



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

“ANÁLISIS DE ELEMENTOS
COMPUESTOS CON DESLIZAMIENTO
RELATIVO”

T E S I S
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
(ESTRUCTURAS)
PRESENTA:

JOSÉ ENRIQUE BLANCO BELTRÁN

DIRECTORES DE TESIS:

DR. DAVID MURÍA VILA
DR. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SANCHEZ

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MÉXICO, D.F.

SEPTIEMBRE 2002

01165

3



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ANÁLISIS DE ELEMENTOS COMPUESTOS CON
DESLIZAMIENTO RELATIVO**

JOSÉ ENRIQUE BLANCO BELTRÁN

TESIS

**PRESENTADA A LA COORDINACIÓN DEL PROGRAMA
DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

DE LA

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE**

MAESTRO EN INGENIERÍA

(ESTRUCTURAS)

DIRIGIDA POR:

**DR DAVID MURIÀ VILA
DR JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SANCHEZ**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.
SEPTIEMBRE 2002**

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES

- 2.1. Modelos de elementos finitos**
- 2.2. Elemento viga-columna con funciones de interpolación**
- 2.3. Elemento viga-columna basado en diferencias finitas**

CAPÍTULO 3 ELEMENTOS CON UNA INTERFAZ

- 3.1. Planteamiento teórico**
- 3.2. Solución teórica exacta**
- 3.3. Modelo de elemento finito**
- 3.4. Modelo propuesto de diferencias finitas**
 - 3.4.1. Planteamiento teórico**
 - 3.4.2. Condiciones de frontera del elemento**

CAPÍTULO 4 ELEMENTOS CON VARIAS INTERFACES

- 4.1. Planteamiento teórico**
- 4.2. Condiciones de frontera del elemento**
- 4.3. Generalización del modelo propuesto**

CAPÍTULO 5 ANÁLISIS NO LINEAL

- 5.1. Aspectos generales**
- 5.2. Cálculo de los desplazamientos en el elementos con varias interfaces**
- 5.3. Comportamiento no lineal de la interfaz**
- 5.4. Comportamiento no lineal de la sección**
- 5.5. Limitaciones del modelo propuesto**
 - 5.5.1. Rigidez infinita en la interfaz**
 - 5.5.2. Rigidez nula en un elemento**

CAPÍTULO 6 APLICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

6.1. Descripción del problema

6.2. Concepción geométrica

6.3. Modelos de comportamiento de la interfaz

6.3.1. Modelo de la interfaz concreto-concreto

6.3.2. Modelo de la interfaz concreto-acero

6.4. Modelos de comportamiento de la sección

6.5. Análisis

6.6. Resultados

CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

REFERENCIAS

AGRADECIMIENTOS

Se le agradece a los tutores David Muria Vila y José Alberto Escobar por el asesoramiento brindado y la paciencia que han tenido durante el desarrollo de este trabajo, así como a Oscar López Batiz y a Santiago Loera Pizarro por sus sugerencias en la realización del escrito. Además, quisiera agradece a mi esposa Jaqueline Peralta Martínez y a mis padres José Manuel Blanco y Adela Beltrán por su apoyo y por el amor que me brindan día a día.

1 INTRODUCCIÓN

Existen una gran variedad de materiales de construcción, cada uno tiene sus ventajas y desventajas que lo hace más idóneo que el resto para la construcción de una obra determinada. Sin embargo, en muchos casos resulta conveniente combinar distintos materiales, buscando aprovechar las ventajas de cada uno y minimizar las limitaciones de estos por separado. De esta manera se obtienen materiales con mejores propiedades. Por esta razón existen una variedad de materiales compuestos. Unas de las combinaciones más empleadas es entre el acero y el concreto, la cual se analiza en el presente trabajo.

Para lograr un comportamiento óptimo en los elementos mixtos de concreto y acero es necesario comprender los mecanismos que rigen el comportamiento en la interfaz entre estos. El desarrollo de deslizamientos relativos importantes en la interfaz puede provocar que los materiales trabajen por separado y se pierdan las ventajas de su trabajo en conjunto. Las interfaces o planos potenciales de deslizamientos pueden aparecer entre materiales distintos o en zonas del elemento donde existan juntas constructivas debido a la secuencia de construcción empleada, por ejemplo elementos construidos por separado y unidos en el momento del montaje de la estructura

Uno de los casos más estudiados es una viga metálica con una losa de concreto. Se sabe que su resistencia varía notablemente con el grado de conexión en la interfaz (Oehlers y Bradford, 1995) entre ambos elementos, lo cual se ha plasmado inclusive en los códigos de diseño de distintos países (NTCEC, 1996). Para llegar a esto se han desarrollado un gran número de investigaciones teóricas y experimentales. Los modelos teóricos elaborados se diferencian en cuanto a su grado de complejidad y aproximación. Como en todos los campos del análisis estructural, existe el debate de cuál es el mínimo grado de refinamiento, necesario para representar los principales aspectos del comportamiento del fenómeno a estudiar. En el caso del estudio de elementos de materiales compuestos con planos de deslizamientos potenciales, existen modelos muy refinados de elemento finito (ASCE, 1982); y modelos mas simples como un elemento viga-columna (Salari *et al*, 1998). Este último requiere menor esfuerzo de cómputo y ha mostrado buena correlación con ensayos experimentales (Fabbrocino *et al* 2000, Salari y Spacone 2001b); por esta razón la tendencia actual es el empleo de este tipo de modelo.

En el elemento viga-columna se obtiene la rigidez asociada a los grados de libertad en los bordes integrando la rigidez de las secciones transversales (Spacone *et al*, 1996). Sin embargo, cuando existen planos potenciales de deslizamientos, las respuestas de las secciones transversales se relacionan a través de la interfaz. Para resolver este problema se han desarrollado dos procedimientos en la literatura. Uno basado en el método del elementos finitos, en donde se proponen funciones de formas para el flujo, el deslizamiento o ambos a lo largo de la interfaz. El otro procedimiento es el de diferencias finitas, en el cual se plantean las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la interfaz en el elemento en diferencias finitas, y se reduce el problema a un sistema de ecuaciones lineales.

Los elementos viga-columna basados en elementos finitos han podido representar la degradación de resistencia y rigidez en la interfaz y en las secciones mediante el empleo de métodos numéricos muy eficientes (Salari y Spacone, 2001a). Sin embargo, su campo de aplicación se ha limitado al análisis de elementos con una superficie de deslizamiento. Por otro lado, los modelos que emplean el método de las diferencias finitas se han aplicado al estudio de elementos con dos superficies de deslizamientos (Fabbrocino *et al*, 2000), pero los métodos numéricos empleados dificultan analizar elementos con más de dos superficies de deslizamiento. Además, estos métodos numéricos sólo pueden ser aplicados considerando determinadas condiciones de frontera en los extremos del elemento.

Ninguno de los elementos viga-columna propuestos en la literatura permiten estudiar el comportamiento de elementos más complejos como una columna sometida a flexo-compresión o flexo-tensión con varias superficies de deslizamientos. Por esta razón en este trabajo se desarrolla un nuevo modelo basado en diferencias finitas que permite utilizar los procedimientos numéricos desarrollados para los modelos basados en elementos finitos (Spacone *et al*, 1996). Para lograr esto fue necesario desarrollar una solución por diferencias finitas que no requiriera realizar iteraciones cuando el comportamiento de los materiales fuera en el intervalo elástico-lineal. Los procedimientos numéricos para analizar el elemento en el intervalo de comportamiento no lineal, en los modelos viga-columna basados en elementos finitos, se adaptaron a la formulación desarrollada y de esta manera se obtuvo un nuevo modelo basado en diferencias finitas que permitió incluir la acción de la carga axial en conjunto con efectos de flexión, y analizar otras condiciones de frontera distintas de las tratadas en la literatura.

El modelo se aplicó a una columna compuesta de un edificio rehabilitado, en el cual estudios anteriores (Fuentes, 2000) han sugerido el desarrollo de deslizamientos relativos entre los elementos originales y los de rehabilitación. Estos estudios se han limitado a estimar la rigidez y aproximadamente el inicio del deslizamiento. Con el modelo ahora propuesto se estudió más detalladamente el proceso inicial del deslizamiento y la degradación de resistencia respecto al elemento sin deslizamiento en las superficies de contacto entre los elementos.

2 ANTECEDENTES

2.1. Modelos de elementos finitos

Los modelos de elementos finitos han demostrado ser una herramienta muy poderosa para el análisis estructural. Se han aplicado extensamente en el análisis de elementos de distintos materiales, y en diferentes formas de fallas. Su campo de aplicación incluye efectos no lineales, tanto del material como geométricos. Los efectos no lineales incluyen degradación del material por los esfuerzos actuantes, generación y propagación de grietas, etc. Por otro lado, las acciones a las que pueden estar sometidos los elementos pueden ser cargas estáticas o dinámicas, efectos de temperatura, etc. ASCE (1982) y Noguchi (1994) exponen una amplia aplicación del método de los elementos finitos.

Para el caso particular de elementos compuestos se ha podido representar el comportamiento de sus componentes por separado, y la transferencia de cortante que se produce a través de los planos de contacto entre ellos. ASCE (1982) muestra modelos de elementos capaces de reproducir mecanismo de transferencia de cortante en interfaces concreto-concreto. En particular el mecanismo de fricción-cortante. Este se representó por elementos resorte, los cuales fueron propuestos por primera vez por Ngo y Scordelis (1967) para modelar la transferencia de cortante a través de grietas. Posteriormente, se elaboraron elementos de frontera capaces de modelar una interacción a lo largo de toda la frontera entre los elementos finitos. Los primeros modelos sólo incluían una rigidez paralela a la interfaz (Keuser y Mehlhorn, 1987), y posteriormente se generalizaron para incluir efectos perpendiculares a la misma (Keuser y Mehlhorn, 1987).

Keuser y Mehlhorn (1987) estudiaron distintos elementos finitos para modelar el comportamiento en la interfaz. Compararon elementos resortes y elementos frontera con funciones de desplazamientos de distintos órdenes. Se llegó a la conclusión de que un elemento de frontera es capaz de representar correctamente el comportamiento en una interfaz, cuando la función de deslizamiento en la interfaz es del mismo orden o menor que el de la función de forma del elemento de interfaz. En caso de no cumplirse esto, se deben colocar el número suficiente de elementos frontera para lograr la convergencia. Con los elementos resorte los resultados fueron adecuados solamente para una función de deslizamiento uniforme a lo largo de la interfaz. Se podía lograr convergencia a la solución exacta añadiendo nuevos elementos, pero la convergencia es muy lenta.

A pesar de este amplio campo de aplicaciones, el método de los elementos finitos ha sido usado siempre como herramienta de investigación, ya que su aplicación en la práctica resultaría poco económica debido al tiempo que se debe invertir en la elaboración de los modelos, y el gasto desde el punto de vista de cómputo. En este trabajo se calibra la solución elástica del método de las diferencias finitas, y el caso donde existe comportamiento no lineal en la interfaz. Para esto se emplearán los programas de cómputo SAP2000 (1997) y RUAUMOKO (Carr, 1998). La posibilidad que brindan ambos programas para modelar el comportamiento en la interfaz es mediante los elementos resorte. Como ya se ha comentado, en la literatura se han expuesto limitaciones de estos elementos; sin embargo, se decidió comprobar su empleo para modelar la interfaz entre elementos lineales. Para esto se comparó con la solución exacta de una viga compuesta por

dos elementos, con posibilidad de deslizamiento relativo entre ellos (Oehlers y Bradford, 1995). Los resultados fueron aceptables, razón por la cual se emplearon para calibrar el método de las diferencias finitas con varios planos de deslizamiento.

A pesar de las limitaciones de los elementos resorte, se han reportado modelos donde se han empleado y han dado resultados satisfactorios. Por ejemplo, Schneider (1998) lo empleó para modelar la interfaz entre el concreto y el acero en un tubo de acero relleno de concreto, y tuvo buenos resultados respecto a los ensayos realizados.

2.2. Elemento viga-columna con funciones de interpolación

Modelo de plasticidad concentrada

Este modelo está compuesto por un elemento elástico-lineal y dos resortes, en los cuales se concentran los efectos no lineales debido al comportamiento de los materiales

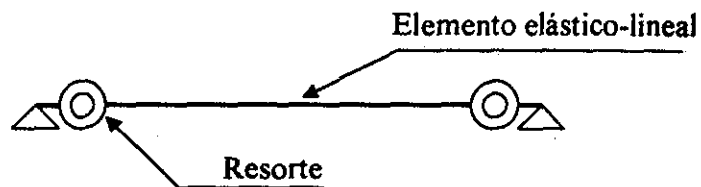


Fig 2.1 Modelo de plasticidad concentrada

El elemento elástico-lineal reproduce la rigidez del modelo en el intervalo de comportamiento elástico-lineal de los materiales, por lo que la flexibilidad de los resortes es nula en este intervalo. La degradación de rigidez del elemento ocurre cuando los materiales incursionan en el intervalo de comportamiento no lineal y en consecuencia se incrementa la flexibilidad de los resortes. Las propiedades de estos resortes se calculan considerando una distribución de momentos lineal con el punto de inflexión en el centro (Giberson, 1968). Esta hipótesis puede provocar errores importantes en vigas donde la carga gravitatoria sea importante o en las columnas donde el punto de inflexión se aleje del centro. Otani (1974) intentó proponer un método para considerar la variación del punto de inflexión con la variación de la carga, pero tuvo problemas numéricos debido a las grandes variaciones de este.

A pesar de las hipótesis consideradas este modelo aún es ampliamente utilizado debido a su economía desde el punto de vista de cómputo, lo que posibilita el análisis de grandes estructuras (Carr, 1998 y Kanaan, 1973). Por otro lado, modificando las leyes de histéresis de los resortes se puede modelar de manera simplificada distintos aspectos del comportamiento no lineal, como la interacción entre la carga axial y el momento, pérdida de adherencia de las barras de acero en el nudo etc. Sin embargo, no se han modelado elementos con superficies de contacto en las que puedan desarrollarse deslizamientos relativos.

Modelos de plasticidad distribuida

La hipótesis del punto de inflexión fijo en el centro, empleada en los modelos de plasticidad concentrada, implica considerar que la longitud de la zona plástica no varía. Para eliminar las inconsistencias generadas por esta hipótesis, se comenzaron a desarrollar los modelos de plasticidad distribuida. Meyer y Roufaiel (1983) propusieron emplear un diagrama momento-curvatura bilineal en la sección transversal (fig 2.2a). Si en el elemento se produce una distribución de momentos lineal (fig 2.2b), entonces la distribución de la rigidez de las secciones transversales es simple (fig 2.2c) y se deducen expresiones simples para la rigidez del elemento.

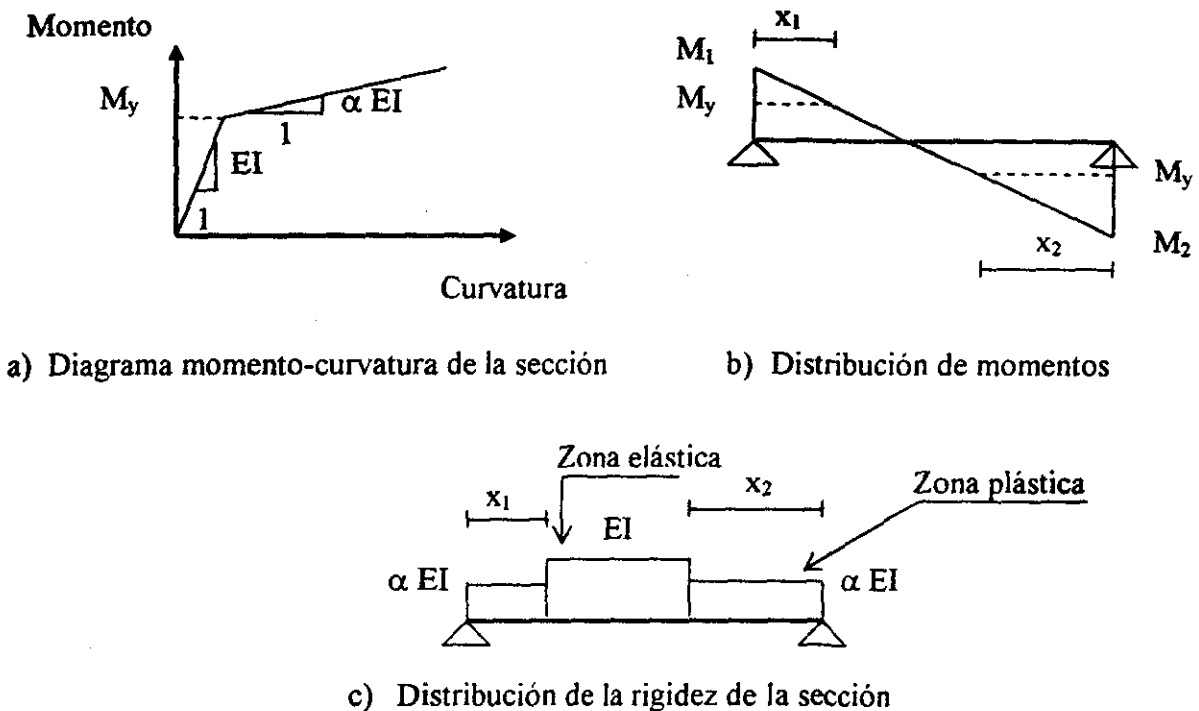


Fig 2.2 Modelo de plasticidad distribuida

De esta manera se puede considerar la variación del punto de inflexión, y la longitud de la zona plástica depende de la historia de momentos.

Este primer modelo consideraba solamente los efectos de flexión, posteriormente Roufaiel y Meyer (1987) lo ampliaron para incluir los efectos del cortante y la carga axial. Esto lo realizaron modificando las leyes de histéresis de los gráficos momento-curvatura. Filippou e Issa (1988) propusieron otra variante del modelo de plasticidad distribuida, en donde las distintas fuentes de comportamiento no lineal la separaron en subelementos. De esta manera, para incorporar nuevos efectos de no linealidad no se hace más compleja la ley de histéresis de un elemento, sino que se introduce un nuevo subelemento. Esto fue realizado posteriormente por Filippou *et al* (1992) para incluir el efecto de la carga axial y el

cortante. En estos trabajos se demostró que los modelos de plasticidad concentrada cometen errores importantes al considerar el punto de inflexión fijo en el centro, y una variación lineal del gráfico momento-rotación después de alcanzar la fluencia.

A pesar del avance que representaron estos modelos respecto a los modelos de plasticidad concentrada no se incluyeron efectos de pérdida de adherencia entre las barras de acero y el concreto, o la existencia de superficies potenciales de deslizamientos entre distintos elementos.

Modelos de fibra

Estos primeros modelos de plasticidad distribuida idealizan las envolventes momento-curvatura como una curva bilineal. Esta idealización introduce errores respecto a la curva correcta.



Fig 2.3 Aproximación bilineal del diagrama momento-curvatura

Para calcular correctamente el diagrama momento-curvatura se utiliza un modelo de fibra, el cual consiste en dividir la sección transversal en fibras o cuadrículas de esfuerzo constante (Kaba y Mahin, 1984). En la medida que las fibras son más pequeñas el modelo se acerca al diagrama momento-curvatura correcto. Sin embargo, cuando se emplea este modelo y se busca la variación de la rigidez en el elemento para una distribución de momentos ya no es tan simple como la fig 2.2c, debido a que la variación de la rigidez respecto al momento no es necesariamente una línea recta. Además pueden ocurrir discontinuidades debido a las secciones agrietadas.

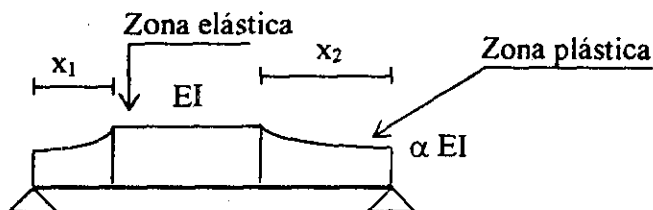


Fig 2.4 Variación de la rigidez de la sección con el modelo de fibra

Esto impide obtener expresiones simples para la rigidez del elemento, además ésta es sensible a pequeñas variaciones de los desplazamientos en los extremos del elemento. Por esta razón se requieren procedimientos más eficientes que los desarrollados anteriormente.

Para incorporar los modelos de fibras de las secciones transversal en modelos de elementos, las primeras tendencias fueron proponer funciones de interpolación para los desplazamientos. Daniels y Crisinel (1993) introdujeron en estos modelos funciones de interpolación para los deslizamientos en la interfaz y se lograron los primeros modelos con funciones de interpolación capaces de reproducir el comportamiento de los elementos con superficies de contacto.

Spacone *et al* (1996) desarrollo un modelo basado en funciones de interpolación para fuerzas. Estas son exactas debido a que se basan en condiciones de equilibrio, por lo que se eliminan los errores asociados a la aproximación de la función de forma y obtiene un modelo más eficiente. Salari *et al* (1998) introdujo funciones de interpolación para el flujo en la interfaz. Salari y Spacone, (2000) demostró que este elemento es superior a los modelos basados en desplazamientos, y reproduce adecuadamente los resultados experimentales. Estos modelos resultaron más estables y económicos desde el punto de vista de cómputo, pero no son capaces de analizar elementos con varias superficies de contacto.

2.3. Elemento viga-columna basado en diferencias finitas

El método de las diferencias finitas fue el primero que se empleó para resolver este problema. Ansourian y Roderick (1978) lo aplicaron al caso de una viga metálica que soportaba una losa de concreto. El elemento compuesto se encontraba simplemente apoyado en sus bordes, y sometido a una carga distribuida.

En este método se expresan las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del elemento en diferencias finitas. Esto permite obtener una relación entre la respuesta de una sección transversal y la anterior, en función de la resultante en la interfaz entre ambas secciones. El problema se divide en dos partes. En una es necesario definir un procedimiento para obtener la respuesta de una sección en función de la respuesta calculada en la sección anterior y en la interfaz entre ambas secciones. Por otro lado, se deben satisfacer las condiciones de frontera en los bordes del elemento. La manera en la que plantearon las diferencias finitas Ansourian y Roderick (1978), implica realizar iteraciones para calcular la respuesta de una sección a otra, aun cuando el comportamiento es elástico-lineal, y además plantearon una linealización del problema a nivel de elemento para ajustar las condiciones de frontera. Esto implica resolver un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$ (n es el número de conectores) en cada iteración.

Roberts (1985) propuso una alternativa donde no era necesario iterar cuando el comportamiento es elástico-lineal. Su propuesta genera un sistema de ecuaciones cuyo orden es igual al número de secciones en los que se divide el elemento. Oehlers y Bradford (1995) redujeron el número de incógnitas iterando solamente con los deslizamientos en la sección del borde. Este procedimiento requiere un esfuerzo de cómputo importante debido a que también itera para calcular la respuesta de cada sección.

Para reducir el tiempo de cómputo, Fabbrocino *et al* (1999) propusieron algunas variantes para eliminar las iteraciones de una sección a otra. Primero plantearon las diferencias

finitas de tal manera que no es necesario iterar de una sección a otra, y luego para eliminar las iteraciones necesarias para equilibrar las fuerzas en la sección propusieron el cálculo de un diagrama de momento- curvatura que depende de la fuerza resultante en la interfaz. Sin embargo, todavía es necesario realizar iteraciones para ajustar las condiciones de frontera, aun cuando el comportamiento es elástico-lineal.

Fabbrocino *et al* (2000) ampliaron este procedimiento para dos planos de deslizamiento, y lo aplicaron al mismo caso de una viga metálica que soportaba a una losa de concreto. En este caso incluyeron la posibilidad de deslizamiento entre el acero de refuerzo y el concreto en la losa. Para hacer esto realizaron dos procesos iterativos, uno para ajustar el deslizamiento entre el perfil metálico y la losa de concreto, y el otro para ajustar el deslizamiento entre el acero de refuerzo y el concreto en la losa. Los diagramas de momento-curvatura los hicieron depender entonces de la resultante en la interfaz perfil-losa y de la resultante en la interfaz acero-concreto. Esto implica un volumen de cálculo importante antes de empezar a realizar las iteraciones.

El procedimiento numérico utilizado obliga a introducir un proceso iterativo por cada superficie de deslizamiento que se desee introducir, lo cual dificulta el análisis de elementos con varias superficies de deslizamiento.

3 ELEMENTOS CON UNA INTERFAZ

3.1. Planteamiento teórico

Las ecuaciones que modelan el comportamiento de los elementos con superficies de deslizamientos se deducen de la mecánica de materiales, y representan los estados de esfuerzos y de deformación en las secciones transversales y la interfaz. Para facilitar la explicación de estas ecuaciones, se va a analizar una viga articulada en uno de sus extremos y simplemente apoyada en el otro, sometida a una carga distribuida (fig 3.1). Esta viga está compuesta por dos elementos que pueden deslizarse con una determinada rigidez uno respecto al otro, a través de una superficie de deslizamiento o interfaz (fig 3.1). Tanto los materiales como la interfaz se comportan en el intervalo elástico-lineal.

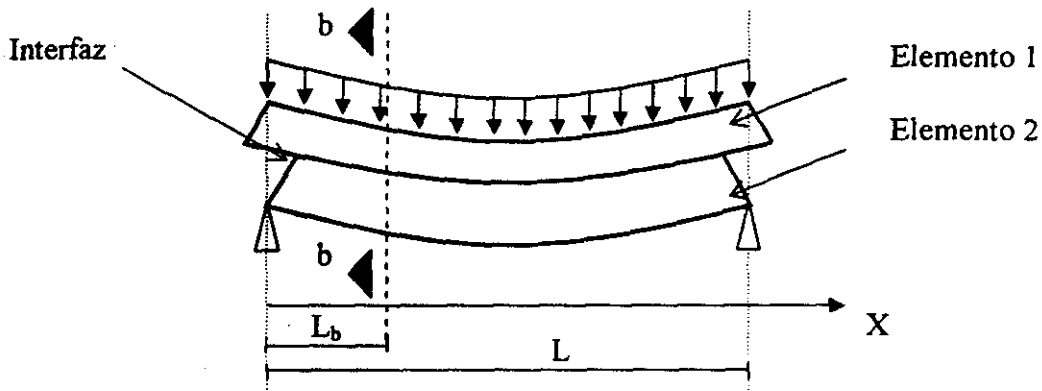


Fig 3.1 Estado deformado y condiciones de carga de una viga con dos elementos

Las principales características del comportamiento de la sección transversal b se muestran en la fig 3.2, la cual está compuesta de los elementos 1 y 2 (fig 3.2a). Al someter la sección b a la acción de un momento flexionante (fig 3.2b) se produce un estado deformado caracterizado por el deslizamiento en la interfaz. Producto de estas deformaciones aparecen fuerzas normales y momentos en cada elemento (fig 3.2c) cuya suma equilibra al momento actuante en la sección (fig 3.2b).

