20485
7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

EL CONCEPTO DE VARIACIÓN DE VOLUMEN Y LA GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:
ENCARNACIÓN TORRES GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. SALVADOR MORENO GUZMÁN

OCTUBRE 2002

Agradecimientos:

Agradezco Especialmente al M. en C. y candidato a Dr. Salvador Moreno Guzmán, el haber confiado y aceptado ser mi director de tesis, así como sus valiosas sugerencias y observaciones durante el desarrollo de este trabajo.

A la C. Directora del CCHN. Biol. Angélica Galnares C: Por el apoyo y la ayuda brindada durante la maestría hasta su culminación con el presente trabajo.

Al C Director de la UPIICSA. Ing. Francisco Bojorquez H. Por el apoyo y el haberme permitido por medio del año sabático la realización de la presente tesis.

A los profesores de la maestría:
Por su gran dedicación y enseñanza en cada uno de sus cursos.

A los maestros sinodales:
Maestro: Gustavo Marquina R.
Maestro: Juan B. Recio Z.
Maestro: Miguel Angel Cifuentes M.
Maestro: Miguel Mercado M.
Maestro: Salvador Moreno G.

Dedicatoria:

A mi esposa: Sol. por su gran entusiasmo y el apoyo brindado durante la maestría.

A mis hijos: Hilda Patricia y Luis Ubaldo.

A la memoria de mis padres y mi tía: Rodrigo, Consuelo, Soledad.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

EL CONCEPTO DE VARIACION DE VOLUMEN Y LA GEOMETRIA DINAMICA EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR

ENCARNACION TORRES GARCIA

Índice

Introducción

Una de las materias de mayor índice de reprobación tanto a nivel medio superior como superior es Cálculo Diferencial, debido entre otras causas a que los cursos se desarrollan bajo un enfoque operativo, dejando de lado el aspecto conceptual y de aplicación. En este campo se deben realizar *aplicaciones de la derivada* a problemas de optimización y con frecuencia el profesor agota el tiempo del programa en el uso de reglas de derivación, quedándose así truncado uno de los temas más importantes del curso.

El propósito de este trabajo es contribuir en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje en esta materia y que el estudiante adquiera un conocimiento mejor integrado tanto en el aspecto procesal como en el conceptual, teniéndose así la posibilidad de disminuir el nivel de reprobación,

El trabajo de esta investigación se inicia con el planteamiento de un problema como proyecto de acción práctica que nos permitirá tender los puentes cognitivos entre los esquemas que el estudiante posee, para abordar problemas de aspecto conceptual a través de la simulación y la manipulación práctica sobre un problema de aplicación de la derivada en el tema de Máximos y Mínimos. Para realizar y facilitar lo anterior se utilizarán diversos recursos como tijeras, papel, regla y diversos programas (software) de Geometría Dinámica, implementados en una computadora.

Se revisaron varios libros de texto de Cálculo Diferencial y se hizo una selección de problemas de optimización de los cuales se escogió uno de volumen, el cual se plantea en la página 2. Por otro lado cuando se dieron los primeros pasos en su desarrollo se presentaron fuertes obstáculos epistemológicos (dificultad que tuvieron los alumnos para percibir la variación de volumen) sobre el concepto de variación que subyace al de volumen del cual los estudiantes no lo percibieron, ante esto se hizo una reflexión planteando la siguiente pregunta:

¿Qué sentido tiene para los estudiantes buscar los puntos máximos y mínimos de un problema donde la variable (variación de volumen) que se quiere optimizar no cambia?

Ante esta pregunta, este trabajo de tesis se enfocó a la búsqueda de estos obstáculos a través de la experimentación en el aula, con el propósito de que éstos sean tomados en cuenta en la implementación didáctica de los futuros cursos.

En seguida se hace una breve descripción de los capítulos que conforman este trabajo de investigación.

En el capítulo I se justifica el problema de investigación, del porqué se enfocó únicamente en el concepto de variación, se plantea el problema, la hipótesis, las variables del problema, los instrumentos de medición, las delimitaciones de investigación, la justificación y la clasificación de la investigación educativa según Kline (1980, pp. I-20 – I-31).

En el capítulo II se establece la importancia que tienen los conceptos de variación y forma como elementos fundamentales de las matemáticas; se menciona el informe de "Science All Americans" de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, donde sugiere que los estudiantes deberían ser sensibles al menos a las siguientes clases de relaciones entre variables: variación directa e inversa, variación acelerada, variación convergente, variación cíclica y variación escalonada. También se menciona el estudio de la forma, tema que tiene un papel importante en uno de los obstáculos epistemológicos del concepto de variación en este trabajo de investigación. Además, se ubica el concepto de variación en el programa de matemáticas I del Plan de estudios Actualizado (PEA) del Colegio de *Ciencias y Humanidades, así como la descripción de un ambiente computacional* para la simulación del problema en la computadora teniendo como soporte el programa de Geometría Dinámica (Sketchpad).

El capítulo III se refiere al marco conceptual, el cual se desarrolla en tres partes:

- La psicología, donde se abordan conceptos como el de los esquemas.
- Las operaciones efectivas, donde se menciona la importancia que éstas tienen según Piaget (1980), Aebli (1995) y Churchill (1988).
- La computadora como herramienta y como un laboratorio, donde se propone incorporar a la computadora y/o calculadora en el aula, con la cual el alumno podrá interactuar con un ambiente computacional, visualizando en forma simultánea los diversos registros de representación semiótica asociados, con el propósito de explorar el concepto de variación en un problema de optimización.

En el capítulo IV se describe la metodología y el reporte de investigación.

En el capítulo V se realizan las conclusiones, los comentarios por parte de los estudiantes y las sugerencias que se hacen al concluir este trabajo.

Al final se integran dos apéndices y la bibliografía. En los apéndices se muestran algunas imágenes documentadas del trabajo desarrollado en las aulas y en los laboratorios o salas de computación, durante la investigación y los cuestionarios aplicados a los estudiantes.

Capítulo I

Planteamiento del problema de la Investigación Educativa.

El presente trabajo de investigación se inicia con el planteamiento de un problema de optimización en un curso de Cálculo Diferencial de nivel medio superior del CCH UNAM del plantel Naucalpan, en el cual se buscó que fuera interesante para el estudiante donde los conceptos de máximos y mínimos se pudieran desarrollar mediante actividades que dieran lugar a las operaciones concretas (efectivas como las llama Piaget, 1980) dentro del aula y se extendiera el análisis a la simulación de estas en la computadora con apoyo del programa de la geometría dinámica:

El plan de acción inicial que se había planteado para su desarrollo se describe a grandes rasgos en seguida:

a) buscar en los libros de texto de Cálculo Diferencial un problema que pudiera ser de interés para el estudiante clasificado en el contexto de las aplicaciones de la Derivada.
b) Diseño de las actividades para el desarrollo de las operaciones concretas
c) Diseño y construcción de un micromundo para la simulación de las operaciones concretas en la computadora con apoyo del programa de la Geometría Dinámica
d) Ampliación de las acciones concretas mediante la articulación de cinco registro de representación en la Geometría Dinámica (Duval, R. 1998).
e) Planteamiento de conjeturas respecto a los datos arrojados por las variables que dan lugar a los puntos máximos y mínimos del problema.

f) Validación de las conjeturas mediante la aplicación del Cálculo Diferencial con los criterios de la primera y segunda derivada.

El propósito de la investigación era determinar la importancia que las operaciones concretas pudieran tener como antecedente en la solución de problemas y observar la influencia en el estudiante de la percepción de los elementos involucrados en el problema de optimización, así como las variables y sus relaciones.

Sin embargo, al desarrollar el proyecto se presentaron fuertes obstáculos epistemológicos en los estudiantes al realizar las operaciones concretas sobre la percepción de la variación del volumen del problema planteado, concepto que es de fundamental importancia y que le da sentido al problema de optimización.

En seguida se menciona en forma breve como surgió uno de estos problemas.

Se planteó el siguiente problema:

Determinar las dimensiones de los cuadrados de las esquinas que se deben de cortar, de una lámina cuadrada de 13 cm de lado, para construir una caja de base cuadrada sin tapa, que tenga volumen máximo.

Con el propósito de conocer los conocimientos previos que los alumnos tienen de los conceptos que subyacen en el problema se realizaron las siguientes actividades.

Se pidió a un grupo de estudiantes de Cálculo Diferencial que construyeran cajas de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm y 6 cm de altura.

A cada uno de los grupos se les dotó del siguiente material:

- Seis cartulinas cuadradas de 13 cm de lado
- Una regla
- Unas tijeras
- Cinta adhesiva
- Un cuestionario

Cuando terminaron se les pidió que contestaran el siguiente cuestionario:

1) ¿Qué variables consideras que están inmersas en el problema?

2) ¿Cuáles consideras que son independientes?

3) ¿Cuáles consideras que son dependientes?

4) Con relación a todas las cajas construidas ¿consideras que varía el volumen o se mantiene constante? esto es, si se llenaran con agua las cajas, ¿la cantidad de agua es diferente en cada caja o es la misma?

Para esto, se supone que el alumno sabe lo que es una variable, ya que es uno de los temas que se dan en el primer semestre en matemáticas I.

Se hizo un estudio registrado en un vídeo, de comentarios de los estudiantes durante el desarrollo del problema.

De las respuestas, la que más nos interesó fue de la pregunta 4 donde el 80% de los estudiantes respondieron que **el volumen no variaba** dando diferentes argumentos.

Esta respuesta nos obligó a reflexionar sobre la continuación del proyecto, debido a que se quedaba sin fundamento el problema, esto es, no se percibió la variación del volumen y nos hicimos la siguiente pregunta ¿Qué sentido tiene para los estudiantes buscar los puntos máximos y mínimos de un problema donde la variable que se quiere optimizar no cambia?

Se valoró esta situación donde se cuestionó la continuación del proyecto, esto es, continuar o desarrollar una investigación donde se contemplara únicamente el concepto de variación, tomar la decisión no fue fácil porque sí se consideraba la primera opción sin hacer una reflexión de la situación, consideramos que estábamos cayendo en el esquema de la enseñanza tradicional, esto es, exponer un tema y continuar con el siguiente sin llevar a cabo una exploración y una reflexión que nos permitiera saber si el estudiante había comprendido el problema, y si había sido capaz de; identificar las variables, haber percibido las relación entre ellas y hacer la clasificación en dependientes e independientes.

Si se continuaba con la segunda opción se consideró que el tiempo y el arduo trabajo que se había invertido en la construcción de los objetos para la creación del micromundo en la computadora no serían aprovechados. Sin embargo, la decisión que se tomó fue darle prioridad a la segunda opción, esto es, enfocar la investigación hacia el concepto de variación en el problema planteado y continuar con la simulación con la Geometría Dinámica.

Definición del problema de investigación.

Tomando en cuenta lo anterior, del estudio previo y del enfoque que se tendría en el seguimiento de este trabajo, se define el problema de investigación de la siguiente forma:

Para que los estudiantes integren el concepto de volumen en el contexto de la solución de problemas de optimización, entre otras cosas se requiere, efectuar un estudio para conocer los problemas epistemológicos que se presentan en los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial al abordar la solución de problemas de optimización donde un factor importante es el concepto de variación.

Es importante destacar que lo que se pretende con la investigación para fines aplicados es establecer un diagnóstico que nos permitirá detectar problemas concretos, descubrir relaciones entre ellos y jerarquizar los problemas, todo ello con el propósito de contar con elementos que sean de utilidad en el aprendizaje de las matemáticas.

I.1. Planteamiento del problema.

Una vez que se han detectado los elementos fundamentales de la investigación, planteamos el problema de trabajo con la siguiente pregunta.

¿Cómo perciben los estudiantes el concepto de variación de volumen en un problema de optimización en los contextos de las operaciones concretas (Piaget, 1980) y en la simulación de éstas en la Geometría Dinámica?

I.2. Hipótesis de Investigación.

La hipótesis que guiará el presente trabajo de investigación es la siguiente:

Hipótesis:

Los estudiantes no perciben la variación en el volumen sobre un problema de máximos y mínimos en los contextos de las operaciones concretas y la simulación de estas con la geometría dinámica

Dentro de la tecnología de la investigación la hipótesis anterior se clasifica como descriptiva por lo que los datos que arrojará la investigación tendrán este carácter y bajo este enfoque, se identificaron las variables y los instrumentos de medición.

I.3. Variable del problema de Investigación.

La variable del problema es,

La percepción de la variación en el volumen.

Instrumentos de medición.

Los instrumentos de medición que serán considerados son los siguientes:

- Cuestionarios
- Entrevistas
- Vídeos

I.4. Delimitaciones del problema de investigación.

Esta investigación será realizada con estudiantes del nivel medio superior y superior, del CCH Naucalpan y con los de UIICSA IPN que cursen la materia de Calculo Diferencial. Había que recurrir a un registro de representación que pusiera en conflicto los esquemas con los cuales estaban interpretando los estudiantes el concepto de variación del problema y así continuar en la búsqueda de los puntos máximos y mínimos con apoyo del micromundo diseñando en la Geometría Dinámica,

I.5. Justificación.

La justificación de la investigación se realiza tomando en cuenta la siguiente problemática:

A pesar de que el estudio de las matemáticas ocupa uno de los primeros lugares en la vida escolar de los estudiantes, es en esta asignatura donde se tiene el más alto índice de reprobación e incluso es una fuerte causa de deserción, llegando a ser así un obstáculo para que muchos estudiantes puedan concluir sus estudios.

Tradicionalmente los porcentajes de reprobación que se obtienen en un curso de cálculo diferencial son muy altos, esto es palpable en las carreras de ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana Azc. donde se tienen porcentajes de reprobación de hasta 72 % (Informe de Actividades de la Div. de CBI. 1997, UAM-Azc), así como también en muchas otras instituciones. A este respecto Tall (1996, pág. 173) menciona citando a Anderson & Loftsgarden (1987) y a Peterson (1987), "A pesar de que los alumnos se someten a un régimen pesado de ejercicios de cálculo, el porcentaje de fracasos en este tema oscila entre el 30 % y 50 %".

Un problema muy concreto es el que se tiene en el último año del ciclo escolar de la enseñanza media superior y superior de nuestro país, donde este problema se torna crítico y el índice de reprobación de los alumnos que cursan la materia de cálculo diferencial llegan a ser del 75% al 85% (Verdiguel, A. 1998). Este problema no sólo tiene repercusión escolar, también afecta el ámbito familiar, donde los padres ven frustrados sus anhelos de ver concluir a sus hijos el ciclo escolar.

Son muchas las razones que dan lugar a esta problemática entre las cuales podemos mencionar:

- La masificación en la enseñanza que da lugar a grupos extremadamente numerosos con lo cual la atención personal o asesoría es prácticamente imposible para un docente.
- Una impartición de tipo tradicional que fundamentalmente sigue al pie de la letra algunos de los textos usuales sin ninguna reflexión.
- La improvisación en la enseñanza. Es decir, el docente carece de cursos de pedagogía y matemáticas actualizadas que lo preparen para enseñar.
- La diversidad de profesiones que tienen los profesores que integran la planta docente del área de matemáticas.
- El sentido abstracto de la materia que sin lugar a dudas son las matemáticas en general.
- Antecedentes para el curso; álgebra, geometría, etc.

Por otro lado, se tiene una gran preocupación a escala mundial acerca de la educación matemática por el poco éxito que ha tenido la enseñanza de las matemáticas. Esto se refleja en la propuesta educativa de los estándares del currículo y evaluación en matemáticas del NCTM (1991a, 1991b y 2000)

Luego, el uso de la tecnología de este trabajo de investigación se fundamenta en lo siguiente: el vertiginoso desarrollo de la tecnología y la información ha influido en todos los aspectos incluyendo el ámbito social y educativo, donde, el crecimiento exponencial en el desarrollo tanto de "hardware" como de "software" ha afectado la enseñanza, dejando a estos la realización de muchas de las tareas que frecuentemente un profesor proponía a sus estudiantes. Por ejemplo: derivar e integrar simbólicamente; realizar gráficas sofisticadas de manera sencilla y rápida; realizar álgebra simbólica; aritmética de racionales etc., Estas tareas se pueden realizar ahora en programas de computadora, e incluso en calculadoras, con lo cual la enseñanza tradicional de las matemáticas se ve cuestionada.

Como una repercusión de lo anterior, actualmente en nuestro país se ha dado una gran importancia a las reformas de los planes y programas de estudio, y al uso de la computadora y a la calculadora como apoyo a la enseñanza e investigación educativa, por lo que se ha otorgado en los centros escolares apoyos para la formación de laboratorios de cómputo (programas de estudio del CCH UNAM, 1996) Sin embargo muchas veces no se cuenta con un programa de los cursos que muestre un uso racional de esta tecnología.

De esta forma, se considera que la computadora ofrece una gran oportunidad para reconsiderar, la enseñanza del Cálculo a través de un planteamiento didáctico adecuado. Este medio (computadora) permitiría proporcionar al estudiante lo mismo que al maestro la posibilidad de: visualizar los conceptos fundamentales de la materia, ejercitar mediante la resolución de problemas para adquirir el manejo y destreza necesarios, y de esta forma promover una mejor comprensión de los mismos.

I.6. Investigación Educativa.

Una vez planteado y justificado el problema de investigación consideramos necesario ubicarlo en un esquema que la tecnología educativa tiene ya contemplado.

Considerando que la investigación puede definirse como un proceso sistemático para responder a algunas preguntas. Podemos establecer que la investigación educativa es un proceso sistemático para responder a preguntas relacionadas con la educación. Kline (1980, p. I-10) ha dado una definición más amplia al respecto:

> *"Definimos la investigación y evaluación educativa como el análisis sistemático de fenómenos educativos, con el propósito de describir, explicar las causas y los efectos de, y/o entender los factores que abarcan o predicen el acontecimiento de un suceso educativo específico".*

En general los pasos básicos del proceso sistemático son:

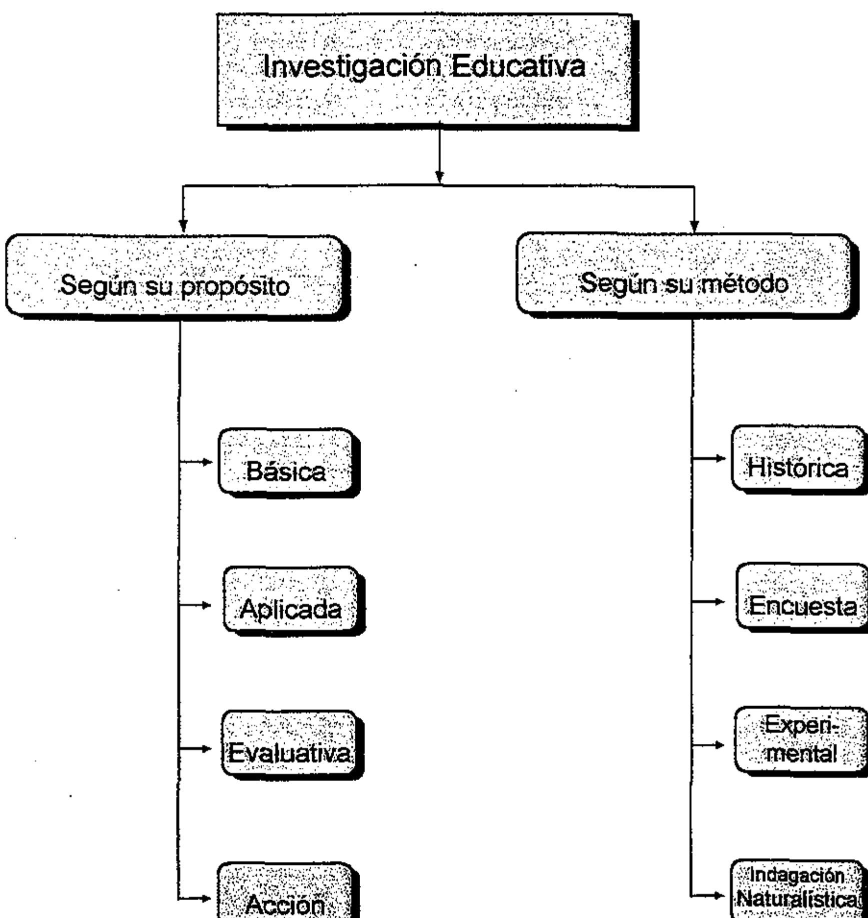
1) Formular pregunta(s). Es decir, plantear un problema.
2) Formular hipótesis u objetivos.
3) Diseñar un estudio.
4) Analizar los resultados.
5) Sacar conclusiones.

Es necesario insistir en la cuestión de un proceso "sistemático" porque así es más probable que se obtengan resultados y se llegue a conclusiones que sean válidas y que puedan duplicarse.

Aunque el proceso de investigación es sistemático en su concepción abstracta y esa concepción debe guiar al investigador en gran parte de su labor, esto no quiere decir que el proceso sea siempre formal y que el investigador no pueda usar su intuición. La imaginación y las corazonadas del investigador tienen que combinarse con los métodos sistemáticos para que sus labores florezcan.

I.7. Tipos de investigación educativa.

Kline (1980, pp. I-20 - I-31) probablemente ha sugerido uno de los esquemas de clasificación de investigación educativa más completos que existe, de los cuales se presenta un esquema y se describen a continuación.



I.8. Clasificación según el propósito.

El debate sobre la distinción y la importancia relativa de la investigación básica y la investigación aplicada ha durado muchos años. La definición de la evaluación como un tipo de investigación es más reciente.

Investigación Básica. La investigación básica tiene como fin el desarrollo de la teoría; para ello es necesario descubrir o comprobar generalizaciones y principios, y a la vez contribuir al crecimiento del conocimiento fundamental. El desarrollo de la teoría obliga al investigador a considerar las estructuras y los procesos fundamentales y a tratar de comprenderlos, como la investigación pura, la investigación fundamental o la investigación teórica.

Investigación Aplicada. La investigación aplicada, si se realiza fielmente, tiene muchas de las características de la investigación básica. Sin embargo, su propósito es más inmediato y se relaciona con el mejoramiento de un proceso o un producto. Por lo tanto se comprueban los conceptos teóricos en situaciones reales. Como ya se mencionó, tiene un propósito más inmediato que la investigación básica, pero siempre conlleva la intención de generalizar los resultados a otras situaciones. Aunque el propósito principal de la investigación aplicada es proporcionar resultados de utilidad práctica para educadores, en vez de ser el desarrollo de teorías.

