00324

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

44

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESTUDIO DE LA PARABOLA: UN ENFOQUE PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

J O R G E Z A M O R A C R U Z

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2003

A

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

El estudio de la Parábola: Un enfoque para el Nivel Medio Superior

realizado por **JORGE ZAMORA CRUZ**

con número de cuenta **06806087-7** quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza**	
Propietario	**M. en C. Emma Lam Osnaya**	Emma Lam O.
Propietario	**M. en C. Alejandro Bravo Mojica**	
Suplente	**Dr. Fernando Brambila Paz**	
Suplente	**M. en C. Virginia Abrín Batule**	Virginia Abrín Batule

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Índice

Introducción 1

Nota histórica 2
La parábola como la intersección de un plano y un cono 2

Capítulo I

Definición de la parábola 4

Lugar geométrico 4
Definición de la parábola 4
La justificación de la perpendicularidad de la recta s 8
La simetría de la parábola con respecto a la recta s 9

Capítulo II

Elementos de la parábola 11

La longitud del lado recto o ancho focal 12

Capítulo III

Ecuación de la parábola con vértice en el origen 13

La simetría de la parábola a través de su ecuación 20
Dada la ecuación de la parábola con vértice en el origen determinar algunos de sus elementos 22
Ejemplos 22
Ejercicios 26
Dados algunos elementos de la parábola determinar la ecuación en su primera forma ordinaria 27
Ejemplos 27
Ejercicios 30

Capítulo IV

Ecuación de una parábola con vértice en (h,k) y ejes paralelos a los coordenados 31

Dada la ecuación de la parábola en su segunda forma ordinaria determinar sus principales elementos........................ 37
Ejemplos.. 37
Ejercicios.. 41
Dados algunos elementos de la parábola determinar la ecuación en sus segunda forma ordinaria........................ 42
Ejemplos.. 42
Ejercicios.. 45

Capítulo V

Ecuación general de una parábola........................ 47

Dada la ecuación general de una parábola determinar sus elementos........................ 49
Ejemplos.. 49
Ejercicios.. 53
Dados algunos elementos de la parábola determinar la ecuación en su forma general........................ 53
Ejemplos.. 54
Ejercicios.. 56

Capítulo VI

Rotación de ejes.. 58

Eliminación del término en xy........................ 61

Capítulo VII

Ecuación de una parábola cuando su eje es oblicuo a los coordenados........................ 65

Ejemplos.. 65
Ejercicios.. 82

Capítulo VIII

Ecuación de la tangente a una parábola........................ 83

D

Ejemplos.. 91
Ecuación de la normal a una parábola.................................... 98
Ejemplos.. 98
Ejercicios.. 100

Capítulo IX

Familia de parábolas.. 101
Ejemplos.. 101
Ejercicios.. 111

Capítulo X

Aplicaciones de la parábola... 112

Arcos parabólicos.. 112
Ejemplos.. 115
Ejercicios.. 119
Puentes colgantes.. 120
Ejemplos.. 122
Ejercicios.. 124
La propiedad de reflexión de la parábola............................... 127
Ejemplos.. 131
Ejercicios.. 133
Trayectoria parabólica... 135
Ejemplos.. 141
Ejercicios.. 146

Conclusiones.. 148

Bibliografía.. 149

A DIOS Y LA VIRGEN DE GUADALUPE

Por haberme dado la vida, por atender a mis súplicas y ruegos, por nunca dejarme sólo y darme la dicha de haberme realizado como padre.

A LA MEMORIA DE MIS PADRES

Leonila Cruz C. y Emiliano Zamora B. Por el amor y cuidados que me brindaron en mis años de infancia, por sus sabios consejos y ejemplos que me dieron para ser un hombre de bien, y darme valor para afrontar las adversidades de la vida, por sus preocupaciones, sacrificios y trabajo, que realizaron para darme educación.

A MI ESPOSA

Rosa Ma. Dolores Pérez B. Por ser la mujer más noble y comprensiva, por ser la compañera de mi vida y compartir conmigo, alegrías, angustias y tristezas, por haberme dado con la gracia de Dios a mis hijos, y cuidarlos con tanto esmero y cariño.

A MIS HIJOS

Jorge E. Zamora P. y José A. Zamora P. Que son la ilusión más grande de mi vida, mi motivación para vivir, y la razón para realizar mi mejor esfuerzo y ejemplo. Por sus orientaciones y asesorías que me brindaron, para la realización, de la captura de esta tesis.

A MI ÁNGEL DE LA GUARDA

José V. Zamora P. Que Dios tuvo a bien llevárselo de este mundo, y que donde quiera que esté, nos cuide y nos bendiga.

A MIS HERMANOS

Maura Marina, Ma. Felix, Martha, Ma. Magdalena, Mónica y Emiliano. Por su cariño, comprensión, confianza y motivación en todos los momento de mi vida.

A MIS CUÑADOS Y SOBRINOS

Con aprecio, por sus atenciones, respeto y compañía que siempre han brindado para mí y mi familia.

AL COLEGIO DE BACHILLERES

Por abrirme sus puertas y darme la oportunidad de poder trabajar como docente en la Institución, por la confianza que depositó en mí, en brindarme su apoyo para poder titularme.

A La M. en C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

Por su comprensión, sus orientaciones, consejos y su invaluable tiempo y paciencia que dedicó a la dirección de esta tesis.

AL JURADO

Por tan valioso tiempo que tuvieron a bien prestar, a la lectura del presente trabajo, sus acertadas observaciones y su presencia en mi examen profesional.

A LA UNIVESIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, A LA FACULATD DE CIENCIAS Y SU DISTINGUIDO PESONAL DOCENTE

Por albergarme en su casa de estudios, templo de enseñanza y de cultura, fuente inagotable de talentos, que a través de su distinguido personal docente, preparan a la juventud de México, para un mejor futuro de la Nación.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está elaborado con la finalidad de exponer una forma o método, para desarrollar el estudio de una curva plana de gran relevancia en matemáticas, conocida con el nombre de Parábola, la cual pertenece a las cónicas, y donde las demás a parte de ésta son: la circunferencia, elipse e hipérbola. Siendo todas parte de los contenidos que conforman la materia de Geometría Analítica.

Está pensado para estudiantes de Bachillerato, ya que es en éste nivel donde se imparte la asignatura: Geometría Analítica, como una rama de la ciencia matemática, que resulta de la unión del álgebra con la geometría euclidiana, razón por la cual, esta asignatura es posterior a los cursos de álgebra, geometría euclidiana y trigonometría. Y forma parte del conocimiento matemático, del tronco común, del plan de estudios de Educación Media Superior.

En cursos de geometría elemental, se estudian dos líneas, la recta y la circunferencia, líneas que también son estudiadas por la geometría analítica y que preceden al de la parábola. Por tanto, se aplicarán los conocimientos analíticos relacionados con ellas.

En este proceso, la parábola se define en términos de un conjunto de puntos que cumplen ciertas condiciones, se determinan sus elementos, se deducen las ecuaciones correspondientes que las representan, según la localización del vértice y su orientación, obteniéndola también, en su forma general, resultando ser éstas de segundo grado. Como en el caso de la circunferencia, se obtienen elementos a partir de su ecuación y su ecuación a partir de ciertos elementos. Se explica la rotación de ejes, y se aplica para encontrar el ángulo que permita eliminar el término xy, en la ecuación de la parábola cuando el eje de ésta es oblicuo a los coordenados. Se encuentra la ecuación de la tangente y de la normal. Se determinan ecuaciones de familias de parábolas, y finalmente se dan aplicaciones.

En la mayoría de los capítulos aquí tratados, se dan ejemplos, dispuestos de forma que se pueda seguir con facilidad el procedimiento natural que conduce a obtener el resultado esperado. Seguidos de una serie de ejercicios, para consolidar y reafirmar el conocimiento.

Esperando como objetivo principal de esta tesis, el servir como material didáctico y de apoyo, a estudiantes y docentes de Educación Media Superior, en el proceso de enseñanza aprendizaje, correspondiente al tema de la parábola.

Nota Histórica

El matemático griego Apolonio (200 a.C) desarrolló una investigación muy completa acerca de las secciones cónicas.
Su obra "Secciones Cónicas", incluye cerca de 400 proposiciones relacionadas a los conos. Se atribuye a Apolonio la creación de los nombres "elipse", "parábola" e "hipérbola" y el haber descubierto que todas estas curvas resultan de la intersección de un cono con cierto plano, razón por la cual, también se les conoce, simplemente con el nombre de cónicas.
Las secciones cónicas, siguen interesando a los matemáticos, y su teoría la completaron esencialmente, Descartes y Pascal durante el siglo XVII.

La Parábola como la Intersección de un Plano y un Cono

Si un plano en particular es paralelo a una generatriz de un cono circular recto, entonces, la intersección del cono con dicho plano, es una parábola, figuras 1, 2 y 2-A.

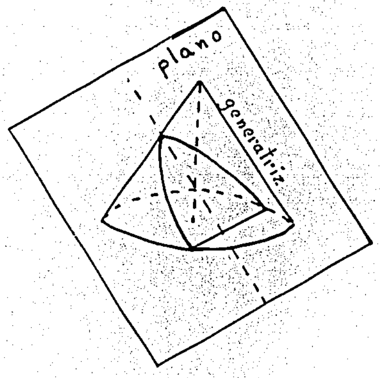


fig. 1

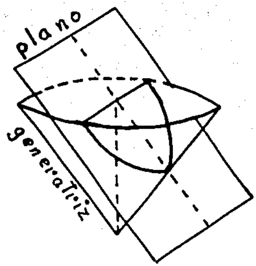


fig. 2

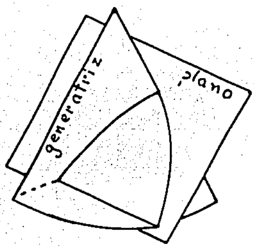


fig. 2-A

CAPÍTULO I

Definición de la Parábola

La parábola es una curva que comúnmente en algún momento hemos visto, en antenas parabólicas o en construcciones arquitectónicas. En el recorrido o trayectoria que sigue cualquier objeto, cuando es lanzado con cierta velocidad e inclinación respecto a una vertical, y la gravedad es la única fuerza que actúa sobre él. Por ejemplo, la trayectoria que describe una pelota de béisbol al ser lanzada.
También se observa, en el recorrido que siguen las partículas de agua, que salen de una manguera a cierta presión.

Lugar Geométrico

Es la línea determinada por un conjunto de puntos en un plano, cuyas coordenadas, satisfacen una ecuación o propiedad común.

Definición de la Parábola

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, que están a la misma distancia de una recta fija d, y de un punto fijo F, donde la recta no contiene al punto.
El punto fijo F, se llama foco, y la recta fija d, directriz de la parábola.

Para comprender mejor la definición, se hace una interpretación gráfica de ésta, en la figura 3.
En donde, al punto V que pertenece a la parábola, se le denota de forma diferente por su posición especial, y donde más adelante daremos su definición.
En la figura, la recta s que pasa por el foco y por el punto V, es perpendicular a la directriz d, en el punto A. El punto D_5 es el pie de la perpendicular trazada desde P_5 a la directriz d.

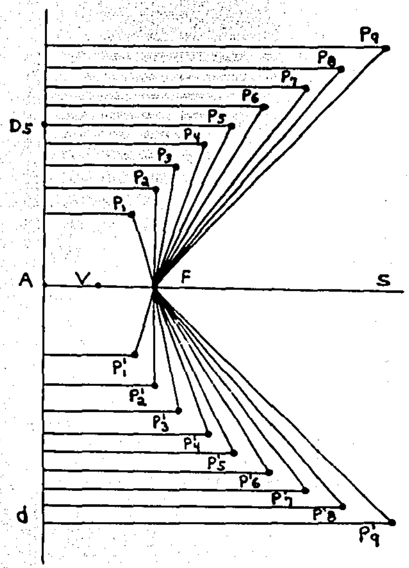


fig.3

Así en especial para el punto P_5 de la curva, se tiene que la distancia de P_5 a F, es igual a la distancia de P_5 a D_5, es decir, que el punto P_5 es equidistante al foco y a la directriz de la parábola, y por tanto, satisface la condición geométrica.

$$|\overline{P_5 F}| = |\overline{P_5 D_5}|$$

De forma similar, para todos los demás puntos de la curva señalados en la figura, se pueden establecer sus correspondientes igualdades.

Ahora, uniendo consecutivamente todos estos puntos que cumplen con la definición, por medio de una línea continua desde P_9 hasta P_9', se obtiene la curva de la figura 4, donde ésta, representa la gráfica o el lugar geométrico de la parábola.

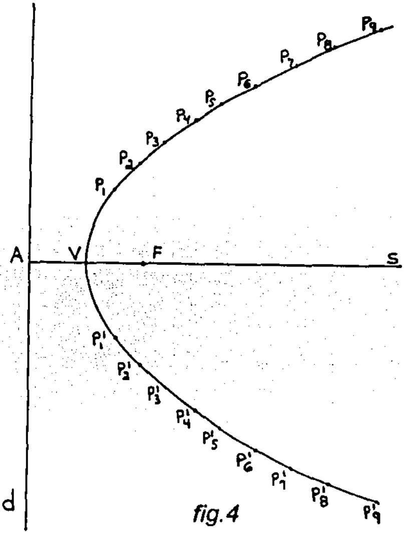


fig.4

La forma de obtener el número de puntos necesarios de una parábola, utilizando sólo regla y compás, conociendo la directriz d y el foco F, es como se indica a continuación.

Se traza la recta l paralela a la directriz y que pase por el punto V, el cual pertenece a la parábola, por ser éste, punto medio de segmento AF, ver figura 5.
A partir de l, y hacia el lado donde se encuentra el foco, se trazan las rectas: p, q y r paralelas a ésta.
Ahora con una abertura del compás, igual a la distancia que hay de la recta p a la directriz, y haciendo centro en el foco, se trazan arcos que corten a la recta p en los puntos P_1 y P_1'. Estos puntos por definición, pertenecen a la parábola.

Este procedimiento, se repite para las rectas q y r, encontrándose así, los puntos P_2 , P_2' y P_3 , P_3' respectivamente.

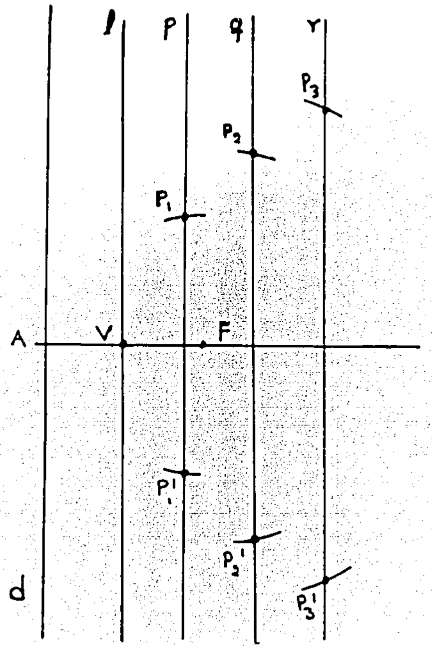


fig.5

Si se desea un mayor número de puntos, basta con trazar más rectas paralelas, y continuar el procedimiento.
De ésta forma, se determinaron los puntos que se encuentran en las figuras anteriores 3 y 4.

La Justificación de la Perpendicularidad de la Recta s

En la figura 6, la recta s pasa por el foco F y por el punto V. Por pertenecer V a la parábola, se tiene que:

$$|\overline{VA}| = |\overline{VF}|$$

Con un radio igual a $|\overline{VA}|$, y haciendo centro en el punto V, se traza una circunferencia que obviamente pasa por el punto A, lo que indica que la directriz es tangente a dicha circunferencia.

Ahora por el teorema de geometría; cuyo enunciado dice: La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia, se desprende, entonces, como consecuencia, que la recta s es perpendicular a la directriz d en el punto A.

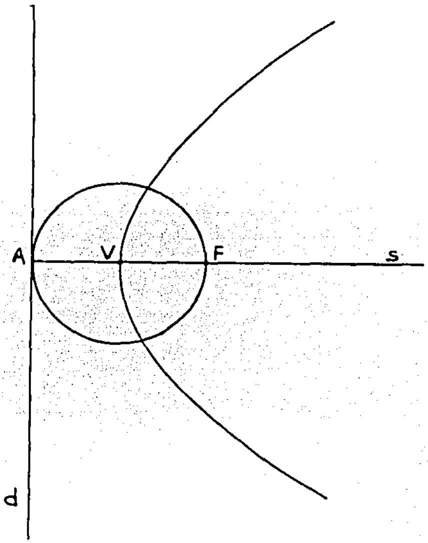


fig.6

La Simetría de la Parábola con Respecto a la Recta s

La parábola esta formada por dos ramas, los puntos de éstas, son simétricos con respecto a la recta s. Dado que dicha recta es la mediatriz de los segmentos que son perpendiculares a la misma, y que se forman al unir los puntos opuestos de las ramas de la parábola figura 7.

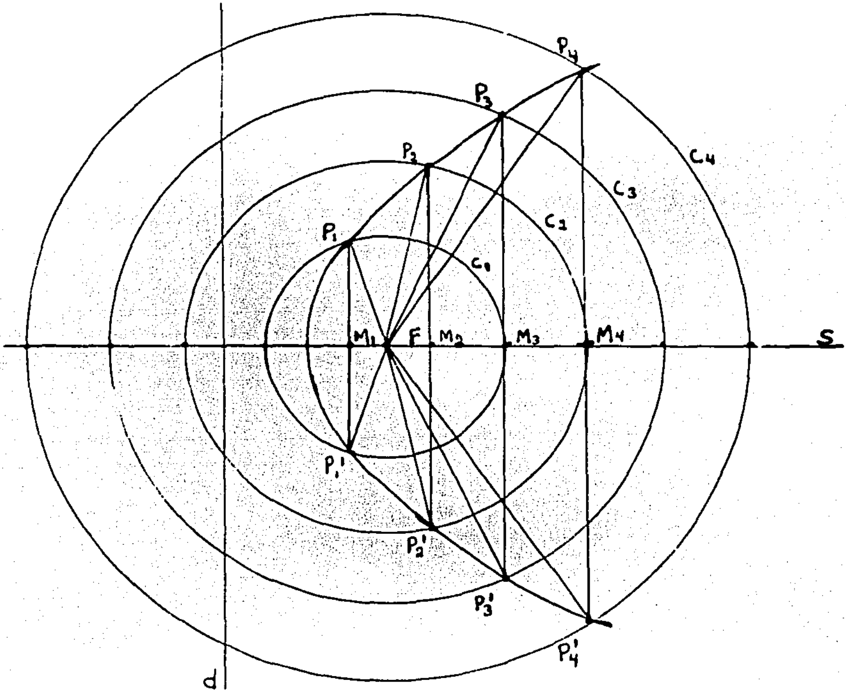


fig.7

Para ello, es suficiente con mostrar que los puntos M_1, M_2, M_3 y M_4, son los puntos medios de los segmentos: P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3' y P_4P_4' respectivamente.

En la figura se observa que el triángulo M_1FP_1 y el triángulo M_1FP_1' son triángulos rectángulos, donde la hipotenusa $\overline{P_1F}$ del uno es igual a la hipotenusa $\overline{P_1'F}$ del otro , por ser radios de la misma circunferencia C_1. Además, como el lado $\overline{M_1F}$ es común a los dos triángulos, se tiene que los triángulos son congruentes, lo que implica que $\overline{P_1M_1}$ = $\overline{M_1P_1'}$, es decir, que el punto M_1 es el punto medio del segmento P_1P_1'. La razón de lo dicho anteriormente lo justifica el siguiente teorema:
Dos triángulos rectángulos son congruentes, si la hipotenusa y un cateto del uno son respectivamente congruentes a la hipotenusa y un cateto del otro.
Siguiendo el mismo razonamiento, se hace ver que M_2, M_3 y M_4 son los puntos medios de los segmentos P_2P_2', P_3P_3', P_4P_4'.

Se dice, entonces, que la recta s es el eje de simetría. De donde toda parábola tiene simetría axial, pero no es simétrica con respecto a un punto, por lo que no tiene centro de simetría.

CAPÍTULO II

Elementos de la Parábola

En la figura 8, se encuentran señalados los principales elementos de la parábola, cuyas definiciones se darán a continuación, apoyándonos en la ilustración de la figura.

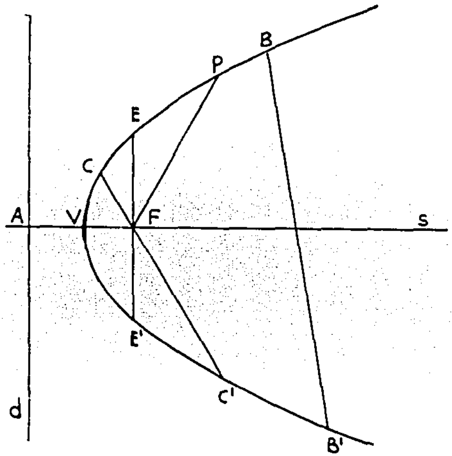


fig.8

Cuando se dio la definición de parábola, se mencionaron al punto F y a la recta d, los cuales se conocen con el nombre de foco y directriz de la parábola respectivamente.
Un segmento como PF, que une un punto cualquiera de la parábola con el foco, se llama radio vector o radio focal.
La recta s, que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz en el punto A, se llama eje de simetría o eje de la parábola.
El punto V, punto medio del segmento AF, que pertenece por definición a la parábola, y que es la intersección de la curva con el eje, se llama vértice de la parábola.
El segmento que une dos puntos cualesquiera de la parábola como BB', es una cuerda.

La cuerda EE' que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría, se llama lado recto o ancho focal de la parábola.
Una cuerda como $\overline{CC'}$ que pasa por el foco, pero que no es perpendicular al eje de simetría, se le nombra cuerda focal.
La distancia del foco a la directriz determinada por el segmento AF, es el parámetro, y se representa generalmente por $2p$. Veamos, si la distancia del vértice al foco se representa por p, y V es el punto medio de la magnitud AF, entonces, la distancia del vértice al punto A, también es p, por tanto, el segmento $AF = 2p$.

La Longitud del Lado Recto o Ancho Focal

La abertura o amplitud de la parábola a la altura del foco, la determina la longitud del lado recto o ancho focal. Por lo que es importante conocer como encontrarla. En la figura 9, el segmento $AF = 2p$, pero como $\overline{AF} = \overline{DE}$, entonces $\overline{DE} = 2p$. Ahora por pertenecer el punto E a la parábola $\overline{EF} = \overline{DE}$, es decir, que $\overline{EF} = 2p$, y como la recta s es el eje de simetría, entonces, $\overline{EE'} = 2\overline{EF}$, esto es, $\overline{EE'} = 2(2p) = 4p$.
Por tanto, la longitud del segmento EE', que es el lado recto de la parábola, es igual a $4p$. Por consiguiente $\overline{EE'} = 4p$.
La longitud del lado recto, se puede representar por medio del símbolo lr, lo que permite escribir, que $lr = 4p$.

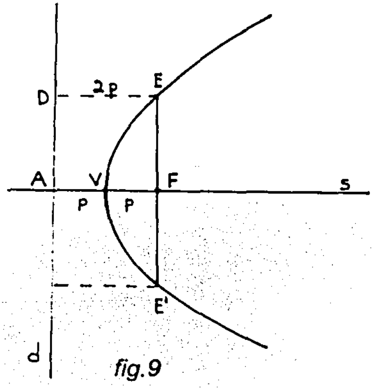


fig.9

CAPÍTULO III

Ecuación de la Parábola con Vértice en el Origen

En esta parte se procederá a obtener la ecuación de la curva a partir de su definición.

La parábola presenta diferentes posiciones con respecto a los ejes coordenados, tanto en la parte positiva como negativa de cada uno de ellos, razón por la cual, es necesario determinar una ecuación para cada una de éstas. Para esto, la dividiremos en cuatro ecuaciones según su localización.

Primera ecuación: En este caso, se analiza la posición de la parábola cuando el vértice es el origen y su foco se ubica en la parte positiva del eje X.
Como la distancia del vértice al foco es p, y por estar éste en la parte positiva del eje X, sus coordenadas son $(p,0)$. También se puede apreciar que la parte positiva del eje X coincide con el eje de simetría de la parábola, ver figura 10.
La recta d que corta al eje de las X en la parte negativa es la directriz, y como lo corta a una distancia p del vértice, la ecuación que la representa es $x=-p$.
Por estar el punto D sobre la directriz y a una altura igual a la de Q, sus coordenadas son $(-p,y)$.

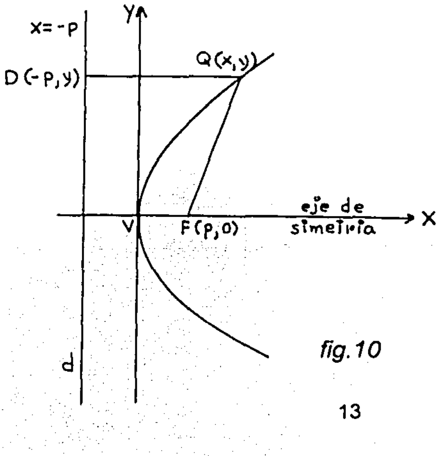


fig.10

Por pertenecer el punto $Q(x,y)$ a la parábola por definición es equidistante al foco y a la directriz. Esto es, cumple con la condición.

$$|\overline{QF}|=|\overline{QD}|$$

Que expresado en distancia entre dos puntos se tiene:

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros nos queda:

$$(x-p)^2+y^2 = (x+p)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado.

$$x^2-2px+p^2+y^2 = x^2+2px+p^2$$

Despejando y^2 resulta.

$$y^2 = 2px+2px$$

Finalmente, reduciendo términos semejantes obtenemos que.

$$y^2 = 4px \qquad (1)$$

Llegando así, a ésta última expresión, que representa la ecuación de una parábola con vértice en el origen, y cuyo eje de simetría coincide con la parte positiva del eje X, y la que gráficamente está representada en la figura 10. Donde las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz son las ahí señaladas, y la curva abre hacia la derecha.

Segunda ecuación: Se considera el caso en que el vértice de la parábola es el origen y el foco de ésta se encuentra en la parte negativa del eje X. figura.11.

