115

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EDA'S DE INDICE ALTO EN LA OPTIMIZACION DE LA INVERSION Y LA EXPLOTACION DE UN RECURSO RENOVABLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

EZEQUIEL UGALDE ORTEGA

DIRECTORA DE TESIS: M. EN C. MARIA LOURDES VELASCO ARREGUI

2002

EDA'S DE ÍNDICE ALTO EN LA OPTIMIZACIÓN DE LA INVERSIÓN Y LA EXPLOTACIÓN DE UN RECURSO RENOVABLE

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "EDA's de índice alto en la optimización de la inversión y la explotación de un recurso renovable"
realizado por Ugalde Ortega Ezequiel

con número de cuenta 9234298-9 **, quién cubrió los créditos de la carrera de:** Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. María Lourdes Velasco Arregui.
Propietario	Dr. Jesús López Estrada.
Propietario	Dr. Faustino Sánchez Garduño.
Suplente	M. en C. José López Estrada.
Suplente	Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña.

Consejo Departamental de Matemáticas.

M. en C. José Antonio Flores Díaz

AGRADECIMIENTOS

Maestra Lourdes Velasco Arregui gracias por haber aceptado ser la directora de mi tesis y a su forma de enseñar Cálculo Diferencial.

Gracias a los profesores: Jesús López, Faustino Sánchez, José López y Manuel Falconi por sus aportaciones y sugerencias que fueron de gran valor para el presente trabajo. Gracias por su tiempo.

Gracias a la U.N.A.M. por ser fuente inagotable de conocimientos.

A mi Dios.

Naty Ortega F. y Ezequiel Ugalde A. gracias por sus preocupaciones, enseñanzas, su entereza y su fortaleza cotidiana. Gracias por inculcarme el amor al conocimiento.

Adriana, Angélica y Emiliano por su amor.

Quím. Guillermo Barraza Ortega, muchas gracias por ser maestro y amigo.

Martha Salgado Ceballos gracias por todo.

Gracias a aquellos que demostraron su interés en la conclusión de este trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los recursos naturales originalmente se dividían en recursos renovables y no renovables; la diferencia radica en que el proceso de regeneración ocurre más rápidamente en los recursos renovables. Como ejemplo de los recursos renovables se señala la flora, la fauna, el agua, etc. y como no renovable los combustibles convencionales como el petróleo.

La regeneración del recurso necesita que existan las condiciones necesarias para su desarrollo. El problema se origina cuando el hombre considerando de rápida regeneración los recursos renovables los explotó, en muchos casos lo sigue haciendo, en desmedida ocasionando un deterioro o un agotamiento que los pone en peligro de extinción al enviarlos por debajo de los límites donde la renovación no sea posible o ésta no sea tan rápida, de ahí que surja la preocupación de tomar todas las medidas necesarias (tanto políticas, sociales y económicas) para utilizar el recurso y cumplir las necesidades del hombre sin decremento del recurso.

El objetivo del presente trabajo es presentar un análisis de un problema de optimización dinámica para las decisiones de explotación, inversión y financiamiento de una empresa que tiene la concesión monopólica de explotación de un recurso renovable, tal como la pesca de alguna especie marina, además de que en todo momento evitará la explotación desmedida del recurso para evitar su extinción.

El problema planteado matemáticamente, se lleva a uno de control óptimo, donde las variables de estado son el tamaño de la población a explotar y el capital invertido a la empresa por los socios, mientras que las variables de control del problema son los dividendos de la empresa y el esfuerzo que se realiza para capturar la especie.

Jorgense et al (1997) obtuvieron una secuencia de trayectorias óptimas a través de un procedimiento de síntesis y caracterización cualitativa de curvas así como de las condiciones necesarias de optimización. En este trabajo, se muestra que el problema de control óptimo nos lleva a una ecuación diferencial algebraica al menos de índice tres.

El trabajo se inicia analizando, en el Capitulo 1, la dinámica de población con y sin explotación así como los supuestos financieros que debe cumplir la empresa que va a explotar los recursos, es decir, son las bases que permiten presentar el modelo. El Capítulo 2 contiene una descripción de los problemas de optimización lo cual permitirá analizar las condiciones necesarias que debe cumplir la solución a un problema de control óptimo. En el Capítulo 3 se aplican las técnicas vistas en el Capítulo 2 para obtener las condiciones necesarias de la solución al modelo del capítulo 1. Finalmente en el Capítulo 4 se muestra que el modelo, del presente trabajo, es una ecuación diferencial algebraica (EDA) por lo que se analizan las dificultades matemáticas y numéricas a las que se debe se enfrentar al tratar de solucionar una ecuación de este estilo.

Capítulo 1

EL PROBLEMA

El problema que se presenta en este trabajo trata sobre la explotación de un recurso renovable. La explotación debe ser tal, que permita el crecimiento sustentable de la especie, es decir, evitar la sobreexplotación a fin de asegurar que ésta no se extinga.

Se supone que las condiciones ambientales del hábitat de la especie no son tan extremas que pueda extinguirla o mermar el número de individuos que la conforma de una forma brusca. Los fenómenos que alteran el medio ambiente pueden ser, por ejemplo, metereológicos como "El Niño" o ecológicos como la contaminación excesiva.

Además, se supondrá que una sola empresa tiene los derechos exclusivos de explotación del recurso[1], de esta manera se tendrá un mayor control del número de medios o activos con los que se realiza la captura del recurso, como puede ser el número de redes, barcos, arpones, rifles, etc., así como de una sola estrategia para la utilización del recurso.

Los procesos de captura utilizados por la compañía que aprovechará el recurso, deben cumplir cabalmente con las normas dictadas por las autoridades locales así como los tratados que se hayan firmado al respecto con otros países, con la finalidad de no explotar

[1] Los economistas argumentan que la comercialización de una especie usualmente esta asociada con su extinción como resultado de que el recurso sea de libre acceso o de libre explotación, es decir, que puedan introducirse un número ilimitado de participantes para la explotación del recurso. Esto influye en la sobreexplotación del recurso debido a que los derechos de explotación no existen o no están bien definidos, por ejemplo, si el recurso a explotar es un pez donde su hábitat es de libre acceso para la comercialización y es capturado por cierta cantidad de botes, en el momento que entre otro pescador, sus botes estarán compitiendo con los que ya existían previamente, lo que originará que aumente el esfuerzo por conseguir el bien, que se divida menos pesca entre más botes y por ende que se reduzca la población de peces.
Por lo tanto, si los derechos de explotación del recurso se definen correctamente o si existe una regulación para la explotación del recurso, la especie no sería sobreexplotada o en peligro de extinción, una de esas medidas es conceder derechos exclusivos o monopólicos para la explotación del recurso a un solo participante o a un conjunto limitado de participantes que tendrán una misma estrategia en común (véase [AEDE 531D,2000]).

excesivamente el recurso natural. Aunado a esto, la empresa no debe escatimar esfuerzos para evitar la captura de otras especies no aprovechables en el comercio o, en su defecto, que no esté autorizada en su utilización, así como evitar daños ecológicos al ambiente.

Con las medidas previas, la compañía evitará ser sancionada económica o administrativamente, y en su defecto, perder la concesión sobre la explotación del recurso; y con ello, poner en riesgo el futuro de la empresa.

Así mismo, se supondrá que el recurso es altamente demandado por lo que la venta del bien capturado es inmediata.

El objetivo de la compañía es hacer un buen uso del capital invertido por los socios obteniendo la mayor tasa de dividendos posible; ya que de otra manera, si los inversionistas consideran que la actividad no es rentable podrían retirar su capital en cualquier momento y poner en riesgo la existencia de la empresa.

Dentro de los supuestos financieros se encuentra que la empresa tiene acceso ilimitado a financiarse por medio de un préstamo para activar o reactivar la explotación del recurso como puede ser la compra de los insumos necesarios o reponer los que hayan sufrido de depreciación, lo que no podrá hacer, será invertir la cantidad prestada para algún fin distinto al giro de la empresa.

Si la compañía considera prudente, puede invertir el excedente de capital propio en activos financieros, la única restricción al respecto es que si previamente decidió pedir prestado, deberá pagarles a sus acreedores.

En forma resumida, el problema por estudiar es de optimización dinámica de la explotación del recurso, donde las políticas de la empresa estarán basadas en decisiones de dinámica de inversión de capital en el esfuerzo y estructura de financiamiento de la compañía. A continuación se enunciaran los supuestos que debe cumplir el modelo de forma analítica.

1.1. DINÁMICA DE LA POBLACIÓN

Sea $P = P(t)$ el tamaño de la población en el instante t donde todos los individuos son idénticos y los únicos factores que afectan el tamaño poblacional son las tasas intrínsecas de nacimiento y muerte [3], además debe cumplir con las siguientes hipótesis (véase [3], [AEDE 531D,2000] y [Miller, 1991]):

i. La población es tal que presenta nacimientos continuos y generaciones superpuestas para considerar que la función de población $P: \Re^{+} \rightarrow \Re$ es continua y diferenciable para toda t.

ii. La población crece en un ambiente sin cambios bruscos que origine alteraciones violentas en el número de integrantes de la población.

iii. La población se distribuye uniformemente sobre su hábitat.

iv. El crecimiento de la población estará limitado por los recursos de su ambiente, por lo que los individuos competirán entre ellos para obtener los requerimientos mínimos para sobrevivir, como espacio territorial, alimentación o energía solar.

v. La razón instantánea de cambio de la población en el tiempo t dependerá del número de individuos que existan en ese momento multiplicado por una tasa variable, dicha tasa está sujeta a la vez al número de integrantes de la población P. Es decir, que el crecimiento de la población se comportará de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\frac{\frac{dP}{dt}}{P} = f(P),$$

y de ésta ecuación se tiene

$$\frac{dP}{dt} = Pf(P). \tag{1.1.1}$$

Por el punto i, anterior es natural suponer que: $P(t) > 0$, para toda t en $\Re$; en otras palabras, no se considera que la población pueda extinguirse de manera natural en algún punto del tiempo.

vi. Existirá un nivel máximo de individuos que el medio puede sostener o ***máxima capacidad sustentable***, a ese nivel lo denotaremos como P_{MAX} (véase [Miller,1999] y [Zill,1997]).

Si, $\frac{dP}{dt} = F(P)$ y substituyendo en (1.1.1) se tiene que $F(P) = Pf(P)$, donde la razón deberá cumplir con los siguientes puntos:

vii. $F(P) > 0$, donde $P(t) \in (0, P_{MAX})$; es decir $f(P) > 0$, si $P(t) \in (0, P_{MAX})$

viii. $F(P) < 0$, donde $P(t) \in (P_{MAX}, \infty)$; es decir $f(P) < 0$, si $P(t) \in (P_{MAX}, \infty)$

Resumiendo, en una primera etapa por el punto *vi* y *vii*, la tasa de crecimiento será positiva hasta que la población alcance el tamaño P_{MAX}, debido a que en ese periodo la tasa de mortalidad es menor que la tasa de natalidad ya que existen los recursos necesarios para el desarrollo y crecimiento de la población.

Cuando la población rebase el punto de máxima capacidad sustentable de su hábitat, P_{MAX}, la tasa de mortalidad se incrementará debido a que el ambiente no podrá proporcionar a todos los individuos de la población los requerimientos mínimos para su sobrevivencia obligando a la población a retornar al nivel P_{MAX} que su entorno puede soportar.

ix. $F(0) = F(P_{MAX}) = 0$; es decir, $f(0) = f(P_{MAX}) = 0$

Es decir, que la tasa de crecimiento de la población será igual a cero en dos puntos, cuando no existan individuos en el ambiente y cuando la población en estudio alcance el nivel máximo de sustentabilidad de su hábitat.

x. $F(P) \in C^2$

xi. $F''(P) < 0, \forall P(t)$

Por el punto *x.* anterior, en el intervalo de $[0, P_{MAX}]$, $F(P)$ es continua y diferenciable sobre $(0, P_{MAX})$; del punto *ix.* $F(0) = F(P_{MAX}) = 0$ y al aplicar el teorema de Rolle se sabe que existe una P_{MC} que pertenece a $(0, P_{MAX})$ tal que:

$$F'(P_{MC}) = 0.$$

Debido a que $F''(P) < 0$ para toda P, la función $F(P)$ tiene un valor máximo en el punto P_{MC}, donde la velocidad de aumento toma su valor máximo.

Por lo tanto, $F(P)$ es creciente en el intervalo $(0, P_{MC})$ y decreciente en (P_{MC}, ∞), es decir:

$$\begin{aligned} F'(P) > 0, &\quad P \in (0, P_{MC}) \\ F'(P) < 0, &\quad P \in (P_{MC}, \infty) \end{aligned}$$

Recordando el punto *iv* anterior, los recursos donde vive la población son finitos, por ejemplo: el alimento, el espacio territorial, etc. y las alteraciones que la población realice al hábitat, como la contaminación, influirá negativamente en el incremento de la población cuando ésta sobrepase el nivel P_{MC} ya que no todos los individuos tendrán las mismas oportunidades de conseguir alimento o de sobrevivir; aún así la tasa de crecimiento será positiva, hasta que la población alcance el punto de máxima capacidad sustentable P_{MAX}, donde la tasa de mortalidad es igual a la tasa de natalidad y con ello el crecimiento de la población será igual a cero por el punto *ix*.

Si la cantidad de individuos de la población fuera mayor a P_{MAX}, la función $F(P)$ sería menor que cero por el punto por el punto *viii*; significando que la tasa de mortalidad será mayor que la tasa de reproducción, obligando a la población a retroceder hasta los niveles de P_{MAX}.

Bajo estas características, la forma de la gráfica de la función *F(P)* es representada por medio de la figura 1.

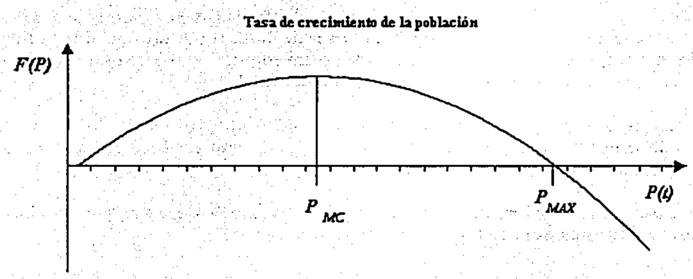

Figura 1

La gráfica de la función solución de *P(t)* con condiciones iniciales P_0, siendo $0 < P_0 < P_{MAX}$ tiene la forma de "S" como se muestra en la figura 2 (véase [Miller,1999] y [Zill,1997]).

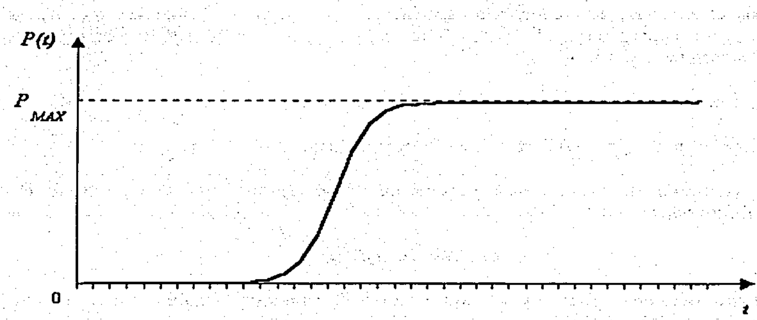

Figura 2

1.2.DINÁMICA DE EXPLOTACIÓN

Considérese una población cuya velocidad instantánea de cambio en condiciones de no explotación crecimiento cumple con la ecuación (1.1.1)

(1.1.1): $$\frac{dP}{dt} = Pf(P),$$

si, además se supone que está sujeta a comercialización por parte de una compañía que tiene los derechos exclusivos para la captura de la especie en cuestión, otorgados por una autoridad competente, y que evitará en todo momento la explotación excesiva o extinción del recurso, y con ello el fin de la actividad comercial.

Entonces, el crecimiento de la población estará afectado no sólo por factores naturales $F(P)$, sino que también se verá influenciado por la cantidad de individuos capturados por parte de la empresa a lo largo del tiempo.

En base a lo anterior, sea H la razón instantánea de extracción del recurso por la empresa. Para fines del modelo se supondrá que:

$H : \Re^2 \rightarrow \Re$, tal que si $(P,E) \in \Re^2$, entonces:
$H = \Phi(P,E)$

Donde:

$P(t)$ es el número de individuos de la población en el instante t a explotar y cuyo crecimiento cumple con los supuestos indicados en la sección 1.1.

