

879316

UNIVERSIDAD LASALLISTA BENAVENTE 3

=====

ESCUELA DE INGENIERIA EN COMPUTACION

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
CLAVE 8793-16

“USO DE WAVELETS COMO METODO
DE ANALISIS DE SEÑALES ESPECTRALES”

T E S I S :
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO EN COMPUTACION

P R E S E N T A:

LUIS VICTOR GARCIA ESPARZA

ASESOR:

ING. NOÉ VELA AGUIRRE

CELAYA GTO.

2003

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

No puedo nunca comenzar ni terminar nada sin antes recordar a aquel que es responsable de todo: Dios. Por tanto mi agradecimiento más grande es a él; no solamente por permitirme terminar este trabajo, sino por ser mi guía en cada uno de los días que he vivido.

A mis padres, Luis Víctor y María Esther, a quienes tengo un cariño y respeto eterno, no solo les agradezco su apoyo, sino que les hago saber que sin ellos no estaría en el lugar en el que me encuentro hoy.

Quiero también agradecer a mis hermanos; a María Esther, Fabiola, y Ernesto, pues ellos han sido el muro en el que me he apoyado cada vez que amenazo con caer.

A mis maestros, mi respeto y admiración, ya que son ellos los artífices de las cosas buenas que la escuela me ha brindado. A todos mis amigos (ustedes saben quienes son) quiero decirles que siempre contarán conmigo, de la misma forma en que yo siempre conté con ustedes.

Y por último, a todos aquellos que formaron parte de mi vida, mi agradecimiento va con este trabajo dedicado con todo mi aprecio y respeto.

ÍNDICE

	Página
INTRODUCCIÓN	
CAPÍTULO 1. CONOCIMIENTOS BÁSICOS	1
1.1. Espacios lineales.....	2
1.2. Vectores y espacio vectorial	3
1.3. Funciones base	6
1.4. Ortogonalidad y biortogonalidad	7
1.5. Espacios discretos lineales normalizados	8
1.6. Álgebra matricial y transformación lineal	9
1.6.1. Elementos del álgebra matricial	9
1.6.2. Eigenmatriz	11
1.6.3. Transformación lineal	13
1.7. Señales digitales	16
1.7.1 Muestreo de una señal	16
1.7.2 Sistemas lineales sin cambio de posición	17
1.7.3 Convolución	19
1.7.4. La transformada Z	20
1.7.5. Región de convergencia	21
1.7.6 La transformada inversa de Z	23
CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE FOURIER	24
2.1 Introducción	25
2.2. Funciones periódicas	26
2.3. Series de Fourier	28
2.4. Transformada de Fourier	34

C

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS TIEMPO-FRECUENCIA	36
3.1. Espectros: otra manera de ver el mundo	37
3.2. Análisis tiempo-frecuencia: la paradoja de Heisenberg	38
3.3. Transformada discreta de Fourier	41
3.4. Transformada rápida de Fourier	42
3.5. Short-time Fourier transform	44
3.5.1. Fórmula de Inversión.....	45
3.6. Ventana tiempo-frecuencia	45
3.6.1. Ejemplo de la STFT	46
3.7. Transformada Wavelet Continua	52
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN	57
4.1. ¿Qué es un análisis multiresolución?	58
CAPÍTULO 5. WAVELETS	65
5.1. Introducción	66
5.2. Perspectiva histórica	67
5.3. Funciones base y funciones escala	70
5.4. Análisis wavelet	71
5.4.1. Transformada wavelet discreta	71
5.4.2. Paquetes wavelet	74
5.4.3. Formas de onda adaptadas	74
5.5. Descripción formal	75
5.6. La transformada wavelet continua	76
5.7. Transformada wavelet discreta	78
5.7.1. Cuadros wavelet	78
5.7.2. Transformada wavelet diádica	79

5.8. Bases wavelet ortonormales	80
CAPÍTULO 6. APLICACIONES	82
6.1. Introducción	83
6.2. Identificación de fallas en soportes de ferrocarril	83
6.2.1. descripción general del problema	83
6.2.2. Redes neuronales	85
6.2.3. Resultados de la prueba	88

CONCLUSIONES
BIBLIOGRAFIA

E

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCIÓN

El estudio de las señales ha sido un tema de interés desde no hace poco tiempo. En tiempos de Sir Isaac Newton, en el siglo diecisiete, cuando éste estudiaba la naturaleza de la luz blanca, observó su descomposición en bandas de colores; en ese momento, Newton acuñó el término *espectro*, refiriéndose a la parte de la luz que no todos percibíamos, pero que existía; y aunque él no lo sabía, con ese descubrimiento comenzaría un estudio muy extenso relativo a todos aquellos fenómenos físicos que tendía a dejar una huella, fenómenos a los cuales se les dio por llamar *señales*.

No tardó el ser humano en darse cuenta de que las señales representaban una parte importante de casi cualquier área del conocimiento: descubrió que el cerebro se comunicaba internamente mediante señales eléctricas; que a través de otra señal podía enviar y recibir información, a partir de lo cual surgió el concepto de la radiodifusión.

La tesis a continuación presentada al lector se centra en un aspecto más específico del análisis de señales: las señales espectrales, el estudio de las características de una señal de cualquier tipo en términos del dominio de la frecuencia. Y se enfoca en una de las técnicas más modernas y de mejor eficacia para tal propósito: Wavelets. La idea suena simple, sin embargo encierra muchos tópicos muy complicados, por lo cual la obra se ha dividido en seis capítulos.

El capítulo uno hace un breve resumen de los conocimientos básicos necesarios para comprender el tema del análisis de señales en general, y de los procesos matemáticos utilizados. Cabe señalar, sin embargo, que tener conocimientos básicos previos del álgebra lineal es necesario. El segundo capítulo hace una breve revisión del Análisis de Fourier, otro de los métodos de análisis espectral. El análisis Tiempo-Frecuencia, parte fundamental del análisis espectral es estudiada en el capítulo tres. El capítulo cuatro se encarga de una de las ventajas más llamativas del análisis Wavelet: el Análisis Multiresolución. El capítulo cinco estudia directamente los fundamentos del análisis Wavelet y sus elementos más importantes. Finaliza el sexto capítulo con un ejemplo de aplicación del análisis Wavelet en la detección de soportes de ferrocarril defectuosos.

El objetivo general de esta tesis es el de comprender la naturaleza del análisis Wavelet como una herramienta de análisis de señales espectrales, para a la vez comprobar su eficacia y demostrar que es una manera de análisis que presenta ventajas sobre otros métodos, como el análisis de Fourier.

Este material puede ser útil para aquellos estudiantes de nivel licenciatura del área de la electrónica, la computación y en general, cualquiera interesado en el área del análisis de señales digitales.

G

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO 1

CONOCIMIENTOS BÁSICOS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.1 ESPACIOS LINEALES¹

En el sentido más amplio, un espacio funcional es un conjunto de funciones que satisfacen una condición dada o un cierto patrón matemático. Tomando como ejemplo el espacio finito en energía $L^2(-\infty, \infty)$, el cual es una colección de funciones, las cuales cumplen con la condición de tener un valor finito, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Algunas de las condiciones que un conjunto de funciones debe cumplir para determinarse si es o no un espacio lineal son:

1. El espacio S debe contener al menos un elemento.
2. Si $x \in S$ y $y \in S$, entonces $x + y = y + x$
3. Si $z \in S$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. Existe en S un único elemento 0 , tal que $x + 0 = 0$
5. Existe en S otro único elemento $-x$, tal que $x + (-x) = 0$

¹ Parte del material de este capítulo fue tomado del libro *Fundamentals of Wavelets*, de Jaideva C. Goswami y Andrew Chan; Wiley-Interscience editorial, páginas 5 a 27.

Además de estas simples, aunque importantes reglas, es importante también definir la multiplicación escalar como:

$$y = cx, \text{ en donde } x \text{ y } y \text{ pertenecen a } S, \text{ y } c \text{ es un escalar cualquiera}$$

Para el espacio S , tenemos las siguientes reglas:

1. $c(x+y) = cx + cy$.
2. $(c + d)x = cx + dx$, en donde c y d son escalares
3. $(cd)x = c(dx)$
4. $1 \cdot x = x$

Los espacios que satisfacen estas condiciones son **Espacios Lineales**.

1.2 VECTORES Y ESPACIO VECTORIAL

Basados en el concepto previo de espacios funcionales, debemos cubrir el concepto de espacio vectorial. Un vector V es un conjunto de tres números complejos $\{v_1, v_2, v_3\}$, los cuales se asocian con tres vectores unitarios ortogonales $\{a_1, a_2, a_3\}$. El conjunto ordenado $\{v_j\}_{j=1}^3$ representa los componentes escalares del vector V , en donde los vectores unitarios a abarcan el espacio tridimensional euclidiano. Siguiendo con estos conceptos, cualquier vector en este espacio puede ser descompuesto de tres componentes principales.

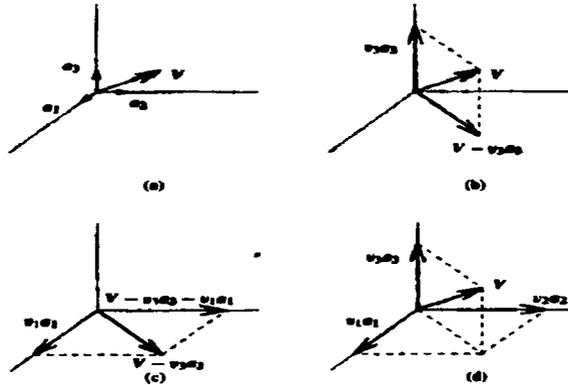


Figura 1.1: Descomposición ortogonal de un vector en un espacio euclidiano²

Además, la adición y multiplicación escalares de un vector están definidas por:

1. $U + V = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3\}$.
2. $kV = \{kv_1, kv_2, kv_3\}$.

En adición, los vectores en el espacio obedecen las propiedades conmutativa y asociativa:

1. $U + V = V + U$.
2. $(U + V) + W = U + (V + W)$.

²Imagen tomada del libro *Fundamentals of Wavelets*, de Jaideva C. Goswami y Andrew Chan; Wiley-Interscience editorial, p.7.

Podemos representar un vector como una matriz:

$$V = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}.$$

Y, dado que todas las reglas matemáticas se aplican a los vectores a las matrices, podemos definir la longitud o tamaño de un vector similar a la definición del tamaño de una función mediante la siguiente fórmula:

$$|V| = \sqrt{v1^2 + v2^2 + v3^2}$$

El producto escalar, o producto punto de dos vectores es una operación sumamente importante en el álgebra vectorial, dicho producto se define como sigue:

$$U \cdot V = |U| |V| \cos \angle U, V$$

$$= u1v1 + u2v2 + u3v3$$

$$= [u1 \ u2 \ u3] \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix} \text{ tomemos en cuenta que la matriz columna U mostrada aquí es la transpuesta}$$

de la matriz renglón U . Definimos la proyección de un vector hacia otro a través de la fórmula:

$$\frac{U \cdot V}{|V|} = U \cdot a_v$$

Esta es la proyección de U en dirección de \mathbf{u} , o un componente de U en la dirección de \mathbf{u} . La proyección es un concepto muy importante en nuestro campo de estudio. Cuando se necesita encontrar la componente de un vector en una dirección dada, simplemente proyéctese el vector en dicha dirección mediante el producto escalar del vector con el vector unidad ($\mathbf{u} = [1 \ 1 \ 1]$) en la dirección deseada.

1.3 FUNCIONES BASE

Extenderemos ahora el concepto del espacio euclidiano vectorial hacia los espacios lineales normales. Para esto, en lugar de pensar en una colección de vectores, pensaremos en una colección de funciones. En lugar de vectores base, tendremos funciones base para representar una función arbitraria en cierto espacio. Dichas funciones base son bloques de construcción de funciones en el espacio mencionado. Como ejemplo, tomaremos la serie de Fourier, la cual se tomará como objeto de estudio más adelante.

Ejemplo: Recordemos que una función periódica $p_T(t)$ puede ser expandida en una serie.

$$p_T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

Donde T es el periodo de la función, ω_0 es la frecuencia fundamental, la cual es igual a $2\pi/T = 2\pi f$, y $e^{ik\omega_0 t}$ es la n -ésima armónica

1.4 ORTOGONALIDAD Y BIORTOGONALIDAD

Definiciones importantes: "Ortogonalidad: *dícese de los elementos perpendiculares entre sí (Diccionario enciclopédico básico). Proyección ortogonal: la de una figura sobre una recta, un plano o una superficie cualquiera por medio de perpendiculares bajadas de sus puntos.*"³

La expansión ortogonal es una herramienta muy importante en el análisis de señales. Los coeficientes de expansión representan las amplitudes de la frecuencia armónica de la señal. Si nosotros decidimos, por razones de análisis, minimizar ciertas frecuencias armónicas (por ejemplo, el ruido a los 60 Hertz); simplemente diseñamos un filtro que repela el ruido a dicha frecuencia. Por lo tanto, es muy significativo el descomponer una señal en sus componentes para su observación antes del procesamiento de la misma. La descomposición ortogonal de una señal es lineal, y el procesamiento de los coeficientes es simple y eficiente. Si una función $f(t) \in L^2$ se expande en términos de cierto conjunto ortonormal $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in L^2$, podemos decir que $f(t)$ se puede denotar como la sumatoria de todos esos componentes $\phi_k(t)$.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t).$$

La computación de un producto punto requiere el conocimiento de la función $f(t)$ para todo t , y no es computable en tiempo real. Hemos visto que una base ortonormal es una manera

³ Pequeño Larousse Ilustrado. Ramón García Pelayo y Gross. Editorial Larousse. México, 1984, p. 747

producir una aproximación satisfactoria a una función dada. Recordemos que, en una base ortogonal, todas las funciones base pertenecen al mismo espacio. En una base biortogonal, de cualquier forma, una base dual no tiene que estar en el espacio original. Si la base ortogonal y la dual pertenecen al mismo espacio, estas bases son llamadas *semiortogonales*.