Visto el análisis que se realizó para la primera ecuación, es entendible para la nueva localización del foco, de la directriz y del punto D, que:

$(-p,0)$ son las coordenadas del foco; $x=p$ es la ecuación de la directriz y (p,y) son las coordenadas del punto D.

Como $Q(x,y)$ es un punto de la parábola, por definición se tiene:

$$|\overline{QF}|=|\overline{QD}|$$

Que interpretado analíticamente resulta:

$$\sqrt{(-p-x)^2+(-y)^2}=\sqrt{(p-x)^2}$$

Partiendo de ésta igualdad y realizando un desarrollo algebraico análogo al anterior, se llega a la expresión:

$$y^2=-4px \qquad (2)$$

Donde ésta, es la ecuación que representa a una parábola con vértice en el origen, y cuyo eje de simetría coincide con la parte negativa del eje X. Por lo que la parábola se extiende hacia la parte negativa de dicho eje, es decir se abre hacia la izquierda, como lo ilustra la figura 11.

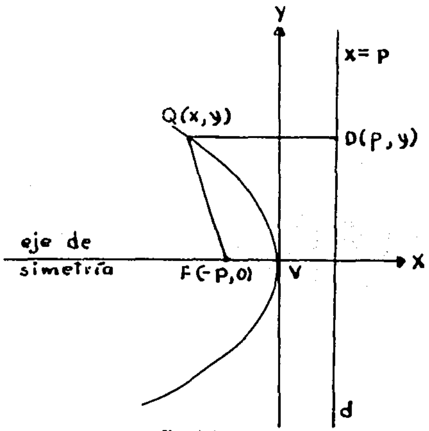


fig.11

Tercera ecuación: En este caso la parábola está orientada de tal manera que el vértice es el origen, y el foco se encuentra en la parte positiva del eje Y. Como lo muestra la figura 12.

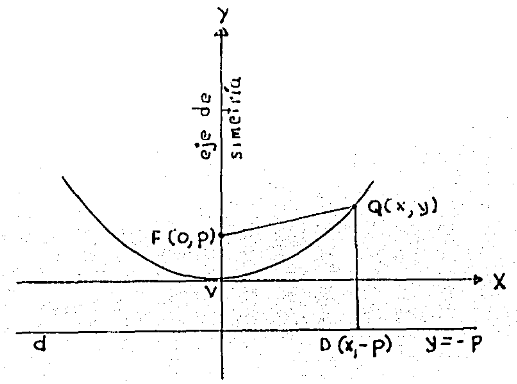


fig.12

Por estar el foco en la parte positiva del eje Y a una distancia p del vértice, sus coordenadas son $(0,p)$, la ecuación de la directriz es $y=-p$, por cortar ésta al eje Y en la parte negativa y a una distancia p del vértice. Las coordenadas del punto D son $(x,-p)$ por compartir éste la abscisa con Q y estar sobre la directriz d.
Por ser el punto $Q(x,y)$ de la parábola satisface la igualdad:

$$|\overline{QF}| = |\overline{QD}|$$

Que interpretado como distancia entre dos puntos se tiene:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad anterior:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Despejando x^2 resulta:

$$x^2 = 2py + 2py$$

Por último, reduciendo términos semejantes, se obtiene que

$$x^2 = 4py \qquad (3)$$

Donde la igualdad anterior representa la ecuación de una parábola con vértice en el origen y cuyo eje de simetría coincide con la parte positiva del eje Y. Por tanto, la parábola abre hacia arriba del eje X. Como la figura 12, lo muestra.

Cuarta ecuación: Cuando el vértice de la parábola es el origen y el foco de ésta se localiza en la parte negativa del eje Y.

Por la tercera ecuación es fácil comprender que las coordenadas del foco son: $(0,-p)$, la ecuación de la directriz es: $y = p$ y (x,p) son las coordenadas del punto D. Por pertenecer el punto $Q(x,y)$ a la parábola por definición cumple:

$$|\overline{QF}| = |\overline{QD}|$$

Que interpretado analíticamente resulta:

$$\sqrt{x^2 + (y + p)^2} = \sqrt{(y - p)^2}$$

Realizando las operaciones algebraicas análogas a la obtención de la tercera ecuación, se llega a la expresión:

$$y^2 = -4py \qquad (4)$$

Que es la ecuación que representa a una parábola con vértice en el origen, y cuyo eje de simetría coincide con la parte negativa del eje Y. Por tanto, la curva abre hacia abajo, (fig.13).

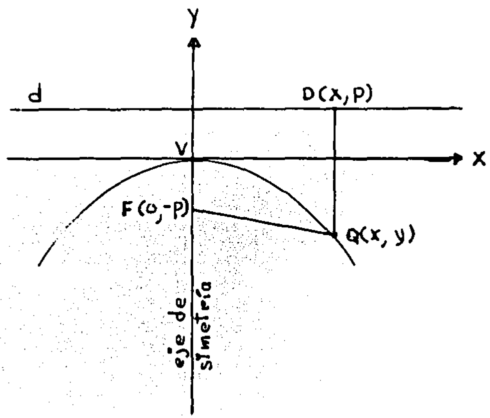
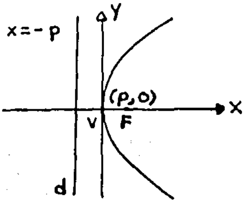


fig. 13

Resumiendo tenemos lo siguiente

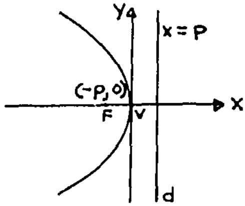
Ecuación: (1)

$$y^2 = 4px$$



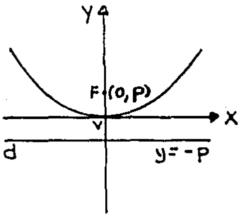
Ecuación: (2)

$$y^2 = -4px$$



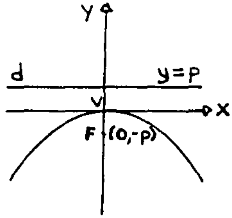
Ecuación: (3)

$$x^2 = 4py$$



Ecuación: (4)

$$x^2 = -4py$$



Dado que p se definió como la distancia del vértice al foco, p es siempre positivo, de tal forma que si decimos $-p$, se trata de un número negativo.

Si el signo del coeficiente de x es positivo, como en la ecuación (1); la parábola se extiende hacia la derecha, y se extiende a la izquierda si el coeficiente es negativo, como en la ecuación (2). Si el signo del coeficiente de y es positivo, como en la ecuación (3); la parábola abre hacia arriba, y abre hacia abajo si es negativo, como en la ecuación (4).

El signo de los coeficientes de x y de y en las ecuaciones, dependen de la posición del foco, si éste se encuentra a la derecha, a la izquierda, por arriba o por debajo de la directriz.

Las ecuaciones anteriores se conocen con el nombre de: ***Primera forma ordinaria de la ecuación de la parábola.***

Otra forma de ver la simetría de la parábola con respecto a su eje, es ahora por medio de la ecuación: $y^2 = 4px$, ya que de ésta, se desprende, que $|y| = \sqrt{4px}$, es decir, $y = \sqrt{4px}$ si $y > 0$ o bien $-y = \sqrt{4px}$ si $y < 0$. Por tanto, $y = \sqrt{4px}$ o $y = -\sqrt{4px}$. Las ordenadas de los puntos que forman la rama de la parábola que se encuentra por arriba del eje X, están representadas por $y = 2\sqrt{px}$, las ordenadas de los puntos de la rama de la curva que se localizan por debajo del mismo eje, corresponden a $y = -2\sqrt{px}$

Como $p > 0$, también x debe ser positivo para que el valor de y sea un número real y distinto de cero, lo que indica a la vez, que la parábola se abre indefinidamente a la derecha del eje Y en los cuadrantes primero y cuarto.
Por tanto, para todo $x > 0$, se tiene que las coordenadas de los puntos de ambas ramas son: $(x, 2\sqrt{px})$ y $(x, -2\sqrt{px})$, donde éstos, son simétricos con respecto al eje X, como se aprecia en la figura 14. Por lo que la curva, resulta ser simétrica con respecto a dicho eje.

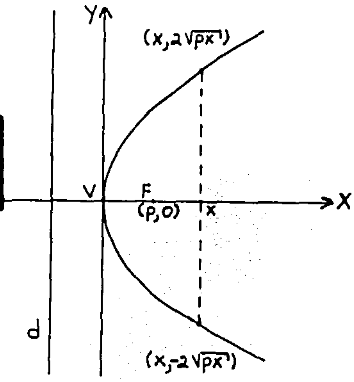


fig.14

O bien, como al sustituir a y por $-y$ en la ecuación: $y^2 = 4px$, ésta no cambia ni se altera, la curva es simétrica con respecto al eje X.

De forma similar, considerando las correspondientes ecuaciones, se hace ver, la simetría de la curva con la parte negativa del eje X, y la simetría, con la parte positiva y negativa del eje Y.

Dada la Ecuación de la Parábola con Vértice en el Origen Determinar Algunos de sus Elementos

Una vez conocidas las ecuaciones de la parábola en su primera forma ordinaria, y partiendo de éstas, se pueden obtener sus principales elementos.

Ejemplos.

1) Hallar el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, de la parábola: $3y^2 = 8x$ o bien $y^2 = \frac{8}{3}x$

Solución. Como la ecuación es de la forma: $y^2 = 4px$, de ésta se deduce que $4p = \frac{8}{3}$, esto es, $lr = \frac{8}{3}$.

Para determinar el foco y la ecuación de la directriz, necesitamos conocer p, dado que las coordenadas del foco son $(p,0)$ y la ecuación de la directriz : $x = -p$.

De $4p = \frac{8}{3}$ se deduce que $p = \frac{2}{3}$. Por tanto, el foco es el punto de coordenadas $(\frac{2}{3}, 0)$, y la ecuación de la directriz: $x = -\frac{2}{3}$.

2) Dada la parábola: $y^2 = -16x$. Hallar, la longitud del lado recto, el foco y la ecuación de su eje.

Solución. La ecuación es de la forma: $y^2 = -4px$, de donde se desprende, que $-4p = -16$. Dado que $lr = 4p$, se multiplican los miembros de la igualdad $-4p = -16$, por -1 para tener $4p = 16$, por tanto, $lr = 16$.

De $4p = 16$ se tiene que $p = 4$, entonces, las coordenadas del foco $F(-p, 0)$ resultan ser $F(-4, 0)$.

Como su eje coincide con el eje X, entonces, corresponde al lugar geométrico de todos los puntos cuyas ordenadas son cero, por consiguiente la ecuación que lo representa es : $y = 0$.

3) Determinar el foco , la directriz y la gráfica de la parábola : $y^2 = 8x$

Solución. Por ser la ecuación de la forma: $y^2 = 4px$, se deduce que $4p = 8$, de donde $p = 2$, por tanto, (2.0) son las coordenadas del foco y $x = -2$ la ecuación de la directriz.

Para la gráfica, hay que determinar puntos que pertenezcan a la curva a partir de su ecuación, para después unirlos mediante una línea continua, y así obtenerla. Para esto, se despeja a y de la ecuación, resultando:

$$y = \pm\sqrt{8x}$$

Para que y sea un número real, x debe ser mayor o igual a cero.
Tabulando para algunos valores de x, en la tabla indicados, se tiene

x	$y = \pm\sqrt{8x}$	*Puntos*
0	$y = \mp\sqrt{8(0)} = 0$	(0,0)
1	$y = \pm\sqrt{8(1)} = \pm\sqrt{8} = \pm 2.8$	(1,2.8) , (1,-2,8)
2	$y = \pm\sqrt{8(2)} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$	(2, 4) , (2, -4)
3	$y = \pm\sqrt{8(3)} = \pm\sqrt{24} = \pm 4.8$	(3, 4.8) , (3, -4.8)

Encontrándose así, puntos que pertenecen a la parábola, y su representación gráfica queda ilustrada en la figura 15. Donde ésta contiene todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $(y^2 = 8x)$ y sólo ellos.

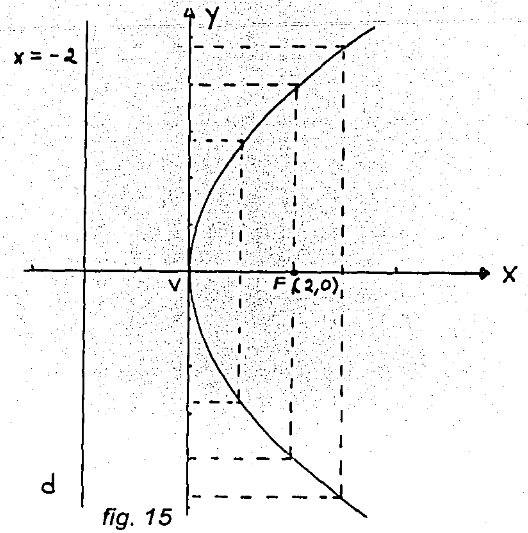


fig. 15

4) Obtener los principales elementos de la parábola: $x^2 = -10y$

Solución:

a) Es de la forma: $x^2 = -4py$

b) Vértice: $V(0,0)$

c) Parámetro (distancia del foco a la directriz que se representa por $2p$), se dividen los miembros de la igualdad $-4p = -10$, entre -2, para llegar a deducir $2p$, esto es,

$$\frac{-4p}{-2} = \frac{-10}{-2}$$

$$\therefore 2p = 5$$

d) Semiparámetro (distancia del vértice al foco ó del vértice a la directriz, que se representa por p), de $2p = 5$, se tiene,

$$\frac{2p}{2} = \frac{5}{2} \text{ de donde,}$$

$$p = \frac{5}{2} \quad \text{o bien} \quad p = 2.5$$

e) Ecuación de la recta que contiene al eje de la parábola. Como dicho eje coincide con el eje Y, entonces, corresponde al lugar geométrico de todos los puntos cuyas abscisas son cero, por tanto, su ecuación es :

$$x = 0$$

f) Foco: sus coordenadas son $F(0,-p) = F(0,-2.5)$, por ser $p = 2.5$

g) Ecuación de la directriz: es $y = p$, pero como $p = 2.5$, la ecuación que la representa, es

$$y = 2.5$$

h) Longitud del lado recto $(lr = 4p)$. De $-4p = -10$, se obtiene, que $4p = 10$,

$$\therefore lr = 10$$

i) Indicar la orientación de la parábola.
La curva se abre hacia abajo.

j) Cálculo de puntos y gráfica de la curva.
De la ecuación se deduce que: $y = \frac{x^2}{-10}$, tabulando para valores de x en la tabla asignados, se tiene:

x	$y = \frac{x^2}{-10}$	*Puntos*
-4	$y = \frac{(-4)^2}{-10} = \frac{16}{-10} = -1.6$	(–4,–1.6)
-2	$y = \frac{(-2)^2}{-10} = \frac{4}{-10} = -0.4$	(–2,–0.4)
0	$y = \frac{(0)^2}{-10} = \frac{0}{-10} = 0$	(0,0)
2	$y = \frac{(2)^2}{-10} = \frac{4}{-10} = -0.4$	(2,–0.4)
4	$y = \frac{(4)^2}{-10} = \frac{16}{-10} = -1.6$	(4,–1.6)

Determinándose así, puntos de la curva, y donde su gráfica queda representada por la figura 16.

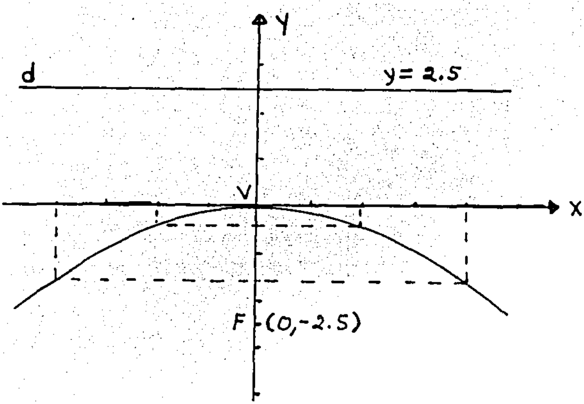


fig.16

Donde éstos elementos, son los principales en toda parábola

Ejercicios.

En cada caso, hallar las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y la directriz.

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 + 24x = 0$
3. $x^2 = 4y$
4. $x^2 = -6y$
5. $y^2 + 3x = 0$
6. $x^2 - 8y = 0$
7. $2y^2 = 7x$
8. $2y^2 = -3x$
9. $x^2 - 7y = 0$

Encontrar, el foco, la directriz, el parámetro y el semiparámetro de las siguientes parábolas.

10. $y^2 = -4x$
11. $x^2 = -8y$
12. $x^2 + 4y = 0$
13. $x^2 = 2y$
14. $y^2 = 3x$
15. $y^2 - 6x = 0$

Esbozar, las gráficas de las siguientes parábolas, indicando para cada caso, el vértice, el foco y la directriz.

16. $y^2 = 2x$ 17. $x^2 = -2y$ 18. $x^2 + 6y = 0$

19. $x^2 = 4y$ 20. $y^2 = 7x$ 21. $3x^2 + 20x = 0$

Determinar, el vértice, el foco, la directriz, la ecuación del eje y la gráfica de las siguientes parábolas.

22. $y^2 = -8x$ 23. $x^2 = 4y$ 24. $x^2 = -12y$

<u>Dados Algunos Elementos de la Parábola Determinar la Ecuación en su Primera Forma Ordinaria</u>

Una manera práctica para llegar a establecer la ecuación de la parábola, conociendo algunos de sus elementos, es analizar éstos, y buscar los datos faltantes necesarios para poder determinarla.

<u>Ejemplos.</u>

1) Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $F(0,3)$.

Solución. Por tener su vértice en el origen y encontrarse el foco en la parte positiva del eje Y, la curva abre hacia arriba (fig.17). Por esto, su ecuación debe ser de la forma: $x^2 = 4py$.
El problema se reduce, entonces, a encontrar el valor de p. Pero se sabe que las coordenadas del foco son $F(0,3) = F(0,p)$, por lo que $p = 3$. Por tanto, la ecuación es $x^2 = 4(3)y$. que finalmente se expresa como $x^2 = 12y$.

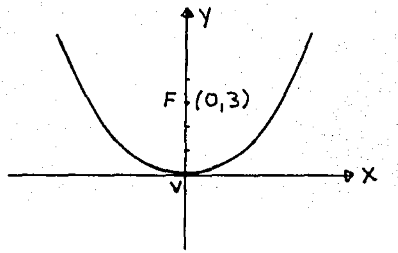


fig.17

2) Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuyo eje es el eje X y que pasa por el punto $P(-6,2)$.

Solución. Por tener su vértice en el origen, la curva no puede abrir a la derecha, porque no sería posible que pasara por el punto $P(-6,2)$, por encontrarse éste, en el segundo cuadrante, lo que indica que la parábola abre a la izquierda, como está trazada en la figura 18.

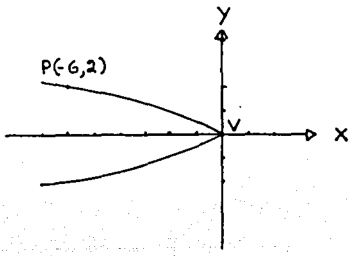


fig.18

Por tanto, su ecuación debe de ser de la forma: $y^2 = -4px$.

Para determinar el valor de p, sustituimos las coordenadas del punto por donde pasa la curva, en la ecuación, y se tiene.

$$(2)^2 = -4p(-6)$$

Realizando las operaciones indicadas.

$$4 = 24p$$

Dividiendo entre 24, ambos miembros y simplificando.

$$\frac{4}{24} = \frac{24}{24}p$$

$$p = \frac{1}{6}$$

Por lo que su ecuación resulta ser:

$$y^2 = -4\left(\frac{1}{6}\right)x \quad \text{o bien} \quad y^2 = -\frac{2}{3}x$$

3) Determinar la ecuación de la parábola cuyo foco es $(0,-2)$, si su directriz es la recta $y = 2$.

Solución. Por ser $(0,-2)$ las coordenadas del foco, éste se ubica a dos unidades del origen y sobre la parte negativa del eje Y. Como la ecuación de la directriz es, $y = 2$ se trata de la recta paralela al eje X, cuya intersección con la parte positiva del eje Y, dista dos unidades del origen.

Puesto que el vértice es el punto medio de la distancia del foco a la directriz, se deduce que éste es el origen. La parábola, por tanto, abre hacia abajo (ver fig. 19),

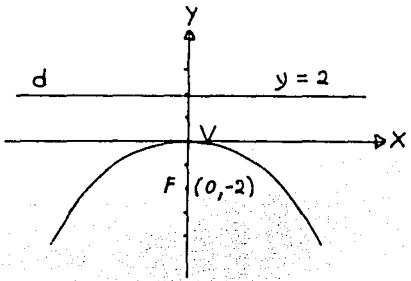


fig.19

y su ecuación debe ser de la forma: $x^2 = -4py$.
Puesto que el foco es el punto $F(0,-2) = F(0,-p)$, se tiene que $p = 2$, sustituyendo éste valor en la ecuación, resulta $x^2 = -4(2)y$, o bien $x^2 = -8y$, quedando así determinada, la ecuación requerida.

Ejercicios.

Hallar la ecuación de la parábola de vértice el origen, si el valor de p y el eje de simetría, son los que se indican.

1. $p = 2$; eje X
2. $p = -3$; eje X
3. $p = 1$; eje Y
4. $p = -3$; eje Y
5. $p = 5$; eje X
6. $p = -8$; eje X

Encontrar en cada caso, la ecuación de la parábola con vértice en el origen y con:

7. Directriz $x + 3 = 0$
8. Foco en $(-\frac{1}{2},0)$
9. Directriz $x = \frac{4}{5}$
10. Foco en $(4,0)$
11. Foco en $(0,-5)$
12. Directriz $x = 5$
13. Directriz $y = 3$
14. Directriz $y = -2$
15. Foco en $(0,2)$

Determinar la ecuación de la parábola si la longitud del lado recto es el que se propone, y la parábola se extiende como se señala. Considerar para todos ellos como vértice el origen.

16. $lr = 12$, hacia arriba
17. $lr = 16$, hacia abajo
18. $lr = 4$, hacia abajo
19. $lr = 28$, a la derecha
20. $lr = 24$, a la izquierda
21. $lr = 12$, a la derecha

22. Encuentra, la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuyo eje es el eje X, y que pasa por el punto $(-3,6)$.

23. Hallar, la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuyo eje es el eje Y, y pasa por el punto $(-6,-3)$.

CAPÍTULO IV

Ecuación de una Parábola con Vértice (h,k) y Ejes Paralelos a los Coordenados

Se deducirá, la ecuación de la curva, cuando su vértice ya no es el origen, y su eje es paralelo a los ejes coordenados. Primero por medio de su definición, como se explicará a continuación, y después a través de traslación de ejes, con la finalidad de tener dos formas distintas de poder obtenerla.

Primer caso: Cuando el punto $V(h,k)$ es el vértice de la parábola, el eje de ésta es paralelo al eje X, y abre a la derecha.

Como el vértice es el punto $V(h,k)$, y por estar el foco a la derecha y a una distancia p de éste, sus coordenadas son, $F(h+p,k)$. La ecuación de la directriz es: $x=h-p$, por ser esta la recta paralela al eje Y, cuya intersección con el eje X, distancia p unidades del vértice y a la izquierda de éste.
Puesto que el punto D, se localiza sobre la directriz, y a una altura igual a la de Q, sus coordenadas son, $(h-p,y)$. Donde el punto $Q(x,y)$, es un punto genérico cualquiera de la parábola, (fig.20).

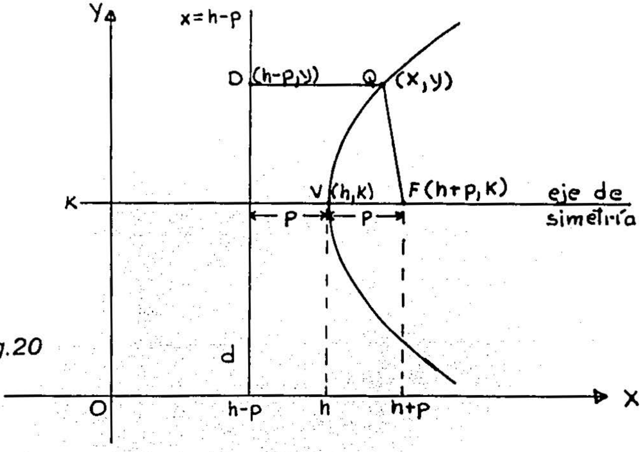


fig.20

Por tanto, cumple por definición la condición.

$$|\overline{QF}| = |\overline{QD}|$$

Por distancia entre dos puntos se tiene:

$$\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-(h-p))^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-(h+p))^2+(y-k)^2 = (x-(h-p))^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+y^2-2yk+k^2 = x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$$

Realizando las operaciones indicadas resulta:

$$x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2+y^2-2yk+k^2 = x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$$

de donde:

$$y^2-2yk+k^2 = 2xp-2hp+2xp-2hp\,.$$

Reduciendo términos semejantes:

$$y^2-2yk+k^2 = 4px-4ph$$

Factorizando se tiene:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (5)$$

Donde esta última expresión, representa la ecuación de una parábola con las características al principio indicadas, cuya gráfica, la muestra la figura 20.

Determinaremos ahora, la misma ecuación (5) utilizando la traslación de ejes.

Como se sabe, la parábola tiene su vértice en $V(h,k)$, su eje paralelo al eje X, y abre a la derecha (ver fig.21).

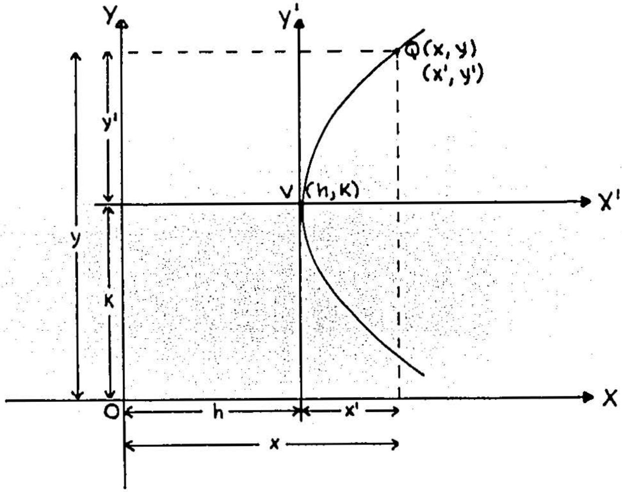


fig.21

Si la parábola la referimos al sistema de coordenadas rectangulares $X'Y'$, entonces, su vértice (h,k) queda como el origen en este sistema, donde los ejes son paralelos a los originales XY. Por consiguiente, la ecuación que representa a la curva en el sistema $X'Y'$, es de la forma.

$$y'^2 = 4px'$$

Para referirla al sistema XY, se aplica la traslación de ejes, de donde, se desprenden, las siguientes fórmulas:

$$x = h + x' \qquad y = k + y'$$

$$\therefore x' = x - h \qquad y' = y - k$$

Sustituyendo éstos últimos valores en la ecuación $y'^2 = 4px'$ obtenemos.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Llegando así a la ecuación requerida.