$E(t)$ es el esfuerzo por realizar la captura, como el número de barcos, redes u otros insumos utilizados para tal fin. La función de esfuerzo debe ser mayor que cero y continua en todo tiempo.

$\Phi(P,E)$ la función de captura debe ser continua y diferenciable en $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

Para mayor referencia véase [AEDE 531D, 2000] y [Jorgensen, 1997].

Un caso particular de $\Phi(P,E)$ es el modelo de Schaefer, en el que Φ depende de P y E bajo la siguiente expresión

$$\Phi(P,E) = qE(t)P(t),$$

es decir, el producto del esfuerzo y del número de individuos de la población en el instante t (véase [AEDE 531D, 2000]).

Por lo tanto, la razón instantánea de cambio considerando la explotación del recurso tendrá la siguiente representación

$$\frac{dP}{dt} = Pf(P) - \Phi(P, E) \qquad (1.2.1)$$

1.3. DINÁMICA FINANCIERA

Sea $P(t)$ una población con un crecimiento natural definido como en (1.1.1) sujeta a explotación y comercio determinado por la función $\Phi(P,E)$ por parte de una compañía que cumple con los supuestos indicados en la sección 1.2.

Además la empresa deberá cumplir con varios supuestos que enunciaremos a continuación:

Supuestos sobre la utilidad de lo capturado:

Aunque el precio esté regulado por la ley de la oferta y la demanda o en su defecto por la autoridad correspondiente, se supondrá que la compañía venderá lo capturado a un precio unitario constante igual a p, por lo que la entrada de efectivo derivado de la actividad estará dada por

$$p\Phi(P,E). \qquad (1.3.1)$$

El costo de operación de la empresa será igual a $cE(t)$, donde c es el costo unitario del esfuerzo realizado en la captura.

Los costos deben incluir los gastos directos como son lo referente a equipo, medios de transporte, reparaciones, combustibles, retrasos, gasto en infraestructura, por ejemplo, costos de muellaje especializado o puertos, enseres de captura, almacenamiento de la captura, personal calificado e impuestos entre otros; así como gastos indirectos que están relacionados con la administración y gastos de venta del producto.

Por lo tanto la utilidad derivada de la captura y venta del producto puede expresarse de la siguiente manera

$$p\Phi(P,E) - cE. \qquad (1.3.2)$$

Supuestos financieros:

La compañía tendrá acceso a una línea de crédito exclusiva para la explotación del recurso ó podrá invertir en activos financieros, pero no las dos alternativas al mismo tiempo, es decir, no podrá pedir prestado e invertir sus recursos en una actividad distinta a la de fomentar o incrementar la captura de la especie de la cual tiene la concesión para su aprovechamiento [Jorgensen, 1997].

Si la empresa determina solicitar el préstamo al que tiene derecho, la tasa del crédito por la línea concedida se incrementará en función del grado de endeudamiento de la empresa; mientras que si la firma decide invertir en activos financieros, la tasa de rendimiento se mantendrá constante independientemente de la cantidad de recursos invertidos.

Por otro lado, la compañía deberá tener la capacidad de liquidar la deuda así como los intereses generados por ésta, dichos intereses estarán vinculados a la tasa líder del mercado, riesgo sistemático, y del riesgo propio de la empresa.

En otras palabras, sea B el nivel de endeudamiento o de inversión [Jorgensen, 1997]:

Si $B \leq 0$, se entenderá que la empresa ha decidido invertir en activos financieros y en ese caso la empresa obtendrá una tasa constante de ganancia r_0; mientras que si B es mayor que cero, la compañía ha determinado utilizar su línea de crédito y entonces deberá pagar a sus acreedores la misma tasa constante r_0 más un premio derivado del riesgo de pérdida o insolvencia por parte de la empresa.

Para fines de este trabajo, defínase $r(B)$ como la función *tasa de interés* ligada al nivel de endeudamiento o inversión B, de manera que tenga el siguiente comportamiento

$$r(B)=\begin{cases} r_0 & B <= 0 \\ r_0 + kB & B > 0, \text{y}\, k > 0 \end{cases} \quad . \qquad (1.3.3)$$

Donde r_0 es la tasa ofrecida a la compañía al destinar sus recursos en una inversión financiera y k es el grado de riesgo de la empresa por incumplimiento de pago y se aplicará linealmente al nivel de deuda de la empresa, cumpliendo con el supuesto de que a medida que se incremente el préstamo, la tasa de interés respectiva también aumentará.

Dependiendo de la decisión de la empresa, B representará una ganancia o un costo para la firma que será medido por medio de la función de ganancia – costo financiero representado por medio de $C(B)$, dicha función tomará los siguientes valores

$$C(B)=\begin{cases} r_0B & B <= 0 \\ r_0B+kB^2 & B>0, \text{ y } k>0 \end{cases} \qquad (1.3.4)$$

Cuando $B \leq 0$, $C(B)$ significará un incremento en los activos de la empresa como resultado de los intereses generados de la inversión financiera por un monto B y si $B > 0$, la empresa tendrá una deuda igual a r_0B+kB^2.

La empresa deberá ofrecer a sus inversionistas una tasa de ganancia o de utilidad i, que deberá ser competitiva en el mercado, ya que si dicha tasa resulta ser menor que la tasa r_0 prometida por invertir en instrumentos financieros, los socios determinarán destinar sus recursos en activos financieros que les proporcionará una mayor ganancia; si la tasa i es igual a la tasa r_0, a los empresarios les será indiferente invertir en activos financieros o destinar sus recursos en la empresa, por lo que la tasa de ganancia se supondrá mayor que la tasa libre de riesgo para que los posibles socios estén interesados en invertir o conservar su capital en la firma, es decir:

$$i > r_o. \qquad (1.3.4')$$

La compañía deberá de contar con un capital $K(t)$ que le permita comenzar o realizar la actividad de captura, este capital puede ser por ejemplo la cantidad de barcos o de redes y podrá incrementarse en cualquier momento por medio de las inversiones $I(t)$ de los socios. Además, el capital estará sujeto a depreciación a una tasa constante d, por lo tanto, el cambio en el capital se expresará como:

$$K' = I(t) - dK(t), \qquad K(0) = K_0 > 0. \qquad (1.3.5)$$

Así mismo, los socios de la firma podrán invertir o descapitalizar la empresa sin ninguna restricción, sólo dependerá de la estrategia a seguir por parte de los miembros de la firma y de que la compañía cuente con una estructura de costos rentables, es decir, la función de inversión de los socios $I(t)$ podrá tomar los siguientes valores

$$-\infty < I(t) < \infty. \qquad (1.3.6)$$

El significado que tiene el signo de (1.3.6) es como sigue, si $I(t) \leq 0$, significará que los socios han decidido retirar parte del capital $K(t)$ de la compañía; mientras que si $I(t)>0$ que han decidido realizar una nueva inversión en la empresa.

Es decir, la condición (1.3.6) admite la venta o compra de capital de forma instantánea y sin ninguna restricción originando cambios inmediatos en la cantidad de capital debido a la ecuación (1.3.5).

Si el esfuerzo en el momento t es igual a $E(t)$ y si:

$$(K(t)-E(t))>0\ , \tag{1.3.7}$$

donde el lado izquierdo de la desigualdad (1.3.7) es la cantidad de capital que la firma no está utilizando y suponiendo que la empresa no desea mantener capital ocioso [Jorgensen, 1997], el excedente se podrá retirar debido al comportamiento de la función de inversión (1.3.6), de manera que

$$E(t) = K(t), \tag{1.3.8}$$

para toda t, por lo que la empresa evitará de esta manera el exceso de capital, y por ende, todo el capital que posea será utilizado en su máximo para la captura del recurso.

Por otro lado, contablemente se debe de cumplir con la siguiente igualdad

$$K(t)=X(t)+B(t)\ , \tag{1.3.9}$$

donde, $X(t)$ es el capital neto de la empresa.

Del supuesto (1.3.8), arriba descrito, se tiene que $E(t) = K(t)$ en todo instante t, por lo tanto, la igualdad (1.3.9) en términos del esfuerzo queda expresada de la siguiente manera

$$E(t)=X(t)+B(t)\ . \tag{1.3.10}$$

Considerando los flujos de entrada y salida de la empresa [Jorgensen, 1997], derivados de la comercialización de la captura, se obtiene la siguiente ecuación

$$p\Phi(P,E)-cE(t)-dK(t)-C(B)=D(t)+X'(t)\ . \tag{1.3.11}$$

donde $D(t)$ son los dividendos pagados a los socios de la firma y por ende es lógico pedir que sean mayor o igual a cero para toda t. En otras palabras, la ecuación (1.3.11) nos dice que los dividendos $D(t)$ y el incremento o decremento en el capital neto $X(t)$ debe ser igual a la utilidad proveniente de la comercialización de la captura $p\Phi(P,E)$-cE, considerando costos derivados de la depreciación del capital $dK(t)$ y de la ganancia por la inversión en activos financieros o bien del costo de la deuda adquirida por la empresa $C(B)$.

Asimismo la empresa en ningún momento estará interesada en conservar efectivo, por lo que se deberá igualar el flujo de entrada con el de salida [Jorgensen, 1997]. Dicho de otra manera

$$p\Phi(P,E)-cE(t)=D(t)+C(B)-B'(t)+I(t)\ , \tag{1.3.13}$$

donde la utilidad de la venta de la captura $p\Phi(P,E)-cE$ será igual a los dividendos pagados $D(t)$ a los socios después de considerar las ganancias o costos derivados de la inversión o de la deuda $C(B)$ de la empresa, así como la reducción del préstamo o incremento en la utilización de activos financieros B' y en la inversión directa de capital por parte de los socios $I(t)$.

1.4. EL MODELO

El objetivo principal de la empresa es optimizar los dividendos de la firma durante el tiempo en que la empresa se dedique a la captura de la especie a la que tiene autorización, suponiendo que el límite de vencimiento de la concesión otorgada es hasta el tiempo T, y que la estrategia de explotación de la compañía cumpla con los puntos de la sección 1.2.

Bajo los supuestos financieros de la sección 1.3, los socios potenciales estarán interesados en saber cual es la ganancia posible al día en que inician la inversión para la explotación del recurso; es decir, desearán conocer todos los flujos de dividendos a valor presente $e^{-it}D(t)$, donde i es la tasa de ganancia que la empresa debe ofrecer a sus socios como se mencionó anteriormente.

Por lo anterior y definiendo a J como la funcional de flujo de dividendos a maximizar, se obtiene la siguiente expresión:

$$J = \int_0^T e^{-it} D(t)dt . \tag{1.4.1}$$

Es lógico suponer que la compañía preverá que el capital neto X siempre sea mayor que cero.

Despejando a X' de la ecuación de flujos (1.3.11) y utilizando la expresión $E(t) = K(t)$ (1.3.8) se obtiene la siguiente igualdad:

$$X' = p\Phi(P,E) - (c+d)E - C(B) - D(t). \tag{1.4.2}$$

Además se supondrá que la razón instantánea de cambio de la población sea igual a:

$$\frac{dP}{dt} = F(P) - \Phi(P,E), \tag{1.4.3}$$

donde $F(P)$ representa el crecimiento natural de la población P y la función $\Phi(P,E)$ cumple con lo indicado en la sección 1.2 relativo a la función de captura. Es decir que la razón instantánea de cambio de la población, $\frac{dP}{dt}$, dependerá de la razón instantánea de cambio natural de la población y de la forma en que ésta sea explotada.

Resumiendo, el problema de control óptimo que se estudiará en este trabajo será el de resolver a (1.4.1) obedeciendo (1.4.2) y (1.4.3), es decir:

$$
\begin{aligned}
& MaxJ = Max\int_0^T e^{-it} D(t)dt \\
& \quad \text{sujeta a :} \\
& \qquad P' = F(P) - \Phi(P,E) \\
& \qquad X' = p\Phi(P,E) - (c+d)E - C(B) - D(t) \\
& \qquad D(t) > 0 \\
& \qquad E(t) > 0 \\
& \qquad P(t_0) = P_0 \\
& \qquad X(t_0) = X_0 \\
& \qquad E(t_0) = E_0 .
\end{aligned}
\tag{1.4.4}
$$

donde $P(t)$ y $X(t)$ son variables de estado con $D(t)$ y $E(t)$ como variables de control.

El tipo de problemas al que pertenece el modelo (1.4.4), así como las condiciones necesarias que debe cumplir éste se analizarán en el capítulo siguiente.

Capítulo 2

PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

El modelo obtenido en el capítulo anterior no es sino un caso particular de los llamados problemas de control óptimo, en los que se desea optimizar ciertas cantidades (función objetivo), que dependen de los valores de variables que cambiarán en el tiempo (variables de estado) de acuerdo a la elección de ciertos parámetros o variables que pueden manipularse (variables de control).

Un ejemplo típico de optimización es el siguiente:

$$MaxJ = Max\left[[\int_0^t f_0(x,u,t)dt \right]$$

sujeto a:

$$x^{\cdot} = f(x,u,t)$$

y condiciones iniciales:

$$x(a) = x_I \,.$$

Antes de entrar a analizar los problemas de control óptimo, veremos primero dos cuestiones relacionadas: los problemas de optimización y los problemas de control

2.1 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los problemas de optimización han sido muy estudiados en Matemáticas y sus procedimientos se han aplicado en otras áreas como la Economia, Sociologia, Demografía, Industria, etc.

Para aplicar los resultados de la teoría de optimización hay que reconocer primeramente las necesidades a resolver y hacer una imagen de la realidad por medio de un modelo matemático para obtener, posteriormente, la solución al problema en cuestión.

El modelo que describe el problema debe estar gobernado por *reglas de operación* o *restricciones*, dichas reglas pueden ser físicas, económicas, ambientales. El sistema recibirá datos provenientes del ambiente para que una vez procesados muestra los datos de salida bajo las reglas de operación del sistema.

El objetivo será encontrar los datos de entrada que *optimicen* la salida del sistema bajo las restricciones impuestas, es decir, dada una medida de funcionamiento del sistema, hallar la solución óptima al modelo, en otras palabras, será aquella solución que cumpla con las restricciones o reglas de operación y maximice (minimice) la medida de funcionamiento del modelo, véase [Borell, 1985].

Uno de los factores que ha influido notablemente en el crecimiento de la teoría de optimización, ha sido el auge de las computadoras a partir de la segunda mitad del siglo pasado pues la aplicación de técnicas computacionales en la solución de los problemas ha agilizado el tiempo de respuesta y facilitado la implementación de nuevos métodos numéricos.

Cabe mencionar que se ha utilizado al cálculo variacional para resolver problemas de optimización, por lo que en las siguientes secciones se analizarán algunos resultados de dicho cálculo y posteriormente aplicarlos al estudio del sistema (1.4.4).

2.1.1. Cálculo Variacional

Una de las ramas de las matemáticas que es muy útil para resolver problemas de optimización es el cálculo de variaciones o cálculo variacional. Los comienzos de dicho cálculo datan desde los grandes pensadores griegos pero es hasta el siglo diecisiete cuando se comienzan a dar los avances sustanciosos en este campo. Por ejemplo I. Newton usó principios variacionales para determinar la forma que debe tener un cuerpo en el aire para presentar la menor resistencia a éste. Así mismo, en 1696 Iohanis Bernoulli publicó una carta donde planteó el problema en la que dados dos puntos A y B en el plano que no estaban conectados por una recta vertical ni horizontal se buscaba la trayectoria que ha de seguir un objeto de A a B si el movimiento se efectuara exclusivamente bajo el efecto de la gravedad, de manera que el tiempo empleado sea mínimo. Al problema anterior se le conoce como el problema de la *braquistócrona* o el problema del *deslizamiento rápido* [Kirk, 1970].

Es necesario introducir la definición de *funcional* para señalar cual es el objetivo del cálculo variacional.

Definición 2.1. [L. Elsgoltz,1977]: *Una funcional* $J = J[f(t)]$ *es una regla de correspondencia que asigna a cada función* $f(t)$, *que pertenece a una cierta clase D de funciones* $f:[t_0,t_f] \rightarrow \Re$ *un único número real. D es llamado el dominio de la funcional y al conjunto R de números reales asociados con las funciones en D es denominado el rango de la funcional.* Es decir:

$$J[f(t)] = r, \text{ donde } f(t) \in D \xrightarrow{J} r \in R \subset \Re$$

Hay que notar que la funcional difiere de una función f, en que ésta asigna un *valor* "y" a cada *valor* de "t" que pertenezca a su dominio, es decir, en el caso de que t fuera un número real le correspondería un número real y; mientras que la funcional asigna a una *función* de su dominio un *número real*, por lo que se podría pensar que una funcional es una función de funciones.

