107

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS EN LA ECONOMÍA INDUSTRIAL, IMPUESTOS Y BIOLOGIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

EDDA SANDRA SÁNCHEZ VALENCIA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ

IVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Aplicación de la Teoría de Juegos en la Economía Industrial, Impuestos y Biología

realizado por Edda Sandra Sánchez Valencia

con número de cuenta 9211116-1, quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Fernando Brambila Paz	F. Brf
Propietario	Dra. Flor de María Aceff Sánchez	
Propietario	M. en C. Virginia Abrin Batule	Virginia Abrín Batule
Suplente	M. en C. Alejandro Bravo Mojica	
Suplente	Act. María Teresa Verónica Martínez Palacios	Martinez Palacios Ma Teresa V

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES [illegible]
Coordinador de la Carrera de Actuaría

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

A MI MADRE
MA. EDDA SANDRA VALENCIA MONTALVÁN

Por acompañar y guiar mis pasos con tanto amor,
por la confianza y comprensión que me brindaste,
por todo lo que eres y siempre serás en mi vida.

A MI PADRE
CARLOS SÁNCHEZ CIFUENTES

Por todo lo que a tu lado he aprendido y los momentos que hemos compartido.

A TIO
NAHUM N. VALENCIA MONTALVÁN

Por el cariño y el apoyo que siempre me has brindado.

A MIS HERMANOS
CARLOS F. SÁNCHEZ VALENCIA
MA. ERNESTINA SÁNCHEZ VALENCIA

Por el interés que siempre han mostrado en mi desarrollo personal y profesional, por las bromas, enojos, pelas y cariño compartido.

A MIS TIOS, PRIMOS Y SOBRINOS

Por ser parte de mi vida y compartir conmigo esta aventura profesional.

AL DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ

Por toda la paciencia, el interés y los consejos que me han permitido no solo concluir este trabajo, sino crecer y mejorar como ser humano.

A

M. EN C. VIGINIA ABRIN BATULE,
DR. FLOR DE MARIA ACEFF SÁNCHEZ,
M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA,
ACT. TERESA MARTINEZ PALACIOS.

Por la paciencia con que revisaron este trabajo y todos los comentarios con los que lo enriquecieron.

A MIS PROFESORES Y COMPAÑEROS

Por compartir conmigo su conocimiento dentro y fuera de las aulas.

A BETY, CINDY, IVAN, JESSICA, LUPITA, MONICA, TEODULO, YOLANDA Y YOBRAN

Por su amistad, cariño y apoyo; por ser parte de mi vida y permitir que yo sea parte de la suya.

A JORGE

Por todo lo que has querido ensañarme y jamás he aprendido.

INDICE

INDICE

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se presentan algunas de las muchas aplicaciones del "Teorema de Nash" en diferentes áreas del conocimiento, tales como la Economía Industrial, la Teoría de la Hacienda Pública y la Biología Evolutiva.

El Teorema de Nash se basa en los razonamientos de la "Teoría de Juegos" expuesta por Von Neumann y Morgensten en la que se modela la interrelación de los individuos como un juego de etapas, en el que las decisiones que toman los participantes son sus estrategias y con base en éstas obtienen diferentes resultados, que no son más que la utilidad que reciben por participar en el juego.

Pero más allá de ésto el Teorema de Nash lo que sugiere es que si los jugadores se *comportan racionalmente estos obtendrán el mejor resultado del juego, es decir ambos* tendrán un mejor resultado si cooperan.

Este resultado se ha aplicado en diferentes ciencias, ratificándose con ello el resultado de que el equilibrio generado por la cooperación es la mejor de las soluciones para las interrelaciones que modelan los juegos económicos y biológicos.

En un mercado como el de estos tiempos cada vez más competitivo, la relación entre las empresas se puede ver como un juego en el que cada uno de los participantes (jugadores) tendrá que definir una estrategia ya sea compartir el mercado, iniciar una guerra de precios o producción y en esta forma tratar de acaparar el mercado, *observándose que en estos casos las empresas se condenan a la desaparición.*

Por otro lado se encuentra la relación tan complicada entre el Estado y la población derivada del pago de impuestos, cuya omisión por parte de los contribuyentes puede llevar a la ruina a algún país, mientras que si ambas partes cooperan, unos facilitando el pago y otros pagando, entonces se genera un equilibrio de Nash que permite la salud de las Finanzas Públicas.

Al finalizar este trabajo se encuentra una de las aplicaciones que a la fecha es de las más desarrolladas y aprovechadas, esta es la de la biología evolutiva, en la que se plantea una estabilidad evolutiva, que no es más que el equilibrio de Nash de la relación genética que permite el desarrollo de una mutación o no.

La relación entre la teoria de juegos y el Equilibrio de Nash promete un amplio desarrollo en otras ciencias por ejemplo la sociología, psicología o el desarrollo de inteligencia artificial.

Por último solo quiero destacar que la demostración del Teorema de Nash y del Minimax que se encuentran en el presente trabajo forman parte de la Tesis Profesional de la Act. Maria Teresa Verónica Martines Palacios.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS

Cuando se escucha la palabra juego, de inmediato viene a la cabeza un grupo de personas (ya sean niños o adultos) divirtiéndose con una actividad social en la cual se establece un conjunto de reglas y se desarrollan algunas estrategias para llegar al triunfo; pero esto no es siempre así, pues desde el enfoque de la *teoría de juegos*, disciplina básica en el desarrollo de esta tesis, se lleva a cabo un juego cada vez que cualquier número de individuos a partir de dos se relacionan entre si; por ejemplo:

- Una empresa y un sindicato están desarrollando un juego de varias partidas cuando negocian las condiciones del Contrato Colectivo de Trabajo y el incremento salarial a aplicarse en un año en particular,

- Al *fijar el estado el pago del impuesto como una obligación para la sociedad se* lleva a cabo un juego en el que se busca que la sociedad pague y que el gobierno reciba los fondos necesarios para proveer de los bienes y servicios necesarios para que subsista esa misma sociedad,

- El cobrador de impuestos lleva a cabo un juego al proponer un esquema de condonación de recargos a los contribuyentes evasores, los cuales pueden optar por adherirse o no,

- Cuando los comerciantes, o productores fijan los precios o cantidades a producir de un bien o un servicio, considerando las características del mercado y los *participantes en el mismo;*

- Las diferentes especies que conforman un ecosistema, al relacionarse entre sí en lo que se conoce como la cadena alimenticia,

- Los genes que determinan la evolución en una cierta especie, donde el juego se establece en el paso del gen que determina la mutación de un individuo a otro.

Definamos entonces a la ***teoría de juegos*** como la disciplina que describe las relaciones entre cada uno de los participantes de un juego y la forma en que cada uno de estos tomará decisiones racionales para obtener el mayor beneficio mutuo, dada la relación que sostiene con los otros participantes, los cuales pueden o no cooperar durante el desarrollo del juego.

1.1 JUEGOS

Las características que deben cumplir las interrelaciones entre los individuos (sean agentes económicos, biológicos, sociales, etcétera) para que sean consideradas como un juego son las siguientes:

1.- Un mínimo de dos jugadores (los juegos como el "come solo" y el "solitario" no se analizan en la Teoría de Juegos). Esto no debe de causar confusión en el caso del monopolio: aunque solo existe una empresa competidora, ésta se relaciona con los compradores, 2.- El juego inicia con la decisión (es) de uno o más de los jugadores a través de un conjunto de alternativas posibles; es decir, el juego se inicia con una tirada,

3.-Después de que se lleva a cabo una jugada, siempre se obtiene un resultado,

4.- Las tiradas de los jugadores pueden o no ser conocidas. Por ejemplo: en las subastas de sobre cerrado, las jugadas de cada uno de los participantes no se conocen, mientras que en otro tipo de subastas cada uno de los participantes conoce las propuestas realizadas, por los otros participantes.

5.- Si el juego descrito es un juego finito entonces existe una regla de finalización del juego.

6.- Los resultados del juego (incluyendo los pagos) están especificados en términos del jugador que gana, pierde o, en su caso, empata.

Las relaciones entre los participantes se establecen mediante las reglas del juego, que no son más que las instrucciones que explican quien puede hacer qué y cuando puede hacerlo; éstas deben de indicar claramente cual es el pago que recibirán los jugadores por participar en el mismo, y en el caso de los juegos finitos el momento de finalización del mismo. Por ejemplo: en el caso de la tributación, las reglas para pagar los impuestos son las leyes que establece el gobierno para el cálculo de dicho pago; así como las sanciones a las que se harán acreedores los individuos que se descubra no cumplieron con las leyes, éste juego tiene diferentes reglas de finalización dependiendo de las características de cada uno de los contribuyentes, simultáneamente, se puede considerar como un juego infinito, pues día a día se integran nuevos participantes por parte de la sociedad. El juego se jugará mientras existan la sociedad y el Estado tal y como los concebimos *actualmente. Otro ejemplo es el caso de los juegos biológicos, donde las reglas del juego* consisten en el comportamiento instintivo de los individuos, marcado por la naturaleza.

El tipo de interrelación de los jugadores genera la división de los juegos en dos tipos principales, los **no cooperativos** y los **cooperativos**. Como su nombre lo indica, los primeros son aquellos en los que los participantes tratan de ir a la suya y ganar a costa de lo que sea, mientras que los cooperativos son aquellos en los cuales los participantes buscan la solución que les beneficie a ambos. Un juego puede ser considerado a primera vista como no cooperativo, pero el análisis lleva a la conclusión de que la mejor solución se obtiene cuando los participantes deciden cooperar. Por ejemplo: en el caso de los mercados competitivos oligopólicos que se describen en el siguiente capítulo, las empresas no cooperan entre *sí* y deciden entablar una guerra de precios o producción en principio, pero esto únicamente los llevará a la producción sin ganancia; en cambio, si forman una colusión entre sí, entonces se obtienen resultados favorables para cada uno de ellos. Otro caso es del pago de los impuestos, pues si se le ve como una contribución que permita el desarrollo social y económico de un país, conviene cooperar. Pero si el gobierno no cumple con sus promesas, o, peor aún, hace mal uso de este recurso, entonces los contribuyentes preferirán no cooperar.

Al desarrollarse un juego, cada uno de los participantes va eligiendo tiradas, las cuales son conocidas como estrategias. Éstas pueden ser clasificadas en dos tipos:

Estrategias puras: son *las tiradas* o jugadas que *eligen de los participantes* en el juego, en cada uno de los puntos en los que el jugador deberá tomar una decisión aún si no se llegará a esa parte del juego a partir de las tiradas anteriores.

Si todos los jugadores de un juego seleccionan una estrategia pura y se mantienen fieles a ella, entonces el desarrollo del juego estará completamente determinado, siempre y cuando no existan jugadas en las que intervenga el azar (por ejemplo tirar un dado o jugar un volado).

Estrategias mixtas: Es cuando a las tiradas se le asigna alguna probabilidad de ser elegidas (es decir sus decisiones tomadas por los jugadores son aleatorias).

Está por ejemplo el caso de un juego de la contribución fiscal; simplificado de una etapa, los contribuyentes tienen dos estrategias puras: el pagar impuestos o el no pagarlos, y el gobierno tiene como opción cobrar una cuota justa o no cobrarla; entonces, en éste caso como el juego es de una sola etapa, los participantes jugarán una sola de sus dos estrategias; luego, éste es un juego de estrategias puras.

Más allá de la interpretación teórica que se le da a las estrategias dentro de la teoría de juegos, éstas son el plan de acción de cada uno de los jugadores, el cual puede ser definitivo. Por ejemplo: "sin importar qué tire mi compañero yo voy a tirar tal o cual cosa"; otras pueden no ser tan especificas. Por ejemplo: "dependiendo de la tirada de mi compañero yo reaccionaré con tal o cual tirada".

Sea por ejemplo el juego al que llamaremos "Juego de la Contribución Fiscal" simplificado a una sola etapa, en el que participan el gobierno y los contribuyentes, cada uno ellos tendrá dos posibles tiradas tal como se observa en el siguiente cuadro:

	Estado	Contribuyente
Tirada 1	Cobra cuotas justas[1]	Pagar
Tirada 2	No cobrar cuotas justas	No pagar

Tabla 1.1 Tiradas posibles en el "Juego de la Contribución Fiscal"

El juego anterior es un juego de estrategias puras, ya al ser de una sola etapa, los participantes jugarán una sola de sus dos estrategias[2].

Un juego de estrategias mixtas es, por ejemplo, la negociación de un contrato colectivo de trabajo en el que cada uno de los puntos que se piensa obtener tienen un peso especifico, por lo que al negociar se someten o no a la consideración de la contraparte.

Definamos ahora el **conjunto de estrategias** como aquel conjunto no vacio en el que se

[1] En este trabajo consideraremos "cuotas justas" aquellas que son acordes a los ingresos reales de los contribuyentes y simultáneamente permiten brindar servicios públicos eficientes.

[2] No es descabellado pensar que en el juego de la contribución fiscal los jugadores juegan con estrategias puras, pues si se toma en cuenta que una vez que un contribuyente paga sus impuestos queda registrado en una base de datos donde se especifican todos sus datos y características; entonces, es fácil detectar cuando éste no presenta declaración –situación por la que será requerido y tendrá que pagar los impuestos evadidos, más las multas y actualizaciones y recargos correspondientes-.

encuentran todas las jugadas posibles de cada uno de los jugadores, sin importar si ésta se va a aplicar a no. Para el ejemplo del juego de la contribución fiscal de una etapa tenemos los siguientes conjuntos de estrategias:

Contribuyente

{pagar, no pagar}

Estado

{cobrar cuotas justas, no cobrar cuotas justas}

De lo anterior se deduce que el juego tiene el siguiente conjunto de jugadas:

{(cobrar cuotas justas, pagar), (cobrar cuotas justas, no pagar), (no cobrar cuotas justas, pagar), (no cobrar cuotas justas, no pagar)}

Es importante destacar que, en este caso, los jugadores sólo tienen derecho a una jugada, por lo que sólo se describen dos posibles tiradas; pero en el caso de juegos en los que los jugadores tienen que tirar más de una vez, se deben de describir todas las combinaciones de tiradas posibles, sin importar si el jugador tendrá la oportunidad de hacer dicha jugada o no.

PREFERENCIAS DE LOS JUGADORES

Representemos como:

P el resultado del juego en el que el jugador **uno** pierde,
E al empate entre ambos jugadores y
G al resultado del juego en el que el jugador **uno** gana.

Entonces en un juego racional[3] estrictamente competitivo las preferencias del jugador uno ante los posibles resultados del juego se representan como sigue:

$$\mathbf{P <_1 E <_1 G.} \qquad (1.1)$$

Esto es el jugador uno considera perder como el peor de los resultados para él, empatar como un resultado intermedio y ganar como lo mejor que puede ocurrirle en el juego.

Análogamente para el jugador dos la relación de preferencias se describe como:

$$\mathbf{P >_2 E >_2 G.} \qquad (1.2)$$

Lo anterior implica que para el jugador dos el mejor de los resultados es que el jugador uno pierda, pues eso tendrá como resultado que el gane, mientras que empatar es *nuevamente un resultado intermedio y el mejor de los resultados para el jugador dos es el* caso en el que el jugador uno pierde puesto implica que el gana.

[3] *Se considera un juego racional si las tiradas de los jugadores están encaminadas a obtener el mejor resultado del juego*

En el caso de los juegos estrictamente competitivos[4], los intereses de los jugadores son diametralmente opuestos. Es decir: lo que significa algo bueno para uno de ellos, es algo malo para el otro. Dicho de otra forma: si $\mathbf{G <_2 P}$ entonces $\mathbf{G >_1 P}$.

En los juegos cooperativos la relación anterior no se cumple necesariamente ya que lo que puede llevar a ganar a un individuo puede ser perjudicial para el conjunto de los jugadores que participan en el juego y tener como consecuencia un resultado colectivo perjudicial, por lo que en algunos juegos es necesario que exista la cooperación de los participantes lo que tiene como consecuencia el beneficio colectivo y particular.

Sea por ejemplo el caso del juego de la contribución fiscal en el que algunos de los individuos deciden no pagar y en esa forma mantener su patrimonio, pero esto merma los ingresos del gobierno, lo que tiene como consecuencia un menor desarrollo social, con decrecimientos en áreas tales como seguridad, salud y educación, todo lo cual afecta a la *sociedad en su conjunto, y al individuo en particular.*

REPRESENTACIÓN DE LOS JUEGOS

Para iniciar este apartado definamos:

Gráfica.- Una gráfica G consiste en un conjunto finito no vacio V= V(G) de puntos p junto con un conjunto predeterminado x de pares q no ordenados de distintos puntos de v. Cada par X= { u,v} de puntos en X es una línea de G y x se dice que une a u y v.

Digráfica.- Es una gráfica para la cual los puntos de X son líneas o arcos direccionados.

Camino.- El camino de una gráfica G es una secuencia alternante de puntos y líneas v_o, x_1, v_1,... v_{n-1}, x_n, v_n que inicia y termina con puntos en los cuales cada línea es incidente con los dos puntos que la preceden.

Un camino es cerrado si $v_0 = v_n$ y es abierto en otro caso.

Si el camino es cerrado entonces es un ciclo, una gráfica es acíclica si no tiene ciclos.

Una forma para analizar los juegos es representarlos gráficamente que no es más que utilizar una gráfica conexa sin ciclos y unida por aristas que empieza en un nodo inicial *llamado raiz y termina, si el juego es finito, en nodos terminales, donde se reflejan los* pagos que va a recibir cada uno de los jugadores al final de la partida y los posibles resultados del juego, esta representación se conoce como **forma extensiva o árbol de decisión**.

Cada uno de los nodos del árbol de decisión representan las jugadas posibles durante el juego. Los segmentos que salen de un nodo representan las acciones o elecciones posibles en esa jugada, y a cada nodo no terminal se le asigna el nombre o número de un jugador, de manera que se sabe quien elige cada jugada. En el caso de los juegos que tienen jugadas de azar, en los que existe la probabilidad de que se obtenga un resultado u otro (por ejemplo: los volados, el parcasé, el turista, o aquellos que dependen de *situaciones económicas tales como inflación, tipo de cambio, etc), la tirada se representa*

[4] Son aquellos en los que si el jugador gana, entonces el jugador dos pierde

creando un jugador mítico llamado azar en el que cada resultado se marca con la probabilidad que tiene de ser obtenida.

En el árbol del juego de la contribución fiscal de una sola etapa, sin que se consideren los pagos posibles tendrá la siguiente estructura:

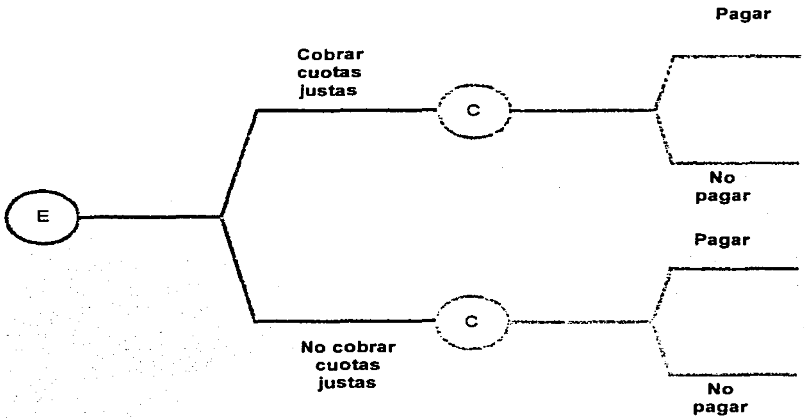

Figura 1.1 Árbol de decisión del juego de la contribución fiscal

Veamos ahora un juego un poco más sencillo, el juego en el que participan dos jugadores: cada uno de ellos tiene dos monedas de un peso, sin que el jugador dos pueda verlo, el jugador uno depositará en una urna el número de monedas que él prefiera, con la restricción de que siempre deberá tirar al menos una moneda. Posteriormente, el jugador dos, sin que el jugador uno pueda verlo, depositará en la misma urna el número de monedas que él prefiera siendo obligatorio que tire una moneda o más. El jugador uno ganará el juego cuando el número de monedas que se encuentren dentro de la urna sea un número par, mientras que el jugador dos ganará cuando el número de monedas en la urna sea un número impar; y en ambos casos, el premio para el ganador serán las monedas contenidas dentro de la urna.

El árbol de decisión que describe este juego es el que se observa en la figura 1.2

En este caso se trata de un juego de información imperfecta, pues los jugadores no conocen las jugadas de su contrincante mientras este se está llevando a cabo, y no existe ninguna estrategia ganadora; es decir, ninguno de los dos participantes tiene una estrategia que garantice su triunfo sin importar cual sea la tirada de su contrincante, no tiene tiradas de azar y es de dos etapas.

El conjunto de estrategias del juego es el siguiente:

Jugador uno:

{tirar una ficha, tirar dos fichas}

Jugador dos:

{tirar una ficha, tirar dos fichas}

Del conjunto de estrategias se deduce que el conjunto de resultados posibles tiene la siguiente forma:

{(tirar uno, tirar uno), (tirar uno, tirar dos), (tirar dos, tirar uno), (tirar dos, tirar dos)}

Para obtener los pagos que se reflejan en el árbol de decisión se sigue el siguiente razonamiento:

Si el jugador uno juega tira una moneda y el jugador dos también entonces el jugador uno gana una moneda y el dos pierde una moneda que es el pago **(1,-1)**.

Si el jugador uno juega una moneda y el jugador dos tira dos monedas entonces el jugador uno pierde una moneda y el jugador dos la gana **(-1,1)**.

Si el jugador uno tira dos monedas y el jugador dos tira una moneda entonces el jugador dos gana dos monedas y el jugador uno las pierde **(-2,2)**.

Por último si el jugador uno tira dos monedas y el jugador dos tira dos monedas entonces el jugador uno gana dos monedas **(2,-2)**.

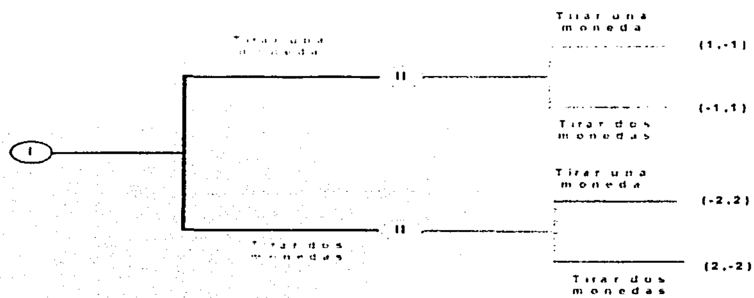

Figura 1.2 Árbol de decisión del juego de las fichas

Cada uno de los nodos del árbol, así como el árbol que viene a continuación son conocidos como subjuegos, pequeños juegos contenidos dentro del juego principal. En el caso de los juegos estrictamente competitivos, éstos juegos siempre tienen un valor[5], mientras que los juegos cooperativos pueden no tenerlo.

Los subjuegos del juego del la figura 1.2 se ven como sigue

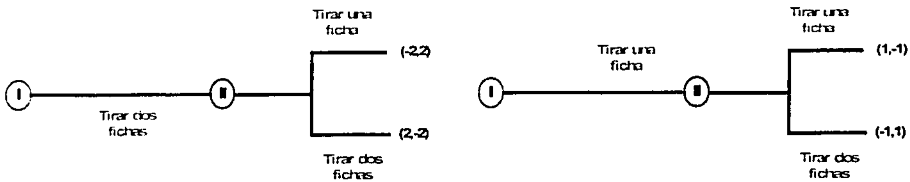

Figura 1.3 Subjuegos del Árbol de decisión de la figura 1.2

Uno de los métodos *mediante el cual se puede encontrar el resultado de un juego* representado mediante un árbol de decisión es el **algoritmo de Zermelo o inducción hacia atrás**, el árbol de decisión puede facilitar el encontrar la solución del juego. El algoritmo consiste en empezar a analizar el juego justo en el punto en que éste termina y regresar hacia el inicio escogiendo las jugadas que lleven al jugador en turno a obtener las mejores ganancias, y con ello describir cuales serán las acciones a tomar por cada uno de los participantes en cada uno de los momentos del juego.

Otra forma para representar los juegos, es la **forma normal o matricial**; ésta, como su nombre lo indica, consiste en una matriz denominada "matriz de pagos", donde se representan los resultados posibles del juego de dos participantes de acuerdo a las estrategias de *cada uno de los jugadores, en donde las filas representan las estrategias* del jugador uno, y las columnas, las del jugador dos; en cada una de las entradas de la matriz se refleja un vector de dos entradas, cuya primera coordenada pertenece al pago que va a recibir el jugador uno, y la segunda entrada es el pago del jugador dos.

En los juegos en los que el jugador uno gana exactamente lo mismo que pierde el jugador dos, **juegos de suma cero**, se representa únicamente el pago que recibe el jugador uno, entendiéndose que el pago del jugador dos es igual en valor absoluto, pero con signo contrario al del jugador uno, destacando que los pagos no necesariamente deben de ser dinero, podría tratarse de cualquier otro beneficio al que se le asocia un valor numérico.

