 3.6.15:

$$\tau_{X,Y} = 1 - 4\iint_{\mathbf{I}^2} \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\, dudv\,,$$

en donde

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ \frac{1-v}{2} < u < \frac{1+v}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ u > \frac{1+v}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ u < \frac{1-v}{2}, \end{cases}$$

y en donde

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ \frac{1-v}{2} < u < \frac{1+v}{2}, \\ 1 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ u > \frac{1+v}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ u < \frac{1-v}{2}, \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ \frac{1-v}{2} < u < \frac{1+v}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ u > \frac{1+v}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad v \in \mathbf{I},\ u < \frac{1-v}{2}. \end{cases}$$

Finalmente integramos y obtenemos

$$\tau_{X,Y} = 1 - 4\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\frac{1-v}{2}}^{\frac{1+v}{2}} du dv\right) = 0.$$

Así que a pesar de existir por definición una relación de dependencia entre las variables aleatorias X, Y tenemos que la τ de Kendall asigna en este caso particular el mismo valor que le asignaría a un par de variables aleatorias independientes. Lo mismo ocurre con la ρ de Spearman, que se puede calcular mediante el Teorema 3.6.18:

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= 12\iint_{\mathbf{I}^2} C(u,v)\, du dv - 3 \\ &= 12\left[\int_0^1 \int_{\frac{1-v}{2}}^{\frac{1+v}{2}} \left(u - \frac{1-v}{2}\right) du dv + \int_0^1 \int_{\frac{1+v}{2}}^{1} v\, du dv\right] - 3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

y se tiene para la ρ de Spearman el mismo comentario que para la τ de Kendall. Ahora verificaremos que la σ de Schweizer-Wolff no nos reporta un valor de cero:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{X,Y}}{12} &= \iint_{\mathbf{I}^2} |C(u,v) - uv|\, du dv \\ &= \iint_E [\, C(u,v) - uv\,]\, du dv + \iint_{\mathbf{I}^2 \setminus E} [\, uv - C(u,v)\,]\, du dv, \end{aligned}$$

en donde E es un subconjunto de $\mathbf{I}^2$ en donde se cumple que $C(u,v) \geq uv$, y por esta definición obtenemos de manera explícita que $E = [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1] \cup \{(0,0)\}$ y por lo tanto:

$$\frac{\sigma_{X,Y}}{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{2u-1}^{1}\Big(u - \frac{1-v}{2}\Big)\,dvdu + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{2u-1} v\,dvdu - \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{1} uv\,dvdu$$
$$+ \int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{1} uv\,dvdu - \int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{1-2u}^{1}\Big(u - \frac{1-v}{2}\Big)\,dvdu\,,$$

de donde se obtiene que $\sigma_{X,Y} = \frac{1}{2}$.

Continuando con la idea de construir medidas de dependencia para un par de variables aleatorias continuas X, Y mediante distancias L_p entre la cópula de las variables y la cópula producto (que representa la independencia) para $p = \infty$ tenemos la siguiente medida de dependencia, estudiada ampliamente en el caso multivariado por Fernández y González-Barrios (2000), definida por:

$$\lambda_{X,Y} := \sup_{u,v \in \mathbf{I}} |C_{X,Y}(u,v) - uv| \tag{3.17}$$

3.6.21. Teorema. *Sean las variables aleatorias continuas X, Y con cópula C_{XY}. Entonces $\lambda_{X,Y}$ dada por (3.17) es una medida de dependencia.*

Demostración:

1. $\lambda_{X,Y}$ está bien definida por el mismo argumento utilizado en el Teorema 3.6.2.

2. Utilizando el Corolario 2.2.12 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lambda_{X,Y} &= \sup_{u,v \in \mathbf{I}} |C_{XY}(u,v) - uv| \\
&= \sup_{u,v \in \mathbf{I}} |H_{XY}(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) - uv| \\
&= \sup_{u,v \in \mathbf{I}} |P[X \leq F^{(-1)}(u), Y \leq G^{(-1)}(v)] - uv| \\
&= \sup_{v,u \in \mathbf{I}} |P[Y \leq G^{(-1)}(v), X \leq F^{(-1)}(u)] - vu| \\
&= \sup_{v,u \in \mathbf{I}} |H_{YX}(G^{(-1)}(v), F^{(-1)}(u)) - vu| \\
&= \sup_{v,u \in \mathbf{I}} |C_{YX}(v,u) - vu| \\
&= \lambda_{Y,X}\,.
\end{aligned}$$

3. Del Teorema 3.6.2 tenemos que para todo (u,v) en $\mathbf{I}^2$ se cumple $0 \leq |C_{XY}(u,v) - uv| \leq \max\{M(u,v) - uv, uv - W(u,v)\}$ lo cual de entrada garantiza que $\lambda_{X,Y} \geq 0$. Sean $\alpha(u,v) := M(u,v) - uv$ y

$\beta(u,v) := uv - W(u,v)$. Entonces:

$$\alpha(u,v) = \begin{cases} u(1-v) & \text{si} \quad v > u\,, \\ v(1-u) & \text{si} \quad v \le u\,. \end{cases}$$