Bajo la definición anterior, el objetivo del cálculo variacional es el estudio de los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de las funcionales y a los problemas en que se pide hallar dichos puntos críticos se les conoce como problemas variacionales, véase [Kirk, 1970].

Con el fin de obtener las condiciones necesarias que deben cumplir los valores críticos de una funcional es necesario definir otros conceptos, entre ellos el significado de que dos funciones sean cercanas, para ello será necesario definir la norma de una función.

La norma de una función es una regla de correspondencia que asigna a cada función $f(t)$ que pertenezca a D definida para $t \in [t_0,t_f]$, un número real no negativo y se denota como

$$\|f\|, \tag{2.1.1.1}$$

y tiene las siguientes propiedades:

1.- $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0$ si y solo sí $f \equiv 0$, (2.1.1.2.a)

2.- $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ para toda $\alpha \in \Re$, (2.1.1.2.b)

3.- $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$. (2.1.1.2.c)

Por lo que las funciones f_1 y f_2 serán cercanas si la norma de la función f, definida como $f = f_1 - f_2$, sea pequeña y no serán cercanas cuando la norma de f sea grande.

También será útil introducir el concepto de incremento de la función $f(t)$, mismo que se anuncia a continuación.

Definición 2.2. [Kirk, 1970]: *El incremento de la función f(t) se define como:*

$$\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t), \tag{2.1.1.3}$$

donde $t+\Delta t$ y t son elementos para los cuales la función está definida; se debe notar que el incremento de f depende tanto de t como de $t+\Delta t$, es decir:

$$\Delta f(t, \Delta t).$$

Antes de representar de forma análoga el incremento de la funcional J es necesario definir la variación del argumento $f(t)$ de la funcional $J[f(t)]$, denotado por δf, como la diferencia entre dos funciones que pertenezcan al dominio D de la funcional.

Definición 2.3. [L. Elsgoltz,1977]: *Si $f, f_1 \in D$ y t está en el dominio de estas funciones, entonces:*

$$\delta f(t) = f(t) - f_1(t). \tag{2.1.1.4}$$

Usando esta expresión nos permite definir el incremento de la funcional.

Definición 2.4. [L. Elsgoltz,1977]: *Se define al incremento de la funcional J como:*

$$\Delta J = J[f(t)+\delta f)] - J[f(t)]. \tag{2.1.1.5}$$

Es interesante analizar la variación de la funcional J ya que juega el mismo papel que desempeña la diferencial para encontrar los valores máximos y mínimos de una función.

Antes de seguir adelante hay que recordar que el incremento de una función de n variables, Δf, puede representarse en la siguiente forma

$$\Delta f(x, \Delta x) = df(x, \Delta x) + g(x, \Delta x) \ \Delta x \ , \tag{2.1.1.6}$$

donde $df(t, \Delta t)$ es una función lineal de Δt. Si $\lim_{\Delta t \to 0} \{g(t, \Delta t)\} = 0$ entonces se dice que la función f es diferenciable en t y df es la diferencial de f en el punto t (véase [Kirk, 1970] y [L. Elsgoltz,1977]). En particular si f es una función diferenciable de n variables, la diferencial df está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \Delta t_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_n} \Delta t_n = \nabla f \bullet \Delta t \ , \tag{2.1.1.7}$$

donde $\bullet$ denota el producto escalar. De forma similar, si el incremento de una funcional determinado por (2.1.1.5) puede representarse de la siguiente forma

$$\Delta J(f, \delta f) = \delta J(f, \delta f) + g(f, \delta f) \|\delta f\| , \tag{2.1.1.8}$$

donde si δJ es lineal en δf y si $\lim_{\|\delta f\| \to 0} \{g(f, \delta f)\} = 0$; se dice entonces que J es diferenciable en f y δJ es la variación de J evaluada para la función f [Kirk, 1970].

Una forma de calcular la variación de J consiste en calcular la derivada de la función $j(\alpha)\equiv J[f(t)+\alpha\delta f)]$ con respecto a α, para $\alpha = 0$ [L. Elsgoltz, 1977]. En efecto, escribiendo el incremento de la funcional (2.1.1.5) en términos de 2.1.18, es decir

$$\Delta J = J[f(t)+\alpha\delta f)] - J[f(t)] = \delta J(f,\alpha\delta f) + g(f,\alpha\delta f)\|\alpha\delta f\|, \qquad (2.1.1.9)$$

entonces la derivada de (2.1.1.9) con respecto a α, para $\alpha = 0$ es igual a

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\Delta\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\delta J(f,\alpha\delta f)+g(f,\alpha\delta f)\|\alpha\delta f\|}{\alpha} = \\ = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\delta J(f,\alpha\delta f)}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{g(f,\alpha\delta f)\|\alpha\delta f\|}{\alpha}\end{aligned} \qquad (2.1.1.10)$$

Al utilizar las propiedades de linealidad de δJ y la propiedad de norma (2.1.1.2.b) a la expresión (2.1.1.10) se obtiene la siguiente expresión

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\delta J(f,\delta f)}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{g(f,\alpha\delta f)\alpha\|\delta f\|}{\alpha}, \qquad (2.1.1.11)$$

de ahí que

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta J(f,\delta f) + \lim_{\alpha\to 0} g(f,\alpha\delta f)\|\delta f\| = \delta J(f,\delta f), \qquad (2.1.1.12)$$

ya que $\lim_{\alpha\to 0} g(f,\alpha\delta f)\to 0$ cuando $\alpha\to 0$.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[f(t)+\alpha\delta f]\Big|_{\alpha=0} = \delta J(f,\delta f). \qquad (2.1.1.13)$$

Cabe mencionar, que si J tiene primera variación en el sentido (2.1.1.8), entonces se le puede calcular usando (2.1.1.13). Dicho de otro modo, δJ en sentido (2.1.1.8) es más fuerte que δJ como $\frac{\partial}{\partial\alpha}J[f(t)+\alpha\delta f]\Big|_{\alpha=0}$

Por otro lado, no hay que olvidar que δJ es la aproximación lineal de la diferencia en la funcional J aplicada a dos curvas . Si las curvas están cercanas, $(\|\delta f\|$ pequeña$)$ entonces la variación debe ser una buena aproximación al incremento.

El procedimiento habitual para localizar puntos máximos o mínimos en las funciones nos indica que hay que hallar los puntos críticos de la misma, es decir, aquellos puntos donde la diferencial de la función es igual a cero.

Ahora bien, será necesario introducir la la definición de un máximo o un mínimo de una funcional J.

Definición 2.5. [Kirk, 1970]: *Se dice que la funcional J con dominio D tiene un extremo relativo en f^* si existe una $\varepsilon > 0$, tal que para todas las funciones f en D que cumplan con que $\|f(t) - f^*(t)\| < \varepsilon$, el incremento de J tenga el mismo signo.*

De ahí que si:

$$\Delta J = J[f(t)] - J[f^*(t)] \geq 0, \qquad (2.1.1.14)$$

entonces se dice que $J[f^*(t)]$ es un mínimo relativo, mientras que si

$$\Delta J = J[f(t)] - J[f^*(t)] \leq 0, \qquad (2.1.1.15)$$

entonces $J[f^*(t)]$ es un máximo relativo.

Si la expresión (2.1.1.14) se cumple para cualquier ε, entonces se dice que $J[f^*(t)]$ es un mínimo absoluto o global, de la misma forma, si la condición (2.1.1.15) se cumplen para cualquier ε, entonces se dice que $J[f^*(t)]$ es un máximo absoluto o global.

De forma análoga a la condición de que las derivadas deben ser igual a cero cuando una función tiene un máximo o un mínimo en un punto t; en los problemas variacionales, el *teorema fundamental del cálculo de variaciones* señala las condiciones necesarias para que una funcional alcance su máximo o su mínimo. Dicho teorema se anuncia a continuación

Teorema 2.1. (Teorema fundamental del cálculo variacional [Kirk, 1970]): *Si f^* es un máximo o un mínimo, la variación de J debe ser igual a cero en f^*, en otras palabras:*

$$\delta J(f^*, \delta f) = 0, \qquad (2.1.1.16)$$

la condición anterior se debe cumplir para toda δf admisible, esto es, que $f + \delta f$ sea un miembro de la clase D.

Demostración: El teorema anterior se demuestra por contradicción, se supone que f^* es un extremo de la funcional y que la variación para dicha función es distinta de cero, $\delta J(f^*, \delta f) \neq 0$. Recordando la expresión para el incremento ΔJ a partir de (2.1.1.5) se tiene

$$\Delta J = J[f(t) + \delta f)] - J[f(t)],$$

y por (2.1.1.8)

$$\Delta J(f,\delta f)=\delta J(f,\delta f)+g(f,\delta f)\bullet\|\delta f\|,$$

donde $g(f^*, \delta f) \to 0$ cuando $\|\delta f\| \to 0$. De ahí que debe existir una vecindad $\|\delta f\| < \varepsilon$, donde $g(f,\delta f)\bullet\|\delta f\|$ sea suficientemente pequeña tal que δJ domine la expresión para ΔJ.

Seleccionando la variación δf como

$$\delta f = \alpha\delta f^{1}, \tag{2.1.1.17}$$

y suponiendo que

$$\delta J(f^*, \alpha\delta f^1) < 0, \tag{2.1.1.18}$$

ya que δJ es una función lineal de δf del principio de homogeneidad se tiene

$$\delta J(f^*, \alpha\delta f^1) = \alpha\delta J(f^*, \delta f^1) < 0. \tag{2.1.1.19}$$

El signo de ΔJ y δJ es el mismo para $\|\delta f\| < \varepsilon$, es decir

$$\Delta J(f^*, \alpha\delta f^1) < 0. \tag{2.1.1.20}$$

Al considerar la variación

$$\delta f = -\alpha\delta f^1, \tag{2.1.1.21}$$

claramente, si $\left\|\alpha\delta f^{1}\right\| < \varepsilon$ implica que $\left\|-\alpha\delta f^{1}\right\| < \varepsilon$; por lo tanto el signo de $\Delta J(f^*,-\alpha\delta f^1)$ es el mismo que el signo de $\delta f(f^*,-\alpha\delta f^1)$. Usando nuevamente el principio de homogeneidad, se obtiene la igualdad

$$0 > \delta J(f^*,-\alpha\delta f1) = -\alpha\delta J(f^*,\delta f1). \tag{2.1.1.22}$$

De la desigualdad (2.1.1.20) se tiene que $\delta J(f^*, \alpha\delta f^1) < 0$, de lo cual infiere que

$$\delta J(f^*,-\alpha\delta f^1) > 0, \tag{2.1.1.23}$$

y a su vez se sigue de (2.1.1.22)

$$\Delta J(f^*,-\alpha\delta f^1) > 0, \tag{2.1.1.24}$$

Resumiendo, al suponer $\delta J(f^*, \delta f) \neq 0$ se obtuvo que para cualquier vecindad de tamaño $\varepsilon > 0$ para f^*, el incremento de ΔJ satisface la siguiente desigualdad

$$\Delta J(f^*, \alpha\delta f^1) < 0,$$

y

$$\Delta J(f^*, -\alpha\delta f') > 0,$$

contradiciendo la suposición de que f^* es un extremo de acuerdo a la definición de mínimo o máximo, según sea el caso, ya que no se cumple la desigualdad (2.1.1.14) o en su caso la desigualdad (2.1.1.15). Por lo tanto, si f^* es un punto extremo de la funcional, es necesario que $\delta J(f^*, \delta f) = 0$ para cualquier δf.

En la próxima sección se hará uso del teorema fundamental del cálculo variacional, visto en ésta sección para encontrar los puntos máximos que debe cumplir una funcional.

2.1.2 Problemas de optimización con condiciones en extremos

En la sección anterior se definieron varios conceptos importantes del cálculo variacional, así como el teorema fundamental para obtener extremos en funcionales. En esta sección se hará uso de dichos conceptos para encontrar el punto máximo de una funcional

$$J[x] = \int_a^T F(x, x', t)dt. \qquad (2.1.2.1)$$

Más específicamente, se plantea el siguiente problema.

Problema: *Se quiere encontrar la trayectoria $x(t)$, que pertenezca al dominio D de la funcional J, tal que maximice a la funcional J, definida por la igualdad (2.1.2.1), donde se supone que el integrando $F(x, x', t)$ tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos, además, se deben cumplir las siguientes condiciones en los extremos (iniciales y finales):*

$$x(a) = x^I, \quad x(T) = x^F,$$

es decir, que en el instante $t = a$, la trayectoria $x(t)$ debe ser igual a x^I y en el momento $t = T$ debe valer x^F.

Para resolver el problema anterior será necesario suponer que $x_0(t)$ es una solución al problema anterior, por lo tanto, además de satisfacer (2.1.2.1) satisface

$$x_0(a) = x^I \text{ y } x_0(T) = x^F,$$

definiendo al conjunto de sus trayectorias vecinas que pertenezcan a D y que cumplan con las condiciones en los extremos como

$$x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon(x(t) - x_0(t)), \qquad (2.1.2.2)$$

donde $\varepsilon \geq 0$, nótese que cuando $\varepsilon=0$ se obtiene la curva solución al problema y cuando ε sea igual a uno se tiene la curva $x(t)$.

Observe además que $(x(t) - x_0(t))$ no es otra cosa sino δx_0 (verifique la expresión (2.1.1.4)), por lo que, la igualdad (2.1.2.2) toma la siguiente forma

$$x_\varepsilon(t)=x_0(t)+\varepsilon\delta x_0, \tag{2.1.2.3}$$

Si ahora se substituye (2.1.2.3) en (2.1.2.1), se puede expresar J en términos de cualquier curva $x_\varepsilon(t)$

$$J=\int_a^T F(x_\varepsilon, x'_\varepsilon, t)dt, \tag{2.1.2.4}$$

por lo que la función objetivo quedará expresada así

$$j(\varepsilon)=\int_a^T F\big(x_0(t)+\varepsilon\delta x_0, x'_0+\varepsilon\delta x'_0, t\big)dt.$$

Esta funcional, en la familia de curvas (2.1.2.2), depende exclusivamente de ε, es decir una función de variable real y como supusimos que x_o es solución al problema de optimización, entonces $j(\varepsilon)$ alcanza un máximo en $\varepsilon=0$.

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo de variaciones, visto en la sección anterior, j alcanza un punto extremo en x_0 si

$$\delta j(x_0, \delta x_0)=0.$$

Utilizando la igualdad (2.1.1.13), se puede obtener la variación de la funcional como la derivada de j con respecto a ε y evaluando en $\varepsilon=0$.En signos matemáticos esto significa

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}j\bigg|_{\varepsilon=0}=0.$$

Debido a que j depende exclusivamente de ε, la expresión anterior toma el sencillo aspecto

$$\frac{dj}{d\varepsilon}\bigg|_0=0.$$

Por lo tanto, se necesita hallar la siguiente derivada

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=\frac{d\left(\int_a^T F\left(x_0(t)+\varepsilon\delta x_0,x'_0+\varepsilon\delta x'_0,t\right)dt\right)}{d\varepsilon},$$

para lo cual, a su vez, es necesario utilizar el Teorema A.1 (véase el Apéndice). Su uso nos permite derivar la integral con respecto al parámetro bajo el signo de integral como se muestra a continuación

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=\int_a^T\left[\frac{d\left(F\left(x_0(t)+\varepsilon\delta x_0,x'_0+\varepsilon\delta x'_0,t\right)\right)}{d\varepsilon}\right]dt,$$

derivando a $F(x_0(t),\ t,\ \varepsilon)$ con respecto a ε por medio de la regla de la cadena, donde $F_{x_0}=\dfrac{\partial F}{\partial x_0}$, se tiene

$$\frac{dF}{d\varepsilon}=\frac{\partial F}{\partial x_0}\frac{dx_0}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial x'_0}\frac{dx'_0}{d\varepsilon},$$

se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{dF}{d\varepsilon}=\delta x_0 F_{x_0}(t)+\delta x'_0\,F_{x'_0}(t),$$

de ahí que $\dfrac{dJ}{d\varepsilon}$ será igual a

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=\int_a^T\left[\delta x_0F_{x_0}(t)+\delta x_0{}'F_{x'_0}(t)\right]dt, \tag{2.1.2.5}$$

por el Teorema 2.1, es necesario que $\dfrac{dJ}{d\varepsilon}$ sea igual a cero para que la funcional alcance un máximo, lo que implica que la integral del lado derecho de la igualdad (2.1.2.5) sea también igual a cero.