En un juego de suma cero, donde el jugador uno tiene n posibles tiradas y el jugador dos tiene *m posibles tiradas, el juego se representa con una matriz de nxm, que tiene la* siguiente forma:

[5] **El valor del juego es el pago que esperan recibir los jugares al concluir el juego, que puede ser o no en dinero, pero este concepto se ampliará más adelante.**

$$M_{nxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura 1.4 Matriz de pagos

En el caso de un juego que no es de suma cero, las entradas de la matriz son vectores de dos componentes, donde la primera entrada representa el pago del jugador uno y la segunda entrada representa el pago del jugador dos. Así pues, el juego se representará bimatricialmente como sigue:

$$M_{nxm} = \begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \cdots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Figura 1.5 Representación Bimatricial

Retomando el juego de las monedas que fue planteado con anterioridad, tenemos que la matriz de pagos que le corresponde tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \text{Tirar una moneda} & \text{Tirar dos monedas} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Tirar una moneda} \\ \text{Tirar dos monedas} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1.6 Matriz de pagos del juego de la fichas

El valor de las entradas de la matriz se obtiene de considerar la ganancia de cada uno de los jugadores de acuerdo a la intersección de las tiradas de cada uno de ellos, por *ejemplo la entrada* a_{11} *es el resultado que el jugador uno obtiene si el este tira una* moneda y el jugador dos tira una moneda, la entrada a_{21} es la utilidad que obtienen los jugadores cuando el jugador uno tira dos monedas y dos únicamente una y así sucesivamente hasta completar las entradas de la matriz.

Sea ahora el juego de un mercado donde únicamente existen dos empresas que producen el bien, por lo que cubren toda la demanda de la región, supongamos entonces que si ambas ofrecen el mismo precio se quedan con la mitad de la demanda cada una. El beneficio de las empresas, se obtiene multiplicando la cantidad de bienes vendidos por el precio unitario menos el costo de producirlos, si cada uno de los empresarios tienen como posibles estrategias el vender a dos precios distintos los que denominaremos precio alto (P_A) y *precio bajo* (P_B), *la representación* bimatricial del *juego*[6] será como el que se describe en la figura 1.7.

[6] En el siguiente capítulo cuando se analice la competencia descrita por Bertrand se analizará más a detalle este juego.

$$
\begin{array}{ccc}
 & P_A & P_R \\
\begin{array}{c} P_A \\ \\ P_R \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\pi_{A1}}{2}, \frac{\pi_{A2}}{2}\right) & (0, \pi_{B2}) \\ (\pi_{B1}, 0) & \left(\frac{\pi_{B1}}{2}, \frac{\pi_{B2}}{2}\right) \end{array}\right] &
\end{array}
$$

Figura 1.7 Representación Bimatricial de un juego

Donde el beneficio que obtiene la empresa i que otorga el precio alto se define como π_{Ai}, y si ofrece el precio bajo su beneficio será π_{Bi}.

En muchas ocasiones los jugadores no juegan estrategias puras, es decir tiran en forma aleatoria. Para hallar las probabilidades con las que los jugadores optimizarán el beneficio obtenido por participar en el juego y el valor del mismo. Procedamos a utilizar los siguientes principios:

Definamos:

p_i = probabilidad de que el jugador 1 juegue la estrategia i-ésima

q_j = probabilidad de que el jugador 2 juegue la estrategia j-ésima

Sean p y q los vectores de probabilidad tales que:

$$
p = (p_1, p_2, p_3, \ldots p_n) \qquad q = \begin{pmatrix} q_1, \\ q_2, \\ \ldots \\ q_m \end{pmatrix}
$$

Donde:

$$
\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 . \qquad (1.3)
$$

$$
\sum_{j=1}^{m} q_j = 1 \quad . \qquad (1.4)
$$

Tenemos entonces que la probabilidad de que el jugador uno escoja la estrategia i es p_i *mientras que la probabilidad de que el jugador juegue con la estrategia j* es q_j, entonces la probabilidad que en el juego se escojan las estrategias (i,j) es igual a p_iq_j.[7]

Por ejemplo en el caso de las negociaciones del contrato colectivo de trabajo, el sindicato hace la propuesta de un incremento de un 20% a los salarios con una probabilidad de

[7] Esta afirmación se hace bajo el supuesto de que la probabilidad con la que cada uno de los jugadores escoge una jugada es independiente de las decisiones del otro jugador.

$\frac{1}{8}$ mientras que la empresa escogerá esa misma opción con una probabilidad de $\frac{1}{20}$, y entonces la probabilidad de que a los trabajadores les otorguen un incremento salarial del 20% es igual a $\frac{1}{8} * \frac{1}{20} = \frac{1}{160}$.

En el caso de los industriales del juego de la matriz de la figura 1.7, si ambos tienen la misma probabilidad de escoger el precio alto y ésta es $\frac{3}{4}$ entonces la probabilidad de que se juegue el precio alto esta definida por $\frac{3}{4} * \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Cuando los jugadores utilizan estrategias puras, se puede ver como un caso especial en el que la entrada del vector de la estrategia utilizada es uno, y el resto de las entradas es cero. Tal es el caso del juego impositivo descrito anteriormente: si definimos p como el vector de estrategias del estado, donde la primera estrategia es proponer impuestos justos y la segunda entrada es no hacerlo, y q como el vector de estrategias del contribuyente, donde la primera entrada representa la estrategia de pagar y la segunda la de no hacerlo, los vectores de estrategias de cada uno de los jugadores del juego en el que el estado cobra en forma justa y el contribuyente paga, son los siguientes:

$$p = (1,0), \qquad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que a_{ij} es el pago que recibirá el jugador uno cuando él juegue i y el jugador dos juegue j entonces el valor esperado de un juego de suma cero, que se repite numerosas ocasiones, se representa como:

$$E(p,q) = (p_1, p_2, p_3, \dots p_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1, \\ q_2, \\ \dots \\ q_m \end{pmatrix}$$

Figura 1.8 pAq

En el caso de los juegos de suma cero si el jugador uno gana a_{ij}, el jugador dos pierde la misma cantidad, por lo que es claro que la ganancia esperada del jugador dos es $-E(p,q)$.

Por otro lado, en los juegos bimatriciales el pago esperado del jugador uno es igual a pAq donde A representa las entradas a_{ij} de la bimatriz y el pago del jugador dos se construye con pBq donde B es la matriz de las entradas bij descrita en la figura 1.5.

Resulta lógico pensar que los jugadores tratarán de obtener la mejor solución para ellos suponiendo que el otro jugador también tratará de optimizar su ganancia. De este razonamiento se desprende el siguiente teorema, que es conocido como el teorema fundamental de los juegos de suma cero de dos personas.

Teorema 1.1
Existen estrategias $\bar{p}$ y $\bar{q}$ tales que:

$$E(\bar{p}, q) \geq E(\bar{p}, \bar{q}) \geq E(p, \bar{q}) \qquad \forall \ p, q. \qquad (1.7)$$

DEMOSTRACIÓN

En este teorema $\bar{p}$ y $\bar{q}$ son las estrategias óptimas de cada uno de los jugadores, sea entonces $v = E(\bar{p}, \bar{q})$ por lo que el lado izquierdo de la expresión 1.1 se ve como:

$$E(\bar{p}, q) \geq v \qquad \forall \ q. \qquad (1.8)$$

Esto significa que el pago esperado para el jugador uno nunca será menor que v. Además tampoco podrá ser mayor que v. Veamos por qué: supongamos que existe p** tal que:

$$E(p^{**}, q) > v \qquad \forall \ q. \qquad (1.9)$$

Particularmente:

$$E(p^{**}, q) > v \qquad (1.10)$$

Lo que contradice la desigualdad derecha de la ecuación 1.1, que requiere que:

$$E(p^{**}, \bar{q}) \leq v \qquad (1.11)$$

Así, lo mejor que puede hacer el jugador uno es elegir una estrategia tal que impida que el pago esperado sea menor a v, y si el jugador dos elige la estrategia q*, entonces por la desigualdad (1.3) se tiene que:

$$v \geq E(p, \bar{q}) \qquad \forall \ p \qquad (1.12)$$

Esto garantiza que el pago para el jugador uno nunca será mayor que v, si el jugador dos juega $\bar{q}$, mientras que el jugador dos no espera obtener un pago menor que v, si el jugador uno utiliza la estrategia $\bar{p}$.

De lo anterior se define que:
1) $\bar{p}$ es la denominada estrategia óptima del jugador uno.
2) $\bar{q}$ es la denominada estrategia óptima del jugador dos.
3) v es el valor del juego.

Se llama "valor del juego" para un jugador al pago tiene garantizado puede recibir de un juego si toma una decisión racional, independientemente de las decisiones que tomen los demás jugadores.

En el caso de un juego en que la mejor opción para cada uno de los jugadores es una estrategia pura este valor es totalmente conocido y seguramente alcanzable, mientras que en caso de estrategias mixtas el resultado será el valor que se obtenga del producto de la probabilidad de cada que cada uno de los jugadores utilice una estrategia en particular y la matriz de pagos respectiva pAq o pBq, es decir la esperanza matemática de los pagos y probabilidades determinados en el juego.

Por ejemplo, supongamos que en el juego de los industriales arriba descrito, ambos jugadores tienen una probabilidad de ofrecer un precio alto de $\frac{3}{4}$, por lo tanto, según las ecuaciones 1.3 y 1.4 tienen una probabilidad de $\frac{1}{4}$ de elegir un precio bajo, por lo que pBq tiene la siguiente forma:

$$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\begin{bmatrix}\left(\frac{\pi_{A1}}{2},\frac{\pi_{A2}}{2}\right) & (0,\pi_{B2}) \\ (\pi_{B1},0) & \left(\frac{\pi_{B1}}{2},\frac{\pi_{B2}}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Figura 1.9 pBq del juego de los industriales

Por lo que derivado de lo anterior, el valor del juego para el jugador uno[8] es:

$$v_1=\frac{3}{4}*\frac{\pi_{A1}}{2}*\frac{3}{4}+0+\frac{1}{4}*\pi_{B1}*\frac{3}{4}+\frac{1}{4}*\frac{\pi_{B1}}{2}*\frac{1}{4}=\frac{1}{32}\left[9\pi_{A1}+7\pi_{B1}\right] \quad (1.5)$$

y para el jugador dos:

$$v_2=\frac{3}{4}*\frac{\pi_{A2}}{2}*\frac{3}{4}+\frac{1}{4}*\pi_{B2}*\frac{3}{4}+0+\frac{1}{4}*\frac{\pi_{B2}}{2}*\frac{1}{4}=\frac{1}{32}\left[9\pi_{A2}+7\pi_{B2}\right] \quad (1.6)$$

Formalmente v es el valor de un juego finito y estrictamente competitivo G si, y solo si, el jugador uno puede forzar un resultado en el conjunto $G_v = \{u: u \geq_1 v\}$ y el jugador dos puede forzar un resultado en el conjunto $L_v = \{u: u \geq_2 v\}$.

COROLARIO.- Todos los juegos finitos, estrictamente competitivos, de información perfecta y sin jugadas de azar tienen un valor.

Se define un ***punto silla*** (s,t) de la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo cuando para el jugador 1 el mejor resultado de que 2 obtenga t es s.

COROLARIO.- La forma estratégica de un juego finito, estrictamente competitivo, de información perfecta y sin jugadas de azar, tiene un punto silla (s,t)

[8] Este juego se repite n periodos en el tiempo, pues es el tiempo durante el cual se encuentra activa una empresa

1.2 EQUILIBRIO DE NASH EN JUEGOS NO COOPERATIVOS

Un resultado (s,t) es un equilibrio de Nash si s es el mejor resultado para uno, que sabe que dos escogerá t, y t es el mejor resultado para dos, quien sabe que uno escogerá s, así que el equilibrio de Nash es la mejor respuesta para los participantes de un juego racional.

Cada una de las tiradas (s,t) deben de ser respuestas *óptimas* y *recíprocas* entre *sí* para ser un equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash se basa principalmente en la suposición de que los jugadores analizan cuales serían las tiradas del otro jugador partiendo del principio de que éste juega racionalmente, o sea que piensan que el jugador uno elige sus jugadas pensando cuales son las tiradas del jugador dos, suponiendo que dos elige pensando que uno juega racionalmente.

De eso se desprende que estas decisiones se basan principalmente en expectativas racionales y óptimas, las que en juegos de información perfecta y sin jugadas de azar son fácilmente identificables, mientras que en los juegos azarosos o de información imperfecta, en el que los participantes no cuentan con toda la información del juego, las tiradas de los otros jugadores tendrán que ser estimadas mediante el uso de herramientas de probabilidad y estadística.

Surge entonces la interrogante de si puede existir en un solo juego más de un equilibrio de Nash o si éste tiene que ser único, aunque el comportamiento de la no unicidad varia de *acuerdo al tipo de juego: en los juegos estrictamente competitivos* y de estrategias puras, (s,t) es un equilibrio de Nash si y sólo si (s,t) le asegura un resultado en cualquier subjuego a cada uno de los jugadores no inferior a v. Es decir, si tenemos que los jugadores tienen dos equilibrios (s,t) y (s',t'), el jugador 1 no debe de tener ningún problema entre elegir entre s o s', ya que sin importar si el jugador dos elige t o t', el pago será igualmente bueno; en el caso de los juegos en los que intervienen estrategias mixtas, anteriormente se demostró que sólo existen un par de puntos $(\bar{p},\bar{q})$ que son las estrategias *óptimas* para los jugadores.

En el caso de los juegos en los que existe algún tipo de cooperación, esta condición no se cumple, por lo que estos equilibrios deben de ser analizados cuidadosamente, pues a pesar de que desde el punto de vista teórico estos son igualmente buenos, el resultado práctico dependerá de las condiciones de cada juego.

El equilibrio de Nash puede variar en un juego con las mismas características si los jugadores cooperan o no, sea por ejemplo el juego de los industriales que hemos venido trabajando, en el que, bajo el supuesto de que los industriales no cooperan en el momento en el que deciden cual estrategia elegir, el equilibrio de Nash es un par de *estrategias que generan un ingreso de cero para cada uno de los participantes, mientras* que en el caso de que los industriales decidan cooperar unos con otros, podrán elevar sus ingresos, y en casos muy específicos mantener el precio de monopolio.

Otro es el caso de la recaudación de impuestos, en el que, si la recaudación se considera como un pago oneroso que recae solo sobre ciertos sectores de la población y de la que simultáneamente la sociedad no se considera beneficiada, los contribuyentes no pagarán; es decir, evadirán impuesto, por lo que la recaudación disminuirá, generando con ello problemas económicos que si se mantienen por muchos años, tendrán como consecuencia crisis económicas tal como la que vivió Argentina a finales del año 2001. En este caso, un equilibrio de Nash de juego no cooperativo será que el gobierno eleve las tasas impositivas, y la población busque cada vez con más ahínco como no pagar sus impuestos.

Pero en el caso en el que el gobierno coopera estableciendo cuotas justas y sistemas de recaudación eficientes, como el caso de Suiza y de Estados Unidos, entre otros, en los que la población está dispuesta a pagar, es decir que si la sociedad sabe que lo que paga será benéfico para ellos mismos entonces pagará, siendo este otro equilibrio de Nash.

Igualmente sucede en el caso en el que ya se presentó la evasión, y ahora el gobierno busca desarrollar medidas que le permitan recuperar parte de lo no pagado. Nuevamente, una solución es no cooperar; entonces, tratarán de implementar mecanismos muy duros tales como multas muy altas o encarcelamiento, pero si el sistema es ineficiente para recaudar, difícilmente podrá recuperar todo lo que se ha evadido. En cambio, si se desarrolla un sistema que permita recaudar lo no pagado en forma que la población coopere, entonces se elevan los ingresos. Tal es el caso del programa cuenta nueva y borrón que se instauró en México en el año 2001, y que ha permitido que éste sea uno de los años con el índice más alto de recuperación, este tipo de mecanismos y el equilibrio de Nash se detallarán más adelante.

Un caso del juego más sencillo, pero que nos permite ver como la cooperación tiene mejores consecuencias, es el caso de un caos vial, en el que todos quieren pasar al mismo tiempo sin importar si el que viene en otro sentido pasa o no. En este caso, si todos cooperan y van permitiendo que pasen algunos automóviles, y a su vez otros automovilistas los dejan pasar a ellos evitando un problema mayor, reduciendo con ello la contaminación, el ruido y el estrés. Más adelante, en este mismo capitulo, ahondaremos un poco más en el equilibrio de Nash en juegos cooperativos, demostrando el teorema que sirvió como base para que en el año de 1994 John Nash recibiera el Premio Nóbel de economía.

1.3 RESOLVIENDO EL JUEGO

Hasta ahora hemos definido las características de estos puntos y la utilidad de encontrarlos. A continuación se definirán formas analíticas que permiten en forma sencilla el hallar estas soluciones. Primero, cuando los participantes utilizan estrategias puras, para después desarrollar el caso donde se juegan estrategias mixtas.

1.3.1 Eliminación de estrategias o dominancia

Decimos que la estrategia s_1 domina fuertemente a la estrategia s_2 cuando:

$s_{1_j} > s_{2_j}$ $\quad\forall\ j$ *donde j es cada una de las columnas de la matriz de pagos.*

Esto significa que los pagos que recibe el jugador uno por utilizar la estrategia s_1, son mayores que los pagos que recibe por jugar con la estrategia s_2 sin importar que estrategia utilice dos.

Análogamente, para el jugador dos t_1 domina fuertemente a la estrategia t_2 cuando:

$t_{i1} > t_{i2}$ $\forall$ i donde i es cada una de las filas de la matriz de pagos.

Que no es más que decir que el jugador dos recibe mejores pagos al utilizar la estrategia t_1 *en comparación con* t_2.

En una matriz de pagos de suma cero se dice que la estrategia s_1 del jugador uno domina débilmente a la estrategia s_2 cuando y la estrategia t_1 del jugador dos domina a t_2 cuando se cumple que:

$s_{1j} \geq s_{2j}$ ó $t_{i1} \leq t_{i2}$

Sea por ejemplo la siguiente matriz de pagos. Hallemos entonces el equilibrio de Nash utilizando el método de eliminación de estrategias:

$$\begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 & -6 & -6 \\ -19 & 17 & -20 & -17 & 19 \\ -1 & -5 & -19 & -14 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -11 & -7 & -19 & -7 & -17 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1.10 Matriz de pagos de un juego de suma cero

Iniciemos observando que el jugador uno tiene estrategias dominantes, ya que c_4 domina a c_5 pues cada una de las entradas de la matriz que representa la estrategia c_4, es mayor *que las entradas de la estrategia* c_5, *veamos:*

$1 > -11, \quad 1 > -7, \quad 0 > -19, \quad 2 > -7, \quad 5 > -17;$ (1.11)

Por lo que se puede eliminar la estrategia c_5, por lo que la nueva matriz de pagos tendrá la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 & -6 & -6 \\ -19 & 17 & -20 & -17 & 19 \\ -1 & -5 & -19 & -14 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1.11 Matriz de pagos una vez que se eliminó la estrategia c_5

Siguiendo el mismo razonamiento se observa que c_4 domina a c_3 y a c_1, obteniendo la matriz siguiente:

$$
\begin{array}{c} \\ c_2 \\ c_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -19 & 17 & -20 & -17 & 19 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Figura 1.12 Matriz de pagos una vez que se eliminaron las estrategias c_3 y c_1

Como se puede observar en la matriz de la figura 1.12, ya no existen estrategias dominantes para el jugador uno, pero si las hay para el jugador dos.

En este caso la estrategia d_3 domina a la estrategia d_5 ya que se cumple que:
19 > -20 y simultáneamente 5 > 0 obteniendo la siguiente matriz de juego.

$$
\begin{array}{c} \\ c_2 \\ c_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -19 & 17 & -20 & -17 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Figura 1.13 Matriz de pagos una vez que se eliminó la estrategia d_5

Utilizando el mismo criterio, se eliminan d_2 y d_4, que son dominadas por d_3, obteniendo la siguiente matriz de pagos:

$$
\begin{array}{c} \\ c_2 \\ c_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -19 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Figura 1.14 Matriz de pagos una vez que se eliminaron las estrategias d_1 y d_2

Ahora bien, en esta nueva matriz de pagos, existe nuevamente una estrategia dominante para el jugador uno ya que c_4 domina a c_2, por lo que la estrategia óptima para el jugador uno es c_4; en ese caso la estrategia óptima para el jugador dos es d_3, por lo que se deduce que el punto silla o equilibrio de Nash para este juego consiste en las estrategias puras (c_4, d_3), pues cada una de estas estrategias es la mejor respuesta de los jugadores a la tirada de su contrincante, siendo el valor del juego para ambos jugadores cero.

$$
\begin{array}{c} \\ c_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Figura 1.15 Equilibrio de Nash

1.3.2 Minimax

Otro algoritmo que resulta de gran utilidad para encontrar la estrategia óptima de los participantes en un juego es el conocido como minimax, mismo que en el caso de los jugadores que utilizan estrategias puras se describe como sigue:

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\
\hline
c_2 & -19 & 17 & -20 & -17 & 19 \\
c_4 & 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 1.12 Matriz de pagos una vez que se eliminaron las estrategias c_3 y c_1

Como se puede observar en la matriz de la figura 1.12, *ya no* existen estrategias dominantes para el jugador uno, pero si las hay para el jugador dos.

En este caso la estrategia d_3 domina a la estrategia d_5 ya que se cumple que: $19 > -20$ y simultáneamente $5 > 0$ obteniendo la siguiente matriz de juego.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\
\hline
c_2 & -19 & 17 & -20 & -17 \\
c_4 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 1.13 Matriz de pagos una vez que se eliminó la estrategia d_5

Utilizando el mismo criterio, se eliminan d_2 y d_4, que son dominadas por d_3, obteniendo la siguiente matriz de pagos:

$$
\begin{array}{c|cc|}
 & d_1 & d_3 \\
\hline
c_2 & -19 & -20 \\
c_4 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 1.14 Matriz de pagos una vez que se eliminaron las estrategias d_1 y d_2

Ahora bien, en esta nueva matriz de pagos, existe nuevamente una estrategia dominante para el jugador uno ya que c_4 domina a c_2, por lo que la estrategia óptima para el jugador uno es c_4; en ese caso la estrategia óptima para el jugador dos es d_3, por lo que se deduce que el punto silla o equilibrio de Nash para este juego consiste en las estrategias puras (c_4, d_3), pues cada una de estas estrategias es la mejor respuesta de los jugadores a la tirada de su contrincante, siendo el valor del juego para ambos jugadores cero.

$$
\begin{array}{c|cc|}
 & d_1 & d_3 \\
\hline
c_4 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 1.15 Equilibrio de Nash

1.3.2 Minimax

Otro algoritmo que resulta de gran utilidad para encontrar la estrategia óptima de los participantes en un juego es el conocido como minimax, mismo que en el caso de los jugadores que utilizan estrategias puras se describe como sigue:

Sea S el conjunto de filas de una matriz de suma cero, sea T el conjunto de columnas, entonces el minimax se define como:

$$\overline{m} = \min_{s \in S} \max_{t \in T} \pi(s,t), \tag{1.12}$$

$$m = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s,t), \tag{1.13}$$

El principio del minimax supone que el jugador dos sabe que el jugador uno deberá de escoger la estrategia que maximiza su ganancia, y entonces buscar perder lo menos posible.

Análogamente para el maximin el jugador uno supone que el jugador dos buscará maximizar su beneficio escogiendo la estrategia que le genera la menor de las pérdidas, entonces tratará de maximizar su propio beneficio a partir del razonamiento de dos, de estos razonamientos se deducen los siguientes teoremas:

Teorema 1.2: $m \leq m$

DEMOSTRACIÓN:

Para todo $t \in T \min_{t \in T} \pi(s,t) \leq \pi(s,t)$
Entonces claramente:

$$\max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s,t) \leq \max \pi(s,t). \tag{1.14}$$

El punto en el que el minimax = maximin es un punto silla, es decir, es el punto que es el mayor de su columna y el menor de su fila, el punto (σ,τ) es un punto silla cuando se cumple que:

$$\pi(\sigma,t) \geq (\sigma,\tau) \geq (s,\tau). \tag{1.15}$$

De lo anterior se deduce el siguiente teorema:

Teorema 1.3: Una condición suficiente para que (σ,τ) sea un punto silla es que estando definidos ambos puntos como las siguientes ecuaciones:

$$\min_{t \in T} \pi(\sigma,t) = \max \min \pi(s,t) = m. \tag{1.16}$$

$$\max_{s \in S} \pi(s,\tau) = \min \max \pi(s,t) = \overline{m}. \tag{1.17}$$

y que $m = m$. Cuando (σ,τ) es un punto silla $\overline{m} = (\sigma,\tau) = m$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que (σ,τ) es un punto silla, entonces deben de cumplir que:

$$\pi(\sigma,t) \geq (\sigma,\tau) \geq (s,\tau) \qquad \forall \text{ s de S y t de T}, \tag{1.18}$$

lo que implica que:

$$\min_{t\in T}\pi(\sigma,t)\geq \pi(\sigma,\tau)\geq \text{máx}\,\pi(s,\tau) \tag{1.19}$$

de aquí:

$$\begin{aligned} m = \text{máx}_{\sigma\in S}\text{mín}_{t\in T}\pi(\sigma,t) \geq \text{mín}_{t\in T}\pi(\sigma,t) \geq \\ \geq \text{máx}_{s\in S}\pi(s,\tau) \geq \text{mín}_{t\in T}\text{máx}_{s\in S}\pi(s,\tau) = \bar{m} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Pero el teorema 1.2 afirma que $m \leq \bar{m}$. Así pues todos los signos de la desigualdad anterior deben de ser cambiados por el signo de =.