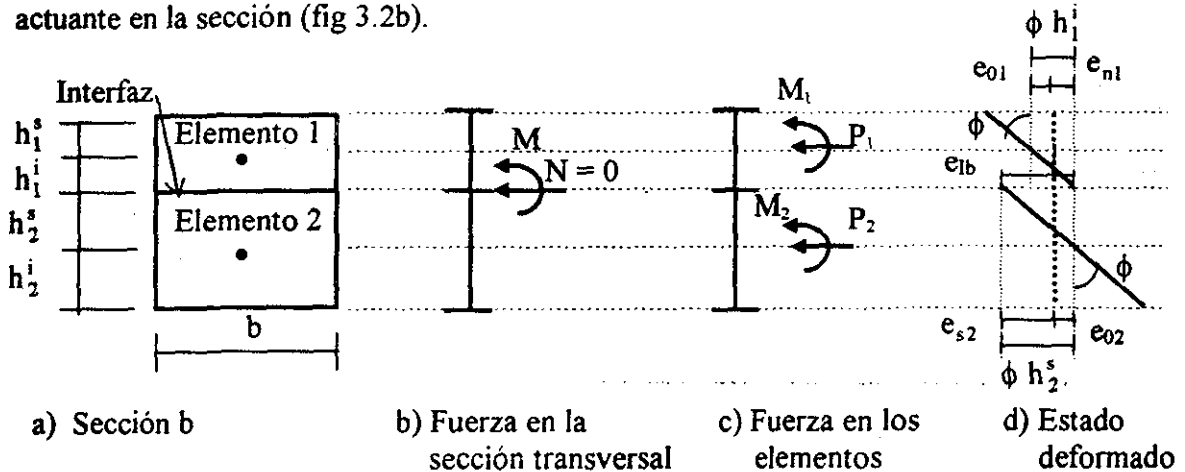


Fig 3.2 Comportamiento de una sección transversal b de la fig 3.1

De esta figura se puede plantear la relación entre las fuerzas y momentos internos de los elementos (fig 3.2c) y de la sección transversal (fig 3.2b) mediante las condiciones de equilibrio siguientes

$$M = \sum_{i=1}^2 (M_i + P_i y_i) \quad (3.1)$$

$$N = \sum_{i=1}^2 P_i = P_1 + P_2 = 0 \quad (3.2)$$

Donde

- N fuerza normal en el elemento
- M momento flexionante en la sección transversal
- M_i momento flexionante en el elemento i
- P_i fuerza normal en el elemento i
- y_i distancia del centroide del elemento i a la interfaz.

Conociendo las fuerzas y momentos internos de la sección transversal es posible definir el estado deformado de la sección. Para esto es necesario calcular las deformaciones centroidales de los elementos (e_{0i}) y la curvatura de la sección transversal (ϕ) con las expresiones. La curvatura en ambos elementos es igual debido a que no se considera la separación entre ellos.

$$e_{0i} = \frac{P_i}{E_i A_i} \quad (3.3)$$

$$\phi = \frac{M_i}{E_i I_i} \quad (3.4)$$

Donde

- e_{0i} deformación unitaria centroidal en el elemento i
- ϕ curvatura en la sección transversal
- E_i módulo de elasticidad del elemento i
- A_i área de la sección transversal del elemento i
- I_i momento de inercia de la sección transversal del elemento i.

Definidos los principales parámetros del estado deformado, se puede conocer la diferencia de deformaciones en la interfaz en la sección b mediante la relación geométrica

$$e_{1b} = e_{n1} - e_{s2} = e_{01} - e_{02} - \phi (h_1^i + h_2^s) \quad (3.5)$$

Donde

$$e_{n1} = e_{01} - \phi h_1^i$$

$$e_{s2} = e_{02} + \phi h_2^s$$

También se define como la pendiente del deslizamiento en la interfaz en la sección b

$$e_{1b} = \left(\frac{dS}{dx} \right)_{L_b} \quad (3.6)$$

Donde S es el deslizamiento en la interfaz.

El deslizamiento en la interfaz genera en ella un flujo de fuerzas (fig 3.3), o fuerzas concentradas en conectores (fig 3.4) o ambos. Esto depende del mecanismo de transferencia de cortante en la interfaz.

Dado que el comportamiento en la interfaz es elástico-lineal, entonces las relaciones entre el deslizamiento y el flujo o la fuerza en el conector son

$$q = kS \quad (3.7)$$

Donde

- q flujo de fuerza (fuerza por unidad de longitud)
- k rigidez (fuerza por unidad de área de la interfaz)
- S deslizamiento en la interfaz.

$$f_i = k_i S_i \quad (3.8)$$

Donde

- f_i fuerza en el conector i
- k_i rigidez del conector i
- S_i deslizamiento asociado, al conector i.

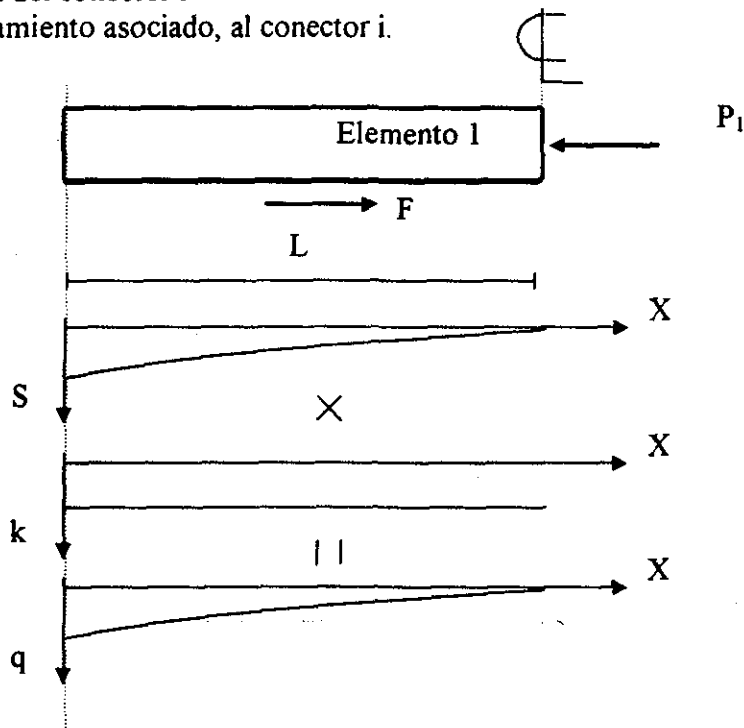


Fig 3.3 Comportamiento de la interfaz entre el apoyo y el centro del claro de la viga.

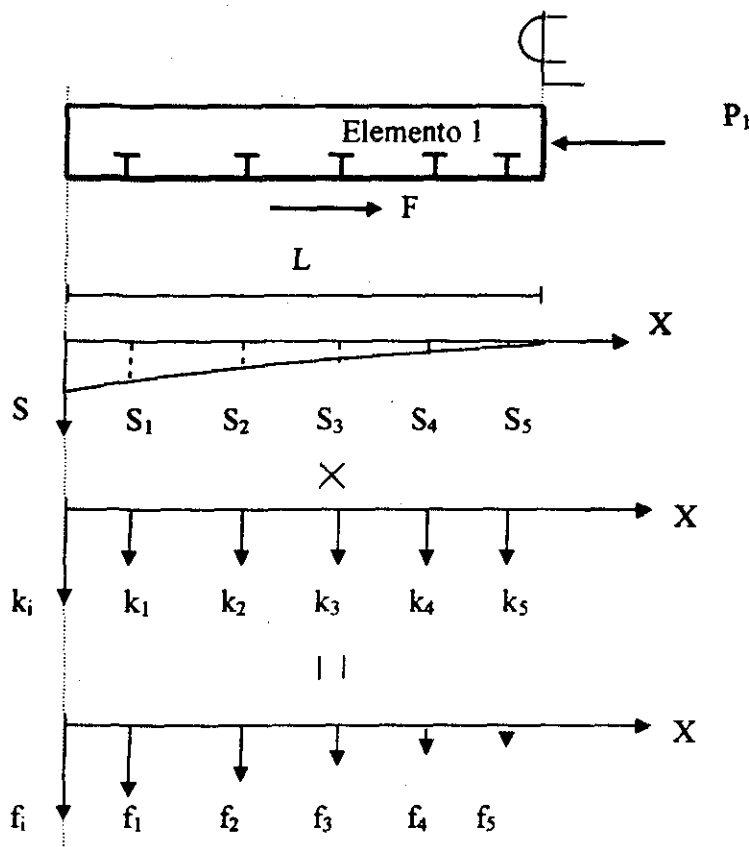


Fig 3.4 Comportamiento de los conectores entre el apoyo y el centro del claro

Tanto en la fig 3.3 como en la fig 3.4 se supone que la rigidez de la interfaz es constante en todo el elemento. Esto es por sencillez en la exposición. Los procedimientos que se analizarán posteriormente pueden ser extrapolados al caso donde exista una variación de la rigidez en la interfaz en el elemento.

En las figs 3.3 y 3.4 se señala la fuerza F, la cual es la resultante del flujo o las fuerzas en la interfaz y, equilibra la fuerza normal en el elemento 1. El cálculo de la resultante F es diferente cuando se produce un flujo que cuando aparecen fuerzas concentradas en los conectores. Para el primero

$$F = \int_0^L q dx \quad (3.9)$$

y para el segundo

$$F = \sum_{i=1}^n f_i \quad (3.10)$$

Donde n es el número de conectores

Las ecs 3.1 a 3.10 son suficientes para representar el comportamiento del ejemplo de la fig 3.1, y son la base de los procedimientos que se muestran en este trabajo

3.2. Solución teórica

Oelehrs y Bradford (1995) exponen una solución teórica exacta para el ejemplo de la fig 3.1, la cual servirá para validar los procedimientos propuestos en este capítulo. Se supone un comportamiento elástico-lineal de los materiales y de la interfaz, y la existencia de un flujo en la interfaz, producido por el deslizamiento relativo entre los elementos.

Para obtener la solución plantearon una ecuación diferencial de segundo orden y fijaron condiciones de frontera. Esta permite obtener la variación de la resultante del flujo y, a partir de éste se obtienen los restantes parámetros del comportamiento del elemento. A continuación se comenta brevemente esta solución y se señalan algunos aspectos de interés en el comportamiento de elementos con deslizamientos relativos en la interfaz.

La relación de la curvatura con el momento actuante en la sección transversal y las fuerzas normales en los elementos se obtiene sustituyendo la ec 3.4 en la ec 3.1 y luego se despeja la curvatura

$$\phi = \frac{M - \sum_{i=1}^2 P_i y_i}{\sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.11)$$

Sustituyendo las ecs 3.3 y 3.11 en la ec 3.5 se obtiene

$$e_1 = \frac{F \bar{EI}}{EA \sum_{i=1}^2 E_i I_i} - \frac{M (h_1^i + h_2^s)}{\sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.12)$$

Donde

$$\bar{EA} = \frac{1}{\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}}$$

$$\bar{EI} = \sum_{i=1}^2 E_i I_i + \bar{EA} (h_1^i + h_2^s)^2$$

\bar{EI} corresponde a la rigidez a flexión de la sección sin deslizamiento y \bar{EA} se denomina rigidez normal equivalente de la sección desacoplada.

Por último, sustituyendo las ecs 3.6 y 3.7 en la ec 3.13.

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{F \bar{E} \bar{I}}{\bar{E} A \sum_{i=1}^2 E_i I_i} = - \frac{M (h_1^i + h_2^s)}{\sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.13)$$

Para el caso de la viga de la fig 3.1, las condiciones de frontera son que la fuerza F es cero en el extremo de la viga y el flujo es cero al centro del claro de la viga.

Definida la variación de F se calcula el estado deformado del elemento. Las fuerzas en los elementos se expresan en función de la resultante en la interfaz. La fuerza en el elemento 1 es igual a F (fig 3.3 y 3.4), mientras que por la condición de equilibrio la fuerza en la sección transversal (ec 3.2), la fuerza en el elemento 2 es el opuesto de F.

$$P_1 = F \quad (3.14)$$

$$P_2 = -F \quad (3.15)$$

Sustituyendo las ecs 3.11, 3.14 y 3.15 en la ec 3.13

$$\phi = - \frac{M}{EI} + \frac{1}{k} \frac{\bar{E} \bar{A}}{\bar{E} I} (h_1^i + h_2^s) \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (3.16)$$

Donde k es la rigidez de la interfaz. Cuando el valor de esta es infinitamente grande el segundo término de la ec 3.16 se anula, y el valor de ϕ corresponde al valor de la sección transversal sin deslizamiento.

Nótese que las ecs 3.14 y 3.15 muestran que para calcular el estado deformado de una sección transversal en un elemento con deslizamiento en la interfaz, se requiere conocer la fuerza en la interfaz. No es posible calcular las deformaciones en la sección transversal directamente de las cargas actuantes como ocurre en los elementos sin interfaz.

3.3. Modelo de elemento finito

Con el fin de contar con una referencia para validar los modelos con diferentes condiciones de frontera y para varias interfaces (capítulo 3), se elaboró un modelo de elementos finitos. En esta sección se analiza la viga de la fig 3.1 y los resultados se comparan con la solución exacta.

El modelo se construyó con el programa SAP2000 (1997). Los elementos de la viga se representaron con elementos cascarones. Para la interfaz se colocaron dos líneas de nudos que coinciden en coordenadas. Estos nudos se unieron mediante un resorte, similares a los análisis que realizó Schneider (1998).

El modelo desarrollado se muestra en la fig 3.5.

En la fig 3.6 se compara la solución de este modelo con el de la teoría y se observa una excelente correlación.

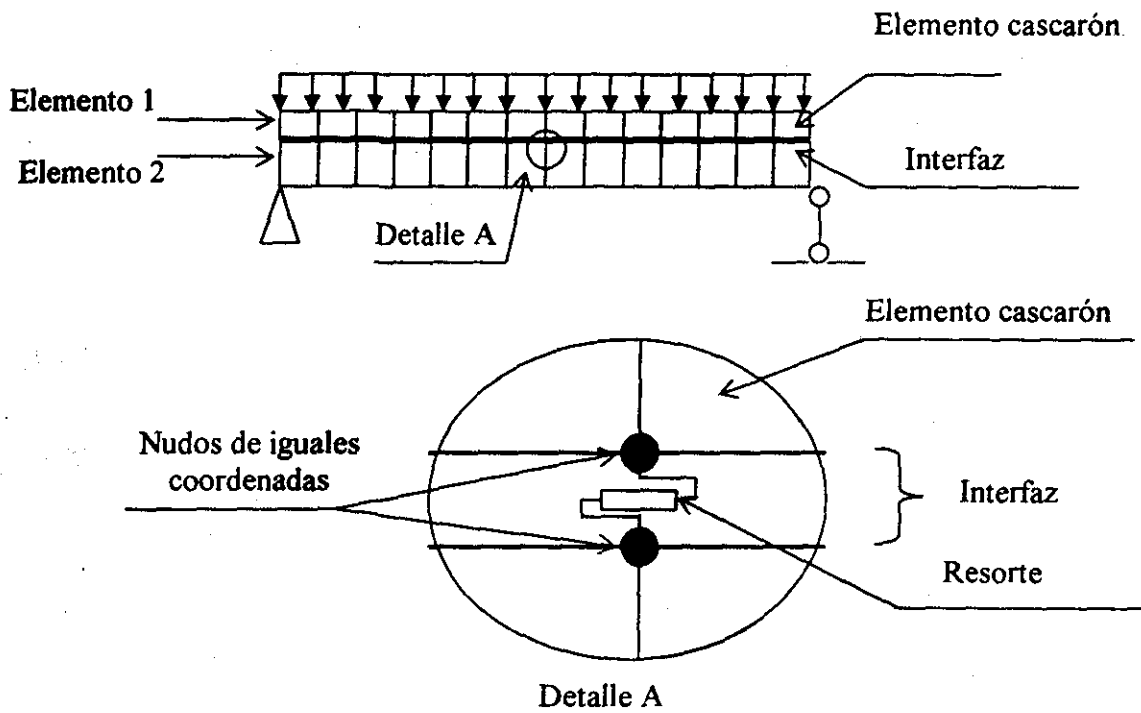


Fig 3.5 Descripción del modelo de elementos finitos.

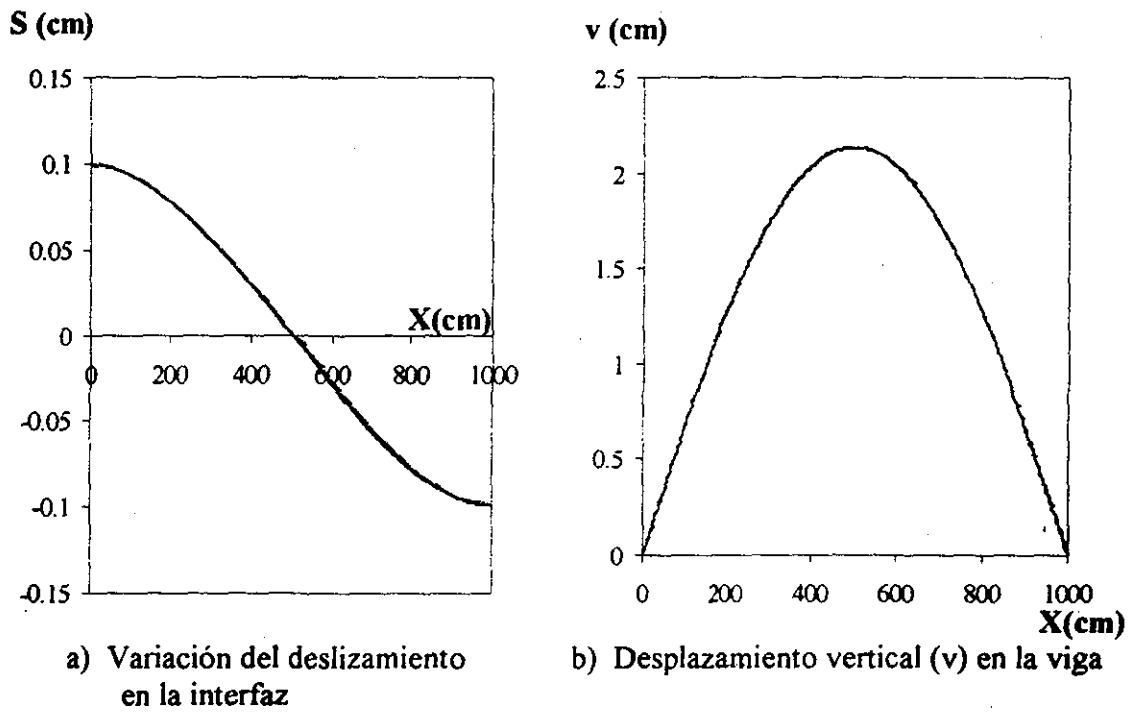


Fig 3.6 Comparación del modelo de elemento finito (línea discontinua) con la solución teórica (línea continua)

3.4. Modelo de diferencias finitas propuesto

El modelo propuesto consiste en dividir el elemento en un número finito de secciones transversales. El análisis se realiza integrando la respuesta de las secciones, las cuales dependen de la variación de P en la interfaz (ecs 3.11 y 3.12). El método de las diferencias finitas permite expresar las ecuaciones diferenciales (ecs 3.6 y 3.9) que rigen el comportamiento de la interfaz como ecuaciones lineales, y obtener expresiones que relacionan el comportamiento de una sección en función de la anterior. Estas son el fundamento teórico de procedimientos numéricos implementados para satisfacer la compatibilidad de desplazamiento y el equilibrio en la interfaz y en las secciones, y cumplir determinadas condiciones de frontera en los extremos del elemento.

Las bases del método propuesto fueron planteadas por Oelehrs y Bradford (1995) y mejoradas por Fabbrocino *et al* (2000). Ellos demostraron que la respuesta del elemento se puede obtener si se conoce el deslizamiento de uno de los extremos, lo cual es válido en elementos articulado-simplemente apoyado sin restricción a los deslizamientos en los extremos. El procedimiento consiste en iterar con el valor de este deslizamiento (S_0) hasta que el deslizamiento en la sección central sea cero. En cada iteración se fija un valor de S_0 , y se comienza a calcular la respuesta de cada sección en función de la respuesta de la anterior hasta llegar a la sección central, en donde se verifica que el deslizamiento sea cero. Estas iteraciones se requieren independientemente del comportamiento del material, sin embargo, estas se pueden evitar. Con este fin se realiza un análisis detallado a nivel de sección transversal y de elemento. A nivel de sección se analiza la mejor manera de expresar la respuesta de una sección en función de la anterior. Para esto se comparan las propuestas de Oelehrs y Bradford (1995) y Fabbrocino *et al* (2000). A nivel de elemento se propone un procedimiento para satisfacer las condiciones de frontera sin realizar iteraciones.

3.4.1. Planteamiento teórico

El elemento se divide en un número de secciones d (fig 3.7). La cantidad de secciones depende de las condiciones particulares de cada problema y del método de integración numérica que se emplee para obtener la respuesta del elemento. Cada sección se encuentra separada una distancia Δx de la anterior.

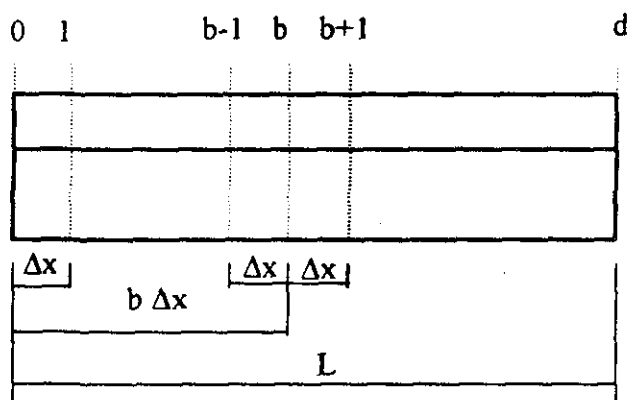


Fig 3.7 Secciones consideradas del elemento

Δx se considera constante a todo lo largo del elemento, por tanto su valor es

$$\Delta x = \frac{L}{d} \quad (3.17)$$

Donde d es el número de secciones en el elemento

El método de las diferencias finitas se aplica en las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la interfaz (ecs 3.6 y 3.9). Los puntos de la interfaz que se toman corresponden a la intersección de las secciones de la fig 3.7 con la interfaz. La diferencia entre las propuestas por Oelehrs y Bradford (1995) y por Fabbrocino *et al* (2000) radica en las ecuaciones de diferencias finitas que utilizan. Para determinar las ventajas y desventajas de ambos procedimientos, se analizan ambas propuestas.

Oelehrs y Bradford (1995) emplea las ecuaciones siguientes

$$S_b = S_{b-1} + \frac{(e_{1b} + e_{1b-1})}{2} \Delta x \quad (3.18)$$

$$F_b = F_{b-1} + \frac{(q_b + q_{b-1})}{2} \Delta x \quad (3.19)$$

Donde

- S_b deslizamiento de la interfaz en la sección b
- S_{b-1} deslizamiento de la interfaz en la sección $b-1$
- F_b resultante del flujo entre un apoyo y la sección b
- F_{b-1} resultante del flujo entre un apoyo y la sección $b-1$
- q_b flujo en la interfaz en la sección b
- q_{b-1} flujo en la interfaz en la sección $b-1$
- e_{1b} deformación de la interfaz en la sección b
- e_{1b-1} deformación de la interfaz en la sección $b-1$
- Δx distancia entre dos secciones consecutivas.

Estas ecuaciones permiten establecer un procedimiento para calcular la fuerza en los elementos.

Sustituyendo las ecs 3.7 y 3.18 en la ec 3.19

$$F_b = F_{b-1} + k S_{b-1} \Delta x + k \frac{(e_{1b} + e_{1b-1})}{4} \Delta x^2 \quad (3.20)$$

Esta ecuación permite estimar la fuerza en la interfaz en b (fig 3.1) a partir de la respuesta en la sección anterior y el valor de la deformación en la interfaz en b . Con esta fuerza se calculan las de los elementos (ecs 3.14 y 3.15). Sin embargo, la deformación en la interfaz depende de la fuerza en el elemento (ec 3.12). Para resolver esto Oelehrs y Bradford (1995) recurren a un proceso iterativo.

Primero se calcula la fuerza en la sección b suponiendo que la deformación en la sección b es igual a la deformación de la sección b-1. Con la fuerza en la interfaz y el momento actuante en la sección se obtiene la deformación en la interfaz (ec 3.12). Con este nuevo valor de deformación e_i se recalcula la fuerza en la interfaz. El proceso se repite hasta que la diferencia entre las fuerzas en la interfaz calculadas en dos pasos consecutivos sea menor que una tolerancia fijada. Este proceso se muestra esquematizado en la fig 3.8.

Fabbrocino *et al* (2000) eliminaron estas iteraciones modificando la ecuación de diferencias finitas para fuerza (ec 3.20).

$$F_b = F_{b-1} + q_{b-1} \Delta x \quad (3.21)$$

Al aplicar las mismas transformaciones del método anterior para llegar a una expresión análoga a la ec 3.20

$$F_b = F_{b-1} + k S_{b-1} \Delta x \quad (3.22)$$

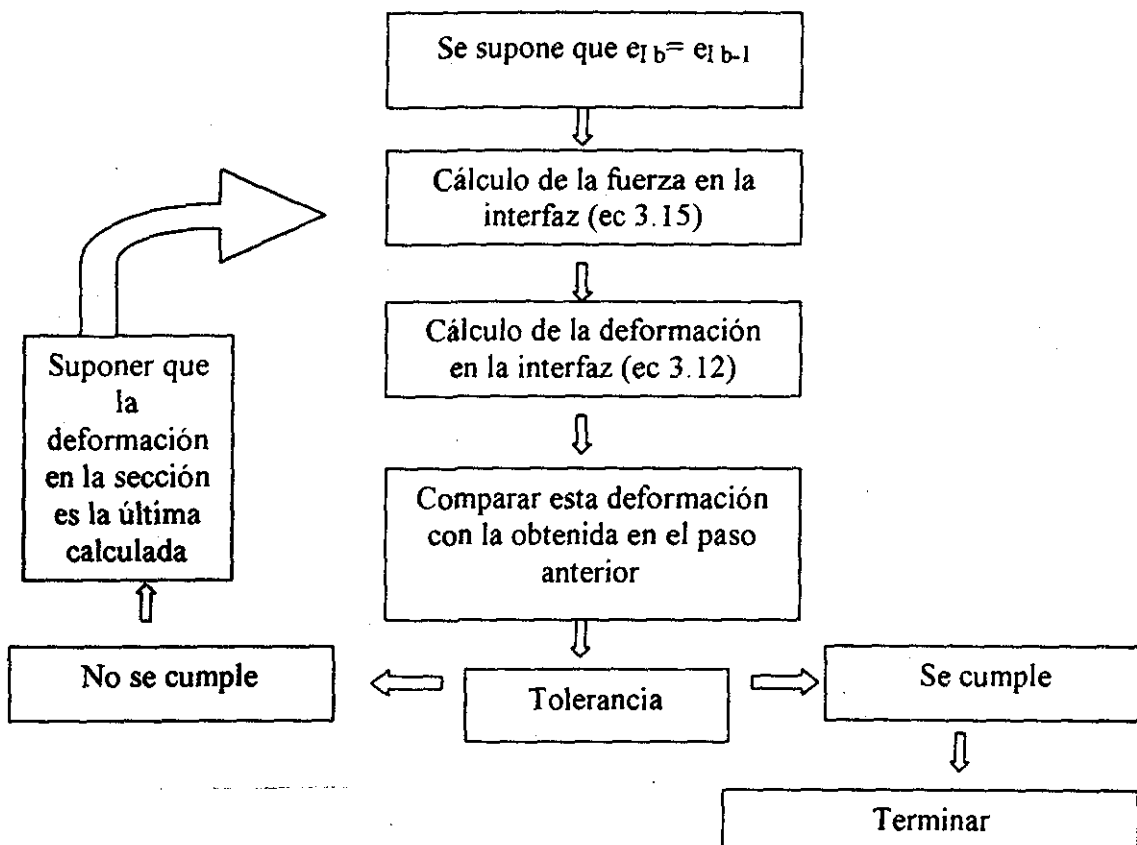


Fig 3.8 Diagrama de flujo del método de Oelehrs y Bradford, (1995) a nivel de sección transversal

Esta ecuación permite calcular las fuerzas en el elemento en la sección b a partir de la respuesta en la sección $b-1$. Con estas fuerzas se estima la deformación en la interfaz, las deformaciones centroidales de los elementos y la curvatura. De esta forma es posible calcular la respuesta en la sección b a partir de la respuesta en la sección $m-1$ sin realizar ninguna iteración.

La diferencia entre ambos métodos se ilustra en la fig 3.9. En ella aparece la variación del flujo que se supone para realizar la integración de este y obtener la variación de la fuerza en la interfaz.

Fabbrocino *et al* (2000) aplicaron este procedimiento para dos interfaces con mecanismos de transferencia de cortante diferentes, entre las barras de acero de refuerzo y el concreto donde aparece un flujo de cortante; y entre un perfil metálico y una losa de concreto con fuerzas concentradas en conectores de cortantes. La diferencia entre la fuerza F en la sección $b+1$ y b , es el producto del flujo por la distancia (ec 3.23) para el primer caso, y para el segundo es la fuerza en el conector entre ambas secciones.

