01168

4

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

ANÁLISIS DEL MÉTODO AHP PARA LA TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO

TESIS

Como requisito para obtener el grado de

Maestro en Ingeniería en Investigación de Operaciones

Presenta:

ROY RAPHAEL ELINEEMA

DIRECTOR DE TESIS

DRA. MAYRA TREJOS ALVARADO

Noviembre, 2002

...A todos aquellos que con su cariño, comprensión y compañía me han apoyado para continuar adelante

...A todos aquellos que inician la lectura de este trabajo con la esperanza de encontrar en ella un conocimiento

...A todos aquellos que encuentran en el conocimiento el camino a seguir y lo hacen parte de sus vidas.

AGRADECIMIENTOS

A Dios,
mi Creador, mi Sostenedor, y quien con su presencia me ha fortalecido cada día más.

A la Dra. Mayra Trejos,
por haber sido mi profesora y directora de tesis, por todo su apoyo, comentarios y sugerencias en cada paso del desarrollo de este trabajo. Gracias, sin usted no lo hubiera logrado.

Al Dr. Servio Tulio Guillén,
por haber sido mi profesor y uno de mis sinodales de tesis, por su entusiasmo, por darme ánimo constantemente, por tomarse la molestia de revisar este documento desde su prematura etapa y por las sugerencias constructivas y creativas que siempre me ha dado.

A la Dra. Idalia Flores,
por haber sido mi profesora y una de mis sinodales de tesis, por su incansable apoyo en todos los sentidos de mi estancia en la UNAM, y por su franca amistad.

Al Dr. Acosta Flores,
por haber sido mi profesor y uno de mis sinodales de tesis, por brindarme su apoyo para seguir creciendo intelectualmente y creativamente.

A la Dra. Angélica Lozano,
por haber sido una de mis sinodales de tesis y por su sincera amistad y apoyo.

A la SRE,
por la beca brindada durante a lo largo de toda mi estancia en el México.

Al DIT (Dar es Salaam Institute of Technology) de Tanzania,
por el permiso de salir a estudiar y por el apoyo económico recibido.

A la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, en especial a todos los profesores que compartieron sus conocimientos a través de las clases que tuve el privilegio de tomar.

Cabe destacar que es imposible en estas pocas líneas dar las gracias a todas las personas e instituciones que de una forma u otra han contribuido a la realización de éste trabajo. A todos aquellos, siempre estarán en mi corazón.

Roy Raphael Elineema,
Noviembre, 2002.

CONTENIDO PÁGINA

CONTENIDO PÁGINA

CONTENIDO		**PÁGINA**

"In the middle of difficulty lies opportunity."
--- Albert Einstein.

INTRODUCCIÓN

Nuestras decisiones dan forma a nuestra vida. Que las tomemos consciente o inconscientemente, con buenas o malas consecuencias, ellas representan el instrumento fundamental que empleamos para hacer frente a las oportunidades, los retos y las incertidumbres de la vida. Nuestro éxito en todos los papeles que desempeñemos como estudiantes, trabajadores, jefes, ciudadanos, esposos, padres de familia o individuos, gira en torno de las decisiones que tomemos. Tomar decisiones acertadas es una habilidad fundamental en la vida y nos concierne a todos; marcan el rumbo de la carrera profesional y la calidad de vida personal de todo individuo. Pese a ello son pocas las personas que poseen verdaderas habilidades para la toma de decisiones. Por eso, cuando tenemos que elegir, vacilamos, o tenemos miedo y evitamos dar a la decisión toda la reflexión y el tiempo que se requieren para que resulte la más ventajosa.

Los métodos de decisiones multicriterio, es decir, métodos de decisiones con criterios múltiples, tienen por objetivo, proporcionar a los tomadores de decisiones, herramientas que les permitan resolver un problema donde varios puntos de vista (o criterios), la mayoría de las veces contradictorios, deben tomarse en cuenta. La primera constatación que debe hacerse, cuando se abordan este tipo de problemas, es que no existe forzosamente una decisión que sea la mejor simultáneamente para todos los puntos de vista.

Tanto en la vida corriente, como en la de las empresas y organizaciones, son muy frecuentes las situaciones en las que un tomador de decisiones se ve confrontado con una elección de criterios múltiples. Unos ejemplos sencillos de tales situaciones son:

- Supongamos que existen n modelos diferentes de coches. La mayoría de las personas desean comprar el coche del modelo que es el menos caro, que tiene la mejor presentación, que es el más fácil de mantener, que sea el más sólido, por ejemplo. Tales deseos son los criterios de compra.

- Consideremos, el precio y la solidez. Nuestra experiencia nos demuestra que frecuentemente el coche menos caro no es el más sólido; estos dos criterios están en conflicto. Si nos guiamos por el precio para hacer la elección, entonces nos arriesgamos a comprar un coche poco sólido. Por el contrario, si compro el coche más sólido, es muy probable que nos encontremos con uno de los más caros.

- Supongamos que una empresa tiene k proyectos de inversión y que quiere escoger entre ellos aquél que efectivamente llevará a cabo. Entre sus criterios de decisión seguramente estará la rentabilidad prevista, pero contemplará asimismo la magnitud de la inversión, su interés en términos estratégicos y de imagen, tal vez también se verá obligada a considerar el impacto social o el impacto sobre el medio ambiente de los proyectos estudiados. Está claro que el proyecto mejor concebido, desde el punto de vista medioambiental, no es forzosamente el menos costoso. Aquí también los criterios entran más o menos en conflicto.

Las personas que deciden las políticas de actuación a todo nivel en la toma de decisiones dentro de las organizaciones, usan criterios múltiples para analizar las situaciones que se enfrenten. En general, son muy numerosas las áreas de aplicación del análisis de decisiones multicriterio. A continuación se menciona algunas:

1. **Aplicaciones de negocios**. Inversiones en tecnología, introducción de productos, reestructuración de empresas, exploración petrolera, fusiones de empresas, asignación de recursos, evaluación de proveedores.
2. **Aplicaciones sociales**. Programas de salud, construcción de carreteras, instalación de plantas nucleares.
3. **Aplicaciones médicas**. Selección de tratamientos, autorización de nuevas medicinas, decisiones sobre cirugía.
4. **Aplicaciones personales**. Selección de estudios de posgrado, adquisición de bienes duraderos, planeación del retiro.

La realización de análisis de decisiones es una gran responsabilidad. Estos análisis tienen el propósito de guiar a los empresarios, u otras personas, en una situación difícil, por lo que la calidad de los métodos de decisiones multicriterio debe respaldar sólidamente las recomendaciones que surjan de ellos.

Uno de los métodos para resolver problemas de decisiones multicriterio es el *Proceso Analítico Jerárquico*, conocido como el **AHP** (por sus siglas en inglés, **A**nalytic **H**ierarchy **P**rocess) de uso corriente. El AHP tiene, como todos los métodos, ventajas y desventajas que se resumen en problemas de estructura, desde el punto de vista matemático, que muchos de sus usuarios, especialistas en la materia, han tratado de solventar. La ventaja es que es un método fácil de entender para los tomadores de decisiones, y les ayuda en la selección de la decisión final; además, que cuenta con un paquete computacional muy amigable llamado "Expert Choice".

El AHP es muy utilizado tanto en los Estados Unidos y en el continente asiático como en toda Latinoamérica, como puede constatarse en los trabajos que se presentan en congresos tanto de investigación de operaciones, como de toma de decisiones multicriterio.

A pesar de este gran éxito y esa popularidad que tiene en nuestra región, el AHP ha sido criticado desde varias perspectivas, como lo muestran diversas publicaciones que podemos encontrar en revistas de mucho prestigio sobre el tema. La toma de decisiones analítica es importante, sin embargo, debe tener una buena justificación científica. Lo esencial para los usuarios, no debe ser sólo saber cómo se trabaja un método para llegar a una solución, sino también saber sus limitaciones para que sepan cómo aplicarlo e interpretarlo en una situación real.

Es por eso que es interesante que se conozcan, en México donde se utiliza para resolver problemas de gran envergadura en grandes empresas como PEMEX, CFE, CNA, los cuidados que deben tenerse en su utilización. La violación de la lógica y de los *axiomas* (verdades incuestionables) del análisis de decisiones puede conducir a soluciones que más que ayudar pueden perjudicar sobre todo cuando se usa en problemas que involucran grandes inversiones.

El objetivo de esta tesis es, proporcionar recomendaciones a los usuarios del método AHP para que cuiden los aspectos que resulten del análisis que se haga en la estructuración del problema y puedan tener respuestas a futuras incongruencias que pudieran resultar de la pura aplicación.

Este trabajo consta de cuatro capítulos. El primero, muestra un panorama general de los problemas de decisiones, específicamente decisiones multicriterio. Se tratan conceptos, definiciones, y resultados que se emplean en otros capítulos. Se presentan dos enfoques principales de decisiones multicriterio, denominados, por la metodología que emplean, *toma de decisiones* y *ayuda a la decisión*, y se introducen, brevemente, varios métodos.

El segundo capítulo está dedicado a la teoría que sustenta los métodos de decisión: la teoría de la medición y la modelación de las preferencias. Se comienza este capítulo con una presentación de las *relaciones binarias*, en las cuales normalmente se modelan formalmente las preferencias de un tomador de decisiones. Después, se presentan los tipos de escalas comunes y se analizan varios modelos de preferencias. Finalmente, se consideran algunas condiciones o propiedades necesarias para que se puedan modelar, medir y cuantificar las preferencias del decisor.

El tercer capítulo describe el método AHP; se presenta la teoría y la base matemática del método, y se explica cómo aplicarlo paso a paso incluyendo ejemplos.

En el capítulo cuatro, el más importante de la tesis, se hace un análisis del AHP. Primero, se da nuevamente una visión general del método, para que los lectores que ya conozcan el método y no quieran introducirse en el capítulo anterior que tiene los detalles, simplemente lo recuerden; después, se muestran con ejemplos adecuados, sus defectos con respecto a la lógica y a las condiciones necesarias (axiomas) de cualquier proceso de análisis de decisiones multicriterio.

Finalmente se encuentran las conclusiones del trabajo, que incluyen las recomendaciones para los usuarios del método AHP y algunas propuestas de investigaciones en relación al tema. Además, al final hay un anexo que contiene señalamientos teóricos para los que deseen profundizar el tema de decisiones y un pequeño glosario que se consideró importante para facilitar la lectura de los capítulos y aquellos lectores que desconozcan los conceptos puedan revisarlos con facilidad.

"The worst thing you can do is to wait until a decision is forced on you - or made for you."
--- Simon French.

"Toda actividad consciente individual o colectiva implica tomar decisiones."
--- Servio Tulio Guillén.

1

DECISIONES MULTICRITERIO

1.1. EL CONCEPTO DE DECISIONES Y SUS IMPLICACIONES

Tomar decisiones es una tarea que se presenta en todas las facetas en la vida del hombre, pero aquellas necesarias para resolver problemas en las empresas y en el trabajo diario de sus trabajadores, generalmente, no son simples; estos problemas son complejos y necesitan análisis y soluciones que no son fáciles de encontrar. Las consecuencias de estas decisiones pueden, en la mayoría de los casos, afectar el destino de estas personas y de sus organizaciones, por lo que la acción de decidir siempre debe ser cuidadosa y basarse, además de la experiencia, en metodologías científicas creadas para la ayuda a esta toma de decisiones.

El uso del método científico ofrece soluciones que pueden apoyar a inversionistas, tomadores de decisiones, analistas y expertos en la materia de la que trate el problema, además de poder darle seguimiento al proceso inmediato a la toma de decisiones, encontrar explicaciones cuando las cosas no salen según lo previsto y, en su defecto, proponer correctores que mejorarán la solución, ahorrando con ello, a veces, grandes sumas de dinero. El impacto que ocasionan los cambios en las decisiones depende de su vinculación con aspectos importantes del sistema en el que se enmarca el problema.

El proceso de decisión es realizado por personas que juegan papeles diferentes que facilitan sus etapas. Los participantes en el proceso de decisión son:

1. El **tomador de decisiones (decisor)**, quien es la persona (o un grupo de individuos) que finalmente toma la decisión, generalmente el propietario del problema.
2. El **analista de sistemas,** quien modela la situación objeto de estudio y el que, eventualmente, hace las recomendaciones relativas a la selección final. El analista no expresa opiniones personales, sino que se limita a recoger las del decisor y tratarlas de la manera más objetiva posible. Estos son especialistas en análisis de decisiones, investigación de operaciones y en general teorías con estos enfoques.
3. **Otros actores** son personas que pueden participar en la determinación de las consecuencias (o datos) de las alternativas; generalmente, son especialistas en la materia de la que trata el problema: ingenieros, administradores, médicos, arquitectos, entre otros. Esto define el carácter de multidiciplinariedad de estos problemas.

Cualquier persona, consciente o no, al tomar decisiones realiza un proceso mediante el cual *identifica* un conjunto de **cursos de acción** o **alternativas** de solución, *determina* o *estima* el conjunto de **consecuencias** que conlleva el elegir alguna de estas alternativas y estos estimados, mediante algún método conocido, se comparan *preferencialmente* para seleccionar la mejor alternativa que más "convenga" a la persona ó grupo de personas que enfrentan el problema de decisión.

Esto significa que, la toma de decisiones consiste en que alguien, denominado el decisor (o grupo de decisores), para alcanzar ciertos **objetivos**, conjuntamente con el apoyo de un analista de sistemas, debe determinar la alternativa que cumpla en mayor medida con ellos. Al seleccionarla, el decisor debe sentir que se ha hecho una "buena decisión" aunque esto no necesariamente signifique que al implementarla, se tendrá un buen resultado. Cuando las decisiones implican alcanzar varios objetivos o **criterios** se denominan **decisiones multiobjetivo o multicriterio,** respectivamente. Los métodos de decisiones multicriterio no consideran la posibilidad de encontrar siempre una solución óptima.

Los problemas de decisiones tienen distintas formas y niveles de complejidad. Antún, J.P. [1994], introduce un problema de decisión como aquel en el que se considera un conjunto de alternativas potenciales, entre las cuales el decisor debe *escoger, seleccionar, u ordenar* una acción o un conjunto de ellas que se consideren "buenas" . En esta misma línea, Roy, B. [1989] y Martínez, E. [1998] indican que en función de las preferencias del decisor y de los criterios pre-definidos, usualmente en conflicto, los problemas de toma de decisiones multicriterio toman alguna de las tres siguientes formas:

- Seleccionan la o las mejores alternativas de un conjunto de ellas.
- Clasifican cada alternativa en categorías establecidas a priori, normalmente definidas como "buenas" y "malas".
- Ordenan las alternativas, de la "mejor" a la "peor", o viceversa.

Un problema puede establecer una combinación de los tres tipos de problemas anteriores. En una universidad, por ejemplo, el problema de admisión de los estudiantes puede ser considerado, primero, de selección y si la cifra de los aprobados supera la capacidad de admisión, se enfrenta entonces el problema de ordenamiento. En un banco, para dar tarjetas de crédito, el problema es de clasificación. Es importante reconocer el tipo de problema de que se trate, porque de ello depende el método de solución que se elija.

Definido el tipo de problema por el que se le está solicitando al analista su ayuda, se debe enfrentar, entonces, su estructuración; esto es, proponer con el apoyo de todos los participantes en el proceso, las alternativas de solución, el o los criterios con las que serán evaluadas, determinar sus consecuencias, para poder proponer el modelo y el método de solución. Es necesario ser creativo para diseñar o construir las posibles alternativas, ya que normalmente no se tienen a la mano. Las alternativas obvias sirven para pensar y crear otras alternativas desconocidas, que mejor convenga a la solución del problema [Keeney, R.L. 1992]. Diseñar, establecer o dar una completa definición de las alternativas es generalmente uno de los pasos más difíciles dentro del proceso de toma de decisiones. Vincke, Ph. [1992] menciona que no siempre es posible definir a priori este conjunto. Puede ser que la definición sea elaborada y detallada progresivamente durante el transcurso del proceso de solución.

Las consecuencias o el estimado de las alternativas son la información relevante para la elección; incluye riesgos, costos y uso de recursos que podrían afectar la selección. El problema de decisiones se denomina, según si las consecuencias de las alternativas son *deterministas*, *probabilistas* (*estocásticas*) o *indeterministas*, **bajo certeza, bajo riesgo o bajo incertidumbre** y el estimado de consecuencias correspondiente es un elemento, una distribución de probabilidades o un subconjunto del espacio de consecuencias, respectivamente. Puede mencionarse también la toma de decisiones *borrosa* o *difusa* en la cual cada estimado de consecuencias es un subconjunto borroso o difuso del espacio de consecuencias.

Otro aspecto importante de señalar en una decisión, o proceso de decisiones, sobre el conjunto de consecuencias es la **estructura de preferencias** que debe tener el decisor. El conocimiento de esta estructura permitirá conocer sobre lo que piensa el decisor de cada alternativa que reconoce cuál o cuáles de ellas son mejores o iguales. En casi todos los casos y más si se trata de un problema complejo, el conocimiento de esta estructura de preferencias al inicio del proceso de toma de decisiones no es suficiente para determinar los mejores elementos y el problema saldría del ámbito de la "toma de decisiones".

Las preferencias del decisor se modelan mediante **relaciones binarias**,[1] con las que el decisor indica si una alternativa es preferible a otra, si hay indiferencia entre ellas u otras afirmaciones intermedias en la comparación; incluso si las alternativas, no pudiera compararlas.

Finalmente, el tener en cuenta todos los conceptos anteriores en el proceso de la decisión tiene el objetivo de lograr un *buen resultado* que es aquel cuyo valor es mayor que el de los otros posibles resultados. Por otro lado, una *buena decisión* es aquella que es consistente con las preferencias del decisor y con la información disponible en el momento de tomar la decisión. Las buenas decisiones aumentan la probabilidad de obtener buenos resultados.

1.1.1 **El análisis de decisiones**

Por lo anterior, es indudable que la toma de decisiones es un proceso valioso en cualquier disciplina. Este proceso requiere estructurar formalmente el problema de decisión dado, hacer una selección después de reflexionar y analizar cuidadosamente los datos del problema y evaluar constantemente los posibles cambios en el proceso con el fin de mejorarlo.

La teoría de decisiones es un gran conjunto de conocimientos y las técnicas analíticas relacionadas, diseñadas para permitir al decisor (o al analista) desarrolle un procedimiento lógico y coherente para determinar y valorar los factores que afectan la decisión, y como resultado, tenga una guía sobre como se elige una alternativa basándose en sus preferencias a los estimados de consecuencias.

El principal objetivo de esta teoría es que, al concluir el proceso de toma de decisiones, el decisor conozca:

- lo que desea y en cuánto lo valora,
- la naturaleza de la situación que enfrenta y
- el efecto de las acciones que puede emprender.

Como consecuencia de esto, el decisor sabrá con más claridad lo que le conviene hacer para explicarse y explicarlo a otros si es necesario.

El análisis de decisiones ofrece procedimientos estructurados para que el decisor pueda realizar su papel en etapas que abarcan las siguientes tareas:

1. Definir bien la necesidad de un problema de decisión.
2. Identificar, desarrollar y especificar los criterios de evaluación del problema, sus posibles alternativas y estimar sus consecuencias, en resumen estructurar el problema formalmente.

---

[1] Véase la sección 2.1 del capítulo 2.

3. Cuantificar la incertidumbre (ésta incluye combinar las estadísticas disponibles con juicios de expertos en la materia de la que trate el problema, para lograr las estimaciones de las probabilidades de ocurrencia de las consecuencias).
4. Cuantificar sus preferencias (ésta incluye estructurar sus **tasas de sustitución**[2] y examinar sus actitudes hacia el riesgo).
5. Aplicar algún procedimiento matemático con el propósito de resolver el problema y llegar a una buena decisión.

Nótese que estas etapas no son necesariamente consecutivas. Tanto correcciones como vueltas atrás no son solo posibles sino frecuentemente necesarias.

En un sentido más amplio, la toma de decisiones se interpreta como el proceso complejo e iterativo que en general está constituido por las siguientes etapas:

1. *Reconocimiento de la necesidad.* El proceso de toma de decisiones se inicia cuando se está inconforme con la realidad o se siente la necesidad de mejorarla; o sencillamente con el deseo de conservar las condiciones actuales ante la evidencia de posibles cambios no favorables en el futuro.
2. *Definición del problema de decisión.* Dada entonces la necesidad, un paso esencial en el proceso de decisión es la indagación y análisis crítico de los factores importantes del estado en cuestión. En algunos problemas de decisión sencillos, la realización exitosa de esta etapa de diagnóstico completa la solución del problema, dado que el entendimiento de los factores, inmediatamente señala la acción adecuada para la superación. En la mayoría de casos complejos, esta etapa puede no indicar directamente la solución, pues las causas del problema pueden estar en diferentes niveles de afectación y su tratamiento requiere procedimientos más elaborados. La etapa de diagnóstico está inmersa en un proceso de análisis de la estructura del sistema en que se plantea el problema, desde su organización, componentes, jerarquías, funciones, limitaciones, alcances, políticas, entre otros. El resultado de todo este proceso es la completa formulación del problema.
3. *Generación de las alternativas.*
4. *Determinación de los atributos, objetivos o criterios del problema.*
5. *Identificación de las consecuencias de las alternativas y estimación de las mismas.*
6. *Determinación de un modelo de toma de decisiones.* Cada problema de decisión presenta algunas características, tales como si el problema de decisión es monocriterio o multicriterio, si se denomina la decisión bajo certeza, riesgo o incertidumbre, el número de las personas que efectúa la decisión, la naturaleza de las mediciones usadas, etc.; que permiten clasificarlo y determinar la forma del modelo que puede ser adecuado para encontrar una solución.

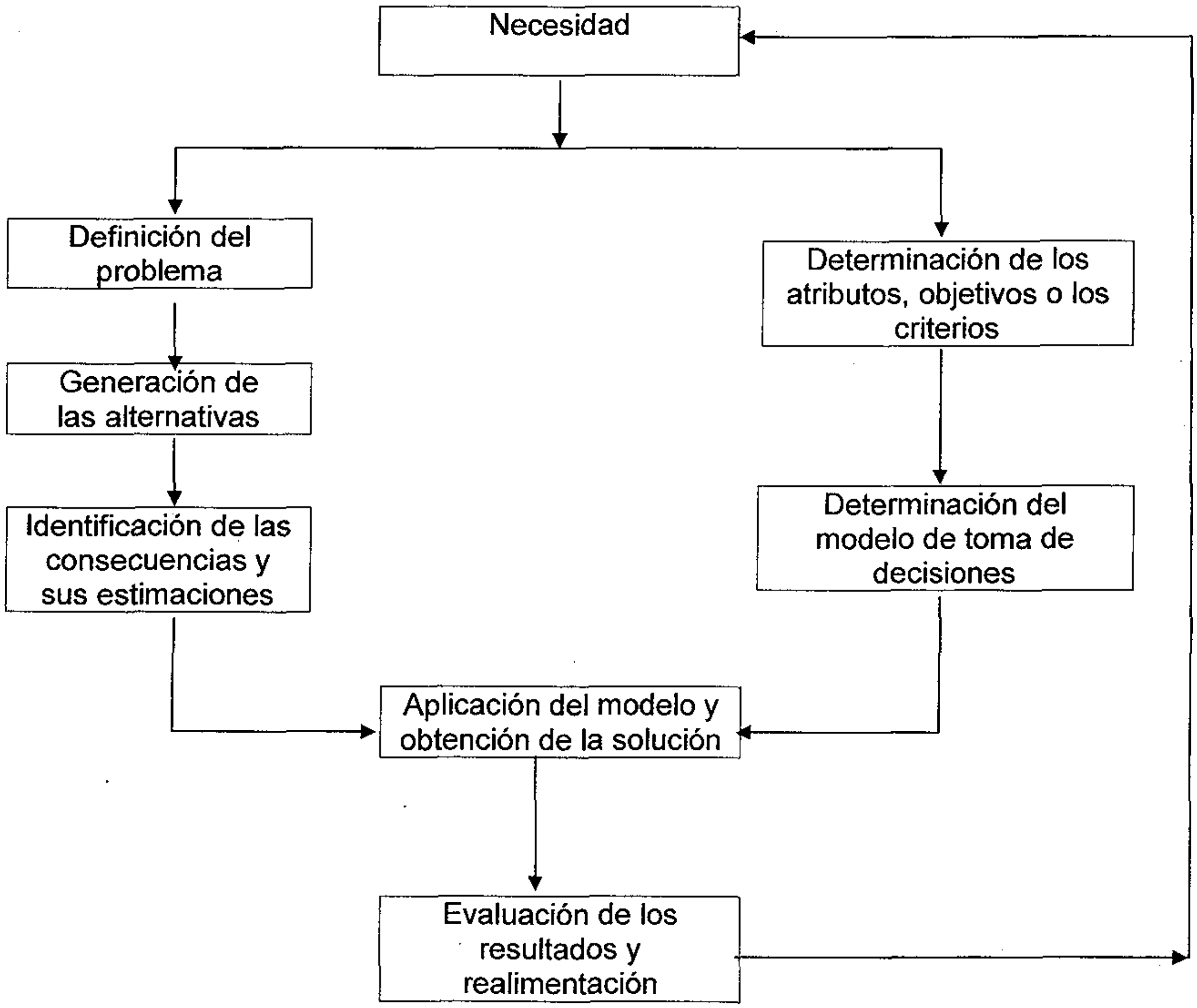
---

[2] Véase la sección 1.1.2.

7. *Aplicación del modelo, y resolver el problema, es decir, obtención de la solución según el modelo usado.* Con base en el modelo de decisión, las alternativas son sometidas a un proceso de evaluación, para el que se consideran todos los elementos que caracterizan al problema y que forman parte de la estructura del modelo. Al término de esta etapa se procede a la selección de la(s) alternativa(s) según la evaluación, que es la solución del problema.
8. *Evaluación de los resultados y realimentación.* Al implantar la alternativa elegida en el sistema, se producen resultados que deben satisfacer las necesidades originales. Se reinicia el proceso de evaluación para medir el grado en el que esa(s) alternativa(s) satisface las necesidades previstas. De la comparación de los resultados logrados y los niveles de satisfacción de las metas indicados de antemano, se decide si se da por terminado el proceso de decisión o se modifica el problema original pues no se logró lo esperado. Se iniciaría entonces nuevamente el proceso.