1.5 ESPACIOS DISCRETOS LINEALES NORMALIZADOS

Un espacio discreto lineal normalizado es una colección de elementos, los cuales son secuencias discretas de números complejos o reales con una norma dada. Para un espacio discreto lineal normalizado, las reglas de operación establecidas en la sección 1.1 de este capítulo se aplican también. Un elemento en un espacio dimensional de orden N es representado de la siguiente manera:

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)\},$$

Y la suma de dos elementos:

$$w(n) = x(n) + y(n) = \{x(0)+y(0), x(1)+y(1), x(2)+y(2), \dots, x(N-1)+y(N-1)\}$$

1.6 ÁLGEBRA MATRICIAL Y TRANSFORMACIÓN LINEAL

Ya hemos utilizado matrices columna para representar vectores en un espacio dimensional finito, ahora definiremos algunos conceptos relativos a las matrices y al álgebra matricial que nos serán de particular interés:

1.6.1 ELEMENTOS DEL ÁLGEBRA MATRICIAL

1. *Definición.* Una matriz $\mathbf{A} = [A_{ij}]$ es un arreglo rectangular de elementos. Los elementos pueden ser números reales, complejos o polinomiales. El primer índice entero, i , indica las filas, y el segundo, j , indica las columnas. La matriz \mathbf{A} es infinita si i o j tienden al infinito. Una matriz de $m \times n$ es desplegada así:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \vdots & \vdots \\ A_{21} & A_{22} & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{31} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Si $m = n$, \mathbf{A} es una matriz cuadrada, una matriz cuadrada de dimensión $N \times 1$ es un vector de dimensión N .

2. **Transposición.** La transpuesta de **A** es **A'**, cuyo elemento es **A_{ji}**. Si la dimensión de **A** es $m \times n$, la dimensión de **A'** es $n \times m$. La transposición de una matriz columna ($N \times 1$) es una matriz renglón ($1 \times N$).
3. **Suma y diferencia de matrices.** Dos matrices pueden ser sumadas o restadas si tiene dimensiones similares:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{ij} \pm \mathbf{B}_{ij}$$

4. **Producto de matrices.** La multiplicación de matrices es posible únicamente si sus dimensiones son compatibles, con esto, nos referimos al hecho de que el número de columnas de la primera matriz sea igual al de renglones en la segunda. Si las dimensiones de **A** y **B** son $m \times p$, y $p \times q$ respectivamente, la dimensión de **C** (matriz resultado) será de $m \times q$. El elemento **C_{ij}** se calcula:

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{l=1}^p \mathbf{A}_{il} \mathbf{B}_{lj}$$

5. **Matriz identidad.** Una matriz identidad es una matriz cuadrada cuyos elementos en la diagonal principal son unos (1), y el resto son ceros

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. **Matriz menor.** Una **menor** **S_{ij}** de la matriz **A** es una submatriz de **A** creada mediante la eliminación del *i*-ésimo renglón y la *j*-ésima columna de **A**. La dimensión de **S_{ij}** es $(m-1) \times (n-1)$, donde la dimensión de **A** es $m \times n$.

7. *Determinante.* El determinante de una matriz cuadrada A es el valor computado sucesivamente usando la definición de *menor*. Computamos el valor del determinante en forma de una matriz cuadrada de $(m \times m)$ así:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} A_{ij} \det(S_{ij}).$$

el índice j puede ser cualquier

entero entre 1 y m .

8. *Matriz Inversa* A^{-1} es la inversa de una matriz cuadrada A tal que $A^{-1}A = 1 = A^{-1}A^{-1}$. Computamos la inversa de la matriz mediante:

$$A_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{j+i} \det(S_{ji})$$

Si el determinante de A es igual a 0 , la matriz es singular, y A^{-1} no existe.

1.6.2 EIGENMATRIZ

Una transformación lineal es un mapeo, tal que cuando a un vector x , perteneciente a cualquier espacio vectorial V es transformado, el resultado de la transformación es otro vector $y = Ax$, perteneciente a V . El vector y en general es una versión traducida, escalada y rotada de x . En particular, si el vector de salida y es el único escalar múltiple del vector de entrada; a este escalar lo llamamos el *eigenvalor*, y al sistema, le llamamos un *eigensistema*. Matemáticamente, escribimos:

$$y = Ax = \mu x,$$

donde A es una matriz de N x N, y μ es el eigenvalor escalar. Determinamos los eigenvalores de la solución de la ecuación característica:

$$\det(A - \mu I) = 0.$$

Si x es una matriz columna de tamaño N x 1, existen N eigenvalores para este sistema. Estos eigenvalores pueden o no ser distintos. Asociado con cada eigenvalor, está un *eigenvector*. La interpretación de los eigenvectores y los eigenvalores depende de la naturaleza del problema a tratar. Tomemos el ejemplo siguiente para ilustrar este procedimiento. Tomemos a la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como la matriz de transformación. La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} \text{Det}(A - \mu I) &= \det \begin{bmatrix} 3 - \mu & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \mu & -1 \\ 0 & -1 & -\mu \end{bmatrix} \\ &= (3 - \mu) [(2 - \mu)(3 - \mu) - 1] - (3 - \mu) \\ &= (3 - \mu)(\mu - 1)(\mu - 4) = 0 \end{aligned}$$

y los eigenvalores son $\mu = 4, 1,$ y $3,$ si sustituimos $\mu = 4$ en la fórmula del vector "y" tendremos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y obtendremos el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$-x_1 - x_2 + 0 = 0$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$0 - x_2 - x_3 = 0$$

este es un conjunto de ecuaciones algebraicas linealmente dependiente. Asumimos que $x = \alpha$ y obtenemos el eigenvector e_3 correspondiente a $\mu = 4$ así:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

de manera similar, computamos los demás eigenvectores.

1.6.3 TRANSFORMACIÓN LINEAL

Utilizando el ejemplo del eigensistema en el tema anterior, tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_j = 1, 3, 4 \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

y los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores son:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{y } e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

de la definición de eigenvalores y eigenfunción, tenemos que:

$$Ae_j = \mu e_j \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Podemos reagrupar esta ecuación de la siguiente forma:

$$A[e_1 \ e_2 \ e_3] = [\mu e_1 \ \mu e_2 \ \mu e_3]$$

Para ser más concisos, volveremos a modificar esto en la forma de una matriz:

$$AE = E \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} = E\mu.$$

Donde μ es una matriz diagonal, y E es la eigenmatriz. Si la matriz E no es singular, diagonalizamos la matriz A , premultiplicando por la inversa de E :

$$E^{-1}AE = \mu$$

De esta manera, hemos utilizado la eigenmatriz E en una transformación lineal para diagonalizar la matriz A .

1.6.4 CAMBIO DE BASE

Se puede ver a la matriz A en el ejemplo anterior como una matriz que define un sistema lineal.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

La matriz A es una transformación que mapea $x \in \mathbb{R}^3$ hacia $y \in \mathbb{R}^3$. Los componentes de " y " están relacionados a los de " x " via la transformación lineal que acabamos de definir. Como e_1, e_2 , y e_3 son vectores linealmente independientes, pueden ser usados como base para el espacio \mathbb{R}^3 . Por lo tanto, expandimos el vector x en esta base:

$$x = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + x'_3 e_3 = Ex'.$$

Y los coeficientes del vector x' se computan:

$$x' = E^{-1}x.$$

Las nuevas coordenadas para el vector y' con respecto a esta nueva base vienen de:

$$\begin{aligned} y' &= E^{-1}y \\ &= E^{-1}Ax. \\ &= E^{-1}Aex' \\ &= \mu x'. \end{aligned}$$

La anterior ecuación establece que se ha modificado el sistema lineal $y = Ax$ mediante un cambio de base a otro sistema $y' = \mu x'$. En donde la matriz μ es una matriz diagonal. Llamamos a esta transformación lineal via la eigenmatriz la transformación de similaridad.

1.7 SEÑALES DIGITALES

Se proveerán algunas notaciones y operaciones básicas, pertinentes a las técnicas del procesamiento digital de señales.

1.7.1 MUESTREO DE UNA SEÑAL

Tomemos por hecho que $x(t)$ es una señal analógica (continua en el tiempo) de energía finita. Si medimos la amplitud de la señal a un intervalo regular h , tenemos una señal discreta en el tiempo:

$$x(n) := x(t_n), \quad \text{para toda } n = 0, 1, \dots, N-1 \text{ donde } t_n = nh.$$

Para la simplicidad en la lectura, utilizaremos la notación $x(t)$, con el período h sobreentendido. Este grupo de valores discretizados constituyen una señal, llamada *señal digital*. Para tener una buena aproximación hacia una función continua $x(t)$ de sus muestras $x(n)$, el período de muestreo a escogerse deberá ser:

$$h \leq \frac{\pi}{\Omega}$$

donde 2Ω es el ancho de banda de la función $x(t)$. La elección de h anterior corresponde a aquella de la frecuencia de muestreo de Nyquist, y la fórmula de recuperación de Shannon:

$$x(t) = \sum_{nh \in \mathbb{Z}} x(nh) \frac{\sin \pi(t - nh)}{\pi(t - nh)}$$

nos permite recuperar la señal original analógica $x(t)$.

1.7.2 SISTEMAS LINEALES SIN CAMBIO DE POSICIÓN

Consideremos un sistema caracterizado por su respuesta al impulso $h(n)$. Decimos que el sistema es lineal sin cambio de posición si la entrada $x(n)$ y la salida $y(n)$ satisfacen las siguientes relaciones del sistema:

Sin cambio de posición:

$$\begin{aligned} x(n) &\Rightarrow y(n) \\ x(n - n') &\Rightarrow y(n - n'). \end{aligned}$$

Linealidad:

$$\begin{aligned} x_1(n) \Rightarrow y_1(n) \quad \text{y} \quad x_2(n) \Rightarrow y_2(n) \\ x_1(n) + mx_2(n) \Rightarrow y_1(n) + my_2(n) \end{aligned}$$

En general, un sistema lineal sin cambio de posición se caracteriza por:

$$x_1(n - n') + mx_2(n - n') \Rightarrow y_1(n - n') + my_2(n - n').$$

1.7.3 CONVOLUCIÓN

La convolución discreta, también conocida como promedios de movimiento, define la relación entrada-salida de un sistema lineal invariante en posición. La definición matemática de una convolución es:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) \\ &= \sum_k h(k-n)x(k) \\ &= \sum_k x(k-n)h(k) \end{aligned}$$

Podemos expresar la suma de convolución en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & h(2) & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & h(2) & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

A manera de ejemplo, si $h(n) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$ y $x(n) = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\}$ son secuencias causales, la matriz ecuación para la relación entrada-salida es:

$$H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)z^{-k}$$

$$= \dots, h(-1)z^1 + h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots$$

la variable z^{-1} representa un retraso de una unidad de intervalo de muestreo; z^{-M} significa un retraso de M unidades. Si se reemplaza z por $e^{j\omega}$, la transformada Z se convierte en la transformada de Fourier en tiempo discreto.

$$H(z)_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{-jk\omega}$$

1.7.5 REGIÓN DE CONVERGENCIA

Definición Importante: *Converger. Dirigirse a un mismo punto, concurrir varias cosas a un mismo fin.*⁴

La variable z en la transformada z es de valor complejo. La transformada z de $x(z)$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, podría no converger para ciertos valores de z . La región de convergencia (ROC, region of convergence) de una transformada z indica la región en el plano complejo en la cual todos los valores de z hacen a la transformada z converger. Dos secuencias podrán tener la misma transformada z , pero con diferentes regiones de convergencia.

Ejemplo 1: Encontrar la transformada $x(n) = a^n \cos(\alpha n)u(n)$, donde $u(n)$ es la función escalón unitario, definida por:

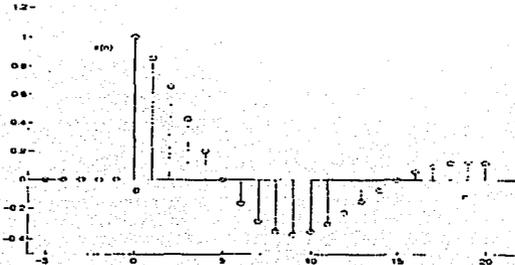
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

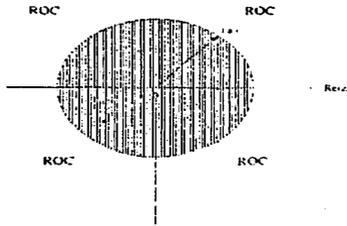
⁴ Pequeño Larousse Ilustrado, Ramón García Pelayo y Gross, Editorial Larousse, México, 1984, p. 272

De la definición de la transformada z , tenemos:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\omega_0 n) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (ae^{j\omega_0} z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0} z^{-1}} \right) \\
 &= \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad \text{ROC: } |z| > |a|
 \end{aligned}$$

El caso donde $a = 0.9$ y $\omega_0 = 10\pi$, se muestra en las siguientes figuras:





Figuras 1.2 y 1.3: Secuencia y Región de convergencia ($a=0.9$)⁵

1.7.6 TRANSFORMADA INVERSA DE Z

La fórmula para recuperar la secuencia original de una transformada de z envuelve una integración compleja de la forma:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz,$$

en donde el contorno es tomado dentro de la región de convergencia de la transformación en el sentido inverso de las manecillas del reloj .

⁵Imágenes tomadas del libro *Fundamentals of Wavelets*, de Jaideva C. Goswami y Andrew Chan; Wiley-Interscience editorial, p 27.