El movimiento de traslación de ejes, hace posible simplificar el proceso de resolución, para llegar a las ecuaciones lo más rápido posible. Aplicando éste procedimiento encontraremos las ecuaciones restantes.

Segundo caso: Sea la parábola de vértice $V(h,k)$, eje paralelo al eje X, y que abre a la izquierda (fig.22).

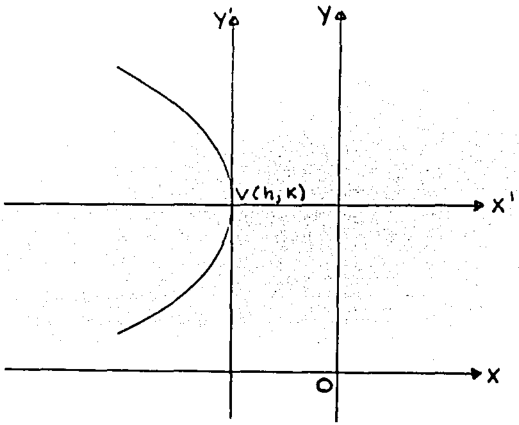


fig.22

La ecuación de la curva referida a los ejes $X'Y'$, tiene la forma.

$$y'^2 = -4px'$$

Por las fórmulas de traslación de ejes, sabemos que,

$$x' = x - h \qquad y' = y - k$$

Sustituyendo x' y y' por su igual, en la ecuación de la curva referida al sistema XY', resulta la expresión:

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)\,, \qquad (6)$$

donde ésta, representa la ecuación de la parábola, cuya gráfica, la muestra la figura anterior.

Tercer caso: Cuando el vértice de la parábola es el punto $V(h,k)$, su eje es paralelo al eje Y, y se extiende hacia arriba, (fig.23).

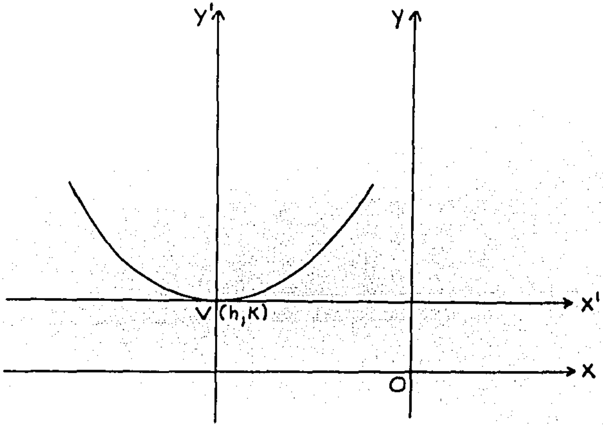


fig.23

La ecuación de la curva tiene la forma

$$x'^2 = 4py'$$

referida a los ejes $X'Y'$. Para ubicarla a los ejes XY, basta con sustituir en ésta, a x' por $x-h$, y' por $y-k$. Obteniéndose así la ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (7)$$

que representa a la parábola cuya gráfica quedó ilustrada por la figura 23.

Cuarto caso: **La parábola con vértice en el punto $V(h,k)$, eje paralelo al eje Y, y abre hacia abajo, (fig.24).**

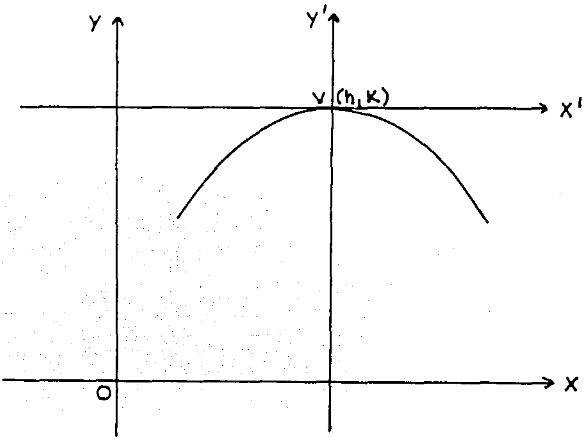


fig.24

De un razonamiento similar a los anteriores, se llega a la ecuación requerida :

$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \qquad (8)$$

A las ecuaciones:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad (5) \qquad (y-k)^2 = -4p(x-h) \quad (6)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad (7) \qquad (x-h)^2 = -4p(y-k) \quad (8)$$

Se les conoce como: ***segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, forma estándar o canónica.***

Dada la Ecuación de la Parábola en su Segunda Forma Ordinaria Determinar sus Principales Elementos

Partiendo de las ecuaciones de la parábola, con vértice distinto del origen y ejes paralelos a los coordenados, se pueden hallar, sus principales elementos.

Ejemplos.

1) Hallar el vértice, el foco, la directriz y esbozar la gráfica de la parábola: $(x+4)^2 = -6(y-1)$.

Solución. Por ser la ecuación de la forma: $(x-h)^2 = -4p(y-k)$, se deduce que, $h=-4$ y $k=1$. Su vértice, entonces, es el punto de coordenadas, $V(h,k) = V(-4,1)$.
Para encontrar el foco y la directriz, necesitamos conocer p, para esto, de las ecuaciones se tiene: $-4p = -6$; $\frac{-4p}{-4} = \frac{-6}{-4}$, resulta, $p = \frac{3}{2}$.
Por la forma de la ecuación, se sabe que el eje de la parábola es paralelo al eje Y, y que ésta se extiende hacia la parte negativa de dicho eje. Por tanto, el foco, está por debajo del vértice y a una distancia p de éste, lo que significa que sus coordenadas son. $F(h.k-p) = F(-4,-\frac{1}{2})$.
Como la directriz es paralela al eje X, cuya intersección con el eje Y, dista p unidades del vértice y por arriba de éste, su ecuación es: $y = k+p$. Es decir, $y = 1+\frac{3}{2}$ o bien $y = \frac{5}{2}$.
El esbozo gráfico queda trazado en la figura 25.

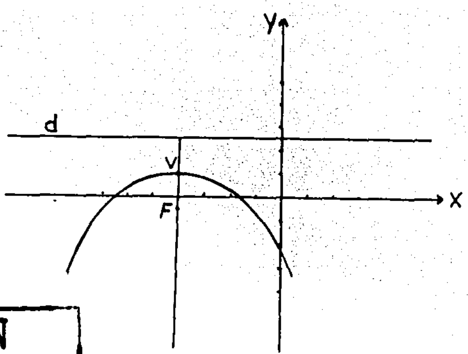


fig.25

2) Determinar los principales elementos de la parábola : $(y+4)^2 = -12(x-3)$.

Solución:

a) El vértice: Es el punto de coordenadas $V(h,k) = V(3,-4)$, ya que la ecuación de la curva, es de la forma $(y-k)^2 = -4p(x-h)$.

b) El parámetro: De las ecuaciones se tiene que $-4p = -12$, esto es, $4p = 12$, dividiendo entre 2 a los miembros de la igualdad anterior, se concluye que el parámetro: $2p = 6$.

c) El semiparámetro: De $2p = 6$, resulta que $p = 3$.

d) Ecuación de la recta que contiene al eje: Por la forma de la ecuación, el eje de la curva es paralelo al eje X, y atraviesa al eje Y, a una distancia k del origen, por lo que su lugar geométrico, es el conjunto de todos los puntos cuyas ordenadas son k, por tanto, la ecuación que lo representa es $y = k$, es decir, $y = -4$.

e) El foco: Como la parábola se extiende hacia la parte negativa del eje X, entonces el foco está sobre el eje de la curva, a una distancia p del vértice y a la izquierda de éste, lo que significa que sus coordenadas son, $F(h-p, k) = F(3-3,-4)$, que finalmente, se escribe como $F(0,-4)$.

f) Ecuación de la directriz: La directriz es paralela al eje Y, cuya intersección con el eje X, dista p unidades del vértice y a la derecha de éste, entonces, es la recta formada por el conjunto de puntos que tienen como abscisa $h+p$, por lo que su ecuación resulta ser: $x=h+p$, esto es, $x=3+3$, o bien, $x=6$.

g) Longitud del lado recto: De $-4p=-12$, se desprende que $4p=12$, y $lr=4p$ $\therefore lr=12$.

h) Indicar la orientación: La parábola abre hacia la izquierda.

i) Cálculo de puntos y gráfica: Despejando, a y de la ecuación.

$$y=\pm\sqrt{-12(x-3)}\ -4$$

Para poder determinar el valor de y, es necesario que: $-12(x-3)\geq 0$, esto, sólo es posible, si $x\leq 3$. Tabulando para algunos valores permitidos de x, resultan los siguientes cálculos.

x	$y=\pm\sqrt{-12(x-3)}\ -4$	*Puntos*
3	$y=\pm\sqrt{-12(3-3)}\ -4=\pm\sqrt{-12(0)}-4=0-4=-4$	$(3,-4)$
2	$y=\pm\sqrt{-12(2-3)}\ -4=\pm\sqrt{12}-4=\pm 3.4-4:-0.6\,;-7.4$	$(2,-0.6),(2,-7.4)$
1	$y=\pm\sqrt{-12(1-3)}-4=\pm\sqrt{24}-4=\pm 4.8-4:\ 0.8\,;-8.8$	$(1,0.8),(1,-8.8)$
0	$y=\pm\sqrt{-12(0-3)}-4=\pm\sqrt{36}-4=\pm 6-4\ :2\,;-10$	$(0,2),(0,-10)$

Determinándose así, puntos de la parábola. Y la gráfica queda representada en la figura 26.

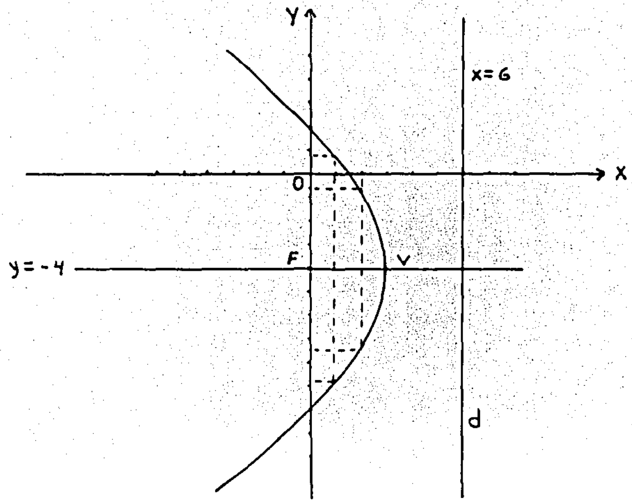


fig. 26

3) Obtener el vértice, el parámetro, el foco, la directriz, la ecuación del eje de simetría y esbozar la gráfica, de la parábola: $(x-2)^2=4(y+1)$.

Solución. Como la ecuación es de la forma $(x-h)^2=4p(y-k)$, se desprende, que: $h=2$ y $k=-1$, por tanto, las coordenadas del vértice son, $V(h,k)=V(2,-1)$.
De las ecuaciones, se tiene que $4p=4$, de donde, el parámetro: $2p=2$.
Para determinar la directriz y el foco necesitamos conocer p, para esto, de $2p=2$, se obtiene, que $p=1$.
Por la forma de la ecuación, se sabe que la curva se extiende hacia arriba, y su eje es, por consiguiente, paralelo al eje Y. Puesto que el vértice y el foco están en el eje de la curva, entonces, el foco comparte la misma abscisa que la del vértice y se encuentra por arriba de éste, a una distancia

de p unidades, lo que indica, que sus coordenadas son: $F(h,k-p)=F(2,-1+1)$, es decir, $F(2,0)$.

La directriz, es paralela al eje X, cuya intersección con el eje Y, dista p unidades del vértice y por debajo de éste, lo que significa, que su ecuación es $y=k-p$, o bien, $y=-1-1$, que resulta, $y=-2$.
El eje de simetría, es la recta paralela al eje Y, que cruza al eje X, a una distancia h del origen, por lo que su lugar geométrico, es el conjunto de todos los puntos cuyas abscisas son h, lo que significa, que la ecuación que lo representa es $x=h$, esto es, $x=2$.
El esbozo de la gráfica, queda trazado en la figura 27.

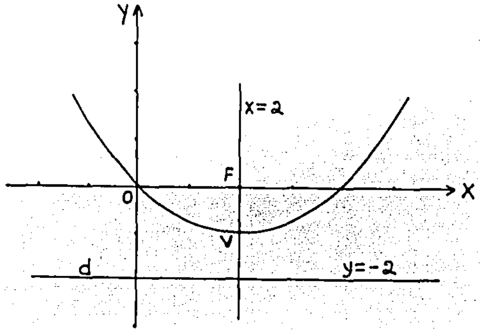


fig.27

<u>Ejercicios.</u>

Encontrar el foco, el vértice, la directriz, el eje, y esbozar la gráfica de cada una de las siguientes parábolas.

1. $(x-2)^2=4(y-1)$
2. $(x-4)^2=-3y$
3. $(y+1)^2=2(x+3)$
4. $(y-2)^2=-5(x-5)$

Hallar el vértice, el foco, la directriz, y la longitud del lado recto, de las parábolas.

5. $(x+5)^2 = -2(y+2)$

6. $(x+4)^2 = 4(y+1)$

7. $y^2 = -8(x+2)$

8. $(y-4)^2 = 8(x-6)$

Determinar el vértice, el foco, la directriz, calcular puntos y hacer la gráfica, de las parábolas.

9. $(y-5)^2 = 3(x-1)$

10. $(x+4)^2 = -6(y+3)$

11. $(x-2)^2 = 8(y+2)$

12. $(y-2)^2 = 6(x+\frac{14}{6})$

Dados Algunos Elementos de la Parábola Determinar la Ecuación en su Segunda Forma Ordinaria

En base a ciertos elementos que se conozcan de la curva, es posible, por medio de un análisis de éstos, deducir los que faltan, para poder llegar a determinar su ecuación.

Ejemplos.

1) Encontrar la ecuación de la parábola que tiene como foco, $F(-3,2)$ y vértice $V(-3,5)$.

Solución. La parábola es vertical (su eje es paralelo al eje Y), por tener tanto el foco como el vértice la misma abscisa. Además, el foco queda por debajo del vértice, por tener su ordenada menor que la de éste, esto indica, que la curva abre hacia abajo (fig.28).

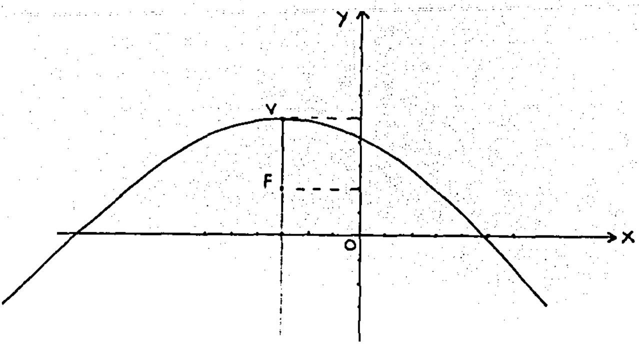


fig.28

Su ecuación tiene por tanto, la forma $(x-h)^2=-4p(y-k)$. Del vértice se sabe que $h=-3$ y $k=5$, para poder definir la ecuación, basta con conocer el valor de p, pero $p=y_2-y_1=5-2$, es decir, $p=3$. Lo que significa que su ecuación es, $(x+3)^2=-4(3)(y-5)$ o bien $(x+3)^2=-12(y-5)$.

2) Obtener la ecuación de la parábola que tiene como vértice el punto $V(2,3)$, parámetro 4 y se extiende hacia arriba.

Solución. Su ecuación debe tener la forma $(x-h)^2=4p(y-k)$ porque su orientación es hacia arriba, por los valores del vértice, $h=2$ y $k=3$, como $2p=4$, entonces, $p=2$, por lo que su ecuación es $(x-2)^2=4(2)(y-3)$, esto es, $(x-2)^2=8(y-3)$.

3) Hallar la ecuación de la parábola que tiene como foco el punto $F(2,3)$, la longitud del lado recto es 4 y se extiende a la izquierda.

Solución. Por dirigir la curva su orientación a la izquierda, su eje de simetría es paralelo al eje X, y su ecuación debe ser de la forma $(y-k)^2=-4p(x-h)$. Como tanto el vértice como el foco están sobre el eje de simetría, entonces, el vértice comparte la misma ordenada que la del foco, y está a una distancia p de éste y a su derecha, lo que significa, que sus coordenadas son $V(2+p,3)$. Puesto que $lr=4p$ por una parte y por otra

$lr = 4$, entonces, $4p = 4$, de donde, $p = 1$. Por consiguiente, las coordenadas del vértice resultan ser, $V(2+1,3) = V(3,3)$, encontrando finalmente, que la ecuación de la curva es $(y-3)^2 = -4(1)(y-3)$, esto es, $(y-3)^2 = -4(y-3)$, (fig.29).

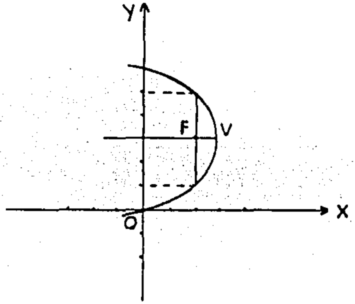


fig.29

4) Encontrar la ecuación de la parábola, de foco $F(5,1)$ y directriz $y+7=0$, o bien, $y=-7$.

Solución. De acuerdo a sus valores, el foco se encuentra por arriba de la directriz, lo que significa que la curva se extiende hacia arriba, por tanto, su ecuación debe ser de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, y su eje, paralelo al eje Y. Por estar el foco en el eje de simetría, se deduce, que la ecuación de dicho eje, es $x=5$, por estar formado por el conjunto de puntos cuyas abscisas son 5.
El punto de intersección del eje de la curva con la directriz es $(5,-7)$, dado que son perpendiculares, (fig.30).
Como el vértice debe estar sobre el eje de la curva, comparte la misma abscisa que la del foco, pero también es el punto medio entre el foco y la directriz, entonces, su ordenada es $y = \frac{1+(-7)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$, por lo que sus coordenadas son $V(h,k) = (5,-3)$, y $p = 1-(-3)$, es decir, $p=4$.
Sustituyendo los valores del vértice y de p, su ecuación resulta ser, $(x-5)^2 = 4(4)(y-(-3))$, que se escribe como: $(x-5)^2 = 16(y+3)$.

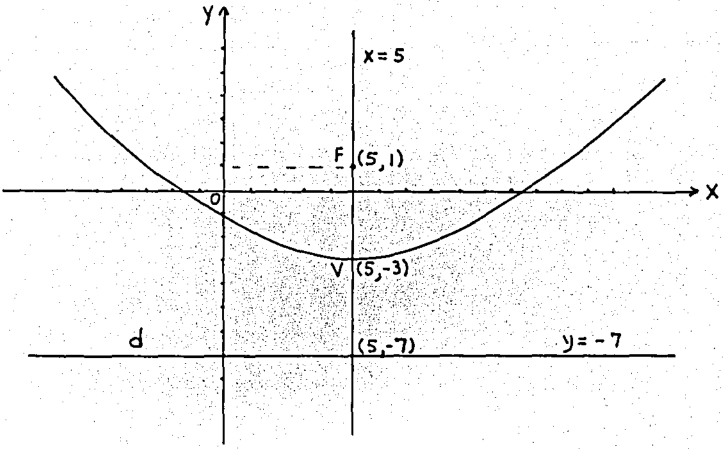


fig.30

Ejercicios.

Encontrar la ecuación de la parábola con los datos dados.

1. $V(1,-2)$, $F(-2,-2)$

2. $V(2,-6)$, $F(4,-6)$

3. $V(0,4)$, $F(1,4)$

4. $V(-5,8)$, $F(-5,5)$

5. $V(-4,-1)$, $F(-4,-3)$

6. $V(1,6)$, $F(10,6)$

Hallar la ecuación de la parábola, si el vértice y la directriz son los que se indican.

7. $V(3,\frac{5}{3})$, $y = 2$

8. $V(3,0)$, $x - 10 = 0$

9. $V(7,4)$, $y=7$

10. $V(3,0)$, $y=-4$

11. $V(0,-3)$, $x=-12$

12. $V(2,-1)$, $x=3$

13. $V(0,7)$, *el eje* X

14. $V(-3,-1)$, *el eje* Y

15. $V(-4,2)$, $x+12=0$

16. $V(7,-2)$, $y+5=0$

Obtener la ecuación de la parábola, si el foco y la directriz son los que se dan.

17. $F(1,-5)$, $x=3$

18. $F(7,-1)$, $x+1=0$

19. $F(3,-2)$, $y=2$

20. $F(3,8)$, $y+12=0$

21. $F(0,-2)$, $x=5$

22. $F(5,1)$, $y+7=0$

Determinar la ecuación de la parábola, con los datos dados.

23. $V(4,-2)$, $lr=8$
abre a la derecha

24. $V(1,2)$, $lr=8$
abre hacia abajo

Hallar la ecuación de la parábola, con los elementos que se indican.

25. $V(4,2)$, *parámetro* $=6$
abre hacia abajo

26. $V(-2,4)$, *parámetro* $=4$
abre a la izquierda

27. Encuentra la ecuación de la parábola vertical con vértice en $V(-1,-1)$ y que pasa por el punto $P(1,6)$.

28. Obtener la ecuación de la parábola horizontal con vértice en $V(-\frac{1}{2},1)$ y que pasa por el punto $R(\frac{7}{2},1)$.

CAPÍTULO V

Ecuación General de una Parábola

Se han estudiado ya las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen y con vértice en un punto distinto de éste, donde respectivamente sus ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados o bien son paralelos a ellos.

Ahora, partiendo de las ecuaciones que las representan en su forma estándar, se llegará a determinar la ecuación general de la curva.

La ecuación general de segundo grado con dos variables en x, y. es de la forma.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (9)$$

donde todos los coeficientes son constantes y al menos uno de los tres primeros es distinto de cero.

Las ecuaciones de las parábolas de ejes paralelos a los coordenados son:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (5) \qquad\qquad (y-k)^2 = -4p(x-h) \qquad (6)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (7) \qquad\qquad (x-h)^2 = -4p(y-k) \qquad (8)$$

Desarrollando las operaciones indicadas en la ecuación (5), que representa a una parábola horizontal con vértice en (h,k), se tiene:

$$y^2 - 2yk - k^2 = 4px - 4ph$$

de donde:

$$y^2 - 2yk + k^2 - 4px + 4ph = 0 .$$

Reordenando los términos y agrupando:

$$y^2 + (-4p)x + (-2k)y + (k^2 + 4ph) = 0$$

Sea $D' = -4p$, $E' = -2k$ y $F' = k^2 + 4ph$, entonces, se tiene

$$y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Si multiplicamos ahora toda la ecuación por algún número $C\,(C \neq 0)$, obtenemos.

$$Cy^2 + CD'x + CE'y + CF' = 0$$

Luego si $D = CD'$, $E = CE'$ y $F = CF'$ resulta.

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (10)$$

Lo mismo se obtiene, si se desarrolla la ecuación (6).

Para que las ecuaciones (9) y (10) representen la misma curva, sus coeficientes deben de ser iguales, por tanto, comparando ambas ecuaciones, se observa que: Como la ecuación (10) carece de términos en xy y x^2, se tiene, que $B = A = 0$ en la ecuación (9).
Por consiguiente, toda expresión de segundo grado de la forma

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (10)$$

representa la ecuación general de una parábola con vértice distinto del origen y eje de simetría paralelo al eje X.

Realizando ahora el desarrollo de las operaciones indicadas para la ecuación (7), que representa una parábola vertical con vértice en (h,k), de forma similar a como se hizo para la (5), llegando hasta

$$x^2 - D'x + E'y + F' = 0$$

que multiplicándola por un número $A \neq 0$ y considerando a $D = AD'$, $E = AE'$ y $F = AF'$, resulta

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (11)$$

Al mismo resultado se llega también, si se desarrolla le ecuación (8).

De igual manera, para que las ecuaciones (9) y (11) representen la misma curva, se debe tener, que $B=0$ y $C=0$ en la ecuación (9), dado que la ecuación (11) carece de términos en xy y y^2.

Por tanto, la expresión

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (11)$$

representa la ecuación general de una parábola con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo al eje Y.

Esto es, una ecuación de segundo grado con dos variables sin término en xy y con sólo una de las variables elevada al cuadrado, representa una parábola. Si la variable que está al cuadrado es x, la curva es vertical, y si y es la variable al cuadrado, la curva es horizontal.

Dada la Ecuación General de una Parábola Determinar sus Elementos

A partir de la ecuación general de la parábola y aplicando los conocimientos algebraicos de completar binomios en trinomios cuadrados perfectos, y de factorización, se pueden hallar sus elementos.

Ejemplos.

1) Obtener el vértice, el parámetro y la longitud del lado recto de la parábola: $y^2 + 3x - 6y + 36 = 0$.

Solución. Partiendo de: $y^2 - 3x - 6y + 36 = 0$.

Dejando los términos que contienen a la variable y en el primer miembro de la ecuación, y pasando los demás al segundo:

$$y^2 - 6y = -3x - 36.$$

Completando el binomio en y, en trinomio cuadrado perfecto:

$$y^2 - 6y + 9 = -3x - 36 + 9$$

Simplificando y factorizando:

$$(y-3)^2 = -3(x+9)$$

llegando así, a poder representar la ecuación en la forma estándar $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ de donde, se desprende, que el vértice $V(h,k) = V(-9,3)$.
De las ecuaciones, se tiene, que $-4p = -3$, de donde $4p = 3$, por lo que el parámetro $2p = \dfrac{3}{2}$ o bien $2p = 1.5$
Como $lr = 4p$ y $4p = 3$, se tiene entonces, que $lr = 3$.