En principio tenemos que el campo vectorial gradiente $\nabla\alpha = \{(\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial v}) : u, v \in \mathbf{I}\}$ apunta en dirección de la diagonal principal lo que indica que $\alpha(u,v)$ crece más rápidamente conforme nos aproximamos a la recta $v = u$ y por la continuidad uniforme de las cópulas sólo queda averiguar en qué punto de la diagonal principal α alcanza un máximo, esto es, para $\alpha(u,u) = u(1-u)$ tenemos que alcanza un único máximo en $u = \frac{1}{2}$ y por tanto $M(u,v) - uv \le \frac{1}{4}$. De manera análoga se ve que el campo vectorial gradiente $\nabla\beta$ apunta en dirección de la diagonal secundaria $v = 1-u$ y se obtiene también que $uv - W(u,v) \le \frac{1}{4}$ y por lo tanto concluimos que $0 \le \lambda_{X,Y} \le \frac{1}{4}$.

4. Si X, Y son independientes entonces $C_{XY} = \Pi$ (por Teorema 2.3.2) y por lo tanto $\lambda_{X,Y} = 0$. En sentido inverso, si $\lambda_{X,Y} = 0$ entonces $|C_{XY}(u,v) - uv| = 0$ para todo (u,v) en $\mathbf{I}^2$ y en consecuencia $C_{XY} = \Pi$ y por el Teorema 2.3.2 concluimos que X, Y son independientes.

5. Por el Teorema 2.3.3 tenemos que $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{XY}$ y como λ se define sólo en términos de la cópula concluimos que $\lambda_{\alpha(X),\beta(Y)} = \lambda_{X,Y}$, para α y β estrictamente crecientes en $Ran\,X$ y $Ran\,Y$, respectivamente.

Por todo lo anterior concluimos que $\lambda_{X,Y}$ es medida de dependencia. □

3.6.22. Ejemplo. Continuando con el Ejemplo 3.6.20 tenemos que:

$$\nabla|C(u,v) - uv| = \begin{cases} (v,u) & \text{si} \quad 0 < v < 1-2u\,, \\ (v-1, u-\frac{1}{2}) & \text{si} \quad 1-2u < v < \frac{1}{2} \\ (1-v, \frac{1}{2}-u) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < v < 2u-1 \\ (-v, 1-u) & \text{si} \quad 2u-1 < v < 1\,, \end{cases}$$

de donde se tiene que el campo vectorial gradiente $\nabla|C - \Pi|$ apunta en dirección de las rectas $v = 1-2u$ y $v = 2u-1$. Por un lado tenemos que $|C(u, 1-2u) - u(1-2u)| = u(1-2u)$ alcanza un máximo de $\frac{1}{8}$ con $u = \frac{1}{4}$, y por otro lado tenemos que $|C(u, 2u-1) - u(2u-1)| = (2u-1)(1-u)$ alcanza un máximo de $\frac{1}{8}$ con $u = \frac{3}{4}$, así que $\lambda_{X,Y} = \frac{1}{8}$.

Podemos extender el concepto de medida de dependencia de la Definición 3.6.1 al caso n-dimensional por medio de la siguiente:

3.6.23. Definición. *Una medida de dependencia para n variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ es un número que denotaremos $\delta_{X_1,\ldots,X_n}$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\delta_{X_1,\ldots,X_n}$ *está definida para todo vector aleatorio* $(X_1,\ldots,X_n)$.

2. $\delta_{X_1,\ldots,X_n} = \delta_{X_{\gamma(1)},\ldots,X_{\gamma(n)}}$ *para cualquier permutación* γ *sobre el conjunto* $J_n := 1,\ldots,n$.

3. $0 \leq \delta_{X_1,\ldots,X_n} \leq k$, *para algún* $k > 0$.

4. $\delta_{X_1,\ldots,X_n} = 0$ *si y sólo si* $X_1,\ldots,X_n$ *son independientes.*

5. *Si* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *son funciones estrictamente crecientes en* $Ran\, X_1,\ldots, Ran\, X_n$, *respectivamente, entonces* $\delta_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)} = \delta_{X_1,\ldots,X_n}$.

6. $0 \leq \delta_{X_1,X_2} \leq \delta_{X_1,X_2,X_3} \leq \cdots \leq \delta_{X_1,\ldots,X_{n-1}} \leq \delta_{X_1,\ldots,X_n}$.

En particular se pide que la propiedad 6 se cumpla porque para un determinado grado de dependencia de las variables aleatorias $X_1,\ldots,X_m$ no tendría mucho sentido, desde un punto de vista probabilístico, que el añadir una variable aleatoria X_{m+1} provoque una disminución en el grado de dependencia entre las variables $X_1,\ldots,X_m,X_{m+1}$; esto es, en el peor de los casos si X_{m+1} es independiente de $X_1,\ldots,X_m$ pedimos tener que $\delta_{X_1,\ldots,X_m} = \delta_{X_1,\ldots,X_m,X_{m+1}}$.