CAPITULO 2

ANÁLISIS DE FOURIER

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.1 INTRODUCCIÓN⁶

El análisis que Joseph Fourier propuso en su tiempo fue desarrollado para propósitos que distan mucho de sus aplicaciones actuales, ya que en un inicio el análisis de Fourier fue utilizado para la solución de problemas presentados en el tratamiento analítico de la conducción del calor, en su libro "*Théorie analytique de la chaleur*". Sin embargo, este gran "poema analítico", como lo describió lord Kelvin es utilizado y se ha vuelto un instrumento indispensable en casi todas las áreas de la física moderna, teoría de comunicaciones, sistemas lineales, etcétera.

Dicho de una manera simple, el método de Fourier es posiblemente la técnica más poderosa para el análisis de señales. Una característica muy poderosa en él: transforma la señal de un dominio al otro en el cual muchas de las características de ésta son reveladas. La manera más común de referirnos a este otro dominio es el *dominio de la frecuencia*, o, *espectro*, mientras que el dominio original es el *dominio del tiempo*, o espacial. El análisis de Fourier incluye tanto a la transformada de Fourier, como a las series de Fourier. La transformada de Fourier es aplicable a las funciones que están definidas en la línea real, mientras que las series de Fourier es usado para analizar funciones periódicas, con componentes complejas. Dada la similitud del análisis con wavelets y el de Fourier, en este capítulo se proveerá de una visión general desde el punto de vista del análisis de señales sin ahondar demasiado en detalles matemáticos.

⁶ Parte del material de este capítulo fue tomado de los libros "*Fundamentals of Wavelets*", de Jaideva C. Goswami y Andrew Chan; Wiley-Interscience editorial, páginas 5 a 27. y "*Análisis de Fourier*", de Hwei P. Hsu, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, 1987, pp. 1-13.

2.2 FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función periódica se puede definir como una función para la cual:

$$f(t) = f(t + T)$$

Para todo valor de t . La constante mínima T es llamada *período* de la función, el periodo representa un cierto intervalo frecuencia con que la función tenderá a repetirse. Mediante variaciones del periodo se puede tener que $f(t) = f(t + nT)$, en donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. En la figura siguiente se muestra un ejemplo de una función periódica: La función seno.

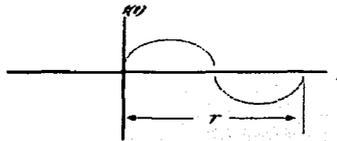


Figura 2.1 :Función seno

Ejemplo 1:

Encontrar el período de la función $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$.

Solución. Si la función $f(t)$ es periódica con un período T , entonces de la definición de la función periódica se tiene que:

$$\cos \frac{1}{3}(t + T) + \cos \frac{1}{4}(t + T) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}.$$

puesto que $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta$ para cualquier entero m , se tiene que:

$$\frac{1}{3}T = 2\pi m, \quad \frac{1}{4}T = 2\pi n$$

donde m y n son enteros. Por tanto, $T = 6\pi m = 8\pi n$, de la deducción simple sabemos que $m = 4$ y $n = 3$. y obtenemos el valor mínimo de T , el cual nos dice que es igual a 24π .

El ejercicio anterior nos lleva a una deducción general: si la función $f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$ es periódica con período T , entonces es posible encontrar dos enteros m y n tales que $\omega_1 T = 2\pi m$ y $\omega_2 T = 2\pi n$. El cociente de las dos expresiones anteriores es: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$, es decir, la relación ω_1/ω_2 debe ser un número racional, o que puede expresarse exactamente con una sola cifra.

Ejemplo 2:

Determinar si la función $f(t) = \cos 10t + \cos (10 + \pi)t$ es una función periódica.

Solución: aquí $\omega_1 = 10$ y $\omega_2 = 10 + \pi$. Puesto que el cociente denotado por:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10}{10 + \pi}$$

no es un número racional, es imposible encontrar un valor T que satisfaga la definición de periodicidad, por lo tanto, $f(t)$ no es una función periódica.

Ejemplo 3:

Encontrar el período de la función $f(t) = (10 \cos t)^2$

Solución: si aplicamos la identidad trigonométrica, se tiene entonces que:

$$f(t) = (10 \cos t)^2 = 100 \cos^2 t = 100 \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) = 50 + 50 \cos 2t$$

puesto que una constante es una función periódica de periodo T para cualquier valor de T , y el periodo de $\cos 2t$ es π , se concluye que el periodo de $f(t)$ es π .

2.3 SERIES DE FOURIER

Las series de Fourier y la transformada de Fourier son muchas veces tratadas de manera separada por los matemáticos dado que envuelven dos clases diferentes de funciones. Sin embargo, en el área de la ingeniería, siempre es considerado que la transformada es una extensión de las series de Fourier si se permite que el periodo T se aproxime al infinito. Para comenzar, discutiremos las series de Fourier. La representación de las series de Fourier de una función periódica de valores reales $p(t)$ [$p(t)=p(t+T)$] está dada por:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$$

en donde:

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_0^{t_0+T} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

donde α_k representa a los *coeficientes de Fourier* y el periodo $T = 2\pi/\omega_0$, donde ω_0 es la *frecuencia fundamental*. El conjunto de funciones $\{e_k\} = \{e^{jk\omega_0 t}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, forma una base ortogonal completa en $L^2 [t_0, t_0+T]$, esto es:

$$\int_0^{T} e_k \bar{c}_t dt = T \delta_{k,t}$$

El coeficiente a_k , escrito en la forma de un producto punto:

$$a_k = \frac{1}{T} \langle p(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle,$$

representa la componente ortogonal de la función $p(t)$ en $k\omega_0$. Por lo tanto, la serie de Fourier es una expansión ortogonal de $p(t)$ con respecto al conjunto base $\{e_k\}$. La representación dada en la definición de la serie de Fourier es exacta; sin embargo, si truncamos la serie a, digamos, $\pm N$ términos, habrá un monto de error. Al ser proyecciones ortogonales, los coeficientes de Fourier minimizan la raíz de tal error.

Una serie de Fourier puede ser representada en otras formas. La representación utilizando senos y cosenos está dada por:

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t),$$

en la cual, a_k y b_k son cantidades reales. La representación compleja de la serie, usando únicamente armónicas positivas está escrita de la siguiente manera:

$$p(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k),$$

en donde

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \text{ y } \theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{b_k}{a_k} \right),$$

c_k es una cantidad compleja, las fórmulas de computación para a_k y b_k son:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \text{sen} k\omega_0 t dt .$$

Ejemplo 1: Onda senoidal rectificada

Considérese una función $p(t) = |\text{sen } t|$, como se muestra en la figura siguiente, con un periodo $T = \pi$ y una frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T = 2$ radianes.

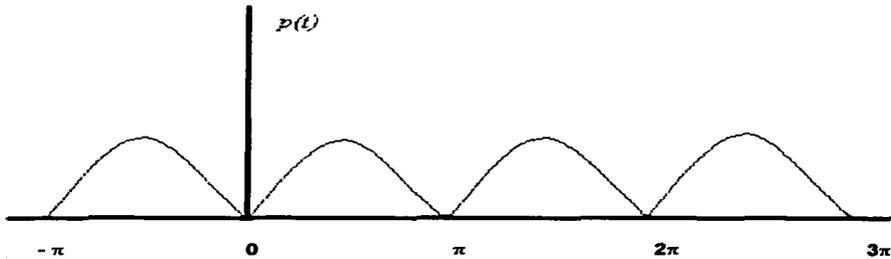


Figura 2.2: Onda senoidal rectificada

Como la función $p(t)$ es una función simétrica con respecto a t , [$p(t) = p(-t)$], b_k es igual a 0 para toda k . Los coeficientes a_k se computan de la siguiente forma:

$$a_k = \frac{2}{k} \int_0^\pi \text{sen} t \cos 2kt dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\text{sen}(1-2k)t + \text{sen}(1+2k)t] dt$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(1-2k)t}{1-2k} \Big|_0^\pi \right] - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(1+2k)t}{1+2k} \Big|_0^\pi \right]$$

$$= -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de $p(t)$ está dada por:

$$p(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kt.$$

Ejemplo 2: Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

y

$$f(t + T) = f(t)$$

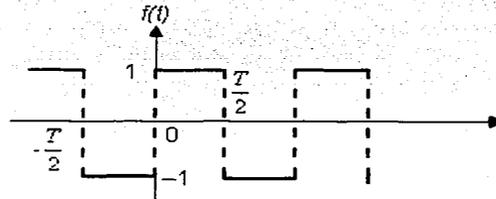


Figura 2.3: Señal del ejemplo 2

Solución: de la fórmula de computación de a_k :

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Solución: de la fórmula de computación de a_k :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -\cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left(\left. \frac{-1}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \right|_{-\frac{T}{2}}^0 z + \left. \frac{1}{n\omega_0} \operatorname{se}(n\omega_0 t) \right|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{T} \left\{ \frac{-1}{n\omega_0} [\operatorname{sen}0 - \operatorname{sen}(-n\pi)] + \frac{1}{n\omega_0} [\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}0] \right\} \\
 &= 0 \text{ para } n \neq 0.
 \end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$.

Para $n = 0$, se tiene:

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \sum_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

y puesto que el valor promedio de $f(t)$ durante un periodo es cero, de la fórmula de computación de b_k , y tomando en cuenta que $\omega_0 T = (2\pi T/T) = 2\pi$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -\operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{-1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right] \\
&= \frac{2}{n\omega_0 T} \{ [1 - \cos(-n\pi)] - [\cos(n\pi) - 1] \} \\
&= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)
\end{aligned}$$

Puesto que $\cos n\pi = (-1)^n$,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{"n" par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{"n" impar} \end{cases}$$

Concluyendo:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \text{sen}(n\omega_0 t) \\
&= \frac{4}{\pi} (\text{sen}\omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen}3\omega_0 t + \frac{1}{5} \text{sen}5\omega_0 t + \dots)
\end{aligned}$$

2.4 TRANSFORMADA DE FOURIER

Para extender el concepto de series de Fourier al de la transformada de Fourier, consideremos las fórmulas de computación de la serie de Fourier y de los coeficientes:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^{+T} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

dichas fórmulas pueden ser expresadas de la siguiente manera si sustituimos el valor de a_k :

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} p(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt' \right] e^{jk\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \left[\int_{-T/2}^{+T/2} p(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt' \right] e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Ahora extendemos el período T al infinito para que ω_0 se aproxime a $d\omega$, y $k\omega_0$ se aproxime a ω . La sumatoria en la fórmula de arriba se vuelve una integral:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(t') e^{-j\omega t'} dt' \right] e^{j\omega t} d\omega$$

La integral dentro de los corchetes es representada por una función $p(\omega)$:

$$p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t') e^{-j\omega t'} dt'$$

lo que convierte a $p(t)$ en:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Las dos ecuaciones anteriores son conocidas como *par de la transformada de Fourier*. En adelante se utilizará el término $f(t)$ para referirnos a una función del dominio del tiempo, mientras que $p(t)$ está restringida para representar funciones de tiempo periódicas. Ahora escribamos la función $p(\omega)$ como $\hat{f}(\omega)$.

CAPITULO 3

ANÁLISIS TIEMPO-FRECUENCIA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.1. ESPECTROS: OTRA MANERA DE VER EL MUNDO

La importancia de conocer el comportamiento de una señal es bastante grande. Son bien conocidas las ventajas de estar atento a la manera en que una señal puede comportarse: ¿Qué efecto la señal podría ejercer sobre el ambiente?, ¿existe algún agente externo que la afecte? Estas y algunas otras preguntas son respondidas mediante el conocimiento del comportamiento de la señal. Sin embargo, la costumbre obliga a ver las señales de la manera tradicional: en función del tiempo. El observar una señal en función del tiempo ayuda a determinar ciertas características de utilidad de la misma; sin embargo, existe una segunda manera de ver a las señales: en función de sus componentes de frecuencia; de esta forma, nuevas características de la señal, las cuales son de suma utilidad, se revelan.

A la representación en frecuencia de una señal, precisamente, se le llama *espectro*, pues es parecido a comparar a la forma en que se percibe al ser humano: las personas sólo captan su esencia física, pero aunque su *espectro* o *espíritu* está ahí, no puede ser visualizado de la manera convencional.

Tratando de explicar de manera más clara el concepto anteriormente mencionado, se dirá solamente que cuando se observa una señal en el dominio del tiempo, se mide la fuerza que tiene en cierto intervalo, mientras que al observarla en el dominio espectral se mide la fuerza de la misma en cada una de sus frecuencias.

¿Pero de dónde surge este concepto de *espectro*? Albiol, nos dice:

“El origen del concepto moderno de *espectro* se debe a Newton (1671), cuando observó que la luz blanca se descomponía en bandas de colores al pasar por un

prisma, debido a las diferentes longitudes de onda (frecuencias) que se presentan superpuestas en la luz blanca"⁷.

El antecedente histórico invita a la reflexión acerca del largo período que el análisis espectral ha vivido, aunque los conceptos a los que se refiere actualmente nos sugieran que se trata de un tema relativamente nuevo. Dicho período ha llevado al ser humano a la búsqueda de un conocimiento de la señal aún más profundo. Si se pueden conocer las características de una señal en el tiempo y en la frecuencia, ¿por qué no conocer las componentes determinadas de frecuencia de una señal en un tiempo determinado?

3.2. ANÁLISIS TIEMPO-FRECUENCIA: LA PARADOJA DE HEISENBERG

Werner Heisenberg es un nombre que interviene directamente en nuestro estudio, ya que los estudios hechos por él son de vital importancia para el estudio del análisis tiempo-frecuencia. Pero, ¿qué hizo tan importante este hombre?.