2) Dada la ecuación de la parábola $4x^2 + 16x - 12y - 8 = 0$. Hallar su vértice, su directriz y la longitud de lado recto.

Solución. Puesto que el coeficiente de x^2 es distinto de la unidad, se debe dividir entre dicho coeficiente, para poder completar el binomio en x. Por tanto, dividiendo toda la ecuación entre 4, se llega a:

$$x^2 + 4x - 3y - 2 = 0.$$

Dejando en el primer miembro los términos en x, y trasponiendo los demás al segundo.

$$x^2 + 4x = 3y + 2\,.$$

Completando en trinomio cuadrado perfecto, el binomio en x:

$$x^2 + 4x + 4 = 3y + 2 + 4$$

Simplificando y factorizando:

$$(x+2)^2 = 3(y+2)\,.$$

Obteniéndose así, la ecuación en la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, por tanto, su vértice es el punto $V(h,k) = V(-2,-2)$.

Como $lr = 4p$, y $4p = 3$ de acuerdo a las ecuaciones, entonces, $lr = 3$. Por la forma de la ecuación sabemos que su eje de simetría es paralelo al eje Y, y la curva abre hacia arriba, por tanto, su directriz, es la recta paralela al eje X, cuya intersección con el eje Y, dista p unidades del vértice y por debajo de éste, por lo que su ecuación resulta ser $y = k - p$, es decir, $y = -2 - \frac{3}{4}$ o bien $y = -\frac{11}{3}$.

3) Encontrar el vértice, la longitud del lado recto, el foco y hacer un esbozo de la gráfica, de la parábola: $2y^2 + 16x - 12y + 50 = 0$.

Solución. Hay que reducir la ecuación a la forma estándar, para que esto sea posible, primero se debe de dividir todo entre 2, ya que el coeficiente de y^2 debe de ser igual a la unidad, para poder completar el binomio en y. Por tanto, dividiendo resulta:

$$y^2 + 8x - 6y + 25 = 0.$$

Dejando sólo los términos en y, en el primer miembro, se tiene:

$$y^2 - 6y = -8x - 25.$$

Completando el binomio:

$$y^2 - 6y + 9 = -8x - 25 + 9.$$

Simplificando y factorizando:

$$(y - 3)^2 = -8(x + 2)$$

quedando así la ecuación reducida a la forma $(y - k)^2 = -4p(x - h)$, de donde se desprende, que el vértice es $V(h, k) = V(-2, 3)$.
Como $lr = 4p$ y $-4p = -8$ debido a las ecuaciones, entonces, $4p = 8$, de donde, $lr = 8$.
De acuerdo a la ecuación en su forma estándar, el eje es paralelo al eje X, y la curva abre a la izquierda, lo que indica que el foco se encuentra a una distancia p del vértice y a la izquierda de éste, por lo

que sus coordenadas son, $F(h-p,k)=F(-2-2,3)$, es decir, $F(-4,3)$ ya que de $4p=8$, se deduce que $p=2$.
El esbozo gráfico de la curva queda ilustrado en la figura 31.

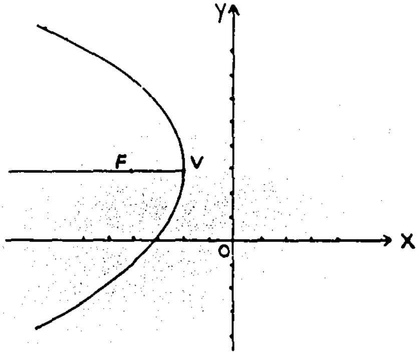


fig.31

4) Obtener el vértice y el parámetro de la parábola $2x^2-10x+3y+8=0$.

Solución. Dividiendo la ecuación entre 2, para que el coeficiente de x^2 sea igual a la unidad

$$x^2-5x-\frac{3}{2}y+4=0.$$

Pasando al segundo miembro los términos que no contienen a la variable x:

$$x^2-5x=\frac{3}{2}y-4.$$

Completando en trinomio cuadrado perfecto, el binomio en x:

$$x^2-5x+\frac{25}{4}=\frac{3}{2}y-4+\frac{25}{4}.$$

Simplificando y factorizando se llega a la ecuación:

$$(x-\frac{5}{2})^2=\frac{3}{2}(y+\frac{3}{2}).$$

Donde ésta, resultó ser de la forma $(x-h)^2=4p(y-k)$, por consiguiente, el vértice de la curva es el punto $V(h,k)=V(\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$.

Por las ecuaciones, se sabe que $4p=\frac{3}{2}$, de donde se deduce, que el parámetro $2p=\frac{3}{4}$.

Ejercicios.

Encontrar el vértice, el foco, la directriz y esbozar la gráfica de las parábolas.

1. $2y^2+2x-4y-10=0$
2. $x^2+4x+24y+52=0$
3. $4x^2+16x-12y-8=0$
4. $y^2+8y+6x+16=0$
5. $x^2-8x-6y-8=0$
6. $y^2-14y-24x-119=0$

Determinar el vértice, el parámetro y el foco de las siguientes parábolas

7. $12x^2-72x+y+78=0$
8. $4x^2+16x-3y+28=0$
9. $y^2+10y-24x+49=0$
10. $4x^2-48x-y+147=0$

Dados Algunos Elementos de la Parábola Determinar la Ecuación en su Forma General

Como se sabe, partiendo de algunos elementos que se conozcan de la curva, ésta puede ser expresada en su segunda forma ordinaria, después, desarrollándola, se obtiene la ecuación en su forma general.

Ejemplos.

1) Hallar la ecuación en su forma general de la parábola cuyo vértice es $(-3,2)$ y foco $(-3,0)$.

Solución. Como tanto el vértice como el foco tienen la misma abscisa, esto indica que el eje de la curva es paralelo al eje Y, es decir, la parábola es vertical, y abre hacia abajo, por ser la ordenada del foco menor que la del vértice. Por tanto, su ecuación debe ser de la forma $(x-h)^2=-4p(y-k)$.

Para que la ecuación estándar quede bien determinada, basta con conocer p, pero $p=2-0$, esto es $p=2$, por lo que su ecuación es $(x+3)^2=-8(y-2)$. Ahora, desarrollándola resulta $x^2+6x+9=-8y+16$, pasando todos los términos al primer miembro, reordenando y simplificando, se llega a la expresión:

$$x^2+6x+8y-7=0,$$

que representa la ecuación de la parábola en su forma general.

2) Dada la ecuación de la parábola: $(y-2)^2=-5(x-5)$, expresarla en su forma general.

Solución. Cuando se inicia desde la ecuación estándar de la curva, lo que hay que hacer es desarrollarla, por tanto, al realizar tal desarrollo, se tiene, $y^2-4y+4=-5x+25$, después, hay que igualarla a cero, y por último, reordenando y reduciendo términos se obtiene:

$$y^2+5x-4y-21=0,$$

que representa la ecuación general de la parábola.

3) Hallar la ecuación general de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y, y pasa por los puntos: $(1,1),(2,2)\,y\,(-1,5)$.

Solución. Como el eje es paralelo al eje Y, la curva es vertical, lo cual indica que su ecuación debe ser de la forma:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (11)$$

Dividiendo ésta ecuación entre la constante $A \neq 0$, se tiene

$$x^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

que es equivalente a la ecuación (11). Ésta ecuación debe satisfacerse por las coordenadas de cada uno de los puntos por donde pasa la curva $(1,1), (2,2)$ y $(-1,5)$, por tanto, sustituyendo respectivamente éstas coordenadas en la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 1 + D' + E' + F' &= 0 \\ 4 + 2D' + 2E' + F' &= 0 \\ 1 - D' + 5E' + F' &= 0 \end{aligned}$$

Dando origen a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo, primero pasamos los términos independientes al segundo miembro de la igualdad.

$$\begin{aligned} D' + E' + F' &= -1 \qquad (a) \\ 2D' + 2E' + F' &= -4 \qquad (b) \\ \underline{-D' + 5E' + F'} &\underline{= -1 \qquad (c)} \end{aligned}$$

Sumando a la ecuación (a) la ecuación (c), se encuentra que

$$6E' + 2F' = -2 \qquad (d)$$

Multiplicando a la ecuación (c) por 2, y sumándola con (b), se tiene

$$12E' + 3F' = -6 \qquad (e)$$

Multiplicando por -2 a (d), y sumándola con (e), se llega al sistema

$$\begin{aligned} -12E' - 4F' &= 4 \\ \underline{12E' + 3F'} &\underline{= -6} \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, resulta que $-F' = -2$, de donde $F' = 2$, sustituyendo este valor en (d), se determina: $E' = -1$.
Reemplazando los valores de E' y F' en (a), se encuentra que $D' = -2$.
Finalmente, sustituyendo los valores de D', E' y F' en

$$x^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

se llega a la ecuación general de la parábola

$$x^2 - 2x - y + 2 = 0.$$

También el sistema puede ser resuelto por cualquier otro método, incluyendo el de determinantes.
Con este ejemplo queda ilustrada, la forma de llegar a la ecuación general de la parábola, cuando ésta, pasa por tres puntos y con una condición dada.

Ejercicios.

Hallar la ecuación en su forma general, de las parábolas cuyos elementos son los que se indican.

1. $F(3,0)$ *directriz* $x + 3 = 0$
2. $F(0,6)$ *directriz el eje X*
3. $V(3,2)$, $F(5,2)$
4. $V(-1,2)$, $F(-1,0)$
5. $V(-4,2)$ *directriz* $x = -12$
6. $V(-3,-1)$ *directriz el eje Y*

Dadas las ecuaciones de la parábola en su forma estándar, expresarlas en su forma general.

7. $(y-4)^2 = 3(x-2)$
8. $(y+1)^2 = -4(x-3)$
9. $(x+4)^2 = \frac{3}{2}(y+1)$
10. $(x-1)^2 = -5(y+2)$

Escribir en su forma general, la ecuación de la parábola, cuyo eje es paralelo al eje X y pasa por los tres puntos indicados.

11. $(6,2)\,,(-6,-2)\,,(-2,0)$

12. $(0,4)\,,(12;-2)\,,(4,0)$

13. $(-1,3)\,,(-4,0)\,,(8,6)$

14. $(\frac{3}{4},9)\,,(-\frac{5}{4},1)\,,(0,11)$

Expresar en su forma general, la ecuación de la parábola, cuyo eje es paralelo al eje Y y pasa por los tres puntos indicados.

15. $(1,3)\,,(-2,15)\,,(3,5)$

16. $(2.3)\,,(0.2)\,,(4,12)$

17. $(1,-5)\,,(-2,6)\,,(2,-2)$

18. $(0,-\frac{7}{4})\,,(\frac{5}{2},2)\,,(-\frac{1}{2},-2)$

CAPÍTULO VI

Rotación de Ejes

Llegaremos a establecer las fórmulas que relacionan los puntos en un sistema de coordenadas XY, con respecto a un nuevo sistema $X'Y'$, originado por una rotación.

Si los nuevos ejes $X'Y'$, se obtienen por una rotación de los originales alrededor del origen por medio de un ángulo α y en sentido positivo, entonces, la transformación se llama, rotación de ejes.

Consideremos que las coordenadas de un punto M referidas a los sistemas XY y $X'Y'$ son: (x,y) y (x',y') respectivamente (fig. 32).

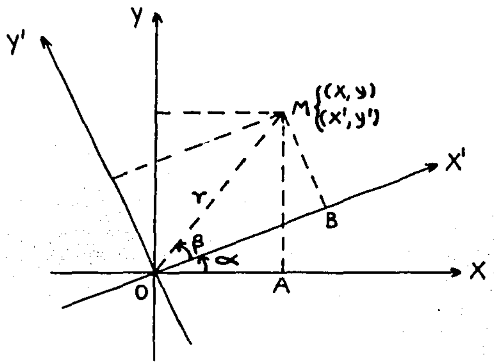


fig.32

Donde se observa que:

$$x = \overline{OA} \qquad y = \overline{MA} \qquad r = \overline{OM}$$

$$x' = \overline{OB} \qquad y' = \overline{MB}$$

En el triángulo rectángulo OAM, se tiene, que

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} \quad \text{o sea} \quad x=r\cos(\alpha+\beta).$$

Aplicando la identidad trigonométrica: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, resulta:

$$x=r\cos\alpha\cos\beta-r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad I$$

Del triángulo rectángulo OBM , se encuentra que:

$$\cos\beta=\frac{\overline{OB}}{\overline{OM}}\text{ , esto es, } \quad x'=r\cos\beta \qquad II$$

también, se desprende que:

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{\overline{MB}}{\overline{OM}}\text{, es decir, } \quad y'=r\operatorname{sen}\beta \qquad III$$

Sustituyendo II y III en I, se tiene:

$$x=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha .$$

De un desarrollo similar al anterior se deduce que

$$y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha\\ y&=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha \end{aligned}} \qquad (12)$$

son las fórmulas que nos permiten transformar las coordenadas de un punto en el caso de una rotación de ejes cartesianos.

Ejemplo.

Si las coordenadas de un punto P en el sistema XY son $(-9,4)$, ¿qué coordenadas tendrá el punto en el sistema de ejes que resulta de una rotación de $90°$ en torno al origen?

Solución. Sustituyendo las coordenadas del punto P y el ángulo dado, en las fórmulas de transformación (12) y desarrollando

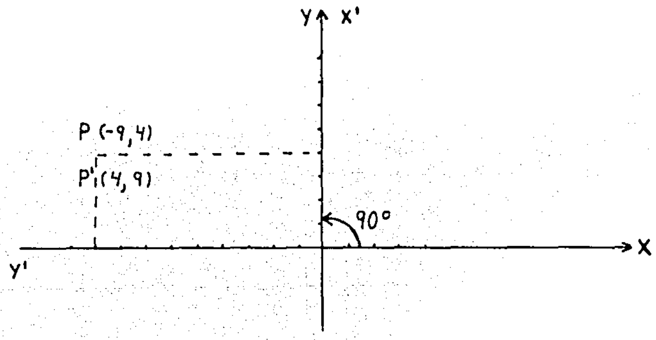
$$-9 = x'\cos 90° - y'\operatorname{sen} 90° \qquad 4 = x'\operatorname{sen} 90° + y'\cos 90°$$

$$-9 = x'(0) - y'(1) \qquad 4 = x'(1) + y'(0)$$

$$-9 = -y' \qquad 4 = x'$$

$$y' = 9 \qquad x' = 4$$

Por tanto, $(4,9)$ son las coordenadas del punto P', en el sistema $X'Y'$; con lo que queda contestada la pregunta del ejemplo, y representado en la gráfica.



Eliminación del Término en xy

Como se verá más adelante, cuando el eje de la parábola es oblicuo a los cartesianos, la ecuación que la representa contiene al término en xy, y será de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que es la ecuación general de una cónica. En estos casos, para obtener elementos de la curva y poder dibujarla, es necesario aplicar una rotación de ejes, para que la cónica y en particular la parábola quede referida al nuevo sistema $X'Y'$, y su eje coincida con el eje X' (fig. 33), razón por la cual, su ecuación no deberá contener el término xy, ya que conforme a lo estudiado anteriormente, cuando el eje de la curva coincide o es paralelo a los cartesianos, la ecuación que la representa no contiene tal término.

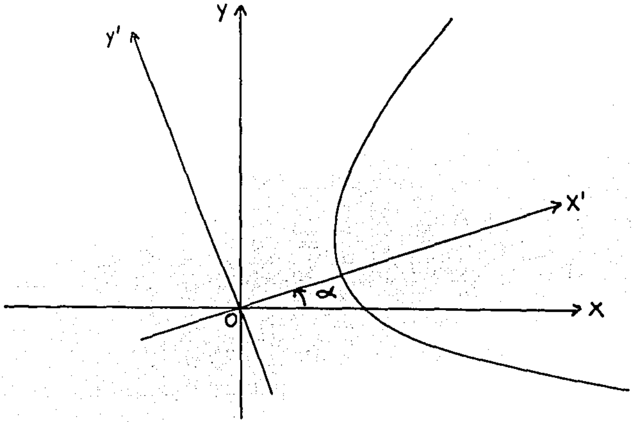


fig.33

El problema radica entonces, en encontrar el ángulo de rotación α que permita eliminar el término xy, y poder así, escribir la ecuación de la parábola, en cualquiera de sus formas ordinarias o en forma general.

Para esto, consideremos el lugar geométrico determinado por la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (9)$$

girando los ejes originales alrededor del origen un ángulo α en sentido positivo y sustituyendo los valores de x e y de acuerdo a las fórmulas de rotación:

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$$

$$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha,$$

en la ecuación (9), se tiene:

$$A(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)^2 + B(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + C(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)^2 +$$

$$+ D(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha) + E(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

Desarrollando las operaciones indicadas agrupando y factorizando

$$(A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha)(x')^2 + [B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) - 2(A - C)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha]x'y' +$$

$$+ (A\operatorname{sen}^2\alpha - B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y'^2 + (D\operatorname{sen}\alpha + E\operatorname{sen}\alpha)x' + (-D\operatorname{sen}\alpha + E\cos\alpha)y' +$$

$$+ F = 0 \qquad (a)$$

Si $A' = A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha$

$B' = B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) - 2(A - C)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$C' = A\text{sen}^2\alpha - B\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$

$D' = D\text{sen}\,\alpha + E\text{sen}\,\alpha$

$E' = -D\text{sen}\,\alpha + E\cos\alpha$

$F' = F,$

entonces, la ecuación (a) puede escribirse como:

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (b)$$

Donde se aprecia que los valores A', B', C', D', E' y F' dependen del ángulo α y de los coeficientes originales.

Para eliminar el término $x'y'$ de la ecuación (b), debe elegirse α de tal manera que $B' = 0$, es decir, que :

$$B(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) - 2(A - C)\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 0$$

Aplicando a la igualdad anterior, las identidades trigonométricas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \qquad\qquad \text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

resulta:

$$B\cos 2\alpha - (A - C)\text{sen}\,2\alpha = 0$$

Resolviendo la ecuación para encontrar el valor de α

$$B\cos 2\alpha = (A - C)\text{sen}\,2\alpha$$

$$B = (A - C)\frac{\text{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$B = (A - C)\tan 2\alpha$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{B}{A - C} \qquad (13)$$

que es la relación que nos permite encontrar el ángulo de rotación α para el cual el término en xy se elimina.

La aplicación de ésta fórmula se verá en el siguiente capítulo, que trata el caso en que el eje de la parábola, no coincide ni es paralelo a los cartesianos.

CAPÍTULO VII

Ecuación de una Parábola Cuando su Eje es Oblicuo a los Coordenados

Sólo se ha considerado, en lo estudiado anteriormente, las ecuaciones de parábolas en posiciones ordinarias, es decir, las ecuaciones de parábolas cuyos ejes coinciden o son paralelos a los cartesianos. Ahora se ilustrará, por medio de ejemplos, la forma de obtener la ecuación de la curva, cuando su eje es oblicuo a los coordenados.

Primero: cuando se conoce el foco y la directriz, para esto, sólo basta con aplicar la definición.

Ejemplo.

Encontrar la ecuación de la parábola que tiene como foco $F(3,3)$ y directriz la recta: $x+y-2=0$

Solución. Sea $Q(x,y)$ un punto genérico de la curva, y D el pie de la perpendicular trazada desde Q a la directriz (fig. 34).

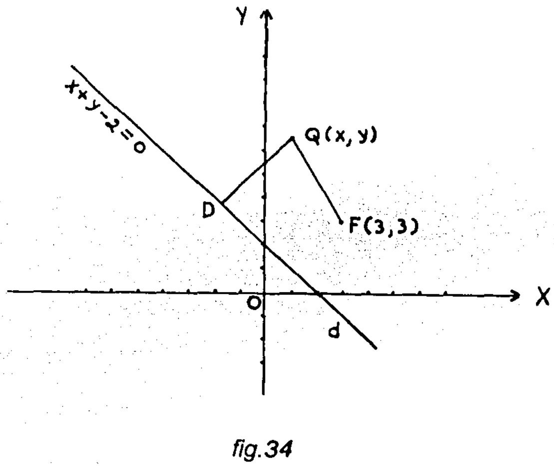


fig.34

Por definición de parábola, se tiene, entonces ,que:

$$d(Q,F) = d(Q,D).$$

Pero

$$d(Q,F) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} \qquad \text{y} \qquad d(Q,D) = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}},$$

es decir,

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2}$$

Desarrollando los cuadrados:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = \frac{x^2 + 2xy - 4x + y^2 - 4y + 4}{2}.$$

Quitando denominadores y pasando todos los términos al primer miembro se tiene

$$2x^2 - 12x + 18 + 2y^2 - 12y + 18 - x^2 - 2xy + 4x - y^2 + 4y - 4 = 0.$$

Por último simplificando y reordenando se obtiene la expresión

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 32 = 0$$

que es la ecuación de la parábola con las características dadas al principio.

De la ecuación obtenida, puede apreciarse que cuando el eje de la curva es oblicuo a los coordenados, su ecuación contiene al término xy, y a los cuadrados de las variables x, y, razón por la cual, dicha ecuación no puede ser expresada en ninguna de sus formas ordinarias, a menos que se aplique una rotación de ejes para eliminar dicho término, y poder incluso obtener sus elementos, lo que a continuación haremos.

Para desaparecer tal término y hacer que la curva quede referida al nuevo sistema $X'Y'$, se debe encontrar el ángulo α, para el cual esto se cumpla, aplicando la relación (13), a la ecuación encontrada, tenemos:

$$tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-2}{1-1} \text{ no está definido}$$

$$\therefore\ 2\alpha = 90°, \text{ es decir, } \alpha = 45°.$$

Sustituyendo el valor del ángulo α, en las ecuaciones de rotación (12), se obtiene

$$x = x'\cos 45° - y'\operatorname{sen} 45°$$
$$y = x'\operatorname{sen} 45° + y'\cos 45°$$

como $\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces:

$$x = x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}},$$

o bien

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\ ; \qquad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Colocando estos valores de x e y, en la ecuación:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 32 = 0, \text{ se tiene:}$$

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-8\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-8\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+32=0$$

desarrollando las operaciones:

$$\frac{1}{2}(x')^2-x'y'+\frac{1}{2}(y')^2-(x')^2+(y')^2+\frac{1}{2}(x')^2+x'y'+\frac{1}{2}(y')^2-\frac{8}{\sqrt{2}}x'+\frac{8}{\sqrt{2}}y'-\frac{8}{\sqrt{2}}x'-\frac{8}{\sqrt{2}}y'+$$

$$+32=0.$$

Simplificando:

$$2(y')^2-\frac{16}{\sqrt{2}}x'-32=0$$

donde se puede observar que dicha ecuación ya no contiene al término en xy.

Dividiendo entre 2, y posteriormente multiplicando al término $-\frac{8}{\sqrt{2}}x'$ por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, se obtiene:

$$(y')^2-4\sqrt{2}x'-16=0,$$

despejando $(y')^2$ y factorizando:

$$(y')^2=4\sqrt{2}(x'-2\sqrt{2}),$$

que también puede escribirse como:

$$(y'-0)^2=4\sqrt{2}(x'-2\sqrt{2}),$$

donde esta expresión es la ecuación de la curva referida a los nuevos ejes $X'Y'$, que resultó ser de la forma $(y-k)^2=4p(x-h)$ y, de donde se desprende, que el vértice $V(h,k)=V(2\sqrt{2},0)$, como $lr=4p$ y $4p=4\sqrt{2}$, entonces, $lr=4\sqrt{2}$. De $4p=4\sqrt{2}$, se tiene que $p=\sqrt{2}$. Por tanto, las coordenadas del foco son, $F(h+p,k)=(2\sqrt{2}+\sqrt{2},0)$ o bien $F(3\sqrt{2},0)$.

La ecuación de la directriz es: $x = h - p$, es decir, $x = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$, que simplificando se escribe como $x = \sqrt{2}$.

La curva que representa gráficamente la ecuación referida al nuevo sistema y al inicial, es la misma, y queda ilustrada en la figura 35.

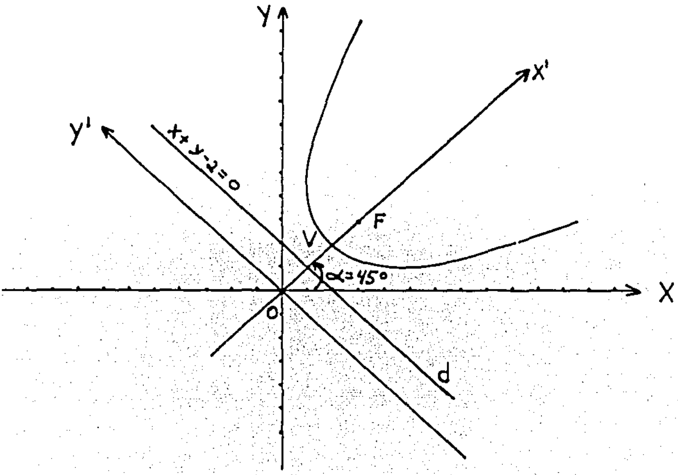


fig.35

Segundo: cuando se conocen las coordenadas de un punto de la curva, la ecuación de su eje y las coordenadas del vértice.

Para este caso, se encuentra la ecuación de la recta tangente en el vértice y se utiliza la propiedad intrínseca de la parábola, cuyo enunciado dice: Los cuadrados de las distancias de los puntos de la parábola al eje son directamente proporcionales a sus distancias a la tangente en el vértice ($y^2 = 4px$), figura 36.

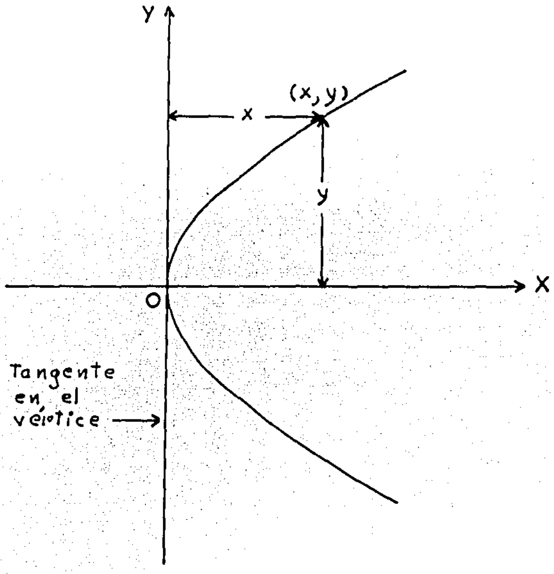


fig.36

Ejemplo

Encontrar la ecuación de una parábola que tiene su vértice en el origen, su eje es la recta $x+y=0$ y pasa por el punto $L(0,1)$.