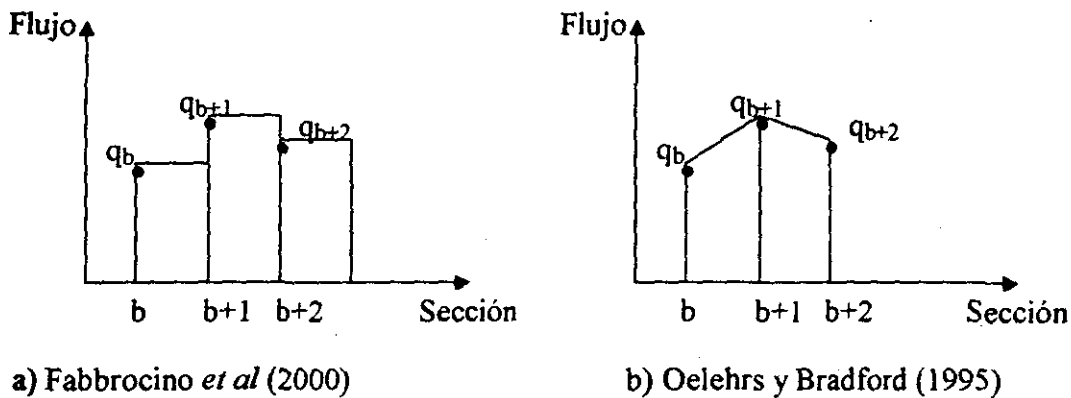


Fig 3.9 Variación del flujo para realizar la integración y obtener la fuerza en la interfaz.

$$F_{b+1} - F_b = q_b \Delta x = f_b \quad (3.23)$$

Esta ecuación indica que el método de Fabbrocino *et al* (2000) modela el desarrollo de un flujo en la interfaz concentrando las propiedades de la misma entre dos secciones en un muelle de cortante ubicado en estas. Las características del muelle se calculan multiplicando las propiedades de la interfaz por la distancia entre las secciones.

3.4.2. Condiciones de frontera del elemento

Oelehrs y Bradford (1995), y Fabbrocino *et al* (2000) proponen fijar un valor del deslizamiento en la sección del extremo S_0 . En esta sección las fuerzas en los elementos y el momento son cero, por tanto la curvatura y la deformación en la interfaz también son cero (ecs 3.11 y 3.12). Esto implica que el procedimiento se puede aplicar solo cuando un extremo esté articulado y las fuerzas en los elementos deben ser cero.

El deslizamiento S_0 genera un flujo en la interfaz (ec 3.7) igual a

$$q_0 = k S_0 \quad (3.24)$$

La resultante del flujo entre la sección del extremo y la sección 1 (F_1) se obtiene sustituyendo la ec 3.24 en la ec 3.22

$$F_1 = k S_0 \Delta x \quad (3.25)$$

Esta fuerza genera una deformación en la interfaz en la sección 1, la cual se calcula sustituyendo la ec 3.25 en la ec 3.12

$$e_{11} = \frac{k \Delta x \bar{E} \bar{I}}{\bar{E} A \sum_{i=1}^2 E_i I_i} S_0 - \frac{M_1 (h_1^i + h_2^s)}{\sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.26)$$

Con la deformación en la interfaz se estima el deslizamiento sustituyendo la ec 3.26 en la ec 3.18.

$$S_1 = \left(1 + \frac{k \Delta x^2 \bar{E} \bar{I}}{2 \bar{E} A \sum_{i=1}^2 E_i I_i} \right) S_0 - \frac{M_1 (h_1^i + h_2^s) \Delta x}{2 \sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.27)$$

Las ecs 3.25 a 3.27 muestran cómo calcular la fuerza F_1 , la deformación e_{11} y el deslizamiento S_1 a partir de S_0 , ya que los demás términos de estas ecuaciones son propiedades mecánicas de la interfaz y la sección, y el momento actuante en la sección, los cuales son parámetros conocidos. Este proceso se repite de sección a sección. Por ejemplo, la fuerza en la sección 2 se calcula sustituyendo las ecs 3.25, 3.26 y 3.27 en la ec 3.18

$$F_2 = \left(k(2 \Delta x) + \frac{k^2 \Delta x^3 \bar{E} \bar{I}}{2 \bar{E} A \sum_{i=1}^2 E_i I_i} \right) S_0 - \frac{k M_1 (h_1^i + h_2^s) \Delta x^2}{2 \sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.28)$$

Al llegar a la sección central se verifica que el deslizamiento sea cero. Lo cual es correcto solo en elementos donde la distribución de momentos simétrica y aplicable al ejemplo en estudio. Si este no es cero se debe variar el valor de S_0 . Este es el proceso iterativo propuesto en la literatura. Sin embargo, si se expresa la respuesta de la sección central en función de S_0 , de la misma forma que se realizó para la sección 1 (ecs 3.25 a 3.27), entonces se puede calcular el valor de S_0 a partir de la condición de que el deslizamiento en la sección central es cero, lo cual elimina la necesidad de iterar para obtener el valor de S_0 y es la base teórica del procedimiento propuesto en este trabajo. La respuesta del resto de las

secciones transversales y la interfaz se expresó en función de S_0 , por lo tanto, al calcular el valor de S_0 se conoce la respuesta en todas las secciones y puntos de la interfaz analizados en el elemento.

Este procedimiento se puede expresar matemáticamente de una manera más simple. Las ecs 3.25 y 3.38 permiten afirmar que la relación entre F_b y S_0 para una sección b cualquiera puede ser

$$F_b = k_b S_0 + \tilde{f}_b \quad (3.29)$$

Donde

k_b rigidez que representa la fuerza F_b producida por deslizamiento unitario en el extremo

\tilde{f}_b fuerza F_b producida cuando el deslizamiento S_0 es cero.

Sustituyendo la ec 3.29 en la ec 3.12

$$e_{1b} = \frac{\bar{E}I}{\bar{E}A \sum_{i=1}^2 E_i I_i} (k_{b-1} S_0 + \tilde{f}_{b-1}) - \frac{M_b (h_1^i + h_2^s)}{\sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.30)$$

Para escribir esta ecuación de una forma más condensada, se introducen los términos

$$\alpha_b = \frac{\bar{E}I}{\bar{E}A \sum_{i=1}^2 E_i I_i} k_{b-1} \quad (3.31)$$

y

$$\tilde{e}_b = \frac{\bar{E}I}{\bar{E}A \sum_{i=1}^2 E_i I_i} \tilde{f}_{b-1} - \frac{M_b (h_1^i + h_2^s)}{\sum_{i=1}^2 E_i I_i} \quad (3.32)$$

De esta manera la ec 3.30 queda

$$e_{1b} = \alpha_b S_0 + \tilde{e}_b \quad (3.33)$$

Para la sección 1 también se observa una relación lineal entre el deslizamiento en la interfaz y el deslizamiento S_0 , la cual se puede reducir, para la sección b a

$$S_b = \beta_b S_0 + \tilde{s}_b \quad (3.34)$$

Si se sustituyen las ecs 3.33 y 3.34 en la ec 3.18

$$S_b = \beta_{b-1} S_0 + \tilde{\xi}_{b-1} + \left(\frac{\alpha_{b-1} S_0 + \tilde{\epsilon}_{b-1} + \alpha_b S_0 + \tilde{\epsilon}_b}{2} \right) \Delta x \quad (3.35)$$

Al igualar las ecs 3.32 y 3.33, se obtienen las constantes de la ec 3.32

$$\beta_b = \beta_{b-1} + \left(\frac{\alpha_{b-1} + \alpha_b}{2} \right) \Delta x \quad (3.36)$$

$$\tilde{\xi}_b = \tilde{\xi}_{b-1} + \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{b-1} + \tilde{\epsilon}_b}{2} \right) \Delta x \quad (3.37)$$

Por último, sustituyendo las ecs 3.24 y 3.34 en la ec 3.22

$$F_b = k_{b-1} S_0 + \tilde{f}_{b-1} + k (\beta_{b-1} S_0 + \tilde{\xi}_{b-1}) \Delta x \quad (3.38)$$

Igualando esta ecuación con la ec 3.30, se obtiene que

$$k_b = k_{b-1} + k \beta_{b-1} \Delta x \quad (3.39)$$

$$\tilde{f}_b = \tilde{f}_{b-1} + k \tilde{\xi}_{b-1} \Delta x \quad (3.40)$$

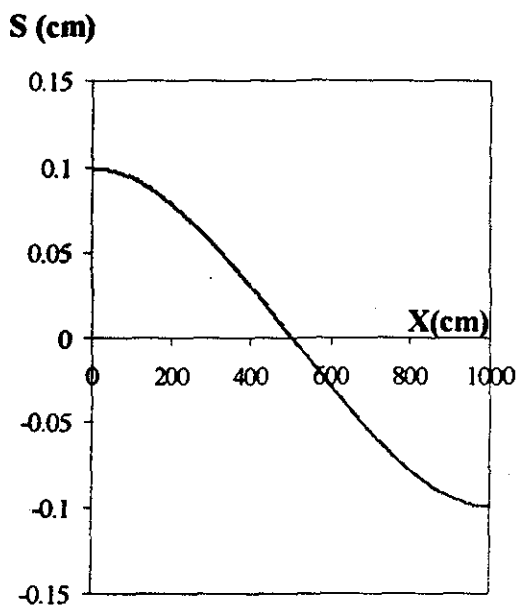
De esta manera la respuesta de cada sección transversal se ha expresado en función del deslizamiento S_0 . Para que el deslizamiento sea cero en la sección central, S_0 debe de ser (ec 3.34)

$$S_0 = -\frac{\tilde{\xi}_c}{\beta_c} \quad (3.41)$$

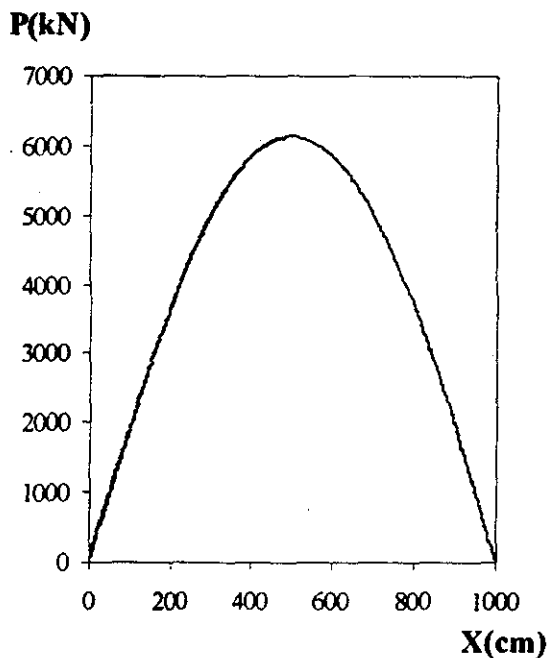
Donde c es la sección en el centro del claro.

Para obtener los valores de β_b , $\tilde{\xi}_b$, k_b , \tilde{f}_b , α_b , $\tilde{\epsilon}_b$ en las ecs 3.29, 3.33 y 3.34 se parte de la sección 0 en donde $\beta_{b=1}$, y $\tilde{\xi}_b$, k_b , \tilde{f}_b , α_b , $\tilde{\epsilon}_b$ son cero.

En la fig 3.10 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con este procedimiento con los de la solución exacta. Se puede observar una buena correlación.



a) Deslizamiento en la interfaz



b) Fuerza resultante en la interfaz

Fig 3.10 Comparación entre el modelo propuesto (línea discontinua) y la solución exacta (línea continua)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4 ELEMENTOS CON VARIAS INTERFACES

Fabbrocino *et al* (2000) analizaron un modelo con dos superficies de deslizamientos, sin embargo el procedimiento empleado dificulta el análisis para más de dos superficies de deslizamientos ya que es necesario incluir un proceso iterativo por cada interfaz. Por ejemplo, si se analiza un elemento con tres interfaces se requieren tres procesos iterativos. Por esta razón se generaliza el modelo propuesto, para varias interfaces.

4.1. Planteamiento teórico

Por simplicidad en la exposición, primero se muestra la solución para dos interfaces y posteriormente se generaliza para varias superficies de deslizamiento. Se van a considerar las mismas condiciones de apoyo y estado de carga de la fig 3.1, pero con las características de la sección transversal que se ilustran en la fig 4.1.

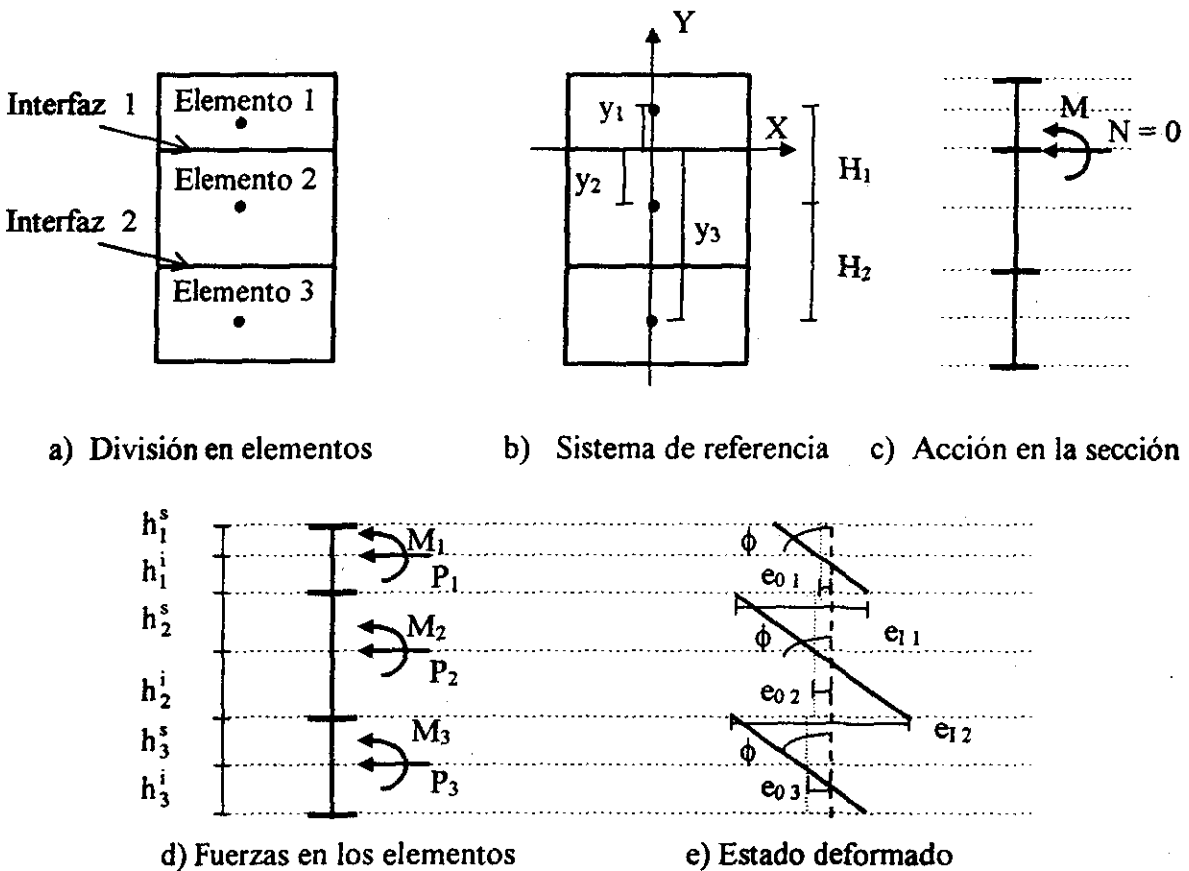


Fig 4.1 Características de la sección transversal con dos interfaces

En este caso existen tres elementos con dos interfaces entre ellos (fig 4.1a). Se fija un sistema de referencia respecto al cual se realiza la suma de fuerzas en la sección transversal (fig 4.1b). La ubicación del eje x en la interfaz 1 es arbitraria, se recomienda localizarlo a la altura de los apoyos en caso de que se desee calcular el desplazamiento axial del elemento, y el eje y al centro para desacoplar la flexión alrededor del eje x respecto a la flexión alrededor del eje y. La sección sólo estará sometida a un momento actuante (fig 4.1c)

El equilibrio entre las fuerzas en los elementos y las acciones en la sección transversal es

$$M = \sum_{i=1}^3 (M_i + P_i y_i) \quad (4.1)$$

$$N = \sum_{i=1}^3 P_i = P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad (4.2)$$

Estas fuerzas generan un estado deformado (fig 4.1d) caracterizado por discontinuidades en las interfaces. Con la curvatura y las deformaciones centroidales se puede calcular la deformación en cualquier punto de la sección, sin embargo los parámetros de interés son la curvatura y las deformaciones en la interfaz.

Para obtener la curvatura se sustituye la ec 3.4 en la ec 4.1

$$\phi = \frac{\left(M - \sum_{i=1}^3 P_i y_i \right)}{\sum_{i=1}^3 E_i I_i} \quad (4.3)$$

Donde h_i es la distancia del centroide del elemento i al origen del sistema de referencia de la fig 4.1b.

Las deformaciones en la interfaz se calculan a partir de las deformaciones centroidales, y la curvatura aplicando el mismo razonamiento de la ec 3.5 en cada interfaz

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{01} - e_{02} - \phi H_1 \\ e_{12} &= e_{02} - e_{03} - \phi H_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Escribiendo estas ecuaciones matricialmente

$$\{E_1\} = [G]\{E_0\} - \phi\{H\} \quad (4.5)$$

Donde

$\{E_1\}$ vector de deformaciones en las interfaces e_{ij} para $j = 1, 2$

$\{E_0\}$ vector de deformaciones centroidales de los elementos e_{0i} para $i = 1, 2, 3$

$\{H\}$ vector de las distancias entre centroides de los elementos H_j para $j = 1, 2$

$[G]_{2 \times 3}$ matriz de geometría.

Los valores $G_{j,i}$ de la matriz $[G]$ dependen de la ubicación de las interfaces y los elementos en la sección transversal. Para el ejemplo de la fig 4.1, según la ec 4.4

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Sustituyendo las ecs 3.3 y 4.3 en la ec 4.5

$$\{E_i\} = [EA]\{P\} - \{\bar{E}\} \quad (4.7)$$

Donde los término $EA_{j,i}$ de la matriz $[EA]_{2 \times 3}$, asociados a la interfaz j y al elemento i se calculan con las expresiones siguientes

Si el elemento i está por encima de la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{\sum_{l=1}^3 E_l I_l + E_i A_i y_i H_j}{E_i A_i \sum_{l=1}^3 E_l I_l} \quad j = 1, 2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

Si el elemento i está por debajo de la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{-\sum_{l=1}^3 E_l I_l + E_i A_i y_i H_j}{E_i A_i \sum_{l=1}^3 E_l I_l} \quad j = 1, 2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

Si el elemento i no tiene ningún contacto directo con la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{y_i H_j}{\sum_{l=1}^3 E_l I_l} \quad j = 1, 2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

y los términos \bar{E}_j del vector

$$\bar{E}_j = \frac{M H_j}{\sum_{i=1}^3 E_i I_i} \quad j = 1, 2 \quad (4.11)$$

Para obtener la respuesta de la siguiente sección se requiere calcular la respuesta en la interfaz entre ambas. Si se supone que la respuesta obtenida corresponde a la sección b (fig 3.1), el deslizamiento en las interfaces se obtiene aplicando la ec 3.17 a cada interfaz

$$\{S_b\} = \{S_{b-1}\} + \frac{\{\{E_{1b-1}\} + \{E_{1b}\}\}}{2} \Delta x \quad (4.12)$$

Estos deslizamientos producen una fuerza en la interfaz de la sección b+1

$$\{F_{b+1}\} = \{F_b\} + [k]\{S_b\} \Delta x \quad (4.13)$$

Donde

[k] matriz de rigidez de la interfaz. Es una matriz diagonal donde cada término k_{jj} de la diagonal representa la rigidez de la interfaz j

{F_b} vector de fuerzas en la interfaz en la sección b, se supone que fueron obtenidos en función de la respuesta en la sección b-1 con una expresión análoga a la ec 4.13.

Las fuerzas en los elementos se calculan a partir de las fuerzas en la interfaz por condiciones de equilibrio.

En la fig 4.2 se muestran las fuerzas en la interfaz y en los elementos entre la sección del extremo y la sección b. De esta figura se tiene que

$$\begin{aligned} P_{b1} &= F_{b1} \\ P_{b2} &= F_{b2} - F_{b1} \\ P_{b3} &= -F_{b2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

y matricialmente

$$\{P_b\} = [E]\{F_b\} \quad (4.15)$$

Donde

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

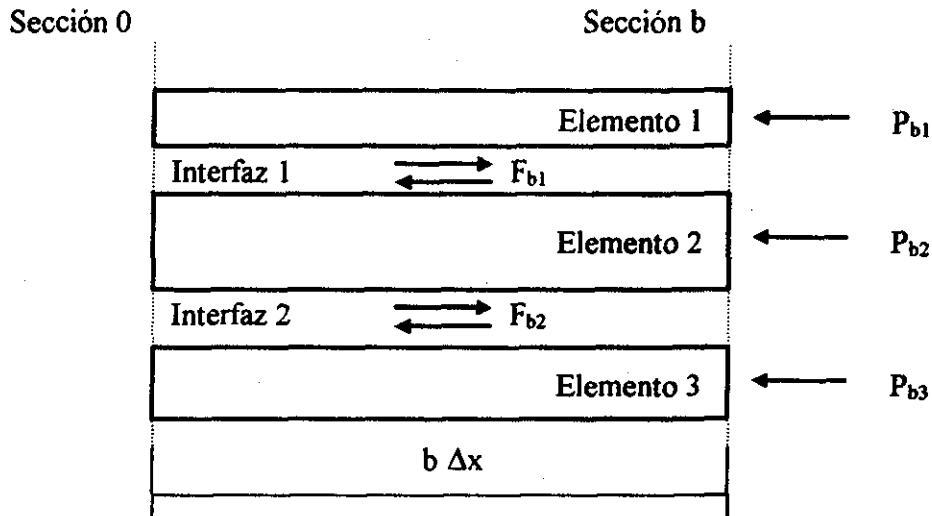


Fig 4.2 Equilibrio entre las fuerzas en la interfaz y en los elementos

Al aplicar la ec 4.15 para la sección $b+1$ se calculan las fuerzas en los elementos a partir de las fuerzas en las interfaces obtenidas con la ec 4.13, y luego se calcula el estado deformado con las ecs 4.3 y 4.7. De esta manera se realiza el cálculo de la respuesta de una sección transversal en función de la respuesta en la sección anterior y de la interfaz entre ellas.

Si se generaliza para m interfaces y n elementos, las ecuaciones de equilibrio entre las fuerzas en los elementos y las acciones en la sección transversal son

$$M = \sum_{i=1}^n (M_i + P_i y_i) \quad (4.17)$$

$$N = \sum_{i=1}^n P_i = 0 \quad (4.18)$$

La curvatura se calcula sustituyendo la ec 3.4 en la ec 4.17

$$\phi = \frac{\left(M - \sum_{i=1}^n P_i y_i \right)}{\sum_{i=1}^n E_i I_i} \quad (4.19)$$

Las deformaciones en la interfaz se calculan en función de las deformaciones centroidales en las m interfaces y la curvatura. Se debe obtener una ecuación similar a la ec 4.4 para cada interfaz, sin embargo, esta ecuación está relacionada con el orden de enumeración de los elementos y las interfaces en la fig 4.1a. Para un orden de enumeración arbitrario de elementos e interfaces

$$e_{1j} = e_{0s} - e_{0i} - \phi H_j \quad (4.20)$$

Donde

- s número del elemento superior a la interfaz j
- i número del elemento inferior a la interfaz j
- e_{0s} deformación centroidal en el elemento superior a la interfaz j
- e_{0i} deformación centroidal en el elemento inferior a la interfaz j
- H_j distancia entre los centroides de los elementos s e i.

Aplicando esta ecuación para las m interfaces

$$\{E_1\} = [G]\{E_0\} - \phi \{H\} \quad (4.21)$$

Donde

- $\{E_1\}$ vector de deformaciones en la interfaz para $j = 1, 2, \dots, m$
- $\{E_0\}$ vector de deformaciones centroidales en los elementos e_{0i} $i = 1, 2, \dots, n$
- $\{H\}$ vector de distancias H_j para $j = 1, 2, \dots, m$
- $[G]$ matriz geométrica con n elementos (columnas) y m interfaces (filas). Cada término $G_{j,i}$ está asociado a una interfaz j y un elemento i.

Los valores de $G_{j,i}$ dependen de la posición relativa del elemento i respecto a la interfaz j

Si el elemento i está encima de la interfaz j $G_{j,i} = 1$.

Si el elemento i está debajo de la interfaz j $G_{j,i} = -1$.

Si el elemento i no tiene contacto con la interfaz j $G_{j,i} = 0$.

Las deformaciones en las m interfaces se obtienen sustituyendo la ec 3.3 y 4.19 en la ec 4.21

$$\{E_1\} = [EA]\{P\} - \{E\} \quad (4.22)$$

Donde

$\{\bar{E}\}$ vector de términos independientes, donde cada término \bar{E}_j está relacionado con la interfaz j

$$\bar{E}_j = \frac{M H_j}{\sum_{i=1}^n E_i I_i} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.23)$$

$[EA]_{m \times n}$ matriz de flexibilidad axial.

Los términos $EA_{j,i}$ de la matriz $[EA]$ dependen de la posición relativa del elemento i respecto a la interfaz j

Si el elemento i está por encima de la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{\sum_{l=1}^n E_l I_l + E_i A_i y_i H_j}{E_i A_i \sum_{l=1}^n E_l I_l} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.24)$$

Si el elemento i está por debajo de la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{-\sum_{l=1}^n E_l I_l + E_i A_i y_i H_j}{E_i A_i \sum_{l=1}^n E_l I_l} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.25)$$

Si el elemento i no tiene ningún contacto directo con la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{y_i H_j}{\sum_{l=1}^n E_l I_l} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.26)$$

Por último, la expresión para calcular las fuerzas en los elementos a partir de las fuerzas en las interfaces es

$$\{P_{b+1}\} = [E]\{F_{b+1}\} \quad (4.27)$$

Donde $[E]$ es la matriz de equilibrio.

Cada término E_{ij} esta asociado al elemento i y a la interfaz j , y su valor depende de la posición relativa del elemento i respecto a la interfaz j

Si el elemento i está debajo de la interfaz j , $E_{ij} = -1$

Si el elemento i está encima de la interfaz j , $E_{ij} = 1$

Si el elemento i no tiene contacto con la interfaz j , $E_{ij} = 0$.

4.2. Condiciones de frontera del elemento

En los elementos con una interfaz se probó que existe una relación lineal entre el deslizamiento S_0 y las respuestas de las secciones (ecs 3.29, 3.33, 3.34). Para n elementos y m interfaces, se demuestra que si se acepta una relación lineal entre la respuesta en la sección $b-1$ ($\{F_{b-1}\}, \{E_{b-1}\}, \{S_{b-1}\}$), y los deslizamientos $\{S_0\}$, entonces también existe linealidad entre los deslizamientos $\{S_0\}$ y la respuesta en la sección b .

El primer paso es expresar la respuesta de todas las secciones en términos de $\{S_0\}$.