Werner Heisenberg (1901-1976), fue un científico alemán ganador del Premio Nobel de física en 1932, gracias a sus estudios sobre la física cuántica, en particular a un sistema de mecánica cuántica llamado mecánica matricial. Heisenberg nació en Wurzburg, en 1941 se volvió director del Instituto Kaiser Wilhelm de física; ahí estuvo a cargo de la investigación científica, en conexión directa con el proyecto de la bomba atómica en Alemania durante la segunda guerra mundial. Una de las principales contribuciones de este hombre a la ciencia fue la teoría de la mecánica cuántica, también llamada *mecánica matricial*, en la cual la formulación matemática está basada en las frecuencias y amplitudes de las radiaciones absorbidas y emitidas por el átomo, y de los niveles de energía del sistema atómico. Otra de sus contribuciones, el principio de incertidumbre, jugó un rol

⁷ En su obra *Tratamiento digital de la señal*, España, Servicio de publicaciones de la Universidad politécnica de Valencia, 1999, p. 263

importantísimo en el desarrollo de la mecánica cuántica. Dicho principio manifestaba la imposibilidad de determinar con exactitud la posición, y a la vez el momento de una partícula, un electrón por ejemplo. La teoría establece también que la medición en forma más exacta de cualquiera de los dos parámetros mencionados resultaría en una medición menos precisa.

Las implicaciones filosóficas de la "indeterminación" crearon una fuerte corriente de misticismo entre científicos que interpretaban el concepto como una violación de la ley fundamental de la causa y efecto.

Einstein, sin embargo, creía que la incertidumbre envuelta en la observación no contradecía en forma alguna la existencia de las leyes que regían el comportamiento de las partículas, ni la posibilidad de los científicos de descubrir dichas leyes.

La aplicación del Principio de Incertidumbre de Heisenberg en el análisis tiempo frecuencia entra en materia cuando se trata de visualizar el problema que él tuvo con los cuantos, y se traslada al estudio de las señales.

Supóngase que se analiza una señal senusoidal, como la de la figura siguiente de frecuencia igual a 4 Hercios en el dominio del tiempo. Mediante la observación podría determinarse que la señal presenta distorsión en tiempos $t = 0.7$, y $t = 1.3$ segundos.

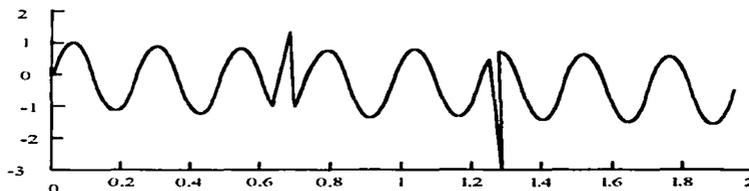


Figura 3.1.: Señal senoidal de 4 kHz con distorsiones.

Observando ahora el espectro del senoide, se puede notar un salto de frecuencia en la región cerca de los 4 Hz.

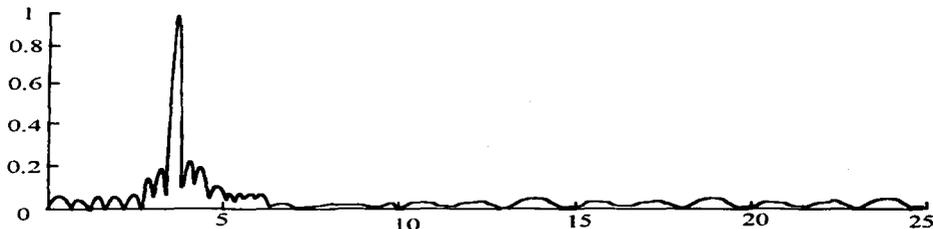


Figura 3.2: Espectro de frecuencias

Dicho salto de frecuencia es debido a la señal sinusoidal de frecuencia 4 Hz que se observó en la figura en el dominio del tiempo. Además, los pequeños trozos de distorsión observados cerca del salto de frecuencia se deben principalmente a los cambios agudos en el dominio del tiempo. Sin embargo, y esto es una parte importantísima del problema, no es posible determinar, mediante la observación del espectro, en qué momento ocurrieron dichos cambios agudos. Esta desventaja se debe principalmente a la utilización de funciones globales, como $e^{j\omega t}$ para representar funciones que no son infinitas. Identificada esta debilidad, es necesario utilizar métodos de análisis que combinen el tiempo y la frecuencia. Esto es importante, dado que en la práctica es común la necesidad de conocer una porción del espectro de una señal, y por lo tanto también saber qué parte de dicha señal en el tiempo es responsable por una cierta característica de él.

La manera más lógica de realizar este análisis sería simplemente tomar la opción que se nos venga a la mente primero: si se necesita sólo una porción de la señal, tomemos solamente una porción de la señal. ¿Cómo se logra esto? Cortando la señal, y ¿cómo se corta una señal? La respuesta es con una función ventana.

3.3 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Debido a que una computadora digital trabaja únicamente con datos discretos, la computación discreta de la transformada de Fourier en una computadora requiere muestras discretas de datos de una función $f(t)$, llamados f_k . De la misma manera, una computadora sólo puede proveer de datos discretos de salida s para la transformada de Fourier $F(s)$.

Si $f(kT)$ y $F(rs_0)$ son las k -ésima y r -ésima muestras de $f(t)$ y $F(s)$ respectivamente y N_0 es el número de muestras en la señal en un período T_0 , entonces:

$$f_k = T f(kT) = T_0 N_0^{-1} f(kT)$$

y

$$F_r = F(rs_0)$$

Donde:

$$s_0 = 2\pi/T_0.$$

La transformada discreta de Fourier es definida como:

$$F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k}$$

$$\text{Donde } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

La fórmula para calcular la transformada discreta inversa de Fourier es la siguiente:

$$f_k = N_0^{-1} \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jr\Omega_0 k}.$$

Las ecuaciones anteriores son útiles para calcular transformadas y su respectivas inversas para datos muestreados.

3.4 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

La transformada rápida de Fourier es una herramienta que agiliza el cálculo de la TDF, o transformada discreta de Fourier. La razón de la preferencia sobre de la transformada rápida sobre la simple transformada discreta es aquella del tiempo de cálculo en la DFT, el cual es proporcional al cuadrado del número de puntos en la serie de la señal muestreada, o lo que es lo mismo:

$$\text{Tiempo} = (\text{número de muestras})^2$$

La diferencia de tiempo de cálculo de la FFT está dada por una relación expresada de la siguiente manera:

$$(\text{número de muestras}) * \log_2 (\text{número de muestras})$$

Por ejemplo, si intentamos calcular la transformada discreta de una señal que consta de 1,024 muestras, el tiempo de cálculo normal sería de $(1024)^2 = 1,048,576$ unidades de tiempo. Mientras que el tiempo que tomaría calcular la misma con el algoritmo FFT sería de $(1024) * \log_2 (1024) = 10,240$ unidades de tiempo. De esta manera observamos la utilidad de esta herramienta en el cálculo.

Debido a que las calculadoras científicas normales únicamente pueden calcular logaritmos en base 10, y gracias al conocimiento proporcionado por la experiencia, de que tratar de encontrar logaritmos en base dos puede tomar en un retraso significativo, se presenta a continuación una tabla de los logaritmos en base 2, de las potencias de 2:

Incógnita	Resultado
$\text{Log}_2 (2)$	1
$\text{Log}_2 (4)$	2
$\text{Log}_2 (8)$	3
$\text{Log}_2 (16)$	4
$\text{Log}_2 (32)$	5
$\text{Log}_2 (64)$	6
$\text{Log}_2 (128)$	7
$\text{Log}_2 (256)$	8
$\text{Log}_2 (512)$	9
$\text{Log}_2 (1024)$	10
$\text{Log}_2 (2048)$	11
$\text{Log}_2 (4096)$	12

¿Y por qué únicamente de las potencias de dos? Existen varios algoritmos para calcular la transformada rápida de Fourier, o FFT. Uno de los más utilizados es aquel creado por Tukey y Cooley en 1965, el cual tiene como condición de cálculo, precisamente, que la señal muestreada contenga un número de puntos que sean potencia de dos.

3.5 SHORT TIME FOURIER TRANSFORM

La transformada short-time de Fourier es un proceso que nos auxilia para obtener las componentes aproximadas en frecuencia de una señal $f(t)$ en una locación de tiempo deseada, digamos, en $t = b$.

El proceso consiste en utilizar una función ventana apropiada $\phi(t)$ para producir la función recortada $f(t) = f(t)\phi(t-b)$, para luego obtener la transformada de Fourier de $f(t)$.

Formalmente, definimos la Short Time Fourier Transform, o STFT como:

$$G_{\phi} f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{b,\omega}(t)dt$$

En donde $\phi_{b,\omega}(t)$ es una función recortada $\phi(t-b)e^{j\omega t}$ en un punto tiempo-frecuencia (b, ω) .

A diferencia de la transformada de Fourier, en la cual la función $f(t)$ debe ser conocida durante el eje tiempo entero antes que su componente espectral en cualquier frecuencia pueda ser computado, la Transformada Rápida de Fourier sólo necesita conocer $f(t)$ en el intervalo en el cual $\phi(t-b)$ es diferente de cero.

Hablando en términos más simples, la Transformada Rápida de Fourier proporciona el espectro aproximado de $f(t)$ en un tiempo t , cerca de b .

3.5.1 FORMULA DE INVERSIÓN

Se puede recuperar la función en el tiempo $f_b(t)$, mediante la toma de la transformada de Fourier de $G_\phi f(b, \omega)$.

$$f_b(t) = \phi(t - b)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\phi f(b, \omega) e^{j\omega t} d\omega$$

La función $f(t)$ original se obtiene mediante la multiplicación de la fórmula anterior con $\overline{\phi(t - b)}$, que es la función ventana de análisis, e integrarlo con respecto a la frecuencia ω

La fórmula de recuperación completa es como sigue:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \|\phi(t)\|} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} G_\phi f(b, \omega) \overline{\phi(t - b)} db$$

3.6 VENTANA TIEMPO-FRECUENCIA

Consideremos la función ventana $\phi(t)$. Si t^* es el centro y Δ_ϕ es el radio de la función ventana, entonces la STFT puede proporcionar la información de la función $f(t)$ en la ventana de tiempo de ubicación:

$$[t^* + b - \Delta_\phi, t^* + b + \Delta_\phi]$$

Y la correspondiente locación en frecuencia de la ventana tiempo anterior se obtiene mediante la fórmula de la STFT:

$$G_{\phi} f(b, \omega) = e^{-j\omega b} [\hat{f}(\omega) \overline{\phi(\omega_0 - \omega_1)}]^* (b)$$

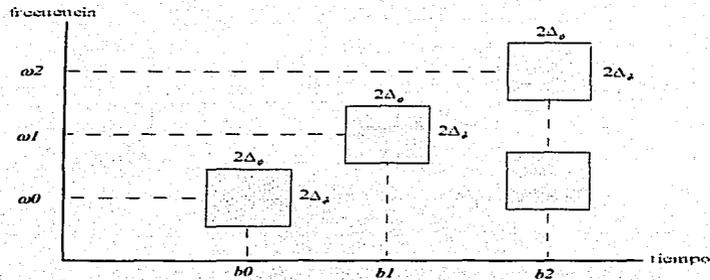


Figura 3.3: Ventana tiempo-frecuencia de la STFT

3.6.1 EJEMPLO DE LA STFT

La señal:

$$f(t) = \sin 2\pi \nu_1 t + \sin 2\pi \nu_2 t + K[\delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)]$$

consiste de dos sinusoides de frecuencias $\nu_1 = 500$ Hz y $\nu_2 = 1000$ Hz y dos funciones delta ocurriendo a tiempos $t_1 = 192$ y $t_2 = 196$ milisegundos. Se determina el valor de la constante K , como una prueba arbitraria, en tres (3). Se escogió como paquete de prueba AutoSignal, versión 1.0.

El código a introducir en AutoSignal para la señal es el siguiente:

FREQ1=500

FREQ2=1000

F1=SIN(2*PI*X*FREQ1)

F2=SIN(2*PI*X*FREQ2)

Y=F1+F2 + (3 * (IF(X.EQ.0.192 ,1, 0) +
IF(X.EQ.0.196,1,0)))

Cabe señalar que, con efecto de observar la frecuencia de muestreo de ocho mil Hercios, el incremento en X requerido en AutoSignal es de 0.000125 (lo que es lo mismo a 1/8000), los limites para el experimento en X son: 0 para el mínimo y 0.2 para el máximo. El incremento en Y se realiza automáticamente a los valores generados por la señal.

El teorema de muestreo nos explica la razón por la cual la señal no puede ser representada exactamente, a no ser que su incremento en X sea de máximo 0.0005: La frecuencia de muestreo de una señal debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima presentada en la señal. En este caso, la frecuencia MINIMA de muestreo debe ser de 2 mil Hercios , sin embargo, por cuestiones de una mejor visualización, el incremento será el mencionado anteriormente, equivalente a 8 mil Hercios. Una consecuencia de la incorrecta frecuencia de muestreo es el traslape, ya que, tomando como ejemplo la siguiente señal con su correspondiente transformada de Fourier:

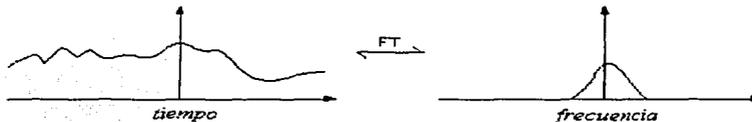


Figura 3.4: señal en tiempo y en frecuencia

Si se muestrea con una frecuencia de muestreo f_s , el tiempo entre muestras será de $1/f_s$, esto es equivalente a una convolución de f_s , lo que quiere decir que el espacio entre cada componente de frecuencia de la señal será de f_s

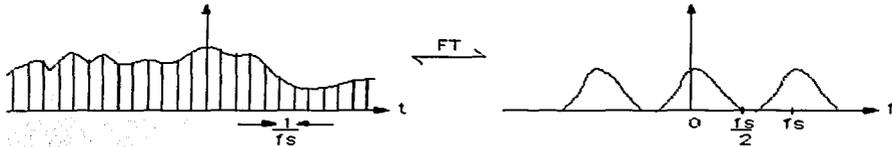


Figura 3.5: señal muestreada en tiempo y frecuencia

Pero, si la frecuencia de muestreo es muy baja, el espectro de frecuencia sufrirá un traslape, y los componentes de frecuencia altos se adicionarán al rango de frecuencias bajo.