Solución. La ecuación de la recta tangente en el vértice de la parábola es $-x+y=0$, por ser perpendicular al eje y pasar por el origen, ver figura 37.

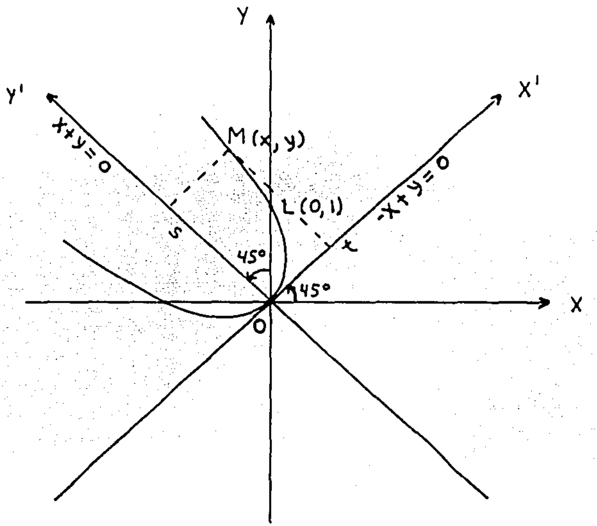


fig.37

Sea $M(x,y)$ un punto genérico de la curva, y las rectas s y t, el eje y la tangente en el vértice, respectivamente, aplicando la propiedad intrínseca se tiene:

$$d^2(M,s)=4p\left[d(M,t)\right].$$

Por distancia de un punto a una recta, resulta:

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4p\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right).$$

Por la potencia de un cociente:

$$\frac{(x+y)^2}{2} = 4p\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right) \qquad (14)$$

Como el punto $L(0,1)$ es un punto por donde pasa la curva, entonces, debe de satisfacer la ecuación anterior, es decir,

$$\frac{(0+1)^2}{2} = \frac{4p(0+1)}{\sqrt{2}}$$

de donde:

$$\frac{1}{2} = \frac{4p}{\sqrt{2}},$$

despejando a p se tiene

$$p = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Sustituyendo éste valor en la ecuación (14), resulta

$$\frac{(x+y)^2}{2} = \frac{4\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)(-x+y)}{\sqrt{2}}$$

o bien

$$\frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(-x+y)}{2}.$$

Quitando los denominadores y desarrollando el cuadrado del binomio

$$x^2+2xy+y^2=-x+y.$$

Pasando todos los términos al primer miembro y reordenando, se tiene:

$$x^2+2xy+y^2+x-y=0$$

que es la ecuación buscada.

Aplicando a la ecuación encontrada la fórmula para hallar el ángulo de rotación α, que permita eliminar el término en xy, se obtiene:

$$tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{2}{1-1}$$

no está definido, lo que indica que $2\alpha=90°$, esto es, $\alpha=45°$

Sustituyendo el valor del ángulo α, en las fórmulas de rotación (12)

$$x=x'\cos 45°-y'\operatorname{sen}45°$$
$$y=x'\operatorname{sen}45°+y'\cos 45°$$

como el $\operatorname{sen}45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces,

$$x=x'\frac{1}{\sqrt{2}}-y'\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y=x'\frac{1}{\sqrt{2}}+y'\frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde:

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

Colocando los valores de x e y en la ecuación:

$$x^2+2xy+y^2+x-y=0$$

resulta que:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}-\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)=0$$

desarrollando las operaciones indicadas:

$$\frac{(x')^2}{2}-\frac{2x'y'}{2}+\frac{(y')^2}{2}+\frac{2(x')^2}{2}-\frac{2(y')^2}{2}+\frac{(x')^2}{2}+\frac{2x'y'}{2}+\frac{(y')^2}{2}-\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}=0$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando:

$$2(x')^2-\frac{2y'}{\sqrt{2}}=0.$$

Dividiendo entre 2:

$$(x')^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y'=0$$

despejo $(x')^2$

$$(x')^2=\frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Que es la ecuación de la parábola referida al nuevo sistema $X'Y'$ y resultó ser de la forma: $x^2=4py$. El trazo de su gráfica, es como se muestra en figura 37 de la página 71, cuya orientación de la curva, es hacia la parte positiva del eje Y'.

Considerando éste ejemplo podemos hacer ver, que se pueden obtener las otras tres orientaciones de la curva con respecto a los nuevos ejes, con sólo sumar $90°, 180°$ o $270°$ al ángulo de $45°$.

Veamos otra orientación: Como $45°+90°=135°$, entonces, ahora el ángulo de rotación $\alpha=135°$. Pero se sabe que:

$$\text{sen}135° = \text{sen}(180° - 45°) = \text{sen}45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, aplicando las fórmulas de rotación, se tiene

$$x = x'\cos 135° - y'\text{sen}135°$$
$$y = x'\text{sen}135° + y'\cos 135°$$

o bien:

$$x = x'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) - y'\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'(-\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

es decir,

$$x = \frac{-x' - y'}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

sustituyendo éstos valores en la ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$$

resulta que:

$$(\frac{-x' - y'}{\sqrt{2}})^2 + 2(\frac{-x' - y'}{\sqrt{2}})(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}) + (\frac{x' - y'}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{-x' - y'}{\sqrt{2}}) - (\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}) = 0,$$

realizando las operaciones indicadas simplificando y despejando el término $(y')^2$, se obtiene finalmente la ecuación de la parábola:

$$(y')^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x'$$

referida al nuevo sistema y que es de la forma: $y^2 = 4px$, por lo que representa la misma curva con vértice en el origen, pero que ahora se extiende hacia la parte positiva del eje X' (fig.38).

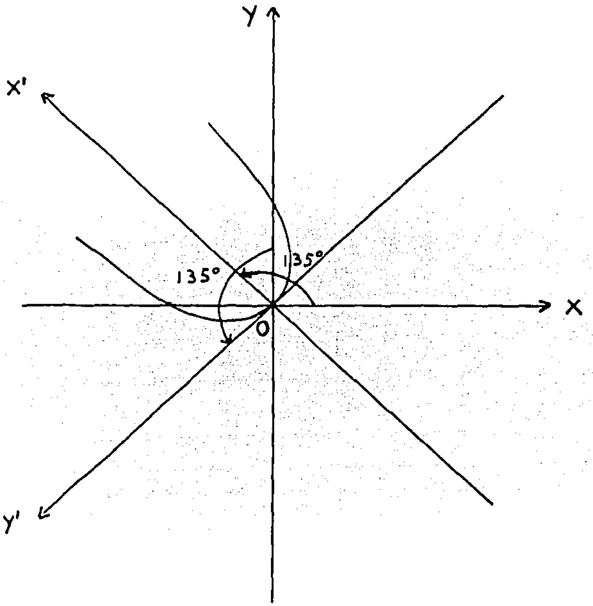


fig.38

Las dos orientaciones restantes se encuentran sumando $180°$ a $45°$ para una, y sumando $270°$ a $45°$ para la otra, y realizando un desarrollo similar a los anteriores.

En los siguientes ejemplos, sólo se encontrará la ecuación de la parábola en su forma general con término en xy, ya que los ejes de las curvas, además de ser oblicuos a los coordenados, no pasan por el origen, y se tendría que hacer dos movimientos, uno de traslación y otro de rotación, para expresar las ecuaciones en alguna de sus

formas ordinarias, lo que resultaría más laborioso que los casos anteriores.
Sin embargo, con los datos que se dan en los enunciados de los ejemplos y algunos otros que se puedan y consideren necesarios determinar, se pueden esbozar sus gráficas.

Ejemplos.

1) Encontrar la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $y=-2x+3$ y el foco es $F(3,2)$

Solución. Sea $Q(x,y)$ un punto genérico de la parábola, y D el pie de la perpendicular de Q a la directriz (fig.39), entonces, $d(Q,F)=d(Q,D)$.

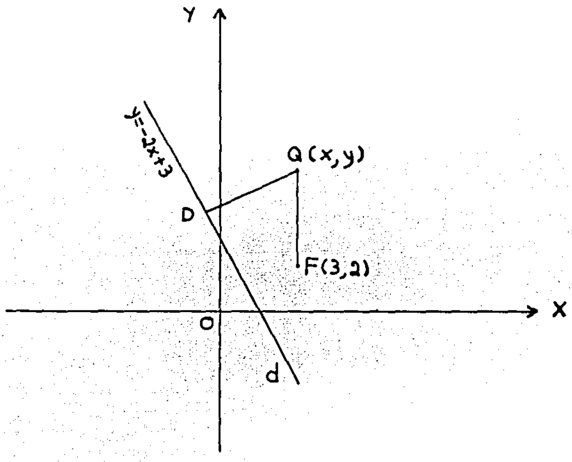


fig.39

Calculando $d(Q,F)$ y $d(Q,D)$, por medio de las fórmulas de distancia entre dos puntos y la de un punto a una recta, se tiene:

$$d(Q,F)=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

$$d(Q,D)=\frac{2x+y-3}{\sqrt{(2)^2+(1)}}=\frac{2x+y-3}{\sqrt{5}}.$$

Como éstas distancias son iguales, entonces,

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\frac{2x+y-3}{\sqrt{5}}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, resulta:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{(2x+y-3)^2}{5}$$

desarrollando las operaciones indicadas, simplificando y quitando denominadores:

$$5x^2-30x+5y^2-20y+65=4x^2+4xy-12x+y^2-6y+9,$$

pasando todos los términos al primer miembro y reduciendo:

$$x^2-18x+4y^2-14y-4xy+56=0,$$

finalmente, reordenando los términos, se llega a la expresión:

$$x^2-4xy+4y^2-18x-14y+56=0$$

donde ésta, representa la ecuación de la parábola , dado que se llega a ella por medio de su definición.

Como el eje de la parábola es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, entonces, su ecuación es, $y-2=\frac{1}{2}(x-3)$, que expresada en forma general resulta $-x+2y-1=0$.
El punto de intersección del eje de la curva y la directriz es $A(1,1)$, que se obtiene de resolver por métodos algebraicos apropiados, el sistema formado por sus respectivas ecuaciones.

Ahora, como el vértice es el punto medio de la distancia del foco a la directriz, (punto medio del segmento AF) sus coordenadas son $V(\frac{1+3}{2},\frac{1+2}{2})=V(2,1.5)$.

Con esto, se tienen más elementos para poder hacer un esbozo de su gráfica, ilustrada en la figura 40.

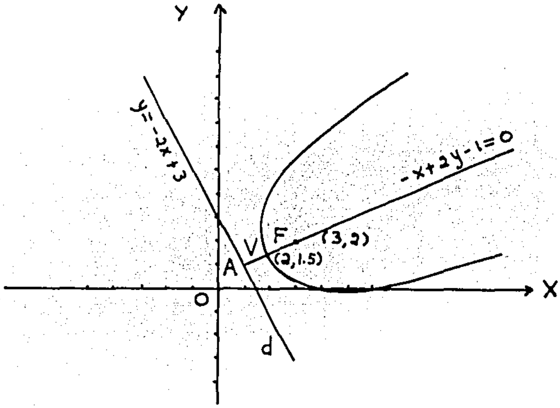


fig.40

2) Encontrar la ecuación de la parábola que pasa por el punto $L(5,1)$, tiene como eje la recta $x-y+1=0$ y el vértice es el punto $V(3,4)$.

Solución. Puesto que la recta tangente en el vértice pasa por éste y es perpendicular al eje, entonces, aplicando el criterio de perpendicularidad y la ecuación de la recta que pasa por un punto y de pendiente conocida, la ecuación de la recta tangente en el vértice expresada en su forma general es, $x+y-7=0$. ver figura 41.

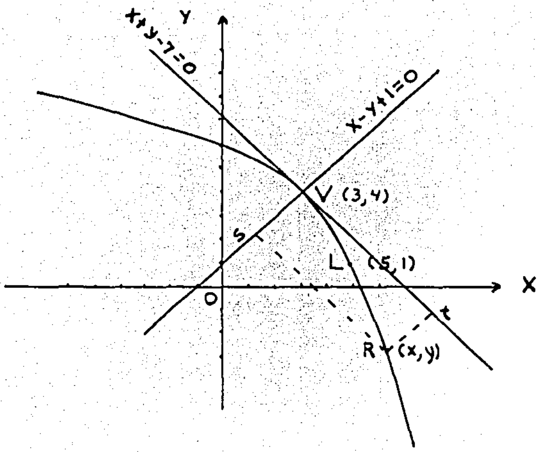


fig.41

Sea $R(x,y)$ un punto genérico de la parábola, y considerando la propiedad intrínseca de la curva se tiene

$$d^2(R,s) = 4p\left[d(R,t)\right]$$

Como el punto R se encuentra debajo, con respecto a cada una de las rectas $x-y+1=0$ y $x+y-7=0$, entonces, la distancia dirigida de este punto a dichas rectas, es negativa, y por tanto, se obtiene

$$\left(\frac{x-y+1}{-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4p(x+y-7)}{-\sqrt{2}}$$

de donde

$$\frac{(x-y+1)^2}{2}=\frac{4p(x+y-7)}{-\sqrt{2}} \qquad (15)$$

Puesto que $L(5,1)$ es un punto por donde pasa la curva, sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación anterior, esto es.

$$\frac{(5-1+1)^2}{2}=\frac{4p(5+1-7)}{-\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente:

$$\frac{25}{2}=\frac{4p}{\sqrt{2}},$$

despejando a p se encuentra:

$$p=\frac{25\sqrt{2}}{8}$$

Colocando el valor numérico de p en (15):

$$\frac{(x-y+1)^2}{2}=\frac{4(\frac{25\sqrt{2}}{8})(x+y-7)}{-\sqrt{2}},$$

reduciendo:

$$\frac{(x-y+1)^2}{2}=-\frac{25}{2}(x+y-7),$$

quitando denominadores:

$$(x-y+1)^2=-25(x+y-7),$$

desarrollando las operaciones:

$$x^2-2xy+2x+y^2-2y+1=-25x-25y+175,$$

por último, pasando todos los términos al primer miembro, simplificando y reordenando se llega a:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 27x + 23y - 174 = 0$$

que es la ecuación buscada, y el esbozo de su gráfica. es como se muestra en la figura 41.

Ejercicios.

Encontrar las ecuaciones de las parábolas que cumplen las condiciones que se dan

1. *directriz* : $y = 2x + 1$
   foco : $F(2,-3)$

2. *directriz* : $5x + 12y - 30 = 0$
   foco : $F(9,2)$

3. *directriz* : $5x - y - 3 = 0$
   foco : $F(6,-5)$

4. *directriz* : $x - 2y + 14 = 0$
   foco : $F(-4,-6)$

5. *directriz* : $x - 3y - 15 = 0$
   foco : $F(3,-4)$

6. *directriz* : $2x + y - 4 = 0$
   foco : $F(4,3)$

7. El eje es la recta $2x - y + 1 = 0$, el vértice $V(3,7)$ y pasa por el punto (5.3).

8. El eje es la recta $x + 5y - 3 = 0$, el vértice $V(-2.1)$ y pasa por el punto (5.6).

CAPÍTULO VIII

Ecuación de la Tangente a una Parábola

En geometría elemental solamente se estudia la tangente a una curva; la circunferencia, y se define como la recta que tiene un solo punto común con ella. Esta definición, suficiente para la circunferencia, no lo es para todas las curvas planas en general, pues hay rectas, que cortan a una curva abierta en sólo un punto, sin que necesariamente haya tangencia entre sí.

Como es el caso del eje de una parábola, que la corta sólo en el vértice, por lo que éste, es el único punto común con ella, y sin embargo no hay tangencia, o bien, por cualquier otra recta como *l*, paralela al eje, y que corta a la curva, figura 42.

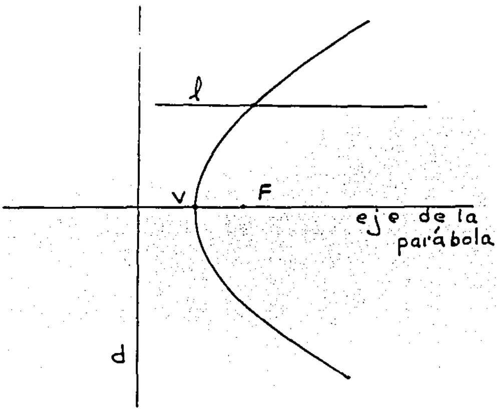


fig.42

De ahí la necesidad de dar una definición de tangente aplicable a todas las curvas planas.

Para esto, retomemos la definición de tangente a una circunferencia.

Sea P un punto de un círculo y t la recta tangente al círculo que pasa por P. Observamos en la figura 43 que todos los puntos de t distintos de P se encuentran en una sola de las regiones determinadas por el círculo, esto es, en la región exterior del mismo. Si Q es otro punto de la tangente distinto de P, se tiene

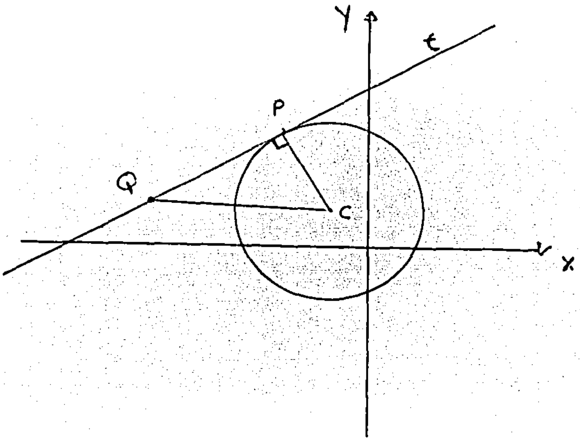


fig.43

que el triángulo que se forma PCQ, es rectángulo, porque la tangente a un círculo es perpendicular al radio de éste, en el punto de tangencia. De donde se desprende, que la distancia de Q a C es mayor que la distancia de C a P $(d(Q,C)>d(C,P))$, debido a que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es mayor que cualquiera de sus catetos, lo que indica que el punto Q, se encuentra en la región de afuera del círculo.

Por lo que se define, entonces, que una recta es tangente a una curva plana en un punto P de ella, si ésta, corta a la curva solamente en P, y todos los demás puntos de la tangente, están en la región exterior determinada por la curva.

Un punto Q es exterior a una parábola (fig. 44), si su distancia de éste a la directriz es menor que su distancia al foco.

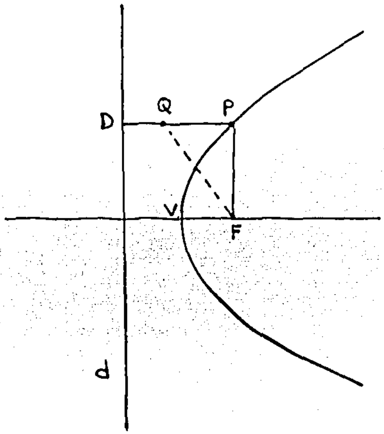


fig.44

Veamos, en la figura, el punto P es el extremo del lado recto que se encuentra por arriba del foco y D es el punto de intersección de la perpendicular trazada desde P a la directriz, por consiguiente $d(Q,D)<d(P,D)$ por ser Q un punto del segmento DP, pero $d(P,D)=d(P,F)$ por ser P un punto de la parábola, de donde se tiene, entonces, que $d(Q,D)<d(P,F)$, además, en el triángulo rectángulo QPF. $d(P,F)<d(Q,F)$ por tanto $d(Q,D)<d(Q,F)$, de forma análoga, se

hace ver que sucede lo mismo para cualquier otra posición de Q exterior a la parábola.

Para llegar a determinar la ecuación de la tangente a una parábola, aparte de lo visto anteriormente, también es necesario demostrar el siguiente:

Teorema: en la parábola

$$y^2 = 4px$$

si F es el foco, P es un punto de la parábola y D el pie de la perpendicular llevada de P a la directriz (ver fig. 45), entonces, la bisectriz del ángulo FPD formado por el radio vector FP y la perpendicular PD, es la tangente a la parábola en el punto P.

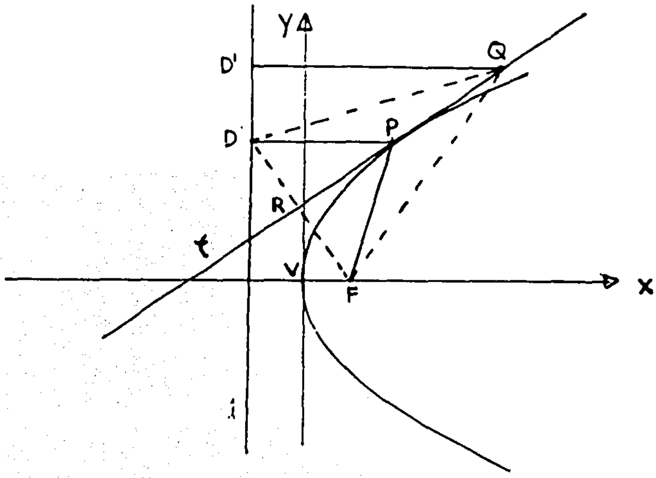


fig.45

Demostración: en la figura ; l es la directriz, t la bisectriz del ángulo DPF y, D' el punto común de la perpendicular trazada desde Q a la directriz.
Por definición de parábola, sabemos que:

$$d(P,D)=d(P,F)$$

Luego los triángulos DPR y FPR son congruentes por tener respectivamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre dichos lados.
Por lo que D resulta ser el punto simétrico de F respecto a t, así que t es la mediatriz del segmento FD, por tanto, para cualquier punto Q de t, se tiene:

$$d(Q,D)=d(Q,F)$$

Si $Q \neq P$, entonces, $d(Q,D')<d(Q,D)$ por ser $d(Q.D')$ un cateto en el triángulo rectángulo DQD', pero $d(Q,D)=d(Q,F)$. por consiguiente $d(Q,D')<d(Q,F)$, es decir, la distancia del punto Q a la directriz es menor que su distancia al foco, por tanto, Q es exterior a la parábola. Como esto pasa para todo Q distinto de P de la bisectriz t, entonces, por definición, la bisectriz es la recta tangente a la parábola en el punto P, por lo que queda concluida la demostración.
Con este teorema se completan los elementos necesarios para determinar la ecuación de la tangente a una parábola, que se traduce ahora en encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por el radio vector FP y la perpendicular PD (fig.45). lo que equivale a probar el siguiente:

Teorema: La ecuación de la recta tangente a la parábola

$$y^2 = 4px$$

en un punto $P(x_1,y_1)$ de la curva, distinto del vértice es

$$y - y_1 = \frac{y}{2x}(x - x_1).$$

La recta tangente a la parábola en el vértice es el eje Y, por tanto, la ecuación de la tangente a la curva en éste punto es $x = 0$.

Demostración: Sea $P(x_1, y_1)$ un punto de la curva diferente del vértice y $F(p, 0)$ su foco. Consideremos primero el caso en que $x_1 > p$, lo que significa que P está a la derecha de F como se aprecia en la figura 46.

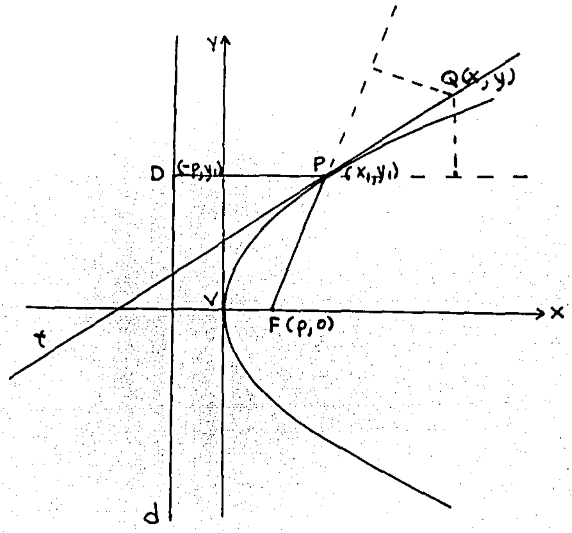


fig.46

La ecuación de la recta que pasa por los puntos F y P es

$$y - y_1 = \frac{0 - y_1}{p - x_1}(x - x_1) \quad \text{o bien}$$

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 - p}(x - x_1),$$

quitando denominadores resulta:

$$(x_1 - p)(y - y_1) = y_1(x - x_1)$$

realizando operaciones y pasando todos los términos al primer miembro:

$$(x_1 - p)y - y_1(x_1 - p) = y_1x - y_1x_1$$

$$x_1y - py - y_1x_1 + y_1p - y_1x + y_1x_1 = 0,$$

reduciendo y factorizando:

$$(x_1 - p)y + y_1p - y_1x = 0,$$

reordenando términos, se tiene la expresión:

$$-y_1x + (x_1 - p)y + y_1p = 0,$$

donde ésta, representa la ecuación de la recta FP, escrita en su forma general $(Ax + By + C = 0)$.

Por otra parte, la ecuación de la recta PD es:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_1}{-p - x_1}(x - x_1) \text{ es decir } y - y_1 = 0,$$

siendo D, el punto donde llega la perpendicular llevada desde P a la directriz.
En la figura 46 observamos que los puntos Q de t están:
Arriba de la recta PD y abajo de la recta FP, o bien, debajo de la recta PD y arriba de la recta FP.