Investigación Evaluativa. La investigación evaluativa (evaluación educativa) puede definirse como un tipo de investigación aplicada. Tiene la misma función de resolver un problema práctico, pero se relaciona más con el cumplimiento de las metas u objetivos de un programa específico de educación. No se preocupa en obtener resultados que puedan generalizase. En vez de buscar conclusiones, la investigación evaluativa conduce más bien a la toma de decisiones.

Investigación de Acción. La investigación de acción es un término que no se presenta específicamente dentro del esquema de Kline. Puede considerarse como un tipo de investigación evaluativa que un profesor puede utilizar para comprobar la eficacia de su programa y los métodos que emplea dentro de su propia aula.

I.9. Clasificación según el Método.

Existen varias maneras de clasificar los métodos de la investigación educativa. El sistema de Kline es uno de los más completos.

Investigación Histórica. La investigación histórica es un proceso sistemático para estudiar documentos y otras fuentes de información para responder a preguntas sobre la significación del pasado. El estudio de una reforma educativa en un país, o la influencia de un movimiento pedagógico, son ejemplos de la investigación histórica. La investigación histórica puede contribuir a que haya una comprensión de los hallazgos y errores del pasado, y por lo tanto, hasta cierto punto que se explique el porqué de una situación actual y las posibles tendencias del futuro.

Investigación de tipo Encuesta. Los cuestionarios y las entrevistas son los instrumentos principales de la investigación de tipo encuesta. Sirven para recabar datos semejantes sobre grupos de individuos. Si el grupo de individuos es toda una población, a la encuesta se le denomina censo. No obstante es más común seleccionar una parte de la población, a la cual se le llama muestra. Si la investigación de tipo encuesta dura varios años y si los datos se recogen periódicamente, es un estudio longitudinal. Si los datos son recabados sólo una vez, éste es un estudio transversal. A veces las encuestas no ofrecen nada más que información descriptiva, y a veces se usan para averiguar algo sobre la relación entre las variables.

Investigación Experimental. Con la investigación experimental es posible inferir posibles relaciones de causa y efecto al comparar los resultados de uno o más grupos que hayan recibido un tratamiento especial, con uno o más grupos de control que no hayan recibido tal tratamiento. Por ejemplo si aleatoriamente se seleccionan dos clases y aleatoriamente se asigna una para recibir un curriculum nuevo de matemática mientras la otra recibe el curriculum tradicional, con mediciones apropiadas antes y después de recibir los curricula, es posible inferir algo sobre el efecto causado por el nuevo curriculum. Existen varios niveles de diseños experimentales. Los diseños experimentales propiamente dichos requieren que se empleen controles rigurosos que son difíciles de lograr fuera de un laboratorio, pero que permiten más seguridad en las inferencias de causa y efecto.

Investigación por Indagación Naturalística. El estudio de personas en sus ambientes naturales distingue a la investigación por indagación naturalística, de otros métodos. La observación, la entrevista informal y el análisis de documentos son las técnicas de la investigación naturalística. Un ejemplo sería un investigador dentro del aula con el profesor y los alumnos registrando observaciones sobre el comportamiento.
A continuación se describen los elementos que intervienen en la investigación educativa.

Teniendo en cuenta la clasificación anterior, el trabajo de investigación educativa que se efectuará en el presente trabajo de tesis lo ubicamos por su propósito en el rubro de **Investigación aplicada** y por su método en la **Investigación de tipo Encuesta.**

Capítulo II

Los conceptos de Variación y Forma como elementos fundamentales de las Matemáticas.

Considerando que los conceptos de Variación (cambio) y de Forma son fundamentales en el desarrollo de las matemáticas, en seguida se hace una descripción breve de estos términos en el contexto histórico.

Nada en el mundo es inmune al cambio. La roca más dura en el más seco de los desiertos se dilata o se contrae con el cambio de la luz solar. Los bloques de acero, están sujetos a fluctuaciones estacionales en su longitud donde una de las tantas causas puede ser por la radiación producida por las paredes. Todo crece o se contrae, se calienta o se enfría, cambia de posición, de color, de composición e incluso tal vez hasta de lugar. Aunque el proceso de **cambio** (variación) es inevitable y vital para comprender las leyes de la naturaleza, es difícil de analizar. Por ser continuo no ofrece ningún punto sencillo que la mente pueda aislar y controlar. Durante siglos desconcertó a los matemáticos. Algunos primeros pasos, ciertamente, se dieron hacia una matemática del movimiento.

Los griegos lo hicieron así cuando se imaginaron las curvas como trazos realizados por puntos en movimiento, y cuando analizaron las líneas curvas, paso a paso, por medio de la técnica de dividirlas en segmentos infinitamente pequeños. Así lo hizo Descartes cuando pensó en los términos de una ecuación como función entre variables y, sobre todo, cuando facilitó una posibilidad para representar figuras gráficas de las situaciones y relaciones fluidas. Pero en su mayor parte el mundo de las matemáticas se pobló de figuras de formas y números que permanecían absolutamente invariables. Posteriormente, en 1665 y 1666, Isaac Newton, de Inglaterra, realizó una prodigiosa creación mental, denominada en la actualidad cálculo, que, por primera vez, permitió el análisis matemático "de todo" **movimiento y cambio (Variación)**.

En el cálculo, Newton combinó la técnica de la división en partes pequeñas de los griegos y el sistema gráfico de Descartes para crear un maravilloso y automático instrumento mental con el fin de operar en una ecuación para llegar a los infinitésimos. El cálculo probó su efectividad tan rápidamente que en unos cuantos años su creador lo utilizó para establecer las leyes del movimiento y de la gravitación. Debido a su habilidad en probar, los misterios del movimiento, el cálculo en la actualidad se ha convertido en el nexo principal entre la ciencia práctica y el conjunto de pensamientos matemáticos. Todo avión, todo aparato de televisión, todo puente, toda computadora, toda nave espacial le deben parte de su existencia.

Las distintas clases de cambio que puede analizar el cálculo son muy diversas. Si los factores que comprenden cualquier situación fluida pudieran ponerse en términos de una ecuación, entonces el cálculo puede abarcarlos y descubrir las leyes a que obedecen.

Otro tema donde también el concepto de variación es fundamental es en los problemas de tasas de variación relacionadas. En aplicaciones del mundo real que implican tasas de variación relacionadas, las variables tienen una relación específica para valores de t, donde t es una medida de tiempo, en general esta relación se expresa mediante una ecuación, la cual representa un modelo matemático.

Así, la lista se haría interminable si se mencionaran todo los campos de las ciencias en donde se encuentra el concepto de variación sea explícito o implícito.

II.1. El concepto de variación en términos del concepto de función

Los usos elementales de los números se enfocan en descripciones e inferencias respecto a hechos cuantitativos, el costo de 5 barras de dulce que valen 50 pesos cada una, el área de un campo que mide 50 metros de largo y 30 metros de ancho, o la velocidad promedio de un automóvil que recorre 300 kilómetros en 5 horas. El dominio de los conceptos requeridos en tales tareas es sin lugar a dudas una empresa central y formidable de las matemáticas escolares. Sin embargo, para que el razonamiento cuantitativo produzca resultados de mayores alcances que los hechos numéricos llanos es esencial que dicho razonamiento se encuentre enraizado firmemente tanto en los patrones generales de los números como en los cálculos asociados. El patrón típico es una relación entre dos o más cantidades variables. Por ejemplo:

- Conforme transcurre el tiempo, la profundidad del agua de un embalse formado por la marea aumenta y disminuye siguiendo un patrón periódico.
- Cuando las tasas bancarias de ahorro aumentan, los intereses devengados por un depósito mensual fijo también aumentan.
- Si una colección de cuadrados tiene lados 1, 2, 3, 4, 5,..., las áreas de los mismos son 1, 4, 9, 16, 25,...
- Para cualquier rectángulo de base b y altura h, el perímetro p es 2b + 2h.

Las ideas matemáticas claves requeridas para hacer razonamientos acerca de tales patrones son los conceptos centrales del álgebra elemental: variables, funciones, relaciones, ecuaciones, desigualdades y razones de cambio. Actualmente en las matemáticas escolares los estudiantes dedican mucho tiempo a trabajar con variables en la forma de literales para denotar números desconocidos y con ecuaciones o desigualdades que establecen condiciones sobre dichos números. La instrucción algebraica se enfoca en los procedimientos formales para transformar expresiones simbólicas y resolver ecuaciones a fin de encontrar el valor oculto de la variable.

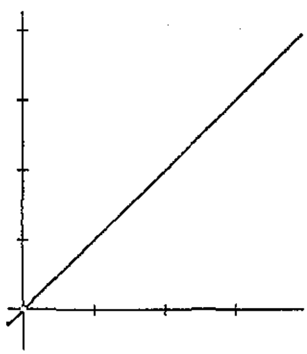
Pero esas habilidades son tan sólo una reducida parte del potencial ofrecido por el álgebra. En cada uno de los ejemplos anteriores, así como en muchos otros problemas similares, el núcleo conceptual de la cuestión es la comprensión de las relaciones existentes entre varias cantidades cuyos valores varían. La noción de variable que los estudiantes deben comprender no es simplemente "una letra que representa un número" o "el valor desconocido en una ecuación". Debe incluir asimismo la consideración de las variables como cantidades mensurables que cambian cuando las situaciones en las que ocurren cambian.

En general, las variables no tienen significación en sí mismas sino sólo en relación con otras variables. En aplicaciones más reales del álgebra, la tarea, fundamental del razonamiento no es encontrar un valor de *x* que satisfaga una condición particular, sino analizar la relación entre *x* & *y* "para toda *x*". La idea algebraica más conveniente para considerar las relaciones de este tipo es el concepto de variación en el contexto del concepto de Función.

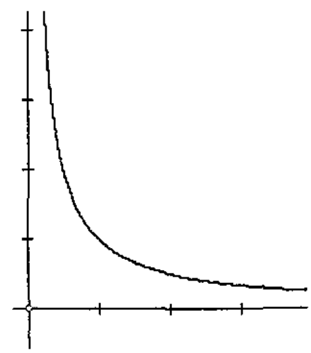
A fin de fomentar la comprensión requerida para aplicar el álgebra de *manera eficaz, los estudiantes necesitan encontrar y analizar una amplia variedad* de situaciones estructuradas por relaciones entre variables. Es necesario que comprendan adecuadamente frases relacionales tales como "*y* depende de *x*", "*y* es una función de *x*", "una variación en *x*, produce una variación en *y*" o "el cambio en *x* produce un cambio en *y*". Sería deseable que desarrollaran un repertorio de criterios para caracterizar, por estructura, las relaciones que encuentran y clasificarlas en funciones. Por ejemplo, el informe "Science for All Americans" de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia sugiere que los estudiantes deberían ser sensibles al menos a las siguientes clases de relaciones entre variables (ver figuras 1)

- Variación directa e inversa, cuando una variable se incrementa, la otra también se incrementa (o decrementa) en una razón similar.

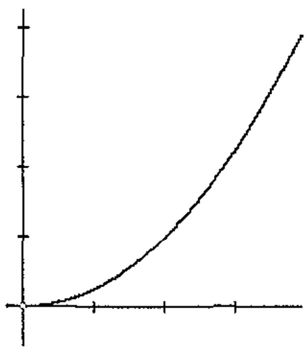
- Variación acelerada, cuando una variable se incrementa uniformemente, una segunda variable se incrementa en una razón creciente.
- Variación convergente, cuando una variable se incrementa sin límite, otra se aproxima a un valor límite.
- Variación cíclica, cuando una variable se incrementa uniformemente, la otra se incrementa y decrementa en cierto ciclo que se repite. Variación escalonada, cuando una variable se incrementa, otra cambia a saltos.



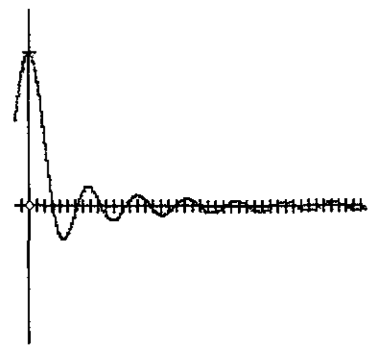
Variación Directa



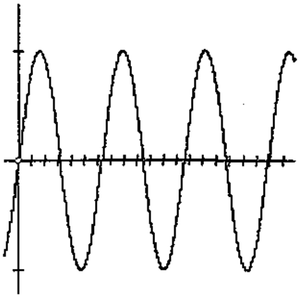
Variación Inversa



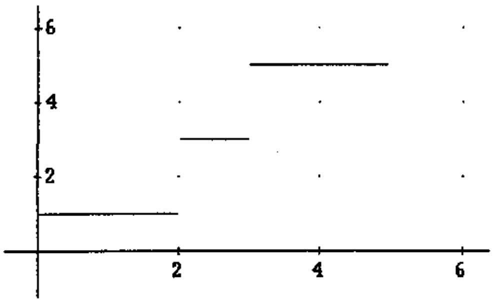
Variación acelerada



Variación Convergente



Variación Cíclica



Variación escalonada

Figuras 1

II.2. Forma.

La forma es un tema vital, creciente y fascinante de las matemáticas que tiene estrechos vínculos con la geometría clásica pero que la rebasa por mucho en contenido, significación y método. Desarrollado adecuadamente, el estudio de la forma puede constituir un componente central de la educación matemática, un componente que incida y contribuya no sólo en las matemáticas sino también en las ciencias y las artes.

La forma es uno de los conceptos esenciales que se exploran en este trabajo de investigación a través de las operaciones efectivas, tanto con estudiantes del nivel medio superior como del superior.

Pero, como muchos otros conceptos importantes, "forma" es un término indefinible. No es posible precisar el significado de "forma", debido en parte a que siempre se están descubriendo nuevos tipos de formas. Damos por sentado que sabemos qué son las formas, más o menos: podemos reconocer una forma cuando la vemos, sea con los ojos o con la imaginación. Pero sabemos mucho más que esto. Sabemos que las formas pueden ser semejantes en ciertos aspectos y diferentes en otros. Una pelota de fútbol no es una pelota de básquetbol, pero ambas son superficies cerradas uniformes; un triángulo no es un cuadrado, pero ambos son polígonos. Sabemos que las formas pueden poseer diferentes propiedades: un triángulo hecho con popotes es rígido, pero un cuadrado hecho con popotes no lo es. Sabemos que las formas pueden cambiar y, no obstante, ser en cierto modo las mismas: mi sombra será siempre la mía, aun cuando cambie de tamaño y contorno a lo largo del día.

En el estudio de la forma nuestras metas no son muy diferentes de las de los filósofos griegos de la antigüedad: descubrir las semejanzas y diferencias de los objetos, analizar los componentes de la forma y reconocer formas en diferentes representaciones. La clasificación, el análisis y la representación constituyen nuestras tres herramientas principales. Desde luego, estas herramientas guardan una estrecha interrelación, por lo que las distinciones entre ellas son hasta cierto punto artificiales. ¿La simetría es una herramienta para clasificar patrones o una herramienta para analizarlos? De hecho, es ambas cosas. Sin embargo, resulta conveniente estudiar cada una de estas herramientas por separado.

Uno de los grandes logros de los matemáticos de la antigüedad fue el descubrimiento de que existen exactamente cinco formas convexas tridimensionales cuyas superficies se componen de polígonos regulares, con el mismo número de polígonos que se cortan en cada vértice. Estas formas son conocidas como los poliedros regulares.

II.3. Representación.

Una herramienta importante en el estudio de la forma es la representación. En la vida cotidiana así como en las ciencias, las matemáticas y el arte, no sólo tratamos con las formas en sí mismas, sino también con varios tipos de representaciones de las formas, modelos, fotografías, dibujos. Las herramientas de representación incluyen la capacidad para comprender modelos a escala; para leer mapas; para entender las sombras, las secciones y las proyecciones; para reconstruir formas a partir de sus imágenes; para dibujar con precisión, y para usar gráficas de computadora. El punto subyacente es el mismo en cada caso, determinar la relación entre una forma y su imagen o entre diferentes imágenes de la misma forma.

II.4. El estudio de la forma como un tema de laboratorio

El estudio de la forma es un tema de laboratorio. Todos los niños y adultos, aprendemos acerca de las formas haciéndolas y estudiando modelos. Como reza un antiguo proverbio: "Escucho y olvido; veo y recuerdo; hago y aprendo."

Si queremos construir una forma, un cubo, una casa a escala o un poliedro estrellado puntiagudo, es necesario que sepamos recortar y ensamblar piezas de los tamaños correctos. Esta es una de las razones por las que la geometría básica (medición de ángulos, rectas paralelas, etc.) aún es indispensable. Construir modelos, en este sentido muy concreto, es una de las mejores maneras de unificar la teoría y la práctica (ver figura 2).

La experimentación manual es esencial. Por ejemplo, cuando hacemos un cubo con nuestras manos se obtiene un conocimiento mucho más profundo de sus propiedades métricas, combinatorias y de estabilidad que si nos limitamos a mirarlo. Si en lugar de usar cuadrados de cartón hacemos el cubo con popotes de plástico pegados en bolitas de cera de Campeche o en malvaviscos, el cubo no será rígido. Si bien menos elegante, el cubo tambaleante no es un "mal" modelo. Por el contrario, es útil porque enseña algo acerca de la rigidez y la flexibilidad. También enseña algo acerca de las formas en las que el cubo puede transformarse pero sin perder su estructura combinatoria.

FIGURA 2. El eminente geómetra H.S.M. Coxeter (1998) estudiando un modelo. Coxeter ha dedicado su vida a descubrir los patrones presentes en las formas.

El estudio de la forma es divertido. Los estudiantes disfrutan trabajar con formas, como todos lo hacemos. En la enseñanza de la forma, particularmente en un ambiente de taller, no es probable que un profesor se encuentre la falta de motivación o la resistencia que en ocasiones surge en los cursos de geometría. Una manera efectiva de responder al cuestionamiento del valor educativo de la exploración de la forma es hacer del laboratorio de formas una casa abierta para todos, para que aquellos que dudan puedan convertirse involucrándose con los propios materiales.

El estudio de la forma es abierto. En una época de cambios acelerados, el estudio de la forma facilita las estrategias de aprendizaje abiertas. Así como la supercomputadora está cambiando los métodos de investigación, así las computadoras ordinarias están proporcionando imágenes que la mayoría de nosotros no hubiéramos podido imaginar hace una década.

Muchos profesores dicen que el software de computadora ha cambiado por completo la manera en que enseñan. Ya no sienten que deben tener todas las respuestas; más bien, se vuelven compañeros de los estudiantes en la exploración de las propiedades de la forma. Estos profesores son muy entusiastas acerca de su nueva manera de enseñar. Tanto su entusiasmo como la nueva "pedagogía del compañerismo" pueden estimularse mediante planes de estudio imaginativos que planteen la exploración de la forma a lo largo del plan de estudios completo. (Steen, 1998)

II.5. El Concepto de Variación en el programa de matemáticas I del Plan de Estudios Actualizado (PEA) del Colegio de Ciencias y Humanidades.

(Programas de estudio, 1996)

En esta sección se hace referencia del Concepto de Variación en el currículum escolar. Dicho concepto se encuentra contenido en la Primera Unidad del curso de Matemáticas I, del Plan de Estudios Actualizado del Colegio de Ciencias y Humanidades (PEA). Semestre en el cual se inicia con un desarrollo de conocimientos que irá gradualmente ensanchándose en extensión y complejidad, hasta llegar al quinto y sexto semestre con los temas del Cálculo Diferencial e Integral.

Debido a su importancia, en el estudio de las matemáticas dicho concepto ocupa un importante lugar de la enseñanza en los diferentes niveles escolares, por tal razón esta enseñanza se mantiene a lo largo de todo el ciclo del bachillerato.

(Programas de estudio, Julio 1996).

También se sabe, que uno de los propósitos fundamentales del PEA es la formación de los alumnos, para que estos sean capaces de aprender a aprender y que adquieran los conocimientos matemáticos básicos, propios de cada uno de los cursos del bachillerato del Colegio y hacer que puedan aspirar a cursar estudios superiores exitosamente.

En seguida se hace una breve descripción del desarrollo del concepto de variación que se imparte en el primer semestre del colegio de Ciencias y Humanidades.

Se inicia por saber lo que significa la palabra variación:
Variación es la acción de variar, cambiar. En matemáticas significa, cambio de valor de una cantidad o de una magnitud.

(Pequeño Diccionario Larousse 1992 pag. 1051)

Actualmente, con el avance tecnológico de las computadoras han surgido otras ramas de las matemáticas a las cuales se les designa como matemáticas del cambio, donde estudian los sistemas dinámicos como los fractales o los atractores como los de Lorenz, de Ueda, de Rössler, etc.

(Stewart,I. 1995)

Desde el punto de vista de la matemática La Variación puede ser Directa o Indirecta de acuerdo a la relación de las variables.
Cuando los valores de una variable **x** son proporcionales a los de otra variable **y**, se tiene una ley de Variación Lineal Proporcional Directa. Si tales valores son Inversamente Proporcionales, la Variación es Indirecta.

(Zaragoza, R.J.G. 2000 p.14)

En otras palabras, se puede decir que, cada ***y*** varía directamente en función de **x**, & la constante de variación es positiva, las variables ***x*** & ***y*** crecen o decrecen juntas. Hay otros casos en los que una variable aumenta y la otra disminuye, a esto se le llama Variación Inversa.

Entonces se puede decir, que la variación es una relación funcional porque $y = k \bullet x$ define a y como función de x. Cuando $y = \frac{k}{x}$, y varía inversamente a x, entonces x tiene una variación inversa.

(Sobel, M.; Lernel, N. 1996-pag.210).

Para esto es necesario que el profesor haga énfasis en los programas, enfoques, métodos y temas e incluya en el plan de estudios el empleo de las computadoras, el uso de paquetes computacionales necesarios y adecuados para la enseñanza y el aprendizaje de los alumnos.

(Zaragoza, R.J.G. 1997 pag.66-69).

Los conceptos anteriores nos permitirán realizar una investigación de tipo experimental, la cual nos proporcionará información de los conocimientos previos que tienen los alumnos con los cuales interpretan y resuelven un problema dado, como la construcción de la caja de máximo volumen; esta información es importante para establecer los puentes cognitivos que menciona Ausubel (1997, p 115) para hacer significativo el conocimiento del estudiante.

El informe estadístico de carácter cuantitativo que se obtendrá de esta investigación será importante, como también lo será el análisis cualitativo como se ha descrito en los comentarios anteriores de la forma en que los estudiantes responden, donde se tratará de encontrar una lógica a sus respuestas con el propósito de ver si éstas presentan patrones o regularidades para ser tomadas en cuenta para la enseñanza de las matemáticas.