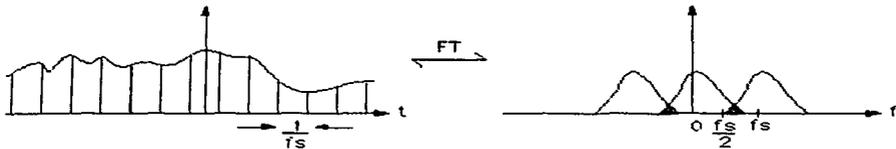


Figura 3.6: representación del espacio dado por la frecuencia de muestreo.

Habiendo explicado la importancia de una frecuencia de muestreo correcta, se muestra a continuación una gráfica de la señal generada:

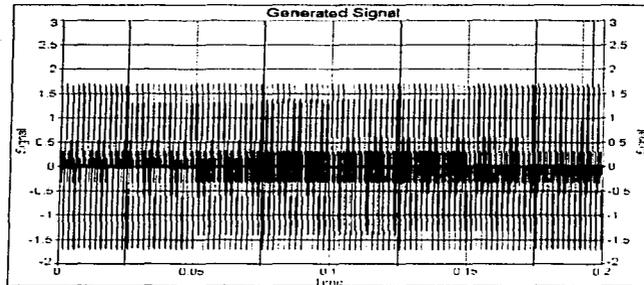


Figura 3.7: Señal senoidal de 500 y 1000 Hz con dos funciones delta

Cerca de la línea límite de los 0.2 segundos pueden apreciarse dos delgadas líneas, correspondientes a las dos funciones delta. La STFT está basada en una serie de transformadas rápidas de Fourier, segmentadas y traslapadas a lo largo del flujo de datos. Para cada transformada rápida, se calcula el tiempo tomando en cuenta el punto central de la ventana, o su pico. Dicha transformada puede ser representada después en 2 o 3 dimensiones en Auto signal.

Las ventanas ayudan también a disminuir lo que en inglés se conoce como *spectral leakage*, o pérdida espectral. La pérdida espectral es el término utilizado para describir la pérdida de poder de una frecuencia en otras locaciones de frecuencia en la FFT. El hecho de aproximar una serie finita de datos con una serie infinita de Fourier produce dicha pérdida de poder.

Ahora, para poder observar sus componentes de frecuencia, efectuamos un procedimiento *Short Time Fourier Transform Spectrum* en AutoSignal; los resultados son los siguientes:

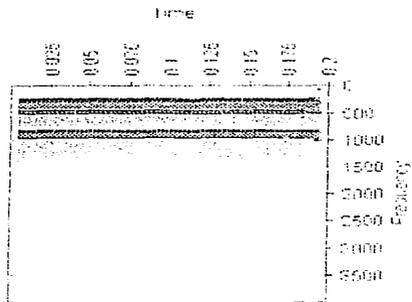


Figura 3.8:STFT con ventana de tamaño grande

Se observa en la figura anterior los dos pulsos producidos a los 0.192 y 0.196 ms respectivamente. Sin embargo, las frecuencias de 500 y 1000 Hercios son dificilmente apreciadas. Esto es debido a la poca resolución en frecuencia que se tiene cuando la ventana de análisis es grande. Ahora, disminuyendo el tamaño de la ventana de análisis, se obtiene una mejor resolución en frecuencia, pero a la vez, las funciones delta observadas anteriormente comienzan a desvanecerse, dado que se pierde resolución en el tiempo.

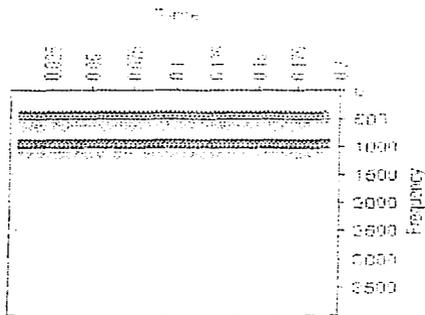


Figura 3.9:STFT con ventana pequeña

Esto prueba la parte del principio de Incertidumbre de Heisenberg que menciona que al ser mayor la precisión en uno de los parámetros a medir, menor será la del otro.

Utilizando ahora la propiedad *Aplicar reconstrucción de Fourier a la señal local, de Auto Signal*, observamos la capacidad de recuperación que proporciona la transformada inversa de Fourier:

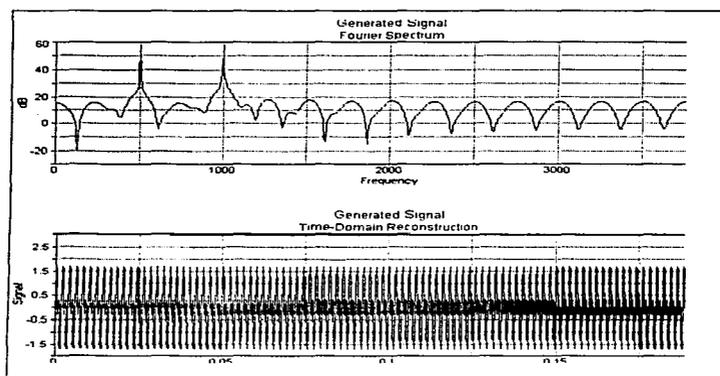


Figura 3 10 Ejemplo de transformada inversa de Fourier

Dado que la STFT está basada en algoritmos de la transformada rápida de Fourier, existe una resolución fija entre frecuencias; en frecuencias altas, un análisis con un segmento corto de una STFT será suficiente para conocer los contenidos espectrales.

Por otro lado, en frecuencias que oscilan de manera muy lenta, el tamaño del segmento deberá aumentar también, con efecto de reunir suficiente información acerca de la oscilación. La habilidad para ajustar este "intercambio" de resolución tiempo-frecuencia es una parte integral del análisis wavelet, estudiado en capítulos posteriores. En general, una

análisis wavelet continuo ofrecerá una mejor visión del espacio tiempo-frecuencia que la STFT.

3.7. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA

Es ya conocido, gracias a la revisión de capítulos anteriores, que una señal puede ser representada como la suma, posiblemente infinita, de componentes senoidales y cosenoidales, usualmente referidas como una expansión de Fourier. La gran desventaja de la expansión de Fourier, o análisis de Fourier, es que únicamente puede proporcionar información acerca de la frecuencia y no del tiempo. Esto quiere decir que, aunque se puedan determinar todas las componentes de frecuencia en una señal, es imposible determinar *cuando* ocurrieron.

A lo largo de los años se han intentado desarrollar soluciones a este problema, mediante el corte de la señal en varias partes y el posterior análisis de cada una de ellas. Claramente se puede ver que el analizar una señal de esta manera dirá mucho más de ella, así que para cortar la señal en cuestión se utilizará una función ventana de una duración muy corta, utilizando un pulso de Dirac (un pulso de Dirac es definido como $f(t) = 1$ en $t = 0$, y $f(t) = 0$ en cualquier otro valor de t), se transforma la muestra al dominio de la frecuencia, y entonces comienza el problema.

El problema consiste en que el cortar la señal corresponde a una convolución entre la señal y la función ventana. Como la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia, y dado que la transformada de Fourier del pulso de Dirac a usarse contiene todas las posibles frecuencias, las componentes en frecuencia de la señal se dispersarían por todo el eje de la frecuencia.

El principio debajo de este fenómeno es explicado por el principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual establece en términos del procesamiento de señales que es imposible conocer la frecuencia exacta y el tiempo exacto de ocurrencia de ésta en una señal. El análisis Wavelet, o transformada Wavelet continua es una de las soluciones más recientes proporcionadas para evitar los problemas de los que adolece la transformada de Fourier

La STFT discutida anteriormente es una de varias maneras de realizar análisis tiempo-frecuencia de una señal. Otra transformada que provee esta forma de análisis es la transformada wavelet continua (o integral). Una ventaja presentada por esta transformada es la posibilidad de la multiresolución, dado que la resolución fija en tiempo-frecuencia de la STFT es una restricción. Para comprender mejor el concepto de multiresolución, tomemos como ejemplo la señal de la siguiente figura, con frecuencias de oscilación distintas:

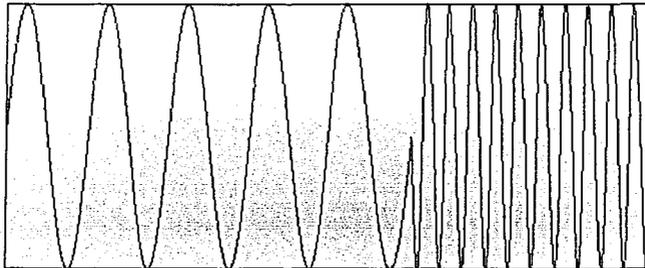


Figura 3.11: señal de frecuencias variables

Digamos que si seleccionamos el tamaño de la ventana para medir las frecuencias bajas, la STFT nos mostrará las frecuencias de esa porción de la señal con buena resolución; sin embargo, en la parte de las frecuencias altas tendremos una resolución borrosa.

Por otro lado, si el tamaño de la ventana está determinado para las frecuencias altas, la resolución será buena para las últimas, y mala para las bajas.

El objetivo es determinar un método que pueda proporcionar una buena resolución tiempo-frecuencia en una posición arbitraria en el plano t - f . Hablando en términos un poco más sencillos, es necesario tener una función ventana cuyo tamaño, o radio se incremente en tiempo, reduciéndose en frecuencia por consecuencia, cuando se analicen componentes de frecuencia bajas, y que al mismo tiempo. El objetivo conduce a la creación de funciones *wavelet* $\psi(t)$.

La transformada integral wavelet de una función $f(t)$ con respecto a alguna wavelet de análisis ψ está definida como:

$$W_{\psi} f(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt$$

en donde:

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \frac{t-b}{a} \quad \text{siendo } a \text{ mayor que } 0.$$

Los parámetros b y a son llamados *traslación* y *escala* respectivamente. Para que ψ sea una función ventana y para recuperar $f(t)$ de su transformada wavelet inversa, debe cumplir con la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

Adicionalmente a satisfacer lo anterior, una wavelet está construida para tener un orden muy alto de momentos de desvanecimiento. Se dice que una wavelet tiene momentos de desvanecimiento de orden m si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0, \quad p=0, \dots, m-1$$

Puesto de otra forma, la transformada integral wavelet o transformada wavelet continua proporciona un análisis tiempo-escala, en lugar de tiempo-frecuencia. Sin embargo, se puede obtener un análisis bastante cercano al análisis tiempo-frecuencia mediante una conversión escala-frecuencia adecuada.

Observando la fórmula de generación de la wavelet $\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ notamos dos cosas principalmente:

1. Al reducir el parámetro a de traslación, el soporte de $\psi_{b,a}$ se reduce en tiempo y por lo tanto, cubre una mayor área en frecuencia, esto es útil cuando se analizan frecuencias altas, ya que el tamaño de la ventana en tiempo no tiene que ser tan grande.
2. El parámetro b de escala indica la ubicación de la ventana wavelet a lo largo del eje tiempo.

Por lo tanto, al variar (b,a) , es posible trasladar la ventana wavelet a través de todo el plano tiempo-frecuencia. Debido a la condición $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, la cual en términos sencillos indica que el valor medio de la onda ψ en el dominio del tiempo debe ser cero, la wavelet debe tener, intuimos, un carácter oscilatorio, de ahí proviene el nombre **Wavelet (ondeleta)**.

A continuación se observa la gráfica de una típica función wavelet ventana:

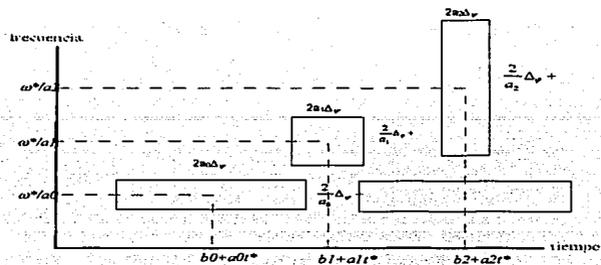


Figura 3.12: Ventana de una función wavelet típica

CAPITULO 4

ANÁLISIS MULTIRESOLUCION

4.1 ¿QUÉ ES UN ANÁLISIS MULTIREVOLUCIÓN?

El análisis multiresolución, o MRA como se le conoce comúnmente es el bloque de construcción más importante en el tema de funciones escala y wavelets. Como su nombre lo sugiere, en un análisis multiresolución podemos ver varias "resoluciones" o niveles de aproximación de una señal. El concepto de MRA fue desarrollado por Meyer y Mallat. La ventaja del MRA es la posibilidad de descomponer una función complicada en frecuencias, en varias funciones simples, con efecto de estudiar cada una de ellas por separado. Si se considera, por ejemplo, una función o señal que consta de varios segmentos de variación distinta, al intentar representar dicha función en un solo nivel de aproximación, se debe discretizar utilizando un tamaño de muestra h . El proceso anterior requeriría un número de muestras grande, ya que para representar los segmentos que varían rápidamente es necesario un tamaño pequeño de muestra.

Por otra parte, utilizar varios niveles de aproximación proporciona la ventaja de no tener que discretizar los segmentos que varían lentamente con demasiadas muestras, ya que al aumentar el tamaño h de la misma, se obtiene un nivel de resolución equivalente.