Supongamos ahora que $m = \bar{m}$. Se debe demostrar que existe un punto silla $\pi(\sigma,\tau)$. Escojamos σ y τ que satisfagan las condiciones 1.18 y 1.19. Entonces dados cualesquiera s de S y t de T,

$$\pi(\sigma,t) \geq \min_{t\in T}\pi(\sigma,t) = m = \bar{m} = \text{máx}_{s\in S}\,\pi(s,\tau) \geq \pi(s,\tau). \tag{1.21}$$

Tomando $s=\sigma$ y $t = \tau$ en esta desigualdad demostramos que $m = \pi(\sigma,\tau) = \bar{m}$. Luego se satisface el requisito de punto silla para (σ,τ).

Ahora estudiemos el caso en el que se desarrollan estrategias mixtas destacando que el desarrollo del minimax y maximin es muy similar al de los teoremas demostrados con anterioridad, definiéndolos como:

$$v = \min_{q\in Q}\max_{p\in P}\pi(p,q) = \text{máx}\,\pi(p,\bar{q}), \tag{1.22}$$

y

$$v = \max_{p\in P}\min_{q\in Q}\pi(p,q) = \min\pi(\bar{p},q). \tag{1.23}$$

Donde $\bar{p}$ es la estrategia mixta p de P en la que se cumple que el $min\ \pi(p,q)$ es mayor y $\bar{q}$ es la estrategia mixta q de Q por la cual $máx\pi(p,q)$ es menor.

Un punto *silla en el caso de un* juego de estrategias mixtas es a que un par de estrategias que se cumplen revelan que:

$$\pi(\bar{p},q) \geq \pi(\bar{p},\bar{q}) \geq \pi(p,\bar{q}) \qquad \forall p \in P, q \in Q, \tag{1.24}$$

Análogamente al caso de estrategias puras los siguientes teoremas se demuestran siguiendo las mismas premisas y llegando a los mismos resultados:

Teorema 1.4: $\underline{v} \leq \bar{v}$

Teorema 1.5: Una condición suficiente para que (σ,τ) sea un punto silla es que $\bar{p}$ y $\bar{q}$ estén definidos por:

$$\min_{q\in Q} \pi(\bar{p},q) = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} \pi(p,q) = \underline{v}\,, \tag{1.25}$$

$$\max_{p\in P} \pi(p,\bar{q}) = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} \pi(p,q) = \bar{v}\,. \tag{1.26}$$

y que $\bar{v} = \underline{v}$. Cuando $(\bar{p},\bar{q})$ es un punto silla $\bar{v} = (\bar{p},\bar{q}) = \underline{v}$

Una vez alcanzado este punto se tienen los conocimientos teóricos suficientes para demostrar el teorema del minimax enunciado por Von Neumann, siendo éste uno de los resultados más importantes en el desarrollo de la Teoría de Juegos

Teorema 1.6: $\underline{v} = \bar{v}$

DEMOSTRACIÓN

Por el Teorema $\underline{v} \leq \bar{v}$; la demostración del teorema consiste en mostrar que si $\underline{v} < \bar{v}$ entonces los conjuntos de estrategias P y Q se pueden sustituir por $\Phi \neq P' \subseteq P$ y $\Phi \neq Q' \subseteq Q$ y P' y Q' convexos; uno de los cuales es estrictamente menor, sin que esto haga menor la diferencia $\bar{v} - \underline{v}$. Esto es; $\bar{v}' - \underline{v}' \geq \bar{v} - \underline{v}$. Entonces se puede hacer lo mismo con P' y Q' y así sucesivamente.

Tenemos que el menor conjunto no vacío contiene sólo un punto. Si el teorema del minimax es falso para una matriz de $j \times k$, en particular lo es para una de 1×1 en donde el valor minimax y el maximín son el mismo; así suponer que $\underline{v} < \bar{v}$ lleva a una contradicción y por tanto se cumple el teorema.

Si $\underline{v} < \bar{v}$, entonces $\underline{v} < \Pi(\bar{p},\bar{q})$ o $\underline{v} > \Pi(\bar{p},\bar{q})$. Supongamos cierta la primera desigualdad, si se cumple la segunda, un razonamiento análogo muestra que P se hace más pequeño.

Sea Q' el conjunto convexo formado por todos los $q \in Q$ tales que:

$$\Pi(\bar{p},q) \leq \underline{v} + \varepsilon\,, \tag{1.29}$$

y $0 < \varepsilon < \Pi(\bar{p},\bar{q}) - \underline{v}$. $Q' \subset Q$ pues $q \notin Q'$. Sea $P = P'$; definimos $\bar{p}' \in P'$ y $\bar{q}' \in Q'$ como fueron definidas $\bar{p} \in P$ y $\bar{q} \in Q$. Consideremos las combinaciones convexas $\hat{p} = \alpha\bar{p} + \beta\bar{p}$ y $\hat{q} = \alpha\bar{q} + \beta\bar{q}$; se tiene:

$$\bar{v} = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} \Pi(p,q) \leq \max_{p\in P} \Pi(p,\hat{q})$$

$$= \max_{p\in P} \{\alpha\Pi(p,\bar{q}) + \beta\Pi(p,\bar{q}')\}$$

$$\leq \alpha \max_{p\in P} \Pi(p,\bar{q}) + \beta \max_{p\in P} \Pi(p,\bar{q}')$$

$$= \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}'\,. \tag{1.30}$$

Ahora una desigualdad para $\underline{v}$. Pero antes veamos que:

$$\min_{q\in Q'} \Pi(\hat{p},q) \geq \alpha \min_{q\in Q'} \Pi(\tilde{p},q) + \beta \min_{q\in Q'} \Pi(\tilde{p}',q)$$

$$\geq \alpha \min_{q\in Q} \Pi(\tilde{p},q) + \beta \min_{q\in Q} \Pi(\tilde{p}',q)$$

$$\geq \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}', \qquad (1.31)$$

también;

$$\inf_{q\in Q'} \Pi(\hat{p},q) \geq \alpha \inf_{q\in Q'} \Pi(\tilde{p},q) + \beta \inf_{q\in Q'} \Pi(\tilde{p}',q)$$

$$\geq \alpha(\underline{v} + \varepsilon) + \beta c, \qquad (1.32)$$

con $c = \inf_{q\in Q'} \Pi(\tilde{p}',q)$.

Necesitamos que (1.31) < (1.32). Elijamos $\alpha = 1 - \beta$ y β cuidadosamente. Sí $\beta \neq 0$ es muy pequeño (3) se aproxima a $\underline{v}$ tanto como β sea pequeño; del mismo modo podemos aproximar a

$$\underline{v} + \varepsilon .$$

$$\underline{v} = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} \Pi(p,q) \geq \min_{q\in Q} \Pi(\hat{p},q)$$

$$= \min_{q\in Q} \left\{ \min_{q\in Q'} \Pi(\hat{p},q), \inf_{q\in Q'} \Pi(\hat{p},q) \right\}$$

$$\geq \min \left\{ \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}', \alpha(\underline{v} + \varepsilon) \beta c \right\}$$

$$= \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}' \qquad (1.33)$$

Multiplicando 1.33 por (-1) y sumándole 1.30 tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{v} - \underline{v} &\leq (\alpha \bar{v} - \alpha \underline{v}) + \left(\beta \bar{v}' - \beta \underline{v}' \right) \\ &= \alpha(\bar{v} - \underline{v}) + \beta\left(\bar{v}' - \underline{v}' \right) \\ &= (1 - \beta)(\bar{v} - \underline{v}) + \beta\left(\bar{v}' - \underline{v}' \right) \qquad (1.34) \\ &= (\bar{v} - \underline{v}) - \beta(\bar{v} - \underline{v}) + \beta\left(\bar{v}' - \underline{v}' \right) \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}(\bar{v}-v)-(\bar{v}-v) &\leq -\beta(\bar{v}-v)+\beta\left(\bar{v}'-v'\right)\\ \Rightarrow \beta(\bar{v}-v) &\leq \beta\left(\bar{v}'-v'\right)\\ \therefore (\bar{v}-v) &\leq \left(\bar{v}'-v'\right)\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}-v &\leq (\alpha\bar{v}-\alpha v)+\left(\beta\bar{v}'-\beta v'\right)\\ &= \alpha(\bar{v}-v)+\beta\left(\bar{v}'-v'\right)\\ &= (1-\beta)(\bar{v}-v)+\beta\left(\bar{v}'-v'\right)\\ &= (\bar{v}-v)-\beta(\bar{v}-v)+\beta\left(\bar{v}'-v'\right)\end{aligned} \tag{1.36}$$

Luego $\bar{v}-v \leq v'-v'$, que es lo que queríamos demostrar.

1.4 JUEGOS COOPERATIVOS

Hasta ahora se han analizado únicamente casos en la que los jugadores participan en juegos cuyas características los definen como no cooperativos, pero ahora veremos el caso de los juegos en los que los jugadores participan en juegos cooperativos.

Para ello iniciemos definiendo:

REGIONES DE BENEFICIO COOPERATIVO.- Se conoce como una región de pagos cooperativos de un juego al conjunto de pagos que se pueden conseguir mediante un acuerdo que obliga a los jugadores sobre las estrategias que deberán utilizar.

La región de pagos forma una cerradura convexa de todos los pagos que forman parte del juego, para asi poder obtener cualquiera de los pagos que se encuentran contenidos en esa región, utilizando la loteria[9] adecuada para conseguir ese pago.

Si al firmar contratos los jugadores no disponen de otros recursos, entonces la región convexa es la región de pagos cooperativos del juego.

La región de beneficio del juego de los industriales se representa en la siguiente figura:

[9] Una loteria es el producto pAq, donde para conseguir cualquiera de los pagos contenidos en la región de beneficios se deben considerar el vector p y q adecuados.

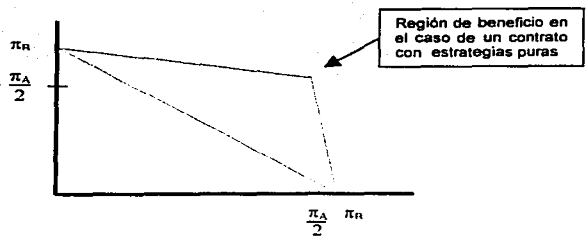

Figura 1.16 Región de Pagos del juego de los industriales

Si en los contratos se especifica que se van a utilizar estrategias puras, la región de beneficio será un punto; en el caso de éste juego, los tratos especifican estrategias puras, *es decir, cada uno fija el precio alto por lo que la región de beneficio es el punto* $\left(\frac{\pi_{A1}}{2}, \frac{\pi_{A2}}{2}\right)$

ELIMINACION LIBRE.- Una posibilidad que no se puede descartar lógicamente es aquella en la que los jugadores deciden deshacerse de dinero en cualquier momento durante el juego. Cuando se acepta esta posibilidad los economistas dicen que se acepta la *eliminación libre.*

UTILIDAD TRANSFERIBLE.- Cuando en la reglas del juego se especifica que se pueden transferir útiles de un jugador a otro al terminar el juego, aun que los útiles no sean objetos reales que se puedan transferir físicamente, solo en casos muy especiales se puede dar esta transferibilidad de la utilidad. El caso más notable es aquel en el que los *jugadores son neutrales al riesgo y sus escalas de utilidad han sido escogidos de tal* forma que la utilidad que reciben por una cantidad de dinero x es simplemente $u(x) = x$, es decir se trata de una transferencia uno a uno.

EFICIENCIA PARETO.- Matemáticamente un punto es Pareto-eficiente cuando se cumple que:

$$y > x \Rightarrow y \notin X \qquad (1.37)$$

Donde X es el conjunto en el que se encuentran las utilidades del jugador.

Es decir x es un punto Pareto-eficiente en X si de existir un punto y que sea al menos tan preferido como *x* entonces *y* no pertenece a X.

RACIONALIDAD INDIVIDUAL.- Un acuerdo es racionalmente individual cuando asigna a los jugadores una utilidad mayor o igual a la que obtendrían de no existir ningún acuerdo.

En este trabajo supondremos que en el conjunto X existe un punto de desacuerdo que nombraremos como d.

En este punto se interpreta que si los jugadores son incapaces de ponerse de acuerdo, entonces el jugador uno recibirá el pago d_1 y el jugador 2 el pago d_2.

Un par de pagos corresponden a un contrato individualmente racional si, y sólo si, estos pagos son mayores que el punto de desacuerdo.

Más adelante se verá que, en el caso de los industriales, cuando éstos llegan al acuerdo de cooperar, sus ganancias son mucho mayores a las de no cooperar, pues si deciden competir, entonces su ganancia es igual a cero. De acuerdo a lo anterior el punto de desacuerdo es cero.

EL CONJUNTO DE NEGOCIACIÓN.- El conjunto de todos los pagos individualmente racionales y Pareto-eficientes en la región de pagos cooperativos X se le llama conjunto de negociación.

En el caso del juego del la figura 1.17 el conjunto de negociación se muestra a continuación:

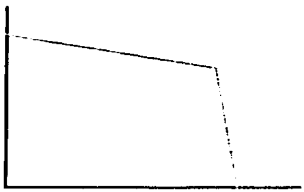

Figura 1.17 Conjunto de Negociación del juego de los industriales

Von Neumann y Morgenstern sugirieron que un jugador racional no firmaría un contrato que *no fuese individualmente racional*, pues en este caso al menos uno de los jugadores preferirá estar en desacuerdo y obtener el pago del desacuerdo. Por ejemplo, en el caso de los industriales, supongamos que deciden negociar y en esta forma llegar a un acuerdo; durante de la negociación, sucede que el precio al que se propone ofrecer el bien representa para varias empresas operar con pérdidas; entonces, los administradores de éstas empresas preferirán no tener ganancias y obtener como beneficio cero, que es el punto de desacuerdo.

Para aplicar la teoría del equilibrio de Nash es necesario traducir esta situación en términos de utilidades usando las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de los jugadores.

UTILIDAD.- Cada uno de los jugadores obtiene una ganancia o pérdida al finalizar el juego o durante el desarrollo del mismo en los juegos que se repiten indefinidamente, como es el caso de los que se estudiarán en el siguiente capítulo, este pago es la utilidad del juego, y es precisamente el como percibe esta lo que gana cada uno de los jugadores, lo que propicia las estrategias o la participación misma de los jugadores.

Una función de utilidad se define como las medidas que reflejan los pagos que esperan recibir los jugadores al concluir la partida y que se relaciona directamente con la estrategia que desarrollará cada uno de los jugadores en pos de obtener el mejor resultado.

Por ejemplo: la utilidad en los juegos biológicos se mide de acuerdo a la cantidad de individuos, genes o mutaciones que, al finalizar el juego, incrementan o decrementan los individuos que conforman el conjunto inicial.

En el caso de los juegos sociales o políticos, las ganancias se encuentran salpicadas por contextos psicológicos que tratan de expresarse mediante escalas numéricas; con relación al triunfo, tal es el caso de las elecciones gubernamentales, en las que la percepción de los ciudadanos puede llevar a un partido político a afianzar o debilitar su posición política en un país.

Mientras que en el caso del desarrollo informático, la ganancia del juego radica en la optimización de los procesos, el tiempo de respuesta y la calidad de los resultados obtenidos.

En base a su reacción frente al riesgo, los individuos tienen diferentes tipos de funciones de utilidad, que a continuación se describen:

ADVERSO AL RIESGO.- Es aquel jugador que preferirá una ganancia segura sobre una lotería, una persona adversa al riesgo que preferirá no participar en una lotería que no tenga el mismo valor que un evento seguro.

La función de utilidad de un adverso al riesgo es una gráfica convexa como la siguiente:

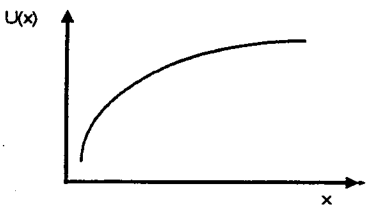

Figura 1.18 función de utilidad individuo adverso al riesgo

Por ejemplo, cuando por una inversión un poco riesgosa una persona con un capital x recibe una tasa de interés del 12%, mientras que si invierte en el banco recibirá como pago de intereses tan solo el 9.5%, el jugador adverso al riesgo preferirá invertir su dinero en el banco por la seguridad que éste representa.

Es decir, es aquel que prefiere ir siempre a la segura.

ADICTO AL RIESGO.- Es el jugador que preferirá participar y arriesgarse a tomar una lotería, aun cuando la utilidad recibida no compense el riesgo de perdida que corre durante el desarrollo del juego.

La función de utilidad de un adicto al riesgo se ve como sigue:

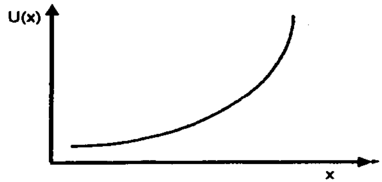

Figura 1.19 función de utilidad individuo adicto al riesgo

Un ejemplo de un jugador adicto es aquel que cuando se establece una lotería sobre un partido de fútbol apuesta a favor del equipo cuya probabilidad de ganar es menor, otro es el caso del evasor que, aun sabiendo que la probabilidad de ser detectado es alta, decide no pagar impuestos y en esta forma burlar al fisco, sin importar que de ser detectado tendrá que pagar mucho dinero en multas, actualizaciones y recargos.

NEUTRAL AL RIESGO.- Se dice que un individuo es neutral al riesgo cuando es indiferente entre participar en una lotería o no, siempre y cuando ambas le reporten la misma utilidad esperada.

La función de utilidad de un neutral al riesgo tiene la siguiente forma:

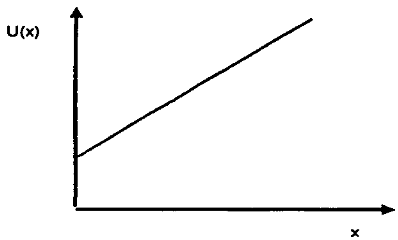

Figura 1.20 función de utilidad individuo neutral al riesgo

Un jugador es neutral al riesgo, cuando se decide por la tirada que le genera la mejor de las ganancias esperadas. Por ejemplo en el póquer, el jugador neutral al riesgo decidirá seguir participando en el juego si tiene una buena mano e incrementar su apuesta si considera que su juego le permitirá quedarse con la ganancia con una probabilidad bastante alta.

1.5 PROBLEMA DE NEGOCIACIÓN DE NASH

Matemáticamente un problema de negociación de Nash es un par (X,d) en el que X representa el conjunto de pares factibles[10] que es cerrado, convexo y acotado

[10] Un par factible es aquel resultado que puede ser elegido dentro del conjunto de resultados posibles.

superiormente, y d es el punto de desacuerdo. Adicionalmente, debe permitirse la eliminación libre. Al conjunto conformado por X y el punto de desacuerdo que cumple con las características antes mencionadas lo llamaremos B.

Una solución de negociación es una función F: $B \rightarrow R^2$, con la propiedad de que F(X,d) pertenece al conjunto X. F(X,d) se interpreta según como el par de jugadores racionales se pondrían de acuerdo y se enfrentarán al problema de negociación (X,d).

Definamos la función G: $B \rightarrow R^2$ tal que $s = \alpha r + \beta t$, donde s,r y t son puntos que pertenecen de la recta soporte de X en s, y $\alpha + \beta = 1$, esta función se conoce con el nombre de la solución de negociación de Nash generalizada , donde α y β se definen como los poderes de negociación de Nash.

Nash definió como solución regular el caso en el que $\alpha = \beta = ½$, pero finalmente α y β dependen de las características de negociador y del conjunto (X,d), pues puede suceder que en algunos casos el punto s tal que: $s = ½\, r + ½\, t$, no se encuentre en el conjunto, a continuación se muestran algunas representaciones gráficas del punto s, que es punto de acuerdo en un juego con unos poderes de negociación α y β, en la figura 1.18.

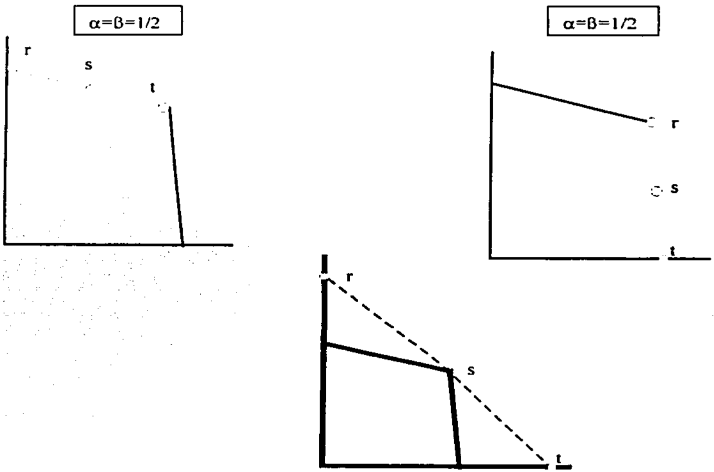

Figura 1.18 Solución de Nash para los poderes de negociación α y β

Igualmente Nash, definió las propiedades que debe de satisfacer un procedimiento racional para resolver problemas de negociación.

Axioma 1.1 Dadas cualesquiera transformaciones afínes estrictamente crecientes τ_1 y τ_2,

$$F(\tau(X), \tau(d)) = \tau(F(X, d)) \tag{1.38}$$

Es decir: el resultado final no debe depender de cómo están calibradas las funciones de utilidad de los jugadores.

Axioma 1.2

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & F(X,d) \geq d \\ \text{ii)} & y > F(X,d) \Rightarrow y \notin X \end{array} \tag{1.39}$$

Esto es, el pago acordado siempre deberá pertenecer al conjunto de negociación.

Axioma 1.3 Si $d \in Y \subseteq X$, entonces

$$F(X,d) \in Y \Rightarrow F(Y,d) = F(X,d) \tag{1.40}$$

Si los jugadores a veces se ponen de acuerdo en el par de pagos s cuando t es factible, entonces *nunca se ponen de acuerdo en* t *cuando* s *es factible.*

Cualquier solución de negociación de Nash generalizada debe de cumplir con los axiomas anteriores, adicionalmente ser única, lo que se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.7 (Nash). Si $G: B \rightarrow R^2$ satisface los axiomas 1.1, 1.2 y 1.3 entonces F es una solución de negociación de Nash generalizada para unos poderes de negociación α y β

DEMOSTRACIÓN

Supongamos el problema de negociación $(Z,0)$ ilustrado en la figura 1.22 (a). Sabemos por el axioma 2 que la solución $s' = (Z,0)$ se encuentra sobre el segmento que une a r' y t'.

Sean $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$, tales que,

$$s' = \alpha r' + \beta t'. \tag{1.41}$$

Consideremos ahora el problema de negociación típico (X,d) ilustrado en la figura 1.22 (c); y sea $G = (X,d)$ la solución de negociación de Nash generalizada para los poderes de negociación α y β. Entonces,

$$s = \alpha r + \beta t. \tag{1.42}$$

Por demostrar que

$$F = (X,d) = G = (X,d) \tag{1.43}$$

Cambiamos las escalas de utilidad de los jugadores uno y dos por medio de las transformaciones afínes estrictamente crecientes τ_1:R→R y τ_2:R→R; tales que $\tau_1(d_1)=0$ y $\tau_1(r_1)=1$ y $\tau_2(d_2)=0$ y $\tau_2(t_2)=1$. Entonces la función afín $\tau:R^2 \rightarrow R^2$ tiene la propiedad $\tau(d)=0$ y $\tau(r)=r'$ y $\tau(t)=t'$, como se muestra en la figura 1.22 (b). Ya que se trata de una función afín, la imagen de la recta que pasa por r, s y t es una recta soporte de la imagen del conjunto *X*; en particular $s'=\tau(s)$. Entonces por el axioma 1.1,

$$F(Z,0)=\tau(G(X,d)) \tag{1.44}$$

Ya que $X' \subseteq Z$ se tiene por el axioma 1.3 que $F(X',0)=F(Z,0)$. Como $\tau(d)=0$ y $\tau(X)=X'$ se sigue de 1.x que:

$$F(\tau(X),\tau(d))=\tau(G(X,d)) \tag{1.45}$$

así,

$$G(X,d)=\tau^{-1}(F(\tau(X),\tau(d))) \tag{1.46}$$

con τ^{-1} función inversa de τ.

Apliquemos el axioma 1.1 al lado derecho de la expresión, sólo que en vez de aplicar τ, aplicaremos τ^{-1}, ya que es la función que aplicamos en 1.46

$$G(X,d)=F\left(\tau^{-1}(\tau(X)),\tau^{-1}(\tau(d))\right)=F(X,d) \tag{1.47}$$

Como τ_i: R→R es una función estrictamente creciente, definida por $\tau(x) = A_i(X)+B_i$, con $0<A_i \in R$ y $B_i \in R$ como τ_i es una función estrictamente creciente, significa que $\forall x_i \in D_\tau$ y $\forall x_j \in D_\tau$, $x_i < x_j$, se tiene que $\tau_i(x_i)<\tau_i(x_j)$, ya que a elementos diferentes corresponden imágenes diferentes bajo la función, se tiene que τ_i es una función inyectiva.