En el contexto de la simulación se tiene contemplado el desarrollo de actividades que permitan al estudiante utilizar la computadora como un laboratorio donde pueda experimentar e interactuar en los diferentes registros (Duval 1998) identificando las variables del problema, percatándose así mismo de las relaciones que guardan entre ellas y de los efectos que se tiene al modificarlas, para ello se diseñó un ambiente computacional, el cual se describe a continuación.

II.6. Simulación de las operaciones con el apoyo de la computadora en diferentes registros semióticos de representación.

En la justificación del presente proyecto se puso de manifiesto la importancia que han adquirido en la actualidad las calculadoras graficadoras y en especial la computadora en la enseñanza y la investigación en las diferentes áreas de las ciencias, en particular en el campo de las matemáticas

> *La simulación de fenómenos naturales con el uso de la computadora hace de esta última un elemento importante en la educación. El énfasis que se le ha dado al diseño de actividades con relación a fenómenos físicos para el desarrollo de conceptos en las últimas décadas, se ha visto impulsado con la creación de software en donde se simula un fenómeno. El estudiante, en este ambiente, incluyendo lápiz y papel, está en posibilidades de reflexionar y matematizar ante el fenómeno. A través de la simulación, se puede ir construyendo un puente entre ideas intuitivas y conceptos formales* (Hitt, F. 1994, pág. 1).

En el marco conceptual se menciona la importancia que da Duval (1998) a la construcción de varios registros de representación semiótica para la comprensión y el aprendizaje conceptual. Así, aprovechando los recursos que proporciona la computadora se simularon diversos registros semióticos para la solución del problema que se mencionó en el capítulo I y que dio lugar a la presente investigación.

Es nuestra creencia que la visualización de la forma de la caja y la construcción de diversos registros permitirán plantear diferentes situaciones didácticas encaminadas a establecer los puentes cognitivos que menciona

Ausubel (1997 p.120), logran que el aprendizaje sea una actividad significativa relacionando el conocimiento nuevo con el que ya posee el estudiante.

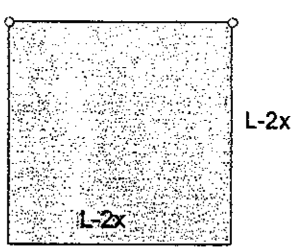
Se construyeron diferentes objetos en la computadora con el programa Geómetra, con la intención de simular una serie de acciones que dieran lugar a la realización de las operaciones para promover la articulación de diferentes registros semióticos de representación.

Para conseguir este objetivo se continuó con el problema de la caja, el cual se retoma en seguida:

Determinar las dimensiones de los cuadrados de las esquinas que se deben de cortar, de una lámina cuadrada de 13 cm de lado, para construir una caja de base cuadrada sin tapa, que tenga volumen máximo.

En el ambiente computacional que se elaboró para la simulación se construyeron los siguientes objetos:

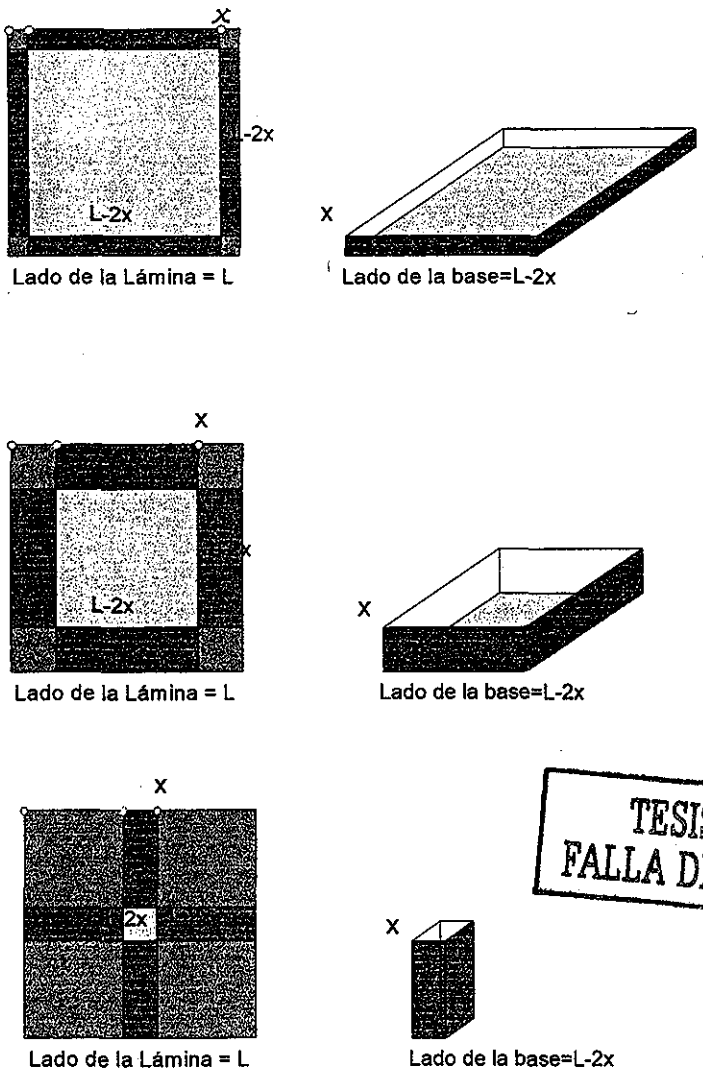
- El dibujo de un cuadrado para construir la caja con la alternativa de modificar el tamaño (figura 1).



Lado de la Lámina = L

Figura 3

- Cuadrados en las esquinas de la figura anterior para simular el corte de éstos, originando la magnitud de la altura de la caja (figuras 4).



Figuras 4

Aquí el alumno puede realizar el corte en la lámina mediante el movimiento de un punto x, que aparece en la esquina de la misma, dibujándose al lado y en forma simultánea la caja que se construye con el recorte propuesto al mover x (el punto x se desplaza moviéndolo con el puntero o "Mouse").

- También se puede visualizar en forma simultánea y en otra ventana adyacente los diversos registros numéricos que al interactuar en forma dinámica proporcionen: las medidas de la longitud de la lámina, el área de la base, la altura (corte de las esquinas de la lámina) de la caja, y el volumen (figura 5) de la caja que se construye con cada corte.
- Construcción de registros numéricos que también en forma dinámica interactúen proporcionando las medidas de la longitud de la lámina, el área de la base y la altura (corte de las esquinas de la lámina) de la caja, así como el volumen (figura 5).

Datos

Lado de la lámina = 13.0 cm

Lado del corte x = 4.0 cm

Lado de la base = 4.9 cm

Área GDHI = 24.3 cm^2

volumen=98.21

Figura 5

- Se proporciona además, una tabla, que puede retener valores de los registros anteriores que se consideren de interés (figura 6).

Tabla de valores retenidos:

Lado del corte x	4.03	3.46	5.05	6.11
Volumen v(x)	96.90	128.50	42.96	3.91

Figura 6

- Es posible también visualizar un sistema cartesiano con la gráfica correspondiente a la función del volumen de la caja (figura 7) indicando en cada punto de la gráfica el volumen obtenido correspondiente al corte dado.

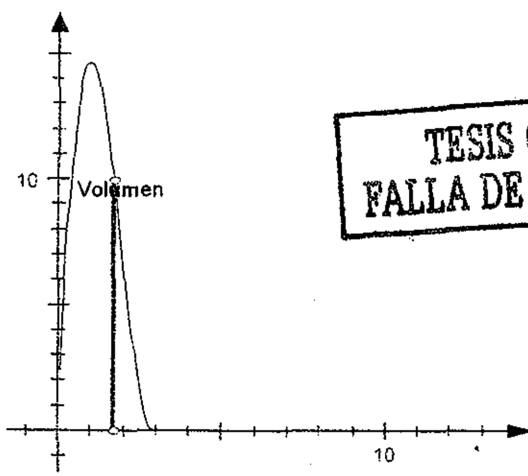


Figura 7

Capítulo III

Marco Conceptual.

El objetivo de este trabajo de investigación es explorar el concepto de variación en el contexto de volumen en un problema de máximos y mínimos mediados por las operaciones concretas y por la computadora a través de la Geometría Dinámica.

Para ello se toman en cuenta conceptos y comentarios de investigadores representantes de algunas teorías del conocimiento y de la didáctica como Piaget (1980), Vygotsky (1985), Ausubel (1997), Aebli (1995), Duval (1998), etc., los cuales han permitido establecer el marco conceptual para la investigación del problema planteado en la presente tesis.

La investigación se enfoca sobre dos ejes principales que son las operaciones concretas o efectivas como las llama Piaget (1980) y la simulación de estas en la computadora mediante la Geometría Dinámica sobre el concepto de variación.

De esta forma, se inicia con la descripción de algunos de los problemas que se presentan en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, como la improvisación, que en la enseñanza da lugar en la mayoría de las veces a que el docente no tenga claro qué didáctica emplear al enseñar las matemáticas y por ello en general, repite el proceso de enseñanza al que él mismo fue sujeto, y que en una gran parte sigue el proceso de lo que llamamos *enseñanza tradicional o discursiva* (Aebli, 1995).

Sin embargo existen numerosas reflexiones (Aebli, 1995, Págs. 327-332. Ausubel, 1997, págs. 23-45) que corroboran lo ineficaz de la enseñanza tradicional.

Así, el profesor al desarrollar un tema determinado en clase realiza tareas concretas, emplea métodos específicos porque tiene la convicción de que funcionan, pero por lo general, tales actividades están basadas en su propia experiencia e intuición, las cuales están limitadas y no dan respuesta a los procesos que están inmersos en el aprendizaje.

De esta manera, es preciso que el docente tenga en cuenta las diferentes teorías del aprendizaje para lograr el objetivo de la enseñanza, como lo señala Child (1986).

> *La innovación y la especulación en el aprendizaje tienen más probabilidades de triunfar cuando están fundadas por sólidos marcos teóricos".*

Resulta fundamental, para un profesor contar con una teoría psicológica que le permita interpretar, y evaluar el proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Esto permitiría al docente proponer planteamientos didácticos que mejoren el aprendizaje del estudiante y a la vez le dan la posibilidad de evaluar de manera objetiva el resultado de su enseñanza.

Es importante tener en cuenta las consideraciones anteriores para no caer en el empirismo y la falta de apoyos teóricos.

Para tener una mejor comprensión del marco conceptual que se utilizará, enseguida se mencionan algunos aspectos de dichas teorías y su relación con la el concepto de **variación**.

III.1. Parte Psicológica

Para Piaget es muy importante promover actividades que desarrollen un sistema operatorio que nos lleven a estructuras cada vez más completas y que permitan el manejo y comprensión de conceptos matemáticos cada vez más complejos.

> *El resultado más claro de nuestras investigaciones en el campo de la psicología de la inteligencia, es que las estructuras e incluso las más necesarias, en el espíritu adulto, tales como las estructuras lógico-matemáticas, no son imitaciones en el niño: se van construyendo poco a poco* (Piaget, 1980. p. 215).

Así pues, el individuo debe construir su conocimiento a partir de su propia experiencia. Sin embargo, este propósito es sólo el inicio, el paso siguiente consiste en la creación de los medios concretos que permitan alcanzar ese objetivo. Es necesario promover un marco didáctico que promueva nuevas estructuras cognitivas en el estudiante que le permitan el reconocimiento y comprensión de los conceptos matemáticos.

Por otro lado, la escuela activa sostiene que el conocimiento no es una copia de la realidad, como lo sostenía la escuela tradicional, sino una construcción del ser humano a través de la acción.

La escuela activa mediante sus representantes: Lay, De Wey, Decroly, Kerschensteiner etc. notaron la importancia que tiene para el aprendizaje, que el individuo efectué acciones concretas (que posteriormente retoma Piaget como acciones efectivas) para la adquisición de conceptos o nociones que se pretenden enseñar (Aebli, *1958* p. 51):

A parte de la acción otro de los conceptos fundamentales que estarán presentes en el proyecto es el de esquema que es el instrumento del cual se vale la persona para construir su conocimiento.

De esta manera, la construcción que realizamos en casi todos los contextos en los que se desarrolla nuestra actividad depende sobretodo de dos aspectos a saber:

- De la representación inicial que tengamos de la nueva información.
- De la actividad interna y/o externa que desarrollemos al respecto, utilizando los esquemas con que se cuenta.

El término esquema se considera en este proyecto como lo define Carretero (1985):

Un esquema es una representación de una situación concreta o de un concepto que permite manejarlo internamente y enfrentarse a situaciones iguales o parecidas en la realidad. (Carretero, 1985, Págs. 21 y 22).

Consideremos un problema de tipo escolar en el que pueda entenderse mejor esta noción de esquema. Por ejemplo, el que consiste en determinar a qué combinación de causas se debe la caída libre de un cuerpo, tanto el alumno de siete años como el de doce manipularán los elementos del problema y obtendrán determinados resultados, sin embargo mientras que el primero de ellos sólo realizará clasificaciones de elementos con los datos que obtiene, el segundo verá en esos mismos datos comprobación de determinadas hipótesis que se formuló al respecto.

De este modo los esquemas son comparables a las herramientas, es decir, son instrumentos específicos que por regla general sirven para una función muy determinada y se adaptan a ella y no a otra.

Entonces, podemos hacer una analogía de un esquema con cualquier trabajo mecánico. Por ejemplo, si se tiene que colocar un tornillo de una determinada dimensión, resultará imprescindible un determinado tipo de destornillador, si no se tiene en el almacén de herramientas se tendrá que sustituir por algún otro instrumento que pueda realizar la misma función en forma aproximada, esta acción vendría a ubicarse en la psicología de la inteligencia de Piaget, en la aplicación de la propiedad asociativa de la operación. De la misma manera, para entender la mayoría de las situaciones de la vida cotidiana se tiene que tener una representación de los diferentes elementos que están presentes.

Así, en el contexto matemático se podría ejemplificar lo anterior con el siguiente problema:

Obtener los máximos y/o mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 3x$.

Para promover la construcción del conocimiento por medio de los esquemas que ya posee el estudiante y teniendo en cuenta que dicho problema se presenta en un curso de cálculo diferencial en el que han cubierto los temas conducentes, se podrían plantear en primer término las siguientes acciones:

- Dar el dominio de f(x)
- Calcular los límites a $-\infty$ y $+\infty$
- Calcular la 1ª derivada de f(x)
- Dar los intervalos de monotonía de f(x)
- Con los datos anteriores hacer un bosquejo de la gráfica de f(x)
- Señalar y calcular los puntos máximos y mínimos locales de f(x)

Por otra parte, en forma equivalente se pueden plantear las siguientes acciones.

- Con el criterio de la primera derivada encontrar los puntos críticos de f(x).

- Con el criterio de la segunda derivada determinar los máximos y mínimos locales de f(x)

Con lo anterior, se pueden construir dos o más esquemas o formas de obtener los puntos máximos y/o mínimos de una función, esta característica de poder utilizar distintos esquemas para solucionar un problema se conoce en la psicología genética como "asociatividad"

Los esquemas pueden ser desde muy simples hasta muy complejos, muy grandes a muy especializados. Desde luego hay esquemas que pueden servir para muchas funciones, mientras otros sólo sirven para actividades muy específicas.

Uno de los propósitos de este trabajo de tesis es investigar los esquemas con los cuales los estudiantes interpretan el concepto de variación en el contexto de las operaciones efectivas y en el de simulación con la computadora donde se utiliza un programa de Geometría Dinámica.

Por otro lado, el estudiante posee una serie de esquemas bien definidos que resultan esenciales en su comprensión de la realidad, sin olvidar que es su propia concepción y, que puede ser una concepción errónea y que muchas de las veces dificulta la enseñanza de conceptos matemáticos que requieren a su vez de conceptos anteriores.

Es frecuente en matemáticas que los estudiantes tengan o se formen una mala interpretación o concepción de hechos matemáticos (Tall y Vinner, 1981, Dreyfus y Vinner 1989) sin embargo con ellos interpretan la realidad, entonces ¿cómo se modifican los esquemas?, es decir, ¿cómo pasamos de una interpretación incorrecta a una correcta?. Esto se podría lograr al poner en contradicción dichos esquemas, esto es, el profesor puede plantear diferentes situaciones didácticas encaminadas a introducir nuevos conceptos y contradecir las ideas de los alumnos, favoreciendo el conflicto cognitivo y con ello favorecer el aprendizaje.

Otro aspecto básico que se toma en cuenta en este trabajo, es el social, este es muy importante para el desarrollo cognitivo y es en este campo donde Vygotsky (1985) realizó una de sus mayores contribuciones al concebir al individuo como un ser eminentemente social. En este sentido para nosotros es esencial que al realizar los problemas planteados los estudiantes lo hagan en colaboración.

La contribución de Vygotsky (1985) ha significado que el aprendizaje no sea considerado como una actividad individual, sino más bien de colaboración. Además en la última década se han desarrollado numerosas investigaciones que muestran la importancia de la interacción social para el aprendizaje.

Considerando lo anterior, se ha comprobado que el estudiante aprende en forma más eficaz cuando lo hace en un contexto de colaboración e intercambio con sus compañeros, igualmente se han precisado algunos mecanismos de carácter social que estimulan y favorecen el aprendizaje, como son las discusiones en grupo y el poder de la argumentación en la discrepancia entre los alumnos que poseen distintos grados de conocimientos sobre un tema.

Después de lo anterior nos hacemos la siguiente pregunta ¿cómo hacer significativo el aprendizaje?

Uno de los investigadores en el campo educativo que más ha influido es **Ausubel**, cuya aportación fundamental ha consistido en la concepción de que el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y dicha significatividad está directamente estructurada con la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el estudiante.

La crítica fundamental de **Ausubel** (1997) a la enseñanza tradicional reside en la idea de que el aprendizaje resulta muy poco eficaz si consiste simplemente en la repetición mecánica de elementos que el alumno no puede estructurar formando un todo relacionado. Esto sólo será posible sí el estudiante utiliza los conocimientos que ya posee, aunque éstos no sean totalmente correctos.

Una visión de este tipo no sólo supone una concepción diferente sobre la formación del conocimiento, sino también una formulación distinta de los objetivos de la enseñanza.

Para Ausubel, aprender es sinónimo de comprender. Por ello lo que se comprenda será lo que se aprende y se recordará mejor, porque quedará integrado en nuestra estructura de conocimientos.

Así la idea central de Ausubel la resume en las siguientes palabras:

Si tuviera que reducir toda la psicología educativa a un solo principio enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia (Ausubel, et al., 1997 Pág. 1)

Entonces, resulta fundamental para el profesor no sólo conocer las representaciones que poseen los alumnos sobre lo que se les va a enseñar, sino también analizar el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen. De esta manera no es tan importante el producto final que emite el alumno como el proceso que le lleva a dar una determinada respuesta, esto puede aplicarse a las situaciones de examen o de evaluación, a menudo los profesores sólo prestamos atención a las respuestas correctas de los estudiantes, para otorgar una calificación, sin embargo, no consideramos los errores que son precisamente los que nos informan sobre cómo se está reelaborando el conocimiento que ya se posee a partir de la nueva información que se recibe.

Efectivamente, la mayoría de los profesores sabemos que los errores que cometen los alumnos tienen una clara regularidad y se deben a procesos de comprensión inadecuada que se suceden curso tras curso, y se hace muy poco o nada por poner remedio.

De todos los conceptos que propone Ausubel, quizá el más conocido es el que se refiere a los denominados organizadores previos. Estos son presentaciones que hace el profesor con el fin de que sirvan al estudiante para establecer relaciones adecuadas entre el conocimiento nuevo y el que ya posee.

En palabras de Ausubel:

> *Para mejorar la facilitación proactiva implica el uso de materiales introductorios (organizadores) apropiadamente pertinentes e inclusivos que sean, al mismo tiempo, todo lo claros y estables que sea posible. Estos organizadores normalmente se presentan antes que el material de aprendizaje en sí y se emplean para facilitar el establecimiento de una actitud favorable hacía el aprendizaje significativo. Los organizadores previos contribuyen a que el alumno reconozca que los elementos de los materiales de aprendizaje nuevos pueden aprenderse significativamente relacionándolos con los aspectos específicamente pertinentes de la estructura cognoscitiva existente (Ausubel, et al., 1997 Pág. 157)*

Pensando en ello, se diseñaron hojas de trabajo que los alumnos tendrán previamente a la realización de la exploración del concepto de variación en la computadora donde estos puentes cognitivos que a través de los diferentes registros de representación permitan pasar de un conocimiento menos elaborado o incorrecto a un conocimiento más elaborado. Dichos organizadores previos tienen como finalidad facilitar la enseñanza receptivo-significativa que defiende Ausubel.

Es decir, esta postura argumenta que la exposición organizada de contenidos puede ser un instrumento bastante eficaz para conseguir una comprensión adecuada por parte de los alumnos. La mayoría de los profesores creemos estar utilizando este proceso al aplicar el método mayéutico, pero generalmente no se toman en cuenta los conocimientos previos de los alumnos ni se estructura una didáctica adecuada con el consiguiente y evidente fracaso escolar señalado por los altos índices de reprobación que existen en la materia de matemáticas.

La concepción de Ausubel concuerda con la de Piaget en cuanto a que es imprescindible tener en cuenta los conocimientos que posee el alumno. Pero su teoría también ha tenido el mérito de mostrar que la transmisión de conocimiento por parte del profesor también puede ser un modelo adecuado y eficaz de producir aprendizaje, siempre y cuando tenga en cuenta los conocimientos previos del alumno y su capacidad de comprensión.

III.2. Operaciones efectivas.

La necesidad de la realización de las operaciones concretas o efectivas para la interiorización y asimilación de un concepto matemático se consideran fundamentales en esta investigación y al respecto Aebli nos menciona:

> *Las desventajas de la enseñanza que consiste sólo de demostraciones y definiciones se agravan porque no es posible verificar la participación de los alumnos sino muy limitadamente (Aebli, 1958 p. 61).*

Y continúa:

> *Se nos presenta así un problema didáctico muy preciso: debemos hallar formas de realizar operaciones que sean más fáciles e interesantes que la imitación interior de las demostraciones del maestro. A modo de anticipo, diremos que la búsqueda de las operaciones mediante*

manipulaciones efectivas de experiencias concretas, podrían ser una solución para este problema (Aebli, 1958 p. 61).

Pero nos cuestionamos ¿hasta qué estadío del desarrollo de la inteligencia o hasta qué nivel de escolaridad del estudiante el desarrollo de las operaciones efectivas sigue siendo significativo?

En este aspecto nos dice:

*En todos los niveles de la educación, e incluso el universitario, aún los más brillantes necesitan experiencias significativas a un nivel concreto para poder resolver los problemas en el plano del razonamiento formal (*Churchill, E., 1988, Pág. 31*).*

Así, teniendo en cuenta que el conocimiento no es una copia de la realidad como lo sostenía la escuela tradicional, sino una construcción del ser humano a través de la acción como lo plantea la escuela activa y se menciona enseguida.

*La escuela activa mediante sus representantes: Lay, De Wey, Decroly, Kerschensteiner etc. notaron la importancia que tiene para el aprendizaje, que el individuo efectué acciones concretas (que posteriormente retoma Piaget como acciones efectivas) para la adquisición de conceptos o nociones que se pretenden enseñar (*Aebli, 1995, Págs. 327-332)

De acuerdo a esto, y tomando en cuenta que las operaciones efectivas son fundamentales para la construcción cognitiva de los estudiantes, se desarrolló una investigación experimental de un estudio preliminar que más adelante se menciona.

Piaget (1997) describe en el libro *Seis estudios de psicología* las limitaciones de las operaciones concretas y la importancia que tienen las operaciones formales diciendo:

¿Cuáles son las condiciones de construcción del pensamiento formal? Se trata, no ya sólo de aplicar unas operaciones a unos objetos, o, dicho de otro modo, de ejecutar con el pensamiento unas acciones posibles sobre dichos objetos, sino de "reflexionar" estas operaciones independientemente de los objetos y de reemplazar a éstos por simples proposiciones. Esta "reflexión" es, por consiguiente, como un pensamiento de segundo grado: El pensamiento concreto es la representación de una acción posible, y el pensamiento formal la representación de una representación de acciones posibles. No es, pues, sorprendente que el sistema de las operaciones concretas tengan que perfeccionarse. (Piaget 1980, Pág. 97 y 98).

Así, también encontramos que:

Las operaciones formales aportan al pensamiento un poder completamente nuevo, que equivale a desligarlo y liberarlo de lo real para permitirle edificar a voluntad reflexiones y teorías. La inteligencia formal marca, pues, el primer vuelo del pensamiento (Ibídem, Pág. 118).

Y continúa diciendo:

Las operaciones lógico-matemáticas derivan de las acciones mismas, ya que son el producto de una ***abstracción****, y no a partir de los objetos (Ibídem, Págs. 117 y 118).*

III.3. La computadora como herramienta y como un laboratorio.

Una parte importante de la propuesta reside en el hecho de incorporar a la microcomputadora y/o calculadora en el aula. La incorporación que se propone se realizará mediante la elaboración de prácticas que simulen problemas físicos como la construcción de cajas de volumen máximo, en donde el alumno podrá interactuar con el sistema, visualizando en forma simultánea los diversos registros de representación semiótica asociados, con el propósito de explorar el concepto de variación en un problema de optimización.

También se pretende plantear problemas en donde los diversos sistemas puedan ayudar en la parte de revisión de los ejercicios propuestos.

Para revisar lo anterior hemos seleccionado los programas Derive y Geómetra (The Geometer's Sketchpad)

> *Conforme el siglo XX llega a su fin y se inicia el nuevo milenio, emerge un nuevo estilo de matemáticas, un estilo cuyo rasgo distintivo es la variedad. Las matemáticas se desarrollan de nueva cuenta en estrecha conjunción con sus aplicaciones en las ciencias, físicas, biológicas, conductuales y sociales. Gran parte de las matemáticas son inspiradas por experimentos de computadora...* (Steen, 1998, Pág. 196).

En efecto, la aparición de programas de geometría dinámica como el Cabri y Geómetra nos permiten realizar diseños para simular la ejecución de acciones sobre las figuras que representan los objetos, donde se pueden articular varios registros abriendo un camino de gran riqueza para el desarrollo de los procesos de Enseñanza-Aprendizaje en el campo de las matemáticas.

La importancia que tiene construir varios símbolos para un mismo concepto nos lo hace ver Skemp (1993) en su libro "la Psicología de las Matemáticas", a los cuales Duval los designa como registros de representación semiótica, y en un estudio más detallado menciona la importancia que estos registros tienen para la comprensión y el aprendizaje conceptual. Al respecto Duval menciona:

> *Frecuentemente se hace énfasis en que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas. Pero muy pocos estudios se centran en la operación de cambiar la forma semiótica mediante la cual se representa un conocimiento. Sin embargo, esta es una operación cognitiva básica irreducible a cualquier patrón de procesamiento, parece estar muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las*

dificultades del aprendizaje conceptual. Esto causa obstáculos que sólo la coordinación de varios registros de formas semióticas ayuda a remontarlos. (Duval, R. 1998, Págs. 173-201).

Así, también uno de los propósitos como se ha mencionado en el presente trabajo es el de aprovechar las nuevas tecnologías que apoyen la investigación y el aprendizaje, en el que los estudiantes exploren, experimenten y construyan su conocimiento en el mayor número de registro posibles, permitiendo con ello interiorizar y asimilar los conceptos matemáticos en juego.

Capítulo IV

Metodología de la Investigación.

En este capítulo describiré la metodología y el reporte de la investigación efectuada en el aula y en uno de los laboratorios de cómputo del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan (Grupo 613 de quinto semestre del CCHN-UNAM) así como en la sala modelo del Ciencias Básicas de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del IPN (Grupos 1AV1-1AV2 de primer semestre de la carrera de Lic. en Administración industrial de la UPIICSA - IPN).

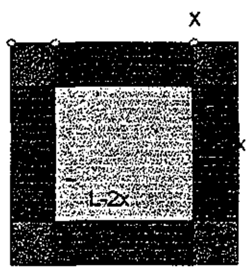
El problema a investigar se planteó en el capítulo I, el cual se retoma enseguida:

¿Cómo perciben los estudiantes el concepto de variación de volumen en un problema de optimización en los contextos de las operaciones concretas y en la simulación de estas en la geometría Dinámica?

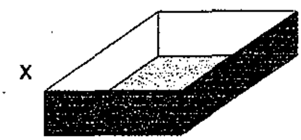
Se buscó un problema de interés para el alumno en el que los conceptos de máximos y mínimos, se pudieran desarrollar mediante actividades que dieran lugar a la formación de operaciones concretas, esto con el propósito de percibir las variables y las relaciones que guardan en la integración del modelo matemático y fundamentalmente la variación de la función volumen.

El problema de trabajo elegido fue:

Construir una caja de base cuadrada sin tapa que contenga el máximo volumen recortando un cuadrado en cada esquina de una lámina (de cartulina) cuadrada de 13 cm de lado.



Lado de la Lámina = L



Lado de la base=L-2x

Figura 8

Otro propósito de este estudio fue identificar que procedimientos y esquemas conceptuales utilizan los estudiantes al resolver el problema planteado.

Así, el problema se desglosó en los siguientes subproblemas y ejercicios como actividades parciales.

Construir cajas de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cm de altura.

- Identificar y clasificar las variables que subyacen en el problema en dependientes e independientes.
- Identificar si el estudiante reconoce la variación del volumen al comparar las cajas construidas.
- Verificar si el estudiante posee el concepto de máximo y mínimo volumen sin utilizar derivadas.
- Calcular el volumen de cada una de las cajas anteriores.
- Construir una tabla con los valores anteriores del corte contra el volumen.
- Graficar los valores anteriores en un sistema cartesiano.
- Construir el modelo matemático de la función volumen.

- Plantear la necesidad de utilizar los criterios de la primera y segunda derivada para obtener los puntos máximos y mínimos de la función volumen.

El proyecto de solución del problema se llevó a cabo mediante un plan de acción en las etapas siguientes:

- Desarrollo de las operaciones efectivas o concretas (Piaget 1980).
- Desarrollo de las operaciones intelectuales.
- Simulación de las operaciones con el apoyo de la computadora en diferentes registros semióticos de representación, para promover la articulación.

Enseguida se describe el proceso realizado en cada una de las etapas.

Tomando en cuenta que las operaciones efectivas son fundamentales para la construcción cognitiva de los estudiantes, se desarrolló una investigación experimental de un estudio piloto del problema en dos etapas bajo la siguiente metodología:

IV.1. Primera etapa.

Se consideraron dos grupos, uno de nivel medio superior (grupo 613 del CCH-N), y otros de nivel superior de la carrera Lic. en Administración Industrial (1AV1 y 1AV2 de UPIICSA-IPN). Después se pidió a los estudiantes que construyeran cajas de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm y 6 cm de altura.

A cada uno de los grupos se les dotó del siguiente material:

- Seis cartulinas cuadradas de 13 cm de lado
- Una regla • Unas tijeras • Cinta adhesiva • Un cuestionario

Cuando terminaron se les pidió que contestaran el siguiente cuestionario (apéndice 2a):

Se hizo un estudio registrado en un video, de comentarios de los estudiantes durante el desarrollo del problema.

Esta exploración se hizo con el propósito de saber los conocimientos previos que los alumnos tienen de los conceptos que subyacen en el problema.

Cabe mencionar que los alumnos del grupo 613 del CCH-N estaban cursando la materia de Cálculo Diferencial, la cual se imparte en el quinto semestre (nivel medio superior), y los de la secuencia (1AV1 y 1AV2) de UPIICSA-IPN que también estaban cursando dicha materia pero en el primer semestre (nivel superior) de la carrera de Lic. en Administración Industrial.

- A continuación se describen los resultados hasta esta parte de la investigación empezando con los estudiantes del grupo 613 del CCH-N.

Respecto a al pregunta 1 del cuestionario (se tiene variación de volumen o se mantiene constante):

El 83.8 % contestaron que si había variación en el volumen.

El 16.12 %, contestó que no se tenía variación del volumen.

Algunos de los argumentos que dieron los alumnos con respecto a la variación del volumen son:

- Si varía, porque calculando el volumen de las cajas, éste va presentando diferentes medidas, porque tanto su base como la altura es diferente en cada una.
- Todas las cajas tienen diferente volumen.
- Si varía, no se pero ya lo comprobé
- El volumen varía, porque la forma de las cajas son diferentes.
- No varia, porque la longitud de la lámina del cartoncillo es la misma.

- No varían, porque conforme aumenta de tamaño y se llenan de agua, es la misma cantidad aunque sean de distinto tamaño.

Para la pregunta número 2 (qué forma tienen las esquinas de la caja que se tiene que recortar):

El 90 %, contestaron que la forma de la esquina debe ser cuadrada.

El 9.6 %, contestó que la forma de la esquina es de forma triangular.

Algunos de los argumentos que dieron los alumnos fueron:

- La altura de la caja debe ser igual por un lado y otro, sino la caja estaría incompleta
- Debido a que la base de la caja es cuadrada y la lámina también, por lo tanto las esquinas a cortar deben ser cuadradas.
- El alumno que expresó que deberían ser triangulares, no dio ninguna argumentación.

Respecto a la pregunta # 3 del cuestionario (podrían ser las esquinas rectangulares).

- El 70.9 %, contestaron que las esquinas no podían ser de forma rectangular.
- El 29 %, contestó que las esquinas si podían ser rectangulares.

La argumentación que dieron algunos de los alumnos fueron:

- No podían ser rectangulares, ya que la base y la lámina son cuadradas.
- Si la caja no fuera cuadrada, por ejemplo que fuera rectangular, las esquinas quedarían rectangulares.
- Si las esquinas fueran rectangulares, a la caja le faltaría un pedazo.
- No pueden ser rectangulares, porque es la misma medida por ambos lados, así que siempre se forma un cuadrado.
- No pueden ser rectangulares porque no se formarían las cajitas.

- Si pueden ser rectangulares, ya que la altura esta determinada por la misma figura.
- Si puede ser rectangular, porque mientras más grande esta la caja, se va convirtiendo en un rectángulo.
- Si puede ser rectangular, si la base de la caja fuera rectangular.

Para la pregunta # 4 del cuestionario (varía el volumen de acuerdo a la altura de las cajas).

- El 87 % de los alumnos, contestó que el volumen de acuerdo a la altura de la caja si varia.
- El 12.9 %, dijo que no había variación del volumen de acuerdo a la altura de las cajas.

Las argumentaciones fuero las siguientes.

- Si aumenta el tamaño de la caja, aumenta el volumen.
- Si varía, porque no es la misma base por lo tanto el volumen no es el mismo.
- Si varía, porque entre más altura hay menos volumen.
- Primero empieza con un valor específico, después llega a un punto máximo de volumen y luego comienza a disminuir.
- No varía, porque la lámina es del mismo tamaño.
- No varía, porque en todas las cajas es el mismo volumen, ya que todas tienen la misma capacidad, para que entre la misma cantidad de líquido.

Para la pregunta # 5 (para qué valor de los proporcionados no es posible formar la caja), las respuestas fueron:

- El 96.7 %, respondieron que la altura era de 7 cm.
- El 3.2 %, contestó que x = 6.5 cm.

La argumentación que dieron los alumnos para esta pregunta fueron muy diversas, de entra las cuales se tiene:

- Para 7 cm, porque este rebasa el límite máximo de la base.
- De 7 cm, porque se necesitaría un cartón más grande, ya que con 13 cm no se cubren las medidas.

Para la pregunta # 6 del cuestionario (máximo valor que se puede cortar de las esquinas), se tiene:

- El 67.7 % respondió que x = 6 cm.
- El 6.9 % respondió que x = 6.9 cm.
- El 29 % respondió que x = 6.4 cm.

La argumentación de algunos alumnos fue:

- Para que la caja tenga una base cuadrada, debe ser de x = 6.4 cm.
- x debe ser de más de 6 cm, pero menos de 7 cm.

Para la pregunta # 7 del cuestionario (mínimo valor que se puede cortar de las esquinas), se tiene:

- El 54 %, contestaron que x = 1 cm.
- El 13 %, contestaron que x = 0.5 cm.
- El 16 %, contestaron que x = 1 mm.
- El 13 %, contestó que x = 0.1mm.
- El 3 %, contestó que de 3 a 5 mm.

Algunos de los argumentos que dieron los alumnos son:

- Debe ser mayor que cero, podría ser 0.00001 porque tendría la altura del tamaño del cuadrado que se cortara de la esquina.
- De 1 cm fue la menor que armamos, pero creo que puede ser mayor que cero cm.
- Para 1 mm, más pequeño sería muy difícil de recortar el cuadrado que se forma y casi sería imposible formar la caja.

- De 1 cm, porque si es más pequeño no se podría formar la caja y no se apreciaría su volumen.

Para la pregunta # 8 (cajas con el mismo volumen pero de diferente tamaño).

- El 54.8 %, respondió que ninguna.
- El 16 % , respondió que 6 cajas.
- El 3 %, respondió que 8 cajas.
- El 6.4 %, respondió que una infinidad de cajas.
- El 6.4 %, respondió que 3 cajas.
- El 3 %, respondió que 6 o más que no lleguen a 7.
- El 11.7 %, no respondió la pregunta.

La argumentación de algunos alumnos fue la siguiente:

- Las cajas se diferencian por su volumen, por lo cual no puede haber dos cajas diferentes con el mismo volumen.
- Una infinidad, debido a que del número 1 al 2 debe haber muchas, por decir, una caja cuya altura sea de 1.1, 1.5, 1.7, etc, hasta llegar a 2, así sucesivamente.
- Todas las cajas varían de acuerdo a su base y altura.
- Muchas, siempre y cuando no pasen de 6.4 cm.

Para la pregunta número 9 (qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja)

- El 71 %, consideraron que la altura.
- El 38 %, consideraron que la base.
- El 25.8 %, consideraron que la anchura.
- El 38.7 %, consideraron que el volumen.
- El 32 %, consideró que el área.
- El 6.5 %, consideró que el largo.

- El 6.5 %, consideró que ninguna.

Entre la argumentación para esta pregunta se tiene:

- Las variables son, la altura, la base y el largo, ya que estas pueden aumentar o disminuir (unas dependen de otras).
- Ninguna variable, porque todas las conocemos o podemos conocer.
- Las variables son: la altura, el ancho de la caja, su respectivo volumen y la base.

Las respuestas para la pregunta número 10 (qué variables consideras dependientes y cuales independientes), son:

Variables dependientes:	Variables independientes:
- La anchura 38 %	- La altura 25 %
- La altura 54 %	- La base 35 %
- El área 3 %	- El área 16 %
- El volumen 35 %	

De entre las argumentaciones para esta pregunta se tienen:

- La variable independiente es la altura, porque de ella dependen la anchura y el largo.
- Todas las variables son independientes, porque en este caso la altura depende del volumen.

Sobre la última pregunta # 11 (para qué valor de x se tiene volumen cero) se tienen las siguientes respuestas:

- x = 0 cm (El 48 %).
- x = 7 cm (El 29 %).
- x = 13 cm (El 3 %).

- $x = 6.5$ cm (El 3 %)
- El 6.4 %, contestó que, cuando la altura sea la mitad de la figura.

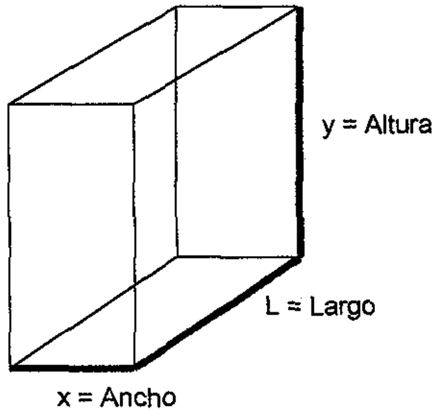
De entre los argumentos de los alumnos se tienen:

- Cuando $x = 7$, ya que no es posible construir la caja.
- $x = 6.5$, porque quedaría plana.
- Para $x = 0$, no se tendría una caja, solamente se tendría una base.
- Pienso que no llega a cero, se aproxima pero no es cero, sería límite cuando x tiende a cero.

De las preguntas del cuestionario y por el tipo de respuestas, considero que las preguntas 1, 4, 9, 10, para nuestra investigación son las que nos pueden proporcionar más información sobre la variación de la función volumen, de las diferentes cajas que se les dijo que construyeran.

Al analizar las respuestas que dieron los alumnos, cabe destacar que el 83 % consideró que si se tenía variación del volumen en las diferentes cajas construidas, y solamente el 16 % consideró que el volumen permanecía invariante.

Por otro lado, identificaron las variables que consideraron que se encontraban inmersas en la construcción de las cajas son las siguientes: La altura de la caja, el volumen, el área, la base, el ancho y el largo de la caja, inclusive uno de los alumnos dibujó una de las cajas, indicando dichas variables. (ver figura siguiente).



De entre las cuales consideraron Dependientes: la altura (54 %), el volumen (35 %), el área (3 %), y la anchura de la caja (38 %). Como variables Independientes consideraron: la base (35 %), el área (5 %), y la altura (25 %).

- Ahora se tendrán a continuación las respuestas que dieron los alumnos del grupo 1AV2 para el cuestionario apéndice 2c.

Desarrollo de las Operaciones Concretas (Efectivas) en un problema de Máximos y Mínimos.

Las respuestas de los alumnos para la pregunta # 1. Las variables inmersas en el problema son:

- El 44 % para la base de la caja
- El 11 % para la arista de la caja.
- El 19 % para el ancho de la caja.
- El 63 % para el volumen.
- El 37 % para el área del cuadrado.
- El 67 % para la altura.
- El 11 % para la capacidad de la caja.

- El 3.7 % respondió que la masa.
- El 3.7 % respondió que el tamaño de la caja.

Las respuestas que dieron los alumnos para la pregunta # 2. Las variables independientes son:

- Volumen: el 22 %
- Ancho: el 3.7 %
- Área de la base: el 30 %
- Altura: el 71 %
- Peso: el 7.5 %
- Ninguna: 3.7 %
- Masa: el 3.7 %

Las respuestas que dieron los alumnos para la pregunta # 3. Las variables dependientes son:

- Área: el 30 %
- Volumen: el 44 %
- Masa: 7.5 %
- Altura: el 30 %
- Base: el 30 %
- Ancho: el 3.7 %

Las respuestas que dieron los alumnos para la pregunta # 4. El volumen varía o se mantiene constante.

- No varía (se mantiene constante): el 56 %
- Si varía: el 44%

Para la pregunta # 5, ¿entre mayor es el material que se recorta en las esquinas, es menor el volumen de la caja construida?, las respuestas son:

- No es menor: el 59 %

- Si es menor: el 41 %

Para la pregunta # 6, ¿entre menor es el material que se recorta en las esquinas, es mayor el volumen de la caja construida?, las respuestas son:

- No es mayor: el 59 %
- Si es mayor: el 41 %

Para la pregunta # 7, ¿qué pasa con el área de la base si la altura de las cajas aumenta?, las respuestas son:

- El área de la base disminuye: el 81 %
- El área de la base es la misma: el 7.5 %
- No contestó la pregunta: el 11 %

Para la pregunta # 8, ¿qué pasa con la altura, si el área de la base de las cajas aumenta?, las respuestas son:

- La altura disminuye: el 70 %
- La altura aumenta: el 19 %
- No respondió la pregunta: el 11 %

En la pregunta # 9, ¿varía el volumen de acuerdo al área de la base de las cajas?, las respuestas son:

- No varia: el 49 %
- Si varia: el 41 %
- No respondieron la pregunta: el 11 %

Las respuestas para la pregunta # 10, el mínimo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja es:

- 1 cm: el 30 %
- 0.5 cm: el 14 %
- 6 cm: el 3.7 %
- Poco menos de 5 cm: el 3.7 %
- 1 mm: el 15 %
- 0.5 mm: el 11 %
- Infinito: el 7.5 %
- No respondió: el 11 %

- No existe un mínimo: el 3.7 %

Las respuestas para la pregunta # 11, el número de cajas que contengan el mismo volumen, pero diferente tamaño, que se puedan construir con las láminas dadas, son:

- 130 cajas: el 7.5 %
- 120 cajas: el 3.7 %
- 10 cajas: el 3.7 %
- 45 cajas: el 3.7 %
- 5 cajas: el 22 %
- 12 cajas: el 3.7 %
- Infinito número de cajas: 18.5 %
- 55 cajas: el 3.7 %
- 2 cajas: el 7.5 %
- ninguna caja: el 3.7 %
- 6 cajas: el 7.5 %
- No contestaron la pregunta: el 15 %

Ahora expresaré algunas de las argumentaciones que dieron los alumnos del grupo 1AV2 al resolver el cuestionario:

- Las variables independientes son las dimensiones de cada lámina.
- La variable independiente es la altura, ya que se construyeron diferentes alturas y esto nos puede dar diferentes resultados.
- La altura y la base son variables independientes, estas pueden adoptar cualquier valor, para dar un resultado al área o volumen.
- Todas las variables son dependientes.
- La base de la caja es la variable independiente, ya que es la que le da forma a la caja y no depende de las aristas ni del ancho.
- La base es la variable que depende de la altura.

- La altura de las cajas es la variable dependiente, ya que depende del tamaño de los cuadrados.
- *La dimensión de los cortes que se le hacen* a las láminas, son las variables dependientes, ya que según el corte de la lámina es la forma de la caja.
- Todas las variables son dependientes, porque dependen o se derivan de *una misma dimensión, que 13 cm.*
- El volumen en las diferentes cajas no varia, ya que la medida inicial de las láminas es la misma, 13 cm.
- Si varía el volumen en las diferentes cajas, porque si se llenan con agua el *contenido es diferente.*
- El volumen no es el mismo, porque a las cajas de 1 cm y de 5 cm no le entra la misma porción de agua.
- Yo pienso que el volumen se mantiene constante, porque al reducir la caja de un extremo, ésta tiende a hacer mayor en su altura, esto es, la cantidad que reduce al recortar el cuadrado hace aumentar la misma pero en altura.
- Si varia el volumen de las cajas, porque se recortó material y por lo tanto es menor el material, luego disminuye el volumen.
- El volumen no permanece constante, porque entre más altura, menos volumen.
- El volumen permanece constante en cada caja, ya que parten de la misma dimensión (área de 13 cm por lado).
- Varía el volumen en las diferentes cajas, por el tamaño.
- El volumen es el mismo, ya que únicamente varia la forma, pero se mantiene el mismo volumen de las cajas.
- El volumen no varía en las diferentes cajas, ya que las medidas de las láminas son las mismas, porque si la de 1 cm cortado es muy baja de altura, la de 5 cm con poca base es muy alta.

- El volumen no varía, porque lo que se les recorta es lo que tiene de altura.
- El volumen si varía en las cajas, porque entre menor material recortado y desperdiciado, mayor será el volumen obtenido por la caja.

Al analizar las respuestas de los alumnos (1AV2 UPIICSA de nivel superior), para este cuestionario, se observa un hecho que considero muy significativo, que solamente un 44 % consideró que sí había variación de volumen en las diferentes cajitas, a diferencia del 83 % de los alumnos del grupo 613 (CCH-N nivel bachillerato). Por otro lado el 56 % manifestó que el volumen permanecía invariante.

También identificaron las variables que consideraron inmersas en la construcción de las cajitas, siendo estas: la base de la caja, el ancho, la altura, el volumen, las aristas de la caja, el área de la base.

De entre las cuáles consideraron como Independientes, el volumen (22 %), el ancho (3.7 %), el área de la base (30 %), la altura (31 %), Ninguna (3:7 %). Como variables Dependientes, el área (30 %), el volumen (44%), la altura (30 %), la base (30 %), el ancho (3.7 %)

Ante estas respuestas se puso en duda que los alumnos tuvieran bien formalizado el concepto de volumen, y por consecuente se les hicieron entrevistas (preguntándoles directamente) las cuales fueron filmadas con el propósito de hacer un análisis de ellas.

En general, los alumnos consideraron que el volumen si variaba y el argumento fue el siguiente: *"El volumen varía debido a que la forma de las cajas cambian porque la altura de éstas también cambia".*

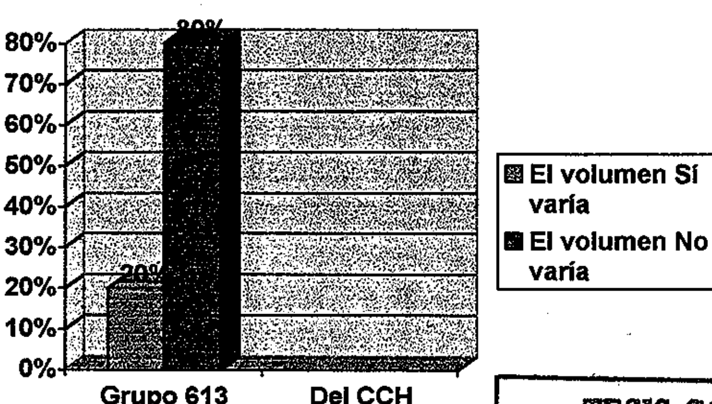
La argumentación que dieron los alumnos que expresaron que el volumen permanecía invariante fue: "El volumen no varía, porque al cambiar el área de la base, se compensa con el cambio de la altura ya que la longitud de la lámina de la cartulina, (13 cm por lado) es la misma en todas las cajas.

La gran mayoría de los alumnos identificaron dos variables, la base de la caja y su altura

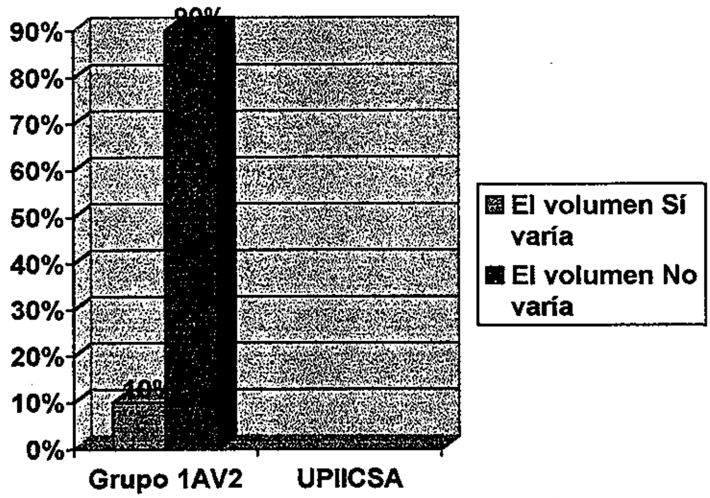
- Algunos respondiendo en la siguiente forma: *área de la base y la altura* y otros únicamente, *base y altura*
- El 80% identificó la variable dependiente como la base de la caja y la independiente como la altura.
- El 20% consideró la altura como la variable dependiente y la base como la independiente.

Hasta esta parte de la investigación ningún alumno consideró que el volumen pudiera ser una variable del problema.

- El 80% de los alumnos contestaron que el volumen no variaba y el 20% consideraron que sí había variación (ver gráficas 1 y 2).



Gráfica 1



Gráfica 2

Detalles importantes sobre el desarrollo en la solución del problema

Algunos alumnos reflexionaron sobre la forma de realizar los dobleces y los recortes de las esquinas de las cartulinas para construir las cajas, realizando un esquema del problema en hojas de sus cuadernos (ver figuras del Apéndice 1)

Al inicio preguntaron si los recortes de las esquinas de la cartulina podrían ser rectangulares. La respuesta llegó sola al hacer los trazos y los dobleces que dieron forma a la caja, dándose cuenta que éstos deberían ser cuadrados.

Los estudiantes utilizaron y seriaron las cajas para percibir las variables inmersas en el problema.

A pesar de comparar los tamaños de las cajas, un gran porcentaje de estudiantes mantuvieron la creencia de que el volumen se mantiene constante en todas ellas.

En el apéndice 1 se muestran algunas imágenes capturadas del vídeo.

Como una primera conclusión, se puede decir que los estudiantes se dejan guiar por sus intuiciones e interpretan erróneamente la variación de volumen a pesar del grado escolar en el que se encuentran.

Otra de las cosas que se tuvieron en la entrevista con los alumnos a pregunta directa, fue lo siguiente:

¿Por qué los alumnos no consideran al volumen como una variable al construir las diferentes cajas?

¿Por qué ante una pregunta directa los alumnos contestaron que el volumen permanece invariante en las diferentes cajas? Aun cuando un gran porcentaje de ellos había contestado en el cuestionario escrito, que sí se tenía variación del volumen en las diferentes cajas construidas.

En estos momentos, algunos alumnos les preguntaban a otros compañeros que "Cuál era la fórmula para calcular el volumen de la caja", y comenzaron a realizar operaciones para verificar si con los diferentes valores que le daban a los lados de cada una de las cajas, les daban diferentes resultados para el volumen.

Una posible respuesta y que se deriva de las observaciones es que los estudiantes separan el mundo real del mundo matemático. Es decir, dentro de un contexto matemático los estudiantes realizan operaciones, sin embargo no relacionan esto con el volumen de un problema concreto. Una posible respuesta se da en la didáctica de Cuevas, punto (3) en donde menciona

> *Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe de comprobar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo al problema planteado (Cuevas, A. 1999).*

De este modo, para que los estudiantes percibieran que el volumen sí variaba, se pensó en realizar los cálculos del volumen de cada caja, pero se estimó que esta forma salía del registro semiótico en el que realizaron las acciones por lo cual se consideró modificar sus esquemas de interpretación a través de acciones concretas con las cuales pudieran explorar la validez de sus hipótesis.

Por lo tanto, se les dotó de una cantidad determinada de azúcar para llenar las cajas con el propósito de que al vaciar los contenidos se pudieran comparar los diferentes volúmenes, y solamente por medio de esta acción ellos admitieron la variación del volumen.

Al hacer un análisis de las respuestas y las entrevistas nos percatamos que para la altura y la base de las cajas se tiene manera de medir estas variables, no así para el volumen donde no se tiene un patrón de medida, por lo que fue necesario contar con otros recursos que permitan percibir su variación como el realizado con el azúcar.

IV.2. Segunda etapa.

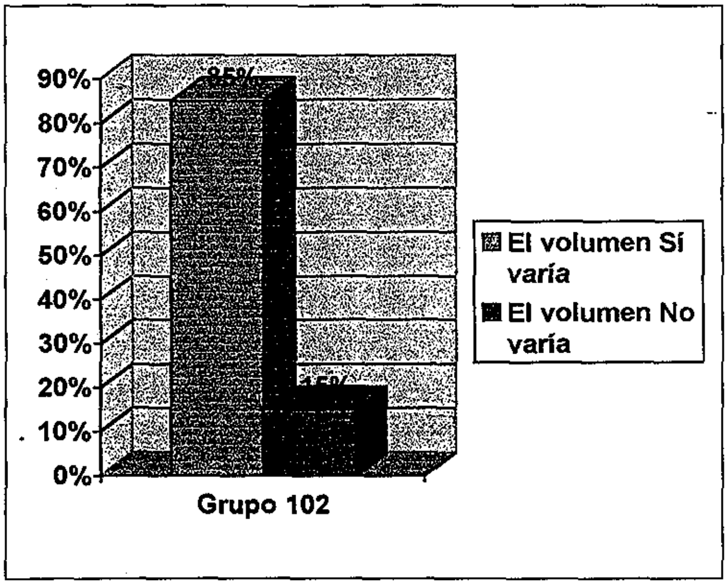
Tomando en consideración los resultados anteriores de que la mayoría de los alumnos no percibieron la variación del volumen en las cajas, se realizó un experimento similar en dos grupos del CCH-N que estaban cursando el primer semestre, se aclara que estos estudiantes no tenían antecedentes del tema de funciones y menos del cálculo diferencial.

Los grupos en los cuales se realizó la investigación fueron el 102 y 104 (Alumnos de aproximadamente 15 años de edad del primer semestre del CCH-N y que no han visto el tema de cálculo diferencial). En el grupo 102 se realizaron actividades similares a las antes descritas en la primera etapa.

Los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes:

- El 100% de los alumnos identificaron la altura y el área de la base como las variables que subyacen en el problema.
- El 100% no percibieron el volumen como una variable del problema.
- Ante la pregunta directa de si había variación del volumen, el 85% consideró que sí había variación en las seis cajas construidas y el 15% percibió que permanecía invariante.

Cuando se hizo una confrontación de los datos obtenidos en los grupos 613 de sexto semestre y al grupo 1AV2 de UPIICSA con el 102 de primer semestre, se obtuvo un resultado sorprendente al observar que se invirtieron las estadísticas: Esto es, el 90% de los alumnos que estaban cursando la materia de Cálculo Diferencial no percibieron la variación del volumen y el 85% de alumnos del primer semestre sí (confrontar las estadísticas mostradas en las gráficas 1 y 2 con la 3).



Gráfica 3

A primera vista y muy superficialmente esto podría interpretarse que el curso de Cálculo Diferencial modificó los esquemas de percepción de los alumnos de sexto semestre (grupo 613) y del primer semestre del nivel superior (grupo 1AV2), al no permitirles establecer la variación del volumen. Sin embargo, al revisar los argumentos que dieron los alumnos de primer semestre fue que:

"El volumen varía porque la forma de las cajas es diferente".

Con este análisis y las entrevistas se llegó a la siguiente conclusión, los alumnos del primer semestre no relacionan el concepto de volumen, confundiéndolo con la forma y no con la capacidad que las cajas pudieran contener.

De este modo, se estableció la hipótesis de que:

"Los alumnos de primer semestre del CCH confunden la capacidad de volumen que pueden tener las diferentes cajas con la forma que presentan la superficie externa de las cajas".

Tomando en cuenta lo anterior, se realizó un experimento en el grupo 104 bajo una metodología similar para validar la hipótesis anterior. El material que se proporcionó a cada alumno fue el siguiente:

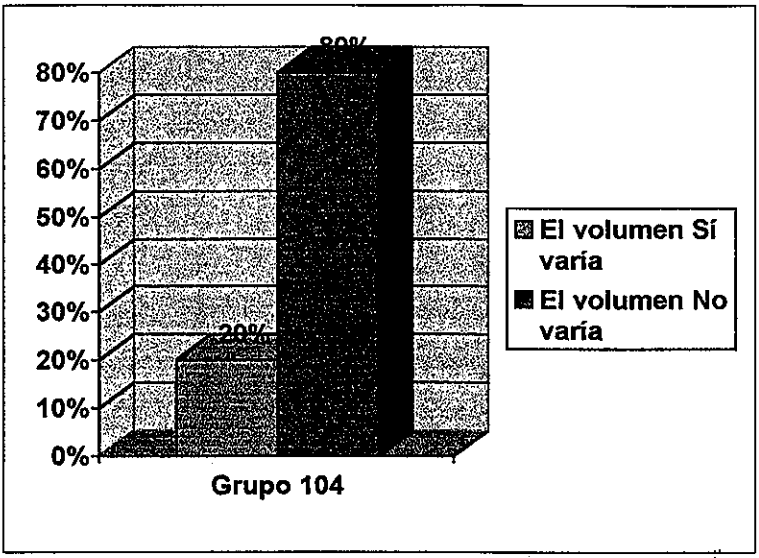
- Ocho cartulinas cuadradas de 13 cm de lado
- Una regla
- Unas tijeras
- Cinta adhesiva
- Un cuestionario

Se pidió a los estudiantes que construyeran de dos en dos cajas que tuvieran las siguientes alturas 1cm y 3.6 cm; 2 cm y 2.3 cm; 3 cm y 1.4 cm; 4 cm y 0.8 cm. Estas medidas fueron distribuidas en forma alternada.

Los pares de medidas antes mencionados fueron determinados de ante mano para que las dos cajas tuvieran el mismo volumen. Lo anterior se realizó esperando que los alumnos se guiaran por la forma diferente de las dos cajas y llegaran a la conclusión del grupo anterior, esto es:

El volumen varía porque la forma de las cajas es diferente.

¡Pero nuevamente nuestra hipótesis falló!, el 85% de los estudiantes respondieron que el volumen no variaba (en cada par de cajas) esto es, que la capacidad de las cajas era la misma y el 15% opinó que sí era diferente (ver gráfica 4).



Gráfica 4

El argumento que dieron los alumnos de la no variación del volumen en las dos cajas se fundamentó en que:

"Las cajas fueron construidas por láminas de cartulina que poseían las mismas medidas, esto es, 13 cm por cada lado y que al no variar estas dimensiones no tenía porque cambiar la capacidad de las cajas".

Otros comentaron que:

"no variaba el volumen por provenir del mismo tamaño del cartoncillo",

esto es similar al fundamento anterior

Los que consideraron que sí variaba el volumen argumentaron de que:

"si la forma de las cajas variaba también lo hacia el volumen".

Luego, como se mencionó en el marco conceptual, los estudiantes poseen una determinada concepción que resulta esencial en su comprensión de la realidad, por lo tanto, tendrá un valor importante para sí mismos. Esto constituye una gran dificultad para cambiarla porque de hacerlo supone admitir un error.

Entonces, para modificar sus esquemas de interpretación, es decir, para pasar de una representación incorrecta a una correcta se hizo poniendo en contradicción dichos esquemas, al pedirles que validaran sus hipótesis también en un contexto concreto de la siguiente manera:

A los alumnos de los grupos 613 (CCHN - UNAM) y 1AV2 (UPIICSA - IPN) se les dotó de una determinada cantidad de azúcar para llenar las cajas donde compararon la capacidad de cada una, favoreciendo de este modo el conflicto cognitivo con lo cual llegaron a la conclusión de la variabilidad del volumen.

Después, en otra sesión se repitió el experimento anterior en el grupo 102 para determinar si los alumnos mantenían la hipótesis que habían establecido sobre las seis cajas, de que: "*el volumen variaba porque la forma de la caja también variaba*".

Las estadísticas fueron iguales, el 85% siguió considerando que "*si la forma de las cajas variaba también variaba el volumen*" y el 15% restante de que no variaba el volumen debido a que "*el tamaño del cartoncillo con el que fueron hechas era de las mismas dimensiones*".

Esto es, "*los estudiantes mantuvieron sus creencias iniciales*".

Asimismo, para modificar sus esquemas de interpretación se llenaron las cajitas con azúcar, y de esta forma percibieran la igualdad del volumen aún cuando éstas tuvieran diferentes formas.

Sólo cuando los esquemas de los alumnos se pusieron en contradicción como se realizó en los grupos anteriores, surgió otra etapa del problema. ¡Los estudiantes empezaron a preguntarse por la fórmula del volumen! evocando así las operaciones lógico-matemáticas con las cuales pudieran cuantificar la capacidad de cada caja y validar de esta forma sus hipótesis; de este modo calcularon el volumen de cada una permitiéndoles llegar a las mismas conclusiones de las obtenidas en la realización de las operaciones concretas, al vaciar azúcar en las cajas y establecer un proceso de comparación. De esta forma no sólo percibieron la variación o la no variación del volumen, sino también el valor del volumen de cada caja.

Lo anterior motivó que se hiciera una revisión de la literatura que nos podría permitir interpretar los procesos que estaban ocurriendo y que fue integrada en el capítulo del marco conceptual.

Así, regresando a nuestro problema sobre el desarrollo de las operaciones concretas, ahora estas se desarrollaron en un ambiente de simulación en la computadora.

IV.3. Simulación del problema de investigación en la computadora.

Por ello y de acuerdo a nuestro esquema didáctico derivamos las acciones también en varias etapas con los siguientes objetivos:

1. De un problema discreto en un contexto natural el estudiante percibirá el concepto de variación de volumen en un problema de máximos y mínimos.
2. Extender este concepto a un segundo problema de construcción de cajas, utilizando para ello la computadora y el programa geómetra, con el fin de:
   a) Reducir la dificultad de las operaciones aritméticas involucradas y que pueden ser un distractor hacia el logro de la comprensión del concepto de la variación en un problema de máximos y mínimos

b) Simular mediante el uso de la computadora las acciones realizadas con tijeras, papel y lápiz

c) Poder visualizar en forma simultanea, los diversos registros de representación semiótica asociadas

Para el logro de estos objetivos se realizó con los alumnos del grupo 613 la actividad siguiente, se les llevó a uno de los laboratorios de cómputo para que se efectuara el desarrollo de las actividades en la simulación de las operaciones concretas, con el uso de las computadoras.

Para esto se les dotó de los cuestionarios siguientes (Apéndice 2b):

- A continuación se expresan las respuestas que dieron los alumnos para cada uno de los cuestionarios del Apéndice 2b.

PARA EL CUESTIONARIO 1 SE TIENEN LAS RESPUESTAS SIGUIENTES:

1. ¿Cuál es el mínimo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 46 % de los alumnos respondió que casi $x = 0$ cm.
- El 15 % respondió que $x = 0$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 0.001$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x =0.01$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 0.05$ cm.
- El 7.6 % contestó que $x = 1$ cm.
- El 7.6 % respondió que para $x < 1$.

Para ésta pregunta, algunos de los argumentos que dieron los alumnos son:

- Que la altura sea mínima, para un valor de x casi de cero.
- Puede ser para valores de x menores de 1 mm.

- Para valores de x muy pequeños, pues la altura de la caja se va disminuyendo

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de máximo volumen?

- El 7.6 % de los alumnos respondió x = 15 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 13 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 11.52 cm.
- El 7.6 % respondió que x =7 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 4 cm.
- El 7.6 % contestó que x = 2.9 cm.
- El 7.6 % respondió que para x = 2 cm.
- El 7.6 % respondió que casi x = 0 cm.
- El 15 % respondió que x = 0.
- El 15 % no respondieron a la pregunta.

Algunos de los argumentos dados por los alumnos se expresan a continuación:

- El máximo valor que se puede recortar es cuando la base sea cero
- Para que se forme la caja de mayor volumen el valor de x debe ser cero.
- X = 7 cm, pues al recortar los lados, se puede observar que inclinado (esquinada), se forma una caja.
- Cuando la base se tome como cero, la caja es de mayor volumen.
- Para x = 2.9, porque hay suficiente área y altura, se forma un cubo.

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 69 % respondió que la altura.
- El 69 % contestó que la anchura de la caja.
- El 46 % contestó que el largo.

- El 23 % contestó que al área.
- El 53 % respondió que la base.
- El 15 % respondió que el perímetro.
- El 23 % respondió que el volumen.

Algunos alumnos contestaron que, las variables son, las medidas de la caja y sus lados. Otros que las variables son cada uno de los lados.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes?

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 7.6 % contestó que el largo	El 23 % contestó que el largo.
El 7.6 % contestó que el lado.	El 7.6 % contestó que la altura.
El 23 % contestó que el ancho.	El 15 % contestó que el área.
El 7.6 % contestó que el perímetro.	El 15 % contestó que el ancho.
El 46 % contestó que la altura.	El 15 % contestó que los lados.
El 15 % contestó que el área.	El 30 % contestó que el volumen.
El 23 % contestó que la base.	
El 15 % contestó que el volumen.	

Para ésta pregunta algunos alumnos argumentaron que:

- La base y la altura dependen del valor de las esquinas que se recorten.
- La variable independiente es el volumen o capacidad de la caja.
- Las variables dependientes son: los lados, el perímetro y el área ya que dependen de x.
- El volumen es dependiente del área y el área es dependiente del lado.

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 7.6 % de los alumnos respondió que casi x = 0 cm.
- El 15 % respondió que x = 0 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.001 cm.
- El 30 % respondió que x =0.1 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.5 cm.
- El 7.6 % contestó que x = 1 cm.
- El 23 % no respondió a la pregunta.

Para esta pregunta los argumentos expresados por algunos de los alumnos son:

- En la caja 7, donde depende del perímetro de la caja, hasta que las esquinas desaparecen.
- La mitad del cuadrado, porque entonces sólo se tendría una recta.
- Si el lado es de 13 cm, entonces sería de 13 cm.
- Para x = 7 cm, el perímetro dependiendo del volumen no pueda formarse ninguna caja.

PARA EL CUESTIONARIO 2 SE TIENEN LAS RESPUESTAS SIGUIENTES:

1.- ¿Cuál es el mínimo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 7.6 % de los alumnos respondió que casi x = 0 cm.
- El 15 % respondió que x = 0 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.001 cm.
- El 30 % respondió que x =0.1 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.5 cm.
- El 7.6 % contestó que x = 1 cm.
- El 7.6 % no respondió a la pregunta.

La argumentación que dieron algunos alumnos para esta pregunta son:

- Para x = 1 mm, porque si este es más pequeño, ya no sería una caja sino sólo sería una base.
- El valor es cero, cuando la base es mayor.
- El valor debe ser de casi cero, para que la altura sea mínima.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de máximo volumen?

- El 7.6 % de los alumnos respondió x = 15 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 13 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 12.9 cm.
- El 7.6 % respondió que x =6.5 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 6.4 cm.
- El 7.6 % contestó que x = 4.3 cm.
- El 7.6 % respondió que para x = 2 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0 cm.
- El 7.6 % no respondieron a la pregunta.
- El 15 % respondieron que el valor máximo de la caja es cuando la caja tiene mayor volumen.

Para esta pregunta, algunas de las argumentaciones fueron:

- Para x = 4.3 porque al cubo es al que le cabe mayor volumen.
- El valor máximo de la caja es cuando la caja tiene mayor volumen.
- Para x = 0, se forma la caja de mayor volumen.
- Para x = 6.4, de otra forma se cortaría a la mitad y no existiría la forma de hacer una caja tan angosta.

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 61 % respondió que la altura.
- El 46 % contestó que la anchura de la caja.

- El 38 % contestó que el largo.
- El 23 % contestó que al área.
- El 7.6 % respondió que la base.
- El 30 % respondió que el volumen.
- El 7.6 % respondió que el perímetro.

Algunos de los argumentos son:

- Las variables son, el área y el volumen; El área de los pedazos cortados y el volumen de la caja que se forma.
- Las variables son cada uno de los lados.
- Las variables son: la base y la altura de la caja, y el tamaño de las esquinas cortadas.
- Puede variar el ancho y la altura de la caja, conforme se aplique las medidas de esa caja

4 ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes?

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 15 % contestó que el largo	El 15 % contestó que el área.
El 38 % contestó que el ancho.	El 15 % contestó que el ancho.
El 53 % contestó que la altura.	El 15 % contestó que la longitud.
El 15 % contestó que el área.	El 15 % respondió que la base.
El 38 % contestó que la base.	El 38 % contestó que el volumen.
El 23 % contestó que el volumen.	El 7.6 % respondió que no se tienen variables independientes.

Los argumentos son los siguientes:

- El volumen es dependiente del área y el área es dependiente de uno de los lados de la base.
- Son variables dependientes los lados y la base, no hay variables independientes ya que todo el papel se toma, ni la base ni la altura son constantes.
- Variables dependientes es cuando cambia el ancho de la base y la altura. Independientes es cuando cambia la capacidad del volumen de la caja.

5 ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 7.6 % de los alumnos respondió que casi x = 0 cm.
- El 15 % respondió que x = 0 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.001 cm.
- El 30 % respondió que x =0.1 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.5 cm.
- El 7.6 % contestó que x = 1 cm.

El argumento para esta pregunta es:

- Para x = 0, porque solo así se seguiría tendiendo la lámina que es plana.
- La contestación de un alumno fue: No se cuanto vale x, por eso no lo puedo dar.

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 3 SON LAS SIGUIENTES:

1. ¿Cuál es mínimo valor de x que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 30 % de los alumnos respondió que casi x = 0 cm.
- El 23 % respondió que x = 0.1 cm.

- El 7.6 % respondió que x =0.12 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.03 cm.
- El 15 % contestó que x = 1 cm.
- El 7.6 % contestó x = 13.06 cm.
- El 7.6 % no respondió a la pregunta.

De entre los argumentos que dieron los alumnos se tienen:

- El valor debe ser casi x = 0, porque así se puede tener una altura y por lo tanto, el volumen para formar una caja.
- El valor debe ser casi x =0, por ser el lado de una de las esquinas, ya que estas son cuadradas.
- Para x = 1 mm, de otras forma el área sería cero.
- El mínimo valor se obtiene dándole valores mayores a x.
- El valor sería de x = 0.1 cm, para alcanzar el mínimo debido a que si pones cero no hay lados.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

- El 23 % respondió que x = 12.9 cm.
- El 30 % respondió que x = 6.5 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 6.4 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 13.29 cm.
- El 7.6 % contestó que x = 3.5 cm.
- El 7.6 % respondió que para x $\in$[4 , 6.5] cm.
- El 7.6 % no respondieron a la pregunta.

Para ésta pregunta se tienen algunos de los argumentos.

- Dándole un valor medio al valor de la variable x.
- Las esquinas son mayores, porque el volumen disminuye.
- Que el lado tenga un rango entre (4 cm , 6.5 cm).

- Para x = 3.5 cm, porque se forma un rectángulo con área distribuida.

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 61 % respondió que la altura.
- El 38 % contestó que la anchura de la caja.
- El 38 % contestó que el largo.
- El 15 % contestó que al área.
- El 38 % respondió que la base.
- El 7.6 % respondió que los lados.
- El 30 % respondió que el volumen.
- El 7.6 % respondió que el perímetro y área.
- El 7.6 % respondió que la longitud.

Sólo se tiene un argumento para esta pregunta:

- Las variables son el área de la base, la altura y el área de los pedazos que se tienen que cortar.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 15 % contestó que el largo	El 15 % contestó que el área.
El 23 % contestó que el ancho.	El 15 % contestó que el ancho.
El 46 % contestó que la altura.	El 7.6 % contestó que la longitud.
El 15 % contestó que el área.	El 7.6 % respondió que la base.
El 30 % contestó que la base.	El 23 % contestó que el volumen.
El 7.6 % respondió que ninguna.	El 15 respondió que los lados.
El 7.6 respondió que todas las variables	El 15 % respondió que la altura.

son dependientes. El 15 % contestó que el volumen.	El 15 % respondió que la capacidad.

Algunos de los argumentos son los siguientes:

- Considero que todas son dependientes, menos el lado de la lámina.
- Independientes: la x porque conforme al de ésta varían las demás. Dependientes: la L porque ésta varía según la x.
- La independiente es el corte de las esquinas porque la altura y la base dependen de esta.
- Las dependientes, es cuando cambia el ancho y la altura de sus medidas. La independiente es cuando varía el volumen de su capacidad.
- No hay ninguna dependiente, ya que no hay ninguna constante, no hay algún valor que no cambie, pues todas cambian.
- El volumen depende del área y la altura, y el área depende del lado de la base.

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 23 % de los alumnos respondió que casi $x = 0$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 0.01$ cm.
- El 15 % respondió que $x = 0$ cm.
- El 30 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 15 % respondió que $x = 13$ cm.
- El 7.6 % contestó que $x \in [1.09 , 0.11]$.
- El 7.6 % no respondió la pregunta.

Algunos de los argumentos que dieron para esta pregunta fueron:

- Cuando el área de la base tienda casi a los 169 cm^3 o bien cuando la altura sea casi de cero y de lado 13 cm.

- El valor de x tiende a cero o medidas muy pequeñas de centímetros.
- Para cero, porque así no se cortaría nada de la lámina, sería sólo un cuadrado o x = 6.5, porque se cortaría sólo en 4 el cuadro.

6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

- El 23 % respondió que 13 cajas.
- El 7.6 % respondió que 7 cajas.
- El 7.6 % respondió que 2 cajas.
- El 23 % respondió que una infinidad.
- El 7.6 % respondió que no sé.
- El 23 % no respondió a la pregunta.
- El 7.6 % respondió que ninguna caja.

Los argumentos para esta pregunta son:

- 13 porque es el máximo valor de los lados.
- 13 cajas con el mismo volumen, ya que sólo lo que aumenta es el área de cada una, pero el volumen sigue siendo igual.
- No sabría exactamente, pero pueden ser varias.
- Se pueden formar dos cajas en diferentes medidas para los valores de x & y.
- Una infinidad, ya que hay medidas que tan sólo por unos cuantos milímetros cambia el área, pero si lo redondeas se puede tener un poco menos.
- Un número infinito, ya que cada centímetro tiene un número infinito dentro de él y por lo tanto se pueden formar una infinidad de cajas (cajas de 12.1 cm, 12.101 cm, etc).

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 4 SON LAS SIGUIENTES.

1. ¿Cuál es mínimo valor para x que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 15 % respondió que x = 0.
- El 15 % respondió que casi x = 0.
- El 7.6 % respondió que x = 0.02 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.13 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.03 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.01 cm.
- El 15 % respondió que x = 0.05 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.1 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 6.44 cm.

Los argumentos para las preguntas del cuestionario número 4 son:

Para la pregunta 1:

- Según la computadora x = 0.02, esto es casi cero.
- El valor del corte puede ser cero o también x puede formar la caja con medidas muy pequeñas.
- Para x = 0.1 cm, porque así se podría tener una altura de un milímetro para formar la caja.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

- El 7.6 % respondió que x = 0.05 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 1.73 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 2.18 cm.
- El 15 % respondió que x = 2.19 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 2.2 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 5.22 cm.
- El 15 % respondió que x = 6.44 cm.

- El 7.6 % respondió que x = 15 cm, el argumento que dio el alumno: para que salga el máximo volumen, se puede cortar inclinada.
- El 7.6 % contestó que: El máximo valor es mayor cuando se puede formar la caja con medidas pequeñas en la base y la altura.
- El 7.6 % respondió que: Cuando la caja tiene mayor volumen.

Para esta pregunta se tiene:

- De 15 cm, para que salga el máximo volumen, la lámina se puede cortar en forma inclinada.
- El máximo valor es mayor, pero si se puede formar una caja con medidas más pequeñas en la base y en la altura.

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 69 % respondió que la altura.
- El 46 % contestó que la anchura de la caja.
- El 30 % contestó que el largo.
- El 23 % contestó que al área.
- El 53 % respondió que la base.
- El 38 % respondió que el volumen.
- El 7.6 % respondió que el recorte de las esquinas.
- El 7.6 % respondió que las medidas de la lámina.

Para esta pregunta se tienen los argumentos siguientes:

- Las variables son la altura, el ancho y el volumen de las esquinas de la caja.
- Las variables son: la altura, el área de la base, el área del pedazo que se corta del lado de la lámina.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 30 % contestó que el largo	El 7.6 % contestó que el largo.
El 15 % contestó que el ancho.	El 38 % contestó que el ancho.
El 38 % contestó que la altura.	El 38 % respondió que la base.
El 7.6 % contestó que el área.	El 15 % contestó que el volumen.
El 7.6 % contestó que la base.	El 46 % respondió que la altura.
El 7.6 % respondió que no entiendo.	El 7.6 % respondió que el área.
El 23 % contestó que el volumen.	El 7.6 % respondió que los datos de la caja.
El 7.6 % respondió que todas las variables son dependientes	

Aquí los argumentos son:

- Todas las variables son dependientes, y la independiente es el lado de la lámina.
- Un alumno contestó "No entiendo".
- La altura depende de el corte de las esquinas (independiente) y entre más alta sea la caja, la base será menor.
- Todas las variables son dependientes.
- Dependientes es cuando cambia el ancho y la altura de sus medidas. Independientes, es cuando varía el volumen de su capacidad.

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 15 % de los alumnos respondió que $x = 0$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 0.001$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 0.01$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 5.22$ cm.

- El 23 % respondió que x = 6.5 cm.
- El 7.6 % contestó que x = 6.53 cm.
- El 15 % respondió que x = 13 cm.
- El 7.6 % respondió que: el valor de x daría la medida de la mitad y no habría volumen porque es cero.

Para esta pregunta se tienen algunos de los argumentos:

- Para x = 5.22, porque es la mitad de el largo de la lámina.
- El valor de x daría la medida de la mitad y no habría volumen porque es cero.
- Para x = 6.5, porque así se cortaría la lámina en 4 partes.

6, ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

- El 30 % respondió que 2 cajas.
- El 15 % respondió que 12 cajas.
- El 15 % respondió que una infinidad.
- El 30 % no respondió a la pregunta.
- El 7.6 % respondió que ninguna caja.

Algunos de los argumentos son:

- 12 cajas tienen el mismo volumen, ya que la 13 no tiene volumen.
- 2 cajas, porque observé que cuando el corte de la esquina es menor, empieza el volumen bajo, y conforme el corte de la esquina va haciendo mayor, sube para después volver a bajar el volumen.
- Pueden ser 2 para cada volumen, porque hay un punto donde los volúmenes van de menos a más y después de llegar al máximo éste regresa a volúmenes pequeños.

- Van a ser varias, ya que los volúmenes de la lámina de 13 cm son, para cada caja existirá otra que contenga el mismo volumen que la otra, pero con medidas diferentes, (a excepción cuando el volumen es de 0 cm^3 o de 10 cm^3).
- Al parecer ninguna, porque depende de los lados de la caja, a menos que el valor de x se le da al ancho de la caja, y el valor del ancho de la caja sea el valor de x, es decir, que se intercambien papeles.

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 5 SON LAS SIGUIENTES:

1. ¿Cuál es mínimo valor de x que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 7.6 % respondió que x = 0 cm.
- El 15 % respondió que x = 0.1 cm.
- El 15 % respondió que x = 0.001 cm.
- El 15 % respondió que x = 0.007 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.03 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.5 cm.
- El 23 % no respondió a la pregunta.

La argumentación que dieron fue:

- El valor mínimo que dio la computadora fue para el valor de x = 0.05
- El valor es para x = 0.1 cm, porque así se obtendría una altura de 0.1 cm antes de sólo tener la lámina.
- El mínimo valor es de cero, si se puede formar una caja con medidas más pequeñas, pero no es fácil construir la caja.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

- El 7.6 % respondió que x = 0.06 cm.

- El 15 % respondió que x = 0.03 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.97 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 0.11 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 1.71 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 2.19 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 2.2 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 2.3 cm.
- El 15 % respondió que x = 6.5 cm.
- El 15 % no respondiò a la pregunta.

El argumento fue el siguiente: El valor máximo es de 6.5 cm, pero tendré una pequeña medida para formar una caja de un volumen pequeño.

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 46 % respondió que la altura.
- El 30 % contestó que la anchura de la caja.
- El 23 % contestó que el largo.
- El 69 % respondió que la base.
- El 53 % respondió que el volumen.
- El 38 % respondió que los lados.
- El 7.6 % respondió que las coordenadas del punto P.

Para esta pregunta el argumento fue el siguiente: Puede variar el ancho y la altura de la caja, conforme se aplique las medidas de la caja.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 15 % contestó que el largo	El 15 % contestó que el largo.
El 30 % contestó que el ancho.	El 7.6 % contestó que el ancho.
El 38 % contestó que la altura.	El 15 % respondió que la base.
El 23 % contestó que el área.	El 7.6 % contestó que el volumen.
El 38 % contestó que la base.	El 23 % respondió que la altura.
El 38 % contestó que el volumen.	El 15 % respondió que los lados.

Algunos de los argumentos que dieron los alumnos fue:

- Las variables dependientes son cuando cambia el ancho de la base y la altura; las independientes es cuando cambia la capacidad del volumen de la caja.
- La altura depende del corte de las esquinas (variable independiente), y la base será o más grande o más pequeña según la altura.
- Todas las variables son dependientes, debido a que conforme cambian su base cambian todo lo demás.
- Las dos son dependientes (el volumen y el área de la base).
- La altura x es independiente, el largo y el ancho son dependientes de x, porque ella les asigna valor.

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 7.6 % de los alumnos respondió que x = 0.01 cm.
- El 7.6 % respondió que x = 5.08 cm.
- El 53 % respondió que x = 6.5 cm.
- El 15 % respondió que x = 6.53 cm.
- El 15 % no respondió la pregunta.

Aquí los argumentos fueron:

- El valor es para x = 5.08 cm, porque es la mitad de lo que mide la lámina.

- El valor para la x debe ser de x = 6.5 cm, porque así sólo se cortaría en cuatro partes.

6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

- El 46 % respondió que 2 cajas.
- El 76 % respondió que 1 cajas.
- El 23 % respondió que una infinidad.
- El 7.6 % no respondió a la pregunta.
- El 7.6 % respondió que ninguna caja.
- El 7.6 % Respondió que el doble.

Algunos de los argumentos que dieron los alumnos son:

- Por cada caja que se construya, hay otra caja que va ha contener el mismo volumen, pero medidas diferentes a excepción del intervalo de volumen (0 cm^3 a 10 cm^3), donde hay una sola caja con el volumen propio.
- Se pueden formar dos cajas para cada volumen que se tenga, porque la gráfica forma una curva y hay dos puntos que coinciden.
- Se pueden formar dos cajas, porque se muestra que primero sube el volumen, pero hay un punto en el cual vuelve a bajar.
- Se pueden formar dos cajas, porque al llegar al volumen de 161.700 cm^3, empieza a bajar y formar las cajas.
- Ninguna, porque depende de las variables o lados de las cajas, a menos que se intercambien los papeles de las variables.

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 6 SON LAS SIGUIENTES:

1. ¿Qué variable representa la absisa del punto P en el problema?

- El 7.6 % respondió que x es la absisa y representa la altura.
- El 61 % x representa el lado del corte de la caja.

- El 7.6 % respondió que x es la absisa y representa la base.
- El 23 % no respondió a la pregunta.

Algunos de los argumentos que expresaron los alumnos son:

- La absisa es el valor de x o la altura.
- El corte de las esquinas, porque el valor que toma el corte es marcado con el punto en la gráfica.
- La coordenada x, en la recta tangente.

2. ¿Qué variable representa la ordenada del punto P en el problema?

- El 46 % respondió que la ordenada es el volumen.
- El 7.6 % respondió que x ya que "p(x) & q(y)" son las coordenadas del punto P.
- El 7.6 % respondió que, la altura representa a la ordenada.
- El 15 % respondió que, el volumen de la caja es la que representa a la ordenada.
- El 23 % no respondió a la pregunta.

Algunos de los argumentos son:

- El volumen de la caja.
- El valor de x ya que "p(x) & q(x)" son las coordenadas de la tangente.
- El valor de la ordenada es el volumen.
- El volumen que se obtiene, ya que este es igual al punto marcado en las coordenadas.

3. ¿En donde más aparece el valor de la absisa?

- El 69 % respondió que, la absisa x aparece en el corte de la esquina.
- El 15 % respondió que, la absisa aparece en el volumen de la caja.

- El 7.6 % respondió que, aparece en las coordenadas del punto P(x , y), por ejemplo P(0.97 , 14.61).
- El 7.6 % respondió que, el valor de la absisa aparece en la altura.

Algunos de los argumentos son los siguientes:

- En el lado de la base.
- En el corte de la esquina.
- Donde muestra la caja la base en el lado del corte x = n cm o en el lado de la base.

4. ¿En donde más aparece el valor de la ordenada?

- El 46 % respondió que, el valor de la ordenada aparece en el volumen de la caja.
- El 15 % contestó que, el valor de la ordenada aparece en las coordenadas del punto P por ejemplo, P(2.91 , 0.0).
- El 7.6 % respondió que, el valor de la ordenada aparece en la altura.
- El 7.6 % respondió que, el valor de la ordenada aparece en el área de la base.
- El 23 % no respondieron la pregunta.

La argumentación fue la siguiente:

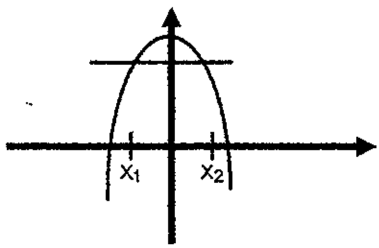
- En el volumen igual a n cm^3.
- En el volumen y en el punto P = (p(x) & q(y)).
- La capacidad de la caja que tenga el volumen
- En el volumen de la caja.
- En los lados.

5. Si trazamos una línea horizontal ¿en cuántos puntos podría cortar a la gráfica de la función?

- El 69 % respondió que, la línea corta a la gráfica en dos puntos.
- El 7.6 % respondió que, la línea corta a la gráfica en un punto.
- El 23 % no respondió a la pregunta.

Algunos de los argumentos expresados por los alumnos son:

- En dos puntos, porque la gráfica tiene un máximo.



Gráfica 5

- En dos puntos puede cortar la recta a la gráfica de la función.
- En dos puntos, casi en su totalidad, porque llega el momento en que la curva termina antes del otro punto para coincidir.

6. ¿Qué interpretación le das al hacho de que al trazar una recta horizontal, ésta corte en dos puntos a la gráfica de la función?

- El 15 % respondió que, debe haber dos cajas de diferentes dimensiones, pero que tienen el mismo volumen.
- El 15 % respondió que, no es función ya que no corta a la gráfica en dos puntos, solamente en uno.
- El 7.6 % respondió que, la recta corta a la gráfica en un punto **x** & un **y**.
- El 7.6 % respondió que, las veces que la recta corta a la gráfica, es el número de volúmenes que se pueden hacer.
- El 15 % respondió que, la recta corta a la gráfica en dos puntos, porque en la gráfica hay dos volúmenes iguales en cajas diferentes.
- El 15 % respondió que, probablemente forma una curva.

Algunos de los argumentos que expresaron los alumnos son:

- Que se pueden formar dos cajas que contengan el mismo volumen, pero con medidas diferentes.
- Porque no es función, ya que una función no corta en dos puntos, solamente en uno.
- Porque la gráfica se representa en los puntos de x & y, en donde "x" es la absisa & y es la ordenada.
- La recta corta a la gráfica en un punto x & en un punto y.
- Las veces que la recta corta a la gráfica es el número de volúmenes que se pueden hacer.
- Que la corta en dos puntos, porque en la gráfica hay dos valores iguales en cajas diferentes.
- Que no es función, ya que no la debe cortar en dos puntos.
- Que probablemente forma una curva.
- Al trazar la línea, los puntos por los que cruza son los valores (volúmenes), de dos cajas con diferentes medidas, pero mismo volumen.
- Que debe haber dos cajas de diferentes dimensiones que tienen un mismo volumen.

7. Moviendo el punto x, observa los valores del punto P y escribe dos valores de x que tengan aproximadamente el mismo valor del volumen.

x = 3.37 & x = 0.46 para el mismo valor del volumen de v = 39.40
x = 0.83 & x = 2.77 para el mismo valor del volumen de v = 59.10
x = 12.10 & x = 0.48 para el mismo valor del volumen de v = 70.78
x = 4.23 & x = 4.41 para el mismo valor del volumen de v = 70.78
x = 0.56 & x = 0.56 para el mismo valor del volumen de v = 80.258
x = 4.36 & x = 4.38 para el mismo valor del volumen de v = 80.825
x = 0.54 & x = 4.54 para el mismo valor del volumen de v = 81.23
x = 0.387 & x = 0.91 para el mismo valor del volumen de v = 119.81
x = 2.21 & x = 2.35 para el mismo valor del volumen de v = 2.20

$x = 1.40$ & $x = 2.35$ para el mismo valor del volumen de $v = 2.91$

$x = 4$ & $x = 0.8$ para el mismo valor del volumen de $v = 100$

$x = 3$ & $x = 1.4$ para el mismo valor del volumen de $v = 144$

$x = 3.67$ & $x = 0.95$ para el mismo valor del volumen de $v = 118$

$x = 0.83$ & $x = 2.77$ para el mismo valor del volumen de $v = 130$

$x = 0.83$ & $x = 3.9$ para el mismo valor del volumen de $v = 105$

$x = 2.36$ & $x = 2.01$ para el mismo valor del volumen de $v = 161$

$x = 2.5$ & $x = 1.85$ para el mismo valor del volumen de $v = 160$

$x = 1.5$ & $x = 2.$ para el mismo valor del volumen de $v = 150$

$x = 3.8$ & $x = 1.4$ para el mismo valor del volumen de $v = 148.064$

$x = 4.7$ & $x = 0.4$ para el mismo valor del volumen de $v = 60.567$

8. Determine los valores de x para dos cajas que tengan un volumen de 42 cm^3.

Para $x = 5.09$, el volumen resulta de $v = 42.243\ cm^3$.

Para $x = 0.27$, el volumen resulta de $v = 42.220\ cm^3$.

Para $x = 5.08$, el volumen resulta de $v = 42\ cm^3$.

Para $x = 5.1$, el volumen resulta de $v = 41.9\ cm^3$.

Para $x = 0.3$, el volumen resulta de $v = 42.9\ cm^3$.

Para $x = 5.1$, el volumen resulta de $v = 41.1\ cm^3$.

Para $x = 3.1$, el volumen resulta de $v = 41.1\ cm^3$.

Para $x = 5.2$, el volumen resulta de $v = 43.826\ cm^3$.

Para $x = 5.1$, el volumen resulta de $v = 41.9\ cm^3$.

Para $x = 0.3$, el volumen resulta de $v = 42.9\ cm^3$.

Para $x = 5.07$, el volumen resulta de $v = 42\ cm^3$.

Para $x = 0.29$, el volumen resulta de $v = 42\ cm^3$.

Para $x = 5.02$, el volumen resulta de $v = 42\ cm^3$.

Para $x = 5.04$, el volumen resulta de $v = 42\ cm^3$.

Para $x = 0.3$, el volumen resulta de $v = 42.9\ cm^3$.

Para $x = 5.1$, el volumen resulta de $v = 41.9\ cm^3$.

4 alumnos no contestaron la pregunta.

Por otro lado la exploración aplicada a los alumnos de los grupos 1AV1 y 1AV2 de la UPIICSA, como se mencionó anteriormente es saber con qué conocimientos básicos de los que están contenidos en el problema cuentan, pero principalmente el de la variación de la función volumen. Es importante mencionar que dichos grupos están cursando la materia de cálculo diferencial en el primer semestre de la carrera de Lic. en Administración Industrial.

Para esto se tiene la siguiente actividad, desarrollo de las actividades en la simulación de las operaciones concretas en el contexto de la geometría dinámica, aplicado a los alumnos del grupo 1AV1 de la (UPIICSA - IPN).

- A continuación se expresan las respuestas que dieron los alumnos (grupo 1AV1) para cada uno de los cuestionarios del Apéndice 2b.

PARA EL CUESTIONARIO 1 SE TIENEN LAS RESPUESTAS SIGUIENTES:

1. ¿Cuál es el mínimo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 22 % de los alumnos respondió que $x = 0.5$ cm.
- El 49 % respondió que $x \cong 0.1$ cm.
- El 16 % respondió que $x = 1.5$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 5.5 % contestó que $x = 4.5$ cm.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de máximo volumen?

- El 27 % de los alumnos respondió $x = 6.5$ cm.
- El 11 % respondió que $x = 12.8$ cm.
- El 22 % respondió que $x = 0.5$ cm.

- El 16 % respondió que x = 4.302 cm.
- El 11 % respondió que x = 5 cm.
- El 5 % respondió "no entiendo la pregunta".

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 5 % respondió que "el corte máximo o mínimo que se le puede hacer a la lámina.
- El 16 % contestó que los lados x & y.
- El 33 % contestó el lado x.
- El 5.5 % respondió que las dimensiones del corte.
- El 5.5 % respondió que el número de lados y el volumen.
- El 5.5 % respondió que el área y el volumen.
- El 5.5 % respondió que la medida es la variable x & el volumen es la variable y.
- El 5,5 % respondió que, el volumen es la variable x & las medidas (largo y ancho)
- El 5.5 % respondió que, el perímetro, x así como su volumen.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes?

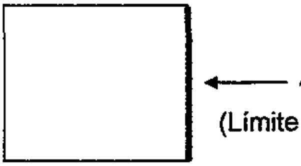
El 16 % de los alumnos no contestó la pregunta.

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 22 % contestó que y. El 5.5 % contestó que el volumen. El 27 % contestó que x. El 11 % contestó que los lados de la caja (largo y ancho).	El 38 % contestó que x. El 5.5 % contestó que el número de lados El 11 % contestó que y. El 11 % contestó que el contorno de la

	caja. El 5.5 % contestó que el área. El 5.5 % contestó que L = 13 cm.

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 16 % de los alumnos respondió que casi x = 13 cm por lado.
- El 11 % respondió que x = 0 cm.
- El 5.5 % respondió que x = 12.2 cm.
- El 11 % respondió que x = 2 cm.
- El 11 % respondió que x = 6.5 cm.
- El 5.5 % contestó que, para el centro.
- El 27 % no respondió a la pregunta.
- El 5.5 % respondió que, cuando x = 90^0.
- El 5.5 % Cuando llega al límite de la caja.



Aquí
(Límite de la caja)

PARA EL CUESTIONARIO 2 SE TIENEN LAS RESPUESTAS SIGUIENTES:

1.- ¿Cuál es el mínimo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 11 % de los alumnos respondió que x = 1 cm.
- El 59 % respondió que x ≅ 0.2 cm.
- El 16.6 % respondió que x = 6.5 cm.
- El 5.5 % respondió que x = 4.5 cm.
- El 5.5 % contestó que x = 2.5 cm.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de máximo volumen?

- El 5.5 % de los alumnos respondió $x = 3.3$ cm.
- El 27 % respondió que $x \cong 4.32$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 8.3$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 0.5$ cm.
- El 16.6 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 16.6 % contestó que $x = 12.9$ cm.
- El 11 % respondió que para $x = 13$ cm.
- El 11 % respondió que $x = 5$ cm.
- El 5.5 % no respondieron a la pregunta.
- El 11 % respondieron que $x = 0.1$ cm.

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 33 % respondió que la medida de los lados.
- El 33 % contestó que la x es una variable.
- El 11 % no contestó la pregunta.
- El 16.6 % contestó que el volumen.
- El 11 % respondió que el área.
- El 11 % respondió que el largo.
- El 5.5 % respondió que el perímetro.
- El 5.5 % respondió que todas las y.
- El 11 % respondió que el ancho.
- El 5.5 % respondió que la x & la distancia de y.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales indepedientes?

El 5.5 % no respondió la pregunta.

El 5.5 % respondió "no entiendo la pregunta"

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 5.5 % contestó que el largo	El 49 % contestó que la x.
El 5.5 % contestó que el ancho.	El 5.5 % contestó que el volumen.
El 38 % contestó que la y.	El 5.5 % contestó que la y.
El 11 % contestó que los lados.	El 5.5 % respondió que L = 13 cm.
El 33 % contestó que la x.	El 5.5 % contestó que el perímetro de la caja.
El 5.5 % contestó que el volumen.	

5 ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 11 % respondió que $x = 0$ cm.
- El 27 % respondió que $x = 13$ cm.
- El 38 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 3$ cm.
- El 5.5 % respondió que "en el centro".
- El 5.5 % contestó que "cuando llega al límite de sus extremos".

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 3 SON LAS SIGUIENTES:

1. ¿Cuál es mínimo valor de x que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 72 % respondió que $x \cong 0.2$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 1$ cm.
- El 5,5 % respondió que $x = 2.9$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 3$ cm.

- El 5.5 % respondió que "el mínimo valor de x dependerá de cuando este aumenta en su base de la caja".
- El 5.5 % no respondió a la pregunta.

2 ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

- El 5.5 % respondió que x = 6 cm.
- El 16 % respondió que x $\cong$ 4 cm.
- El 5.5 % respondió que x = 7 cm.
- El 11 % respondió que x $\cong$ 2 cm.
- El 33 % contestó que x = 6.5 cm.
- El 11 % respondió que para x = 0.1 cm.
- El 11 % no respondió a la pregunta.
- El 5.5 % respondió que "el valor de x dependerá de cuando este disminuya en su base de la caja".

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 22 % respondió que la altura.
- El 16 % contestó que la base.
- El 5.5 % contestó que al área.
- El 16 % respondió que la medida de los lados.
- El 5.5 % respondió que el perímetro de la base.
- El 27 % respondió que el volumen.
- El 44 % respondió que el valor de x es una variable.
- El 22 % respondió que el valor de y es una variable.
- El 11 % no respondió a la pregunta.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

El 11 % no respondió a la pregunta.

El 5.5 % respondió que no es clara la pregunta.

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 11 % contestó que el largo	El 16 % contestó que el volumen.
El 11 % contestó que el ancho.	El 5.5 % contestó que el largo.
El 16 % contestó que el valor de x.	El 11 % contestó que el valor de y.
El 5.5 % contestó que el volumen.	El 16 % respondió que la medida de los lados.
El 33 % contestó que el valor de y.	El 27 % contestó que el valor de x.
El 5.5 % respondió que el área.	El 5.5 % respondió que el lado L = 13cm.
El 5.5 % contestó que la base.	El 5.5 % respondió que la altura.
El 15 % contestó que el volumen.	

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 16 % de los alumnos respondió que $x = 0$ cm.
- El 11 % respondió que $x = 12.9$ cm.
- El 11 % respondió que $x = 4.02$ cm.
- El 55 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 5$ cm
- El 5.5 % no respondió la pregunta.
- El 5.5 % respondió "cuando llega a su límite hacia la derecha".

6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

- El 11 % respondió que 2 cajas.
- El 11 % respondió que una infinidad de cajas.

- El 5.5 % respondió que 9 cajas.
- El 11 % respondió que 3 cajas.
- El 11 % respondió que no una caja..
- El 5.5 % respondió 4 cajas.
- El 38 % no respondió a la pregunta.
- El 5.5 % respondió que "no podría contestar puesto que se necesita saber que capacidad tiene la caja.

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 4 SON LAS SIGUIENTES.

1. ¿Cuál es mínimo valor para x que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 5.5 % respondió que $x = 0$.
- El 83 % respondió que $x = 0.1$
- El 5.5 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 2.9$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 3.9$ cm.
- El 7.6 % respondió que $x = 12.8$ cm.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

- El 7.6 % respondió que $x \cong 2$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 1$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 163.462$ cm^3.
- El 11 % respondió que $x \cong 4$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 4.9$ cm.
- El 5.5 % respondió que $x = 0.1$ cm.
- El 27 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 11 % respondió que $x = 12.99$ cm,

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 5.5 % contestó que la anchura de la caja.
- El 11 % contestó que el largo.
- El 22 % contestó que al área.
- El 5.5 % respondió que la base.
- El 38 % respondió que el volumen.
- El 11 % respondió que el recorte de las esquinas.
- El 27 % respondió que las medidas de los lados.
- El 22 % respondió que x & y son variables.
- El 5.5 % respondió que x, y, z, son las variables.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

El 11 % no respondió la pregunta.

•Variables dependientes.	•Variables independientes.
El 22 % contestó que el volumen	El 22 % contestó que el valor de y.
El 38 % contestó que el valor de x.	El 33 % contestó que el valor de x.
El 22 % contestó que el valor de y.	El 22 % respondió que los lados de corte.
El 11 % contestó que el lado de corte.	El 5.5 % respondió que el área.
El 5.5 % respondió que todas las variables son dependientes	El 5.5 respondió que el perímetro.

5 ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 16 % de los alumnos respondió que x = 0 cm.
- El 55 % respondió que x = 6.5 cm.
- El 11 % respondió que x = 4 cm.

- El 5.5 % respondió que x = 13 cm.
- El 11 % respondió que x = 12.8 cm.
- El 5.5 no respondió a la pregunta.

6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

- El 16 % respondió que 2 cajas.
- El 5.5 % respondió que 13 cajas.
- El 16 % respondió que una caja.
- El 33 % respondió 4 cajas.
- El 5.5 % respondió que 40 cajas aproximadamente.
- El 5.5 % respondió que una infinidad.
- El 38 % no respondieron a la pregunta.

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 5 SON LAS SIGUIENTES:

1. ¿Cuál es mínimo valor de x que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

- El 44 % respondió que x = 0.1 cm.
- El 5.5 % respondió que x = 2.4 cm.
- El 11 % respondió que x = 0.05 cm.
- El 38 % no respondió a la pregunta.

2. ¿Cuál es el máximo valor de x que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

- El 11 % respondió que x = 0.1 cm.
- El 16 % respondió que x ≅ 2.2 cm.
- El 22 % respondió que x ≅ 6.5 cm.
- El 5.5 % respondió que x = 5.9 cm.

- El 38 % no respondió a la pregunta.
- El 5.5 % respondió que $x = 163.4\ cm^3$.

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

- El 22 % respondió que los lados de corte.
- El 16 % contestó que el valor de la x es una variable.
- El 5.5 % contestó que las medidas de la caja es una variable.
- El 5.5 % respondió que el volumen.
- El 5.5 % respondió que el valor de y es la variable.
- El 5.5 % respondió que el lado de la base.
- El 50 % no respondió a la pregunta.

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

El 55.5 % no respondieron a la pregunta.

El 5.5 % contestó que no es clara la pregunta.

• Variables dependientes.	• variables independientes.
El 16 % contestó que el lado de la base El 11 % contestó que el valor de y. El 5.5 % contestó que el volumen.	El 27 % cOntestó que los lados de la lámina. El 11 % contestó que el valor de x.

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

- El 16 % de los alumnos respondió que $x = 0$ cm.
- El 38 % respondió que $x = 6.5$ cm.
- El 50 % no respondió a la pregunta.

6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

- El 11 % respondió que 2 cajas.
- El 5.5 % respondió que 1 caja.
- El 5.5 % respondió que 22 cajas.
- El 5.5 % no respondió 4 cajas.
- El 5.5 % respondió que ninguna caja.
- El 72 % no respondió a la pregunta.

LAS RESPUESTAS PARA EL CUESTIONARIO 6 SON LAS SIGUIENTES:

1. ¿Qué variable representa la absisa del punto P en el problema?

- El 11 % respondió que x es el largo. y representa la altura.
- El 5.5 % x representa el volumen.
- El 11 % respondió que x es el lado de la lámina.
- El 60 % no respondió a la pregunta.
- El 5.5 % respondió que la distancia.

2. ¿Qué variable representa la ordenada del punto P en el problema?

- El 5.5 % respondió que la ordenada es la altura.
- El 5.5 % respondió que y es el lado de la base.
- El 5.5 % respondió que, el volumen.
- El 66 % no respondió a la pregunta.
- El 11 % contesto que 161.1 cm^3.

3. ¿En donde más aparece el valor de la absisa?

- El 5.5 % respondió que, en el corte de la esquina de la caja.
- El 11 % respondió que, la absisa aparece en el lado x de la caja.
- El 66 % no respondió a la pregunta.
- El 16 % respondió que no entendió la pregunta.

4. ¿En donde más aparece el valor de la ordenada?

- El 5.5 % respondió que, en la gráfica.
- El 5.5 % contestó que, y el valor de la ordenada aparece en la altura
- El 5.5 % respondió que, aparece en el volumen.
- El 11 % respondió que, en x el lado de la caja.
- El 66 % no respondieron la pregunta.

5. Si trazamos una línea horizontal ¿en cuántos puntos podría cortar a la gráfica de la función?

- El 5.5 % respondió que, si es arriba de 80 en dos puntos.
- El 5.5 % respondió que, si es debajo de 30 en cuatro puntos.
- El 16 % respondió que en dos puntos.
- El 5.5 % respondió que en un infinito de puntos.
- El 5.5 % respondió que si es arriba de 30 en dos puntos
- El 5.5 % respondió que si es debajo de 30 en un punto.
- El 66 % no respondió a la pregunta.

6. ¿Qué interpretación le das al hacho de que al trazar una recta horizontal, *ésta corte en dos puntos a la gráfica de la función?*

- El 5.5 % respondió que, se dan los dos puntos de las coordenadas & esto hace que se corte en dos.
- El 5.5 % respondió que, en la intersección de los puntos.
- El 5.5 % respondió que, es una función uno a uno.
- El 7.6 % respondió que, es una función.
- El 77 % no contestó la pregunta.

7. Moviendo el punto x, observa los valores del punto P y escribe dos valores de x que tengan aproximadamente el mismo valor del volumen.

$x = 6.0$ & $x = 6.3$ para el mismo valor $y = 7$

$x = 3$ & $x = 3.5$ para el mismo valor $y = 5$

$x = 0.0$ & $x = 0.0$ para el mismo valor de $y = 0$

$x = 0.5$ & $x = 0.0$ para el mismo valor de $y = 0$

$x = x$ & $x = x$ para el mismo valor de $y = x$

$x = 0.1$ & $x = 0.1$ para el mismo valor de $y = 15.22$

$x = 1.8$ & $x = 1.8$ para el mismo valor de $y = 160.8$

El 82 % no contestó la pregunta.

Cabe hacer la siguiente observación que me pareció muy importante, al llevar a los alumnos del grupo 1AV1 a la sala de computo para visualizar la simulación de las operaciones concretas con el geómetra (J. Piaget Seis Estudios de Psicología, 1980 Pag. 95), dichos alumnos estaban confundidos porque no entendían el problema y no sabían cual era el cuadrado que se tenía que recortar en cada una de las esquinas para construir las diferentes cajitas, ya que a éstos alumnos no se les dio la clase en donde se tenía que manipular la construcción de cada una de las cajitas con una lámina de cartulina cuadrada de 13 cm por lado.

Capítulo V

Conclusiones comentarios y sugerencias.

Para concluir se retoma la hipótesis que ha guiado este trabajo de *investigación la cual se planteo en el capítulo I y que es la siguiente:*

Hipótesis:

Los estudiantes no perciben la variación en el volumen sobre un problema de máximos y mínimos en los contextos de las operaciones concretas y la simulación de estas con la geometría dinámica

Y tomando en cuenta los resultados que arrojó la experimentación, se pueden elaborar las siguientes conclusiones referidas a los estudiantes promedio.

En el contexto de las operaciones concretas, los estudiantes no perciben la variación del volumen en un problema de máximos y mínimos, esencialmente por tres obstáculos epistemológicos que se presentan en el desarrollo del problema y que son:

1) **Las dimensiones constantes de la lámina con que se construyen las diferentes cajas.** En este caso los alumnos percibieron que al construir diversas cajas recortando cuadrados congruentes en las esquinas de las láminas de 13 cm de lado, el volumen no debería de variar de una caja a otra porque las cajas provienen de láminas congruentes, esto es, que tienen la misma medida, y la misma forma.
2) **La forma de la caja.** Los alumnos que sí percibieron la variación del volumen, la asociaron con la forma de la caja, esto es, no percibieron

que pudieran construirse cajas de diferentes formas que contuvieran el mismo volumen.

3) **El caso discreto.** La discretizacion de la variable x (corte de las esquinas) al construir cajas de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cm de altura, los estudiantes manifestaron que no variaba el volumen a excepción de la caja de 6 cm en la que si variaba respecto a las anteriores. Cabe aclarar que este fue el obstáculo que más frecuentemente se presento.

También cabe hacer notar que otro aspecto importante en el desarrollo de este trabajo fue el factor tiempo, es decir, el tiempo no fue el suficiente para el desarrollo de la investigación, sobre todo para los grupos de la UPIICSA, porque las fechas de los exámenes departamentales son establecidas desde el inicio del semestre por las autoridades y se tiene que cubrir el material designado para cada uno de los exámenes,

Por otro lado, y después de haber terminado la presente investigación, así como de haber hecho el análisis de los resultados obtenidos, mencionaré los comentarios expresados por algunos de los estudiantes, tanto de las operaciones concretas como de la simulación de éstas con la Geometría Dinámica.

Comentarios:

- *Me gustó la práctica, ya que se plantea el problema y se ve en la realidad.*

Alumno, Martínez Amador Osvaldo – Grupo 613 – CCH-N.

- *Es muy importante hacer prácticas de este tipo, porque sirve para razonar y reflexionar cuestiones que en un momento parecen insignificantes.*

Alumna, Rojas Jiménez Carolina – Grupo 613 – CCH-N.

- *Es interesante tener este tipo de actividades porque así tenemos variaciones reales en el curso.*

Alumno, Lucero Jiménez Abel I – Grupo 613 – CCH-N.

- *Me pareció interesante la forma de sacar cajas de 7 cm de lado.*

Alumno, Méndez Reséndiz Julio C. – Grupo 613 – CCH-N.

- *Me pareció interesante porque se me ocurrieron cosas que no había pensado antes, lo que me falta es contestarlas.*

Alumno, Rocha Nieto Carlos E. – Grupo 613 – CCH-N.

- *Me pareció interesante y sobre todo novedoso el poder contar con una herramienta como es el programa Geómetra, ya que sirve para el análisis y comprobación directa de lo que vamos a realizar dentro del programa, ya que las matemáticas dentro de lo teórico no respaldan el conocimiento que en muchos casos no se tiene, y esto porque las matemáticas deben ser para nosotros como alumnos una herramienta de análisis, que nos permita hallar conclusiones.*

Así que realmente me gustó mucho esta herramienta, que se podrá utilizar más adelante para que futuras generaciones no tengan tantas lagunas o problemas que resolver, y así lleguemos a un equilibrado desarrollo mental correlacionado con herramientas y software de este tipo.

Alumno: Aguilar Salamanca Pedro.
Boleta: 98041897 Grupo 1AV1
Escuela: UPIICSA-IPN.

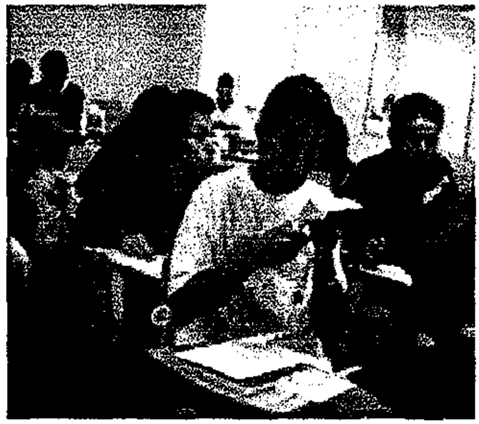
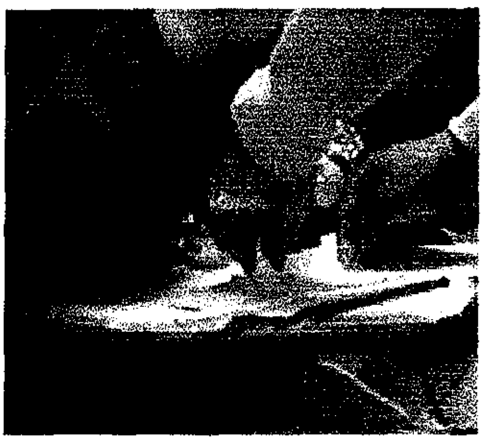
Me parece interesante e importante los comentarios que hicieron algunos de los alumnos con respecto al planteamiento del problema, ya que éste se les plantea y lo ven en la realidad, desde el punto de vista de las operaciones concretas, los hace razonar y reflexionar sobre la variación de la función volumen al construir las diferentes cajitas, así como la visualización que hacían en el laboratorio o en la sala de computo, donde veían en la computadora la simulación de dichas operaciones por medio de la Geometría Dinámica.

En la actualidad el profesor puede tener el la computadora una herramienta de apoyo muy fuerte para su desarrollo docente y puede ser para el alumno un laboratorio, donde pueda explorar, hacer conjeturas y llevarlas a la experimentación para una mejor integración de su conocimiento, y no sólo como estudiante sino como futuro profesionista o investigador en las diferentes áreas donde su uso puede ser indispensable, ya sea en áreas como: Biología, Química, Física, Matemáticas, Sociales, etc.

Por todo lo anterior, y como una sugerencia importante, es que el profesor debe tener en cuenta, como lo sugiero en el capítulo III.2 sobre las operaciones concretas y la computadora con la implementación de la Geometría Dinámica para la simulación de éstas, el uso de la computadora como una herramienta indispensable en la enseñanza, para así complementar el aprendizaje de los alumnos, ya que el 80 % o más de ellos tanto del CCH-N como de la UPIICSA cuentan con una en casa, o bien pueden utilizar los laboratorios o salas de computo de sus respectivas escuelas.

Apéndice 1:

Fotos e imágenes sacadas de un video tomado a los alumnos cuando están trabajando sobre las operaciones concretas y en la simulación de éstas en la computadora, tanto en las aulas como en el laboratorio de computación del CCH-N o en la sala modelo de Ciencias Básicas de la UPIICSA-IPN.

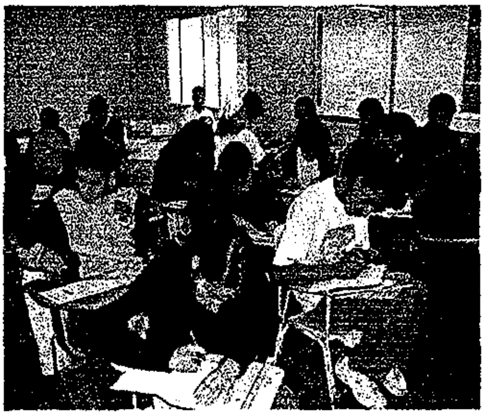





En esta imagen se observa a los alumnos cuando construyen las cajas.

Los alumnos comprenden mejor el problema cuando se tienen las operaciones concretas, es decir, los objetos tangibles que pueden ser manipulados y sometidos a experiencias efectivas reales, razón por la cual se les pidió que construyeran las cajitas.

Alumnos dibujando un esquema, para determinar el corte de las esquinas de las cartulinas de 13 cm por lado.

Algunos alumnos reflexionaron sobre la forma de realizar los dobleces y los recortes de las esquinas de las cartulinas para construir las cajas, realizando un esquema del problema en hojas de sus cuadernos



Cuando los alumnos terminaron de construir las cajas, se pusieron a resolver el cuestionario, de entre las preguntas se tienen:

¿Consideras que varía el volumen o se mantiene constante en todas ellas?
¿Varía el volumen de acuerdo a la altura de las cajas?
¿Qué variables consideras que están inmersas en la construcción de las cajas? Etc.

Alumnos seleccionando las cajitas

Cuando terminaron de construir las cajas, algunos alumnos, las seriaron para comparar el tamaño y la forma, para así determinar si se tenía variación de volumen o permanecía constante en todas ellas.

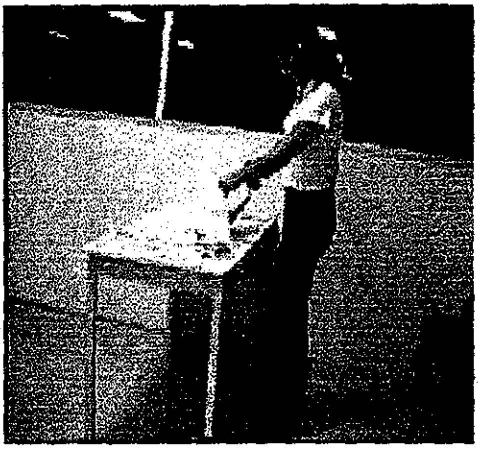
 

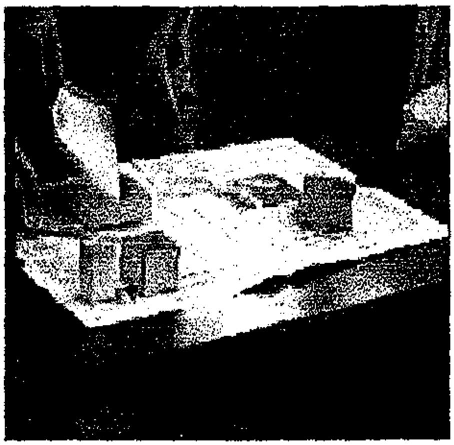
Alumnos observando la forma y el tamaño de las cajas

En pregunta directa que se les hizo a los alumnos si se tenía variación de volumen en las diferentes cajas, éstos comparaban los tamaños y las formas, como se observa en las imágenes

Alumnos, efectuando los cálculos matemáticos

Un alumno le pregunta a su compañero ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de una caja? Para así efectuar los cálculos matemáticos con las diferentes alturas que se le daba a cada una de las cajitas, y obtener sus correspondientes volúmenes. Los estudiantes separan el mundo real con el mundo matemático.





Una vez resuelto el problema, el estudiante debe de comprobar sus resultados.

Como se puede observar en las imágenes, los alumnos están comprobando con el azúcar que les fue entregada, al vaciar el contenido de una cajita a otra y se pudieran comparar los diferentes volúmenes, verificando así la variación de volumen en las cajitas,

Alumnos trabajando en la sala modelo, la simulación de las operaciones concretas en la computadora con el apoyo de la Geometría Dinámica.

Los alumnos tuvieron dificultades para visualizar cual era el cuadrado que se tenía que recortar de las esquinas de cada cartulina de 13 cm por lado, porque antes no se les dio la práctica de las operaciones concretas.

Apéndice 2:

Cuestionarios elaborados para el problema de investigación que se aplicará a los alumnos de los grupos asignados de antemano

Apéndice 2a.

Cuestionario elaborado que se aplicará a los alumnos.

DESARROLLO DE LAS OPERACIONES CONCRETAS PARA LA EXPLORACION DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN VOLUMEN EN UN PROBLEMA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

NOMBRE DEL ALUMNO____

MATERIA________________ ESCUELA_____________ FECHA __________

Determinar las dimensiones de los cuadros de las esquinas que se debe de cortar, de una lámina cuadrada de cartulina de 13 cm de lado, para construir una caja de base cuadrada sin tapa, que tenga volumen máximo.

CUESTIONARIO.

Contesta las siguientes preguntas, argumentando las respuestas.

1. Con relación a todas las cajas construidas ¿consideras que varía el volumen o se mantiene constante? Esto es, si se llenaran con agua las cajas, ¿la cantidad de agua es diferente en cada caja o es la misma?
   Respuesta:
   ¿Porqué?
2. ¿Qué forma tiene la parte de las esquinas de la lámina, que se tiene que recortar para formar la caja?
   Respuesta:
   ¿Porqué?
3. ¿Podrían estas esquinas, ser de forma rectangular?
   Respuesta:
   ¿Porqué?
4. ¿Varía el volumen de acuerdo a la altura de las cajas?

Respuesta:

¿Porqué?

5. ¿Para qué valor de la altura, de los proporcionados anteriormente no se puede formar la caja?

   Respuesta:

   ¿Porqué?

6. ¿Cuál es el máximo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

   Respuesta:

   ¿Porqué?

7. ¿Cuál es el mínimo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

   Respuesta:

   ¿Porqué?

8. ¿Cuántas cajas que contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se pueden construir con la lámina de 13 cm?

   Respuesta:

   ¿Porqué?

9. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de las cajas?

   Respuesta:

   ¿Porqué?

10. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes?

    Respuesta:

    ¿Porqué?

11. ¿Para qué valor (es) de x (corte de las esquinas de la lámina), se tiene volumen cero?

    Respuesta:

    ¿Porqué?

Apéndice 2b.

Cuestionario elaborado para aplicar a los alumnos.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES EN LA SIMULACION DE LAS OPERACIONES CONCRETAS EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRIA DINAMICA.

NOMBRE DEL ALUMNO_______________________________________

MATERIA______________ ESCUELA ______________ FECHA _________

Abre el archivo CAJA_1.GSP y realiza las siguientes actividades:

I. Lee el problema y reflexiona en la posible solución.

Contesta las siguientes preguntas argumentando las respuestas.

CUESTIONARIO 1.

1. ¿Cuál es el mínimo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

   Respuesta:

   ¿Porqué?

2. ¿Cuál es el máximo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de máximo volumen?

   Respuesta:

   ¿Porqué?

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

Respuesta:

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes?

Respuesta:

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

Respuesta:

II. Selecciona y desplaza el punto x de la figura que representa la lámina cuadrada de 13 cm de lado.

Contesta las siguientes preguntas argumentando las respuestas.

Cuestionario 2.

1. ¿Cuál es el mínimo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

   Respuesta:

2. ¿Cuál es el máximo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de máximo volumen?

   Respuesta:

3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

   Respuesta:

4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes?

   Respuesta:

5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

   Respuesta:

III. Abre el archivo CAJA_2.GSP & realiza las siguientes actividades :

a) selecciona y da doble clic en el icono mostrar caja.
b) Selecciona y desplaza el punto x de la figura que representa la lámina cuadrada de 13 cm de lado.
c) Selecciona la figura de la caja y empalmándola con la lámina para comparar las dimensiones de la base & la altura cuando cambia la posición de x.
d) Observa los cambios que ocurren en la figura de la caja y contesta las siguientes preguntas argumentando las respuestas.

Cuestionario 3.

1. ¿Cuál es mínimo valor que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?
   Respuesta:
2. ¿Cuál es el máximo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?
   Respuesta:
3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?
   Respuesta
4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.
   Respuesta:
5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?
   Respuesta:
6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?
   Argumenta tu respuesta:

IV. Abre el Archivo CAJA_3.GSP y realiza las siguientes actividades:

a) Selecciona y da doble clic en el icono Mostrar Datos.
b) Selecciona y desplaza el punto x de la figura que representa la lámina cuadrada de 13 cm de lado.
c) Observa los cambios que ocurren en la figura y los datos de la caja. Contesta las siguientes preguntas argumentando las respuestas.

Cuestionario 4.

1. ¿Cuál es mínimo valor que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

   Respuesta:
2. ¿Cuál es el máximo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

   Respuesta:
3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

   Respuesta
4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

   Respuesta:
5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

   Respuesta:
6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

   Argumenta tu respuesta:

V. Abre el Archivo CAJA_4.GSP y realiza las siguientes actividades:

a) Selecciona y da doble clic en el icono Mostrar Gráfica.
b) Selecciona y desplaza el punto x de la figura que representa la lámina cuadrada de 13 cm de lado.

c) Observa el punto P y sus coordenadas y contesta las siguientes preguntas argumentando las respuestas.

Cuestionario 5.

1. ¿Cuál es mínimo valor que se puede cortar de las esquinas, para formar la caja?

   Respuesta:
2. ¿Cuál es el máximo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja de Máximo Volumen?

   Respuesta:
3. ¿Qué variables consideras que se encuentran inmersas en la construcción de la caja?

   Respuesta
4. ¿Qué variables consideras que son dependientes y cuales independientes.

   Respuesta:
5. ¿Para qué valor (es) de x (corte de la esquina de la lámina), se tiene volumen cero?

   Respuesta:
6. ¿Cuántas cajas que al llenarse con algún contenido contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se puedan formar de láminas cuadradas de 13 cm de lado?

   Argumenta tu respuesta:

VI. Observa el punto P y el cambio de los valores en sus coordenadas y contesta las siguientes preguntas argumentando las respuestas.

Cuestionario 6.

1. ¿Qué variable representa la absisa del punto P en el problema?

   Respuesta:
2. ¿Qué variable representa la ordenada del punto P en el problema?

Respuesta:

3. ¿En donde más aparece el valor de la absisa?

   Respuesta:

4. ¿En donde más aparece el valor de la ordenada?

   Respuesta:

5. Si trazamos una línea horizontal ¿en cuántos puntos podría cortar a la gráfica de la función?

   Respuesta:

6. ¿Qué interpretación le das al hacho de que al trazar una recta horizontal, ésta corte en dos puntos a la gráfica de la función?

7. Moviendo el punto x, observa los valores del punto P y escribe dos valores de x que tengan aproximadamente el mismo valor del volumen.

   Respuesta:

   x = ______ & x = ______ para el mismo valor del volumen (y = ___)

   x = ______ & x = ______ para el mismo valor del volumen (y = ___)

8. Determine los valores de x para dos cajas que tengan un volumen de 42 cm^3.

Apéndice 2c.

Cuestionario elaborado para aplicarlo a los alumnos.

DESARROLLO DE LAS OPERACIONES CONCRETAS (EFECTIVAS) EN UN PROBLEMA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

De las láminas cuadradas cuyas medidas son 13 cm por lado, recortar cuadrados es las esquinas para construir cajas de base cuadrada sin tapa de 1, 2, 3, 4, y 5 cm de altura.

Contesta el siguiente cuestionario argumentando lo mejor posible tus respuestas.

Con relación a las variables:

1) ¿Qué variables consideras que están inmersas en el problema?
   Respuesta:
2) ¿Cuáles consideras que son independientes?
   Respuesta:
3) ¿Cuáles consideras que son dependientes?
   Respuesta:

Al comparar todas las cajas construidas;

4) ¿Consideras que varía el volumen o se mantiene constante?
   Esto es, si se llenaran con agua las cajas, ¿la cantidad de agua es diferente en cada caja o es la misma? Recuerda que las cajas se construyeron de láminas con las mismas dimensiones de 13 cm por lado.
   Respuesta:

Al comparar el material que se recorta de las esquinas (material que se desperdicia).

5) Entre mayor es el material que se recorta de las esquinas ¿es mayor el volumen de la caja construida?

   Respuesta:

6) Entre menor es el material que se recorta de las esquinas ¿es mayor el volumen de la caja construida?

   Respuesta:

7) Si la altura de las cajas aumenta, ¿qué pasa con el área de la base?

   Respuesta:

8) Si el área de las cajas aumenta, ¿qué pasa con la altura?

   Respuesta:

9) ¿Varía el volumen de acuerdo al área de la base de las cajas?

   Respuesta:

10) ¿Cuál es el mínimo valor que se puede recortar de las esquinas, para formar la caja?

    Respuesta:

11) ¿Cuántas cajas que contengan el mismo volumen y tengan diferentes tamaños, se pueden construir con las láminas dadas?

    Respuesta:

Bibliografía.

Aebli, Hans, (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Ed. Kapelusz 5. A., Buenos Aires Argentina.

Aebli, Hans, (1995). *12 formas básicas de enseñar* NARCEA. España.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., Hanesian, H. (1997). *Psicología Educativa. Un punto de vista Cognoscitivo.* Trillas, México.

Baquero, R. (1995). Vygotsky y el Aprendizaje Escolar. AIQUE, Madrid.

Bennett, D., Finzer, William. (1998). El Geómetra. Geometría Dinámica para el Siglo XXI. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Bers, L., (1969). *Cálculo Diferencial e Integral.* Interamericana, México

Carretero, M. (1985). *Constructivismo y Educación.* Alianza, Madrid.

Coxeter, H.S.M. (1998). *Introduction to Geometry.* Nueva York, NY. John Wiley & Sons. *La enseñanza Agradable de las Matemáticas. Editor Steen. Limusa, México. p. 189.*

Churchill, E. M., (1988). *Los Descubrimientos de Piaget y el Maestro.* Paidos Educator, México.

Cuevas Vallejo, C. A.. (1994). *Sistema Tutorial Inteligente LIREC,* Sección Matemática Educativa, CINVESTAV del IPN. México.

Cuevas Vallejo, C. A, (1999) *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas, basada en la psicología de Jean Piaget.* En prensa (Departamento de Matemática Educativa).

Dreyfus, T. & Vinner, S. (1989). *Images and definitions for the concept of function.* Journal for Research in Mathematics Education. 20(4), 356-366.

Duval, R.,(1988) *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros,* Antología de Educación Matemática, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. IPN.

Duval, R.,(1998) *Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento,* págs. 173-201, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France. Ed. F. Hitt Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo

Editorial Iberoamerica México.

Granville, W. A. (1992 décimo quinta reimpresión). *Cálculo Diferencial e integral.* Limusa, **México.**

García, R. Pelayo y Gross, 1992. Pequeño Larousse ilustrado, p. 1051.

Hitt, F. (1994). *Microcomputadora en el aula e investigación matemática. Memorias del Quinto Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Editado por el departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.*

Kline, David. (1980) *Planning Education for Development: Volume III Research Methods for Educational Planning,* Harvard University: Center for Studies in Education and Development 1980.

Leithold. L. (1998). *El Cálculo.* Oxford University Press, México.

Moreno, S. (1997). Experimentación educativa en el aula: Uso del Sistema Inteligente LIREC versus la enseñanza tradicional en el curso de matemáticas III del sistema CCH-UNAM. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN.

NCTM. (1999a. 1999b). *National Council of Teacher of Mathematics. Principles and Standars for School Mathematics. Reston, V.A: Author.*

NCTM. (2000). *National Council of Teacher of Mathematics. Principles and Standars for School Mathematics. Reston, V.A: Author.*

Piaget, J. (1999. *Psicología y Pedagogía.* Ariel, México.

Piaget, J. (1980), *Seis Estudios de Psicología.* Ariel, México

Programas de Estudio, 1996. *Para las asignaturas de Matemáticas I & II, primero y Segundo semestre del CCHN-UNAM.*

Rich, A., Rich, J., Shelby T., Stoutemyer, D. (1994). Derive. *A Mathematical Assistant for your Personal Computer* Manual del Usuario.

Skemp R. (1993). *Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas.* Morata, Madrid.

Sobel,M. & Lernel,N. (1996); *Algebra*, Prentice-Hall. 4a. Edición

Stein, S. K. (1994). *Cálculo y Geometría Analítica.* Mc Graw Hill, España.

Steen L. A. (1998). *On the Shoulders of Giants. La Enseñanza Agradable* *de las Matemáticas*. Limusa, Noriega Editores.

Stewart, I. 1995. *La enseñanza Agradable de las matemáticas. Editor Steen. Limusa, México. p. 185.*

Tall, D. & Vinner S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics, 22, 125-147.

Tall, David. *Advanced Mathematic Thinking.* Kluwer Academics Publishers- Dordrecht/BostonILondon (1991).

Tall, David. (1996) *Function and Calculus.* Chapter 8. University of Warwich, United Kingdom. A. J. Bishop at al. (eds.) International Handbook of Mathematics Educations.289-325.

Tamayo, Z. J. (1997). *Tesis Maestría en Enseñanza Supeerior. Comparación de Materiales didácticos.*

UAM-AZC., 1997. *Informe de actividades de la Div. De CBI.*

Vygotsky, L. 5. (1985). *Pensamiento y lenguaje.* Pléyade, Buenos aires.

Zaragoza, R.J.G. (1997). *Tesis Maestría en Educación Matemática. Propuesta metodológica para la enseñanza de topicos de algebra lineal en el bachillerato del colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM.*

Verdiguel, A. 1998. *Informe de las actividades de la Secretaría Académica de Servisios Escolares CCHN-UNAM*

Zaragoza, R.J.G. (2000). *Matemáticas I Algebra y Geometría, primera edición México.*