Para ejemplificar mejor lo anterior dicho, se presentará una gráfica de la señal en cuestión:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

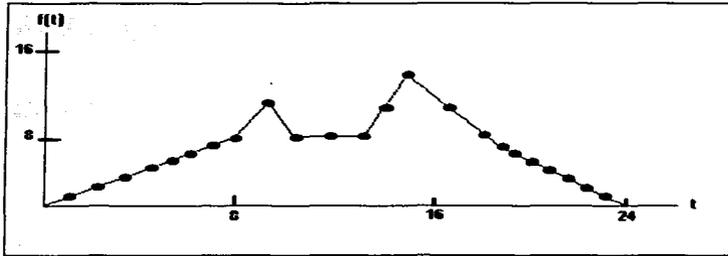


Figura 4.1: Señal discretizada con tamaño de muestra $h=1$

Ahora, si observamos la siguiente figura, en donde la escala es más amplia, el tamaño de la muestra se duplica:

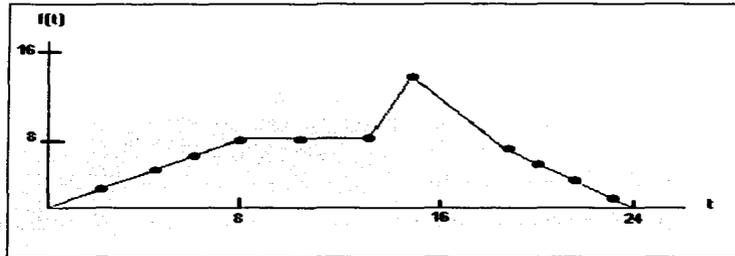


Figura 4.2: Señal discretizada, $h=2$

Cada vez que duplicamos el tamaño de la muestra, perdemos una parte de la señal. Cuando el tamaño de la muestra pasa de 1 a 2, esto es lo que se elimina de ella:

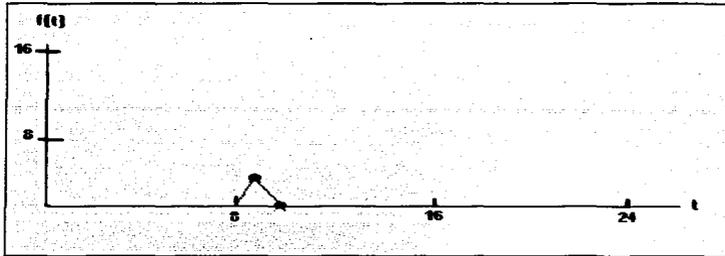


Figura 4.3: Porción de la señal eliminada debido al paso de h de 1 a 2.

Duplicando de nuevo el tamaño de la muestra a $h = 4$ tenemos:

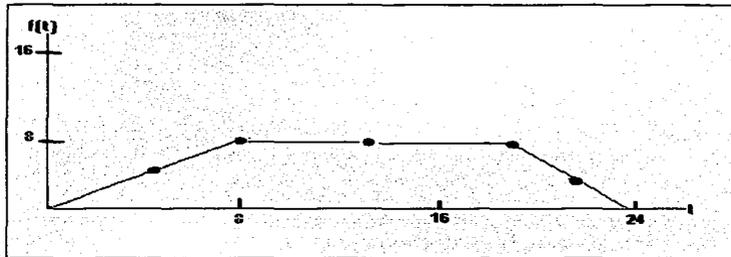


Figura 4.4: Señal discretizada con $h = 4$.

Y la pérdida de la señal es:

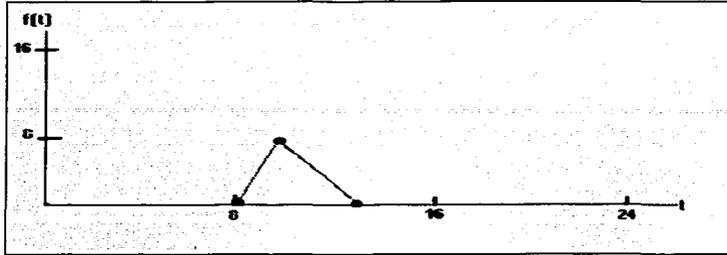


Figura 4.5: Porción de la señal eliminada debido al paso de h de 2 a 4.

Una vez más, si se incrementa finalmente el tamaño de la muestra a $h = 8$ el resultado será:

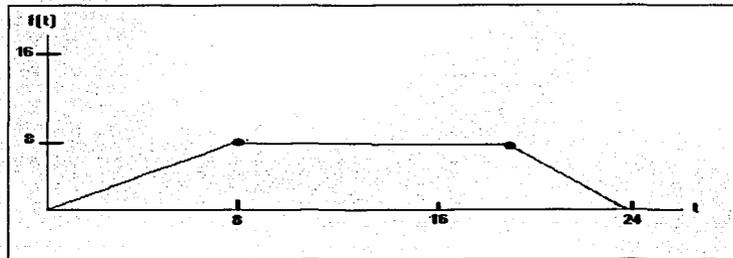


Figura 4.6: Señal discretizada con $h = 8$

Y la pérdida de señal (nula):

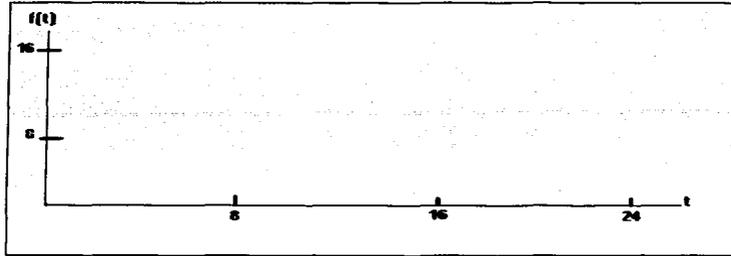


Figura 4.7. Pérdida de la señal debido al paso de $h = 4$ a $h = 8$

Ahora, se asignan todas las funciones correspondientes a las señales discretizadas al conjunto A_s , y las pérdidas de señal al conjunto W_s , en donde s representa un nivel de escala, y aquí es donde lo interesante comienza.

Un punto interesante a destacar es que un punto $x_{s-1}(t)$, perteneciente al conjunto A_{s-1} , e $y_{s-1}(t)$, perteneciente al conjunto W_{s-1} , son ambos derivados de x_s , perteneciente a A_s . Entonces, si se considera que las bases $\{\phi_{k,s} : 2^{s/2} \phi(2^s t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ y $\{\psi_{k,s} : 2^{s/2} \psi(2^s t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ generan a cualquier conjunto A_s y W_s respectivamente, entonces se esperará que las bases $\phi_{k,s-1}$, generadora de A_{s-1} y $\psi_{k,s-1}$, generadora de W_{s-1} estén, de alguna manera relacionadas con la base $\phi_{k,s}$, su predecesora.

Para obtener un análisis multiresolución de una función, tal como la del ejemplo anterior, es preciso tener una función finita $\phi(t)$, llamada *función de escala* la cual genera una secuencia anidada A_j del tipo:

$$\dots \subset A_{-2} \subset A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \dots$$

Además, la función debe cumplir con la ecuación de refinamiento (o traslación):

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(at - k)$$

Obsérvese que la función $\phi(t)$ es representada como una superposición de una versión escalada y trasladada de ella misma, de ahí el nombre función de escala. Ahora, dos características importantes de estos conjuntos y sus puntos son:

$$x(t) \in A_s \Leftrightarrow x(2t) \in A_{s+1}$$

$$x(t) \in A_s \Leftrightarrow x(t + 2^{-s}) \in A_s$$

Aunque muchas funciones pueden generar secuencias anidadas de subespacios, las propiedades anteriores, junto con la ecuación de traslación son únicas del análisis multiresolución.

Para cada nivel de escala s , dado que A_s es un subespacio de A_{s+1} , existe un pedazo de señal sobrante en A_s , llamado W_s , el cual, combinado con A_s , genera a A_{s+1} . Este espacio W_s es llamado el *subespacio wavelet*; éste es complementario a A_s en A_{s+1} , lo cual significa que:

$$A_s \cap W_s = 0$$

$$A_s \oplus W_s = A_{s+1}$$

Los subespacios W_s son generados por $\psi(t)$, mientras que los subespacios A_s son generados por $\phi(t)$. Explicando de forma un poco más clara, cualquier punto $x(t)$ de A_s puede ser escrito de la siguiente forma:

$$x_s(t) = \sum_k a_{k,s} \phi(2^s t - k)$$

Y cualquier punto $y(t)$, del subespacio W_s puede ser descrito de la siguiente forma:

$$y_s(t) = \sum_k \omega_{k,s} \psi(2^s t - k)$$

Dado que:

$$\begin{aligned} \Lambda_{s+1} &= W_s \oplus \Lambda_s \\ &= W_s \oplus W_{s-1} \oplus \Lambda_{s-1} \\ &= W_s \oplus W_{s-1} \oplus W_{s-2} \oplus \dots \end{aligned}$$

Podemos decir que, en general:

$$\Lambda_s = \bigoplus_{l=-\infty}^{s-1} W_l$$

CAPITULO 5

WAVELETS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.1 INTRODUCCIÓN

La idea fundamental detrás del concepto de wavelets es el análisis de acuerdo a la escala, como ya se mencionó anteriormente en el capítulo 4, de hecho, muchos investigadores en el campo de wavelets consideran que el uso de esta herramienta constituye una nueva perspectiva en el procesamiento de señales; ya que, aunque la idea de utilizar funciones que cumplan ciertos requerimientos matemáticos para analizar otras funciones no es nueva (Joseph Fourier lo consideró desde inicios del siglo 17, cuando descubrió que podía superponer series de senos y cosenos para formar otras funciones), el concepto de wavelets tiene una variante: al considerarse un análisis en términos de *escala*, dicha escala juega un rol muy importante.

Los algoritmos basados en análisis wavelet procesan datos a distintos niveles de escala o resolución, como se estudió en el capítulo anterior. Si utilizamos una ventana de análisis grande para observar una señal, sólo podrían apreciarse las características más elementales de ella; mientras que, de la misma manera, al usar una ventana pequeña se apreciarían las características más pequeñas.

En palabras de Amara Graps, utilizar el análisis wavelet es como observar "el bosque y los árboles" al mismo tiempo.

Esta última característica en especial es lo que hace tan interesante a las wavelets; debido a que por muchas décadas, los científicos han buscado funciones más apropiadas que los senos y los cosenos, base del análisis de Fourier para aproximar funciones finitas, o con cortes en ciertos intervalos. Dado que por definición, los senos y cosenos son funciones periódicas o infinitas, tienden a ser una mala elección cuando se trata de detectar picos estrechos en una señal.

Pero con el análisis wavelet, podemos tener funciones que estén contenidas de una buena manera en un dominio finito.

El procedimiento de análisis wavelet consiste en adoptar una función wavelet prototipo, llamada *wavelet analizante*, o *wavelet madre*; el análisis temporal es realizado con una versión contraída y de alta frecuencia de una wavelet prototipo, mientras que el análisis en frecuencia se hace con una versión trasladada de baja frecuencia de la misma.

Los campos de aplicación del análisis wavelet incluyen la astronomía, acústica, ingeniería nuclear, procesamiento de señales e imágenes, música, estudio de la resonancia magnética, reconocimiento de patrones de voz, fractales, predicción de sismos, radares, visión humana, entre muchas otras.

5.2 PERSPECTIVA HISTÓRICA

En su historial matemático, el análisis wavelet tiene distintos puntos de origen, mucho de este trabajo fue realizado en la década de 1930, y en ese momento, los esfuerzos realizados por separado no parecían ser parte de una teoría que fuera coherente. Obsérvese, pues, su evolución por etapas:

ETAPA ANTERIOR A 1930

Antes de la década de 1930, la principal rama matemática relacionada con wavelets era guiada por Joseph Fourier, alrededor de 1807, con sus teorías del análisis en frecuencia, ahora conocidas como Síntesis de Fourier. Él aseguraba que cualquier función periódica $f(x)$ se representa por la suma:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Lo cual era su serie de Fourier, los coeficientes de Fourier se obtenían de las ecuaciones:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

La idea de Fourier jugó un papel importantísimo en la evolución de la idea que los matemáticos tenían acerca de las funciones; de hecho, abrió una puerta al nuevo "universo funcional".

Después de 1807, al haber explorado el significado de las funciones, las matemáticas se orientaron gradualmente del concepto previo del análisis en frecuencia, al del análisis en escala. Esto es, analizar una función mediante la creación de estructuras matemáticas que variaran en escala. ¿De qué manera? Construyendo una función, trasladándola en una cierta cantidad, y cambiando su escala.

Si se aplica la siguiente estructura en la aproximación de una señal, y se repite el procedimiento, tomando esa misma estructura, trasladándola otra cantidad y variando de nuevo su escala, resulta ser que la señal es menos sensible al ruido, ya que medimos sus fluctuaciones en distintas escalas, y dicho ruido se puede despreciar al conocer la señal original de mejor manera.

La primera mención sobre wavelets apareció en el apéndice de tesis de A. Haar, en 1909.

DÉCADA DE 1930

En esta década, muchos grupos investigaron de manera independiente la representación de funciones usando funciones base variantes en escala.

Paul Levy un físico de la época, utilizó la función variante en escala Haar para estudiar el movimiento Browniano, una señal de tipo aleatorio.

Las funciones variantes en escala fueron de mayor utilidad para Levy que las funciones base de Fourier, debido a pequeños detalles del movimiento Browniano que eran muy complicados.

PERÍODO DE 1960 A 1980

Entre estas dos décadas, los matemáticos Guido Weiss y Ronald R. Coifman estudiaron los elementos básicos de un espacio funcional, llamados átomos.