Estas etapas se interrelacionan como se muestra en la figura 1.1

Figura 1.1: Esquema del proceso de toma de decisiones



Hammond, J.S. et al. [1999:4] indican que un proceso eficaz de toma de decisiones debe cumplir los seis siguientes puntos:

- Enfocarse en lo que es importante.
- Ser lógico y consecuente.
- Reconocer y admitir los factores tanto subjetivos como objetivos, y se conjuguen el pensamiento analítico con el intuitivo.
- Exigir sólo la información y análisis necesarios para resolver un problema específico.
- Fomentar y dirigir la recopilación de información pertinente con opiniones bien fundadas.
- Ser directo, confiable, fácil de usar y flexible.

Es importante especificar que son muchos los factores que afectan el proceso de decisión, desde la capacidad del decisor o el analista para comprender, resolver y enfrentar los problemas, hasta las condiciones ambientales inherentes al problema, sin embargo, para obtener un buen resultado se necesita de la cooperación, interés y entusiasmo de todas las personas involucradas en la situación problemática.

1.1.2 Tasas de sustitución (Tradeoffs en inglés)

La tasa de sustitución es un concepto muy importante en modelos donde se usa una *función de utilidad*[3]. Representa lo que el decisor está dispuesto a perder en un criterio con tal de ganar una unidad en otro criterio. Como los criterios muchas veces son contradictorios entre sí, es preciso encontrar algo intermedio. Hay que sacrificar un poco de esto a cambio de un poco de aquello. En las decisiones más complejas no hay una alternativa perfecta. Las distintas alternativas cumplen, en alguna medida con unos conjuntos de criterios. La tarea es elegir entre posibilidades que pueden no ser completas. Para llegar a ello se necesita fijar prioridades, atendiendo abiertamente a la necesidad de hacer transacciones entre los diversos criterios contradictorios. Se necesita plantear la *compensación* entre criterios y preguntar al decisor qué está dispuesto a perder de un criterio a cambio de ganar algo en otro. La decisión resultará de un compromiso. También véase el concepto de la *tasa de substitución* o *intercambio* en el punto 3 de la sección 2.1.5 del capítulo 2.

A quienes le interese la formalización de lo anterior puede revisar el ANEXO.

1.2. PROBLEMAS DE DECISIONES MULTICRITERIO

Hay una gran variedad de formulaciones y estructuras para representar los problemas de toma de decisiones. Se tiene el caso *monocriterio*, en que se considera solamente un atributo relevante para la decisión, y el caso *multicriterio*, en el que se consideran varios atributos, generalmente en conflicto porque se da la situación de que los individuos al tratar de mejorar la alternativa en uno de ellos, al menos otro empeora. Si el decisor adopta uno de dichos criterios, no escogerá la misma alternativa que si se basa en otro criterio.

En las primeras etapas de la Investigación de Operaciones hubo una marcada tendencia a formular los problemas de decisión de manera monocriterio, usualmente tomaban la forma de optimización, con todos los atributos relevantes reduciendo a un criterio. Es a partir de 1960, que, la decisión multicriterio se individualiza con su propia terminología y su problemática aplicada tal y como las se han presentado anteriormente: el problema de seleccionar una alternativa en

[3] Véase la sección 2.2.2 del capítulo 2.

presencia de criterios múltiples. En 1970 transcurrió en la Haya (Países Bajos), dentro del marco del séptimo congreso de programación matemática, la primera reunión científica consagrada al análisis multicriterio. En 1972 se realizó la primera conferencia internacional en la Toma de Decisiones con Múltiples Criterios, conocido como el MCDM (surgiendo de sus siglas en inglés, **M**ultiple **C**riteria **D**ecision **M**aking) en la se lanzó oficialmente, según se ha convenido, la hasta entonces no-organizada teoría de decisiones con múltiples criterios, constituyéndose en el área de Investigación de Operaciones.

El análisis monocriterio tiene la ventaja de basarse en problemas matemáticos bien definidos, aunque no siempre representativos de la realidad; de hecho, la comparación entre varias decisiones posibles es escasamente realizada conforme a un único atributo, y por otro lado, las preferencias bajo certeza son modeladas con dificultad con una función. En su libro, Barba-Romero, et al. [1997:12] destacan que;

> *"Incorporar los criterios en la función objetivo o en las restricciones no es más que un artificio, ciertamente lícito en términos conceptuales, pero inconveniente desde el punto de vista decisional pues impide toda intervención del decisor e introduce una gran rigidez en las decisiones".*

Es más adecuado y pertinente representar los casos reales de problemas de decisiones en forma multicriterio, es decir, con un conjunto de criterios con diferente significación, con métricas frecuentemente no comparables, y la evaluación puede resultar de un conjunto de evaluadores, distintos para cada criterio, que asesoran al decisor final.

Cada decisión real consiste de hecho en un compromiso entre diversas soluciones, cada una con sus ventajas y sus inconvenientes, dependiendo de la posición que se adopte. Cada vez será más difícil, en las organizaciones, no tener en consideración los diferentes atributos, motivaciones o fines. Los tiempos de la ficción monocriterio (generalmente económico) están finalizando; ahora es preciso tener en cuenta los deseos de los distintos actores y la pluralidad de sus intenciones. Por todo ello, hoy en día es necesario disponer de un mínimo de conocimientos en análisis multicriterio.

En un problema multicriterio, una alternativa domina a otra si es al menos tan buena como la segunda para todos los criterios y es estrictamente mejor para al menos uno de ellos. El cumplimiento de la independencia preferencial para todos los criterios, facilita en general encontrar y modelar las preferencias del decisor.

El elemento más relevante a partir de los años 1980 a la fecha es el de la introducción de la informática en la reflexión sobre la decisión multicriterio. Las posibilidades de las máquinas, particularmente de los PC, son ahora un factor importante en la concepción misma de los métodos. Hoy en día la decisión multicriterio puede ser considerada como un campo de actividad en el que la aplicabilidad práctica y las herramientas informáticas son dominantes.

1.3. ENFOQUES EN DECISIONES MULTICRITERIO

La teoría de decisiones se ocupa principalmente del análisis y el modelado de las preferencias que intervienen en el problema de decisiones. Al respecto hay dos tipos de corrientes, una en que el producto final es una evaluación o calificación de cada alternativa, similar en muchos sentidos a la medición de una propiedad física. Los modelos de está corriente tiene la propiedad de ser *completos* en el sentido de que dadas dos alternativas, una resulta mejor que la otra o bien hay indiferencia entre ellas. En contraposición se tiene la corriente que está basada en *relaciones binarias de sobreclasificación,* en la cual las preferencias se representan por una relación binaria que indica para cada par de alternativas si una "sobreclasifica" o es al menos tan preferida como la otra. En este caso, el modelo de preferencias puede no ser completo, en el sentido que dos alternativas pueden resultar no comparables porque no se puede afirmar que una es mejor que la otra o que hay indiferencia entre ellas. En la primera corriente se habla de *toma de decisiones* como suponiendo que el modelo representa con toda seguridad las preferencias del decisor, mientras que en la segunda se habla de *ayuda a la decisión.*

Por otro lado, los métodos de decisiones multicriterio pueden ser *compensatorios* o *no compensatorios.* Un método multicriterio es compensatorio cuando una mejora en un criterio permite compensar un deterioro en otro, en la asignación de los pesos, o mejor dicho, lo que se pierde de un criterio se compensa con lo que se gana de otro. Más concretamente, una unidad perdida de un criterio se compensa exactamente con una unidad ganada por el otro criterio. También, un método multicriterio es compensatorio cuando el conjunto de criterios es considerado en forma simultánea, en la asignación de los pesos. Contrariamente, los métodos no compensatorios, permiten a cada criterio conservar su impacto sobre la decisión final. Así, se evita una elección media particularmente mal adaptada a cada selección estratégica.

1.3.1 **Toma de Decisiones**

La corriente de toma de decisiones esta basada en el principio que siempre existe la decisión óptima y que la toma de decisiones consiste en que un experto plantea el problema, propone un modelo y finalmente lo resuelve para encontrar la decisión óptima. El enfoque más importante de esta corriente es el de la *Teoría de la Utilidad* también conocido como el enfoque *clásico* donde se garantiza la existencia de la *función de utilidad* (o *función de valor*). La Teoría de la Utilidad (y la Teoría del Valor) postula que un individuo puede elegir entre un conjunto de alternativas disponibles de forma que maximice su satisfacción[4]. Ello implica que este individuo conoce cada una de las alternativas y es capaz de evaluarlas; en el caso de que sea racional y consistente, pueda definir una función de utilidad

[4] Véase la sección 2.2.2 del capítulo 2.

(probabilística) o una función de valor (determinística) que represente sus preferencias.

1.3.1.1 El MAUT

La aplicación más general de la teoría de utilidad a problemas de decisiones multicriterio es a través de la *Teoría de Utilidad Multiatributo*, conocida como el MAUT (por sus siglas en inglés, **M**ulti-**A**ttribute **U**tility **T**heory), detalladamente descrito en el libro de Keeney, R.L. y Raiffa, H. [1976]. Según el procedimiento del MAUT, se determina la correspondiente función de utilidad para cada atributo, y luego se agregan en una *función de utilidad multiatributo* de forma aditiva o multiplicativa. Al determinarse la utilidad de cada una de las alternativas se consigue una ordenación completa del conjunto finito de alternativas. El rigor y rigidez de los supuestos teóricos de este método, usualmente controvertidos y difíciles de contrastar en la práctica, requiere un elevado nivel de información del decisor para la construcción de las funciones de utilidad multiatributo. Una de las ventajas del método es la de que se extiende fácilmente a las utilidades en ambiente de riesgo. De hecho, el MAUT fue desarrollado principalmente en el caso de riesgo y se requiere el uso de las probabilidades.[5] Otra ventaja del MAUT, es que da mucha información, particularmente las tasas de compensación, que suele tener un gran valor práctico. Este método cuya utilización está muy extendida (a pesar de las dificultades en su utilización) cuenta con una gran variedad de experiencias prácticas en el mundo anglosajón, sobre todo en los Estados Unidos.[6]

1.3.1.2 El AHP

El otro método, ya clásico, es el del *Proceso Analítico Jerárquico*, conocido como el **AHP** (por sus siglas en inglés, **A**nalytic **H**ierarchy **P**rocess) de uso corriente. Es un método bastante intuitivo en su aplicación, difícilmente manipulable, posee un atractivo y robusto software de apoyo, llamado *Expert Choice*, desarrollado por Forman, E.H. & Saaty, T.L., y probablemente sea el método más difundido y con la mayor gama de experiencias prácticas tanto en los Estados Unidos como en el como en el resto del mundo.[7] El uso, aplicaciones, cuestiones y recomendaciones acerca del método AHP es el tema principal de este trabajo así que los capítulos 3 y 4 están dedicados sobre él.

1.3.2 **Ayuda a la Decisión**

La corriente de ayuda a la decisión reconoce que los problemas de toma de decisiones, especialmente en el caso multicriterio, son tan complejos, que no se

[5] Vincke, Ph. [1992:40].
[6] Vincke, Ph. [1992:39] y Barba-Romero, S. et al. [1997:167].
[7] Martínez, E. [1998:15].

puede señalar una solución como la óptima de todas. De hecho es más difícil que se cumplan los supuestos de "racionalidad" del enfoque clásico, en general, no existe una solución que satisfaga simultáneamente todo lo que se quisiera como solución de un problema. El paradigma de optimización trata más bien de una racionalidad de procedimiento que de una racionalidad sustantiva. Por tanto, en la ayuda de decisión no hay un experto que recete la mejor decisión sino que él interactúa con el decisor y provee guía o consejos para establecer, validar y modelar las preferencias del decisor. La preocupación, en el enfoque de ayuda a la decisión, es ofrecer un modelo que no exista por definición, sino elaborarlo con la ayuda del decisor mediante información disponible e importante y dar luces sobre las preferencias del decisor para encontrar argumentos que fortalezcan sus convicciones acerca del problema y su solución.

Los enfoques de esta corriente son aquellos denominados de sobreclasificación, el cual modela solamente la parte que mejor se conoce de las preferencias del decisor.

Este enfoque, contrario al de toma de decisiones, permite la *no comparabilidad*[8] entre las alternativas.

Los métodos de sobreclasificación difieren en la forma como se expresa y se construye esta relación. A continuación, se menciona en breve que se tratan algunos de ellos:

1.3.2.1 Los métodos ELECTRE

Los métodos llamados ELECTRE (por sus siglas en francés, **ÉL**imination **Et** **C**hoix **T**raduisant la **RE**alité), son los métodos de sobreclasificación más conocidos. El ELECTRE I, desarrollado por el investigador francés Roy, B. en 1968 fue el primer método de sobreclasificación que apareció en la literatura.[9] Los ELECTRE´S se basan en los conceptos de condiciones de *concordancia* y *no discordancia*. La condición de concordancia significa que cuando se compara la alternativa *a* con la *b*, si *a* "sobreclasifica a *b*" hay suficientes argumentos para admitir que *a* es al menos tan buena como *b*, y la condición de no discordancia significa que no hay razones importantes para rechazar tal afirmación.

Después del ELECTRE I, primero en el enfoque, se han sucedido las versiones que la tabla 1.1 recoge en forma resumida.

[8] La no comparabilidad entre dos alternativas está explicado en la sección 2.1.3 del capítulo 2.
[9] Vincke, Ph. [1992:62].

Tabla 1.1: Las diferentes versiones del método ELECTRE

Versión ELECTRE	Referencia pionera	Año	Tipo de problema
I	Roy, B.	1968	Selección
II	Roy, B. y Bertier, P.	1973	Ordenación
III	Roy, B.	1978	Ordenación
IV	Roy, B. Y Hugonnard, J.-C.	1982	Ordenación
IS	Roy, B. y Skalka, J-M.	1985	Selección

Las diferentes versiones del método ELECTRE, son bien conocidas y utilizadas no ya sólo en Francia, sino en toda Europa.

1.3.2.2 Los métodos PROMOTHEE

Los métodos llamados PROMETHEE (por sus siglas en inglés, **P**reference **R**anking **O**rganization **METH**od for **E**nrichment **E**valuations) son unos de los más recientes dentro de la categoría de los métodos de sobreclasificación. Fue propuesto por Brans, J.P. et al. [1984], además de otras versiones hechas por Brans, J.P. y Vincke, Ph. [1985] y Brans, J.P. et al. [1986]. El objetivo esencial y declarado de este método es el de hacerlo fácilmente comprensible para el decisor, siendo efectivamente uno de los más intuitivos de decisiones multicriterio.[10]

1.3.2.3 Los métodos Interactivos

Paralelo a estos enfoques, en la última década han tomado impulso los métodos *interactivos*, en su mayoría desarrollados en el marco de la programación matemática multiobjetivo. De hecho, Steuer, R.E. (1986) [21]; indica que el futuro de la programación matemática multiobjetivo está en su aplicación interactiva. Estos métodos toman uno de los modelos de decisiones e intercalan etapas de cálculo y diálogo con el decisor, hasta que éste considera que se ha llegado a una solución satisfactoria. En cada interacción se examina una alternativa (o grupo de alternativas) y el decisor incorpora esa información al proceso de solución. La discusión entre las etapas permite al decisor considerar las propuestas del analista y dar información adicional acerca de sus preferencias, que se introducen en el modelo en la siguiente fase de cálculo. Esta estrategia facilita la intervención del ser humano, ya qüe permite correcciones intermedias en el proceso de búsqueda de una solución satisfactoria o cercana a la óptima. Los procedimientos interactivos permiten repartir el trabajo, que se procesen los datos y se realicen los

[10] Barba-Romero, S. et al. [1997:223].

algoritmos en la computadora en forma eficiente, y al decisor que pueda mejorar sus juicios con la nueva información disponible.[11]

[11] Steuer, R.E. [1986:361].

"A good solution to a well-posed decision problem
is almost always a smarter choice than
an excellent solution to a poorly posed one."
--- Hammond, J.S., Keeney, R.L. & Raiffa, H.

2

ORDENES DE PREFERENCIAS Y SUS MEDICIONES

2.1. RELACIONES BINARIAS

Una **relación binaria** $\mathcal{R}$ sobre un conjunto $\mathcal{A}$ es un subconjunto del *producto cartesiano* $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$[1]. Esto significa que se considera una partición del producto cartesiano $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ de pares ordenados de tal manera que esta partición crea dos subconjuntos, un subconjunto de los pares que están en la relación binaria $\mathcal{R}$, y el otro de los pares que no están en ella.

Normalmente se escribe $a\mathcal{R}b$ para expresar que $(a,b) \in \mathcal{R}$, que se leen como "*a* está relacionado con *b*". De igual manera, $a\mathcal{R}^c b$ expresa que $(a,b) \notin \mathcal{R}$, o más bien expresa el complemento de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^c$, el cual refiere al caso que "*a* no está relacionado con *b*".[2]

Se define la inversa de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{-1}$ y el dual de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^d$ como de costumbre algebraica, es decir,

---

[1] También se escribe $\mathcal{A}^2$ al producto cartesiano del conjunto $\mathcal{A}$ consigo mismo.

[2] También se usa la notación $a\not\mathcal{R}b$ para referir al $\mathcal{R}^c$, es decir, el caso que $(a,b) \notin \mathcal{R}$.

- $a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$
- $(a,b) \in \mathcal{R}^{d} \Leftrightarrow (b,a) \notin \mathcal{R}$

Nótese que $\mathcal{R}^{d} = (\mathcal{R}^{-1})^{c} = (\mathcal{R}^{c})^{-1}$.
Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ dos relaciones binarias sobre el conjunto $\mathcal{A}$. Utilizando la notación común de la teoría de conjuntos se definen:

1. $\mathcal{R}_1$ está contenida en $\mathcal{R}_2$, es decir, $\mathcal{R}_1$ es subconjunto de la $\mathcal{R}_2$, lo que se denota $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, si $a\mathcal{R}_1 b \Rightarrow a\mathcal{R}_2 b$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
2. La *unión* de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, lo que se denota $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, tal que $a(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)b \Leftrightarrow a\mathcal{R}_1 b$ o $a\mathcal{R}_2 b$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
3. La *intersección* de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, lo que se denota $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, tal que $a(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)b \Leftrightarrow a\mathcal{R}_1 b$ y $a\mathcal{R}_2 b$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
4. La *disyunción* de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, es decir, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son *disjuntas* si $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \phi$, donde ϕ es el conjunto vacío.
5. La *composición* de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, lo que se denota $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$, tal que $\forall a,b \in \mathcal{A}$; $a(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)b \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathcal{A}$: $a\mathcal{R}_1 c$ y $c\mathcal{R}_2 b$.

Toda relación binaria sobre el conjunto $\mathcal{A}$ puede representarse por medio de una *gráfica dirigida* $(\mathcal{A},\mathcal{R})$; donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de nodos y $\mathcal{R}$ es el conjunto de arcos. Existe un arco entre los nodos "a" y "b" si y sólo si $a\mathcal{R}b$ se satisface. Cuando $a\mathcal{R}a$, existe un *rizo* (es decir, el arco sale del nodo "a" y entra en sí mismo).

2.1.1 **Propiedades básicas de las relaciones binarias**

Se identifican las siguientes propiedades en cuanto a una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathcal{A}$:[3]

1. *Reflexividad*: $\mathcal{R}$ es reflexiva si $a\mathcal{R}a$; $\forall a \in \mathcal{A}$.
2. *Irreflexividad*: $\mathcal{R}$ es irreflexiva si $a\mathcal{R}^{c}a$; $\forall a \in \mathcal{A}$.
3. *Simetría*: $\mathcal{R}$ es simétrica si $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
4. *Asimetría*: $\mathcal{R}$ es asimétrica si $a\mathcal{R}b, \Rightarrow b\mathcal{R}^{c}a$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.[4]
5. *Antisimetría*: $\mathcal{R}$ es antisimétrica si $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
6. *Comparabilidad*: $\mathcal{R}$ es *comparable*[5] si $a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$ o se tienen ambos $\forall a,b \in \mathcal{A}$; de forma equivalente, $\nexists$ a,b $\in \mathcal{A}$ tal que $a\mathcal{R}^{c}b$ o $b\mathcal{R}^{c}a$.
7. *Transitividad*: $\mathcal{R}$ es transitiva si $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$; $\forall a,b,c \in \mathcal{A}$.

---

[3] French, S. [1988] y Barba-Romero, S. et al. [1997].
[4] La asimetría es una propiedad diferente de la no-simetría. Así, por ejemplo, la relación $\geq$ sobre el conjunto $\Re$ de los números reales no es simétrica (pues no es cierto que $a \geq b \Rightarrow b \geq a$), pero tampoco es asimétrica (ya que $a \geq b$ no implica $b < a$).
[5] Se puede decir "completa" en lugar de "comparable".

8. *Transitividad negativa*: $\mathcal{R}$ es transitiva negativamente si $a\mathcal{R}^c b$, $b\mathcal{R}^c c \Rightarrow a\mathcal{R}^c c$; $\forall a,b,c \in \mathcal{A}$.
9. *Semitransitividad*: $\mathcal{R}$ es semitransitiva si $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}d$ o $d\mathcal{R}c$; $\forall a,b,c,d \in \mathcal{A}$.
10. *Relación de Ferrers*: $\mathcal{R}$ cumple la relación de Ferrers si $a\mathcal{R}b$, $c\mathcal{R}d \Rightarrow a\mathcal{R}d$ o $c\mathcal{R}b$; $\forall a,b,c,d \in \mathcal{A}$.

Como resultado de estas propiedades, las siguientes proposiciones se cumplen para la relación binaria $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathcal{A}$:

- $\mathcal{R}$ es asimétrica $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ es irreflexiva.
- $\mathcal{R}$ es irreflexiva y transitiva $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ es asimétrica.
- $\mathcal{R}$ es irreflexiva y semitransitiva o cumple la relación de Ferres $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ es transitiva.

2.1.2 Ordenamientos asociados a relaciones binarias

Se definen las siguientes clases de ordenamientos de una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $\mathcal{A}$:[6]

1. $\mathcal{R}$ es un *preorden parcial*[7] si es transitiva y reflexiva.
2. $\mathcal{R}$ es un *orden* si es transitiva e irreflexiva.
3. $\mathcal{R}$ es un *orden estricto* si es transitiva y asimétrica.
4. $\mathcal{R}$ es un *orden débil* si es transitiva y comparable.
5. $\mathcal{R}$ es un *orden simple*[8] si es un orden débil antisimétrico.
6. $\mathcal{R}$ es una *relación de equivalencia* si es un preorden parcial simétrico.
7. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia definida para todo $a \in \mathcal{A}$, al subconjunto de $\mathcal{A}$ formado por los elementos b tales que $b\mathcal{R}a$, se le denomina una *clase de equivalencia*. Las clases de equivalencia configuran una partición de $\mathcal{A}$; es decir, son disjuntas y su unión es igual a $\mathcal{A}$.

2.1.3 Expresiones de preferencias del decisor

Siendo el decisor la persona que elige, cuando considera que dos alternativas *a* y *b* del conjunto de alternativas, se puede dar el caso de que prefiera a *a* que a *b* o inversamente; o puede suceder que el decisor sea indiferente entre las dos alternativas en cuestión, es decir, que las considere como equivalentes. Sin embargo, puede ocurrir que el decisor no puede compararlas, por ser incapaz o por rechazar escoger una entre ellas. Por lo tanto, todas estas preferencias son

[6] Barba-Romero, S. et al. [1997] y French, S. [1988].
[7] También se conoce un preorden parcial como un *cuasiorden*.
[8] También se conoce un orden simple como un *orden lineal*.

relaciones binarias en el sentido de que relacionan dos alternativas del conjunto de alternativas $\mathcal{A}$, o mejor dicho, son preferencias basadas en comparaciones por pares de las alternativas del conjunto $\mathcal{A}$; las cuales son suficientes para representar preferencias individuales (aunque no preferencias de grupo), por lo que se tiene:

1. **Preferencia estricta**, $\mathcal{P}$ $(\succ)$[9]
   Se escribe $a \succ b$ o $a\mathcal{P}b$ para señalar que el decisor prefiere estrictamente (o fuertemente) la alternativa a que a la alternativa b.

2. **Indiferencia**, $I(\sim)$
   Se escribe $a\sim b$ o aIb para señalar que el decisor es indiferente entre las alternativas a y b, y se acepta indistintamente una alternativa frente a la otra.

3. **Preferencia débil**, Q $(\succsim)$
   Se escribe $a \succsim b$ o aQb para señalar que el decisor prefiere débilmente la alternativa a que a la alternativa b, o mejor dicho, la alternativa a es al menos tan buena como la alternativa b. Nótese que cuando el decisor mantiene la posición $a \succsim b$, está manteniendo la posición o $a \succ b$ o $a\sim b$.

4. **No comparabilidad**, $\mathcal{NC}$ (J)
   Se escribe aJb para señalar que las alternativas a y b no son comparables por el decisor es decir, que ni $a \succsim b$ ni $b \succsim a$.

2.1.4 Racionalidad de las preferencias

Por razones de coherencia, se puede notar que estas expresiones de preferencias deben cumplir ciertas condiciones (axiomas), los cuales si no se cumplen se concluye que el decisor no es racional. Se mencionan algunos de ellos a continuación (axiomas 2.1.4.1–2.1.4.8).

2.1.4.1 $a \succ b \Leftrightarrow b \not\succsim a$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
2.1.4.2 $a\sim b \Leftrightarrow a \succsim b$ y $b \succsim a$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
2.1.4.3 $a\sim b \Leftrightarrow a \nsucc b$ y $b \nsucc a$; $\forall a,b \in \mathcal{A}$.
2.1.4.4 $\forall\ a,b \in \mathcal{A}$; uno y sólo uno de las siguientes es cierto: $a \succ b$, $b \succ a$, $a\sim b$, aJb.
2.1.4.5 $(a\sim b$ y $b \succ c) \Rightarrow a \succ c$ $\forall a,b,c \in \mathcal{A}$.
2.1.4.6 $(a \succ b$ y $b\sim c) \Rightarrow a \succ c$ $\forall a,b,c \in \mathcal{A}$.
2.1.4.7 $(a \succ b,\ b\sim c$ y $c \succ d) \Rightarrow a \succ d$ $\forall a,b,c,d \in \mathcal{A}$.
2.1.4.8 $(a \succ b,\ b \succ c$ y $a\sim d) \Rightarrow d \succ c$ $\forall a,b,c,d \in \mathcal{A}$.

