



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE NUDOS A LA TEORÍA ALGEBRAICA DE GRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

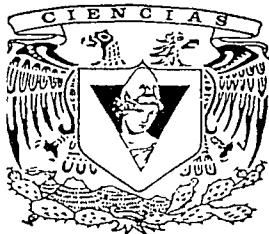
MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

DALIA SIGLER HERNÁNDEZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MARTHA TAKANE IMAY

CODIRECTOR DE TESIS:
DR. MAX NEUMANN COTO



2002
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Dalia Sigler Hernández

FECHA: 25 - Noviembre - 2002

FIRMA: (Firma)

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Una aplicación de la teoría de nudos a la teoría algebraica de gráficas"

realizado por Dalia Sigler Hernández

con número de cuenta 9758786-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dra. Martha Takane Imay

Propietario

Dr. Mario Eudave Muñoz

Propietario

Dr. Francisco Marmolejo Rivas

Suplente

Dr. Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega

Co-Director
Suplente

Dr. Max Neumann Coto

Consejo Departamental de Matemáticas

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE MATEMÁTICAS

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Es difícil describir en tan pocas palabras todo lo que tengo que agradecer por su compañía, atención y ayuda que me han brindado.

En principio agradezco a Martha y a Max por la presencia, comprensión, atención y gran apoyo que me han dado todo el tiempo.

Gracias Victoria por la comprensión y por ser una Maravillosa Mamá.

Gracias Papá por todo lo que me das sin reservas.

A mis queridos hermanos por estar a mi lado.

A mis queridos abuelitos por que donde quiera que estén, seguirán impulsando todo lo que hago.

Gracias Diana por esos días de intenso trabajo.

Agradezco a Ara y Elohim por todo su apoyo.

Edgar, gracias por escucharme y por las palabras de aliento que me has brindado.

Quiero agradecer a mis amigas Katia, Karina, Paúl, Gaby, Yola, Ale, Flor, Selene, Antonio, Arminda, Ana, Lilis, Norma, por todo lo que han hecho por mi, y disculpen los nombres que he omitido.

ÍNDICE

Introducción.	I
Capítulo I. Nudos.	
1.1. Nudos y enlaces.	1
1.1.3. Nudos equivalentes.	2
1.1.5. Nudos poligonales.	2
1.2. Movimientos elementales de nudos.	2
1.2.1. Nudos y enlaces Δ -equivalentes.	3
1.3. Proyecciones de un nudo o enlace.	4
1.3.1. Proyecciones regulares.	4
1.4. Movimientos de Reidemeister.	9
Capítulo II. La gráfica interior y exterior de un enlace y sus matrices laplacianas.	
2.1. Gráficas finitas.	18
2.1.3. Gráfica aplanable.	18
2.1.5. Gráfica signada.	19
2.1.6. La <i>matriz laplaciana</i> de una gráfica signada.	19
2.2. La gráfica dual de una gráfica.	20
2.3. Las gráficas interior y exterior de un enlace.	24
2.3.1. Bien colorear una gráfica.	24
2.3.2. Gráfica bipartita.	24
2.3.8. La gráfica signada interior.	26
2.3.9. La gráfica signada exterior.	28
Capítulo III. Equivalencia de Goeritz.	
3.1. Preliminares.	36
3.1.1. Matriz unimodular.	36
3.1.2. Suma directa de matrices.	36
3.1.3. Matrices Goeritz congruentes.	36
3.2. Los Teoremas.	37
3.2.1. El grupo abeliano asociado a un enlace.	38
Ejemplos de enlaces que no son Goeritz congruentes.	40
3.3. La demostración del Teorema 1.	40
Referencias.	65

INTRODUCCIÓN.

Sea G una gráfica finita, donde el conjunto de vértices se denota por $V(G)$ y $E(G)$ denota el conjunto de aristas, donde lazos y aristas múltiples son permitidos.

En esta tesis trabajaremos con *gráficas aplanables signadas*, es decir, asignaremos a cada arista de una gráfica el signo $+$ ó $-$, a la arista con signo $+$ la llamaremos *arista positiva* y con signo $-$, *arista negativa*. Sea $i \overset{\alpha}{\sim} j$ una arista α que une el vértice i con el vértice j , denotaremos por $sgn(\alpha)$ el *signo* de α donde, $sgn(\alpha) = +1$ si α es positiva y $sgn(\alpha) = -1$ si α es negativa.

Sea G una gráfica signada con n vértices, asociaremos a G , la forma entera cuadrática $Q(x)$ en n indeterminadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, dada por: $Q(x) = \sum_{i, j \in E(G)} sgn(\alpha)(x_i - x_j)^2$. Entonces existe una única matriz simétrica $L(G)$, para la cual $Q(x) = xL(G)x^t$ y la llamaremos la *matriz Laplaciana de G* .

Las matrices laplacianas y su forma cuadrática asociada han tenido en los últimos años mucha importancia, pues tienen interesantes aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas (álgebra, topología, teoría de nudos, teoría de gráficas, entre otras) así como en la química, ver [B], [Ch], [K], [K. II], [G M W], [K P].

En [B], Berman estudia las matrices laplacianas de gráficas planas y sus gráficas duales. En el artículo *Dual graphs and knot invariants*, de Lien y Watkins [LW] se extienden los resultados de Berman en dos direcciones, una es que obtienen sus resultados pero para *gráficas signadas* y la otra es que encuentran relaciones más fuertes entre $L(G)$ y $L(G^d)$, las matrices laplacianas de G y su gráfica dual G^d , pues son *esencialmente* congruentes unimodulares.

Lo que Lien y Watkins demuestran es lo siguiente:

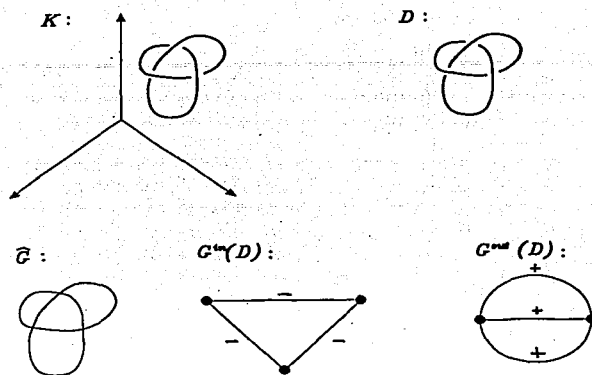
Teorema 2. Si G es una gráfica plana signada y G^d es la gráfica plana signada dual de G , entonces las matrices laplacianas $L(G)$ y $L(G^d)$ son *Goeritz congruentes*, es decir existen matrices diagonales con entradas en $\{0, 1, -1\}$, Δ_1 y Δ_2 y una matriz unimodular U tales que: $\Delta_1 \oplus L(G) = U(\Delta_2 \oplus L(G^d))U^t$.

Para esto usan, de manera muy bonita, teoría de nudos, en particular la equivalencia de diagramas regulares de nudos por medio de los movimientos llamados de *Reidemeister* y el hecho de que si tenemos una matriz simétrica A y U una matriz unimodular, entonces A y UAU^t (salvo un cambio de variable) definen la misma forma cuadrática.

Goeritz [G], utiliza esto para hallar nuevos invariantes en nudos.

A un diagrama regular D de un nudo o enlace K se le asocian las gráficas siguientes: la gráfica de sombra denotada por \tilde{G} , la gráfica interior de D , denotada por $G^{in}(D)$ y la gráfica exterior de D , denotada por $G^{out}(D)$.

Ejemplo:

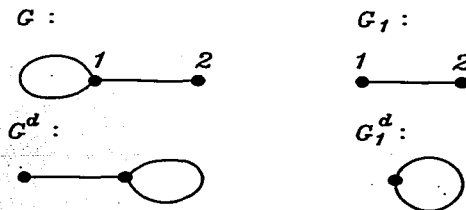


Asociando a estas gráficas las matrices laplacianas respectivas $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{out}(D))$, se demuestra el siguiente teorema que es síntesis del trabajo de Goeritz [G], Kneser y Puppe [KP] y Kyle [K]:

Teorema 1. Sean D y D' diagramas regulares tales que D' se obtiene de D aplicándole una serie finita de movimientos de Reidemeister, entonces $L(G^{in}(D))$ es Goeritz congruente a $L(G^{in}(D'))$ y $L(G^{out}(D))$ es Goeritz congruente a $L(G^{out}(D'))$. De hecho también se demuestra que $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{out}(D))$ son Goeritz congruentes.

Ahora, como a toda gráfica plana signada G se le puede asignar un enlace K tal que G es la gráfica interior de D , diagrama regular de K y la gráfica dual de G , G^d , es la gráfica exterior de D , en notación $G = G^{in}(D)$ y $G^d = G^{out}(D)$. Entonces sus respectivas matrices laplacianas $L(G)$ y $L(G^d)$ son Goeritz congruentes.

Observemos que la definición que aquí usamos de matriz laplaciana no toma en cuenta los lazos. Por ejemplo, veamos las gráficas siguientes:



Tenemos que $L(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = L(G_1) = L(G^d)$, $L(G_1^d) = [0]$, pero para definir la dual, sí se toma en cuenta.

Si vemos lo que significa un lazo en la gráfica de un nudo, este hecho concuerda con que el nudo que nos queda al quitar el lazo es equivalente, pero si lo vemos desde el punto de vista algebraico este hecho es insólito.

Nuestro trabajo consistió en aprender lo necesario de teoría de nudos y de teoría algebraica de gráficas para leer y completar los detalles del artículo de Lien y Watkins. Dos de los puntos más importantes a completar fueron los siguientes: En la demostración del teorema 1, los autores no dan explícitamente las matrices unimodulares, hecho que remiten a los artículos [K], [KP]. Al ver el artículo de Kneser y Puppe y tratar de entenderlo nos dimos cuenta que le faltaban casos, sólo ven el caso de nudos no de enlaces, es decir dice que la matriz diagonal es de 1, -1's, pero en caso de enlaces es necesario usar 0's y tampoco dice de manera explícita la construcción de la matriz unimodular que resulta de hacer los distintos movimientos Reidemeister. Entonces nos fuimos a ver el artículo de Kyle, él sí se da cuenta del uso del cero pero tampoco define explícitamente las matrices unimodulares. Nuestro trabajo en esta parte de la tesis fue construir explícitamente las matrices unimodulares, cosa no trivial pues en el movimiento Reidemeister II la matriz unimodular es muy difícil de encontrar. De hecho creímos en algún momento que no íbamos a lograrlo, entonces le escribimos directamente a los autores y ellos tampoco tenían la construcción, nos dijeron que les diéramos ejemplos concretos y ellos nos daban las matrices respectivas. Nosotros demostramos el teorema dando la forma general y explícita de esta matriz en todos los casos.

También contestamos algunas preguntas que surgieron a lo largo de la lectura del material y demostramos el siguiente:

Corolario 2. Sean G una gráfica plana signada y G_1 y G_2 dos aplanamientos de G . Entonces $L(G_1^d)$ y $L(G_2^d)$ son Goeritz congruentes.

Para leer esta tesis se necesita el curso de álgebra lineal 1.

Nuestra tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 damos las nociones necesarias de teoría de nudos para entender este trabajo; el capítulo 2 contiene los preliminares de la teoría algebraica de gráficas y construcción de las gráficas interiores y exteriores asociadas a un nudo o enlace y en el capítulo 3 se define la equivalencia de Goeritz para las matrices laplacianas asociadas a gráficas signadas, también se dan ejemplos de diagramas regulares de enlaces Goeritz congruentes y otros que no lo son (para esta parte, se define un grupo abeliano asociado al enlace, que nos ayudará a probar cuándo dos diagramas regulares de enlace no son Goeritz congruentes) y se demuestran los teoremas 1 y 2 y sus corolarios.

Capítulo I. Nudos

1.1. En esta primera parte de la tesis trabajaremos con nudos. Hablando intuitivamente si tomamos un pedazo de cuerda, la anudamos y unimos sus extremos obtendremos un *nudo*.

Si podemos deformar un nudo continuamente (sin romper la cuerda) hasta obtener otro diremos que los nudos son equivalentes. Ahora si nos fijamos en la sombra del nudo al alumbrarlo con una lámpara de mano es claro que la sombra del nudo cambia al mover la lámpara y también al deformar el nudo, nos gustaría saber qué tienen en común estas sombras y cuáles nos dan mayor información sobre el nudo. En la figura 1 veremos un ejemplo de nudos equivalentes.

Ejemplo:



Figura 1.

Definamos un nudo de una manera más precisa:

Definición 1.1.1. Un nudo es un subconjunto de \mathbb{R}^3 homeomorfo a un círculo.

Definición. 1.1.2. Un enlace es una colección de nudos que no se intersectan.

Ejemplo:

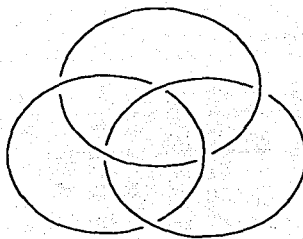


Figura 2.

Definición 1.1.3. Dos nudos K_0, K_1 son equivalentes, si existe una deformación continua de \mathbb{R}^3 , que lleve K_0 a K_1 (tal deformación de \mathbb{R}^3 , también llamada *isotopía*, es una función continua $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que restringida a cada $\mathbb{R}^3 \times t$ es un homeomorfismo y que $H(K_0, 0) = K_0$ y $H(K_0, 1) = K_1$).

1.1.4. Notemos que si K_0, K_1 son nudos en \mathbb{R}^3 y K_0 y K_1 son equivalentes, es decir existe una isotopía H de \mathbb{R}^3 que lleve K_0 a K_1 entonces existe un homeomorfismo que conserva la orientación del espacio y que lleva K_0 a K_1 (el homeomorfismo es H restringida a $\mathbb{R}^3 \times 1$).

El Teorema de Alexander dice que todo homeomorfismo de \mathbb{R}^3 que preserva la orientación es isotópico a la identidad, así que si hay un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 que preserva la orientación y lleva K_0 a K_1 entonces hay una deformación continua de \mathbb{R}^3 que lleva K_0 a K_1 .

De esta manera para mostrar que dos nudos K_0, K_1 son equivalentes, basta con encontrar un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserve la orientación del espacio, tal que $f(K_0) = K_1$.

Definición 1.1.5. Un nudo es *poligonal* si está formado por un número finito de segmentos de recta (aristas) $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$. De aquí en adelante, *todos* los nudos que consideraremos serán poligonales.

Ejemplo:

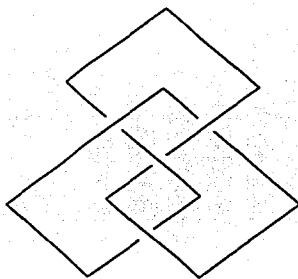


Figura 3.

1.2. **Movimientos elementales de nudos o enlaces.** Existen varias maneras naturales de modificar un nudo o enlace poligonal para obtener otro equivalente, una de ellas es la siguiente:

Dado un nudo o enlace K podemos realizar las siguientes cuatro operaciones:

(1) Podemos dividir una arista AB , en dos aristas AC, CB , eligiendo un punto C sobre la arista AB .

(1)' (El opuesto a (1)). Si AC y CB son dos aristas adyacentes de K tales que A, B y C están alineados, entonces podemos remover el punto C y pensar en AB como una sola arista.

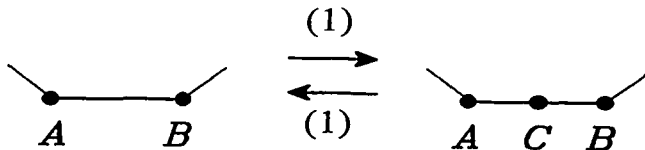


Figura 4.

(2) Supongamos que C es un punto en el espacio que no pertenece a K , si el triángulo ABC formado por la arista AB y C no intersecta K , con excepción de la arista AB , entonces podemos remplazar la arista AB por las aristas AC y CB .

(2)' (El opuesto a (2)). Si existe en el espacio un triángulo ABC que contenga dos aristas adyacentes AC y CB de K y este triángulo no intersecta K excepto por las aristas AC y CB , entonces podremos borrar las aristas AC y CB y remplazarlas por la arista AB .

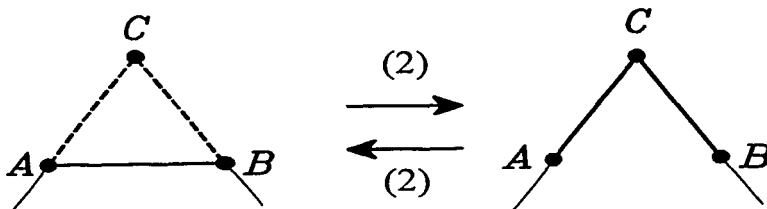


Figura 5.

Las cuatro operaciones (1), (1)', (2) y (2)' son llamadas **movimientos elementales de nudos o enlaces**.

Definición 1.2.1. Un nudo o enlace K se dice Δ -equivalente a un nudo o enlace K' si podemos obtener K' de K , aplicando a K un número finito de movimientos elementales.

Observación 1.2.1.1. Dos nudos o enlaces K_0, K_1 son Δ -equivalentes, si y sólo si existe un homeomorfismo o una isotopía de \mathbb{R}^3 , que lleva K_0 a K_1 .

Demostración.

Para ver esto supongamos que K_1 se obtiene de K_0 aplicándole un movimiento elemental (2)'. Para los demás movimientos, es fácil dar el homeomorfismo requerido.

Sea $\Delta = v_0v_1v_2$ el triángulo que intersecta a K_0 en las dos aristas v_0v_1, v_0v_2 y que es remplazado en K_1 por la arista v_1v_2 .

Sean Π el plano que contiene a Δ y v'_0 el punto medio de la arista v_1v_2 .

Tomemos dos puntos v_3, v_4 en Π tales que v_3 esté cerca de v'_0 y v_4 esté cerca de v_0 , de modo que el cuadrilátero $C = v_3v_2v_4v_1$ intersecte a K_0 en las aristas v_0v_1, v_0v_2 y los puntos v_3, v'_0, v_0, v_4 estén alineados. Elijamos un punto v_5 por arriba de Π y un punto v_6 por debajo de Π suficientemente cerca de este plano, de tal forma que los tetraedros $T_1 = v_5v_1v_2v_3, T_2 = v_5v_1v_2v_0, T_3 = v_5v_1v_4v_2, T_4 = v_6v_1v_2v_3, T_5 = v_6v_1v_2v_0$ y $T_6 = v_6v_1v_4v_2$, intersecten a K_0 en los vértices v_0, v_1 y v_2 . Veamos la figura 6.

Sea $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función, tal que $h(v_i) = v_i$, con $i = 1, \dots, 6$, $h(v_0) = v'_0$ y que es lineal en cada tetraedro y h es la identidad fuera de la unión de los tetraedros, entonces h es un homeomorfismo del espacio que manda K_0 en K_1 y por la observación en (1.1.4) se puede mostrar que h es isotópico a la identidad, así existe una isotopía de \mathbb{R}^3 que lleva K_0 en K_1 .

Para la otra implicación de la observación 1.2.1.1 ver (Proposición 1.10 [B Z]).

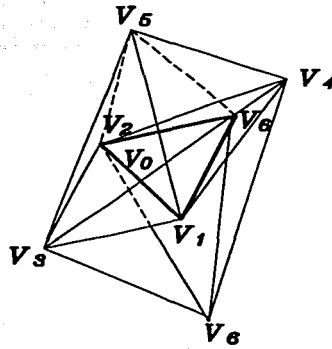


Figura 6.