Dado que τ_i es inyectiva de $\tau_i(x)=y=A_i(x)+B_i \Rightarrow x=\dfrac{y-B_i}{A_i}$, sabemos que x es única para cada y; por lo que podemos definir la función inversa de τ_i como $\tau_i^{-1}:R \rightarrow R$ definida por $\tau_i^{-1}(y)=\dfrac{y-B_i}{A_i}$.

La inversa de $\tau:R^2 \rightarrow R^2$ esta definida por $\tau^{-1}(x):(\tau_1^{-1}(x_1),\tau_2^{-1}(x_2))$.

Aplicando τ^{-1} por el axioma 1.1 al lado derecho de la expresión 1.46, tenemos que:

$$G(X,d)=F(\tau^{-1}(\tau(X)),\tau^{-1}(\tau(d)))=F(X,d). \tag{1.48}$$

Por lo tanto F es una solución de negociación de Nash generalizada para los poderes de negociación α y β.

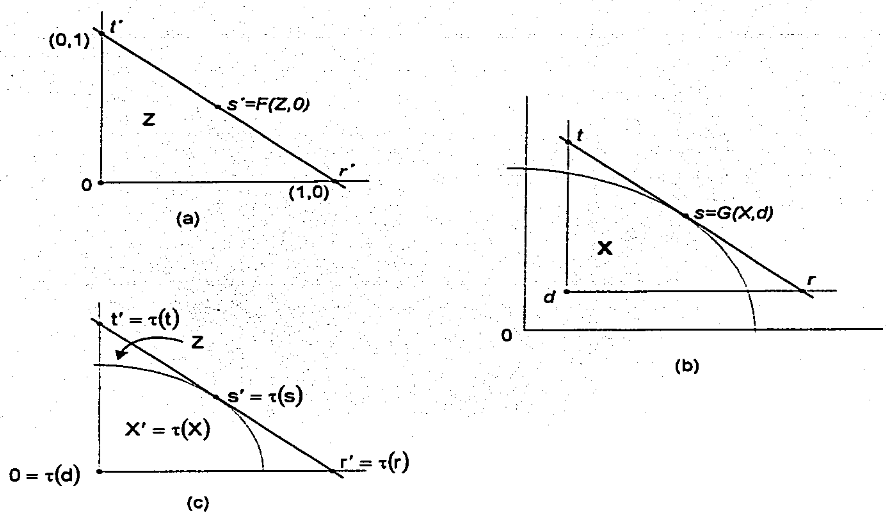

Figura 1.22 Maximizando los productos de Nash

1.6 TEOREMA DE NASH

Hasta ahora se han desarrollado los conceptos básicos que permiten entender la Teoría de Juegos, pero para el desarrollo de este trabajo, es fundamental estudiar el:

TEOREMA DE NASH.- Si se admiten estrategias mixtas, todo juego finito tiene por lo menos un equilibrio de Nash.

DEMOSTRACIÓN

Esta es una versión esquemática de la prueba para el caso de dos jugadores.

1.- Hay que comprobar que en el caso finito, las correspondencias de respuestas óptimas $R_2 : P \to Q$ y $R_1 ; Q \to P$ se comportan bien.

> 1°. Hay *que mostrar que los conjuntos de estrategias* P y Q *son convexos* y compactos. Sin perder generalidad sea P=Q=[0,1]; P es convexo ya se admiten estrategias mixtas y estas con combinaciones convexas de estrategias puras, es decir P es la cerradura convexa de las estrategias puras del jugador uno. Es cerrado ya que la cerradura convexa del conjunto de estrategias puras, con esto se asegura que P contiene todos los puntos frontera. Definamos $P_f = \{p \in P \text{ tal que p es un punto frontera de } P\}$, observemos que P_f acota al conjunto P. Ya *que* P *es cerrado y acotado entonces es compacto.*

2°. Tenemos que probar que la función de pagos de cada jugador debe ser continua. También debe de ser cóncava cuando las estrategias de los demás jugadores se mantienen constantes. Recordemos que las funciones de pagos $\pi_1(p,q)$ y $\pi_2(p,q)$ de los jugadores uno y dos respectivamente se pueden expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\pi_1(p,q) = p^T A q = [1-p, p]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-q \\ q \end{bmatrix} =$$
$$= (a_{11} - qa_{11} + qa_{12}) + p(a_{21} - a_{11} + qa_{11} - qa_{21} - qa_{12} + qa_{22})$$
1.49

$$\pi_1(p,q) = pB^T q = [1-p, p]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-q \\ q \end{bmatrix} =$$
$$= (b_{11} - pb_{11} + pb_{21}) + q(b_{12} - pb_{12} - pb_{21} - a_{11} - pa_{11} + pb_{22})$$
1.50

La expresión 1.49 ilustra que para cada valor fijo de q, $\pi_1(p,q)$ es una función afín de p; de manera similar la expresión 1.50 muestra que para cada valor fijo de p, $\pi_2(p,q)$ es una función afín de q. Pero las funciones afínes, no sólo son siempre continuas, además son cóncavas y convexas simultáneamente. Por lo tanto $R_2 : P \to Q$ y $R_1 ; Q \to P$ se comportan bien.

2. Hay que construir una correspondencia F: P x Q→ P x Q a la que se puede aplicar el teorema del punto fijo de Kakutani-Brouwer. Para cada $(p,q) \in P \times Q$, $F(p,q) \subseteq P \times Q$; más precisamente: $F(p,q) = R_1(q) \times R_2(p)$

3. Hay que deducir que F se comporta bien, pensando que esto es cierto para R_1 y R_2. Para que F se comporte bien, se deben satisfacer las siguientes propiedades cuando P x Q es un conjunto convexo y compacto. $P \times Q = [0,1]^2$ es convexo, ya que para cualquier par de puntos (p,q) y (p',q'), el segmento que los une esta en P x Q; es cerrado ya que por definición de producto cruz entre dos conjuntos P x Q contiene todos los puntos de la frontera. Y el conjunto P x Q está acotado por el conjunto de sus puntos frontera. Por lo tanto P x Q es compacto.

a) Para cada $(p,q) \in P \times Q$, $P \times Q \supseteq F(p,q) = R_1(q) \times R_2(q)$ es convexo y no vacio.
Es *no vacio porque para cada elección de* $p \in P$ *del jugador uno, el jugador dos* tiene su correspondiente respuesta óptima por lo menos un $p \in P$. Por tanto F(p,q) tiene al menos un elemento.

Es convexo ya que si el jugador uno es indiferente entre usar su estrategia pura $p_1 \in R_1(q)$ y su estrategia pura $p_2 \in R_1(q)$, también es indiferente en usar cualquier otra estrategia mixta $p_i \in R_1(q)$ donde $p_1 \le p_i \le p_2$, es decir p_i se encuentra en la cerradura convexa de p_1 y p_2, es decir $p_i \in \mathrm{conv}(\{p_1, p_2\})$. Esto hace que $R_1(q)$ sea convexo. Análogamente si dos es indiferente entre usar su estrategia pura

$q_1 \in R_2(q)$ y su estrategia pura $q_2 \in R_2(q)$ donde $q_1 \leq q_i \leq q_2$, es decir q_i se encuentra en la cerradura convexa de q_1 y q_2, $q_i \in conv(\{q_1, q_2\})$. Esto hace que $R_2(q)$ sea convexo. De esta manera $R_1(q)$ y $R_2(p)$ son subintervalos cerrados de P y Q. Entonces $R_1(q) \times R_2(p) = conv(\{(p_1,q_1),(p_2,q_1),(p_1,q_2),(p_2,q_2)\})$. Por lo tanto $R_1(q) \times R_2(p)$ es convexo. En el caso en que $R_1(q)$ ($R_2(p)$) constase de tan sólo un elemento y $R_2(p)$($R_1(q)$) de más de un elemento, entonces $R_1(q) \times R_2(p) = conv(\{(p, q_i) \text{ tal que } q_i \in R_2(p)\})$
$R_1(q) \times R_2(p) = conv(\{(p_i, q) \text{ tal que } p_i \in R_1(q)\})$. Por tanto $R_1(q) \times R_2(p)$ es un conjunto convexo. Y si $R_1(q)$ y $R_2(p)$ constasen de un sólo $p \in P$ y un sólo $q \in Q$, entonces $R_1(q) \times R_2(q) = (\{p, q\})$, que es convexo por vacuidad.

b) El grafo F: P x Q→ P x Q es un subconjunto cerrado P x Q.

En el caso en que $F(p,q) = R_1(q) \times R_2(p) = conv(\{(p_1,q_1),(p_2,q_1),(p_1,q_2),(p_2,q_2)\})$, este conjunto contiene todos sus puntos frontera por como está definido el producto cruz por tanto $F(p,q) \subseteq P \times Q$ es un conjunto cerrado.

Si $P \times Q \supseteq F(p,q) = R_1(q) \times R_2(p) = conv(\{(p_i, q) \text{ tal que } p_i \in R_1(q)\})$ o $P \times Q \supseteq F(p,q) = R_1(q) \times R_2(p) = conv(\{(p, q_i) \text{ tal que } q_i \in R_2(p)\})$; tales conjuntos son intervalos cerrados y éstos contienen sus puntos frontera, por lo que $F(p,q) \subseteq P \times Q$ es un conjunto cerrado P x Q.
Y si $P \times Q \supseteq F(p,q) = R_1(q) \times R_2(p) = (\{p, q\})$, este conjunto es cerrado ya que contiene su único punto frontera.

De a) y b) se concluye que F: P x Q→ P x Q se comporta bien.

4. Este paso consiste en aplicar el teorema de punto fijo de Kakutani[11]-Brouwer[12]; éste demuestra que existe un punto fijo (p^*,q^*) que satisface que:

$$(p^*,q^*) \in F(p^*,q^*) = R_1(q^*) \times R_2(p^*) \qquad 1.51$$

5. Finalmente observamos que (p^*q^*) es un equilibrio de Nash, ya que la estrategia mixta $p^* \in R_1(q^*)$ y la estrategia mixta $q^* \in R_2(p^*)$.

Esto es lo que se quería demostrar.

Este resultado ha sido utilizado en diferentes áreas del conocimiento humano, generando con esto una forma nueva de analizar los problemas desde un óptica diferente, que permite obtener resultados en áreas como la biología y la economía en forma sencilla y eficaz.

[11] Teorema de Kakutani:
Sea K un subconjunto convexo compacto de X un espacio topológico lineal localmente convexo; y sea G un grupo de mapeos lineales el cual es equicontinuo en K y tal que $G(K) \subseteq K$. Entonces ahí existe un punto $p \in K$ tal que $N(p)=p$
[12] Teorema de Brouwer:
Supongamos que X es un conjunto no vacío, convexo y compacto de R^n. Si la función $f: X \to X$ es continua, entonces existe un punto fijo x que satisface $x= f(x)$

1.7 DILEMA DEL PRISIONERO

Se sabe que, en muchas ocasiones, los seres humanos no están seguros de si deben cooperar o no con el resto de los competidores, porque no tienen antecedentes del comportamiento de éstos y entonces entra en situaciones en que la decisión de cooperar *o negociar con el resto de los participantes del juego es un dilema.*

En éstas ocasiones, los participantes preferirán la **garantía** al beneficio individual con un resultado no tan bueno como el de cooperar, pero al menos más seguro, pues no siempre es claro si el otro jugador va a cooperar, y de no hacerlo podría llevar al jugador cooperativo a obtener un resultado desfavorable, que se hubiese evitado en el caso de no cooperar.

Este tipo de situaciones se representan claramente en el **"Dilema del Prisionero"**, historia que se atribuye a A.W. Tucker y en la que se describe lo siguiente:

Supóngase que hay dos sospechosos de haber cometido un crimen, los cuales son interrogados en celdas separadas y se les proponen las siguientes condiciones a cada uno de ellos:

- Si uno de ellos confiesa, y el otro no, entonces el confesor saldrá libre por haber colaborado con las autoridades, mientras que el otro reo se quedará por 6 años en prisión.

- Si ninguno de los confiesa entonces ambos serán condenados por un año.

- Si ambos confiesan entonces cada uno irá preso por tres años.

La matriz de pagos para este juego se ve como sigue:

	Confiesa	No Confiesa
Confiesa	(3.3)	(0,6)
No Confiesa	(6,0)	(1,1)

Figura 1.23 Matriz de pagos del dilema del prisionero

La región de beneficios cooperativos tiene la siguiente forma:

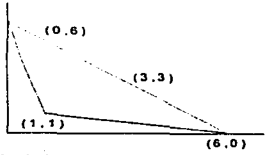

Figura 1.24 Región de beneficios cooperativos del Dilema del Prisionero

Ante sus expectativas, ambos pueden decidir entre confesar o no hacerlo, por lo que si son jugadores racionales pensarán como sigue: si él confiesa y su compañero no, entonces a el le aplican la menor de las penas, mientras que si el otro también confiesa entonces la pena no será tan alta como si no confesara. Siguiendo este razonamiento, el acusado decidirá que lo más conveniente es confesar; y este mismo razonamiento seguirá el otro acusado, por lo que ambos serán condenados a tres años de prisión, que es un tiempo menor al que hubiesen permanecido en prisión si ninguno hubiese cooperado.

Es importante mencionar que a los participantes les convendrá confesar en el caso de que desconozcan al otro prisionero o desconfíen de él, pero si él puede confiar en su compañero, es decir si el puede suponer que su compañero no confesará (como en el caso de los prisioneros que pertenecen a la mafia, a quienes el confesar les costará la vida), él también estará obligado a no confesar y ambos prisioneros se harán acreedores a la menor de las penas.

Este es un juego de dos personas, que se puede aplicar a casos en los que participan n jugadores, tal es el caso de una huelga. Cada trabajador debe de decidir entre presentarse a trabajar y quedar bien con sus jefes, (pues si triunfa la huelga, de igual forma va a ser participe del beneficio, además de seguir cobrando), o de participar y exponerse a perder su sueldo y posiblemente su trabajo, si es que el movimiento fracasa, es decir que lo individualmente racional conduce al fracaso colectivo.

Algunas características del dilema del prisionero son las siguientes:

1) Se emplea en las ciencias sociales para analizar conductas intencionales (orientadas a una meta) y se adopta el supuesto metodológico de que la conducta es racional y optimizadora, considerando que son racionales y que todos buscan la mejor solución.

2) Existe un equilibrio de Nash en el caso en el que los jugadores decidan no cooperar y otro cuando deciden hacerlo, es decir, según las condiciones en las que se desarrolle el juego es el punto de equilibrio que se obtiene.

3) El número de participantes en el juego afecta el resultado, pues mientras éste sea mayor, igual se incrementará la propensión a no cooperar, pues la coordinación entre ellos se dificulta, además de que se propicia la desviación de cada uno de ellos; pero simultáneamente para algunas circunstancias, (sobre todo de carácter social) mientras más individuos participen, más se eleva la posibilidad de obtener el objetivo deseado.

4) El juego puede repetirse indefinidamente.

Pero, ¿qué pasa cuando el juego se repite indefinidamente? Pues entonces, la estrategia que es más conveniente para los participantes del juego es hacer lo que el otro hizo en la tirada anterior. Es decir, si en la primera partida mi compañero coopera, entonces en la siguiente fase yo también lo hago, de tal manera que si uno siempre coopera, dos también lo hará, pero si uno no coopera, dos tampoco lo hará. En el juego del dilema del prisionero repetido indefinidamente, la estrategia óptima será hacer lo que el otro hizo, cuyo mejor resultado será el que se obtenga cuando los jugadores cooperen, generando una dinámica mutuamente beneficiosa.

Ejemplos en los que se aplica este resultado se encuentran en la interrelación económica de los agentes industriales en los modelos de Bertrand y Cournot que se repiten indefinidamente y en los que la cooperación garantiza el desarrollo del mercado, o en los casos biológicos en los que el organismo replicador que forma parte de un proceso evolutivo sólo puede desarrollarse dependiendo del comportamiento de los individuos en la etapa anterior del juego.

En muchas ocasiones, resulta conveniente para evitar que todos vayan a la suya y ninguno de los participantes coopere, el añadir un tercer personaje (el Estado o la Ley) que imponga sanciones a los que no cooperan.

Ahora veremos otro juego, al que llamaremos **"juego de las fichas cooperativo"**, el cual se juega con un tablero que tiene una columna y siete filas, en donde se coloca una ficha justo en la columna de en medio, como se muestra en la figura 1.25, cada uno de los jugadores se coloca en un extremo del tablero y mueve, en cada turno, la moneda en la dirección que prefiera; gana el jugador que logra sacar la moneda del lado en el que está jugando.

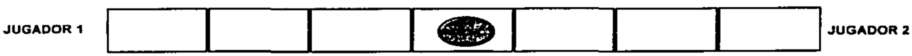

Figura 1.25 juego de las fichas cooperativo

Si los participantes no cooperan, entonces el juego se empata, pues cada uno de ellos moverá un lugar la moneda hacia su posición, manteniéndose todo el tiempo en el centro del tablero, mientras que si deciden cooperar, cada uno de ellos moverá la moneda hacia la salida de su compañero o hacia la suya alternadamente, en las diferentes partidas del juego.

Es importante destacar que se ha estudiado el comportamiento de los niños que participan en éste juego en diferentes escuelas de los Estados Unidos, y se concluyó que los niños de origen estadounidense normalmente se quedan enfrascados en un juego no cooperativo, mientras que los niños latinos y asiáticos, en la mayoría de las ocasiones, utilizan un juego cooperativo.

Cuando el dilema del prisionero y el juego de las fichas cooperativo se repitan infinitamente, los individuos analizan las tiradas de su contrincante en ocasiones anteriores, y con base en ello determinan la estrategia que van a utilizar, garantizando el mejor resultado cuando se interactúa en repetidas ocasiones; con jugadores racionales, la probabilidad de cooperación es lo suficientemente alta, generando una cooperación estable.

En ambos casos, se observa que la mejor estrategia es aquella que indica hacer lo que el compañero hace en su turno del juego, con la diferencia de que en el caso del dilema del prisionero, por tratarse de un juego de información imperfecta el jugador dos debe de escoger la estrategia sin tener la certeza de que está jugando su compañero en esta etapa del juego y sólo podrá castigar al contrincante hasta la siguiente partida, mientras que en el caso del juego de las fichas cooperativas, en la misma partida se puede tomar la decisión de castigar al compañero que rompe el acuerdo, pues se trata de un juego de información perfecta en el que cada uno de los participantes observa las decisiones de su compañero y puede castigarlo.

1.8 AUTÓMATAS FINITOS

Para representar juegos como los anteriores resulta muy útil el utilizar el modelo de autómatas finitos, que se definen como una máquina de calcular idealizada, en la que se pueden representar los resultados hipotéticos de un juego que se repite indefinidamente, bajo el supuesto de que la elección estratégica de los jugadores puede representarse como tiradas de una computadora programada adecuadamente.

Dos autómatas finitos cualesquiera, jugando uno contra otro en un juego repetido, terminarán eventualmente repitiendo un ciclo de estados una y otra vez, facilitando con ello el calculo del pago esperado por cada uno de los jugadores.

Cada configuración de memorias concebible que puede ser sostenida por un autómata finito es un *estado* posible de la maquina. Una descripción detallada de un autómata finito empezaria con una lista de todos sus estados posibles. Los elementos de esta lista deben constituir un conjunto finito.

El primer estado del autómata es el inicial, y para completar el ciclo se necesitan: una *función de salida*, que es la que le indica a la maquina la acción que tomará en cada estado, y *una función de transición*, encargada de decir a la maquina como pasar de un estado a otro (en nuestro caso de una estrategia a otra), después de que se ha registrado la tirada del oponente *entrada*.

Dos autómatas finitos cualesquiera jugando uno contra el otro en un juego repetido terminarían eventualmente repitiendo un ciclo de estados una y otra vez, facilitando con ello la caracterización de juegos infinitos y con ello la estimación del valor del juego.

Razonemos por un momento cómo jugarían dos autómatas finitos programados con el dilema del prisionero; para repetirse n veces utilizando la estrategia, "hago lo mismo que mi compañero" (TIT-FOR TAT), en el que en la primera jugada decide cooperar, entonces dos coopera. Si juegan, hago lo mismo que mi compañero, entonces uno vuelve a cooperar, y dos también y así sucesivamente hasta llegar a la etapa n en la que el juego concluye. En este caso, el juego se describe como un solo ciclo que se repite n veces, con un pago esperado de n para los participantes.

¿Que pasará entonces si, por ejemplo, se programa al autómata uno para que, sin importar la tirada de dos en la etapa dos, cambie la tirada con la que inició el juego? Entonces dos también cambiaria su jugada Éste tipo de juegos se asemeja al de los industriales mencionado anteriormente, cuando dentro del mercado y con el objetivo de que no se rompan los tratos de "caballeros", amenazan al resto de los participantes; gráficamente, los juegos jugados por autómatas finitos se describen como sigue:

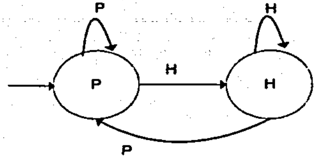

Figura 1.26 Autómata finito de la estrategia "hago lo mismo que mi compañero" (TIC FOR TAT)

LA TEORIA DE JUEGOS, EL EQUILIBRIO DE NASH Y ALGUNAS APLICACIONES ECONÓMICAS

2.1 EL EQUILIBRIO DE NASH Y LA ECONOMIA INDUSTRIAL

La economía en general se basa en la construcción de modelos, que son una *representación simplificada de realidad, en la mayoría de los casos para* desarrollar dichos modelos, se utiliza herramienta matemática para describir las interrelaciones entre los agentes económicos.

En el caso especifico de la economía industrial, el comportamiento de los agentes del mercado (oferentes, demandantes y competidores) se modela en algunas ocasiones utilizando métodos estadísticos como el de regresión lineal, con lo que se trata de representar de alguna manera la rentabilidad de la empresa, las barreras de entrada, las ganancias, etc., pero los resultados obtenidos en muchos de los casos no resultan sencillos de interpretar, pues no logran llevar al analista a conclusiones concretas a cerca del comportamiento a seguir por cada uno de los participantes del mercado, por otro lado *no siempre resulta sencillo obtener datos que sean medidas precisas de las condiciones* y de la interacción de las empresas, teniendo como desventaja que las muestras utilizadas deben de ser de gran tamaño.

Es con el desarrollo de la teoría de juegos que se inicia el modelaje del mercado como una interacción estratégica entre los industriales, que toman sus decisiones considerando las reacciones de sus rivales, las condiciones de mercado y el marco legal.

Las representaciones que se utilizan principalmente para el desarrollo de la teoría de juegos y la organización son de tres tipos: juegos estáticos, juegos secuenciales y los repetidos, estos últimos se consideran juegos dinámicos, pues suponen que éstos se *llevan a cabo en diferentes momentos del tiempo, y que cada participante puede cambiar* su estrategia dependiendo de las condiciones del mercado en el momento en que toma una decisión.

Para iniciar el estudio de la interdependencia de la teoría de juegos y la economía industrial, es necesario definir algunos conceptos:

Mercado.- Lugar donde se comercializan bienes y servicios permanentemente, o en términos o días preestablecidos.

Monopolio.- Mercado en el que hay un solo oferente, quien controla el precio y la cantidad ofrecida en el mercado.

Oligopolio.- Es un mercado en el que se interrelacionan dos o más empresas y en el que la demanda es divida entre varios participantes, se modela como un juego de n jugadores (tantos como empresas hay en el mercado), que toman las decisiones considerando diferentes variables estratégicas.

Ley de la Oferta y la Demanda. El mercado se conforma de todas las empresas que ofrecen un bien y de los consumidores que lo demandan (pueden ser intermediarios), siendo el precio de equilibrio económico aquel en el que la función de demanda y la de oferta se interceptan, representado gráficamente en la figura 2.1 se observa que si un bien sube de precio, entonces la demanda se contrae y con ello la empresa pierde ganancias de volumen, mientras que si el precio del bien baja disminuye la oferta porque menos empresas estarán incentivadas a participar en el mercado porque la ganancia se reduce.

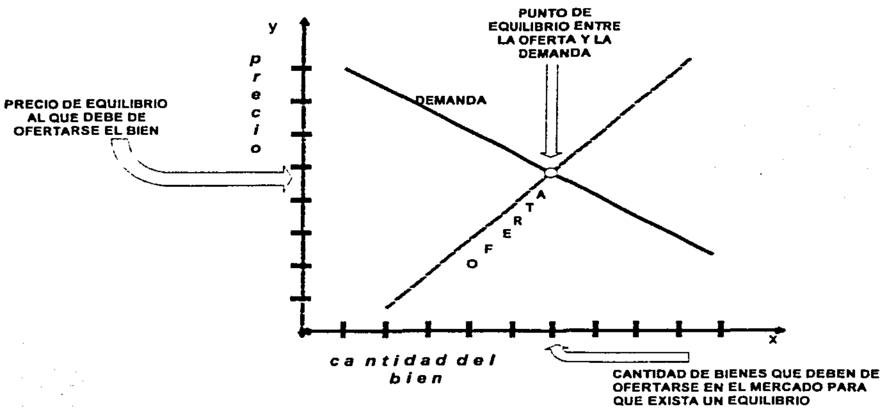

Figura 2.1 grafico de oferta y demanda

Existen diferentes modelos que describen la interacción de las empresas que convergen en un mercado y la relación que guardan con los consumidores del producto que ofrecen, tal es el caso de los modelos de Bertrand y Cournot que se describen a continuación.