Se acepta en la sección $b-1$

$$\{F_{b-1}\} = [K_{b-1}]\{S_0\} + \{\tilde{F}_{b-1}\} \quad (4.28)$$

$$\{E_{b-1}\} = [A_{b-1}]\{S_0\} + \{\tilde{E}_{b-1}\} \quad (4.29)$$

$$\{S_{b-1}\} = [B_{b-1}]\{S_0\} + \{\tilde{S}_{b-1}\} \quad (4.30)$$

Donde $[K_{b-1}], [A_{b-1}], [B_{b-1}], \{\tilde{F}_{b-1}\}, \{\tilde{E}_{b-1}\}, \{\tilde{S}_{b-1}\}$ son la generalización para n elementos y m interfaces de los términos $K_{b-1}, A_{b-1}, B_{b-1}, \tilde{F}_{b-1}, \tilde{E}_{b-1}, \tilde{S}_{b-1}$ (ecs 3.29, 3.33 y 3.34) definidos para elementos con una interfaz. Estos términos se calculan en función de la respuesta en la sección $b-2$, de la misma forma en la que se van a calcular estos términos en la sección b a partir de la respuesta en la sección $b-1$ (ecs 4.28 a 4.30)

Sustituyendo las ecs 4.28 y 4.30 en la ec 4.13 expresada para la sección b

$$\{F_b\} = [K_b]\{S_0\} + \{\tilde{F}_b\} \quad (4.31)$$

Donde

$\{S_0\}_n$ vector de los deslizamientos en la sección del extremo

$[K_b]_{m \times n}$ matriz de rigidez en la interfaz

$$[K_b] = [K_{b-1}] + [K][B_{b-1}]\Delta x \quad (4.32)$$

$\{\tilde{F}_b\}_n$ vector de fuerza en la interfaz debida a las cargas actuantes.

$$\{F_b\} = \{F_{b-1}\} + [K]\{S_{b-1}\} \quad (4.33)$$

Con las fuerzas en las interfaces se calculan las fuerzas en los elementos (ec 4.27) y luego las deformaciones en las interfaces sustituyendo la ec 4.27 en la ec 4.21

$$\{E_{ib}\} = [EA_b][E]\{F_b\} - \{\bar{E}_b\} \quad (4.34)$$

Sustituyendo la ec 4.31 en la ec 4.34 se expresan las deformaciones en las interfaces en función de los deslizamientos S_0

$$\{E_{ib}\} = [A_b]\{S_0\} + \{\bar{E}_b\} \quad (4.35)$$

Donde

$$[A_b] = [EA_b][E][K_b] \quad (4.36)$$

$$\{\bar{E}_b\} = [EA_b][E]\{F_b\} - \{\bar{E}_b\} \quad (4.37)$$

Para los deslizamientos se sustituyen las ecs 4.29, 4.30 y 4.35 en la ec 4.12

$$\{S_b\} = [B_b]\{S_0\} + \{\bar{S}_b\} \quad (4.38)$$

Donde

$$[B_b] = [B_{b-1}] + \frac{[[A_{b-1}] + [A_b]]}{2} \Delta x \quad (4.39)$$

$$\{\bar{S}_b\} = \{\bar{S}_{b-1}\} + \frac{\{\{E_{b-1}\} + \{E_b\}\}}{2} \Delta x \quad (4.40)$$

De esta manera se ha demostrado que si en una sección b-1 cualquiera, su respuesta tiene una dependencia lineal con los deslizamientos $\{S_0\}$, entonces en la sección b ocurrirá lo mismo. Si se prueba que en la sección 1 existe una relación lineal entre su respuesta con los deslizamientos $\{S_0\}$ entonces en las secciones 2, 3, ..., d sucede lo mismo.

En la sección 0 las fuerzas en los elementos son cero

$$\{P_0\} = \{0\} \quad (4.41)$$

Sustituyendo 4.41 en la ec 4.7 para la sección 0, las deformaciones en la interfaz son

$$\{E_{10}\} = -\{\bar{E}_0\} \quad (4.42)$$

Las fuerzas resultantes en la interfaz entre las secciones 0 y 1 $\{F_1\}$

$$\{F_1\} = [K]\{S_0\} \quad (4.43)$$

En la sección 1, las deformaciones se calculan sustituyendo las ecs 4.27 y 4.43 en la ec 4.22 para la sección 1

$$\{E_{11}\} = [EA_1][E][K]\{S_0\} - \{\bar{E}_1\} \quad (4.44)$$

Y los deslizamientos incorporando las ecs 4.42 y 4.44 en la ec 4.12 para la sección 1

$$\{S_1\} = \left[[I] + \frac{[EA_1][E][K]}{2} \Delta x \right] \{S_0\} - \frac{\{\bar{E}_0\} + \{\bar{E}_1\}}{2} \quad (4.45)$$

Las ecs 4.43 a la 4.45 muestran claramente una dependencia lineal con los deslizamientos $\{S_0\}$, por tanto, para cualquier sección b se puede calcular su respuesta en función de los deslizamientos $\{S_0\}$ a través de las ecs 4.33, 4.35 y 4.38.

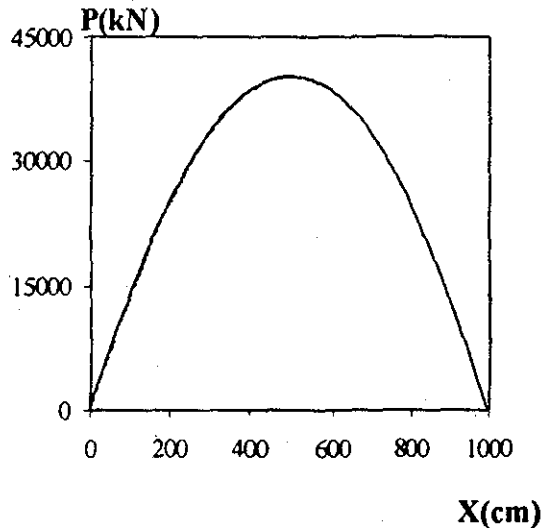
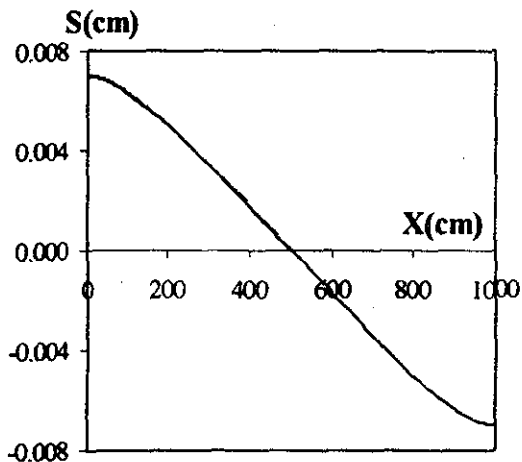
Para calcular los deslizamientos $\{S_0\}$ se fuerza la condición de deslizamientos nulos en la sección central y se llega a la expresión siguiente

$$\{S_0\} = -[B_c]^{-1} \{\bar{S}_c\} \quad (4.46)$$

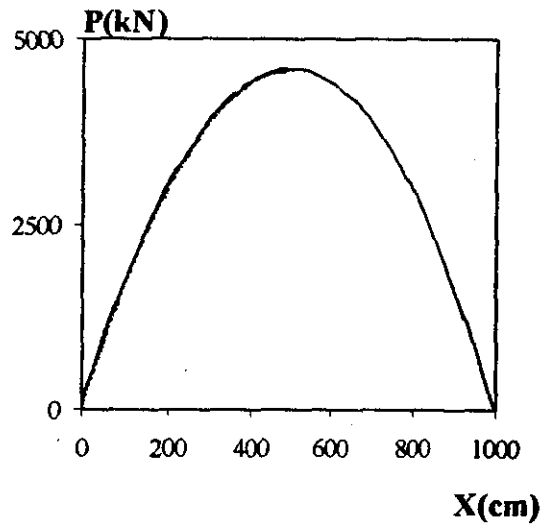
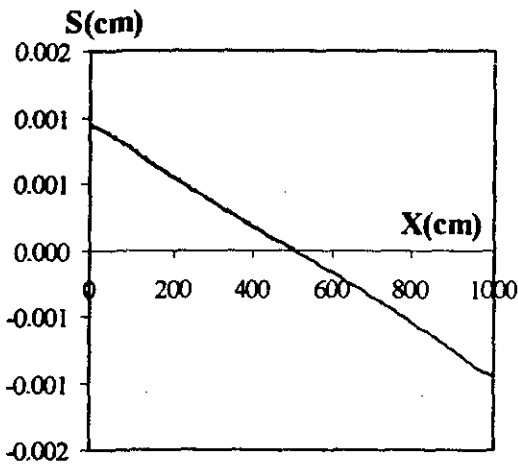
Donde c denota a la sección del centro del claro de la viga.

Con el vector $\{S_0\}$ se calcula la respuesta en todas las secciones empleando el procedimiento descrito.

En la fig 4.3 se muestra una comparación de los resultados de este modelo con un modelo de elemento finito para la viga de la fig 3.1 con dos superficies de deslizamientos. La correlación de los resultados es excelente.



a) Interfaz superior



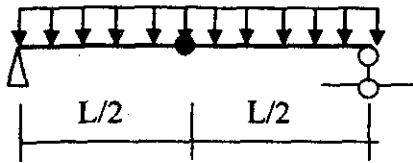
b) Interfaz inferior

Fig 4.3 Comparación entre el modelo de elemento finito (línea continua) y el modelo propuesto (línea discontinua)

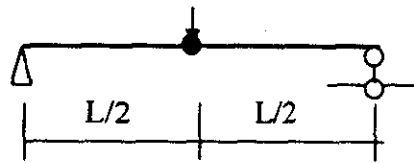
4.3. Generalización del modelo propuesto

Los modelos propuestos en la literatura se han aplicado en el análisis de elementos como los que se muestran a continuación

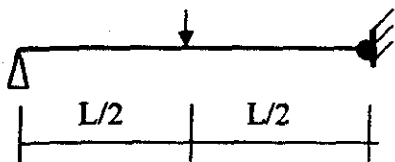
- Punto de deslizamientos nulos



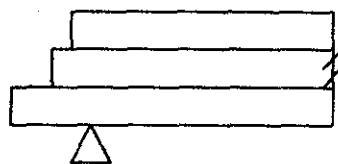
a) Ansourian y Roderick (1978)



b) Fabbrocino *et al* (1999)



c) Fabbrocino *et al* (2000)



d) Condiciones de frontera en el borde articulado

Fig 4.4 Elementos analizados en la literatura

En todos los casos sólo se somete el elemento a efectos de flexión, no existe carga axial actuando, además siempre existe un extremo articulado (fig 4.4c) el cual es la base de los procedimientos numéricos empleados en la literatura. Por estas razones se realizan modificaciones al modelo propuesto para incluir la acción de la carga axial y permitir el análisis de otras condiciones de frontera. En este capítulo, el análisis se limita a estructuras isostáticas, ya que el cálculo de estructuras hiperestáticas como la de la fig 4.4 c requiere de ecuaciones de desplazamientos las cuales son tratadas en los capítulos siguientes.

Las nuevas condiciones de frontera están asociadas con bordes en donde se restringen los deslizamientos y aparecen fuerzas en los elementos. En ese caso los deslizamientos no son una incógnita y las fuerzas sí. Un ejemplo de aplicación de estas nuevas condiciones sería si en los extremos se colocan elementos de rigidez infinita que impidan los deslizamientos en los bordes

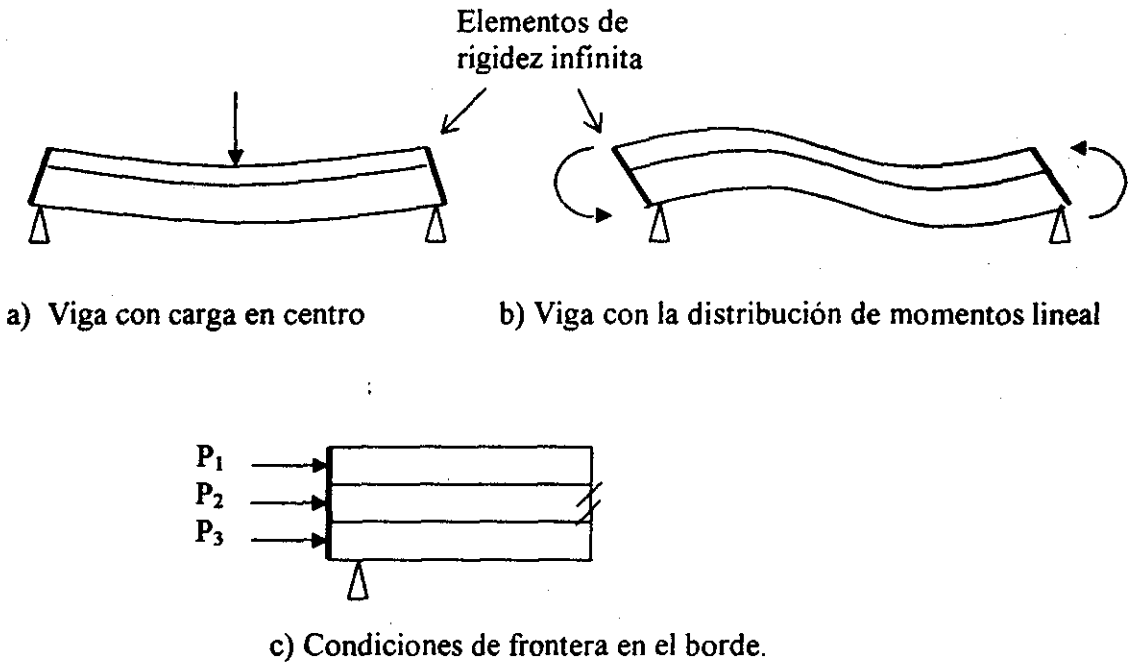


Fig 4.5 Elementos con el deslizamiento restringido en ambos bordes.

En la sección del extremo existen momentos y fuerzas en los elementos, los cuales producen deformaciones en las interfaces (ec 4.22)

$$\{E_{10}\} = [EA_0]\{P_0\} - \{E_0\} \tag{4.46}$$

Los deslizamientos son nulos por lo que no ocurren fuerzas en la interfaz entre la sección 0 y la sección 1

$$\{F_0\} = 0 \tag{4.47}$$

Con las fuerzas en la interfaz se calculan las fuerzas en los elementos en la sección 1. Sin embargo, las condiciones de equilibrio son distintas respecto a la ec 4.27, debido a que ahora hay fuerzas en la sección 0. En la fig 4.6 se muestran las nuevas condiciones de equilibrio entre la sección 0 (sección del extremo), y la sección 1, para un elemento con dos interfaces.

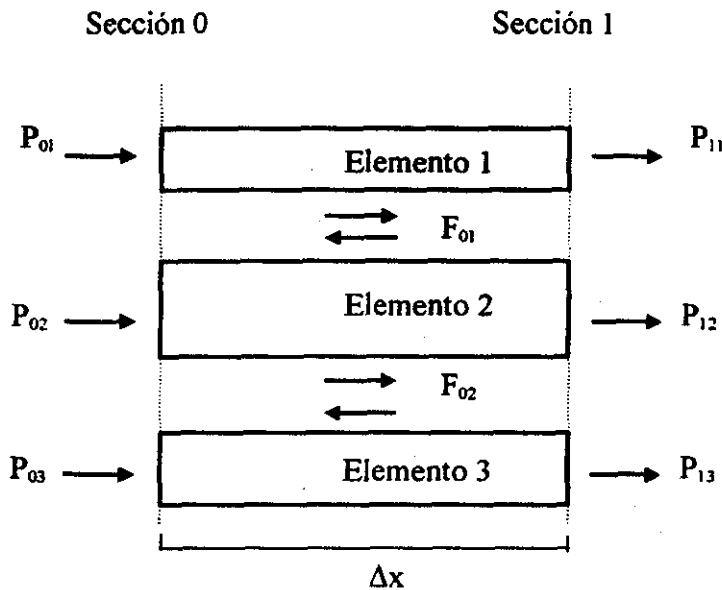


Fig 4.6 Equilibrio de las fuerzas en los elementos y la interfaz entre las secciones consecutivas

La condición de equilibrio de fuerzas entre las fuerzas en los elementos y la resultante del flujo en la interfaz de la fig 4.6 se puede expresar matricialmente

$$\{P_1\} = \{P_0\} + [E]\{F_0\} \quad (4.48)$$

Donde

$\{F_0\}$ vector de fuerzas en la interfaz

$\{P_0\}$ vector de fuerzas en los elementos en la sección 0. El término P_{0i} es la fuerza en la sección 0 en el elemento i

$\{P_1\}$ vector de fuerzas en los elementos en la sección 1

$[E]$ matriz de equilibrio.

Para la matriz $[E]$ se aplican las mismas reglas de la ec 4.27.

Sustituyendo la ec 4.47 en la ec 4.48 se obtienen las fuerzas en los elementos en la sección 1

$$\{P_1\} = \{P_0\} \quad (4.49)$$

Con las fuerzas en los elementos se calculan las deformaciones en la interfaz sustituyendo la ec 4.49 en la ec 4.22

$$\{E_{11}\} = [EA_1]\{P_0\} - \{E_1\} \quad (4.50)$$

Para completar la respuesta en la sección 1 se calculan los deslizamientos incorporando las ecs 4.46 y 4.50 en la ec 4.12

$$\{S_1\} = \frac{[[EA_1] + [EA_0]]}{2} \Delta x \{P_0\} - \frac{\{\{E_1\} + \{E_0\}\}}{2} \Delta x \quad (4.51)$$

Para calcular la respuesta de la sección 2 se requiere calcular primero las fuerzas en la interfaz. Sustituyendo las ecs 4.47 y 4.51 en la ec 4.13

$$\{F_1\} = [K] \frac{[[EA_1] + [EA_0]]}{2} \Delta x^2 \{P_0\} - [K] \frac{\{\{E_1\} + \{E_0\}\}}{2} \Delta x^2 \quad (4.52)$$

Con la fuerza en la interfaz calculada se aplican los mismos pasos de las ecs 4.43 a 4.46 y se van calculando las respuestas de una sección en función de la anterior. El proceso se repite hasta llegar a una sección en donde se conozcan valores de su respuesta. Por ejemplo, en la fig 4.5 se puede plantear en la sección d (extremo derecho del elemento) que los deslizamientos son nulos y obtener el vector de fuerzas $\{F_0\}$.

Al igual que el procedimiento propuesto cuando únicamente hay deslizamientos en la sección del extremo, el caso donde, solo existen fuerzas en los elementos puede ser simplificado. Las ecs 4.50, 4.51 y 4.52 se pueden simplificar para una sección b-1

$$\{E_{1b-1}\} = [D_{b-1}]\{P_0\} + \{E_{b-1}\} \quad (4.53)$$

$$\{S_{b-1}\} = [R_{b-1}]\{P_0\} + \{\tilde{S}_{b-1}\} \quad (4.54)$$

$$\{F_{b-1}\} = [C_{b-1}]\{P_0\} + \{F_{b-1}\} \quad (4.55)$$

Donde

[D_{b-1}] matriz de deformaciones en la interfaz en la sección b-1 producidas por fuerzas unitarias P₀

[R_{b-1}] matriz de deslizamientos en la interfaz en la sección b-1 producidas por fuerzas unitarias P₀

$[C_{b-1}]$ matriz de fuerzas en la interfaz en la sección b-1 producidas por fuerzas unitarias P_0

$\{\tilde{F}_{b-1}\}$ vector de fuerza en la interfaz debida a las cargas

Con la respuesta de la sección b-1 se debe calcular la respuesta en la sección b. Primero se obtienen las fuerzas en la interfaz sustituyendo la ec 4.54 y 4.55 en la ec 4.13 escrita para la sección b

$$\{F_b\} = [[C_{b-1}] + [K][R_{b-1}]\Delta x]\{P_0\} + \{\{\tilde{F}_{b-1}\} + [K]\{\tilde{S}_{b-1}\}\Delta x\} \quad (4.56)$$

Igualando con la ec 4.55 escrita para la sección b

$$\{F_b\} = [C_b]\{P_0\} + \{\tilde{F}_b\} \quad (4.57)$$

Donde

$$[C_b] = [C_{b-1}] + [K][R_{b-1}]\Delta x \quad (4.58)$$

$$\{\tilde{F}_b\} = \{\tilde{F}_{b-1}\} + [K]\{\tilde{S}_{b-1}\}\Delta x \quad (4.59)$$

Luego se obtienen las fuerzas en los elementos. Para esto se sustituye la ec 4.57 en la ec 4.48 para la sección b

$$\{P_b\} = [[I] + [E_{b-1}][C_{b-1}]]\{P_0\} + [E_{b-1}]\{\tilde{F}_{b-1}\} \quad (4.60)$$

Las deformaciones en la interfaz se calculan incorporando la ec 4.60 en la ec 4.22

$$\{E_{1b}\} = [EA_b] [[I] + [E_{b-1}][C_{b-1}]]\{P_0\} + \{[EA_b][E_{b-1}]\{\tilde{F}_{b-1}\} - \{\tilde{E}_b\}\} \quad (4.61)$$

Simplificando esta

$$\{E_{1b}\} = [D_b]\{P_0\} + \{\tilde{E}_b\} \quad (4.62)$$

Donde

$$[D_b] = [EA_b] [[I] + [E_{b-1}][C_{b-1}]] \quad (4.63)$$

$$\{\tilde{E}_b\} = [EA_b][E_{b-1}]\{\tilde{F}_{b-1}\} - \{\tilde{E}_b\} \quad (4.64)$$

Las ecs 4.53, 4.54 y 4.62 se sustituyen en la ec 4.12

$$\{S_b\} = \left[[R_{b-1}] + \frac{[[D_b] + [D_{b-1}]]}{2} \Delta x \right] \{P_0\} + \left\{ \{\tilde{S}_{b-1}\} - \frac{\{\{\tilde{E}_b\} + \{\tilde{E}_{b-1}\}\}}{2} \Delta x \right\} \quad (4.65)$$

Simplificando esta ecuación

$$\{S_b\} = [R_b]\{P\}_0 + \{\tilde{S}_b\} \quad (4.66)$$

Donde

$$[R_b] = [R_{b-1}] + \frac{[[D_b] + [D_{b-1}]]}{2} \Delta x \quad (4.67)$$

$$\{\tilde{S}_b\} = \{\tilde{S}_{b-1}\} + \frac{\{\{E_b\} + \{E_{b-1}\}\}}{2} \Delta x \quad (4.68)$$

Nótese que los términos $\{F_b\}$, $\{E_b\}$ y $\{\tilde{S}_b\}$ en las ecs 4.57, 4.62 y 4.66 se nombraron igual que en las ecs 4.31, 4.35 y 4.38, las cuales fueron deducidas para el caso de elementos en donde solo ocurren deslizamientos en la sección del extremo. Esto se debe a que estos términos son los mismos ya que dependen de la distribución de momentos en el elemento. Si no existieran momentos en todo el elemento, estos términos en todas las secciones serían nulos independientemente de si hay fuerzas en los elementos o deslizamientos en las interfaces, en las secciones del extremo. Este razonamiento se puede generalizar y decir que los deslizamientos, las deformaciones y las fuerzas en una sección transversal se deben a tres causas, fuerzas en los elementos y deslizamientos en la interfaz en la sección del extremo, y la distribución de momentos en el elemento. Con esta idea se pueden generalizar ambos grupos de ecuaciones y plantear ecuaciones generales para calcular las fuerzas resultantes, las deformaciones y los deslizamientos en la interfaz

$$\{F_b\} = [K_b]\{S_0\} + [C_b]\{P_0\} + \{F_b\} \quad (4.69)$$

$$\{E_{ib}\} = [A_b]\{S_0\} + [D_b]\{P_0\} + \{E_b\} \quad (4.70)$$

$$\{S_b\} = [B_b]\{S_0\} + [R_b]\{P_0\} + \{\tilde{S}_b\} \quad (4.71)$$

Para implementar este procedimiento se requiere definir valores para las nuevas matrices en la sección de un extremo. Como los deslizamientos y las resultantes de las fuerzas en la interfaz en la sección del extremo son nulas, entonces $[R_0] = [0]$, $[C_0] = [0]$ y de la ec 4.46 $[D_0] = [EA_0]$.

Para obtener los valores de la sección inicial $\{S_0\}$, se buscó siempre la sección en donde el deslizamiento es nulo. Esta se ubicó fácilmente en todos los casos por condiciones de simetría (figs 4.4a y b) o condiciones apoyo (fig 4.4c), sin embargo esta no es la única posibilidad de fijar condiciones que permitan calcular los valores de la sección inicial. Un procedimiento más general es expresar la respuesta de la sección final en función de la sección inicial. En esta sección siempre hay alguna condición de frontera que permite calcular los valores de la sección inicial.

Al plantear la respuesta de la sección final en función de los valores de la sección inicial se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\{F_d\} = [K_d]\{S_0\} + [C_d]\{P_0\} + \{F_d\} \quad (4.72)$$

$$\{S_d\} = [B_d]\{S_0\} + [R_d]\{P_0\} + \{S_d\} \quad (4.73)$$

Donde d representa la sección en el otro extremo.

Estas ecuaciones permiten resolver los problemas con deslizamientos restringidos o con fuerzas restringidas. Por ejemplo, si se analiza un problema como el de la figs 4.4a y b, las fuerzas en los elementos de la sección inicial ($\{P_0\}$) son cero, mientras que las fuerzas en el otro borde libre ($\{F_d\}$) son cero, por lo que se puede usar el sistema de ecuaciones (ec 4.72) para obtener los deslizamientos en la sección inicial.

Si se analizan problemas como los de las figs 4.4a y b, los deslizamientos en la sección inicial ($\{S_0\}$) son cero, y considerando que los deslizamientos en la sección final son cero también, entonces se puede usar el sistema de ecs 4.73 para obtener las fuerzas en la sección inicial.

Cuando se utiliza el sistema de ecuaciones lineales (ec 4.72) para resolver un problema donde no se restringen los deslizamientos, pero sí las fuerzas, se llega a un sistema de ecuaciones con un número de incógnitas igual al número de interfaces, pero con un número de ecuaciones igual al número de elementos. En los casos que se analizan en este trabajo el número de elementos es igual a la cantidad de interfaces más uno. Por lo tanto, se tienen más ecuaciones que incógnitas, y el problema no tiene solución. Para resolver este problema se debe reducir el número de ecuaciones, esto se logra introduciendo la condición de equilibrio de fuerza axial en las secciones de bordes.

La condición de equilibrio se introduce expresando la fuerza de último elemento en función de las fuerzas en los otros elementos

$$P_n = N - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \quad (4.74)$$

Esta ecuación se emplea para relacionar el vector de fuerza en los elementos con el mismo vector de fuerza en los elementos sin el último componente (P_n)

$$\{P\} = [\Lambda]\{\bar{P}\} + \{I\} N \quad (4.75)$$

Donde

$\{\bar{P}\}_{n-1}$ vector de fuerzas en el elemento sin último término P_n

$\{I\}_n$ vector donde todos los valores son nulos excepto el último término el cual es 1

$[\Lambda]_{n \times n-1}$ matriz de equilibrio de fuerzas en la sección.

Los términos $\Lambda_{i,j}$ de la matriz $[\Lambda]$ son

$$\text{Si } i = j \text{ y, } \Lambda_{i,j} = 1$$

$$\text{Si } i = n, \Lambda_{i,j} = -1$$

El resto de los términos son cero.

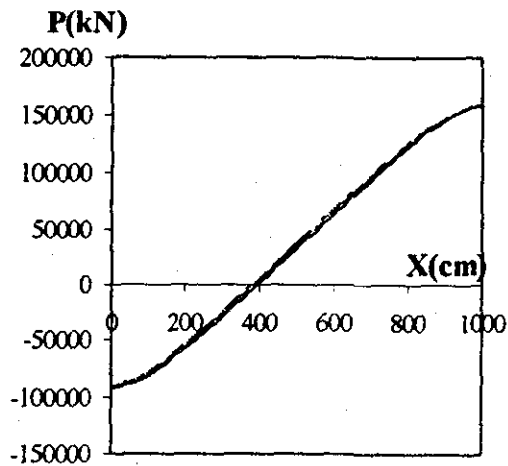
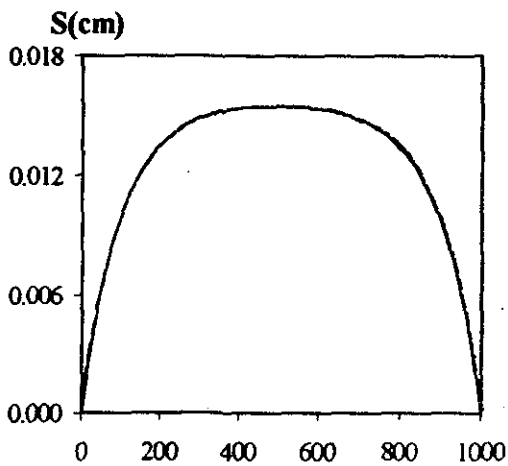
Sustituyendo en la ec 4.75 en las ecs 4.73 y 4.74

$$\{F_d\} = [K_d]\{S_0\} + [C_d][\Lambda]\{\bar{P}_0\} + [C_d]\{I\}N + \{\bar{F}_d\} \quad (4.76)$$

$$\{S_d\} = [B_d]\{S_0\} + [R_d][\Lambda]\{\bar{P}_0\} + [R_d]\{I\}N + \{\bar{S}_d\} \quad (4.77)$$

De esta manera se ha ampliado el procedimiento para otras condiciones de frontera en los apoyos en estructuras isostáticas.