1.3. Proyecciones de un nudo o enlace.

1.3.0. Sea v un vector unitario en \mathbb{R}^3 y sea $p_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ la proyección de \mathbb{R}^3 en la dirección de v hacia un plano E perpendicular a v . Si K es un nudo o enlace diremos que $p_v(K) = \widehat{K}_v$ es la **proyección** de K en la dirección de v , que algunas veces sólo la denotaremos por \widehat{K} . Hay tantas proyecciones para K como vectores unitarios en \mathbb{R}^3 , es decir como puntos en la esfera S^2 , donde los puntos antípodas dan proyecciones iguales.

1.3.1 **Proyecciones regulares.** Si \widehat{K} es la proyección de un nudo o enlace K que satisface lo siguiente:

- i) La preimagen de cada punto de \widehat{K} consiste de cuando mucho dos puntos de K .
- ii) Los vértices de K no se deben proyectar sobre ningún otro punto de K .

Entonces diremos que \widehat{K} es una **proyección regular** de K .

La condición i) dice que los puntos de autointersección de la proyección de K son puntos dobles, es decir, ninguna arista puede proyectarse a un punto y no puede haber puntos múltiples como el que se muestra en la figura 7.

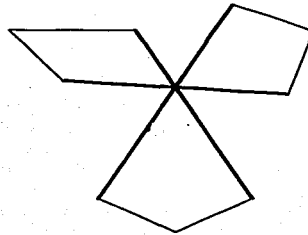


Figura 7.

La condición ii) dice que ningún vértice es punto doble de \widehat{K} . Los casos de la figura 8 no son permitidos.

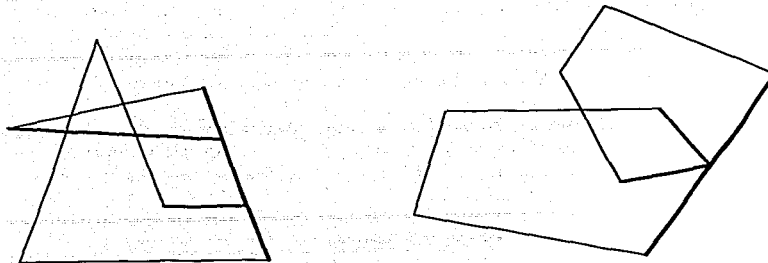


Figura 8.

El siguiente es un ejemplo de proyección regular.

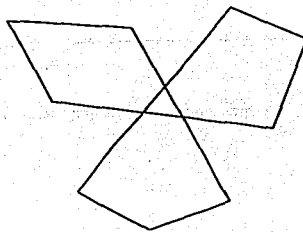


Figura 9.

Cuando la proyección de un nudo o enlace K , no satisface i) ó ii), entonces diremos que ésta es una **proyección no regular** de K .

Si \tilde{K} es una proyección regular de un nudo o enlace K y en ésta se especifica la arista que pasa por debajo y la arista que pasa por arriba en cada punto de autointersección de \tilde{K} , entonces llamaremos a esta proyección **diagrama regular** de un nudo o enlace K . Observemos que si proyectamos K en la dirección del vector v y del vector $-v$, éstos producen la misma proyección para K , excepto que todos los cruces cambian. El siguiente ejemplo muestra el diagrama regular de la proyección regular de la figura 9.

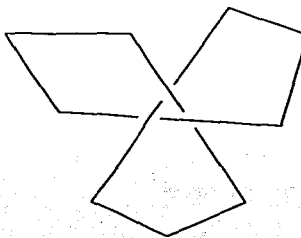


Figura 10.

1.3.2. Analizaremos las condiciones en las que se obtiene una proyección no regular de un nudo o enlace K .

Caso 1.3.2.1. Algún vértice de K es un punto doble de la proyección de K .

Sean b un vértice de K , B una arista de K que no contiene a b y Π_1 el plano que los contiene. Sea l una línea que pasa por b e intersecta en un punto p_1 a la arista B , tomemos un vector v_1 unitario, en la dirección de l y proyectemos K en la dirección de v_1 , entonces b es un punto doble de \widehat{K}_{v_1} , con preimágenes b y p_1 en K . Veamos la figura 11.

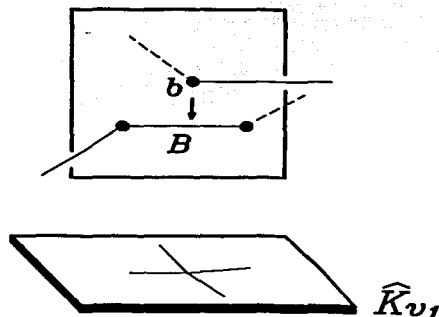


Figura 11.

Observaciones 1.3.2.1.1. i) Si proyectamos K con vectores en las direcciones de las líneas que contienen a b e intersectan en algún punto a la arista B , éstos producen proyecciones para K en las que el vértice b es un punto doble, estos vectores están representados por un arco de círculo C en S^2 .

ii) Elijamos los externos de C y proyectemos K en estas direcciones, entonces obtenemos un punto doble en b como el que se muestra en la figura 12.

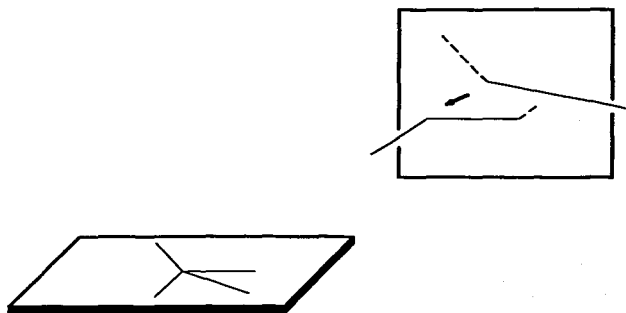


Figura 12.

iii) Las direcciones de proyección bajo las cuales alguna de las aristas de K que contienen a b es proyectada a un punto, están representadas por dos puntos de C .

iv) Ya que K tiene un número finito de vértices y aristas, hay un número finito de pares de éstos, para los cuales obtenemos un número finito de arcos de círculos en S^2 que producen proyecciones en las que alguno de los vértices de K es un punto doble de la proyección.

Caso 1.3.2.2. La proyección de K , tiene una infinidad de puntos dobles.

Sean A y B dos aristas de K , tales que existe un plano Π_2 que las contiene.

Sean l_2 una línea que intersecta a la arista A en un punto p_2 e intersecta a la arista B en un punto p_2' y v_2 un vector unitario en la dirección de l_2 . Proyectemos K en la dirección de v_2 , entonces la proyección de cada punto de la arista A es un punto doble para \widehat{K}_{v_2} . Veamos la figura 13.

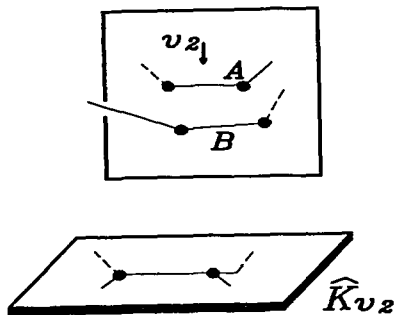


Figura 13.

Observaciones 1.3.2.2.1. i) Si elegimos los vectores en las direcciones de las líneas que intersectan a las aristas A y B y proyectamos K en estas direcciones, obtendremos una infinidad de puntos dobles para las proyecciones de K y los vectores que las producen están representadas por un arco de círculo en S^2 .

ii) Ya que K tiene un número finito de aristas, hay un número finito de pares de éstas, para los cuales obtenemos un número finito de arcos de círculos en S^2 , cuyos puntos representan direcciones que producen proyecciones para K con una infinidad de puntos dobles.

Caso 1.3.2.3. La proyección de K , tiene un punto múltiple.

Veamos que las direcciones que producen proyecciones con puntos múltiples corresponden a las líneas que cruzan a tres o más aristas de K .

Sean A , B y C tres aristas de K y l_1 , l_2 , l_3 las líneas en \mathbb{R}^3 que las contienen. Podemos suponer que ningún par de estas aristas está en un mismo plano, ya que si l' es una línea que intersecta a dos de estas aristas y éstas están contenidas en un mismo plano, por el análisis del caso 1.3.2.2 obtendríamos una infinidad de puntos dobles al proyectar K con un vector en la dirección de l' .

Si l' es una línea que intersecta a las líneas l_1 , l_2 y l_3 , en los puntos p_1 , p_2 y p_3 respectivamente y ningún par de estas líneas están contenidas en un mismo plano, entonces proyectemos estos puntos con un vector unitario v_3 en la dirección de l' , de esta manera la imagen de p_1 , p_2 y p_3 bajo la proyección es un punto, es decir, obtenemos en \widehat{K}_{v_3} un punto múltiple.

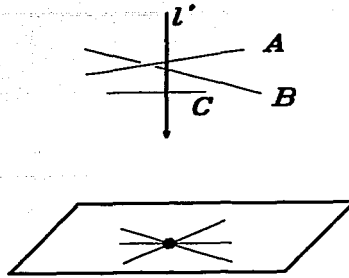


Figura 14.

Observaciones 1.3.2.3.1. i) Afirmando que las líneas que intersectan a las tres aristas están parametrizadas por los puntos de l_1 (por cada punto de l_1 pasa a lo más una línea que intersecta a l_2 y l_3).

Para ver esto, tomemos $p_1 \in l_1$ y consideremos al plano que contiene a p_1 y a l_2 . Este plano intersecta a lo más en un punto a la línea l_3 , así que en ese plano hay a lo más una línea que intersecta a l_1 , l_2 y l_3 . Veamos la figura 15.

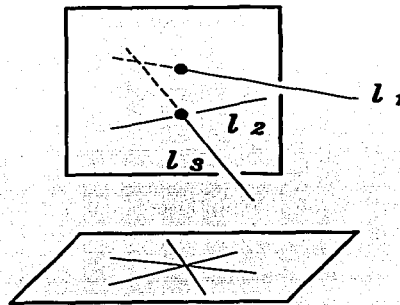


Figura 15.

Esto muestra que las direcciones que proyectan puntos de tres aristas al mismo punto forman un arco de curva en S^2 .

iii) Como K tiene un número finito de aristas, hay un número finito de tercias de aristas, para las cuales obtendremos un número finito de arcos de curvas en S^2 , cuyos puntos representan direcciones que producen proyecciones con puntos múltiples.

1.3.3. Por el análisis en los casos 1.3.2.1, 1.3.2.2 y 1.3.2.3, los subconjuntos de S^2 que representan direcciones que producen proyecciones no regulares para un nudo o enlace K , son un conjunto finito de curvas, por lo tanto podemos concluir que el conjunto de proyecciones regulares forma un conjunto abierto y denso dentro del conjunto de todas las proyecciones para K .

1.3.4. Para un nudo o enlace existen proyecciones no regulares que son malas para nuestros propósitos, más adelante veremos porqué. Las proyecciones malas son las siguientes:

i) Algún par de vértices de K son proyectados a un punto. Esta proyección se obtiene al elegir uno de los extremos del arco de círculo del caso 1.3.2.2.1. i y al proyectar una arista de K , con el vector en la dirección de la línea que la contiene, entonces como en 1.3.2.2.1. ii) obtuvimos un número finito de estos arcos en S^2 y K tiene un número finito de aristas los puntos en S^2 que representan tales proyecciones son un número finito.

ii) Un conjunto de al menos cuatro puntos de K es proyectado al mismo punto. Estas proyecciones están representadas en S^2 por los puntos de intersección de los arcos de círculos que se obtienen en 1.3.2.1.1. iv y de los arcos de curvas que se obtienen en 1.3.2.3.1.i. Como hay un número finito de arcos de círculos y arcos de curvas entonces hay un número finito de puntos en S^2 que producen tales proyecciones.

Por lo anterior podemos concluir que las proyecciones no regulares malas para un nudo K están representadas por un conjunto finito de puntos en S^2 .

1.4. Movimientos de Reidemeister.

1.4.1. Los movimientos de Reidemeister, son movimientos locales aplicados al diagrama regular de un nudo, que producen diagramas de nudos equivalentes al original.

Cada uno de los movimientos de Reidemeister se obtiene al variar continuamente la dirección de proyección para un nudo esquivando el conjunto finito de proyecciones malas de 1.3.4.

1.4.1.1. Movimiento de Reidemeister del tipo I. Nos permite agregar o suprimir un bucle.

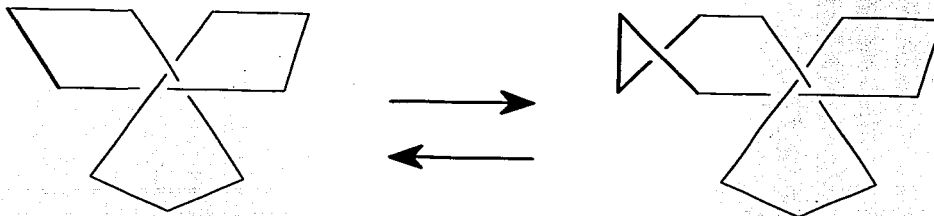


Figura 16.

1.4.1.2. Movimiento de Reidemeister del tipo II. Nos permite agregar o remover dos cruces, como se muestra en la figura 17.

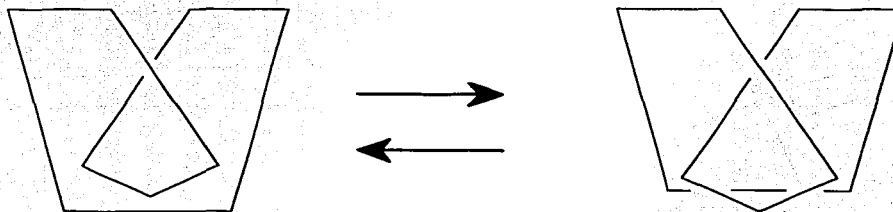


Figura 17.

1.4.1.3. **Movimiento de Reidemeister del tipo III.** Nos permite deslizar una arista del nudo desde un lado del cruce al otro lado del cruce, como se muestra en la Figura 18.

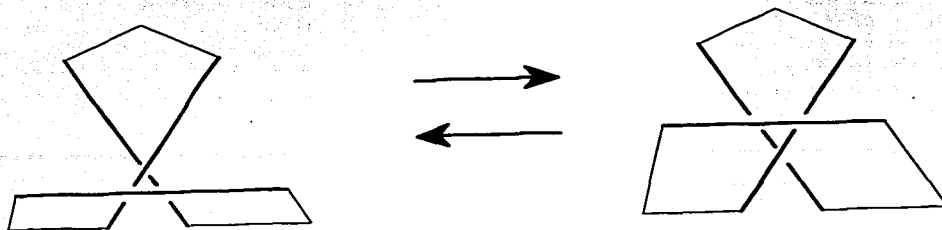


Figura 18.

1.4.1.4. Consideraremos un movimiento más, que llamaremos del tipo 0 que se muestra en la figura 19 y que permite deslizar el diagrama por una isotopía del plano sin cambiar los cruces.

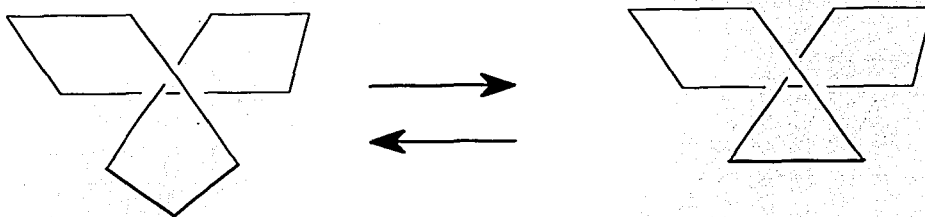


Figura 19.

1.4.2. Veamos un ejemplo de lo que puede hacerse con una sucesión de movimientos de Reidemeister.

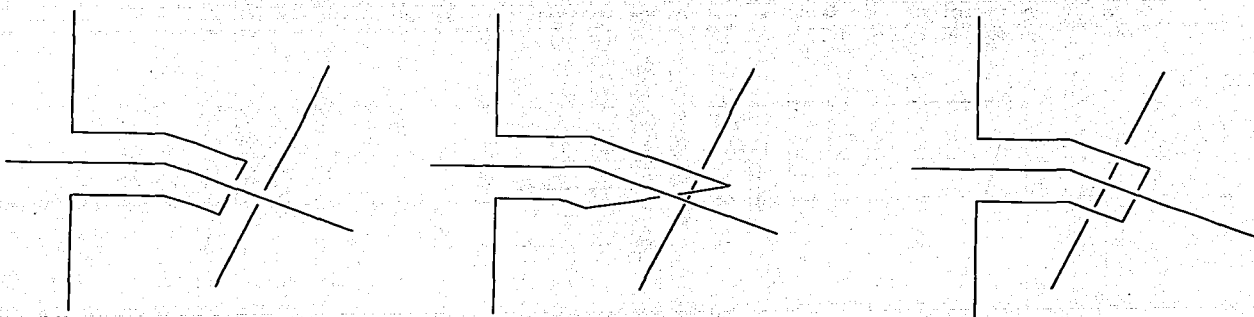


Figura 20.

Definición 1.4.3. Si D y D' son diagramas regulares y podemos cambiar D a D' usando un número finito de movimientos de Reidemeister, entonces D y D' son equivalentes. Denotaremos esta equivalencia por $D \simeq D'$.

Proposición 1.4.4. Sean K un nudo o enlace, P_1, P_2 dos proyecciones regulares de K , entonces los diagramas regulares D_1 y D_2 que obtenemos de las proyecciones P_1 y P_2 respectivamente, son diagramas equivalentes.

Demostración.

Sean p_1 y p_2 puntos de S^2 que representan las direcciones de proyección de P_1 y P_2 respectivamente. Como las proyecciones no regulares están representadas por un número finito de arcos de curvas en S^2 y las proyecciones no regulares malas son los extremos y puntos de intersección de estos arcos, entonces hay un camino l en S^2 que va de p_1 a p_2 que pasa por un número finito de proyecciones no regulares y que no pasa por proyecciones malas. Cuando l cruza cada una de las curvas que representan las proyecciones no regulares, el diagrama D_1 será modificado por algún movimiento de Reidemeister y como l sólo las cruza un número finito de veces, entonces los diagramas regulares D_1 y D_2 son diagramas equivalentes ■

Teorema 1.4.5. Sean K y K' nudos o enlaces y D y D' sus diagramas regulares respectivos. Entonces K y K' son Δ -equivalentes $\Leftrightarrow D \simeq D'$.

Demostración.

Sean K y K' nudos o enlaces y supongamos que K' se obtiene de K al aplicar a éste un número finito de movimientos elementales. Para la demostración nos basta analizar los cambios en los diagramas regulares D y D' que se obtienen de K y K' respectivamente, al aplicar un solo movimiento elemental a K .

Supongamos que K' se obtiene aplicando a K un movimiento elemental (2), es decir si ΔABC es el triángulo determinado por la arista AB de K y el punto C , tales que $C \notin K$ y $\Delta ABC \cap K = AB$, entonces K' se obtiene de K reemplazando la arista AB por las aristas AC y BC . (Para el caso de los movimientos elementales (1) y (1)' es claro que los diagramas regulares D y D' son equivalentes).

Elijamos un vector en \mathbb{R}^3 tal que bajo la proyección ortogonal p de \mathbb{R}^3 en la dirección de éste, obtenemos proyecciones regulares para K y K' y sean D y D' sus diagramas regulares.