[9] También llamada *preferencia fuerte*.

Además se puede notar que:

- J es irreflexiva y simétrica
- $\succ$ es transitiva y asimétrica, y entonces es un orden estricto.
- $\sim$ es transitiva, reflexiva y simétrica, y por tanto es una relación de equivalencia.
- $\succsim$ es transitiva, reflexiva y comparable. El hecho que $\succsim$ es transitiva y reflexiva implica que es un preorden parcial y el hecho que es transitiva y comparable significa que $\succsim$ es un orden débil.

2.1.5 **Relaciones de dominación entre las alternativas**

En general, no existe una alternativa que satisfaga y sea preferible en cada una de los criterios en cuanto a las decisiones multicriterio. Normalmente, se presenta el caso de *alternativas factibles*, o sea, aquellas que cumplen las restricciones, que son mejores que otras en relación a algunos criterios y que son peores que otras respecto a los restantes criterios.

Con respecto a las preferencias que el decisor tiene sobre el conjunto de alternativas $\mathcal{A}$ en un entorno de decisiones multicriterio con n criterios $g_1,\ldots\ldots,$ $g_j,\ldots\ldots,$ g_n donde el criterio g_j denota una función real definida sobre el conjunto $\mathcal{A}$, $g_j : \mathcal{A} \rightarrow \Re$, se tienen las siguientes definiciones:

1. **El concepto de dominación**

   $\forall a,b \in \mathcal{A}$, se dice que la alternativa *a domina* a la alternativa *b*, lo que se denota *aDb*; si y sólo si $g_j(a) \geq g_j(b)$; $\forall j = 1,2,..,n$ y al menos una de las desigualdades es escrita (se supone que la satisfacción del criterio j aumenta cuando el valor de la función $g_j : \mathcal{A} \rightarrow \Re$ aumenta); es decir, la alternativa *a domina* a la alternativa *b*, si y sólo si la alternativa *b* no supera a la alternativa *a* en ninguno de los criterios. En tal caso, se dice la alternativa *a* es la *alternativa dominante* y la alternativa *b* es la *alternativa dominada*.

   Estas soluciones (alternativas) pueden destacarse en problemas en que se busca la mejor alternativa, aunque no en aquellos en que se busca una ordenación del conjunto de alternativas[10] (algunas alternativas pueden ser dominadas por otras, pero no necesariamente por todas respecto a las que podrían compararse ventajosamente).

[10] Véase la clasificación de los problemas de decisiones multicriterio en la sección 1.1 del capítulo 1.

2. **Alternativa eficiente**

Se dice que una alternativa $a \in \mathcal{A}$ es *eficiente u óptimo de Pareto,*[11] si no existe otra alternativa en $\mathcal{A}$ que sea dominante en relación a la alternativa *a*; es decir, cuando no existe otra alternativa que sea superior a ella en al menos un criterio e igual en los restantes; o son iguales en todos y cada uno de los criterios, o la otra la supera en uno o más criterios y, a su vez, ella supera a la otra en al menos uno de los criterios restantes.

Es importante subrayar la significación del estado óptimo en el sentido de Pareto. Si, en relación con una alternativa eficiente, se quiere mejorar un solo criterio, será preciso que empeore al menos en algún otro.

Por otra parte, la definición de eficiencia conduce a conceptos tales como *débilmente eficientes, fuertemente eficientes, propiamente eficientes*, etc.[12]

3. **La tasa de sustitución**

Como consecuencia del sentido de estado óptimo de Pareto mencionado anteriormente, se introduce la noción de la *tasa de substitución* o *intercambio* que traduce la idea de compensación entre la pérdida sobre un criterio y la utilidad sobre otro. La tasa de substitución o intercambio entre dos criterios representa la cantidad que se debe sacrificar en un criterio para obtener a cambio una unidad de incremento en otro criterio.

Dicho de manera formal;[13] la tasa de substitución, en una alternativa $a \in \mathcal{A}$ del criterio g_j con respecto al criterio g_r (tomado como criterio de referencia) es la cantidad $w_{jr}(a)$ tal que la alternativa $b \in \mathcal{A}$, cuyas evaluaciones serían:

$$
\begin{aligned}
&g_k(a) = g_k(b); \quad \forall k \neq j,r \\
&g_j(b) = g_j(a) - 1 \\
&g_r(b) = g_r(a) + w_{jr}(a)
\end{aligned}
$$

sea indiferente a la alternativa *a*.

Se trata entonces de la cantidad que hay que adicionar al criterio de referencia para compensar una unidad pérdida sobre el criterio.

[11] También llamada una alternativa *no dominada*.

[12] Ver Steuer, R.E. [1986] para una descripción completa sobre estos conceptos.

[13] Véase Vincke, Ph. [1992:36].

4. **La imagen del conjunto $\mathcal{A}$ en el espacio de los criterios**

   El conjunto de las evaluaciones de una alternativa *a*, {$g_1(a)$,........, $g_j(a)$,.........., $g_n(a)$}, puede representarse por un punto en el espacio $\Re^n$. Se llama *la imagen del conjunto $\mathcal{A}$ en el espacio de los criterios* al conjunto Z_A de puntos de $\Re^n$ obtenidos, representando cada alternativa *a* por el punto de coordenadas {$g_1(a)$,........, $g_j(a)$,.........., $g_n(a)$}.

5. **El punto ideal**

   Se define *el punto ideal* como el punto de coordenadas (Z^*_1,...........,Z^*_n) pertenecientes a $\Re^n$, donde:

$$Z^*_j = \text{máx. } g_j(a), \ \forall j = 1,2,..,n.$$

La relación de dominancia definida previamente resulta útil como una primera aproximación, para la realización de un pre-análisis (de dominación), aunque, obviamente, es insuficiente. Normalmente, el proceso de resolver problemas de decisiones multicriterio considera el *conjunto eficiente de alternativas*[14] (de soluciones eficientes o no-dominadas) para empezar, descartando todas otras alternativas, ya que nunca una alternativa dominada puede ser óptima. Después, se busca la selección de la mejor alternativa a través de la revelación de las preferencias del decisor.

2.1.6 Algunos teoremas acerca de una alternativa eficiente[15]

1. **Teorema 1**
   Si $\bar{a} \in \mathcal{A}$ es una alternativa que maximiza la siguiente relación en $\mathcal{A}$,

$$\Sigma\lambda_j g_j(a), \ \forall j = 1,2,..,n; \text{ donde } \lambda_j \geq 0,$$

   entonces la alternativa $\bar{a}$ es eficiente.

2. **Teorema 2**
   Si $\bar{a} \in \mathcal{A}$ es la única alternativa en $\mathcal{A}$, que minimiza la cantidad (llamada *distancia ponderada de Tchebycheff*) siguiente,

$$\text{máx.}\lambda_j(Z^{**}_j - g_j(a)), \ \forall j = 1,2,..,n; \text{ donde } \lambda_j > 0 \text{ y } Z^{**}_j > Z^*_j,$$

[14] También llamado el conjunto no dominada o el conjunto óptimo de Pareto o el conjunto admisible.
[15] Ver Zionts, S. y Wallenius, J. [1983] donde se explican estos teoremas con detalle.

entonces la alternativa ā es eficiente.

3. **Teorema 3**
   Si $\bar{a} \in \mathcal{A}$, minimiza, en $\mathcal{A}$, la cantidad (llamada *distancia ponderada aumentada de Tchebycheff*) siguiente,

   $\text{máx.}\lambda_j(Z^{**}_j - g_j(a)) - \Sigma\rho_j g_j(a)$, $\forall j = 1,2,..,n$; donde $\lambda_j > 0$, $Z^{**}_j > Z^*_j$ y $\rho_j > 0$, son arbitrariamente pequeñas,

   entonces la alternativa ā es eficiente.

El teorema 1 muestra que la optimización de una combinación lineal positiva de criterios proporciona siempre una alternativa eficiente. Los teoremas 2 y 3, permiten caracterizar las alternativas eficientes como aquellas que minimizan una *distancia* con relación de un punto que domina ligeramente el punto ideal.

2.2 MEDICIÓN Y MODELOS DE PREFERENCIAS

En general, el concepto de **medición** refiere al acto de asignar números a las cosas, objetos, acontecimientos o variables, de acuerdo con una serie de normas. También se entiende la medición como la asociación de símbolos a las propiedades de interés de un objeto de tal manera que dichos símbolos guardan las mismas relaciones que las que poseen los atributos del objeto de estudio. A este respecto, se entiende por **escala** la representación alfanumérica ordenada a lo largo de un eje, junto con las reglas que permiten manejar los números o símbolos representados en ella.

Acerca de este asunto de medición, Guillén, S.T. [2002:122], proporciona definiciones de manera más formal:

> *"Una escala de medición fundamental[16] consta de dos representaciones, especificadas por sendos sistemas relacionales, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, el primero llamado **sistema empírico**, cuyo conjunto base está formado por los objetos sujetos a la medición u **objetos medibles**, y el segundo denominado **sistema numérico**, cuyo conjunto base representa los posibles resultados de las mediciones, y una función del conjunto base del primero en el conjunto base del segundo, llamada **escala**, que establece la*

[16] Aquí interesan principalmente escalas de medición fundamentales; las escalas derivadas, como la de velocidad en mecánica, son las que se forman al combinar dos o más escalas fundamentales.

> *correspondencia entre cada objeto medible y el respectivo resultado del proceso empírico de medición."*

Las reglas que se usan para asignar dichos números (o símbolos) dependen de las propiedades del atributo que se está midiendo y no de las propiedades de la escala numérica usada. La relación entre las propiedades del objeto a medir y las características de la medición se establecen por medio de las escalas. Entonces, está función de escala debe cumplir ciertas condiciones, propias de lo que está midiendo.

El tipo de escala de medición se caracteriza con facilidad por el género de transformación que puede ser operado sobre ella para obtener una nueva escala (del sistema numérico) que mantenga las mismas propiedades que la original (del sistema empírico), es decir, que guardan las mismas relaciones que tiene las características del objeto a medir.

Esto implica que ambos sistemas son del mismo tipo, en el sentido que hay una correspondencia biunívoca de las operaciones y de las relaciones de un sistema relacional en el otro, lo cual significa que en el contexto de la medición todo lo que se encuentre en el mundo empírico tiene su representante en el modelo matemático y recíprocamente. Guillén, S.T. [2002].

Los tipos de escalas usados con frecuencia son:

1. **Escala absoluta**
   Una escala es una *escala absoluta* o *nominal* si la única transformación admisible es la *transformación identidad.* Esta escala es de la más simple y su intensidad de medición es débil así como el tipo de inferencias que pueden obtenerse del análisis de sus datos. Se utiliza para identificar un conjunto de objetos o las propiedades de un objeto, por ejemplo, cuando se asignan números a los elementos de una muestra estadística o a jugadores de un equipo, etc.

2. **Escala ordinal**
   La escala más apropiada cuando se desea establecer el ordenamiento de un grupo de objetos respecto a uno o varios atributos de éstos se emplea la *escala ordinal.* En esta medida, en general no se posee un origen único, y no existe una unidad de medida a través de la cual se pueden establecer distancias entre las posiciones correspondientes a dos objetos. Esta escala se caracteriza por *transformaciones monótonas crecientes.* Ejemplos de este tipo de escala son las usadas para medir calidad del aire, dureza de materiales, etc.

3. **Escala de intervalo**
   En la *escala de intervalo,* además de preservar el orden, se posee un origen, aunque este no es único. El aspecto más relevante que caracteriza a esta escala es el de poseer una unidad de medida, razón por la cual se

asemeja más a lo que la gente concibe como medida. En la escala de intervalo la diferencia entre dos puntos de ella representa diferencias entre los atributos del objeto en estudio. Dicha distancia se mide en la escala en cuestión ya que, aunque se posee una unidad de medida esta es arbitraria. La escala de intervalo se caracteriza por *transformaciones afines positivas.* Esto significa que si la característica de un objeto se mide en una escala v, entonces las mismas propiedades del objeto se pueden medir usando una nueva escala generada de la escala v por una transformación afín positiva. Ejemplos de este tipo de escala son las del tiempo de calendario, de energía potencial y las escalas de temperatura no absoluta, etc.

4. **Escala de proporción (razón)**
   En la *escala de proporción* o *razón*, la intensidad de la medición es mayor que en cualquiera de las anteriores, ya que en ella el orden, las diferencias y las proporciones entre medidas de un atributo corresponden al orden, diferencias y proporciones entre las propiedades del objeto. Existe un origen único (el cero es el mismo en cualquier escala equivalente) y una cantidad de medida (arbitraria). Una característica importante de este tipo de escala es que la suma de dos cualesquiera de sus elementos, también pertenece a dicha escala. Con esta escala se pueden efectuar todas las operaciones aritméticas, ya que dicha escala cumple la propiedad de aditividad. El conjunto de transformaciones admisibles es el conjunto de *transformaciones de similitud,*[17] por ejemplo cuando se hace la conversión de metros a centímetros o de gramos a kilogramos, etc.

No obstante, frecuentemente es útil expresar relaciones cualitativas en términos cuantitativos mediante un modelo matemático. La teoría de medición está involucrada con tal representación cuantitativa de las relaciones cualitativas y establece las circunstancias en las cuales tales representaciones son posibles y en cuales no. Guillén, S.T. [2002] menciona que la dificultad para diseñar escalas de medición de cuestiones humanas no físicas, como medir capacidades intelectuales, actitudes, sensaciones y preferencias, estriba en hacer explícito un sistema relacional empírico que represente apropiadamente los aspectos que se desean modelar y que le de sentido empírico a las mediciones.

Dentro de la teoría de la medición se especifican ciertas propiedades de consistencia (axiomas) para una representación cuantitativa. Una vez que se tienen los axiomas se busca la forma de asignar números a los objetos dentro del sistema tal que el orden de los números reflejen las relaciones cualitativas de manera bien definida. Esta asignación se hace utilizando una escala, es decir, mediante una función sobre los objetos dentro del sistema la cual proporciona la información y representación numérica deseada.

[17] También llamado *transformación de semejanza.*

El objetivo principal de la medición es transformar los números en la escala sin pérdida de información empírica, es decir, que haya invariancia entre una escala y otra.

Existen algunos teoremas llamados *teoremas de unicidad*, en los cuales se identifican un conjunto de transformaciones admisibles tales que, si v(.) es una escala que asigna números a objetos de manera que representen las relaciones subyacentes y si $\phi(.)$ es una transformación admisible, entonces $\phi[v(.)]$ es también una escala que representa las mismas relaciones subyacentes. Por lo regular, los teoremas de unicidad dan una condición de "si y sólo si", es decir, también se afirman que si v(.) y w(.) son escalas que representan las mismas relaciones subyacentes, entonces existe una transformación admisible $\phi(.)$ tal que, $v(.) = \phi[w(.)]$. [French, S. 1988:327].

A continuación se definen algunos modelos que se usan para la medición de preferencias (Ver Guillén, S.T. [2002] y Roberts, F.S. [1979]).

2.2.1 **Modelo ordinal**

El modelo más elemental para representar preferencias es el *modelo ordinal*, el cual tiene la siguiente forma:

$$a \succ b \Leftrightarrow v(a) > v(b), \quad \forall a,b \in \mathcal{A}; \tag{2.1}$$

donde *v* es una función real sobre $\mathcal{E}$ que se denomina *función de valor*[18] y v(*a*) el *valor* de la alternativa *a*. La mejor alternativa es la que hace máxima dicha función. Observe que la función de valor no es única y que cualquier otra función sobre $\mathcal{A}$ es también una función de valor, es decir, cumple (2.1), si y sólo si está relacionada con *v* por una transformación monótona creciente. En otras palabras, la función *v* es única salvo transformaciones monótonas crecientes, por lo que por definición *v* es una escala *regular*[19] sobre las alternativas en $\mathcal{A}$. El valor presente neto, la relación beneficio costo y el periodo de recuperación de la inversión, son funciones de valor ordinal, cada una de las cuales determina, en condiciones de certeza, un modelo de preferencias sobre los flujos de inversión.

2.2.2 **Modelo de utilidad esperada**

El *modelo de utilidad esperada*, el cual se trata principalmente de una decisión bajo riesgo, está definido por el conjunto $\mathcal{E}$ de estimados de consecuencias,

[18] Que es llamada también función de utilidad (ordinal).

[19] Cuando el teorema de unicidad proporciona una condición de "si y sólo si" se dice que la representación es regular. Véase French, S. [1988:327].

formado por distribuciones de probabilidad sobre el conjunto C de consecuencias, y tiene la siguiente forma:

$$a \succ b \Leftrightarrow \mathcal{E}(u, a) > \mathcal{E}(u, b), \quad \forall a,b \in \mathcal{A};$$

donde u es una función real sobre C y $E(u, a)$ es el *valor esperado* de u sobre las distribuciones en $\mathcal{A}$, tal que:

$$E(u,a) = \sum_{x \in C} u(x)a(x) \qquad \text{cuando } C \text{ es discreto, y}$$

$$E(u,a) = \int_{x \in C} u(x)da(x) \qquad \text{cuando } C \text{ es continuo.}$$

En este modelo la mejor alternativa es la que hace máximo el valor esperado de la función de utilidad. La función de utilidad u no es única, pues por la linealidad del valor esperado, cualquier otra función w sobre $\mathcal{A}$ es una función de utilidad si y sólo si está relacionada con u por una transformación *afín positiva*. Por esta propiedad, las escalas de toda función de utilidad son escalas regulares, específicamente escalas de intervalo. Es inmediato que toda función de utilidad es una función de valor, la cual formalmente hace explícitas las preferencias sobre C, pero una función de valor no necesariamente es una función de utilidad (así como una transformación afín positiva es una transformación monótona creciente, pero no recíprocamente).

2.2.3 **Modelo extensivo**

El *modelo extensivo* tiene la siguiente forma:

$$a \succ b \Leftrightarrow \mathrm{v}(a) > \mathrm{v}(b), \quad \mathrm{v}(a \circ b) = \mathrm{v}(a) + \mathrm{v}(b), \quad \forall a,b \in \mathcal{A};$$

donde $\circ$ representa una operación binaria sobre $\mathcal{A}$, de modo que se pueden combinar las alternativas de manera aditiva. Se tienen varios teoremas de representación, los cuales incluyen entre otras condiciones que la operación $\circ$ sea un grupo en $\mathcal{A}$ y que $\succ$ sea un orden débil estricto. La escala correspondiente es regular y concretamente de proporción (razón), es decir, a partir de una escala todas las demás se obtienen de multiplicar esta por una constante positiva.

2.2.4 **Modelo con umbral de indiferencia**

El *modelo con umbral de indiferencia variable* tiene la siguiente forma:

$$a \succ b \Leftrightarrow \mathrm{v}(a) > \mathrm{v}(b) + \delta(b), \quad \forall a,b \in \mathcal{A};$$

donde v es una función real sobre $\mathcal{E}$ y δ una función positiva sobre $\mathcal{A}$, llamada *umbral de indiferencia* (*variable*). Esta representación es conocida también como un *orden de intervalo*[20] y tiene la propiedad que las preferencias se manifiestan hasta que la diferencia en evaluación sobrepasa un umbral $\delta(b)$ que se asocia con la capacidad de discriminación.

En particular, este modelo es de *umbral de indiferencia constante* si δ es una constante positiva:

$$a \succ b \Leftrightarrow v(a) > v(b) + \delta; \quad \forall a,b \in \mathcal{A}.$$

La representación *ordinal* se obtiene cuando $\delta = 0$. Esta representación es conocida también como un *semiorden.*[21]

Entonces, un semiorden es un orden de intervalo pero un orden de intervalo no necesariamente es un semiorden. No obstante, un orden de intervalo y un semiorden, tratan de modelar la misma idea: se puede distinguir una estricta preferencia entre dos alternativas solamente si una de ellas es '*suficientemente mejor*' que la otra. Sin embargo, en el caso de un semiorden, 'suficientemente mejor' significa lo mismo para todos los pares de alternativas en $\mathcal{A}$ (ya que δ es constante) mientras que en el caso de un orden de intervalo se varía dependiendo de la alternativa considerada (ya que δ es una función cuyo valor cambia cuando se cambia la alternativa).

Las transformaciones que dejan invariables estos modelos no forman un grupo algebraico y la caracterización de sus escalas es un problema abierto.[22]

Estos modelos tienen la propiedad que la relación de indiferencia entre alternativas, $\sim$, dada por

$$a \sim b \Leftrightarrow v(a) \leq v(b) + \delta(b), \quad v(b) \leq v(a) + \delta(a), \quad \forall a,b \in \mathcal{A};$$

no es transitiva, es decir se puede tener $a \sim b$, $b \sim c$ y sin embargo $a \succ c$.

Cabe señalar que por definición, cualquiera estructura de preferencia que pueda ser representada por un modelo con umbrales es una *estructura semiordinal.*[23]

[20] Una preferencia estricta, $\succ$, es un orden de intervalo si y sólo si es irreflexiva y cumple la relación de Ferrers. Véase French, S. [1988], sección 3.8.
[21] Una preferencia estricta, $\succ$, es un semiorden si y sólo si es irreflexiva, semitransitiva y cumple la relación de Ferrers. Véase French, S. [1988], sección 3.8.
[22] Ver Roberts, F.S. [1979:252].
[23] Vincke, Ph. [1992:9].

2.3. INDEPENDENCIA DE PREFERENCIAS

Considere los siguientes dos ejemplos y observe la diferencia en sus naturalezas particularmente con respecto a la estabilidad de las preferencias que el decisor puede tener.

Ejemplo 1

Suponga que estoy escogiendo mi almuerzo desde un muy limitado, menú a la carta. Para la primera vuelta puedo tener cualquiera de los dos: filete y pudín de riñón o ensalada de jamón y para la segunda vuelta cualquiera de los dos: rollito de mermelada o helado. Suponga que decido hacer mi elección dando punto a los platillos individuales, suman los puntos para cada una de las cuatro posibles comidas y después seleccionar la comida con la mayor suma. Mis preferencias por los platillos individuales son tales que darían los siguientes puntos.

Filete y pudín de riñón	l0 puntos.
Ensalada de jamón	8 puntos.
Rollito de mermelada	9 puntos.
Helado	2 puntos.

De este modo las cuatro comidas posibles tienen las siguientes sumas

Filete y pudín de riñón y ensalada de jamón	19 puntos.
Filete y pudín de riñón y helado	12 puntos.
Ensalada de jamón y rollito de mermelada	17 puntos.
Ensalada de jamón y helado	10 puntos.

Parece por consiguiente, que preferí filete y pudín y rollito de mermelada para mi comida. Ahora esto es vérdad que soy muy aficionado a pedir pastel, esto es giró alrededor del filete y riñón o rollo con mermelada dentro de un rollito. Pero no siempre en mi más grande glotonería pude considerar comer tan pesada y grasosa una comida como Filete y pudín de riñón y rollito de mermelada.

La razón de la suma de puntos falle para dar mi verdadera preferencia en la comida es que se asume que mi preferencia por el segundo platillo es independiente de mi preferencia por el primero. Todavía esto no es así. Si hubiera tenido filete y pudín de riñón primero, entonces preferiría seguir con helado; pero si hubiera tenido ensalada de jamón entonces preferiría seguir con rollito de mermelada. Por lo tanto, es cuando las preferencias son independientes que uno puede sumar valores seguramente.

Ejemplo 2

Para la compra de un radio, podrían considerarse solamente dos factores de importancia: precio, *x*, y la fidelidad del sonido, *y*. Indudablemente, las preferencias de cualquier comprador de un radio, obedecerán a las siguientes condiciones:

i) Para cualquier precio fijo, el comprador preferirá una alta fidelidad de sonido que uno de baja fidelidad.
ii) Para cualquier fidelidad de sonido fija, el comprador preferirá un precio bajo que uno alto.

En otras palabras, sus preferencias por el precio son independientes de la fidelidad de sonido y viceversa.

Este concepto, se llama formalmente *independencia preferencial.*

Se dice el atributo X es *independiente preferencial* del atributo Y si para toda $x, x' \in X$

$$(x, \alpha) \succsim (x', \alpha) \text{ para alguna } \alpha \in Y \Rightarrow (x, \beta) \succsim (x', \beta) \text{ para toda } \beta \in Y. \quad (2.2)$$

De igual manera, el atributo Y es *independiente preferencial* del atributo X si para toda $y, y' \in Y$

$$(\alpha, y) \succsim (\alpha, y') \text{ para alguna } \alpha \in X \Rightarrow (\beta, y) \succsim (\beta, y') \text{ para toda } \beta \in X. \quad (2.3)$$

Si se cumplen (2.2) y (2.3) al mismo tiempo, entonces X y Y son *mutuamente independientes preferencialmente.*

2.3.1 **Ordenes de preferencia marginal**

Cuando se mantiene la independencia preferencial, es posible definir *ordenes de preferencia marginal*[24] sobre los atributos individuales.

Si X es independiente preferencialmente de Y, se define el *orden de preferencia marginal* del decisor sobre X, $\succsim_X$, por:

$$x \succsim_X x' \Leftrightarrow (x, \alpha) \succsim (x', \alpha) \text{ para alguna } \alpha \in Y.$$

[24] Aquí el término marginal no refiere a un cambio pequeño ni a la diferencial, se proyecta al efecto de los n dimensiones a dimensiones menos que n.

De igual manera, si Y es independiente preferencialmente de X, se define el orden de preferencia marginal del decisor sobre Y, $\succsim_Y$, por:

$$y \succsim_Y y' \Leftrightarrow (\alpha, y) \succsim (\alpha, y') \text{ para alguna } \alpha \in X.$$

El orden de preferencia marginal no está definido si ni hay independencia preferencial.

LEMA 2.1: Si X y Y son mutuamente independientes preferencialmente y si $\succsim$ es un orden débil sobre $X \times Y$, entonces los ordenes de preferencia marginal $\succsim_X$ y $\succsim_Y$ son ambos, ordenes débiles.[25]

2.4. TEORÍA DE VALOR ADITIVO SOBRE DOS ATRIBUTOS

Se dice que una función de valor ordinal es *aditiva* si se pueden representar las preferencias sobre $\mathcal{A} = X \times Y$ por una función de valor ordinal de la forma:

$$v(x,y) = v_X(x) + v_Y(y), \qquad (2.4)$$

esto es, por la suma de una función de x exclusivamente y una función de y exclusivamente.