Fernández y González-Barrios (2000) proponen dos medidas de dependencia entre variables aleatorias, una de las cuales es factible expresarla en términos de cópulas si las variables aleatorias son continuas, y dicha medida es la siguiente:

$$\delta_{X_1,\ldots,X_n} := \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \left|F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) - \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)\right|, \tag{3.18}$$

en donde $F_{X_1,\ldots,X_n}$ es la función de distribución conjunta de $X_1,\ldots,X_n$ y F_{X_i} es la función de distribución de X_i , para $i = 1,\ldots,n$. El siguiente teorema es también un resultado de Fernández y González-Barrios (2000):

3.6.24. Teorema. *Sea el vector aleatorio* n*-dimensional* $(X_1,\ldots,X_n)$. *Entonces* $\delta_{X_1,\ldots,X_n}$ *dada por (3.18) es una medida de dependencia.*

Demostración:

1. $\delta_{X_1,\ldots,X_n}$ está bien definida para cualquier vector aleatorio $(X_1,\ldots,X_n)$ por la existencia y unicidad de la función de distribución conjunta $F_{X_1,\ldots,X_n}$ y de las funciones de distribución F_{X_i} , para $i = 1,\ldots,n$.

2. Sea γ una permutación sobre $I_n := \{1,\ldots,n\}$. Como

$$\begin{aligned} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) &= P[\,X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n\,] \\ &= P[\,X_{\gamma(1)} \leq x_{\gamma(1)},\ldots,X_{\gamma(n)} \leq x_{\gamma(n)}\,] \\ &= F_{X_{\gamma(1)},\ldots,X_{\gamma(n)}}(x_{\gamma(1)},\ldots,x_{\gamma(n)}) \end{aligned}$$

y además $\prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n F_{X_{\gamma(i)}}(x_{\gamma(i)})$ tenemos entonces que $\delta_{X_1,\ldots,X_n} = \delta_{X_{\gamma(1)},\ldots,X_{\gamma(n)}}$.

3. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales cualesquiera y definimos la sucesión finita de subconjuntos de $\mathbf{R}$: $A_i :=]-\infty, x_i\,]$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\delta_{X_1,\ldots,X_n} = \sup_{A_i \subset \mathbf{R};\, i=1,\ldots,n} |\, P[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in A_i\}\,] - \prod_{i=1}^{n} P[\{X_i \in A_i\}\,]\,| \,.$$

Para simplificar un poco la notación definimos $\alpha_i := P[\{X_i \in A_i\}\,]$ y $B_i := \{X_i \in A_i\}$, para $i = 1, \ldots, n$ y $n \geq 2$, así como $\alpha := \text{mín}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Entonces

$$\delta_{X_1,\ldots,X_n} = \sup_{A_i \subset \mathbf{R};\, i=1,\ldots,n} = |\, P[\bigcap B_i\,] - \prod \alpha_i,|\,. \tag{3.19}$$

Como $P[\bigcap B_i\,] \leq P[B_i\,]$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y también $\prod \alpha_i \geq \alpha^n$ tenemos que $P[\bigcap B_i\,] - \prod \alpha_i \leq \alpha - \alpha^n$, por lo que

$$P[\bigcap B_i\,] - \prod \alpha_i \leq \sup\{\alpha - \alpha^n : \alpha \in [0, 1\,]\}\,.$$

Derivando la función $\varphi(\alpha) := \alpha - \alpha^n$ encontramos que $\varphi(\alpha)$ alcanza un máximo de $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}(1 - \frac{1}{n})$, así que

$$P[\bigcap B_i\,] - \prod \alpha_i \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{3.20}$$

Ahora sea $\beta := \sum \alpha_i$, entonces necesariamente $0 \leq \beta \leq n$. Supongamos primero que $\beta > n - 1$. Por la desigualdad de Boole tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} P[B_i^c\,] \geq P[\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c\,],$$

$$n - \sum_{i=1}^{n} P[B_i^c\,] \leq n - P[\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c\,],$$

$$\sum P[B_i\,] \leq n - (1 - P[\bigcap B_i\,]),$$

$$\beta \leq n - 1 + P[\bigcap B_i\,],$$

$$P[\bigcap B_i\,] - \prod \alpha_i \geq \beta - (n-1) - \prod \alpha_i\,.$$

Para $0 \leq \beta \leq n-1$ no se puede mejorar más allá de $P[\bigcap] - \prod \alpha_i \geq -\prod \alpha_i$ porque $\beta - (n-1) \leq 0$. De lo anterior se tiene que

$$P[\bigcap B_i\,] - \prod \alpha_i \geq \begin{cases} -\prod \alpha_i & \text{si} \quad 0 \leq \beta \leq n-1 \\ \beta - (n-1) - \prod \alpha_i & \text{si} \quad n - 1 < \beta \leq n\,. \end{cases}$$

Utilizando la desigualdad que relaciona a las medias geométrica y aritmética, esto es $\left(\prod \alpha_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\beta}{n}$, para el caso en que $0 \leq \beta \leq n-1$ tenemos que

$$\prod \alpha_i \leq \left(\frac{\beta}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

y por lo tanto

$$P[\bigcap B_i] - \prod \alpha_i \geq -\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