EL MODELO DE BERTRAND

Este modelo asume que dos firmas (se plantea para dos empresas, pero se puede generalizar a n participantes), que producen bienes idénticos, los cuales son "iguales" o que se diferencian poco, por lo que uno puede ser sustituto de otro, (por ejemplo la coca y la pepsi, ambos son refrescos de cola y su sabor es prácticamente el mismo), por lo que los consumidores comprarán a la empresa que dé el precio menor. Si los empresarios deciden fijar el mismo precio, podemos suponer que la demanda se dividirá entre ellos equitativamente.

Sea $q = D(p)$, la función de demanda al precio p

$$D_i(p_i,p_j)\begin{cases} D(p_i) & \text{Si } p_i < p_j, \\ \tfrac{1}{2} D(p_i) & \text{Si } p_i = p_j, \\ 0 & \text{Si } p_i > p_j. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Donde D_i (p_i,p_j) es la demanda que tiene la empresa i, cuando ella ofrece el precio p_i y la empresa j ofrece el precio p_j.

Y se explica como sigue: si la empresa *i* ofrece un precio menor al precio de *j*, el primero se quedará con toda la demanda del mercado, si ambos ofrecen el mismo precio, entonces la demanda se distribuirá equitativamente entre los dos participantes y por último y a la inversa si *i* ofrece un precio superior al del jugador *j* entonces no habrá demanda de su bien.

La función de beneficios para la empresa *i-ésima* considerando un costo de producción c se ve como sigue:

$$\pi_i(p_i,p_j)=(p_i-c_i)^* D(p_i,p_j). \qquad (2.2)$$

Donde, la diferencia entre el precio al que vende la empresa *i-ésima* y el costo que tiene por unidad de producción será la ganancia que obtenga por producir un bien (ganancia unitaria), multiplicada por la cantidad de unidades vendidas generan el beneficio de la empresa.

Se dice que las empresas obtienen el beneficio monopólico cuando ofrecen el producto al precio al que lo haría un monopolio, mismo que se describe a continuación:

$$\pi_M = \max p(p-c)D(p). \qquad (2.3)$$

El precio más alto que se puede ofrecer en un mercado siempre será el de monopolio, por lo que a este precio la empresa garantizará el beneficio máximo, aunque también puede incentivar a otros empresarios a entrar al mercado con un precio menor y conseguir quedarse con un segmento de mercado.

Otro caso es cuando las empresas igualan el precio del bien al costo de producción, en este caso no existirían beneficios para ella; la función de beneficio se describe como sigue:

$$\pi_c = \min p(p-c)D(p) = 0. \qquad (2.4)$$

El beneficio es igual a cero porque estamos suponiendo que el precio es igual al costo marginal, entonces p-c = 0 , y como el cualquier valor multiplicado por cero es igual a cero entonces se cumple la igualdad anterior, es decir en esta situación la empresa no tiene ni perdida ni beneficio alguno.

Modelando el comportamiento de las empresas bajo el esquema Bertrand, donde tienen costos iguales, utilizando un juego que se repite indefinidamente en el tiempo y en el que las empresas atienden las acciones del otro participante en el mercado, sin tener acuerdos previos, se observa que la mejor estrategia para ambos jugadores es fijar el precio (p_1^*, p_2^*), donde se cumple que ambos precios son iguales al costo marginal de las empresas, el razonamiento para llegar a este equilibrio es el siguiente:

Si la empresa uno, selecciona un precio tal que $p_1 = p_2 > c$, en el período uno, la función de demanda sería:

$$D_1(p_1,p_2) = 1\ 2D(p). \tag{2.5}$$
$$D_2(p_1,p_2) = 1\ 2D(p). \tag{2.6}$$

Pero cualquiera de las dos empresas se sentirá motivada a fijar un precio menor al del período anterior y de esta forma quedarse con todo el mercado, en ese período, entonces el jugador contrario tendrá como estrategia óptima para el siguiente período rebajar aún más su precio, siguiendo cada uno esta misma estrategia hasta que ambos lleguen al punto en el que no pueden bajar más su precio sin tener pérdidas, este es el punto en el que el precio es igual al costo, siendo este la mejor estrategia para cada uno de los participantes que no cooperan.

Pero en este caso, entonces no existe ganancia, por lo que no hay estímulo para la producción más que el hecho de sacar al otro participante del mercado poniendo en riesgo la posición propia.

En el marco económico las empresas tratarán de fijar sus precios considerando los que fijarán sus rivales[13] creando con ello diferentes escenarios de decisión siendo los puntos extremos sin que existan pérdidas los que se describen a continuación.

Supongamos que cada una de las empresas piensa que la otra fijará el precio de monopolio, entonces la función de demanda para cada una de ellas se describe como sigue:

Para cada una de las empresas:

$$D(p_1,p_2) = 1\ 2D(p_M). \tag{2.7}$$

En este caso la función de demanda se divide entre los dos participantes en el mercado porque los consumidores serán indiferentes entre comprar un bien u otro costando ambos lo mismo.

El beneficio del mercado se ve como sigue:

$$\pi_M = \pi_1 + \pi_2 = 1\ 2D(p_M)^*(p_M - c_1) + 1\ 2D(p_M)^*(p_M - c_2)\,. \tag{2.8}$$

Ahora supongamos que en el desarrollo del mercado las empresas tienen que fijar su precio igual al costo marginal , en este caso la función de demanda es la siguiente:

$$D(p_1,p_2) = 1\ 2D(p_C). \tag{2.9}$$

[13] Las empresas consideran a las que producen bienes parecidos a los de ella como su competencia, aunque muchas veces puede ser un aliado estratégico

Siguiendo el razonamiento anterior la función de beneficio del mercado se ve como sigue:

$$\pi_c = \pi_1 + \pi_2 = 1/2D(p_c)*(p_c - c_1) + 1/2D(p_c)*(p_c - c_2). \qquad (2.10)$$

Como las empresas decidieron fijar los precios igual a su costo marginal entonces se cumple que:

$$p_c - c_1 = 0 \text{ ; y} \qquad (2.11)$$

$$p_c - c_2 = 0. \qquad (2.12)$$

Entonces:

$$\pi_c = \pi_1 + \pi_2 = 0. \qquad (2.13)$$

Es decir el beneficio del mercado es nulo y dado que el precio máximo que se puede ofrecer en el mercado es el de monopolio y el menor sin que haya pérdidas es en el que iguala el precio al costo marginal la función de beneficios cumple lo siguiente:

$$\pi_m \geq \pi_1 + \pi_2 \geq 0. \qquad (2.14)$$

En este juego donde la ganancia esta determinada por el beneficio de las empresas y las estrategias son los precios que puede fijar el empresario, los jugadores tratarán de adivinar cual será el precio que ofrece su contrincante, para poder ofrecer un precio menor, y de esta forma quedarse con todo el mercado, utilizando la teoría de juegos lleva al resultado que la mejor solución para este juego es la cooperación, pero esta explicación se ampliara más adelante.

MODELO DE COURNOT

Este modelo es el más antiguo en la representación del funcionamiento oligopólico, supone que el bien a comercializarse es homogéneo y la variable estratégica de las empresas es la cantidad a producirse de dicho bien (capacidad instalada).

En este caso la función de beneficio se describe como sigue:

$$\Pi_i \ (q_i, q_j) = q_i \, P(q_i + q_j) + C_i(q_i) = 0. \qquad (2.15)$$

Donde $P(q_i + q_j)$ es la función con la que se determina el precio del mercado que depende de las cantidades producidas por cada una de las empresas que participan en el mercado, q_i es la cantidad producida la empresa i-esima y $C_i(q_i)$ es la función de costos de producir q_i unidades.

Asumamos que Π_i es estrictamente cóncava en q_i y dos veces diferenciable.

Entonces la condición de primer orden para maximizar el beneficio de la empresa considerando como variable a q_i es:

$$\Pi'_i = C'_i(q_i) + q_i\, P'(q_i + q_j) + P(q_i + q_j) = 0\,. \qquad (2.16)$$

Los primeros dos términos reflejan la rentabilidad de producir una unidad extra, el tercero representa el efecto de esta "unidad extra" en la disminución del precio, debido al incremento de la producción agregada. En el caso de competencia perfecta el tercer termino tiende a cero, pues son tantas las empresas que una modificación de producción de una de ellas no afecta en forma real el beneficio de la industria, es importante destacar que la oferta agregada[14], impactará el precio del bien y tenderá a estar por arriba de la producción en monopolio contrayendo el precio del bien y con ello las ganancias de los inversionistas.

Como se observa la condición de primer orden de la empresa i determina la elección *óptima de su nivel de producción en función de su expectativa sobre el nivel de* producción que elegirá j, esta relación se conoce con el nombre de ***curva de reacción,*** la curva de reacción para la empresa i –esima se define como:

$$R_i(q_j) = \frac{\partial \Pi(R_i(q_j), q_j)}{\partial q_i} \equiv 0\,. \qquad (2.17)$$

En el caso en el que la empresa tiene funciones de demanda y costo lineal es relativamente sencillo el hallar este equilibrio, definamos:

$$D(p) = 1 - p; \qquad (2.18)$$

$$c_i(q_i) = c_i q_i; \qquad (2.19)$$

$$P(Q) = 1 - (q_i + q_i) \qquad (2.20)$$

Entonces la función de beneficio de la empresa se obtiene de sustituir las ecuaciones 2.19 y 2.20 en 2.15:

$$\pi_i = q_i(1 - (q_i + q_j)) - c_i q_i\,. \qquad (2.21)$$

Para hallar la cantidad óptima de producción para tener el máximo beneficio derivamos con respecto a q_i:

$$\pi'_i = 1 - (2q_i + q_j) - c_i = 0\,. \qquad (2.22)$$

Despejando q_i de 2.22:

$$q_i = \frac{1 - q_j - c_i}{2} \qquad (2.23)$$

[14] Suma de la oferta de todo el mercado

Análogamente:

$$q_j = \frac{1 - q_i - c_j}{2}. \qquad (2.24)$$

Ahora bien la función de reacción tiene la siguiente forma:

$$q_i = R_i(q_i) = \frac{1 - qj - ci}{2}. \qquad (2.25)$$

Para hallar el equilibrio de Cournot dadas las condiciones descritas anteriormente, suponemos que ambas empresas tratarán de producir las cantidades definidas en las ecuaciones 2.23 y 2.24, pues éstas son las que les ofrecen las mejores ganancias, sustituyendo entonces el valor de q_j en 2.23 obtenemos:

$$2q_i = 1 - \frac{1 - q_i - c_j}{2} - c_i = \qquad (2.26)$$

$$= 3q_i = 1 + c_j - 2c_i. \qquad (2.27)$$

De donde se deduce que el equilibrio de Cournot para el caso de demanda y producción lineal en el mercado, se define para la empresa i como:

$$q_i = \frac{1 - 2c_i + c_j}{3}. \qquad (2.28)$$

Bajo los mismos supuestos de linealidad, obtengamos el equilibrio para n empresas:

$$\text{Sea } Q = \sum_{i=1}^{n} q_i. \qquad (2.29)$$

Entonces la función de beneficio de la empresa i tiene la siguiente forma:

$$\pi_i = q_i P(Q) - C_i(q_i). \qquad (2.30)$$

Derivando la ecuación anterior para hallar el beneficio máximo obtenemos que:

$$\pi_i' = P(Q) - C_i'(q_i) + q_i P'(Q) = 0. \qquad (2.31)$$

Reordenando y multiplicando y dividiendo el segundo termino por P(Q) tenemos que:

$$P(Q)\left[1 + \frac{d(p)}{dQ}\frac{q_i}{P(Q)}\right] = C'_i(q_i). \qquad (2.32)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo termino por Q tenemos que:

$$P(Q)\left[1 + \frac{d(p)}{dQ}\frac{q_i}{P(Q)}\right] = C'_i(q_i). \qquad (2.33)$$

Sea $\alpha_i = \dfrac{q_i}{Q}$ y $\varepsilon = \dfrac{P'(Q)}{P(Q)}Q$. (2.34)

Entonces

$$P(Q)\left[1+\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right]=C'_i(q_i)\,. \quad (2.35)$$

Consideremos ahora el caso donde las empresas tienen costos marginales constantes, haciendo la suma de toda la industria tenemos que:

$$nP(Q)+P'(Q)Q = \sum_{i=1}^{n} c_i\,. \quad (2.36)$$

Si todas las empresas tienen el mismo costo tenemos un equilibrio simétrico en el que:

$$\alpha_i = \frac{1}{n}\,. \quad (2.37)$$

Entonces la ecuación se ve como sigue:

$$P(Q)\left[1+\frac{1}{n\varepsilon}\right]=c\,. \quad (2.38)$$

De esta ecuación se deduce que si ε es constante, mientras mayor sea el número de empresas el precio tenderá al costo marginal. Esto es natural pues mientras más empresas existan en el mercado menor será la influencia que éstas ejercen en el mismo.

Evidentemente la interrelación entre i, j se puede modelar como un juego en el que cada *uno de los participantes tiene como tirada la elección del nivel producción en cada uno de* los períodos en los que se desarrolla el juego.

Los resultados obtenidos en ambos modelos llevan a la conclusión de que las empresas dentro del mercado deben de mantener sus precios o cantidades de producción en aquel nivel en el que se iguale el costo marginal, no obteniendo con ello beneficio alguno, por lo que éstas tenderán a buscar acuerdos con sus competidoras en forma tal que puedan obtener ganancias y con ello mantenerse en el mercado.

Las empresas pasarán de un juego no-cooperativo a uno cooperativo, como el que se describe en las siguientes líneas.

COLUSIÓN O GUERRA EN PRECIOS (MODELO DE BERTRAND)

Sean únicamente dos empresas que producen un bien idéntico y tienen los mismos *costos fijos, están negociando para decidir si fijan el precio de consumo en forma* conjunta y con eso garantizan tener la mitad del mercado, o fijar cada uno el precio más bajo (igual a los costos fijos), y con eso sacrificar ganancias.

Supongamos que las empresas tienen tres estrategias, fijar un precio al (P_A) el que le garantiza beneficios monopólicos, un precio medio (P_M) o un precio bajo (P_B) en que igual el precio al costo unitario de producción.

El árbol de decisión para este juego en el que ambos participantes eligen su precio simultáneamente se ve en la figura 2.1, los pagos son los que se derivan de las siguientes estrategias:

Nodo terminal	Estrategia jugador uno	Estrategia jugador dos	Pago del jugador 1[15]	Pago del jugador 2
1	Precio de alto	Precio de alto	$\frac{\pi_{1A}}{2}$	$\frac{\pi_{2A}}{2}$
2	Precio de alto	Precio medio	-c	π_{2M}
3	Precio de alto	Precio bajo	-c	0
4	Precio medio	Precio de alto	π_{1M}	-c
5	Precio medio	Precio medio	$\frac{\pi_{1M}}{2}$	$\frac{\pi_{2M}}{2}$
6	Precio medio	Precio bajo	-c	0
7	Precio bajo	Precio de alto	0	-c
8	Precio bajo	Precio medio	0	-c
9	Precio bajo	Precio bajo	0	0

Tabla 2.1. Pagos de la Colusión de Bertrand

Donde π_{1A} es la función del beneficio alto de la empresa uno, π_{2A} es la función del beneficio alto de la empresa dos, π_{1M} es la función de beneficio medio de la empresa uno, π_{2M} es la función de beneficio medio de la empresa dos, cuando una empresa tiene una *función de demanda igual a cero, entonces pierde lo que invirtió en la producción que en* este análisis se considera es c.

[15] Los pagos que se reflejan en las columnas denominadas pago del jugador uno y pago del jugador dos, corresponden a los nodos terminales del árbol de decisión.

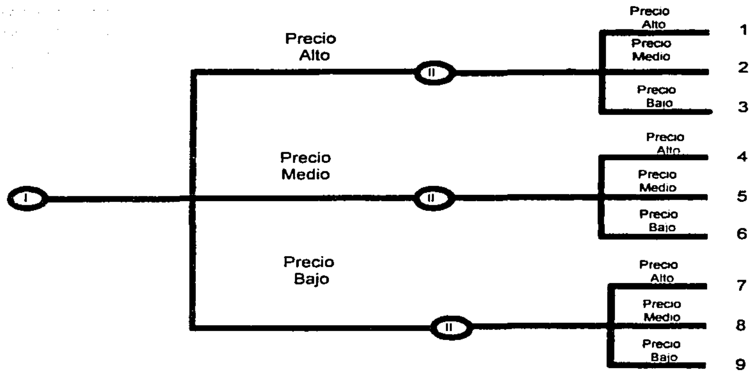

Figura 2.2. Árbol de decisión de la Colusión de Bertrand

Basándonos *en el modelo si ambos participantes fijan el mismo precio (cooperan)* entonces la demanda del mercado se dividirá entre los dos de forma que ambos podrán tener beneficios, utilizando el algoritmo de Zermelo se observa que el mejor de los escenarios es en el que ambos ofrecen el mismo precio.

La matriz de pagos de las empresas se ve como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_A & P_M & P_B \end{array} \\ \begin{array}{c} P_A \\ P_M \\ P_B \end{array} & \begin{bmatrix} (\frac{\pi_{1A}}{2}, \frac{\pi_{2A}}{2}) & (-c, \pi_{2M}) & (-c,0) \\ (\pi_{1M},-c) & (\frac{\pi_{1M}}{2}, \frac{\pi_{2M}}{2}) & (-c,0) \\ (0,-c) & (0,-c) & (0,0) \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 2.3. Matriz de pagos de la Colusión de Bertrand

El razonamiento del juego se basa en que cada uno de los jugadores está incentivado a escoger la misma estrategia que escoge su compañero, pues en esta forma garantizan las mejores ganancias.

Ahora bien si uno de ellos busca tener la mayor demanda, entonces escogerá el precio medio si su contrincante elige el precio alto, o el precio bajo si su contrincante elige el precio medio.

Pero en la práctica se observa que los participantes en el juego de la oferta prefieren garantizar beneficios.

De lo anterior se deduce que los equilibrios de Nash en este juego son los resultados que se obtienen cuando ambas empresas ofrecen el mismo precio, ya sea el de monopolio, el que le garantiza beneficios medios o en el que se garantiza la competencia perfecta, ya que en estos casos ambas empresas obtienen beneficios, aun más, con un poco de intuición se concluye que la mejor estrategia es fijar el precio alto que es el que da el mayor beneficio.

Ahora veamos como se comportan los jugadores cuando saben que el juego se repetirá indefinidamente en el tiempo, pudiendo suceder que en cualquier momento alguno de los participantes decidiera romper la colusión y obtener un beneficio mayor, en este caso de traición la empresa que mantuvo la colusión también baja su precio, con lo que ambos llegarían al precio PB, que no les traería beneficios, volviendo a la colusión, sacando a alguno de los competidores del mercado, lo cual en este caso no es tan claro pues el primero en retirarse deberia ser el que tiene el costo más alto.

Más explícitamente sea δ^{rt} la tasa de descuento con la que se evalúa el dinero en el tiempo la empresa uno y δ^{st} la tasa de interés con valúa el dinero en el tiempo la empresa dos, donde t es un período en el tiempo.

Los beneficios de las empresas en colusión con precios altos durante n períodos se describe en las siguiente ecuaciones:

$$\pi_{A1} = \frac{\pi_A}{2}\delta^{r} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{2r} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{3r} + \ldots + \frac{\pi_A}{2}\delta^{nr}, \qquad (2.39)$$

$$\pi_{A2} = \frac{\pi_A}{2}\delta^{s} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{2s} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{3s} + \ldots + \frac{\pi_A}{2}\delta^{ns}. \qquad (2.40)$$

Si se cumple que s=t, las empresas estarán igualmente incentivadas a romper la colusión, pues el valor del dinero en el tiempo será el mismo para ambas, mientras que si s > t entonces la empresa dos estará más interesada en romper la colusión que la empresa uno, puesto que valora más el dinero en el futuro que en el momento actual y a la inversa, será la empresa uno la que este más propensa a romper la colusión.

Lo anterior sucede principalmente porque en caso de que uno de los competidores decida "no cooperar" y romper la colusión, los demás lo castigaran en el futuro, por lo que la ganancia en el momento actual deberá ser superior a las pérdidas en el futuro, las que se mantendrán hasta que se coalicionen nuevamente los participantes del mercado.

Sea el caso en el que la empresa uno decide romper la colusión en la tercera etapa del juego, bajando primero el precio a P_M y como sabe que existirá un castigo por parte de dos, en la cuarta etapa disminuirá a P_B

Por su parte la empresa dos castigará por 3 períodos a uno, en cuanto se produzca la no-cooperación, las funciones de beneficio de los participantes en este caso se verán como sigue:

$$\pi_{A1} = \frac{\pi_A}{2}\delta^{r} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{2r} + \pi_M\delta^{3r} + 0 + 0 + 0 + \frac{\pi_A}{2}\delta^{7r} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{8r} + \ldots + \frac{\pi_A}{2}\delta^{nr}, \qquad (2.41)$$

$$\pi_{A2} = \frac{\pi_A}{2}\delta^{s} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{2s} + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{\pi_A}{2}\delta^{7s} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{8s} + \ldots + \frac{\pi_A}{2}\delta^{ns}. \quad (2.42)$$

Entonces debe de cumplirse que:

$$\pi_M\delta^{3r} > \frac{\pi_A}{2}\delta^{3s} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{4s} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{5s} + \frac{\pi_A}{2}\delta^{6s} - 3c. \quad (2.43)$$

Cabe hacer notar que en el caso en el que los bienes sean idénticos, pero los costos marginales no, la empresa que tratará de acaparar el mercado será aquella que tenga el costo marginal menor, pues bastará que esta ofrezca un precio apenas inferior al costo marginal de la otra empresa para quedarse con todo el mercado, esto en la mayoría de los escenarios resulta peligroso, pues si saca de competencia a la otra empresa tendrá que producir el diferencial, de manera que no se genere una gran demanda no satisfecha, caso en el cual los consumidores buscaran bienes sustitutos o se incentivará a otros individuos a entrar al mercado.

COLUSIÓN (MODELO DE COURNOT)

El siguiente punto de análisis, sería ver que ocurre si las dos empresas eligen sus niveles de producción con el fin de maximizar los beneficios conjuntos. En estos casos se eligen simultáneamente q_i y q_j tales que se obtenga:

$$max\, P(q_i + q_j)(q_i + q_j) - c_i(q_i) - c_j(q_j). \quad (2.44)$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$P(q_i^* + q_j^*) + P'(q_i^* + q_j^*)(q_i^* + q_j^*) = c_i(q_i^*). \quad (2.45)$$

$$P(q_i^* + q_j^*) + P'(q_i^* + q_j^*)(q_i^* + q_j^*) = -c_j(q_j^*) \quad (2.46)$$

Dado que los primeros miembros de estas dos ecuaciones son iguales, también deben serlo los segundos: como consecuencia las empresas deben de igualar sus costos marginales de producción al igual que en el modelo de Bertrand, pues si alguno de los participantes en la colusión tiene un costo marginal por deba del resto, soporta con una diferencia menor una baja en el precio del mercado; es decir estará incentivada a disminuir la producción para con ello reducir el precio y provocar en esta forma pérdidas en el resto de los participantes.

Al igual que en el caso anterior siempre puede existir una traición por parte de alguna de las empresas que se han colisionado, por lo que la solución no se considera una solución estable, a menos que exista una amenaza de sobre producción de cada una de las empresas planteada de tal forma que la desviación implique pérdidas cuantiosas que no se puedan recuperar fácilmente para la empresa que rompió el pacto. Es decir si las empresas consideran que la ganancia de la desviación ahora supondrá pérdidas menores que las pérdidas que se deriven de que la otra empresa cumpla su amenaza, ésta se desviará de la colusión. Por otro lado otro momento en el que se rompe la colusión es aquel en el que la empresa piensa que su socio se encuentra incentivado para traicionar, pues entonces en busca de una mayor recuperación tratará de ser el primero en traicionar.

Es decir si la empresa uno supone que la dos mantendrá el nivel de producción del acuerdo entonces estará incentivada a producir un poco más y por ese periodo obtener una mayor ganancia; pero si no cree en que la empresa dos mantendrá el nivel entonces le convendrá inundar el mercado del producto y con ello obtener beneficios inmediatos, sin importar que con ello se genere una libre competencia que pueda sacarlo del mercado o disminuir sus ganancias futuras.

Existen dos factores que incentivarán a los participantes a mantener la colusión; uno de ellos es que tan fuerte es la amenaza de pérdida que planteen los participantes en la colusión como castigo al participante que la rompa; la otra es la tasa de interés que prive para cada uno de los jugadores.