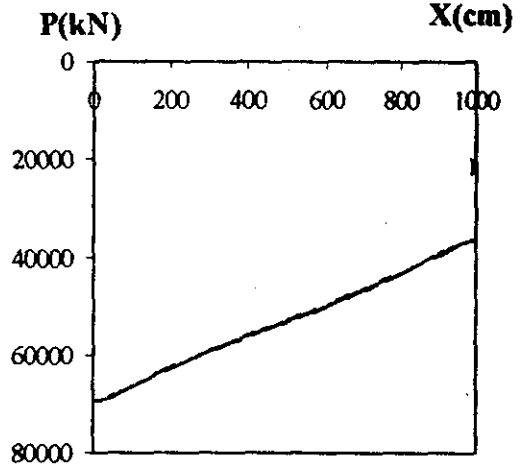
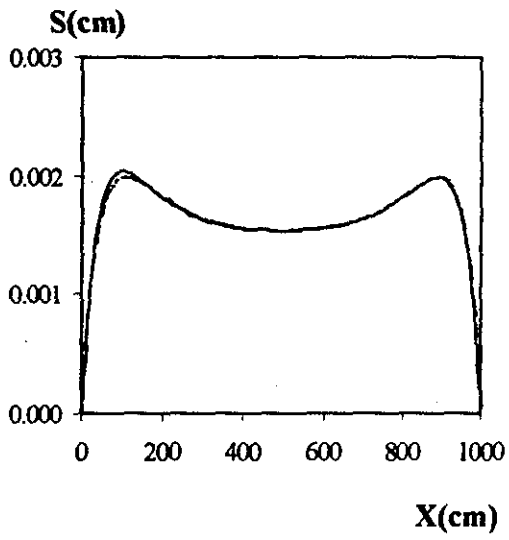
En la fig 4.7 se muestra el análisis de una viga simplemente apoyada en sus bordes sometida a un gráfico de momentos lineal con el punto de inflexión en el centro. Las condiciones de frontera se muestran en la fig 4.4. Se incluyeron dos superficies de deslizamientos. Los resultados se compararon con la solución de un modelo de elemento finito, se puede observar una excelente correlación entre ambos procedimientos.



X(cm)

a) Interfaz superior

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



b) Interfaz inferior

Fig 4.7 Comparación del modelo de elemento finito (línea continua) y el modelo propuesto (línea discontinua) para varios planos de deslizamientos

5 ANÁLISIS NO LINEAL

5.1. Aspectos generales

El procedimiento de análisis no lineal se basa en el método propuesto por Neuenhofer y Filippou (1997). Para ilustrar el procedimiento se emplea el ejemplo de la fig 5.1.

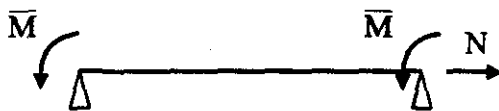


Fig 5.1 Viga simplemente apoyada sometida a flexión y fuerza normal

Se trata de una viga simplemente apoyada en un extremo y articulada en el otro, sometida a dos momentos de igual magnitud aplicados en sus extremos y a la acción de una fuerza normal.

Se desea obtener el diagrama momento-rotación para una fuerza normal fija. Para calcular un punto de este diagrama se debe obtener el valor del momento en los extremos que junto con la fuerza normal fija produce una rotación determinada en el extremo izquierdo.

Cuando se resuelve el problema elástico-lineal se pueden emplear las ecs de la teoría de las estructuras. Si el material trabaja en el intervalo no lineal aparecen errores en los esfuerzos para una deformación dada debido a que en cada iteración se asume un comportamiento lineal (fig 5.2).

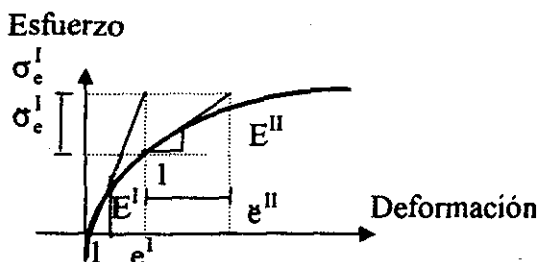


Fig 5.2 Error en los esfuerzos debido al comportamiento no lineal del material

El proceso consiste en aceptar para la segunda iteración un error en la deformación

$$e^{II} = \frac{\sigma_e^{II}}{E^{II}} + \epsilon^{II} \quad (5.1)$$

Donde

E^{II} módulo de elasticidad tangente en la segunda iteración

σ_e^{II} incremento de esfuerzo para la segunda iteración

ϵ^{II} error en la deformación en la segunda iteración

e^{II} incremento de la deformación.

Estas deformaciones se calculan a partir de la curvatura y la deformación en el centro del sistema de referencia (fig 5.3)

$$e = e_0 + \phi y \quad (5.2)$$

Esta ecuación es valida también para los errores en la deformación.

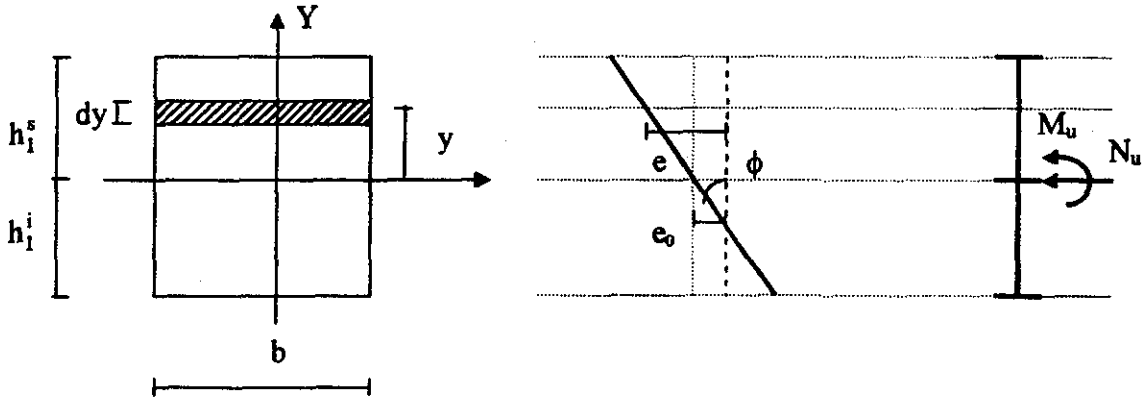


Fig 5.3 Comportamiento de la sección transversal

Integrado la distribución de esfuerzos en la sección transversal se obtienen las fuerzas y momentos internos

$$N^{\text{II}} = \int_{-h_1^i}^{h_1^s} b \sigma_c^{\text{II}} dy \quad (5.3)$$

$$M^{\text{II}} = \int_{-h_1^i}^{h_1^s} b y \sigma_c^{\text{II}} dy \quad (5.4)$$

Donde

N^{II} incremento de la fuerza normal en la segunda iteración

M^{II} incremento del momento en la segunda iteración.

Sustituyendo las ecs 5.1 y 5.2 en las ecs 5.3 y 5.4, y escribiendo el resultado matricialmente

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^{\text{II}} = \begin{bmatrix} \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b dy & \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b y dy \\ \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b y dy & \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b y^2 dy \end{bmatrix}^{\text{II}} \begin{Bmatrix} e_0 \\ \phi \end{Bmatrix}^{\text{II}} = \begin{bmatrix} \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b dy & \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b y dy \\ \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b y dy & \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E b y^2 dy \end{bmatrix}^{\text{II}} \begin{Bmatrix} e_0 \\ \phi \end{Bmatrix}^{\text{II}} \quad (5.5)$$

Despejando el vector de deformaciones se obtiene una expresión para calcular las deformaciones en la sección b considerando un error debido al comportamiento no lineal de los materiales

$$\{\varepsilon_b^{\text{II}}\} = [F_{sb}^{\text{II}}] \{Q_{sb}^{\text{II}}\} + \{\varepsilon_b^{\text{II}}\} \quad (5.6)$$

Donde

$\{\varepsilon_b^{\text{II}}\}$ vector $\begin{Bmatrix} e_0 \\ \phi \end{Bmatrix}^{\text{II}}$ para la sección b

$\{\varepsilon_b^{\text{II}}\}$ vector $\begin{Bmatrix} e_0 \\ \phi \end{Bmatrix}^{\text{II}}$ para la sección b

$\{Q_{sb}^{\text{II}}\}$ vector $\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^{\text{II}}$ para la sección b

$[F_{sb}^{\text{II}}]$ matriz de flexibilidad de la sección b para la iteración 2

$$[F_s] = \begin{bmatrix} f_{nn} & f_{na} \\ f_{na} & f_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-h_1}^{h_1^s} E b \, dy & \int_{-h_1}^{h_1^s} E b y \, dy \\ \int_{-h_1}^{h_1^s} E b y \, dy & \int_{-h_1}^{h_1^s} E b y^2 \, dy \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.7)$$

La segunda fila de la ec 5.6 se puede escribir como la ec 5.8 considerando que la curvatura es la segunda derivada del desplazamiento vertical.

$$f_{aa} M + f_{na} N + \phi - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (5.8)$$

Donde v es el desplazamiento vertical.

Según el cálculo de variaciones, si la ec 5.8 es correcta entonces se puede multiplicar por una función de fuerza compatible con las condiciones de apoyo de la fig 5.1 y se debe cumplir la integral

$$\int_0^L \left(f_{aa} M + f_{na} N + \phi - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \tilde{M} dx = 0 \quad (5.9)$$

Donde \tilde{M} es la función de fuerza. Esta puede ser cualquier función de momento compatible con las condiciones de apoyo. Si se desea relacionar los momentos con la rotación en el extremo izquierdo, la función de fuerza debe ser la producida por un momento unitario en el extremo izquierdo.

$$\tilde{M} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (5.10)$$

El momento en la sección transversal es

$$M = \bar{M} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \quad (5.11)$$

Entonces sustituyendo las ec 5.10 y 5.11 en la ec 5.9, e integrando por partes

$$\bar{M} = \bar{k}(\theta - \theta) + \bar{y}_r L N \quad (5.12)$$

Donde

\bar{k} rigidez a la rotación y se calcula como

$$\bar{k} = \frac{1}{\int_0^L f_{aa} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx} \quad (5.13)$$

θ rotación en el extremo del elemento

θ error en la rotación

$$\theta = \int_0^L \phi \tilde{M} dx \quad (5.14)$$

\bar{y}_r centroide instantáneo promedio de todas las secciones transversales

$$\bar{y}_r = \frac{\int_0^L y_r \tilde{M} dx}{L} \quad (5.15)$$

y_r centroide instantáneo en la sección transversal

$$y_r = -\frac{f_{na}}{f_{aa}} \quad (5.16)$$

Como se desea satisfacer la rotación y la fuerza normal fijada por el problema, en la segunda iteración el incremento en la rotación y la fuerza normal deben ser cero, por tanto la ec 5.13 para la segunda iteración es

$$\bar{M}^{II} = -\bar{k}^{II} \theta^{II} \quad (5.17)$$

El momento en la sección es

$$\bar{M} = \sum_{\alpha=1}^r \bar{M}^{\alpha} \quad (5.18)$$

Donde r es el número de iteraciones realizadas.

Con el incremento de momentos \bar{M}^{II} en los extremos del elemento se calculan los incrementos de fuerza en la sección transversal (ec 5.11) y los incrementos en la curvatura y la deformación e_0 (ec 5.6)

El momento, la curvatura y la deformación e_0 totales en la sección transversal son

$$M = \sum_{\alpha=1}^2 M^{\alpha} \quad (5.19)$$

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^2 \phi^{\alpha} \quad (5.20)$$

$$e_0 = \sum_{\alpha=1}^2 e_0^{\alpha} \quad (5.21)$$

Se produce un error entre las fuerzas y momentos internos y las resistencias de la sección para el estado deformado calculado

$$\begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix}^{\text{II}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{M} \end{Bmatrix}^{\text{II}} - \begin{Bmatrix} N_u \\ M_u \end{Bmatrix}^{\text{II}} \quad (5.22)$$

Donde

N_u fuerza normal resistente

M_u momento resistente.

Con los errores en las fuerzas y momentos internos se calcula el error en la curvatura

$$\check{\phi} = f_{na} \bar{N} + f_{aa} \bar{M} \quad (5.23)$$

De esta manera se establece un proceso iterativo para resolver el problema no lineal de la fig 5.1. En la fig 5.4 se ilustran las iteraciones de la sección y del elemento del proceso iterativo expuesto

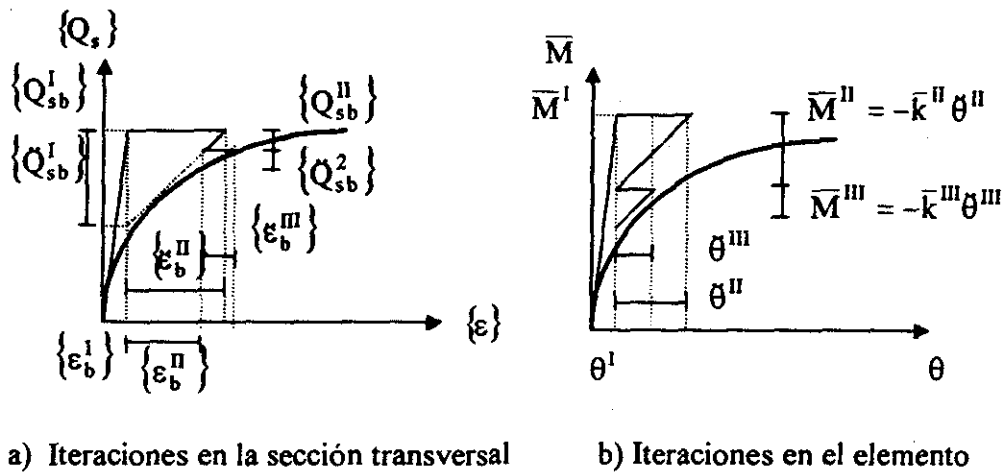


Fig 5.4 Procedimiento numérico expuesto

5.2. Cálculo de los desplazamientos en el elementos con varias interfaces

El cálculo de los desplazamientos se necesita para aplicar el procedimiento de análisis del elemento en el intervalo de comportamiento de los materiales no lineal. Su obtención requiere de la selección de un sistema de referencia en el elemento y en las secciones transversales.

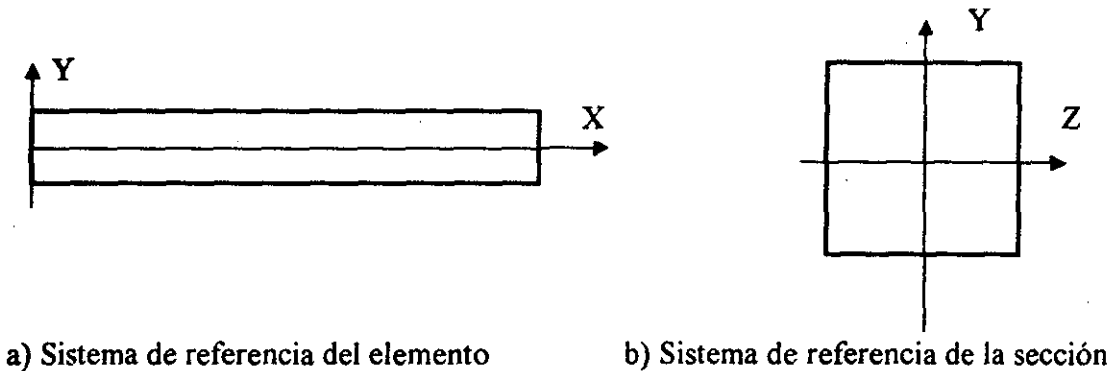


Fig 5.5 Sistemas de referencia

El eje X indica el origen del sistema de referencia de cada sección. Normalmente el eje X es la unión de los centroides de todas las secciones, sin embargo no siempre se puede lograr esto. Por ejemplo, cuando el material se encuentra en el intervalo de comportamiento no lineal, no es posible definir una posición única del centroide de la sección, ya que este depende del valor de las deformaciones en cada sección, solo se puede definir una posición instantánea. Estos centroides instantáneos pueden desplazarse fuera del eje X en la medida que se incrementa la carga

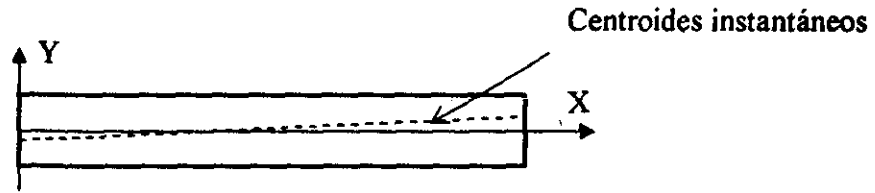


Fig 5.6 Variación de los centroides instantáneos

Por otro lado, las acciones en la sección se calculan respecto al sistema de referencia (fig 5.5) y como éstos no coinciden con los ejes centroidales instantáneos en todas las secciones (fig 5.6), no siempre es posible emplear las ecs 3.3 y 3.4 para obtener la deformación centroidal y la curvatura, ya que éstas están planteadas para los ejes centroidales. Para resolver este problema, en elementos sin superficies de deslizamientos se empleó la ec 5.6. Esta se formula respecto a un sistema de referencia que no requiere ser los ejes centroidales.

En la sección transversal con superficies de deslizamiento, además del sistema de referencia global de la sección (figs 5.5b y 5.7a) se requiere un sistema de referencia local para cada elemento (fig 5.7b).

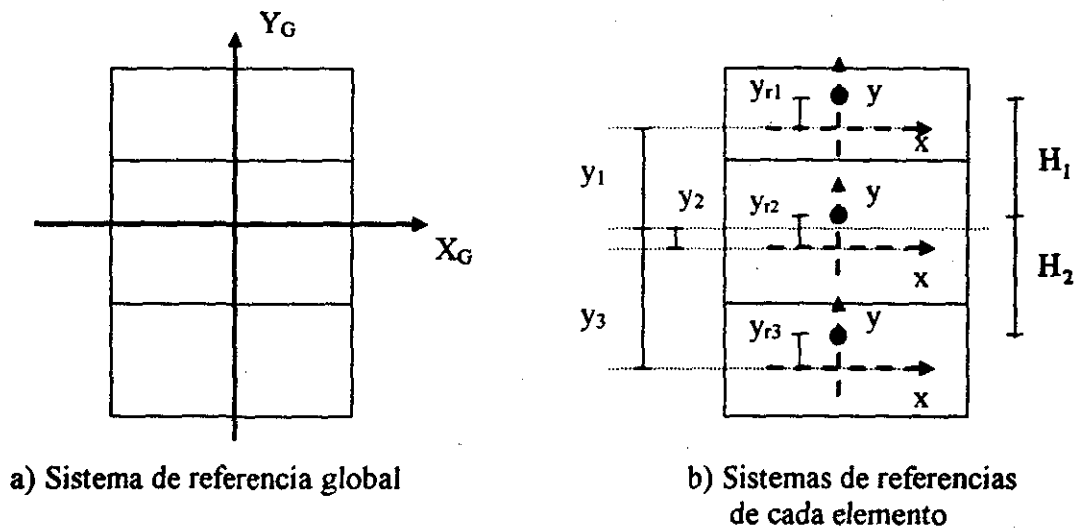


Fig 5.7 Sistema de referencias en la sección transversal con deslizamiento

Como se puede apreciar en la fig 5.7b, los sistemas de referencias en los elementos no coinciden con sus ejes principales centroidales.

Con los sistemas de referencias definidos se debe calcular el estado deformado de la sección transversal, luego este se integra para obtener los desplazamientos. Los principales parámetros del estado deformado son la curvatura y las deformaciones centroidales de los elementos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La curvatura se calcula sustituyendo la segunda fila de la ec 5.6 sin el error en la curvatura, y la ec 5.16 en la ecuación de suma de momentos (ec 4.17)

$$\phi = \frac{\left(M - \sum_{i=1}^n P_i (y_i + y_{ri}) \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \quad (5.24)$$

Donde y_{ri} es la ordenada del centroide del elemento i en el sistema de referencia del elemento (fig 5.7b).

Las deformaciones centroidales en los elementos se obtiene incorporando la primera fila de la ec 5.6 y la ec 5.24 en la ec 4.21.

$$\{E_I\} = [EA]\{P\} - \{\bar{E}\} \quad (5.25)$$

Donde

$\{\bar{E}\}$ vector de términos independientes, y cada término \bar{E}_j está relacionado con la interfaz j

$$\bar{E}_j = \frac{M H_j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.26)$$

$[EA]$ Matriz de flexibilidad axial con n elementos (columnas) y m interfaces (filas), en donde $EA_{j,i}$ es asociado al elemento i y a la interfaz j .

La forma de calcular los valores de $EA_{j,i}$ depende de la posición relativa del elemento i respecto a la interfaz j

Si el elemento i está por encima de la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}} + E_i A_i (y_i + y_{ri}) H_j}{E_i A_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \quad (5.27)$$

Si el elemento i está por debajo de la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{-\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}} + E_i A_i (y_i + y_{r_i}) H_j}{E_i A_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \quad (5.28)$$

Si el elemento i no tiene ningún contacto directo con la interfaz j

$$EA_{j,i} = \frac{(y_i + y_{r_i}) H_j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \quad (5.29)$$

Con estas ecuaciones no importa que el eje centroidal instantáneo varíe en el intervalo de comportamiento no lineal de los materiales, ya que el sistema de referencia puede permanecer fijo independientemente de no coincidir con los ejes centroidales instantáneos.

Definido el estado deformado de la sección transversal se procede a integrar para obtener los desplazamientos en los extremos del elemento. Con la curvatura se obtienen las rotaciones, y con las deformaciones normales de los elementos, sus desplazamientos normales en los extremos del elemento. Estos últimos no son de interés en el presente trabajo, sin embargo, su obtención se realiza de una forma análoga al cálculo de las rotaciones que se presenta a continuación.

Primero se rescribe la ec 5.24 en un formato similar al de la ec 5.8.

$$\frac{\left(M - \sum_{i=1}^n P_i (y_i + y_{r_i}) \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (5.30)$$

Escribiéndola matricialmente

$$\frac{\left(M - (\{y\} + \{y_r\})^T \{P\} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (5.31)$$

Esta se multiplica por una función de fuerza unitaria \bar{M} y se integra este producto en toda la longitud del elemento

$$\int_0^L \bar{M} \left(\frac{M - (\{y\} + \{y_r\})^T \{P\}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx = 0 \quad (5.32)$$

Integrando por partes la ec 5.32

$$\theta = \int_0^L \frac{\bar{M} (M - (\{y\} + \{y_r\})^T \{P\})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} dx \quad (5.33)$$

Sustituyendo la segunda fila de la ec 5.11 en la ec 5.33

$$\theta = \bar{M} \frac{1}{\bar{k}} - \int_0^L \frac{\bar{M}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} (\{y\} + \{y_r\})^T \{P\} dx \quad (5.34)$$

Donde \bar{k} es la rigidez a flexión del elemento con la sección desacoplada

$$\bar{k} = \int_0^L \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}}{\left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right)} dx \quad (5.35)$$

Esta ecuación permite calcular la rotación θ en $X=0$ (fig 5.5a) si se conoce el momento en el extremo (\bar{M}) y la variación de la fuerza en los elementos ($\{P\}$). Los valores de $\{P\}$ se calculan en determinadas secciones (fig 3.7), según las exigencias del método de las diferencias finitas aplicadas a las ecuaciones que rigen el comportamiento de la interfaz. Por esta razón no se emplean métodos de integración que exigen determinadas ubicaciones de las secciones transversales como la cuadratura de Gauss (Chapra y Canale, 1988). Se emplea un método de integración sencillo, el método del trapecio (Chapra y Canale, 1988). Según este método la ec 5.34 se transforma a

$$\theta = \bar{M} \sum_{b=1}^d C_b \frac{\left(1 - \frac{2b \Delta x}{L}\right) \left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}\right)_b} \Delta x - \sum_{b=1}^d C_b \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}\right)_b} (\{y\} + \{y_r\})^T \{P_b\} \Delta x \quad (5.36)$$

Donde

C_b Factor de integración. Depende de la ubicación de la sección. Si la sección es la 0 o la d (fig 3.7), C_b es $\frac{1}{2}$; y si no es ninguna de estas secciones, C_b es 1

Igualando las ecs 5.34 y 5.36

$$\frac{1}{k} = \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{2b \Delta x}{L}\right) \left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}\right)_b} \Delta x \quad (5.37)$$

Sustituyendo la ec 5.37 en la ec 5.36

$$\theta = \bar{M} \frac{1}{k} - \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}\right)_b} (\{y\} + \{y_r\})^T \{P_b\} \Delta x \quad (5.38)$$

Incorporando las ecs 4.43 y 4.64

$$\{W\}^T \{S_0\} + \{Z\}^T \{P_0\} + \frac{1}{k} \bar{M} - \frac{1}{k} = \theta \quad (5.39)$$

Donde

$$\{Z\}^T = - \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}\right)_b} \{\{y\} + \{y_r\}\}^T \{[I] + [E][C_b]\} \Delta x \quad (5.40)$$

$$\{W\}^T = - \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa i}}\right)_b} \{\{y\} + \{y_r\}\}^T [E][K_b] \Delta x \quad (5.41)$$

$$\frac{1}{k} = - \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa i}}\right)_b} \{\{y\} + \{y_r\}\}^T [E] \{\bar{F}_b\} \Delta x \quad (5.42)$$

El objetivo de la ec 5.39 es expresar la rotación en función del momento, los deslizamientos y las fuerzas en los extremos del elemento, sin embargo $\frac{1}{k}$ depende del momento. En la ec 5.42 se observa que $\frac{1}{k}$ es proporcional a $\{\bar{F}_b\}$, y este a $\{\bar{E}_b\}$ (ec 4.49) los cuales son proporcionales al momento actuante en la sección (ec 5.36). Por esta razón se puede afirmar que $\frac{1}{k}$ es proporcional al momento en la sección. En los ejemplos que se están analizando, la variación de momentos es proporcional al momento en los extremos. Partiendo de estas observaciones se puede realizar la transformación siguiente a la ec 5.39

$$\{W\}^T \{S_0\} + \{Z\}^T \{P_0\} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) \bar{M} = \theta \quad (5.43)$$

Donde $\frac{1}{k}$ se calcula considerando un momento unitario en los extremos

Razonamientos similares permiten demostrar que $\{\bar{F}_b\}$ y $\{\bar{S}_b\}$ en las ecs 4.64 y 4.66 son proporcionales al momento en el extremo \bar{M} , por tanto las ecuaciones para las fuerzas resultantes en las interfaces y los deslizamientos en la sección d (fig 3.7) se describen

$$\{F_d\} = [K_d] \{S_0\} + [C_d] \{P_0\} + \{\bar{F}_d\} \bar{M} \quad (5.44)$$

$$\{S_d\} = [B_d] \{S_0\} + [R_d] \{P_0\} + \{\bar{S}_d\} \bar{M} \quad (5.45)$$

Finalmente se incluye el equilibrio de fuerzas en la sección transversal sustituyendo la ec 4.75 en las ecs 5.43 a 5.45

$$\{F_d\} = [K_d] \{S_0\} + [C_d][\Lambda] \{\bar{P}_0\} + [C_d] \{\bar{f}\} N + \{\bar{F}_d\} \bar{M} \quad (5.46)$$

$$\{S_d\} = [B_d] \{S_0\} + [R_d][\Lambda] \{\bar{P}_0\} + [R_d] \{\bar{f}\} N + \{\bar{S}_d\} \bar{M} \quad (5.47)$$

$$\{W\}^T \{S_0\} + \{Z\}^T [\Lambda] \{\bar{P}_0\} + \{Z\}^T \{\bar{f}\} N + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) \bar{M} = \theta \quad (5.48)$$

Las ecs de la 5.46 a la 5.48 permiten obtener el momento \bar{M} y las fuerzas en los elementos $\{P\}$ en los extremos, debido a valores determinados de los deslizamientos $\{S_0\}$ y la rotación. También se pueden obtener el momento \bar{M} y las fuerzas en los elementos $\{P\}$ en los extremos, debido a valores determinados de los deslizamientos $\{S_0\}$ y la rotación.