En caso de que $n-1 < \beta \leq n$ tenemos

$$\beta - (n-1) - \prod \alpha_i \geq \beta - (n-1) - \left(\frac{\beta}{n}\right)^n =: g(\beta),$$

de donde $g'(\beta) = 1 - (\frac{\beta}{n})^{n-1} \geq 0$, ya que $\frac{\beta}{n} \leq 1$, lo que significa que $g(\beta)$ es monótona creciente en $n-1 < \beta \leq n$, y como $g(n-1) = -(\frac{n-1}{n})^n$ entonces

$$P[\bigcap B_i] - \prod \alpha_i \geq -(\frac{n-1}{n})^n. \tag{3.21}$$

De (3.20) y (3.21) obtenemos

$$-\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq P[\bigcap B_i] - \prod \alpha_i \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right), \tag{3.22}$$

y combinando lo anterior con (3.19) obtenemos

$$\delta_{X_1,\ldots,X_n} \leq \max\left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}. \tag{3.23}$$

Las sucesiones $\{(\frac{n-1}{n})^{n-1}\}$ y $\{(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}\}$ son decreciente la primera, y creciente la segunda, además de ser iguales para $n=2$, lo que implica que $(\frac{n-1}{n})^{n-1} \leq (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$, es decir

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

y sustituyendo lo anterior en (3.23) obtenemos

$$0 \leq \delta_{X_1,\ldots,X_n} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1, \tag{3.24}$$

es decir, $\delta_{X_1,\ldots,X_n}$ está acotada.

4. Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes entonces $F_{X_1,\ldots,X_n} = \prod_{i=1}^n F_{X_i}$ y por lo tanto $\delta_{X_1,\ldots,X_n} = 0$. En sentido inverso, si $\delta_{X_1,\ldots,X_n} = 0$ entonces $|F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) - \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)| = 0$ para todo $(x_1,\ldots,x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ lo que implica que $F_{X_1,\ldots,X_n} = \prod_{i=1}^n F_{X_i}$ y por lo tanto $X_1,\ldots,X_n$ son independientes.

5. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ funciones estrictamente crecientes en $Ran\, X_1, \ldots, Ran\, X_n$, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)} &= \sup_{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{R}^n} \left|F_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}(y_1,\ldots,y_n) - \prod_{i=1}^{n} F_{\alpha_i(X_i)}(y_i)\right| \\
&= \sup_{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{R}^n} \left|P[\alpha_1(X_1)\le y_1,\ldots,\alpha_n(X_n)\le y_n] - \prod_{i=1}^{n} P[\alpha_i(X_i)\le y_i]\right| \\
&= \sup_{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{R}^n} \left|P[X_1\le \alpha_1^{-1}(y_1),\ldots,X_n\le \alpha_n^{-1}(y_n)] - \prod_{i=1}^{n} P[X_i\le \alpha_i^{-1}(y_i)]\right| \\
&= \sup_{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{R}^n} \left|F_{X_1,\ldots,X_n}(\alpha_1^{-1}(y_1),\ldots,\alpha_n^{-1}(y_n)) - \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(\alpha_i^{-1}(y_i))\right| \\
&= \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n} \left|F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) - \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)\right| \\
&= \delta_{X_1,\ldots,X_n}\,.
\end{aligned}$$

6. Sea $\Delta(x_1,\ldots,x_i) := F_{X_1,\ldots,X_i}(x_1,\ldots,x_i) - \prod_{j=1}^{i} F_{X_j}(x_j)$, para $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Como $\Delta(x_1,\ldots,x_i) = \Delta(x_1,\ldots,x_i,\infty)$ entonces

$$\begin{aligned}
\delta_{X_1,\ldots,X_i} &= \sup_{(x_1,\ldots,x_i)\in\mathbf{R}^i} |\Delta(x_1,\ldots,x_i)| \\
&= \sup_{(x_1,\ldots,x_i,\infty)\in\mathbf{R}^{i+1}} |\Delta(x_1,\ldots,x_i,\infty)| \\
&\le \sup_{(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1})\in\mathbf{R}^{i+1}} |\Delta(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1})| \\
&\le \delta_{X_1,\ldots,X_i,X_{i+1}}\,.
\end{aligned}$$

Por todo lo anterior concluimos que $\delta_{X_1,\ldots,X_n}$ es una medida de dependencia. $\square$

3.6.25. Corolario. *Con los supuestos y resultados del Teorema 3.6.24 anterior:*

1. *Las cotas en (3.22) no pueden mejorarse.*
2. *Sean las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$. Si X_{n+1} es independiente de $(X_1, \ldots, X_n)$ entonces $\delta_{X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}} = \delta_{X_1,\ldots,X_n}$.*
3. *Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sean n subconjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n$. Si definimos las varibles aleatorias $X_i := \mathbf{1}_{A_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces*

$$\delta_{X_1,\ldots,X_n} = \max |F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(0,0,\ldots,0) - \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}(0)|,$$

en donde el máximo se toma de entre todas las posibles elecciones de $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, con $2 \leq k \leq n$.