Lo que es importante es saber bajo que condiciones pueden representarse las preferencias de esta forma.

Combinando (2.4) con la propiedad que define una función de valor ordinal, dada por (2.1), en el caso general de $\succsim$, es decir, $a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)$, $\forall a,b \in \mathcal{A}$; se tiene:

$$(x, y) \succsim (x', y') \Leftrightarrow v_X(x) + v_Y(y) \geq v_X(x') + v_Y(y'). \qquad (2.5)$$

Claramente se ve que para tener tal representación, $\succsim$ deberá ser un orden débil, como se supuso.

Además X y Y son mutuamente independientes preferencialmente, que se demuestra a continuación.

Sea $(x, \alpha) \succsim (x', \alpha)$ para alguna α, entonces;

$$\begin{aligned}(x, \alpha) \succsim (x', \alpha) &\Leftrightarrow v_X(x) + v_Y(\alpha) \geq v_X(x') + v_Y(\alpha), \text{ por (2.5);}\\ &\Leftrightarrow v_X(x) \geq v_X(x'),\\ &\Leftrightarrow v_X(x) + v_Y(\beta) \geq v_X(x') + v_Y(\beta),\\ &\Leftrightarrow (x, \beta) \succsim (x', \beta), \ \forall \beta.\end{aligned}$$

[25] Ver demostración en French, S. [1988:109].

Entonces, X es independiente preferencialmente de Y y, por el mismo argumento, Y es independiente preferencialmente de X.

Sin embargo, a pesar de que son necesarias las condiciones de que haya un orden débil y de que haya independencia preferencial mutual, estas condiciones no son suficientes para la existencia de una representación aditiva.

Consideremos el siguiente ejemplo:
Supóngase que un decisor se enfrenta a la elección entre las nueve alternativas que se dan enseguida. Como el conjunto $\mathcal{A}$ es finito, existe una función de valor ordinal que concuerda con sus preferencias. Sea esta función, v(.), que toma los siguientes valores numéricos:

$$v(0,0) = 1; \quad v(0,1) = 2; \quad v(0,2) = 3;$$
$$v(1,0) = 2; \quad v(1,1) = 4; \quad v(1,2) = 6;$$
$$v(2,0) = 3; \quad v(2,1) = 7; \quad v(2,2) = 8.$$

Notamos primero que las preferencias subyacentes son mutuamente independientes; las preferencias incrementan en cada columna hacia abajo y en cada renglón. Entonces, ¿Se tiene aquí una función valor aditiva representando las mismas preferencias; es decir, hay una función estrictamente creciente ϕ tal que:

$$\phi(v(x,y)) = w(x,y) = w_X(x) + w_Y(y)?$$

Supongamos que se puede encontrar una función aditiva w(...). Entonces,

$$(0,1) \sim (1,0) \Rightarrow w_X(0) + w_Y(1) = w_X(1) + w_Y(0)$$
$$(2,0) \sim (0,2) \Rightarrow w_X(2) + w_Y(0) = w_X(0) + w_Y(2).$$

Sumando y cancelando, se obtiene $w_X(2) + w_Y(1) = w_X(1) + w_Y(2)$. De aquí, que si existe una representación aditiva, entonces la diferencia $(2,1) \sim (1,2)$ deberá existir. Pero esto no es así en este ejemplo. Así, que estas preferencias, a pesar de que son mutuamente independientes no son representables por una función de valor aditiva.

2.4.1 **Condición de Thompsen**

Para tener una idea del conjunto de condiciones que son suficientes para la existencia de una representación de valor aditiva, consideraremos cómo se podría construir una representación de preferencias. Para ello, veamos una condición que sigue conocida como la *Condición de Thompsen.*

Para toda $x_o, x_1, x_2 \in X$ y $y_o, y_1, y_2 \in Y$;

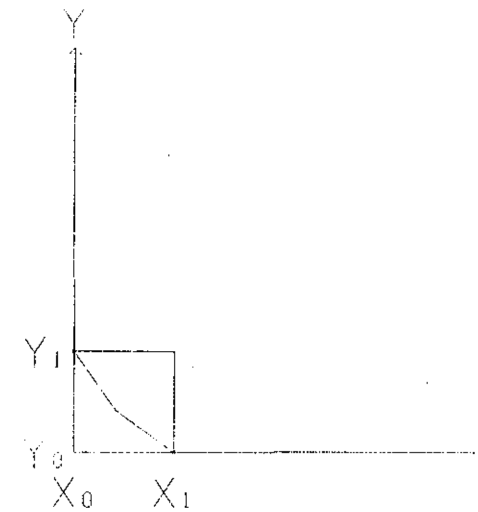
$$\{(x_o, y_1) \sim (x_1, y_o)\} \text{ y } \{(x_2, y_0) \sim (x_0, y_2)\} \Rightarrow \{(x_2, y_1) \sim (x_1, y_2)\}. \qquad (2.6)$$

En nuestro ejemplo, esta es la condición que precisamente no se cumplió.

2.4.2 **Construcción de una representación aditiva**

Vamos a suponer que las preferencias de un decisor se pueden representar por una función de valor aditiva, ¿cómo podríamos construir esto gráficamente? Consideremos la figura 2.1.

Figura 2.1: Los pasos iniciales en la construcción de una representación aditiva



Supongamos por ahora, que para el decisor, su preferencia marginal de *x* y *y*, incrementan con *x* y *y* respectivamente.[26]

Sea $v(x,y) = v_X(x) + v_Y(y)$ una función de valor aditiva, además, supóngase que ésta tiene valores, tales que $v_X(x_0) = v_Y(y_0) = 0$ y, para alguna elección de x_1 arbitraria, tal que $x_1 \succ_X x_0$, $v_X(x_1) = 1$. La elección de los valores para $v_X(x_0)$, $v_Y(y_0)$ y $v_X(x_1)$ es arbitraria.

Se le pide al decisor identificar y_1 tal que:

$$(x_o, y_1) \sim (x_1, y_o). \qquad (2.7a)$$

De la gráfica en la figura 2.1:

$$\begin{aligned}(x_o, y_1) \sim (x_1, y_o) &\Rightarrow v_X(x_0) + v_Y(y_1) = v_X(x_1) + v_Y(y_0)\\ &\Rightarrow 0 + v_Y(y_1) = 1 + 0\end{aligned}$$

[26] Los ordenes de preferencia marginal se cumplen, ya que la suposición de una representación de valor aditivo implica independencia preferencial mutua.

$$\Rightarrow v_Y(y_1) = 1.$$

Ahora consideremos el punto (x_1, y_1) y pidámosle al decisor identificar x_2 y y_2 tal que:

$$(x_2, y_0) \sim (x_1, y_1) \sim (x_0, y_2) \qquad (2.7b)$$

Se sigue que:

$$v_X(x_2) + v_Y(y_0) = v_X(x_1) + v_Y(y_1) = v_X(x_0) + v_Y(y_2)$$
$$\Rightarrow v_X(x_2) = 2 = v_Y(y_2).$$

Ahora se le pregunta al decisor por x_3 y y_3, tal que:

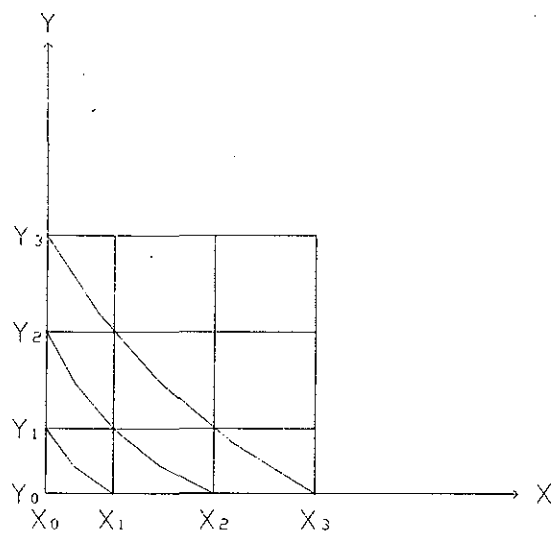
$$(x_3, y_0) \sim (x_2, y_1) \sim (x_0, y_3)$$

Se sigue que:

$$v_X(x_3) = 3 = v_Y(y_3).$$

La situación se muestra en la figura 2.2.

Figura 2.2: La situación después de identificar x_3 y y_3



Notemos, sin embargo, que x_3 y y_3 fueron definidos por la indiferencia con (x_2, y_1). Aquí, en este punto (x_2, y_1), se tiene que

$$v(x_2, y_1) = v_X(x_2) + v_Y(y_1) = 2 + 1 = 3.$$

Vamos a considerar el punto (x_1, y_2):

$$v(x_1, y_2) = v_X(x_1) + v_Y(y_2) = 1 + 2 = 3 = v(x_2, y_1).$$

En otras palabras, las indiferencias (2.7a) y (2.7b) junto con la suposición de una representación aditiva, necesariamente implica que:

$$(x_1, y_2) \sim (x_2, y_1)$$

Las curvas de indiferencia entre (x_1, y_0) y (x_0, y_1), y entre (x_2, y_0) y (x_0, y_2) ponen fuertes condiciones sobre la tercer curva de indiferencia. Se puede observar, que la condición de Thompsen (2.6), precisamente demanda que se cumpla $(x_1, y_2) \sim (x_2, y_1)$.

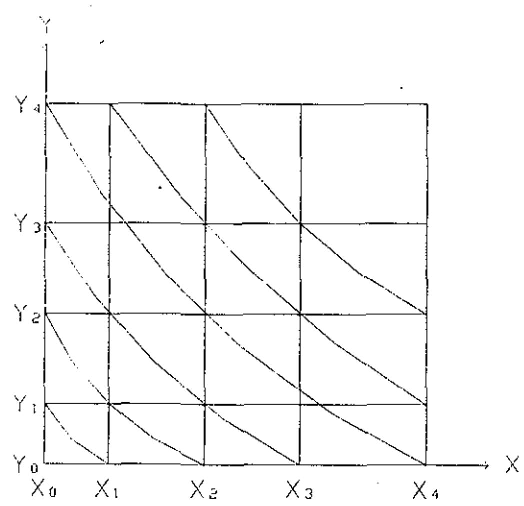
La construcción puede continuarse construyendo un conjunto de puntos sobre cada uno de los ejes, tales que,

$$v_X(x_0) = 0;\ v_X(x_1) = 1;\ v_X(x_2) = 2;\ ...;\ v_X(x_i) = i;\ ...$$
$$v_Y(y_0) = 0;\ v_Y(y_1) = 1;\ v_Y(y_2) = 2;\ ...;\ v_X(x_j) = j;\ ...$$

En la figura 2.3 se ilustra este proceso. Generalmente, el cuadriculado contiene:

$$v(x_i,y_j) = v_X(x_i) + v_Y(y_j) = i + j.$$

Figura 2.3: La construcción completa de $v(x,y) = v_X(x) + v_Y(y)$



Se deben considerar dos aspectos importantes para la construcción de esta gráfica:

1. La elección arbitraria de x_1, es en efecto, la responsable de la escala del cuadriculado de la gráfica; y,

2. El cuadriculado es irregular, esto es, $x_i - x_{i-1} \neq x_k - x_{k-1}$ necesariamente para $i \neq k$.

La importancia de la condición de Thompsen se ve claramente en la figura 2.3. Sin referencia al decisor, la aditividad fuerzan los puntos indicados para que se enmarquen dentro de las curvas de indiferencia señalados.

Es claro que esta construcción construye una función que tiene la forma aditiva en los puntos del cuadriculado. Ahora la tarea es demostrar que, también esta construcción es una función de valor, es decir, se representa la preferencia en el sentido de (2.5). En otras palabras, se debe de demostrar que

$$(x_i, y_j) \succsim (x_m, y_n) \Leftrightarrow i + j \geq m + n \qquad (2.8)$$

Por la construcción y la condición de Thompsen se sabe que

$$(x_{i+j}, y_0) \sim (x_i, y_j) \text{ y } (x_{m+n}, y_0) \sim (x_m, y_n).$$

Entonces, para demostrar (2.8), se requiere solamente señalar que

$$(x_r, y_0) \sim (x_s, y_o) \Leftrightarrow r \geq s.$$

Claramente, si $r = s$, $(x_r, y_0) \sim (x_s, y_o)$. Entonces, se considera $r > s$;

$$x_1 \succ_X x_0 \Leftrightarrow (x_1, y_o) \succ (x_0, y_o) \text{ por definición,}$$
$$\Leftrightarrow (x_1, y_1) \succ (x_0, y_1) \text{ por independencia preferencial.}$$

Ya que $(x_o, y_1) \sim (x_1, y_o)$ por la construcción, se tiene $(x_1, y_1) \succ (x_1, y_0)$

Entonces, por la independencia preferencial, $\forall\, t \geq 0$; $(x_t, y_1) \succ (x_t, y_0)$

Además, por la construcción, $(x_{t+1}, y_0) \succ (x_t, y_0)\ \forall\, t \geq 0$.

Se sigue que: $(x_r, y_0) \sim (x_s, y_o) \Leftrightarrow r \geq s$.

Por lo tanto, el método proporciona una función de valor aditiva en los puntos del cuadriculado. Para los puntos (x,y) que no se enmarcan dentro del cuadriculado, se hace la interpolación de los puntos adyacentes que están en el cuadriculado.[27]

[27] Ver Keeney, R.L. y Raiffa, H. [1976], capítulo 3, donde se da detalles sobre como se hace la interpolación dentro del cuadriculado y de otros métodos equivalentes de construir una representación de valor aditiva.

Para que la construcción de una representación de valor aditiva tenga éxito, se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1: Si se cumplen los siguientes seis axiomas (axiomas 2.4.2.1–2.4.2.6), entonces existe una función de valor aditiva, la cual se representa $\succsim$ sobre $\mathcal{A} = X \times Y$ en el sentido de (2.5). Además, los axiomas 2.4.2.1–2.4.2.3 y 2.4.2.5 son necesarios para tal representación.

2.4.2.1 **Orden débil**

$\succsim$ es un orden débil sobre $\mathcal{A} = X \times Y$, si se cumplen las propiedades de comparabilidad y transitividad, y los axiomas 2.1.4.1 y 2.1.4.2 mencionados anteriormente.

2.4.2.2 **Independencia**

X y Y son mutuamente independientes preferencialmente.

2.4.2.3 **Condición de Thompsen**

Se debe cumplir la condición de Thompsen (2.6) descrita anteriormente.

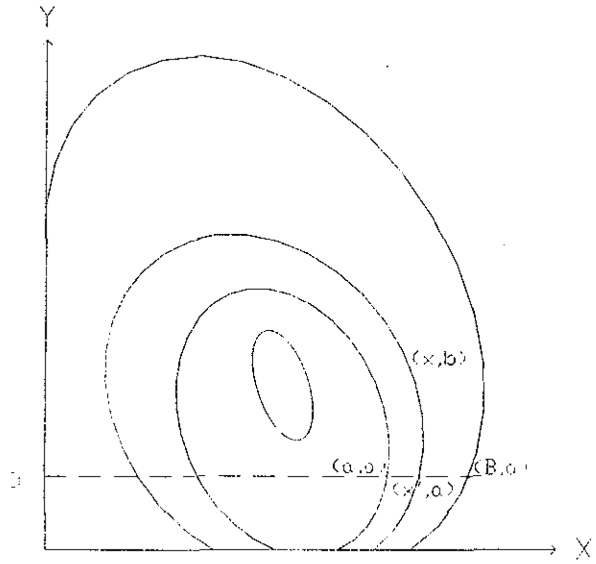
2.4.2.4 **Restricción de solubilidad**

(i) Para toda α, β, x $\in X$ y a, b $\in Y$, tales que
$(\beta, a) \succsim (x, b) \succsim (\alpha, b)$;
$\exists\, x' \in X$ tal que $(x', a) \sim (x, b)$.

(ii) Para toda α, β, y $\in Y$ y a, b $\in X$, tales que
$(a, \beta) \succsim (b, y) \succsim (a, \alpha)$;
$\exists\, y' \in Y$ tal que $(a, y') \sim (b, y)$.

<u>Interpretando (i)</u>

Observe la gráfica de la figura 2.4. Si sobre la línea y = a existe un punto que es por lo menos tan bueno como (x, b), por ejemplo el punto (β, a); y hay otro punto peor que él, por ejemplo el punto (α, a); entonces también hay un punto que es indiferente a (x, b), por ejemplo (x′, a).



2.4.2.5 Condición Arquimediana

Se utilizará el concepto de una *sucesión estándar*, y_o, y_1, y_2, y_3,...que se forma para que

$$(x_1, y_0) \sim (x_0, y_1),\ (x_1, y_1) \sim (x_0, y_2),\ (x_1, y_2) \sim (x_0, y_3),...$$

Así, para cualquier j, el incremento de y_j a y_{j+1} es exactamente compensado por el decremento de x_1 a x_0. y_o, y_1, y_2, y_3,... es una sucesión estándar en el atributo Y, en que los elementos sucesivos difieren por la cantidad exacta necesaria para compensar un decremento en el atributo X de x_1 a x_0. En este sentido, la sucesión estándar puede decirse que divide el atributo Y en intervalos de igual valor.

Una *sucesión estándar estrictamente acotada* en Y, se define como

$$\{y_j | b \succ_Y y_j,\ (x_0, y_j) \sim (x_1, y_{j-1})\} \text{ para alguna } b \in Y \text{ fija.}$$

De igual manera x_o, x_1, x_2,... es una sucesión estándar en X. Una sucesión estrictamente acotada en X se define por

$$\{x_i | a \succ_X x_i,\ (x_i, y_0) \sim (x_{i-1}, y_1)\} \text{ para alguna } a \in X \text{ fija.}$$

La suposición Arquimediana requiere que cada sucesión estándar estrictamente acotada en X o en Y sea finita.

2.4.2.6 Esencialidad

Supongamos que se puede encontrar x_o, $x_1 \in X$ tales que $x_1 \succ_X x_o$ y y_o, $y_1 \in Y$ tales que $y_1 \succ_Y y_o$.

Para los atributos X y Y, que son mutuamente independientes preferencialmente, X es *esencial* si existen x_o, $x_1 \in X$ tales que $(x_1, y) \succ (x_0, y)$ $\forall y \in Y$, o equivalentemente $x_1 \succ_X x_o$. De igual manera, Y es esencial si existen y_o, $y_1 \in Y$ tales que $y_1 \succ_Y y_o$.

Esta suposición lo que pide es una condición no trivial, que cada atributo tenga algún efecto sobre la preferencia

"The average man's judgment is so poor, he runs a risk every time he uses it."
--- Edgar W. Howe.

3

EL MÉTODO DE PROCESO ANÁLITICO JERÁRQUICO (AHP)

3.1. INTRODUCCIÓN

El método **AHP** (surgiendo de sus siglas en inglés, **A**nalytic **H**ierarchy **P**rocess) de decisiones multicriterio fue desarrollado hace más de dos décadas por el Dr. Saaty, T.L. mientras era profesor en la escuela de comercio Wharton, en los Estados Unidos. Está diseñado para reflejar la manera en que la gente piensa realmente cuando se enfrenta a situaciones complejas, ya que está basado en la habilidad innata humana de emitir juicios bien fundados sobre pequeños problemas. Como cualquier buen método de toma de decisiones, el AHP se basa en el principio de que para tomar decisiones, la experiencia y el conocimiento de la gente es por lo menos tan valioso como los datos que se usan. Se descompone una situación compleja y no estructurada en sus componentes, los ordena en una jerarquía, realiza comparaciones binarias y atribuye valores numéricos a juicios subjetivos (respecto de la importancia relativa de cada variable), y sintetiza los juicios, agregando las soluciones parciales en una solución; es decir se trata de desmenuzar un problema y luego unir todas las soluciones de los subproblemas en una conclusión. Facilita la toma de decisiones por medio de la organización de percepciones, sentimientos, opiniones y recuerdos en un marco que exhibe las fuerzas que influencian una decisión. Además, el AHP se permite realizar un atractivo análisis de sensibilidad.

El método AHP está proyectado para resolver problemas de ordenación en un entorno de decisiones multicriterio.[1] Sin embargo, su uso principal ha sido en los problemas de selección.[2] Algunas de las áreas diversas donde la aplicación del AHP ha tenido éxito incluyen: asignación de recursos, pronósticos, gestión de calidad total (total quality management en inglés) y los procesos de re-ingeniería. Sin embargo, es raro que el AHP sea usado aisladamente. Normalmente, se usa el AHP junto con o en apoyo de otras metodologías. También puede ser utilizado para analizar los costos y beneficios, facilitar la toma de decisiones del grupo, controlar los cambios en el sistema de toma de decisiones, etc.

El AHP conduce a los decisores a analizar una decisión en partes, iniciando por lo que se llama el *objetivo principal* (*u objetivo global*)[3], los *criterios*, los *subcriterios*[4] y finalizando por las alternativas. Se usa la técnica de hacer una comparación llevada a cabo por pares (par a par), que por tanto permite a los decisores hacer *juicios* simples a través de la jerarquía, para llegar a las prioridades globales de dichas alternativas. Con este planteamiento, el AHP ayuda a enfrentar marcos intuitivos, racionales e irracionales de decisiones bajo certeza, y también decisiones complejas bajo riesgo e incertidumbre.

Como su nombre sugiere, el AHP está fundamentado en tres conceptos que conforman su denominación; **Proceso**, **Analítico** y **Jerárquico**. Prácticamente no hay un preciso instante en que se toma la decisión. La toma de decisiones es un proceso que requiere de un periodo de: meditación acerca del problema, consecución de nueva información, aprendizaje, evaluación, e inclusive negociación. Se dice es analítico puesto que utiliza un razonamiento lógico-matemático. Las decisiones se justifican a través de una representación matemática de las preferencias. El AHP estructura el problema de decisión en una jerarquía cuyos niveles están formados por los elementos relevantes del problema. Esta estructura representa el conocimiento y entendimiento del decisor acerca del problema en cuestión.

3.2. AXIOMAS DEL AHP[5]

3.2.1 Comparación recíproca

El decisor deberá estar dispuesto a realizar las comparaciones y afirmar sus preferencias. Las intensidades de estas preferencias deben

---

[1] Véase la clasificación de los problemas de decisiones multicriterio en la sección 1.1 del capítulo 1.
[2] Forman, E.H. y Gass, S.I. [2001].
[3] También conocido como la *meta global*, que en realidad, es más significativo.
[4] Bien dicho sería, "los atributos, los subatributos". Véase el punto 2 del glosario.
[5] Vargas, L.G. [1990].

satisfacer la condición recíproca: Si A es x veces más preferida que B, entonces B es 1/x veces más preferida que A.

3.2.2 **Homogeneidad**
Las preferencias son representadas en términos de una escala acotada. El establecimiento de límites inferiores o superiores facilita una comparación de naturaleza o magnitudes diferentes, agregándolos en un intervalo tal que permita su comparación.

3.2.3 **Independencia**
Cuando se expresan preferencias, los criterios se asumen independientes de las propiedades de las alternativas.

3.2.4 **Completez**
Para el propósito de tomar decisiones, la estructura jerárquica se supone completa.

Si no se cumple el axioma 3.2.1, significa que la pregunta usada para obtener los juicios de las comparaciones por pares no es correcta o no fue enunciada claramente. Si no se cumple el axioma 3.2.2, entonces los elementos comparados no son homogéneos. El axioma 3.2.3 implica que los pesos de los criterios deben ser independiente de las alternativas consideradas. Finalmente, si el axioma 3.2.4 no se cumple, entonces el decisor no está usando todos los criterios y/o todas las alternativas disponibles o necesarias para encontrar sus expectativas razonables y por lo tanto la decisión esta incompleta.

3.3. ETAPAS DEL AHP

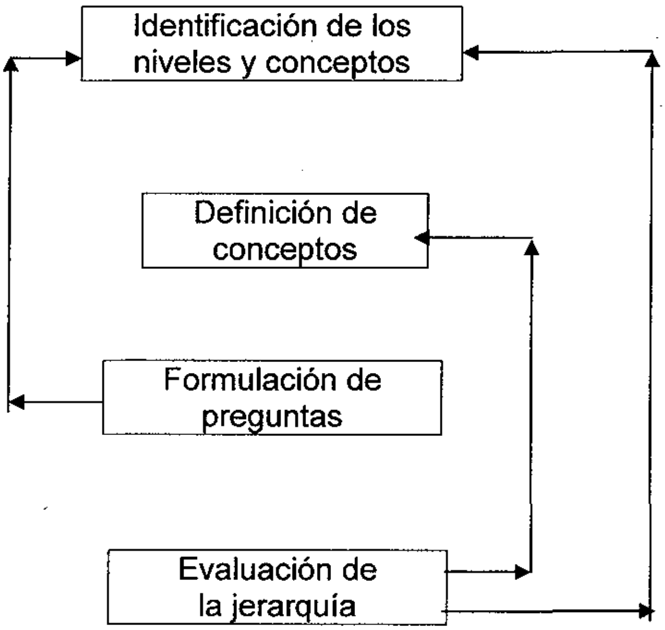
El AHP se realiza la toma de decisiones en dos etapas principales:

1. *Estructuración de la jerarquía*, es decir, descomposición del problema en una jerarquía que contiene los elementos básicos que intervienen en él.
2. La *evaluación*, que incluye:
   - determinación de las prioridades relativas de los elementos de la jerarquía a través del uso de comparaciones por pares.
   - sintetización de las prioridades relativas para determinar el resultado global.
   - análisis de sensibilidad (cuando sea deseable).

3.3.1 Estructuración de la jerarquía

Al construir la jerarquía se debe considerar el ambiente que afecta al problema, e identificar los aspectos o atributos que describen a la solución, los actores asociados con el problema, las posibles alternativas de solución y todo aquel factor relevante que intervenga en el problema. Es claro que la estructuración de una jerarquía depende de la visión que se tenga del sistema, de la cantidad de información relativa al problema con que se cuente y de las respuestas que se deseen obtener con su solución. Se puede concluir que esta fase involucra tres procesos interrelacionados no secuénciales: identificación de los elementos y sus niveles, definición de conceptos y formulación de las preguntas. Se puede ver un resumen de la relación entre estas tres componentes del diseño de la jerarquía en la figura 3.1.