Sean $\Delta = \Delta abc$ la proyección del ΔABC y Δ° el interior de Δ . Observemos que $D - ab = D' - (ac \cup cb)$. Consideraremos el siguiente caso para Δ .

Caso 1.4.5.1.

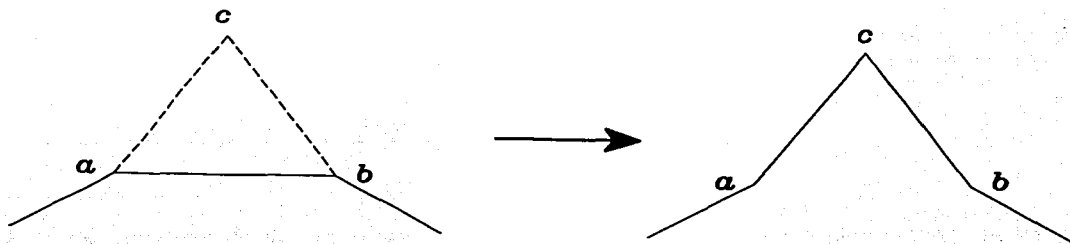


Figura 21.

En el caso de que algunos arcos de $D - ab$ crucen a Δ , diremos que el arco α cruza por arriba a Δ y el arco β cruza por abajo a Δ , si se ven como en la figura 22 a) y se ven la figura 22 b) respectivamente.

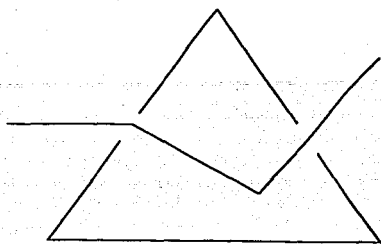


Figura 22 a)

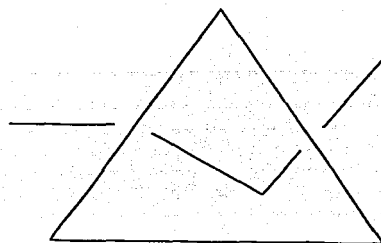


Figura 22 b).

Lema 1.4.5.2. Los arcos de $D - ab$ que cruzan a Δ° , son arcos que cruzan por arriba o cruzan por abajo. Si la intersección del arco α y el arco β que cruzan por arriba y por abajo a Δ° respectivamente está contenida en Δ° , entonces α siempre pasa por arriba de β (y no existen arcos de $D - ab$ que crucen a Δ° como se muestra en la figura 23).

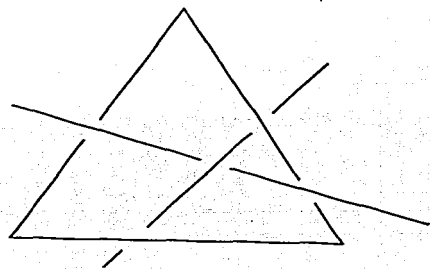
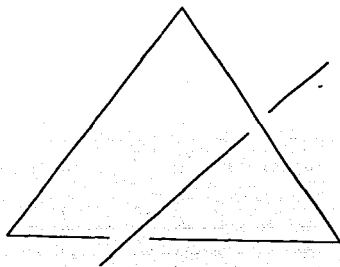


Figura 23.

Demostración.

Consideremos $p^{-1}(\Delta)$, la imagen inversa de Δ , ésta es un prisma triangular infinito T en \mathbb{R}^3 , que está dividido por el ΔABC en un prisma superior T_1 y un prisma inferior T_2 , veamos la figura 24.

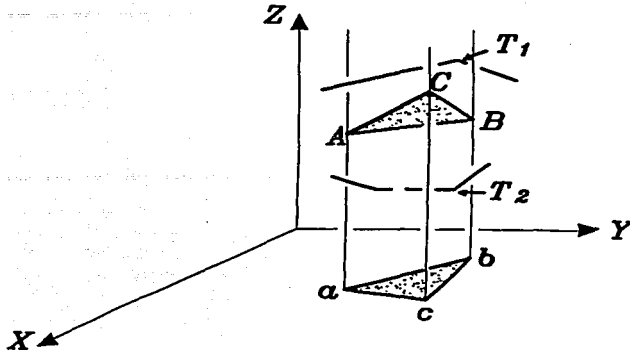


Figura 24.

Sea α un arco de $D - ab$ que cruza a Δ° y a el arco de K que se proyecta a α . Ya que $\alpha \cap \Delta ABC = \emptyset$, $a \subset T_1$ ó $a \subset T_2$, entonces se cumple una de las siguientes:

- 1) $a \subset T_1$ si y sólo si α cruza por arriba a Δ° .
- 2) $a \subset T_2$ si y sólo si α cruza por abajo a Δ° .

Sean α y β arcos de $D - ab$ tales que Δ° contiene alguna de sus intersecciones y α y β cruzan por arriba y por abajo a Δ° respectivamente.

Si a y b son los arcos de K que se proyectan a α y β , entonces por 1) y 2) $a \subset T_1$ y $b \subset T_2$, por lo tanto α siempre pasa por arriba de β .

Veamos la figura 25.

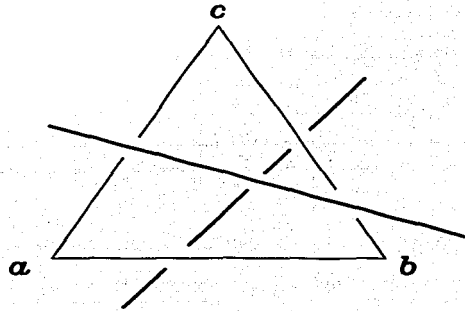


Figura 25.

Usando los movimientos de Reidemeister de (1.4.1) y (1.4.2) se demostrará que se puede reemplazar $W = ac \cup cb$ por el segmento ab .

1.4.5.3. Consideremos el caso en el que $(D - ab) \cap \Delta^\circ = \emptyset$, entonces aplicando un movimiento del tipo 0 a W obtenemos el segmento ab , veamos la figura 26.

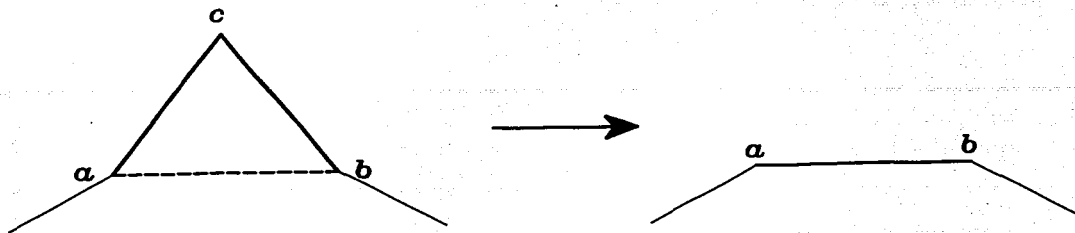


Figura 26.

1.4.5.3.1. Consideraremos el caso en el que Δ° contiene arcos de D pero que éstos no se intersectan en Δ° , es decir que Δabc se ve como en la figura 27 a). Usando movimientos del tipo 0, Δabc se ve como en la figura 27 b).

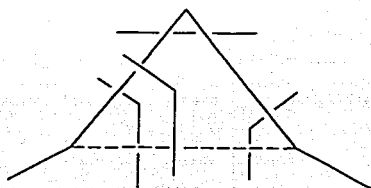


Figura 27 a)

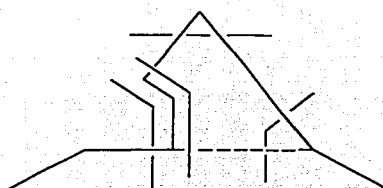


Figura 27 b).

De esta manera podemos usar un número finito de movimientos de Reidemeister y obtener de W el segmento ab .

1.4.5.3.2. Consideremos el caso en el que Δ° contiene arcos de D que se intersectan en Δ° .

Elijamos un arco en $D - ab$ que intersecte a Δ° y sigamos éste en Δ° hasta su primer cruce con otro arco β , denotaremos por α el arco que se obtiene de hacer lo anterior.

Sea Γ una vecindad poligonal en Δ que rodea a α , como se ve en la figura 28. (de manera que ningún otro arco de D la cruce) y sea $\tilde{\Gamma}$ el disco poligonal en ΔABC que se proyecta a Γ .

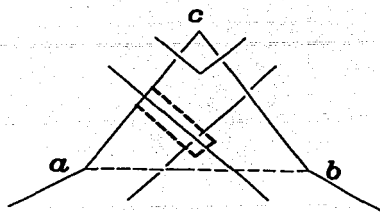


Figura 28.

La frontera de $\tilde{\Gamma}$ consiste de un arco \tilde{xy} en la frontera de ΔABC , y un arco poligonal $\tilde{\gamma}$ en el interior de ΔABC . Observemos que α cruza por arriba (por abajo) a γ si y sólo si α cruza por arriba (por abajo) a Δ y lo mismo sucede con β . Así que en cada una de las posibles configuraciones (la figura 29 ilustra tres de ellas) para α , β y γ , podemos mover el arco xy hasta convertirlo en el arco γ usando movimientos de Reidemeister de tipo 0, 2 y 3.

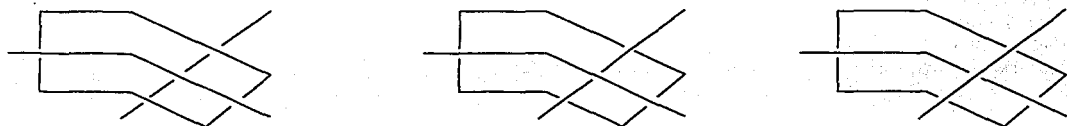


Figura 29.

De esta manera si tenemos n cruces de $D - ab$ contenidos en Δ° entonces de la figura 29 observemos que éstos han disminuido en $n - 1$, entonces usando un número finito de los movimientos de Reidemeister de 1.4.1 y 1.4.2 podemos pasar W por cada uno de estos cruces y remplazarla por el segmento ab .

Falta analizar los casos siguientes:

Caso 1.4.5.4. La proyección de Δ se ve como en la figura 30.

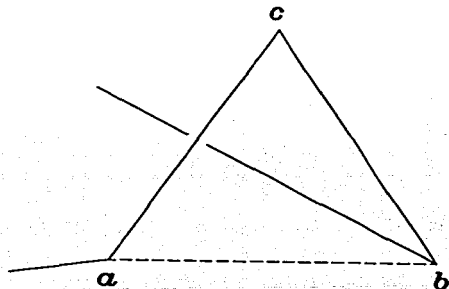


Figura 30.

Cuando $(D - ab - bd) \cap \Delta^\circ = \emptyset$ usamos los movimientos ilustrados en la figura 31.

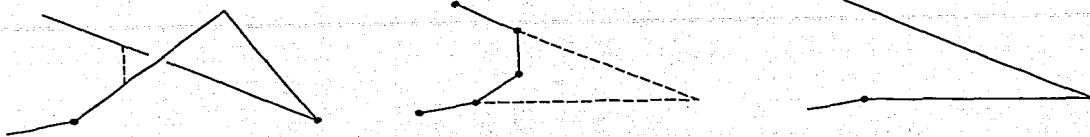


Figura 31.

Para los cruces de los arcos de $D - ab$ contenidos en Δ° nos fijaremos primero en los que se forman con bd y pasaremos W por estos cruces haciendo lo mismo que en el caso 1.4.5.3.2, de igual forma pasaremos W por el resto de los cruces que se forman sólo entre los arcos de $D - ab - bd$ y finalmente para pasar W por los arcos contenidos en Δ° y que no se intersectan haremos lo mismo que en el caso 1.4.5.3.1, de esta manera podemos llevar W al segmento ab .

Caso 1.4.5.5. La proyección de Δ se ve como en la figura 32.

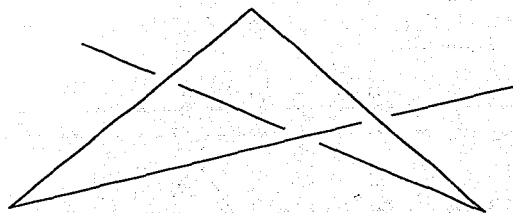


Figura 32.

Este caso lo podemos reducir a dos de los anteriores. Veamos la figura 33.

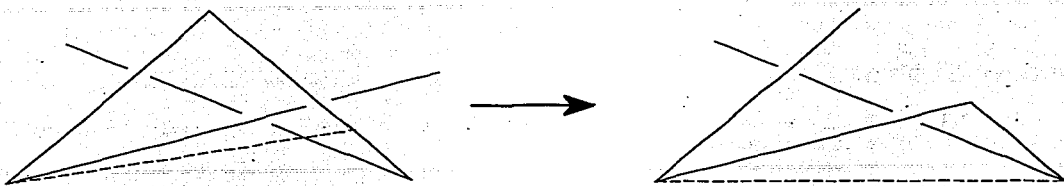
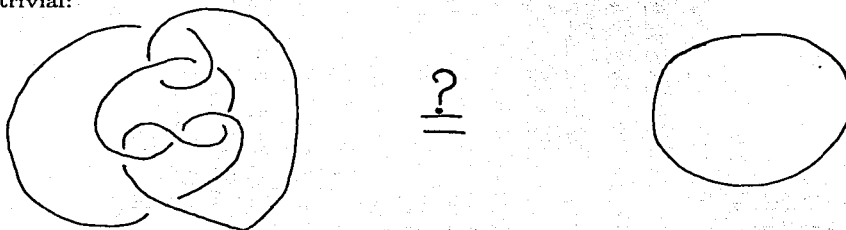


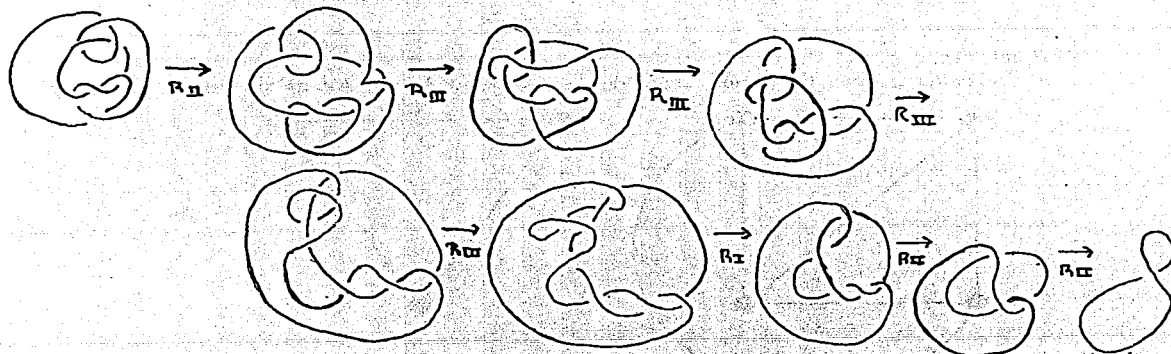
Figura 33.

Por el análisis de los casos 1.4.5.1, 1.4.5.4 y 1.4.5.5 concluimos que $D \simeq D' \blacksquare$.

1.5. Averiguar si dos nudos son equivalentes o no puede ser muy difícil, aún en el caso de que uno sea trivial:



El problema es que no hay forma de saber a priori cuántos y cuáles movimientos de Reidemeister podrían hacer falta para ir de uno al otro:



En este ejemplo es imprescindible usar todos los movimientos de Reidemeister para ir de un diagrama a otro y es necesario empezar por complicar el diagrama antes de poder simplificarlo.

Capítulo II. La gráfica interior y exterior de un enlace y sus matrices laplacianas.

2.1. Sea G una gráfica finita (es decir, el conjunto de vértices $V(G)$ y el conjunto de aristas $E(G)$ son finitos), donde aristas múltiples y lazos son permitidos. Denotaremos por $i \overset{\alpha}{\sim} j$ la arista α que une al vértice i con el vértice j .

Definición 2.1.1. Si $i \overset{\alpha}{\sim} j$ es una arista de una gráfica G , diremos que i y j son *vértices adyacentes*. Además, si i es vértice de α entonces se denotará por $i \in V(\alpha)$.

Definición 2.1.2. Dos aristas de una gráfica G son llamadas *aristas incidentes* si éstas tienen al menos un vértice en común.

Definición 2.1.3. Una gráfica es *aplanable* si puede dibujarse en el plano sin cruzar aristas. Para ser más precisos, consideremos una función $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ que manda cada vértice de una gráfica G a un punto en el plano, donde vértices distintos irán a puntos distintos del plano y cada arista de G a una curva continua que no se interseca a sí misma en el plano y que une los vértices asociados a esta arista. Esta función es llamada *Encaje plano* si curvas correspondientes a aristas no incidentes no se encuentran y curvas correspondientes a aristas incidentes se encuentran sólo en el punto representado por su vértice común. Diremos que la gráfica G es aplanable si y sólo si podemos asociarle a G un encaje plano. Una gráfica *plana* es una gráfica encajada en el plano.

Observación. Una gráfica aplanable puede tener dos o más encajes planos distintos.

Ejemplo:

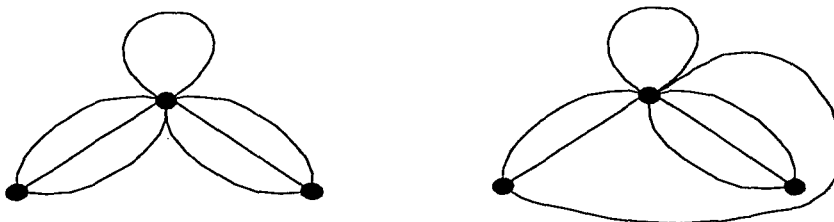


Figura 34.

Ejemplos:

a) Todas las gráficas que tienen menos de cinco vértices siempre son aplanables. Como ejemplo:

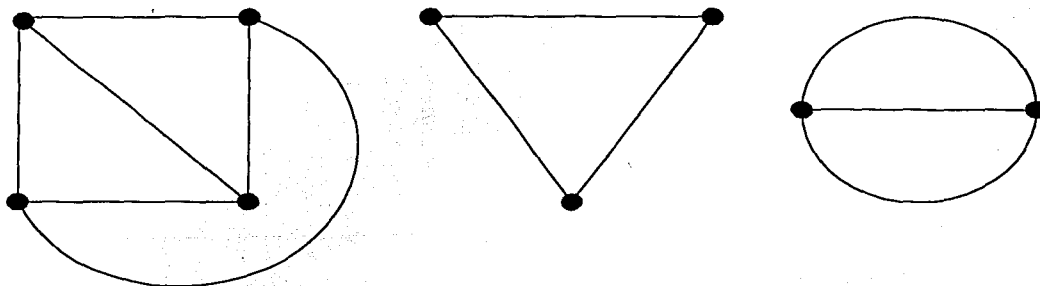


Figura 35.

b) Algunas gráficas planas de cinco vértices son:

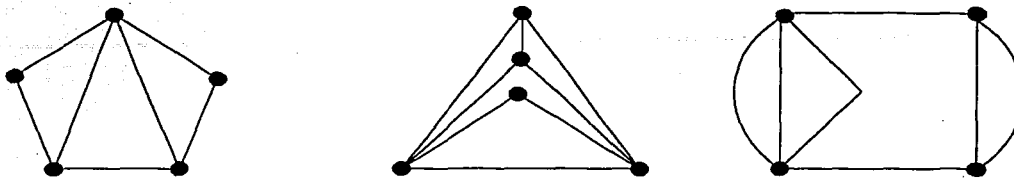


Figura 36.

c) La gráfica K_6 no es una gráfica plana.

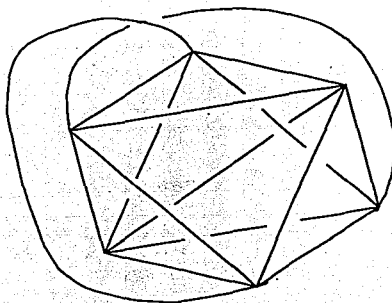


Figura 37.

Definición 2.1.4. Un *lazo* en una gráfica G es una arista en la que ambos puntos finales son un mismo vértice.

Definición 2.1.5. Una gráfica *signada* es una gráfica G , con la estructura adicional en la que a cada arista se le asigna el signo $+$ ó $-$. A la arista con signo $+$ se le llamará *arista positiva* y con signo $-$, *arista negativa*. Cualquier gráfica se puede ver como gráfica signada definiendo el signo de todas sus aristas como positivas. Sea $\alpha \in E(G)$, denotaremos el *signo* de α por $sgn(\alpha)$ donde, $sgn(\alpha) = +1$ si α es positiva y $sgn(\alpha) = -1$ si α es negativa.

Definición 2.1.6. Sean G una gráfica y $k \in V(G)$. El *grado signado* de k denotado por $deg(k)$ es la suma de todos los signos de las aristas que contienen a k . Es decir, $deg(k) = \sum_{\substack{\alpha \in E(G) \\ k \in V(\alpha)}} sgn(\alpha)$.

Sean G una gráfica signada que puede contener lazos y aristas múltiples, $V(G) = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de sus vértices y $E(G)$ el conjunto de aristas de G . Asociemos a G la forma entera cuadrática, $Q(x)$ en n indeterminadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ dada por: $Q(x) = \sum_{i, j \in E(G)} \text{sgn}(\alpha)(x_i - x_j)^2$. Entonces existe una única matriz simétrica $L(G) = (l_{ij})_{i,j}$, para la cual $Q(x) = xL(G)x^t$ y la llamaremos la *matriz Laplaciana de G* . Se construye $L(G)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 l_{ij} &= \deg(i) - \sum_{i, \alpha, j \in E(G)} \text{sgn}(\alpha) & \text{si } i = j \\
 l_{ij} &= - \sum_{i, \alpha, j \in E(G)} \text{sgn}(\alpha) & \text{si } i \neq j \\
 l_{ij} &= 0 & \text{si } \nexists \alpha \in E(G) \text{ con } i, \alpha, j.
 \end{aligned}$$

Ejemplos:

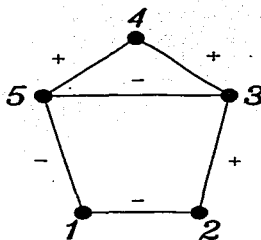


Figura 38.

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= -(x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 - (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_5)^2 \\
 &= -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_5 + x_3^2 - 2x_3x_2 - 2x_3x_4 + 2x_3x_5 + 2x_4^2 - 2x_4x_5 - x_5^2.
 \end{aligned}$$

$$L(G) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.1.6.1 Observaciones.

1. En la definición de la forma cuadrática y la matriz laplaciana **no** cuentan los lazos de la gráfica G .
2. Si se numeran los vértices de G en otro orden, la forma cuadrática $Q'(x)$ que se obtiene difiere de $Q(x)$ por una permutación de las variables, y la matriz laplaciana $L'(G)$ es $L'(G) = PL(G)P^{-1}$ donde P es la matriz de permutación correspondiente (por lo que $P^{-1} = P^t$).

Para conocer más sobre matrices laplacianas, ver [Ch].

2.2 La gráfica dual de una gráfica.

2.2.1. Sean G una gráfica plana, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto de vértices y $E(G)$ el conjunto de aristas. Dada G podemos formar otra gráfica plana llamada la *gráfica dual* de G y la denotaremos por G^d . La gráfica dual, G^d se construye de la siguiente manera:

Sean $R_1, \dots, R_m, m \in \mathbb{N}$, las regiones conexas en las que G divide al plano. Dibujemos un único punto \hat{v}_s contenido en cada una de las regiones R_s con $s \in \{1, \dots, m\}$. Como un ejemplo de lo anterior veamos la figura 39.

G :

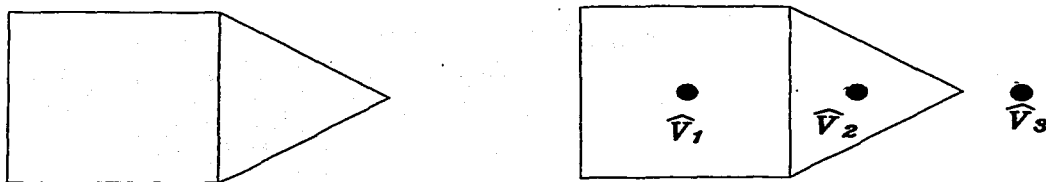


Figura 39.

Los vértices de G^d serán los puntos \hat{v}_s . Para las aristas $E(G^d)$, observemos que cada arista $\alpha \in E(G)$ con α sin sus puntos finales, une exactamente dos regiones $R_s, R_t, s, t \in \{1, \dots, m\}$. Definamos $\hat{\alpha} \in E(G^d)$, $\hat{\alpha} = \hat{v}_s - \hat{v}_t$. Como un ejemplo de lo anterior veamos la figura 40.

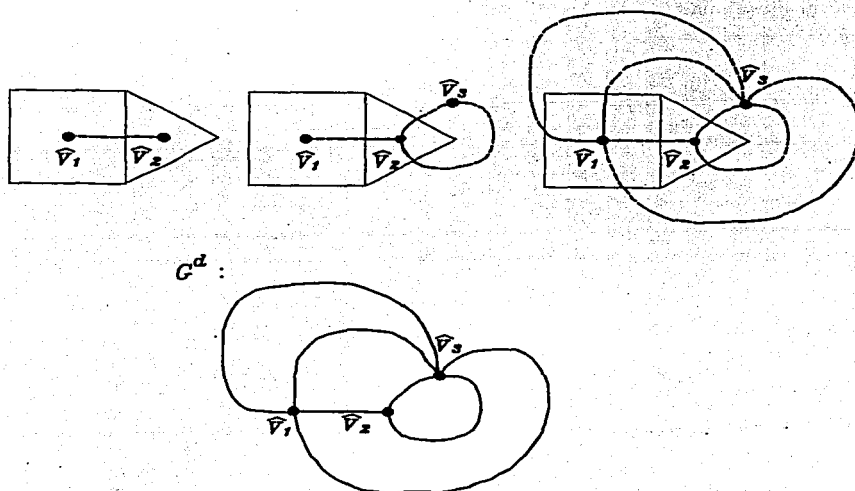


Figura 40.

Observaciones 2.2.2. 1.-Dada una gráfica plana, entonces su gráfica dual está bien definida "en abstracto", salvo por el encaje en el plano.

Ejemplo 2.2.2.1.

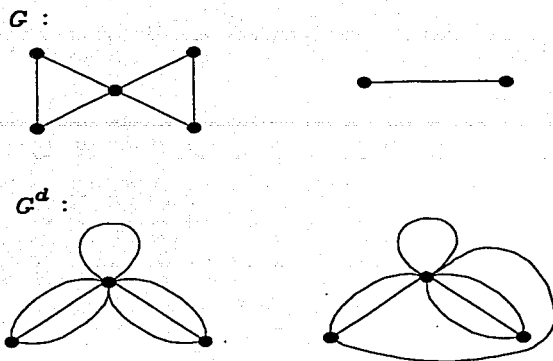


Figura 41.

2.-Sea G una gráfica aplanable, entonces para distintos encajes, la gráfica dual puede ser distinta.
 El ejemplo siguiente muestra la gráfica del ejemplo 2.2.2.1 con dos encajes planos distintos y sus respectivas gráficas duales que no son isomorfas (como gráficas).
Ejemplo 2.2.2.2.

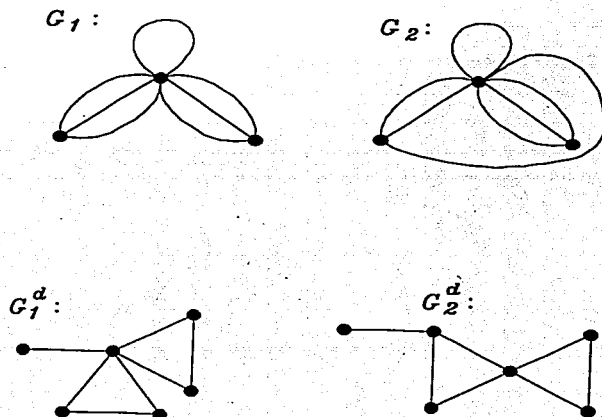


Figura 42.

- 3.-La gráfica dual, G^d de cualquier gráfica G es conexa.
 4.-Dos regiones en G pueden compartir más de una arista, en ese caso G^d tendrá aristas o lazos múltiples.
 5.-Si G es una gráfica plana conexa entonces se tiene que $(G^d)^d$ es isomorfa a G . En la figura 11, veremos un ejemplo de una gráfica G que no es conexa y $G^{dd} \cong G$.

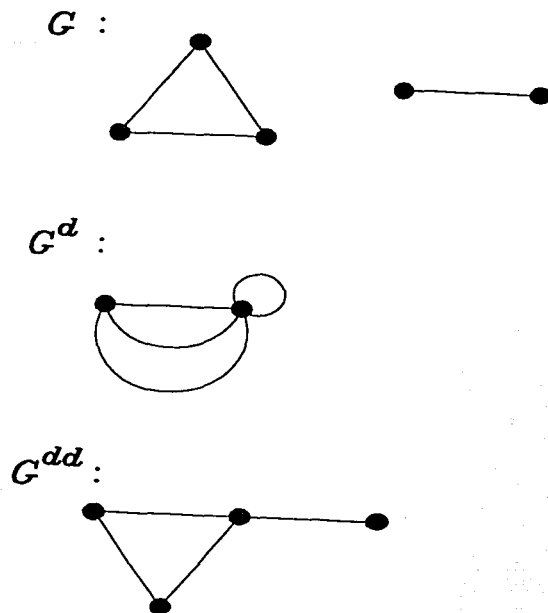


Figura 43.

Para conocer más propiedades sobre gráficas duales ver [M], [G R].

2.2.3. Recordemos de (1.3), que podemos proyectar un nudo o enlace K en un plano, de tal forma que la proyección de K , denotada por \widehat{K} sea una proyección regular y cuando ésta contiene información sobre la arista que pasa por debajo y la arista que pasa por arriba en cada punto de autointersección de \widehat{K} , la llamaremos *diagrama regular de K* , que denotamos por D_K (y si no hay confusión se denotará como D).

Definición 2.2.3.0. Sean D un diagrama regular de un nudo o enlace K y \widehat{K} la proyección regular de K .

Podemos pensar a \widehat{K} como una "gráfica" en el plano, donde los vértices corresponden a los puntos de cruce de K . Ponemos gráfica entre comillas pues K puede contener al nudo trivial, que no es propiamente una gráfica pues no contiene vértices. A la gráfica que obtenemos la llamaremos *la sombra de D* y la denotaremos por \widehat{G}_D (y si no hay confusión, sólo se denotará como \widehat{G}). Entonces \widehat{G} es una gráfica plana 4-regular, (es decir, todos sus vértices tienen grado 4).

Ejemplos:

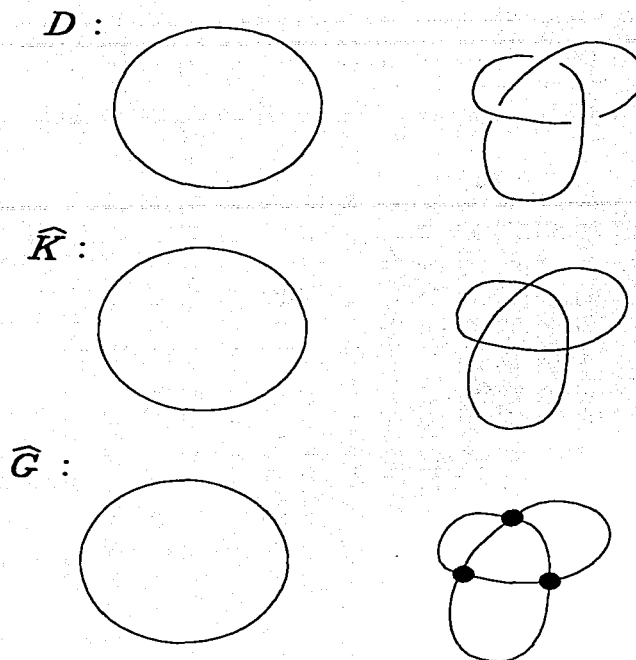


Figura 44.

2.3 Las gráficas interior y exterior de un enlace.

Definición 2.3.1. Sean X una gráfica y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que X se puede *bien colorear* con m colores si $\exists \Psi : V(X) \rightarrow \{1, \dots, m\}$ función tal que si $s \stackrel{\alpha}{\sim} t$ es arista de G , con $s \neq t$, entonces $\Psi(s) \neq \Psi(t)$.

Definición 2.3.2. Una gráfica X es llamada *bipartita* si para el conjunto de vértices $V(X)$ podemos dar una partición en dos conjuntos A y B tal que $V(X) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y si $s \stackrel{\alpha}{\sim} t \in E(X)$, $s \in A$, entonces $t \in B$, o viceversa.

Lema 2.3.3. Una gráfica G es bipartita si y sólo si G se puede bien colorear con a lo más dos colores. (Proposición 10.1.7. [G Y]).

2.3.4. Sea G una gráfica, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto de vértices y $E(G)$ el conjunto de aristas.

Definición. Un *ciclo* es un camino cerrado. Denotaremos un ciclo por $C = (v_1 \stackrel{\alpha_1}{\sim} v_2, \dots, v_{n-1} \stackrel{\alpha_{n-1}}{\sim} v_n)$ con $v_1 = v_n$. También denotaremos por $E(C)$ el conjunto de aristas de C y $V(C)$ el conjunto de vértices de C . Diremos que un ciclo C es un *ciclo par* si el número de aristas de C denotado por $|E(C)|$ es un número par y C es un *ciclo impar* si $|E(C)|$ es un número impar. Denotaremos por $|V(C)|$ el número de vértices de C .

Definición 2.3.5. Un ciclo simple es un ciclo $C = (v_1 \xrightarrow{\alpha_1} v_2, \dots, v_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} v_n)$ para el cual $v_1 = v_n$ y para todos $1 \leq i \neq j \leq n-1$, $v_i \neq v_j$.

Proposición 2.3.6. Sean D diagrama regular de un nudo o enlace K y \widehat{G} la sombra de D entonces \widehat{G}^d es bipartita.

Demostración.

Usaremos el siguiente hecho conocido:

2.3.6.0. Sea H una gráfica sin lazos, H es bipartita si y sólo si todo ciclo de H es par.

Afirmación 2.3.6.1. Todos los ciclos simples de \widehat{G}^d son pares. En particular, \widehat{G}^d no tiene lazos.

Demostración.

Sean C un ciclo simple de \widehat{G}^d y v_1, \dots, v_m los vértices de \widehat{G} contenidos en C .

Denotaremos por $\deg_E(v_i)$, el grado del vértice v_i que se obtiene al contar el número de aristas que contienen a v_i y que no cruzan C y por $\deg_I(v_i)$, el grado del vértice v_i que se obtiene al contar el número de aristas que contienen a v_i y que cruzan C . Entonces $\deg(v_i) = \deg_I(v_i) + \deg_E(v_i)$. Ya que $\forall i, v_i$ tiene grado par tenemos lo siguiente:

$$2k = \sum_{i=1}^m \deg(v_i) = \sum_{i=1}^m \deg_I(v_i) + \sum_{i=1}^m \deg_E(v_i), \text{ para algún } k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Sean } t = \sum_{i=1}^m \deg_I(v_i) \text{ y } s = \sum_{i=1}^m \deg_E(v_i), \text{ entonces}$$

$t = 2(\text{número de aristas de } \widehat{G} \text{ contenidas en } C)$ y como $2k = s + t$, se tiene que s es un número par, es decir el número de aristas de \widehat{G} que cruzan C es par, por lo tanto C es un ciclo simple de longitud par. ■

Afirmación 2.3.6.2. Como \widehat{G}^d no tiene lazos. Demostraremos que si todos los ciclos simples de \widehat{G}^d son pares entonces todos los ciclos de \widehat{G}^d son pares.

Sea C ciclo de \widehat{G}^d . Se demostrará que $C = \bigcup_{t=1}^m C_t$, con C_t ciclo simple $1 \leq t \leq m$, $m \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Sea $C = (v_1 \xrightarrow{\alpha_1} v_2, \dots, v_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} v_n)$ se demostrará por inducción sobre n .

Base de inducción $n = 2$, entonces $C : v_1 \xrightarrow{\alpha_1} v_2$ es simple. Por (2.3.6.1), C es par.

Sea C un ciclo de \widehat{G}^d , $C = (v_1 \xrightarrow{\alpha_1} v_2, \dots, v_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} v_n)$, con $v_1 = v_n$.

Supongamos válida la afirmación para $n-1$.

Si C es ciclo simple, entonces C es unión de ciclos simples.

Si C no es simple entonces existe $1 \leq r < s < n$ tal que $v_r = v_s$.

$$C = (v_1 \xrightarrow{\alpha_1} v_2, \dots, v_{r-1} \xrightarrow{\alpha_{r-1}} v_r, \dots, v_{s-1} \xrightarrow{\alpha_{s-1}} v_s, \dots, v_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} v_n),$$

Si $C' = (v_r \xrightarrow{\alpha_r} v_{r+1}, \dots, v_{s-1} \xrightarrow{\alpha_{s-1}} v_s)$, C' es un ciclo ya que $v_r = v_s$ y por hipótesis de inducción tenemos que:

$C' = \bigcup_{l=1}^m C'_l$ $1 \leq l \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, con C'_l ciclo simple.

Sea

$C'' = (v_1 \xrightarrow{\alpha_1} v_2, \dots, v_{r-1} \xrightarrow{\alpha_{r-1}} v_r, v_r = v_s \xrightarrow{\alpha_s} v_{s+1}, \dots, v_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} v_n)$, es otro ciclo y $|V(C'')| < n$. Entonces por hipótesis de inducción $C'' = \bigcup_{k=1}^t C''_k$ $1 \leq k \leq t$, $t \in \mathbb{N}$ con C''_k ciclo simple.

Como $C = C' \cup C'' = \left(\bigcup_{l=1}^m C'_l \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^t C''_k \right)$, con $m, t \in \mathbb{N}$.

Entonces C es unión de ciclos simples.