Su objetivo era encontrar "átomos" para una función común, que permitiera descifrar las reglas de ensamblaje de las funciones. De esta manera, al conocer dichas reglas, se podría reconstruir un espacio funcional utilizando dichos átomos.

En 1980, Grossman y Morlet, físico e ingeniero respectivamente, definieron *grosso modo* el concepto de wavelets en el contexto de la física cuántica, por lo que ofrecieron una forma de ver las wavelets, basados en su intuición física.

DESPUÉS DE 1980

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En 1985, Stephane Mallat dio otro empujón al concepto de wavelets mediante su trabajo en el procesamiento digital de señales.

Tomando el trabajo de Mallat, Meyer construyó las primeras wavelets que, a diferencia de las de Haar, sí eran continuamente diferenciables.

Ingrid Daubechies utilizó también el trabajo de Mallat para construir un conjunto de funciones wavelet base ortonormales, las cuales son, quizá la piedra de toque de las aplicaciones wavelet hoy en día.

5.3 FUNCIONES BASE Y FUNCIONES ESCALA

Es simple explicar lo que es una función base, si nos trasladamos del campo de lo análogo (funciones) a lo discreto (vectores). Cualquier vector bidimensional (x,y) es una combinación de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$. Estos dos vectores forman los vectores base de (x,y) , dado que el vector $(1,0)$ multiplicado por x arroja el vector $(x,0)$.

De la misma manera, multiplicar $(0,1)$ por y nos arroja $(0,y)$, lo que sumado nos da el vector (x,y) . Los vectores base ideales cumplen también con la condición de ser perpendiculares, u ortogonales entre sí; para la base $(0,1)$ $(1,0)$ esta condición se cumple también.

Ahora, regresando al campo de lo analógico para ver como estos conceptos están relacionados con las funciones base. En lugar del vector (x,y) , tenemos a la función $f(x)$. Considérese que $f(x)$ es, por ejemplo, un tono musical, por poner un ejemplo, Do. Es posible construir Do si se suman senos y cosenos combinando diferentes amplitudes y frecuencias. Los senos y cosenos son funciones base en este ejemplo, además de ser los elementos de la anteriormente mencionada "Síntesis de Fourier".

Se puede también, incluir la condición de ortogonalidad en esta serie de senos y cosenos, si se eligen los términos de función senoidal y cosenoidal indicados, cuyo producto punto sea cero. El conjunto de funciones seno y coseno que sean ortogonales y que construyan Do son la base ortogonal que resuelve el problema.

Ahora bien, ¿qué es una función escala y cómo se logra que varíe? Una función base varía en escala cuando se "corta" en pedazos utilizando distintos tamaños de escala. Por ejemplo, imagínese que se tiene una señal con dominio desde 0 hasta 1. Podemos dividir la señal con dos funciones impulso que varíen de 0 a 1/2, y de 1/2 a 1; luego, podemos volver a partirla usando cuatro funciones impulso que varíen de 0 a 1/4, 1/4 a 1/2, 1/2 a 3/4 y 3/4 a 1. Al volver a repetir el proceso usando más funciones impulso tendríamos varias representaciones de la función original, pero con distintos niveles de resolución o escala.

5.4 ANÁLISIS WAVELET

A continuación se enfocará la atención en cada uno de los elementos del análisis wavelet:

5.4.1 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

La escala y traslación de una "función madre", o wavelet analizante $\phi(x)$ definen una base ortogonal, nuestra base wavelet es la siguiente:

$$\phi_{(t, \lambda)}(x) = 2^{-\frac{x-t}{\lambda}} \phi\left(2^{-\frac{x-t}{\lambda}} - t\right)$$

En donde s y l son enteros que cambian en escala y traslación la función madre $\Phi(x)$ para generar ondeletas, tal como las de la familia Daubechies.

El índice de escala s indica el ancho de la wavelet, y el índice de locación l dice su posición. Nótese que las funciones madre son reescaladas en potencias de dos, y trasladadas en enteros.

Lo que hace a las wavelets interesantes es su similitud con ellas mismas causada por sus escalas y traslaciones; así que una vez que conocemos a la wavelet madre, conocemos todo acerca de la base.

Para ligar todo el dominio de datos en diferentes resoluciones, la wavelet analizante se usa en una ecuación de escala:

$$W(x) = \sum_{k=-1}^{N-2} (-1)^k c_{k+1} \Phi(2x+k)$$

En donde $W(x)$ es la función de escala para la función madre $\Phi(x)$, y c_k son los coeficientes wavelet. Los coeficientes wavelet deben cumplir con las constantes lineales y cuadráticas de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k = 2 \quad , \quad \sum_{k=0}^{N-1} c_k c_{k+2l} = 2 \delta_{l,0}$$

En donde δ es la función delta y l es el índice de localización.

Una de las características más útiles de las ondeletas (wavelets) es la facilidad con la que se pueden escoger los coeficientes que definan un sistema wavelet que se adapten a un problema específico.

En el artículo original de Ingrid Daubechies, ella desarrolló familias de sistemas de wavelets específicos, los cuales se ajustaban bastante bien para representar el comportamiento polinomial. La wavelet de Haar es aún más simple, y se usa comúnmente para propósitos educativos.

Es bueno, pensar en los coeficientes $\{c_0, \dots, c_n\}$ como un filtro. El "filtro" de coeficientes es colocado en una matriz de transformación, la cual se aplica a un vector de datos. Los coeficientes son ordenados de acuerdo a dos patrones dominantes, uno que funciona como un filtro suavizante (algo parecido a un promedio de movimiento), y otro que trabaja para mostrar los "detalles" de los datos. Estos dos patrones son conocidos usualmente como el par de *filtros de espejo de cuadratura*, en términos de procesamiento de señales.

Para completar la discusión sobre la transformada wavelet discreta, observemos cómo se aplica la matriz wavelet de coeficientes al vector de datos. Esta última se aplica con un algoritmo jerárquico, algunas veces llamado *algoritmo piramidal*. Los coeficientes wavelet pueden ser dispuestos de manera que las columnas impares contengan los coeficientes que actúen como el filtro suavizante, y las columnas pares contengan los detalles de señal. La matriz es aplicada a toda la longitud del vector original; luego el vector es suavizado y cortado por mitad, y la matriz se aplica de nuevo; entonces el vector suavizado es vuelto a suavizar, cortado nuevamente y se le aplica una vez más la matriz. Este proceso continúa hasta que se tiene un número deseado de datos suavizados. Por salida, de la transformada wavelet discreta tendremos el conjunto remanente de datos suavizados y todos los componentes de detalle acumulados.

5.4.2 PAQUETES WAVELET

La transformada wavelet es, de hecho, un subconjunto de otra transformada más versátil, la transformada de paquetes wavelet. Los paquetes wavelet son combinaciones lineales particulares de wavelets: Estas forman bases que conservan muchas de las propiedades de ortogonalidad, suavidad y localización de sus ondas padre. Los coeficientes en la combinación lineal son computados por un algoritmo recursivo, haciendo cada nuevo coeficiente de paquete wavelet secuenciar la ruta de su propio árbol de análisis, esto es, seguir la ruta de sus padres.

5.4.3 FORMAS DE ONDA ADAPTADAS

Dada la infinita cantidad de funciones base disponibles, es necesaria una elección entre éstas cuando se quiere representar de la mejor manera una señal. Para una señal dada, la mejor función base es una base de formas de onda adaptadas: la base seleccionada carga información substancial acerca de la señal. Y si la descripción de la base es eficiente (esto quiere decir, que contenga la menor cantidad de términos para representar la señal), entonces la señal estará comprimida.

Algunas de las características deseables para una base wavelet son:

1. Rápido de productos punto con otras funciones base.
2. Buena localización espacial, de manera que sea fácil identificar la posición de una señal que contiene componentes grandes de frecuencia.
3. Buena localización en frecuencia, de manera que sea fácil identificar oscilaciones de señal
4. Independencia, esto es, que una porción de señal no esté cubierta por demasiados elementos de la función base.

5.5 DESCRIPCIÓN FORMAL

En general, se dice que una función ψ es una wavelet si cumple con un criterio esencial: la familia de funciones que se forman al cambiar al escala de la función ψ en incrementos que son potencia de dos (2) debe formar una base ortonormal en L^2 . De manera matemática, la función ψ deberá cumplir dichas características:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty$$

Lo que quiere decir que la función deberá ser finita, y:

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n)$$

Lo que nos habla de que las funciones ψ deben generarse a partir de potencias de dos.

Para obtener una representación de la señal, se utilizará una cierta familia de Wavelets como funciones analizantes. Esta es una familia de funciones derivadas de una sola función: la *wavelete madre*, la cual está regida por los parámetros a y b :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

El parámetro a proporciona la dilación (la cual es inversamente proporcional a la frecuencia); el parámetro b representa el desplazamiento (localización en tiempo). Un ejemplo de una familia wavelet es la llamada "Sombrero Mexicano", la cual está dada por:

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$$

En la figura 5.1 se presentan tres miembros de la familia Sombrero Mexicano.

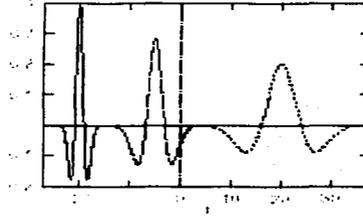


Figura 5 1: Wavelet sombrero mexicano

5.6 LA TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA

De manera análoga al estudio de la transformada Short Time de Fourier, o Transformada de ventana Wavelet (WFT, windowed Fourier transform), existe, como ya se vio previamente, la transformada Wavelet continua, o CWT por sus siglas en inglés. Ésta se define por la siguiente fórmula:

$$Wf_a(b) = \int f(t)\psi_{a,b}^*(t)dt$$

Y la transformada inversa wavelet está dada por:

$$f(t) = C_\psi^{-1} \iint Wf_a(b)\psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}$$

Una función wavelet debe cumplir con la condición de admisibilidad:

$$C_{\psi} = 2\pi \int \frac{|\psi(u)|^2}{|u|} du$$

Lo cual es reducido a la siguiente expresión, si ψ es continua:

$$\psi(0) = 0 \Leftrightarrow \int \psi(t) dt = 0$$

Lo anterior demuestra que una wavelet presenta un carácter oscilatorio. Es importante hacer notar que la transformada wavelet continua es esencialmente redundante, lo cual significa que no existe un mapeo o correspondencia uno a uno entre el espacio funcional L^2 y el espacio de las transformadas wavelet. Sin embargo, esta redundancia puede ser reducida o eliminada mediante la discretización de los parámetros a y b : Esto conduce al concepto de la Transformada Wavelet Discreta (DWT, por sus siglas en inglés). Los diferentes esquemas en que las transformadas wavelet discretas se dividen son dos:

1. Redundante.- si una señal digitalizada consiste de N muestras, entonces una transformada wavelet discreta redundante.
2. No redundante.- En este caso, se utilizan wavelets que formen una base ortogonal.

5.7 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

5.7.1 CUADROS WAVELET

Sustituyendo la fórmula de la madre wavelet en la de la transformada nos damos cuenta de que la transformada wavelet se trata únicamente de una convolución, de la función $f(t)$ con una wavelet escalada $\psi_a(t)$, una convolución en tiempo equivale a una multiplicación en el dominio de la frecuencia.

Por tanto, para una señal muestreada la transformada es trabajo de la transformada discreta de Fourier, la multiplicación y la transformada inversa de Fourier; sin embargo, esto puede complicarse demasiado en términos de computación, específicamente en el procesamiento de imágenes. Es por lo tanto, necesario realizar la discretización mediante la restricción de los parámetros a y b en una forma preestablecida, como por ejemplo: $a = a_0^m$ y $b = nb_0 a_0^m$, donde a_0 siempre es mayor a 1, y b_0 siempre es mayor a 0. Una elección popular son los valores $a_0=2$ y $b_0=1$. Ya que la escala varía en potencias de 2, esto genera una progresión diádica, (de diadas, o pares). La ventaja de dicha elección se vuelve clara cuando se considera una señal digitalizada (o imagen), donde cada muestra se toma a intervalos equidistantes, la evaluación de los coeficientes de la transformada discreta wavelet serán tomados en posiciones $b=n2^m$, lo que coincide con la posición de algunas muestras de la señal original. De cualquier forma, otras formas de discretización son posibles.

Se discutirá ahora una transformada wavelet particular, introducida por Mallat, la cual está basada en un cuadro wavelet discreto con una descomposición diádica. La ventaja de este esquema es que puede ser implementado mediante la aplicación de filtros de respuesta impulso finita (FIR), lo cual evita el uso de la transformada rápida de Fourier .

5.7.2 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA DIÁDICA

Esta transformada toma una progresión de frecuencia diádica ($a = 2^m$) y confía en una forma específica de wavelet, es decir, es derivada de una función suavizante.

Considérese a $\theta(x)$ una función suavizante que define una wavelet:

$$\psi(x) = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$$

Si la transformada wavelet de una señal $f(x)$ puede ser definida como:

$$Wf_a(b) = (f * \psi_a)(b)$$

Podemos decir que la transformada wavelet de la función suavizante es definida por:

$$Wf_a(b) = (f * (a \frac{\partial \theta_a}{\partial x}))(b) = a \frac{\partial}{\partial x} (f * \theta_a)(b)$$

La interpretación de la fórmula anterior es de la siguiente manera:

En $Wf_a(b)$ si a se agranda, $f(x)$ se suavizará aún más y $Wf_a(b)$ contendrá información acerca de las variaciones de las componentes de frecuencia bajas en la señal.

Para obtener una progresión de frecuencia diádica, los parámetros de escala y desplazamiento deben ser discretizados como: $a = 2^m$, y $b = n$. Fijese la escala en la cual la señal $f(x)$ es digitalizada igual a $m = 0$, entonces $m = 1, 2, \dots$ corresponden a escalas más bajas, o de menor resolución, en las cuales se encuentra menos información de la señal.