Demostración:

1. De (3.22) tenemos que

$$-\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n \leq F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) - \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \leq \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big(1-\frac{1}{n}\Big).$$

Sea X una variable aleatoria uniforme en $]\,0,1\,[$ y sean las variables aleatorias $X_i := \mathbf{1}_{\{X \in \,]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}[\}}$, para $i = 1, \ldots, n$. En este caso

$$\begin{aligned} F_{X_1,\ldots,X_n}(0,0,\ldots,0) &= P[\,X_1 \leq 0, \ldots, X_n \leq 0\,] \\ &= P[\,X_1 = 0, \ldots, X_n = 0\,] \\ &= P[\bigcap_{i=1}^{n}\{X \in \,]\,0, \frac{i-1}{n}\,] \cup [\,\frac{i}{n}, 1\,[\,\}\,] = P[\emptyset] = 0, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(0) &= \prod_{i=1}^{n} P[\,X_i = 0\,] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P[\bigcap_{i=1}^{n}\{X \in \,]\,0, \frac{i-1}{n}\,] \cup [\,\frac{i}{n}, 1\,[\,\}\,] \\ &= \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(0,0,\ldots,0) - \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(0) = -\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n,$$

es decir, en este caso particular se alcanza la cota inferior y por ello no puede ser mejorada.
Ahora sean $X_1 := X_2 := \ldots := X_n := X$, con X una variable aleatoria uniforme en $]\,0,1\,[$. Definiendo $x_0 := (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}} \in\,]\,0,1\,[$ tenemos que $F_X(x_0) = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ y entonces

$$\begin{aligned} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_0,x_0,\ldots,x_0) - \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_0) &= \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

y así alcanzamos la cota superior, y por lo tanto no puede ser mejorada.

2. Si X_{n+1} es independiente de $X_1,\ldots,X_n$ entonces para cualesquiera $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}$ en $\mathbf{R}$ se tiene que

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = P[\,X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n\,]P[X_{n+1} \leq x_{n+1}] - \prod_{i=1}^{n+1} P[\,X_i \leq x_i\,],$$

de donde obtenemos

$$|\Delta(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})| = P[\,X_{n+1} \leq x_{n+1}\,]|\Delta(x_1,\ldots,x_n)| \leq |\Delta(x_1,\ldots,x_n)|,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \delta_{X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}} &= \sup_{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}} |\Delta(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})| \\ &\leq \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n} |\Delta(x_1,\ldots,x_n)| = \delta_{X_1,\ldots,X_n}, \end{aligned}$$

pero del Teorema 3.6.24 (6) tenemos que $\delta_{X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}} \geq \delta_{X_1,\ldots,X_n}$, por lo que concluimos que $\delta_{X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}} = \delta_{X_1,\ldots,X_n}$.

3. Por la definición de las X_i tenemos que

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < 0, \\ 1 - P[\,A_i\,] & \text{si } \; 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } \; x \geq 1, \end{cases}$$

de donde obtenemos

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) - \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) = F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(0,0,\ldots,0) - \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}(0),$$

donde los índices i_j corresponden a aquellas x_i tales que $x_i = 0$, ya que $F_{X_i}(1) = 1$ y la función de distribución conjunta $F_{X_1,\ldots,X_n}$ se marginaliza para aquellas $x_i = 1$, y por lo tanto se tiene que

$$\delta_{X_1,\ldots,X_n} = \text{máx}\,|F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(0,0,\ldots,0) - \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}(0)|,$$

en donde el máximo se toma de entre todas las posibles elecciones de $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, con $2 \le k \le n$.

□

Finalmente, tenemos el siguiente resultado inmediato que nos permite calcular la $\delta_{X_1,\ldots,X_n}$ anterior en términos de cópulas:

3.6.26. Corolario. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas con cópula C. Entonces*

$$\delta_{X_1,\ldots,X_n} = \sup_{(u_1,\ldots,u_n)\in I^n} |C(u_1, \ldots, u_n) - \prod_{i=1}^{n} u_i|$$

Demostración: Por Teorema 2.7.30 (Sklar). □

Conclusiones

De entre los distintos enfoques para el estudio de la dependencia entre variables aleatorias, las cópulas resultan ser una herramienta valiosa para la consecución de este fin. Las cópulas fueron definidas formalmente para el caso n-dimensional por A. Sklar en 1959, y el desarrollo que tuvieron durante sus primeros treinta años lo resume Schweizer(1991) así como el libro publicado por Schweizer y Sklar (1983). Es importante resaltar que desde la definición misma de cópula hasta llegar a uno de los resultados más importantes como lo es el *Teorema de Sklar* (Teoremas 2.2.9 y 2.7.30 en este trabajo) son válidos aún sin hablar en términos probabilísticos, incluyendo la definición que se hace de funciones de distribución (Definiciones 2.2.1, 2.2.4 y 2.7.27) como lo menciona R.B. Nelsen (1999) "... Nótese que nada hay de probabilístico en estas definiciones. No se hace referencia a variables aleatorias ni a continuidad por la derecha o por la izquierda..." En pocas palabras, se trata de definiciones más generales y como menciona el mismo autor un poco más adelante "... Así que los resultados que se obtengan para dichas funciones de distribución serán válidos aún cuando se hable de variables aleatorias..."

En el mismo año en que Sklar introdujo la noción general de cópula, A. Rényi (1959) propuso una serie de axiomas o condiciones "razonables" que a su juicio debiera cumplir cualquier medida de dependencia no paramétrica. Sin embargo, Schweizer y Wolff (1981) y Wolff (1981) pusieron en evidencia que los requerimientos de los axiomas de Rényi eran demasiado fuertes para las medidas de dependencia conocidas hasta el momento y propusieron una versión menos exigente de los axiomas de Rényi junto con una medida de dependencia que cumple con este nuevo conjunto de propiedades "deseables", ahora conocida como la σ de Schweizer y Wolff (Teorema 3.6.2 en este trabajo). Uno de estos axiomas pide que una medida de dependencia entre variables aleatorias sea igual a cero si y sólo si se trata de variables aleatorias independientes, y esto deja automáticamente fuera de consideración a las medidas de concordancia, entre las que se pueden destacar la τ de Kendall y la ρ de Spearman, entre otras, que como se ilustra en el Ejemplo 3.6.20 del presente trabajo arrojan un valor de cero ante un caso de dependencia entre dos variables aleatorias, y asignan por igual el mismo valor cero a un par de variables aleatorias independientes. Esto fortalece la propuesta que viene desde Rényi (1959) de pedir que una medida de dependencia sea igual a cero sólo en el caso de independencia. Sin embargo, hoy en día se sigue utilizando medidas de concordancia para el estudio de la dependencia porque en realidad no se tiene aún un consenso respecto a lo que debe cumplir o cómo debe definirse una medida de dependencia. En el presente trabajo nos sumamos a la propuesta de que una medida de dependencia sea igual a cero sólo en el caso de independencia, mas no a la propuesta de Schweizer y Wolff (1981) respecto a que la medida de dependencia sea igual a 1 si y sólo si una variable es función estrictamente monótona de la otra. En primer lugar, pedir que una medida de dependencia tome valores en el intervalo $[0, 1]$ es convencional, no habría esencialmente problema alguno en utilizar algún otro intervalo cerrado y acotado, por ejemplo $[0, k]$ para algún $k > 0$, como se propone en la Definición 3.6.1, reservando el valor cero únicamente para el caso de independencia. Lo que es discutible es que como extremo opuesto a la independencia se proponga a la dependencia estrictamente monótona.

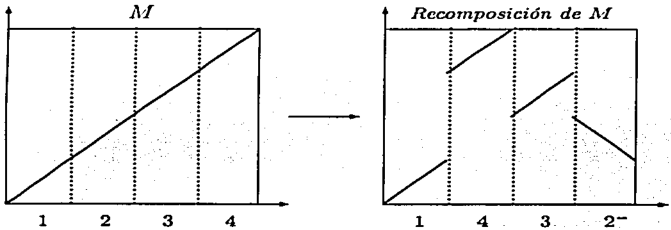
Este y otros aspectos siguen discutiéndose y mientras tanto distintos autores manejan distintas definiciones de lo que debe ser una medida de dependencia. En el presente trabajo se optó por no conceder necesariamente la mayor importancia a la dependencia estrictamente monótona y se propone una definición más flexible (Definición 3.6.1).

En el caso de variables aleatorias continuas las cópulas nos facilitan el camino hacia la construcción de medidas de dependencia, al margen de que algún día se tenga un consenso acerca de lo que debe satisfacer o no una medida de dependencia. Esto gracias a que se tiene una única cópula que caracteriza la independencia (Π) y las distintas maneras de medir de algún modo qué tan independiente o qué tan dependiente es un conjunto de n variables aleatorias continuas son tantas como maneras distintas se nos ocurra medir la distancia entre la cópula n-dimensional que representa a dichas variables y la cópula producto Π. Y muy importante también es destacar que las medidas de dependencia que se calculan en términos de funciones de distribución no cambian si se calculan en términos de cópulas.

Pero volviendo a la discusión de lo que podría considerarse como el extremo opuesto de la independencia, Lancaster (1963) establece que dos variables aleatorias X, Y son *completamente dependientes* si existe una función uno a uno φ tal que $P[Y = \varphi(X)] = 1$, esto es, si X, Y son casi seguramente funciones invertibles una de la otra. Kimeldorf y Sampson (1978) señalan que la dependencia completa implica la posibilidad de predecir cualquiera de las variables en términos de la otra mientras que la independencia implica imposibilidad total de predicción. Sin embargo, existe un resultado que demuestra que existen variables aleatorias completamente dependientes cuya función conjunta de distribución se aproxima tanto como queramos a la función de distribución conjunta de variables aleatorias independientes con las mismas marginales. En el Ejemplo 2.3.14 se vio que el soporte de la cópula M es la diagonal principal de $\mathbf{I}^2$. Definiremos lo que se conoce como una *recomposición* (*shuffle* en inglés) de M. El soporte de una *recomposición de M* es descrito informalmente por Mikusiński, Sherwood y Taylor (1992) como sigue:

"La distribución de masa para una recomposición de M se puede obtener (1) colocando la masa de M en $\mathbf{I}^2$, (2) haciendo un número finito de cortes verticales a $\mathbf{I}^2$ generando así un número finito de rectángulos, (3) generando una permutación de dichos rectángulos y posiblemente girando algunos de ellos 180 grados sobre su eje vertical y (4) colocando los rectángulos de regreso en $\mathbf{I}^2$. La distribución de masa resultante corresponderá a un cópula llamada *recomposición de M*".

Esquemáticamente un ejemplo de lo anterior quedaría como sigue:



Formalmente (Nelsen, 1999), una *recomposición de M* está determinada por un entero positivo n, una partición finita $\{J_i\} = \{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$ de $\mathbf{I}$ en n subintervalos cerrados, una permutación γ sobre el conjunto $S_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ y una función $\omega : S_n \to \{-1, 1\}$ tal que $\omega(i) = -1$ si el rectángulo correspondiente $J_i \times \mathbf{I}$ es girado sobre su eje y $\omega(i) = 1$ en caso contrario. Denotamos las permutaciones por medio del vector $(\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(n))$. La *recomposición de M* resultante queda determinada y denotada por $M(n, \{J_i\}, \gamma, \omega)$. Nótese que en particular si γ es la permutación identidad y $\omega \equiv 1$ entonces $M(n, \{J_i\}, \gamma, \omega) = M$. El resultado a considerar es el siguiente:

Teorema. *Para toda $\varepsilon > 0$ existe una recomposición de M, que denotamos C_ε, tal que*

$$\sup_{u,v \in \mathbf{I}} |C_\varepsilon(u,v) - \Pi(u,v)| < \varepsilon\,. \tag{3.25}$$

Demostración: Sea m un entero tal que $m \geq 4/\varepsilon$. Entonces, por el Teorema 2.1.10, para toda cópula C y para $u, v, s, t \in \mathbf{I}$ tenemos que

$$|C(u,v) - C(s,t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad |u - s| < \frac{1}{m}\,,\ |v - t| < \frac{1}{m}\,.$$

El entero m determina a C_ε, una recomposición de M, de la siguiente manera: Sea $n = m^2$ y sea $\{J_i\}$ una partición de $\mathbf{I}$ en n subintervalos de igual longitud. Sea γ la permutación de S_n dada por $\gamma(m(j-1)+k) := m(k-1)+j$ para $k, j = 1, 2, \ldots, m$. Para una ω arbitraria definimos $C_\varepsilon := M(n, \{J_i\}, \gamma, \omega)$ (el efecto de esta permutación es redistribuir la masa de probabilidades de M de modo que se tenga una masa $1/n$ en cada uno de los n subcuadrados de $\mathbf{I}^2$). Como

$$V_{C_\varepsilon}([0, p/m] \times [0, q/m]) = V_\Pi([0, p/m] \times [0, q/m]) = \frac{pq}{n},$$

para $p, q = 0, 1, \ldots, m$, entonces se tiene que $C_\varepsilon(p/m, q/m) = \Pi(p/m, q/m)$ también para $p, q = 0, 1, \ldots, m$. Ahora sea (u, v) un punto en $\mathbf{I}^2$. Entonces existe un par de enteros $(p, q) \in \{0, 1, \ldots, m\}$ tales que $|u - \frac{p}{m}| < \frac{1}{m}$ y $|v - \frac{q}{m}| < \frac{1}{m}$ y por ello

$$\begin{aligned} |C_\varepsilon(u, v) - \Pi(u, v)| &\leq |C_\varepsilon(u, v) - C_\varepsilon(p/m, q/m)| \\ &\quad + |C_\varepsilon(p/m, q/m) - \Pi(p/m, q/m)| \\ &\quad + |\Pi(p/m, q/m) - \Pi(u, v)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Mikusiński, Sherwood y Taylor (1991) señalan que el resultado anterior tiene como consecuencia que el comportamiento de cualquier par de variables aleatorias continuas e independientes puede ser aproximado tanto como se quiera mediante una par de variables aleatorias completamente dependientes! Más aún, por medio de un argumento similar Mikusiński, Sherwood y Taylor (1991) demuestran que el resultado anterior se puede generalizar al caso en que la cópula Π puede ser reemplazada por cualquier cópula, esto es, si C es una cópula entonces C puede ser aproximada tanto como se quiera por la cópula C_ε y, en consecuencia, las recomposiciones (*shuffles*) de M son *densas* en el conjunto de todas las cópulas bajo la norma supremo, como en el resultado (3.25). Tenemos así la posibilidad de construir una sucesión de pares de variables aleatorias cuyo comportamiento límite es *independencia* pero que en cada paso del proceso límite cada componente de cada par de variables aleatorias de dicha sucesión es casi seguramente función invertible de la otra. Esto hace discutible también la definición de Lancaster (1963) de *completa dependencia* y la pretensión de que dicha definición es el extremo opuesto de *independencia* . Esto recuerda la añeja discusión sobre el *determinismo*[1], postura filosófica particularmente defendida por Laplace[2] en el siglo XVIII que establece que todos los eventos están completamente determinados y que *aleatoriedad* vendría a ser una especie de eufemismo que en realidad habla de nuestra imposibilidad o incapacidad (posiblemente temporal) de explicar un comportamiento de manera determinista. El resultado (3.25) anterior pareciera sugerir, desde un punto de vista determinista, que aquello que pretendemos llamar *independencia* podría ser en ocasiones