Supongamos por ejemplo que la empresa uno produce el doble que la empresa dos en el equilibrio; entonces basta con que la empresa uno amenace con producir dos unidades por cada unidad que el otro produzca extra, mientras que la empresa dos amenazará con producir un producto extra por cada dos bienes que produzca la empresa uno, inundando el mercado, forzando con ello a que se contraiga el precio del bien, generando pérdidas para cada uno de los participantes.

El análisis de estas situaciones es similar al del dilema del prisionero repetido, que se explica en la sección 1.7 del capitulo anterior, con las siguientes características; las estrategias son: las empresas producen la cantidad que mantiene el equilibrio del mercado a menos que uno de los dos se desvie en cuyo caso producirán la cantidad que maximice la producción de Cournot. Como en el caso anterior este sistema de cantidades constituirá un equilibrio de Nash, a menos que la tasa de descuento no sea muy elevada.

Pero a pesar de que las empresas pueden acordar y mantener un precio, éste a su vez se verá acotado por la demanda; pues a pesar de que el precio más alto que se puede ofrecer es el de monopolio entonces se incentiva a que otras empresas quieran participar en el mercado pues pueden entrar y ofrecer un precio menor y en esta forma apoderarse de un segmento del mercado, producción sucede con las cantidades de producción, pues estas también se pueden fijar para que se dé el precio de monopolio y entonces que ingrese una nueva empresa que puede producir una cantidad que mueva el precio.

En ambos casos las empresas del cartel pueden optar por mover sus precios o cantidades y desencadenar una competencia con la nueva empresa, hacerla parte del cartel o en su defecto reacomodar sus precios o cantidades en forma que puedan *coexistir con la nueva empresa.*

2.2 EL JUEGO DE LA AMNISTIA FISCAL Y EL EQUILIBRIO DE NASH

Para iniciar la presente sección, hay que definir algunos conceptos económicos que resultan relevantes en el desarrollo del tema.

Finanzas Públicas.- Las Finanzas Públicas constituyen, la actividad económica del sector público, que convive con la economía de mercado, de la cual obtiene los recursos y a la cual le presta un marco de acción.

Es decir que el Estado para poder realizar sus funciones y afrontar sus gastos, debe contar con recursos, y los mismos se obtienen a través de los diferentes procedimientos legalmente instituidos y preceptuados en principios legales constitucionales.

A estos recursos los podemos agrupar en:

1) recursos patrimoniales propiamente dichos,

2) recursos generados por la venta de empresas estatales,

3) recursos generados por las empresas estatales,

4) recursos gratuitos (donaciones al estado),

5) recursos tributarios,

6) recursos derivados de multas y recargos,

7) recursos de crédito público,

Recursos Tributarios.- Fuente de ingresos del Estado, son aquellos que el estado obtiene mediante el ejercicio leyes que crean obligaciones a cargo de los habitantes que tienen un ingreso o egreso en el país, en la forma y cuantía que las mismas establecen. *La característica común de los recursos tributarios es su obligatoriedad*

Hacienda Pública.- Órgano gubernamental encargado, entre otras muchas funciones, de la recaudación de los impuestos generados por los contribuyentes, con el fin de que estos ingresos sean utilizados en el desarrollo de los planes y programas gubernamentales, enfocados a mejorar la calidad de vida de los habitantes de un país.

Históricamente el impuesto surge con la necesidad de las sociedades de la cooperación de sus integrantes, es decir para poder coexistir y sobrevivir es preciso que todos participen en alguna forma.

Al inicio cuando las sociedades eran nómadas la supervivencia del clan dependía de que lo obtenido en las diferentes actividades de supervivencia (caza, pesca, recolección) se repartía en forma de que todo el grupo se viese beneficiado.

Más adelante, con el descubrimiento de la agricultura y con el inicio de la vida sedentaria las tribus se establecieron como sociedades, coexistiendo la cooperación, fortaleciendo el desarrollo de estas culturas, como parte de una contribución social que permitiese a la sociedad poder enfrentar diferentes cambios dentro de su entorno, tales como guerra, construcción obra pública, fomentando la ciencia y el arte, como un beneficio al cual todos los habitantes podían acceder.

De acuerdo a las características de cada una de las sociedades se generaban algunas diferencias en la tributación por ejemplo en las sociedades cuyo desarrollo se enfoco más a *la cultura, las ciencias y las artes como es el caso de los mayas americanos* la tributación era de carácter cooperativo es decir los habitantes debían hacer trabajo comunitario como pago por el beneficio que recibían del estado y del trabajo comunitario de sus congéneres, mientras que por otro lado las sociedades guerreras, como los aztecas generan la mayor parte del ingreso a la hacienda pública de los tributos de los pueblos conquistados, los que se caracterizaban por ser altos, injustos y generar pagos por concepto de demora, como intereses, perdiéndose en estos casos el carácter esencialmente cooperativo del pago.

El fenómeno de pagar sin ver un beneficio a la comunidad, se presenta en algunos gobiernos europeos como los griegos, romanos, y sajones, recrudeciendo estos durante *la edad media, pues para mantener guerras como las cruzadas, los excesos de las* monarquías, la edificación de suntuosas construcciones, con las que el pueblo no se ve claramente beneficiado, se exige a los contribuyentes pagos altísimos, con penas tales como la pérdida de la vida, la esclavitud o el abuso a mujeres y niños, multas altísimas, sin importar si fue posible sembrar, cosechar, manteniendo presente la política de beneficiar algunos cuantos, quienes tenían el poder y la autoridad de su lado, convirtiéndose en los dueños y señores de los bienes más aún de las vidas de sus feudos, olvidando por completo el desarrollo de la sociedad en su conjunto.

Más adelante con el descubrimiento de América, muchos de los impuestos se recaudan de las "Colonias", quienes en este momento juegan el papel de culturas dominadas y tienen que ingresar tributos que permitan la supervivencia de sus colonizadores y de sí mismas, con la explotación de minas, tierras y otros patrimonios naturales que encontrándose físicamente en las colonias pertenecen a los países colonizadores, entre los que se destacan Inglaterra, España, Portugal; generando con ello descontentos con las monarquías europeas, que al tener conflictos internos que ponían en riesgo su permanencia, presionan aún más a las colonias, siendo estos pagos uno de los mayores detonantes de la evasión de impuestos, por sentir el contribuyente ningún beneficio palpable que forme parte de un beneficio conjunto.

Con el paso de los años y la "evolución" y "desarrollo" de la sociedad, los problemas tributarios se han ido incrementando en algunos de ellos, pues se cayo en recaudaciones a tasas impositivas muy altas o pagos ridículos de los que no siente beneficio alguno la sociedad como el caso del impuesto sobre "puertas y ventanas" que el Dictador Santa Ana impuso en México para poder mantener el ritmo de vida un país independiente cuyos problemas de orden social se incrementaban manteniendo a una burocracia y clase rica que no beneficiaban en nada el desarrollo del país.

Como se observa en la mayor parte de los esquemas el tipo de hacienda pública que ha existido, no ha permitido entender el impuesto como una cooperación para un bien conjunto que lleva a la mejora de las condiciones de vida, generándose un alto índice de evasión fiscal, que facilita el caer en un circulo vicioso pues sin la recaudación el estado no cuenta con los recursos para mantener condiciones económicas, sociales y culturales que permitan el beneficio de la sociedad.

De lo anterior se deduce que las sociedades están cayendo en una espiral que los puede llevar a la quiebra de la economía, lo que derivaría en un mayor índice de pobreza, de inequidad y desamparo dentro de la sociedad.

En esta tesis se analizan dos puntos en el desarrollo de la hacienda impositiva, el primero es la equidad de los impuestos como un hecho posible, es decir como un **equilibrio de Nash**; y el segundo la solución para la recuperación de impuestos mediante la creación de planes y programas que permitan a ambos participantes obtener el mayor beneficio, dadas las condiciones hacendarías vigentes en el mundo, es decir a la Hacienda Pública recupera impuestos, y a los contribuyentes regularizarán su situación tributaria, evitando con ello el ser detectados y tener que pagar grandes sumas de dinero por concepto de multas, actualizaciones y recargos de los adeudos, beneficiando a la sociedad en su conjunto es decir como un **equilibrio de Nash social y tributariamente eficiente**.

Cuando uno ve en sus recibos de pago, declaraciones fiscales o cualquier otro tipo de documento en el que se refleja el pago de impuestos, surge la percepción de que éstos no son equivalentes con el tipo de servicios públicos que recibimos, entonces se surge la interrogante de si existirá ese punto en el que nuestro pago sea acorde con el beneficio.

Para las personas relacionadas con la teoría de juegos y sobre todo con el equilibrio de Nash es claro que debe de existir ese punto, más aún alguien con conocimientos sobre la historia y desarrollo tributarios afirmará que en diferentes momentos y circunstancias históricas este ha existido, pero se ha perdido por la incompetencia o falta de visión de algunos gobiernos.

Prueba de ello es el caso de la hacienda periclea que ofrecía a los habitantes de Atenas los siguientes servicios públicos:

a) Una policía eficiente, cuyo gasto se cubría en parte por la labor parcialmente gratuita de los participantes de la sociedad, (como parte de una labor social) y con la labor de los esclavos públicos;
b) Provisión de trigo barato a la población;
c) Instrucción, cuyo gasto se destinaba indirectamente en la preparación de obras de arte y de espectáculos dramáticos, que los ciudadanos debían de estar en posibilidad de apreciar;
d) El embellecimiento de la ciudad con templos y estatuas, con lo que se generaban oportunidades de trabajo para los ciudadanos, los retirados de guerra, que no podían o no querían volver a las campañas;
e) La manutención de los ciudadanos sobresalientes en el Pritáneo, de los huérfanos de guerra hasta los 18 años, dotándolos de una armadura completa al alcanzar esta edad, así como de los mutilados de guerra y los inválidos, elevando con ello el sentido cívico de la población;
f) El "theoricon". Primero instituido como ayuda para la entrada al Teatro de Dionisios o para subvenir a los necesitados durante la guerra del peloponeso, y que se transformo en la distribución gratuita de los remanentes presupuestarios a los ciudadanos igualitariamente sin considerar edad, trabajo, valor de estos.
g) Pago justo y equitativo a los funcionarios públicos.

Frente a estos beneficios el erario público recibía los siguientes ingresos:

a) Los ingresos judiciales, importantes para Atenas, ciudad hegemónica, en la cual concluían los litigios más importantes originados en las ciudades aliadas.
b) Penas pecuniarias, dividas en multas, inspiradas en delitos políticos según el principio de que los hombres de Estado debían sufrir, aun siendo eminentes y probos, las consecuencias materiales la falta de éxito de sus políticas; y confiscaciones accesorias de penas más graves, como la condena a muerte, esclavitud, a extrañamiento.
c) Los impuestos directos se consideraban incompatibles con la libertad y con la calidad de ciudadano. Por lo que sólo estaban sometidos los extranjeros, las cortesanas y los esclavos. Si los extranjeros estaban domiciliados en Atenas, pagaban un impuesto compensatorio por los privilegios recibidos en la ciudad, y otro especial por trabajar en el mercado, mientras que el caso de las cortesanas y los esclavos estaba plagado de impuestos especiales;
d) Las "liturgias" (del griego λειτουργια΄ servicio público) ordinarias, que eran en su origen una participación espontánea, para el desarrollo de los espectáculos públicos, deportivos y religiosos. El espíritu de emulación entre los ricos y el

anhelo de apropiarse del favor del público ante las elecciones inducían más de una vez a los ricos griegos a traspasar, los limites considerados como normales por la opinión general, las liturgias no siempre bastaban para llevar a cabo el espectáculo, en cuyo caso se emitía un listado con el nombre de los más ricos de la ciudad obligándolos a elevar su contribución;

e) Aranceles aduaneros;

f) *Derechos percibidos sobre las ventas al por menor en las plazas, sobre las ventas* en subastas, sobre las de inmuebles, derechos de puertos, de pesca, de peaje en los estrechos, etc.;

g) El *impuesto sobre los aliados, que no es más que un pago al conquistador por el* conquistado, la moderación del tributo y su equitativa distribución persuadieron a los aliados a permitir que su producto fuera destinado no sólo a cubrir los gastos de las guerras nacionales, sino también a los grandes monumentos públicos de Atenas que daban gloria a toda Grecia.

h) La trierarquía (del griego τριηραρχια de una trirreme[16]) que es un tipo especial de liturgia que era la obligación de los comandantes de la nave de mantenerla, de anticipar salarios y víveres de la tripulación, cuyo reembolso era lento e incierto, pero se compensaba pues quedaban exentos de otras liturgias. Demóstenes, mediante una larga campaña oratoria, consiguió hacer más equitativa la distribución de la carga.

i) Las epidoseis (del griego επιδονις contribución voluntaria, sinónimo de progreso) eran, como las liturgias, una donación voluntaria; pero diferían de éstas porque iban precedidas por una votación solemne y estaban destinadas a subvenir a exigencias extraordinarias. El espíritu patriótico de los atenienses era tan elevado en la época periclea que, si la votación fijaba un mínimo y un máximo, todos se esforzaban por llegar con su propia oferta al máximo.

Pero el equilibrio instituido en este modo entre el poder político, el desarrollo artístico y financiero, claramente consentido por pobres y ricos basado en el florecimiento de la conciencia política, originada en el desarrollo de conceptos como la seguridad, la justicia, *la defensa nacional, la asistencia social, las grandes obras públicas, mientras que el* ingreso se caracterizaba por la contribución por parte de los atenienses para los que se convertía en una demostración de cultura cívica y poderío económico, es delicadísimo, y desaparece con la muerte de Pericles, pues el nuevo gobernante modificó las bases tributarias, incrementándolas y generando con ello el descontento de los diferentes sectores de la población; tal es el caso del descontento de los aliados, lo que provocó la rebelión de estos y con ello el fin de la hegemonía ateniense.

La hacienda instituida por Pericles no fue la única que alcanzó un equilibrio que facilitó la contribución tributaria, también lo hicieron la ciudad florentina en algunos momentos de los siglos XIII y XIV, la Francia de Enrique IV y del primer cónsul Bonaparte, la Inglaterra de Beaconsfield y Gladstone, el Piamonte de la década de Cavour.

Cuando se vuelve a la naturaleza contributiva del impuesto, que no es más que el precio equitativo de las ventajas recibidas del Estado social, del Estado organizado, dividido entre los contribuyentes, proporcionando justicia social y la garantía de que nuestros derechos y los de nuestra decencia se encuentran salvaguardados por las instituciones

[16] Embarcación de tres remos

militares, legales y sociales destinadas para este fin, por una parte y la construcción de la infraestructura que garantice educación y salud a la sociedad, entonces el impuesto se acepta voluntariamente como una contribución al fin social, estamos frente **a un equilibrio de Nash,** de un juego cooperativo entre el Estado y la sociedad; tal como se refleja en el siguiente testimonio:

> *"El resultado de nuestra vida de compromiso es que nosotros los ginebrinos, pagamos impuestos quizás ignorados, por su elevación, en otras partes del mundo. Soy contribuyente en Ginebra y, a dos pasos de aquí esta la Saboya francesa; y pago, en proporción a las rentas correspondientes, tres veces más en impuestos en Ginebra que en Saboya, Y pese a pagar tanto estoy contento.* ***Sé por que pago.*** *Veo los servicios que se me prestan. He discutido, directamente o por medio de mis representantes, céntimo por céntimo, todos los aumentos de gastos, todos los aumentos de impuestos. Y lo mismo ocurre, por todas partes, en nuestros cantones. Un alumno mío del cantón tioinés, me contaba que en su pueblo discutieron durante años sobre la construcción de una humilde fuente pública. Al final todos estaban persuadidos. Incluso los que no están persuadidos acceden, después de la deliberación de la mayoría, a la opinión ajena y la hacen propia. La accesión de la minoría a la opinión de la mayoría es la verdadera sanción del gasto público. Estoy convencido de que sólo de este modo los gastos públicos son oportunos y útiles para la colectividad."*[17]

El equilibrio de Nash desaparece cuando se obliga a participar económicamente al contribuyente en el costo de algunas medidas que lejos de beneficiarlo, lo perjudican.

Tampoco se debe de permitir que los impuestos recaigan únicamente sobre los más prominentes ciudadanos, más bien hay que buscar una Hacienda Pública capaz de permitir que la distancia que separa a los ricos de la gente de clase media sea proporcional, al igual que la distancia que separa a estos últimos de los pobres.

Ahora pasemos al planteamiento de otro de los grandes problemas que agobian a la Hacienda Pública de nuestro país y que ha generado problemas de política fiscal y económica que han contribuido a las grandes inequidades de las que es sujeto nuestro país.

Para ello definamos precisamente que es la evasión fiscal y cual, al parecer de muchos reconocidos economistas son sus principales causas.

Evasión Fiscal.- Fenómeno que se presenta cuando los contribuyentes, obligados legalmente, no pagan los impuestos que le corresponden, utilizando para ello prácticas fraudulentas u omisibles, violatorias de disposiciones legales.

La evasión fiscal genera problemas de índole económica para el gobierno y las entidades que de él dependen, mermándose con esto el desarrollo económico, político, social y cultural de dicha nación, vulnerando con ello la legitimidad de los gobiernos.

---

[17] RINAUDI LUIGI
"Mitos y Paradojas de la Justicia Tributaria".
Ariel, Barcelona 1988

Las causas por las que se genera la evasión son variadas y en muchos casos van aparejadas a percepciones sociales, psicológicas y culturales destacándose entre las principales las siguientes:

Carencia de una conciencia tributaria.- La carencia de conciencia tributaria, implica que en la sociedad no se ha desarrollado el sentido de cooperación de los individuos con el Estado, siendo uno de los problemas principales que el individuo *no considera el impuesto que paga como un aporte justo, necesario y útil para* satisfacer las necesidades de la colectividad a la que pertenece, esto principalmente se debe a la corrupción y falta de credibilidad en las instituciones gubernamentales, o las pagos excesivos por este concepto.

Sistema tributario poco transparente.- La manera de que un sistema tributario contribuye al incremento de la evasión impositiva, se debe a que este refleja una falta de definición de las funciones del impuesto, así como la relación de éstos con los subsidios, las exenciones, además de los huecos legales que permiten interpretar la ley en forma que se facilite la omisión de algún pago, es decir al no existir leyes tributarias, que se estructuren de manera tal, que presenten técnica y jurídicamente facilidad para ser entendidos, y que al mismo tiempo no se generen dudas de interpretación, tanto para los que las aplican como para los que las revisan, seguirán existiendo contribuyentes que no paguen impuestos.

Una muestra de esto es que en muchas ocasiones, contribuyentes con ingresos similares pagan impuestos muy diferentes en su cuantía, o en su caso, empresas de alto nivel de ingresos, podrían ingresar menos impuestos que aquellas firmas de menor capacidad contributiva.

Administración tributaria poco flexible.- Esto se refiere al hecho de la falta de eficiencia en los procesos fiscales, que no se adaptan con facilidad a los cambios sociales y económicos, teniendo como consecuencia que los contribuyentes pierdan mucho tiempo y dinero en el cumplimiento de estas obligaciones.

Éste es un claro ejemplo de que cuando uno de los participantes en el juego de amnistía fiscal no coopera con el otro se producen reacciones contrarias que los llevan a perder-perder, como sucede en algunas economías en las que se da prioridad a amenazar al contribuyente, generando con ello que éste prefiera ir a la suya y no pagar, generando un problema social, económico y político que lo afecta *a él y a la Hacienda Pública*.

Bajo riesgo de ser detectado.- El contribuyente al saber que no se le puede controlar se siente tentado a incurrir en la evasión fiscal, en este sentido, los esfuerzos de la administración tributaria deben, entonces estar orientados a detectar la brecha de evasión y tratar de definir exactamente su dimensión, para luego; analizar las medidas a implementar para la corrección de las fallas detectadas.

Es decir que en muchos casos ante una probabilidad alta de ser detectado y una contribución impositiva clara y posible[18], los contribuyentes preferirán pagar sus impuestos y con ello evitarse el pago de multas, actualizaciones y recargos.

[18] Si el pago es muy alto, los contribuyentes no pagaran impuestos pues su economía no se los permitirá

MODELO

En el modelo que se va a analizar desde el punto del equilibrio de Nash, es aquel en el que la Hacienda Pública puede decidir entre otorgar un plan que permita recuperar una parte de la evasión en forma voluntaria otorgando la condonación en multas o recargos, o *no considerar las faltas en las que se hubiese incurrido en años anteriores y que éstos* queden regularizados o en su caso ambos criterios, creando con ello una base contribuyentes que mediante una administración eficiente le permita detectar futuras evasiones (programa de amnistía fiscal) y por otra parte evaluar la reacción de los evasores ante esta decisión.

Lo que se busca es encontrar el equilibrio de Nash que no es más que el punto en el que ambos participantes obtienen la mejor ganancia en conjunto aunque ésto no represente el mejor de los pagos para cada uno de ellos por su lado. Mientras los contribuyentes y la Hacienda Pública no estén dispuestos a considerar que ambos participan en una relación que los puede llevar a ganar o perder en conjunto, no cooperaran y no será posible obtener la mejor de las ganancias.

SUPUESTOS

El órgano fiscalizador tiene la facultad de decidir entre desarrollar un programa de amnistía fiscal o no hacerlo y recuperar únicamente la evasión que se detecte con los sistemas que para ello tenga diseñados.

Si la hacienda pública haciendo uso de las facultades decide otorgar un plan de amnistía, cualquiera que este sea, entonces un contribuyente tiene la opción entre adherirse al *programa planteado por el fiscalizador o no hacerlo y correr el riego de ser detectado o* no.

El árbol de decisión para este juego en particular, se observa como sigue:

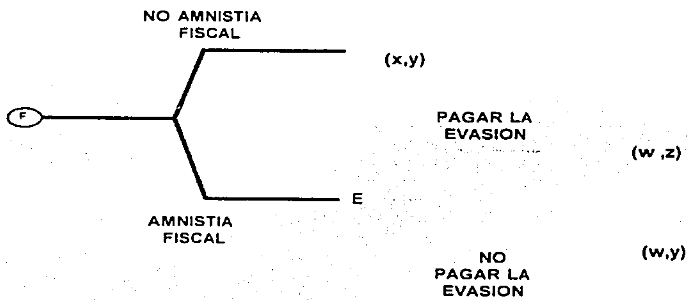

Figura 2.4 Árbol de decisión del juego de evasión y amnistía fiscal

La matriz de pago en este caso se ve como sigue:

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{IAF} & \textbf{NIAF} \\ \textbf{AAF} & (w,z) & (x,y) \\ \textbf{NAAF} & (w,y) & (x,y) \end{array}$$

Figura 2.5 Matriz de pagos del juego de evasión y amnistía fiscal

Donde:

La estrategia IAF y NIAF son las estrategias del jugador fisco siendo la primera aquella en la que se Implementa la Amnistía Fiscal, la segunda en la que No se Implementa la Amnistía Fiscal.

Por otro lado el evasor tiene dos posibles opciones Adherirse a la Amnistía Fiscal **(AAF)** o no hacerlo **(NAAF).**

Así mismo definimos:

$$w = IF + p_1(CFA) + p_2(CEF) + (p_1 + p_2)\sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI - CI - CA. \quad (2.47)$$

$$x = IF + p_3(CEF + \sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI) - CA. \quad (2.48)$$

$$z = CFA + \sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI. \quad (2.49)$$

$$y = p_4(CEF + \sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI). \quad (2.50)$$

Definamos:

IF = Ingreso Fiscal.
CFA = Costo Fiscal del Pago del Programa de Amnistía.
CEF = Costo de la Evasión Fiscal.
CI = Costo de Implementación del Programa de Amnistía.
CA = Costo de la Auditoria.
p_1 = Probabilidad de que un evasor se adhiera al Programa de Amnistía Fiscal.
p_2 = Probabilidad de que un evasor que no se encuentra en el Programa de Amnistía Fiscal sea detectado.
p_3 = Probabilidad de que un evasor sea detectado.
p_4 = Probabilidad que asigna el evasor de ser detectado por el órgano fiscalizador.
δ^n = Tasa de descuento del dinero en el tiempo t con una tasa de interés r.

Siempre se cumple que para un mismo evasor CFA < CEF, pues los CEF incluyen los adeudos fiscales más las actualizaciones, recargos y multas, mientras que CFA considera una disminución en el pago de multas, recargos o ambos.