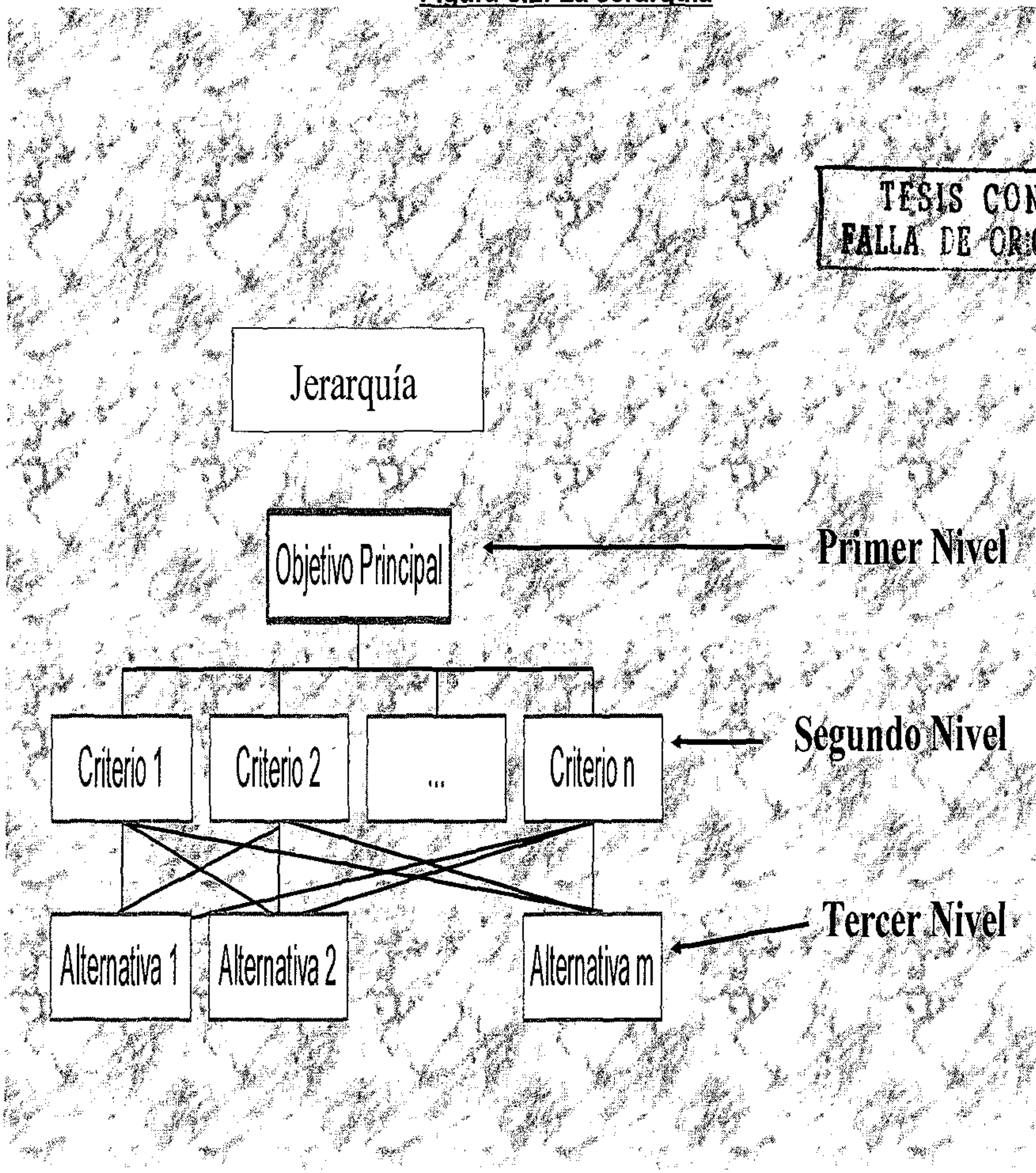
Figura 3.1: Diseño de Jerarquía[6]



En el primero paso se identifican los niveles y los elementos dentro de los niveles. En la forma simple y más común, se ordenan los niveles y los elementos de una jerarquía de los más generales y menos controlables a los más específicos y controlables y se representan por medio de un arreglo vertical de al menos tres niveles, integrado por un objetivo principal, criterios, y alternativas. Observe la figura 3.2.

[6] Vargas, L.G. [1990].

Figura 3.2: La Jerarquía



La construcción de la jerarquía permite tener una visión global de las relaciones complejas existentes en sistema y ayuda al decisor a determinar si los aspectos contenidos en cada nivel son del mismo orden de magnitud, es decir, si son comparables.

Los niveles intermedios (entre el objetivo principal y las alternativas) pueden variar dependiendo de la naturaleza del problema, por ejemplo, pueden corresponder, a sub-objetivos, a los factores que afectan a estos sub-objetivos, a los actores y a los atributos que sirven de medio para medir el alcance de estos objetivos y que describen a las alternativas. Los elementos en cada nivel pueden ser considerados como restricciones, refinamientos o descomposiciones de los elementos del nivel inmediato superior.

He aquí algunas sugerencias para un proyecto elaborado de una jerarquía:

1. Identificar el objetivo principal - ¿Qué es lo que se quiere lograr?, ¿Cuál es la pregunta principal?
2. Identificar los objetivos dentro del objetivo principal.
3. Identificar los criterios que deben cumplirse para satisfacer los sub-objetivos dentro del objetivo principal.
4. Identificar sub-criterios dentro de cada criterio. Tener en cuenta que los criterios o sub-criterios pueden especificarse en función de una variedad de valores de parámetros o en función de intensidades verbales como ser: largo, medio, corto.
5. Identificar las alternativas y/o las consecuencias.

Todos los niveles son definidos y usados en la fase de formulación de preguntas. Si el decisor tiene problema en contestar las preguntas, entonces los niveles y elementos deberán ser revisados y modificados. Por lo tanto, la estructuración de la jerarquía es un proceso iterativo donde los conceptos, las preguntas y las respuestas, determinan los elementos y los niveles de la jerarquía.

Una observación importante acerca del enfoque jerárquico es que para resolver problemas, la representación funcional del sistema en el que se le ha enmarcado puede variar de persona a persona, p ero con bastante frecuencia, se puede coincidir en el nivel que corresponde a las alternativas y en el nivel superior a éste, que es el de las características de estas acciones alternativas. Lo importante es que el que construya la jerarquía debe sentirse satisfecho con las relaciones naturales establecidas entre los niveles.

3.3.2 **Evaluación**

El decisor tiene que interpretar la información disponible para hacer juicios con base en sus conocimientos y experiencias en el proceso de comparación por pares. Este proceso se basa a su vez preguntas de comparación, por ejemplo, dado un criterio y dos elementos; ¿cuál de los dos elementos satisface más el criterio y cuánto más? Una de las características de este método es que permite realizar juicios en cada uno de los niveles, la forma más efectiva de hacerlo es tomar un par de elementos y compararlos con respecto a una sola propiedad sin concernir o mezclar a las otras propiedades. Se usa la escala de 1 a 9 llamada la *escala fundamental* que se muestra en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: La Escala Fundamental[7]

INTENSIDAD DE IMPORTANCIA	DEFINICIÓN	EXPLICACIÓN
1	Igual importancia	Las dos actividades contribuyen de igual manera al objetivo
3	Importancia moderada	La experiencia y el juicio moderadamente a favor de una actividad sobre la otra
5	Importancia fuerte	La experiencia y el juicio fuertemente a favor de una actividad sobre la otra
7	Importancia muy fuerte o importancia demostrada	Una actividad es fuertemente favorecido sobre la otra; su dominancia está demostrada en la práctica
9	Extrema importancia	La evidencia que favorece una actividad sobre la otra es del orden de afirmación más alto posible
2,4,6,8	Valores de compromiso entre los valores de intensidad	A veces uno necesita interpolar un juicio de acomodo numérico, porque no hay una palabra que sirva para describirlo
Recíprocos de los anteriores	Si se asigna a_{ij} al comparar la actividad i con la j, entonces se asigna $a_{ji} = 1/a_{ij}$ al comparar la j con la i	
Racionales	Razones que surgen de la escala, si se forzara la consistencia por la obtención de n valores numéricos que abarquen la matriz	
1.1 – 1.9	Para actividades ligadas cuando los elementos están cerca y son casi indistinguibles; 1.3 es mediana y 1.9 es extrema	

Esta es una escala de numeración absolutos usada para asignar valores numéricos a juicios, hechos mediante la comparación de dos elementos. Para realizar estas operaciones se toma el elemento del par que tiene menor contribución como la unidad y se hace la estimación de la contribución del otro elemento como un múltiplo de esa unidad, a condición de que, es un valor de esta

[7] Saaty, T.L. [1994:73] y [1998:24].

escala. Se repite este procedimiento para todos los elementos de un nivel con respecto a todos los elementos del nivel inmediatamente superior. El conjunto de todos esos juicios se representan en una matriz llamada *matriz de comparación por pares* (también llamado con sencillez, *matriz de pares comparados* o *matriz de comparación*) en la cual el conjunto de elementos se compara consigo mismo.

Entonces dados los n elementos de un nivel, digamos el nivel k de una jerarquía y un elemento x del nivel inmediatamente superior, es decir, el nivel k–1. Se comparan por pares los elementos del nivel k en relación al grado de influencia de uno sobre el otro respecto al elemento x. El decisor evalúa esa influencia de acuerdo a la escala fundamental en la manera que se ha explicado anteriormente, y se coloca ese número en la entrada correspondiente de la matriz de comparación por pares (una matriz cuadrada de orden n, cuyas filas y columnas corresponden a los n elementos del nivel k).

Se utilizan las comparaciones por pares para estimar la subyacente escala llamada *escala derivada* o *el vector de prioridades* en el cual los elementos en cada nivel son medidos. Esto puede ser realizado usando el método del *vector característico derecho*[8]. Los elementos del vector de prioridades se denominan *prioridades locales* y corresponden al grado de influencia, factibilidad, importancia o contribución relativa, según el caso, de los elementos del nivel k al elemento x.

Los axiomas de la teoría del AHP son transparentes en esta etapa. Si el decisor no puede proveer la respuesta, entonces la pregunta no es significativa/clara o las alternativas no son comparables, es decir, no son homogéneas.

3.4. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE LA ETAPA DE EVALUACIÓN

Se inicia la evaluación con la construcción de una matriz **A** a partir de la comparación de las diferentes actividades con el propósito de estimar el peso relativo a cada una de ellas. Se asigna un conjunto de ponderaciones numéricas $w_1, w_2, \ldots, w_n$ para las actividades $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivamente que reflejan los juicios registrados.

Suponga que se quiere comparar el peso de un adulto y un niño, donde se conoce que el niño pesa w_1 unidades y el adulto pesa w_2 unidades. La comparación asignará al adulto el valor relativo w_2/ w_1 y su recíproco w_1/ w_2 al niño. Tenga en cuenta que w_1 y w_2 deben de pertenecer a una escala de razones para que w_1/ w_2 y w_2/ w_1 sean independientes de las unidades de medición.

[8] También llamado el *vector propio derecho* o el *auto vector derecho*. Véase la sección 3.4.1.

Entonces se pueden representar los juicios de los pares de actividades (A_i, A_j) numéricamente en una matriz cuadrada de orden n, cuyas filas consisten en las proporciones de las medidas w_i de cada actividad respecto a las otras, es decir, una matriz **A** = (a_{ij}); $a_{ij} = w_i/ w_j$; i, j = 1,2,3, ...,n.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{A_1} & \mathbf{A_2} & & \mathbf{A_n} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{A_1} \\ \\ \mathbf{A_2} \\ \\ \\ \mathbf{A_n} \end{array} &
\begin{pmatrix}
\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & & \frac{w_1}{w_n} \\
\frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & & \frac{w_2}{w_n} \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
\frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Nótese que:

i) $a_{ii} = w_i/ w_i = 1 \ \forall \ i = j$; i, j = 1,2,3, ...,n; lo que implica que todos los elementos de la diagonal principal de esta matriz tendrán siempre el valor 1, que es en acuerdo con la escala fundamental, ya que el elemento A_i es igualmente importante a si mismo.

ii) Según el axioma 1 del AHP y la escala fundamental, $a_{ji} = 1/a_{ij}$. Esto significa que generalmente, cuando hay n actividades A_1, A_2, ..., A_n, se necesita sólo n(n-1)/2 comparaciones de los elementos que están por encima de la diagonal principal, es decir, los elementos a_{ij}, $i < j$.

iii) Todos los elementos de la matriz **A** = (a_{ij}); $a_{ij} = w_i/ w_j$; i, j = 1,2,3, ...,n son positivos. Además la matriz **A** es una matriz recíproca positiva porque se satisface la propiedad recíproca $a_{ji} = 1/a_{ij}$; y como consecuencia la matriz **A** es *irreducible* y *primitiva*.

iv) La matriz **A** es consistente ya que se satisface la condición $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$, para cualquier i,j,k.

3.4.1 El vector característico derecho

Sea $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$. Observe que $\mathbf{Aw} = n\mathbf{w}$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & & \frac{w_1}{w_n} \\
\frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & & \frac{w_2}{w_n} \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
\frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}
= n \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}
$$

Este sistema $\mathbf{Aw} = n\mathbf{w}$ es un caso generalmente conocido en álgebra lineal, como $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

Para resolver $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, se considera el sistema homogéneo de ecuaciones $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o más bien $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

Para no tener una solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es necesario que $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$, es decir, que el determinante de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ sea 0. La ecuación $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ es un polinomio en λ del orden n (el orden de la matriz **A**) llamado la *ecuación característica* de la matriz **A**.

Se llaman *valores característicos*[9] a las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la ecuación característica de la matriz **A** y el *vector característico* al vector **x** asociado con λ. De la misma manera, el sistema de ecuaciones $\mathbf{Aw} = n\mathbf{w}$; tiene la solución $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ que es el vector característico de la matriz **A**, y n (el orden de la matriz **A**), da sus correspondientes valores característicos.

Nótese que cada fila de la matriz **A** del caso $\mathbf{Aw} = n\mathbf{w}$ es un múltiplo constante de la primera fila, lo que implica que **A** tiene rango unitario. Por lo tanto todos sus valores característicos son ceros, excepto exactamente uno de ellos, él cual tiene el valor mayor, llamado *el valor característico principal*[10], normalmente denotado por $\lambda_{máx}$.

Además, se sabe que la suma de los valores característicos de una matriz es igual a su traza, la suma de sus elementos diagonales, y en este caso la traza de la matriz **A** es igual a n, lo que implica que $n = \lambda_{máx}$.

[9] También llamados *valores propios* o *auto valores*.
[10] También llamado el *valor propio principal* o el *auto valor principal*.

El *vector característico derecho* (normalizado) correspondiente a este valor característico máximo, $\lambda_{máx}$ consiste en entradas positivas y es único dentro de una constante multiplicativa. Este vector representa el vector de prioridades de los elementos del nivel k al elemento x del nivel k–1 expuesto anteriormente.

Para hacer **w** único, uno puede normalizar sus entradas dividiendo por su suma. Por lo tanto, dada la matriz de comparación **A**, uno puede recobrar la escala. En este caso la solución es cualquier columna de **A** normalizada.

Es obvio que en un entorno general de tomar decisiones, no se pueden dar valores precisos de w_i/ w_j, sólo se pueden dar estimaciones de ellos, lo cual implica que los valores característicos de **A** se verán afectados. No obstante, se sabe por la teoría del valor característico, que perturbaciones pequeñas de un valor característico (como en el caso de n) donde la matriz **A** es consistente, conduce a un problema del mismo sistema $\mathbf{Aw} = \lambda_{máx}\mathbf{w}$ donde **A** podría ser no consistente pero si recíproca.[11]

El problema es ahora qué tan buena es la estimación de **w**. Se aborda sobre esta cuestión en la siguiente sección.

3.4.2 La medición de la inconsistencia

La condición de consistencia de la matriz anterior **A** es equivalente al hecho de que el orden n de la matriz sea igual a su valor característico principal, $\lambda_{máx}$, es decir, **A** es consistente si y sólo si $\lambda_{máx} = n$. Si **A** es inconsistente entonces $\lambda_{máx} > n$.[12]

Cambios pequeños en los elementos a_{ij} (o mejor dicho en las razones w_i/ w_j) implican un cambio (aumento) pequeño en $\lambda_{máx}$. Esto implica que $\lambda_{máx} - n$ mide el aumento del $\lambda_{máx}$ como resultado de la inconsistencia en la estimación de **w**. Debido a esto, Saaty, T.L. [1990, 1994, 1998] define el *índice de consistencia, I.C* donde

$$IC = \frac{\lambda_{máx} - n}{n - 1}$$

Cuando el índice de consistencia ha sido calculada, el resultado se compara con aquel del mismo índice de promedio aleatorio obtenido como un promedio sobre

---

[11] Saaty, T.L. [1990].

[12] Véase los teoremas 1 y 2 en Saaty, T.L. [1990].

un gran número de matrices recíprocas del mismo orden cuyas entradas son aleatorias, usando la misma escala de 1 a 9, llamado el *índice aleatorio, I.A.*[13]. La tabla 3.2 muestra el I.A. para matrices del orden (n) 1 al 15.

Tabla 3.2: El índice aleatorio (I.A.)[14]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I.A.	0.00	0.00	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49	1.51	1.54	1.56	1.57	1.58

Si el índice de inconsistencia es menor que el índice aleatorio de manera significativa (a lo más 10%) se acepta la estimación de w. Entonces se ha establecido la razón **I.C./I.A.** llamada *razón de consistencia* **R.C.**, que es considerada aceptable si es menor o igual a 0.10 (10%), es decir, se acepta la estimación de **w** cuando **R.C.** $\leq$ 10%. En caso contrario se concluirá que **w** contiene demasiadas inconsistencias y se necesita una revisión para mejorar la consistencia.

Es importante hacer notar que una inconsistencia en la matriz de comparación por pares debe servir como un factor de alerta al decisor, más que un hecho necesariamente indeseable. Por ello, se debe tener cuidado con forzar la consistencia ya que podrían alterar el resultado del problema planteado. Bajo tal óptica, es el decisor quién debe ser alertado para que él y solamente él altere el juicio realizado.

Cuando los juicios son inconsistentes, la persona que toma la decisión puede que no sepa dónde está la mayor inconsistencia. El AHP (especialmente si se usa el programa de software del AHP, llamado *Expert Choice*) puede mostrar uno por uno, en orden secuencial, cuáles son los juicios más inconsistentes, y sugiere el valor que mejora lo máximo posible la consistencia. Sin embargo, esta recomendación no necesariamente lleva a un conjunto de prioridades más exacto que corresponda a una preferencia subyacente de los decisores. Mayor consistencia no implica mayor exactitud y uno debería mejorar la consistencia (si uno dispone del conocimiento) haciendo pequeños cambios compatibles con su entendimiento. Si uno no puede llegar a un nivel aceptable de consistencia, debería recoger información adicional o reexaminar el marco de la jerarquía.

Hay dos factores importantes que afectan la consistencia:
1. el conocimiento y cuidado del decisor sobre el problema en estudio, y
2. la homogeneidad de los elementos de un nivel, o sea, no comparar un grano de arena con una montaña.

---
[13] También se denota el índice aleatorio como R.I. surgiendo del inglés *Random Index*.
[14] Saaty, T.L. [1994:84].

Se explica más acerca del segundo factor en la sección que sigue (3.4.2.1).

3.4.2.1 Homogeneidad y agrupamiento[15]

Piense en la siguiente situación: se necesita determinar el tamaño relativo de un arándano y de una sandía. En este caso, se precisa un rango mayor que 1-9. Los seres humanos tienen dificultad en establecer relaciones apropiadas cuando las relaciones van más allá de 9. Para resolver esta dificultad humana, podemos usar un método en el que agrupamos elementos diferentes de manera que podemos clasificarlos dentro de un grupo y luego clasificarlos a través de los grupos. Tenemos que agregar otras frutas para hacer posible la comparación y luego formar grupos de frutas comparables. En el primer grupo incluimos un arándano, una uva y una ciruela. En el segundo grupo incluimos a la misma ciruela, una manzana y un pomelo. En el tercer grupo incluimos al mismo pomelo, un melón y a la sandía. El AHP requiere comparaciones recíprocas de elementos homogéneos cuyas relaciones no difieren por mucho en una propiedad, cuando las relaciones son mayores, se debe agrupar a los elementos en grupos diferentes y usar un elemento común (base) que es el más grande de un grupo y el elemento más chico en el grupo siguiente del orden de magnitud siguiente más alto. Las ponderaciones de los elementos del segundo grupo se dividen por la prioridad de la base de ese grupo y luego se multiplica por la prioridad del mismo elemento base (cuyo valor es, por lo general, diferente) del primer grupo, haciéndolos comparables con el primer grupo. El proceso entonces se continúa. Se puede realizar estas funciones usando el programa del software *Expert Choice*.

3.4.3 **Ejemplo ilustrativo**

Consideramos el problema de ponderación de seis criterios que serán utilizados para la selección de una forma de inversión: ACEPTACIÓN, TASA DE RETORNO, RIESGO, EXPERIENCIA, FACILIDAD DE MONITOREO y LIQUIDEZ. Para la ponderación, evaluamos la fuerza de la importancia de los criterios respecto al objetivo de seleccionar la mejor forma de inversión, comparando los criterios por pares Por ejemplo, nos preguntamos: ¿qué tanto más importante es el factor de riesgo frente al de la experiencia en la determinación de la mejor inversión? Esta pregunta se responde según la escala fundamental mostrado en la tabla 3.1. Para cada par de estos seis criterios de este ejemplo, se pregunta de la misma manera y se hace los juicios según la escala fundamental.

Si se considera que la experiencia es cuatro veces más importante que el riesgo, asignamos la calificación 4 en la entrada correspondiente y ¼ para la comparación recíproca en la posición simétrica de la matriz de comparación por pares. Cada juicio (entrada de la matriz de comparación) representa la dominancia de un

[15] Saaty, T.L. [1998].

elemento de la columna de la izquierda sobre un elemento de la fila de arriba. De esta manera, la matriz de comparaciones por pares de los criterios respecto al objetivo principal puede ser la siguiente:

Mejor forma de inversión	Aceptación	Tasa de retorno	Riesgo	Experiencia	Facilidad de monitoreo	Liquidez
Aceptación	1	5	7	5	3	1
Tasa de retorno	1/5	1	3	1/5	1/3	1/6
Riesgo	1/7	1/3	1	1/4	1/5	1/5
Experiencia	1/5	5	4	1	1/5	1/6
Facilidad de monitoreo	1/3	3	5	5	1	1
Liquidez	1	6	5	6	1	1

Se puede observar que estas comparaciones no son totalmente consistentes. Por ejemplo, el criterio de facilidad de monitoreo es 3 veces más importante que la tasa de retorno, la que a su vez es 3 veces más importante que el riesgo. Si los juicios fueran consistentes la facilidad de monitoreo debería ser 9 veces más importante que el riesgo, sin embargo, la calificación es de 5. De hecho, no estamos seguros qué juicios son más exactos y cuáles son la causa de esta inconsistencia. Este fenómeno de inconsistencia ocurre frecuentemente. No obstante, no se intenta mejorar la consistencia en este momento hasta que sea necesario por la indicación de la razón de consistencia como se muestra en la sección 3.4.3.3.

3.4.3.1 Cálculo del vector de las prioridades

Este cálculo esta basado en el teorema que indica que el vector característico deseado es lo que se obtiene cuando se normaliza las sumas de las filas del límite de la potencia de la matriz primitiva **A**.[16] Es por ello que, una forma para efectuar esta tarea es elevar la matriz **A** a grandes potencias, se obtiene una convergencia rápidamente si se eleva al cuadrado la matriz **A** sucesivamente. Se calculan las sumas de las filas y se normaliza. El cálculo se detiene cuando la diferencia entre estas sumas en dos cálculos consecutivos sea más pequeña que un valor prefijado. Prácticamente esto necesita el uso de computadoras o más bien, el uso de programa del software *Expert Choice*.

[16] Saaty, T.L. [1994:78-79].

En la ausencia de una computadora, se pueden obtener estimaciones menos precisas por cualquiera de los siguientes cuatro métodos:[17]

1. Suma los elementos en cada fila y normaliza dividiendo cada suma entre el total de las sumas.
2. Toma la suma de los elementos en cada columna y forma sus recíprocos. Para normalizas divide cada recíproco entre la suma de los recíprocos.
3. Divide cada elemento de cada columna entre la suma de esta columna (normaliza cada columna), suma los elementos obtenidos en cada fila y divide esta suma entre el número de elementos de cada fila. Este es el proceso de promediar sobre las columnas normalizadas.
4. Multiplica los n elementos de cada fila y calcula su i-ésima raíz. Normaliza los números obtenidos.

Para el ejemplo anterior, se obtienen los siguientes resultados:

Método 1: $[0.29, 0.07, 0.03, 0.14, 0.20, 0.27]^t$
Método 2: $[0.37, 0.05, 0.04, 0.06, 0.18, 0.30]^t$
Método 3: $[0.33, 0.06, 0.04, 0.10, 0.20, 0.27]^t$
Método 4: $[0.34, 0.05, 0.03, 0.09, 0.21, 0.28]^t$

Es importante tomar en cuenta que estos cuatro métodos dan diferentes resultados, ya que en la mayoría de los casos la matriz no es consistente. Generalmente, la precisión se mejora del método 1 al 2 y del 2 al 3, aunque se aumenta la complejidad de computación. El método 4 da una buena aproximación del mismo.[18] Si la matriz fuera consistente, los cuatros vectores serían iguales.

Es necesario, en aplicaciones reales, calcular este vector de manera precisa explicado anteriormente, ya que las aproximaciones de estos métodos pueden afectar el análisis final.[19]

3.4.3.2 Cálculo de $\lambda_{máx}$

Se multiplica la matriz original (de comparaciones por pares) a su derecha por el vector de prioridades y se dividen los correspondientes componentes del segundo vector entre el primero. El promedio de los componentes del vector de resultado es el valor de $\lambda_{máx}$.