En cualquiera de los casos anteriores, las distancias dirigidas del punto $Q(x,y)$ a dichas rectas, tienen signos opuestos, por tanto, la ecuación de t se obtiene igualando una de las distancias dirigidas con el simétrico de la otra, esto es:

$$\frac{-y_1x+(x_1-p)y+py_1}{\sqrt{y_1^2+(x_1-p)^2}}=-(y-y_1). \qquad (16)$$

Como $P(x_1,y_1)$ pertenece a la parábola, debe de satisfacer su ecuación, por lo que se tiene

$$y_1^2=4px_1.$$

Sustituyendo este resultado en el denominador de la expresión (16)

$$\frac{-y_1x+(x_1-p)y+py_1}{\sqrt{4px_1+(x_1-p)^2}}=-(y-y_1),$$

desarrollando y factorizando el radicando del denominador se tiene

$$\frac{-y_1x+(x_1-p)y+py_1}{\sqrt{(p+x_1)^2}}=-(y-y_1) \quad \text{o bien}$$

$$\frac{-y_1x+(x_1-p)y+py_1}{p+x_1}=-(y-y_1),$$

quitando denominadores:

$$-y_1x+(x_1-p)y+py_1=-(y-y_1)(p+x_1),$$

efectuando operaciones:

$$-y_1x+x_1y-py+py_1=-yp-yx_1+py_1+y_1x_1$$

pasando todos los términos al primer miembro, reduciendo y simplificando, nos queda:

$$-y_1x+2x_1y-y_1x_1=0.$$

Obteniéndose así, la ecuación en su forma general de la recta tangente a la parábola en el punto $P(x_1, y_1)$, que para poder ser expresada en la forma punto-pendiente, se procede de la siguiente forma

$$m = -\frac{A}{B} \text{ , esto es, } m = \frac{-(-y_1)}{2x_1} \quad \therefore \quad m = \frac{y_1}{2x_1},$$

luego resulta que la ecuación es

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1) \qquad (17)$$

con lo que queda probado el teorema.

El análisis para el caso en que $x_1 \leq p$, es de forma análoga y se llega al mismo resultado.

<u>Ejemplo.</u>

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 + x = 0$ que pasa por el punto $P(-4,2)$.

Solución. La parábola es horizontal, por ser y la variable al cuadrado. Aplicando la fórmula (17)

$$y - 2 = \frac{2}{2(-4)}(x - (-4)).$$

Simplificando y quitando denominadores:

$$4(y-2) = -(x+4),$$

haciendo operaciones, pasando los términos al primer miembro, reordenando y simplificando, se llega a la expresión

$$x + 4y - 4 = 0,$$

donde ésta, es la ecuación en su forma general de la tangente a la parábola, y que gráficamente lo muestra la figura 47.

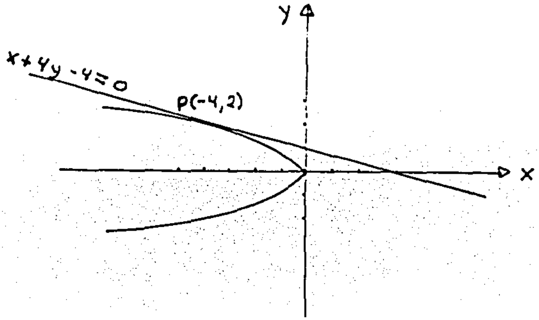


fig.47

Por medio de un razonamiento similar al del caso de una parábola horizontal. Se demuestra, que la ecuación de la recta tangente a una parábola vertical con vértice en el origen, en un punto $P(x_1, y_1)$ distinto del vértice es:

$$y - y_1 = \frac{2y_1}{x_1}(x - x_1). \qquad (18)$$

<u>Ejemplo</u> para este caso.

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola: $x^2 = 4py$ en el punto $(2,1)$.

Solución. Como se trata de una parábola vertical, entonces, sustituyendo las coordenadas $(2,1)$ en la ecuación (18), tenemos

$$y-1=\frac{2(1)}{2}(x-2),$$

haciendo las transformaciones necesarias para expresarla en su forma general:

$$y-1=x-2$$

$$x-2-y+1=0$$

de donde:

$$x-y-1=0$$

es la ecuación buscada (ver figura 48).

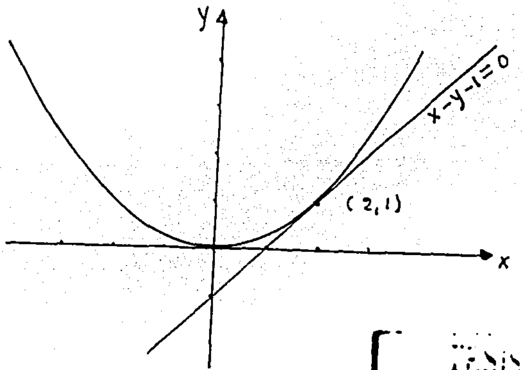


fig.48

Veamos ahora, cómo utilizando la traslación de ejes, podemos llegar a determinar la ecuación de la tangente a una parábola horizontal, con vértice en $V(h,k)$ y foco $F(h+p,k)$, en un punto $P(x_1,y_1)$ de la curva.

Para esto, se procede de la siguiente forma:
Aplicando las fórmulas

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

para hacer la traslación de los ejes y que el origen coincida con el vértice $V(h,k)$.
Se tiene, entonces, que las coordenadas del punto $P(x_1, y_1)$ referidos al nuevo sistema son:

$$x_1' = x_1 - h \quad ; \quad y_1' = y_1 - k$$

como la parábola es horizontal, por la ecuación (17) se tiene:

$$y' - y_1' = \frac{y_1'}{2x_1'}(x' - x_1').$$

Sustituyendo x', y', x_1', y_1' de acuerdo a las fórmulas referidas al sistema XY', se obtiene:

$$y - k - (y_1 - k) = \frac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - h - (x_1 - h))$$

que simplificando se llega a la expresión:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - x_1) \qquad (19)$$

donde ésta, es la ecuación de la recta tangente a la parábola, siendo $P(x_1, y_1)$ el punto de tangencia.

De forma similar, para una parábola vertical, con vértice en $V(h,k)$ y foco $F(h,k-p)$, la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1,y_1)$ de la curva es:

$$y - y_1 = \frac{2(y_1 - k)}{x_1 - h}(x - x_1) \qquad (20)$$

Ejemplos.

1) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2-4y-12x-20=0$ en el punto $P(-\frac{5}{4},-1)$.

Solución. Haciendo las transformaciones necesarias para escribir la ecuación de la curva en su forma estándar:

$$y^2-4y-12x-20=0$$
$$y^2-4y=12x+20$$
$$y^2-4y+4=12x+20+4$$
$$(y-2)^2=12(x+2)$$

Por tanto, la parábola es horizontal, con vértice $V(h,k)=(-2,2)$, por lo que la ecuación de la recta tangente en el punto $P(-\frac{5}{4},-1)$ aplicando la ecuación (19) es:

$$y+1=\frac{-1-2}{2(-\frac{5}{4}+2)}(x+\frac{5}{4})$$

realizando el desarrollo para escribirla en su forma general:

$$y+1=\frac{-3}{\frac{6}{4}}(x+\frac{5}{4})$$

$$y+1=-2(x+\frac{5}{4})$$

$$y+1=-2x-\frac{10}{4}$$

de donde finalmente ésta resulta ser:

$$2x+y-\frac{7}{2}=0\,.$$

Como la ecuación estándar de la curva, resultó de la forma $(y-k)^2=4p(x-h)$, **entonces,** $4p=12$, **es decir,** $p=3$, **por lo que las coordenadas de su foco, son** $F(h+p,k)=(1\,,2)$, **ver figura 49.**

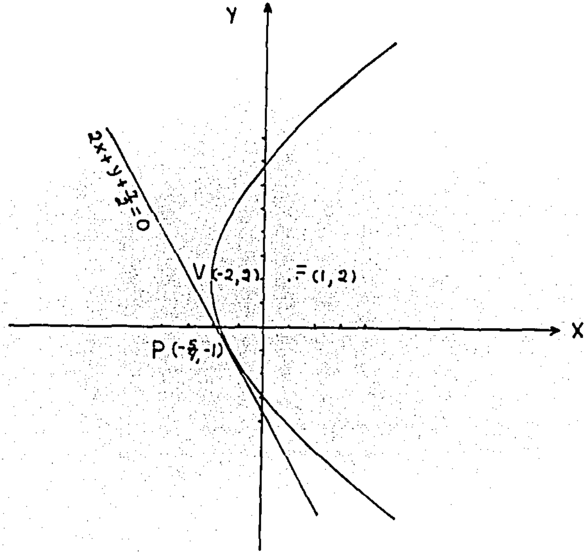


fig.49

2) Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2-4x+8y-20=0$ en el punto $P(2\,.1)$.

Realizando el desarrollo necesario para expresar la ecuación de la curva en su forma estándar, se tiene:

$$x^2+4x+8y-20=0$$
$$x^2+4x=-8y+20$$
$$x^2+4x+4=-8y+20+4$$
$$(x+2)^2=-8(y-3).$$

Esto es, la curva es vertical, con vértice $V(h,k)=(-2,3)$, por tanto, la ecuación de la recta tangente en $P(2,1)$ aplicando la ecuación (20) es:

$$y-1=\frac{2(1-3)}{2-(-2)}(x-2).$$

Haciendo el procedimiento para escribirla en su forma general

$$y-1=\frac{2(-2)}{2+2}(x-2)$$

$$y-1=-(x-2)$$

se tiene

$$x+y-3=0.$$

Por ser la ecuación estándar de la forma $(x-h)^2=-4p(y-k)$, entonces, $-4p=-8$, esto es, $p=2$, por tanto, las coordenadas del foco $F(h,k-p)=(-2,1)$, observar figura 50.

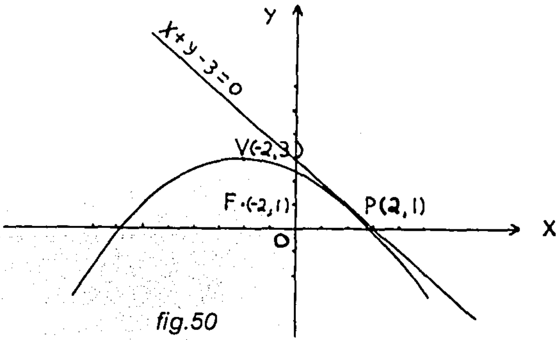


fig.50

Ecuación de la Normal a una Parábola

La normal a una curva cualquiera es la recta perpendicular a la tangente en el punto de contacto.

Por tanto, para encontrar la ecuación de la normal a una parábola, basta, con hacer pasar una recta por el punto de tangencia que cumpla con la condición de perpendicularidad, es decir, con pendiente recíproca y de signo contrario a la de la tangente.

Consideremos algunos ejemplos.

Retomando los ejemplos de las páginas 91 y 95 respectivamente.

1) Como la tangente a la parábola $y^2+x=0$ en el punto $P(-4,2)$, resultó ser la ecuación $x+4y-4=0$, que expresada, en la forma pendiente ordenada en el origen, resulta $y=-\frac{1}{4}x+4$, de donde se desprende, que la pendiente de la tangente, es $m=-\frac{1}{4}$. Puesto que la normal es perpendicular a la tangente, entonces, la pendiente de la normal, es $m=4$, por ser ésta, la inversamente recíproca a la de la tangente.
Ahora, sustituyendo las coordenadas del punto de tangencia $P(-4,2)$ y la pendiente $m=4$, en la ecuación:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

se tiene

$$y-2=4(x-(-4)),$$

realizando operaciones y expresándola en la forma general, se obtiene

$$4x-y+18=0,$$

donde ésta, es la ecuación de la normal a la curva, y cuya gráfica, se ilustra en la figura 51.

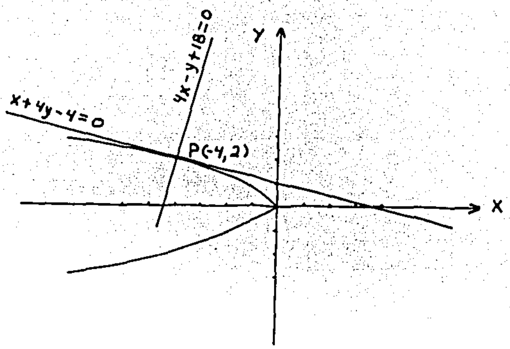


fig.51

2) En el ejemplo de la página 95, se obtuvo la expresión $2x+y+\frac{7}{2}=0$ que representa la ecuación de la tangente a la parábola $y^2-4y-12x-20=0$, en el punto $P(-\frac{5}{4},-1)$. Por tanto, la normal a esta curva, se encuentra de manera análoga a la anterior, y tiene por ecuación $x-2y-\frac{3}{4}=0$, ver figura 52.

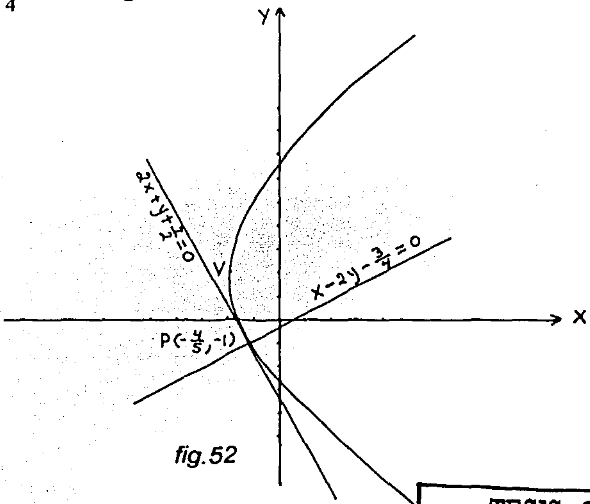


fig.52

Ejercicios.

Hallar, la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado, para cada uno de los siguientes casos.

1. $3x^2 - y - 3 = 0$; $P(4,45)$

2. $2y^2 + 12y - x + 22 = 0$; $P(36,1)$

3. $x^2 - 3y = 0$; $P(2, \frac{4}{3})$

4. $y^2 - 10y - 8x + 9 = 0$; $P(-\frac{3}{2}, 7)$

5. $3y^2 + 6y - 4x - 5 = 0$; $P(10,3)$

6. $x^2 + 4x - 8y - 20 = 0$; $P(-2,-3)$

7. $y^2 = 8x$; $P(2,4)$

8. $y^2 + 5x + 5 = 0$; $P(-6,5)$

9. $x^2 - 3x - 4y - \frac{7}{4} = 0$; $P(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

10. $3y^2 + 2x = 0$; $P(-\frac{3}{2}, -1)$

11. **Determinar la ecuación de la normal a las parábolas , en los puntos dados, de los ejercicios** 1,3,5,7,9

CAPÍTULO IX

Familia de Parábolas

Con los ejemplos que a continuación se resuelven, se muestra cómo es posible, determinar las ecuaciones de un conjunto de parábolas, que cumplen ciertas propiedades en común.

1) Hallar la familia de parábolas que tienen como directriz la recta $x = 4$ y cuyo eje es el eje X.

Solución:

Las coordenadas del foco deben ser de la forma $F(a,0)$, por encontrarse sobre el eje de la curva y por ser éste el eje X. Si $M(x,y)$ es un punto de una parábola de la familia, entonces, la distancia de M al foco F debe ser igual a la distancia de M a la directriz l. Esto es:

$$d(M,F) = d(M,l).$$

Por las fórmulas de distancia entre dos puntos y de distancia de un punto a una recta, se tiene:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \frac{|x-4|}{\sqrt{(1)^2}},$$

simplificando y elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-a)^2 + y^2 = (x-4)^2,$$

desarrollando las operaciones y despejando y^2

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$y^2 = x^2 - 8x + 16 - x^2 + 2ax - a^2$$

$$y^2 = -8x + 2ax + 16 - a^2,$$

factorizando;

$$y^2 = -2(4-a)x + (4-a)(4+a)$$

$$y^2 = -2(4-a)(x + \frac{4+a}{-2}).$$

Por tanto

$$y^2 = -2(4-a)(x - \frac{4+a}{2}) \qquad (21)$$

representa la ecuación de la familia de parábolas con las características al principio señaladas. De ésta, se desprende, que el vértice es el punto $V(\frac{4+a}{2}, 0)$ y, que para cada valor de $a \neq 4$, se tiene una parábola, que pertenece a la familia.

Si $a = 4$, entonces, de la ecuación se obtiene que $y = 0$, lo cual no representa una parábola, dado que en este caso, el foco se encuentra sobre la directriz, razón por la cual, a debe ser diferente de cuatro.

Ahora, se determinarán las ecuaciones de las parábolas de la familia, con algunos de sus elementos, para valores de $a = -12, -3, 0, 6, 10$

Sustituyendo el primer valor de a en la ecuación (21) realizando operaciones y simplificando:

$$y^2 = -2(4-(-12))(x - (\frac{4+(-12)}{2})$$

$$y^2 = -2(16)(x - (-\frac{8}{2}),$$

de donde:

$$y^2 = -32(x+4)$$

es la ecuación de la curva cuando $a = -12$, y resultó ser de la forma $(y-k)^2 = -4p(x-h)$, donde su vértice $V(h,k) = V(-4,0)$. Como $-4p = -32$

se tiene que $p=8$, y las coordenadas del foco $F(h-p,k)=F(-12,0)$. Además, $lr=4p$ y $-4p=-32$, entonces, $lr=32$, por pasar el segmento de esta longitud por el foco y ser la curva simétrica con respecto a su eje, los puntos que lo determinan son $(h-p,\frac{lr}{2})=(-12,16)$ y $(h-p,-\frac{lr}{2})=(-12,-16)$, los cuales pertenecen a la parábola.

Considerando ahora el valor de $a=-3$ en la expresión (21) y realizando las operaciones para encontrar su ecuación, se tiene:

$$y^2=-2(4-(-3))(x-(\frac{4-3}{2}))$$

$$y^2=-2(7)(x-\frac{1}{2})$$

$$y^2=-14(x-\frac{1}{2}),$$

donde ésta, también es de la forma $(y-k)^2=-4p(x-h)$, luego el vértice, es el punto $V(h,k)=V(\frac{1}{2},0)$; de $-4p=-14$, se desprende que $p=\frac{7}{2}$, por lo que las coordenadas del foco $F(h-p,k)=F(-3,0)$, puesto que la $lr=4p$ y $-4p=-14$, entonces, $lr=14$, encontrando que los extremos del segmento con esta longitud, son los puntos $(-3,7)$ y $(-3,-7)$, determinados de forma análoga a como se obtuvieron los del caso anterior, y que son puntos por donde pasa la parábola.

Para no ser repetitivos en el procedimiento, a continuación daremos únicamente, la ecuación, el vértice, el foco, la longitud del lado recto y los puntos extremos de éste, que son por donde pasan las parábolas. Obtenidas todas, de forma similar a los casos anteriores, para valores de $a=0,6,10$.

Si $a=0$

$y^2=-8(x-2)$, $V(2,0)$, $F(0,0)$, $lr=8$ y los puntos extremos del lado recto: $(0,4)$ y $(0,-4)$.

Para el valor de $a=6$

$y^2=4(x-5)$, $V(5,0)$, $F(6,0)$, $lr=4$ y los puntos extremos del segmento del lado recto: $(6,2)$ y $(6,-2)$.

Finalmente, si $a=10$:

$y^2=12(x-7)$, $V(7,0)$, $F(10,0)$, $lr=12$, y los puntos extremos del lado recto: $(10,6)$ y $(10,-6)$.

En la figura 53, se muestra un esbozo de las gráficas de las parábolas de la familia, correspondientes a los valores asignados de a. Donde se observa que unas abren a la derecha y otras a la izquierda, pero todas con la misma directriz $x=4$ y con el mismo eje X.

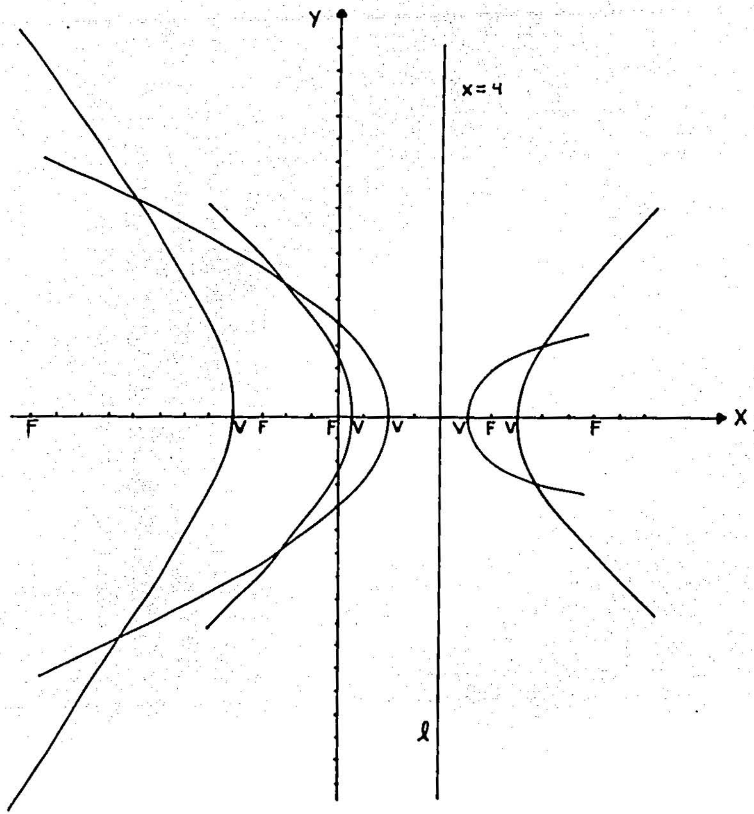


fig.53

Luego, se puede decir, que una familia de parábolas es un conjunto de ellas que satisfacen o cumplen cierta condición.

Otros ejemplos.

2) Encontrar las ecuaciones de todas las parábolas horizontales cuyo vértice tiene ordenada cero y para las cuales $p = \frac{1}{4}$.

Solución:

Como $p > 0$, las parábolas se extienden hacia la derecha. Por tanto, la ecuación de una parábola de ésta familia es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h),$$

colocando los valores de p y k en esta ecuación, resulta

$$(y-0)^2 = 4(\frac{1}{4})(x-h),$$

simplificando, se obtiene la expresión:

$$y^2 = (x-h),$$

donde ésta es la ecuación requerida, y en la figura 54, se muestran las parábolas correspondientes a los valores de $h = -3, -1, 1, 3, 5$. El foco y los puntos extremos del lado recto en cada curva, se obtienen de sustituir en $F(h+p, k)$ y $(h+p, \frac{lr}{2})$, $(h+p, -\frac{lr}{2})$, sus respectivos valores.

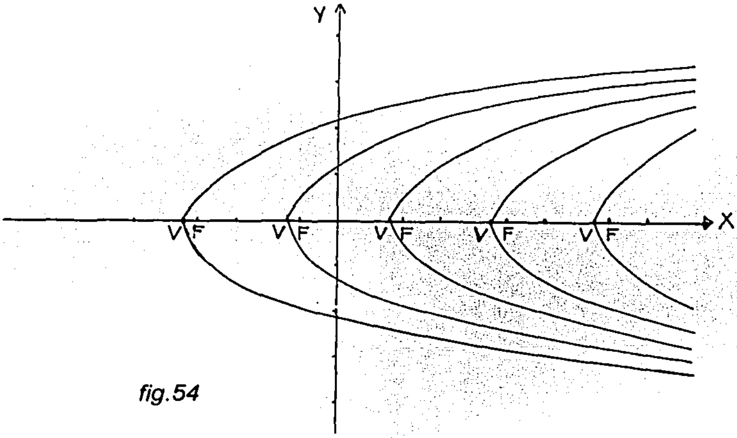


fig.54

3) Encontrar las ecuaciones de todas las parábolas verticales cuyo vértice tiene ordenada cero y para las cuales $p = 1$.

Solución:

La ecuación de una parábola de esta familia es de la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

por ser vertical y $p > 0$. Sustituyendo el valor de la ordenada del vértice y el del semiparámetro en dicha ecuación, se tiene:

$$(x-h)^2 = 4(1)(y-0).$$

Por tanto

$$(x-h)^2 = 4y$$

representa la ecuación de la familia de parábolas y, se obtiene para cada valor de h, una de ellas. En la figura 55, se observan las parábolas correspondientes a los valores de $h = -6, -3, 0, 3, 6$. Los focos y los puntos extremos de los lados rectos, se encuentran de sustituir en $F(h, k+p)$ y $(h - \frac{lr}{2}, p)$, $(h + \frac{lr}{2}, p)$, sus respectivos valores.

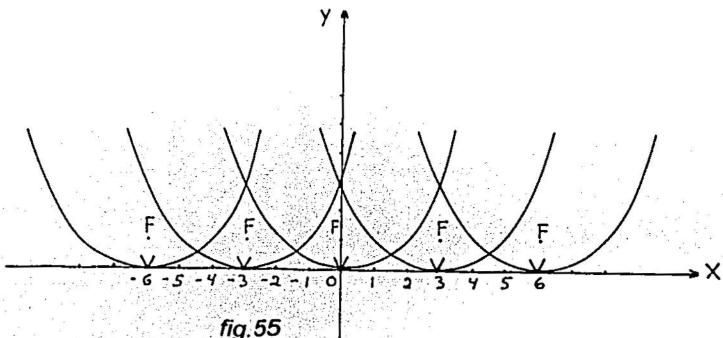


fig.55

4) Hallar las ecuaciones de las parábolas verticales que pasan por los puntos donde se cortan las parábolas $y=\frac{1}{2}x^2+2$ y $y=2x^2-2$ y por el punto $A(2,-1)$.