5.3. Comportamiento no lineal de la interfaz

En cada iteración se considera el comportamiento de la interfaz elástico-lineal con una rigidez tangente dependiente del valor del deslizamiento. Debido a efectos no lineales se debe aceptar un error en la interfaz. En este trabajo se propone aceptar un error en la fuerza (fig 5.8).

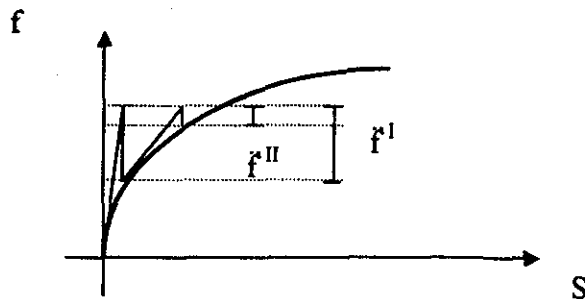


Fig 5.8 Error en la fuerza en la interfaz

La ecuación constitutiva en la interfaz, incluyendo el error en la interfaz, en una iteración α del elemento es

$$\{f_b^\alpha\} = [K^\alpha] \{S_b^\alpha\} + \{r_b^\alpha\} \quad (5.49)$$

Donde

$\{f_b^\alpha\}$ vector de fuerzas en la interfaz en la sección b

$\{r_b^\alpha\}$ vector de errores en las fuerzas en la interfaz en la sección b.

El error de fuerza en la interfaz, en una sección transversal influye en la respuesta de la sección siguiente, acumulándose de una sección a otra. Para incluir este error en el modelo propuesto primero se analiza como influye el error entre dos secciones consecutivas, comenzando desde la sección 0.

Las deformaciones en la sección 0 son (ec 5.25)

$$\{E_{10}\} = [EA_0] \{P_0\} - \{E_0\} \quad (5.50)$$

La fuerza en el conector (ec 5.49)

$$\{f_0^\alpha\} = [K^\alpha] \{S_0^\alpha\} + \{r_0^\alpha\} \quad (5.51)$$

La resultante en la interfaz entre la sección 0 y la sección 1 es la fuerza en el conector

$$\{F_1^\alpha\} = \{f_0^\alpha\} \quad (5.52)$$

En la sección 1 las fuerzas en los elementos se obtienen a partir de condiciones de equilibrio (ec 4.48)

$$\{P_1^\alpha\} = \{P_0^\alpha\} + [E] \{F_1^\alpha\} \quad (5.53)$$

Sustituyendo la ec 5.53 en la ec 5.25 se calculan las deformaciones en la interfaz producidas por estas fuerzas

$$\{E_{11}^\alpha\} = [EA_1^\alpha] \{P_0^\alpha\} + [EA_1^\alpha] [E] [K_0^\alpha] \{S_0^\alpha\} - \{E_1^\alpha\} + [EA_1^\alpha] [E] \{f_0^\alpha\} \quad (5.54)$$

Sustituyendo las ecs 5.50 y 5.54 en la ec 4.12, los deslizamientos en la interfaz

$$\begin{aligned} \{S_1^\alpha\} = \{S_0^\alpha\} + & \frac{[EA_0^\alpha] + [EA_1^\alpha]}{2} \{P_0^\alpha\} \Delta x + \frac{[EA_1^\alpha] [E] [K_0^\alpha]}{2} \Delta x \{S_0^\alpha\} - \frac{\{E_0^\alpha\} + \{E_1^\alpha\}}{2} \Delta x \\ & + \frac{[EA_0^\alpha] [E] \{f_0^\alpha\}}{2} \Delta x \end{aligned} \quad (5.55)$$

Por último las resultantes de las fuerzas en la interfaz entre la sección 0 y la sección 2 se calculan sustituyendo las ecs 5.52 y 5.55 en la ec 4.13

$$\begin{aligned} \{F_2^\alpha\} = & \left[[K_1^\alpha] + [K_0^\alpha] \right] \{S_0^\alpha\} + \left[[K_1^\alpha] \frac{[EA_0^\alpha] + [EA_1^\alpha]}{2} \Delta x \right] \{P_0^\alpha\} + \left[[K_1^\alpha] \frac{[EA_1^\alpha] [E] [K_0^\alpha]}{2} \Delta x \right] \{S_0^\alpha\} \\ & - \left\{ [K_1^\alpha] \frac{\{E_0^\alpha\} + \{E_1^\alpha\}}{2} \Delta x \right\} + \left\{ [K_1^\alpha] \frac{[EA_0^\alpha] [E] \{f_0^\alpha\}}{2} \Delta x + \{f_1^\alpha\} + \{f_0^\alpha\} \right\} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Las ecs 5.54 a 5.56 son suficientes para notar que las ecuaciones para las deformaciones en la interfaz, los deslizamientos y la resultante de las fuerzas tienen la forma siguiente para la sección b-1

$$\{E_{1b-1}^\alpha\} = [A_{b-1}^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [D_{b-1}^\alpha] \{P_0^\alpha\} + \{E_{b-1}^\alpha\} \bar{M}^i + \{E_{b-1}^\alpha\} \quad (5.57)$$

$$\{S_{b-1}^\alpha\} = [B_{b-1}^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [R_{b-1}^\alpha] \{P_0^\alpha\} + \{S_{b-1}^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{S_{b-1}^\alpha\} \quad (5.58)$$

$$\{F_{b-1}^\alpha\} = [K_{b-1}^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [C_{b-1}^\alpha] \{P_0^\alpha\} + \{F_{b-1}^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{F_{b-1}^\alpha\} \quad (5.59)$$

Comparando estas ecuaciones con las mismas deducidas cuando el comportamiento de los materiales es elástico-lineal, se observa nuevos términos ($\{E_{b-1}^i\}$, $\{S_{b-1}^i\}$, $\{F_{b-1}^i\}$) los cuales están asociados con la influencia del error de fuerzas en la interfaz. Para obtener expresiones que permitan su cálculo se deducen las expresiones para la sección b

Entre la sección 0 y la sección b, las resultantes de fuerzas en la interfaz se calculan sumando a $\{F_{b-1}^i\}$ la fuerza en el conector (ec 4.13)

$$\{F_b^\alpha\} = [K_b^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [C_b^\alpha] \{P_0^\alpha\} + \{F_b^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{F_b^\alpha\} \quad (5.60)$$

Donde

$$\{F_b^\alpha\} = \{F_{b-1}^\alpha\} + [K^\alpha] \{S_{b-1}^\alpha\} + \{F_{b-1}^\alpha\} \quad (5.61)$$

Sustituyendo la ec 4.48 escrita para la sección b, y la ec 5.60 en la ec 5.25

$$\{E_{ib}^\alpha\} = [A_b^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [D_b^\alpha] \{P_0^\alpha\} + \{E_b^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{E_b^\alpha\} \quad (5.62)$$

Donde

$$\{E_b^\alpha\} = [EA_b^\alpha] [E] \{F_b^\alpha\} \quad (5.63)$$

Los deslizamientos en la sección b sustituyendo las ecs 5.57, 5.58 y 5.62 en la ec 4.12

$$\{S_b^\alpha\} = [B_b^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [R_b^\alpha] \{P_0^\alpha\} + \{S_b^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{S_b^\alpha\} \quad (5.64)$$

Donde

$$\{S_b^i\} = \{S_{b-1}^i\} + \frac{\{\{E_{b-1}^i\} + \{E_b^i\}\}}{2} \Delta x \quad (5.65)$$

Los errores en las fuerzas en la interfaz también afectan la curvatura de la sección, y por tanto el cálculo de la rotación. El error en la rotación se puede estimar sustituyendo la ec 5.52 escrita para la sección b, y la ec 5.60 en la ec 5.38. Se obtiene una ecuación para calcular la rotación considerando los errores en las fuerzas en las interfaces

$$\{W^\alpha\}^T \{S_0^\alpha\} + \{Z^\alpha\}^T \{P_0^\alpha\} + \left(\frac{1}{\bar{k}^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} \right) \bar{M}^\alpha = \theta^\alpha - \bar{\theta}^\alpha \quad (5.66)$$

Donde θ^α es el error en la rotación por el error en las fuerzas en los elementos

$$\theta^\alpha = \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{2ai}}\right)_b} (\{y\} + \{y_r\})^T [E] \{F_b^\alpha\} \Delta x \quad (5.67)$$

Las ecuaciones que permiten calcular el incremento de momento que restablece la compatibilidad de desplazamientos y las condiciones de frontera son las ecs 5.60 y 5.64 para la sección d; y la ec 5.66. Solo se requiere incorporar el equilibrio de fuerzas normales (ec 4.75) en estas ecuaciones

$$\{F_d^\alpha\} = [K_d^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [C_d^\alpha] [\Lambda] \{P_0^\alpha\} + [C_d^\alpha] \{I\} N + \{F_d^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{F_d^\alpha\} \quad (5.68)$$

$$\{S_d^\alpha\} = [B_d^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [R_d^\alpha] [\Lambda] \{P_0^\alpha\} + [R_d^\alpha] \{I\} N + \{S_d^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{S_d^\alpha\} \quad (5.69)$$

$$\{W^\alpha\}^T \{S_0^\alpha\} + \{Z^\alpha\}^T [\Lambda] \{P_0^\alpha\} + \{Z^\alpha\}^T \{I\} N + \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\bar{k}^\alpha}\right) \bar{M}^\alpha = \theta^\alpha - \theta^\alpha \quad (5.70)$$

El proceso iterativo es el mismo que se describió para los elementos sin superficies de deslizamientos (sección 5.1). En cada iteración se hallan los valores de $\{S_0^\alpha\}$, $\{P_0^\alpha\}$ y \bar{M}^α que anulan a N^α y θ^α , excepto en la primera iteración en donde $N^\alpha = N$ y $\theta^\alpha = \theta$.

El valor de cualquier variable de respuesta va a ser la suma de sus valores en cada iteración. Por ejemplo, la fuerza en la interfaz en la sección b, será

$$\{F_b\} = \sum_{\alpha=1}^r \{F_b^\alpha\} \quad (5.71)$$

Este método se comparó con un modelo de elemento finito elaborado en el programa RUAUMOKO (Carr, 1998). Este se construyó con el mismo criterio expuesto en la sección 3.5.4 y se asumió un comportamiento del conector como el que se muestra en la fig 5.9.

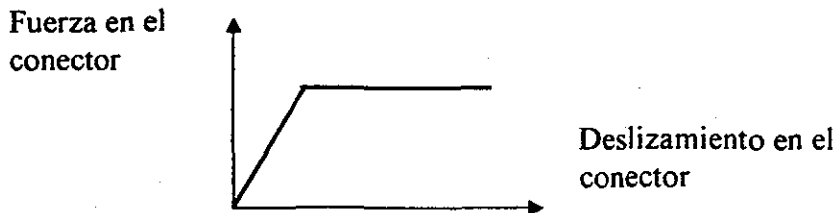
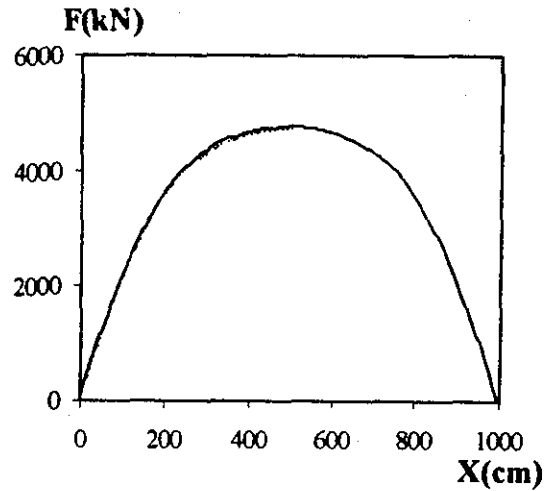
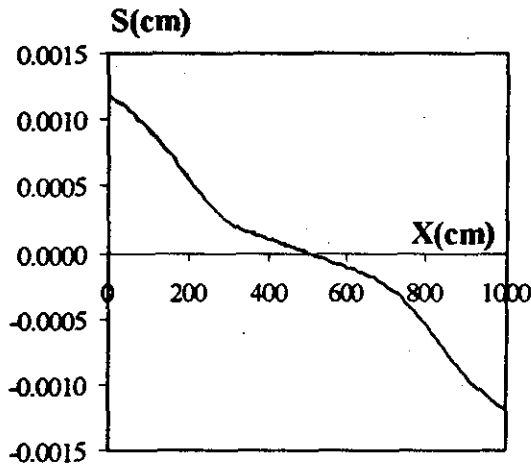
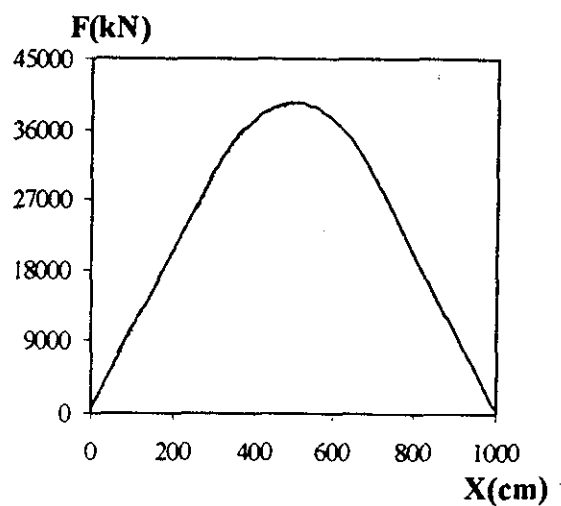
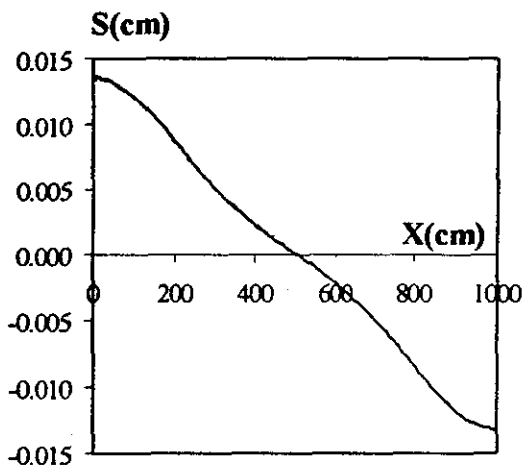


Fig 5.9 Comportamiento de los muelles en el modelo de elemento finito del RUAUMOKO.

La comparación entre el método propuesto y el RUAUMOKO se muestra en la fig 5.10



a) Interfaz superior



b) Interfaz inferior

Fig 5.10 Comparación de los resultados entre el modelo de elemento finito (línea continua) y el modelo propuesto (línea discontinua)

Como se puede apreciar en estas figuras, existe una buena concordancia entre el método propuesto y el programa RUAUMOKO.

5.4. Comportamiento no lineal de la sección

Para considerar el comportamiento no lineal en la sección se emplea la ec 5.6 para una iteración α . Esta ecuación se emplea para calcular las deformaciones en el elemento a partir

de las fuerzas y momentos internos, e incorpora errores en el momento y la carga debido a efectos no lineales del material.

Sustituyendo la segunda fila de la ec 5.6 y la ec 5.23 en la ec 4.17

$$\phi = \frac{\left(M - \bar{M} - \sum_{i=1}^n P_i (y_i + y_{ri}) \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \quad (5.72)$$

En este caso \bar{M} es el error del momento en toda la sección

Sustituyendo la primera fila de la ec 5.6 y la ec 5.72 en la ec 4.21 se obtienen las deformaciones en las interfaces para una iteración α en una sección b

$$\{E_{ib}^\alpha\} = [EA_b^\alpha] \{P_b^\alpha\} + [EA_b^\alpha] \{P_b^\alpha\} - \{\bar{E}_b^\alpha\} M_b^\alpha + \{\bar{E}_b^\alpha\} \bar{M}_b^\alpha \quad (5.73)$$

Donde

$\{P_b^\alpha\}$ vector de errores en las fuerzas en los elementos en la sección b

$\{\bar{E}_b^\alpha\}$ vector de términos independientes calculado según la ec 5.26 para un momento unitario en la sección transversal

$$\bar{E}_j = \frac{H_j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.74)$$

Las deformaciones en la sección 0 son (ec 5.73)

$$\{E_{i0}^\alpha\} = [EA_0^\alpha] \{P_0^\alpha\} + [EA_0^\alpha] \{P_0^\alpha\} - \{\bar{E}_0^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{\bar{E}_0^\alpha\} \bar{M}_0^\alpha \quad (5.75)$$

La fuerza resultante en la interfaz entre las secciones 0 y 1 es la fuerza en el conector. Sustituyendo la ec 5.51 en la ec 5.52

$$\{F_1^\alpha\} = [K^\alpha] \{S_0^\alpha\} + \{f_0^\alpha\} \quad (5.76)$$

En la sección 1 las fuerzas en los elementos se obtienen a partir de condiciones de equilibrio (ec 4.48)

$$\{p_1^\alpha\} = \{p_0^\alpha\} + [E]\{f_1^\alpha\} \quad (5.77)$$

Sustituyendo las ecs 5.76 y 5.77 en la ec 5.73 se calculan las deformaciones en la interfaz producidas por estas fuerzas

$$\begin{aligned} \{E_{11}^\alpha\} = & [EA_1^\alpha]\{p_0^\alpha\} + [[EA_1^\alpha][E][K^\alpha]]\{S_0^\alpha\} - \left\{ \{E_1^\alpha\} \left(1 - \frac{2\Delta x}{L}\right) \right\} \bar{M}^\alpha \\ & + [EA_1^\alpha][E]\{f_0^\alpha\} + [EA_1^\alpha]\{p_1^\alpha\} + \{E_1^\alpha\}M_1^\alpha \end{aligned} \quad (5.78)$$

Y sustituyendo las ecs 5.75 y 5.78 en la ec 4.12, los deslizamientos en la interfaz

$$\begin{aligned} \{S_1^\alpha\} = & \{S_0^\alpha\} + \left[\frac{[[EA_0^\alpha] + [EA_1^\alpha]]}{2} \Delta x \right] \{p_0^\alpha\} + \left[\frac{[EA_1^\alpha][E][K^\alpha]}{2} \Delta x \right] \{S_0^\alpha\} - \\ & \left\{ \frac{\left\{ \{E_0^\alpha\} + \{E_1^\alpha\} \left(1 - \frac{2\Delta x}{L}\right) \right\}}{2} \Delta x \right\} \bar{M}^\alpha + \left\{ \frac{[EA_0^\alpha][E]\{f_0^\alpha\}}{2} \Delta x \right\} + \\ & \left\{ \frac{\left\{ [EA_0^\alpha]\{p_0^\alpha\} + [EA_1^\alpha]\{p_1^\alpha\} \right\}}{2} \Delta x + \frac{\left\{ \{E_0^\alpha\}M_0^\alpha + \{E_1^\alpha\}M_1^\alpha \right\}}{2} \Delta x \right\} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Por último las resultantes de las fuerzas en la interfaz entre la sección 0 y la sección 2

$$\{F_2^\alpha\} = \{F_1^\alpha\} + [K^\alpha]\{S_1^\alpha\} + \{f_1^\alpha\} \quad (5.80)$$

Sustituyendo las ecs 5.76 y 5.79 en la ec 5.80

$$\begin{aligned} \{F_2^\alpha\} = & 2[K^\alpha]\{S_0^\alpha\} + [K^\alpha] \left[\frac{[[EA_0^\alpha] + [EA_1^\alpha]]}{2} \Delta x \right] \{p_0^\alpha\} + [K^\alpha] \left[\frac{[EA_1^\alpha][E][K^\alpha]}{2} \Delta x \right] \{S_0^\alpha\} \\ & - \left\{ [K^\alpha] \frac{\left\{ \{E_0^\alpha\} + \{E_1^\alpha\} \left(1 - \frac{2\Delta x}{L}\right) \right\}}{2} \Delta x \right\} \bar{M}^\alpha + \left\{ [K^\alpha] \frac{[EA_0^\alpha][E]\{f_0^\alpha\}}{2} \Delta x + \{f_1^\alpha\} + \{f_0^\alpha\} \right\} \\ & + \left\{ [K^\alpha] \frac{\left\{ [EA_0^\alpha]\{p_0^\alpha\} + [EA_1^\alpha]\{p_1^\alpha\} \right\}}{2} \Delta x + [K^\alpha] \frac{\left\{ \{E_0^\alpha\}M_0^\alpha + \{E_1^\alpha\}M_1^\alpha \right\}}{2} \Delta x \right\} \end{aligned} \quad (5.81)$$

Las ecs 5.78, 5.79 y 5.81 muestran que se pueden emplear las ecs 5.57 a 5.59 para calcular las deformaciones en la interfaz, los deslizamientos y la resultante de las fuerzas en la sección b-1. La diferencia es que $\{E_{b-1}^i\}$, $\{S_{b-1}^i\}$ y $\{F_{b-1}^i\}$ incluyen los errores debido a efectos no lineales en la sección además de los errores de las fuerzas en la interfaz. Las ecuaciones para calcular estos términos son las mismas excepto para $\{E_{b-1}^i\}$, el cual se obtiene sustituyendo la ec 4.48 escrita para la sección b, y la ec 5.59 en la ec 5.73

$$\{E_{1b}^\alpha\} = [A_b^\alpha] \{S_0^\alpha\} + [D_b^\alpha] \{P_0^\alpha\} + \{E_b^\alpha\} \bar{M}^\alpha + \{E_b^\alpha\} \quad (5.82)$$

Donde

$$\{E_b^\alpha\} = [EA_b^\alpha] [E] \{F_b^\alpha\} + [EA_b^\alpha] \{P_b^\alpha\} + \{E_b^\alpha\} \bar{M}_b^\alpha \quad (5.83)$$

La curvatura también se modifica producto de los efectos no lineales en la interfaz, y por tanto la rotación en el borde del elemento. La ecuación para la rotación se modifica de la siguiente manera

Modificando algebraicamente la ec 5.72

$$\frac{(M - \bar{M} - (\{y\} + \{y_r\})^T \{P\})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (5.84)$$

Realizando los mismos pasos de las ecs 5.21 a 5.38 se llega a

$$\theta = \bar{M} \frac{1}{k} - \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}}\right)_b} \left((\{y\} + \{y_r\})^T \{P_b\} + \bar{M}_b \right) \Delta x \quad (5.85)$$

Sustituyendo la ec 5.53 escrita para la sección b, y la ec 5.60 en la ec 5.85

$$\{W^\alpha\}^T \{S_0^\alpha\} + \{Z^\alpha\}^T \{P_0^\alpha\} + \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\bar{k}^\alpha} \right) \bar{M}^\alpha = \theta^\alpha - \bar{\theta}^\alpha \quad (5.86)$$

Donde θ^α es el error en la rotación por el error en las fuerzas en las interfaces y en la secciones

$$\theta^\alpha = \sum_{b=1}^d \frac{\left(1 - \frac{b \Delta x}{L}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{ai}}\right)_b} \left(\{y\} + \{y_r\} \right)^T [E] \{f_b^\alpha\} + M_b^\alpha \Delta x \quad (5.87)$$

Para calcular los valores de $\{S_0^\alpha\}$, $\{P_0^\alpha\}$ y \bar{M}^α que anulan a N^α y θ^α en cada iteración distinta a la primera, o que igualan a N y θ en la primera iteración, se emplean las ecs 5.68 a 5.70, pero con las modificaciones realizadas en las ecs 5.83 y 5.87 para incluir los efectos no lineales debido al comportamiento del material en la sección transversal.

De esta manera se completa el procedimiento para incluir efectos no lineales por el material en las secciones.

En la fig 5.11 se ilustra un ejemplo que se va a emplear para mostrar que el procedimiento converge. Este es un elemento de concreto con una placa de acero en el borde inferior.

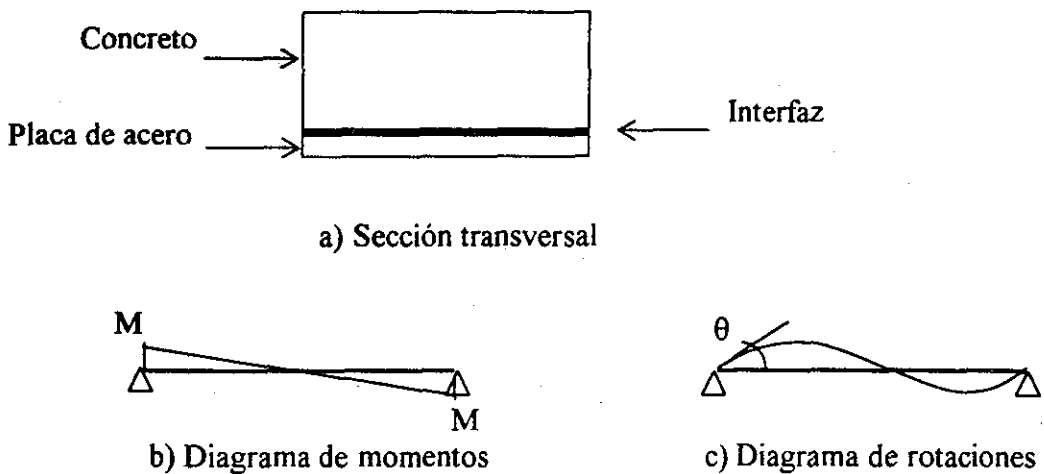


Fig 5.11 Ejemplo de análisis

Se realizó el cálculo para un valor de rotación en donde aparecieran efectos no lineales en la sección y en la interfaz. La convergencia se alcanzó en tres iteraciones como se muestra en la fig 5.12, en donde se muestra las iteraciones en el gráfico momento-rotación. Para verificar que se alcanzó el equilibrio en todas las secciones y en los puntos de la interfaz escogidos, en la fig 5.13 se muestra la distribución de errores a lo largo del elemento en la fuerza normal, momentos y fuerza en la interfaz. Estas gráficas muestran claramente la convergencia de los resultados.

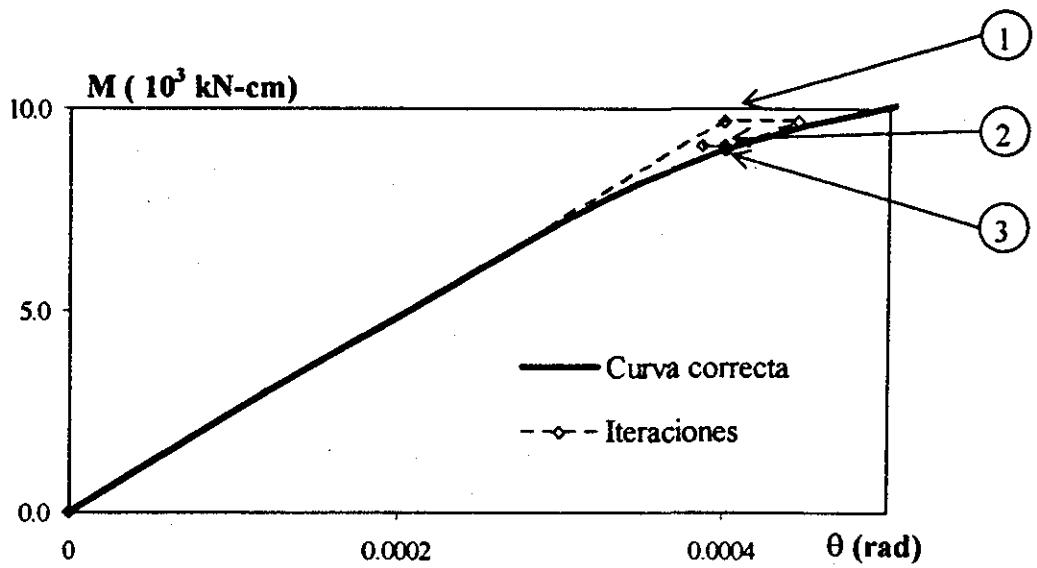


Fig 5.12 Gráfico momento-rotación

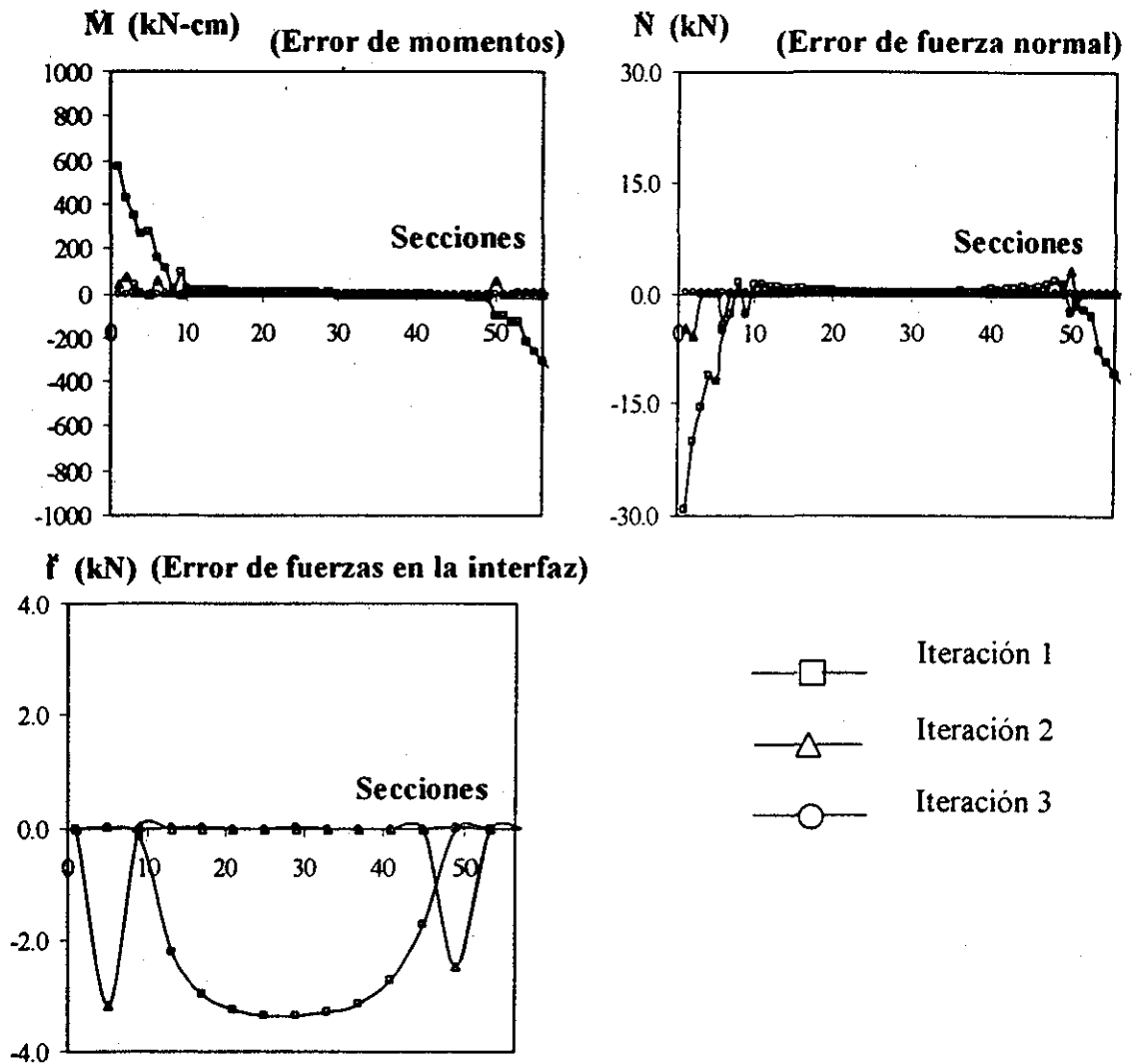


Fig 5.13 Convergencia de las fuerzas internas en el elemento

5.5. Limitaciones del modelo propuesto

Hay dos limitaciones importantes detectadas en el empleo del modelo propuesto. Estas son cuando se intenta dar una rigidez en la interfaz donde los deslizamientos tiendan a cero; y la otra es cuando en un elemento, la rigidez se hace cero.

5.5.1. Rigidez infinita en la interfaz

Esta situación se presenta cuando el comportamiento de la interfaz está regido por mecanismos de transferencias de cortante asociados a deslizamientos nulos. Por ejemplo, el mecanismo de fricción-cortante, el cual es discutido en el siguiente capítulo. En este mecanismo la rigidez en la interfaz es prácticamente infinita antes de alcanzarse la resistencia de la misma. Posterior a esta resistencia, la rigidez de la interfaz se degrada notablemente.

Para modelar la situación de deslizamiento nulo en la interfaz con el modelo propuesto se puede incrementar la rigidez de los muelles o incrementar su cantidad. Ambas soluciones se ven limitadas por el mismo problema numérico.

La limitación numérica se puede observar por varios caminos, en este trabajo se va a realizar a través de la ec 5.82, que permite calcular el incremento en la deformación de la interfaz en una sección transversal en función de las fuerzas y los deslizamientos en la sección del borde. Como ya se explicó en los capítulos anteriores, esta ecuación se obtuvo expresando la respuesta de una sección en función de la anterior. Para esto hay un orden de cálculo. En cada sección primero se calcula la fuerza en los elementos y luego el estado deformado, el cual incluye las deformaciones en la interfaz. Ahora, qué sucede si se calcula las fuerzas en los elementos en función de la respuesta en la sección inicial y luego se obtienen las deformaciones en la interfaz directamente de estas fuerzas (ec 5.49). En la fig 5.14 se muestra el error entre la deformación en la interfaz calculada por este procedimiento y la obtenida a través de la ec 5.82.

Los resultados muestran que la deformación se hace uniforme a lo largo de toda la interfaz tendiendo a valores muy pequeños. Sin embargo, solo en determinadas secciones se alcanza el valor cero. Los errores se mantienen en valores despreciables en casi todas las secciones, excepto en las últimas, donde los errores llegan a ser mayores que los valores de deformación obtenidos en el resto del elemento. La razón de esto se debe a que los valores de $[A]$, $[D]$ y $\{\bar{E}\}$ de la ec 5.82 alcanzan valores muy elevados. Estos términos tienen valores distintos en una sección para cada elemento o interfaz y las diferencias entre ellos son cifras muy pequeñas en comparación con su tamaño, llegando a tal punto que cuando el programa de cómputo redondea al número de cifras con las cuales puede trabajar, se pierde esta diferencia y aparecen los errores que se muestran en la fig 5.14. En términos de momentos el error es 0.2 por ciento.

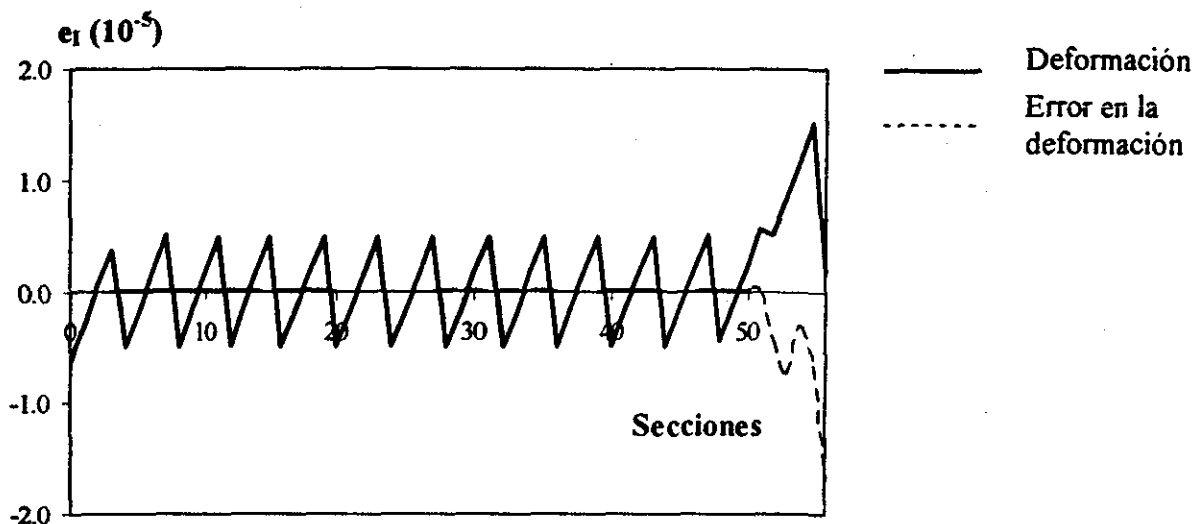
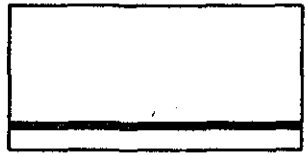


Fig 5.14 Errores en el cálculo de la deformación

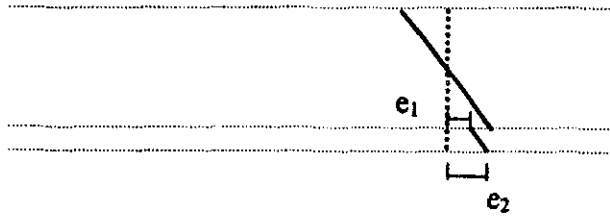
5.5.2. Rigidez nula en un elemento

En el modelo propuesto se calcula el estado deformado en la sección en función de las fuerzas en los elementos y las acciones en la sección transversal. Esto quiere decir que las fuerzas se multiplican por la flexibilidad y se obtiene el estado deformado (ec 5.49). Si por alguna razón la rigidez en un elemento tiende a cero, la flexibilidad tiende a infinito y el problema se indetermina.

Esta situación puede aparecer en un elemento de concreto donde las deformaciones sean tales que la rigidez sea cero en todas sus fibras, sin embargo el criterio de falla para el concreto se origina mucho antes de esta situación, por tanto este hecho es irrelevante. Pero no lo es cuando se analiza una placa de acero, la cual fluye en toda su área. En este caso todas las fibras en la placa tienen rigidez nula, y no necesariamente se ha alcanzado la deformación de falla en ninguna fibra de la sección (fig 5.15). La influencia de este problema en el modelo propuesto se muestra en la fig 5.16 en la cual se ilustra el gráfico momento-rotación del ejemplo analizado en la sección anterior. Cuando se produce una rigidez nula después de la fluencia a la placa de acero, el cálculo se detiene en el momento que la placa fluye. Una solución a este problema es dando una pequeña rigidez en el modelo constitutivo del acero en la zona de fluencia, esto no introduce errores apreciables y evita los problemas numéricos después de la fluencia de la placa de acero.

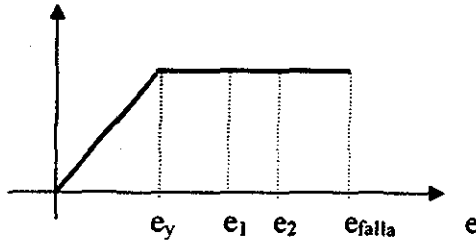


a) Sección transversal de la fig 5.11



b) Estado deformado

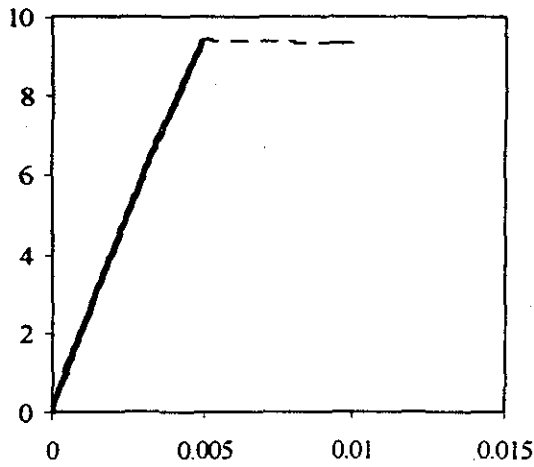
Esfuerzo



c) Comparación de las deformaciones en el acero con la condición de falla

Fig 5.15 Ejemplo de la fluencia de la placa de acero sin que se produzca su falla

M (10^4 kN-cm)



θ (rad)

— Rigidez del acero nula después de la fluencia

- - - Rigidez del acero pequeña después de la fluencia

Fig 5.16 Influencia de la rigidez después de la fluencia de la placa de acero

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

6 APLICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

6.1. Descripción del problema

El problema que se va a tratar es una columna compuesta de un edificio rehabilitado con diagonales metálicas (Fuentes, 2000). En la fig 6.1 se ilustra un entrepiso de esta estructura en donde se encuentra la columna que se desea estudiar.

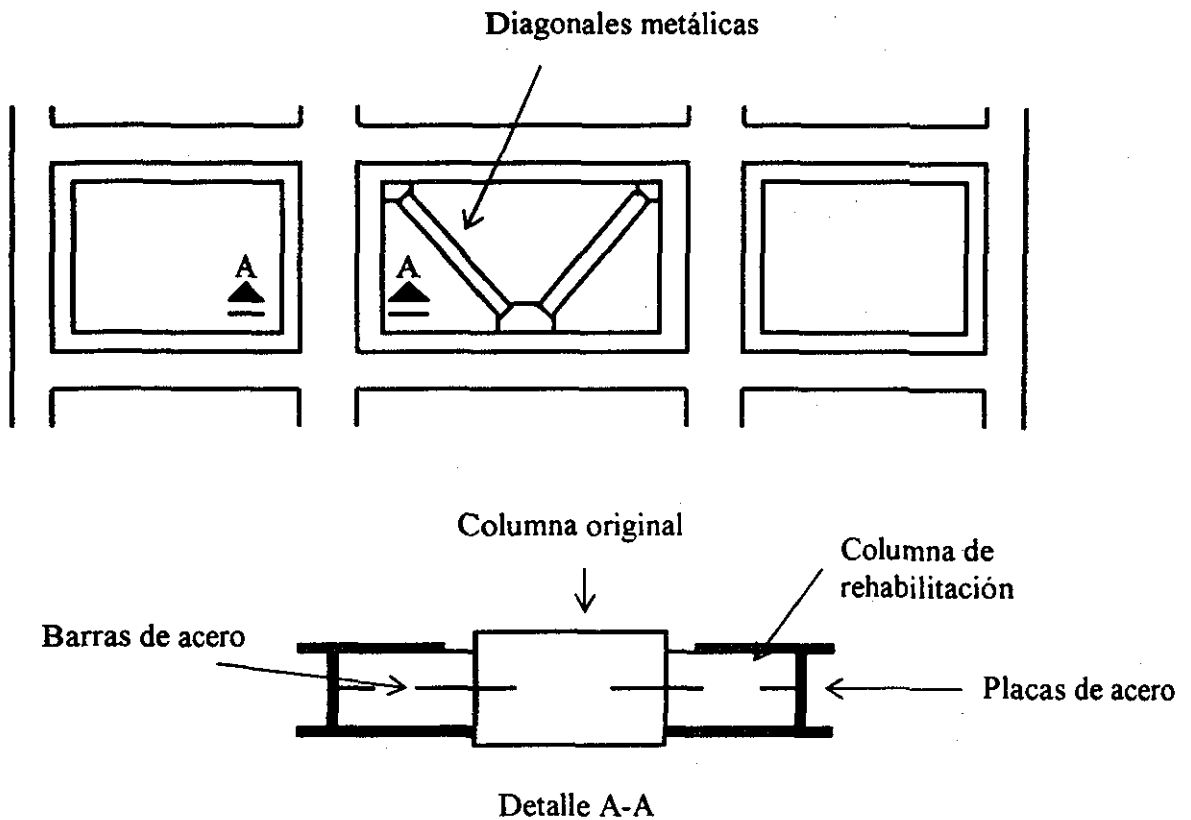


Fig 6.1 Entrepiso de un marco rehabilitado con diagonales metálicas

Para fijar las diagonales metálicas con los elementos originales se colocaron unos marcos internos de concreto que se revistieron con placas metálicas (fig 6.1). Las columnas de rehabilitación se unieron a la columna original por medio de barras de acero embebidas en el concreto de ambas columnas. Las placas de acero se soldaron entre sí y se unieron a las columnas de rehabilitación con barras de acero soldadas a las placas y embebidas en el concreto de las columnas.

Fuentes (2000) realizó un estudio en donde se calibraron modelos analíticos de esta estructura con mediciones realizadas en este edificio, las cuales permitieron obtener su respuesta ante varios eventos de pequeña y moderada intensidad.

Estos estudios sugieren que ocurren deslizamientos relativos entre las placas de acero y las columnas de rehabilitación, así como entre las columnas de rehabilitación y la columna original. Esto provocó deterioros significativos en la rigidez lateral del edificio. Sin

embargo, estos estudios se limitaron a modelos elásticos-lineales, en donde se intenta buscar una rigidez equivalente que represente el deterioro de la estructura. Se aplicaron métodos simplificados para determinar si ocurren los deslizamientos relativos entre las partes componentes, y no se realizaron cálculos que permitieran conocer la degradación de resistencia a flexión debido a estos deslizamientos relativos.

Con el modelo propuesto en este trabajo se estudia con más detenimiento el proceso inicial del deslizamiento relativo entre las partes componentes, así como la influencia en la resistencia de la sección.

6.2. Concepción geométrica

El elemento se dividió en un número finito de secciones. La cantidad total de secciones se escogió tal que el modelo reprodujera adecuadamente la respuesta elástica-lineal del elemento.

Cada sección se dividió en cuadrícula (fig 6.2) y se supone que en cada cuadro el esfuerzo es constante. El esfuerzo se calcula a partir de la deformación en el centro del cuadro. En la literatura a estos cuadros se les denomina fibras (Kaba y Mahin, 1984), y al modelo de la sección transversal modelo de fibra.

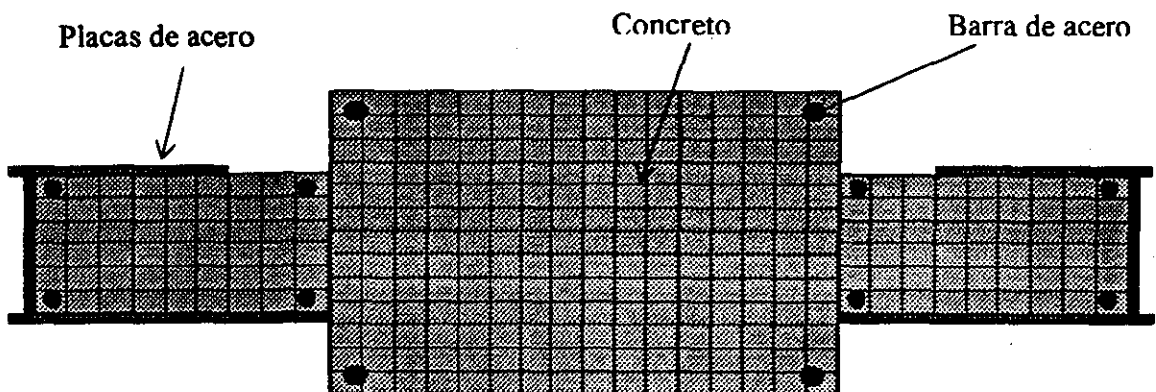


Fig 6.2 División en fibras de la sección transversal

Para dividir la sección en elementos se agrupan las fibras que forman parte de cada elemento (fig 6.3).

En la fig 6.3 se indica entre cuales elementos se encuentra cada interfaz, y su ubicación puntual en donde se concentran sus propiedades. La posición exacta de la interfaz no es importante cuando la curvatura en todos los elementos es la misma, ya que la deformación en cualquier punto de la interfaz entre dos elementos con iguales curvatura en una sección transversal es la misma. Además el equilibrio de fuerzas entre la resultante de la interfaz y las fuerzas en los elementos es solo de fuerzas, no incluye la suma de momentos.

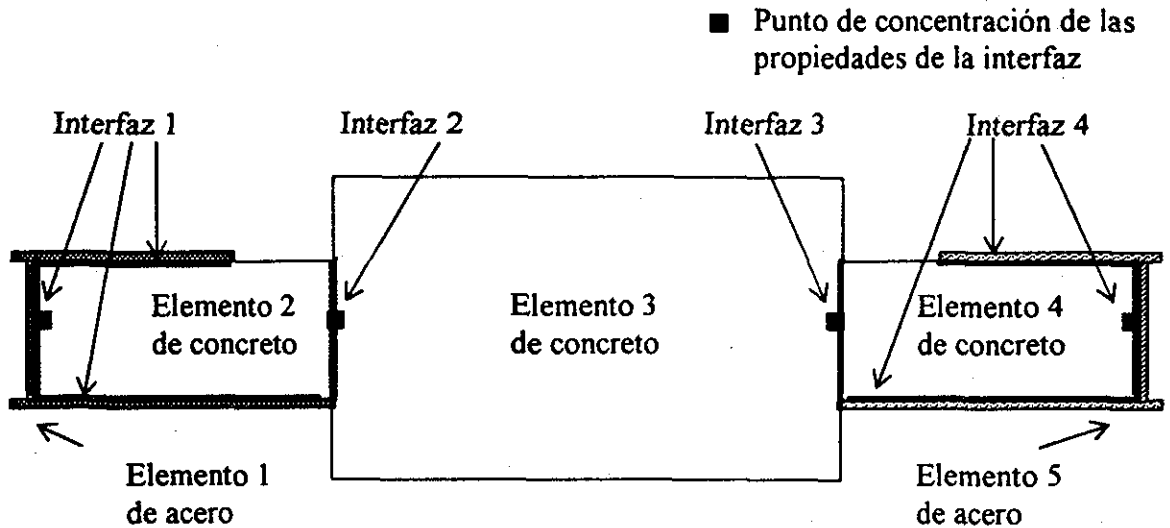


Fig 6.3 División en elementos de la sección y ubicación de la interfaz.

6.3. Modelos de comportamiento de la interfaz

El modelo de la interfaz debe reproducir las principales características de los mecanismos de transferencia de cortante que rigen su comportamiento.

Las propiedades de estos mecanismos dependen de las características de las superficies en contacto, por lo que se estudian las interfaces concreto-concreto y concreto-acero, y se determina cuál mecanismo debe dominar el comportamiento de cada una para las condiciones de la columna estudiada.

En la literatura se hace referencia a varios mecanismos de transferencia de cortante. Entre los que destacan los mecanismos por adhesión química, de fricción-cortante (shear-friction) y por cortante directo en el conector. Este trabajo se enfoca principalmente en los dos últimos, debido a que el primero está asociado a resistencias muy bajas (Daniels y Crisinel, 1993).

Mecanismo de fricción-cortante

Este mecanismo tiende a aparecer entre superficies rugosas atravesadas por barras de refuerzo. En la fig 6.4 se ilustra esquemáticamente los principales aspectos de este mecanismo, el cual se genera por la oposición a la separación en la interfaz de las barras que la atraviesan. Esta tendencia a la separación se origina debido a que para que se produzca deslizamiento en la interfaz, las irregularidades en la interfaz deben deslizarse una sobre otra, y por tanto debe ocurrir una separación entre ellas (fig 6.4b). Cuando se separa la interfaz ocurren esfuerzos de tensión en las barras de refuerzo, lo cual a su vez genera un esfuerzo de compresión en la interfaz (fig 6.4c). Esta compresión multiplicada por un

coeficiente de fricción de la interfaz representa una oposición al deslizamiento en la interfaz y se define como la resistencia del mecanismo de fricción-cortante (fig 6.4c). Por esta razón, la resistencia de este mecanismo depende de la rugosidad las condiciones de anclaje de estas barras de refuerzo. Además de estos aspectos, cualquier esfuerzo normal a la interfaz puede mejorar el comportamiento en caso de ser de compresión, o empeorarlo en caso de ser de tensión.

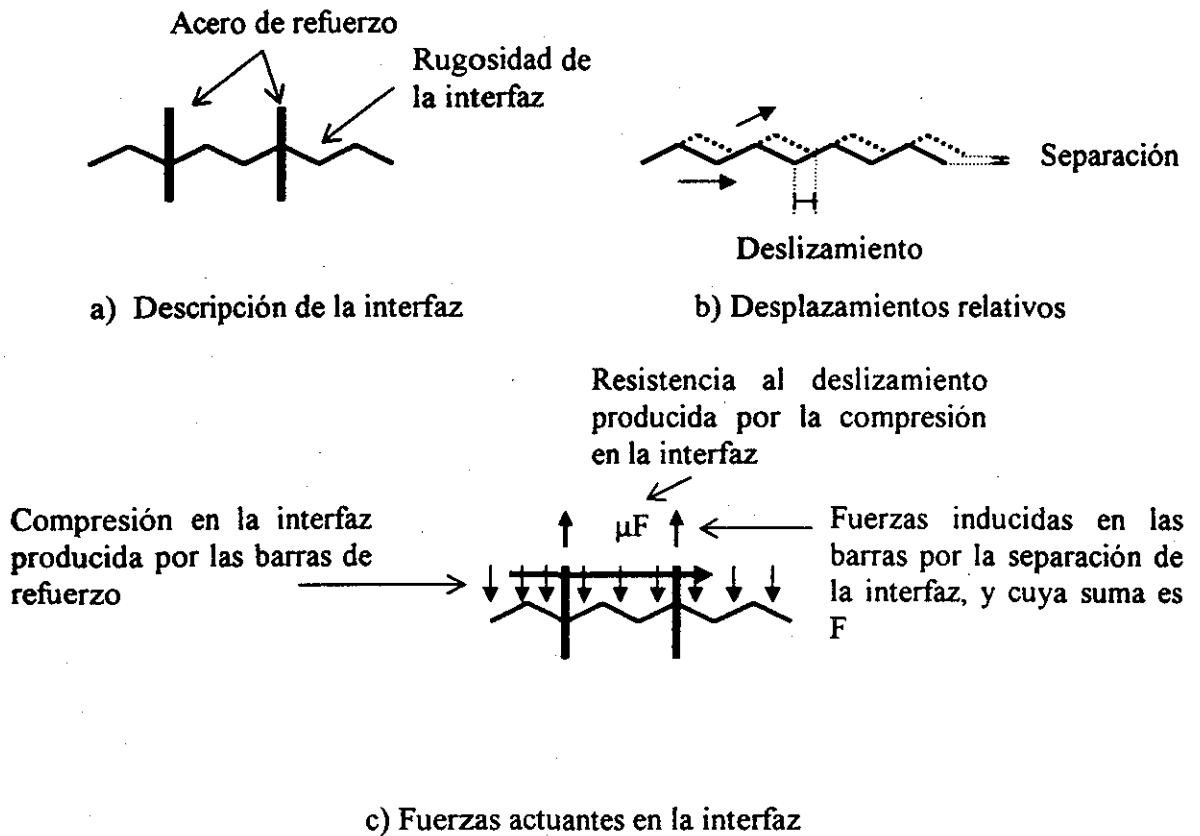


Fig 6.4 Mecanismo de fricción-cortante

Los posibles mecanismos de fallas de este mecanismo de transferencia son la falla de adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto que lo rodea debido a la tendencia a la separación, aplastamiento del concreto alrededor del acero de refuerzo debido a la concentración de esfuerzo y la destrucción de las irregularidades de la interfaz desapareciendo la tendencia a la separación (Valluvan *et al* 1999).

Mecanismo de transferencia por cortante directo en el conector

El mecanismo por cortante directo en el conector está asociado a la oposición al deslizamiento que se genera cuando se intenta deformar lateralmente a las barras de refuerzo que atraviesan la interfaz. También puede aparecer por conectores o llaves de cortante de concretos. Este mecanismo se ilustra en la fig 6.5 para una interfaz entre un elemento de acero y otro de concreto.

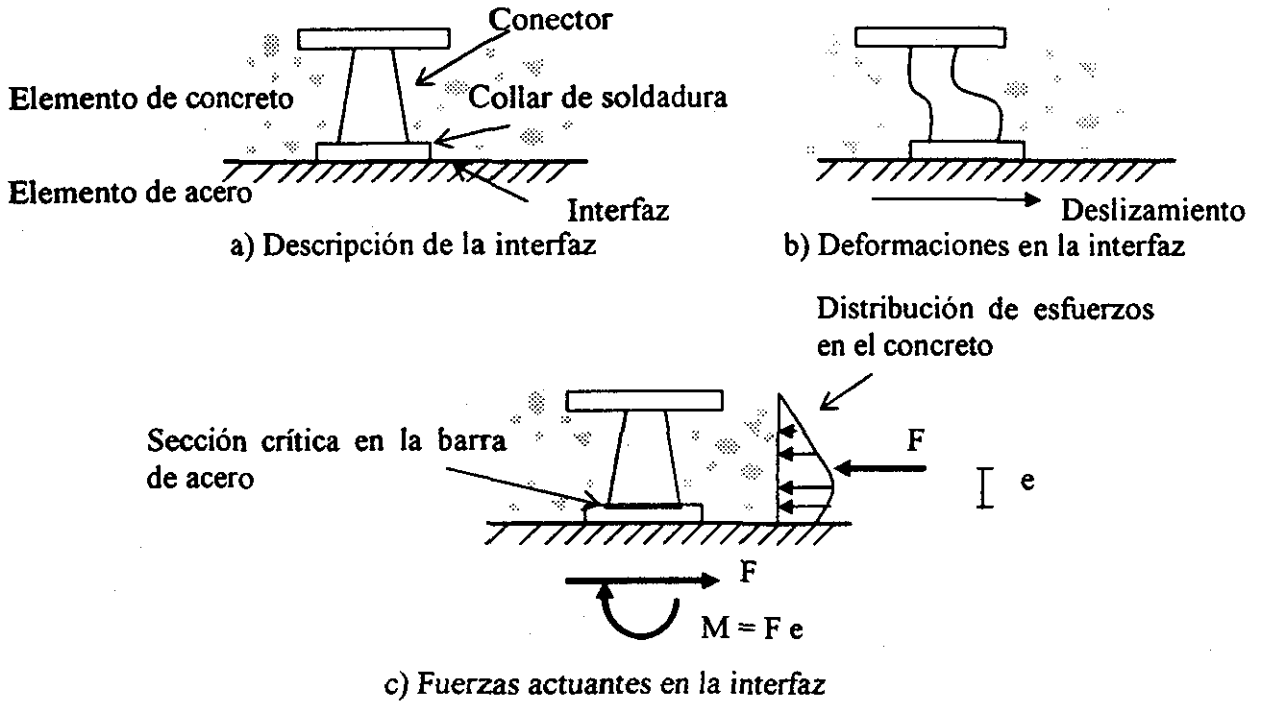


Fig 6.5 Mecanismo por cortante directo en el conector

Cuando ocurren deslizamientos relativos en la interfaz, la barra de acero se apoya en el concreto que la rodea y se deforma lateralmente como se indica en la fig 6.5b. Esto provoca esfuerzos de compresión en el concreto (fig 6.5c), cuya resultante invertida debe ser resistida por el acero (F en la fig 6.5c). La resultante de esfuerzos en el concreto se produce en un punto con excentricidad respecto a la sección crítica en la barra de acero, por lo que el acero tiene que resistir la acción combinada de cortante y momento (fig 6.5c).

De estos razonamientos se puede notar que los principales aspectos que influyen en el comportamiento de este mecanismo son las propiedades y dimensiones de las barras de acero y, la resistencia del concreto para evitar la falla por aplastamiento en la zona que rodea a la barra de acero. Otro aspecto menos evidente es la relación entre el módulo de elasticidad del concreto (E_c) y el módulo de elasticidad de la barra de acero (E_s). En la medida de que E_s crece respecto a E_c la distribución de esfuerzos en el concreto tiende a ser uniforme, y la excentricidad aumenta incrementando el momento actuante en la barra de acero. Por otro lado, cuando E_s tiende a cero, la excentricidad tiende a cero y disminuye el momento. En consecuencia, el incremento de la relación E_c/E_s favorece la resistencia de la interfaz al disminuir la excentricidad de la resultante. Sin embargo, la excentricidad no solamente varía con la relación modular, también disminuye si la altura del collar de soldadura se incrementa.

Las posibles causas de falla de este mecanismo son la destrucción del concreto que rodea a las barras de refuerzo, la falla del acero de refuerzo y la pérdida de adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto.

6.3.1. Modelo de la interfaz concreto-concreto

En la interfaz concreto-concreto entre las columnas de rehabilitación y la columna original (fig 6.1) pueden desarrollarse los mecanismos de transferencia descritos, ya que la superficie está atravesada por barras de acero. Sin embargo, el comportamiento de la misma se rige por el mecanismo de fricción-cortante. Esto se debe a que este tiene mayor rigidez que el mecanismo por cortante directo en el conector, ya que está asociado a la trabazón entre las irregularidades de las superficies en contacto mientras que la rigidez del mecanismo por cortante directo en el conector se debe a la rigidez lateral de las barras de refuerzo. De hecho, el mecanismo de fricción-cortante se desarrolla con deslizamientos casi nulos en comparación con los deslizamientos en donde el mecanismo por cortante directo en el conector alcanza su mayor resistencia.

La resistencia del mecanismo fricción-cortante se calcula en los códigos mediante la expresión siguiente, suponiendo que el acero de refuerzo fluye antes que falle el concreto:

$$V_u = \mu A_s f_y \quad (6.1)$$

Donde

V_u cortante último que resiste el mecanismo actuando en la interfaz

μ coeficiente de fricción (1.0 para interfaz concreto-concreto según NTCEC (1996))

A_s área del acero que atraviesa la interfaz

f_y esfuerzo de fluencia del acero

Esta ecuación se deduce a partir de la hipótesis de que la resistencia del mecanismo se alcanza cuando fluye el acero por tensión, independientemente de la fuerza axial que esté actuando perpendicular a la interfaz. Por esta razón, la fuerza que está actuando en la interfaz en el momento de la falla es $A_s f_y$, y el cortante resistente será $\mu A_s f_y$.

6.3.2. Modelo de la interfaz concreto-acero

La interfaz concreto-acero se ha estudiado en la literatura para el caso de perfiles de acero con losas de concreto. Ambos se conectan en la interfaz con elementos de acero soldados al acero y embebidos en el concreto. En el cálculo de la resistencia y rigidez de esta interfaz se considera que no existe la suficiente rugosidad entre las superficies para que el mecanismo de fricción-cortante pueda adquirir valores de resistencia importantes, por esta razón se asume que el mecanismo de transferencia por cortante directo en el conector es el que rige el comportamiento de la interfaz (Oelehrs y Bradford, 1995). Sin embargo, en el caso estudiado el área de contacto entre las placas de acero y la columna de concreto de rehabilitación es considerable. Por esta razón se siguieron las recomendaciones del NTCEC

(1996). Según estas recomendaciones, la resistencia del mecanismo se calcula con la ec 6.1, pero con un coeficiente de fricción de 0.7, correspondiente a la interfaz concreto-acero.

6.4. Modelos de comportamiento de la sección

En la sección transversal se debe especificar un modelo de comportamiento para el concreto y el acero (fig 6.2). Ambos modelos se elaboran a partir de las NTCEC (1996)

Para el concreto en compresión se empleó una parábola. Esta se ajustó para cumplir con la resistencia (f_c) y el modelo de elasticidad secante al 40 por ciento de la resistencia (E_c) según el código.

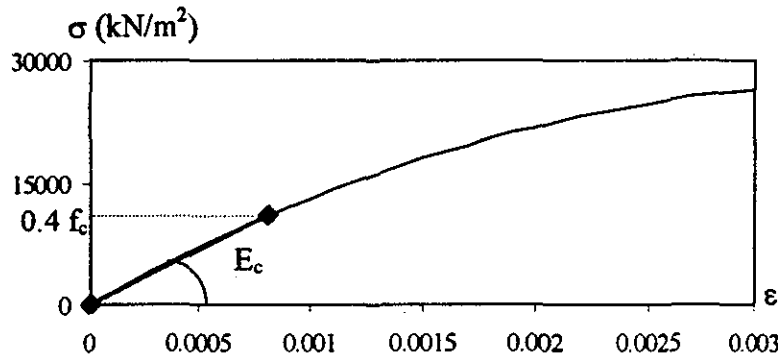


Fig 6.6 Modelo de comportamiento del concreto en compresión

Para el concreto de la columna original se realizaron ensayos experimentales para determinar estos parámetros (Aires y Murià Vila 1993).

$$E_c = 13400 \text{ MPa}$$
$$f_c = 27.2 \text{ MPa}$$

En el caso de las columnas de rehabilitación se obtuvo la resistencia del concreto de los planos y se calculó E_c según el código de diseño considerando concreto tipo II. De esta manera se obtuvieron los valores

$$E_c = 12650 \text{ MPa}$$
$$f_c = 25.0 \text{ MPa}$$

Para ajustar la parábola se fijan dos condiciones, que la pendiente secante en el 40 por ciento de la resistencia sea E_c y que en f_c la pendiente sea cero. La pendiente secante se debe tomar entre el punto del diagrama esfuerzo-deformación correspondiente a una deformación de 0.00005 y el asociado a un esfuerzo del 40 por ciento de la resistencia (Aires y Murià Vila 1993). En este trabajo se desprecia el esfuerzo en la deformación de 0.00005. La pendiente secante se considera respecto al origen del diagrama esfuerzo-deformación. Con estas condiciones se obtiene la deformación en la resistencia máxima ϵ_0 y la ecuación de la parábola queda

$$\sigma = f_c \left(-\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2 + 2\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \right) \quad (6.2)$$

Los valores de la deformación en la resistencia f_c quedaron igual a 0.0036 y 0.0035 para el concreto de la columna original y la de rehabilitación respectivamente. Estos valores son altos respecto a otros valores reportados en la literatura (Paulay y Park, 1979), pero en correspondencia con los valores reportados en estudios realizados a concretos en el Distrito Federal (Mendoza, 1985).

Para el concreto en tensión se consideró el modelo del programa BIAx (Wallace, 1989).

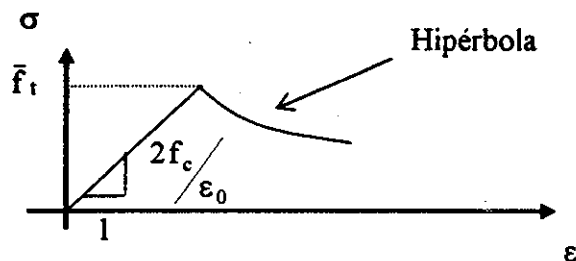


Fig 6.7 Modelo de comportamiento del concreto en tensión

La resistencia en tensión se calculó considerando concreto tipo II en función de la resistencia a compresión, y se obtuvo 2.31 MPa y 2.21 MPa para el concreto de la columna original y la columna de rehabilitación respectivamente.

Tanto para las placas de acero como para las barras de acero de refuerzo se utilizó un modelo bilineal, ya que el código no considera los efectos de endurecimiento por deformación en el acero

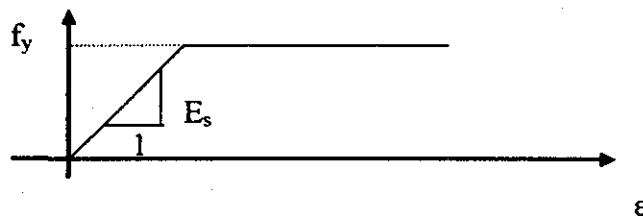


Fig 6.10 Modelo de comportamiento del acero

Las propiedades del acero se estimaron a partir de los datos proporcionados en los planos estructurales. Según estos, el acero es A-36, por lo que $E_s = 2.0 \times 10^5$ MPa, $f_y = 253$ MPa.

6.5. Análisis

La columna se sometió al estado de carga de la fig 5.1 para obtener los diagramas momento-rotación para un valor determinado de la carga axial. Las condiciones de frontera son las mismas de la fig 4.5 b.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El análisis se realizó para distintos valores de carga axial, y para cada gráfico momento-rotación se identificaron los principales puntos de degradación de rigidez. Estos fueron el inicio del deslizamiento en la interfaz, fluencia del acero y falla del concreto en compresión. Para hallar estos puntos se buscó el punto a partir del cual se producían cada uno de estos casos. Es decir, la exactitud de estos valores dependerá del incremento de rotación que se escoja. En la medida que este sea menor, los puntos calculados serán más precisos.

6.6. Resultados

En la fig 6.11 aparecen los gráficos momento-rotación para una carga axial P nula y otra igual al 70 por ciento de la resistencia en compresión pura del elemento. En estos gráficos se muestra la curva obtenida considerando la interfaz flexible con los modelos descritos en la sección 6.3. Para poder comprender mejor estos resultados se muestran dos curvas límites del comportamiento en la interfaz. Una donde la rigidez de la interfaz es infinita, es decir, la sección es monolítica, y la otra donde la rigidez es nula. En estas gráficas también se muestran los puntos de inicio del deslizamiento, fluencia del acero y falla del concreto.

Hay varios aspectos importantes que se deben señalar en estos resultados. Primero, en el elemento sin deslizamiento en la interfaz (sección monolítica), el comportamiento es frágil, aun para la carga axial nula. La aparición de deslizamientos relativos en la interfaz incrementó la ductilidad del elemento, pero con una reducción de la resistencia considerable. Por otro lado, se observa que después de iniciarse el deslizamiento en la interfaz, la curva se hace paralela a la respuesta del elemento con rigidez nula en la interfaz.

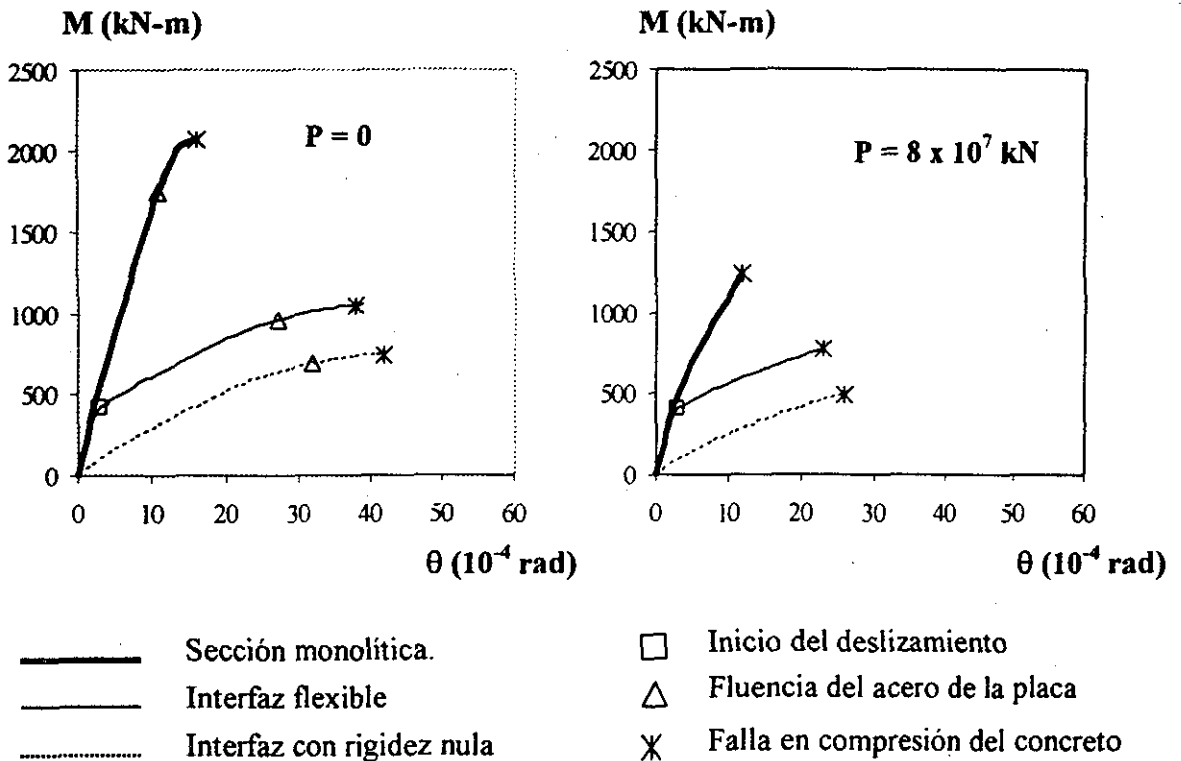


Fig 6.11 Diagramas momento-rotación para dos axiales distintos

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La influencia de la carga axial se puede apreciar en el diagrama M-P (fig 6.12). Se observa que el momento a partir del cual comienza el deslizamiento es poco sensible al valor de la carga axial.

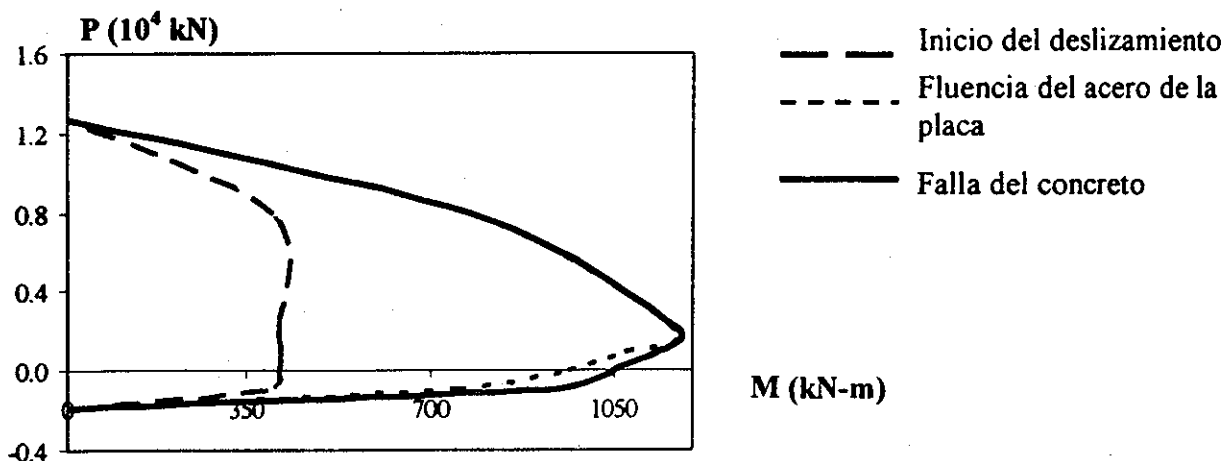


Fig 6.12 Diagrama de interacción

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo principal de este trabajo fue desarrollar un nuevo modelo para estudiar el comportamiento de elementos compuestos con varias superficies de contacto donde se pueden desarrollar deslizamientos relativos, sometido a la acción combinada de carga axial y momento. En estos elementos no es posible calcular la respuesta en una sección transversal considerando solamente el momento actuante en la misma, ya que esta se relaciona con las acciones en los extremos del elemento a través de la interfaz, por lo que es necesario determinar el comportamiento de la interfaz para poder conocer qué ocurre en cada sección transversal.

En la literatura se han propuesto modelos basados en diferencias finitas los cuales plantean las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la interfaz en diferencias finitas, y modelos basados en elementos finitos los cuales definen funciones de interpolación para el flujo de fuerzas en la interfaz, el deslizamiento en la interfaz o ambos.

Los modelos basados en diferencias finitas se han aplicado en elementos con dos superficies de deslizamientos, pero los procedimientos numéricos que emplean dificultan notablemente el análisis de elemento con más de dos interfaces ya que requieren un proceso iterativo por cada interfaz del problema independientemente de que los materiales se comporten en el intervalo elástico-lineal. Además estos métodos limitan su campo de análisis a elementos donde al menos uno de sus extremos se encuentra articulado y no se restringen los deslizamientos en las interfaces. Por otro lado, los modelos basados en funciones de interpolación en la interfaz no permiten el análisis de elementos con varias superficies de contacto donde todos los elementos componentes estén sometidos a efectos de flexión.

Ninguno de los modelos propuestos en literatura permite estudiar un elemento con varias interfaces y sometido a la acción combinada de carga axial y momento. Por esta razón se decidió elaborar un nuevo modelo basado en diferencias finitas. El primer paso para plantear el nuevo modelo fue la obtención de una solución elástica-lineal sin realizar iteraciones. Las ventajas de esta solución es que el modelo se puede implementar con el método de Newton-Raphson para realizar análisis no lineal. Todo esto permitió incluir nuevos aspectos en el modelo propuesto, los cuales son:

- Considerar varias superficies potenciales de deslizamientos relativos entre los elementos, sin que sea necesario incluir un proceso iterativo por cada interfaz
- Incluir la acción combinada de la carga axial y efectos de flexión en las secciones
- Analizar elementos con los deslizamientos nulos y las fuerzas distintas de cero en los extremos. Esto permite analizar elementos empotrados-empotrados, donde ninguno de los extremos es una articulación.

Este nuevo modelo permite estudiar diversos problemas de pérdida de adherencia producida entre elementos originales y elementos de rehabilitación, como pueden ser

elementos de concreto reforzados con placas de acero o con otros elementos de concreto. Estudiar la pérdida de adherencia entre las barras de acero y el concreto que la rodea en elementos de concreto reforzado.

Para mostrar las posibilidades de este modelo se estudió una columna compuesta con varias superficies de deslizamientos y sometida a carga axial y flexión alrededor de un eje; se aceptó que las uniones viga-columna en la estructura tienen la rigidez suficiente para evitar deslizamientos en los extremos de la columna. Este elemento no se hubiera podido analizar adecuadamente con los modelos propuestos en la literatura. En los resultados obtenidos se pudo observar que el momento en el cual comienzan los deslizamientos en las superficies de contacto es poco sensible a la variación de la carga axial. Además, se produce una degradación importante de la rigidez y la resistencia respecto al comportamiento del elemento sin deslizamiento en las superficies de contacto, lo cual demuestra la necesidad de considerar la deformabilidad de la interfaz en este tipo de elemento para poder estimar correctamente la rigidez y resistencia del elemento.

Para trabajos futuros se propone realizar varias modificaciones al modelo propuesto

- Modificar las ecuaciones constitutivas para incluir efectos biaxiales
- Definir la matriz de rigidez del modelo para incorporarlo en un programa de análisis estructural
- Definir las leyes de comportamiento en la interfaz entre cables postensado o pretensados para estudiar el comportamiento de elementos prefabricados.

Por otro lado, se recomienda emplear el modelo propuesto para calibrar un modelo viga-columna basado en elemento finito. Estos modelos se deben generalizar para estudiar elementos con varias superficies de contacto, ya que son más eficientes debido a que requieren de un menor número de secciones a lo largo del elemento.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

REFERENCIAS

Aire, C. M., y Muria, Vila, D. (1993) "Evaluación de las propiedades mecánicas de los concretos de un edificio de 14 pisos", Proyecto 2561 del Instituto de Ingeniería.

ASCE Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. (1982). "Finite element analysis of reinforced concrete structures", ASCE, Reston. Va.

Ansourian, P., y Roderick, J. W. (1978). "Analysis of composite beams" J. Struct. Div., ASCE, 104(10), 1631- 1645.

Carr, A. J. (1998). "RUAUMOKO", Computer program library, University of Canterbury.

Chapra, S. C., y Canale, R. P. (1988). "Métodos numéricos para ingenieros", McGraw-Hill/ Interamericana de México.

Daniels, B. J., y Crisinel, M. (1993). " Composite slab behavior and strength analysis. Part I: Calculation procedure" J. Struct. Engng., ASCE, 119(1), 16-35.

Fabbrocino, G., Manfredi, G., y Cosenza, E. (1999). "Non- linear analysis of composite beams under positive bending", Computers and structures, 70, 77- 89.

Fabbrocino, G., Manfredi, G., y Cosenza, E. (2000). "Analysis of continuous composite beams including partial interaction and bond", J. Struct. Engng., ASCE, 126(11), 1288- 1294.

Filippou, F. C., e Issa, A. (1988) "Nonlinear analysis of reinforced concrete frames under cyclic load reversals", EERC Report 88/12, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Filippou, F. C., D'Ambrasi, A., e Issa, A. (1992) "Nonlinear static and dynamic analysis of reinforced concrete subassemblages", EERC Report 92/08, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Fuentes, L. (2000). "Modelos calibrados de un edificio instrumentado", Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Giberson, M.F. (1967). "The response of nonlinear multi- story structures subjected to earthquake excitation", California Institute of Technology, Thesis PH. D., 1967

Kanaan, A. E., y Powell, G. H. (1973). "General purpose computer program for inelastic dynamic reinforced of plane structures", EERC Report 73/6, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Kaba, S., y Mahin, S. A. (1984) "Refined modeling of Reinforced Concrete Columns for seismic analysis" EERC Report 84/03, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

- Keuser, M., Mehlhorn, G. (1984). "Finite element models for bond problems", *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 113(10), 2160- 2173.
- Mendoza, C. J. (1985) "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal", *Series del Instituto de Ingeniería No 495*.
- Meyer, C., y Roufaiel, M. S. (1983). "Analysis of Damaged concrete frames for cyclic loads", *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol 11, 207-228.
- Neuenhofer, A., y Fillippou, F. C., (1997) "Evaluation of nonlinear frame finite-element models", *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123(7), 958-966.
- Ngo, D., Scordelis, A. C. (1967). "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *ACI Journal* , 152-163.
- Noguchi, H. (1994). "Application of FEM (Finite Element Method) to RC (Reinforced concrete) structures", *Cuadernos de Investigación, CENAPRED, No 9*.
- NTCEC, (1996) "Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del Distrito Federal", *Gaceta oficial del Distrito Federal, marzo 25*.
- Oehlers, D. J., y Bradford, M. A. (1995). "Composite steel and concrete structural members. Fundamental Behavior". Pergamon, New York.
- Otani, S. (1974) "Inelastic analysis of R/C frames structures", *J. Struct. Div.*, ASCE, 100(7), 1433- 1449.
- Park, R., y Paulay, T. (1979) "Estructuras de concreto reforzado" Editorial Limusa, México
- Roberts, T. M. (1985). "Finite difference analysis of composite beams with partial interaction", *Computers and Structures*, 21(3), 469-473.
- Roufaiel, M. S., y Meyer, C. (1987). "Analytical modeling on hysteretic behavior of R/C frames" *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 113(3), 429-444.
- Salari, M. R., Spacone, E., Shing, P. B., Frangopol, D. M. (1998). "Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors" *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 124(10), 1148- 1158.
- Salari, M. R., y Spacone, E. (2001a). "Finite element formulations of one- dimensional elements with bond- slip" *Engrg. Struct.* 23(7), 815- 826.
- Salari, M. R., y Spacone, E. (2001b). "Analysis of steel-concrete composite frames with bond slip" *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 127(11), 1243- 1250.

SAP2000 (1997). "SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures", Berkeley, California.

Schneider, S. (1998). "Axially loaded concrete- filled steel tubes", J. Struct. Engrg., ASCE, 124(10), 1125- 1138.

Spacone, E., Filippou, F. C., y Taucer, F. F. (1996). "Fiber beam- column model for nonlinear analysis of R/C frames. I: Formulation." Earthquake Engrg. And Struct. Dyn., 25(7), 711- 725.

Valluvan, R., Kreger, M. E., Jirsa, J. O., (1999) "Evaluation of ACI 318-95 Shear-friction provisions", ACI Struct. J., 96(4), 473-481.

Wallace, J. W., (1989) "Biaxial strength - moment-curvature analysis" University of California, Berkeley