2.3.6.3. Veamos ahora que todo ciclo de \widehat{G}^d es par:

Sea C un ciclo de \widehat{G}^d , entonces por (2.3.6.2), $C = \bigcup_{i=1}^m C_i$, con C_i ciclo simple y $1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, y por (2.3.6.1), $\forall 1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, C_i es ciclo par. Por lo tanto, C es un ciclo par. ■

2.3.7. Sean \widehat{K} la proyección regular de un nudo o enlace K , D un diagrama regular de K y \widehat{G} la sombra de D . En (2.3.6) demostramos que \widehat{G}^d es una gráfica bipartita y usando el lema (2.3.3.), podemos bien colorear a \widehat{G}^d con a lo más dos colores, digamos blanco y negro. Ya que cada vértice de \widehat{G}^d representa una región de \widehat{G} , entonces se obtiene un coloreado para las regiones en las que \widehat{K} divide al plano. Asociemos a D , diagrama regular de K , dos gráficas signadas con las siguientes convenciones:

2.3.7.1. Asignaremos el color blanco a la región no acotada de D , y llamaremos *regiones exteriores* a las regiones blancas y *regiones interiores* a las regiones negras. *Ejemplo:*

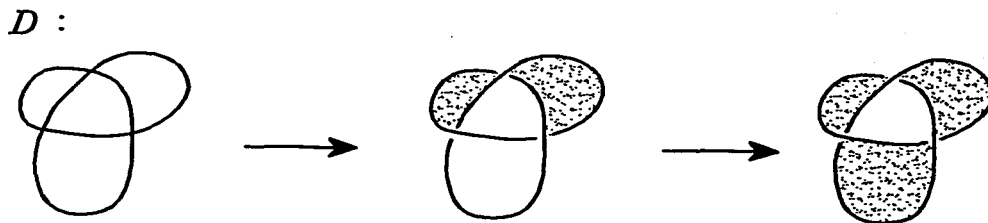


Figura 45.

2.3.8. Definimos la *gráfica signada interior*, $G^{in}(D)$, de D de la siguiente manera:

2.3.8.1. Representaremos los vértices de $G^{in}(D)$ con un punto por cada región interior de D .

2.3.8.1.1. Para ejemplificar lo anterior veamos la figura 46.

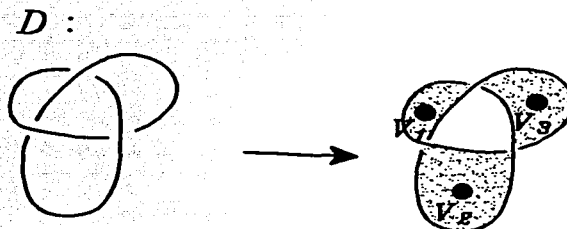


Figura 46.

2.3.8.2. Si dos regiones interiores R_i y R_j con vértices v_i y v_j respectivamente, se intersectan en puntos de cruce de D , digamos c_1, c_2, \dots, c_k , uniremos los vértices v_i y v_j por curvas C_h , $1 \leq h \leq k$ de tal forma que C_h pasa por c_h y si $h \neq l$ entonces $C_h \cap C_l = \emptyset$. Siguiendo con el ejemplo (2.3.8.1.1):

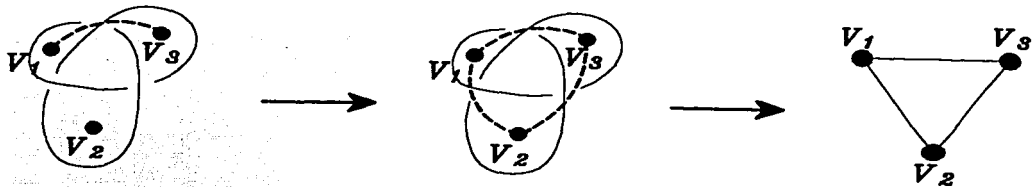


Figura 47.

2.3.8.3. El signo para cada arista según el tipo de cruce de D , será como se muestra en la figura 48 a) y 48 b). Por abuso del lenguaje y si no hay confusión, llamaremos *cruce positivo* al cruce de la fig. 48 a) y *cruce negativo* al cruce de la fig. 48 b).

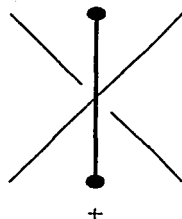


Figura 48a).

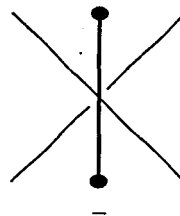


Figura 48b).

2.3.8.3.1. Finalmente asignamos el signo a cada arista usando la convención de (2.3.8.3) y obtendremos una gráfica interior signada asociada a D . Para el ejemplo (2.3.8.1.1) obtenemos la gráfica interior de la figura 49.

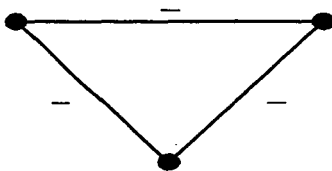


Figura 49.

2.3.9. La gráfica signada exterior, $G^{out}(D)$, de D es la siguiente:

2.3.9.1. Representaremos los vértices de $G^{out}(D)$ con un punto por cada región exterior de D y utilizaremos las mismas convenciones de la construcción de la gráfica interior para obtener las aristas de $G^{out}(D)$.

2.3.9.1.1. Para ejemplificar lo anterior veamos la figura 50.

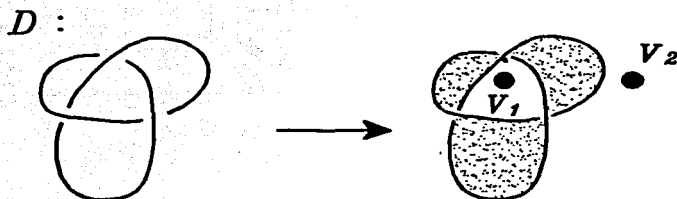


Figura 50.

2.3.9.1.2. Finalmente asignamos el signo a cada arista según la convención antes mencionada y obtenemos una gráfica exterior signada asociada a D :

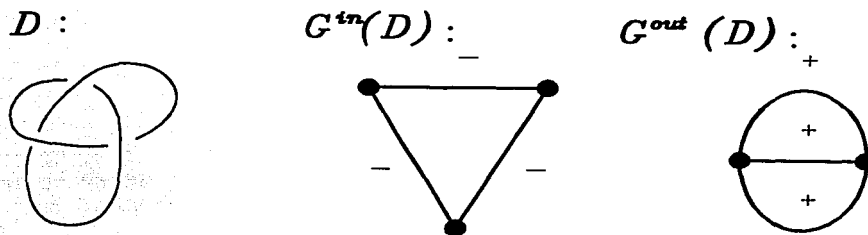


Figura 51.

2.3.9.2. Denotaremos por $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{out}(D))$, las matrices laplacianas asociadas a la gráfica interior y exterior, respectivamente.

Observación 1. Si $G^{in}(D)$ y $G^{out}(D)$ son gráficas conexas, entonces $G^{out}(D) = (G^{in}(D))^d$.

Observación 2. La gráfica interior o exterior, puede no ser conexas, veamos el ejemplo de la figura 52.

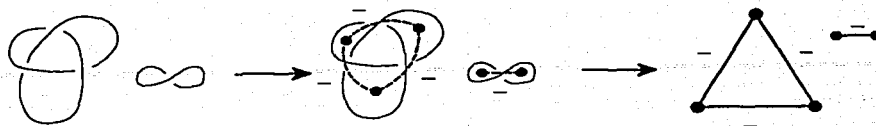


Figura 52.

2.3.10. Observación. A toda gráfica signada y plana G se le puede asociar un nudo o enlace K . Más aún, si G es una gráfica plana signada y G^d su gráfica plana signada dual, entonces existe un diagrama de enlace D tal que $G = G^{in}(D)$ y $G^d = G^{out}(D)$. A saber:

2.3.10.1. Sea G una gráfica signada y plana, el método que seguiremos para asociarle un nudo o enlace es el siguiente:

2.3.10.2. Dibujemos una "x" en el centro de cada arista de G .

2.3.10.2.1. Para ejemplificar lo anterior veamos la figura 53.

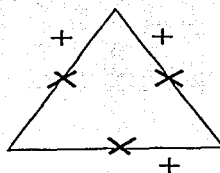


Figura 53.

2.3.10.3. Por cada punto final de cada una de estas "x" dibujemos una curva que siga por las aristas de G , sin cruzar aristas de G , hasta encontrar un punto final de un vecino "x" (este vecino puede ser la misma "x") y sin cruces de estas nuevas aristas salvo en su punto de intersección, es decir en la "x". Siguiendo con el ejemplo (2.3.10.2.1):

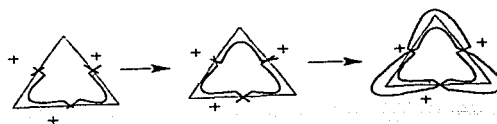


Figura 54.

2.3.10.4. Continuando este proceso para cada "x", obtenemos la proyección regular de un nudo pero sin información sobre cómo van los cruces.

2.3.10.5. Dada la proyección regular de un nudo podemos bien colorear con a lo más dos colores las regiones en las que ésta divide al plano, ver (2.3.7). Elijamos la misma convención que en (2.3.7.1) para colorear dichas regiones. Siguiendo con el ejemplo (2.3.10.2.1):

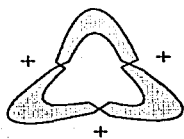


Figura 55.

2.3.10.6. La convención para asignar el tipo de cruces, negativo o positivo, a la proyección regular de un nudo es la siguiente:



Figura 56.

2.3.10.7. Asignando los cruces negativos y positivos a la proyección regular que obtuvimos en (2.3.10.5), tendremos un diagrama regular de nudo K asociado a la gráfica signada G . Siguiendo con el ejemplo (2.3.10.2.1):

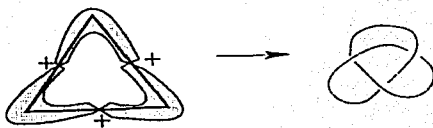


Figura 57.

2.3.10.8. Ahora tenemos G gráfica plana signada y G^d su gráfica dual plana (es decir fijamos un encajamiento plano).

Entonces hay un método más sencillo que el anterior para encontrar un diagrama de enlace D tal que $G = G^{in}(D)$ y $G^d = G^{out}(D)$. A saber:

Tenemos dibujadas G y G^d en el plano. Veámoslo en el ejemplo siguiente:

G, G^d :

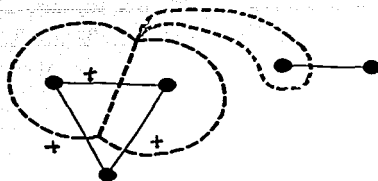


Figura 58.

1.-Ponemos una "x" en cada cruce de una arista de G con una de G^d :

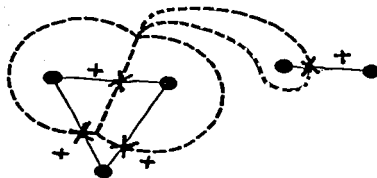


Figura 59.

2.-Seguimos el método anterior para dibujar las aristas y asignar signos. Entonces del ejemplo resulta:



Figura 60.

Observación 2.3.11. No toda gráfica 4-regular es plana, y por lo tanto no toda gráfica 4-regular es proyección de un nudo o enlace.

Ejemplo:

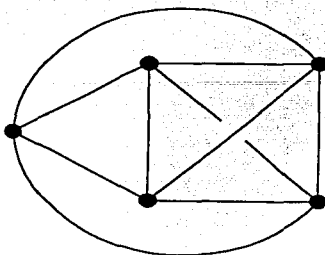


Figura 61.

2.3.12. Proposición. Sean D un diagrama regular de nudo o enlace K y $G^{in}(D)$ y $G^{out}(D)$ las gráficas interior y exterior asociadas a D . Entonces existe D' diagrama regular de nudo o enlace K' tal que D y D' son equivalentes, satisfaciendo $G^{in}(D) = G^{out}(D')$ y $G^{out}(D) = G^{in}(D')$.

Demostración.

Sea D un diagrama regular de un nudo o enlace K . Asignemos la coloración de (2.3.7.1) para las regiones de D , entonces las regiones blancas serán las regiones exteriores de D y las regiones negras serán las regiones interiores de D . Elijamos un arco α de D que esté entre dos cruces c_1 y c_2 y que limite con la región no acotada de D , como ejemplo de lo anterior veamos figura 62.

Ejemplo 2.3.12.

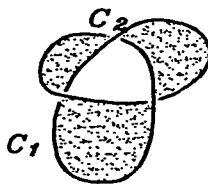


Figura 62.

Usando movimientos de Reidemeister del tipo II ver (1.4), agreguemos cuatro nuevos cruces en α . Sea α' el arco que se obtiene de α como en la figura 63 a).

Recorramos D pasando α' por cada uno de sus cruces, esto lo podemos hacer usando movimientos de Reidemeister. Observemos que α' cambia la coloración de las regiones de D , siguiendo con el ejemplo 2.3.12 veamos la figura 63 b).



Figura 63.

Sea D' el diagrama regular equivalente a D que se obtiene al recorrer D pasando el arco α' por cada uno de sus cruces hasta que α' no lo intersekte en nuevos puntos y al deshacer los bucles de α , entonces las regiones interiores de D son regiones exteriores en D' y viceversa. Siguiendo el ejemplo 2.3.12, tenemos la siguiente figura:

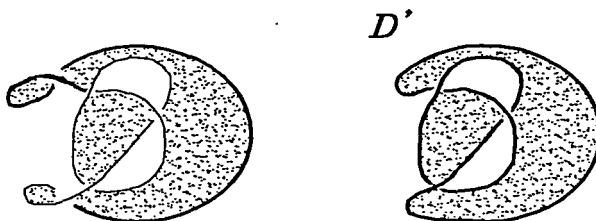


Figura 64.

Verifiquemos que $G^{in}(D) = G^{out}(D')$ y $G^{out}(D) = G^{in}(D')$.

Sea \tilde{G} la sombra de K , por (2.2.3.0) sabemos que \tilde{G} es una gráfica 4-regular plana, entonces podemos proyectarla en la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, de esta manera sus regiones en S^2 son discos. Asociemos a D su gráfica interior $G^{in}(D)$ y su gráfica exterior $G^{out}(D)$ en S^2 , para la construcción de éstas ver (2.3.8) y (2.3.9). Cada una de las aristas que unen los vértices de $G^{in}(D)$ y $G^{out}(D)$ está bien definida por los discos en S^2 que representan las regiones interiores y exteriores de D . Elijamos un arco de círculo de D que esté entre dos cruces de tal forma que pasando esté detrás de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, deformemos D a D' . Siguiendo con el ejemplo 2.3.12,

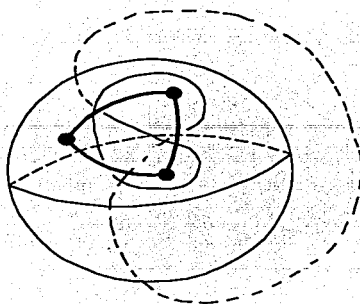


Figura 65.

Al deformar D a D' con el arco de círculo que elegimos notemos que la gráfica interior y exterior asociadas a D son las mismas gráficas asociadas a D' , por lo tanto $G^{in}(D) = G^{out}(D')$ y $G^{out}(D) = G^{in}(D')$. ■

Resumiendo: Si tenemos K un (nudo o) enlace, tenemos definidos los siguientes:

- 1.- Diagrama de K , $D = D_K$, ver (1.3.1).
- 2.- La sombra de D_K (o de K), $\widehat{G} := \widehat{G}_D$, ver (2.2.3.0). Y su gráfica dual, \widehat{G}^d , ver (2.2.1). Éstas se utilizan para definir:
- 3.- Las gráficas signadas interior y exterior de D_K . *Ejemplo:*

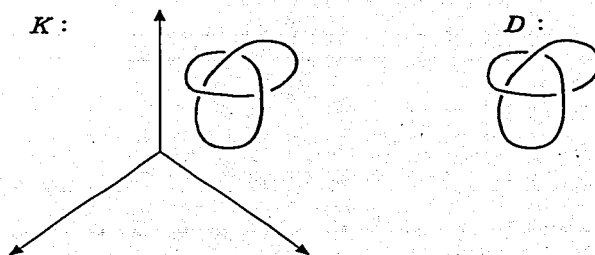


Figura 66.

2.-

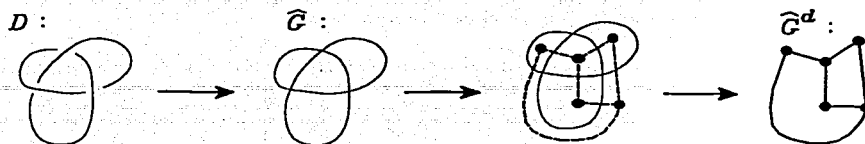


Figura 67.

2'.- \widehat{G}^d nos da una bicoloración de las regiones de D .



Figura 68.

3.-

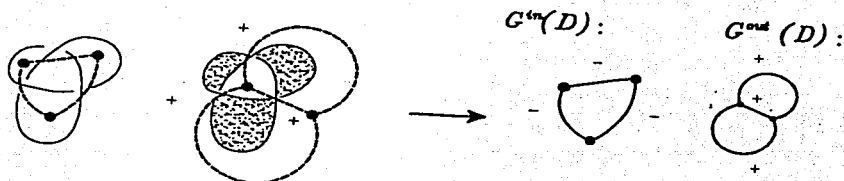


Figura 69.

Capítulo III. Equivalencia de Goeritz.

3.0. En este capítulo se demostrará que las matrices laplacianas asociadas a las gráficas interiores y exteriores de diagramas de nudos o enlaces equivalentes son Goeritz congruentes.

3.1. Para lo anterior necesitamos de las siguientes definiciones.

Definición 3.1.1. Llamaremos a una matriz entera invertible U , con $\det U = \pm 1$ *matriz unimodular*.

Ejemplos:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \det U = 1.$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \det U = 1.$$

$$U = \begin{bmatrix} \pm 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \pm 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \det U = \pm 1.$$

Definición 3.1.2. Sea k un campo y $M \in M_n(k)$ matriz de $n \times n$ con coeficientes en k . Supongamos que M tiene la siguiente forma:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_t \end{bmatrix} \text{ y } M_i \in M_{n_i}(k), n = \sum n_i.$$

Entonces diremos que M es la *suma directa* de M_1, \dots, M_t . En este caso se denotará, $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$.

Definición 3.1.3. Sean A y B matrices enteras de tamaño $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente. Diremos que A y B son *Goeritz congruentes* si existen $r \in \mathbb{N}$, $r \geq n, m$, matrices diagonales con entradas en $\{0, 1, -1\}$, Δ_1 y Δ_2 de tamaño $(r-n) \times (r-n)$ y $(r-m) \times (r-m)$, respectivamente y una matriz unimodular U de tamaño $r \times r$, tales que: $\Delta_1 \oplus A = U(\Delta_2 \oplus B)U^t$. Donde $\Delta_1 \oplus A$ denota la matriz de $r \times r$, $\Delta_1 \oplus A = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A y B son Goeritz congruentes pues,

$$\text{si } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ con } \det U = 1, \Delta_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$\Delta_2 = [-1]$. Entonces, $\Delta_1 \oplus A = U(\Delta_2 \oplus B)U^t$.

3.1.4. La congruencia de Goeritz es una relación de equivalencia.

3.2. Recordemos de (1.4.3) que si D y D' , son diagramas regulares de nudos o enlaces K y K' respectivamente, y se puede obtener D' de D aplicando un número finito de movimientos de Reidemeister a D , entonces D y D' son equivalentes, esta equivalencia se denotó por $D \simeq D'$.

Teorema 1. Sean D y D' diagramas regulares de nudos o enlaces K y K' respectivamente, tales que D y D' son equivalentes, entonces $L(G^{in}(D))$ es Goeritz congruente a $L(G^{in}(D'))$ y $L(G^{out}(D))$ es Goeritz congruente a $L(G^{out}(D'))$.