[17] Saaty, T.L. [1980:19-20].
[18] Saaty, T.L. [1980:20].
[19] Saaty, T.L. [1994:80].

Para el ejemplo anterior, el producto del matriz original multiplicado a la derecha por el vector de los prioridades (escogemos el vector por el método 3) da la columna vector (2.28, 0.38, 0.32, 0.71, 1.46, 1.96). Al dividir los componentes del segundo vector entre los correspondientes componentes del primero vector se obtiene el vector (6.91, 6.29, 7.90, 7.11, 7.30, 7.26), y por lo tanto el promedio de los componentes de este último vector es el valor de $\lambda_{máx} = 7.13$.

3.4.3.3 Determinación de la inconsistencia.

El índice de inconsistencia de la matriz de comparaciones por pares es dado por:

$$IC = \frac{\lambda_{máx} - n}{n - 1} = \frac{7.13 - 6}{6 - 1}$$

$$= 0.226$$

De la tabla 3.2, el resultado promedio para matrices de este orden es **I.A.** = 1.25. La razón de consistencia, **R.C. = I.C./I.A**

$$= \frac{0.226}{1.25} = 0.18 > 0.10$$

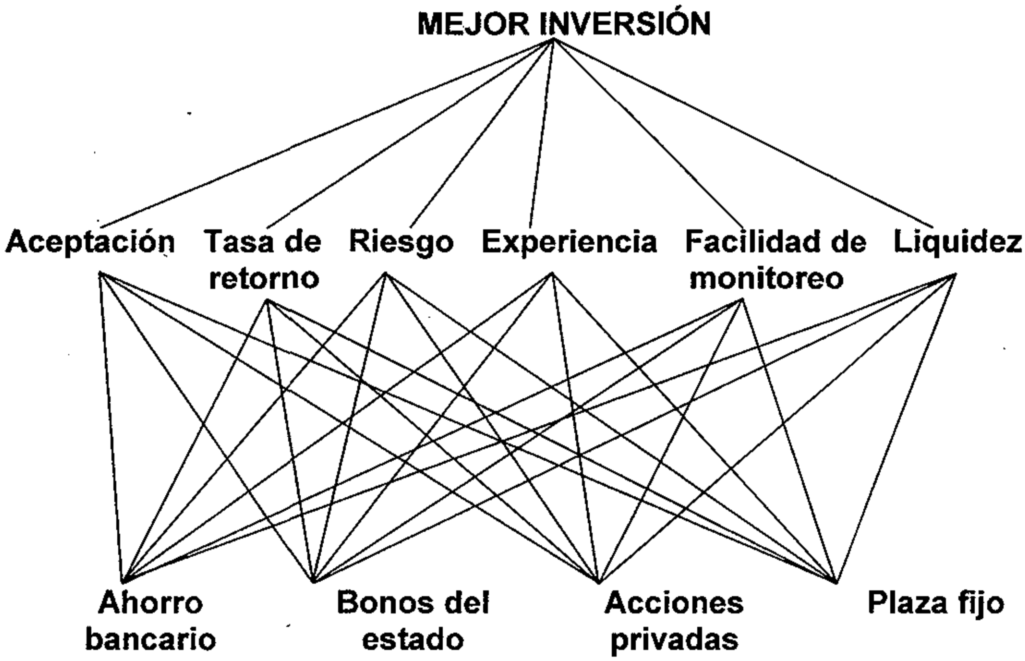
Por lo tanto, en este caso, la matriz de comparaciones por pares contiene demasiadas inconsistencias y entonces el decisor debe de revisar sus juicios para mejorar la consistencia o puede ser necesario recoger más información y/o reexaminar el marco de la jerarquía del problema como está descrito con detalle en la sección 3.4.2.

3.4.4 **Sintetización de las prioridades relativas**

3.4.4.1 Ponderación de los niveles de la jerarquía

En el problema anterior (ejemplo ilustrativo) de selección de una forma de inversión, la decisión acerca del tipo de inversión depende del número de criterios que afectan su bondad. El primer nivel de ésta jerarquía es el objetivo principal (seleccionar la mejor forma de inversión). El segundo nivel consiste en los criterios ya mencionados anteriormente. El tercer nivel consiste en las alternativas, que pueden ser AHORRO BANCARIO, BONOS DEL ESTADO, ACCIONES PRIVADAS y PLAZO FIJO. La jerarquía que representa este problema se muestra en la figura 3.3.

Figura 3.3: La jerarquía de la selección de una forma de inversión



Todos los criterios deben ser evaluados en relación a su impacto en el logro del problema y a su vez, cada posible forma de inversión debe ser evaluada para determinar qué tanto satisface cada uno de estos criterios.

En la sección 3.4.3 se evaluaron los elementos del segundo nivel respecto al objetivo general del problema. De la misma manera se necesita la evaluación de los elementos del tercer nivel (las alternativas) respecto a cada uno de los elementos del segundo nivel (cada uno de los criterios). Es decir, deben construirse seis matrices de 4x4 (hay cuatro elementos/alternativas en el tercer nivel) de comparaciones por pares, una por cada criterio. Además, para cada una de estas seis matrices, deben calcular el vector de las prioridades, la $\lambda_{máx}$ y la razón de consistencia, **R.C.** Se aceptan cada una de estas matrices cuando la **R.C.** $\leq$ 0.10 (10%). En caso contrario se concluirá que la matriz contiene demasiadas inconsistencias y que es necesaria una revisión del problema.

3.4.4.2 El vector global de prioridades relativas

El *principio de composición jerárquica*[20] su ministra una forma para calcular la *prioridad global* de las alternativas respecto al objetivo principal del problema, tomando en consideración los vectores de pesos relativos obtenidos para cada nivel de la jerarquía.

Si la jerarquía que representa un problema de decisión tiene h niveles, se denota a $\mathbf{B}_k$ como el *vector de prioridades relativas locales* de los elementos del nivel k; $k \leq h$, $k = 2,3,\ldots,h$ respecto al nivel k–1. *El vector global* **w** *de prioridades relativas*, es decir, el vector de prioridades de los elementos del nivel h (las alternativas) respecto al nivel 1 (el objetivo principal) es el vector normalizado producto $\mathbf{w} = \mathbf{B}_h\mathbf{B}_{h-1}\ldots\mathbf{B}_2$.

En el problema anterior (ejemplo ilustrativo), $\mathbf{B}_2$ es el vector de prioridades relativas de los elementos del segundo nivel (los criterios) respecto al primer nivel (el objetivo de seleccionar una mejor forma de inversión) y $\mathbf{B}_3$ es el vector de prioridades relativas de los elementos del tercer nivel (las alternativas) respecto al segundo nivel (los criterios). Nótese que $\mathbf{B}_2$ es un vector columna del orden 6x1 donde el elemento de la fila j, $j = 1,2,\ldots,6$ representa la prioridad relativa del criterio j, $j = 1,2,\ldots,6$ respecto al objetivo principal y $\mathbf{B}_3$ tiene el orden 4x6 donde el elemento b_{ij} de este vector representa la prioridad relativa de la alternativa i, $i = 1,2,\ldots,4$ respecto al criterio j, $j = 1,2,\ldots,6$. El vector normalizado producto $\mathbf{w} = \mathbf{B}_3\mathbf{B}_2$ es un vector columna del orden 4x1 donde el elemento de la fila i, $i = 1,2,\ldots,4$ representa la prioridad relativa de la alternativa i, $i = 1,2,\ldots,4$ respecto al objetivo principal.

3.4.4.3 Jerarquía completa e incompleta

Se dice una jerarquía es *completa* si todos los elementos de un nivel tienen a todos los elementos en el nivel que le sucede como descendientes, de otra manera es *incompleta*, o más bien, una jerarquía que contiene h niveles es completa cuando los elementos de un nivel k; $k \leq h$, $k = 2,3,\ldots,h$ son evaluados respecto a todos los elementos del nivel k–1, y en otro caso, se dice que la jerarquía es incompleta.

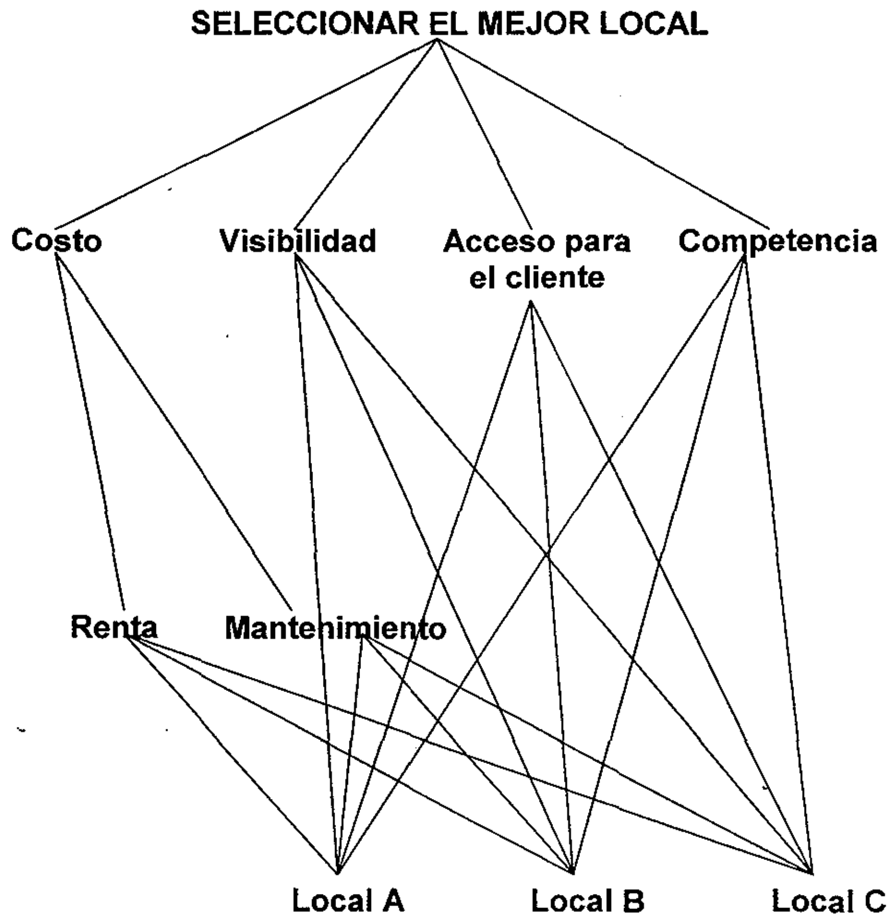
No es necesario que todos los elementos de un nivel k, $k < h$, $k = 2,3,\ldots,h-2$ funcionen como criterios de todos los elementos de los niveles k+1, k+2, ...,h–1. Por lo tanto, el decisor puede insertar o eliminar niveles y/o elementos para que pueda aclarar la tarea de establecer prioridades.[21]

[20] Saaty, T.L. [1980:76-78].
[21] Saaty, T.L. [1994:96].

3.5. UN PROBLEMA ANALIZADO POR EL MÉTODO AHP

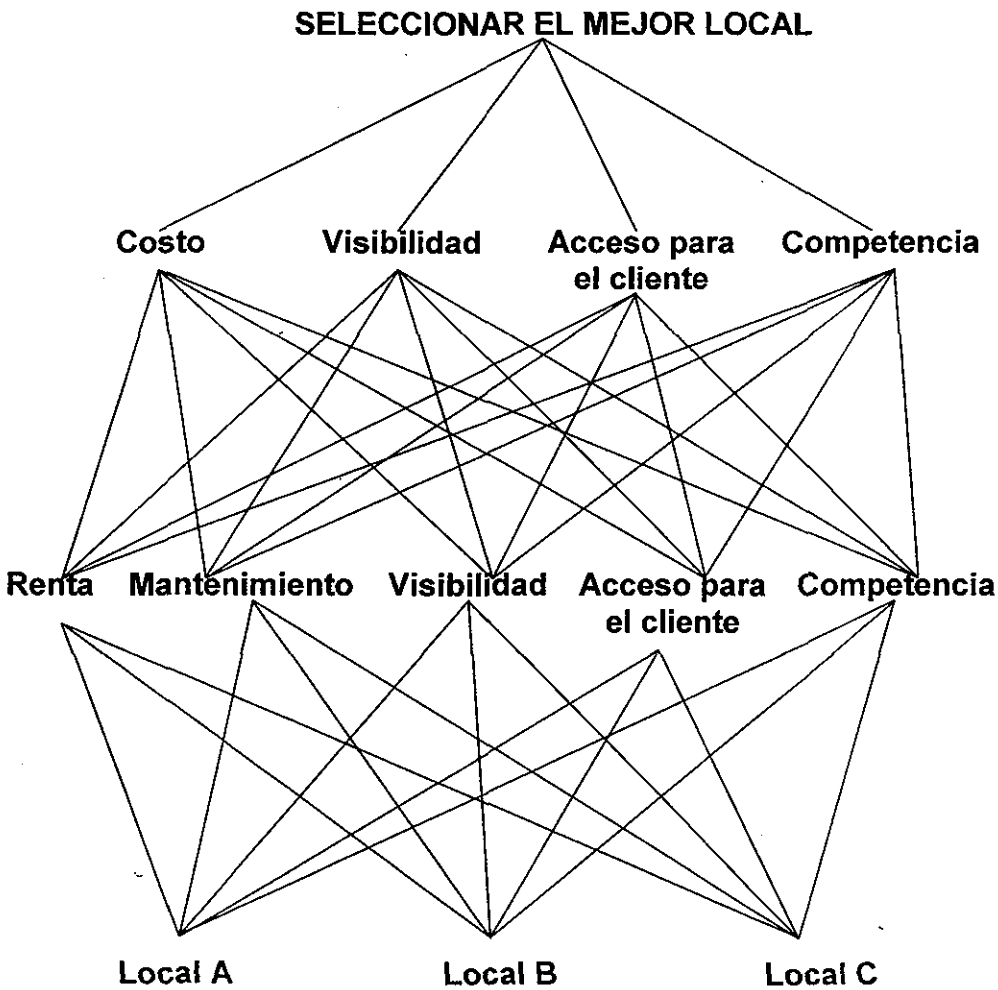
Un comerciante desea determinar la mejor ubicación de un local para la venta de helados y pasteles al menudeo, debe abastecer a la población joven y a las familias del sector. El comerciante cuenta con tres sitios alternativos A, B y C entre los que debe seleccionar el mejor de acuerdo con su calificación respecto a ciertos criterios que, según su opinión, tienen que ser tomados en consideración para la elección. Estos criterios cuyas calificaciones varían dependen de la ubicación del local, los que son: el COSTO de la inversión, la VISIBILIDAD, el ACCESO PARA EL CLIENTE y la COMPETENCIA que existe. Al analizar el problema profundamente, el comerciante decide que es mejor tomar en cuenta los factores (subcriterios) RENTA y MANTENIMIENTO que contribuyen al elemento COSTO de los criterios, aunque no contribuyen a los elementos VISIBILIDAD, ACCESO PARA EL CLIENTE y COMPETENCIA. Entonces la jerarquía que representa su problema es *incompleta* como se muestra en la figura 3.4.

Figura 3.4: La jerarquía de la selección del mejor local (Incompleta)



Observe que los elementos VISIBILIDAD, ACCESO PARA EL CLIENTE y COMPETENCIA del nivel dos no están ligados a los del nivel tres. Esta jerarquía se puede transformar en otra equivalente que sea *completa,* añadiendo al nivel tres, elementos ficticios duplicados de los mencionados y estableciendo las ligas faltantes para que la jerarquía sea completa. Los elementos ficticios se ligan a sus iguales del nivel dos con prioridad uno y al resto de los elementos del nivel dos con prioridad cero. A los nuevos vínculos de los elementos ya existentes del nivel tres con los del nivel dos se asigna prioridad cero. De esta manera, resulta la jerarquía completa equivalente de la figura 3.5.

Figura 3.5: La jerarquía de la selección del mejor local (Completa)



3.5.1 **Priorización**

En esta etapa se deben establecer los pesos de cada elemento de la jerarquía respecto a los elementos en el nivel inmediato superior.

En la formación de la matriz de comparaciones de los elementos del segundo nivel respecto al objetivo principal, el negociante considera, que el costo es dos veces más relevante que el hecho de que el local sea visible.

Procediendo de esta manera, se completa la matriz de comparaciones que se muestra a continuación, a la que se anexan los valores del vector característico (vector de prioridades) correspondientes, el principal valor propio, $\lambda_{máx}$, el índice de consistencia, IC y la razón de consistencia, RC.

Seleccionar el mejor local	Costo	Visibilidad	Acceso para el cliente	Competencia	Vector de prioridades
Costo	1	2	1	4	0.3847
Visibilidad	1/2	1	2	2	0.2721
Acceso para el cliente	1	1/2	1	2	0.2288
Competencia	1/4	1/2	1/2	1	0.1144

$$\lambda_{máx} = \mathbf{4.1836} \qquad \mathbf{IC = 0.0612} \qquad \mathbf{RC = 0.0688 < 0.1}$$

Por lo tanto $\mathbf{B}_2 = [0.39\ 0.27\ 0.23\ 0.11]^t$ donde 0.39, 0.27, 0.23 y 0.11 representan las prioridades relativas del los elementos COSTO, VISIBILIDAD, ACCESO PARA EL CLIENTE y COMPETENCIA respectivamente al objetivo principal (SELECCIONAR EL MEJOR LOCAL).

La matriz de comparaciones de los elementos de RENTA y MANTENIMIENTO del nivel tres al elemento COSTO del segundo nivel es:

Costo	Renta	Mantenimiento	Vector de prioridades
Renta	1	2	0.6667
Mantenimiento	1/2	1	0.3333

$$\lambda_{máx} = 2 \qquad IC = 0 \qquad RC = 0 < 0.1$$

Recuérdese que se ligan los elementos RENTA y MANTENIMIENTO a los elementos VISIBILIDAD, ACCESO PARA EL CLIENTE y COMPETENCIA del nivel dos de manera ficticia, entonces, se les asigna prioridad cero. Además los elementos VISIBILIDAD, ACCESO PARA EL CLIENTE y COMPETENCIA del nivel tres son ficticios, entonces, se ligan a sus iguales del nivel dos con prioridad uno y al resto de los elementos del nivel dos con prioridad cero.

Por lo tanto se puede representar $\mathbf{B}_3$ por la matriz:

$$\begin{array}{l} \\ \textbf{Renta} \\ \textbf{Mantenimiento} \\ \textbf{Visibilidad} \\ \textbf{Acceso para el cliente} \\ \textbf{Competencia} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textbf{Costo} & \textbf{Visibilidad} & \textbf{Acceso para el cliente} & \textbf{Competencia} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nótese que cada columna tiene la suma uno.

En la ponderación de los elementos del nivel cuatro respecto al nivel tres, vale la pena destacar que los elementos RENTA y MANTENIMIENTO son criterios tangibles y cuantificables, por lo tanto, la obtención del vector de prioridades de los elementos del nivel cuatro respecto a estos criterios puede realizarse de dos maneras:

1. La forma por vía directa, es decir, los costos se normalizan en forma de razones. Como son más deseables los costos menores, entonces se normalizan los inversos de estos números.

   Los costos correspondientes a RENTA y MANTENIMIENTO de los locales alternativos son los que aparecen en el siguiente cuadro:

	(en millones de pesos)	
	Renta	**Mantenimiento**
Local A	5	1
Local B	7.5	2
Local C	2.8	0.8

En el caso de la ponderación de los locales respecto a la RENTA se procede de la siguiente manera:

Local A: (1/5)/(1/5) + 1/7.5 + 1/2.8) = 0.290

Local B: (1/7.5)/(1/5) + 1/7.5 + 1/2.8) = 0.193

Local C: (1/2.8)/(1/5) + 1/7.5 + 1/2.8) = 0.517

Similarmente, respecto al MANTENIMIENTO,

Local A: (1/1)/(1/1) + 1/2 + 1/0.8) = 0.364

Local B: (1/2)/(1/1) + 1/2 + 1/0.8) = 0.182

Local C: (1/0.8)/(1/1) + 1/2 + 1/0.8) = 0.454

2. La forma a través de matrices de comparaciones por pares, es decir, de manera similar a la que se siguió en el nivel tres. En este caso, respecto a la RENTA, el LOCAL C es 1.8 veces más preferido que el LOCAL A y 2.7 veces más que el LOCAL B. Además, el LOCAL A es 1.56 más preferido que el LOCAL B. Analizando en forma análoga respecto al MANTENIMIENTO, resultan las matrices de comparaciones de los locales respecto a la RENTA y MANTENIMIENTO siguientes:

Renta	Local A	Local B	Local C	Vector de prioridades
Local A	1	1.56	1/1.8	0.291
Local B	1/1.56	1	1/2.7	0.190
Local C	1.8	2.7	1	0.519

$\lambda_{máx} = 3$ **IC = 0** **RC = 0 < 0.1**

Mantenimiento	Local A	Local B	Local C	Vector de prioridades
Local A	1	2	1/1.25	0.364
Local B	1/2	1	1/2.5	0.182
Local C	1.25	2.5	1	0.454

$\lambda_{\text{máx}} = 3$ IC = 0   RC = 0 < 0.1

Nótese que los valores de los vectores de prioridades de estas matrices coinciden con los obtenidos por la forma directa.

Las matrices de comparaciones de los locales respecto al resto de los criterios del tercer nivel son las siguientes:

Visibilidad	Local A	Local B	Local C	Vector de prioridades
Local A	1	1/2	1	0.250
Local B	2	1	2	0.500
Local C	1	1/2	1	0.250

$\lambda_{\text{máx}} = 3$ IC = 0   RC = 0 < 0.1

Acceso para el cliente	Local A	Local B	Local C	Vector de prioridades
Local A	1	6	4	0.691
Local B	1/6	1	1/3	0.091
Local C	1/4	3	1	0.218

$\lambda_{\text{máx}} = 3.054$ IC = 0.027   RC = 0.052 < 0.1

Competencia	Local A	Local B	Local C	Vector de prioridades
Local A	1	1/3	1/2	0.157
Local B	3	1	3	0.594
Local C	2	1/3	1	0.249

$\lambda_{\text{máx}} = 3.054$ IC = 0.027   RC = 0.052 < 0.1

Por lo tanto se puede representar $\mathbf{B}_4$ por la matriz:

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \textbf{Renta} & \textbf{Mantenimiento} & \textbf{Visibilidad} & \textbf{Acceso para el cliente} & \textbf{Competencia} \\
\textbf{Local A} & 0.29 & 0.36 & 0.25 & 0.69 & 0.16 \\
\textbf{Local B} & 0.19 & 0.18 & 0.50 & 0.09 & 0.59 \\
\textbf{Local C} & 0.52 & 0.46 & 0.25 & 0.22 & 0.25
\end{array}
$$

3.5.2 **Síntesis de prioridades**

Para obtener las prioridades relativas globales de las alternativas (los locales A, B, C) respecto al objetivo principal del problema (seleccionar el mejor local) se calcula el vector normalizado producto $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_3\mathbf{B}_2 = [0.37\ 0.29\ 0.34]^t$.
Esto es, de acuerdo con los atributos señalados por el negociante y las preferencias manifestadas, los pesos relativos globales de los locales A,B, y C respecto a la mejor ubicación de la venta de helados y pasteles son 37%, 29% y 34% respectivamente, lo que implica, que el LOCAL A es el más indicado para la ubicación del negocio.

"La capacidad de decidir es uno de los atributos más altos del ser humano. La calidad de las decisiones frecuentemente hace la diferencia entre el éxito y el fracaso."
--- Roberto Ley Borrás.

4

ANÁLISIS DEL AHP

4.1. VISIÓN GENERAL DEL MÉTODO AHP

Tomando en cuenta la naturaleza de los problemas de decisiones multicriterio, el método AHP los descompone en subproblemas, que dependen de su complejidad y los ordena en una jerarquía con varios niveles. El propósito de esto es simplificar la solución del problema inicial. La forma más común de una jerarquía consiste en colocar la meta global en el nivel superior, las alternativas en el nivel inferior y los criterios y subcriterios en los niveles intermedios.

Sea Ψ, $\Psi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, un conjunto de elementos de un nivel de la jerarquía y C un criterio, punto de vista o propiedad de estos elementos en los que una persona $\mathcal{P}$ está interesada, por ejemplo, Ψ puede ser un conjunto de coches y C su comodidad. El AHP tiene como primera tarea, ayudar a la persona $\mathcal{P}$ a cuantificar las prioridades (o importancias) relativas de los elementos de Ψ con respecto al criterio C.

Dicha tarea se realiza haciendo con la persona $\mathcal{P}$ comparaciones por pares de los elementos de Ψ respecto al criterio C. Sus juicios expresan numéricamente usando la escala fundamental mostrada en la tabla 3.1 del capítulo 3.

Las prioridades de los elementos de Ψ se obtienen asignándole un número, a_{ij}, a cada par de elementos x_i, x_j de Ψ. Esta asignación representa la prioridad del elemento dominante (x_i) con respecto al otro elemento (x_j) según la opinión de la persona $\mathcal{P}$. (Véase la sección 3.4 del capítulo 3)

Los números a_{ij} son los elementos de una matriz recíproca positiva que tiene un renglón y una columna para cada elemento $x_1, x_2, ..., x_n$ de Ψ, dicha matriz se denomina **matriz de comparación**. En la intersección del renglón x_i con la columna x_j está el número a_{ij} si x_i domina a x_j, $1/a_{ij}$ si x_j domina a x_i y el número 1 si ni x_i domina a x_j, ni x_j domina a x_i.

Por ejemplo, si se supone que para toda i, j = {1, 2, ..., n}, x_i domina a x_j, si y sólo si $i < j$, el formato de la matriz recíproca positiva será:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para la ponderación, $w(x_i)$,de cada elemento x_i, el AHP calcula el valor característico máximo de la matriz **A** y se determina su correspondiente vector característico (normalizado) cuyos componentes son los $w(x_i)$ y la escala numérica w, que es una función real, $w: \Psi \rightarrow \mathbb{R}$, es una escala de razón.