Solución:

Iniciamos por determinar la ecuación de las parábolas que pasan por los puntos donde se cortan las parábolas : $\frac{1}{2}x^2-y+2=0$ y $2x^2-y-2=0$

Como éstas se cortan, se forma el sistema de ecuaciones generado por ellas, para esto, una de las dos, digamos $2x^2-y-2=0$, se multiplica por un número $\lambda \neq 0$, para facilitar encontrar la ecuación buscada y los puntos de intersección de dichas curvas . Por tanto, se tiene:

$$\frac{1}{2}x^2-y+2=0$$
$$\underline{\lambda(2x^2-y-2)=0}$$

Si realizamos la multiplicación indicada, sumamos miembro a miembro y factorizamos, se llega a la expresión:

$$\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)x^2+(-1-\lambda)y+(2-2\lambda)=0 \qquad (22)$$

donde ésta representa en su forma general, la ecuación de las parábolas que pasan por los puntos de corte, siempre que $\lambda \neq -\frac{1}{4}$ y $\lambda \neq -1$, ya que para estos valores de λ en particular, la ecuación (22) no representa una parábola. Veamos, si $\lambda=-1$, entonces, el coeficiente de y se anula, dando origen a la ecuación $-\frac{3}{2}x^2+4=0$, de cuya solución se obtienen las ecuaciones de dos rectas verticales: $x=-1.6$ y $x=1.6$. Si $\lambda=-\frac{1}{4}$, el coeficiente que desaparece es el de x^2, originando la ecuación $-\frac{3}{4}y+\frac{10}{4}=0$ y resultando de su solución, la ecuación de la recta $y = 3.3$ que pasa por los puntos de intersección, véase figura 56 (los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$ que son los vértices de las parábolas dadas, se desprenden de sus ecuaciones expresadas en forma estándar)

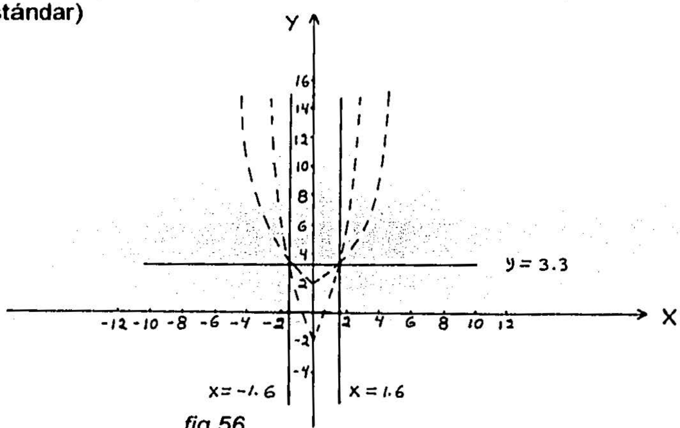


fig.56

Además, las parábolas de la familia deben pasar por el punto $A(2,-1)$, por tanto, éstas coordenadas deben de satisfacer la ecuación (22). Esto es:

$$(\frac{1}{2} + 2\lambda)(2)^2 + (-1-\lambda)(-1) + (2-2\lambda) = 0,$$

realizando operaciones:

$$2 + 8\lambda + 1 + \lambda + 2 - 2\lambda = 0,$$

simplificando y despejando λ, resulta:

$$\lambda = -\frac{5}{7}.$$

Ahora, sustituyendo el valor de λ en la ecuación (22), desarrollando operaciones y simplificando

$$\left(\frac{1}{2}+2\left(-\frac{5}{7}\right)\right)x^2+\left(-1-\left(-\frac{5}{7}\right)\right)y+\left(2-2\left(-\frac{5}{7}\right)\right)=0$$

$$-\frac{13}{14}x^2-\frac{2}{7}y+\frac{24}{7}=0$$

o bien,

$$13x^2+4y-48=0.$$

Luego, la única parábola que cumple con las condiciones dadas, tiene por ecuación,

$$13x^2+4y-48=0,$$

que escrita en forma estándar es

$$x^2=-\frac{4}{13}(y-12).$$

Por tanto, su vértice es el punto $V(0,12)$, la curva abre hacia abajo, y su gráfica queda ilustrada en la figura 57.

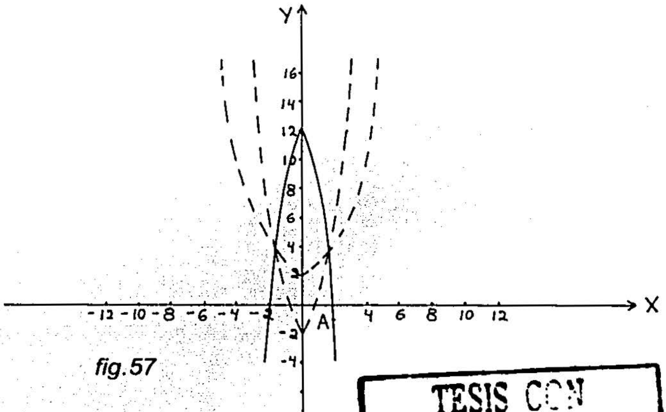


fig.57

Ejercicios.

1. Encuentra las ecuaciones de todas las parábolas con foco $F(-3,-1)$ cuyo eje es paralelo al eje X y abren hacia la izquierda.

2. Hallar las ecuaciones de todas las parábolas cuya directriz es la recta con ecuación $x+5=0$ y cuyo foco tiene abscisa 4.

3. Determinar las ecuaciones de todas las parábolas con directriz $y=2$ para las cuales $p=2$. Dibuja la parábola de la familia cuyo vértice tiene abscisa 5.

4. Encontrar las ecuaciones de todas las parábolas verticales cuyo vértice tiene abscisa cero y para las cuales $p=\frac{1}{2}$.

5. Hallar las ecuaciones de todas las parábolas verticales cuyo vértice tiene ordenada cero y para las cuales $p=-\frac{1}{3}$. Dibuja la parábola de la familia cuyo valor de $h=-2$.

6. Determinar las ecuaciones de todas las parábolas horizontales cuyo vértice tiene ordenada cero y para las cuales $p=-\frac{1}{2}$.

7. Encontrar la familia de parábolas que tienen como directriz la recta $x=-1$ y cuyo eje es el eje X.

8. Una familia de parábolas está determinada por la ecuación $y^2=-4h(x-h)$. Dibujar las parábolas de la familia, para valores de $h=-3,-2,-1,1,2,3$.

CAPÍTULO X

Aplicaciones de la Parábola

La parábola se encuentra frecuentemente en la práctica de muy diversas formas.
La intención de este capítulo es mostrar algunas aplicaciones de esta curva.

Arcos parabólicos.

En las construcciones arquitectónicas, una de las distintas formas de arcos usados tiene la forma de arco parabólico. Tal forma, es la que se muestra en la figura 58. Donde la longitud $\overline{AC}$, en la base recibe el nombre de claro o luz; la altura máxima $\overline{OB}$ sobre la base se denomina altura del arco. Si la longitud del claro es $2s$ y la altura es b, entonces, es fácil probar que la ecuación que representa al arco parabólico es de la forma

$$x^2 = -\frac{s^2}{b}y \qquad (24)$$

siempre que el arco parabólico se coloque de tal manera que su vértice esté en el origen y su eje coincida con el Y (fig. 58)

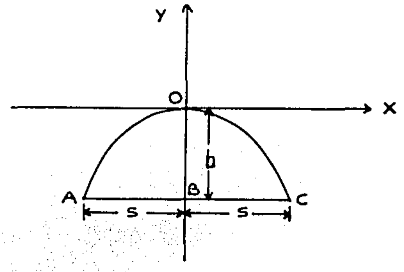


fig.58

Demostración:

Como la curva pasa por el punto $(s,-b)$, entonces, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación:

$$x^2 = -4py \qquad (4)$$

ya que la orientación del arco parabólico es hacia la parte negativa del eje Y. Por tanto, sustituyendo las coordenadas de dicho punto en la ecuación se tiene

$$s^2 = -4p(-b),$$

despejando a p resulta

$$p = \frac{s^2}{4b},$$

finalmente colocando el valor de p por su igual en la ecuación (4), se obtiene

$$x^2 = -\frac{s^2}{b}y$$

con lo que queda probado.

Si ahora el claro o luz de un arco parabólico $2s$, se toma sobre el eje X, el origen en el punto medio del claro y la altura del arco es b, figura 59, entonces, puede probarse de manera similar al anterior, que la ecuación que lo representa es:

$$x^2 = -\frac{s^2}{b}(y-b) \qquad (24')$$

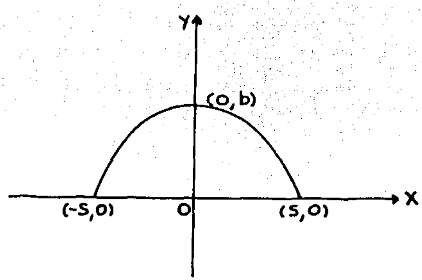


fig.59

También nos podemos encontrar con otra posición del arco parabólico que sería la que se muestra en la figura 60

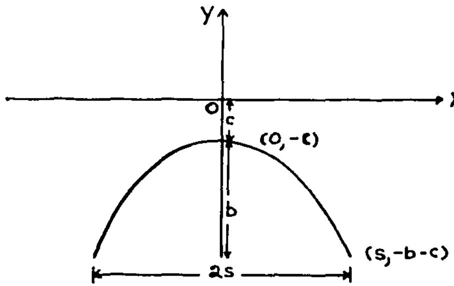


fig.60

Donde se observa que el punto más alto del arco se encuentra a una distancia de c unidades del origen hacia abajo y sobre el eje Y, por lo que el vértice de dicho arco es el punto $V(0,-c)$ y su altura es b.

En este caso, para llegar a deducir la ecuación que lo representa, se procede de la siguiente manera:

Por abrir el arco parabólico hacia abajo, y por tener su vértice fuera del origen, su ecuación debe ser de la forma:

$$(x-h)^2=-4p(y-k),$$

sustituyendo las coordenadas del vértice en ésta ecuación, resulta

$$x^2=-4p(y+c), \qquad (25)$$

puesto que el arco pasa por el punto $(s,-b-c)$, sus coordenadas satisfacen la ecuación anterior, por lo que se tiene:

$$s^2=-4p(-b-c+c)$$

o bien,

$$s^2=-4p(-b),$$

de donde se desprende que:

$$p=\frac{s^2}{4b},$$

colocando el valor de p en la ecuación (25) se llega a la expresión

$$x^2=-4(\frac{s^2}{4b})(y+c)$$

que simplificando resulta

$$x^2=-\frac{s^2}{b}(y+c) \qquad (26)$$

donde ésta, es la ecuación que representa al arco parabólico.

A continuación veremos algunos ejemplos donde se ilustra la aplicación de las ecuaciones anteriores.

<u>Ejemplos.</u>

1) Encontrar la ecuación del arco parabólico cuyo claro o luz es de $14m$ y cuya altura es de $6m$.

Solución. La ecuación debe de ser de la forma

$$x^2 = -\frac{s^2}{h} y,$$

como el claro $2s = 14m$, entonces, $s = 7m$, además, se sabe que la altura es $h = 6m$, por tanto, sustituyendo los valores de s y h, la ecuación del arco parabólico resulta ser,

$$x^2 = -\frac{(7)^2}{6} y \quad \text{o bien} \quad x^2 = -\frac{49}{6} y,$$

2) Hallar la altura de un punto de un arco parabólico de $18m$ de altura y $24m$ de base, situado a una distancia de $8m$ del punto medio del claro

Solución. Para este caso, se considera el eje X en la base y el origen en el punto medio (fig.61).

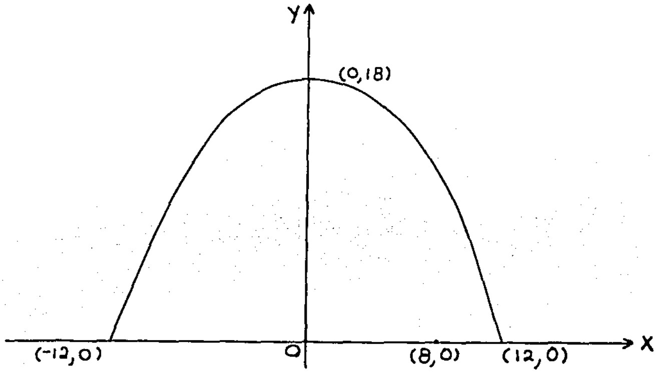


fig.61

Por consiguiente, para encontrar la altura del arco a $8m$ del centro, se sustituye $x = 8$, $s = 12$ y $h = 18$ en la ecuación $(24')$ y se hacen las operaciones necesarias para despejar el valor de y. Por lo que se tiene:

$$(8)^2 = -\frac{(12)^2}{18}(y-18)$$

$$64 = -8y + 144$$

$$8y = 80$$

$$\therefore y = 10$$

de donde la altura del punto que se encuentra a $8m$ del punto medio del claro, es de $10m$.

3) Un arco parabólico tiene las dimensiones indicadas en la figura 62. Determinar la ecuación del arco parabólico con respecto a los ejes mostrados. Calcular la ordenada y del punto cuya abscisa es $5m$.

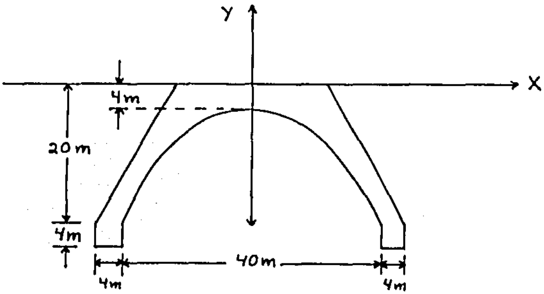


fig.62

Solución. Como el punto más alto del arco se encuentra a una distancia de $4m$ del origen y bajo éste, entonces, $-c = -4$, lo que implica que $c = 4$, el claro o luz $2s = 40$, de donde $s = 20$ y $h = d((0,-4),(0,-20)) = 16$, es decir, la altura del arco es $h = 16$.

Por tanto, sustituyendo los valores numéricos de s, b y c en la ecuación (26) resulta:

$$x^2 = -\frac{(20)^2}{16}(y+4),$$

es decir,

$$x^2 = -\frac{400}{16}(y+4),$$

o bien

$$x^2 = -25(y+4),$$

donde ésta última expresión, determina la ecuación del arco parabólico.

Para calcular la ordenada y en el punto cuya abscisa es $5m$, simplemente se sustituye éste valor en la ecuación del arco parabólico y se despeja y. Esto es.

$$(5)^2 = -25(y+4)$$

$$25 = -25y - 100$$

$$25y = -125$$

$$y = -5$$

Por tanto, su ordenada es -5.

Existen otros tipos de arcos como los semielípticos, sin embargo, los parabólicos son más comunes en construcciones arquitectónicas.

Ejercicios.

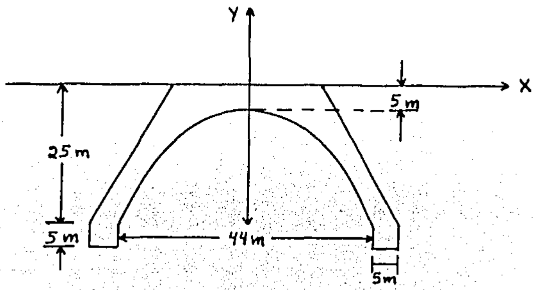
1. Determinar la ecuación del arco parabólico cuyo claro es de $12m$ y cuya altura es de $6m$.

2. Encontrar la ecuación de un arco parabólico si el claro es de $10m$ y su altura de $5m$.

3. Un arco parabólico tiene una altura de $25m$ y una luz de $40m$. Hallar la altura de los puntos del arco situados a $8m$ y $12m$ a ambos lados de su centro (punto medio del claro o luz).

4. Hallar la altura de los puntos de un arco parabólico de $16m$ de altura $20m$ de base situados a una distancia de $6m$ a ambos lados del centro del arco.

5. Un arco parabólico tiene las dimensiones indicadas en la figura. Determinar la ecuación del arco con respecto a los ejes mostrados. Calcular la ordenada y de los puntos cuyas abscisas son $6m$ y $9m$.



Puentes colgantes

Las curvas que forman cada uno de los cables que sostienen ciertos puentes suspendidos, adoptan una forma parabólica o arco parabólico, si se desprecia el peso del cable al compararlo con el del puente y si la carga sobre el puente es uniforme.

En un puente colgante, cada cable cuelga de sus soportes A y C en forma de arco parabólico, como lo muestra la figura 63.

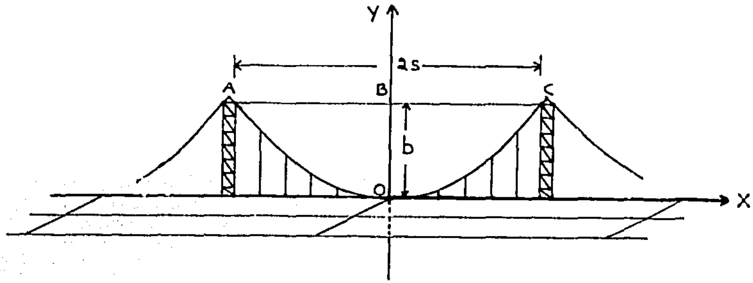


fig.63

La distancia $\overline{AC}$ comprendida entre los extremos superiores de los soportes del cable es el claro o luz, la distancia $\overline{BO}$ medida de los soportes del cable al punto más bajo de éstos, se denomina depresión del cable y representa la altura del arco parabólico.

Por tanto, nuevamente en la figura 63, si la luz es $2s$, la altura es b y el arco parabólico formado por el cable abre hacia arriba, entonces, de forma similar, a los casos de arcos arquitectónicos, es fácil demostrar, que la ecuación que lo representa es

$$x^2 = \frac{s^2}{b}y. \qquad (27)$$

Si ahora el punto más bajo del cable se encuentra a una distancia de c unidades del origen por arriba de éste y sobre el eje Y, el claro es $2s$ y la depresión del cable es b, figura 64,

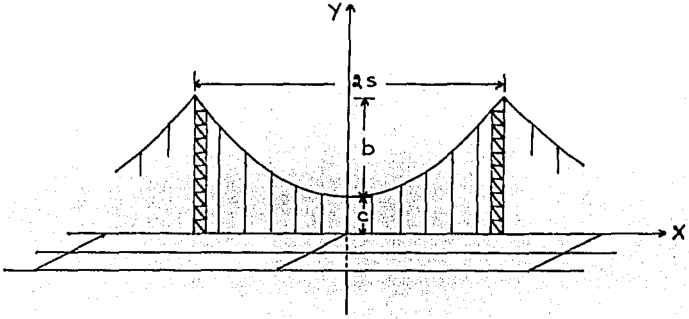


fig.64

entonces, no es difícil probar, que la ecuación que lo representa es

$$x^2 = \frac{s^2}{b}(y-c).$$

Demostración:

Como el arco parabólico formado por el cable abre hacia arriba y su vértice está fuera del origen, la ecuación que lo representa debe ser de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. Por encontrarse el punto más bajo del arco sobre el eje Y, y a una distancia de c unidades del origen y por arriba de éste, las coordenadas de su vértice son $V(h,k) = (0,c)$. Por tanto, sustituyendo estas coordenadas en la ecuación se tiene:

$$x^2 = 4p(y-c).$$

Puesto que el arco parabólico pasa por el punto $(s,c+b)$, sus coordenadas satisfacen la ecuación anterior, luego entonces,

$$s^2 = 4p(c+b-c)$$

o bien,

$$s^2 = 4p(b),$$

despejando a p:

$$p = \frac{s^2}{4b}.$$

Ahora, sustituyendo el valor de p en la ecuación $x^2 = 4p(y-c)$, resulta:

$$x^2 = 4(\frac{s^2}{4b})(y-c),$$

que simplificando, se llega a la expresión:

$$x^2 = \frac{s^2}{b}(y-c), \qquad (28)$$

con lo que queda concluida la demostración.

Ejemplos de aplicación de las ecuaciones.

1) Encontrar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de $140m$ y la depresión de $20m$.

Solución. Dado que $2s = 140m$, esto significa que $s = 70m$; $b = 20m$. Como su ecuación debe ser de la forma

$$x^2 = \frac{s^2}{b}y,$$

entonces, colocando los valores de x y b en dicha ecuación, se tiene

$$x^2 = \frac{(70)^2}{20} y,$$

o bien,

$$x^2 = \frac{4900}{20} y,$$

esto es,

$$x^2 = 245y$$

es la ecuación buscada.

2) El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de $60m$ y están separados una distancia de $500m$, quedando el punto más bajo del cable a una altura de $10m$ sobre la calzada del puente. Tomando como X la horizontal que define el puente, y como Y el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a $80m$ del centro del puente, ver figura 65.

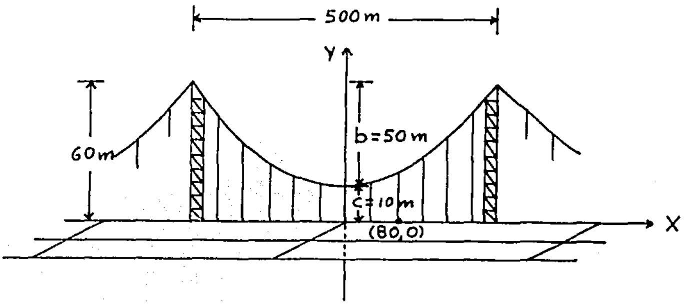


fig.65

Solución. Se tiene, entonces, que $s = 250m$, $b = 50m$ y $c = 10m$, sustituyendo estos valores en la ecuación (28)

$$x^2 = \frac{(250)^2}{50}(y-10),$$

simplificando y realizando operaciones, la ecuación en su forma canónica es

$$x^2 = 1250(y-10)$$

o bien, en su forma general resulta

$$x^2 - 1250y + 12500 = 0.$$

Para calcular la altura del punto situado a $x = 80m$ del centro, simplemente se coloca éste valor en cualquiera de las dos ecuaciones encontradas y se realizan las operaciones necesarias para despejar a y, por lo que se tiene:

$$(80)^2 - 1250y + 12500 = 0$$

$$6400 - 1250y + 12500 = 0$$

$$-1250y = -6400 - 12500$$

$$y = \frac{-18900}{-1250}$$

$$\therefore y = 15.12$$

Encontrando que la altura es de $15.12m$

Ejercicios.

1. Determinar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de $150m$ y la depresión de $20m$.

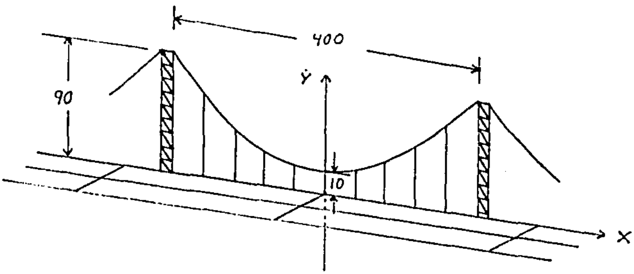
2. Encontrar la ecuación del arco de parábola formado por los cables que sostienen un puente suspendido, si el claro es de $200m$ y la depresión de $70m$.

3. Calcular la altura de los puntos situados a 40 y 90 *metros* del centro del puente del problema del ejemplo 2.

4. Una sección de un puente colgante tiene su peso uniformemente distribuido entre dos torres gemelas que distan 400 *pies* una de otra y se elevan 90 *pies* sobre la carretera horizontal (véase la figura). Un cable suspendido entre los extremos superiores de las torres tiene forma parabólica y su punto medio se encuentra 10 *pies* por arriba de la carretera. Considere los ejes coordenados que se muestran en la figura.

a) Encuentre la ecuación de la parábola respectiva

b) Suponiendo que se usan nueve cables verticales paralelos igualmente espaciados para la suspensión desde uno de los cables parabólicos (ver la figura), encuentra la longitud total de estos suspensores.



5. Si las torres de un puente colgante tienen una separación de $400m$ y los cables están atados a ellas a $200m$ arriba del piso del puente, ¿qué longitud debe tener el puntal que está a $50m$ de la torre? Supongamos que el cable toca el piso en el punto medio V del puente.

6. Un puente tiene una longitud de $160m$. El cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal en cada uno de los extremos tiene una altura de $25m$, ¿cuál es la ecuación de la parábola?

7. El cable de un puente colgante está dado por la ecuación $x^2 = 400y$. Si los postes del puente tienen una altura de $50m$, ¿cuál es la longitud del puente?

La propiedad de reflexión de la parábola

Si una parábola se hace girar alrededor de su eje generará una superficie llamada paraboloide de revolución como la de la figura 66, que adopta la forma de una antena parabólica.

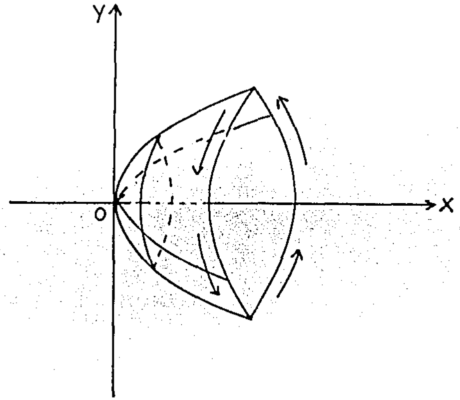


fig.66

Un principio de óptica dice que si un rayo de luz toca una superficie plana pulida éste es reflejado a lo largo de otra recta. El ángulo formado por el rayo incidente, se llama ángulo de incidencia, el ángulo formado por el rayo reflejado, se llama ángulo de reflexión.
Un espejo plano es un ejemplo de superficie reflectora

Cuando un rayo choca contra la superficie interior de un paraboloide, éste se refleja, de tal forma, que sucede lo que a continuación se explica.

Si se coloca una fuente de luz en el foco del paraboloide (foco de la parábola que lo genera), entonces, los rayos de luz que chocan en la superficie del paraboloide , se reflejan a lo largo de una recta paralela al eje. Si, por el contrario, los rayos de luz que inciden en el paraboloide, llegan a éste, en forma paralela al eje, entonces, éstos se reflejan hacia el foco.

Esta importante propiedad de la parábola está basada en el siguiente.

Teorema. Si P es un punto de una parábola, t la recta tangente a la parábola en el punto P, H un punto de la tangente diferente de P, GP la recta que pasa por P y es paralela al eje de la curva, y PF la recta que une a P y al foco F. Entonces, el ángulo de incidencia β es igual al ángulo de reflexión α, (fig. 67)

El teorema no se particulariza si tomamos a: $y^2 = 4px$, como ecuación de la parábola.

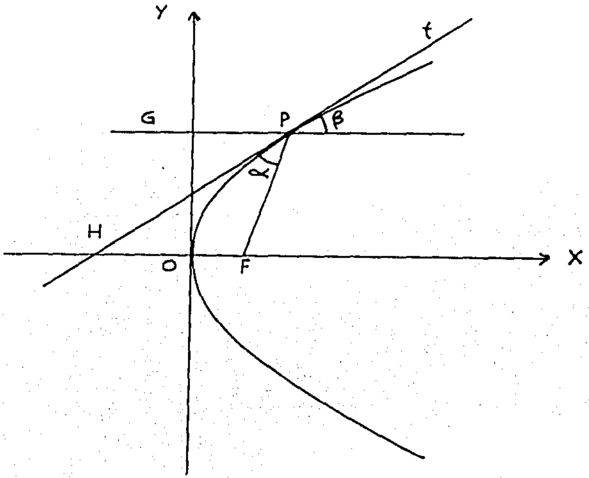


fig.67

Demostración:

Por ser t tangente a la parábola en el punto P, entonces, por el teorema de la pagina 86, t es bisectriz del ángulo $< GPF$. Por tanto,

$$< GPH = < HPF = \alpha$$

Por otro lado

$$< GPH = \beta$$

por ser ángulos opuestos por el vértice, así que

$$\beta = \alpha$$

Esta importante propiedad, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, en el diseño de espejos parabólicos, reflectores parabólicos, reflectores usados como flash, espejos reflectores de linternas y faros de automóviles. En donde, si la fuente de luz está en el foco, entonces, todos los rayos de luz reflejados en la superficie parabólica, serán paralelos al eje, formándose así, un haz cilíndrico de luz en esta dirección, ver figura 68.