UTILIDAD	CONFORMACIÓN DE LA UTILIDAD
x	Este pago esta compuesto por los ingresos al erario por parte de los contribuyentes que si pagan impuestos más la recuperación que haga el órgano fiscalizador de personas que evaden impuestos y son detectadas menos el costo de la auditoria al evasor.
y	El pago en este caso para el evasor esta compuesto por la probabilidad de que sea detectado como evasor más las multas, actualizaciones y recargos que se generen de la evasión.
w	El pago por los ingresos al erario por parte de los contribuyentes que si pagan impuestos más la recuperación que haga el órgano fiscalizador de personas que evaden impuestos menos los pagos de los evasores detectados que están sujetos al programa de amnistía fiscal más la recuperación de los importes que paguen los evasores que se adhieran al programa de evasión fiscal menos el costo de la implementación de la amnistía menos el costo de la auditoria al evasor.
z	El pago por concepto de evasión fiscal más los pagos futuros de impuestos

Tabla 2.2 Conformación de los pagos de la evasión y amnistía fiscal

ANÁLISIS DEL JUEGO

Como se puede observar en la matriz de pagos descrita anteriormente la estrategia implementar programa de amnistía domina a la estrategia de no implementar estrategia fiscal cuando **w > x** es decir cuando:

$$IF + p_1(CFA) + p_2(CEF) + (p_1 + p_2)\sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI - CI - CA > IF + p_3(CEF + \sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI) - CA, \qquad (2.51)$$

simplificando

$$p_1(CFA) + p_2(CEF) + (p_1 + p_2)\sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI - CI > p_3(CEF + \sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI). \qquad (2.52)$$

Si la probabilidad de detectar un evasor y poder cobrarle el importe de las evasiones, es menor que la suma de las probabilidades de que los evasores participen en el programa más la probabilidad de detectar a los que no lo hagan, la hacienda pública preferirá hacer planteamientos encaminados a la amnistía fiscal y en esta forma incrementar los ingresos que reciba el gobierno por concepto de recaudación de impuestos.

Esta desigualdad se cumple, para aquellos estados o naciones en los que se cumplen las condiciones mencionadas al inicio de este apartado que propician la evasión fiscal, y que con ello causan problemas económicos, sociales y políticos por la falta de recursos tributarios que permitan el desarrollo de programas tendientes a mejor el nivel de vida de los habitantes de estos.

Para el jugador dos el participar en el programa de amnistía fiscal domina al de no participar cuando **y > z** es decir si:

$$p_4(CEF + \sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI) > CFA + \sum_{t=a}^{\infty}\delta^n PCI. \qquad (2.53)$$

Esta desigualdad se cumplirá cuando las multas, los recargos y actualizaciones que se deban pagar por concepto de evasión multiplicados sean los suficientemente altos como para que aún multiplicados por p_4 estos sean mayores que CFA, por otro lado mientras mayor considere el evasor que será la probabilidad de ser detectado la desigualdad anterior se cumple más fácilmente.

Es importante señalar la probabilidad de detección percibida por el contribuyente (p_4), no necesariamente es igual a la probabilidad que considera el órgano fiscalizador de detectar una evasión (p_3). Pues, acciones tales como el envío de correspondencia a los contribuyentes, advirtiendo de los riesgos de la subdeclaración, o publicitar la adquisición de nueva tecnología que permitirá un mejor control de las declaraciones, solicitar una cantidad mayor de declaraciones informativas que puedan utilizarse como método de detección de presuntas irregularidades fiscales, publicidad en los medios masivos de comunicación en los que se cree algún tipo sensación psicológica de un incremento en la capacidad recaudatoria pueden aumentar la sensación de control en los contribuyentes, con un consiguiente incremento en el valor de p_4.

Analicemos ahora cada uno de los casos:

CASO 1:

Ambas desigualdades se cumplen, entonces eliminando las estrategias dominadas como se detalla en la siguiente matriz de pagos, entonces se observa que la entrada (IAF,AAF) es un equilibrio de Nash para este juego:

$$\begin{array}{c} \\ \textbf{AAF} \\ \textbf{NAAF} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{IAF} & \textbf{NIAF} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} (w,z) & (x,y) \\ \cancel{(w,y)} & \cancel{(x,y)} \end{array}\right] \end{array}$$

Figura 2.6 Dominancia en la matriz de pagos del juego de evasión y amnistía fiscal

CASO 2:

Ninguna de las desigualdades anteriores se cumple, entonces eliminando nuevamente las estrategias dominadas como se detalla a continuación el equilibrio de Nash para ambos jugadores es el punto (NIAF,NAAF)

$$\begin{array}{c} \\ \textbf{AAF} \\ \textbf{NAAF} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{IAF} & \textbf{NIAF} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \cancel{(w,z)} & \cancel{(x,y)} \\ (w,y) & (x,y) \end{array}\right] \end{array}$$

Figura 2.7 Dominancia en la matriz de pagos del juego de evasión y amnistía fiscal

CASO 3:

Se cumple únicamente la desigualdad de la ecuación 2.45 y no se cumple la desigualdad de la ecuación 2.44 entonces descartando las estrategias dominadas como se muestra a continuación, el equilibrio de Nash se da cuando los juegan lo siguiente (NAAF,IAF).

	IAF	NIAF
AAF	~~(w,z)~~	~~(x,y)~~
NAAF	(w,y)	(x,y)

Figura 2.8 Dominancia en la matriz de pagos del juego de evasión y amnistía fiscal

CASO 4:

No se cumple la desigualdad de la ecuación 2.45 y se cumple la desigualdad de la ecuación 2.44 entonces descartando las estrategias dominadas como se muestra a continuación, el equilibrio de Nash se da cuando se juego lo siguiente (NAAF,NIAF).

	IAF	NIAF
AAF	(w,z)	(x,y)
NAAF	~~(w,y)~~	~~(x,y)~~

Figura 2.9 Dominancia en la matriz de pagos del juego de evasión y amnistía fiscal

El caso en el que las ecuaciones que componen las desigualdades del punto son iguales es el caso de plena recaudación, el cual en la práctica fiscal solo se cumple en algunos países desarrollados.

Ciertamente para algunos casos este tipo de medidas fiscales llega a desincentivar la participación de una parte de los contribuyentes cumplidos, pues estos sienten que pueden evadir impuestos en este momento y pagarlos después sin que por ello se generen multas o recargos, este tipo de reacciones dependerá principalmente de dos factores: de la actitud del contribuyente cumplido ante el riesgo de ser detectado por el fisco antes de que se presente el programa de amnistía fiscal, y de la percepción que tengan estos participantes de que estas medidas se presentará nuevamente, es por ello que resulta importante que el órgano fiscalizador envíe el mensaje a los contribuyentes de que esta medida es de carácter temporal y que no se tenga certeza de que se presentará nuevamente.

CASO MEXICO

En México que se calcula que del Impuesto Sobre la Renta (ISR), sólo el 30% de las personas registradas en ese impuesto cumplen con el correspondiente pago, pues es tan complejo el sistema y deficiente la administración tributaria que el resto obtienen algún tipo de subsidio o beneficio fiscal, mientras que solo 55% del consumo nacional paga el Impuesto al Valor Agregado (IVA), pues en este caso la evasión se produce al no existir comprobantes de la transacción de venta; esto se traduce en una evasión de 34.5 y 45.7% de la recaudación potencial, es decir en el 3.15[19]% del PIB.

Por otro lado, a pesar de las políticas para controlar el gasto por conceptos administrativos como son: la comunicación social, servicios personales, gastos de orden

[19] En el año de 1995 se evadió más del 1.3% del PIB, mientras que 1996 se evadió el 1.6% del PIB, y a la fecha se detecto que en el año 2001 se falsificaron más de 35 millones de comprobantes fiscales sin que al momento se hubiese estimado el monto que representará dicha evasión.

social, entre otros, el gasto público no se ha podido reducir, además de las crecientes necesidades sociales, que generan una gran presión para que la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP), eleve el ingreso por concepto de recaudación, lo que la obliga a buscar mecanismos que eviten la evasión e incremente el ingreso.

Observando lo anterior la SHCP, desarrolló un programa denominado "Cuenta Nueva Y Borrón" cuyo fin es alentar al contribuyente a que cumpla "espontáneamente" sus obligaciones fiscales. Este programa busca también que el contribuyente que disfruto del beneficio, no falle en la declaración de sus siguiente ejercicios (es decir, lo convierte en un participante cautivo, fácil de identificar en caso de que falle en sus declaraciones posteriores).

Para obtener el beneficio del Programa de Cuenta Nueva y Borrón, los contribuyentes deberán declarar correctamente el ejercicio fiscal correspondiente al año 2000. Quienes así lo hagan no requerirán ya corregir los cuatro ejercicios anteriores (no se debe olvidar que los delitos fiscales prescriben después del quinto año).

Lo anterior está condicionado a que el contribuyente siga declarando correctamente, es decir, este beneficio se puede mantener si se declaran correctamente los ejercicios correspondientes a 2001, 2002, 2003 y 2004, ya que si en alguno de éstos se detectan irregularidades, la autoridad fiscal podrá liquidar los ejercicios anteriores, aun cuando provisionalmente hayan sido protegidos con la declaración correcta del ejercicio posterior.

Es importante señalar, que el beneficio no limita las facultades que tiene la autoridad fiscal para determinar contribuciones de ejercicios anteriores al 2000, entre otros, en los siguientes casos:

- Tratándose de la revisión de dictámenes sobre estados financieros formulados por contador público registrado, cuando la revisión se inicie antes de septiembre de 2001.
- Cuando la autoridad inicie sus facultades de comprobación antes de abril de 2001.
- Cuando en cualquiera de los ejercicios de 2000 a 2005, no se hubiere presentado declaración del ejercicio de alguna contribución, o bien, se haya incurrido en alguna irregularidad como puede ser: no efectuar el pago de la participación de los trabajadores en las utilidades (PTU); efectuar compensaciones o acreditamientos improcedentes; omitir en más del 3% el pago de contribuciones, ya sea por adeudo propio o por las que se debieron retener, así como obtener devoluciones improcedentes por más del 3% de las contribuciones declaradas; omitir o proporcionar información equivocada sobre el valor de los actos o actividades que se realizan en cada Estado cuando se tengan establecimientos en los mismos (en más del 3% de las cantidades que debieron proporcionarse en la información, así como no solicitar su inscripción al RFC, o no presentar el aviso de cambio de domicilio, salvo presentación en forma espontánea).

No se podrán beneficiar con esta medida, las siguientes personas, entre otras:

- Empresas que consolidan para efectos fiscales.
- Quienes celebran operaciones con partes relacionadas residentes en el extranjero.
- Instituciones de crédito, de seguros y de fianzas, almacenes generales de depósito, administradoras de fondos para el retiro, arrendadoras financieras, casas

de bolsa, casas de cambio, empresas de factoraje financiero y sociedades financieras de objeto limitado.

Este beneficio tampoco será aplicable cuando la autoridad determine contribuciones, en los siguientes casos, entre otros:

- Tratándose de aportaciones de seguridad social.
- Aquéllas que se causen en la importación de bienes.
- Los impuestos sobre tenencia o uso de vehículos y sobre automóviles nuevos.
- Cuando la determinación de la contribución derive de: omisión de ingresos provenientes del extranjero o no se acepten las deducciones de gastos o inversiones realizadas en el extranjero.
- Por el ejercicio de liquidación.
- Por el ejercicio por el que se hubiera presentado aviso para dictaminar estados financieros y el dictamen no se haya presentado oportunamente.

Este programa ha generado una recuperación por concepto mayor a la que se venía obteniendo en ejercicios anteriores, ya que muchos contribuyentes están dispuestos a participar en este programa a cambio de regularizar su situación fiscal, por lo que ha sido ampliado en múltiples ocasiones, buscando una mayor recuperación.

Dados los antecedente antes mencionados en nuestro caso como país, se cumplen los supuestos del caso 1, encontrándonos entonces que programas como el de Cuenta Nueva y Borrón, así como muchos otros que se llevan a cabo por ejemplo en el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), el Instituto Nacional del Fondo Nacional de Vivienda para los Trabajadores (INFONAVIT), donde al igual que el caso del IMSS, se condonan los pagos de recargos, en caso de pagar los adeudos que se tienen con el instituto antes de que estos sean detectados por dichos organismos; así como los de los gobiernos estatales y municipales, que tratan de incentivar el pago de agua, predial, impuestos sobre nominas, condonando los pagos de multas y recargos cuando éstos se hagan *espontáneamente, generan un **equilibrio de Nash** en el juego de la amnistiad fiscal.*

Simultáneamente en países como los Estados Unidos, Holanda, Japón entre otros, este tipo de programas no existe pues al tener tasas de recaudación muy altas (mientras en México genera ingresos tributarios de 14.7% del PIB, el promedio en Estados Unidos de 27.5 por ciento, es decir el doble), además de contar con una administración fiscal eficientes, se encuentran en el caso número 2, pues no obtienen ningún beneficio, pues es mayor lo que pueden recuperar con los sistemas de detección de evasión tributaria, sumado con las multas que de ésto se generan.

CASO ARGENTINA

A finales del año 2001, se presentó en Argentina una crisis económica, uno de los análisis reportado por el Banco Mundial indica que uno de los principales motivos de este desajuste económico se encuentra precisamente en la falta de recaudación fiscal, lo que generó déficit público, lo que a su vez desencadenó parcialmente la crisis que cinco meses después los sigue aquejando.

En este caso queda de manifiesto que si los participantes en el juego de la evasión fiscal asumen posiciones de no-negociación ambos pierden.

Analizando, a través de la Teoría de Juegos se observa que el gobierno juega primero, estableciendo las normas aplicables en materia de pagos al fisco, pero en respuesta los contribuyentes pueden pagar o no, conforme lo establecen estas leyes, por otro lado si estos últimos demuestran su descontento no pagando impuestos, el gobierno puede optar por tratar de negociar con ellos estableciendo medidas que generen ingresos fiscales o no negociar y establecer políticas que amenacen a los contribuyentes, tal es el caso del encarcelamiento o el pago de multas muy elevadas.

El gobierno argentino optó por la segunda opción, es decir los montos de las multas que se aplican a los evasores se incrementaron a un 400%, se implementaron mecanismos de amenaza a los empresarios que contratan personal, para que éstos se registren ante el fisco, buscando tener un mayor número de contribuyentes cautivos.

En respuesta, los contribuyentes continuaron evadiendo (se estima que el 40% de los contribuyentes evaden por un monto aproximado de 17,700 millones de dólares), creando un déficit fiscal cada vez mayor, situación que económicamente se convirtió en un circulo vicioso que agudizó las condiciones que propician una crisis, tales como el desempleo o la inflación.

De lo anterior se concluye, que de haber existido un programa de amnistía fiscal que incentivara la participación de los contribuyentes, los ingresos del estado hubiesen sido mayores, propiciando una mejor asignación de los mismos, beneficiando a los sectores de la sociedad que más lo necesitan, así como incentivar la producción y otras actividades económicas, evitando con ello que se presentará una crisis económica tan fuerte, que derivó en problemas sociales y políticos severos.

Cuando no existe negociación en este tipo de problemas que enfrentan sociedades y gobiernos, se merma la existencia de ambos, situación que se pierde de vista en muchas ocasiones, no hay que olvidar que en una sociedad el equilibrio genera mayor bienestar para todos los participantes, misión que debe de ser liderada por el gobierno y apoyada por los que la conforman, en caso contrario todos se ven afectados al corto, mediano y largo plazo, perdiendo solvencia y poder adquisitivo, así como propiciando el incremento de la delincuencia, la inseguridad pública, la desigualdad social, el descontento social, la corrupción y otros vicios sociales, que han perseguido a los países latinoamericanos durante siglos.

Como conclusión de los temas desarrollados en esta sección, se observa que mientras no exista una equidad impositiva será necesario implementar programas como el de "Cuenta Nueva y Borrón" que le permitan recuperar al gobierno parte de los impuestos que como consecuencia de su ineficacia no le ha sido posible recolectar.

LA EVOLUCIÓN DE LAS ESPECIES Y EL EQUILIBRIO DE NASH

Una de las áreas en la que la Teoría de Juegos y el Equilibrio de Nash tienen los avances más prometedores es en la Biología Evolutiva, esto es por la sencillez con la que mediante los juegos se puede describir el equilibrio evolutivo, en comparación con modelos como los descritos mediante ecuaciones diferenciales.

Para iniciar el estudio de la interacción de las especies dentro de la evolución de las especies será necesario describir el siguiente juego:

3.1 EL JUEGO DE LA GALLINA

Sea el juego donde existen dos jugadores uno de los cuales juega la estrategia paloma y el otro la estrategia halcón[20], cuya diferencia en conductas estriba en que al encontrarse dos organismos que juegan paloma ambos comparten el territorio, mientras que si se encuentran un organismo paloma con un halcón, halcón se queda con la mayor parte del territorio, y paloma con una parte menor, por otro lado si en encuentras dos organismos halcón pelearán por el territorio produciendo una perdida para ambos.

Este juego genera la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & \quad H \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ H \end{array} & \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}v) & (z, v) \\ (v, z) & (w, w) \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 3.1 Matriz de pagos del juego de la Paloma y el Halcón

Donde v y z representan el territorio ganado y w es la pérdida de ambos jugadores.

El juego tiene tres soluciones que llevan a un equilibrio de Nash, dos con estrategias puras (halcón, paloma), (paloma, halcón) y una que utiliza las estrategias mixtas con ½ de probabilidad cada una de ellas.

3.2 LOS REPLICADORES

Definimos "replicador" al agente que determina el comportamiento instintivo codificado en los genes, siendo en éste donde se guarda toda la información que determina la conducta instintiva de los organismos, adicionalmente se recrea a sí mismo al reproducirse, es decir es capaz de autocopiarse.

En resumen un replicador es un "algo" que se copia así mismo y elige una conducta estratégica en el juego de la evolución.

[20] *El nombre de las estrategias no debe de interpretarse como que los participantes del juego son halcones y palomas.*

Para poder sobrevivir los replicadores necesitan organismos donde hospedarse, pero ellos mismos generan a los seres en los que se hospedan, entonces la supervivencia de un replicador depende de las características de adaptabilidad que confiere a su anfitrión.

Simultáneamente, los replicadores utilizan el mismo hospedador para relacionarse entre sí convirtiendo esta interacción de supervivencia en un juego en el que la utilidad esperada se describe por el número de organismos que después del proceso de *reproducción tienen el mismo replicador (es decir la supervivencia del replicador).*

En resumen la relevancia de la teoría de juegos en este modelo radica en que la supervivencia de un organismo depende del replicador al que hospeda y a los replicadores que son hospedados por los otros organismos con los que se interrelaciona; donde cada uno de ellos tiene como objetivo maximizar la adaptación de sus hospedadores, considerando la conducta de los otros individuos de la población donde se hospedan los replicadores.

3.3 ADAPTACIÓN

Para describir el juego de la adaptación supondremos que los organismos juegan el juego de la gallina descrito anteriormente, adicionalmente supondremos que la reproducción de estos seres es asexuada y tiene el siguiente ciclo; durante un día cuyo valor no son 24 horas, sino una fracción τ de un año, durante el tiempo en que hay luz los organismos buscan comida, todos son igualmente eficientes buscándola, pero solo hay comida para alimentar a N organismos, y los seres que no logren alimentarse morirán.

Al anochecer los organismos supervivientes juegan el juego de la gallina para repartirse los nidos con los siguientes resultados: cuando dos organismos paloma se encuentran comparten el lugar obteniendo un resultado esperado[21] de $(U+1)\ \tau$ crías cada uno, mientras que si se encuentran un ser paloma con un halcón el segundo se quedará con el nido esperando $(U+2)\ \tau$ crías mientras que paloma (P) espera una resultado de $U\tau$, si ambos jugadores son halcón (H) pelearan por el lugar obteniendo $(U-1)\tau$, este juego tiene la siguiente matriz de pagos.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{P} & \mathrm{H} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{P} \\ \mathrm{H} \end{array} & \begin{bmatrix} (U+1, U+1) & (U, U+2) \\ (U+2, U) & (U-1, U-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

3.2 Matriz de pagos del juego de la Evolución

Como consecuencia del supuesto de la reproducción asexual y sin considerar que existan posibles mutaciones, se puede asegurar que los genes de una cría son iguales a los de su madre.

---

[21] **Es importante destacar que en poblaciones lo suficientemente grandes el valor esperado es muy aproximado al valor real.**

3.4 LA ECUACIÓN DEL REPLICADOR

Supongamos que el *número* de organismos P que sobreviven las horas de luz de cualquier día es (1-p(t)), entonces la proporción de organismos que juegan H es p(t).

Por lo tanto la ecuación de las crías esperadas por un organismo que hospeda el replicador paloma a la que denotaremos como f_p esta dada por:

$$\tau f_p(p) = 2\tau(U + (1-p)). \tag{3.1}$$

Que es lo que se obtiene de jugar paloma si el oponente juega con la estrategia (1-p, p). Es cierto que los organismos que participan en este juego no tiran aleatoriamente, más bien juegan en forma deterministica, pero el oponente contra el que juega si es aleatorio, *es decir la probabilidad de encontrar un oponente paloma es* (1-p), *mientras que no* hacerlo tiene como probabilidad p.

Considerando entonces que el número de organismos paloma que sobrevivieron en la luz de día y adicionándoles las cría que nacen durante la noche tenemos que el número esperado de seres con genes paloma esta determinado por:

$$N(1-p) + (1 + \tau f_p(p)). \tag{3.2}$$

Análogamente para el caso de los organismos que hospedan halcón el número de seres esta determinado por:

$$\tau f_H(p) = \tau(2U + 3(1-p) - p), \tag{3.3}$$

Entonces el número esperado de H que sobreviven a la luz del día se define por Np por lo que nacerán $Np(1 + \tau f_H(p))$.

Como a la mañana siguiente los organismos no recuerdan nada, es decir no van acumulando experiencias o acondicionamientos, la probabilidad de que se sobrevivan con relación a la de los organismos que nacieron por la noche es la misma.

Por lo anterior la fracción $p(t+\tau)$ de los organismos que hospedan al replicador H que llegan a la noche siguiente es la misma que la fracción de organismos que hospedan al replicador halcón la mañana siguiente. Asi:

$$p(t+\tau)=\frac{Np(1+\tau f_H(p))}{N(1+\tau \bar{f}(p))}=p(t)\frac{1+\tau f_H(p)}{1+\tau \bar{f}(p)}, \qquad (3.4)$$

donde $\tau\bar{f}(p)=(1-p)\tau f_p(p)+p\,\tau f_H(p)$, que es el número total de organismos de la misma especie a la mañana siguiente.

Restando p(t) de ambos lados de la ecuación y reacomodando los términos de la ecuación 3.5 obtenemos que:

$$\frac{p(t+\tau)-p(t)}{\tau}=p\left[\frac{f_H(p)-\bar{f}(p)}{1+\tau f(p)}\right]. \qquad (3.5)$$

Haciendo que $\tau \to 0$ en la ecuación 3.6 se tiene que la ecuación del replicador es:

$$p'(t)=p(t)\left[f_H(p)-\bar{f}(p)\right]. \qquad (3.6)$$

Donde $f_H(p)$ es la adaptación esperada conferida a los organismos que hospedan el replicador H, mientras que $\bar{f}(p)$ es la población media.

3.5 ¿QUIÉN SOBREVIVE?

Sustituyendo los valores de $\tau f_p(p)$ y $\tau f_H(p)$ de las ecuaciones 3.1 y 3.3 en 3.6 y desarrollando el lado derecho de la ecuación tenemos que:

$$\frac{dp}{dt}=p(1-p)(1-2p) \qquad (3.7)$$ [22]

Los puntos estacionarios de esta ecuación son p = 0, p = 1, p = ½, lo que puede ser *interpretado como que si el proceso empieza en cualquiera de estos puntos no se* desplazará de estos porque la tasa a la que empieza a moverse esta determinada por :

$$p'(0)=\bar{p}(1-\bar{p})(1-2\bar{p})=0 \qquad (3.8)$$

Por otro lado se observa que si p > ½ entonces la ecuación 3.7 es menor que cero, por otro lado si p < ½ la ecuación es mayor que cero lo que se refleja claramente en la siguiente gráfica:

[22] Como se puede observar la adaptación básica U se anula confirmando que solo los incrementos de adaptación no son relevantes

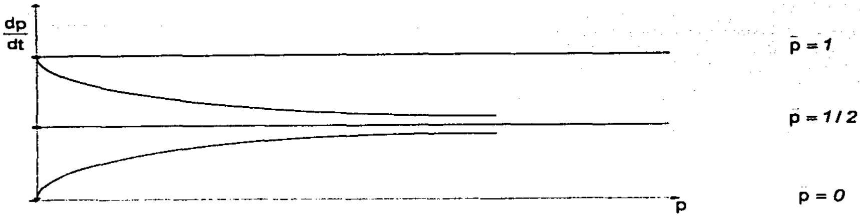

Figura 3.3 La ecuación de la sobrevivencia

De lo anterior se deduce que el punto p = ½ es un atractor local, mientras que los puntos p = 0 y p = 1, no resultan estables ya que el primero reflejaría la situación en la que no existen organismos halcón en la población, por lo que si se presentará un organismo halcón dentro de la población el replicador se iría incrementando hasta que ambas poblaciones sean iguales en número, lo mismo ocurre en el caso en el que p = 1, donde la población estaría compuesta únicamente por halcones y una invasión paloma tendría los mismos efectos que el caso anterior incrementado el número de organismos con replicador paloma en la población.

El único punto que se mantiene invulnerable frente a la invasión es p = ½ , que es el punto estacionario y simultáneamente es equilibrio de Nash en este juego, esto como consecuencia, de que al encontrarse al azar las parejas que componen el juego, la probabilidad de que dos organismos interactúen debe de ser la misma para poder mantener el equilibrio.

Ahora bien, en este caso los organismos no juegan aleatoriamente, es más bien la naturaleza la que lo hace, logrando que los resultados sean un juego de probabilidades, en el que la pareja que resulte a la ahora de anidar es una variable aleatoria.