[1] Véase The New Encyclopædia Britannica, Ready Reference (1998), Vol.4, p.39 .
[2] Véase Encyclopedia of Statistical Sciences (1982), Vol.1, pp.405-411 .

incapacidad de encontrar algún tipo de relación. En fin, el tema de la *dependencia* entre variables aleatorias, cómo definirla y medirla, tiene aún mucho camino por delante.

Queda pendiente trabajar también sobre el caso de variables aleatorias discretas porque por el Teorema de Sklar (Teoremas 2.2.9 y 2.7.30) tenemos que existe una cópula para tales variables pero no es necesariamente única. Como lo discute y ejemplifica Joe (1997), un ejemplo de una cópula n-dimensional para el caso puramente discreto es el siguiente: Sea $\{x_{j,i_j}\}$ el conjunto de puntos que conforma el soporte de la j-ésima marginal, donde i_j pertenece al conjunto índice ordenado D_j, $j = 1, \ldots, m$. Supongamos que cada D_j es una sucesión consecutiva de enteros. Sean $F_j(i_j)$ y $f_j(i_j)$ la función de distribución y de masa de probabilidades de la j-ésima marginal, respectivamente. Sean $H(i_1, \ldots, i_m)$ y $h(i_1, \ldots, i_m)$ la función de distribución conjunta y la función de masa de probabilidades conjunta, respectivamente. Por el Teorema de Sklar (Teorema 2.7.30), una cópula C asociada a H debe satisfacer, en principio, lo siguiente:

$$H(i_1, \ldots, i_m) = C(F_1(i_1), \ldots, F_m(i_m)) \qquad , \ (i_1, \ldots, i_m) \in D_1 \times \cdots \times D_m \, .$$

Como C debe quedar definida en todo $\mathbf{I}^2$, falta definir a C en $\mathbf{I}^2 \setminus \prod_{j=1}^{m} D_j$. Joe (1997) propone definir a C uniforme en el m-rectángulo $\prod_{j=1}^{m} [\, F_j(i_j - 1), F_j(i_j)\,]$, es decir, la función de densidad multivariada de probabilidades de C en este rectángulo es $h(i_1, \ldots, i_m) / \prod_{j=1}^{m} f_j(i_j)$; sin embargo, como el mismo Joe lo comenta, no es la única manera de definir a C en $\mathbf{I}^2 \setminus \prod_{j=1}^{m} D_j$. Este es otro problema en el que hay trabajo por hacer.

Bibliografía

Bartle (1987). *Introducción al Análisis Matemático*, Ed. Limusa (México).

Clarke, L.E. (1975). *Random Variables*, Longman.

Dudley, R.M. (1989). *Real Analysis and Probability*, Ed. Chapman & Hall (Nueva York).

Fernández, B., González-Barrios, J.M. (2000). Multidimensional dependency measures. *Publicaciones IIMAS-UNAM*.

Hoeffding, W. (1940). Masstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Matematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin* **5**, 179-223.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, Ed. Chapman & Hall (Londres).

Kimeldorf, G., Sampson, A. (1978). Monotone dependence. *Ann. Statist.* **6**, 895-903.

Laha, R.G., Rohatgi, V.K. (1979). *Probability Theory*, Ed. John Wiley & Sons (Nueva York).

Lancaster, H.O. (1963). Correlation and complete dependence of random variables. *Ann. Math. Statist.* **34**, 1315-1321.

Lehman, E.L. (1966). Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1137-1153.

Mikusiński, P., Sherwood, H., Taylor, M.D. (1991). The Fréchet bounds revisited. *Real Anal. Exchange* **17**, 759-764.

Mikusiński, P., Sherwood, H., Taylor, M.D. (1992). Shuffles of Min. *Stochastica* **13**, 61-74.

Nelsen, R. (1999). *An introduction to copulas*, Ed. Springer-Verlag (Nueva York).

Rényi, A. (1959). On measures of dependence. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* **10**, 441-451.

Schweizer, B. (1991). Thirty years of Copulas. *Advances in Probability Distributions with Given Marginals*, 13-50.

Schweizer, B., Sklar, A. (1983). *Probabilistic Metric Spaces*, Ed. North-Holland (Nueva York).

Schweizer, B., Wolff, E.F. (1981). On nonparametric measures of dependence for random variables. *Ann. Statist.* **9**, 870-885.

Shea, G.A. (1983). Hoeffding's lemma. *Encyclopedia of Statistical Sciences* **3**, 648-649.

Wolff, E.F. (1981). N-dimensional measures of dependence. *Stochastica* **4**, 175-188.