La demostración de este teorema se verá más adelante.

Como consecuencia del Teorema 1 y de (2.3.12), tenemos el siguiente:

Corolario 1. Sea D un diagrama regular de un nudo o enlace K . Entonces $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{out}(D))$ son Goeritz congruentes.

Demostración.

Por (2.3.12), existe D' diagrama regular de enlace tal que $D \simeq D'$, $G^{in}(D) = G^{out}(D')$ y $G^{out}(D) = G^{in}(D')$ y por el teorema 1, $L(G^{out}(D)) = L(G^{in}(D'))$ es Goeritz congruente a $L(G^{in}(D))$. ■

También usando el Teorema 1, se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 2. Sean G una gráfica plana signada y G^d la gráfica signada dual de G . Entonces $L(G)$ y $L(G^d)$ son Goeritz congruentes.

Demostración.

Sean G una gráfica plana signada y G^d la gráfica signada plana dual asociada a ésta, ver (2.2). Por (2.3.10.8), podemos construir D diagrama regular de nudo o enlace tal que $G = G^{in}(D)$ y $G^d = G^{out}(D)$ y por corolario 1, se tiene que $L(G)$ y $L(G^d)$ son Goeritz congruentes. ■

Corolario 2. Sean G una gráfica aplanable signada y G_1 y G_2 dos aplanamientos de G . Entonces $L(G_1^d)$ y $L(G_2^d)$ son Goeritz congruentes. ■

Ejemplo: Por Corolario 2 y por el ejemplo 2.2.2.2,

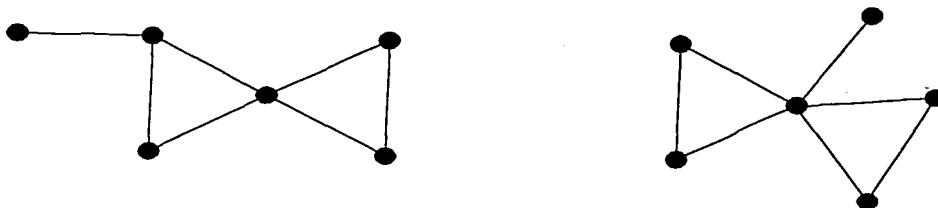
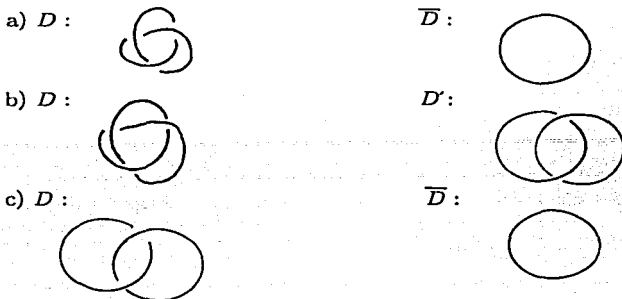


Figura 70.

son Goeritz congruentes.

3.2.1. La siguiente pregunta sería: ¿Existirán diagramas regulares de nudos que no sean Goeritz congruentes? La respuesta es sí.

Ejemplos: Los siguientes diagramas regulares de nudos D y D' no son Goeritz congruentes.



Para demostrar lo anterior, necesitaremos de lo siguiente:

3.2.2. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz entera e invertible de tamaño $n \times n$. Definimos G_A el grupo abeliano en n generadores (g_1, \dots, g_n) que satisfacen las siguientes relaciones: Para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_j a_{ij} g_j = 0$.

Es decir,
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En la literatura a G_A se le denota también como $G(A^{-1})$.

Ejemplos: 1) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Entonces $G_A = \mathbb{Z}_3$. A saber,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2g_1 - g_2 \\ -g_1 + 2g_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $g_2 = 2g_1$ y $3g_1 = 0$.

2) Sea $A = (-2)$. Entonces $G_A = \mathbb{Z}_2$.

3.2.3. Observaciones: 0) Sea A matriz entera e invertible. Entonces el grupo G_A no cambia al hacerle a A operaciones elementales de renglones y columnas. Esto es porque el grupo abeliano definido por un conjunto de generadores y relaciones no cambia al hacer las siguientes operaciones:

0.1) A un generador (a una relación) le sumamos una combinación lineal de los (las) restantes.

0.2) Cambiar el orden de los generadores (de las relaciones).

0.3) Multiplicar por -1 cualquier generador (cualquier relación).

Estas operaciones están definidas por la composición de las siguientes matrices:

$$E_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}; E_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \pm 1 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, si P es una matriz unimodular (ie., $P = M_1 \cdots M_t$, con $M_i \in \{E_1, E_2, E_3\}$), $G_{PA} \cong G_A$. Más aún, si Q es matriz unimodular, entonces $G_{PAQ} \cong G_A$, pues $Q [g_1, \dots, g_n]^T = [g'_1, \dots, g'_n]^T$ es sólo un cambio de variable.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $A \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Es decir, el conjunto de relaciones de G_A es $\{r_1 = ag_1 + bg_2, r_2 = cg_1 + dg_2\}$. Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{Z}$, tomemos el conjunto de relaciones $\{r_1 + \alpha r_2, r_2\}$, que está definido por la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

i) Sea A matriz entera e invertible, entonces G_A es un grupo abeliano finito.

ii) Sea \tilde{A} matriz entera, no nula, simétrica, entonces existe U matriz unimodular tal que $U\tilde{A}U^T = [0] \oplus A$, con A matriz invertible (entera, simétrica).

iii) Sean \tilde{A}, \tilde{B} matrices enteras, no nulas, simétricas y Goeritz congruentes. Sean A, B tales que $U\tilde{A}U^T = [0] \oplus A$ y $U'\tilde{B}U'^T = [0] \oplus B$, como en (ii). Entonces A y B son Goeritz congruentes.

iv) Sea A matriz entera, simétrica e invertible. Sea Δ matriz diagonal con entradas en $\{1, -1\}$. Entonces los grupos G_A y $G_{\Delta \oplus A}$ son isomorfos.

v) De hecho, la definición (3.2.2), se puede extender a matrices enteras, simétricas, no necesariamente invertibles. Sea \tilde{A} matriz entera, no nula, simétrica, entonces existe U matriz unimodular tal que $U\tilde{A}U^T = [0]_{m \times m} \oplus A$, con A matriz invertible. Sea $G[\tilde{A}]$ el grupo definido por los renglones de \tilde{A} , al igual que en 3.2.2. Entonces $G[\tilde{A}] = \mathbb{Z}^m \oplus G_A$. Si $\tilde{A} = [0]_{m \times n}$, entonces $G[\tilde{A}] = \mathbb{Z}^n$. Por lo que podemos definir $G_{\tilde{A}}$ como la parte de torsión de $G[\tilde{A}]$. Entonces si $\tilde{A} \neq [0]$, se tiene que $G_{\tilde{A}} = G_A$ y $G_{[0]} = \{0\}$.

Demostración:

i) Es conocido que existen P, Q matrices unimodulares tales que $PAQ =: D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ es diagonal. Como A es invertible, $\forall i d_i \neq 0$. Por (0), se tiene que G_A es isomorfo a G_{PAQ} .

ii) Como en (i), sean P y Q unimodulares tales que $P\tilde{A}Q$ es diagonal, entonces

$$P\tilde{A}Q = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } C \text{ es invertible. Sea } Q^T P^{-1} =: R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}.$$

Entonces $Q^T \tilde{A} Q = R P \tilde{A} Q = \begin{bmatrix} R_{11} C & 0 \\ R_{21} C & 0 \end{bmatrix}$. Como $Q^T \tilde{A} Q$ es simétrica, $R_{21} C = 0$; más aún, $R_{11} C$ es

invertible pues su rango y el de \tilde{A} son el mismo.

iii) Se sigue de que la congruencia de Goeritz es transitiva y las tres parejas \tilde{A} y A ; \tilde{B} y B ; y \tilde{A} y \tilde{B} son parejas de matrices Goeritz congruentes.

iv) Sea Δ matriz diagonal de entradas en $\{1, -1\}$. Veamos qué relaciones del grupo $G_{\Delta \oplus A}$ genera Δ :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ -g_m \end{bmatrix}. \text{ No agregan nada a } G_A. \blacksquare$$

Con lo anterior se demuestra la siguiente proposición.

3.2.4. Proposición: Sean \tilde{A}, \tilde{B} matrices enteras, simétricas y Goeritz congruentes. Entonces los grupos de torsión $G_{\tilde{A}}$ y $G_{\tilde{B}}$ de $G(\tilde{A})$ y $G(\tilde{B})$, respectivamente, son isomorfos.

Demostración: Con la notación de (iii), se tiene que A y B son Goeritz congruentes. Entonces existen W matriz unimodular y Δ_1 y Δ_2 matrices diagonales con entradas en $\{0, 1, -1\}$ tales que $W(\Delta_1 \oplus A)W^T = \Delta_2 \oplus B$.

Por (v), podemos suponer que las matrices Δ_1, Δ_2 tienen entradas sólo en $\{1, -1\}$; por (iv) y (0), $G_A \simeq G_{\Delta_1 \oplus A}$ y $G_B \simeq G_{\Delta_2 \oplus B}$. ■

Ejemplos: Sean D :



D' :



\bar{D} :



$$\text{Sean } L_1 := L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$L_2 := L(G^{in}(D')) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } L_3 := L(G^{in}(\bar{D})) = [0].$$

Ahora,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, por los ejemplos en (3.2.2), se tiene que D, D', \bar{D} no son Goeritz equivalentes.

De hecho, en la proposición anterior vale el si y sólo si.

Teorema [KP]: Sean A, B matrices enteras y simétricas. Entonces A y B son Goeritz congruentes si y sólo si $G_A \cong G_B$. ■

Demostración del Teorema 1.

Recordemos del capítulo 1 que dos diagramas regulares D y D' son equivalentes si y sólo si podemos cambiar D y D' usando un número finito de movimientos de Reidemeister. Entonces para la demostración del Teorema 1, nos basta analizar cómo cambian las gráficas asociadas a dos diagramas regulares equivalentes D y D' y sus respectivas matrices laplacianas (ver 2.1.6) aplicando un solo movimiento de Reidemeister.

Recordemos (ver ejemplo en la demostración 2.3.1.2), que las regiones interiores de D se pueden ver como regiones exteriores y viceversa, aclaramos esto por las designaciones arbitrarias que hicimos de las regiones para la demostración siguiente.

3.3. Movimiento de Reidemeister tipo I. Sean D y D_1 diagramas de nudos o enlaces tales que D_1 se obtiene de D aplicando a éste un movimiento de Reidemeister del tipo I.

Localmente D y D_1 se ven de la siguiente forma:

\mathcal{D} :

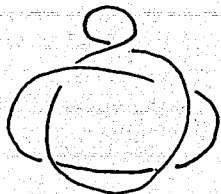


\mathcal{D}_1 :



Donde el cruce marcado así (○) puede ser positivo o negativo y la parte sombreada corresponde a las regiones interiores y la blanca a las regiones exteriores.
 Ejemplo 3.3.

D :



D_1 :



Se analizarán los cambios en las gráficas interiores y exteriores y en sus respectivas matrices laplacianas.

Caso 3.3.1. Veamos primero las regiones interiores. Numerémoslas 1, ..., n. D , D_1 , $G^{in}(D)$ y $G^{in}(D_1)$ lucen localmente de la siguiente manera:

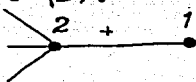
D :



D_1 :



$G^{in}(D)$:



$G^{in}(D_1)$:



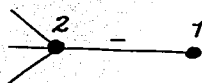
D :



D_1 :



$G^{in}(D)$:



$G^{in}(D_1)$:



Observaciones 3.3.1.1. i) La gráfica interior $G^{in}(D_1)$ que obtendremos tendrá un vértice menos, el vértice 1.

ii) La arista que une a los vértices 1 y 2 en $G^{in}(D)$, desaparecerá en $G^{in}(D_1)$.

Observaciones 3.3.1.2. Sean $L(G^{in}(D)) = (a_{hk})_{hk}$ y $L(G^{in}(D_1)) = (a'_{st})_{st}$.

- 1) Por (3.3.1.1. i), $E(G^{in}(D)) = \{1 \underline{a}_1, \dots\}$ y $E(G^{in}(D_1)) = \{2 \underline{a}_2, \dots\}$, con $j \in \{2, \dots, n\}$.
- 2) Por (3.3.1.1. i), $L(G^{in}(D_1))$ tendrá una columna y un renglón menos que $L(G^{in}(D))$.
- 3) $1 \underline{a}_1$ desaparece en $G^{in}(D_1)$, entonces $a'_{11} = a_{22} - \text{sgn}(1 \underline{a}_1)$.

Las respectivas matrices laplacianas son: (dependiendo del tipo de cruces + ó -)

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} \pm 1 & \mp 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mp 1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L(G^{in}(D_1)) = \begin{bmatrix} a_{22} \mp 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea U la matriz entera de $n \times n$, con $\det U = 1$, dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

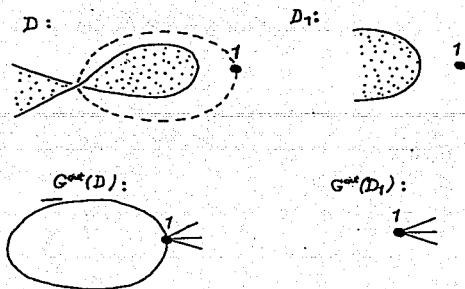
Entonces $UL(G^{in}(D))U^t$ es la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} \mp 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

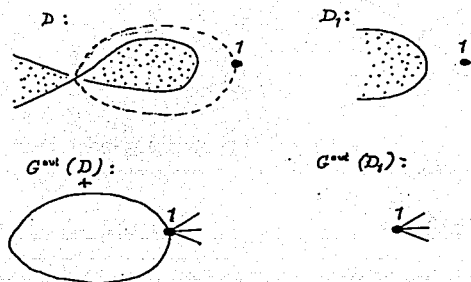
Por tanto $UL(G^{in}(D))U^t = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_1))$, con $\Delta_1 = [\pm 1]$.

Concluimos por el análisis del caso 3.3.1 que $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{in}(D_1))$ son Goeritz congruentes.

Caso 3.3.2. Ahora analicemos las regiones exteriores. Numerémoslas $1, \dots, m$.
 $D, D_1, G^{out}(D)$ y $G^{out}(D_1)$ lucen localmente de la siguiente manera:



6



Observaciones 3.3.2.1. i) El lazo en el vértice 1 desaparece en $G^{out}(D_1)$.

Observaciones 3.3.2.2. Sean $L(G^{out}(D)) = (a_{lp})_{lp}$ y $L(G^{out}(D_1)) = (a'_{rq})_{rq}$.

- 1) Por (3.3.2.1. i), $E(G^{out}(D)) = \{1 \frac{\alpha_1}{1}, \dots\}$ y $E(G^{out}(D_1)) = \{1 \frac{\alpha'_1}{k \neq 1}, \dots\}$, con $k \in \{2, \dots, m\}$.
 - 2) Por (3.3.2.1 i) y (2.1.6.1), $L(G^{out}(D_1))$ y $L(G^{out}(D))$ son matrices iguales.
- Las respectivas matrices laplacianas son:

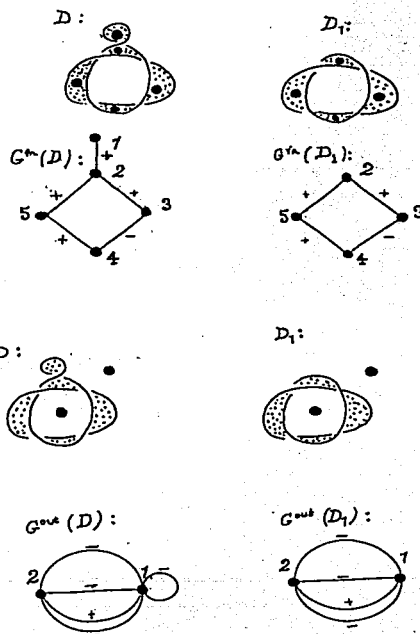
$$L(G^{out}(D)) = L(G^{out}(D_1)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Sea U' la matriz identidad de $n \times n$,

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Entonces $U' L(G^{out}(D)) U'^t = L(G^{out}(D_1))$.

3.3.3. Continuando con el ejemplo 3.3 tenemos lo siguiente:



$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2$ es positiva entonces obtenemos lo siguiente:

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$L(G^{in}(D_1)) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

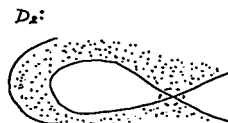
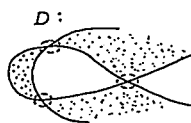
Entonces $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{in}(D_1))$ son Goeritz congruentes.

Por el caso 3.3.2 obtenemos lo siguiente:

$$L(G^{out}(D)) = L(G^{out}(D_1)) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \text{ con } U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

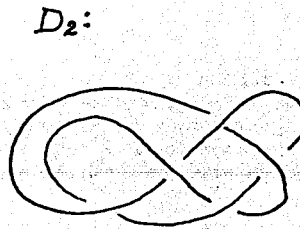
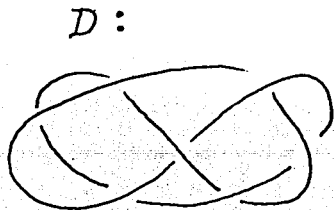
Entonces $L(G^{out}(D))$ y $L(G^{out}(D_1))$ son Goeritz congruentes.

3.4. Movimiento de Reidemeister tipo II. Sean D y D_2 diagramas de nudos o enlaces tales que D_2 se obtiene de D aplicando a éste un movimiento de Reidemeister del tipo II.
Localmente D y D_2 se ven de la siguiente forma:



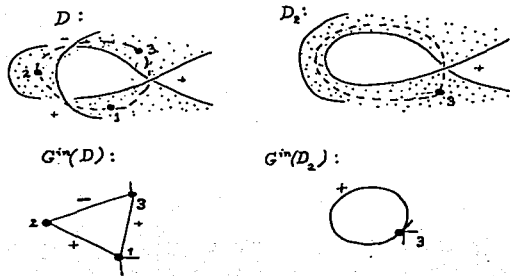
Donde los cruces de la izquierda en D tienen signos opuestos, la parte sombreada corresponde a las regiones interiores y la blanca a las regiones exteriores.

Ejemplo 3.4.

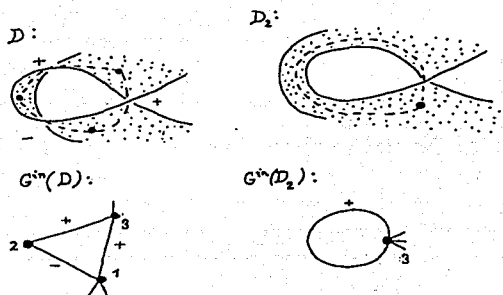


Se analizarán los cambios en las gráficas interiores y exteriores y en sus respectivas matrices laplacianas.

Caso 3.4.1. Veamos primero las regiones interiores. Numerémoslas $1, \dots, n$. $D, D_2, G^{in}(D)$ y $G^{in}(D_2)$ lucen localmente de la siguiente manera:



6



Observaciones 3.4.1.1. i) Notemos que la gráfica interior $G^{in}(D_2)$, que obtendremos tendrá dos vértices menos que $G^{in}(D)$, el vértice 1 y 2 desaparecerán.

ii) La arista que une los vértices 1 y 2 y la arista que une los vértices 2 y 3, tienen signos opuestos.

iii) Los vértices adyacentes al vértice 1 en $G^{in}(D)$, serán adyacentes al vértice 3 en $G^{in}(D_2)$ y las aristas múltiples que unen los vértices 1 y 3 en $G^{in}(D)$, se convertirán en lazos múltiples en $G^{in}(D_2)$.

Observaciones 3.4.1.2. Sean $L(G^{in}(D)) = (a_{ij})_{ij}$ y $L(G^{in}(D_2)) = (a'_{st})_{st}$.

- 1) Por (3.4.1.1), $E(G^{in}(D)) = \{1 \underline{a_1} \underline{2}, 2 \underline{a_2} \underline{3}, 1 \underline{a_3} \underline{3}, \dots\}$ y $E(G^{in}(D_2)) = \{3 \underline{a'_1} \underline{4}, 3 \underline{a'_2} \underline{5}, \dots\}$.
- 2) Por (3.4.1.1. i), $L(G^{in}(D_2))$ tiene dos renglones y dos columnas menos que $L(G^{in}(D))$.
- 3) Las aristas $1 \underline{a_1} \underline{2}$, $2 \underline{a_2} \underline{3}$ desaparecen en $G^{in}(D_2)$. Por tanto, $a'_{11} = -\sum_{j=4}^n a_{1j} - \sum_{j=4}^n a_{3j}$.
- 4) Por (3.4.1.1. iii) $a'_{tt} = a_{1t+2} + a_{3t+2}$ y $a'_{st} = a_{s+2t+2}$ con $2 \leq s \leq n-2$ y $2 \leq t \leq n-2$. Las respectivas matrices laplacianas son: (dependiendo del tipo de cruces + ó -)

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=3}^n a_{1j} \pm 1 & \mp 1 & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ \mp 1 & 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & \pm 1 & -a_{13} - \sum_{j=4}^n a_{3j} \mp 1 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{14} & 0 & a_{34} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & 0 & a_{3n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L(G^{in}(D_2)) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=4}^n a_{1j} - \sum_{j=4}^n a_{3j} & a_{14} + a_{34} & \cdots & a_{1n} + a_{3n} \\ a_{14} + a_{34} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} + a_{3n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea U_1 la matriz de $(n+1) \times (n+1)$ con $\det U_1 = \mp 1$, dada por:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & q & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & \pm 1 & z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \mp \sum_{j=4}^n a_{1j} + 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \pm a_{14} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \pm a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Entonces $U_1 ([1] \oplus L(G^{in}(D))) U_1'$ es la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x+1-q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x+1-q & -1 & x^2 \pm 1 - \sum_{j=4}^n a_{1j} - 2z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sum_{j=4}^n a_{1j} - \sum_{j=4}^n a_{3j} & a_{14} + a_{34} & \cdots & a_{1n} + a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} + a_{34} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{1n} + a_{3n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea $P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, la matriz de permutación de $(n+1) \times (n+1)$,

$P_{23} \cdot (U_1 ([1] \oplus L(G^{in}(D))) U_1^t) \cdot P_{23}$ es la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & x+1-q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x+1-q & x^2 \pm 1 - \sum_{j=1}^n a_{1j} - 2z & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sum_{j=1}^n a_{1j} - \sum_{j=1}^n a_{3j} & a_{14} + a_{34} & \dots & a_{1n} + a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} + a_{34} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{1n} + a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si $t = x^2 + 1 - \sum_{j=1}^n a_{1j} - 2z$ y $x = q - 1$, tendremos los siguientes subsubcasos:

Subcaso 3.4.1. a). Si t es impar, tenemos lo siguiente:

Sea U_2 la matriz de $(n+1) \times (n+1)$, con $\det U_2 = -1$ dada por:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & (1+t)/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & (t-1)/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

Entonces $U_2 \cdot (P_{23}(U_1 ([1] \oplus L(G^{in}(D))) U_1^t) P_{23}) \cdot U_2^t$ es la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sum_{j=1}^n a_{1j} - \sum_{j=1}^n a_{3j} & a_{14} + a_{34} & \dots & a_{1n} + a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} + a_{34} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{1n} + a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por tanto $U \cdot (\Delta_2 \oplus L(G^{in}(D))) \cdot U^t = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_2))$, donde $\Delta_2 = [1]$, $\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = U_2 \cdot P_{23} \cdot U_1$, con $\det U = \mp 1$.

Subcaso 3.4.1. b). Si t es par, tenemos lo siguiente:

Sea U_3 la matriz de $(n+1) \times (n+1)$, con $\det U_3 = -1$ dada por:

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -t/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & -t/2 - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

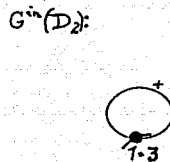
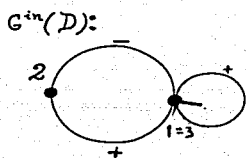
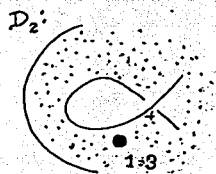
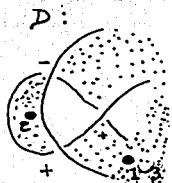
Entonces $U_3 \cdot (P_{23}(U_1 ([1] \oplus L(G^{in}(D))) U_1^t) P_{23}) \cdot U_3^t$ es la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sum_{j=4}^n a_{1j} - \sum_{j=4}^n a_{3j} & a_{14} + a_{34} & \cdots & a_{1n} + a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} + a_{34} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{1n} + a_{3n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

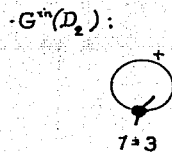
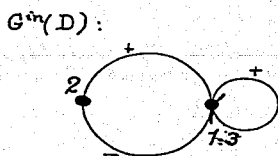
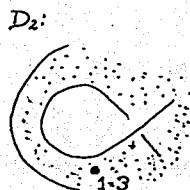
Por lo tanto, $U' \cdot (\Delta_2 \oplus L(G^{in}(D))) \cdot U'^t = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_2))$, con $\Delta_2 = [1]$,

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U' = U_3 \cdot P_{23} \cdot U_1, \det U' = \mp 1.$$

Caso 3.4.2. Las regiones 1 y 3 son iguales. D , D_2 , $G^{in}(D)$ y $G^{in}(D_2)$ lucen localmente de la siguiente manera:



6



Observaciones 3.4.2.1. i) Observemos que las dos aristas que unen los vértices $1 = 3$ y 2 , en $G^{in}(D)$, tienen signos opuestos y éstas desaparecen en $G^{in}(D_2)$, por tanto las matrices laplacianas son iguales. Las respectivas matrices laplacianas son las siguientes:

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=4}^n a_{1j} & 0 & a_{14} & a_{15} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{14} & 0 & -a_{14} - \sum_{j=5}^n a_{4j} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ a_{15} & 0 & a_{45} & -a_{15} - a_{45} - \sum_{j=6}^n a_{5j} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & 0 & a_{4n} & a_{5n} & \cdots & -a_{1n} - \sum_{j=4}^{n-1} a_{jn} \end{bmatrix}$$

$$L(G^{in}(D_2)) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=4}^n a_{1j} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{14} & -a_{14} - \sum_{j=5}^n a_{4j} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{4n} & \cdots & -a_{1n} - \sum_{j=4}^{n-1} a_{jn} \end{bmatrix}$$

Sea U la matriz de $(n+1) \times (n+1)$ con $\det U = 1$, dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & q & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{14} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{1n} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Entonces $U ([1] \oplus L(G^{in}(D))) U^t$ es la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sum_{j=1}^n a_{1j} & 0 & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{14} & 0 & -a_{14} - \sum_{j=5}^n a_{4j} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{1n} & 0 & a_{4n} & \cdots & -a_{1n} - \sum_{j=4}^{n-1} a_{jn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ la matriz de permutación de } (n+1) \times (n+1),$$

$P_{23}(U([1] \oplus L(G^{in}(D)))U^t)P_{23}$ es la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\sum_{j=4}^n a_{1j} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{14} & -a_{14} - \sum_{j=5}^n a_{4j} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{1n} & a_{4n} & \cdots & -a_{1n} - \sum_{j=4}^{n-1} a_{jn} \end{bmatrix}$$

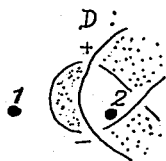
Por tanto $U' \cdot (\Delta_2 \oplus L(G^{in}(D))) \cdot U'^t = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_2))$, donde $\Delta_2 = [1]$, $\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$U' = P_{23} \cdot U$, con $\det U' = -1$.

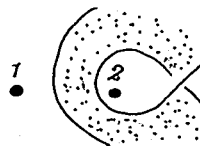
Concluimos por el análisis del caso 3.4.1 y el subcaso 3.4.1.1 que $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{in}(D_2))$ son Goeritz congruentes.

Caso 3.4.3. Ahora analicemos las regiones exteriores. Numerémoslas $1, \dots, m$.

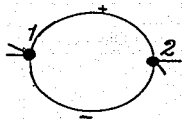
$D, D_2, G^{out}(D)$ y $G^{out}(D_2)$ lucen localmente de la siguiente manera:



D_2 :



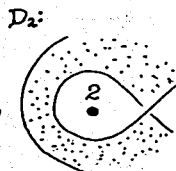
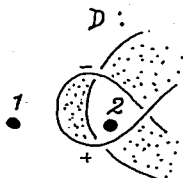
$G^{out}(D)$:



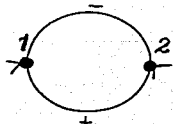
$G^{out}(D_2)$:



6



$G^{out}(D)$:



$G^{out}(D_2)$:



Observaciones 3.4.3.1. Las aristas que unen a los vértices 1 y 2 en $G^{out}(D)$ tienen signos opuestos y éstas desaparecen en $G^{out}(D_2)$.

Observaciones 3.4.3.2. Sean $L(G^{out}(D)) = (a_{rs})_{rs}$ y $L(G^{out}(D_2)) = (a'_{hk})_{hk}$.

1) Por (3.4.3.1), $E(G^{out}(D)) = \{1 \alpha_{1,2}, 2 \alpha_{2,1}, \dots\}$ y $E(G^{out}(D_2)) = \{1 \alpha'_{2,1}, \alpha'_{2,3}, \dots\}$.

2) Ya que $1 \alpha_{1,2}$ y $2 \alpha_{2,1}$ desaparecen en $G^{out}(D_2)$ y tienen signos opuestos, entonces $L(G^{out}(D))$ y $L(G^{out}(D_2))$ tienen el mismo número de renglones y columnas y son iguales.

Las respectivas matrices laplacianas son:

$$L(G^{out}(D)) = L(G^{out}(D_2)) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

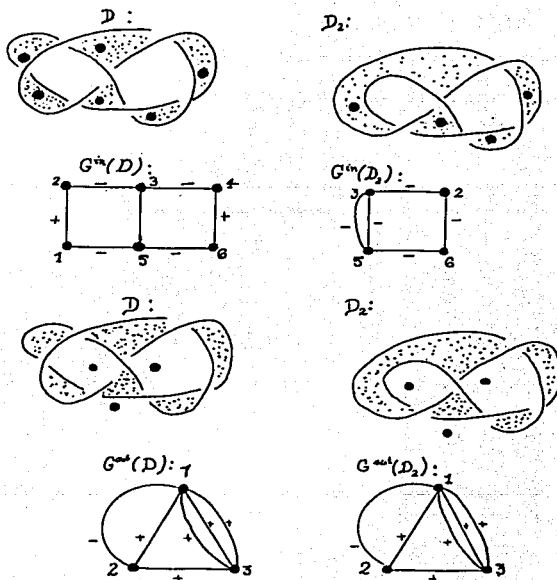
Sea U la matriz identidad de $n \times n$,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Entonces $UL(G^{out}(D))U^t = L(G^{out}(D_2))$.

Concluimos por el análisis del caso 3.4.3 que $L(G^{out}(D))$ y $L(G^{out}(D_2))$ son Goeritz congruentes.

3.4.4. Continuando con el ejemplo 3.4.



Por el caso 3.4.1 obtenemos lo siguiente:

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$L(G^{in}(D_2)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & q & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $x = 0$ y $z = 1$ entonces $t = -2$. Por el subcaso 3.4.1. b) obtenemos lo siguiente:

$$\text{Si } t \text{ es par, } U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2/2 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Por el subcaso 3.4.1. b), concluimos que $L(G^{in}(D))$ y $L(G^{in}(D_2))$ son Goeritz congruentes pues tenemos lo siguiente:

$$U'([1] \oplus L(G^{in}(D))U_1^t)U'^t = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_2)), \text{ con } \Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y $U' = U_3 P_{23} U_1$, con $\det U' = -1$.

Para las gráficas exteriores obtenemos,

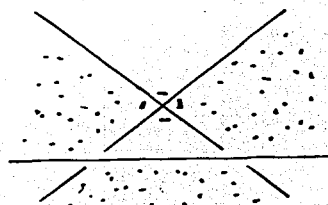
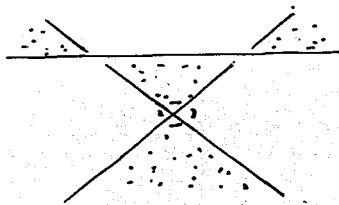
$$L(G^{out}(D)) = L(G^{out}(D_2)) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

Por el caso 3.4.3 concluimos que $L(G^{out}(D))$ y $L(G^{out}(D_2))$ son Goeritz congruentes, pues tenemos lo siguiente:

$$UL(G^{out}(D))U^t = G^{out}(D_2), \text{ con } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3.5. Movimiento de Reidemeister tipo III. Sean D y D_3 diagramas de nudos o enlaces tales que D_3 se obtiene de D aplicando a éste un movimiento de Reidemeister del tipo III.

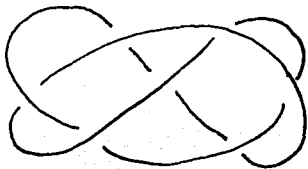
Localmente después de girar los diagramas D y D_3 , éstos se ven de la siguiente forma:



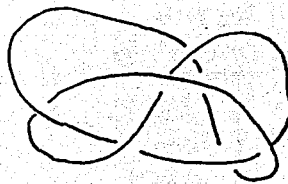
Donde el cruce marcado \odot puede ser positivo o negativo y la parte sombreada corresponde a las regiones interiores y la blanca a las regiones exteriores.

Ejemplo 3.5:

D :

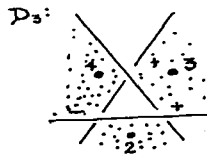
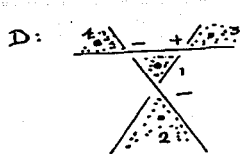


D_3 :

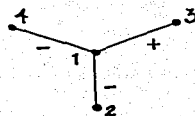


Observemos que el movimiento de Reidemeister de tipo III y su inverso se ven localmente iguales, pero con las regiones sombreadas y blancas intercambiadas. Por lo tanto basta analizar los cambios en las gráficas interiores y en sus respectivas matrices laplacianas.

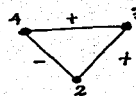
Caso 3.5.1. Numeremos las regiones interiores 1, ..., n y supongamos que las regiones 1, 2, 3 y 4 son distintas D , D_3 , $G^{in}(D)$ y $G^{in}(D_3)$ lucen localmente de la siguiente manera:



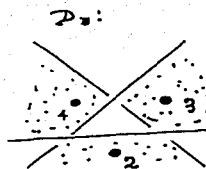
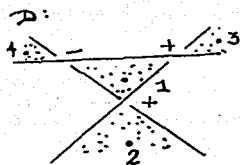
$G^{in}(D)$:



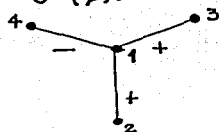
$G^{in}(D_3)$:



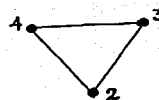
6



$G^{in}(D)$:



$G^{in}(D_3)$:



Observaciones 3.5.1.1. i) Notemos que la gráfica interior $G^{in}(D_3)$, que obtendremos tiene un vértice menos que $G^{in}(D)$, el vértice 1 desaparece.

ii) La arista que une los vértices 1 y 4 y la arista que une los vértices 1 y 3, tienen signos opuestos en $G^{in}(D)$. La arista que une los vértices 2 y 4 y la arista que une los vértices 2 y 3, tiene signos opuestos en $G^{in}(D^3)$.

Observaciones 3.5.1.2. Sean $L(G^{in}(D)) = (a_{kl})_{kl}$ y $L(G^{in}(D_3)) = (a'_{st})_{st}$.

1) Por (3.5.1.1.i), $E(G^{in}(D)) = \{1 \xrightarrow{\alpha_1} 2, 1 \xrightarrow{\alpha_2} 4, 1 \xrightarrow{\alpha_3} 3, \dots\}$ y
 $E(G^{in}(D_3)) = \{2 \xrightarrow{\alpha'_1} 3, 3 \xrightarrow{\alpha'_2} 4, 2 \xrightarrow{\alpha'_3} 4, \dots\}$.

2) Por (3.5.1.1.i), $L(G^{in}(D_3))$ tiene una columna y un renglón menos que $L(G^{in}(D))$.

3) $1 \xrightarrow{\alpha_1} 2$ es remplazada en $G^{in}(D_3)$ por dos aristas, $2 \xrightarrow{\alpha'_1} 3$ y $2 \xrightarrow{\alpha'_2} 4$, entonces, $a'_{12} = a_{23} - \text{sgn}(2 \xrightarrow{\alpha_1} 3)$ y $a'_{13} = a_{24} - \text{sgn}(2 \xrightarrow{\alpha_1} 4)$ y por (3.5.1.1. i) se tiene que $a'_{11} = a_{22} - \text{sgn}(1 \xrightarrow{\alpha_1} 2)$.

4) Ya que $1 \xrightarrow{\alpha_3} 3$ es remplazada por dos aristas, $2 \xrightarrow{\alpha'_1} 3$ y $3 \xrightarrow{\alpha'_2} 4$ en $G^{in}(D_3)$, entonces, $a'_{23} = a_{34} - \text{sgn}(3 \xrightarrow{\alpha_2} 4)$, y por (3.5.1.1. ii) $a'_{22} = a_{33} + \text{sgn}(1 \xrightarrow{\alpha_3} 3)$.

5) $1 \xrightarrow{\alpha_2} 4$ es remplazada por dos aristas, $3 \xrightarrow{\alpha'_2} 4$ y $2 \xrightarrow{\alpha'_1} 4$ en $G^{in}(D_3)$, entonces $a'_{33} = a_{44} - \text{sgn}(1 \xrightarrow{\alpha_2} 4) + \text{sgn}(3 \xrightarrow{\alpha_2} 4) + \text{sgn}(2 \xrightarrow{\alpha_1} 4)$.

Las respectivas matrices laplacianas son: (dependiendo del tipo de cruces + ó -)

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} \mp 1 & \pm 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \pm 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ -1 & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 1 & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ 0 & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L(G^{in}(D_3)) = \begin{bmatrix} a_{22} \pm 1 & a_{23} - 1 & a_{24} + 1 & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ a_{23} - 1 & a_{33} \pm 1 & a_{34} \mp 1 & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ a_{24} + 1 & a_{34} \mp 1 & a_{44} \pm 1 & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea U la matriz de $n \times n$ con $\det U = 1$ dada por:

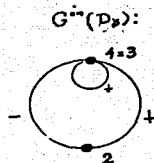
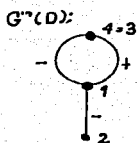
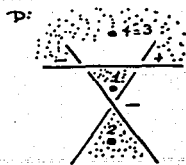
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mp 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Entonces $UL(G^{in}(D))U^t$ es la siguiente matriz:

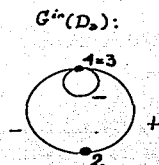
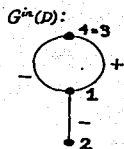
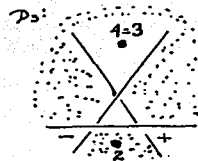
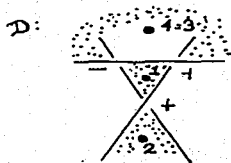
$$\begin{bmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} \pm 1 & a_{23} - 1 & a_{24} + 1 & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} - 1 & a_{33} \pm 1 & a_{34} \mp 1 & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{24} + 1 & a_{34} \mp 1 & a_{44} \pm 1 & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ 0 & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $UL(G^{in}(D))U^t = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_3))$, con $\Delta_1 = [\mp 1]$.

Caso 3.5.2. Las regiones 3 y 4 son iguales. D , D_3 , $G^{in}(D)$ y $G^{in}(D_3)$ lucen localmente de la siguiente manera:



6



Observaciones 3.5.2.1. i) Notemos que la gráfica interior $G^{in}(D_3)$, que obtendremos tiene un vértice menos que $G^{in}(D)$, el vértice 1 desaparece.

ii) Observemos que las dos aristas que unen a los vértices 1 y 3 = 4, tienen signos opuestos en $G^{in}(D)$ y las dos aristas que unen a los vértices 2 y 4 = 3 tienen signos opuestos en $G^{in}(D_3)$.

Observaciones 3.5.2.2. 1) Por (3.5.2.1.i), $E(G^{in}(D)) = \{1 \frac{\alpha_1}{2,1} \frac{\alpha_2}{3=4,1} \frac{\alpha_3}{3=4}, \dots\}$ y $E(G^{in}(D_3)) = \{2 \frac{\alpha'_1}{3=4,2} \frac{\alpha'_2}{3=4,3=4} \frac{\alpha'_3}{3=4}, \dots\}$.

Sean $L(G^{in}(D)) = (a_{hk})_{hk}$ y $L(G^{in}(D_3)) = (a'_{st})_{st}$.

2) Por (3.5.2.1. i), $L(G^{in}(D_3))$ tiene una columna y un renglón menos que $L(G^{in}(D))$.

3) $1 \frac{\alpha_1}{2}$ es remplazada en $G^{in}(D_3)$ por dos aristas, $2 \frac{\alpha'_1}{3=4}$, $2 \frac{\alpha'_2}{3=4}$, por (3.5.3.1.ii) se tiene que $a'_{11} = a_{22} - \text{sgn}(1 \frac{\alpha_1}{2})$.

4) Obtenemos un lazo, $\sum_{i=3}^n \alpha_i^2$ en $G^{in}(D_3)$.

Las respectivas matrices laplacianas son: (dependiendo del tipo de cruces + ó -)

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} \pm 1 & \mp 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mp 1 & a_{22} & a_{23} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{25} & a_{35} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L(G^{in}(D_3)) = \begin{bmatrix} a_{22} \mp 1 & a_{23} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ a_{23} & a_{33} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ a_{25} & a_{35} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3.5.2.3. Sea $U = (u_{ij})_{ij}$ obtendremos una matriz $U' = (u'_{ml})_{ml}$ dada por las entradas de U como sigue:
Borrando las entradas u_{m4} con $1 \leq m \leq n$, sumando las siguientes:
 $u'_{3l} = u_{3l} + u_{4l}$ si $1 \leq l \leq 3$ y $u'_{3l} = u_{3l+1} + u_{4l+1}$ si $4 \leq l \leq n-1$, y para las demás $u'_{ij} = u_{ij}$.

Sea U' la matriz que se obtiene de la matriz U del caso 3.5.1 dada como en 3.5.2.3. Entoces U' es la siguiente matriz de $(n-1) \times (n-1)$ con $\det U' = 1$:

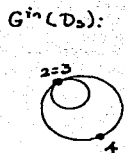
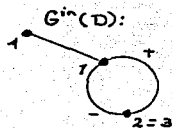
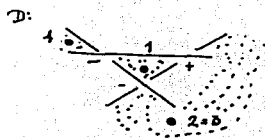
$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$U' L(G^{in}(D)) U''$ es la siguiente matriz:

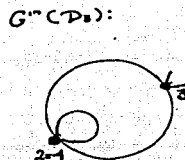
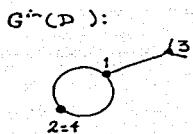
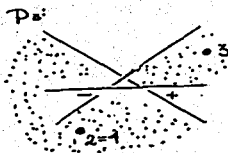
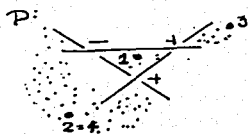
$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} \mp 1 & a_{23} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{25} & a_{35} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $U' L(G^{in}(D)) U'' = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_3))$, con $\Delta_1 = [\pm 1]$.

Caso 3.5.3. Las regiones 2 y 3 ó 2 y 4 son iguales, y los diagramas D , D_3 lucen localmente de la siguiente manera:

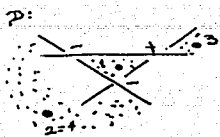


6

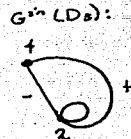
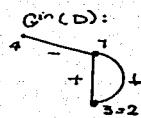
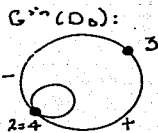
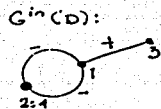
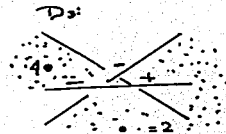
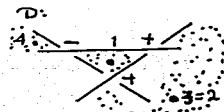


En este caso, los cambios en las gráficas y sus matrices laplacianas son los mismos que en el caso 3.5.2, pero permutando los renglones y las columnas correspondientes a los vértices 2 y 4.

Caso 3.5.4. Las regiones 2 y 3 ó 2 y 4 son iguales, y los diagramas lucen localmente de la siguiente manera:



ó



Observaciones 3.5.4.1. i) Notemos que la gráfica interior $G^{in}(D_3)$, que obtenemos tiene un vértice menos que $G^{in}(D)$, el vértice 1 desaparece.

Observaciones 3.5.4.2 Sean $L(G^{in}(D)) = (a_{ij})_{ij}$ y $L(G^{in}(D_3)) = (a'_{hk})_{hk}$.

1) Por (3.5.2.1. i), $E(G^{in}(D)) = \{1 \overset{\alpha_1}{\underset{2=4}{\text{---}}}, 1 \overset{\alpha_2}{\underset{2=4}{\text{---}}}, 1 \overset{\alpha_3}{\underset{3}{\text{---}}}, \dots\}$ y

$E(G^{in}(D_3)) = \{2=4 \overset{\alpha'_1}{\underset{3}{\text{---}}}, 2=4 \overset{\alpha'_2}{\underset{2=4}{\text{---}}}, 2=4 \overset{\alpha'_3}{\underset{2=4}{\text{---}}}, \dots\}$

2) Por (3.5.2.1. i) $L(G^{in}(D_3))$ tiene una columna y un renglón menos que $L(G^{in}(D))$.

3) $1 \overset{\alpha_1}{\underset{2=4}{\text{---}}}$ y $1 \overset{\alpha_2}{\underset{2=4}{\text{---}}}$ son remplazadas en $G^{in}(D_3)$ por tres aristas, $2=4 \overset{\alpha'_1}{\underset{3}{\text{---}}}$, $3 \overset{\alpha'_3}{\underset{2=4}{\text{---}}}$ y $2=4 \overset{\alpha'_2}{\underset{2=4}{\text{---}}}$, entonces $a'_{11} = a_{22} - (\text{sgn}(1 \overset{\alpha_1}{\underset{2=4}{\text{---}}}) + \text{sgn}(1 \overset{\alpha_2}{\underset{2=4}{\text{---}}})) + \text{sgn}(2=4 \overset{\alpha'_1}{\underset{3}{\text{---}}}) + \text{sgn}(3 \overset{\alpha'_3}{\underset{2=4}{\text{---}}}) + \text{sgn}(2=4 \overset{\alpha'_2}{\underset{2=4}{\text{---}}})$ y $a'_{12} = a_{23} - (\text{sgn}(3 \overset{\alpha'_3}{\underset{2=4}{\text{---}}}) + \text{sgn}(2=4 \overset{\alpha'_1}{\underset{3}{\text{---}}}))$.

4) Ya que $1 \overset{\alpha_3}{\underset{3}{\text{---}}}$ es remplazada por dos aristas, $2=4 \overset{\alpha'_1}{\underset{3}{\text{---}}}$ y $3 \overset{\alpha'_3}{\underset{2=4}{\text{---}}}$ en $G^{in}(D_3)$, se obtiene lo siguiente: $a'_{22} = a_{33} - \text{sgn}(1 \overset{\alpha_3}{\underset{3}{\text{---}}}) + \text{sgn}(2=4 \overset{\alpha'_1}{\underset{3}{\text{---}}}) + \text{sgn}(3 \overset{\alpha'_3}{\underset{2=4}{\text{---}}})$.

Las respectivas matrices laplacianas son: (dependiendo del tipo de cruces + ó -)

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} \mp 1 & \pm 2 & \mp 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \pm 2 & a_{22} & a_{23} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ \mp 1 & a_{23} & a_{33} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{25} & a_{35} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L(G^{in}(D_3)) = \begin{bmatrix} a_{22} \pm 4 & a_{23} \mp 2 & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ a_{23} \mp 2 & a_{33} \pm 1 & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ a_{25} & a_{35} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3.5.4.3. Sea $U = (u_{lp})_{lp}$, obtendremos una matriz $U' = (u'_{rt})_{rt}$ dada por las entradas de U como sigue:
 Borrando las entradas u_{r4} con $1 \leq r \leq n$, sumando las siguientes:
 $u'_{2t} = u_{2t} + u_{4t}$, si $1 \leq t \leq 3$ y $u'_{2t} = u_{2t+1} + u_{4t+1}$ si $4 \leq t \leq n-1$ y para las demás $u'_{rt} = u_{rt}$.

Sea $U' = (u'_{rt})_{rt}$ la matriz que se obtiene de la matriz U del caso 3.5.1 dada como en 3.5.4.3. Entoces U' es la siguiente matriz de $(n-1) \times (n-1)$ con $\det U' = 1$:

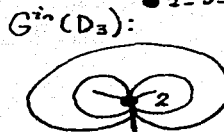
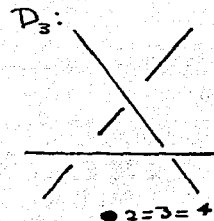
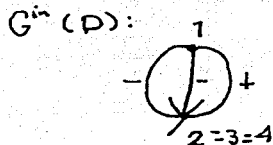
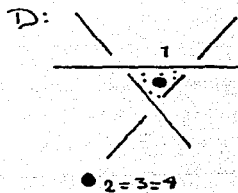
$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$U' L(G^{in}(D)) U'^t$ es la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} \pm 4 & a_{23} \mp 2 & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} \mp 2 & a_{33} \pm 1 & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{25} & a_{35} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & a_{5n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $U' L(G^{in}(D)) U'^t = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_3))$, con $\Delta_1 = [\mp 1]$.

Caso 3.5.5. Las regiones 2, 3 y 4 son iguales y los diagramas D , D_3 , $G^{in}(D)$ y $G^{in}(D_3)$ lucen localmente de la siguiente manera:



Observaciones 3.5.5.1. i) Notemos que la gráfica interior $G^{in}(D_3)$, que obtenemos tiene un vértice menos que $G^{in}(D)$, el vértice 1 desaparece.

ii) Dos de las aristas que unen los vértices 1 y $2 = 3 = 4$ tienen signos opuestos en $G^{in}(D)$ y en $G^{in}(D_3)$ son lazos para el vértice $2 = 3 = 4$.

Observaciones 3.5.5.2. 1) Por (3.5.3.1.i), $E(G^{in}(D)) = \{1 \stackrel{\alpha_1}{\underset{2=3=4,1}{\dots}}, \stackrel{\alpha_2}{\underset{2=3=4,1}{\dots}}, \stackrel{\alpha_3}{\underset{2=3=4,1}{\dots}}, \dots\}$ y $E(G^{in}(D_3)) = \{ \stackrel{\alpha'_1}{\underset{2=3=4,1,2=3=4}{\dots}}, \stackrel{\alpha'_2}{\underset{2=3=4,1,2=3=4}{\dots}}, \stackrel{\alpha'_3}{\underset{2=3=4,1,2=3=4}{\dots}}, \dots\}$.

Sean $L(G^{in}(D)) = (a_{hk})_{hk}$ y $L(G^{in}(D_3)) = (a'_{st})_{st}$.

1) Por (3.5.5.1), $L(G^{in}(D_3))$ tendrá una columna y un renglón menos que $L(G^{in}(D))$.

2) $1 \stackrel{\alpha_1}{\underset{2=3=4,1}{\dots}}$ y $\stackrel{\alpha_2}{\underset{2=3=4,1}{\dots}}$ tienen signos opuestos en $G^{in}(D)$, entonces por (3.5.5.1) $a'_{11} = a_{22} - \text{sgn}(1 \stackrel{\alpha_3}{\underset{2=3=4,1}{\dots}})$.

Las respectivas matrices laplacianas son: (dependiendo del tipo de cruces)

$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} \mp 1 & \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ \pm 1 & a_{22} & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{25} & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{5n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L(G^{in}(D_3)) = \begin{bmatrix} a_{22} \pm 1 & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ a_{25} & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{5n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3.5.5.3. Sea $U = (u_{ij})_{ij}$ obtendremos una matriz $U' = (u'_{ml})_{ml}$ dada por las entradas de U como sigue:

Borrando las entradas u_{m3} y las entradas u_{m4} con $1 \leq m \leq n$, sumando las siguientes:

$u'_{2l} = u_{2l} + u_{3l} + u_{4l}$ si $l = 1$ y $u'_{2l} = u_{3l+2} + u_{4l+2}$ si $2 \leq l \leq n-2$, y para las demás $u'_{ij} = u_{ij}$.

Sea U' la matriz que se obtiene de la matriz U del caso 3.5.1. dada como en 3.5.5.3. Entonces U' es la siguiente matriz de $(n-2) \times (n-2)$ con $\det U' = 1$:

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mp 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $U' L(G^{in}(D)) U''$ es la siguiente matriz:

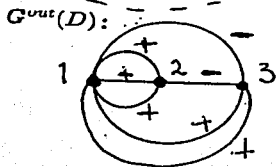
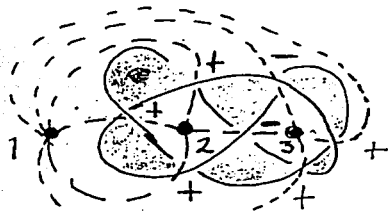
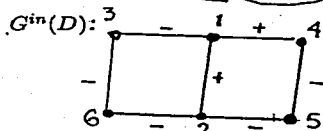
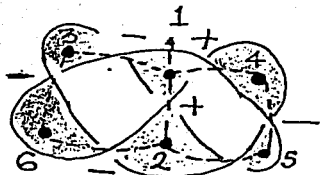
$$\begin{bmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} \pm 1 & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{25} & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{5n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $U' L(G^{in}(D)) U'' = \Delta_1 \oplus L(G^{in}(D_3))$, con $\Delta_1 = [\mp 1]$.

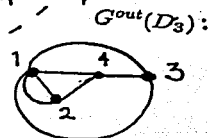
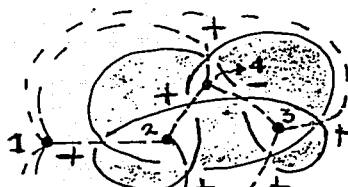
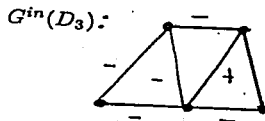
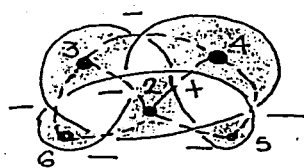
Concluimos por el análisis de los casos 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.4 y 3.5.5 que $L(G^{in}(D))$, $L(G^{in}(D_3))$, $L(G^{out}(D_3))$ y $L(G^{out}(D_3))$ son Goeritz congruentes.

3.5.6. Continuando con el ejemplo 3.5, tenemos los siguiente:

D_3 :



D :



$$L(G^{in}(D)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$L(G^{in}(D_3)) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

Por el caso 3.5.1 obtenemos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$L(G^{in}(D))$ y $L(G^{in}(D_3))$ son Goeritz congruentes ya que $UL(G^{in}(D))U^t = [1] \oplus L(G^{in}(D_3))$.

$$L(G^{out}(D)) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$L(G^{out}(D_3)) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Por el caso 3.5.2 obtenemos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$L(G^{out}(D))$ y $L(G^{out}(D_3))$ son Goeritz congruentes ya que $UL(G^{out}(D_3))U^t = [1] \oplus L(G^{out}(D)) \oplus [-1]$.

REFERENCIAS

- [A] Colin C. Adams. The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots, W.H. Freeman and company. New York, (1994).
- [B] K.A. Berman, Bicycles and spanning trees, SIAM J. Algebraic Discrete Math, 7 (1986), 1-12.
- [B Z] G. Burde, H. Zieschang. Knots, Walter de Gruyter. Berlin. New York, (1985).
- [Ch] F.R.K. Chung, Spectral graph Theory, Conference Board of the Mathematical Sciences 92, AMS, (1997).
- [G] L. Goeritz, Knoten und quadratische formen, Math. Zeitschr 36, (1933), 647-654.
- [G M W] R. Grone, M. Merris, W. Watkins, Laplacian unimodular equivalence of graphs, in: Avner Friedman, Willard Miller Jr. (Eds.), Combinatorial and Graph-Theoretical Problems in Linear Algebra, Institute for Mathematics and its Applications, vol. 80, Springer, Berlin, (1993), pp. 175-180.
- [G R]. Ch. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory, Springer-Verlag New York, (2001).
- [G Y] Jonathan Groos, Jay Yellen, Graph Theory and its applications CRC Press.
- [K] R.H. Kyle, Branched covering spaces and the quadratic forms of links, Annals of Mathematics, 59, (1954), 539-548.
- [K. II] R.H. Kyle, Branched covering spaces and the quadratic forms of links, II, Annals of Mathematics, 69, (1959), 686-699.
- [K P] M. Kneser, D. Puppe, Quadratische formen und verschlingungsinvarianten von knoten, Math. Zeitschr. 58, (1953), 376-384.
- [L] W.B.R. Lickorish, An Introduction of Knot Theory, Springer. New York, (1997).
- [L W] Lien, Watkins. Dual graphs and knot invariants, Linear Algebra and its Applications. Department of Mathematics, California State University at Northridge, (2000), 123-130.
- [M] K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Birkhäuser, Boston, (1996) (translated by Bohdan Kurpita).
- [T] W. T. Tutte, Graph theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. vol. 21, Cambridge University Press. Cambridge, (1984).
- [W] W. Watkins, The Laplacian matrix of a graph: unimodular congruence, Linear and Multilinear Algebra, 28, (1990), 35-43.