El procedimiento del valor característico máximo tiene una propiedad interesante: si los juicios de la persona $\mathcal{P}$ son tales que $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ para toda $i < j < k$ (la condición de consistencia cardinal), los $w(x_i)$ obtenidos son tales que $a_{ij} = w(x_i)/w(x_j)$ para toda $i < j$. Sin embargo, esta condición de consistencia raras veces se cumple en la práctica. En particular, no se cumple cada vez que $a_{ij} \cdot a_{jk} > 10$. Debido a esto, T.L. Saaty, concibió una "prueba de consistencia" para evitar que se acepten prioridades cuyo nivel de inconsistencia es alto. Se define un índice para medir el nivel de inconsistencia de la matriz **A** y una razón de consistencia, R.C. La inconsistencia puede considerarse un error tolerable sólo cuando esta razón sea menor de 0.10 (10%); de lo contrario, la inconsistencia influiría en el resultado con un error considerable, y se deben reexaminar las comparaciones que constituyen la matriz **A**. Se aplica este procedimiento descrito iniciando de la parte inferior de la jerarquía hacia la parte superior y se calcula el correspondiente vector de prioridades para cada nivel de la jerarquía. Finalmente, se sintetiza esta información para tener un vector de prioridades global, es decir, el vector de prioridades para todas las alternativas respecto de la meta global.

El AHP ha tenido muchas aplicaciones en el mundo real y sigue siendo uno de los métodos de decisiones multicriterio más usados. No obstante, en paralelo a este éxito, el AHP ha sido criticado en la literatura desde varias perspectivas y por muchos especialistas en la materia, los mas importantes; Watson, S.R. y Freeling, A.N.S. [1982, 1983], Belton, V. [1986], French, S. [1988], Murphy, K.K. [1993], Salo, A. y Hämäläinen, R. [1993], Barzilai, J. [1997], Robins, E.S. [1997, 1998, 2001], Bana e Costa, C. y Vansnick, J-C. [2001]. Es importante señalar que ningún método de decisiones multicriterio es perfecto; todos tienen sus ventajas y desventajas. Los usuarios no deben limitarse a saber como se trabaja un método, sino también conocer sus limitaciones, para que sepan como aplicarlo y puedan interpretar la solución del problema; de lo contrario, el método solo serviría para satisfacer ambiciones académicas, en lugar de proporcionar una ayuda real para el o los tomadores de la decisión. Además, con el conocimiento de las ventajas y desventajas de los métodos, se estará en una buena posición para elegir el más conveniente, de acuerdo con las características e información que se tenga del problema.

A continuación, se analiza el método AHP con el fin de que los usuarios (analistas de sistemas) del método conozcan los errores en que pueden incurrir sino se toman en cuenta sus fallas estructurales.

4.2. RELACIÓN DEL MÉTODO AHP CON LA TEORÍA DE VALOR ADITIVO

Aunque T.L. Saaty, no presentó el método AHP dentro de la teoría del valor aditivo (descrita en la sección 2.4 del capítulo 2) cuando lo desarrolló[1], su estructura está sustentada en ella, por eso se empezará analizando ésta situación.

Supóngase:

- Que ya se ha construido una jerarquía, y que se puede representar cada alternativa como un vector de h dimensiones de los niveles de la jerarquía: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_h)$

- Además que se pueden representar las preferencias del decisor por una función de valor aditiva:

$$v(a) = w_1 v_1(a_1) + w_2 v_2(a_2) + \ldots + w_h v_h(a_h)$$

- Que las funciones $v_1(.)$, $v_2(.)$, ..., $v_h(.)$ son estrictamente positivas. Se introducen las ponderaciones de valores reales, w_1, w_2, ..., w_h, a la función de valor aditiva, ya que el método AHP evalúa separadamente las

[1] Véase French, S. [1988:357].

funciones de valor marginales $v_1(.)$, $v_2(.)$, ..., $v_h(.)$ y luego las representa en la misma escala usando las mismas ponderaciones.

Esta representación implica que el método AHP debe cumplir todas las suposiciones de la teoría de valor aditivo, sin embargo:

- **Las funciones de valor aditivo y las componentes de las funciones de valor marginales son escalas de intervalos, mientras que en la construcción de las matrices recíprocas positivas sus elementos son escalas de proporciones (razones).**[2] La conclusión de esto es que el AHP está basado en suposiciones más estrictas que las de la teoría de valor aditivo.

- Antes de aplicar el método AHP es necesario, comprobar que se cumpla la condición de independencia preferencial, pero casi nunca lo hacen los usuarios del método. En la sección 2.3 del capítulo 3 se describe esta condición y se presentan ejemplos donde se evidencia el problema que ocasiona el hecho de que no se cumpla este axioma.

4.3. INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS IRRELEVANTES

Para empezar, aclaramos la condición de independencia de las alternativas irrelevantes. Considere una *tabla de decisión* bajo incertidumbre con *estados de naturaleza* θ_j, alternativas a_i (una tabla de m alternativas por n estados) y los estimados de consecuencias e_{ij}.[3] Se muestra esta tabla como la tabla 4.1.

---

[2] Véase French, S. [1988:359].

[3] Los problemas de decisiones bajo incertidumbre se pueden representar en una tabla de decisión. La idea que subyace es que la consecuencia de cualquier alternativa es determinada no sólo por la alternativa misma sino también por factores externos. Estos factores externos están más allá del control del decisor y son desconocidos por él al momento de la decisión. Por un estado de la naturaleza o estado del mundo, se entenderá como la descripción completa de estos factores externos. Se llama estado verdadero al estado que ocurriere realmente. Aunque el decisor no sabe el estado verdadero, sabe que estados son posibles.

Tabla 4.1: Tabla de decisión

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & \multicolumn{4}{c}{\text{Estados de naturaleza}} \\
 & & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\
\hline
 & a_1 & e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\
\text{Alternativas} & a_2 & e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & a_m & e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mn}
\end{array}
$$

Se puede construir una segunda tabla de la primera simplemente añadiendo una alternativa extra. Así la segunda tabla es de (m + 1) alternativas por n estados, y

$$e'_{ij} = e_{ij} \text{ para } 1 \leq i \leq m \text{ y } 1 \leq j \leq n$$

$e'_{(m+l)j}$, para $1 \leq j \leq n$, pueden tomar cualquier valor numérico. Entonces una regla de decisión debe asignar los valores E y E' respectivamente a las alternativas en las dos tablas tales que para cualquier $1 \leq i, k \leq m$:

$$E_i > E_k \text{ si y sólo si } E'_i > E'_k;$$

es decir, **una regla de decisión debe llevar a la misma clasificación de las primeras *m* alternativas en ambas tablas**.

Belton, V. y Gear, A. [1983] mostraron que el AHP no cumple esta condición de independencia de las alternativas irrelevantes. El decisor puede evaluar las matrices, pero si se quita una de las alternativas del problema o se añade otra puede causar la llamada *inversión de rango*.[4]

4.3.1 Un ejemplo de inversión de rango usando el AHP

Dos productos A y B son evaluados de acuerdo con dos criterios, P y Q, como en las matrices siguientes:

---

[4] El término *inversión de rango* se refiere al cambio del ordenamiento original de las alternativas como resultado de añadir nueva(s) alternativa(s) al problema o quitar una(s) alternativa(s) existente(s) del problema. Véase el ejemplo en la sección 4.3.1.

P	A	B	Prioridades
A	1	5	0.83
B	1/5	1	0.17

Q	A	B	Prioridades
A	1	1/3	0.25
B	3	1	0.75

La síntesis da los pesos relativos globales, 54.2% y 45.8% para los productos A y B respectivamente, lo que implica, que se prefiere A a B.

Un tercer producto C se introduce luego y se lo compara con A y B de la siguiente manera:

P	A	B	C	Prioridades
A	1	5	1	0.455
B	1/5	1	1/5	0.090
C	1	5	1	0.455

Q	A	B	C	Prioridades
A	1	1/3	2	0.22
B	3	1	6	0.67
C	1/2	1/6	1	0.11

Los pesos relativos globales son, 33.8%, 37.9% y 28.3% para los productos A, B y C respectivamente. Aquí se prefiere B a A, es decir, se dio una inversión de rango.

4.4. CONSTRUCCIÓN DE LAS MATRICES DE COMPARACIÓN

Para construir las matrices de comparación, el decisor tiene que comparar dos elementos de un nivel respecto de un elemento del nivel inmediatamente superior y hacer juicios según la escala fundamental (tabla 3.1 del capítulo 3). La cuestión es si las preguntas que el decisor tiene que contestar son significativas, esto es, si se puede dar una respuesta sustantiva operacional a frases como "tiene *fuerte importancia* a" o "tiene *extrema importancia* a" que se usan en la escala fundamental. Véase también Watson, S.R. y Freeling, A.N.S. [1982, 1983].

Además, Robins, E.S. [2001] menciona que es imposible que la capacidad del ser humano mantenga la consistencia y sea independiente en hacer juicios sobre un gran número de comparaciones por pares. Sin embargo, muchos problemas reales tratan de un gran número de comparaciones, ya que con n elementos se necesitan ${}_nC_2$ comparaciones; por ejemplo, cuando hay 4 elementos, se necesita 6 comparaciones, cuando hay 5, se necesita 10 comparaciones, cuando hay 6, se necesita 15 comparaciones, ..., cuando hay 9 elementos, se necesita 36 comparaciones, etc. Por otra parte, la evidencia psicológica indica que el ser humano no puede ser consistente cuando haya más de 5–9 comparaciones,[5] lo que implica que **idealmente se puede usar el AHP solamente cuando los elementos en cada uno de los niveles no exceden a 4**, que es raro para un problema real de decisiones multicriterio. Diversos investigadores han propuesto varias maneras (algoritmos) de reducir este efecto. No importa lo que se haga, si es por el procedimiento normal del AHP, el hacer juicios a través de comparaciones por pares, o utilizando los otros algoritmos propuestos, habrá problemas. De cualquier manera, es importante señalar que siempre estamos propensos a cometer errores y nuevamente insistir en que ningún método es perfecto.

Otro asunto que se encuentra al construir matrices de comparación, es que el decisor está forzado a cumplir la condición recíproca, es decir, si piensa que el elemento x_i es a_{ij} veces más importante o preferida que x_j, entonces, automáticamente él tiene que aceptar que x_j es $1/a_{ij}$ más importante o preferida que x_i, problema que se ejemplifica en el siguiente apartado.

4.5. LIMITACIÓN DE LA ESCALA FUNDAMENTAL

Considere la situación por la cual los elementos x_i, x_j y x_k de Ψ son tales que x_i domina a x_j 7 veces, es decir, $a_{ij} = 7$, y x_j domina a x_k 5 veces, es decir, $a_{jk} = 5$. En tal caso, se esperaría que x_i domina a x_k $7 * 5$ veces (35 veces), es decir, $a_{ik} = 35$, que está fuera del alcance de la escala fundamental. Por lo tanto, la limitación de la escala fundamental en sí misma y no por la inconsistencia humana, puede introducir inconsistencias, esto se ve en un problema que ha sido destacado por muchos autores, como se puede ver en Murphy, K.K. [1993].

Además, según la escala fundamental, la proporción de la importancia de un elemento a otro solamente puede ser de 1:1, 1:2, 1:3, ..., 1:8, 1:9. En una escala de porcentaje, esto es 100%(1.1), 50%(1:2), 33.3%(1:3), ..., 12.5%(1:8), 11.1%(1:9). Se puede ver como las diferencias en porcentajes, dicha proporción va disminuyendo. ¡Así es la manera en que la gente piensa en realidad como los pioneros del AHP afirman!

4.6. CONDICIÓN DE MEDICIÓN FUNDAMENTAL

Una condición de racionalidad y coherencia con respecto a la medición fue introducida por Bana e Costa, C. y Vansnick, J-C. [2001] y la llamaron *condición de medición fundamental*, la cual se enuncia de la siguiente manera:

[5] Robins, E.S. [2001].

Condición de medición fundamental: *Para todos los elementos* ***a, b, c, d*** *tal que* ***a*** *domina a* ***b*** *y* ***c*** *domina a* ***d*** (*según la persona* $\mathcal{P}$ *y el criterio* $\mathcal{C}$); *si los juicios de* $\mathcal{P}$ *indica que el grado lo cual* ***a*** *domina a* ***b*** *es mayor que el grado lo cual* ***c*** *domina a* ***d****, entonces el vector de prioridades* $w: \Psi \rightarrow \mathbb{R}$ *debe ser tal que:*

$$\frac{w(a)}{w(b)} > \frac{w(c)}{w(d)}$$

El AHP no siempre cumple la condición de medición fundamental, lo que se demuestra a continuación. A veces, no existe una escala numérica compatible con los juicios de $\mathcal{P}$ y que simultáneamente cumpla dicha condición. Es importante identificar estas situaciones de incompatibilidad para hacer un intercambio de opiniones con la persona $\mathcal{P}$ y revisar los juicios. Como complemento, se demuestra también que **la razón de consistencia del AHP, R.C., no es adecuada para identificar tales situaciones, ya que su valor puede ser menor cuando no se cumpla la condición de medición fundamental que cuando se cumpla.** (Bana e Costa, C. y Vansnick, J-C. [2001])

4.6.1 Ejemplos que no cumplen la condición de medición fundamental

4.6.1.1 Ejemplo 1

Sea $\Psi = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ un conjunto de elementos. A través de comparaciones por pares entre estos elementos, la persona $\mathcal{P}$ hizo los siguientes juicios:

(x_1, x_2)	x_1 domina a x_2	igual a dominancia moderada
(x_1, x_3)	x_1 domina a x_3	dominancia moderada
(x_1, x_4)	x_1 domina a x_4	dominancia fuerte
(x_1, x_5)	x_1 domina a x_5	dominancia extrema
(x_2, x_3)	x_2 domina a x_3	igual a dominancia moderada
(x_2, x_4)	x_2 domina a x_4	moderada a dominancia fuerte
(x_2, x_5)	x_2 domina a x_5	dominancia extrema
(x_3, x_4)	x_3 domina a x_4	igual a dominancia moderada
(x_3, x_5)	x_3 domina a x_5	muy fuerte a dominancia extrema
(x_4, x_5)	x_4 domina a x_5	muy fuerte dominancia.

Estos juicios corresponden, según la tabla 3.1 del capítulo 3, a la siguiente matriz recíproca positiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1/2 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 8 \\ 1/5 & 1/4 & 1/2 & 1 & 7 \\ 1/9 & 1/9 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo vector característico derecho (normalizado) correspondiente a su valor característico máximo dado por el software *Expert Choice* es:

$$[0.426 \ \ 0.281 \ \ 0.165 \ \ 0.101 \ \ 0.027]^t.$$

Esto es, que dados los juicios de $\mathcal{P}$, las prioridades por el método de AHP son:

$$w(x_1) = 0.426,\ w(x_2) = 0.281,\ w(x_3) = 0.165,\ w(x_4) = 0.101,\ w(x_5) = 0.027.$$

En particular, $w(x_1)/ w(x_4) = 4.2178$ y $w(x_4)/ w(x_5) = 3.7407$, es decir, que $w(x_1)/ w(x_4) > w(x_4)/ w(x_5)$.

No obstante, como los juicios de $\mathcal{P}$ indican que x_4 domina muy fuerte a x_5 y x_1 domina fuerte a x_4, se puede afirmar que x_4 domina a x_5 más que x_1 domina a x_4.

Por lo tanto, en este ejemplo, el vector de prioridades proporcionado por el método de AHP no cumple la condición de medición fundamental.

Además, es interesante hacer notar que la R.C. dada por el software *Expert Choice* es 0.05, que es menor significativamente que el umbral 0.10, entonces, según el método AHP, no hay necesidad de revisar los juicios en este caso.

4.6.1.2 Ejemplo 2

Sea $\Psi = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un conjunto de elementos. A través de comparaciones por pares entre estos elementos, la persona $\mathcal{P}$ hizo los siguientes juicios:

(x_1, x_2)	x_1 domina a x_2 2.5 veces más
(x_1, x_3)	x_1 domina a x_3 4 veces más
(x_1, x_4)	x_1 domina a x_4 9.5 veces más
(x_2, x_3)	x_2 domina a x_3 3 veces más
(x_2, x_4)	x_2 domina a x_4 6.5 veces más
(x_3, x_4)	x_3 domina a x_4 5 veces más.

Estos corresponden a la siguiente matriz recíproca positiva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 4 & 9.5 \\ 1/2.5 & 1 & 3 & 6.5 \\ 1/4 & 1/3 & 1 & 5 \\ 1/9.5 & 1/6.5 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo vector característico derecho (normalizado) correspondiente a su valor característico máximo dado por el software *Expert Choice* es:

$$[0.533 \;\; 0.287 \;\; 0.139 \;\; 0.041]^t.$$

Esto es, que dados los juicios de $\mathcal{P}$, las prioridades por el método de AHP son:

$$w(x_1) = 0.533,\ w(x_2) = 0.287,\ w(x_3) = 0.139,\ w(x_4) = 0.041.$$

Como se mencionó anteriormente, el procedimiento del valor característico máximo tiene la propiedad; que si los juicios de la persona $\mathcal{P}$ son tales que $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ para toda $i < j < k$ (la condición de consistencia cardinal), los $w(x_i)$ obtenidos son tales que $a_{ij} = w(x_i)/w(x_j)$ para toda $i < j$. La tabla 4.2 presenta los valores numéricos a_{ij} dados por $\mathcal{P}$ en el ejemplo 2, junto con sus valores respectivos de la razón $w(x_i)/w(x_j)$ para toda $i,j \in \{1,2,3,4\}$ tal que $i < j$.

Tabla 4.2: Valores de a_{ij} y $w(x_i)/w(x_j)$ para el ejemplo 2

Par	a_{ij}	$w(x_i)/w(x_j)$
(x_1, x_2)	2.5	1.857
(x_1, x_3)	4	3.835
(x_1, x_4)	9.5	13
(x_2, x_3)	3	2.065
(x_2, x_4)	6.5	7
(x_3, x_4)	5	3.390

El hecho que los valores de a_{ij} y $w(x_i)/w(x_j)$ no sean iguales era de esperarse porque estos primeros no son consistentes; pero llama la atención que su orden no es coherente [en particular ver el caso de los pares (x_1, x_3) y (x_3, x_4)]. Ciertamente, según los juicios de la persona $\mathcal{P}$, se puede afirmar que la dominancia de x_3 sobre x_4 ($a_{ij} = 5$) es mayor que la dominancia de x_1 sobre x_3 ($a_{ij} = 4$); pero:

$$w(x_3)/\,w(x_4) = 3.390 \;<\; w(x_1)/\,w(x_3) = 3.835.$$

Por lo tanto, también en el ejemplo 2, el vector de prioridades proporcionado por el método de AHP no cumple la condición de medición fundamental.

Además, la R.C. dada por el software *Expert Choice* es 0.05, que es menor significativamente que el umbral 0.10, entonces, según el método AHP, tampoco hay necesidad de revisar los juicios en este caso.

4.6.1.3 Ejemplo 3

Este ejemplo es presentado por el mismo Saaty, T.L.[6] En él presenta la matriz de los juicios de las comparaciones por pares del *Producto Nacional Bruto* (PNB) de los siete países (EE.UU., Rusia, China, Francia, RU, Japón y Alemania Occidental). Las prioridades dadas por el AHP de esta matriz están cercanas excepcionalmente a los valores normalizados del PNB. La matriz de comparaciones por pares dada es:

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{EE.UU.} \\
\text{Rusia} \\
\text{China} \\
\text{Francia} \\
\text{RU} \\
\text{Japón} \\
\text{Alemania Occidental}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
\text{EE.UU.} & \text{Rusia} & \text{China} & \text{Francia} & \text{RU} & \text{Japón} & \text{Alemania Occidental}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 4 & 9 & 6 & 6 & 5 & 5 \\
1/4 & 1 & 7 & 5 & 5 & 3 & 4 \\
1/9 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/7 & 1/5 \\
1/6 & 1/5 & 5 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \\
1/6 & 1/5 & 5 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \\
1/5 & 1/3 & 7 & 3 & 3 & 1 & 2 \\
1/5 & 1/4 & 5 & 3 & 3 & 1/2 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Las prioridades dadas por el software *Expert Choice* son:

> w(EE.UU.) = 0.427, w(Rusia) = 0.230, w(China) = 0.021, w(Francia) = 0.052, w(RU) = 0.052, w(Japón) = 0.123, w(Alemania Occidental) = 0.094.

Se pueden observar cinco infracciones de la condición de medición fundamental, aquí se muestran dos de ellas.

1. Según la matriz de comparaciones por pares, refleja que EE.UU. domina a Rusia (4 veces) más que Japón a Francia (3 veces); pero:
   w(EE.UU.)/ w(Rusia) = 1.857 $<$ w(Japón)/ w(Francia) = 2.365.

[6] Saaty, T.L. [1980:40-41].

2. También ésta matriz refleja que Japón domina a China (7 veces) más que EE.UU. a RU (6 veces); pero:
   w(Japón)/ w(China) = 5.857 < w(EE.UU.)/ w(RU) = 8.212.

Además, vale la pena mencionar que la R.C. dada por el software *Expert Choice* es 0.08, que es menor que el umbral 0.10, entonces, según el método AHP, tampoco hay necesidad de revisar los juicios en este ejemplo.

4.6.2 Discusión sobre la significación de la razón de consistencia, R.C.

En está sección hacemos una discusión del valor de la R.C., por ejemplo, que es imposible satisfacer la condición de medición fundamental, es decir, que no existe una escala de proporción (razón) compatible con los juicios de la persona $\mathcal{P}$.

Sea $\Psi = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ un conjunto de elementos. A través de comparaciones por pares entre estos elementos, la persona $\mathcal{P}$ hizo los siguientes juicios:

(x_1, x_2)	x_1 domina a x_2	igual a dominancia moderada
(x_1, x_3)	x_1 domina a x_3	dominancia fuerte
(x_1, x_4)	x_1 domina a x_4	muy fuerte dominancia
(x_1, x_5)	x_1 domina a x_5	dominancia extrema
(x_2, x_3)	x_2 domina a x_3	igual a dominancia moderada
(x_2, x_4)	x_2 domina a x_4	dominancia moderada
(x_2, x_5)	x_2 domina a x_5	muy fuerte dominancia
(x_3, x_4)	x_3 domina a x_4	dominancia moderada
(x_3, x_5)	x_3 domina a x_5	dominancia fuerte
(x_4, x_5)	x_4 domina a x_5	igual a dominancia moderada.

Para este conjunto de juicios, es imposible cumplir la condición de medición fundamental. Para que esto sea posible, se debe tener simultáneamente:

$$w(x_1)/\,w(x_3) > w(x_2)/\,w(x_4), \tag{4.1}$$

porque los juicios de $\mathcal{P}$ resulta que x_1 domina a x_3 (muy fuerte) más que x_2 domina a x_4 (dominancia moderada); y

$$w(x_3)/\,w(x_4) > w(x_1)/\,w(x_2), \tag{4.2}$$

porque los juicios de $\mathcal{P}$ resulta que x_3 domina a x_4 (dominancia moderada) más que x_1 domina a x_2 (igual a dominancia moderada).

Sin embargo, es indudable que las desigualdades (4.1) y (4.2) son mutuamente excluyentes ya que si se las multiplican, se obtiene la contradicción de que $w(x_1)/w(x_4) > w(x_1)/w(x_4)$.

A pesar de que en este caso es imposible satisfacer la condición de medición fundamental es interesante hacer notar que la R.C. dada por el software *Expert Choice* es 0.03, cerca de 0.00, que es la R.C. para consistencia perfecta según el método AHP.

Robins, E.S. [1997] proporciona una buena discusión sobre la causa en la que la razón de consistencia, R.C. fracasa como un indicador de la inconsistencia. El método AHP supone que la razón de consistencia es independiente del orden de la matriz, es decir, que se puede conseguir la R.C. menor de 0.1 cuando se comparan tres criterios en la misma manera como cuando se compara nueve o más criterios. Sin embargo, es lógico que con el aumento del número de criterios (el aumento del orden de la matriz de comparación), lo más probable es que se genera una matriz con grado más alto de inconsistencia. Aquí el punto principal es que la R.C. está basada en el promedio aleatorio obtenido como un promedio sobre un gran número de matrices recíprocas del mismo orden cuyas entradas son aleatorias, usando la misma escala de 1 a 9, llamado el índice aleatorio. Se debe destacar que **el uso de los promedios en este caso fuera adecuado si y sólo si la distribución de los índices de consistencia aleatorios fueran normales. No obstante, esta distribución está lejos de la normal.**

Robins, E.S. y su corporación de *Arlington* corrieron un gran número de simulaciones utilizando MATLAB 5.1 para medir la probabilidad que la R.C. logre ser menor de 0.1 para matrices a partir del orden 3. Detuvieron el proceso en el orden 7, simplemente porque no encontraron razón para continuar, ya que se necesitaron más de 39 millones corridas de matrices del orden 7 para generar solamente 33 matrices que tenían R.C. ≤ 0.1. Los resultados de este experimento se muestran en la tabla 4.3.

Tabla 4.3: Comparación de los resultados experimentales y teóricos de que la R.C. ≤ 0.1 mientras el número de los criterios (el orden de la matriz) se aumenta

Orden de la matriz	Número de corridos total (a)	Número de corridos con R.C. ≤ 0.1 (b)	P(R.C. ≤ 0.1) experimental (b/a)	P(R.C. ≤ 0.1) teórica (en acuerdo con una distribución normal)
3	4,565	1000	2.19×10^{-1}	2.52×10^{-1}
4	34,762	1000	2.88×10^{-2}	1.07×10^{-1}
5	447,382	1000	2.24×10^{-3}	2.61×10^{-2}
6	11,236,616	1000	8.90×10^{-5}	2.45×10^{-3}
7	39,063,160	33	8.45×10^{-7}	1.29×10^{-4}

Según lo que se observa, no cabe duda que hay una gran dependencia del índice de consistencia (es decir, también la razón de consistencia) al orden de la matriz, algo que el método AHP no toma en cuenta. Si la probabilidad de obtener una R.C. menor de 0.1 depende del número de criterios (según la tabla 4.3), entonces es más posible que obtener tal consistencia sea conducida por el proceso del método mismo y sus limitaciones en lugar de las comparaciones genuinas del decisor. En tal caso, el AHP rige los juicios del decisor y no son los juicios del decisor que maneja el proceso y la obtención de las conclusiones finales.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se ha mostrado un panorama de los problemas de decisiones, específicamente decisiones multicriterio: sus parámetros, su esquema general y la teoría de decisiones que está orientada al análisis de estos problemas. El punto clave de este análisis es extraer al decisor sus preferencias, modelarlas y medirlas, que fue el tema del capítulo 2. De hecho, en principio, cada uno de los métodos de decisiones tiene que cumplir esta tarea. Se presentaron de manera breve varios métodos de decisiones multicriterio, nada más como introducción.

El interés principal del trabajo fue la presentación y el análisis del método multicriterio de AHP, que es uno de los métodos más conocidos y con muchas aplicaciones en el mundo real. El AHP consiste en un procedimiento muy elegante desde el punto de vista matemático, y se apoya en el programa de software denominado *Expert Choice*, que es muy amigable y bastante cómodo.

En el último capítulo se expusieron, para los analistas que proponen y aplican el método AHP, serios problemas que podrían hacer que las soluciones que da el método no sean, en efecto, las mejores. Las incongruencias del método las resumimos como sigue:

- El método AHP debe cumplir todas las suposiciones de la teoría de valor aditivo, sin embargo, está basado en suposiciones más estrictas que las de la teoría de valor aditivo.

- Generalmente, no se cumple la condición de independencia preferencial, por lo que se sugiere comprobarla al iniciar el método y si no se cumple, se tiene que reformular el problema hasta que cumpla dicha condición.

- El AHP no cumple la condición de independencia de las alternativas irrelevantes. En general, ésta condición es muy importante para cualquier método de decisión, si no se cumple, cuando se agregan alternativas irrelevantes o se suprime alguna, puede ocurrir la *inversión de rango.*

- La subjetividad de las preguntas que se hacen al decisor y sus respuestas (juicios) en la etapa de establecer las matrices de comparación, según la llamada escala fundamental, no son significativas. Se recomienda que esta escala y sus implicaciones sean bien explicadas al decisor antes del análisis.

- Por último, pero no por ello menos importante, no siempre el AHP cumple la condición de medición fundamental. Los tres ejemplos dados en la sección 4.6.1 demuestran este punto. No sólo que ninguno cumple la condición de medición fundamental, sino que también esta inconsistencia no fue señalada por la razón de consistencia, R.C. Vale la pena mencionar que se puede usar otra escala que cumpla esta condición en cada uno de los ejemplos de este capítulo (véase C. Bana e Costa y J-C. Vansnick [2001]).

El último ejemplo hipotético presentado en la sección 4.6.2 muestra un caso donde no es posible satisfacer la condición de medición fundamental. De hecho, contrario a los tres ejemplos anteriores, en este caso no se puede encontrar una escala que simultáneamente represente los juicios dados de la persona $\mathcal{P}$ y cumpla la condición de medición fundamental. Resulta sorprendente que la R.C. para este ejemplo fue 0.03, que es menor que la R.C. de cualquier de los tres anteriores, es decir, según el AHP este último ejemplo tiene más alto grado de consistencia en comparación con los anteriores.

Los ejemplos del capítulo anterior, tienen otra observación importante: contrario de lo que se esperaría, el valor de la razón de consistencia no revela la incompatibilidad entre el conjunto de juicios y la construcción de la escala de proporción (razón) en Ψ; o mejor dicho, no se puede confiar en la razón de *consistencia dada por el método AHP como un indicador de la inconsistencia*. Los usuarios, especialistas en la aplicación del método AHP, deben tomar en cuenta este hecho.

Por lo anterior encontramos importante recomendar que deban ampliarse las investigaciones sobre la escala adecuada para el método AHP.

Además, que se amplíe la investigación con vías de proporcionar un mejor indicador de la inconsistencia. Pueden revisarse algunos intentos en esta dirección, como por ejemplo, el índice de consistencia cuya escala es de 0 a 1, propuesta por la corporación de *Arlington* (ver Robins, E.S. [1998]).

ANEXO

A.1 ESQUEMA FORMAL DEL PROBLEMA DE DECISIONES

En general, un problema de decisiones cuenta con los siguientes elementos:

A.1.1 Un conjunto $\mathcal{A}$ de alternativas, generalmente finito.

El conjunto $\mathcal{A}$ debe presentar todos los cursos de acción (alternativas) posibles. Se puede definir el conjunto $\mathcal{A}$ por medio de la lista de sus elementos si $\mathcal{A}$ es finito y numerable; y por el establecimiento de las propiedades de sus elementos o restricciones matemáticas, si $\mathcal{A}$ es infinito o finito no numerable.

Se prohíbe que el decisor escoja una alternativa que no pertenezca al conjunto de elección en estudio. Si el decisor introduce una nueva alternativa es preciso, en principio, recomenzar el análisis con el nuevo conjunto de elección así constituido.

A.1.2 Un conjunto C de consecuencias de las alternativas del conjunto $\mathcal{A}$.
Como se suele hacer en casos de problemas de decisiones, cada uno de los conjuntos $\mathcal{A}$ y C es distinto, mutuamente excluyente y colectivamente exhaustivo (salvo indicación contraria), lo que implica que, uno y sólo uno de los elementos del conjunto C ocurre después de realizar cualquier alternativa del conjunto $\mathcal{A}$ y que, aun cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo, uno de los ellos debe de ocurrir ya que se presentan todas las alternativas posibles en el conjunto $\mathcal{A}$.

En el caso donde cada elemento de $\mathcal{A}$ excluye a todo otro elemento, se dice que el conjunto $\mathcal{A}$ está *globalizado.* Si a través de los resultados del proceso de decisión se hacen intervenir combinaciones de varios elementos de $\mathcal{A}$, entonces, el conjunto $\mathcal{A}$ está *fragmentado.*[1]

A.1.3 Un conjunto $\mathcal{E}$ de estimados de consecuencias.

Estas son consecuencias a priori, las creencias acerca de lo que pueden ser las consecuencias.

[1] Vincke, Ph. [1992:2].

A.1.4 Una función e denominada de estimados de consecuencias que va de los elementos del conjunto $\mathcal{A}$ al conjunto $\mathcal{E}$ de estimados de consecuencias contenido en C, es decir, una función $e : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$.

Los conjuntos mencionados se relacionan como sigue. La realización de cualquier alternativa $a \in \mathcal{A}$ implica que se realiza un cierto elemento de C, llamado *consecuencia del curso de acción a*[2], el cual en el momento de tomar la decisión no se conoce con certeza necesariamente, pero sí su estimado, $e(a) \in \mathcal{E}$. Con esta formalidad, resolver el problema de decisión consiste en encontrar aquella alternativa $a^* \in \mathcal{A}$, de modo que evaluada en la función de estimados de consecuencias sea la más preferible de todas, es decir, hallar $a^* \in \mathcal{A}$ tal que: $e(a^*) \succ e(a)\ \forall a \in \mathcal{A}$.[3]

Es posible que no exista una alternativa a* que cumpla esta condición, de que el estimado de la consecuencia de cualquier otro elemento de $\mathcal{A}$, no es preferido a $e(a^*)$, o que haya varios que la cumplan, en cuyo caso no se cuenta aún con la información suficiente para dar una solución única al problema.

Por otro lado, según sea la información que se tenga, será el conjunto de estimados de consecuencias $\mathcal{E}$, por lo que se pueden tener las siguientes clasificaciones:

1. Si el estimado $e(a)$ del conjunto $\mathcal{E}$, es tal que $e(a) \in C\ \forall a \in \mathcal{A}$, o sea, $\mathcal{E} = C$; se tiene el caso determinista y la toma de decisiones se denomina bajo certeza.
2. Si a cada una de los estimados $e(a) \in \mathcal{E}$, se le asocia una distribución de probabilidad; se tiene el caso probabilista o estocástico y la toma de decisiones se denomina bajo riesgo.
3. Si sólo sabemos que los elementos $e(a)$ forman un subconjunto de C; se tiene el caso indeterminista y la toma de decisiones se denomina bajo completa incertidumbre.
4. Si el conjunto de $\mathcal{A}$, C o $\mathcal{E}$ se modela a través de conjuntos borrosos, entonces se tiene un problema de toma de decisiones con preferencias borrosas.

A.1.5 Una familia $\mathcal{F} = \{g_1, \ldots\ldots, g_j, \ldots\ldots, g_n\}$ de los criterios sobre $\mathcal{A}$ donde el criterio g_j denota una función real definida sobre el conjunto $\mathcal{A}$, $g_j : \mathcal{A} \to \Re$ que toma sus valores en un conjunto totalmente ordenado y representa las preferencias del decisor de acuerdo con el correspondiente atributo.

[2] Que puede calificarse de *a posteriori*, es decir, después de llevar el curso de acción, para distinguirla de las consecuencias que se estima podrían ocurrir, o consecuencias *a priori*.

[3] $\succ$ denota una preferencia estricta de un elemento sobre el otro. Véase la sección 2.1.3 del capítulo 2.

Si n = 1 (que es raro en la mayoría de los problemas reales), se dice el problema de decisión es monocriterio; y cuando n > 1, se dice el problema de decisiones es multicriterio.

Cabe señalar que la representación de los diversos atributos (puntos de vista, aspectos, factores, características) por una familia $\mathcal{F}$ de los criterios es ciertamente la parte más delicada de la formulación de un problema de decisiones. La familia $\mathcal{F}$ de criterios debe representar todas las fases del problema, evitando las redundancias. [Vincke, Ph. 1992].

A.1.6 Una *matriz de decisión* o de *impactos* $\mathcal{D}$, que resume la evaluación de cada alternativa conforme a cada criterio; una valoración (precisa o subjetiva) de cada una de las soluciones a la luz de cada uno de las criterios; la escala de medida de las evaluaciones puede ser cuantitativa o cualitativa, y las medidas pueden expresarse en escalas cardinal (razón e intervalo), ordinal, nominal, y probabilística.

	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Cada fila de esta matriz $\mathcal{D}$ expresa las cualidades de la alternativa i con respecto a los n criterios considerados. Cada columna j recoge las evaluaciones, hechas por el decisor, de todas las alternativas con respecto al criterio j.

A.1.7 Una relación binaria asimétrica[4] sobre $\mathcal{E}$, llamada *relación (binaria) de preferencias*.

Sabemos que la función g : $\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{R}$ refleja las preferencias del decisor, se puede comparar cualesquiera dos alternativas dadas a y a' del conjunto $\mathcal{A}$ objetivamente.

[4] Véase la sección 2.1 del capítulo 2. En particular, una relación binaria $\mathcal{R}$ es asimétrica si y sólo si a$\mathcal{R}$b implica que b$\not\mathcal{R}$a.

Consideremos un criterio que es además un objetivo, es decir, un criterio que representa la dirección de preferencia.[5] La alternativa *a* es preferida estrictamente a la alternativa *b*, es decir, $a \succ b$, si $g(a) > g(b)$ en el caso donde se maximiza el objetivo y si $g(a) < g(b)$ en el caso donde se minimiza el objetivo. $a^* \in \mathcal{A}$ es la solución óptima si $g(a^*) > g(a)$ $\forall a \in \mathcal{A}$ en el caso de maximizar el objetivo y si $g(a^*) < g(a)$ $\forall a \in \mathcal{A}$ en el caso de minimizar el objetivo.

Cabe señalar que, un problema de decisión real puede consistir en diferentes definiciones de la familia $\mathcal{F}$ y/o de los conjuntos $\mathcal{A}$, C y $\mathcal{E}$.

A.2 PROBLEMAS DE DECISIONES MULTICRITERIO

Hay una gran variedad de formulaciones y estructuras para representar los problemas de toma de decisiones. Se tiene el caso *monocriterio*, en que se considera solamente un atributo relevante para la decisión, y el caso *multicriterio*, en el que se consideran varios atributos.

De una manera más formal, si un problema de toma de decisiones tiene un solo atributo, entonces sobre este debe haber una estructura de preferencia, por lo que es un criterio, y el problema se denomina monocriterio. Se tiene el caso de problema de toma de decisiones multicriterio, si todos los atributos son independientes en preferencia, es decir, si todos los atributos son criterios.

Para que un problema de decisión pueda plantearse como monocriterio, se requiere que las preferencias del decisor, en relación con las alternativas disponibles, puedan representarse mediante una función con valores reales definida sobre el conjunto de alternativas.

A.3 EL ENFOQUE DE SOBRECLASIFICACIÓN EN DECISIONES MULTICRITERIO

En el enfoque de sobreclasificación se representan las preferencias mediante *n* funciones reales (criterios) $g_1, \ldots, g_n$, sobre el conjunto de alternativas, $\mathcal{A}$; con la diferencia, respecto de los métodos que usan funciones de valor o de utilidad, de que no necesariamente el problema se puede convertir en uno monocriterio a través de una función de valor o una función de utilidad v, $v(a) = v(g_1(a), \ldots, g_n(a))$. Los métodos de sobreclasificación definen una *relación de sobreclasificación*, que

[5] Véase el punto 2 del Glosario para la distinción entre un objetivo y un criterio.

es una relación binaria[6] S sobre $\mathcal{A}$, la cual es reflexiva[7], tal que *a sobreclasifica* a *b*; *a*, *b* $\in \mathcal{A}$; que se denota por aSb, si y sólo si se cumplen dos condiciones, una *condición de concordancia*, aCb, que significa que hay suficientes argumentos para admitir que *a* es al menos tan buena como *b*, y una *condición de no discordancia*, no aVb, que significa que no hay razones importantes para rechazar tal afirmación. En otras palabras, la concordancia cuantifica el "grado de dominación" de la alternativa *a* sobre la alternativa *b*, y la discordancia cuantifica el "grado de no-dominación" de la alternativa *b* sobre la alternativa *a*. [Vincke, Ph. 1992 y Zimmermann, H.J. 1987].

Si las preferencias no se pueden representar por un sólo criterio, entonces la relación de sobreclasificación viola alguna de las condiciones necesarias para la existencia de una función de valor o de utilidad; lo que significa que puede ocurrir que dadas dos alternativas cualesquiera, *a*, *b*, ninguna sobreclasifique a la otra, diciéndose entonces que ellas no son *comparables*.[8]

Consecuentemente, en vez de buscar "la mejor acción" como cuando existe una función de valor, estos métodos tratan de encontrar una mejor *alternativa de compromiso*. Conforme al nivel de incertidumbre, existen relaciones de sobreclasificación determinísticas y borrosas (difusas).

En resumen, $aSb \Leftrightarrow [aCb$ y no $aVb]$

Algunos métodos de sobreclasificación no hacen uso de la condición de no discordancia, es decir, V es una relación vacía.

A.4 ENFOQUES SOBRE LOS MODELOS DE DECISIONES

Existen dos enfoques en las cuales se analizan los modelos de decisiones, uno que propone cómo se deben tomar las decisiones llamado enfoque *normativo*, y otro que explica cómo se toman decisiones en la realidad llamado enfoque *descriptivo* [French, S. 1988].

El enfoque normativo se enfoca en cómo debe ser la toma de decisiones dadas las circunstancias ideales. Se dedica a dar los principios formales para tomar decisiones cuando se quiere ser consistente con una serie de axiomas. Por otro lado, el enfoque descriptivo surge del interés de la psicología por estudiar cómo las personas toman decisiones en situaciones reales.

---

[6] Véase la sección 2.1 del capítulo 2.
[7] Véase la sección 2.1 del capítulo 2. En particular, una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{A}$, es reflexiva si cumple la propiedad $a\mathcal{R}a \;\forall a \in \mathcal{A}$.
[8] La no comparabilidad entre dos alternativas está explicado en la sección 2.1.3 del capítulo 2.

GLOSARIO

1. **Alternativas**: Las alternativas (**o cursos de acción)** son las soluciones potenciales y factibles del problema de toma de decisiones. Por otro lado, las alternativas son la materia prima en el proceso de toma de decisiones [Hammond, J.S. et al. 1999:47], que representan las elecciones posibles que se identifican para lograr los objetivos. El conjunto de las alternativas puede ser *estable* o *evolutivo.* Es estable, si se define *a priori* y no es susceptible de cambiarse a lo largo del proceso. Es evolutivo, si puede ser modificado durante la solución, sea por los resultados intermedios que aparecen en la metodología, porque el problema de decisión se encuentra en un entorno cambiante, o por ambas causas.

2. **Atributos, Criterios y Objetivos**: Un atributo se refiere a cada una de las cualidades que describen una cosa, un criterio al principio o la norma con la cual se juzga o califica una idea o un objeto en relación con los demás y un objetivo el propósito o la meta que se trata de alcanzar en la solución de un problema. Formalmente, en la teoría de decisiones, se define estos términos como sigue [Ver Guillén, S.T. 1993: de 2-5 a 2-6]:
   - **Atributo** es un aspecto o propiedad de las alternativas que es relevante para la elección.
   - **Criterio** es un atributo que tiene asociada una estructura de preferencia independiente del resto de los atributos, en el sentido que, al mantener estos últimos (atributos) constantes, sin importar sus valores o niveles, la estructura de preferencia sobre las alternativas no cambia.
   - **Objetivo** es un criterio cuya estructura de preferencia está determinada por una dirección de menos a más preferido sobre una determinada escala (objetiva o subjetiva).

3. **Consecuencias**: La consecuencia de una alternativa es lo que ocurría si se tomara esa acción como solución. Antes de decidir es necesario especificar las posibles consecuencias de cada curso de acción. Las consecuencias son los elementos, en el proceso de solución, con los que se comparan las alternativas en el proceso de decisión. Los elementos del conjunto de consecuencias deben ser mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, esto es, uno y sólo uno de los elementos del conjunto de consecuencias ocurre después de realizar cualquier curso de acción y que, la lista de las consecuencias debe incluir todos los resultados posibles, así que, aunque no pueden ocurrir al mismo tiempo, uno de ellos debe de ocurrir.

4. **Criterio cualitativo**: Se dice que el criterio es cualitativo cuando está caracterizado de una forma que no responde a una medida numérica.

5. **Criterio cuantitativo**: Se dice que el criterio es cuantitativo cuando corresponde a evaluaciones numéricas.

6. **Estimado de consecuencias**: El estimado de consecuencias de una alternativa es la información relevante para la elección y describe lo que se esperaría sobre el logro de los objetivos si la alternativa considerada se llevara a cabo. Las alternativas se comparan preferencialmente a través de sus respectivos estimados de sus consecuencias. El proceso define una función que asocia a cada alternativa su correspondiente estimado.

7. **Estructura de preferencias**: Una estructura de preferencias del decisor sobre el conjunto de consecuencias, permite que haya diferencias entre las alternativas en las preferencias del decisor. La tarea primordial del proceso de toma de decisiones es extraer estas estructuras al decisor y representarlas con un llamado *modelo de preferencias*, el cual expresa las condiciones necesarias y suficientes para que una alternativa sea preferida a otra y en su caso para que sea indiferente entre ambas.

8. **Gráfica dirigida**: Una gráfica es dirigida cuando sus arcos son dirigidos. Un arco dirigido es aquel que tiene la dirección bien definida o señalada lo que significa que no se puede moverse en cualquier sentido.

9. **Juicio**: En el contexto del método AHP, un juicio o comparación es la representación numérica de una relación entre dos elementos de un nivel de una jerarquía que comparten un pariente en común.

10. **Matriz cuadrada**: Una matriz cuadrada **A** es irreducible si no puede ser descompuesta en la forma

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{A_1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{A_2} & \mathbf{A_3} \\ \hline \end{array}$$

donde $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_3}$ son matrices cuadradas y **0** es la matriz cero.

11. **Matriz primitiva**: Una matriz positiva irreducible **A** es primitiva si y sólo si existe un entero $k \geq 1$ tal que $\mathbf{A}^k > \mathbf{0}$.

12. **Producto cartesiano**: El producto cartesiano $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ es el conjunto de pares ordenados $\{(a,b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}\}$.

13. **Racionalidad**: Se trata de
    - Conocer lo suficiente acerca de un problema de manera de desarrollar una estructura completa de relaciones e influencias;
    - Tener suficiente conocimiento y experiencia para evaluar las preferencias entre las relaciones de la dicha estructura;

- Permitir diferencias de opinión con la capacidad de desarrollar un compromiso mejor.

14. **Transformación afín positiva**: w y v están relacionados por una transformación afín positiva si y sólo si existen α, β, $\alpha>0$, tal que $w = \alpha v + \beta$.

15. **Transformación de similitud**: $\phi(.)$ es una transformación de similitud, también llamado *transformación de semejanza* si y sólo si $\phi(a) = \alpha a$, $\alpha>0$ $\forall a \in \mathcal{A}$.

16. **Transformación identidad**: $\phi(.)$ es una transformación identidad si y sólo si $\phi(a) = a$ $\forall a \in \mathcal{A}$.

17. **Transformación monótona creciente**: w y v están relacionados por una transformación monótona creciente si $v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow w(a) \geq w(b)$ $\forall a,b \in \mathcal{A}$.

REFERENCIAS

1. Antún, J.P. (1994); "*Toma de Decisiones Multicriterio: El enfoque ELECTRE*", Series del Instituto de Ingeniería, **D-38**, UNAM.
2. Bana e Costa, C.A. y Vansnick, J-C. (2001); "*A Fundamental Criticism to Saaty's Use of the Eigenvalue Procedure to Derive Priorities*", Working Paper Series **LSEOR 01.42**, London School of Economics and Political Science, UK.
3. Barba-Romero, S. y Pomerol, J-Ch. (1997); "*Decisiones Multicriterio: Fundamentos Teóricos y Utilización Práctica*", Universidad de Alcalá, España.
4. Barzilai, J. (1997); "*A New Methodology for Dealing with Conflicting Engineering Design Criteria*", Proceedings of the 1997 National Conference of the American Society for Engineering Management.
5. Belton, V. y Gear, A.E. (1983); "*On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies*", Omega **11**, **3**, 228-230.
6. Brans, J.P. y Vincke, Ph. (1985); "*A Preference Ranking Organization Method (the PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision Making)*", Management Science, **31**, 647-656.
7. Forman, E.H. y Gass, S.I. (2001); "*The Analytic Hierarchy Process – an Exposition*", Operations Research **49**, 469-486.
8. French, S. (1988); "*Decision theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*", Ellis Horwood Limited, Chichester, UK.
9. Guillén, S.T. (1993); "*Relaciones Valuadas de Preferencia en la Toma de Decisiones Multicriterio*", Tesis Doctoral, DEPFI, UNAM.
10. Guillén, S.T. (2002); "*Sistemas Relaciones y Escalas de Medición*", en Ingeniería de Sistemas: Un Enfoque Interdisciplinario, Alfaomega Grupo Editor, México, Páginas 122-137.
11. Hammond, J.S., Keeney, R.L. y Raiffa, H. (1999); "*Smart Choices*", Harvard Business School Press, Boston Massachusetts.
12. Keeney, R.L. (1992); "*Value-focused thinking: A Path to Creative Decision Making*", Harvard University Press, Cambridge, Mass.
13. Keeney, R.L. y Raiffa, H. (1976); "*Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Tredeoffs*", Wiley, New York.
14. Martínez, E. (1998); "*Evaluación y Decisión Multicriterio: Una Perspectiva*", en Evaluación y Decisión Multicriterio, Editorial de la Universidad de Santiago Chile, Capítulo 1.
15. Murphy, K.K. (1993); "*Limits on the Analytic Hierarchy Process from its Consistency Index*", European Journal of Operational Research **33**, 138-139.
16. Roberts, F.S. (1979); "*Measurement Theory with Applications to Decision Making, Utility and Social Sciences*", Addison-Wesley Company, London.

17. Robins, E.S. (1997); "*An Investigation into the Efficacy of the Consistency Ratio with Matrix Order – Limits of the AHP*", Arlingsoft Corporation Report Number **ARL97-ER-D01**. http://www.technologyevaluation.com/arlingsoft/AHP-RI.pdf
18. Robins, E.S. (1998); "*Five Major Pitfalls in the AHP Process*", Arlingsoft Corporation Technical Report Number **9811pub-esr**. http://www.technologyevaluation.com/arlingsoft/AHP_5_pitfalls.pdf
19. Robins, E.S. (2001); "*The Analytic Hierarchy Process – Issues, Problems, and Recommendations*", Arlingsoft Corporation Technical Report Number **0107-ESR**. http://www.technologyevaluation.com/arlingsoft/Analysis_ofAHP.pdf
20. Roy, B. (1989); "*Decision Aid and Decision Making*", Documento de LAMSADE **51,** Universidad de París-Dauphiné, Francia.
21. Saaty, T.L. (1980); "*The Analytic Hierarchy Process*", McGraw-Hill Book Co. New York.
22. Saaty, T.L. (1990); "*How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process*", European Journal of Operational Research **48**, 9-26.
23. Saaty, T.L. (1994); "*Fundamentals of Decision Making and Priority theory with the AHP*", The Analytic Hierarchy Process Series Vol. VI, RWS Publications, Pittsburgh, PA.
24. Saaty, T.L. (1998); "*Método Analítico Jerárquico (AHP): Principios Básicos*", en Evaluación y Decisión Multicriterio, Editorial de la Universidad de Santiago Chile, Capítulo 2.
25. Salo A. A. y Hämäläinen, R.P. (1993); "*On the Measurement of Preferences in the Analytic Hierarchy Process*", Systems Analysis Laboratory Research Reports **A47**, Helsinki University of Technology, Finland.
26. Steuer, R.E. (1986); "*Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*", John Wiley & Sons, Inc. NY.
27. Trejos, M.A., (1991); "*Método de Relaciones Binarias de Sobreclasificación que usa una Familia de Funciones de Utilidad*", Tesis Doctoral, DEPFI, UNAM.
28. Trejos, M.A. (2001); "*Apuntes para el Curso de Teoría de Decisiones*", Inédito Material, DEPFI, UNAM.
29. Vargas, L.G. (1990); "*An Overview of the Analytic Hierarchy Process and its Applications*", European Journal of Operational Research **48**, 2-8.
30. Vincke, Ph. (1992); "*Multicriteria Decision-aid*", John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, England.
31. Watson, S.R. y Freeling, A.N.S. (1982); "*Assessing Attribute Weights*", Omega **10**, **6**, 582-583.
32. Watson, S.R. y Freeling, A.N.S. (1983); "*Comment on: Assessing Attribute Weights by Ratios*", Omega **11**, **1**, 13.
33. Zimmermann, H.J. (1987); "*Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems*", Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
34. Zionts, S. y Wallenius, J. (1983); "*An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Nonlinear Utility Functions*", Management Science, **29**, **5**, 519-529.