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=0\Leftrightarrow\int_a^T\left[\delta x_0F_{x_0}(t)+\delta x_0{}'F_{x_0}{}'(t)\right]dt=0. \tag{2.1.2.6}$$

Integrando el segundo término de la integral anterior por partes se llega a

$$\int_a^T\left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)+\delta x_0{}'(t)F_{x_0}{}'(t)\right]dt=\delta x_0(t)F_{x'0}\Big|_a^T+\int_a^T\left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)-\delta x_0(t)\frac{d\left(F_{x_0}{}'\right)}{dt}\right]dt.$$

Es decir:

$$\int_a^T \left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)+\delta x_0'(t)F_{x_0'}(t)\right]dt=\delta x_0(T)\frac{\partial F}{\partial x_0'}\bigg|_{t=T}-\delta x_0(a)\frac{\partial F}{\partial x_0'}\bigg|_{t=a}$$
$$+\int_a^T\left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)-\delta x_0(t)\frac{d\left(F_{x_0'}\right)}{dt}\right]dt. \qquad (2.1.2.7)$$

Recordando que $\delta x_0(t)=(x(t)-x_0(t))$, entonces se tiene

$$\delta x_0(a)=x(t)-x_0(t)=x^I-x^I=0 \text{ y } \delta x_0(T)=x(t)-x_0(t)=x^F-x^F=0,$$

de ahí que la integral (2.1.2.7) se transforma en la expresión

$$\int_a^T \left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)+\delta x_0'(t)F_{x_0'}(t)\right]dt=\int_a^T\left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)-\delta x_0(t)\frac{d\left(F_{x_0'}\right)}{dt}\right]dt.$$

Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad (2.1.2.6) será necesario que

$$\int_a^T\left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)-\delta x_0(t)\frac{d\left(F_{x_0'}\right)}{dt}\right]dt=0. \qquad (2.1.2.8)$$

Aplicando el Lema A.2. (véase el Apéndice) se tiene que la igualdad anterior es posible si y sólo sí

$$F_{x_0}(t)-\frac{d\left(F_{x_0'}\right)}{dt}=0. \qquad (2.1.2.9)$$

A la igualdad (2.1.2.9) se le conoce como la **ecuación de Euler – Lagrange** y es una condición necesaria que debe cumplir una trayectoria que maximice (2.1.2.1) bajo condiciones en los extremos (véase a [Burghes,1980] para mayor referencia).

2.1.3. Problemas de optimización con condiciones libres en extremos

En la sección anterior se concluyó que la trayectoria óptima de (2.1.2.1), sujeta a $x(a)=x^I$ y $x(T)=x^F$ debe cumplir con la Euler - Lagrange (2.1.2.9). Lo que se desea en esta sección es generalizar (2.1.2.9) cuando (2.1.2.1) no esté sujeta a condiciones iniciales y/o finales x^I o x^F.

Haciendo un análisis similar al de la sección 2.1.2, suponga que x_0 es la trayectoria óptima de (2.1.2.1) con condiciones iniciales y/o finales libres, por lo que el conjunto de las trayectorias vecinas de x_0 queda expresado de forma similar, es decir

$$x_\varepsilon(t)=x_0(t)+\varepsilon\delta x_0.$$

Siguiendo los mismos pasos que en (2.1.2.4), (2.1.2.5) y (2.1.2.6) obtenemos de nuevo la ecuación (2.1.2.7)

$$\delta x_0(T)\frac{\partial F}{\partial x_0'}\bigg|_{t=T} - \delta x_0(a)\frac{\partial F}{\partial x_0'}\bigg|_{t=a} + \int_a^T\left[\delta x_0(t)F_{x_0}(t)-\delta x_0(t)\frac{d\left(F_{x_0'}\right)}{dt}\right]dt \text{ ,(2.1.3.1)}$$

pero, en este caso no podemos utilizar la condición $\delta x_0(a)=\delta x_0(T)=0$, ya que no se especificaron condiciones en los extremos.

La trayectoria óptima al problema con condiciones libres en los extremos, x_0, será también solución a un problema con condiciones en extremos predeterminadas, justamente el que tiene condiciones en los extremos coincidentes con los valores que toma x_0 en dichos extremos. Por lo tanto, x_0 debe satisfacer la ecuación de Euler – Lagrange (2.1.2.9)

$$F_x-\frac{d\left(F_{x'}\right)}{dt}=0.$$

Substituyendo (2.1.2.9) en la ecuación (2.1.3.1) se obtiene

$$\delta x_0(T)\frac{\partial F}{\partial x'}\bigg|_{t=T} - \delta x_0(a)\frac{\partial F}{\partial x'}\bigg|_{t=a}=0, \tag{2.1.3.2}$$

que debe cumplirse para cualquier función δx_0 y en particular para aquellas donde

$$\delta x_0(a)=0, \tag{2.1.3.3}$$

de ahí que

$$\delta x_0(T)\frac{\partial F}{\partial x'}\bigg|_{t=T}=0, \tag{2.1.3.4}$$

la igualdad (2.1.3.4) se cumple para $\delta x_0(T)$ arbitraria, por lo tanto:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=0 \quad \text{para } t=T, \tag{2.1.3.5}$$

de forma similar para $\delta x_0(T) = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = 0 \qquad \text{para } t = a\,. \tag{2.1.3.6}$$

Concluyendo, la trayectoria óptima que maximiza a (2.1.2.1) con condiciones libres en los extremos debe de cumplir con la ecuación de Euler – Lagrange (2.1.2.9); además si no hay condiciones iniciales, con (2.1.3.6); o en el caso que no haya condiciones finales, con la ecuación (2.1.3.5).

En la sección 2.1.2 se consideró que la funcional debía estar sujeta a condiciones en los extremos, en la sección 2.1.3 se analizó el caso en el que existen restricciones x^I o x^F en los extremos; sin embargo existen otros casos que es conveniente mencionar pero que no serán analizados en este trabajo (para mayor referencia véase [Burghes, 1980] y [Kirk, 1970]):

- Funcionales en las cuales x^F está especificada, mientras que t_f es libre
- Funcionales en las cuales x^I está especificada, mientras que t_i es libre
- Funcionales en las cuales tanto x^F como t_f son libres.

Cabe señalar que el análisis descrito tanto en esta sección como la anterior se referían a una sola función. El caso en que las funcionales involucran más de una función independiente será estudiado a continuación.

2.1.4. Generalización de la ecuación de Euler – Lagrange a $\Re^n$

Suponga que un sistema depende de n variables independientes, representadas por el vector x y se desea maximizar la siguiente funcional

$$J = \int_a^T F(x, x', t)\,dt, \qquad x \in \Re^n\,. \tag{2.1.4.1}$$

Haciendo un análisis similar al de las dos secciones anteriores, se obtienen n ecuaciones de Euler – Lagrange, es decir, la trayectoria óptima que maximice (2.1.4.1) debe satisfacer

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'_i}\right) = 0 \quad i = 1,2,3,\ldots,n\,. \tag{2.1.4.2}$$

y donde existan condiciones libres de extremos (iniciales o finales) con

$$\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0\,. \tag{2.1.4.3}$$

Como antes (2.1.4.2) y (2.1.4.3) son condiciones necesarias pero no suficientes que debe cumplir una trayectoria que maximice (2.1.4.1).

2.1.5. Multiplicadores de Lagrange

En cálculo diferencial existen problemas de optimización de una función sujeta a un conjunto de restricciones.

Suponga que se quiere maximizar la función

$$f(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots u_m), \tag{2.1.5.1}$$

sujeta a n restricciones para las variables, dichas restricciones se representarán de la siguiente forma

$$a_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots u_m) = 0 \text{ con } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.1.5.2}$$

Como n variables deben cumplir con el sistema de restricciones (2.1.5.2), entonces se tiene que existen $(n + m) - n = m$ variables independientes.

Considérese la función aumentada

$$f_L(x_1,\dots,x_n, u_1, \dots u_m, p_1,\dots, p_n) = f(x_1,\dots, x_n, u_1, \dots u_m)+\sum_{i=1}^{n} p_i a_i(x_1 \dots, x_n, u_1, \dots u_m), \tag{2.1.5.3}$$

que dependerá de $(n + m + n)$ variables, donde los valores de las variables p_i aún está por determinarse.

Nótese que la función aumentada (2.1.5.3) se consiguió simplemente sumando ceros a la función (2.1.5.2); por lo que satisfaciendo las restricciones (2.1.5.2) y maximizando a f_L los puntos críticos de f serán encontrados.

A las variables p_i donde $i = 1, \dots, n$ se les conoce como los ***multiplicadores de lagrange.***

Para encontrar los puntos extremos de la función (2.1.5.3) se debe cumplir la siguiente condición:

$$df_L(x_1,\dots,x_n, u_1, \dots u_m, p_1,\dots, p_n) = 0, \tag{2.1.5.4}$$

es decir

$$df_L = \frac{\partial f_L}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_L}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial f_L}{\partial u_1}\Delta u_1 + \cdots + \frac{\partial f_L}{\partial u_n}\Delta u_n + \frac{\partial f_L}{\partial p_1}\Delta p_1 + \cdots + \frac{\partial f_L}{\partial p_n}\Delta p_n, \quad (2.1.5.5)$$

al substituir cada $\frac{\partial f_L}{\partial p_i}$ por $a_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots u_m)$ se tiene

$$df_L = \frac{\partial f_L}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_L}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial f_L}{\partial u_1}\Delta u_1 + \cdots + \frac{\partial f_L}{\partial u_n}\Delta u_n + a_1\Delta p_1 + \cdots + a_n\Delta p_n. \quad (2.1.5.6)$$

Ahora bien, si las restricciones (2.1.5.2) se cumplen, entonces los coeficientes de Δp_i deben ser igual a cero. Por lo tanto, se deben elegir las variables p_i tal que los coeficientes de Δx_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sean igual a cero. Las restantes m Δu_j son independientes y para df_L sus coeficientes debe desaparecer.

Por lo tanto, una de las condiciones necesarias que debe satisfacer el punto máximo es el siguiente sistema de ecuaciones.

$$a_i(x_1, \cdots x_n, u_1, \cdots, u_1, \cdots u_m) = 0, \quad (2.1.5.7.a)$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1.5.7.b)$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial u_j} = 0. \quad (2.1.5.7.c)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Para mayor referencia véase [Marsden, 1988]

2.2. PROBLEMAS DE CONTROL

El modelo matemático de un problema de control consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales que satisface la variable de **estado** $x: \Re \to \Re^n$, la cual estará determinada por la función $u: \Re \to U \subset \Re^m$, denominada ***control***, por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \text{con } 0 \le t \le T, \quad (2.2.1)$$

donde $f: \Re^{n+m} \to \Re^n$. Escrito explícitamente, este sistema es

$$x_1'(t) = f_1(x(t), u(t), t)$$
$$\vdots \qquad \text{con } 0 \leq t \leq T.$$
$$x_n'(t) = f_n(x(t), u(t), t)$$

Además, el sistema estará sujeto a las siguientes condiciones

$$x(0) = x_0, \tag{2.2.2}$$

$$x_l(T) = x_l^F, \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, q \quad \text{con} \quad q \leq n. \tag{2.2.3}$$

Cabe mencionar que al subconjunto $U \subset \Re^m$ se le denomina subconjunto admisible.

Lo que se pretende en los problemas de control es encontrar la función $u(t): \Re \rightarrow U \subset \Re^m$ tal que bajo (2.2.1) y satisfaciendo a (2.2.2) y a (2.2.3), la función de estado $x(t)$ siga una trayectoria $x(t)^*$ preestablecida.

2.3 PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

En la sección 2.1 se introdujeron algunas ideas del cálculo variacional que utilizaremos para el estudio de problemas de control óptimo. Éstas nos permitirán analizar las condiciones que debe cumplir la solución al problema de **control óptimo** que, como dijimos al inicio de este capítulo, consiste en encontrar u que bajo las siguientes restricciones

$$x' = f(x, u, t), \tag{2.3.1}$$

y condiciones iniciales

$$x(a) = x^I, \tag{2.3.2}$$

maximice a la funcional

$$J = \int_0^t f0(x, u, t)dt. \tag{2.3.3}$$

Es decir, determinar el control u^*, tal que el sistema (2.3.1) junto con las condiciones iniciales (2.3.2) siga una trayectoria x^* que maximice la función objetivo (2.3.3).

En otras palabras, aplicando la definición de máximo de la sección 2.1 se debe cumplir con la desigualdad (2.1.1.15)

$$\Delta J = J[f(x, u, t)] - J[f^*(x)] \leq 0,$$

es decir

$$J^*\left(x^*,u^*,t\right)\geq J(x,u,t)=\int_0^t f_0(x,u,t)dt, \qquad (2.3.4)$$

para toda $u \in U$ que haga que el sistema siga una trayectoria x [Bensoussan, 1974].

2.4. EL HAMILTONIANO

En las secciones 2.1.2 y 2.1.3 se obtuvieron las condiciones necesarias para obtener los puntos críticos de una funcional sujeta a condiciones en los extremos. Sin embargo, en los problemas de control óptimo la situación es un poco más complicada ya que, como se mencionó en la sección 2.3, la trayectoria de estado x está determinada por una ecuación diferencial que depende de u. De tal manera que si $x:\Re\to\Re^n$ y $u:\Re\to\Re^m$ la funcional dependerá de $(n+m)$ funciones, de las cuales m (los controles) son independientes, mientras que las otras n variables (las variables de estado) tienen una dinámica dependiente de las anteriores (los controles).

El problema de control óptimo planteado en la sección (2.3)

$$\max J = \max \int_0^T f_0(x,u,t)dt,$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x' &= f(x,u,t) \quad x\in\Re^n, \\ x(a) &= x^I, \end{aligned}$$

puede equipararse a un problema de optimización con restricciones como los analizados en la sección 2.1 y aplicar los multiplicadores de Lagrange vistos en la sección 2.1.5. El análisis, para resolver el problema de control óptimo, se realizará inicialmente cuando sólo exista una variable de estado, es decir cuando x sea una función real, por lo que aplicando un multiplicador para (2.3.1) en (2.3.3), obtenemos la siguiente funcional:

$$J^* = \int_0^T [f_0(x,u,t)+\lambda(f(x,u,t)-x')]dt. \qquad (2.4.1)$$

Renombrando el integrando como

$$F(x,u,t,\lambda)=f_0(x,u,t)+\lambda(f(x,u,t)-x'), \qquad (2.4.2)$$

las ecuaciones de Euler – Lagrange deducidas en la sección 2.1 para x y u, de la igualdad (2.4.2) tendrán la siguiente forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda'=0, \tag{2.4.3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f}{\partial u}=0, \tag{2.4.4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=0 \quad \text{en } t=T, \tag{2.4.5}$$

por lo tanto, la trayectoria óptima al problema (2.3.3) con una sola variable de estado x, sujeta a la ecuación diferencial (2.3.1) y a las condiciones iniciales (2.3.2) necesariamente deberá de cumplir con (2.4.3), (2.4.4) y (2.4.5).

Defínase la función $H:\Re^{n+m+l+n}\rightarrow\Re^{n}$ de la siguiente forma:

$$H(x,u,t,\lambda)=f_0(x,u,t)+\lambda f(x,u,t), \tag{2.4.6}$$

a dicha función se le conoce como el ***Hamiltoniano*** [Burghes, 1980].

En términos del Hamiltoniano el problema y las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.4) quedan expresadas como:

$$\lambda'=-\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2.4.7}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial u}, \tag{2.4.8}$$

y cuando existan condiciones finales libres:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=0 \quad \text{cuando } t=T, \tag{2.4.9}$$

es decir que $\lambda=0$ en $t=T$, para aquellas componentes de $x(T)$ libres

Las ecuaciones (2.4.7), (2.4.8), (2.4.9) y la ecuación $x'=f(x,u,t)$ (2.3.1); gobiernan la trayectoria que maximiza a la función objetivo (2.3.3), es decir a: $J=\int_0^t f0(x,u,t)dt$.

2.5. GENERALIZACIÓN DEL HAMILTONIANO

En las secciones anteriores se trató el caso de optimización de un proceso con una sola variable de estado, veamos ahora el problema de optimización cuando hay más de una.

Problema. *Hallar u tal que:*

$$MaxJ = Max\left[\int_a^T f_0(x,u,t)dt\right],\ con\ x \in \Re^n\ y\ u \in \Re^m. \tag{2.5.1}$$

donde cada una de las componentes x_i de x, satisface una ecuación diferencial, es decir,

$$x'_i = f_i(x,u,t) \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.5.2}$$

y con las siguientes condiciones en los extremos:

i) $x(a)=x^I$,

ii) $x\ (T)= x^F$ *donde sólo* $x(T)_k^F$ *con* $k = q+1, \ldots, n$ *con* $q \geq 0$ *tiene condiciones finales libres.*

De forma análoga a como se hizo en la sección 2.4, introduciremos los multiplicadores de Lagrange, pero en este caso será necesario introducir n multiplicadores a (2.5.1), uno por cada ecuación de estado que por (2.5.2), por lo que se deberá optimizar a la siguiente función

$$J^* = \int_a^T\left[f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(f_i - x'_i)\right]dt. \tag{2.5.3}$$

De forma análoga a la sección 2.4, se define a F como

$$F = \left[f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(f_i - x'_i)\right]. \tag{2.5.4}$$

La función (2.5.4) depende de x, u y t, por lo que las ecuaciones de Euler – Lagrange toman la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'_i}\right) = 0 \ \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.5.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_j}\right) = 0 \text{ con } j=1,2, \ldots m; \tag{2.5.6}$$

y en los puntos donde existan condiciones finales libres, se debe cumplir

$$\frac{\partial F}{\partial x'_k} = 0 \text{ en } t = T \text{ con } k=q+1, \ldots, n \text{ y } q>0, \tag{2.5.7}$$

definiendo el hamiltoniano de una forma similar a (2.4.6). Luego, tenemos

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i . \tag{2.5.8}$$

Por lo que las ecuaciones (2.5.5) y (2.5.6) en términos de H, se expresarán como

$$\lambda'_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{2.5.9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \tag{2.5.10}$$

mientras que la ecuación (2.5.7) no se alterará, quedando

$$\lambda_k = 0 \text{ en } T, \tag{2.5.11}$$

con $k = q+1, \ldots, n$ y $q>0$ cuando en los puntos finales no se especifiquen condiciones para la variable de estado correspondiente.

Es decir, que la trayectoria óptima que maximice (2.5.1) debe de satisfacer: (2.5.9), (2.5.10), (2.5.11) y el sistema de n - ecuaciones diferenciales (2.5.2).

Al conjunto de ecuaciones (2.5.11) se le conoce como condiciones de **transversalidad**, a cada uno de los multiplicadores de Lagrange λ se les denomina variables adjuntas y por ende, a las ecuaciones (2.5.9) se les llama **ecuaciones adjuntas**, véase [Burghes,1980].

Resumiendo, la trayectoria que maximiza a $J(x, u, t)$ debe cumplir con las ecuaciones adjuntas, con el conjunto de ecuaciones (2.5.10), $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, y el sistema de ecuaciones diferenciales (2.5.2).

Las técnicas analizadas en este capítulo serán de utilidad para obtener las condiciones necesarias que debe cumplir la trayectoria que maximice el modelo (1.4.4). En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos al aplicar dichas técnicas al modelo de la sección 1.4.

Capítulo 3

APLICACIÓN AL MODELO

Hay que recordar del Capítulo 1 que el objetivo principal de la empresa es obtener la mayor cantidad de dividendos para los socios al explotar el recurso natural del cual tienen la concesión.

Además, la dinámica de población debe cumplir una serie de supuestos indicados en las secciones 1.1 y 1.2 así como supuestos financieros descritos en la sección 1.3 los cuales son las restricciones al modelo de la sección 1.4. Así mismo, como se mencionó, el modelo es un problema típico de control óptimo.

Por lo tanto, se pueden aplicar las herramientas presentadas en el capítulo 2 y obtener, de esta manera, las condiciones necesarias que debe cumplir la solución óptima al modelo.

3.1. CASO GENERAL

Para obtener la solución al problema de control óptimo (1.4.4), será necesario utilizar la metodología estudiada en la sección 2.5; donde las variables de estado serán la población P y el capital invertido X, mientras que las variables de control son los dividendo D y el esfuerzo E realizado en la captura.

$$MaxJ = Max \int_0^T e^{-it} D(t)dt$$

$$s.a:$$

(1.4.4):

$$\begin{aligned}
&P' = F(P) - \Phi(P,E) \\
&X' = p\Phi(P,E) - (c+d)E - C(B) - D(t) \\
&D(t) > 0 \\
&E(t) > 0 \\
&P(t_0) = P_0.
\end{aligned}$$

Nótese que el modelo (1.4.4), es similar al sistema (2.5.1) sujeto al sistema de ecuaciones diferenciales (2.5.2), por lo que el Hamiltoniano al modelo anterior tendrá la forma

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\,, \tag{3.1.1}$$

es decir

$$H = e^{-it} D(t) + \lambda_1 \left[F(P) - \Phi(P, E)\right] + \lambda_2 \left[p\Phi(P, E) - (c+d)E - C(B) - D(t)\right]. \tag{3.1.2}$$

Las ecuaciones adjuntas provenientes del Hamiltoniano (3.1.2) serán las siguientes:

i) Para $P(t)$

$$\dot{\lambda_1} = -H_P\,, \tag{3.1.3}$$

donde

$$\dot{\lambda_1} = -\left\{\left(F'(P) - \frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\lambda_1 + \lambda_2\left[p\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right]\right\}; \tag{3.1.4}$$

ii) Para X(t)

$$\dot{\lambda_2} = -H_X\,, \tag{3.1.5}$$

por lo tanto

$$\dot{\lambda_2} = -\lambda_2 C'(B)\,. \tag{3.1.6}$$

Como en la sección 2.5, el Hamiltoniano debe cumplir con las siguientes ecuaciones para las variables de control:

i) Para el esfuerzo $E(t)$

$$H_E = 0\,, \tag{3.1.7}$$

donde

$$H_E = -\lambda_1 \frac{\partial\Phi}{\partial E} + \lambda_2\left[p\frac{\partial\Phi}{\partial E} - (c+d) - C'(B)\right]; \tag{3.1.8}$$

ii) En el caso de los dividendos D

$$H_D = 0, \tag{3.1.9}$$

donde

$$H_D = e^{-it} - \lambda_2. \tag{3.1.10}$$

De (3.1.9) y (3.1.10) se obtiene el valor explícito para λ_2, ya que

$$0 = e^{-it} - \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = e^{-it}, \tag{3.1.11}$$

y al substituir (3.1.11) en (3.1.6) se obtiene la siguiente igualdad

$$\lambda'_2 = -\lambda_2 C'(B),$$
$$-ie^{-it} = -e^{-it}C'(B),$$

de donde es posible obtener la siguiente expresión analítica para C'.

$$C'(B) = i. \tag{3.1.12}$$

Así mismo, de la igualdad (1.3.4) se puede obtener otra expresión para la derivada de C como se muestra a continuación.

De (1.3.4):
$$C(B) = \begin{cases} r_0 B & B \le 0 \\ r_0 B + kB^2 & B > 0, \text{ y } k > 0, \end{cases}$$

se sigue

$$\frac{dC(B)}{dB} = \begin{cases} r_0 & B \le 0 \\ r_0 + 2kB & B > 0, \text{ y } k > 0, \end{cases}$$

de ahí que

$$i = r_0 \quad \text{ó} \quad i = r_0 + 2kB.$$

Ahora bien, del supuesto (1.3.4') de que $i > r_0$ se rechaza inmediatamente la posibilidad de que i sea igual a r_0 y por lo tanto, se obtiene que B debe ser una constante positiva. La cual, al despejarse de $i = r_0 + 2kB$, se tiene que

$$B=\frac{i-r_0}{2k}. \tag{3.1.13}$$

Es decir, la empresa utilizará el préstamo al que tiene derecho y éste será por una cantidad igual a (3.1.13)

Por otro lado, remplazando el valor de (3.1.11) en (3.1.4) se obtiene la siguiente ecuación adjunta

$$\lambda'_1=-\left\{\left(F'(P)-\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\lambda_1+e^{-it}\left[p\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right]\right\}, \tag{3.1.14}$$

y substituyendo (3.1.11) y (3.1.12) en (3.1.8) se tiene la siguiente condición de transversalidad

$$-\lambda_1\frac{\partial\Phi}{\partial E}+e^{-it}\left[p\frac{\partial\Phi}{\partial E}-(c+d)-i\right]=0. \tag{3.1.15}$$

Al considerar a la ecuación (3.1.13) y utilizando (1.3.8), (1.3.9) y (1.3.10)

$$\begin{aligned}
&(3.1.13): && B=\frac{i-r_0}{2k},\\
&(1.3.8): && E(t)=E_{max}=K(t),\\
&(1.3.9): && K(t)=X(t)+B,\\
&(1.3.10): && E(t)=X(t)+B,
\end{aligned}$$

se infiere que

$$X'=E', \tag{3.1.17}$$

con lo que la ecuación (1.4.2), al utilizar (3.1.17) se reduce a

$$E'=X'=p\Phi(P,E)-(c+d)E-C(B)-D(t). \tag{3.1.18}$$

En forma general, la ecuaciones adjuntas (3.1.14), la condición de transversabilidad (3.1.15), la igualdad (3.1.18) y el modelo de crecimiento poblacional (1.4.3), forman el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
P'&=f_1(P,E), && (3.1.19.a)\\
E'=X'&=f_2(P,E,D), && (3.1.19.b)\\
\lambda'_1&=f_3(P,E,\lambda_1), && (3.1.19.c)\\
0&=G(P,E,\lambda_1). && (3.1.19.d)
\end{aligned}$$

Donde

$$
\begin{aligned}
f_1 &= F(P) - \Phi(P,E), \\
f_2 &= p\Phi(P,E) - (c+d)E - C(B) - D(t), \\
f_3 &= -\left\{\left(F'(P) - \frac{\partial\Phi(P,E)}{\partial P}\right)\lambda_1 + e^{-it}\left[p\frac{\partial\Phi(P,E)}{\partial P}\right]\right\}, \\
G(P,E,\lambda_1) &= -\lambda_1 \frac{\partial\Phi(P,E)}{\partial E} + e^{-it}\left[p\frac{\partial\Phi(P,E)}{\partial E} - (c+d) - i\right].
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si

$$
Y = \begin{pmatrix} P \\ E \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \tag{3.1.20}
$$

el sistema (3.1.19) se escribiría de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Y' &= f(Y,D), \\
0 &= G(Y).
\end{aligned} \tag{3.1.21}
$$

el conjunto de ecuaciones (3.1.21) es un problema de control con trayectoria prescrita.

Sistemas en los que aparecen ecuaciones diferenciales y algebraicas, similares a (3.1.21) son conocidos como *Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDA's).*

3.2. CASO PARTICULAR

Si el crecimiento de una población está regido por la ecuación diferencial

$$
\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \text{ con } a,b \in \Re^{+}. \tag{3.2.1}
$$

La ecuación (3.2.1) es conocida como *ecuación logística* y si la razón de captura es la siguiente:

$$
\Phi(P,E) = qPE. \tag{3.2.2}
$$

entonces la dinámica de la población de la ecuación diferencial queda expresada de la siguiente forma

$$\frac{dP}{dt} = P(a-bP) - \Phi(P,E).$$

El sistema (3.1.19) de la sección 3.1 queda expresado, para el caso particular, de la siguiente manera

$$P' = f_1(P,E), \tag{3.2.3.a}$$
$$E' = f_2(P,E,D), \tag{3.2.3.b}$$
$$\lambda'_1 = f_3(P,E,\lambda_1), \tag{3.2.3.c}$$
$$0 = G(P,\lambda_1). \tag{3.2.3.d}$$

Donde

$$f_1 = P(a-bP) - qEP,$$
$$f_2 = [pqP(t) - c - d]E(t) - C(B) - D(t),$$
$$f_3 = \{(qE - a + 2bP)\lambda_1 - e^{-it} pqE\},$$
$$G(P,\lambda_1) = -\lambda_1 qP + e^{-it}[pqP - (c+d) - i].$$

De forma similar a la sección anterior, si:

$$Y = \begin{pmatrix} P \\ E \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \tag{3.2.4}$$

el sistema (3.2.3) se escribiría de la forma (3.2.5).

$$\begin{aligned} Y' &= f(Y,D), \\ 0 &= G(P,\lambda_1). \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Nuevamente, el conjunto de ecuaciones (3.2.5) es un problema de control con trayectoria prescrita y un sistema de EDA's

Nótese que, para el caso particular, la parte algebraica del sistema (3.2.5) depende solamente de P y λ_1, a diferencia de la parte algebraica del sistema (3.1.21) que en principio dependería del vector $Y = (P, E, \lambda_1)^T$.

El análisis de las EDA's, su importancia y sus complicaciones numéricas serán estudiadas en el Capítulo 4

Capítulo 4

ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS

Cuando se tiene un sistema de la forma

$$A(x,t)x' = f(x,t),$$

y si la matriz $A(x,t)$ es no singular, la solución se podrá entonces obtener como $x' = A(x,t)^{-1} f(x,t)$. Los problemas surgen cuando no existe la inversa de la matriz $A(x,t)$, es decir cuando el sistema a resolver se trate de una *ecuación diferencial algebraica* (*EDA's*) cuyas características y dificultades numéricas al tratar de resolverlas serán objeto de estudio en este capítulo.

4.1. DEFINICIONES

Los modelos que dependen del tiempo t, frecuentemente adquieren la forma del siguiente sistema

$$F(y', y, t) = 0, \tag{4.1.1}$$

donde el dominio de F es un subconjunto abierto contenido en $\Re^n \times \Re^n \times \Re$ y la función F es continuamente diferenciable.

Si la inversa de la matriz $\frac{\partial F}{\partial y'}$ existe, es decir si el determinante de $F_{y'}$ es distinto de cero cerca de una solución dada, entonces el sistema (4.1.1) define localmente a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) como el conjunto de ecuaciones

$$y' = f(y,t). \tag{4.1.2}$$

Cuando $\frac{\partial F}{\partial y'}$ es singular, el sistema (4.1.1) no podrá rescribirse como en (4.1.2). En este caso se le denominará sistema de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDA's).

El caso más común de EDA's es el de EDA's semiexplícitas representado por el sistema

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y,z,t), && (4.1.3.a)\\
0 &= h(y,z,t), && (4.1.3.b)
\end{aligned}
$$

donde $f : D \subset \Re^{n_1} \times \Re^{n_2} \times \Re \rightarrow \Re^{n_1}$ y $h : D \subset \Re^{n_1} \times \Re^{n_2} \times \Re \rightarrow \Re^{n_2}$; es un sistema de EDA's porque existen restricciones algebraicas explícitas en el conjunto de ecuaciones (4.1.3.b). Si se rescribe el sistema anterior de forma similar al del sistema (4.1.1), es decir

$$F(x',x,t)=0,$$

con $x^T=(y^T,z^T)$, se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (4.1.4)$$

donde (4.1.4) es una matriz singular [Velasco,2002].

Derivando el conjunto de ecuaciones (4.1.3.b) con respecto a t se obtiene la siguiente igualdad

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y,z,t), && (4.1.5.a)\\
h_y(y,z,t)y'+h_z(y,z,t)z' &= -h_t(y,z,t), && (4.1.5.b)
\end{aligned}
$$

y si la matriz h_z es no singular, es inmediato obtener una expresión para z'

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y,z,t), && (4.1.5.a)\\
z' &= h_z(y,z,t)^{-1}\left(-h_t(y,z,t)-h_y(y,z,t)f(y,z,t)\right), && (4.1.5.b)
\end{aligned}
$$

por lo que derivando una vez el sistema (4.1.3) se transformó a un sistema de EDO's, se dice entonces que la EDA (4.1.3) es de índice uno.

Definición 4.1. [Velasco,2002]: *El índice de un sistema de EDA's es el mínimo número de veces que hay que derivar (parte o todo) el sistema (4.1.1) para transformarlo en un sistema de EDO's. Bajo esta definición las EDO's se consideran EDA's de índice cero.*

Otra de las diferencias entre las EDA's y las EDO's es que no todas las condiciones iniciales son válidas para las EDA's.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_3 \\ x'_2 &= x_1 \\ x_2 &= g(t), \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

dicho sistema tendrá como solución única

$$\begin{aligned} x_2 &= g(t) \\ x_1 &= g'(t) \\ x_3 &= g''(t), \end{aligned}$$

donde las condiciones iniciales están totalmente determinadas y relacionadas entre sí ya que existen restricciones algebraicas implícitas en el sistema (4.1.6).

Algunas de las características de los sistemas de EDA's se puede verificar por medio del sistema lineal

$$Nv'+v = q(t), \tag{4.1.7}$$

donde N es una matriz k-nilpotente, $v, q \in \mathfrak{R}^n$ y $t \in \mathfrak{R}$.

En particular, rescribiendo el sistema (4.1.7) se tiene

$$(ND+I)v = q(t), \tag{4.1.8}$$

donde D es el operador diferencial $\frac{d}{dt}$; la solución al sistema (4.1.8) está determinada por

$$v = (ND+I)^{-1}q(t) = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i N^i q^{(i)}(t). \tag{4.1.9}$$

De (4.1.9) y de la solución a (4.1.6) se deduce que las soluciones pueden depender de las derivadas del término de fuerza o no-homogéneo $q(t)$ (ó de $g(t)$)en contraste con las EDO's que dependen de la integración del término $q(t)$; también como consecuencia de (4.1.9) las soluciones a (4.1.7) pueden ser discontinuas, véase [Velasco,2002].

4.2. DIFICULTADES NUMÉRICAS

Una cierta clase de EDA's se pueden considerar como el caso límite de algunas ecuaciones diferenciales rígidas. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones con perturbaciones singulares :

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y,t) \\ \varepsilon y' &= g(x,y,t), \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales y algebraicas, es decir:

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y,t) \\ 0 &= g(x,y,t). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Por lo que al tratar de resolver (4.2.2) numéricamente se tendrán que enfrentar problemas de estabilidad.

4.2.1. Métodos en diferencias

Una forma común de resolver las EDO's es por medio de los **métodos de una pierna,** por su nombre en inglés *"one leg"*, y los **métodos lineales multipasos** [Velasco, 2002].

Considérese la siguiente ecuación diferencial

$$y' = g(t,y). \tag{4.2.1.1}$$

El método de una pierna para resolver la ecuación (4.2.1.1) será el siguiente

$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j y_{n-j} = hg\left(\sum_{j=0}^{s} \beta_j t_{n-j}, \sum_{j=0}^{s} \beta_j y_{n-j} \right). \tag{4.2.1.2}$$

Es decir, que en los métodos de una pierna se realiza una sola evaluación de la función $g(t,y)$, donde los parámetros de entrada serán aproximaciones lineales apropiadas, o promedios de $s+1$ puntos anteriores, del tiempo t y del campo vectorial, en otras palabras, el paso h se dará en base a un punto promedio de $s+1$ evaluaciones del valor del campo vectorial de la función $g(t,y)$, véase [Henrici, 1964] y [Velasco, 2002].

En cambio, el método lineal multipaso aplicado a la ecuación diferencial (4.2.1.1) es el mostrado por medio de

$$\sum_{j=0}^{s}\alpha_j y_{n-j}=h\sum_{j=0}^{s}\beta_j g\left(t_{n-j},y_{n-j}\right). \tag{4.2.1.3}$$

En este método, la solución dependerá de un promedio de evaluaciones de la función $g(t,y)$ en contraste al método de una sola pierna que sólo requirió de una sola evaluación del campo vectorial.

Por cuestiones de normalidad se pide que $\alpha_0 = 1$ y que $|\alpha_s|+|\beta_s|\neq 0$ para dar efectivamente los pasos requeridos.

Cabe hacer notar que si la ecuación diferencial (4.2.1.1) fuera autónoma, es decir

$$y'=g(y),$$

y si además la función $g(y)$ fuera lineal, sería lo mismo utilizar el método de una sola pierna o el método lineal multipaso.

Los métodos anteriores se pueden extender para obtener la solución a EDA's incluyendo el caso general, es decir a ecuaciones de la forma (4.1.1).

Por lo que, aplicando el método de una sola pierna a EDA's implícitas, estas obtendrán la forma representada por la ecuación

$$F\left(\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j y_{n-j},\sum_{j=0}^{s}\beta_j y_{n-j},\sum_{j=0}^{s}\beta_j t_{n-j}\right)=0, \tag{4.2.1.4}$$

véase [Velasco, 2002].

De esta forma se obtiene un sistema en las y_{n-j} provenientes de la solución mostrada en (4.2.1.2) utilizando método de una sola pierna y del cual se puede obtener y_n.

Ahora bien, considérese la siguiente EDA lineal de coeficientes constantes

$$Ay'+By=f(t), \tag{4.2.1.5}$$

donde $A, B\in\Re^{m\times m}$, $y\in\Re^m$, con A singular.

Aplicando el método de una sola pierna a la ecuación (4.2.1.5) se obtendrá la siguiente expresión

$$A\left(\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j y_{n-j}\right)+B\left(\sum_{j=0}^{s}\beta_j y_{n-j}\right)=f\left(\sum_{j=0}^{s}\beta_j t_{n-j}\right). \tag{4.2.1.6}$$

De la igualdad (4.2.1.6) se obtiene un sistema lineal en función de las y_{n-j} , donde j tomará valores desde 1 hasta "s", con el que se podrá calcular y_n. El sistema para obtener y_n se muestra a continuación

$$A\left(\frac{1}{h}\alpha_0 y_n\right)+B(\beta_0 y_n)=f\left(\sum_{j=0}^{s}\beta_j t_{n-j}\right)-A\left(\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{s}\alpha_j y_{n-j}\right)-B\left(\sum_{j=1}^{s}\beta_j y_{n-j}\right). \quad (4.2.1.7)$$

Recordando la condición de normalidad impuesta a $\alpha_0 = 1$, permite rescribir el sistema (4.2.1.7) de la siguiente forma

$$\left(\frac{1}{h}A+\beta_0 B\right)y_n = f\left(\sum_{j=0}^{s}\beta_j t_{n-j}\right)-A\left(\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{s}\alpha_j y_{n-j}\right)-B\left(\sum_{j=1}^{s}\beta_j y_{n-j}\right). \quad (4.2.1.8)$$

El cuál tendrá solución sí y solo sí la matriz

$$\left(\frac{1}{h}A+\beta_0 B\right), \quad (4.2.1.9)$$

es no singular.

Recordando que A es singular, el sistema (4.2.1.8) no tendrá, en general, solución al no ser que $\beta_0 \neq 0$, con lo que quedan excluidos los métodos explícitos y se deberá utilizar los métodos implícitos para la solución de EDA's [Velasco, 2002].

Para ejemplificar lo anterior tomemos un sistema de la forma (4.1.7) , es decir, sea:

$$Nv'+v=q(t), \quad (4.2.1.10)$$

con $N \in \Re^{n\times n}$; $v,\ q(t) \in \Re^n$ y donde N es además una matriz diagonal por bloques de Jordan, es decir

$$N=\begin{bmatrix} \left[J^1\right] & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \left[J^n\right] \end{bmatrix}, \quad (4.2.1.11)$$

donde si $J^k \in \Re^{n_k \times n_k}$ es la submatriz k- ésima que pertenece a la diagonal de la matriz N, será de la siguiente forma

$$J_{ij}^k = \begin{cases} 1 & si\ j = i+1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

Aplicando el método de una sola pierna al sistema (4.2.1.10) se tendrá como en (4.2.1.6) la siguiente expresión

$$N\left(\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j v_{n-j}\right) + I\sum_{j=0}^{s}\beta_j v_{n-j} = q\left(\hat{t}_n\right), \tag{4.2.1.12}$$

donde

$$\hat{t}_n = \sum_{j=0}^{s}\beta_j t_{n-j}.$$

De forma similar a (4.2.1.8) la solución al sistema se encuentra calculando a v_n del sistema lineal (4.2.1.12), por medio de la igualdad (4.2.1.13).

$$\left(\frac{1}{h}N + \beta_0 I\right)v_n = q\left(\hat{t}_n\right) - N\left(\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{s}\alpha_j v_{n-j}\right) + I\sum_{j=1}^{s}\beta_j v_{n-j}. \tag{4.2.1.13}$$

Por lo que la solución al sistema (4.2.1.10) dependerá de que la matriz $\left(\frac{1}{h}N + \beta_0 I\right)$ sea no singular. Lo cual bastará, como se vio anteriormente, que β_0 sea distinta de cero.

Existen otras condiciones que deben de cumplirse para resolver las EDA's, que salen a la luz al aplicar el método implícito de una sola pierna a sistemas de la forma (4.2.1.10), cuando la matriz N es igual a cero. En ese caso se tiene la siguiente ecuación en diferencias de la igualdad (4.2.1.12)

$$\sum_{j=0}^{s}\beta_j v_{n-j} = q\left(\hat{t}_n\right), \tag{4.2.1.14}$$

es decir

$$\beta_0 v_n + \ldots + \beta_s v_{n-s} = q\left(\hat{t}_n\right). \qquad (4.2.1.15)$$

El sistema autónomo de la ecuación (4.2.1.15) es el representado por medio de la igualdad

$$\beta_0 v_n + \ldots + \beta_s v_{n-s} = 0, \qquad (4.2.1.16)$$

y de la igualdad anterior se tiene que

$$\beta_0 v_n = \beta_1 v_{n-1} - \cdots - \beta_s v_{n-s}. \qquad (4.2.1.17)$$

Asociado a la ecuación en diferencias (4.2.1.17) se tiene un polinomio denominado ***polinomio característico*** del método, el cual esta representado por medio de

$$p(\lambda) = \beta_0 \lambda^s - \beta_1 \lambda^{s-1} - \cdots - \beta_{s-1}\lambda - \beta_s. \qquad (4.2.1.18)$$

véase [Velasco, 2002].

Ahora bien, sea ξ, que pertenece al campo complejo, raíz del polinomio (4.2.1.18), y si se define a $u_n = \xi^n$, ésta será solución de la ecuación (4.2.1.16) ya que

$$\beta_0 u_n + \cdots + \beta_s u_{n-s} = 0,$$

$$\beta_0 \xi^n + \beta_1 \xi^{n-1} + \cdots + \beta_{s-1}\xi^{n-s+1} + \beta_s \xi^{n-s} = 0, \qquad (4.2.1.19)$$

factorizando a ξ, de la ecuación anterior se obtiene la siguiente igualdad

$$\xi^{n-s}\left(\beta_0 \xi^s + \beta_1 \xi^{s-1} + \cdots + \beta_{s-1}\xi + \beta_s\right) = 0, \qquad (4.2.1.20)$$

y al substituir el segundo factor por el polinomio (4.2.1.18) se consigue la expresión:

$$\xi^{n-s} p(\xi) = 0. \qquad (4.2.1.21)$$

La ecuación anterior tiene como soluciones:

i. La trivial $\xi = 0$ ó
ii. Cualquier raíz ξ del polinomio característico $p(\lambda)$.

En general si ξ_i con $i = 1, 2, \ldots, s$ son las raíces distintas del polinomio característico asociado a (4.2.1.17) cualquier solución a dicho sistema se podrá expresar en términos de una combinación lineal única de sus raíces, es decir, si $\hat{u}_n$ es solución a (4.2.1.17), ésta se podrá escribir como

$$\hat{u}_n = \sum_{i=1}^{s} b_i \xi_i^n . \tag{4.2.1.22}$$

Cabe mencionar que, si se define a $u_n = \xi^n$, solución a la homogénea (4.2.1.16) y si $v_n{}^*$ es una solución particular al (4.2.1.15), la combinación

$$w_n = v_n{}^* + u_n, \tag{4.2.1.23}$$

también será solución a la ecuación (4.2.1.15).

Por otro lado, supóngase que ξ es raíz fuera del círculo unitario, entonces de la combinación lineal (4.2.1.19), al substituir el valor de $u_n=\xi^n$, muestra que existe inestabilidad en el método en el segundo término de la igualdad (4.2.1.23).

Es decir, si

$$w_n = v_n{}^* + \xi^n. \tag{4.2.1.24}$$

cuando $n \to \propto \;\Rightarrow\; \xi^n \to \propto$.

Además, si de las raíces ξ_i con $i = 1, 2, \ldots, k$ del polinomio (4.2.1.18) son raíces distintas de multiplicidad $(m_i + 1)$ y utilizando el Teorema A.3 (véase el Apéndice), se tiene que la secuencia definida por

$$x_n = n(n-1)\cdots(n-m+1)\xi_i^{n-m},$$

donde $m = 0, 1, \ldots, m_i$ y $i = 1, 2, \ldots, k$ forma un sistema de soluciones.

Por lo que cuando existen k raíces múltiples en el polinomio característico asociado a (4.2.1.17), se tiene que $x_n = n\xi_i^{n-1}$ también será solución al polinomio característico de ahí que si $\xi_i \geq 1$, se tendrá que cuando

$$n \to \propto \;\Rightarrow\; x_n \to \propto ,$$

es decir, el método será inestable.

Por lo anterior, es necesario, para que el método sea estable, que las raíces del polinomio característico (4.2.1.18) sean de norma menor o igual a uno y en el caso de que existan raíces de norma uno, estas deberán ser simples.

La condición más sencilla para que las *betas*, aseguren la estabilidad del polinomio característico asociado a (4.2.1.17), es la siguiente

$$\beta_0 = 1, \ \beta_1 = \ldots = \beta_s = 0 . \qquad (4.2.1.25)$$

Por lo que, substituyendo la condición (4.2.1.25) en la aplicación del método de una sola pierna a EDA's implícitas en el modelo (4.2.1.4), este presentará la forma general

$$F\left(\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j y_{n-j}, y_n, t_n\right) = 0 . \qquad (4.2.1.26)$$

A estos métodos se les conoce como Back Differential Formulas (BDF), por su nombre en inglés [Velasco, 2002].

4.2.2. Método de Runge – Kutta para la resolución de EDA's

Otra forma de resolver EDO's por medio de métodos numéricos son los métodos de Runge-Kutta y de éstos el más común es el método clásico de orden cuatro.

Suponga la siguiente ecuación diferencial

$$y' = f(t, y) , \qquad (4.2.2.1)$$

con condiciones iniciales

$$y(0) = y_0 .$$

El método de Runge – Kutta clásico de 4° orden consiste en avanzar de y_{n-1} a y_n mediante

$$y_n = y_{n-1} + hK_4(t, y; h), \qquad (4.2.2.2)$$

con

$$K_4(t, y; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (4.2.2.3)$$

y

$$k_1 = f(t_{n-1}, y_{n-1}), \qquad (4.2.2.4.a)$$

$$k_2 = f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}k_1\right), \qquad (4.2.2.4.b)$$

$$k_3 = f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}k_2\right), \tag{4.2.2.4.c}$$

$$k_4 = f\left(t_{n-1} + h, y_{n-1} + hk_3\right), \tag{4.2.2.4.d}$$

véase [Burden,1985] y [Henrici,1964].

En general un método de Runge - Kutta es un método de s pasos donde y_n se obtiene al resolver el sistema siguiente

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s} \beta_j k_j, \tag{4.2.2.5}$$

donde

$$k_i = f\left(t_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s} A_{ij} k_j\right) \quad \text{con } i = 1, 2, \ldots, s, \tag{4.2.2.6}$$

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)^T, \tag{4.2.2.7}$$

$$c = (c_1, \ldots, c_s). \tag{4.2.2.8}$$

Por ejemplo, en el caso de Runge – Kutta clásico de orden 4, definiendo a β como el vector de los coeficientes de las k_i's de la igualdad (4.2.2.3), éste tiene

$$\beta = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)^T, \tag{4.2.2.9}$$

a c como el vector

$$c = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right). \tag{4.2.2.10}$$

Definiendo a la matriz **A** como la matriz del método de Runge–Kutta de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.2.2.11}$$

y finalmente al vector k como

$$k = (k_1, k_2, k_3, k_4). \tag{4.2.2.12}$$

Por lo que la igualdad (4.2.2.2) bajo (4.2.2.3) y (4.2.2.9) quedará expresado de la forma

$$y_n = y_{n-1} + h\beta^t k, \tag{4.2.2.13}$$

donde, por (4.2.2.10) y (4.2.2.11), los componentes del vector k indicados en (4.2.2.4) estarán dados por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ k_2 &= f(t_{n-1} + c_2 h, y_{n-1} + hA_{21}k_1) \\ k_3 &= f(t_{n-1} + c_3 h, y_{n-1} + hA_{32}k_2) \\ k_4 &= f(t_{n-1} + c_4 h, y_{n-1} + hA_{43}k_3) \end{aligned} \tag{4.2.2.14}$$

Nótese que este método de orden cuatro descrito por medio de (4.2.2.2), (4.2.2.3) y (4.2.2.4) es un método explícito debido a que substituyendo (4.2.2.4.a) en (4.2.2.4.b) se obtiene una expresión de k_2 la cual al substituir en (4.2.2.4.c) se genera una fórmula para k_3 la que posteriormente se substituirá en (4.2.2.4.d) para obtener el valor correspondiente a k_4.

El método de Runge-Kutta de orden s, con A, β y c generales, se indica por medio de la siguiente expresión

$$\frac{c \,|A}{\;\;|\beta^T}. \tag{4.2.2.15}$$

Dicho método de orden s, será *explicito* si y sólo si

$$A_{ik} = 0 \text{ con } i \leq j,$$

de otra forma será *implicito*.

Ahora bien, considérese la siguiente EDA lineal con coeficientes constantes

$$Ay'+By = q(t), \tag{4.2.2.16}$$

donde A, $B \in \mathfrak{R}^{m\times m}$, $y \in \mathfrak{R}^{m}$, con A singular.

Al usar el método de Runge-Kutta de orden s para obtener aproximaciones a la solución de (4.2.2.16) y suponiendo que A es no singular por el momento, se sigue que

$$y' = A^{-1}(-By + q(t)), \tag{4.2.2.17}$$

la igualdad anterior tiene la forma de la ecuación (4.2.2.1) y al aplicarle el método (4.2.2.15) se tiene de manera general que

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}\beta_j y'_j\,, \tag{4.2.2.18}$$

y de forma similar a (4.2.2.6) se obtiene la expresión

$$y_i = k_i = A^{-1}\left(-B\left(y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}A_{ij}y'_j\right) + q\left(t_{i-1} + c_i h\right)\right), \tag{4.2.2.19}$$

con $i = 1, 2, \ldots, s$.

Al premultimplicar el sistema (4.2.2.19) por A se tiene

$$Ay_i = -B\left(y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}A_{ij}y'_j\right) + q\left(t_{i-1} + c_i h\right) \quad \text{con } i = 1, 2, \ldots, s\,. \tag{4.2.2.20}$$

En realidad, la igualdad anterior es válida independientemente de que exista la inversa de la matriz A del sistema lineal. Por lo que el método de Runge-Kutta para la EDA (4.2.2.16) estará descrito por el sistema (4.2.2.20) y (4.2.2.18).

Ahora bien, las matrices (A, B) del sistema lineal (4.2.2.16) se pueden transformar en su forma canónica normal de Kronocker (véase [März, 1999]) de tal forma que

$$(A, B) \rightarrow \left(\tilde{A}, \tilde{B}\right),$$

donde

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{A} = EAF = diag(I, N) \\ \tilde{B} = EBF = diag(W, I)\end{array}\right\},\qquad (4.2.2.21)$$

con E, $F \in \Re^{n\times m}$, $W \in \Re^{k\times k}$ y $N \in \Re^{(m-k)\times(m-k)}$ es una matriz nilpotente como la descrita en (4.2.13) es decir una matriz diagonal por bloques de Jordan. Entonces el sistema (4.2.2.16) se transforma en el sistema

$$\tilde{A}z' + \tilde{B}z = \tilde{q}(t),\qquad (4.2.2.21.b)$$

donde $Fz = y$ y $\tilde{q}(t) = Eq(t)$.

Por lo que si se define a z y a $\tilde{q}(t)$ de la siguiente forma

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\qquad (4.2.2.22)$$

$$\tilde{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix},\qquad (4.2.2.23)$$

con u, $q_1(t) \in \Re^{k}$ y v, $q_2(t) \in \Re^{(m-k)}$; se tiene como consecuencia que el sistema lineal (4.2.2.16) al aplicarle la transformación (4.2.2.21) se desacopla en las ecuaciones

$$u' + Wu = q_1(t),\qquad (4.2.2.24)$$

$$Nv' + v = q_2(t),\qquad (4.2.2.25)$$

que se refieren, respectivamente, a la parte diferencial y algebraica del sistema lineal en cuestión.

Al obtener la solución numérica de la ecuación (4.2.2.24), usando el método de Runge-Kutta definido por (4.2.2.15), se obtendrá el siguiente sistema de ecuaciones

$$u'_i = -W\left(u_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s} A_{ij}u'_j\right) + q_1(t_{n-1} + c_i h) \text{ con } i = 1, 2, \ldots, s,\qquad (4.2.2.26)$$

con el paso

$$u_n = u_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}\beta_j u'_j\,, \qquad (4.2.2.27)$$

con respecto al método aplicado a la parte algebraica se tendrá

$$Nv'_i = -\left(v_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}A_{ij}v'_j\right) + q_2(t_{n-1} + c_i h), \quad \text{con } i = 1,\, 2,\, ...\, s \qquad (4.2.2.28)$$

así como

$$v_n = v_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}\beta_j v'_j\,. \qquad (4.2.2.29)$$

De la ecuación (4.2.2.28) se tiene

$$Nv'_i + \left(v_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}A_{ij}v'_j\right) = q_2(t_{n-1} + c_i h) \quad \text{con } i = 1,\, 2,\, ...\, s; \qquad (4.2.2.30)$$

y suponiendo nuevamente que la matriz N idénticamente igual a $[0]_{1\times 1}$, (véase [März, 1999]), entonces el sistema (4.2.2.30) queda como

$$v_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}A_{ij}v'_j = q_2(t_{n-1} + c_i h) \quad \text{con } i = 1,\, 2,\, ...\, s\,, \qquad (4.2.2.31)$$

lo que implica que

$$h\sum_{j=1}^{s}A_{ij}v'_j = q_2(t_{n-1} + c_i h) - v_{n-1} \quad \text{con } i = 1,\, 2,\, ...\, s\,. \qquad (4.2.2.32)$$

El lado izquierdo de la expresión (4.2.2.32) es la fila i de la matriz A del método de Runge-Kutta con $i = 1,\, 2,\, ...\, s$ multiplicada por el vector y por h

$$v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_s \end{pmatrix}, \qquad (4.2.2.33)$$

por lo que el sistema (4.2.2.32) queda expresado como

$$hA_i v' = q_2(t_{n-1} + c_i h) - v_{n-1} \qquad \text{con } i = 1, 2, \dots, s. \qquad (4.2.2.34)$$

Definiendo al vector ${}_{(n-1)}t$ de la siguiente manera

$${}_{(n-1)}t = \begin{pmatrix} t_{n-1} \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (4.2.2.35)$$

el sistema del método de Runge-Kutta a resolver, junto con el paso (4.2.2.29), es el mostrado por

$$hAv' = q_2\left({}_{(n-1)}t + c^T h\right) - v^*{}_{n-1}, \qquad (4.2.2.36)$$

donde

$$v^*{}_{n-1} = \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$q_2\left({}_{(n-1)}t + c^T h\right) = \begin{pmatrix} q_2(t_{n-1} + c_1 h) \\ \vdots \\ q_2(t_{n-1} + c_s h) \end{pmatrix},$$

y c^T es el vector (4.2.2.8) transpuesto.

Del sistema (4.2.2.36) se desprende que la matriz A del método de Runge-Kutta (4.2.2.15) debe ser no singular para que dicho sistema tenga solución, razón por la cual los métodos explícitos quedan excluidos para resolver EDA's, lo que implica que queda sólo por utilizar métodos implícitos [März, 1999].

Definiéndose a A^{-1} como la inversa de la matriz A del método de Runge-Kutta (4.2.2.15) la expresión obtenida en (4.2.2.36) se transforma en

$$v' = \frac{1}{h} A^{-1}\left(q_2\left({}_{(n-1)}t + c^T h\right) - v^*{}_{n-1}\right). \qquad (4.2.2.37)$$

Por otro lado, retomando el paso final (4.2.2.29) y utilizando la representación vectorial de $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, indicado por (4.2.2.7), se tiene la igualdad

(4.2.2.29): $$\nu_n = \nu_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s}\beta_j \nu'_j\,,$$

$$\nu_n = \nu_{n-1} + h\beta^T \nu'\ . \tag{4.2.2.38}$$

Al substituir la expresión para ν' indicada por (4.2.2.37), en la ecuación (4.2.2.38) ésta se puede reescribir como

$$\nu_n = \nu_{n-1} + h\beta^T\left(\frac{1}{h}A^{-1}\left(q_2\left({}_{(n-1)}t + c^T h\right) - \nu^*{}_{n-1}\right)\right), \tag{4.2.2.39}$$

es decir

$$\nu_n = \nu_{n-1} + \beta^T A^{-1}\left(q_2\left({}_{(n-1)}t + c^T h\right) - \nu^*{}_{n-1}\right). \tag{4.2.2.40}$$

Al distribuir los factores β^T y A^{-1} del segundo término, se sigue que

$$\nu_n = \nu_{n-1} - \beta^T A^{-1}\mu\nu_{n-1} + \beta^T A^{-1}\left(q_2\left({}_{(n-1)}t + c^T h\right)\right), \tag{4.2.2.41}$$

con $\mu \in \mathfrak{R}^s$ tal que

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Simplificando la expresión (4.2.2.41) por medio de la factorización de ν_{n-1}, la expresión para ν_n será

$$\nu_n = \rho\nu_{n-1} + \beta^T A^{-1} q_2\left({}_{(n-1)}t + c^T h\right), \tag{4.2.2.42}$$

donde ρ, que pertenece a $\mathfrak{R}$, está definida de la siguiente manera

$$\rho = 1 - \beta^T A^{-1}\mu\,. \tag{4.2.2.43}$$

Siguiendo en el caso de que N es idénticamente igual a la matriz cero de 1×1 se tiene de (4.2.2.25) que

$$\nu(t) = q_2(t), \tag{4.2.2.44}$$

y si v_n es la aproximación a $v(t_n)$, la igualdad (4.2.2.44) se rescribe como

$$v_n \approx v(t_n) = q_2(t_n), \tag{4.2.2.45}$$

por lo que reemplazando la expresión(4.2.2.42) de v_n en la aproximación anterior se obtiene que

$$\rho v_{n-1} + \beta^T A^{-1} q_2\Big((n-1)t + c^T h\Big) \approx q_2(t_n). \tag{4.2.2.46}$$

Dicha aproximación se verá afectada si $|\rho| > 1$; por lo que, para que exista estabilidad en el método de Runge-Kutta (4.2.2.15) se requiere que

$$|\rho| < 1, \tag{4.2.2.47}$$

véase [März, 1999].

Un caso particular, para que se cumpla la restricción (4.2.2.47), ocurre cuando ρ sea igual a cero, para ello, de la igualdad (4.2.2.43) se tiene que esto es posible si

$$\beta^T A^{-1} \mu = 1. \tag{4.2.2.48}$$

Como $A\left(A^{-1}\right) = I_{s\times s}$, se sigue que si se premultiplica la matriz A^{-1} por la fila i de la matriz A se genera un vector en $\Re^s$ con la característica de tener cero en todas sus entradas, excepto en la *i-ésima* que será igual a uno, es decir, si $\hat{a}_i$ representa la fila *i-ésima* de la matriz A se tiene que

$$\hat{a}_i\left(A^{-1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si la entrada } j \neq i \\ 1 & \text{si la entrada } j = i \end{cases}, \tag{4.2.2.49}$$

de ahí que al postmultiplicar el vector (4.2.2.49) por el vector μ se obtiene la siguiente igualdad

$$\hat{a}_i\left(A^{-1}\right)\mu = 1, \tag{4.2.2.50}$$

por lo que comparando (4.2.2.50) con (4.2.2.49) se tiene que $\rho = 0$ si:

$$\beta^T = \hat{a}_i \quad \text{para alguna } i \text{ con } i = 1, 2, ..., s, \tag{4.2.2.51}$$

en particular para

$$\beta^T = \hat{a}_s. \tag{4.2.2.52}$$

Ahora bien, para que efectivamente se dé el paso se requiere que

$$c_s = 1, \tag{4.2.2.53}$$

por lo tanto, si $\rho = 0$, se tiene de la igualdad (4.2.2.42)

$$\begin{aligned} v_n &= \rho v_{n-1} + \beta^T A^{-1} q_2\left(_{(n-1)}t + c^T h\right) \\ &= \beta^T A^{-1} q_2\left(_{(n-1)}t + c^T h\right), \end{aligned} \tag{4.2.2.54}$$

y utilizando la igualdad (4.2.2.52) para β^T se obtiene

$$v_n = \hat{a}_s A^{-1} q_2\left(_{(n-1)}t + c^T h\right), \tag{4.2.2.54}$$

ahora bien, si $e_s \in \mathfrak{R}^{nx1}$ es el s-esimo vector canónico, la expresión anterior queda denotada como

$$v_n = e_s^T q_2\left(_{(n-1)}t + c^T h\right), \tag{4.2.2.55}$$

es decir

$$v_n = q_2(t_{n-1} + c_s h), \tag{4.2.2.56}$$

recordando de (4.2.2.53) que $c_s = 1$ se tiene

$$v_n = q_2(t_{n-1} + h), \tag{4.2.2.56}$$

para finalmente llegar a

$$v_n = q_2(t_n), \tag{4.2.2.56}$$

es decir que la aproximación v_n es igual al valor de $v(t_n)$

$$v_n = v(t_n) = q_2(t_n). \tag{4.2.2.56}$$

Resumiendo, el método apropiado de Runge – Kutta para EDA's de índice uno será el que cumpla con que $\mathcal{A}$ sea no singular así como con las igualdades (4.2.2.52) y (4.2.2.53). Esto es, un método de Runge-Kutta implícito.

4.3. DIFICULTADES NUMÉRICAS EN EDA'S DE ÍNDICE DOS Y TRES.

En la sección anterior se analizaron las dificultades numéricas que presentan las EDA's de índice uno (para lo cual se tomó como ejemplo a la matriz N idénticamente igual a $[0]_{1\times 1}$ del sistema $Nv'+v=q(t)$).

Analizaremos ahora las diferencias adicionales que presentas las EDA's de índice 2 y 3, para lo cual se tomará la siguiente EDA semiexplícita

$$\left.\begin{aligned} v'_2+v_1 &= q_1 \\ v_2 &= q_2 \end{aligned}\right\}. \tag{4.3.1}$$

El sistema anterior se puede escribir de la forma $Nv'+v=q(t)$, donde la matriz N será dos – nilpotente y tendrá la siguiente expresión

$$N=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3.2}$$

Nótese que el sistema (4.3.1) es una EDA de índice dos, por lo que, utilizando el método BDF implícito (4.2.1.6) explicado en la sección anterior y la condición de las betas (4.2.1.25), es decir, $\beta_0=1,\ \beta_1=\ \dots\ =\beta_s=0$ se tiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j v_{2,n-j}+v_{1,n} &= q_1(t_n) \\ v_{2,n} &= q_2(t_n) \end{aligned}\right\} \quad \text{donde } n \geq s. \tag{4.3.3}$$

Del sistema anterior se sigue que

$$\left.\begin{aligned} v_{1,n} &= q_1(t_n) - \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j v_{2,n-j} \\ v_{2,n} &= q_2(t_n) \end{aligned}\right\} \quad \text{donde } n \geq s. \tag{4.3.4}$$

Si para dicho sistema existieran valores iniciales inexactos, así como errores de redondeo en la ecuación lineal del sistema(4.3.4) al resolver para $v_{1,n}$ se da origen a una inestabilidad débil, ya que los errores son amplificados por el factor $\frac{1}{h}$.

Ahora bien, si la matriz N es tres – nilpotente, el sistema $Nv'+v=q(t)$ será una EDA de índice tres.

Definiéndose a N de la siguiente manera

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.3.5}$$

el sistema $Nv'+v=q(t)$ queda expresado de la forma

$$\left.\begin{aligned} v'_2+v_1 &= q_1 \\ v'_3+v_2 &= q_2 \\ v_3 &= q_3 \end{aligned}\right\}. \tag{4.3.6}$$

Nuevamente utilizando el método implícito (4.2.1.6) y la condición de las betas (4.2.1.25) $\beta_0=1,\ \beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$ se tiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j v_{2,n-j} + v_{1,n} &= q_1(t_n) \\ \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j v_{3,n-j} + v_{2,n} &= q_2(t_n) \\ v_{3,n} &= q_3(t_n) \end{aligned}\right\} \quad \text{donde } n \geq s. \tag{4.3.7}$$

Del sistema anterior se sigue que

$$\left.\begin{aligned} v_{1,n} &= q_1(t_n) - \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j q_{2,n-j} + \frac{1}{h^2}\sum_{j=0}^{s}\left(\alpha_j \sum_{i=0}^{s}\alpha_i v_{3,n-j}\right) \\ v_{2,n} &= q_2(t_n) - \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{s}\alpha_j v_{3,n-j} \\ v_{3,n} &= q_3(t_n) \end{aligned}\right\} \text{ donde } n \geq s. \qquad (4.3.8)$$

Nótese que para el sistema (4.3.8) se tiene que las componentes $v_{1,n}$ y $v_{2,n}$ están afectadas por inestabilidades del tipo $1/h^2$ y $1/h$ respectivamente.

4.4. ÍNDICE DEL MODELO

Aplicando la Definición 4.1. de *índice de una ecuación diferencial algebraica* de la sección 4.1. al modelo (3.1.21) se verifica que esta es mayor que uno como se muestra a continuación

$$(3.1.21): \quad \begin{aligned} Y' &= f(Y,D) \\ 0 &= G(Y) \end{aligned}.$$

Donde hay que recordar que $Y = (P, E, \lambda_1)^T$ así como la expresión de la derivada de dicho vector para cada una de sus entradas quedó descrita por medio del sistema (3.1.19)

$$(3.1.19): \quad \begin{aligned} P' &= f_1(P,E) \\ E' &= f_2(P,E,D) \\ \lambda'_1 &= f_3(P,E,\lambda_1) \\ 0 &= G(P,E,\lambda_1) \end{aligned}.$$

Por lo que si la parte algebraica $G(Y)$ del sistema (3.1.21) es de clase C^1 entonces derivando con respecto a "t" se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{dG(Y)}{dt} = G_P P' + G_E E' + G_{\lambda_1}\lambda_1' = 0. \qquad (4.4.1)$$

Aplicando (3.1.19) en la expresión (4.4.1), ésta quedará expresada en los siguientes términos

$$0 = G_P f_1(P,E) + G_E f_2(P,E,D) + G_{\lambda_1} f_3(P,E,\lambda_1). \qquad (4.4.2)$$

Al substituir el lado derecho de la ecuación (4.4.2) por medio de una función $\Gamma(Y,D)$ se llega a la igualdad:

$$0=\Gamma(Y,D), \qquad (4.4.3)$$

siempre y cuando $G_E \neq 0$.

Derivando por segunda vez con respecto a "t", bajo el supuesto que G es C^2 y f_i son C^1 pero en esta ocasión a la expresión (4.4.1), se obtiene la siguiente expresión para Γ':

$$\frac{d\Gamma(Y,D)}{dt}=\Gamma_P P'+\Gamma_E E'+\Gamma_{\lambda_1}\lambda_1'+\Gamma_D D'=0, \qquad (4.4.4)$$

ahora bien, si $\partial_D\Gamma=\partial_E G\partial_D f_2$ es distinta de cero, es decir, si $\partial_E G \neq 0$ y $\partial_D f_2 \neq 0$ se sigue que

$$D'=-\frac{\left(\Gamma_P P'+\Gamma_E E'+\Gamma_{\lambda_1}\lambda_1'\right)}{\Gamma_D}. \qquad (4.4.5)$$

Utilizando nuevamente la representación de las derivadas indicada por medio de (3.1.19) se tiene

$$D'=-\frac{\left(\Gamma_P f_1(P,E)+\Gamma_E f_2(P,E,D)+\Gamma_{\lambda_1}{}_3(P,E,\lambda_1)\right)}{\Gamma_D}. \qquad (4.4.6)$$

Renombrando el lado derecho como $\Psi(Y,D)$, se obtiene que el sistema (3.1.34) queda expresado como:

$$\begin{aligned} Y'&=f(Y,D)\\ D'&=\Psi(Y,D) \end{aligned}. \qquad (4.4.7)$$

De lo anterior se desprende que la EDA (3.1.34) es de al menos de *índice dos*, ya que al menos se tuvo que derivar dos veces la parte algebraica de dicho sistema, la primera vez para obtener (4.4.3) y la segunda vez para llegar a (4.4.6) y con ello se transformó el modelo en un sistema de EDO's representado por (4.4.7).

Siguiendo el procedimiento arriba expuesto para obtener el índice de la EDA obtenida para el caso particular analizado en la sección 3.2 es conveniente recordar que se definió a Y de la siguiente manera:

$$(3.2.4): \qquad Y = \begin{pmatrix} P \\ E \\ \lambda_1 \end{pmatrix},$$

con lo que se obtuvo la expresión (3.2.5) para el sistema :

$$(3.2.5): \qquad \begin{aligned} Y' &= f(Y,D) \\ 0 &= G(P,\lambda_1) \end{aligned}.$$

Recordando que cada una de las entradas del vector Y' quedó expresado de la forma (3.2.3)

$$(3.2.3): \qquad \begin{aligned} P' &= f_1(P,E) \\ E' &= f_2(P,E,D) \\ \lambda'_1 &= f_3(P,E,\lambda_1) \\ 0 &= G(P,\lambda_1) \end{aligned}.$$

donde

$$\begin{aligned} &f_1 = P(a-bP) - qEP, \\ &f_2 = [pqP(t) - c - d]E(t) - C(B) - D(t), \\ &f_3 = \{(qE - a + 2bP)\lambda_1 - e^{-it} pqE\}, \\ &G(P,\lambda_1) = -\lambda_1 qP + e^{-it}[pqP - (c+d) - i]. \end{aligned}$$

Lo anterior nos permitirá seguir sin ninguna complicación los pasos realizados para obtener el índice de la EDA del caso general.

Nuevamente, hay que hacer notar, que la parte algebraica del sistema (3.2.3) depende exclusivamente de las variables P y λ_1 en contraste con la parte algebraica del modelo (3.1.19) donde, en principio, G también depende del esfuerzo E.

Por lo que si $G(P, \lambda_1)$ del sistema (3.2.3) es de clase C^1 y derivando con respecto a "t" se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{dG(P,\lambda_1)}{dt} = G_P P' + G_{\lambda_1} \lambda_1' = 0. \qquad (4.4.8)$$

La expresión anterior después de substituir las derivadas por medio de la correspondiente igualdad perteneciente al sistema (3.2.3), se tiene

$$0 = G_P f_1(P,E) + G_{\lambda_1} f_3(P,E,\lambda_1). \qquad (4.4.9)$$

Supongamos que se puede reemplazar el lado derecho de la ecuación (4.4.9) por medio de una función $\gamma(Y)$ para obtener la expresión (4.4.10).

$$0=\gamma(Y). \tag{4.4.10}$$

Derivando a (4.4.10) con respecto a t, bajo el supuesto de que G es de C^2 y las f_i de C^1, se llega a la siguiente igualdad

$$\frac{d\gamma(Y)}{dt}=\gamma_P P'+\gamma_E E'+\gamma_{\lambda_1}\lambda_1'=0. \tag{4.4.11}$$

Nuevamente substituyendo la representación de P, E y λ_I con base al sistema (3.2.3) se tiene

$$0=\gamma_P f_1(P,E)+\gamma_E f_2(P,E,D)+\gamma_{\lambda_1} f_3(P,E,\lambda_1). \tag{4.4.12}$$

Al suplir el lado derecho de la expresión anterior por medio de una función que dependa de Y y de D queda como

$$0=\varphi(Y,D). \tag{4.4.13}$$

Ahora bien, si G es de C^3 y las f_i son de clase C^2 y volviendo a derivar con respecto a t por tercera ocasión pero en este caso a (4.4.13), se obtiene

$$\frac{d\varphi(Y,D)}{dt}=\varphi_P P'+\varphi_E E'+\varphi_{\lambda_1}\lambda_1'+\varphi_D D'=0. \tag{4.4.14}$$

Finalmente, si la derivada de φ_D existe y es distinta de cero se sigue

$$D'=-\frac{\left(\varphi_P P'+\varphi_E E'+\varphi_{\lambda_1}\lambda_1'\right)}{\varphi_D}. \tag{4.4.15}$$

Al remplazar nuevamente las correspondientes expresiones para las derivadas de P, E y λ_I, la igualdad anterior queda como

$$D'=-\frac{\left(\varphi_P f_1(P,E)+\varphi_E f_2(P,E,D)+\varphi_{\lambda_1} f_3(P,E,\lambda_1)\right)}{\varphi_D}. \tag{4.4.16}$$

Para simplificar la expresión anterior, se substituirá el lado derecho por una función que dependa de Y y de D, es decir:

$$D'=\omega(Y,D). \tag{4.4.17}$$

Finalmente el sistema (3.2.3) quedará transformado en el modelo:

$$\begin{aligned} Y' &= f(Y, D) \\ D' &= \omega(Y, D) \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

Para llegar al sistema (4.4.18) fue necesario derivar en tres ocasiones la parte algebraica del modelo (3.2.3), de ahí que el caso particular de la sección 3.2 sea una EDA de índice al menos igual a *tres*.

Hay que notar que el índice de la EDA (3.2.5) dependerá del número de veces que sea necesario derivar a la ecuación (4.4.10) con respecto a "t" para hallar E', ya que al substituir su respectiva expresión de (3.2.3), $E' = f_2(P, E, D)$, se podrá obtener una función que dependa también de la variable D; por lo que al volver a derivar con respecto a t se obtendrá un sistema de EDO.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

El modelo de optimización dinámica para la toma de decisiones de explotación, inversión y financiamiento de una empresa que tiene la concesión para explotar un recurso analizado resultó ser un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (EDA's).

Un sistema:

$$F(x',x,t)=0,$$

será una EDA si la matriz $\frac{\partial F}{\partial x'}$ resulta ser singular.

El índice de una EDA será el mínimo número de veces que se tenga que derivar el sistema $F(x',x,t)$ o parte de dicho sistema para transformarlo en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El modelo desarrollado es un ejemplo típico de EDA's semi-explícitas, es decir, sistemas que se pueden representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y' &= f(y,z,t) \\ 0 &= h(y,z,t), \end{aligned}$$

El índice del modelo resultó ser al menos igual a dos, en el caso general, y al menos de índice tres para el caso particular lo que dificulta la solución analítica o numérica. El aumento del índice del modelo radica en la existencia de la derivadas parciales de la función de captura $\Phi(P,E)$ con respecto al esfuerzo y de la diferenciabilidad de las restricciones al modelo.

Al tratar de resolver las EDA's numéricamente, los métodos numéricos se tienen que enfrentar a problemas de estabilidad. Así mismo se vió que los métodos implícitos o Back Differential Formulae (BDF) son los más adecuados para la resolución numérica a este tipo de sistemas. Cabe mencionar que para problemas con índice muy alto todavía no se tiene un método numérico estable y robusto, por lo que es aún una tarea pendiente en el campo de las matemáticas aplicadas junto con teorías generales para las EDA's.

APÉNDICE

En los apéndices se encuentran varios teoremas y resultados que se utilizaron en el cuerpo del trabajo, los cuales son: el teorema que nos permite conmutar la derivación y la integración aplicadas a una función, el lema fundamental del cálculo variacional, y finalmente el teorema que nos permite obtener un sistema de N soluciones linealmente independientes.

TEOREMA A.1.

El siguiente teorema es utilizado en la sección 2.1.2 para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Si en el rectángulo cerrado $\alpha \leq x \leq \beta$, y $a \leq y \leq b$, la función $f(x, y)$ es continua y tiene una derivada continua con respecto a x, puede derivarse la integral con respecto al parámetro bajo el signo integral, es decir:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\left(\int_a^b f(x,y)dy \right)}{dx} = \int_a^b f_x(x,y)dy\,,$$

véase [Courant, 1974].

LEMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO VARIACIONAL A.2.

En la sección 2.1.2 se utilizó este lema para poder obtener las condiciones necesarias que debe cumplir una funcional para alcanzar un máximo.

Si

$$\int_a^b f(t)\eta(t)dt = 0 \quad ,$$

para toda $\eta(t)$, función diferenciable en [a,b], tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$

Entonces:

$$f(x)=0 \quad \forall t,\ t \in [a,b],$$

véase [L. Elsgoltz,1977].

TEOREMA A.3.

El siguiente teorema permite encontrar cuando un método numérico es inestable al tratar de resolver una EDA, véase la sección 4.2.

Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de la ecuación de orden N :

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_N x_{n-N} = 0 \qquad \text{(A.3.1)}$$

con k distintas raíces denotadas por $z_1, z_2, \ldots, z_k$ donde $k \leq N$ y sea $(m_i + 1)$ la multiplicidad de la raíz z_i tal que:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = N - k$$

Entonces, la secuencia definida por:

$$x_n = n(n-1)\cdots(n-m+1)z_i^{n-m} \qquad \text{(A.3.2)}$$

donde $m = 0, 1, \ldots, m_i$ y $i = 1, 2, \ldots, k$

es decir:

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= z_i^n \\ x_n^{(2)} &= n z_i^{n-1} \\ x_n^{(3)} &= n(n-1)z_i^{n-1} \qquad\qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, k \\ &\vdots \\ x_n^{(m_i)} &= n(n-1)\cdots(n-m+1)z_i^{n-m} \end{aligned}$$

forma un sistema de N soluciones linealmente independientes de (A.3.1) [Henrici,1964].

BIBLIOGRAFÍA

[1]. www-agecon.ag.ohio-state.edu/Faculty/bsohngen/ae531d/modules/module2/m2les1.ht.n. AEDE 531D: Environmental and natural resource economics. The Ohio State University, 2000.

[2]. www.eurosur.org/medio_ambiente/bif48.htm Nociones de economía de los recursos renovables. Red Euro Sur,2002.

[3]. http://biolo.bg.fcen.uba.ar/ecologia/TP5.pdf. Crecimiento poblacional. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. 2002

[4]. Bensoussan, Alain; Hurst, Gerald y Näslund, B.Management applications of modern control theory. Amsterdam : North Holland Publishing Co./American Elsevier Publishing Co. , 1974.

[5]. Borrell, Máximo. Teoria del control óptimo. España: Editorial Hispano Europea, 1985.

[6]. Burden, Richard y Faires, Douglas. Análisis Numérico. México, 1985.

[7]. Burghes, David y Graham Alexander.Introduction to control theory including optimal control. Chichester, eng. : Horwood, 1980.

[8]. Courant, Richard. Introducción al calculo y al análisis matemático. México : Limusa, 1974.

[9]. El'sgol'ts, Lev Ernestovich. Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Moscú, Mir, 1977.

[10]. Henrici, Peter. Elements of numerical analysis. New York : J. Wiley, 1964.

[11]. Hestenes, Magnus Rudolph. Optimization theory : The infinite dimensional case. New York : J. Wiley, 1975.

[12]. Jorgensen, Steffen y Kort, Peter. Optimal investment and finance in renewable resource harvesting. Journal of Economic Dynamics and Control No 21 1997. Pg: 603-630.

[13]. Kirk, Donald E. Optimal control theory an introduction. Englawood cliffs : Prentice Hall. 1970.

[14]. López, Alma. Industria pesquera en mar turbulento. El Financiero 02 de mayo del 2002, Año: XXI Num: 6029. México, D.F.

[15]. Leonard, Daniel. Optimal control theory and static optimization in economics. Cambridge, Mass. Cambridge University Press , 1992.

[16]. Marsden, Jerrold y Tromba, Anthony. Cálculo vectorial. 6a ed. Addison-Wesley Iberoamericana. EUA. 1998.

[17]. März, Roswitha. Numerical methods for differential algebraic equations. Acta numérica 1991. Pg: 141-168.

[18]. Miller, Richard K. Introduction to differential equations. 2a ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1991.

[19]. Velasco, Lourdes y López, Jesús. Notas para un curso de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas. Por publicarse, UNAM 2001.

[20]. Zill, Dennis G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Edición 6a ed. México : International Thomson Editores, 1997.