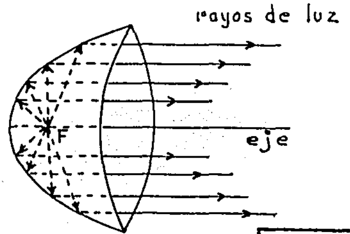


fig.68

También se tienen aplicaciones, en la construcción de hornos solares. Como el sol está tan distante de la tierra, sus rayos en la superficie terrestre, son prácticamente paralelos entre sí, por tanto, si un reflector parabólico se coloca de tal manera que su eje sea paralelo a los rayos del sol, los rayos incidentes sobre el reflector, se reflejan de manera que todos pasan por el foco, concentrándose en este punto toda la energía, y alcanzando temperaturas equivalentes a las producidas por otros tipos de hornos.

En el diseño de telescopios de reflexión, los rayos paralelos de luz procedentes de las estrellas, se concentran en el foco (fig. 69).

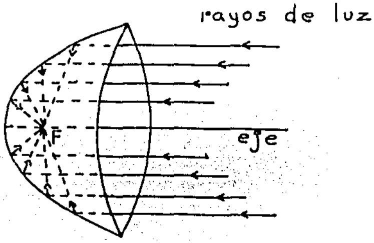


fig.69

Las antenas parabólicas, también utilizan la propiedad de reflexión de las ondas electromagnéticas, para recibir o enviar sonido y señales a estaciones de radio, televisión y satélites de comunicación.

Si ahora, en vez de girar la parábola, la movemos perpendicularmente a su propio plano, obtenemos una parte de la superficie de un cilindro parabólico, como lo muestra la figura 70, cuya superficie, se emplea para enviar y recibir ondas de radar, hacia la antena que está en la proyección del foco, utilizando también la propiedad de reflexión. Este tipo de superficie llamada antena de radar, es usada en algunos aeropuertos, en el control del tráfico aéreo.

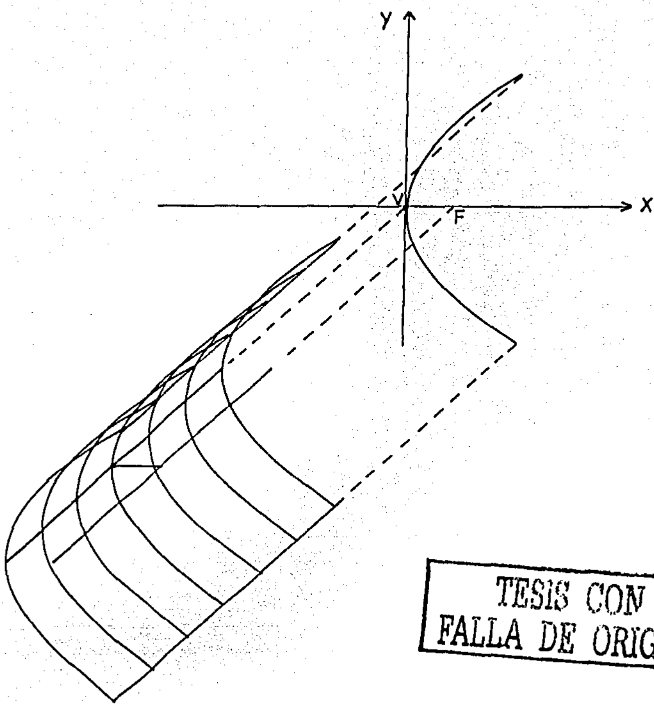


fig.70

Veamos algunos ejemplos.

1) El reflector de un faro está diseñado de manera que una sección transversal a través de su eje es una parábola y la fuente de luz está colocada en el foco.
   Encontrar el foco suponiendo que el reflector mide $3\,pies$ de diámetro, $1\,pie$ de profundidad y está orientada hacia la derecha.

Solución. La ecuación de la parábola de la sección transversal, debe ser de la forma

$$y^2 = 4px.$$

Esta ecuación debe de satisfacerse por las coordenadas $(1, 1.5)$, porque es un punto por donde pasa la curva. Por tanto, sustituyendo estas coordenadas en la ecuación y despejando p, se tiene:

$$(1.5)^2 = 4p(1)$$

$$\frac{2.25}{4} = p$$

o bien,

$$p = \frac{2.25}{4}$$

como la distancia del vértice al foco es p, entonces, el foco se encuentra a $\frac{2.25}{4}$ $pies$ del vértice.

2) El filamento de una lámpara de flash está a $\frac{3}{8}$ de pulgada del vértice del reflector parabólico, y se encuentra en su foco. Hallar la ecuación para la sección del reflector suponiendo que está dirigido hacia la derecha y su vértice es el origen.

Solución. La ecuación a la que se tiene que llegar debe ser de la forma

$$y^2 = 4px.$$

Como la distancia del vértice al foco es p, y $p = \frac{3}{8}$, entonces, sustituyendo este valor en la ecuación, haciendo operaciones y simplificando resulta

$$y^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)x$$

$$y^2 = \frac{12}{8}x$$

$$y^2 = \frac{3}{2}x$$

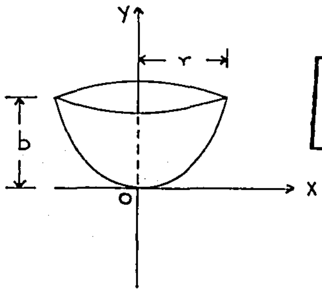
que es la ecuación de la sección del reflector.

<u>Ejercicios.</u>

1. El diámetro de un reflector parabólico es de $12cm$, su profundidad de $4cm$, está dirigido hacia la derecha con vértice en el origen. Localizar su foco.

2. El reflector de un faro tiene su vértice en el origen, está dirigido hacia la derecha y diseñado de manera que una sección transversal a través de su eje es una parábola, y la fuente de luz colocada en el foco. Encontrar el foco suponiendo que el reflector mide $10cm$ de diámetro y $4cm$ de profundidad.

3. En la figura se muestra un paraboloide de altura b y radio r. La distancia focal del paraboloide es la distancia p, entre el vértice y el foco de la parábola, exprese p en términos de r y b.



4. La luz de una lámpara está a $2cm$ del vértice del reflector parabólico y se encuentra en su foco. Hallar la ecuación para la sección del

reflector, suponiendo que está dirigido hacia la derecha y su vértice es el origen.

5. Un diseñador de automóviles desea diseñar un faro que tenga $16cm$ de diámetro. La bombilla que va a utilizar en él tiene el filamento a $2cm$ del cuello. ¿Qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro si el cuello de la bombilla se coloca a la altura del vértice del faro?

6. La antena de un radiotelescopio en forma de paraboloide tiene un diámetro de $8m$. Si la profundidad de la antena es de $0.5m$, ¿a qué distancia del vértice debe colocarse el receptor?

7. Una antena parabólica para televisión tiene un diámetro de $1m$ y su receptor está colocado $25cm$ arriba de su vértice. ¿Qué profundidad tiene la antena?

Trayectoria parabólica

Para hacer ver que la trayectoria que describe un proyectil (partícula, objeto o cuerpo material) es una parábola, es necesario utilizar las ecuaciones paramétricas. Por tal razón, a continuación se explica como se forman.

Consideremos al sistema de coordenadas rectangulares YOX, de la figura 71. Si se lanza horizontalmente un cuerpo material desde el origen O hacia la parte positiva del eje X, impulsado por una velocidad inicial v_0, al transcurrir un determinado tiempo t, el cuerpo habrá recorrido la distancia $OP = x = v_0 t$, es decir, $x = v_0 t$ de acuerdo a la fórmula física que indica, que la distancia es igual a la velocidad por el tiempo.
Por otra parte y en forma simultánea, por la fuerza de gravedad (su propio peso) el cuerpo ha caído la distancia vertical PQ, considerada en el sentido de las ordenadas negativas, resultará que $PQ = -y = \frac{1}{2}gt^2$ o bien $y = -\frac{1}{2}gt^2$ (por la fórmula física de la caída libre de los cuerpos). Donde g es la gravedad y representa la constante cuyo valor es aproximadamente $9.81\frac{m}{seg^2}$ o $32\frac{pies}{seg^2}$.

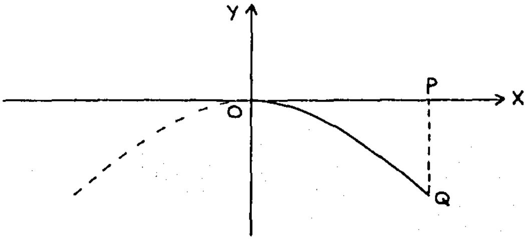


fig.71

Las expresiones:

$$x = v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

que están determinadas en función de una tercera variable conocida con el nombre de parámetro y que en este caso es el tiempo t, son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria descrita por el proyectil al ser lanzado.

El parámetro, aparte del tiempo en este tipo de ecuaciones, puede también ser un ángulo, entre otros.
Por tanto, las ecuaciones paramétricas de un lugar geométrico, pueden definirse, como el par de ecuaciones, en la que una de ellas representa el valor de la abscisa de un punto y la otra el de la ordenada de ese punto.

Si se conocen las ecuaciones paramétricas de un lugar geométrico, entonces, se puede obtener su ecuación cartesiana.
El problema se resuelve eliminando el parámetro, en algunos casos la solución resulta sencilla y en otros mucho más complicada. A continuación se dan algunos ejemplos de casos sencillos.

1) Sean las ecuaciones paramétricas

$$x = 2t - 1$$

$$y = t - 4$$

De la segunda ecuación se despeja t:

$$t = y + 4$$

este valor sustituido en la primera y haciendo operaciones resulta

$$x = 2y + 7$$

o bien,

$$x - 2y - 7 = 0$$

donde ésta última , representa la ecuación cartesiana de una recta.

2) Si se considera el ángulo α variable como parámetro y el punto $M(x,y)$ sobre la circunferencia de radio r (figura 72), se tendrá:

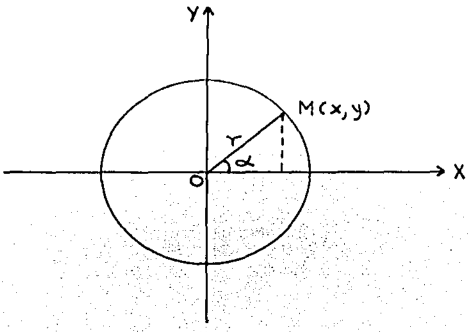


fig.72

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad\qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio r resultan ser:

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\operatorname{sen}\alpha$$

Para eliminar el parámetro α y llegar a su ecuación cartesiana, se procede de la siguiente forma, partiendo de:

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha \qquad\qquad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha$$

elevando al cuadrado ambos miembros en cada una de las expresiones:

$$\frac{x^2}{r^2} = \cos^2 \alpha \qquad\qquad \frac{y^2}{r^2} = \operatorname{sen}^2 \alpha ,$$

sumándolas miembro a miembro

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$$

o bien,

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

multiplicando todo por r^2, resulta

$$x^2 + y^2 = r^2$$

llegando así, a la ecuación cartesiana de la circunferencia.

3) Consideremos nuevamente en este ejemplo, las ecuaciones paramétricas

$$x = v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

que se obtuvieron al principio, y que representan la trayectoria descrita por el objeto material al ser lanzado desde el origen O, en la figura 71. De ellas eliminaremos el parámetro.

De la primera ecuación se desprende:

$$t = \frac{x}{v_0} ,$$

valor que colocado en y da:

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2_0},$$

haciendo las operaciones necesarias para despejar x^2, resulta

$$x^2 = -\frac{2v^2_0}{g} y, \qquad (29)$$

la cual representa una parábola por ser de la forma $x^2 = -4py$ (véase figura 71).

4) Considérese que en el sistema de coordenadas YOX de la figura 73, se lanza un proyectil desde O, con cierto ángulo de elevación α y con una velocidad inicial v_0. Si la resistencia del aire es pequeña y se puede despreciar sin gran error, el proyectil se moverá sujeto a la fuerza vertical de gravedad. Esto significa que no existe ninguna fuerza que cambie la velocidad en sentido horizontal.

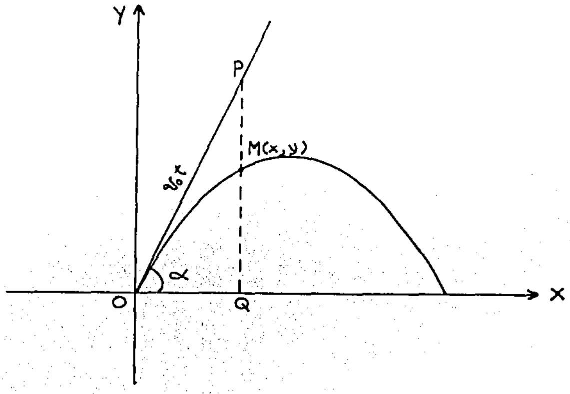


fig.73

Si el punto $M(x,y)$ es un punto de la trayectoria descrita por el proyectil y, OP es el espacio recorrido al término de un tiempo t, entonces, resulta

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{v_0 t} \qquad\qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{QP}{v_0 t}$$

Puesto que, $x = OQ$ y $OQ = v_0 t\cos\alpha$

Se desprende que:

$$x = v_0 t\cos\alpha$$

Ahora la velocidad haria que el proyectil se elevara hasta una altura de $QP = v_0 t\operatorname{sen}\alpha$ en un tiempo t. Pero el efecto de la atracción de la gravedad hace disminuir esta distancia en PM, que de acuerdo a la fórmula física de la caída libre de los cuerpos, la cantidad que ha de restarse es $\frac{1}{2}gt^2$. Por tanto, $PM = \frac{1}{2}gt^2$.

Dado que $y = QM$ y $QM = QP - PM$, entonces, $y = QP - PM$, es decir,

$$y = v_0 t\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Por lo que la posición del proyectil al término de un tiempo t, después de haber sido lanzado , está dado por las ecuaciones.

$$x = v_0 t\cos\alpha$$

$$y = v_0 t\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Estas ecuaciones, que nos dan las coordenadas del proyectil para un tiempo t cualquiera mientras está en vuelo, son las ecuaciones paramétricas de su trayectoria.

Para poder eliminar el parámetro y llegar a su ecuación cartesiana, se procede de la siguiente forma:

De la primera ecuación se obtiene t:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

valor que sustituido en la segunda, da:

$$y = v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right) \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v^2{}_0 \cos^2\alpha} \right),$$

simplificando y haciendo operaciones:

$$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v^2{}_0 \cos^2\alpha} \qquad (30)$$

donde esta última expresión, representa la ecuación cartesiana de una parábola (fig. 73), ya que la característica de una ecuación que representa una parábola en el plano cartesiano con eje paralelo a uno de los coordenados, es que sea cuadrática en una de sus variables y lineal en la otra, y toda ecuación de éste tipo, si así se requiere, puede ser expresada en su forma estándar.

Luego, entonces, de los ejemplos anteriores 3 y 4, se desprende: que la trayectoria descrita por un proyectil es una parábola.
Este hecho tiene importantes aplicaciones prácticas, veamos algunas de ellas.

Ejemplos.

1) Se lanza horizontalmente una piedra desde un punto situado a $3m$ de altura sobre el suelo. Sabiendo que la velocidad inicial es de $50\frac{m}{seg}$. Calcular la distancia horizontal al punto de caida.

Solución. Colocando los valores de $v_0 = 50$, $g = 9.81$ y $y = -3$ en la ecuación (29), se tiene

$$x^2 = -\frac{2(50)^2}{9.81}(-3),$$

realizando las operaciones para determinar el valor de x:

$$x^2 = \frac{6(2500)}{9.81}$$

$$x = 50\sqrt{0.61}$$

$$x = 39,$$

lo que indica, que la distancia horizontal al punto de caída de la piedra es de $39m$.

2) Se lanza una pelota con una velocidad de $160\frac{pies}{seg}$ con una dirección de $45°$ respecto a la horizontal. Hallar la distancia hasta la cual llega la pelota, y su altura máxima.

Solución. Para obtener los resultados deseados, se sustituyen los valores: $v_0 = 160$, $\alpha = 45$ y $g = 32$ en la ecuación (30)

$$y = x\tan 45 - \frac{32x^2}{2(160)^2(\cos 45)^2},$$

Desarrollando operaciones y simplificando

$$y = x - \frac{32x^2}{2(160)^2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

$$y = x - \frac{32x^2}{25600}$$

$$y = x - \frac{x^2}{800},$$

realizando el desarrollo algebraico necesario para expresar esta última ecuación en su forma estándar:

$$y = \frac{800x - x^2}{800}$$

$$800y = 800x - x^2$$

$$x^2 - 800x = -800y$$

$$x^2 - 800x + 160000 = -800y + 160000$$

$$(x - 400)^2 = -800(y - 200),$$

de donde se desprende, que el vértice es el punto $V(400,200)$, por lo que la altura máxima de la pelota, es de $200\ pies$, por ser V, el punto más alto de la curva.

Para determinar la distancia hasta la cual llega la pelota, se hace $y = 0$ en la ecuación estándar, y se obtiene

$$(x - 400)^2 = -800(-200),$$

haciendo las operaciones indicadas y despejando x:

$$x^2 - 800x + 160000 = 160000$$

$$x^2 - 800x = 0$$

$$x(x - 800) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = 800$$

considerando el valor de $x \neq 0$, se tiene que $x = 800$, es decir, que la pelota toca el suelo, a una distancia de $800\ pies$, o bien, que la pelota pega en el suelo, en el punto $(800,0)$.

3) Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de $192 \frac{pies}{seg}$ y con un ángulo de $30°$ arriba de la horizontal. Hallar la coordenadas de su

posición al final de $1 seg$. ¿ En qué tiempos está el proyectil a $96 pies$ arriba del suelo?

Solución. Las ecuaciones paramétricas

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

nos permiten encontrar las coordenadas de la posición del proyectil en cualquier tiempo de su vuelo. Por tanto, sustituyendo los valores de $v_0 = 192 \frac{pies}{seg}$, $\alpha = 30°$ y $t = 1 seg$, en ellas, simplificando y haciendo operaciones, se tiene:

$$x = 192\,(1)\cos 30 \qquad\qquad y = 192 \operatorname{sen} 30 - \frac{1}{2}(32)(1)^2$$

$$x = 192 \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad y = 192\left(\frac{1}{2}\right) - 16$$

$$x = 96\sqrt{3} \qquad\qquad y = 80.$$

Obteniéndose así, las coordenadas de su posición al final de $1 seg$, y donde éstas son $(96\sqrt{3}, 80)$.

Para encontrar los tiempos en donde el proyectil está a $96 pies$ arriba del suelo, simplemente, se colocan los valores conocidos en la segunda ecuación paramétrica y se hacen las operaciones indicadas. Esto es,

$$96 = 192 t \operatorname{sen} 30 - \frac{1}{2}(32)t^2$$

$$96 = 192 t\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(32)t^2$$

$$96 = 96t - 16t^2,$$

reordenando y pasando todos los términos al primer miembro:

$$16t^2 - 96t + 96 = 0,$$

o bien

$$t^2 - 6t + 6 = 0.$$

Resolviendo la ecuación para t:

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2}$$

$$t = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$t = 3 \pm \sqrt{3}.$$

Encontrando que en los tiempos de $t = 3 \pm \sqrt{3}\, seg$, el proyectil está a $96\, pies$ arriba del suelo.

4) Una bala es disparada desde el nivel del terreno, siguiendo la trayectoria parabólica $x^2 - 100x + 25y = 0$. ¿Cuál será la altura máxima del proyectil y a qué distancia del tirador caerá, si la distancia está medida en metros?

Solución:

Realizando el procedimiento para expresar la ecuación dada en su forma estándar:

$$x^2 - 100x = -25y$$

$$x^2 - 100x + 2500 = -25y + 2500$$

$$(x - 50)^2 = -25(y - 100),$$

de ésta, se desprende que el vértice es el punto $V(50,100)$, que es el punto más alto de la curva, lo que indica que la altura máxima del proyectil es de $100m$.
Para saber a que distancia caerá, se hace $y=0$ en la ecuación estándar, y se realizan las operaciones para encontrar el valor de x:

$$(x-50)^2=-25(-100)$$

$$x^2-100x+2500=2500$$

$$x^2-100x=0$$

$$x(x-100)=0$$

$$\therefore x=0 \; o \; x=100.$$

Considerando el valor de $x \neq 0$, se tiene que la bala toca el suelo a $100m$ de distancia del tirador.

Ejercicios.

1. Se arroja una pelota con una velocidad inicial de $96\frac{pies}{seg}$ y en un ángulo de $45°$ hacia arriba de la horizontal. ¿Hasta qué altura asciende la pelota y a que distancia pega en el suelo? supóngase que el suelo está nivelado.

2. Encontrar las coordenadas de la posición del proyectil del ejemplo 3 al final de $2seg$.

3. Un "pitcher" lanza una pelota horizontalmente con una velocidad inicial de $108\frac{pies}{seg}$. Si el punto del disparo está $6\,pies$ arriba del suelo.

a) ¿A qué altura llega la pelota a la base meta, que está a una distancia de $60.5\ pies$ del monticulo?

b) ¿Cuál sería la respuesta a esta pregunta si la velocidad inicial fuera de $132\frac{pies}{seg}$.

4. Se arroja una pelota horizontalmente a una velocidad de $100\frac{pies}{seg}$. ¿Cuánto habrá caído ésta después de haber recorrido una distancia de $60\,pies$?

5. Se lanza una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de $185m$ de altura con una velocidad de $15\frac{m}{s}$. Hallar la distancia del punto de caída al pie de la torre, suponiendo que el suelo es horizontal.

6. Un artillero desea dar en el blanco en un objeto que está a $500m$ de su cañón. Si el cañón está en el origen de coordenadas. Encontrar la ecuación de la parábola que alcanza su altura máxima de $100m$.

7. Un proyectil es lanzado desde el nivel del terreno siguiendo la trayectoria parabólica $(x-3)^2=-(y-9)$ en la que las unidades están dadas en kilómetros. ¿Cuál será la altura máxima del proyectil y a que distancia del cañón caerá?

8. Un avión que vuela hacia el Sur a una altura de $1500m$ y a una velocidad de $200\frac{km}{h}$ ($55.55\frac{m}{seg}$), deja caer una bomba. Calcular la distancia horizontal del punto de caída a la vertical del punto del lanzamiento.

Conclusiones

El contenido que conforma este estudio, se considera suficiente para el nivel de Educación Media Superior, ya que inclusive, los capítulos VII y IX, que tratan la ecuación de la parábola cuando su eje es oblicuo a los coordenados y familia de parábolas respectivamente. Generalmente no se estudian en este nivel, sin embargo, se exponen para enriquecer más el tema.

Esperando que la forma en que se realizó el desarrollo de los capítulos que conforman el trabajo, ayude a su fácil comprensión, y poder así despertar en los estudiantes, el interés por el gusto de la Geometría Analítica. Mostrando en el último de éstos, las aplicaciones y la utilidad de la curva, para hacerlo más atractivo, y que encuentren en éste, un apoyo didáctico para el estudio de la Parábola.

Comprendiendo los ejemplos, y realizando los ejercicios en forma correcta aquí presentados, se puede acceder a los temas subsecuentes de la parábola, y así avanzar en las Matemáticas, particularmente en la Geometría Analítica a nivel Bachillerato.

Bibliografía

1.- Gordon Fuller. **Geometría Analítica**. Editorial CECSA. Vigésima Segunda Reimpresión. México, 2000.

2.- Elena de Oteyza de Oteyza, Emma Lam Osnaya, Carlos Hernández Garciadiego, Ángel Manuel Carrillo Hoyo, Arturo Ramírez Flores. **Geometría Analítica y trigonometría**. Editorial Pearson Educación. México, 2001. Primera Edición.

3.- Charles H. Lehmann. **Geometría Analítica**. Editorial "UTEHA". México. Reimpresión de 1956.

4.- Marcelo Santaló, Vicente Carbonell. **Geometría Analítica**. Editorial Grupo Editorial Éxodo. México. Primera Edición. Febrero, 2000.

5.- Frederich H. Steen, Ph. D, Donald H. Ballou, Ph. D. **Geometría Analítica**. Editorial Publicaciones Cultural. Décima Quinta Reimpresión. México, 1991.

6.- Agustín anfossi, Marco A. Flores Mayer. **Geometría Analítica**. Editorial Progreso. México. Undécima Edición, 1997.

7.- Francisco J. De la Borbolla, Luis de la Borbolla. **Geometría Analítica**. Editorial Esfinge. México. Cuarta Edición, 1988.

8.- Arquimedes Caballero C, Lorenzo Martinez C, Jesús Bernardez G. **Geometría Analítica**. Editorial Esfinge. México. Segunda Edición, 1987.

9.- Luis Magaña Cuellar, Salazar Vázquez. **Geometría Analítica Plana**. Editorial Nueva Imagen. México. Primera Edición, 1994.

10.- Ross R. Middlemis. **Geometría Analítica**. Editorial Mc Graw-Hill. México, 1981. Cuarta Edición.

11.- William Wernick. **Geometría Analítica**. Editorial Publicaciones Cultural. México, 1970. Primera Edición.

12.- Roland E. Larson, Roberto P. Hostetler. **Cálculo y Geometría Analítica**. Editorial Mc Graw-Hill. México, 1991. Tercera Edición.

13.- Earl W. Swokowski. **Cálculo con Geometría Analítica**. Editorial Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición. México,1989.

14.- George B. Thomas, Jr, Ross L. Finney. **Cálculo con Geometría Analítica**. Editorial Addison – Wesley Iberoamericana. México,1990. Sexta Edición.

15.- Joseph H. Kindle, Ph. D. **Geometría Analítica**. Serie de Compendios de Schaum. Editorial Mc Graw – Hill. Colombia.

16.- Arturo Zuñiga Araiza. **Fundamentos de Geometría Analítica**. Editado por la UNAM. México, 1992. Segunda Edición.