Es importante destacar que en este caso se establecieron las reglas del juego suponiendo un determinado comportamiento dentro de la especie, pero estas podrán variar dependiendo de las características de la población en estudio, lo que derivará en otras condiciones de la matriz de pagos, pudiendo variar los equilibrios de Nash, pero siempre que se pueda modelar como un juego la interacción evolutiva de una especie, se podrá hallar un(os) equilibrio(s) de Nash que propondrá la solución óptima que previamente ya fue hallada por la naturaleza.

3.6 ESTABILIDAD EVOLUTIVA

En la aplicación de la teoría de juegos a la biología se considera que las mutaciones son la fuente de nuevas estrategias y la selección natural es el mecanismo que corrige los errores.

Cuando se piensa en las mutaciones como estrategias que conforman un juego en el que cada una de ellas tiene una cierta probabilidad de supervivencia, nacen la pregunta de hasta donde van evolucionar las especies y porque lo han hecho hasta ahora de tal o cual forma, para eso los biólogos han hecho diferentes estudios con resultados sorprendentes; pero haciendo una pausa en el camino analicemos la interacción de las especies de un cierto ecosistema como un gran juego, en el que el objetivo de cada uno de los participantes es la supervivencia.

Pensemos entonces en la idea del equilibrio biológico en el que para que un ecosistema se mantenga debe de existir un determinado número de cada uno de los organismos que lo conforman, ya que de no suceder así el ecosistema se va destruyendo lentamente y con esto las especies se condenan a la desaparición.

Bajo el supuesto anterior se entiende que si un organismo evoluciona demasiado volviéndose prácticamente inalcanzable para su predadores, el número de organismos que conforman dicha especie crecerá de forma en que este equilibrio se rompa, tal como si fuera un monopolio económico, generándose con ello un desequilibrio ecológico que llevaría al ecosistema a su destrucción.

3.7 INVASIONES MUTANTES

Consideremos como N el replicador "normal" de una cierta especie y M al replicador mutante, supongamos también que la población en la que se presenta esta mutación es de tamaño $\varepsilon > 0$, y que para que se dé estabilidad evolutiva el replicador deberá *extinguirse siempre que ε sea suficientemente pequeño.*

La siguiente figura representa una tabla de adaptación donde (N,M) es la adaptación de un organismo que hospeda N cuando se enfrenta a otro que enfrenta M.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (1-\varepsilon) & \varepsilon \\ N & M \end{array} \\ \begin{array}{c} N \\ M \end{array} & \begin{bmatrix} f(N,N),f(N,N) & f(N,M),f(M,N) \\ f(M,N),f(N,M) & f(M,M),f(M,M) \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 3.4 Tabla de adaptación

Ahora bien la probabilidad de que un organismo se enfrente a otro que tiene el replicador N esta dada por $1-\varepsilon$, mientras que la de encontrarse con un organismo con replicador M esta definida por ε, entonces la adaptación de un organismo con replicador N esta dada por:

$$(1-\varepsilon)f(N,N)+\varepsilon f(N,M) \qquad (3.9)$$

Por otro lado la adaptación de M está dada por :

$$(1-\varepsilon)f(M,N)+\varepsilon f(M,M) \qquad (3.10)$$

Para que una invasión mutante sea repelida es necesario que el número de organismos mutantes sean menos aptos que los organismos normales es decir:

$$(1-\varepsilon)f(N,N)+\varepsilon f(N,M) > (1-\varepsilon)f(M,N)+\varepsilon f(M,M) \qquad (3.11)$$

Como la adaptación evolutiva depende de cómo se juega el juego, supongamos que se trata de cualquier juego bimatricial simétrico, donde las casillas en la matriz A de n x n, donde A representa la ganancia del jugador uno, se interpretan como los incrementos de adaptación del jugador uno, análogamente y bajo el supuesto de que se trata de un juego bimatricial simétrico el pago del jugador dos esta dado por A^T de n x n, tal como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad p \quad & \quad q \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{bmatrix} p^TAp, p^TAp & q^TAp, p^TAq \\ p^TAq, q^TAp & q^TAq, q^TAq \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 3.5 Juego bimatricial de adaptación

3.8 EQUILIBRIOS DE NASH SIMÉTRICOS

Una estrategia mixta en un juego bimatricial de n x n es un vector columna n x 1 donde el pago del jugador uno al usar la estrategia mixta p cuando el jugador II usa la estrategia mixta q esta dada por $\pi_1(p,q) = p^TAq$, mientras que el pago del jugador dos se define por $\pi_2(p,q) = p^TBq = q^TAp$, y por lo visto en el capítulo un el equilibrio de Nash tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\pi_1(p,q) \geq \pi_1(p^*,q) \\ &\pi_2(p,q) \geq \pi_2(p,q^*) \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Por las características del juego, aquí solamente nos interesan los equilibrios de Nash en los que p = q, entonces la primera ecuación de 3.13 se puede reescribir como:

$$\pi_1(p,p) \geq \pi_1(p^*,p) \qquad (3.13)$$

Visto de otra forma la condición para que (p,p) sea un equilibrio de Nash en este juego es que la condición 3.14 se cumpla para todas las estrategias p*, lo que asegura que p es una respuesta óptima para ambos jugadores.

3.9 ESTRATEGIAS EVOLUTIVAMENTE ESTABLES

Se dice que una estrategia es evolutivamente estable cuando para cualquier ε>0 suficientemente pequeño se cumple que:

$$(1-\varepsilon)\pi_1(p,p)+\varepsilon\pi_1(p,q) > (1-\varepsilon)\pi_1(q,p)+\varepsilon\pi_1(q,q) \tag{3.14}$$

donde el replicador N induce a su hospedador a usar la estrategia mixta p, mientras que el replicador mutante juega la estrategia mixta q.

Lo descrito anteriormente nos lleva al siguiente lema:

Lema 3.1 Una condición necesaria y suficiente para que p sea una estrategia evolutivamente estable es que:

$$\begin{array}{l} (1)\ \ \pi_1(p,p) \geq \pi_1(q,p) \qquad \forall p \\ y \\ (2)\ \ \pi_1(p,p) = \pi_1(q,p) \Rightarrow \pi_1(p,q) > \pi_1(q,q) \qquad \forall\, \mathrm{p} \neq \mathrm{p}. \end{array} \tag{3.15}$$

La demostración se puede encontrar en el libro Teoría de Juegos de Binmore página 144.

Se puede observar que (1) implica que p es un equilibrio de Nash como el que se definió en la ecuación 3.13, es decir p es una respuesta óptima a sí misma, mientras que (2) nos pide que consideremos una respuesta óptima alternativa q, en cuyo caso se demuestra que p es evolutivamente estable si es una mejor respuesta a q que incluso q misma.

Hasta ahora hemos supuesto que los organismos pueden hospedar un sólo replicador, *pero estudiando el juego de la gallina se descubre que poblaciones polimorfas pueden* resultar estables es decir los diferentes animales pueden hospedar diferentes hospedadores.

Si para derivar la ecuación del replicador se utiliza la matriz de pagos definida en la figura 3.5, (en lugar de la que pertenece al juego de la gallina), considerando n replicadores y no dos para cada estrategia pura, entonces el estado de la población estará determinado por $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)^T$, en el p_i representa la fracción de la población que hospeda el replicador i-eximo. Calculando la adaptación $f_i(p)$ a partir de la matriz A siguiendo el mismo procedimiento que el de la sección 3.4 se deduce que la ecuación del replicador tiene la siguiente forma:

$$p'_i = p_i\left[f_i(p) - f(p)\right] \tag{3.17}$$

Proposición 3.1 Sea A una matriz simétrica 2 x 2 cuyas filas son idénticas, cuando $n = 2$ se cumple que:

(1) La matriz de pagos A siempre admite por lo menos una estrategia evolutivamente estable p.

(2) Un estado de la población p es un atractor asintótico de la dinámica de los replicadores si y solo si p es una estrategia evolutivamente estable.

Esta proposición no se puede generalizar para el caso de matriz de pagos de n x n donde $n > 2$, para estos casos se tiene la siguiente proposición.

Proposición 9.6.1. Sea p un vector de n x 1 cuyas coordenadas no son negativas y suman uno. Para cualquier juego simétrico de n x n se cumplen las siguientes implicaciones.

(1) p es una estrategia evolutivamente estable; $\Rightarrow$

(2) p es un atractor asintótico de la dinámica de los replicadores; $\Rightarrow$

(3) p es un equilibrio de Nash; $\Rightarrow$

(4) p es un punto estacionario de la dinámica de los replicadores.

3.10 LA EVOLUCION DE LA COOPERACIÓN

Hasta ahora se ha analizado un juego en el que los organismos no tienen aprendizaje alguno mientras llevan a cabo un juego, pero cuando se enfrenta entre sí en un juego repetido participantes limitadamente racionales, se vuelve importante considerar como evoluciona el aprendizaje de estos organismos.

Un replicador que no prepare a su hospedador para responder al juego de su oponente esta condenado a la desaparición.

Analicemos entonces el siguiente juego:

Si dos replicadores halcón se enfrentan, pueden resultar lesionados, poniendo en riesgo la supervivencia del replicador pues un organismo afectado tiene menos posibilidades de hallar comida y poder sobrevivir durante el día, ante estos casos se ha observado que entre individuos de la misma especie suelen presentarse mediante una lucha ritual, en la que ambos animales exponen únicamente sus habilidades y coraje, ante lo que alguno de los dos cede evitando con ello lesionarse mutuamente.

Bajo este supuesto definimos la siguiente matriz de pagos de un juego que es una versión enriquecida del juego de la gallina, al que se agregaran las estrategias **fanfarrón y vengador**.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{P} & \mathbf{H} & \mathbf{F} & \mathbf{V} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{array} &
\begin{bmatrix}
(1,1) & (2,0) & (2,0) & (1+\varepsilon,1-\varepsilon) \\
(0,2) & (-1,-1) & (0,2) & (-1-\varepsilon,-1+\varepsilon) \\
(0,2) & (2,0) & (1,1) & (2,0) \\
(1-\varepsilon,1+\varepsilon) & (-1+\varepsilon,-1-\varepsilon) & (0,2) & (1,1)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Figura 3.6 Juego de la gallina enriquecido.

Un organismo con un replicador fanfarrón no lucha nunca, pero se exhibe como si estuviera dispuesto a hacerlo, a esta estrategia sólo ceden los organismos paloma.

Mientras que un organismo vengador simplemente juega pacíficamente actuando como un organismo paloma hasta la primera muestra de agresividad de su oponente, ante lo que responde agresivamente.

El valor $\varepsilon > 0$, se incluyo para dar a halcón una ligera ventaja sobre vengador, ya que un organismo halcón tendrá la iniciativa de un enfrentamiento, simultáneamente vengador tiene una ligera ventaja sobre paloma ya que paloma bajo ningún caso se enfrentará a un organismo fanfarrón.

El vector $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$ define una población cuatridimensional, representada en el tetraedro de la siguiente figura.

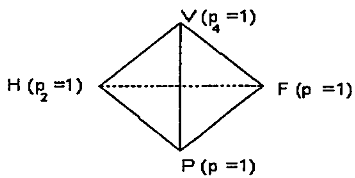

Figura 3.7 Representación gráfica del juego de la gallina enriquecido.

Desdoblando las caras del tetraedro y considerando las trayectorias de la dinámica del replicador (figura 3.8), se encuentran tres puntos estacionarios M, N y V los que *corresponden a una población polimórfica compuesta en el primer caso por mitad de* halcones y fanfarrones, en el segundo caso por mezcla de halcones y palomas y por último una población formada únicamente por vengadores. La proposición 3.2 establece que cada uno de estos puntos es un equilibrio de Nash, pero como no son atractores locales no corresponden necesariamente a una estrategia evolutivamente estable. M y V son atractores locales, lo que tampoco implica necesariamente que sean evolutivamente estables, pero en este caso si sucede así.

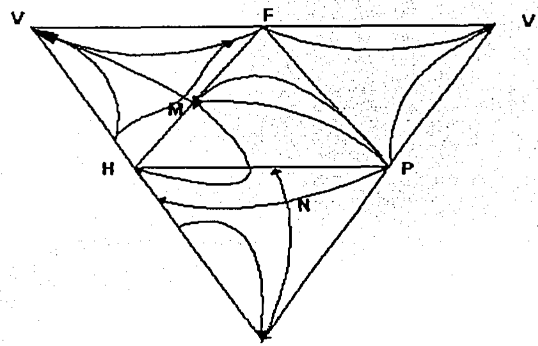

Figura 3.8 Dinámica de los replicadores para el juego de gallina enriquecido.

Es importante destacar que en este caso la cooperación no triunfa necesariamente, como es el caso del equilibrio M, que es equivalente al equilibrio halcón-paloma descrito anteriormente, en el que los fanfarrones desplazan a las palomas, como resultado de la exhibición que estos hacen de las habilidades que no poseen ni están dispuestos a utilizar, lo que nos lleva a suponer que los organismos paloma que se dejaron engañar por esta demostración de los organismos fanfarrón ya no sobrevivan.

Por otro lado en el caso del equilibrio V, es evidente que lo que lleva a la sobrevivencia del replicador es la cooperación de los organismos que se comportan como palomas y se dividen los recursos entre ellos, pero como es que llega el replicador V a sobrevivir en el *caso en el que en el instante cero la población solo tiene un número positivo de* replicadores P, H y F, en el campo de atracción del atractor M, en cuyo caso un número pequeño de mutaciones V no sobreviviría, entonces surgen dos escenarios, uno en el que se supone que todas las mutaciones empezaron a darse en una localidad especifica, logrando sobrevivir pues el replicador mutante representa un número importante de la pequeña población en la que apareció, lo que le permitirá ir creciendo en número y después difundirse dentro de todo el hábitat, permitiendo con ello que la población local se encuentre en un punto fuera del dominio del atractor local M. Entonces el área de dominio se irá expandiendo hasta que la evolución halla creado un mundo cooperativo para estos organismos.

Para recrear que es lo que sucede en el caso de que un juego se repita indefinidamente, Robert Axerold, en su trabajo Evolution of Cooperation, describe dos competencias informáticas en las que se presentaron diferentes programas que habían de competir entre sí en el dilema del prisionero repetido. La estrategia hago lo mismo que mi *compañero (TIT-FOR-TAT) descrita en el apartado de autómatas finitos del capítulo uno*, ganó en todas las ocasiones, de este resultado partió para simular un proceso de competencia en el que las estrategias que no han tenido éxito en el pasado no serán

CONCLUSIONES

Del presente trabajo se concluye que el Teorema de Nash puede ampliar sus alcances a diferentes ámbitos de la ciencias, más allá de la economía y de la biología, ya que toda interacción que pueda ser modelada como un juego finito tendrán al menos un equilibrio de Nash, lo que permite una relación equitativa entre los individuos.

Por otro lado se observa en los diferentes desarrollos de este trabajo que el equilibrio de Nash permite la sobrevivencia, es decir para que el mercado pueda mantener una relación que facilite la participación de los inversionistas es necesario que este se mantengan en equilibrio, ya que en caso contrario algunas empresas desaparecen constituyéndose pequeños monopolios que en la practica dañan a la economía en general, causando con ello su propia desaparición en el largo plazo.

Es el mismo caso con el pago de los impuestos por parte de la sociedad, como lo muestra Suiza y en caso contrario Argentina ya que demuestran que la población de un Estado que percibe que el pago de impuestos como una contribución justa con el beneficio que recibe, cumplirá con sus obligaciones tributarias sin la necesidad de ser amenazados o coaccionados para hacerlo, generando con ello la estabilidad económica que el país requiere para su desarrollo, es decir permitiendo al gobierno y a ellos mismos una buena calidad de vida, mientras que en el caso contrario solo se propicia la quiebra del país generando crisis económicas con todas las consecuencias que de esta se derivan.

Así mismo se encuentra el equilibrio evolutivo que es el que permite que los ecosistemas mantengan otro equilibrio de interrelación en el que las especies deben de mantener ciertas características físicas que les permitan matar o ser muertas como depredadores naturales, ya que si una sola de las especies evolucionara de forma tal que no pudiera ser cazada, o al contrario fuese imposible no ser cazado por esta, poco a poco terminaría con su entorno natural condenándose con ello a la desaparición pues al no existir más alimento no es posible sobrevivir.

Por último solo resta decir que el equilibrio al que se permite llegar mediante la aplicación de Teorema de Nash a través de la Teoría de Juegos y en el que los participantes se mantienen permite la superviviencia y desarrollo no solo de las sociedades que conformamos, sino también de la vida natural de que la formamos parte como seres vivos.

APÉNDICE 1

BIOGRAFIA DE JONH NASH

Nash nació el 13 de junio de 1928 , en Bluefield, Virginia del Este, en el sanatorio Bluefield, un hospital que a la fecha no existe.

Su padre Jonh Nash Sr, , fue un ingeniero eléctrico y llego a Bluefield a trabajar para la compañía de electricidad de servicio publico, la cual era y es la compañía de Poder Eléctrico de los Apalaches. El era veterano de la Primera Guerra Mundial, sirvió en Francia como Teniente, en los servicios complementarios y como consecuencia no combatió en las líneas. Originario de Texas obtuvo su grado profesional en la Escuela de Agricultura y Mecánica de Texas.

Su madre, Margaret Virginia Martin, nació en Bluefield. Estudio en la Universidad del Este *de Virginia, fue profesora de ingles y algunas veces de latín, hasta antes de casarse.* Su vida posterior se vio seriamente afectada por una perdida parcial del oído, resultado de una fiebre escarlatina, que padeció cuando era estudiante universitaria.

Sus abuelos maternos llegaron a Bluefield de sus hogares originales en el este de Carolina del Norte. Su abuelo, Dr. James Everett Martin, estudio medicina en la Universidad de Maryland en Baltimore, y fue a Bluefield, que entonces crecía rápidamente en población. Pero en los siguientes años el Dr. Martin llego a ser un prospero inversionista en las propiedades inmobiliarias y dejó un poco de lado la medicina.

Tuvo una hermana Martha, quien nació, en noviembre 16 de 1930.

La escuela la curso en Bluefield, desde el jardín de niños hasta la escuela elemental. Sus padres le regalaron una enciclopedia, que junto con otros libros que habia en la casa de sus abuelos fueron sus amigos inseparables de la niñez. Llego a apartarse tanto de otros niños de su edad que sus padres decidieron que tuviera otro tipo de actividades fuera de la escuela y convencieron a su hermana para que lo incluyera en su circulo de amigos, pero él continuaba con su afición primordial por los libros.

Cuando era estudiante del bachillerato, leyó "Los Hombres Clásicos de las Matemáticas" por E.T. Bell, tuvo bastante éxito con el estudio del Teorema Clásico de Fermat, acerca de un entero multiplicado p veces por si mismo cuando p es un número primo.

Más adelante se incorporó al Tecnológico de Carnegie en Pittsburgh (ahora Carnegie Mellon U.) como estudiante de Ingenieria Electrónica. Pero después de un semestre reaccionó negativamente al régimen de cursos tales como mecánica gráfica, y cambió de carrera para estudiar química únicamente. Pero otra vez, después de continuar con la química por un rato encontró dificultades en el análisis cuantitativo, donde la cuestión no era que también se podria pensar, aprender o entender hechos, sino más bien que tan *bien podia manejar la pipeta y realizar experimentos en el laboratorio. Por ese entonces la* Facultad de Matemáticas y su tutor lo animaban a cambiar a la carrera a Matemáticas, cambió nuevamente de carrera se hizo oficialmente un estudiante de matemáticas. Llegó a progresar tanto que le dieron el grado de "Master in Science", además de su grado de bachillerato cuando se graduó.

En ese momento le ofrecieron becas para entrar como estudiante graduado en Harvard o Princeton. Pero por razones personales y económicas prefirió aceptar la beca de Princeton.

Mientras estaba en el Carnegie, tomó un curso electivo el "Economía Internacional", y como resultado de las ideas y problemas expuestos, llegó a la idea de poner en papel el "Problema de la Negociación", el cual fue publicado en econometría. Y fue esta la idea *cuando era estudiante graduado de Princeton la que estimuló sus estudios en la "teoria de* juegos" de Von Neumman y Morgensten, que conjuntamente con su amplio estudio matemático condujo a los "juegos no cooperativos" al mismo tiempo descubrió algo referente a los múltiplos y a las variedades algebraicas verdaderas.

Las ideas de la teoría de juegos, se desviaron algo de la "línea" de los estudios de Von Neumann y del libro de Morgesten, y fueron validadas como tesis de doctorado para las matemáticas, fue más tarde mientras era instructor del M.I.T., que preparó el trabajo de los múltiplos y las variedades algebraicas verdaderas para que fuesen publicados.

En 1951 cambió de Princeton al M.I.T. donde ingreso como "C.L.E. More Instructor" e impartió hasta que dimitió en 1959. Durante el año académico de 1956-1957, tuvo la concesión Alfred P. Sloan, y eligió pasar el año como miembro (temporal) del Instituto de Estudios Avanzados en Matemáticas en Princeton.

Durante este tiempo pensó solucionar un problema referente a la geometría diferencial, que tenia un cierto interés a las preguntas geométricas que se presentaban en relatividad general. Este era el problema para probar el problema de inmersión isotérmico de los múltiplos abstractos de Riemann en espacios planos (Euclidianos).

Mientras estaba de sabático en Princeton estudió otro problema que implicaba las ecuaciones diferenciales parciales, que para el caso de más allá de dos dimensiones se encontraba sin resolver. Aqui tuvo éxito en encontrar la solución al problema, pero tuvo la mala fortuna de que paralelamente Ennio de Giorgi de Pisa, Italia trabajaba en ese problema y fue el primero en alcanzar la cumbre (en la descripción figurativa del problema) por lo menos para el particular e interesante caso de la "ecuación elíptica".

En su año sabático comprendido entre 1956-1957, se casó con Alicia, una chica graduada en física del M.I.T, originaria del Salvador.

Los disturbios mentales (diagnosticado en un principio como esquizofrenia) empezaron en los primeros meses de 1959,. Y como consecuencia dimitió de su posición como miembro de la academia del M.I.T, a partir de entonces estuvo entrando y saliendo del hospital psiquiátrico. . En estos interludios de racionalidad tuvo éxito en hacer una cierta investigación matemática respetable. Así vino la investigación para "El problema de Cauchy para las ecuaciones diferenciales de un fluido general", la idea que el profesor Hironaka llamo el "Problema de Nash para la transformada" y los de la estructura de arco de singularidades y "Análisis de Soluciones de funciones Implícitas de problemas con datos analiticos".

Después de casi 30 años de ser tratado como esquizofrénico, se cambia el diagnostico a maniaco depresivo y el cambio de tratamiento le permitió regresar a su vida académica y entrar de lleno a la investigación matemática.

En el año de 1994 recibió el Premio Nobel, por los estudios realizados en referencia a los juegos No-Cooperativos.

Su vida se lleva a un libro "Beatifull Mind" Silvia Nassar 1996 y de ahí al cine en la Película "Beatifull Mind" dirigida por Ron Howard en el 2001.

BIBLIOGRAFIA

AMERICAN ECONOMIC ASSOCIATION
Ensayos Sobre Economía Positiva
Facultad de Economía.

ANTON H RORRES C.
"Elementary Linear Algebra"
John Wiley & Sons, INC, New York, 1991.

BINMORE KEN
"Teoría de Juegos"
Mc Graw Hill, Madrid, 1994.

DE LA HERRÁN GASCON MANUEL
"Una Introducción al Dilema del Prisionero"
www.eside.deusto.es/profesores/mherran/ia/va/adpintro.asp

HARAY FRANK
"Graph Theory"
Perseus Books Publishing, 1996

MARIN-ZAMORA L. CARLOS
"Teoría de la Organización, Mito y Poder de las Organizaciones"
Revista Acta Académica
www.uaca.ac.cr/acta/1998nov/cmarin.html

MARTINEZ PALACIOS MARIA TERESA VERÓNICA
"El Teorema del Equilibrio Nash y Teoría de la Negociación"
Tesis, Facultad de Ciencias
2001

MAYNARD SMITH JONH
"Evolution an the Theory of Games",
Cambrige, University Press, 1982.

MUSGRAVE RICHARD A.
"Teoría de la Hacienda Pública"
Juan Bravo, España 1968.

RAMÍREZ JOSE CARLOS
"Las Grandes Industria ante la Reestructuración, una Evaluación de las Estrategias Competitivas de las Empresas Lideres en México"
www.herodigital.unam.mx/ANUIES/colmex/foros/148/sec_7html.

RINAUDI LUIGI
"Mitos y Paradojas de la Justicia Tributaria",
Ariel, Barcelona 1988

TIROLE JEAN
"The Theory of Industrial Organization",
MIT Press, 1988.

VARIAN HAL R.
"Análisis Microeconómico",
Antonio Bosh, Barcelona 1992.

VERA DE SERIA VIRGINIA
M.C.E. VERSTRAETE JUAN
"Análisis de una Unión Aduanera Frente a la Demanda por Ingresar a un Tercer País, a la Luz de la Teoría de Juegos"
www.aaep/org.<r/espa/anales/comentarios-replicas.html