5.8 BASES WAVELET ORTONORMALES

La redundancia de las transformadas presentadas anteriormente tiene la desventaja de ser ineficiente cuando se habla de la computación en un ordenador, y aunque la transformada de tipo diádico es redundante, tiene la capacidad de computarse de manera más rápida, ya que se implemente con filtros FIR. Sin embargo, sería bueno deshacerse por completa de esta redundancia. Para este fin es necesaria una base wavelet ortonormal. Una posibilidad reside en la wavelet Haar:

$$\psi^h = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \dots\dots\dots 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{encualquier otro caso} \end{cases}$$

En esta wavelet se utiliza la discretización con el patrón $a = 2^m$ y $b = n2^m$. La wavelet Haar fue la primera wavelet históricamente hablando, pero no es muy utilizada debido a ciertas debilidades, una de ellas es que, a pesar de estar bien localizada en el dominio del tiempo, no lo está en el de la frecuencia, lo cual no la hace la mejor base para analizar señales que varían constantemente.

Una alternativa en cuanto a bases ortonormales es la base Littlewood-Paley:

$$\psi'(u) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi} & \dots \pi \leq u \leq 2\pi \\ 0 & \dots \text{en.cualquier.otro.caso} \end{cases}$$

Muchos investigadores han intentado encontrar base ortonormales con mejores propiedades de localización tanto en tiempo como en frecuencia, entre algunas de las más conocidas se encuentran las de Meyer y de Battle y Lemarié, propiedades de localización aún mejores se encuentran en las bases ortonormales de Daubechies.

La "belleza" de todo esto reside en que pueden ser puestos en un esquema de resolución múltiple, el cual fue concebido por Meyer y Mallat.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO 6

APLICACIONES

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

6.1 INTRODUCCIÓN

La introducción del estudio de wavelets al campo del procesamiento digital de señales constituyó una herramienta poderosísima para los ingenieros en estos días, dado que resuelve muchos de los problemas que enfrentan diariamente.

El procesamiento wavelet en una dimensión (1-D) es muy popular cuando se tratan señales acústicas, música, y señales eléctricas transitorias. El procesamiento wavelet en dos dimensiones (2-D) envuelve principalmente el estudio de la compresión de imágenes, reducción de ruido y reducción de interferencia.

En los ejemplos siguientes los algoritmos wavelet trabajan en sinergia con otras técnicas de procesamiento para producir una solución satisfactoria al problema. La descomposición wavelet juega un papel vital en la separación de una señal en sus componentes, antes de aplicar otras técnicas DSP (Digital Signal Processing, procesamiento digital de señal).

6.2 IDENTIFICACIÓN DE FALLAS EN SOPORTES DE FERROCARRIL.

6.2.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

El reconocimiento de señales acústicas ha ganado mucha atención en años recientes, y los campos de aplicación que se le han atribuido van desde la milicia (reconocimiento de naves en sonares), medicina (diagnósticos cardiopulmonares basados en los latidos del corazón), y la industria (supresión de ruido en las fábricas). El primer ejemplo a estudiar precisamente

viene de la industria, ya que se intentará identificar los defectos de fabricación en los soportes de ferrocarril.

La técnica utilizada para este fin es el reconocimiento de señales acústicas. La idea general aquí es identificar un patrón sonoro que se tiene previamente almacenado en una librería de "firmas" acústicas. El uso de wavelets para separar señales características para el reconocimiento ofrece una gran potencial de éxito.

Es necesario, para reconocer un patrón de manera confiable, contar primero con un conjunto de características distintivas que formen un vector de características para cada patrón. Dichos vectores son obtenidos de una serie de pruebas realizadas a un evento en particular, todo esto con el objetivo de generar un algoritmo de reconocimiento de patrones, usualmente llamado Red Neuronal Artificial (ANN por sus siglas en inglés). Una vez obtenidos los vectores de características mediante entrenamiento, se almacenan éstos en una librería que servirá para su posterior comparación con vectores de características de eventos desconocidos.

En este ejemplo se aplican técnicas wavelet y una Red Neuronal para identificar varios tipos de fallas en los soportes de las ruedas de los carros de ferrocarril. La Asociación Americana de Ferrocarriles proveyó de señales acústicas de 18 distintas fallas en los soportes en dos tipos de tamaños, la clase E y la F. Cada conjunto de datos fue tomado a velocidades equivalentes a 30 y 80 millas por hora. A continuación se presenta el algoritmo utilizado en la prueba:

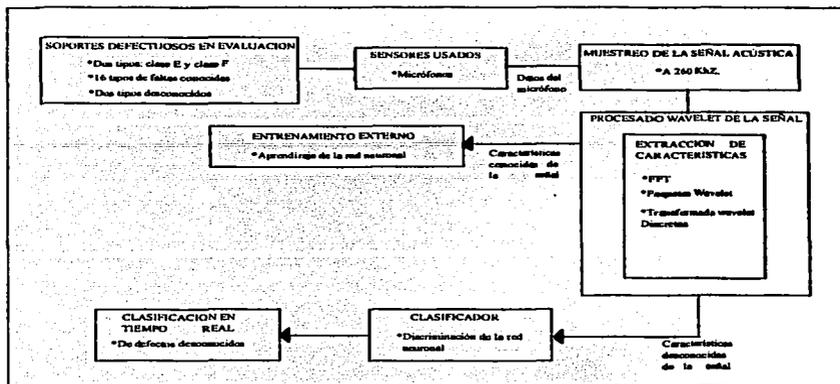


Figura 6.1: Algoritmo de reconocimiento

6.2.2 REDES NEURONALES

Los fundamentos de las redes neuronales pueden ser identificados en el perceptrón de una capa, el cual era capaz de implementar límites de decisión lineales. Actualmente, el campo de las redes neuronales es bastante amplio, y existe una variedad de redes capaces de modelar límites de decisión mucho más complejas.

Un ejemplo típico de una red neuronal es el perceptrón multicapa de retroalimentación presentada en la figura 6.2:

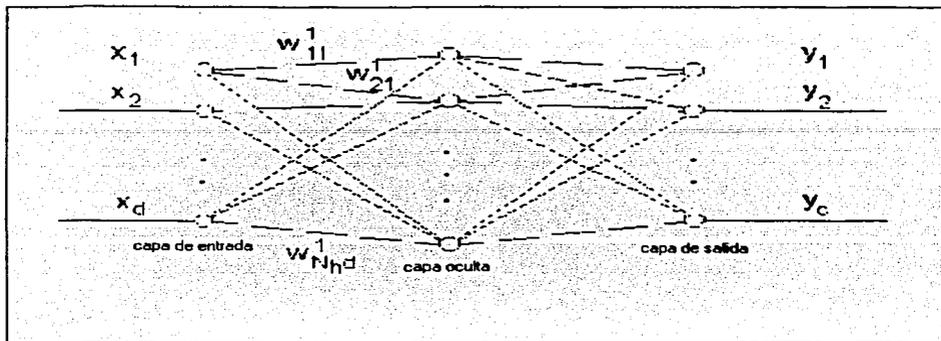


Figura 6.2: Perceptrón Multicapa con d neuronas en la capa de entrada, N_h neuronas en la capa oculta, y c neuronas en la capa de salida.

Dicho perceptrón consiste de varias neuronas agrupadas en varias capas. Las neuronas que están entre capas diferentes están conectadas, el número de capas (dos) neuronas, y su conectividad constituyen la arquitectura de la red. En este modelo de red de retroalimentación, las características son recibidas en la capa de entrada, y propagadas a través de las capas ocultas hacia la capa de salida.

Cada neurona procesa la señal que recibe y envía la salida a las siguiente capa. La salida de la j neurona en la primera capa oculta está dada por:

$$salida_j = g_j \left(\sum_{i=1}^d \omega_{ji} x_i \right)$$

donde ω_{ij} es el peso asociado con la conexión de la i -ésima neurona a la j -ésima neurona en la primera capa oculta. Las funciones g_j de activación son parte de la arquitectura de la red

(cada neurona tiene su propia función de activación, la cual es usualmente una función no lineal). Un ejemplo de una función de activación es la siguiente:

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Las salidas de la primera capa son entonces enviadas a la segunda capa y procesadas de la misma forma (utilizando diferentes pesos y funciones de activación). Para una red con d neuronas de entrada y N_h neuronas ocultas, la expresión para las neuronas ocultas es:

$$y_k = g_k \left(\sum_{j=1}^{N_h} \omega_{kj} g \left(\sum_{i=1}^d \omega_{ji} x_i \right) \right)$$

Las funciones de activación para la capa de salida son muchas veces la función escalón unitario

($g(x)$ es igual a 1 para valores de x mayores que cero, y es igual a cero en cualquier otro caso); por consecuencia, la función de salida de la red neuronal es una configuración de unos y ceros. Con cada configuración, un patrón es asociado.

El diseño del clasificador (conocido también como entrenamiento de la red) es logrado mediante el otorgamiento a los pesos de un valor inicial (casi siempre aleatorio), y ajustándolos. Este proceso se realiza usualmente mediante la alimentación iterativa de las muestras de entrada en la red y observando la salida. La diferencia entre la salida observada y la deseada es usada para generar un criterio de error. Los pesos entonces son recalibrados para minimizar este criterio. El número de veces que una muestra es tomada del conjunto de muestras de diseño para minimizar el criterio de error es llamado tiempo de entrenamiento; y la regla para actualizarlas es llamada regla de aprendizaje. Una regla

importante es la llamada regla de propagación inversa, la cual hizo posible el desarrollo del perceptrón multicapa. Una función de error popular utilizada para derivar esta regla es la suma de los cuadrados de la diferencia de salida actual y la deseada de la red. Esta función de error puede ser diferenciada con respecto a los pesos de la red, y sus derivadas pueden ser usadas para encontrar valores que minimizarán aún más el error.

Es útil hacer notar que las redes neuronales particionan el espacio de características en diversas zonas de decisión. La fórmula de las neuronas escondidas asigna un vector x a una clase particular. Las posibles formas que los límites de decisión pueden tomar están especificadas por la arquitectura de la red (el número de nodos, su interconectividad y funciones de activación). La forma exacta del límite de decisión es determinada por los pesos, los cuales son adaptados durante el entrenamiento.

La razón por la cual este esquema es llamado "red neuronal" es que tiene cierta semejanza con la estructura del cerebro humano. De manera muy simplificada, el cerebro consiste de neuronas interconectadas por dendritas a través de las cuales las señales (en forma de impulsos eléctricos y químicos) se propagan. Esta comparación le da, de hecho, más crédito a las redes neuronales de lo que merecen, las hace parecer como entidades que pueden aprender por sí solas, imitando la inteligencia humana. Sin embargo, al observar todas las funciones anteriormente presentadas, nos damos cuenta de que todo esto no se trata más que de una serie de aplicaciones de reglas matemáticas que dependen de los pesos y funciones de activación.

6.2.3 RESULTADOS DE LA PRUEBA

Para la obtención de los vectores de características, se utilizaron las transformadas wavelet discreta, y rápida de Fourier, para efecto de realizar una comparación de los métodos. Los vectores de características son usados para el entrenamiento de la red neuronal. La red neuronal utilizada en este ejercicio tiene tres neuronas escondidas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Una vez analizados los resultados del ejercicio, se comprueba que el uso de la red neuronal en conjunto con la técnica wavelet constituyó una alianza poderosísima, esta por encima del simple análisis espectral que ofrecía la transformada rápida de Fourier. Los dos soportes desconocidos que contenían más de un defecto pudieron ser identificados correctamente.

A pesar de que el análisis de Fourier proveía casi de los mismos resultados que su análogo wavelet, la transformada rápida de Fourier falla en reconocer uno de los soportes, ya que no identifica una de los defectos de éste, además de ser necesario resaltar la carencia de la transformada rápida de Fourier en cuanto a representación tiempo-frecuencia, esto provocando que frecuencias aisladas o que se presentan en tiempos pequeños sean difíciles de identificar.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CONCLUSIONES

El estudio que se acaba de presentar deja clara la importancia, en primer lugar, del estudio de las señales y sus componentes en frecuencia, ya que su contribución a las distintas áreas de la ciencia ha llegado a ser imprescindible en muchos casos.

Es ahora evidente que el análisis Wavelet es la herramienta más poderosa, más avanzada, y a la vez más sencilla dentro de toda la variedad de opciones que el análisis espectral nos ofrece. Su capacidad de multiresolución (inexistente en el análisis de Fourier) permitió en el ejemplo de detección de piezas defectuosas identificar errores que otros métodos hubieran pasado por alto, y la capacidad del análisis tiempo-frecuencia es otra más de las armas con las que el análisis wavelet se coloca a la cabeza.

Es la esperanza del redactor de esta tesis que el texto haya sido comprensible y útil al lector, aunque siempre es recomendable ampliar los conocimientos adquiridos mediante la investigación y sobre todo, el cuestionamiento de todo aquello escrito.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Bibliografía

Libros:

1. ALBIOL, A. **Tratamiento digital de la señal**, España, Servicio de publicaciones de la Universidad politécnica de Valencia, 1999, p. 263.
2. GOSWAMI, Jaideva C.; y Chan, Andrew K., **Fundamentals of Wavelets**, Estados Unidos de América, John Wiley & Sons, Inc; 1999, 305 pp.
3. VAN DER WOUWER, Gert, **Wavelets for Multiscale Texture Analysis**, Bélgica, Universidad de Amberes, 1998, 161 pp.
4. <http://www.nssl.noaa.gov/~lakshman/Papers/wavelet/wavelet.html>
5. http://www.amara.com/IEEEwave/IW_fourier_ana.html
6. http://www.amara.com/IEEEwave/IW_history.html
7. http://www.amara.com/IEEEwave/IW_overview.html
8. <http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/wavelets/wavelets.html>

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN