



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

SÍNTESIS CINEMÁTICA DE UNA SUSPENSIÓN DELANTERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE: INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A N:

CARLOS AUGUSTO MARTÍNEZ CASTAÑEDA  
CARLOS FERNANDO SÁNCHEZ MURGUIONDO

DIRECTOR:  
M.I. MIGUEL ÁNGEL CRUZ MORALES



MÉXICO D.F.

2002

TESIS CON  
FALSA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Agradecimientos:**

**Agradezco a mi madre por darme el enfoque y la dirección en la vida, así como a mi esposa Guadalupe, a mi hija Ana las cuales siempre me han brindado su apoyo incondicional.**

**A mi Hermana Sandra por siempre estar conmigo, también a mi amigo Carlos Sánchez el cual participó en la realización de este trabajo brindándome su confianza y apoyo.**

**También al M.I. Miguel Ángel Cruz Morales por la dirección y paciencia en la elaboración de este documento, además al Dr. Ángel Rojas Salgado por permitirnos basarnos en sus artículos, para la realización de este proyecto y finalmente a todos los profesores de la Facultad de Ingeniería por los conocimientos adquiridos.**

**Carlos Martínez C.**

**Agradecimientos:**

***A mi Padres, por su infinito apoyo, amistad, guía y ejemplo. Con el gran orgullo de poder entregarles este trabajo que tenía pendiente.***

***A mis Hermanos, Myrna, Pancho, Toño, Ale, Maru, Cesar, Irma y Alex, que al siempre estar unidos, representan un gran apoyo para cualquier proyecto.***

***A mi esposa Vanessa, por el soporte y el impulso a terminar esta etapa.***

***A mis otros Hermanos:***

***Carlos Martínez, por la paciencia y las grandes discusiones.***

***Eric Herrera, por el gran apoyo que representa la Amistad.***

***Humberto Sánchez, por representar la voz de mi Conciencia.***

***A todos los profesores de la Facultad de Ingeniería, por la formación que nos proporcionaron.***

***En especial al M.I. Miguel Ángel Cruz Morales, por su gran paciencia y constante impulso. Sin su ayuda, no podríamos estar escribiendo estas líneas.***

***Y al Dr. Ángel Rojas Salgado, por su aportación a este trabajo mediante sus publicaciones, éstas resultaron claves para terminar esta tesis.***

# SÍNTESIS CINEMÁTICA DE UNA SUSPENSIÓN DELANTERA

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO PRIMERO, SUSPENSIÓN.....	3
- 1.1 Calidad de Manejo y Vibraciones como Parámetros de Diseño.....	3
- 1.2 Estudio de Calidad de Manejo.....	3
- 1.2.1 Fuentes de Excitación.....	4
- 1.2.2 Mecánica Básica de la Respuesta a la Vibración del Vehículo.....	5
- 1.2.3 Percepción y Tolerancia Humana a la Vibración.....	5
- 1.3 Suspensión.....	6
- 1.3.1 Función Dinámica de una Suspensión.....	7
- 1.3.2 Función Cinemática de una Suspensión.....	13
CAPÍTULO SEGUNDO, COMPONENTES DE UNA SUSPENSIÓN.....	17
- 2.1 Componentes Dinámicos.....	17
- 2.1.1 Muelles.....	18
- 2.1.2 Amortiguador.....	20
- 2.1.3 Barra Estabilizadora.....	26
- 2.2 Componentes Cinemáticos.....	27
- 2.2.1 Componentes Geométricos y Estructurales.....	27
CAPÍTULO TERCERO, TIPOS DE SUSPENSIONES.....	28
- 3.1 Clasificación de las Suspensiones.....	28
- 3.1.1 Propiedades Dinámicas.....	28
- 3.1.2 Categorías Dinámicas de Suspensiones.....	29
- 3.1.3 Propiedades Cinemáticas.....	30
- 3.2 Tipos de Suspensiones Traseras.....	31
- 3.2.1 Muelles de Hoja o Hotchkiss.....	31
- 3.2.2 Cuatro Barras.....	32
- 3.2.3 De Dion.....	33
- 3.2.4 Poste tipo McPherson Modificado.....	34
- 3.2.5 Multibarras ó Multilink.....	35
- 3.2.6 Brazo Arrastrado.....	36
- 3.2.7 Brazo Semiarrastrado.....	37
- 3.2.8 Eje Oscilante.....	38
- 3.3 Tipos de Suspensiones Delanteras.....	39
- 3.3.1 Eje Rígido.....	40
- 3.3.2 Poste McPherson.....	40
- 3.3.3 Brazo Arrastrado.....	42

- 3.3.4 Brazo Gemelo en I.....	43
- 3.3.5 Doble Brazo de Control o Brazo Largo Corto (SLA).....	43
- 3.4 Selección del Tipo de Suspensión para un Vehículo de Competencia.....	47

**CAPÍTULO CUARTO, MÉTODO GRÁFICO DE SÍNTESIS PARA UNA SUSPENSIÓN DELANTERA..... 51**

- 4.1 Parámetros de Diseño.....	51
- 4.1.1 Parámetros Generales del Vehículo.....	51
- 4.1.2 Parámetros para el Sistema de Suspensión Delantera.....	54
- 4.2 Método Gráfico de Diseño.....	55
- 4.3 Aplicaciones del Método Gráfico.....	60

**CAPÍTULO QUINTO, MÉTODO ANALÍTICO DE SÍNTESIS PARA UNA SUSPENSIÓN DELANTERA..... 61**

- 5.1 Método Analítico de Síntesis.....	61
- 5.2 Determinación de Puntos Básicos del Mecanismo.....	62
- 5.3 Síntesis del Mecanismo por Generación de Trayectoria.....	63
- 5.4 Síntesis del Mecanismo por Conducción de Cuerpo Rígido.....	68
- 5.5 Resultados de la Síntesis.....	71

**CAPÍTULO SEXTO, CASO DE ESTUDIO..... 72**

- Primer Caso por Generación de Trayectoria.....	72
- Primer Caso por Conducción de Cuerpo Rígido.....	75
- Segundo Caso por Generación de Trayectoria.....	77
- Segundo Caso por Conducción de Cuerpo Rígido.....	80

**CAPÍTULO SÉPTIMO, CONCLUSIONES..... 83**

**BIBLIOGRAFÍA..... 85**

**APENDICES**

A – Síntesis Exacta de Conducción de Cuerpo Rígido mediante Polinomio.....	86
B – Algoritmo de Programación.....	91
C – Cálculos Casos de Estudio.....	95
D – Síntesis Cinemática de un Mecanismo de Suspensión Delantera para un Vehículo de Competencia todo Terreno.....	111

## INTRODUCCION

La ingeniería es la profesión en la cual se aplican los conocimientos, principalmente de las ciencias naturales y de las matemáticas, de una manera racional y práctica para desarrollar formas de utilizar las fuerzas y materiales de la naturaleza en beneficio de la sociedad, tomando en cuenta los posibles daños causados al medio ambiente. El conocimiento se obtiene a partir del estudio, la experiencia y la práctica.

El ingeniero abarca actividades tales como la investigación, desarrollo, diseño, construcción y producción, operación y mantenimiento, ventas y administración de cualquier bien de capital, producto o servicio relacionado, en prácticamente todas las áreas del quehacer humano.

Al terminar los estudios en la carrera de Ingeniero Mecánico, nos hemos propuesto realizar un proyecto de tesis que nos permita aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera en un problema real, aportando una solución que pueda resultar una herramienta útil a futuras generaciones de ingenieros que se involucren en un proyecto similar.

Dado que nuestra área de estudio es el Diseño Mecánico, y con el fin de presentar un trabajo original, esta tesis tiene como objetivo principal presentar un Método Analítico de Síntesis de un mecanismo de suspensión delantera del tipo brazo largo corto (SLA, por sus siglas en inglés) ó doble brazo de control, para un vehículo de competencia todo terreno. Este método se basa en el método gráfico utilizado en los diseños de competencias anteriores en las que ha participado la Universidad Nacional Autónoma de México, desde el año de 1990 y el cual se ha seguido utilizando hasta la fecha.

Este tema surge de la competencia anual Interuniversitaria organizada por la Society of Automotive Engineers (SAE), cuyo fin es el desarrollo de las habilidades del estudiante en el campo del diseño automotriz. En esta competencia se desarrolla un proceso en el cual el estudiante se ve involucrado en todas las áreas relacionadas con el diseño y fabricación de un vehículo de competencia, teniendo que llegar a resultados prácticos que puedan ser probados.

La SAE constituye el organismo rector de la Industria Automotriz en los Estados Unidos de América. Esta sociedad se encarga de dictar las normas de diseño y construcción de vehículos en dicho país, además de tener secciones en otros países como es el caso de México.

En SAE, existe una sección estudiantil, que está conformada por los estudiantes de distintas Universidades de Norte y Centroamérica, en cuyo caso se encuentra la Universidad Nacional Autónoma de México.

Las competencias que se organizan, tienen como finalidad el desarrollar las capacidades de organización, planeación y creatividad de los estudiantes de ingeniería de las distintas universidades que son miembros de SAE.

Para cumplir con tal propósito, se adopta un concepto general de competencia, en donde cada equipo trabaja en la misma empresa ficticia y debe competir con los demás equipos para lograr que su diseño sea elegido por los directivos y pueda ser fabricado en serie.

Cada equipo debe diseñar y producir un prototipo que pueda ser evaluado. Dentro de esta actividad, el equipo de trabajo divide el diseño y fabricación en diferentes sistemas, como son: estructura, tren motriz, frenos, eléctrico, seguridad, dirección y suspensión.

Con el fin de satisfacer la competencia, es necesario que el vehículo cumpla con ciertas características en general:

- El vehículo debe ser capaz de circular por terrenos muy escabrosos sin sufrir daños severos que puedan llegar a afectar su funcionamiento.
- Debe ser seguro, de fácil manejo y su mantenimiento debe ser lo más simple posible.
- Además debe ser fabricado al menor costo, tanto en materiales como en mano de obra.

Para poder evaluar que las características del diseño cumplen con los requerimientos, el vehículo es sometido a una serie de pruebas estáticas como ingeniería de diseño, seguridad, costo y presentación del diseño; y dinámicas, como capacidad de aceleración, frenado, giro, subida de pendientes y resistencia en una competencia de cuatro horas de duración sobre una pista con toda clase de obstáculos.

Si se toman en cuenta los criterios que se tienen en la evaluación del vehículo, es posible notar que el correcto funcionamiento de la suspensión es primordial para el adecuado comportamiento del vehículo en general.

Una vez definidos los objetivos y problemática inicial, se procederá en los primeros tres capítulos a estudiar los fundamentos teóricos del sistema de suspensión, sus elementos, los diferentes tipos, sus características y los factores que influyen para la elección del sistema de suspensión a utilizar. En el Capítulo 4 se presenta el Método Gráfico de Síntesis y en el Capítulo 5, el Método Analítico de Síntesis propuesto. Presentando en los 2 últimos Capítulos dos casos de estudio, su solución siguiendo el Método Analítico y las conclusiones de este trabajo.

## **CAPÍTULO PRIMERO**

### **SUSPENSIÓN**

#### **1.1 Calidad de Manejo y Vibraciones**

Los automóviles se desplazan a altas velocidades y como consecuencia experimentan un rango de vibraciones. Estas son transmitidas a los pasajeros ya sea por forma audible, táctil o visual. El término "Calidad de Manejo" o Ride es comúnmente usado en el estudio de un vehículo automotor, en referencia a las vibraciones táctiles o visuales, percibidas por los ocupantes del vehículo como una sensación, mientras que las vibraciones audibles se consideran y son percibidas como ruido.

El espectro de vibraciones se puede dividir de acuerdo a la frecuencia, y se clasifica como vibraciones de Calidad de Manejo (0-25 Hz.) y ruido (25-20000 Hz). El límite de 25 Hz es aproximadamente la frecuencia mas baja audible para el ser humano, así como la frecuencia máxima de vibración del común de los vehículos de motor.<sup>(1)</sup>

El ambiente de vibración es uno de los criterios más importantes por el cual el ocupante juzga la calidad del diseño y construcción de un vehículo, de una manera subjetiva. De esto surge una de las dificultades más grandes en desarrollar métodos objetivos de Ingeniería para tratar con la Calidad de Manejo, como un modo de desempeño del vehículo.

#### **1.2 Estudio de Calidad de Manejo**

Las vibraciones de baja frecuencia son manifestaciones del comportamiento dinámico común en todos los vehículos con neumáticos de hule. El vehículo es un sistema dinámico, pero solo exhibe vibración en respuesta a fuentes de excitación. Las propiedades de respuesta determinan la magnitud y dirección de las vibraciones transmitidas a los pasajeros. Por lo tanto para entender el término Calidad de Manejo se involucra el estudio de los siguientes puntos:

- Fuentes de excitación
- Mecánica básica de la respuesta a la vibración del vehículo
- Percepción y tolerancia humanas a la vibración

(1) Thomas D. Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics, p.p.125-126, SAE 1992

### **1.2.1 Fuentes de Excitación**

Existen múltiples fuentes por las cuales se pueden excitar vibraciones en el vehículo. Generalmente son de dos clases: irregularidades del camino y fuentes internas del vehículo.

Estas últimas surgen de los componentes rotativos, que incluyen el ensamble rueda-neumático, transmisión y motor, el desequilibrio de los órganos que unen los componentes anteriores y la irregularidad de su rotación.

A partir de las causas internas se generan oscilaciones de alta frecuencia, generalmente percibidas como ruido, cuya influencia en los pasajeros no es considerable en comparación con las causas externas o irregularidades del camino.

Estas irregularidades comprenden los baches que son defectos del pavimento que surgen debido al uso que se hace de dicha superficie, además de las desviaciones aleatorias, que son las elevaciones y descensos de la superficie que se originan a causa de un pavimento defectuoso.

A medida que empeora el estado de la superficie del camino, la cantidad de baches va en aumento y la longitud de las irregularidades disminuye.

Las irregularidades del camino se definen como el perfil de elevación sobre la trayectoria en la que se desplaza el vehículo, actuando como una fuente de desplazamiento vertical en las ruedas que provoca vibraciones que se perciben en la Calidad de Manejo.

La velocidad de desplazamiento se define como la transformación del perfil de elevación en función del tiempo. Es decir, como la primera derivada en  $f(t)$  y a la aceleración como una segunda derivada en  $f(t)$ .

La aceleración producida en las ruedas se considera como la medida más común y significativa de la vibración.

Los neumáticos son un elemento flexible que absorbe irregularidades del camino al deformarse, sin contribuir en la excitación de vibración al vehículo. Estos soportan al vehículo por medio de presión neumática y consisten en una caja inflada con aire a presión que representa un muelle. A medida que la presión en el neumático es menor y sus dimensiones mayores, aumenta la capacidad de deformarse.

En la práctica, las imperfecciones en los neumáticos, ruedas, masas, frenos y otras partes rotativas del ensamble, pueden provocar variaciones en las fuerzas y momentos del vehículo con respecto al terreno. Estas variaciones son

transmitidas a su vez al eje del vehículo y actúan como fuentes de excitación de vibración.

Las vibraciones de los neumáticos no son controladas directamente por ninguna clase de amortiguación, pero tienen que pasar por todo el sistema de suspensión para llegar a los pasajeros, por lo que su efecto en ellos es mínimo.

Otro parámetro que se debe tomar en cuenta en el estudio de la Calidad de Manejo, es el hecho que las ruedas se mantengan siempre a la misma distancia entre sí, midiéndose al ras del piso.

Si las ruedas se mueven en dirección perpendicular a la superficie, la distancia entre dichas ruedas puede variar al pasar sobre las irregularidades del camino. Esto trae como consecuencia que los neumáticos se arrastren lateralmente disminuyendo la vida de los mismos.

### **1.2.2 Mecánica Básica de la Respuesta a la Vibración del Vehículo**

Un estudio del vehículo como un sistema dinámico, comienza con las propiedades básicas del movimiento del vehículo. Por ejemplo el movimiento de la carrocería y los ejes contra los demás sistemas del vehículo. A baja frecuencia, la carrocería se mueve como una unidad integral con respecto a los elementos de soporte, esto se considera como movimiento de cuerpo rígido.

Los ejes y componentes asociados a las ruedas, se mueven también como cuerpos rígidos y consecuentemente provocan una fuerza de excitación en el vehículo. Además, existen otras variables de diseño y condiciones de operación que afectan la respuesta de vibración en el vehículo.

El comportamiento dinámico del vehículo se puede caracterizar considerando la relación fuente-respuesta, siendo la fuente cualquiera de las excitaciones descritas anteriormente o una combinación de ellas. La respuesta de vibración de mayor interés se localiza en la carrocería.

La amplitud de la relación fuente-respuesta representa una ganancia para el sistema dinámico. La transmisibilidad es un término usado comúnmente para representar ganancia, y se define como "La relación no dimensional de la amplitud de respuesta con respecto a la amplitud de excitación, para un sistema en vibración en estado estable". Esta relación puede ser de fuerza, desplazamiento, velocidad o aceleración.

### **1.2.3 Percepción y Tolerancia Humanas a la Vibración**

Como se mencionó anteriormente, un factor importante en la Calidad de Manejo tiene que ver con la forma en como es percibida. Esta es una percepción subjetiva, normalmente asociada con el nivel de confort experimentado cuando

se viaja en un vehículo, que en un sentido general es la acumulación de varios factores.

Las vibraciones táctiles transmitidas al cuerpo de los pasajeros a través del asiento, a las manos a través del volante, y a los pies a través del piso o los pedales, son los factores más comunes asociados con la Calidad de Manejo. Todavía es difícil separar las percepciones acústicas en la percepción del manejo, especialmente debido a que algunos tipos y niveles de ruido están relacionados con otras vibraciones del vehículo.

Adicionalmente el nivel de confort general, puede ser influenciado por el diseño del asiento y como se ajusta al pasajero, la temperatura, ventilación, el espacio interior y muchos factores que en conjunto contribuyen a la Calidad de Manejo.

La búsqueda de un diseño óptimo para Calidad de Manejo es eliminar todas las vibraciones en el vehículo, aún cuando esto no puede ser posible completamente.

Existen dos fenómenos contrarios con los cuales se tiene que trabajar. Primero, la eliminación de una vibración siempre expondrá otra molestia menor. Segundo, la eliminación de toda vibración es también indeseable, ya que las vibraciones son la fuente de la sensación del camino, considerada como una retroalimentación esencial para el conductor.

### **1.3 Suspensión**

Se define como una suspensión automotriz al conjunto de dispositivos elásticos destinados a proporcionar:

- Protección a los componentes del vehículo cualesquiera que sean el estado del terreno y las condiciones de manejo.
- Estabilidad del vehículo ante cualquier obstáculo, desnivel del terreno, radio de viraje, pendiente, frenado, etc.
- Además de la comodidad de los pasajeros y protección de la carga, reduciendo los movimientos de la masa amortiguada del vehículo. <sup>(2)</sup>

El sistema de suspensión tiene dos funciones principales:

- 1) Proveer un elemento vertical de unión entre las masas amortiguadas y no amortiguadas. Este elemento debe permitir a las ruedas mantener contacto con la superficie del camino, cualquiera que este sea, mejorando la Calidad de Manejo de las masas amortiguadas.

(2) M. Charlotiaux, Suspensión y Dirección p.p 10

- 2) Proveer un mecanismo (en conjunto con el sistema de dirección) que sea capaz de mantener una orientación apropiada de las ruedas, relativa al vehículo y a la superficie del camino. Donde las fuerzas y momentos generados por la masa de carga, inercia, frenado y las ruedas sean transmitidos y distribuidos entre las masas amortiguadas y las no amortiguadas.<sup>(3)</sup>

Ambas funciones están ligadas. Movimientos verticales en un sistema de suspensión, invariablemente generan movimientos de rotación y translación en otras direcciones.

Además, un sistema de suspensión tiene otras funciones como:

- Transferir fuerzas de giro y frenado entre el bastidor y ejes.
- Resistir torque de giro y frenado.
- Mantener un avance (Caster) adecuado.
- Mantener los ejes paralelos entre sí y perpendiculares al bastidor.
- Mantener al mínimo el cambio de ángulos en el piñón del eje delantero.

Con las características deseables de:

- Máxima flexibilidad consistente con la estabilidad
- Compatibilidad con otros componentes
- Peso mínimo
- Bajos costos de operación y mantenimiento
- Proveer una frecuencia natural constante en cualquier momento
- Bajo costo inicial.

### **1.3.1 Función Dinámica de la Suspensión**

La masa de un automóvil se divide en dos grupos, las masas amortiguadas y sin amortiguar.

- Las amortiguadas, son aquellas cuyo peso se transmite a los elementos elásticos de la suspensión. En el caso del automóvil las constituyen la carrocería y el bastidor con los mecanismos fijados en él.
- Las masas sin amortiguar están constituidas por los ejes y las ruedas.

La reducción del peso de las masas no amortiguadas disminuye la fuerza de choque que se trasmite a las masas amortiguadas. El aumento del peso en las masas amortiguadas reduce su sensibilidad a la fuerza de choque.

Es por esto, que el valor del coeficiente de las masas amortiguadas aumenta cuando disminuye el peso de las masas no amortiguadas.

(3) M. Charteaux, Suspensión y Dirección, p.p. 15

La denominación de masas no amortiguadas es un tanto convencional, debido a que éstas tienen apoyo flexible en los neumáticos.

En el nivel más básico, todos los vehículos se pueden modelar como un sistema de una masa amortiguada, soportada por sistemas primarios de suspensión en cada rueda.

El comportamiento dinámico de este sistema es el primer nivel de aislamiento contra las irregularidades del camino. La dinámica esencial de un sistema de suspensión se puede representar como un modelo de un cuarto del vehículo, figura (1.1).<sup>(4)</sup>

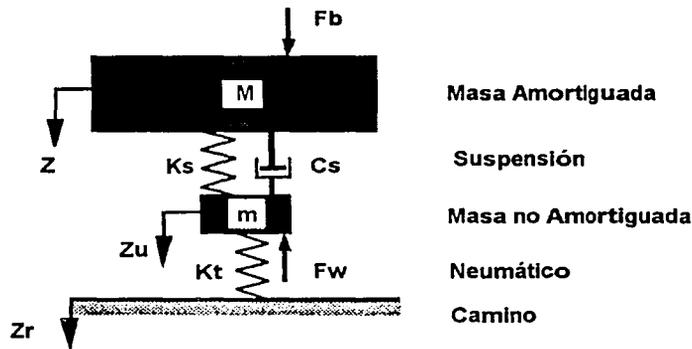


Figura 1.1 Modelo Dinámico de un Cuarto del Vehículo

Este consiste en una masa amortiguada soportada en una suspensión primaria, que a su vez se conecta a la masa no amortiguada del eje. La suspensión tiene propiedades de rigidez y de amortiguamiento. El neumático se representa como un resorte simple, aunque en algunas ocasiones se incluye un amortiguador para representar la pequeña cantidad de amortiguamiento inherente a la naturaleza elástico-viscosa del neumático.

### 1.3.1.1 Análisis del Rango de Calidad de Manejo y Frecuencias de Vibración

La masa amortiguada, sostenida por los muelles de la suspensión y el neumático, es capaz de desplazarse en forma vertical. La rigidez efectiva de la suspensión en serie con la rueda se denomina como rango de Calidad de Manejo ó "Ride Rate", y se determina como sigue:

$$RR = \frac{K_s \cdot K_t}{K_s + K_t} \quad (1.1)$$

(4) Thomas G. Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics p. 147

Donde:

$RR$  = Rango de Calidad de Manejo  
 $K_s$  = Rigidez de la Suspensión  
 $K_t$  = Rigidez del Neumático

$$K_s = \frac{800 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \quad (1.2)$$

$D$  = Diámetro del Resorte (\*\*)  
 $d$  = Diámetro de la Espira  
 $G$  = Constante del Material  
 $n$  = Número de Espiras

y  $K_t$  = Constante del Neumático

$$K_t = \frac{\Delta F}{\Delta h} \quad (1.3)$$

$\Delta F$  = Carga Soportada  
 $\Delta h$  = Desplazamiento provocado por dicha Carga

En ausencia de amortiguamiento, la frecuencia natural de vibración en cada esquina del vehículo se puede determinar como:

$$\omega_{nf} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{RR \cdot g}{W}} \quad (1.4)$$

Donde:

$W = M g$  = Peso de la masa amortiguada  
 $M$  = Masa amortiguada  
 $g$  = Aceleración de la gravedad

Cuando se presenta amortiguamiento, como en la suspensión, la resonancia ocurre a una frecuencia natural amortiguada.

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta_s^2} \quad (1.5)$$

Donde:

$\zeta_s$  = Rango de Amortiguamiento

$$\zeta_s = \frac{C_s}{\sqrt{4 \cdot K_s \cdot M}} \quad (1.6)$$

$C_s$  = Coeficiente de amortiguamiento de la suspensión

(\*\*) Como se muestra en la Figura 2.2

Para una Calidad de Manejo adecuada el rango de amortiguamiento en los vehículos modernos de pasajeros usualmente se ubica entre los 0.2 y 0.4. Debido a la influencia del amortiguamiento sobre la frecuencia de resonancia en la ecuación, esta es usualmente cercana a la frecuencia natural.

Con un rango de amortiguamiento de 0.2, la frecuencia natural no amortiguada es del 98 % de la frecuencia natural amortiguada, e incluso a 0.4 de rango de amortiguamiento, el rango es de alrededor de 92 %. Debido a esta diferencia tan pequeña, la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es comúnmente usada para caracterizar el vehículo.

### 1.3.1.2 Deflexión Estática

La relación de  $W / K_s$  representa la deflexión estática de la suspensión resultante del peso del vehículo. Debido a que la deflexión estática predomina al determinar la frecuencia natural, dicha deflexión es un parámetro directo y simple, indicativo del límite inferior en el aislamiento del sistema.

Una deflexión estática de 254mm (10 in) es necesaria para alcanzar una frecuencia natural de 1 Hz, considerada como el diseño óptimo en vehículos de turismo. Una deflexión de 127 mm (5 in) resulta en una frecuencia de 1.4 Hz, y de 25 mm (1 in) equivale a una frecuencia de 3.13 Hz.

Ya que no es necesario que la suspensión provea un desplazamiento completo de 254 mm (10 in), para alcanzar una frecuencia de 1 Hz se requieren provisiones para deflexiones más largas con frecuencias más bajas, figura (1.2).

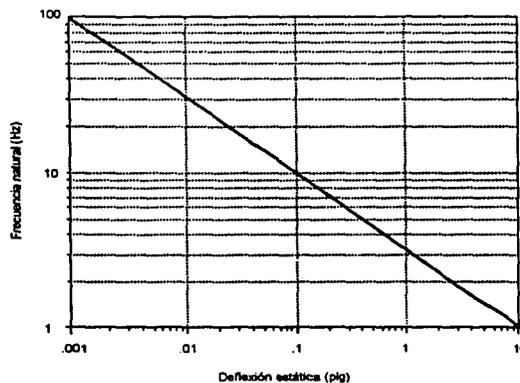


Figura 1.2 Deflexión vs Frecuencia

Por ejemplo con un rango de muelleo lo suficientemente bajo para alcanzar 1 Hz de frecuencia, al menos 127 mm (5 in) de recorrido tienen que estar disponibles para absorber aceleraciones de .5 g sin llegar a golpear los topes de la suspensión. La mayoría de los vehículos grandes tienen un recorrido útil en la suspensión de 177 a 203 mm (7 a 8 in). En vehículos pequeños este recorrido se reduce de 127 a 152 mm (5 o 6 in).

Para fuentes de rugosidad del camino, la ganancia es la relación de movimiento de las masas amortiguadas (aceleración, velocidad o desplazamiento) contra la fuente equivalente del camino. A muy baja frecuencia, la ganancia es unitaria (la masa amortiguada se mueve exactamente igual que la del camino).

Por diseño clásico en vehículos de motor, la masa amortiguada se elige para obtener una frecuencia de 1 Hz o cercana a este. Por lo tanto a frecuencias cercanas a 1 Hz, la masa amortiguada está en resonancia sobre la suspensión y la influencia del camino se amplifica.

La relación de amplitud en este punto es muy sensitiva al nivel de amortiguamiento, y en los vehículos de pasajeros este rango es de 1.5 a 3 Hz. En los vehículos de carga este rango alcanza niveles de 5 a 6 Hz en las condiciones más críticas de operación.

### **1.3.1.3 Propiedades del Amortiguador**

El amortiguador cumple con la misión de devolver al muelle a su posición de equilibrio en el menor tiempo posible, absorbiendo la energía cinética transmitida a la masa suspendida y convirtiendo en calor el exceso de energía dispersándola a la atmósfera.

Además impide que se acumulen las oscilaciones de las masas del automóvil cuando se presentan las irregularidades del camino de manera frecuente, y reduciendo el tiempo durante el cual varía la adherencia de los neumáticos.

Sin embargo, el uso de amortiguadores cada vez más resistentes tiende a volver rígida la suspensión, por lo que el amortiguador ideal es aquel que extingue en un menor tiempo las oscilaciones, conservando cierto grado de suavidad de manejo.

### **1.3.1.4 Propiedades de los Muelles**

El Muelle es otro de los elementos que conforman la suspensión y que afectan de manera directa el comportamiento dinámico del vehículo. Estos pueden ser de hojas múltiples, resortes o barras de torsión, que físicamente funcionan bajo los mismos principios básicos:

- Régimen de deflexión:

Se define como el número de libras requerido para flexionar el muelle una pulgada, al aplicarle carga a un sistema de suspensión.

- Régimen de oscilación o frecuencia:

Se define como el número de oscilaciones por minuto que sufre un sistema de suspensión, cuando se comprime y se libera dejándolo vibrar libremente sin amortiguación.

$$N = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (1.7)$$

Donde  $N$  = Frecuencia de Oscilación  
 $k$  = Constante del Resorte  
 $M$  = Masa Suspendida.

Dividiendo la frecuencia de oscilación entre los ejes delanteros y traseros, la masa suspendida se calcula:

$$M_{sf} = \frac{M_{sb}}{L} \quad \text{Siendo } M_{sf} \text{ la Masa Estática Frontal} \quad (1.8)$$

$$M_{sr} = \frac{M_{sa}}{L} \quad \text{Siendo } M_{sr} \text{ la Masa Estática Trasera} \quad (1.9)$$

donde  $L = a + b$

siendo  $a$  = distancia del centro de masa al eje delantero del vehículo y  
 $b$  = distancia del centro de masa al eje trasero del vehículo

El régimen de deflexión y la frecuencia de oscilación de un muelle o suspensión, son proporcionales ya que un muelle con un régimen bajo de deflexión también tendrá una frecuencia baja de oscilación y uno con alto régimen de deflexión, tendrá una frecuencia alta de oscilación.

Una suspensión se considera óptima cuando la frecuencia de oscilación se encuentra entre los 50 y 75 ciclos/min. (Aproximadamente 1 Hz.).

Los vehículos con suspensiones de baja frecuencia (menor a 50 ciclos/min.), como algunos automóviles tipo turismo, tendrán usualmente oscilaciones más elevadas, provocando movimientos que pueden llegar a causar mareos en algunos pasajeros, mientras que los vehículos pesados y por ende con una frecuencia de oscilación alta (mayor a 100 ciclos/min.) ocasionan un andar duro e incómodo.

### **1.3.1.5 Maniobrabilidad**

Otro de los conceptos que se manejan en el estudio de suspensiones, es la llamada maniobrabilidad (Handling), que asume el hecho de que los neumáticos estén en contacto constante con la superficie.

La maniobrabilidad llega a ser más crítica en tanto que el vehículo incremente su velocidad o bien cuando se presenten cambios de dirección más bruscos.

La maniobrabilidad tiene una gran importancia en la comodidad de los pasajeros, la integridad de las cargas que se transportan, la seguridad de tráfico y la duración del vehículo.

### **1.3.2 Función Cinemática de una Suspensión**

Un estudio cinemático de un sistema de suspensión esta relacionado con la estructura de los mecanismos que lo conforman y de su interacción con otros sistemas.

Un sistema de suspensión, se puede representar como la aplicación de un mecanismo acoplador de 4 barras, en donde el movimiento de las ruedas del vehículo hacia arriba y hacia abajo están controladas por algunas combinaciones de eslabonamientos en un plano, dispuestas por duplicado para proporcionar control tridimensional.

Algunos fabricantes emplean un verdadero eslabonamiento espacial, en el que estos no están colocados en planos paralelos. En este caso de estudio, solo se revisará el mecanismo en un plano bidimensional.

En todos los casos el ensamble de las ruedas se une a la barra acopladora del eslabonamiento, y su movimiento es a lo largo de un conjunto de curvas de la barra acopladora. En el caso de un mecanismo de suspensión, donde también interesa la orientación de la rueda, el estudio del mecanismo no es estrictamente un problema de generación de trayectoria, sino de movimiento de Cuerpo Rígido.

El diseño del eslabonamiento para controlar las trayectorias de los puntos múltiples de la rueda, como son el área del contacto de la llanta y el centro de la rueda, se considera como parte del eslabón de un cuerpo rígido extendido a la barra acopladora.

En las figuras (1.3) y (1.4) se muestran eslabonamientos planos de 4 barras paralelos en los que se suspenden las ruedas. La trayectoria generada por el Cuerpo Rígido unido a la barra acopladora, en el punto medio de la rueda, es casi una línea recta sobre el pequeño desplazamiento vertical requerido. Esto es deseable si se quiere mantener la llanta perpendicular al pavimento para una

mejor tracción en los cambios de dirección, aceleración y frenado de la carrocería del vehículo.

Siguiendo el estudio cinemático por análisis de mecanismos, se puede considerar que esta aplicación se trata de un eslabonamiento de no Grashof, definiendo a un eslabonamiento en condición de Grashof cuando un eslabón es capaz de realizar una revolución completa con respecto al plano de fijación.<sup>(5)</sup> y no Grashof cuando ninguno de los eslabones es capaz de realizar una revolución completa.

Los resortes sostienen el peso del vehículo y proporcionan un quinto "eslabón de fuerza" de longitud variable que estabiliza el mecanismo. El eslabonamiento de 4 barras sólo guía y controla los movimientos de las ruedas.

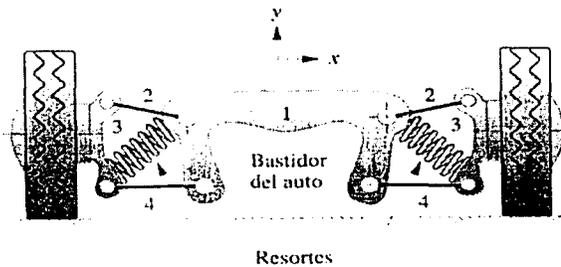


Figura 1.3 Suspensión con eslabonamientos planos

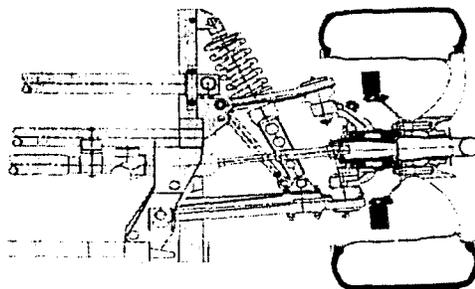


Figura 1.4 Suspensión con eslabonamientos planos en paralelo

(5) Diseño de Maquinaria, Robert L. Norton, pp 50.

### 1.3.2.1 Sistemas del Vehículo que Influyen en la Percepción

Un elemento a considerar es la influencia que ejerce el sistema de dirección sobre el correcto funcionamiento de la suspensión, por tal motivo es relevante definir los siguientes aspectos:

**Avance (Caster).**- Es el ángulo formado entre el vástago de dirección y la vertical, visto el vehículo lateralmente. Se considera positivo cuando el extremo superior de este vástago está inclinado hacia la parte posterior del vehículo. Las especificaciones de los fabricantes varían considerablemente desde  $1.5^\circ$  a  $2.25^\circ$ .

Un avance positivo ayuda al vehículo estabilizándolo direccionalmente, haciendo que éste avance en línea recta y permitiendo un rápido regreso del volante a su posición original después de un giro. Sin embargo un avance demasiado positivo puede ocasionar que el volante regrese bruscamente y provoque un control difícil del vehículo, figura (1.5).

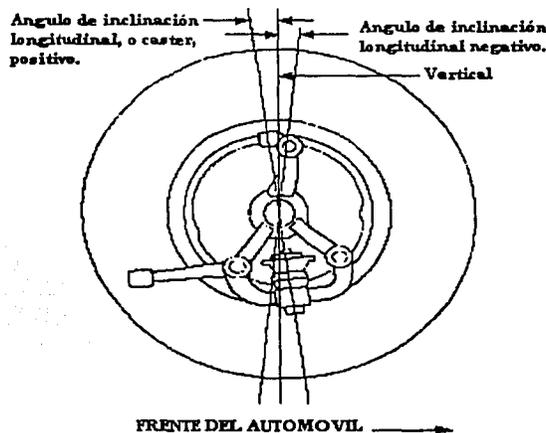


Figura 1.5 Avance

**Inclinación de la Rueda (Camber).**- Es el ángulo formado por el plano que contiene la rueda y la vertical, es positiva cuando el extremo superior de la rueda se inclina hacia el exterior. La mayoría de los fabricantes utilizan una variación del ángulo de inclinación entre  $-2^\circ$  y  $0.5^\circ$ , en la posición de equilibrio.

Durante un giro, una inclinación negativa brindará una superficie de contacto mayor del neumático exterior, mientras que una positiva producirá el mismo efecto en el neumático interior. La suma de estas dos condiciones constituye la condición ideal, figura (1.6).

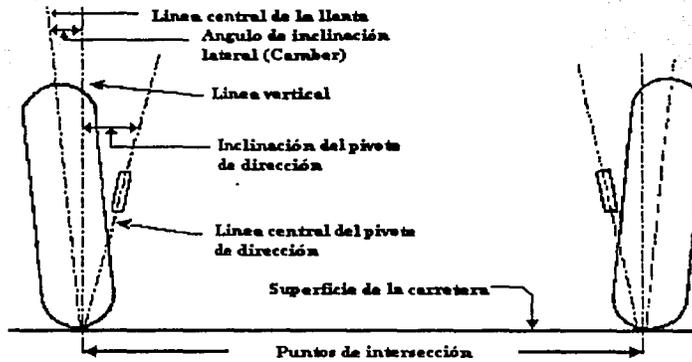


Figura 1.6 Inclinación de Rueda

Convergencia (Toein) Es la diferencia de distancias entre los puntos extremos trasero y delantero de los neumáticos, cuando éstos son vistos desde arriba y se acercan en su extremo delantero, figura (1.7).

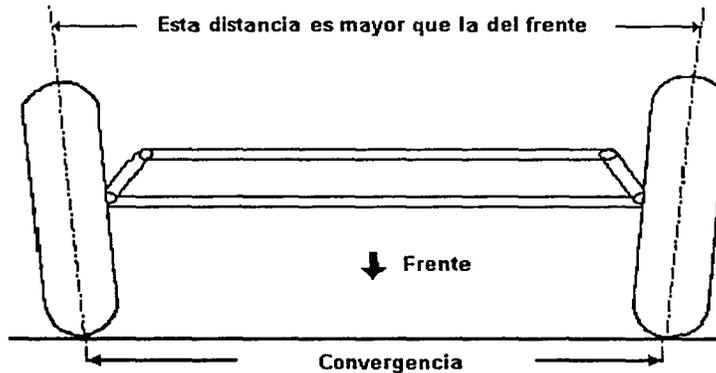


Figura 1.7 Convergencia

La convergencia varía cuando el automóvil está en reposo o en movimiento, debido a que la fuerza de rodadura provoca que los neumáticos diverjan y no rueden paralelos entre sí. Esta condición puede provocar arrastre y un desgaste excesivo.

## CAPÍTULO SEGUNDO

### COMPONENTES DE UNA SUSPENSIÓN

#### 2.1 Componentes Dinámicos

Tomando como base el Diagrama Dinámico de un Cuarto del Vehículo, figura (1.1), el sistema completo de suspensión, en su sentido general, se obtiene:

- Entre el suelo y los ejes de las ruedas, mediante los neumáticos  $K_t$ .
- Entre los ejes de las ruedas y el chasis, mediante el resorte  $K_s$  y el amortiguador  $C_s$ .
- Entre el chasis y los ocupantes, mediante los asientos.

Sin embargo para definir las partes de una suspensión en forma práctica se consideran solamente los elementos elásticos  $K_s$  y  $C_s$ .

- Las masas no amortiguadas formadas por los ejes y las ruedas, además de los componentes de la suspensión.
- Las masas amortiguadas compuestas por el chasis, tren motriz, carrocería, etcétera.
- Y los componentes de enlace: que comprenden la dirección, suspensión, flechas de propulsión, frenos, etc., los cuales unen por una parte al chasis y por otro a las ruedas. En la figura (2.1) se observa un sistema de suspensión delantera.

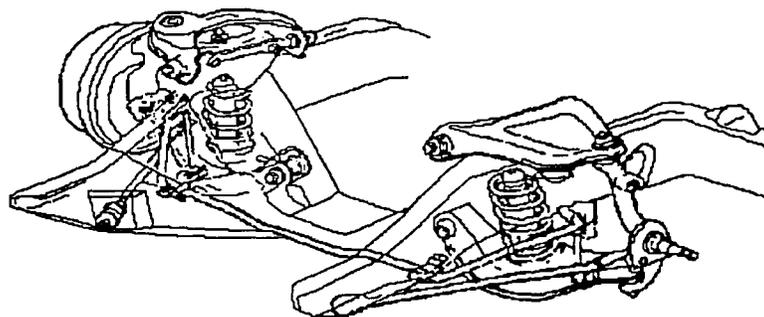


Figura 2.1 Sistema de Suspensión Delantera

Los elementos principales que conforman la suspensión son:

Dinámicos:

- Muelle
- Amortiguador
- Barra estabilizadora

Cinemáticos:

- Componentes geométricos y estructurales

### **2.1.1 Muelles**

Existen diversos tipos entre los que se encuentran de Láminas, Resortes Helicoidales, o Barras de Torsión.

#### **2.1.1.1 Muelles de Láminas**

Generalmente las láminas son semielípticas y pueden contar con una sola hoja (Taper) o varias hojas (Multileaf) que trabajan a flexión. La hoja más larga, comúnmente llamada maestra, se fija mediante articulaciones, una libre mediante un columpio y la otra fija directamente al bastidor.

Las principales ventajas de los muelles de láminas son, la simplicidad de fabricación y su mayor capacidad de carga. Por el contrario, presenta el inconveniente de tener un mayor peso, a características de flexibilidad y fatiga de trabajo similar que otros tipos de muelles.

#### **2.1.1.2 Resortes Helicoidales**

Este tipo de muelle está construido con varillas de acero de sección generalmente circular, que trabajan por torsión y flexión.

Las características de este resorte son, además de las cualidades propias del acero utilizado, el diámetro medio de arrollamiento  $D$ , el diámetro  $d$  de la sección, el número de espiras  $n$  y el paso de hélice  $p$  que, en la mayor parte de los resortes, es igual, como máximo, al tercio del diámetro  $D$ , con objeto de limitar los esfuerzos de flexión que se adicionan a los de torsión.

Las espiras finales son horizontales para que exista un perfecto asentamiento entre las superficies a través de las cuales se transmite el peso.

Dentro de este tipo de muelles, existen los resortes de flexibilidad variable que utilizan resortes de sección cónica.

Al ser la flexibilidad de una espira tanto más grande cuanto más lo sea el diámetro de arrollamiento, la flexibilidad del resorte variará desde el momento en que la carga alcance un valor a partir del cual unas espiras vengán en contacto con la espira contigua, figura (2.2).

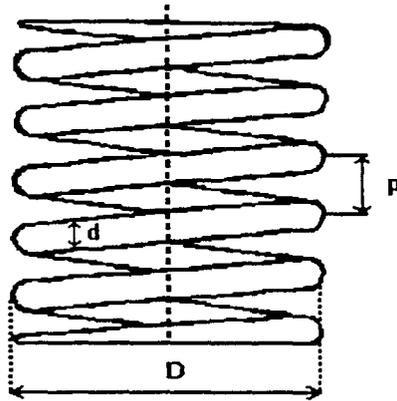


Figura 2.2 Resorte Helicoidal

La disminución de la flexibilidad en función de la carga depende del ángulo en el vértice del cono sobre el que está arrollado el resorte.

#### Ventajas

- Instalación sencilla, principalmente en ruedas independientes.
- Acepta contorsiones. Los planos de apoyo superior e inferior deben tener un ángulo no mayor a 10 grados con respecto a la horizontal.
- La amortiguación propia es despreciable (solo amortiguación molecular).
- No necesita lubricación.
- La fabricación es más compleja que los muelles de lámina, con mayor conveniencia para producción en serie.
- La flexibilidad es prácticamente constante, esta es por consiguiente la característica más conocida del diseñador desde un inicio del proyecto de la suspensión.

#### Desventajas

- Mayor sensibilidad del vehículo, debido a fallas en amortiguador.
- Modifica sus características más fácilmente que la muelle de hojas.

#### 2.1.1.3 Barras de Torsión

Son comúnmente de sección circular, y sus extremos son normalmente estriados. Uno de sus extremos se fija al bastidor o a la carrocería, y el otro extremo se fija al elemento móvil de la suspensión, figura (2.3).

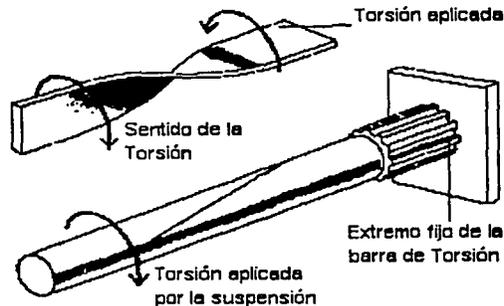


Figura 2.3 Barra de Torsión típica

Las barras de torsión siempre requieren un dispositivo regulador angular, ya sea por palanca con tornillo ajustable o bien por levas y excéntrico.

Ventajas:

- Fácil instalación y ajuste, ocupando el mínimo espacio.
- Permite diseños más ligeros.

Desventajas:

- Cuidadosa y delicada manufactura, particularmente en tratamientos térmicos.
- En caso de ruptura la rueda no se sostiene.

## 2.1.2 Amortiguador

Se ha visto que el encuentro con una serie de irregularidades del camino puede dar lugar al fenómeno de resonancia, y que el confort, así como la estabilidad en ruta, están íntimamente ligadas a la amplitud de las oscilaciones y a la velocidad y aceleración comunicada a las masas amortiguadas y no amortiguadas.

El amortiguador es un mecanismo hidráulico que sirve para reducir las vibraciones de los muelles. No soporta peso ni regresa a su posición original después de haberse desplazado, esta función la realiza exclusivamente el muelle, el amortiguador en cambio reduce la amplitud y el número de oscilaciones de los muelles con lo que se brinda al vehículo mayor estabilidad y confort.

### 2.1.2.1 Función del Amortiguador

Además de absorber la energía cinética del sistema y equilibrar el movimiento del muelle, el amortiguador tiene las funciones de brindar un mayor confort mejorando la Calidad de Manejo, y reducir el tiempo durante el cual los neumáticos pierden adherencia al camino con lo que se logra una adecuada maniobrabilidad.

El problema a resolver es complicado:

- Es necesario frenar simultáneamente las oscilaciones de la masa amortiguada y de la masa no amortiguada a fin de evitar el rebote de las ruedas sin endurecer demasiado la suspensión, ya que las frecuencias de oscilación de estas masas son muy diferentes entre sí.
- Toda acción del amortiguador en la rueda encuentra normalmente su reacción sobre la parte amortiguada, a menos de amortiguar separadamente las oscilaciones de la masa amortiguada y no amortiguada, o cuando menos, reducir estas últimas mediante un dispositivo especial.
- Las irregularidades del camino están repartidas arbitrariamente y no tienen un sentido preferencial ni hacia abajo ni hacia arriba.
- Es conveniente que el amortiguador no intervenga, o en todo caso poco, ante las oscilaciones de poca amplitud y de alta frecuencia, pues de lo contrario la masa amortiguada estaría sometida a trepidaciones sin obtenerse una mejora sensible en la estabilidad de ruta.
- La velocidad y la aceleración de las oscilaciones son función no solo de la amplitud sino también de la frecuencia, y ésta última varía, para una rigidez determinada, de acuerdo con el estado de carga, a menos que la rigidez no varíe en función de la carga de manera apropiada, para obtener una frecuencia constante.

### **2.1.2.2 Amortiguamiento**

El amortiguamiento en la suspensión proviene de la acción de amortiguadores hidráulicos. Estos no absorben el impacto de las irregularidades del camino, son otros componentes de la suspensión los que absorben los impactos mientras que la función del amortiguador es, como se mencionó anteriormente, disipar la energía del sistema provocada por las irregularidades del camino.

El efecto nominal de amortiguamiento se ilustra en el modelo de un cuarto del vehículo por la respuesta de ganancia mostrada en la figura (2.4).

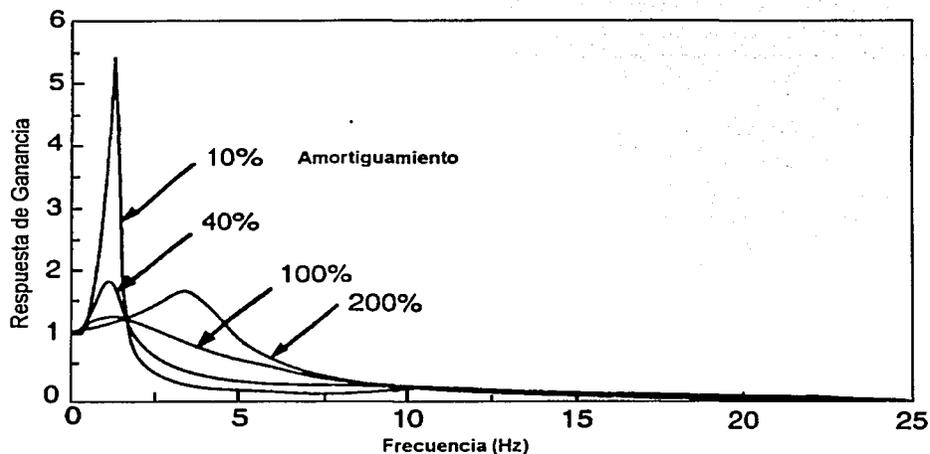


Figura 2.4 Gráfica de Ganancia vs. Frecuencia

El porcentaje de amortiguamiento se determina del rango de amortiguación dado en la ecuación:

$$T = \frac{C_s}{4 \cdot K_s \cdot M} \quad (2.1)$$

A muy bajo amortiguamiento (10%), la respuesta es dominada por una muy alta respuesta a 1 hz. Este tipo de respuesta, referida como "Flotar", provoca que la masa amortiguada amplifique las ondulaciones largas en el camino. Dado que esto es indeseable se obtienen beneficios a todas las frecuencias por arriba del punto de resonancia como resultado de la alta atenuación obtenida.

La relación de 40 % de amortiguamiento es representativa de la mayoría de los vehículos, reconocible por el hecho de que la amplificación a la frecuencia de resonancia se encuentre en un rango de 1.5 a 2.0.

A un 100 % de amortiguamiento (crítico) las oscilaciones de 1 Hz en la masa amortiguada son bien controladas, con ciertas penalizaciones en el aislamiento a frecuencias más altas.

Si el amortiguamiento se lleva más allá del crítico, por ejemplo a 200 % este se vuelve tan rígido que la suspensión deja de moverse y el vehículo rebota sobre sus neumáticos resonando en un intervalo de 3 a 4 Hz.

Mientras que este tratamiento analítico provee una ilustración simplificada del efecto Calidad de Manejo del amortiguamiento en la suspensión, la adaptación de los amortiguadores para alcanzar un desempeño óptimo es mucho más complicado en los vehículos modernos.

Los amortiguadores deben ser adaptados no solo para alcanzar las características deseadas de manejo, sino también para mantener un adecuado contacto de las ruedas con el piso, esencial para la seguridad y maniobrabilidad.

En general esto se logra eligiendo las válvulas en el amortiguador, considerando a éste no como un elemento lineal (con fuerza proporcional a velocidad) como se asumía anteriormente.

Primeramente, el amortiguamiento en las direcciones de compresión y extensión no son iguales. El amortiguamiento en compresión se adiciona a la fuerza transmitida a la masa amortiguada cuando la rueda encuentra un obstáculo, por lo tanto es indeseable tener un amortiguamiento alto en esa dirección.

Por otro lado, el amortiguamiento en la dirección de extensión, es deseable para disipar la energía almacenada en el resorte por el encuentro con el obstáculo.

Consecuentemente, un amortiguador típico es de relación dual, con aproximadamente un rango de 3 a 1 entre extensión y compresión. Además de esto, las características de entonación, descritas posteriormente, son utilizadas para el control del amortiguamiento en ambas direcciones.

Desde mediados de la década de los 50, se han utilizado amortiguadores telescópicos, casi exclusivamente, para las suspensiones automotrices. Estos consisten en un arreglo pistón-en-tubo, con un extremo conectado a la masa amortiguada y el otro al eje o la rueda. Existen dos tipos de amortiguadores telescópicos, el tubo gemelo y el monotubo presurizado con gas, figura (2.5).

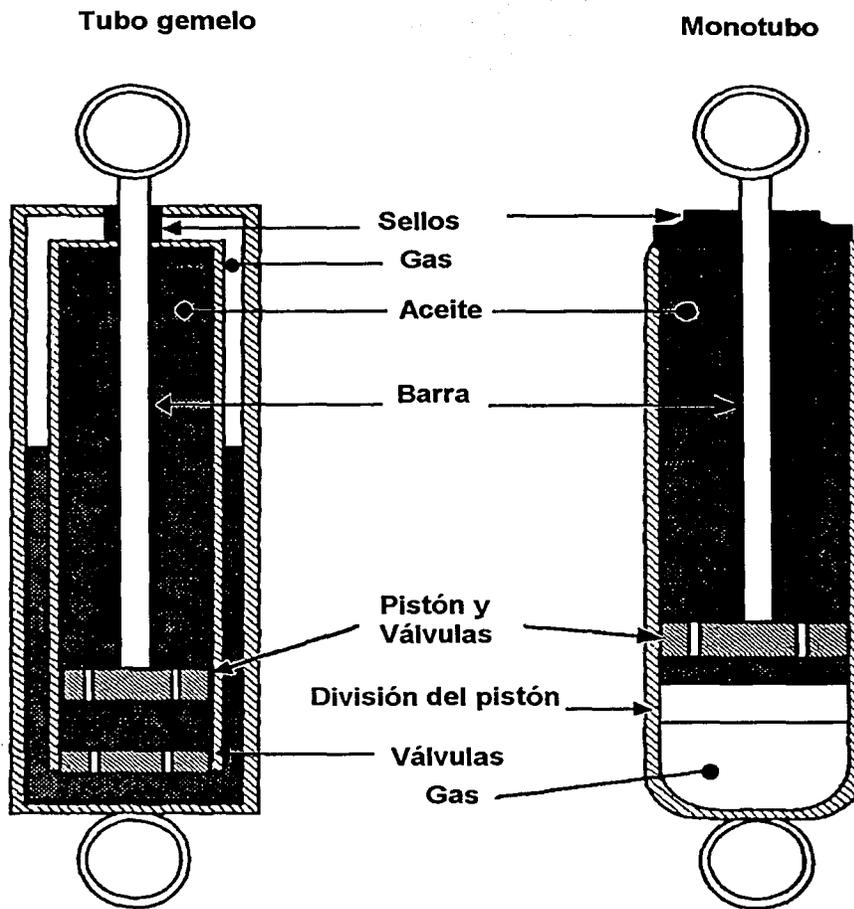


Figura 2.5 Amortiguador Típico

Cada uno de estos amortiguadores tiene sus ventajas, pero funcionalmente son similares. Durante la compresión y extensión, el pistón se mueve a través del fluido en su cuerpo. Las válvulas en el pistón restringen el flujo a través del pistón generando fuerza de amortiguamiento.

En el caso de los amortiguadores de tubo gemelo, se utilizan restricciones adicionales de válvulas en la base del tubo para mejorar el comportamiento del amortiguador.

Se pueden utilizar dos tipos de válvulas en combinación para producir las características deseadas. Una válvula de orificio simple genera una fuerza de

amortiguamiento que se incrementa en razón del cuadrado de la velocidad (como se muestra en la curva A, figura (2.6)).

Las válvulas de orificio simple son diseñadas para proveer un amortiguamiento adecuado con el fin de controlar los movimientos de la carrocería a bajas velocidades. Sin embargo estos orificios de control provocan demasiado amortiguado a altas velocidades, típicas en los movimientos de los ejes.

Un segundo tipo de válvulas es el "Blow off" en el que el pasaje de flujo es bloqueado por una válvula de resorte que previene el flujo hasta que se alcance una presión deseada, en cuyo punto permite el "Blow off" con una fuerza de amortiguamiento mostrada en la curva B. Combinando válvulas de orificio y "Blow off" en arreglos en serie y paralelo, se obtiene un comportamiento de amortiguamiento típico mostrado en la curva C, figura (2.6).

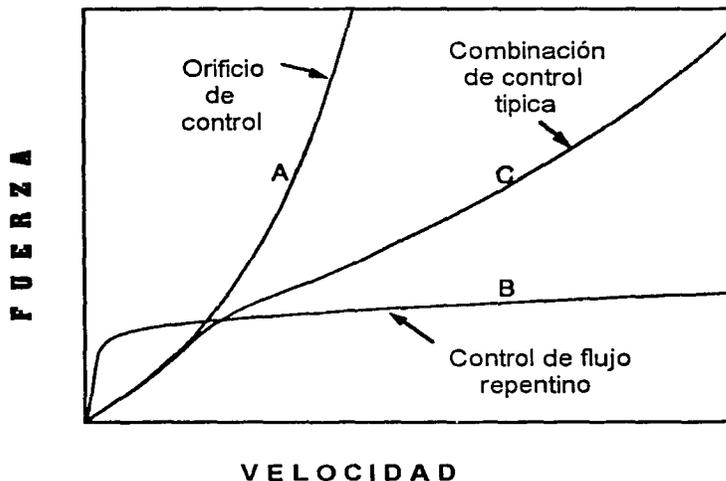


Figura 2.6 Comportamiento del Amortiguador

Para un estudio comprensivo de los amortiguadores en el análisis de Calidad de Manejo, el amortiguador, tiene que modelarse como un elemento no lineal. Las características de fuerza velocidad como aquellas ilustradas en la figura precedente pueden representarse por polinomiales o por segmentos rectos de línea aproximándose a una curva.

Finalmente, el elastómero del buje en los extremos del amortiguador, constituye un complemento significativo para pequeños movimientos de alta frecuencia típicos del eje, y deben tomarse en cuenta.

### 2.1.3 Barra Estabilizadora

Esta consiste en una barra que trabaja a torsión apoyada en su parte media al bastidor y fija por sus extremos al eje.

Su función es reducir la inclinación lateral del automóvil que se produce al tomar una curva, debido a la fuerza centrífuga generada por la parte suspendida, concentrándose en la parte exterior de la rueda.

La barra se utiliza en uno o en ambos ejes. Creando de esta manera una dependencia entre los movimientos verticales de una rueda con respecto a la otra ayudando a mantener la estabilidad del vehículo, figura (2.7).

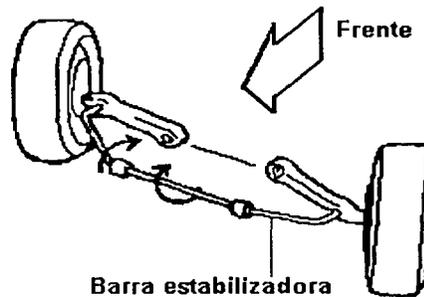


Figura 2.7 Barra Estabilizadora

En un giro, la fuerza centrífuga tiende a inclinar la parte amortiguada hacia el exterior de giro, de acuerdo a un ángulo que depende de la intensidad de la fuerza y de la flexibilidad de la suspensión.

Su acción básicamente consiste en que cuando una rueda se aproxima a la parte amortiguada, imprime un movimiento igual a la otra rueda.

Por consiguiente, el estabilizador tiende a obtener un desplazamiento equivalente de las dos ruedas, que se opone a la inclinación de la parte amortiguada en los giros, y de una manera general, a los movimientos transversales de la parte amortiguada, endureciendo la suspensión en el momento en que se inician estos movimientos.

El estabilizador, si es de acción constante, actúa en los tramos rectos cada vez que una rueda encuentra un obstáculo que origine una oscilación transversal, pudiendo ser perjudicial.

El estabilizador debe ser, por tanto, de acción variable; enérgico en los giros y nulo o casi nulo en las rectas. Para lograr esto, se puede utilizar un

acoplamiento en la barra de torsión, que permita oscilar libremente a las dos partes de la barra en las rectas, y actuando en conjunto en los giros.

Este acoplamiento generalmente se coloca entre un extremo de la barra de torsión y la suspensión, puede estar accionado por la palanca de la dirección, por un péndulo de inercia ó por un dispositivo auxiliar sometido a la presión de aceite en la dirección hidráulica ó en los elementos de una suspensión óleo-neumática ó eléctricamente.

## **2.2 Componentes Cinemáticos**

### **2.2.1 Componentes Geométricos y Estructurales**

Son los elementos de unión entre el ensamble rueda-neumático y el chasis del vehículo. Están formados por los brazos de control, rótulas, pivotes, barras de unión, etc.

Estos elementos dan el soporte estructural para los muelles, amortiguadores y barras de torsión, dependiendo su configuración del tipo de suspensión que se estudie.

Además, su configuración determina el funcionamiento de la suspensión en su conjunto, permitiendo a ésta actuar de manera tal, que satisfaga la función cinemática.

Dicha función consiste en mantener un equilibrio adecuado en los parámetros de Avance, Inclinación y Convergencia para mantener al vehículo en contacto permanente con el terreno.

Cuando se mencionen los diferentes tipos de suspensión, se explicará la configuración de éstos elementos y su función en el sistema visto de una manera integral.

## CAPÍTULO TERCERO

### TIPOS DE SUSPENSIONES

#### 3.1 Clasificación de las Suspensiones

Una clasificación Física de los diferentes tipos de suspensiones puede enfocarse desde dos aspectos. Uno dinámico que se puede definir como el comportamiento del sistema ante diferentes fuentes de excitación, y su variación con respecto al tiempo, y otro cinemático que estudia el comportamiento del sistema mecánico en una posición específica.

Este capítulo se enfocará a dar una definición de los diferentes tipos de suspensión, inicialmente desde una perspectiva dinámica, para posteriormente concentrarnos en las diferentes arquitecturas existentes y la elección del tipo de suspensión más conveniente para la competencia SAE.

#### Clasificación Dinámica de Suspensiones

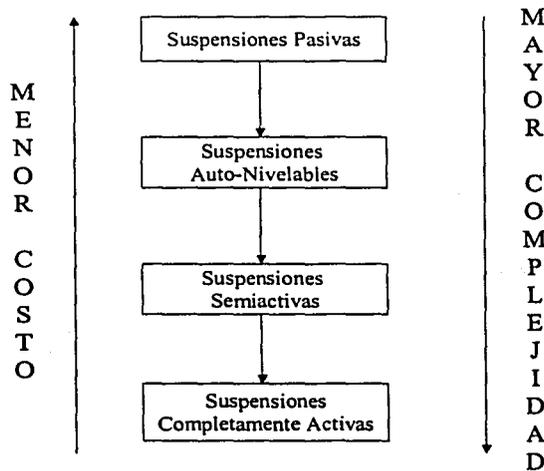


Tabla 3.1 Clasificación Dinámica.

#### 3.1.1 Propiedades Dinámicas

En años recientes se han desarrollado suspensiones con componentes activos con el fin de mejorar el comportamiento general de los vehículos automotores.

Los diseños pueden cubrir una variedad de requerimientos de desempeño. Sin embargo los componentes activos actúan solamente con respecto a las fuerzas verticales de la suspensión, mas no los cinemáticos (Los componentes que

afectan el comportamiento cinemático son controlados por el sistema de dirección).

### **3.1.2 Categoría Dinámica de Suspensiones**

Los diferentes niveles de características activas en las suspensiones, se pueden dividir en las siguientes categorías:

1. - Suspensiones Pasivas. Contienen componentes convencionales, en donde las propiedades del muelle y el amortiguador no cambian con respecto al tiempo. Los elementos pasivos pueden solamente almacenar energía (muelles) o disiparla (amortiguadores), sin que exista ningún tipo de energía externa que se suministre a este tipo de suspensión.

2. - Suspensiones Auto-Nivelables. Son una variación de suspensiones pasivas donde los componentes primarios de carga (usualmente muelles neumáticos) se pueden ajustar para cambios en la carga.

Las Suspensiones de Aire Auto-Nivelables son utilizadas en varios camiones pesados y en algunos pocos vehículos de lujo. Una válvula de control de altura monitorea la deflexión de la suspensión, y cuando su posición varía con respecto a su altura normal en un periodo de tiempo establecido (más de cinco segundos normalmente), la presión de aire en el muelle se ajusta para lograr deflexiones dentro del rango deseado.

La característica más notable de este tipo de suspensiones es que a medida de que la presión cambia con la carga, la rigidez del muelle se modifica en correspondencia provocando que la frecuencia natural de la suspensión permanezca constante.

3. - Suspensiones Semiactivas. Estas suspensiones contienen componentes de muelleo y amortiguamiento cuyas propiedades pueden variar con un control externo. Una señal externa se suministra a estos sistemas con el propósito de modificar sus propiedades. Existen varias subcategorías de suspensiones semiactivas.

Activa Lenta. Los rangos de amortiguamiento y/o muelleo pueden intercambiarse entre varios niveles de respuesta a las modificaciones en las condiciones de manejo.

Los factores que se utilizan comúnmente para activar estos controles son: la presión de frenado, los ángulos de dirección ó los movimientos de la suspensión.

Estos controles modifican niveles mayores de amortiguamiento o rigidez. Los cambios ocurren en fracciones de segundo, brindando al sistema la capacidad

de controlar los movimientos de las masas amortiguadas bajo condiciones más severas del camino o maniobra.

Sin embargo el regreso a condiciones más suaves ocurre después de cierto tiempo. Por lo tanto el sistema no se ajusta continuamente durante ciclos individuales de oscilación del vehículo. Estas suspensiones se conocen también como adaptativas.

**Bajo Recorrido (Low Band Width).** Los rangos de muelleo y amortiguamiento son modulados continuamente en respuesta a los movimientos de baja frecuencia de las masas amortiguadas (1-3 Hz).

**Alto Recorrido (High Band Width)** Los rangos de muelleo y amortiguamiento son modulados continuamente en respuesta a los movimientos de baja frecuencia de las masas amortiguadas (1-3 Hz), y a los movimientos de alta frecuencia de los ejes (10-15 Hz).

4. - **Suspensiones Completamente Activas.** Estas incorporan actuadores para generar las fuerzas deseadas en la suspensión. Los actuadores son normalmente cilindros hidráulicos operados mediante fuentes externas de potencia. Las suspensiones completamente activas se pueden clasificar como de bajo recorrido(Low Band Width) y alto recorrido (High Band Width) de acuerdo a las definiciones mencionadas anteriormente.

El interés principal en este tipo de suspensiones deriva del potencial de mejora en las características del desempeño de manejo sin comprometer la suavidad de manejo.

Los modos de desempeño que se pueden mejorar con controles activos incluyen el control de manejo, la altura del vehículo, el movimiento lateral de giro, el comportamiento en el frenado y la aceleración además de las características de adhesión a la superficie en el camino.

### **3.1.3 Propiedades Cinemáticas**

Las suspensiones generalmente se clasifican en dos grupos, de eje sólido e independientes. Cada grupo puede ser funcionalmente muy diferente.

Las suspensiones de Eje Sólido son aquellas en donde las ruedas se ensamblan en los extremos de una viga sólida, de manera que el movimiento de una rueda es transmitido a la opuesta obligándolas a inclinarse juntas.

En contraste, las Suspensiones Independientes permiten que cada rueda se mueva verticalmente sin afectar a la rueda opuesta. Este tipo de suspensión tiene la ventaja de proporcionar mayor espacio al motor, una mejor resistencia a

las vibraciones de la dirección y una mayor resistencia al giro relativo de la suspensión con respecto a la vertical.

A continuación se definen los diferentes tipos de suspensión que existen, dividiendo el tema en dos secciones, la suspensión delantera y la suspensión trasera, describiendo la manera en que cumplen su función.

### Clasificación Geométrica de Suspensiones

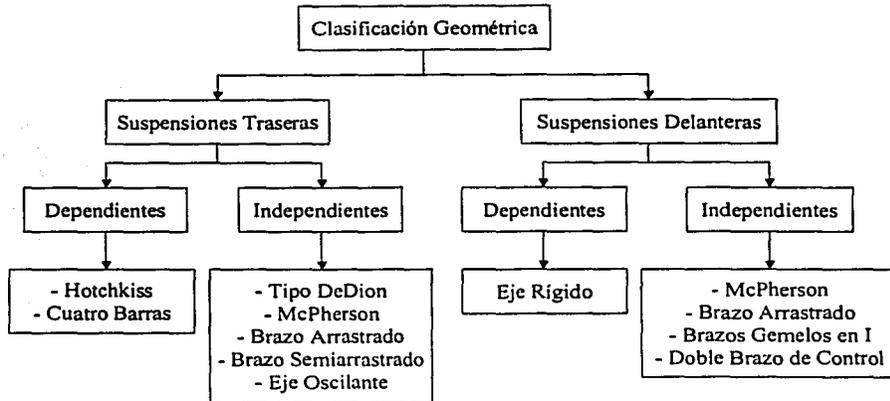


Tabla 3.2 Clasificación Geométrica.

### 3.2 Tipos de Suspensión Trasera

Dentro de los tipos de suspensión trasera que existen se encuentran los siguientes:

Por Muelles de Hoja, o Hotchkiss  
 De cuatro Barras,  
 Tipo De Dion,  
 Independiente con poste tipo McPherson modificado,  
 Multibarras ó Multilink,  
 De Brazo Arrastrado ó Trailing Arm,  
 De Brazo Semiarrastrado, y  
 De Eje Oscilante.

#### 3.2.1 Suspensión por muelles de hoja o Hotchkiss

Esta suspensión está formada por hojas semielípticas ensambladas en forma longitudinal, sujetas al eje en su parte media por abrazaderas y al chasis en sus extremos, figura (3.1).

La principal ventaja de éste tipo de suspensión es su fortaleza, razón por la cual es utilizado en la mayoría de los camiones ligeros y de trabajo pesado tanto en la suspensión trasera como en la delantera. Además de resultar un diseño simple y económico.

Tiene la desventaja de provocar una oscilación transversal en las ruedas, además de una inclinación del plano de las mismas debido a que los movimientos de una son transmitidos a la otra.

Esto provoca que las ruedas no tengan un adecuado contacto con la superficie del terreno y una estabilidad de ruta deficiente. Además de que, la rigidez de las muelles resulta en un manejo poco confortable.

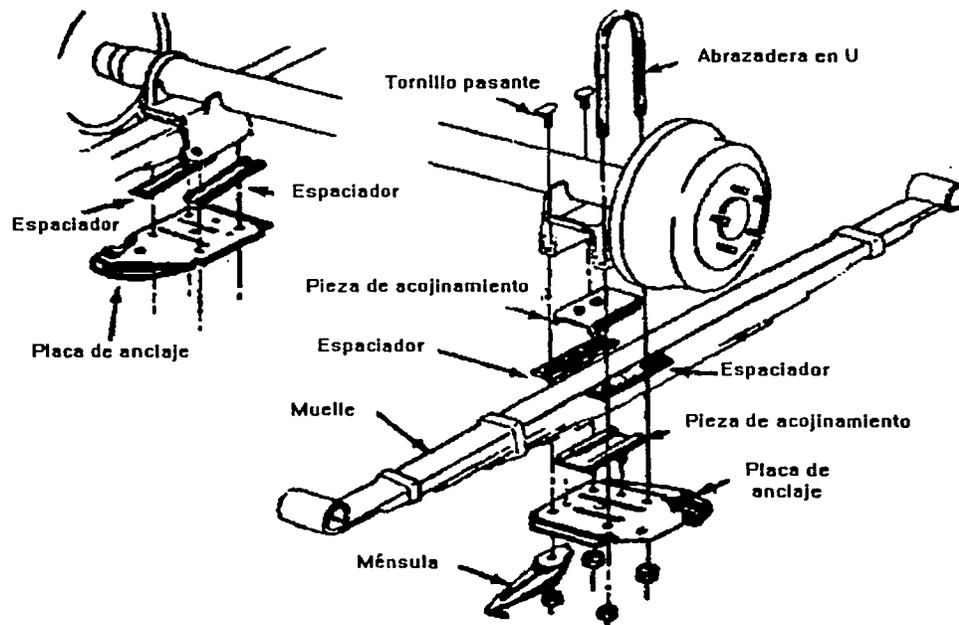


Figura 3.1 Suspensión Trasera de Eje Rígido con Muelles de Hoja

### 3.2.2 Suspensión de Cuatro Barras

Este tipo de suspensión de eje sólido, se popularizó en las décadas recientes en los vehículos grandes de pasajeros con eje sólido trasero. Los brazos de control inferiores proveen un control longitudinal del eje, mientras que los brazos superiores absorben los torques de frenado y dirección además de las fuerzas laterales, figura (3.2).



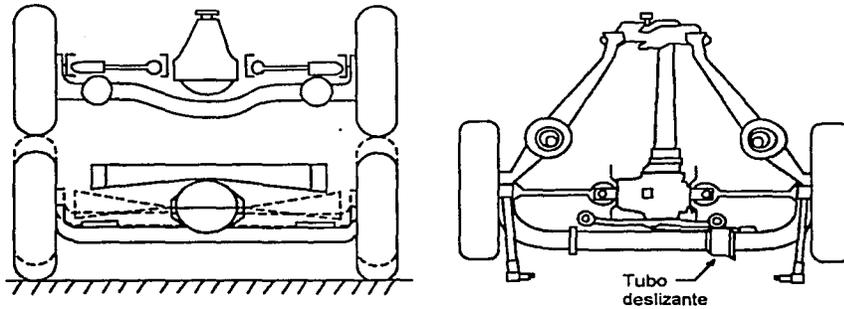


Figura 3.3 Suspensión tipo De Dion

### 3.2.4 Suspensión trasera independiente con poste McPherson modificado

Consiste en una suspensión con geometría similar a las suspensiones delanteras de brazo desigual, utilizando una configuración de poste. Este poste es un miembro telescópico que incorpora amortiguamiento con la rueda rígidamente sujeta al extremo inferior, de manera que el poste mantiene a la rueda en la dirección de inclinación (Camber). El extremo superior se conecta con la carrocería y el inferior se ensambla con montantes que absorben las fuerzas longitudinales y laterales, figura (3.4).

Cada uno de los lados de la suspensión está formado por el poste de amortiguación, un brazo de control inferior, una varilla de unión, un eje forjado y un muelle de resorte montado en el brazo de control.

Se puede presentar interferencia entre el poste y la cara de la llanta. El mantener el claro produce que la rueda cargue al poste con un momento de sobregiro que adiciona fricción en el poste. Esto es contrarrestado montando el resorte en un ángulo con respecto al poste.

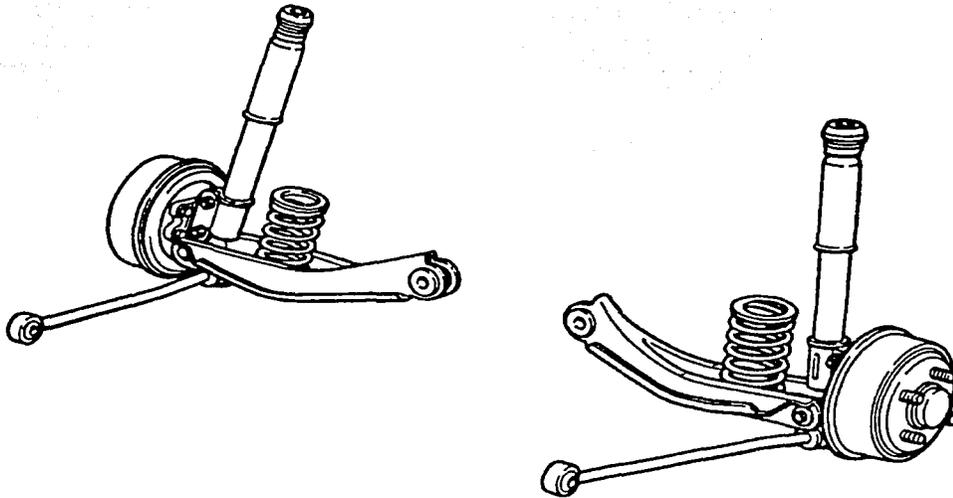


Figura 3.4 Suspensión con poste tipo McPherson

### 3.2.5 Suspensión trasera Multibarras (Multi-Link)

En años recientes, se han popularizado este tipo de suspensiones independientes. Se caracteriza por tener uniones de rotulas en los extremos de las barras, de manera que estas no presenten momentos de torsión.

En general, se requieren cuatro barras para proveer un control longitudinal y lateral adecuado en las ruedas, además de reaccionar en contra del torque de frenado, figura (3.5).

Ocasionalmente se utilizan cinco barras. Esta barra adicional sobrerestringe la rueda, pero se acentúa en las uniones con los bujes para permitir un control más adecuado en el ángulo de convergencia (Toein) en los giros.

Además, el uso de barras y uniones de rotulas, permite al diseñador alcanzar el movimiento deseado en las ruedas.

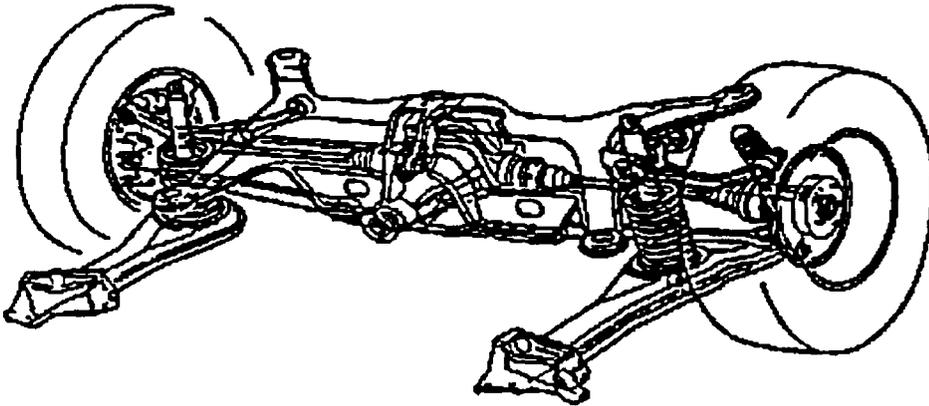


Figura 3.5 Suspensión Multibarras (Multilink)

### 3.2.6 Suspensión de Brazo Arrastrado (Trailing Arm)

Este tipo de suspensiones se utiliza en los vehículos más costosos o de mayor y mejor desempeño, como es el caso de vehículos deportivos de alto rendimiento. Los brazos de control absorben las fuerzas longitudinales y los momentos de frenado, además de proporcionar control a las fuerzas que se producen cuando el vehículo acelera, (squat y lift).

El diseño mostrado, utiliza las flechas y sus uniones universales como brazos de control lateral superior, con una pequeña barra sirviendo como brazo lateral inferior, figura (3.6).

Este tipo de suspensión tiene la ventaja, al igual que la suspensión tipo De Dion, en que reduce el peso de las masas no amortiguadas montando el diferencial a la carrocería.

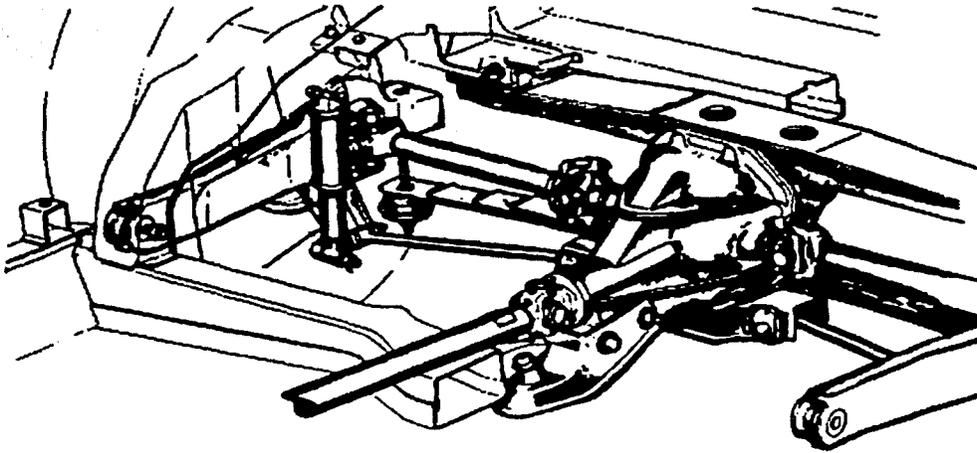


Figura 3.6 Suspensión de Brazo Arrastrado

### 3.2.7 Suspensión de Brazo Semi-Arrastrado

Este tipo de suspensión trasera fue popularizado por algunos fabricantes Alemanes de vehículos de lujo. Este diseño brinda al ángulo de inclinación lateral (Camber) en las ruedas traseras una combinación entre el brazo arrastrado (el Camber no cambia, relativo a la carrocería) y el eje oscilante, figura (3.7).

Su eje de pivote se encuentra comúnmente alrededor de los 25 grados con respecto a la dirección longitudinal del vehículo. Este tipo de suspensión produce un efecto de dirección, cuando las ruedas se desplazan en la posición de golpe (Jounce) y muelleo (Rebound).

La combinación de efecto de dirección / ángulo de inclinación lateral (Camber), sobre la rueda exterior actúa en contra de la dirección del giro, generando por lo tanto un adecuado comportamiento de la dirección (Understeer) en la suspensión trasera. Sin embargo las fuerzas laterales, sobre la dirección pueden contribuir a un sobre-giro (Oversteer) si no se controlan.

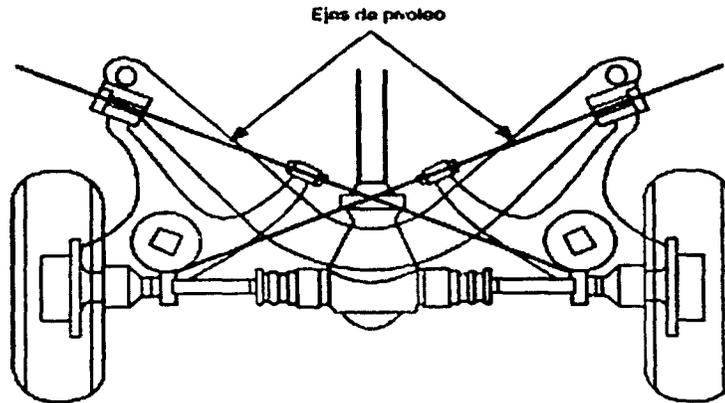


Figura 3.7 Suspensión de Brazo Semi-Arrastrado

### 3.2.8 Suspensión de Eje Oscilante

La manera más fácil de conseguir una suspensión trasera independiente es mediante ejes oscilantes.

Edmund Rumpler se considera como el creador de este tipo de suspensión alrededor de principios de siglo, para 1930 fue utilizado por varios vehículos europeos.

El comportamiento del ángulo de inclinación lateral (Camber), se establece en el movimiento vertical de las flechas del eje con respecto a las juntas universales unidas al diferencial.

El radio de giro es pequeño pero la variación del ángulo de inclinación (Camber) en la posición de golpe y muelle es amplia. Como resultado, es difícil obtener un comportamiento consistente en los giros en un arreglo de eje oscilante, figura (3.8).

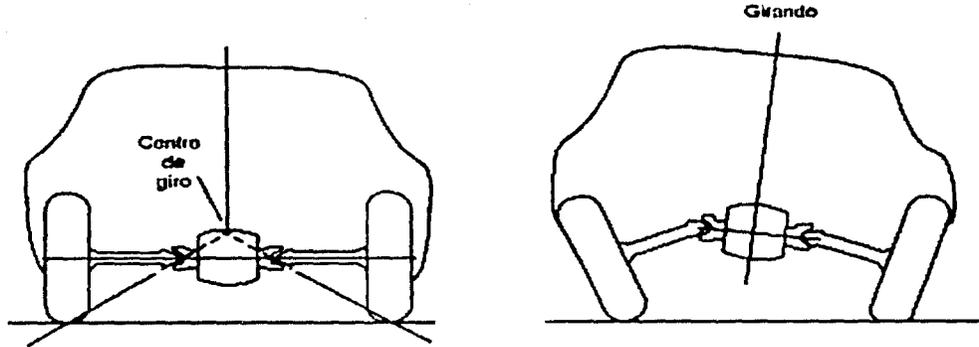


Figura 3.8 Suspensión de Eje Oscilante

### 3.3 Tipos de Suspensión Delantera

Dentro de los tipos de suspensión delantera podemos encontrar:

Suspensión dependiente:

Por Eje Rígido,

Y de tipo independiente como:

Tipo McPherson,

De Brazo Arrastrado,

De Brazos Gemelos en I,

Tipo doble brazo de control o SLA.

Los diferentes tipos de suspensiones independientes, se han diseñado para satisfacer diferentes necesidades, sin embargo tienen en común mejorar la Calidad de Manejo y la maniobrabilidad a mayores velocidades.

Con el fin de reducir la interacción entre las ruedas y disminuir el peso de la masa no amortiguada, se suprime el eje rígido y cada rueda se une por separado al chasis del vehículo.

Para poder lograr que una suspensión sea más eficiente, es necesario asegurar que la rueda se desplace paralelamente a sí misma con el objeto de evitar el efecto giroscópico, además de no modificar el ancho de vía, y así evitar desgastes excesivos en los neumáticos.

### 3.3.1 Suspensión dependiente, por Eje Rígido

Este tipo de suspensión se utiliza en la actualidad en camiones de trabajo pesado. Consiste en un miembro sólido llamado Viga I, que conecta las articulaciones de las ruedas delanteras con los muelles. Esta viga se articula en sus extremos al eje con el pivote de la dirección.

La rueda está montada en la porción exterior que conecta a esta articulación, con el llamado mango de dirección.

Este tipo de suspensión de eje rígido, presenta la característica de transmitir los movimientos de una rueda a la otra, provocando la aparición de un efecto giroscópico que provoca una desviación en las ruedas, que afectan en gran medida a la dirección del vehículo y su maniobrabilidad, figura (3.9).

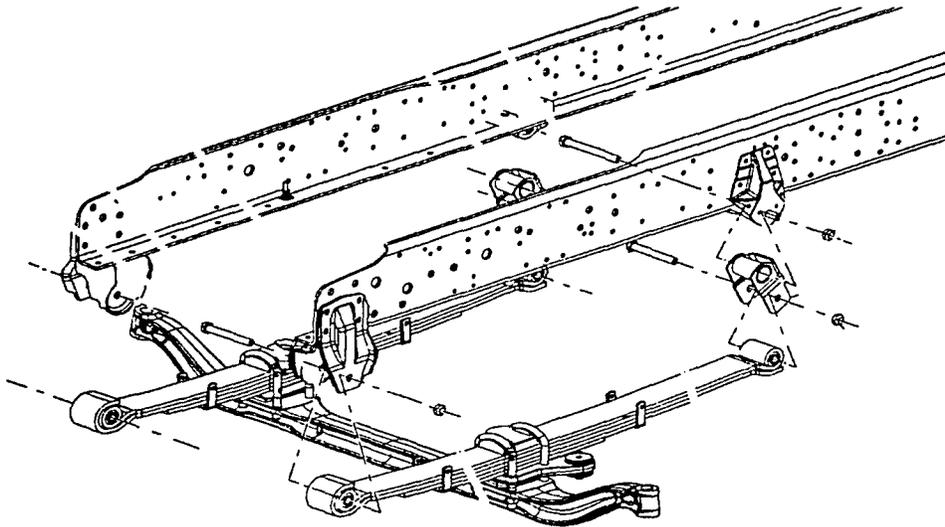


Figura 3.9 Suspensión Delantera de Eje Rígido

### 3.3.2 Suspensión McPherson

Este tipo de suspensión consta de un solo brazo de control y un poste de amortiguación ó McPherson, donde el eje va montado sobre la parte inferior del poste.

Este tipo de diseño no requiere de un brazo superior de control. El poste de amortiguación es soportado lateralmente por un brazo de control inferior, y frontalmente por una barra estabilizadora, que trabaja a tensión y compresión, figura (3.10).

La configuración del poste de amortiguación para una suspensión delantera es la misma que la descrita para suspensiones traseras (punto 3.2.4).

La principal ventaja de este tipo de suspensión, es el espacio para el empaquetamiento de motores transversales, por lo que es muy utilizada en la actualidad en vehículos de tracción delantera. Además, debido a la separación de los puntos de conexión en la carrocería, se acopla muy bien en vehículos de monocasco.

Esta configuración utiliza un menor número de partes, así como también tiene la capacidad de distribuir las cargas a la estructura de la carrocería en una superficie mayor.

Dentro de las desventajas se puede mencionar la gran altura de instalación requerida por este tipo de suspensión, que limita el diseño de vehículos de perfil bajo. Además de ser frágil frente a impactos laterales y frontales.

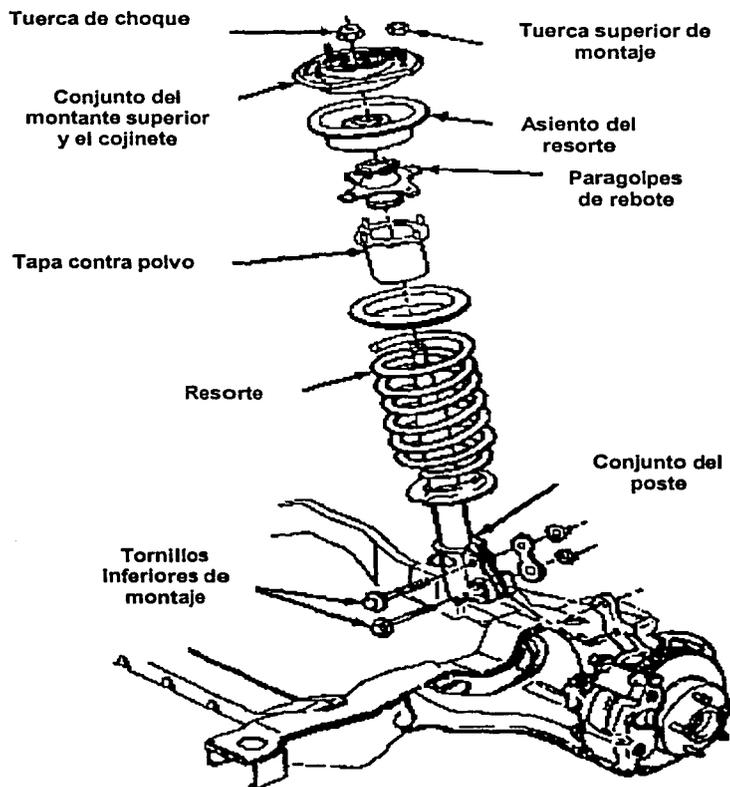


Figura 3.10 Suspensión Delantera McPherson

### 3.3.3 Suspensión de Brazo Arrastrado

Uno de los diseños más simples y económicos para una suspensión delantera independiente es el utilizado por algunos fabricantes Alemanes desde la Segunda Guerra Mundial. Utiliza brazos arrastrados paralelos de la misma longitud, conectados en su extremo frontal a barras de torsión laterales, que proporcionan el muelleo, e inclinados hacia atrás y hacia abajo unidos al mango de la dirección por rotulas o juntas de bola.

En este sistema, el brazo inferior lleva acoplado un soporte para sujetar la parte inferior del amortiguador y la parte superior de éste se ensambla en la carrocería del vehículo, figura (3.11).

Con este diseño, las ruedas se mantienen paralelas a la carrocería y su ángulo de inclinación (Camber) se modifica con el giro del vehículo.

Una de las ventajas que tiene este diseño es que la suspensión presenta un ángulo de impacto diferente de 90 grados con respecto a la horizontal, absorbiendo con esto un mayor porcentaje del impacto con la suspensión y no con la carrocería. Este comportamiento se asemeja más a la realidad, ya que la fuerza resultante de un impacto tiene un ángulo diferente a la vertical.

Sin embargo una de las desventajas es que el ángulo de inclinación lateral (Camber) no cambia durante el recorrido de la suspensión y como se vio anteriormente, esto afecta la Calidad de Manejo.

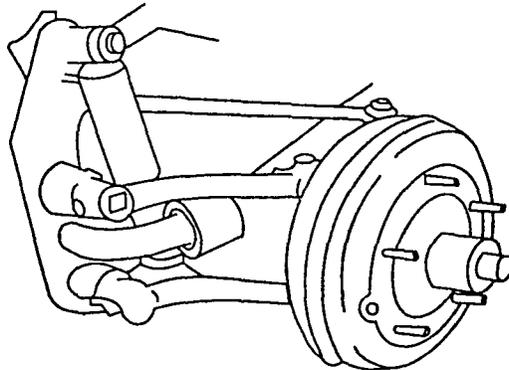


Figura 3.11 Suspensión de Brazo Arrastrado

### 3.3.4 Suspensión de Brazos Gemelos en I

Esta es una variación del diseño de suspensión independiente tratando de combinar algunas de las cualidades de la suspensión de Viga I.

Este diseño se utiliza en algunos camiones pesados, y consta de dos miembros largos, llamados Vigas I, con pivotes de dirección en sus extremos que sirven de eje para realizar los giros.

Se utilizan barras de compresión para absorber fuerzas de frenado y comúnmente los resortes son usados para soportar el peso del vehículo.

Los brazos gemelos en I consisten en un diseño que provee una combinación entre la Calidad de Manejo de la suspensión independiente y la fortaleza del eje sólido, figura (3.12).

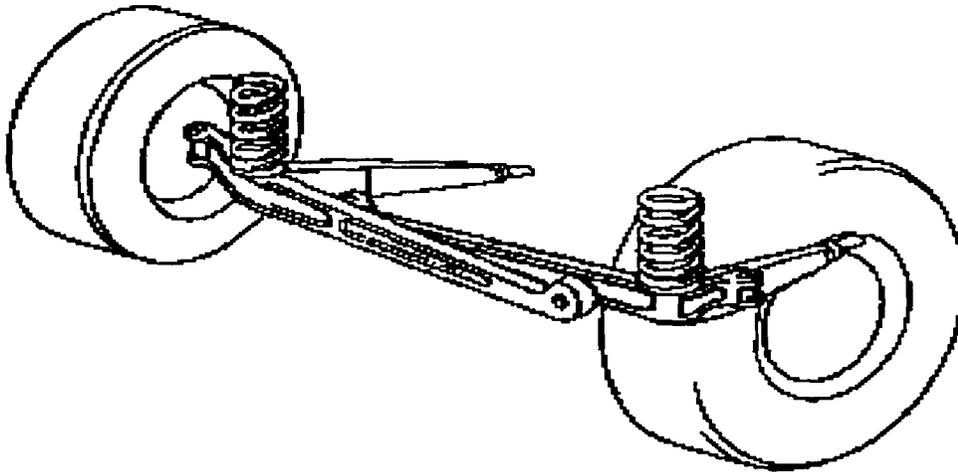


Figura 3.12 Suspensión Delantera de Brazos Gemelos en I

### 3.3.5 Suspensión de Doble Brazo de Control SLA, (Brazo Largo Corto)

Uno de los diseños más comunes de suspensión delantera de los vehículos americanos, utiliza dos brazos laterales de control para sostener la rueda. Los brazos de control inferior y superior son comúnmente de diferente longitud de donde viene el nombre de brazo largo corto (SLA, Short Long Arm).

Unas variantes de este arreglo, pueden reemplazar el brazo superior por una unión lateral simple, ó bien reemplazar el brazo inferior por una unión lateral y

un poste de tensión a un cierto ángulo, sin embargo son funcionalmente similares, figura (3.13).

El sistema SLA se adapta bien en los vehículos con motor al frente y tracción trasera, debido a que proporciona un espacio de empaquetamiento adecuado para un motor ensamblado en dirección longitudinal. Además, se adapta bien en vehículos con un bastidor separado de la carrocería ya que el bastidor presenta provisiones para el montaje de la suspensión y ayuda al sistema a absorber las fuerzas provocadas por el camino.

El diseño de una geometría en SLA requiere de cierto grado de refinamiento para obtener un comportamiento aceptable:

La geometría del ángulo de inclinación lateral (Camber) en un sistema de brazos desiguales, puede mejorar el ángulo en la rueda exterior, contrarrestando la inclinación de la carrocería en un giro. Esto usualmente ocasiona una inclinación menos favorable en la rueda interior.

Un sistema de brazos paralelos de longitud igual elimina la condición desfavorable en la rueda interior, con la desventaja de perder la compensación del ángulo de inclinación en la rueda exterior.

Un diseño óptimo debe seleccionar una geometría que minimice el cambio del piso del neumático en la posición de golpe (Jounce) y en la posición de muelleo (Rebound) para evitar el excesivo desgaste de éstos.

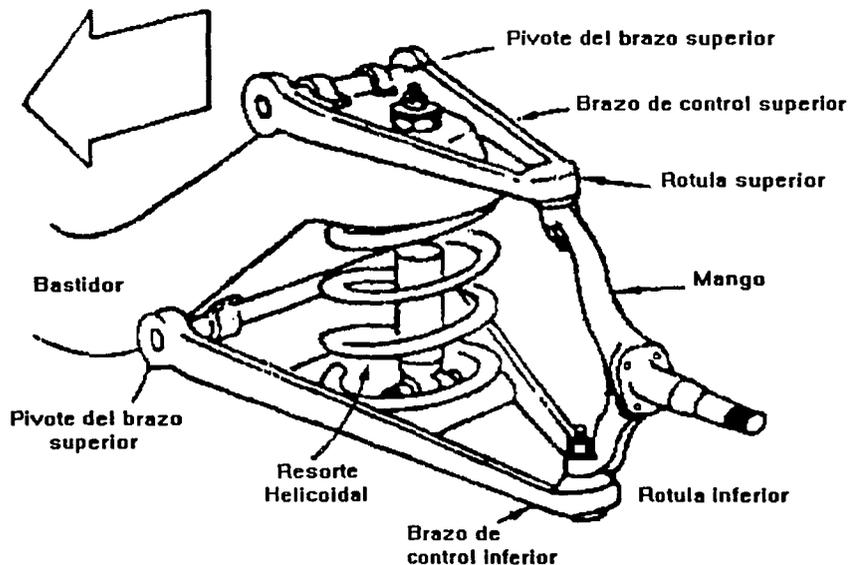


Figura 3.13 Suspensión de Doble Brazo de Control

Con el fin de evitar el desplazamiento lateral, y por lo tanto el excesivo desgaste de los neumáticos, las longitudes de los brazos se diseñan de manera tal, que para unos determinados rueda y mango, el punto medio del neumático se desplace sobre una línea vertical durante el muelleo, aunque el ángulo de inclinación lateral (Camber), se modifique. El comportamiento cinemático que ejemplifica este movimiento es detallado en la sección (1.2.6).

El cambio de dicho ángulo es importante en la trayectoria vertical de la suspensión. Para lograr las condiciones deseadas de manejo, se hace un arreglo de cambio de ángulo, es decir, que éste debe ser negativo durante la posición de golpe (Jounce), y positivo durante la posición de muelleo (Rebound).

Cuando un vehículo realiza un giro, la fuerza centrífuga y la inercia fuerzan al centro de gravedad del vehículo hacia la parte exterior de la curva, esto moverá la suspensión exterior en Rebound. El brazo de control superior tendrá un cambio mayor en ángulo que el inferior. Esta acción producirá una tendencia en el ángulo de inclinación lateral positiva sobre la rueda exterior, la cual reducirá el área de contacto del neumático, figura (3.14).

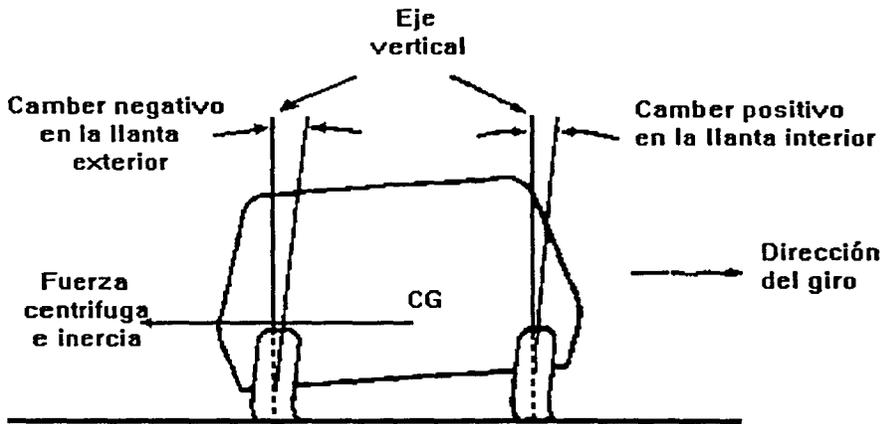


Figura 3.14 Inclinación Lateral del Vehículo

Si la suspensión exterior es diseñada para producir un ángulo (Camber) negativo, el neumático mantendrá máximo contacto con la superficie del camino produciendo un buen manejo.

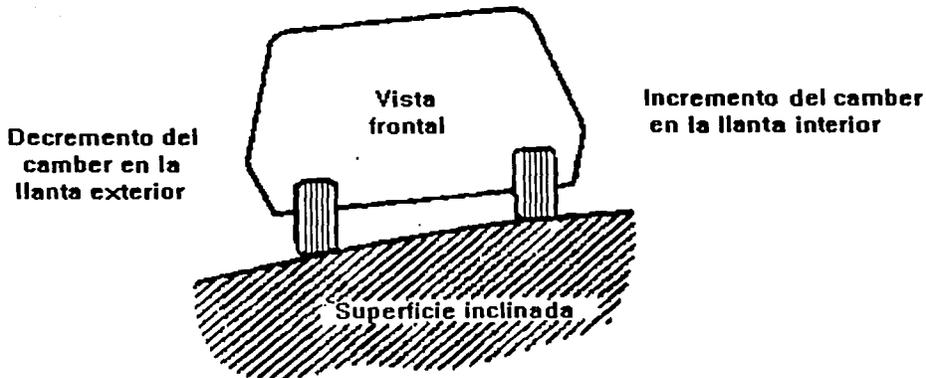


Figura 3.15 Modificación del Camber vs Inclinación del Vehículo

Esta condición tiende a aumentar el soporte del neumático con una carga incrementada cuando una suspensión esta en una posición de golpe (Jounce), figura (3.15).

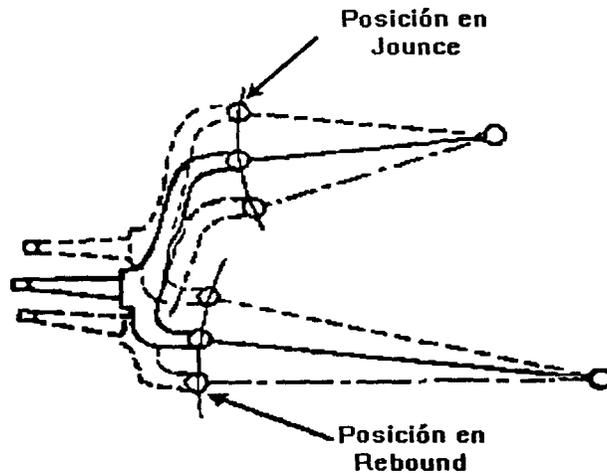
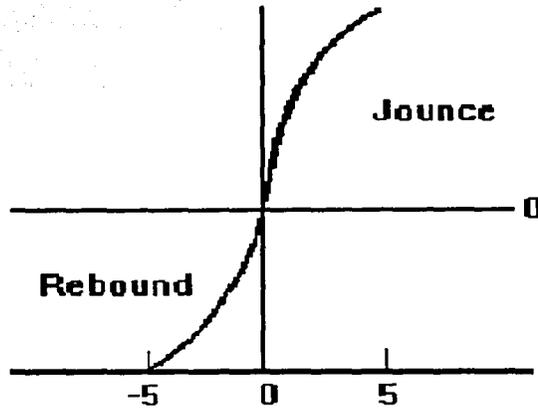


Figura 3.16 Movimiento del Mecanismo de Suspensión

Para que el diseño de una suspensión sea óptimo, se deben elegir características de maniobrabilidad que permitan tener una adecuada Calidad de Manejo.

Es decir tener un ángulo de inclinación (Camber) positivo en el golpe (Jounce) y negativo en el muelleo (Rebound), con lo que se consigue que el vehículo, al afrontar un obstáculo, siga la irregularidad del camino con una ligera turbulencia percibida por los pasajeros, y una pequeña deflexión lateral de los neumáticos, figura (3.17).



**Cambio de Camber**

Figura 3.17 Comportamiento del Camber vs Movimiento de la rueda

### 3.4 Selección del Tipo de Suspensión para un Vehículo Todo Terreno

Una vez definidos los tipos de suspensión, se explican a continuación los requerimientos de la competencia y los parámetros de selección para escoger el tipo de suspensión más adecuado para un Vehículo de Competencia Todo Terreno.

Al hacer un estudio cinemático de los neumáticos delanteros, se nota que es necesario utilizar un sistema de suspensión que permita a los brazos de control llevar una mejor trayectoria en caso de golpe.

Esto se puede analizar a partir de la naturaleza de las fuerzas que componen el recibir un golpe. Este no tiene una dirección vertical únicamente, sino que se produce una fuerza que se dirige al centro del neumático, figura (3.18).

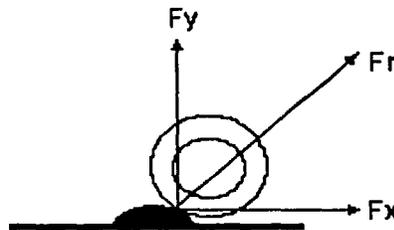


Figura 3.18 Diagrama de un Impacto

El ángulo de este golpe es directamente proporcional a la altura del obstáculo y al radio del neumático, además que la dirección de dicho golpe raramente es

vertical, siendo una diagonal con una componente vertical y una horizontal dirigida hacia la parte trasera del vehículo.

En el caso de los sistemas de suspensión tradicionales, esta componente horizontal no es amortiguada y es recibida por el chasis, debido a que dichos sistemas están diseñados para absorber solamente la componente vertical.

Por otro lado, el peso del vehículo no es excesivo, y además, está concentrado en la parte trasera del automóvil, por lo tanto no se requiere de un sistema de suspensión que soporte mucho peso.

Por otra parte, se requiere una gran maniobrabilidad, con un sistema de dirección que pueda realizar giros en ángulos muy cerrados, con la mayor facilidad posible, sin provocar un efecto giroscópico en las ruedas.

El sistema de suspensión, debe proveer al vehículo de una estabilidad óptima en un terreno con todo tipo de accidentes, como pendientes muy empinadas, giros muy cerrados y una gran cantidad de obstáculos de terreno.

Además, debe resistir los impactos provocados por dichos obstáculos, protegiendo a los demás sistemas del vehículo, así como también a sus ocupantes.

Los obstáculos antes mencionados, provocan que los neumáticos entren en un régimen de golpe y muelleo. Dado que se requiere un gran control del vehículo, es necesario contrarrestar estos efectos mediante el ajuste del ángulo de inclinación lateral (Camber) adecuado.

Definidos los principios en los cuales tenemos que basar la selección de un sistema apropiado de suspensión, se procede a analizar los diferentes tipos de suspensión delantera que se presentaron anteriormente.

Comenzando con los sistemas de suspensión dependiente, se observa lo siguiente:

- Se utilizan en vehículos que soportan un gran peso vehicular, como los camiones de carga. El tipo de vehículo que se estudia, es de bajo peso, además de que las condiciones de estabilidad que un sistema dependiente provee, no cumplen con los requerimientos.

Por otra parte, el sistema de suspensión dependiente utiliza muelles de hojas, que, por el tipo de diseño del vehículo, resultan muy grandes y estorbosos.

En base a lo anterior, se define que el sistema de suspensión a utilizar sea independiente.

- Comenzando con el sistema McPherson, se nota que es sumamente ligero, sencillo y utiliza el mínimo espacio posible. Además de ser bastante resistente a los impactos.

Sin embargo, requiere de una barra estabilizadora, que le provee al sistema el soporte frontal, lo cual representa ciertos problemas en el diseño para un vehículo todo terreno, ya que el chasis es bastante angosto en la parte frontal del vehículo.

Debido a la carencia de un soporte frontal eficiente, el sistema de suspensión tiende a no actuar adecuadamente con respecto a los impactos tan fuertes como los que se presentan en una competencia como la que nos atañe.

- Otro de los sistemas mencionados anteriormente, es el de brazos longitudinales de control, que se utiliza actualmente en el modelo Sedan de VW, cuya principal ventaja es el hecho de que el sistema está predispuesto a un ángulo de golpe diferente de 90°, lo cual se acerca mucho más al comportamiento real de la distribución de fuerzas cuando se enfrenta un obstáculo, como los que se tienen en la competencia.

Sin embargo tiene la desventaja de que el Camber no cambia durante el recorrido de la suspensión, por lo que disminuye en gran medida la maniobrabilidad y la seguridad de manejo.

- Con respecto a la suspensión de brazos gemelos en I, se nota que es la combinación de las cualidades de un sistema independiente con uno dependiente, por lo que se utiliza en vehículos que requieren soportar mucho peso, conservando la Calidad de Manejo y la maniobrabilidad.

En vista de lo anterior se puede deducir que este sistema, rebasa los requerimientos de peso del vehículo, además que ocupa un espacio muy amplio, por lo que resulta inoperante en un vehículo como el de este proyecto.

- Finalmente, analizando el sistema de doble brazo de control se tienen las siguientes ventajas:

Ya que cuenta con dos brazos de control, uno más corto que el otro, permite un recorrido lateral del neumático mucho menor que otros tipos de suspensión, disminuyendo el desgaste, debido a que el sistema se diseñó de manera tal que el punto medio del neumático se desplace en una línea vertical durante el muelleo, aunque el Camber se modifique.

En sí, el hecho que se modifique el Camber, mejora las condiciones de maniobrabilidad, al ser negativo durante el Jounce y positivo durante el Rebound, consiguiendo que el vehículo siga la irregularidad del camino cuando se afronta un obstáculo.

Estos efectos del cambio de Camber se sienten de manera significativa cuando el vehículo realiza un giro o vuelta, ya que en el neumático exterior se produce un Camber negativo mientras que en la interior es positivo. Lo cual ayuda para conseguir un buen manejo del vehículo.

Con las anteriores características se puede notar que este tipo de suspensión cumple con muchos de los requisitos de un sistema para un Vehículo de Competencia Todo Terreno.

Sin embargo, cabe mencionar que es posible utilizar particularidades de otros tipos de suspensión delantera con el fin de mejorar el comportamiento del sistema.

Siguiendo el método utilizado por Domínguez, Guzmán y Rodríguez en "Diseño, Manufactura y Pruebas de un Vehículo Monoplaza" UNAM 1996, p.p 60-61, se obtiene una matriz de selección que involucra los aspectos de Resistencia, Peso, Costo, Confort y Facilidad de Manufactura, para determinar el tipo de suspensión más adecuada.

Según dicho método, la suspensión de tipo Doble Brazo de Control ó SLA, presenta las mayores ventajas.

MUY MALO	1
MALO	2
REGULAR	3
BUENO	4
MUY BUENO	5

SISTEMA	RESISTENCIA	PESO	COSTO	CONFORT	FACILIDAD MANUFACT
HOTCHKISS	5	1	1	1	1
BRAZO ARRAST.	3	3	3	4	5
<b>SLA</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>5</b>
MC PHERSON	2	4	4	4	5

SISTEMA	CALIFICACIÓN GENERAL
HOTCHKISS	9
BRAZO ARRASTRADO	18
<b>SLA</b>	<b>21</b>
MC PHERSON	19

Tabla 3.3 Selección de Tipo de Suspensión Ideal

## CAPÍTULO CUARTO

### MÉTODO GRÁFICO DE SÍNTESIS PARA UNA SUSPENSIÓN DELANTERA

#### 4.1 Parámetros de Diseño

##### 4.1.1 Parámetros Generales del Vehículo

Para definir los parámetros que se utilizan en el diseño de una suspensión delantera de un vehículo de competencia SAE Mini-Baja, es necesario mencionar los parámetros que se requieren en la competencia.

El vehículo deberá cumplir con los siguientes lineamientos:

- Configuración general.- El vehículo debe ser de tipo recreativo, deberá tener un solo asiento y cuatro ruedas como mínimo. La longitud máxima que puede alcanzar es de 243.8 cm (96 in) con un ancho total de 152.4 cm (60 in) como máximo.
- El diseño debe ser adecuado para permitir acomodar un adulto de 183 cm (6 ft) con un peso de 90.8 kg. (200 lb.).

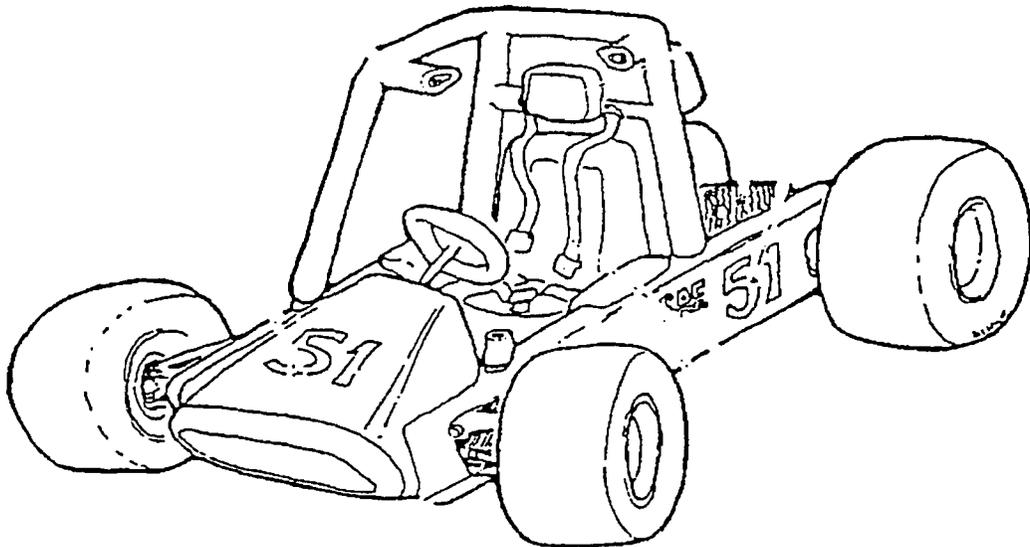


Figura 4.1 Vehículo de Competencia

- Es deseable que el vehículo sea lo más ligero posible, ya que su desempeño será mucho mejor tanto en estabilidad como en aceleración y frenado.

- Así como también de un diseño simple, ya que esto repercute en un menor costo de análisis y fabricación.

-Motor.- Con el fin de lograr una fuente uniforme de potencia en los eventos de rendimiento, todos los vehículos deberán utilizar motores iguales. En el caso de esta competencia se utilizan motores marca Briggs & Stratton, modelo 190400, que tiene las siguientes características:

Es un motor de 4 tiempos, con una potencia neta de 12 h.p. a 3600 rpm, enfriado por aire y gobernado a 3800 rpm como velocidad máxima en vacío, para las pruebas dinámicas.

Los motores deberán mantenerse totalmente originales sin permitir ninguna clase de modificación, exceptuando la localización del tanque de combustible, el silenciador y el arrancador, a posiciones más seguras o de mayor comodidad según lo requiera el diseño del vehículo.

- El vehículo deberá ser capaz de maniobrar, a alta y baja velocidad por una superficie con todo tipo de irregularidades que incluyen rocas, arena y lodo, manteniendo un desempeño adecuado.

Para tener un desempeño adecuado en maniobrabilidad y resistencia es necesario tener un radio de giro menor a 2.13 m (7 ft).

- Además de ser capaz de ascender una pendiente con una inclinación de 45 grados, con el fin de comprobar su potencia a baja velocidad. Esto se lleva a cabo en un terreno flojo, comenzando en terreno plano justo al borde del inicio de la pendiente.

- Todos los vehículos deberán estar identificados claramente con su número asignado, el nombre de la escuela que representan, y los emblemas de SAE y Briggs & Stratton.

- El vehículo deberá cumplir con los requerimientos de seguridad establecidos por SAE, para este tipo de competencias:

Diseño de la Jaula o Roll Cage con 4 puntos sobre la cabeza del conductor, sujetos a por lo menos 4 puntos en la estructura principal del vehículo utilizando tubo de acero con un contenido de carbono mínimo del 0.18%.

Utilizar aislante de materiales elásticos en la estructura de la Jaula en el área alrededor del conductor.

Utilizar cinturones de seguridad de cuatro puntos, con broches de fácil colocación y liberación, acoplados al chasis y no al asiento.

Diseño de cabina que proteja al ocupante contra impactos frontales, laterales y en caso de volcadura, así como también permitir la salida del vehículo fácilmente. Además de contar con los elementos necesarios para proteger al conductor de posibles quemaduras mediante el uso de barreras metálicas y un extintor apropiado.

Contar con un sistema de frenado, que sea capaz de detener las ruedas de dirección y bloquear las ruedas en pavimento seco. El sistema debe cumplir con una distancia de frenado de 60 ft a una velocidad de 30 MPH.

Un sistema de combustible seguro, a prueba de fugas, protegido contra impactos y que en ningún momento alcance al conductor en caso de percance. Teniéndose que utilizar el tanque proveído por Briggs & Stratton.

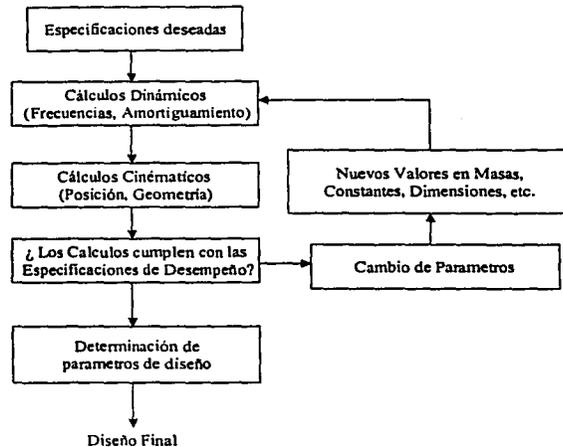
Un sistema de suspensión y dirección, con topes que impidan el bloqueo durante giros al máximo.

Además de asegurarse que las terminales estén protegidas contra impactos frontales. Siendo necesario el uso de roldanas de seguridad con el diámetro apropiado en terminales sujetas por un lado, con el fin de evitar una separación total en caso de fractura.

#### 4.1.2 Parámetros para el Sistema de Suspensión Delantera

Con el fin de diseñar el mecanismo de suspensión, es necesario considerar el siguiente diagrama de proceso:

##### Ciclo de Diseño de Suspensión



En base a lo anterior, se pueden enlistar los parámetros que son necesarios para diseñar la suspensión delantera del vehículo:

- Determinar los parámetros dinámicos como la frecuencia de oscilación  $\omega_{nf}$ . Ecuación (1.4), la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ . Ecuación (1.5) y las Constantes de Suspensión  $K_s$ . Ecuación (1.2), y Neumático  $K_t$ . Ecuación (1.3) que nos permitan cumplir con los requisitos de confort y soporte del vehículo.
- Determinar los parámetros cinemáticos como la localización geométrica del sistema de suspensión. El sistema que se esta analizando se puede representar como un mecanismo de cuatro barras ligado a un cuerpo rígido representado por el conjunto Rueda-Neumático:

El presente trabajo se enfoca únicamente en el estudio cinemático del sistema de suspensión.

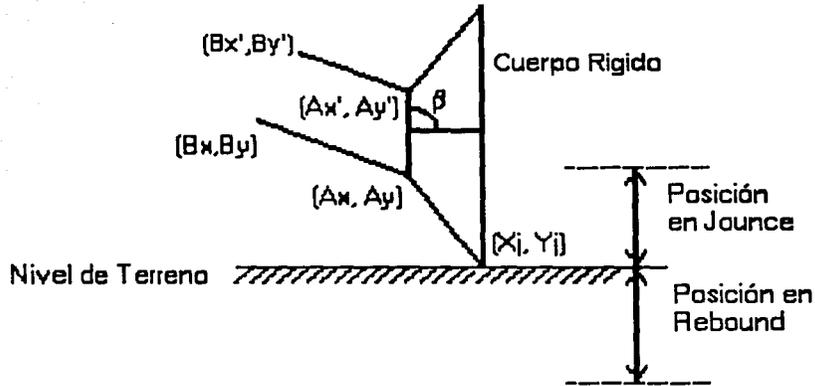


Figura 4.2 Mecanismo de Suspensión

El movimiento de dicho cuerpo rígido sobre el eje vertical corresponde a las posiciones mostradas de Jounce y Rebound, figura (4.2).

Los puntos  $(B_x, B_y)$ ,  $(A_x, A_y)$  y  $(A_x', A_y')$  se obtienen a partir de la geometría del vehículo, tomando como referencias de diseño las siguientes dimensiones:

$A_V$  = Ancho del Vehículo

$A_{LL}$  = Ancho del Ensamble Rueda-Neumático

$R$  = Diámetro del Ensamble Rueda-Neumático

$M$  = Longitud del Mango

$m$  = Longitud de la Masa

$H_{max}$  = Altura de la Barra Frontal Transversal de la Carrocería

$h_{min}$  = Altura del Piso del Vehículo

$A_C$  = Ancho de la Carrocería

$A_F$  = Ancho de la sección frontal del Vehículo

Los parámetros anteriores son la base para la aplicación de un Método de Diseño que permita definir el Sistema de Suspensión del Vehículo.

#### 4.2 Método Gráfico de Síntesis

El Método Gráfico se lleva a cabo utilizando un paquete de Diseño Asistido por Computadora (CAD), en donde se definen las siguientes coordenadas y dimensiones básicas:

- Coordenadas de Origen del sistema  $(0, 0)$ .
- Dimensiones del Bastidor del Vehículo, incluyendo Altura del Piso ( $h_{min}$ ) y Altura de la parte frontal ( $h_{max}$ ).

- Dimensiones básicas del vehículo, incluyendo Ancho de Vía ( $A_v$ ), Ancho del Neumático ( $All$ ), Longitud de la Masa ( $M$ ), Longitud del Mango ( $m$ ) y Longitud del Ensemble Rueda-Neumático ( $R$ ).
- Coordenadas del punto inferior de la Masa ( $A_x, A_y$ ) y del punto superior de la Masa ( $A_x', A_y'$ ).
- Coordenada del punto medio de la barra de unión entre el piso y la barra frontal del vehículo ( $B_x, B_y$ ).
- Coordenada del punto medio del Neumático ( $X_0, Y_0$ ).
- Viaje de la suspensión para determinar los puntos de Jounce ( $X_1, Y_1$ ) y Rebound ( $X_2, Y_2$ ), figura (4.3).

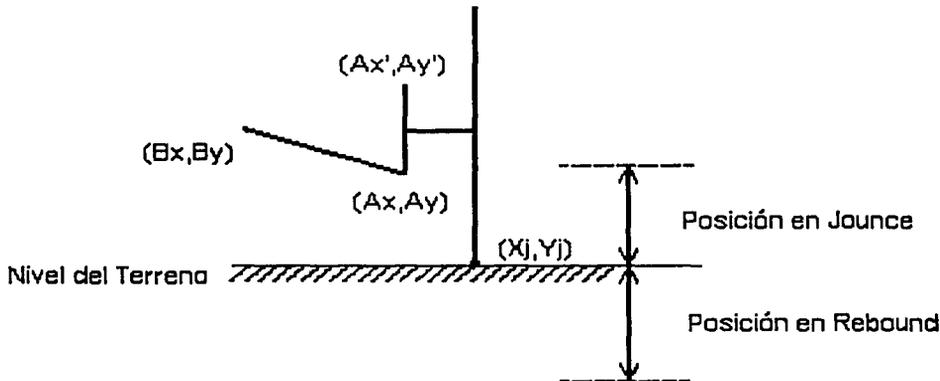


Figura 4.3

Dibujando estos elementos en el paquete de Diseño Asistido por Computadora, se obtiene la base para aplicar el Método Gráfico que consiste en los siguientes pasos:

- 1) Se traza una Circunferencia  $C_1$  tomando como centro al punto medio de la barra de unión,  $(B_x, B_y)$  con un Radio de Circunferencia igual a la distancia entre los puntos  $(B_x, B_y)$  y  $(A_x, A_y)$ . Esta Circunferencia representa la trayectoria sobre la cual se traslada el punto  $(A_x, A_y)$ , o extremo inferior de la masa, figura (4.4).

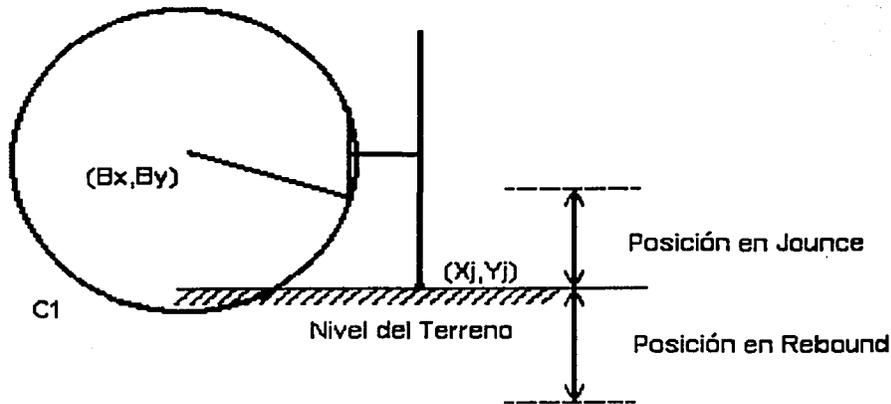


Fig 4.4

- 2) Se genera una línea perpendicular al terreno, en el punto medio del piso del neumático  $(X_0, Y_0)$ , con  $j=0$  que representa la trayectoria que debe seguir el Ensemble Rueda-Neumático para conseguir un comportamiento adecuado del Vehículo. Esta línea debe tener una longitud equivalente a la distancia del viaje de la suspensión, es decir el desplazamiento máximo en condiciones de Jounce  $(X_1, Y_1)$  y Rebound  $(X_2, Y_2)$  obteniéndose 3 posiciones para el diseño del mecanismo.
- 3) Los elementos Masa, Mango y Ensemble Rueda, se deben considerar como un Cuerpo Rígido, cuya geometría no debe variar en ninguna posición.
- 4) Se copia dicho Cuerpo Rígido tomando como base, o punto inicial de movimiento, al punto medio del neumático  $(X_0, Y_0)$ , siguiendo la trayectoria de la línea recta perpendicular generada en el inciso 2), pegando la copia en cada una de las posiciones de Jounce y Rebound, figuras. (4.5) y (4.6).
  - a) Una vez copiada en la posición de Rebound, se rota el Cuerpo Rígido en sentido de las manecillas del reloj, o positivo, de manera tal que el punto  $(A_x, A_y)$  coincida con la Circunferencia  $C_1$ , tomando como eje de rotación al punto  $(X_0, Y_0)$ , simulando un Camber Positivo.

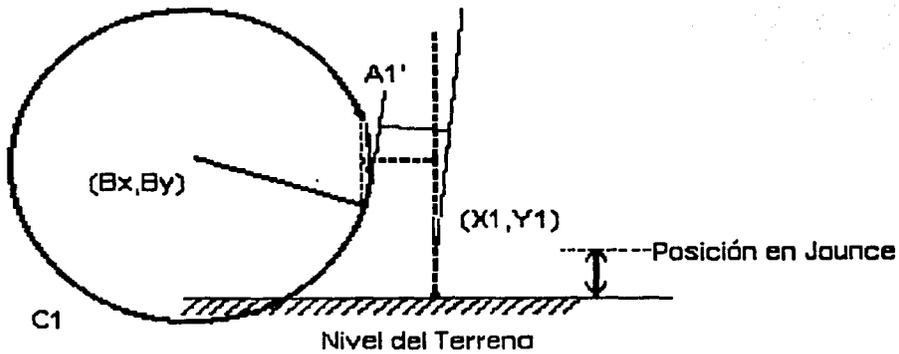


Fig. 4.5

- b) Por otra parte, siguiendo el mismo procedimiento, se mueve el Cuerpo Rígido a la posición de Jounce, rotándose en sentido opuesto a las manecillas del reloj, o negativo, hasta llegar a la intersección con la Circunferencia C1, simulando un Camber negativo.

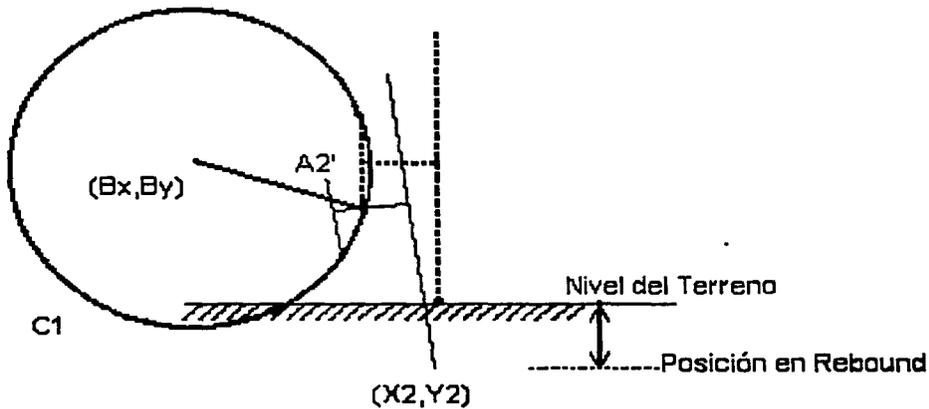


Fig. 4.6

- 5) Con la trayectoria que genera el punto  $(Ax', Ay')$ , se obtienen los puntos  $A_1'$   $A_2'$ . Con estas tres coordenadas se traza una Circunferencia C2, que nos representa la trayectoria que sigue el extremo superior de la Masa, figura (4.7).

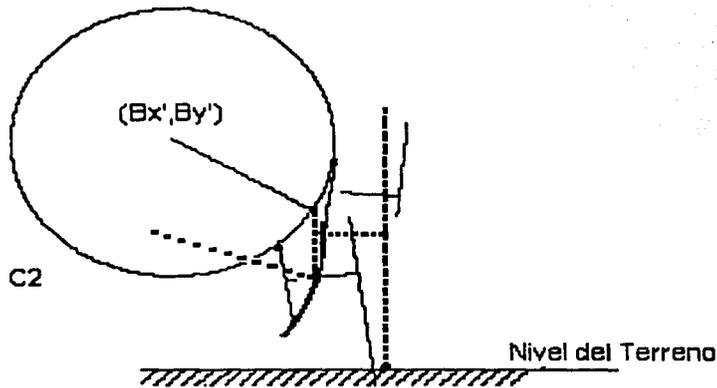


Fig 4.7

- 6) El centro de dicha Circunferencia C2, representa el punto extremo de la Barra Superior del sistema de Suspensión  $(Bx' , By')$ . Con esto se complementa el mecanismo de 4 barras del que consta el sistema de Suspensión, figura (4.8).

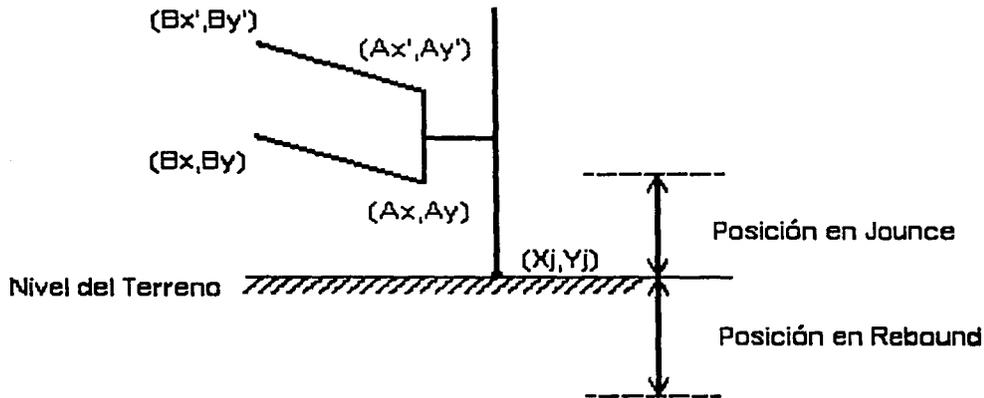


Figura 4.8

Esta configuración permite determinar el comportamiento del mecanismo frente a los obstáculos que presente el terreno por el cual va a circular el vehículo. Es decir, que el punto  $(X_j , Y_j)$  se mueva en línea recta perpendicularmente al terreno.

### **4.3 Aplicaciones del Método Gráfico de Diseño**

Desde el año de 1990, se ha venido utilizando el Método Gráfico de Diseño en la fabricación del Sistema de Suspensión de los diferentes vehículos tipo Mini-Baja con los que ha participado la Universidad Nacional Autónoma de México.

Como referencias se encuentran los trabajos de Tesis de Saldivar, José (Proyecto de un Automóvil, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1992), el de Domínguez, Guzmán y Rodríguez (Diseño, Manufactura y Pruebas de un Vehículo Monoplaza, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1996) y el de Sánchez, Armando (Diseño de una Estructura Tubular Mediante CAD y CAE, Facultad de Ingeniería, UNAM 2002).

En general, el Método Gráfico se considera de fácil aplicación, obteniéndose resultados positivos en los diferentes vehículos utilizados en competencias de SAE. Este Método de Diseño ha sido utilizado durante los últimos 10 años.

Sin embargo, presenta inconvenientes en dos aspectos principalmente:

- 1) No se tiene control del ángulo de Camber, o de inclinación de cuerpo rígido, ya que solo se tiene control sobre un punto de la rueda, lo que dificulta encontrar los puntos descritos en 4a y 4b.
- 2) Además de requerir un Paquete de Diseño Asistido por Computadora, que puede resultar costoso.

## CAPÍTULO QUINTO

### MÉTODO ANALÍTICO DE SÍNTESIS PARA UNA SUSPENSIÓN DELANTERA

#### 5.1 Método Analítico de Síntesis

El Método Analítico propuesto, se basa en los mismos principios del Método Gráfico, descrito anteriormente. Con la ventaja de utilizar operaciones matemáticas en la determinación de todos los parámetros de diseño, obteniendo resultados más precisos.

Utilizando como referencia el mismo sistema gráfico: figura (4.3) Ref.

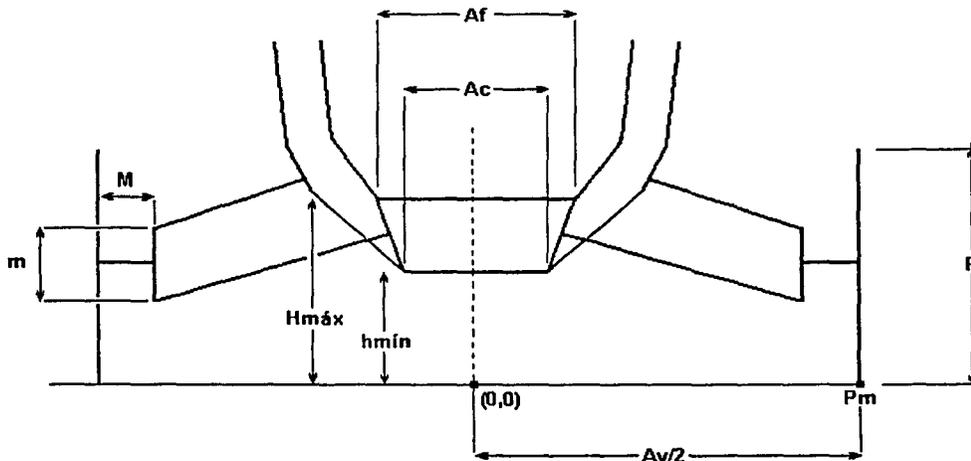


Fig. 4.3 Ref.

Y las dimensiones básicas del vehículo:

$A_V$  = Ancho del Vehículo

$A_{LL}$  = Ancho del Ensamble Rueda-Neumático

$R$  = Diámetro del Ensamble Rueda-Neumático

$M$  = Longitud del Mango

$m$  = Longitud de la Masa

$H_{máx}$  = Altura de la Barra Frontal Transversal de la Carrocería

$h_{mín}$  = Altura del Piso del Vehículo

$A_C$  = Ancho de la Carrocería

$A_F$  = Ancho de la sección frontal del Vehículo

$\gamma$  = Angulo de Inclinación de la Rueda

## 5.2 Determinación de Puntos Básicos del Mecanismo

Se determinan los puntos  $(bx, by)$ ,  $(ax, ay)$  y  $(ax', ay')$  utilizando las siguientes ecuaciones:

- 1) Se define un sistema coordenado X,Y con el origen situado por convención en la línea central del vehículo (coordenada X) y a nivel del piso (coordenada Y).
- 2) Se obtienen las coordenadas de los puntos  $(ax, ay)$ .

$$a_x = P_m - M \quad (5.1)$$

$$a_y = \frac{R}{2} - \frac{m}{2} \quad (5.2)$$

- 3) Y del punto  $(ax', ay')$ .

$$a_{x'} = a_x + m \cos \gamma \quad (5.3)$$

$$a_{y'} = a_y + m \sin \gamma \quad (5.4)$$

- 4) Se define el punto  $Pm$  como la coordenada en X del punto medio de la llanta,  $(X_j, Y_j)$  con  $j=0$ .

$$Pm = \frac{A_v}{2} - \frac{A_{LL}}{2} \quad (5.5)$$

- 5) Las coordenadas del punto  $(bx, by)$  se localizan por diseño en el punto medio de la barra que une la barra lateral del piso del vehículo con la barra frontal transversal, por lo que es necesario definir los otros planos coordenados ZX y YZ.

- 6) En el plano ZX, con el origen del eje Z en el frente del vehículo, se puede definir a la coordenada  $bx$  como:

$$bx = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{A_c}{2} - \frac{A_f}{2} \right) + \left( \frac{A_f}{2} \right) \quad (5.6)$$

- 7) Y en el plano ZY, se define la coordenada  $Y_{P3}$  como,

$$by = \frac{H_{MAX} - h_{MIN}}{2} + h_{MIN} \quad (5.7)$$

Para definir las características de comportamiento deseado en la trayectoria de las ruedas ante diferentes condiciones de terreno, se definen los siguientes parámetros:

Es necesario mantener un máximo contacto de los neumáticos sobre el terreno, por lo que se requiere que el punto medio Pm se traslade sobre una línea recta perpendicular al terreno.

Además, se define el viaje máximo de la suspensión determinando las posiciones máximas de Jounce y Rebound sobre la línea de traslado del punto Pm como un límite para el mecanismo de suspensión.

Esto se representa como un mecanismo de cuatro barras por Generación de Trayectoria.

Siguiendo la "Síntesis Exacta de Conducción de Cuerpo Rígido" de Rojas<sup>(5)</sup>, se obtiene el siguiente análisis. Apéndice A.

### 5.3 Síntesis del Mecanismo por Generación de Trayectoria

Tomando como referencia, la diada formada entre los puntos (bx,by), (ax,ay) y (Xj,Yj) con j=0, se inicia la síntesis del Mecanismo. De la Ecuación (2) del artículo de Rojas<sup>(5)</sup>, se obtiene lo siguiente:

$$f_j = a_{j1}a_x + a_{j2}a_y + a_{j3}b_x + a_{j4}b_y + b_j' + (a_y b_x - a_x b_y)c_j' + (a_y b_y + a_x b_x)d_j' = 0 \quad (5.8)$$

Donde:

$$a_{j1} = \cos \beta_j x_j + \text{sen} \beta_j y_j - x_0 \quad (5.9)$$

$$a_{j2} = \cos \beta_j y_j - \text{sen} \beta_j x_j - y_0 \quad (5.10)$$

$$a_{j3} = \cos \beta_j x_0 - \text{sen} \beta_j y_0 - x_j \quad (5.11)$$

$$a_{j4} = \cos \beta_j y_0 + \text{sen} \beta_j x_0 - y_j \quad (5.12)$$

$$b_j' = \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \text{sen} \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) \quad (5.13)$$

$$c_j' = \text{sen} \beta_j \quad (5.14)$$

$$d_j' = 1 - \cos \beta_j \quad (5.15)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (5.9) a (5.15) en la ecuación (5.8) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f_j &= (\cos \beta_j x_j + \operatorname{sen} \beta_j y_j - x_0) a_x + (\cos \beta_j y_j - \operatorname{sen} \beta_j x_j - y_0) a_y \\
 &\quad + (\cos \beta_j x_0 - \operatorname{sen} \beta_j y_0 - x_j) b_x + (\cos \beta_j y_0 + \operatorname{sen} \beta_j x_0 - y_j) b_y \\
 &\quad + \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \operatorname{sen} \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) \\
 &\quad + (a_y b_x - a_x b_y) \operatorname{sen} \beta_j + (a_y b_y + a_x b_x) (1 - \cos \beta_j) = 0 \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

con  $j = 1, 2$

Para el sistema en estudio, se consideran las siguientes premisas en base a la figura (5.1).

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = x_j = x_1 = x_2 = x_t = t, \text{ con } t = \text{Ancho de Vía entre dos. Ecuación (5.5)}$$

Y los valores de  $(a_x, a_y)$  y  $(b_x, b_y)$  obtenidos de las ecuaciones (5.1), (5.2), (5.6) y (5.7), respectivamente.

Sustituyendo en la ecuación (5.16) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f_j &= (t \cos \beta_j + y_j \operatorname{sen} \beta_j - t) a_x + (y_j \cos \beta_j - t \operatorname{sen} \beta_j) a_y \\
 &\quad + (t \cos \beta_j - y_0 \operatorname{sen} \beta_j - t) b_x + (y_0 \cos \beta_j + t \operatorname{sen} \beta_j - y_j) b_y \\
 &\quad + \frac{t^2 + y_0^2 + t^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (t \cdot t + y_0 y_j) - \operatorname{sen} \beta_j (t \cdot y_j - y_0 t) \\
 &\quad + (a_y b_x - a_x b_y) \operatorname{sen} \beta_j + (a_y b_y + a_x b_x) (1 - \cos \beta_j) = 0 \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Eliminando y factorizando:

$$\begin{aligned}
 f_j &= \cos \beta_j (a_x t + a_y y_j + b_x t - t^2 - I) \\
 &\quad + \operatorname{sen} \beta_j (a_x y_j - a_y t + b_y t - t \cdot y_j + H) \\
 &\quad - a_x t - b_x t - b_y y_j + t^2 + \frac{y_j^2}{2} + I \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

Donde:

$$H = (a_y b_x - a_x b_y)$$

$$I = (a_y b_y + a_x b_x)$$

Y definiendo las constantes:

$$A = (a_x t + a_y y_j + b_x t - t^2 - I)$$

$$B = (a_x y_j - a_y t + b_y t - t y_j + H)$$

$$C = (-a_x t - b_x t - b_y y_j + t^2 + \frac{y_j^2}{2} + I)$$

Se obtiene el siguiente polinomio:

$$f_j = A \cos \beta_j + B \sin \beta_j + C = 0 \quad (5.19)$$

Las soluciones para  $j = 1, 2$ , dan como resultado los ángulos  $\beta_j$  en las posiciones de Jounce y Rebound.

La ecuación (5.19) contiene expresiones trascendentes cuya solución exacta no es posible, por lo que se utiliza un Método Numérico para encontrar por aproximación los valores de  $\beta_j$ .

Utilizando el Método de Newton-Rhapson, para definir por aproximación el valor de una variable  $x$ , se definen las funciones  $f(x)$  y su derivada con respecto a  $x$ ,  $f'(x)$ :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (5.20)$$

Para el sistema en estudio, se define a  $x_i = \beta_j$ , con  $j=1,2$

$$f(x_i) = f_j = A \cos \beta_j + B \sin \beta_j + C = 0 \quad (5.21)$$

Y su derivada con respecto a  $\beta_j$  :

$$f'(\beta_j) = B \cos \beta_j - A \sin \beta_j \quad (5.22)$$

Por lo tanto la ecuación aplicada del Método de Newton-Rhapson se define de la siguiente manera:

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{A \cos \beta_j + B \sin \beta_j + C}{B \cos \beta_j - A \sin \beta_j} \quad (5.23)$$

Haciendo el estudio de la otra diada formada por los puntos  $(x_j, y_j)$  para  $j=0$ ,  $(ax', ay')$  y  $(bx', by')$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$f_j = a_{j1} a'_x + a_{j2} a'_y + a_{j3} b'_x + a_{j4} b'_y + b'_j + (a'_y b'_x - a'_x b'_y) c'_j + (a'_y b'_y + a'_x b'_x) d'_j = 0 \quad (5.24)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (5.9) a (5.15) en la ecuación (5.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} f_j = & (\cos \beta_j x_j + \sin \beta_j y_j - x_0) a'_x + (\cos \beta_j y_j - \sin \beta_j x_j - y_0) a'_y \\ & + (\cos \beta_j x_0 - \sin \beta_j y_0 - x_j) b'_x + (\cos \beta_j y_0 + \sin \beta_j x_0 - y_j) b'_y \\ & + \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \sin \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) \\ & + (a'_y b'_x - a'_x b'_y) \sin \beta_j + (a'_y b'_y + a'_x b'_x) (1 - \cos \beta_j) = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

con  $j = 1, 2$

Para esta diada en estudio, se consideran las siguientes premisas:

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = x_j = x_1 = x_2 = x_t = t, \text{ con } t = \text{Ancho de Vía entre dos.}$$

$\beta_j =$  Resultado de la síntesis de la primer diada, con  $j = 0, 1, 2$

Y los valores de  $(ax, ay)$ ,  $(ay', ax')$  y  $(bx, by)$  obtenidos de las ecuaciones (5.1) a la (5.4), (5.6) y (5.7) respectivamente.

Sustituyendo y Eliminando:

$$\begin{aligned} f_j = & (t \cos \beta_j + y_j \sin \beta_j - t) a'_x + (y_j \cos \beta_j - t \sin \beta_j) a'_y \\ & + (t \cos \beta_j - t) b'_x + (t \sin \beta_j - y_j) b'_y + t^2 + \frac{y_j^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y_j \sin \beta_j \\ & + a'_y b'_x \sin \beta_j - a'_x b'_y \sin \beta_j + a'_y b'_y - a'_y b'_y \cos \beta_j + a'_x b'_x - a'_x b'_x \cos \beta_j = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Factorizando para (bx',by') se obtiene la ecuación (5.27).

$$f_j = b'_x(t \cos \beta_j - t + a'_y \operatorname{sen} \beta_j + a'_x - a'_x \cos \beta_j) \\ + b'_y(t \operatorname{sen} \beta_j - y_j - a'_x \operatorname{sen} \beta_j + a'_y - a'_y \cos \beta_j)$$

$$+ a'_x(t \cos \beta_j + y_j \operatorname{sen} \beta_j - t) + a'_y(y_j \cos \beta_j - t \operatorname{sen} \beta_j) + t^2 + \frac{y_j^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y_j \operatorname{sen} \beta_j = 0$$

Y definiendo las constantes:

$$D = (t \cos \beta_j - t + a'_y \operatorname{sen} \beta_j + a'_x - a'_x \cos \beta_j)$$

$$E = (t \operatorname{sen} \beta_j - y_j - a'_x \operatorname{sen} \beta_j + a'_y - a'_y \cos \beta_j)$$

$$F = [a'_x(t \cos \beta_j + y_j \operatorname{sen} \beta_j - t) + a'_y(y_j \cos \beta_j - t \operatorname{sen} \beta_j) + t^2 + \frac{y_j^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y_j \operatorname{sen} \beta_j]$$

Se obtiene el siguiente polinomio:

$$f_j = D_j b'_x + E_j b'_y + F_j = 0 \quad (5.28)$$

Con  $j = 1, 2$  se forma un Sistema de Ecuaciones con bx' y by' como variables, resolviendo se obtiene:

$$b'_x = \frac{-F_1 - E_1 b'_y}{D_1} \quad (5.29)$$

$$D_2 \left[ \frac{-F_1 - E_1 b'_y}{D_1} \right] + E_2 b'_y + F_2 = 0 \quad (5.30)$$

Desarrollando la ecuación para despejar by' se obtiene:

$$b'_y = \frac{D_2 F_1 - F_2 D_1}{E_2 D_1 - E_1 D_2} \quad (5.31)$$

Sustituyendo el valor de by' en la ecuación (5.29) se obtienen las coordenadas del punto (bx',by').

Definidos los puntos que forman el mecanismo, se determina la longitud de las barras de Entrada, Acoplamiento y Salida del mecanismo de Cuatro Barras mediante la siguiente fórmula:

$$|P_1 \cdot P_2| = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (5.32)$$

Considerando a los puntos  $P1$  y  $P2$  como  $(bx,by)$  y  $(ax,ay)$  para la primera barra (de entrada),  $(ax,ay)$  y  $(ax',ay')$  para la segunda barra (acopladora) y finalmente  $(ax',ay')$  y  $(bx',by')$  para la tercera barra (de salida).

#### 5.4 Síntesis del Mecanismo por Conducción de Cuerpo Rígido

Otra aproximación a la solución analítica se puede hacer siguiendo un estudio de Síntesis de Mecanismos por Conducción de Cuerpo Rígido, en donde los datos de entrada incluyen:

- La definición de la geometría del Cuerpo Rígido.
- La definición de las coordenadas de un punto del Cuerpo Rígido, en las diferentes posiciones deseadas.
- Además de la definición del ángulo de posición, en dichas posiciones.

La geometría del Cuerpo Rígido se obtiene de las ecuaciones (5.1) a (5.4), en donde se definen las coordenadas de la barra acopladora sujeta al cuerpo rígido. Puntos  $(ax,ay)$  y  $(ax',ay')$ .

El sistema de suspensión que se requiere, debe permitir que el punto medio del neumático siga una trayectoria tal que permita el máximo contacto con la superficie del terreno. Debido a esto, se considera al punto  $P_m$ , definido en la ecuación (5.5), como el punto a analizar en el Cuerpo Rígido.

El ángulo de posición del Cuerpo Rígido, se define a partir de las condiciones de Camber deseadas en las posiciones de Bache y Tope.

Siguiendo el mismo análisis que en el inciso 5.3, se toma la diada de entrada, formada por los puntos  $(x_j,y_j)$  para  $j=0$ ,  $(ax,ay)$  y  $(bx,by)$  para obtener la siguiente ecuación:

$$f_j = a_{j1}a_x + a_{j2}a_y + a_{j3}b_x + a_{j4}b_y + b_j' + (a_y b_x - a_x b_y)c_j' + (a_y b_y + a_x b_x)d_j' = 0 \quad (5.33)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (5.9) a (5.15) en la ecuación (5.32) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f_j &= (\cos \beta_j x_j + \operatorname{sen} \beta_j y_j - x_0) a_x + (\cos \beta_j y_j - \operatorname{sen} \beta_j x_j - y_0) a_y \\
 &+ (\cos \beta_j x_0 - \operatorname{sen} \beta_j y_0 - x_j) b_x + (\cos \beta_j y_0 + \operatorname{sen} \beta_j x_0 - y_j) b_y \\
 &+ \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \operatorname{sen} \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) \\
 &+ (a_y b_x - a_x b_y) \operatorname{sen} \beta_j + (a_y b_y + a_x b_x) (1 - \cos \beta_j) = 0 \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

con  $j = 1, 2$

Para esta diada en estudio, se consideran las siguientes premisas:

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = x_j = x_1 = x_2 = x_t = t, \text{ con } t = \text{Ancho de Vía entre dos o Pm}$$

$\beta_j =$  Ángulo de Camber deseado para las posiciones  $j = 0, 1, 2$

Y los valores de  $(a_x, a_y)$ ,  $(a_y', a_x')$  obtenidos de las ecuaciones (5.1) a la (5.4).

Sustituyendo y Eliminando:

$$\begin{aligned}
 f_j &= (t \cos \beta_j + y_j \operatorname{sen} \beta_j - t) a_x + (y_j \cos \beta_j - t \operatorname{sen} \beta_j) a_y \\
 &+ (t \cos \beta_j - t) b_x + (t \operatorname{sen} \beta_j - y_j) b_y + t^2 + \frac{y_j^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y_j \operatorname{sen} \beta_j \\
 &+ a_y b_x \operatorname{sen} \beta_j - a_x b_y \operatorname{sen} \beta_j + a_y b_y - a_x b_x \cos \beta_j + a_x b_x - a_x b_x \cos \beta_j = 0 \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Factorizando para  $(b_x, b_y)$  se obtiene la ecuación (5.35).

$$\begin{aligned}
 f_j &= b_x (t \cos \beta_j - t + a_y \operatorname{sen} \beta_j + a_x - a_x \cos \beta_j) \\
 &+ b_y (t \operatorname{sen} \beta_j - y_j - a_x \operatorname{sen} \beta_j + a_y - a_y \cos \beta_j) \\
 &+ a_x (t \cos \beta_j + y_j \operatorname{sen} \beta_j - t) + a_y (y_j \cos \beta_j - t \operatorname{sen} \beta_j) + t^2 + \frac{y_j^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y_j \operatorname{sen} \beta_j = 0
 \end{aligned}$$

Y definiendo las constantes:

$$D = (t \cos \beta_j - t + a_y \operatorname{sen} \beta_j + a_x - a_x \cos \beta_j)$$

$$E = (t \operatorname{sen} \beta_j - y_j - a_x \operatorname{sen} \beta_j + a_y - a_y \cos \beta_j)$$

$$F = [a_x(t \cos \beta_j + y_j \operatorname{sen} \beta_j - t) + a_y(y_j \cos \beta_j - t \operatorname{sen} \beta_j) + t^2 + \frac{y_j^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y_j \operatorname{sen} \beta_j]$$

Se obtiene el siguiente polinomio:

$$f_j = D_j b_x + E_j b_y + F_j = 0 \quad (5.36)$$

Con  $j=1,2$  se forma un Sistema de Ecuaciones con  $b_x$  y  $b_y$  como variables, resolviendo se obtiene:

$$b_x = \frac{-F_1 - E_1 b_y}{D_1} \quad (5.37)$$

$$D_2 \left[ \frac{-F_1 - E_1 b_y}{D_1} \right] + E_2 b_y + F_2 = 0 \quad (5.38)$$

Desarrollando la ecuación para despejar  $b_y$  se obtiene:

$$b_y = \frac{D_2 F_1 - F_2 D_1}{E_2 D_1 - E_1 D_2} \quad (5.39)$$

Sustituyendo el valor de  $b_y$  en la ecuación (5.37) se obtienen las coordenadas del punto  $(b_x, b_y)$ .

Para obtener los valores del punto  $(b_x', b_y')$ , se sigue el mismo método descrito en las ecuaciones (5.24) a la (5.31), considerando los valores de la diada de salida formada por los puntos  $(a_x', a_y')$ ,  $(b_x', b_y')$  y las siguientes premisas:

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = x_j = x_1 = x_2 = x_t = t, \text{ con } t = \text{Ancho de Vía entre dos } \text{ó Pm}$$

$\beta_j =$  Ángulo de Camber deseado para las posiciones  $j = 0,1,2$

Definidos los puntos que forman el mecanismo, se determina la longitud de las barras de Entrada, Acoplamiento y Salida del mecanismo de Cuatro Barras mediante la fórmula mostrada en la ecuación (5.32).

### **5.5 Resultados de la Síntesis**

El Método Analítico es la representación matemática del Método Gráfico, y como tal puede ser desarrollado en un programa de computadora, o en una simple hoja de cálculo. Esto representa una gran facilidad de aplicación.

Se puede determinar si el mecanismo en estudio es factible en el caso de que la iteración de las raíces converja hacia un valor. En caso contrario, si el valor de las raíces diverge, se determina que el mecanismo no es manufacturable.

De manera muy simple, se puede jugar con los valores de entrada para definir un mecanismo real.

La aplicación de este Método, no representa ningún costo adicional, y determina valores reales en un tiempo mínimo.

## CAPÍTULO SEXTO

### CASO DE ESTUDIO

Se presentarán a continuación dos diferentes casos de estudio, en donde se demuestra la aplicación del Método Analítico. Los datos de entrada están basados en los Proyectos de Mini Baja de los años 1993 y 1994, respectivamente.

#### Primer Caso. (Generación de Trayectoria)

Datos de Entrada	Parámetros Iniciales	Resultados de ángulos $\beta$ :	Resultados de Coordenadas:
$A_V = 52$ $A_{LL} = 5$ $M = 3.5$ $m = 3.5$ $R = 21$ $\gamma = 90$ $A_C = 13$ $A_F = 13$ $H_{\max} = 15.15$ $h_{\min} = 10.85$	Posición de Bache:  $Y1 = -2$ $\beta1 = 10$	$\beta1 = 5.55638957$ $\beta1 = 5.55$ Grados $ES = 8.46 E-07$	$(bx,by) = (6.5, 13.0)$ $(ax,ay) = (22.50, 8.75)$ $(ax',ay') = (22.50, 12.25)$ $(bx',by') = (10.74, 16.50)$
	Posición de Tope:  $Y2 = 4$ $\beta2 = -5$	$\beta2 = -3.46139098$ $\beta2 = -3.46$ Grados $ES = 2.89 E-07$	Longitudes del Mecanismo:  $L_{\text{barra Entrada}} = 16.55483313$ $L_{\text{barra Acopladora}} = 3.5$ $L_{\text{barra Salida}} = 12.50299315$

Tabla 6.1 Resultados Primer Caso por Generación de Trayectoria

Tomando los valores de la tabla anterior, y utilizando un sistema de graficación, es posible demostrar que las coordenadas y longitudes obtenidas en efecto corresponden a un Mecanismo de Cuatro Barras. Figura (6.1).

En las figuras (6.2) y (6.3) se muestra el Mecanismo resultante en las posiciones de bache y tope, en donde la escala de la gráfica indica que el Mecanismo en efecto cumple con las condiciones de diseño en las posiciones  $Y1$  y  $Y2$ , siguiendo una línea recta perpendicular al terreno.

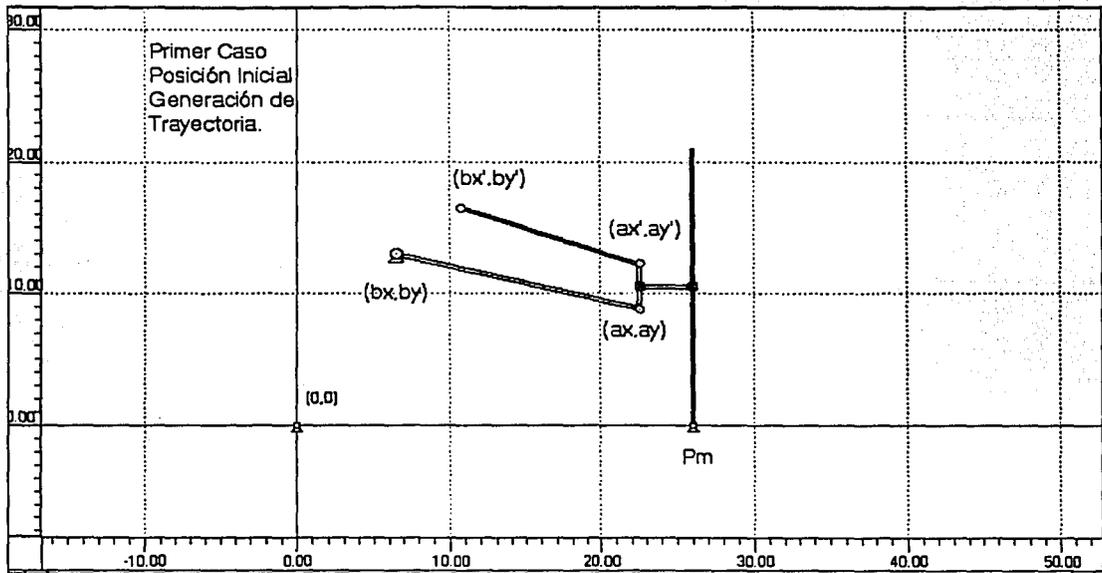


Figura 6.1 Generación de Trayectoria, Posición Inicial

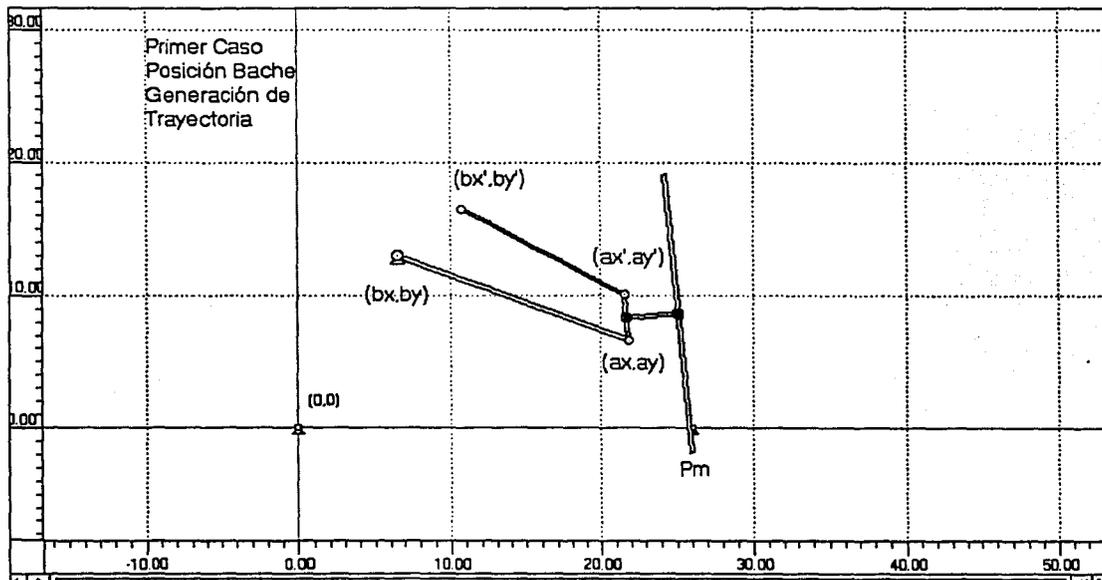


Figura 6.2 Generación de Trayectoria, Posición de Bache

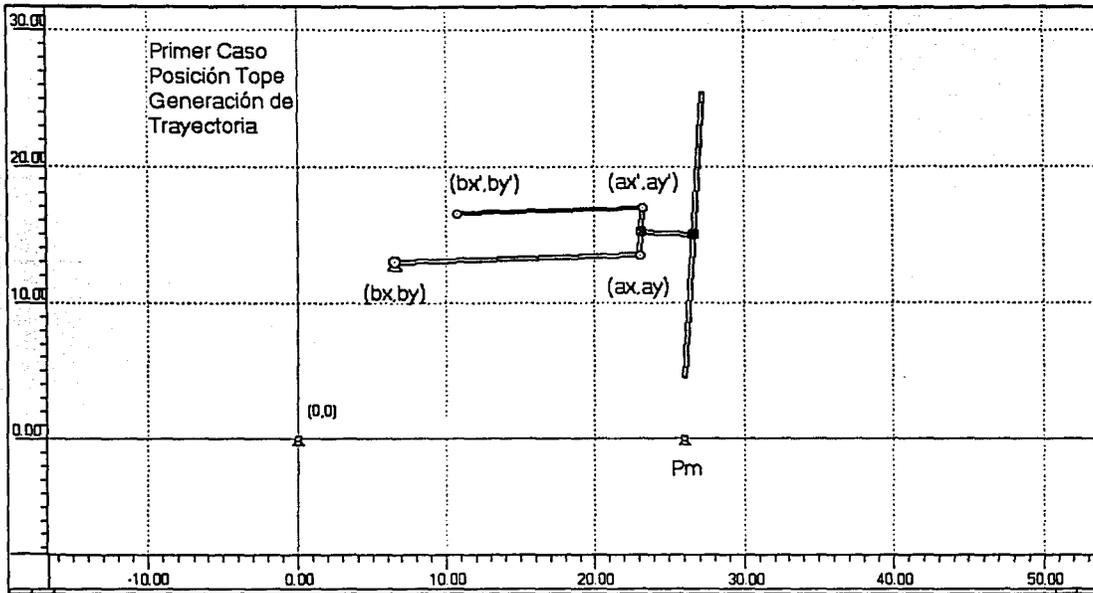


Figura 6.3 Generación de Trayectoria, Posición de Tope

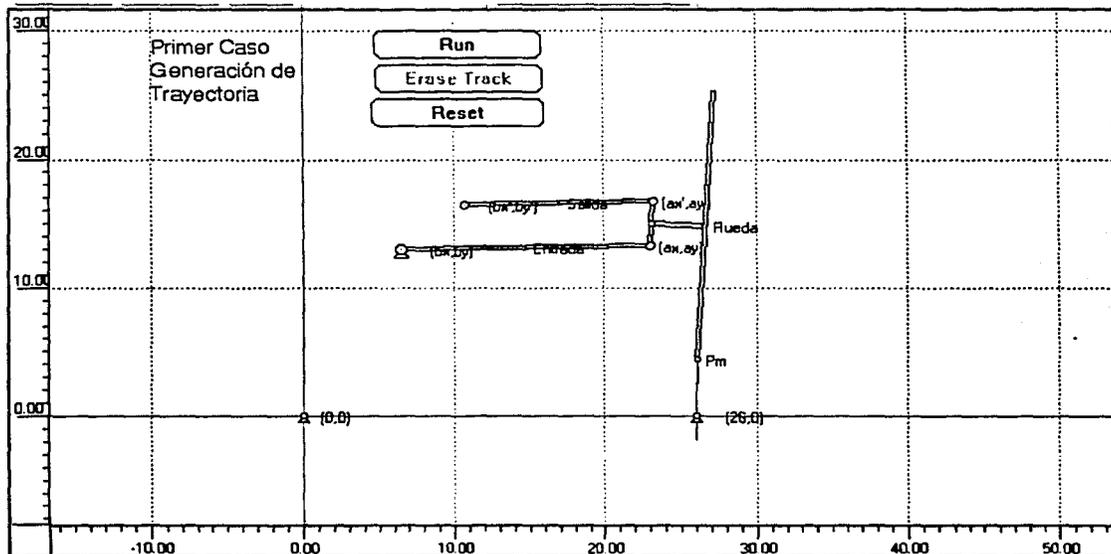


Figura 6.4 Trayectoria Trazada por el Mecanismo, por Generación

### Primer Caso. (Conducción de Cuerpo Rígido)

El análisis por el Método alterno propuesto, considera los mismos datos de entrada, con la diferencia de determinar valores iniciales diferentes en los ángulos de posición en  $\beta_1$  y  $\beta_2$  comparados con los obtenidos en la síntesis original por Generación de Trayectoria. El mecanismo obtenido es muy similar al anterior, lo que demuestra que ambos Métodos convergen en los resultados. Figuras (6.5) a (6.8).

Datos de Entrada	Parámetros Iniciales	Cálculos de Posición	Resultados de Coordenadas:
$A_v = 52$ $A_{LL} = 5$ $M = 3.5$ $m = 3.5$ $R = 21$ $\gamma = 90$	Posición de Bache:  $Y_1 = -2$ $\beta_1 = 5$	Resultados Diada 1:  $b_x = 6.268$ $b_y = 12.662$	$(b_x, b_y) = (6.27, 12.66)$ $(a_x, a_y) = (22.50, 8.75)$ $(a'_x, a'_y) = (22.50, 12.25)$ $(b'_x, b'_y) = (10.41, 16.26)$
	Posición de Tope:  $Y_2 = 4$ $\beta_2 = -3$	Resultados Diada 2:  $b'_x = 10.412$ $b'_y = 16.257$	Longitudes del Mecanismo:  Lbarra Entrada = 16.696 Lbarra Acopladora = 3.5 Lbarra Salida = 12.735

Tabla 6.2 Resultados Primer Caso, Conducción de Cuerpo Rígido

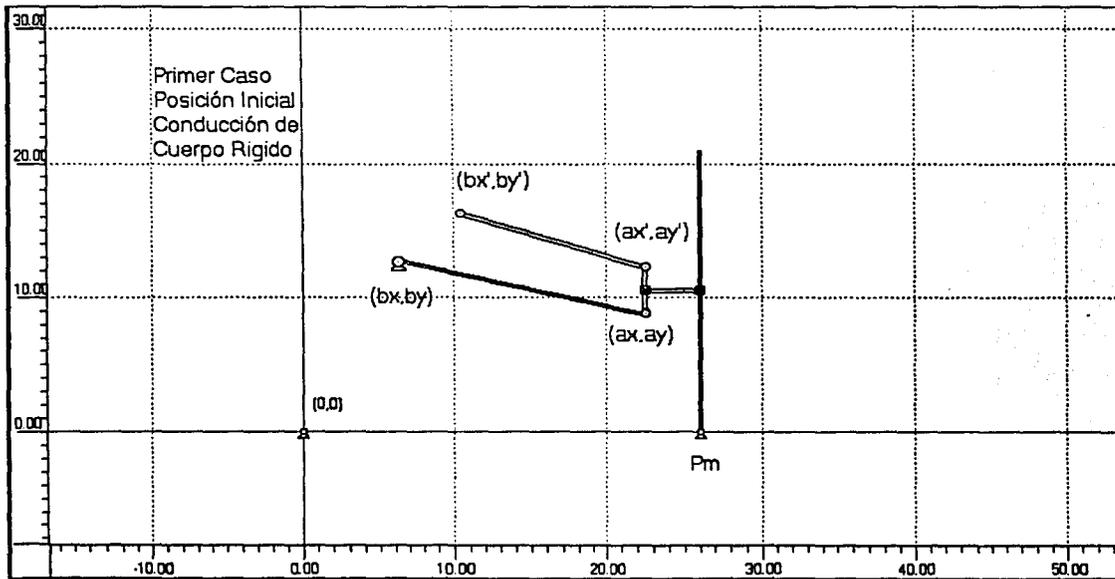


Figura 6.5 Conducción de Cuerpo Rígido, Posición Inicial

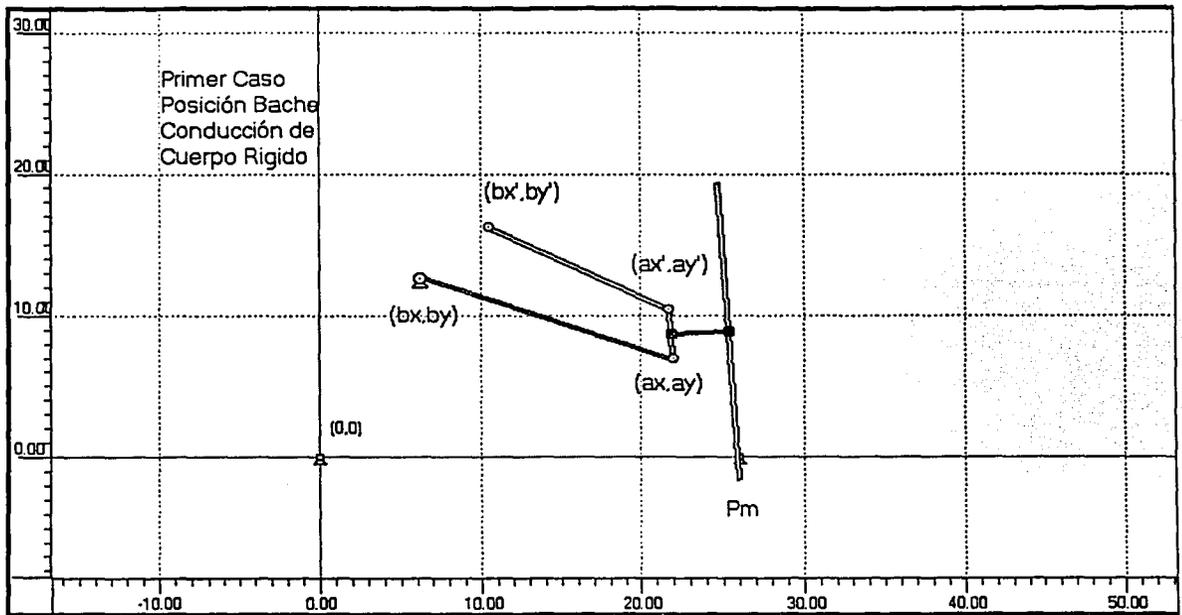


Figura 6.6 Conducción de Cuerpo Rígido, Posición de Bache

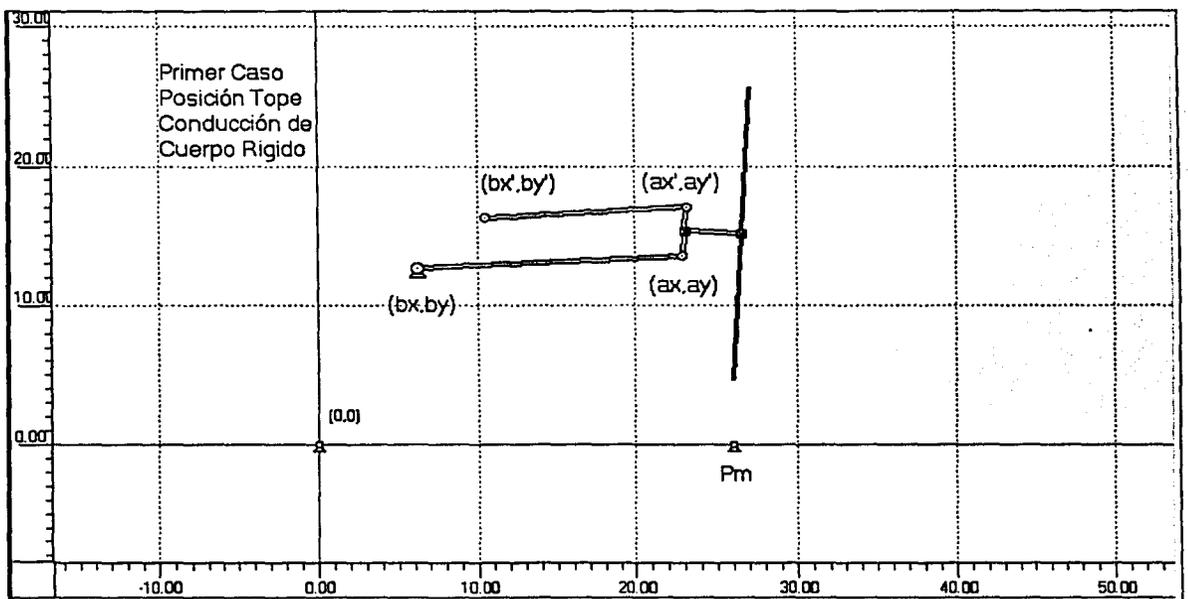


Figura 6.7 Conducción de Cuerpo Rígido, Posición de Tope

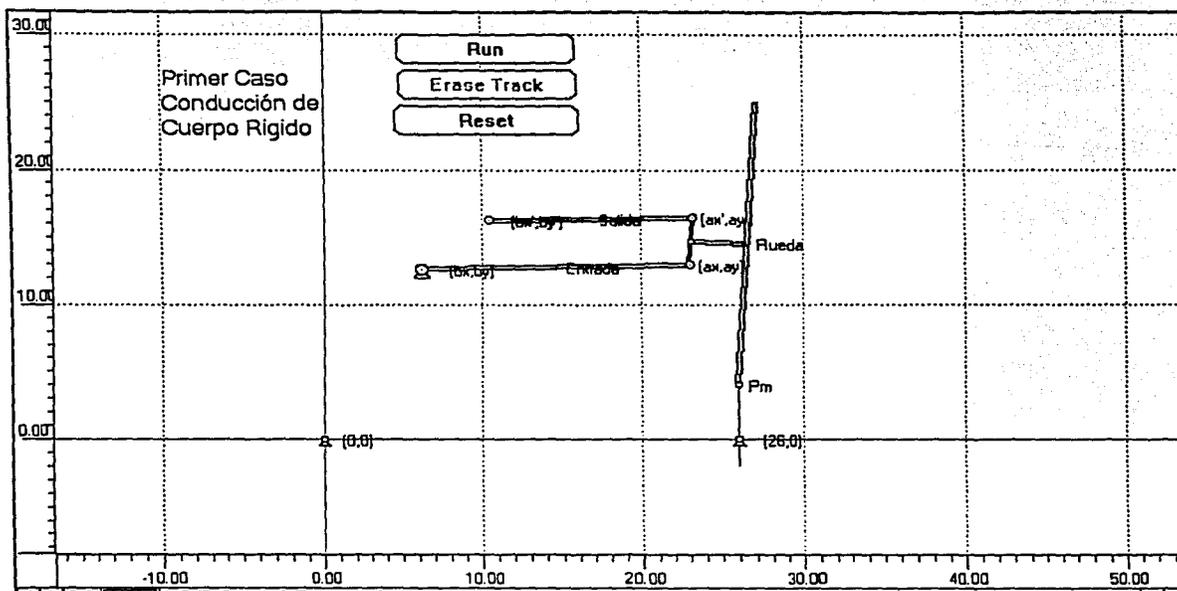


Figura 6.8 Trayectoria Trazada por el Mecanismo, por Conducción

### Segundo Caso. (Generación de Trayectoria)

Datos de Entrada	Parámetros Iniciales	Resultados de ángulos $\beta$ :	Resultados de Coordenadas:
$A_v = 52$ $A_{LL} = 5$ $M = 5$ $m = 5$ $R = 26$ $\gamma = 90$ $A_c = 20$ $A_f = 15$ $H_{max} = 18$ $h_{min} = 13$	Posición de Bache: $Y_1 = -2$ $\beta_1 = 10$	$\beta_1 = 9.80120405$ $\beta_1 = 9.80$ Grados $ES = 2.19 \text{ E-}05$	$(b_x, b_y) = (8.75, 15.5)$ $(a_x, b_y) = (21, 10.5)$ $(a_x', a_y') = (21, 15.5)$ $(b_x', b_y') = (12.02, 20.38)$
	Posición de Tope: $Y_2 = 4$ $\beta_2 = -5$	$\beta_2 = -4.47820864$ $\beta_2 = -4.49$ Grados $ES = 1.81 \text{ E-}07$	Longitudes del Mecanismo: $L_{barra \text{ Entrada}} = 13.23111862$ $L_{barra \text{ Acopladora}} = 5$ $L_{barra \text{ Salida}} = 10.21748979$

Tabla 6.3 Resultados Segundo Caso, Generación de Trayectoria

En las figuras (6.7) a (6.9), se muestra el Mecanismo formado por los valores de la tabla anterior.

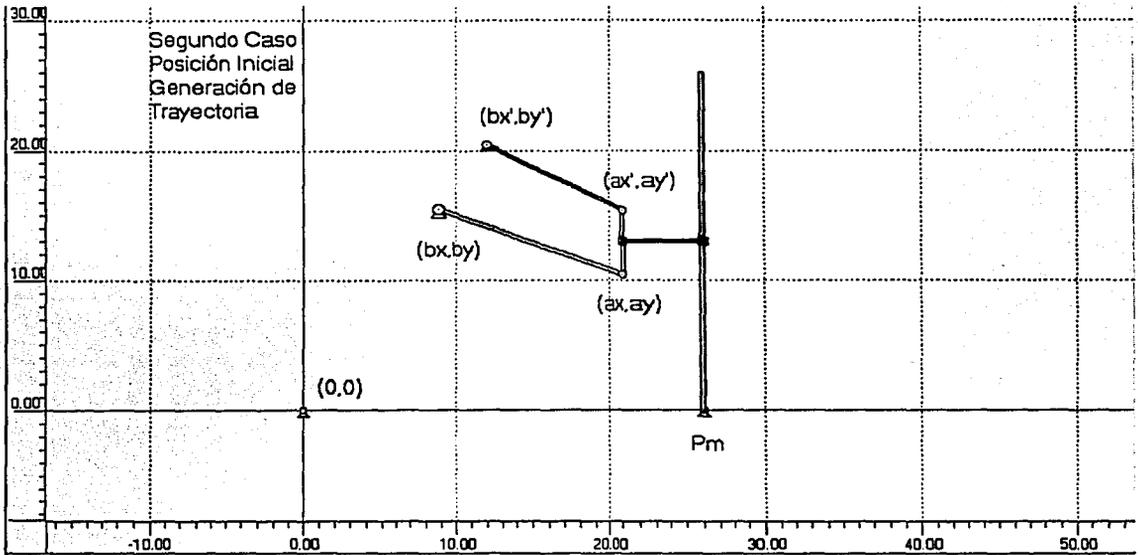


Figura 6.9 Generación de Trayectoria, Posición Inicial

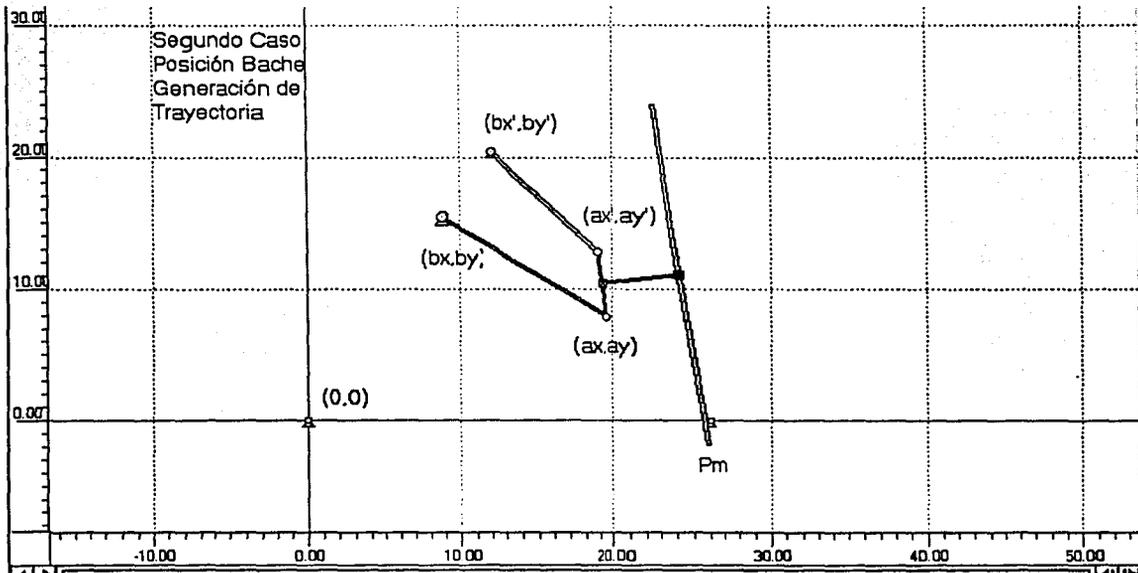


Figura 6.10 Generación de Trayectoria, Posición de Bache

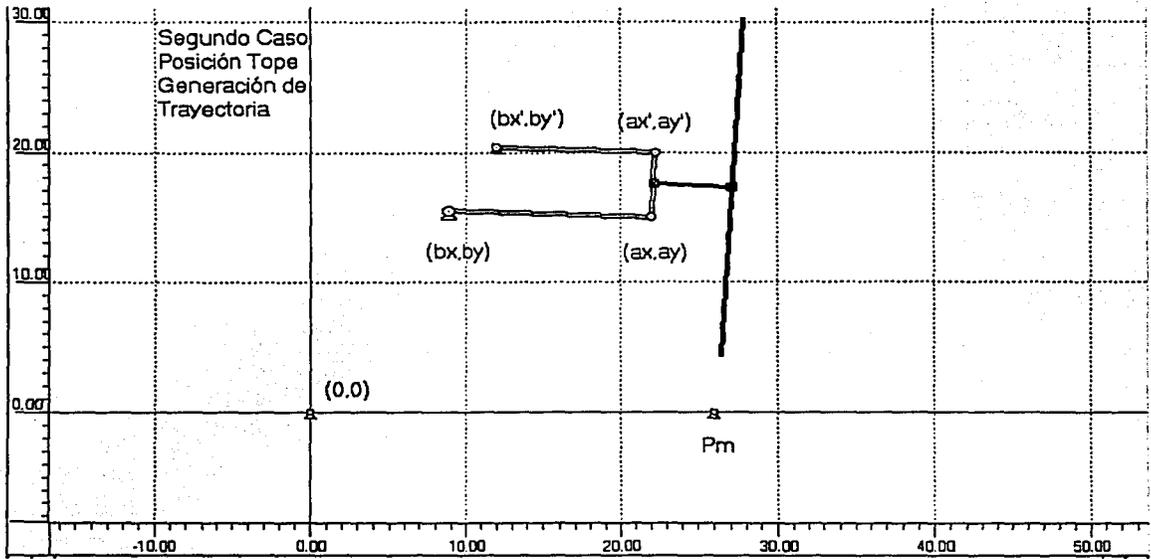


Figura 6.11 Generación de Trayectoria, Posición de Tope

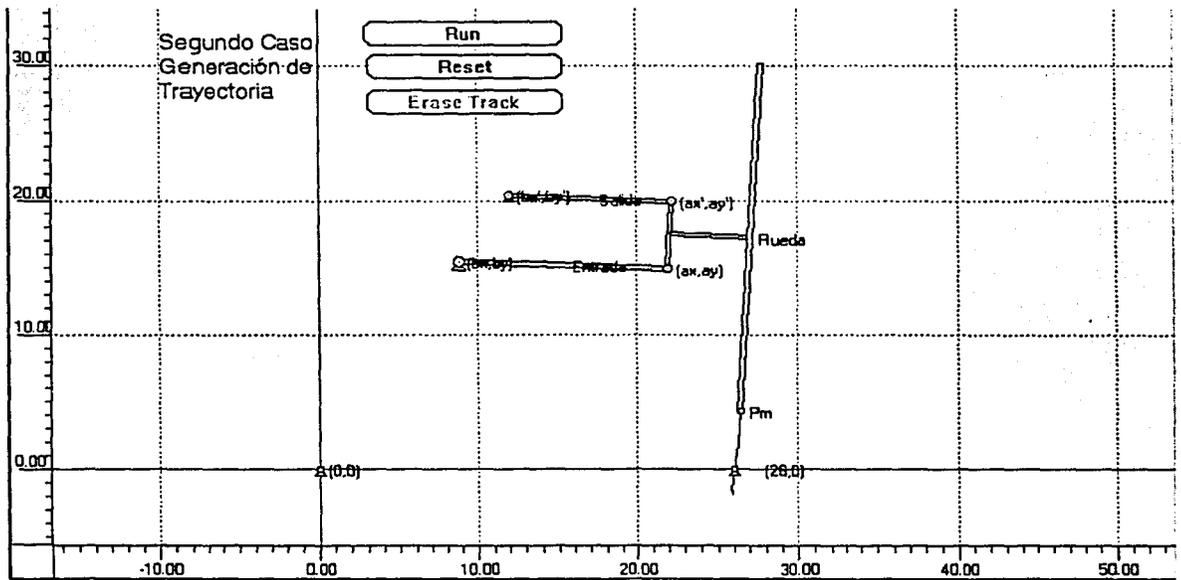


Figura 6.12 Trayectoria Trazada por el Mecanismo, por Generación

ESTA TESIS NO SALI  
DE LA BIBLIOTECA

## Segundo Caso. (Conducción de Cuerpo Rígido)

Datos de Entrada	Parámetros Iniciales	Cálculos de Posición	Resultados de Coordenadas:
$A_v = 52$ $A_{LL} = 5$ $M = 5$ $m = 5$ $R = 26$ $\gamma = 90$	Posición de Bache: $Y1 = -2$ $\beta1 = 9$	Resultados Diada 1: $b_x = 9.914$ $b_y = 14.635$	$(b_x, b_y) = (9.91, 14.64)$ $(a_x, a_y) = (21, 10.5)$ $(a'_x, a'_y) = (21, 15.5)$ $(b'_x, b'_y) = (12.28, 20.01)$
	Posición de Tope: $Y2 = 4$ $\beta2 = -4$	Resultados Diada 2: $b'_x = 12.279$ $b'_y = 20.006$	Longitudes del Mecanismo: $L_{\text{barra Entrada}} = 11.832$ $L_{\text{barra Acopladora}} = 5$ $L_{\text{barra Salida}} = 9.816$

Finalmente, se obtienen las gráficas del mismo mecanismo, siguiendo el Método de Conducción de Cuerpo Rígido. Figuras (6.10) a (6.12)

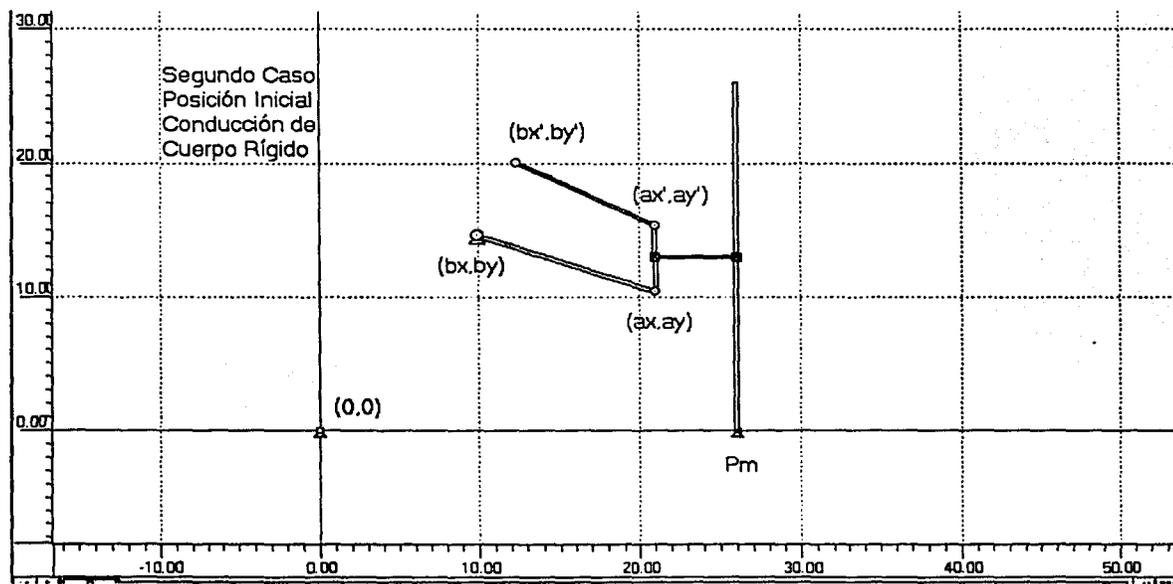


Figura 6.13 Conducción de Cuerpo Rígido, Posición Inicial

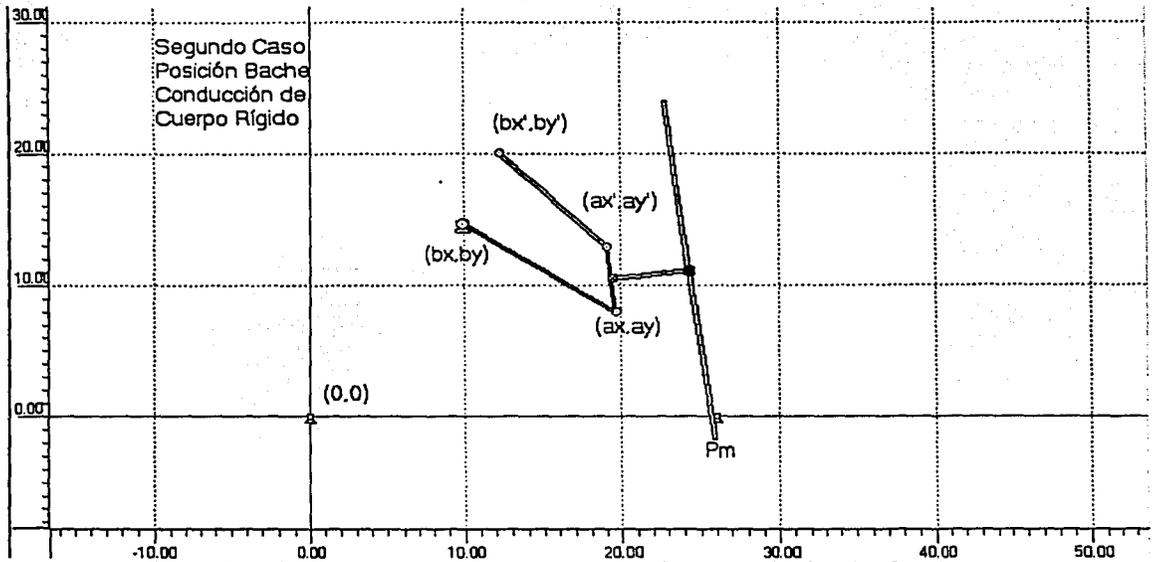


Figura 6.14 Conducción de Cuerpo Rígido, Posición de Bache

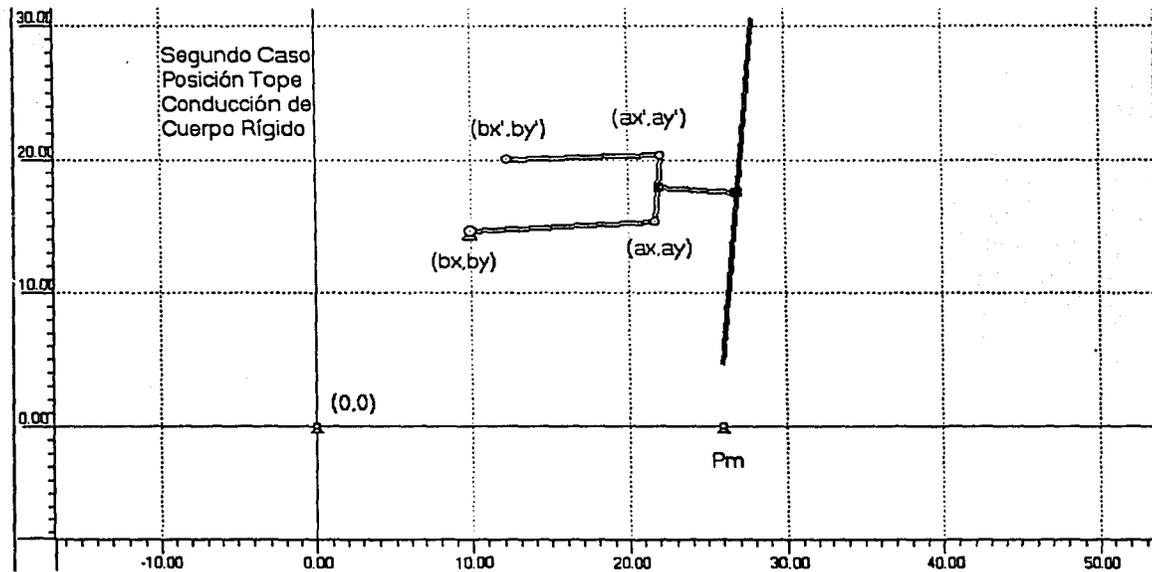


Figura 6.15 Conducción de Cuerpo Rígido, Posición de Tope

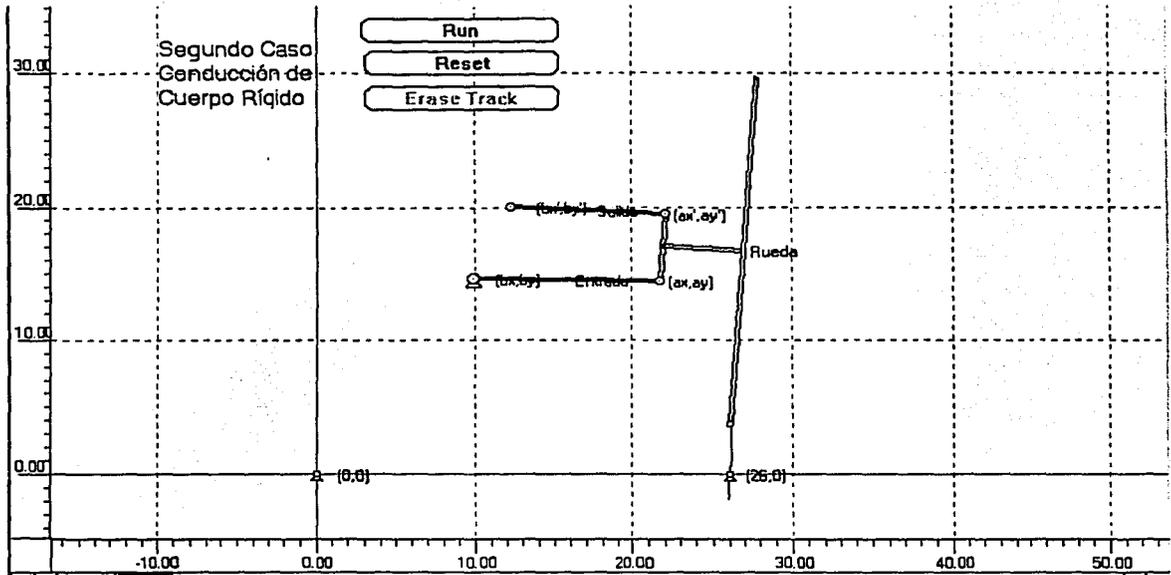


Figura 6.16 Trayectoria Trazada por el Mecanismo, por Conducción

Las gráficas anteriores muestran que los resultados obtenidos por ambos Métodos son dos mecanismos reales, que trabajan bajo las premisas de diseño deseadas.

En un paquete de simulación, como el utilizado para este trabajo, se puede graficar perfectamente la línea recta formada por el Punto Medio de la llanta o punto Pm, entre las posiciones de bache y tope.

## **CAPÍTULO SEPTIMO**

### **CONCLUSIONES**

Se determinó que el sistema de suspensión delantera óptimo para un vehículo de competencia todo terreno, es el tipo SLA, ya que la geometría de los dos brazos de control, uno más corto que el otro, permiten un adecuado recorrido del neumático.

El diseño del sistema permite que el punto medio del neumático se desplace en una línea vertical durante el muelleo de la suspensión, modificando el ángulo Camber a negativo durante el Jounce y positivo durante el Rebound, consiguiendo que el neumático permanezca en contacto con el piso, obteniendo una mejor respuesta tanto en Calidad de Manejo como en Maniobrabilidad.

Se analizó y describió el Método Gráfico de una manera sistemática para definir los parámetros básicos del Método Analítico.

El Método Gráfico utilizado desde 1990 en todas las competencias SAE Mini baja en las que ha participado la UNAM, no está descrito de una manera sistemática, dando lugar a resultados aproximados.

Es de fácil aplicación cuando se está familiarizado con el Diseño Asistido por Computadora.

Presenta los inconvenientes de:

Falta de exactitud debido a que uno de los pasos a seguir consiste en una aproximación visual.

La sección inferior del mecanismo es definida gráficamente, a partir de las dimensiones básicas del vehículo dibujadas en el paquete de CAD, y no por soluciones matemáticas.

El tiempo de corrección es muy alto, si no se obtienen resultados positivos en la primera prueba.

El objetivo principal de este trabajo, es plantear un Método Analítico que represente matemáticamente al Método Gráfico.

Se obtuvieron dos metodologías que permiten encontrar una solución real:

Por Generación de Trayectoria ó,  
Por Conducción de Cuerpo Rígido.

Presentándose dos casos de estudio representados gráficamente mediante un simulador.

El Método Analítico tiene las siguiente ventajas:

Puede desarrollarse en un programa de computadora, o en una hoja de cálculo.

Tiene una gran facilidad de aplicación.

No representa ningún costo adicional, y determina valores exactos en menor tiempo.

Si el mecanismo en estudio no es factible de construir, el tiempo de corrección es menor.

En el caso de la síntesis por Generación de Trayectoria, se puede definir desde un principio el porcentaje de error deseado, al utilizar una aproximación numérica para determinar los valores del ángulo de inclinación.

Un área de oportunidad de este Método es desarrollar la automatización del cálculo de las ecuaciones en conjunto con un simulador gráfico que represente el mecanismo.

Como conclusión final, se presenta un trabajo original, que proporciona a las futuras generaciones, un método analítico que permite obtener resultados exactos, en un tiempo mínimo, con una gran simplicidad, a un bajo costo y sin grandes requerimientos de hardware ni software.

## **Bibliografía:**

- 1.- Thomas Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics, SAE 1992
- 2.- Steven C. Chapra/Raymund P. Canale, Métodos Numéricos para Ingenieros, Mc Graw Hill, 1985
- 3.- Robert L Norton, Diseño de Maquinaria, Mc Graw Hill, 1999
- 4.- Pinhas Barak, Considerations in the Design of Suspensions of Passenger Cars, Notes 1995
- 5.- Louis Leithold, El Cálculo con Geometría Analítica, Harla, 1973
- 6.- Marcel Charlotheux, Suspensión y Dirección en Automóviles, Serie Técnica del Automóvil No. 7, Marcombo, 1979
- 7.- G. Grosset Grange, Avant-Project de Suspensions de Voitures Particulières, Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 1957
- 8.- Hamilton Mabie, Mecanismos y Dinámica de Maquinaria, Limusa, 1995
- 9.- Domínguez, Guzmán, Rodríguez, Diseño, Manufactura y Pruebas de un Vehículo Monoplaza Tesis Profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM 1996
- 10.- José Saldivar, Proyecto de un Automóvil, Tesis Profesional Facultad de Ingeniería, UNAM, 1992
- 11.- Angel Rojas, Síntesis Exacta de Conducción de Cuerpo Rígido, UNAM
- 12.- Baumeister, Avallone, Marks Manual del Ingeniero Mecánico, Mc Graw Hill, 1992

# APÉNDICE A

## SINTESIS EXACTA DE CONDUCCION DE CUERPO RIGIDO MEDIANTE POLINOMIOS

Angel A. Rojas Salgado  
Divisiones de Ingeniería Mecánica-Eléctrica y de Posgrado  
Facultad de Ingeniería, UNAM.  
Apdo. Postal 70-256  
04510 México, D.F.

### ABSTRACT

A different, unified treatment to obtain the exact synthesis for rigid body guidance of a RRRR plane-linkage is presented. This is a new solution for rigid body guidance through four and five specified positions. The synthesis problem is reduced to the solution of a polynomial, whose grade depends on the number of positions to satisfy. The polynomial roots lead to multiple solutions of the same problem.

### RESUMEN

Se presenta un tratamiento diferente en forma unificada, en la obtención de la síntesis exacta de mecanismos planos RRRR, para conducción de cuerpo rígido satisfaciendo cuatro y cinco posiciones. El problema de síntesis se resuelve por medio de un polinomio cuyo grado depende de las posiciones a satisfacer, las raíces de este polinomio conducen a varias soluciones de un mismo problema.

### INTRODUCCION

Se conoce que al número máximo de configuraciones que pueden ser especificadas en la síntesis exacta para conducción de cuerpo rígido es cinco [1]. Cada configuración consiste en la ubicación de un punto y la orientación que tiene una línea fija al cuerpo. La forma en que puede obtenerse la solución es en forma gráfica [2] o bien, en forma analítica por medio de un proceso iterativo [3]. Los métodos gráficos requieren gran cuidado al trazar los diagramas y al calcular las variables que se necesitan en el proceso, así como, al realizar las curvas de punto circular para la obtención de los segmentos cuyos curvos que daran las posiciones deseadas. Esta técnica basada en la síntesis de Burmeister [4], aunque puede adaptarse numéricamente, resulta compleja. Más sencillo resulta el método iterativo en el que se plantean cuatro funciones de síntesis que contienen los cinco puntos a satisfacer, uno de los puntos se toma como referencia. El método que emplea Angeles [3] en su solución es el de Newton-Raphson, proporciona gran exactitud pero tiene la desventaja que requiere los puntos iniciales cerca de la solución, para que exista convergencia. En este último método no se conoce a priori el número de soluciones.

El tratamiento que se emplea en este artículo obtiene un conjunto de soluciones por medio de un polinomio de cuarto orden que no requiere puntos iniciales; se obtienen como máximo 6 mecanismos diferentes para cuatro configuraciones más la de referencia.

En el caso de darse una configuración menos, se cuenta con la libertad de elegir un parámetro de tal forma que de como resultado un mecanismo libre de bifurcación [5]. En este caso se tiene la libertad de combinar diferentes soluciones, que se obtienen con dos parámetros no idénticos, formándose como máximo en este caso, 15 mecanismos solución diferentes para el problema.

### Ecuación de síntesis

La obtención de la ecuación de síntesis para conducción de cuerpo rígido se basa en la invariabilidad de las longitudes del mecanismo RRRR plano, tanto el eslabón conductor AB como el conducido A\*B\* que se muestran en la fig. 1, están formados por diadas, una diada consiste de un eslabón con dos pares cinemáticos. El punto A (o A\*) se conoce como punto circular y cambia de posición al girar el eslabón AB, se indicará A<sub>0</sub> (o A<sub>0</sub>\*) a la configuración de referencia y A<sub>j</sub> (o A<sub>j</sub>\*) a la nueva posición j. El punto B es un punto central y es invariable al movimiento. Introduciendo vectores para obtener la ecuación de síntesis para conducción de cuerpo rígido, se tiene que  $\underline{a}$ ,  $\underline{a}^*$ ,  $\underline{b}$  y  $\underline{b}^*$  son vectores que ubican los puntos A, A\*, B y B\* respectivamente. En la Fig. 2 el punto R corresponde a un punto de la barra acopladora, este punto pertenece a una línea del cuerpo rígido y tiene una orientación  $\theta$ , de tal forma que R y  $\theta$  satisfacen un conjunto de valores especificados dados por  $(R_j(x_j, y_j), \theta_j)_0$ .

Haciendo referencia a la fig. 2 y considerando que  $r_j$  sea el vector asociado con el punto R<sub>j</sub>, la ecuación de síntesis puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} |\underline{a}_0 - \underline{r}_j|^2 - |\underline{a}_j - \underline{r}_j|^2 &= |\underline{z}_j + \underline{r}_j - \underline{b}|^2 \\ &= |\underline{Q}(\underline{a}_0 - \underline{r}_0) + \underline{r}_j - \underline{b}|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$\underline{a}_j = \underline{r}_j + \underline{z}_j$$

$$\underline{z}_j = Q \underline{z}_0 = Q(\underline{a}_0 - \underline{r}_0)$$

$$Q = \begin{bmatrix} c\beta_j & -s\beta_j \\ s\beta_j & c\beta_j \end{bmatrix}$$

$$\beta_j = \theta_j - \theta_0$$

### Polinomio para cinco configuraciones

Para obtener el polinomio necesario para la síntesis, se desarrolla la ec (1) considerando

$$\underline{a}^T = (a_x, a_y)$$

$$\underline{b}^T = (b_x, b_y)$$

obteniéndose la función de síntesis para cada configuración como:

$$f_j = a_{j1} a_x + a_{j2} a_y + a_{j3} b_x + a_{j4} b_y + b_j' + (a_y b_x - a_x b_y) c_j' + (a_y b_y + a_x b_x) d_j' = 0 \quad j=1,2,3,4 \quad (2)$$

donde

$$a_{j1} = \cos \beta_j x_j + \sin \beta_j y_j - x_0$$

$$a_{j2} = \cos \beta_j y_j - \sin \beta_j x_j - y_0$$

$$a_{j3} = \cos \beta_j x_0 - \sin \beta_j y_0 - x_j$$

$$a_{j4} = \cos \beta_j y_0 + \sin \beta_j x_0 - y_j$$

$$b_j' = \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \sin \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j)$$

$$c_j' = \sin \beta_j$$

$$d_j' = 1 - \cos \beta_j$$

Las ecs (2) constituyen un sistema algebraico no lineal de cuarto orden, cuya solución puede ser obtenida usando el método de Newton-Raphson [3]. Dada la naturaleza cuadrática de las ecs (2), de cualquier modo, algunas simplificaciones pueden ser introducidas que permitan que la solución sea obtenida directamente, o sea, sin iteraciones. De hecho, las ecuaciones de síntesis pueden ser reescritas en forma matricial como:

$$\underline{Ax} + \underline{b}^T (\underline{a}_y \underline{b}_x - \underline{a}_x \underline{b}_y) \underline{c}' + (\underline{a}_y \underline{b}_y + \underline{a}_x \underline{b}_x) \underline{d}' = 0 \quad (3)$$

$$\text{con } \underline{x}^T = (a_x, a_y, b_x, b_y)$$

Si la matriz  $A$  es invertible, la ec (3) puede plantearse como

$$\underline{x} + \underline{A}^{-1} \underline{b}' + \lambda \underline{A}^{-1} \underline{c}' + \mu \underline{A}^{-1} \underline{d}' = 0 \quad (4)$$

donde se definen como constantes

$$\lambda = \frac{a_y b_x - a_x b_y}{a_y^2 + a_x^2} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{a_y b_y + a_x b_x}{a_y^2 + a_x^2} \quad (6)$$

La solución, aplicando el principio de superposición, puede ser reescrita como:

$$x_j = - (b_j + \lambda c_j + \mu d_j) \quad (7)$$

en donde se considera a  $b_j$ ,  $c_j$  y  $d_j$  como las componentes  $j$  de los vectores  $\underline{A}^{-1} \underline{b}'$ ,  $\underline{A}^{-1} \underline{c}'$ ,  $\underline{A}^{-1} \underline{d}'$ . Esta solución al ser sustituida en las ecs. (5) y (6) conduce a

$$r_1 \mu^2 + \mu (r_2 + \lambda r_3) + \lambda^2 r_4 + \lambda r_5 + r_6 = 0 \quad (8)$$

$$\Delta_1 \mu^2 + \mu (\Delta_2 + \lambda \Delta_3) + \lambda^2 \Delta_4 + \lambda \Delta_5 + \Delta_6 = 0 \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned} r_1 &= d_3 d_2 - d_1 d_4 \\ r_2 &= b_2 d_3 + d_2 b_3 - b_1 d_4 - d_1 b_4 \\ r_3 &= c_2 d_3 + c_3 d_2 - c_1 d_4 - d_1 c_4 \\ r_4 &= c_2 c_3 - c_1 c_4 \\ r_5 &= b_2 c_3 + c_2 b_3 - b_1 c_4 - c_1 b_4 - 1 \\ r_6 &= b_2 b_3 - b_1 b_4 \\ \Delta_1 &= d_1 d_3 + d_2 d_4 \\ \Delta_2 &= b_1 d_3 + d_1 b_3 + b_2 d_4 + d_2 b_4 - 1 \\ \Delta_3 &= d_1 c_3 + c_1 d_3 + c_2 d_4 + d_2 c_4 \\ \Delta_4 &= c_1 c_3 + c_2 c_4 \\ \Delta_5 &= b_1 c_3 + c_1 b_3 + b_2 c_4 + c_2 b_4 \\ \Delta_6 &= b_1 b_3 + b_2 b_4 \end{aligned}$$

Las ecs. (8) y (9) pueden considerarse como ecuaciones de compatibilidad, las cuales deben tener idéntica solución para  $\mu$ , para lograrlo se aplica la eliminación dialfática de Sylvester [6], que conduce a la siguiente restricción para los coeficientes, ésta restricción está dada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 + \lambda r_3 & \lambda^2 r_4 + \lambda r_5 + r_6 & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 + \lambda r_3 & \lambda^2 r_4 + \lambda r_5 + r_6 \\ 0 & \Delta_1 & \Delta_2 + \lambda \Delta_3 & \lambda^2 \Delta_4 + \lambda \Delta_5 + \Delta_6 \\ \Delta_1 & \Delta_2 + \lambda \Delta_3 & \lambda^2 \Delta_4 + \lambda \Delta_5 + \Delta_6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

que desarrollado conduce al siguiente polinomio:

$$\alpha_5 \lambda^4 + \alpha_4 \lambda^3 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_1 = 0 \quad (11)$$

donde

$$\alpha_5 = -2r_1 \Delta_1 r_4 \Delta_4 + r_1 \Delta_3 r_3 \Delta_4 - r_1 \Delta_3^2 r_4 - r_1^2 \Delta_4^2 - \Delta_1 r_3 \Delta_4 - \Delta_1^2 r_4^2 + \Delta_1 r_3 \Delta_3 r_4$$

$$\alpha_4 = 2r_1 [\Delta_1 (\Delta_4 r_5 + \Delta_5 r_4) - \Delta_2 \Delta_3 r_4 - r_1 \Delta_4 \Delta_5] + r_1 \Delta_2 r_3 \Delta_4 + r_1 \Delta_3 (r_2 \Delta_4 + r_3 \Delta_5 - \Delta_3 r_5) - \Delta_1 r_4 (2\Delta_1 r_5 - r_2 \Delta_3) + \Delta_1 r_3 (r_3 \Delta_5 + 2r_2 \Delta_4 - \Delta_2 r_4 - \Delta_3 r_5)$$

$$\alpha_3 = 2r_1 [\Delta_1 (\Delta_4 r_6 + r_5 \Delta_5 + \Delta_6 r_4) - \Delta_2 \Delta_3 r_5 - r_1 \Delta_4 \Delta_6] + r_1 \Delta_2 [r_2 \Delta_4 + r_3 \Delta_5 - \Delta_2 r_4] + r_1 \Delta_3 (r_2 \Delta_5 + r_3 \Delta_6 - \Delta_3 r_6) - \Delta_1 r_2 (r_2 \Delta_4 + 2r_3 \Delta_5 - \Delta_2 r_4 - \Delta_3 r_5) - \Delta_1 r_3 (r_3 \Delta_6 - \Delta_2 r_5 - \Delta_3 r_6) - r_1^2 \Delta_5^2 - \Delta_1^2 (2r_4 r_6 + r_5^2)$$

$$\alpha_2 = 2r_1 (\Delta_1 \Delta_5 r_6 + \Delta_1 \Delta_6 r_5 - \Delta_3 \Delta_2 r_6 - r_1 \Delta_5 \Delta_6) + r_1 \Delta_3 r_2 \Delta_6 + r_1 \Delta_2 (r_2 \Delta_5 + r_3 \Delta_6 - \Delta_2 r_5) - \Delta_1 (2\Delta_1 r_5 r_6 - r_3 \Delta_2 r_6) - \Delta_1 r_2 (r_2 \Delta_5 + 2r_3 \Delta_6 - \Delta_2 r_5 - \Delta_3 r_6)$$

$$\alpha_1 = 2r_1 \Delta_1 \Delta_6 r_6 + r_1 (\Delta_2 r_2 \Delta_6 - \Delta_2^2 r_6 - r_1 \Delta_6^2) - \Delta_1 (r_2^2 \Delta_6 + \Delta_1^2 r_6^2 - r_2 r_6 \Delta_2)$$

la ec. (11) puede tener en principio cuatro raí

ces reales, dos reales y dos complejas o bien cuatro complejas. Con cada raíz real de  $\lambda(\lambda_j, j=1,2,3,4)$ , se calculan los valores de  $\mu(\mu_j, j=1,2)$  dados por las ecs. (8) y (9). De las raíces que se obtienen de cada ecuación se seleccionan las que tengan valores idénticos, con el valor de  $\lambda_j$  y  $\mu_j$  se obtiene una diada al sustituir en la ec. (7) estos valores. Puede darse el caso que el coeficiente  $G_j$  sea cero para algunas configuraciones, teniéndose así una o tres diadas diferentes. Resumiendo, la ec. (11) puede producir 0,1,2,3 ó 4  $BA_0$  diadas.

### Polinomio para cuatro configuraciones

En este caso se proporciona un parámetro del punto central o circular, aquí se supone como dato  $b_x$ . La ecuación de síntesis dada por la ec. (2) se agrupa en la siguiente forma

$$f_j = a_{j1}x + a_{j2}y + a_{j3}b_y + b_j' + a_x b_y c_j' + a_y b_y d_j' = 0 \quad j=1,2,3 \quad (12)$$

donde

$$a_{j1} = b_x(1 - \cos\beta_j) + \cos\beta_j x_j + \sin\beta_j y_j - x_0$$

$$a_{j2} = (b_x - x_j) \sin\beta_j + \cos\beta_j y_j - y_0$$

$$a_{j3} = \cos\beta_j y_0 + \sin\beta_j x_0 - y_j$$

$$b_j' = (x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2) / 2 - \cos\beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) -$$

$$- \sin\beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) + b_x (\cos\beta_j x_0 - \sin\beta_j y_0 - x_j)$$

$$c_j' = -\sin\beta_j$$

$$d_j' = 1 - \cos\beta_j$$

Reescribiendo la ec. (12) de síntesis en forma matricial se tiene:

$$\underline{Ax} + \underline{b}' + \underline{a}_y \underline{b}_y \underline{c}' + \underline{a}_y \underline{b}_y \underline{d}' = 0$$

donde

$$\underline{x}^T = (a_x, a_y, b_y)$$

Si  $\underline{A}$  es invertible, al aplicar el principio de superposición, la solución puede escribirse como

$$\underline{x} = -(\underline{b} + \underline{a}_x \underline{b}_y \underline{c}' + \underline{a}_y \underline{b}_y \underline{d}') \quad (13)$$

donde

$$\underline{b} = \underline{A}^{-1} \underline{b}'$$

$$\underline{c} = \underline{A}^{-1} \underline{c}'$$

$$\underline{d} = \underline{A}^{-1} \underline{d}'$$

Eliminando los productos  $a_x b_y$  y  $a_y b_y$  del sistema expresado en la ec. (13), se obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$\beta_4 b_y^3 + \beta_3 b_y^2 + \beta_2 b_y + \beta_1 = 0 \quad (14)$$

con

$$\beta_4 = c_1 d_2 - c_2 d_1$$

$$\beta_3 = c_1 (b_3 d_2 - b_2 d_3) + b_1 (d_3 c_2 - d_2 c_3) + d_1 (c_3 b_2 - b_3 c_2) + c_1 + d_2$$

$$\beta_2 = 1 + b_3 d_2 - b_2 d_3 + b_3 c_1 - b_1 c_3$$

$$\beta_1 = b_3$$

Por lo tanto para un valor dado de  $b_x$ , la ec. (14) puede tener 0,1,2,3 raíces diferentes, que junto con las coordenadas

$$a_y = \frac{c_2 b_y + b_3 c_2 - c_3 b_2}{c_3 - b_y (d_3 c_2 - d_2 c_3)}$$

$$a_x = \frac{d_1 b_y + b_3 d_1 - b_1 d_3}{d_3 - b_y (c_3 d_1 - c_1 d_3)}$$

forman hasta tres diadas diferentes  $\overline{AB}_0$ . Si  $b_x^*$  es dado independientemente de  $b_x$ , una ecuación cúbica análoga a la ec. (14) puede ser obtenida para producir 0,1,2,3,  $B^*A_0^*$  diadas. Suponiendo que el problema de síntesis produce  $q$   $BA_0$  diadas y  $q^*$   $B^*A_0^*$  diadas, para valores dados de  $b_x$  y  $b_x^*$ , ellas pueden ser combinadas para producir  $qq^*$  mecanismos diferentes, cuando  $q=q^*=3$  se tienen 15 mecanismos diferentes.

### Ejemplo

El punto R de un cuerpo rígido satisfaca las posiciones sucesivas  $R_j(0,1,2,3,4)$  y una de sus líneas cumple la inclinación  $\theta_j(0,1,2,3,4)$  como se dan a continuación

$x_0=0.000$	$y_0=8.700$	$\theta_0=0.000^\circ$
$x_1=0.8135$	$y_1=9.504$	$\theta_1=-16.88^\circ$
$x_2=2.800$	$y_2=11.125$	$\theta_2=-40.62^\circ$
$x_3=7.500$	$y_3=11.600$	$\theta_3=-79.24^\circ$
$x_4=9.600$	$y_4=11.250$	$\theta_4=-90.00^\circ$

Determinar el mecanismo RRRR plano cuya barra acopladora guía el cuerpo rígido a través de las configuraciones dadas.

Siguiendo el proceso descrito para obtener el polinomio de cuarto grado, ec. (11), se obtiene que

$$\alpha_3 = 9.8776644 \times 10^{-10}$$

$$\alpha_4 = 4.1165071 \times 10^{-8}$$

$$\alpha_3 = -2.1686090 \times 10^{-7}$$

$$\alpha_2 = -4.1145892 \times 10^{-6}$$

$$\alpha_1 = -9.3729103 \times 10^{-6}$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = -3.006836$$

$$\lambda_2 = -5.949137$$

$$\lambda_3 = -11.891142$$

$$\lambda_4 = -44.610072$$

Al sustituir  $\lambda_1$  en las ecuaciones (8) se obtiene

$$\mu_1 = 53.080292$$

$$\mu_2 = -1431.684795$$

y en la ec. (9), las raíces son:

$$\mu_1 = 53.080292$$

$$\mu_2 = 73.668134$$

con los valores idénticos de  $\mu_1$ ,  $\lambda_1$  se obtiene la primera solución como:

$$a_x = -(b_1 + \lambda_1 c_1 + \mu_1 d_1) = 5.985831$$

$$a_y = -(b_2 + \lambda_1 c_2 + \mu_1 d_2) = 4.664752$$

$$b_x = -(b_3 + \lambda_1 c_3 + \mu_1 d_3) = 5.273538$$

$$b_y = -(b_4 + \lambda_1 c_4 + \mu_1 d_4) = 4.611988$$

En forma análoga con  $\lambda_2$  y  $\mu_2 = 70.118024$  se obtiene la solución

$$a_x = 7.070352$$

$$a_y = 5.471740$$

$$b_x = 5.795171$$

$$b_y = 5.326298$$

con  $\lambda_3$  y  $\mu_3 = 90.904989$  se obtiene ahora

$$a_x = 6.159463$$

$$a_y = 6.894449$$

$$b_x = 7.510128$$

$$b_y = 6.475734$$

y con  $\lambda_4$  y  $\mu_4 = 97.520602$

$$a_x = 12.351674$$

$$a_y = 6.075981$$

$$b_x = 4.926567$$

$$b_y = 6.035117$$

con las soluciones obtenidas se pueden formar 6 mecanismos diferentes, satisfaciendo las configuraciones deseadas. El mecanismo que se muestra en la fig. 3 corresponde a las soluciones 1 y 3.

#### CONCLUSIONES

De la discusión para ambos casos, tres y cuatro configuraciones más la de referencia, se observa claramente que al asignar más posiciones a satisfacer es más restringido el número de soluciones y más factible que no exista solución. Por el método expuesto esto se determina en forma inme

diata, no así por el método iterativo. Este método requiere que se tome el mayor número de dígitos, por lo que una calculadora programable es adecuada para no cometer errores de redondeo excesivos.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Bottema O. y Roth B. Theoretical Kinematics North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979, pp 249-255.
2. Waldron K.J., "Graphical Solution of the Branch and Order Problems of Linkages Synthesis for Multiply Separated Positions", Trans. ASME, Journal Engineering Industry, serie B, No. 99, pp. 591-597, 1977.
3. Angeles J., Análisis y Síntesis Cinemáticos de Sistemas Mecánicos, Limusa, México, D.F., Cap. 3 y Apéndice A., 1978.
4. Freudenstein F. y Sandor G., "On the Burmester Points of a Plane", Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, marzo, 1961, pp. 41-49.
5. Angeles J. y Rojas A., "An Optimisation Approach to the Branching Problem of Plane Linkage Synthesis", Proceedings of the VI World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, New Delhi, India, pp. 120-123, 1983.
6. Aitken A.C., Determinantes y Matrices, Ed. Dossat, S.A., Madrid-Buenos Aires, 1965.

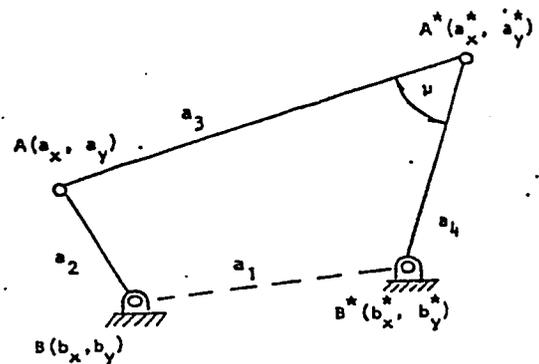


Fig. 1 Nomenclatura para el mecanismo plano

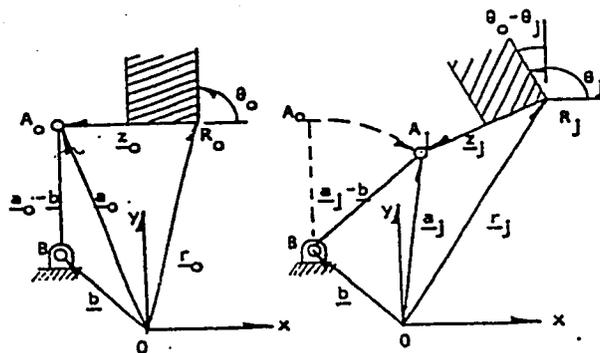


Fig. 2 Diada  $\bar{BA}_0$  en la configuración de referencia y en la configuración  $\bar{BA}_j$

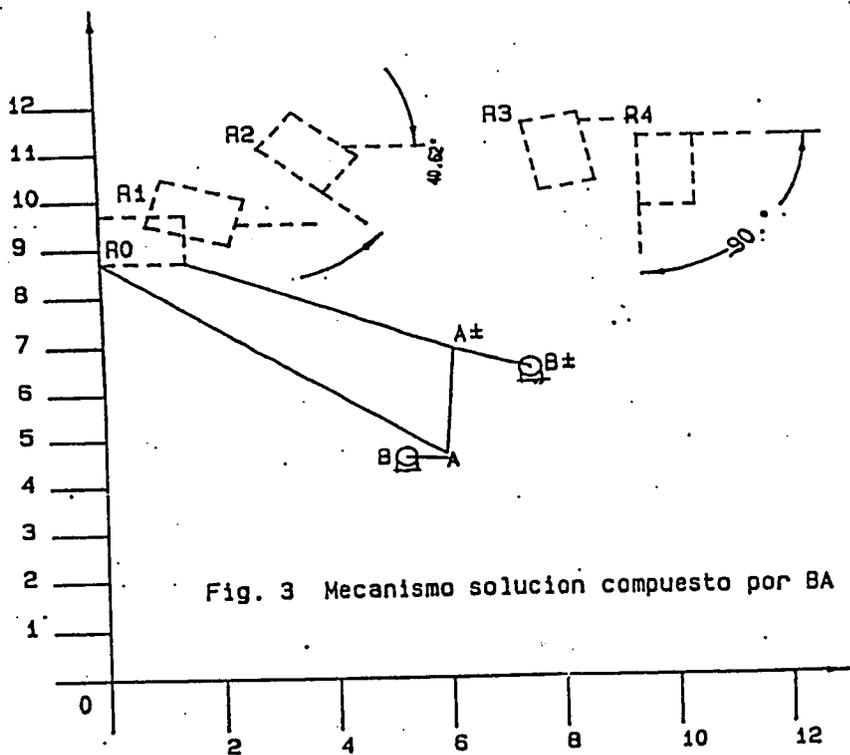


Fig. 3 Mecanismo solución compuesto por  $BA - B\pm A\pm$

## APÉNDICE B Algoritmo de Programación

Programa para realizar cálculos de una suspensión independiente.

Datos de entrada:

"Ancho de Vía (Av)"; Av  
"Ancho del Neumático (All)"; All;  
"Longitud del Mango (M)"; m;  
"Longitud de la Masa (Ma)"; Ma;  
"Diámetro Total del Ensamble Rueda-Neumático (R)"; R;  
"Angulo de Inclinación del Ensamble Rueda-Neumático (g)"; gamma;  
"Ancho de la Carrocería (Ac)"; Ac  
"Ancho de Sección Frontal del Vehículo (Af)"; Af  
"Altura de la Barra Frontal Transversal (Hmax)"; Hmax  
"Altura del Piso del Vehículo (Hmin)"; hmin

Cálculos de la Barra Inferior del Mecanismo

Cálculos Para el Punto (ax,ay):

Coordenada en X del Punto Medio de la Rueda:  $P_m = A_v / 2$   
 $a_x = P_m - m$   
 $a_y = R / 2 - M_a / 2$   
Imprimir Coordenada del Punto (ax,ay)

Cálculos Para el Punto (ax',ay'):

$a_{xpr} = a_x + (m * \text{COS}(\text{gamma}))$   
 $a_{ypr} = a_y + (m * \text{SIN}(\text{gamma}))$   
Nota: Considerar los valores de gamma en Grados convertidos a radianes  
(Ángulos \*  $\pi / 180$ )  
Imprimir Coordenada del Punto (ax',ay')

Cálculos Para el Punto (bx, by)

$b_x = ((A_c / 2 - A_f / 2) / 2) + (A_f / 2)$   
 $b_y = h_{min} + (H_{max} - h_{min}) / 2$   
Imprimir Coordenada del Punto (bx,by)

### Cálculos para Posición Inferior (Bache):

Datos de Entrada:

Definir  $ax1 = ax$

Definir  $ay1 = ay$

Definir  $T = Av / 2$

Definir "Desplazamiento en Eje Y del Punto Medio de la Llanta (Posición Inferior)":  $Y1$

Definir las siguientes Constantes:

$I1 = ay1 * by + ax1 * bx$

$H1 = ay1 * bx - ax1 * by$

$A1 = ax1 * T + ay1 * Y1 + bx * T - T^2 - I1$

$B1 = ax1 * Y1 - ay1 * T + by * T - T * Y1 + H1$

$C1 = -ax1 * T - T * bx - by * Y1 + T^2 + (Y1^2) / 2 + I1$

### Cálculo de Raíz ( $\beta_1$ ) en Posición Bache mediante NEWTON-RAPHSON

Datos de Entrada:

"Valor inicial de  $\beta_1$ =";  $\beta_1$

"Error porcentual aceptable ES=": ES

"Número Máximo de Iteraciones IM="IM

Definir  $l = 1$

Iterar el valor de  $l$  de 1 a IM

$\beta_1 = \beta_1 * \pi / 180$

$X = \beta_1 - ((A1 * \cos(\beta_1) + B1 * \sin(\beta_1) + C1) / (B1 * \cos(\beta_1) - A1 * \sin(\beta_1)))$

Si  $l = IM$  entonces Imprimir "No se encontró la Raíz" y continua el programa después de Impresión de Resultados

$EA = \text{ABS}(X - \beta_1)$

Si  $EA \leq ES$  entonces ir a Impresión de Resultados

$\beta_1 = X$

Imprimir "Valor de  $\beta_1$  en la Aproximación "; $l$ ;"  $\beta_1 * 180 / \pi$

Repetir  $l$  hasta  $l = IM$

### Impresión de Resultados:

Imprimir "La Aproximación a la Raíz de  $\beta_1$  es ";  $\beta_1 * 180 / \pi$

Imprimir "La Aproximación Porcentual del Error es EA "; EA

Imprimir "El Número de Iteraciones realizadas son NI: ";  $l$

### Cálculo de Constantes a partir del Valor de $\beta_1$

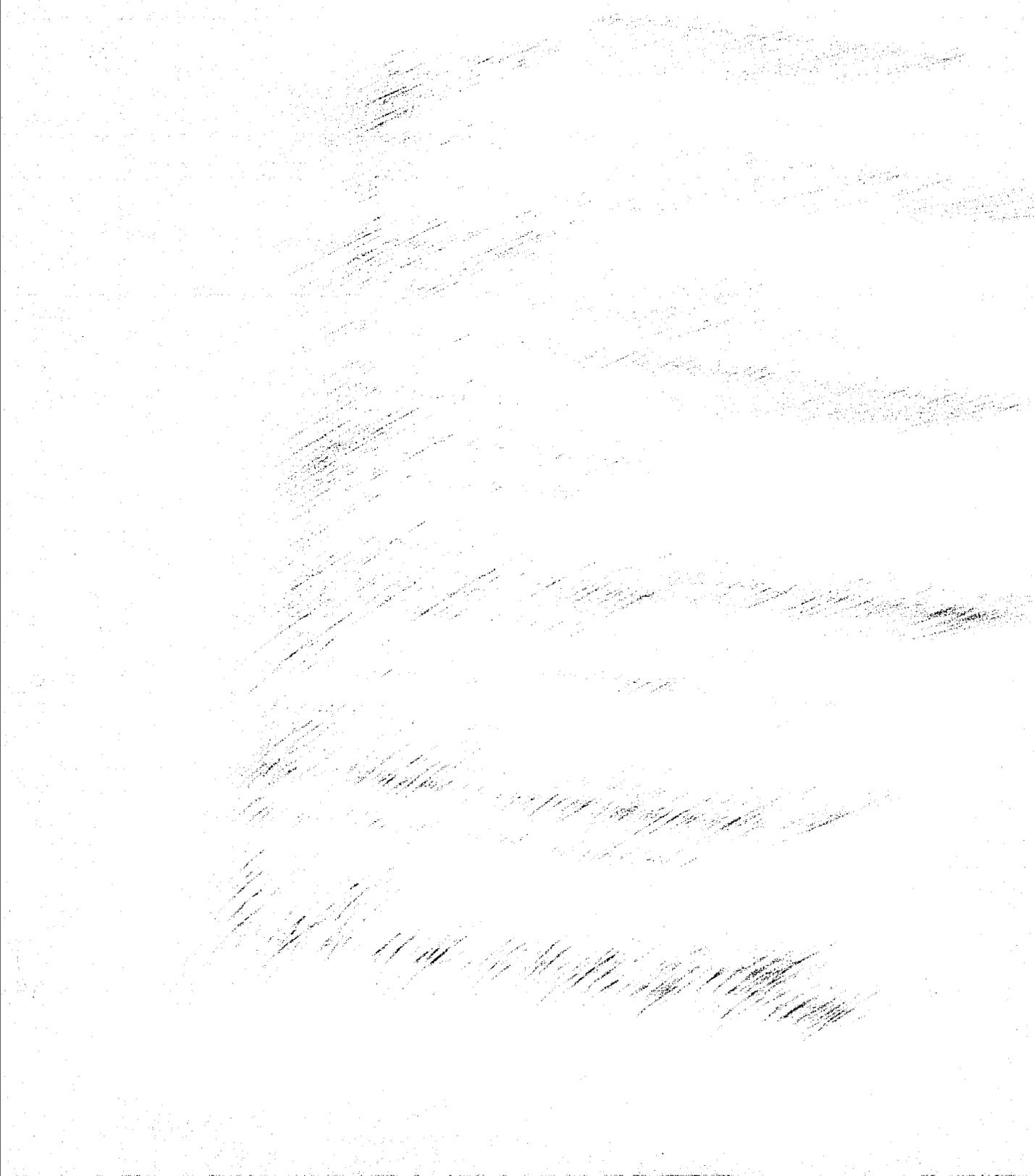
Definir las siguientes Constantes:

$\beta_1 = \beta_1 * \pi / 180$

$D1 = T * \cos(\beta_1) - T + aypr * \sin(\beta_1) + axpr - axpr * \cos(\beta_1)$

$E1 = T * \sin(\beta_1) - Y1 - axpr * \sin(\beta_1) + aypr - aypr * \cos(\beta_1)$

$F1 = axpr * (T * \cos(\beta_1) + Y1 * \sin(\beta_1) - T) + aypr * (Y1 * \cos(\beta_1) - T * \sin(\beta_1)) + T^2 + (Y1^2) / 2 - T^2 * \cos(\beta_1) - T * Y1 * \sin(\beta_1)$



### Cálculos para Posición Superior (Tope)

Datos de Entrada

Definir  $ax2 = ax$

Definir  $ay2 = ay$

Definir  $T = Av / 2$

Definir "Desplazamiento en Eje Y del punto medio de la llanta (Posición Superior)":  $Y2$

Definir las Sigüientes Constantes:

$I2 = ay2 * by + ax2 * bx$

$H2 = ay2 * bx - ax2 * by$

$A2 = ax2 * T + ay2 * Y2 + bx * T - T^2 - I2$

$B2 = ax2 * Y2 - ay2 * T + by * T - T * Y2 + H2$

$C2 = -ax2 * T - T * bx - by * Y2 + T^2 + (Y2^2) / 2 + I2$

### Cálculo de Raíz ( $\beta2$ ) en Posición Bache mediante NEWTON-RAPHSON

Datos de Entrada

"Valor inicial de  $\beta2$ =";  $\beta2$

"Error porcentual aceptable ES="; ES

"Número máximo de iteraciones IM="IM

Definir  $I = 1$

Iterar el valor de  $I$  de 1 a IM

$\beta2 = \beta2 * \pi / 180$

$X = \beta2 - ((A2 * \cos(\beta2) + B2 * \sin(\beta2) + C2) / (B2 * \cos(\beta2) - A2 * \sin(\beta2)))$

Si  $I = IM$  entonces Imprimir "No se encontró la Raíz" y continua el programa después de Impresión de Resultados

$EA = \text{ABS}((X - \beta2))$

Si  $EA \leq ES$  entonces ir a Impresión de Resultados

$\beta2 = X$

Imprimir "Valor de  $\beta2$  en la Aproximación"; $I$ ;"  $\beta2 = \beta2 * 180 / \pi$

Repetir  $I$  hasta  $I = IM$

### Impresión de Resultados:

Imprimir "La Aproximación a la Raíz de  $\beta2$  es ";  $\beta2 = \beta2 * \pi / 180$

Imprimir "La Aproximación Porcentual del Error es EA "; EA

Imprimir "El Número de Iteraciones realizadas son NI: ";  $I$

### Cálculo de Constantes a partir del Valor de $\beta2$

$\beta2 = \beta2 * \pi / 180$

$D2 = T * \cos(\beta2) - T + aypr * \sin(\beta2) + axpr - axpr * \cos(\beta2)$

$E2 = T * \sin(\beta2) - Y2 - axpr * \sin(\beta2) + aypr - aypr * \cos(\beta2)$

$F2 = axpr * (T * \cos(\beta2) + Y2 * \sin(\beta2) - T) + aypr * (Y2 * \cos(\beta2) - T * \sin(\beta2)) + T^2 + (Y2^2) / 2 - T^2 * \cos(\beta2) - T * Y2 * \sin(\beta2)$

Obtienen las Coordenadas del Punto (bx',by')

$$bypr = (F1 * D2 - F2 * D1) / (E2 * D1 - E1 * D2)$$

$$bxpr = ((-F1 - E1 * bypr) / D1)$$

Imprimir Coordenada del Punto (bx',by')

Se obtienen las longitudes de las Barras del Mecanismo

$$LBarra1 = \text{SQR}((ax-bx)^2+(ay-by)^2)$$

$$LBarra2 = \text{SQR}((ax'-ax)^2+(ay'-ay)^2)$$

$$LBarra3 = \text{SQR}((bx'-ax')^2+(by'-ay')^2)$$

Imprimir Longitudes de las Barras 1, 2 y 3: LBarra1: LBarra2: LBarra3

Fin

## APÉNDICE C

### Cálculos de Casos de Estudio

#### Primer Caso. Generación de Trayectoria.

$$\begin{aligned}A_V &= 52 \\A_{LL} &= 5 \\M &= 3.5 \\m &= 3.5 \\R &= 21 \\&\square\square 90 \\A_C &= 13 \\A_F &= 13 \\H_{\max} &= 15.15 \\h_{\min} &= 10.85\end{aligned}$$

Posición de Bache:

$$\begin{aligned}Y_1 &= -2 \\B_1 &= 10\end{aligned}$$

Posición de Tope:

$$\begin{aligned}Y_2 &= 4 \\B_2 &= -5\end{aligned}$$

#### Hoja de Cálculos

Los resultados obtenidos son los siguientes:  
Se determinan los puntos  $(ax, ay)$ ,  $(ay', ay')$  y  $(bx, by)$ :

$$\begin{aligned}P_m &= 26 \\ax &= 22.50 \\ay &= 8.75 \\ax' &= 22.50 \\ay' &= 12.25 \\bx &= 6.5 \\by &= 13\end{aligned}$$

Y las constantes para determinar la posición de Bache

$$\begin{aligned}I_1 &= 260 \\H_1 &= -235.625 \\A_1 &= -199.5 \\B_1 &= -118.125 \\C_1 &= 210\end{aligned}$$

Obteniéndose los siguientes valores:

$$\beta_1 = 5.55638957 = 5.55 \text{ Grados}$$
$$ES = 8.46 \text{ E-}07$$

Con el valor de  $\beta_1$ , se definen además las constantes:

$$D1 = 1.16965471$$
$$E1 = 2.39644252$$
$$F1 = -52.1181375$$

Y las constantes para determinar la posición de Tope

$$I2 = 260$$
$$H2 = -235.625$$
$$A2 = -147$$
$$B2 = -144.625$$
$$C = 138$$

Obteniéndose los siguientes valores:

$$\beta_2 = -3.46139098 = -3.46 \text{ Grados}$$
$$ES = 2.89 \text{ E-}07$$

Se definen además las constantes:

$$D2 = -0.74598653$$
$$E2 = -4.18896739$$
$$F2 = 77.1515193$$

Para finalmente obtener los valores de  $bx'$  y  $by'$ ,

$$by' = 16.5046075$$
$$bx' = 10.7431657$$

## Resultados

El Mecanismo Resultante se forma entre los puntos:

$$(bx, by) = (6.5, 13.0)$$
$$(ax, by) = (22.50, 8.75)$$
$$(ax', ay') = (22.50, 12.25)$$
$$(bx', by') = (10.74, 16.50)$$

Y las longitudes de las barras:

Longitud Barra Entrada  $(bx,by) - (ax,ay) = 16.55483313$

Longitud Barra Acopladora  $(ax,ay) - (ax',ay') = 3.5$

Longitud Barra Salida  $(ax',ay') - (bx',by') = 12.50299315$

### **Primer Caso, por Conducción de Cuerpo Rígido**

$$A_v = 52$$

$$A_{LL} = 5$$

$$M = 3.5$$

$$m = 3.5$$

$$R = 21$$

Posición de Bache:

$$Y_1 = -2$$

$$\beta_1 = 5$$

Posición de Tope:

$$Y_2 = 4$$

$$\beta_2 = -3$$

### **Hoja de Cálculos**

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Se determinan los puntos  $(ax,ay)$  y  $(ax', ay')$

$$P_m = 26$$

$$ax = 22.50$$

$$ay = 8.75$$

$$ax' = 22.50$$

$$ay' = 12.25$$

Con el valor de  $\beta_1=5$ , se definen además las constantes:

$$D_1 = 0.74929419$$

$$E_1 = 2.33834149$$

$$F_1 = -34.304966$$

Se definen además las constantes:

$$D_2 = -0.74598653$$

$$E_2 = -4.18896739$$

$$F_2 = 77.1515193$$

Para obtener los valores de  $b_x$  y  $b_y$ .

$$b_y = 12.661898$$
$$b_x = 6.26973202$$

Siguiendo los mismo pasos para la segunda diada, tenemos:

Con el valor de  $\beta_2 = -3$ , se definen además las constantes:

$$D1 = 1.05433929$$
$$E1 = 2.35166005$$
$$F1 = -49.209501$$

Se definen además las constantes:

$$D2 = -0.6459121$$
$$E2 = -4.1663876$$
$$F2 = 74.459265$$

Para obtener los valores de  $b_x$  y  $b_y$ .

$$b_y = 16.2572144$$
$$b_x = 10.4122648$$

## Resultados

El Mecanismo Resultante se forma entre los puntos:

$$(b_x, b_y) = (6.27, 12.66)$$
$$(a_x, b_y) = (22.50, 8.75)$$
$$(a_x', a_y') = (22.50, 12.25)$$
$$(b_x', b_y') = (10.41, 16.26)$$

Y las longitudes de las barras:

$$\text{Longitud Barra Entrada } (b_x, b_y) - (a_x, a_y) = 16.696$$
$$\text{Longitud Barra Acopladora } (a_x, a_y) - (a_x', a_y') = 3.5$$
$$\text{Longitud Barra Salida } (a_x', a_y') - (b_x', b_y') = 12.735$$

## Segundo Caso. Generación de Trayectoria

### Datos de Entrada

$$A_V = 52$$

$$A_{LL} = 5$$

$$M = 5$$

$$m = 5$$

$$R = 26$$

$$\square\square 90$$

$$A_C = 20$$

$$A_F = 15$$

$$H_{\max} = 18$$

$$h_{\min} = 13$$

Posición de Bache:

$$Y_1 = -2$$

$$\beta_1 = 10$$

Posición de Tope:

$$Y_2 = 4$$

$$\beta_2 = -5$$

### Hoja de Cálculos

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Se determinan los puntos  $(a_x, a_y)$ ,  $(a'_x, a'_y)$  y  $(b_x, b_y)$ :

$$P_m = 26$$

$$a_x = 21$$

$$a_y = 10.5$$

$$a'_x = 21$$

$$a'_y = 15.5$$

$$b_x = 8.75$$

$$b_y = 15.5$$

Y las constantes de la ecuación (5.19) para determinar la posición de Bache

$$I_1 = 346.5$$

$$H_1 = -233.625$$

$$A_1 = -270$$

$$B_1 = -93.625$$

$$C_1 = 282$$

Obteniéndose los siguientes valores, mediante las ecuaciones (5.23):

$$\beta_1 = 9.80120405 = 9.80 \text{ Grados}$$
$$ES = 2.19 \text{ E-05}$$

Con el valor de  $\beta_1$ , se definen además las constantes de la ecuación (5.28):

$$D1 = 2.56590599$$
$$E1 = 3.07754991$$
$$F1 = -93.5584559$$

Y las constantes de la ecuación (5.19) para determinar la posición de Tope

$$I2 = 346.5$$
$$H2 = -233.625$$
$$A2 = -207$$
$$B2 = -145.625$$
$$C = 195$$

Obteniéndose los siguientes valores:

$$\beta_2 = -4.47820864$$
$$ES = 1.81 \text{ E-07}$$

Se definen además las constantes de la ecuación (5.28):

$$D2 = -1.22521609$$
$$E2 = -4.34301128$$
$$F2 = 103.227664$$

Para finalmente obtener los valores de  $bx'$  y  $by'$ , con las ecuaciones (5.31) y (5.29)

$$by' = 20.3772167$$
$$bx' = 12.0217009$$

## Resultados

El Mecanismo Resultante se forma entre los puntos:

$$(bx,by) = (8.75, 15.5)$$
$$(ax,by) = (21, 10.5)$$
$$(ax',ay') = (21, 15.5)$$
$$(bx',by') = (12.02, 20.38)$$

$$\text{Longitud Barra Entrada } (bx,by) - (ax,ay) = 13.23111862$$

$$\text{Longitud Barra Acopladora } (ax,ay) - (ax',ay') = 5$$

$$\text{Longitud Barra Salida } (ax',ay') - (bx',by') = 10.21748979$$

## Segundo Caso, por Conducción de Cuerpo Rígido

$$\begin{aligned}A_V &= 52 \\A_{LL} &= 5 \\M &= 5 \\m &= 5 \\R &= 26\end{aligned}$$

Posición de Bache:

$$\begin{aligned}Y_1 &= -2 \\B_1 &= 10\end{aligned}$$

Posición de Tope:

$$\begin{aligned}Y_2 &= 4 \\B_2 &= -5\end{aligned}$$

### Hoja de Cálculos

Los resultados obtenidos son los siguientes:  
Se determinan los puntos  $(ax, ay)$  y  $(ay', ay')$

$$\begin{aligned}P_m &= 26 \\ax &= 21 \\ay &= 10.50 \\ax' &= 21 \\ay' &= 15.5\end{aligned}$$

Con el valor de  $B_1=10$ , se definen además las constantes:

$$\begin{aligned}D_1 &= 1.58100359 \\E_1 &= 2.91144475 \\F_1 &= -58.283204\end{aligned}$$

Se definen además las constantes:

$$\begin{aligned}D_2 &= -0.7446227 \\E_2 &= -4.2332049 \\F_2 &= 70.6530104\end{aligned}$$

Para obtener los valores de  $b_x$  y  $b_y$ .

$$\begin{aligned}b_y &= 14.6352205 \\b_x &= 9.91368263\end{aligned}$$

Siguiendo los mismo pasos para la segunda diada, tenemos:

Con el valor de  $\beta_2 = -5$ , se definen además las constantes:

$$\begin{aligned} D1 &= 2.36317591 \\ E1 &= 2.97300305 \\ F1 &= -88.496568 \end{aligned}$$

Se definen además las constantes:

$$\begin{aligned} D2 &= -1.0934051 \\ E2 &= -4.3110251 \\ F2 &= 99.672633 \end{aligned}$$

Para obtener los valores de  $b_x$  y  $b_y$ .

$$\begin{aligned} b_y &= 20.0059226 \\ b_x &= 12.2796185 \end{aligned}$$

### Resultados

El Mecanismo Resultante se forma entre los puntos:

$$\begin{aligned} (b_x, b_y) &= (9.91, 14.64) \\ (a_x, a_y) &= (21, 10.5) \\ (a'_x, a'_y) &= (21, 15.5) \\ (b'_x, b'_y) &= (12.28, 20.01) \end{aligned}$$

Y las longitudes de las barras:

$$\begin{aligned} \text{Longitud Barra Entrada } (b_x, b_y) - (a_x, a_y) &= 11.832 \\ \text{Longitud Barra Acopladora } (a_x, a_y) - (a'_x, a'_y) &= 3.5 \\ \text{Longitud Barra Salida } (a'_x, a'_y) - (b'_x, b'_y) &= 9.816 \end{aligned}$$

## Cálculo de Ecuaciones para cualquier Sistema de Suspensión Generación de Trayectoria

### Datos de Entrada

Av	52	Ancho de Vía
All	5	Ancho del Neumático
M	3.5	Longitud del Mango
m	3.5	Longitud de la Masa
R	21	Diámetro total del Ensamble Rueda-Neumático
Ac	13	Ancho de Carrocería
Af	13	Ancho de Sección Frontal del Vehículo
Hmax	15.15	Altura de la Barra Frontal transversal
hmin	10.67	Altura del piso del Vehículo
Angulo g de la Masa/Rueda Gra	90	
Angulo g de la Masa/Rueda Rad	1.57079633	=E14*PI()/180

### Punto Ax (ax , ay)

$P_m = A_v/2$	26	=E5/2 Coord. en X del punto medio de la rueda
$a_x = P_m - M$	22.5	=E18-E7
$a_y = R/2 - m/2$	8.75	=E9/2-E8/2

### Punto Ax' (ax' , ay')

$a_x' = a_x + m * \cos g$	22.5	=E19+(E8*COS(E15))
$a_y' = a_y + m * \text{seng}$	12.25	=E20+(E8*SENO(E15))

### Punto Bx (bx , by)

$b_x = ( (A_c/2 - A_f/2) / 2 ) + (A_f/2)$	6.5	= ((E10/2-E11/2)/2)+(E11/2)
$b_y = h_{min} + (H_{max} - h_{min}) / 2$	12.91	=E13 +((E12-E13)/2)

### Posición Inferior (Bache) Coordenadas ay,ax

T=	26	=E5/2 Ancho de Vía / 2
Y1=	-2	Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta
$l = a_y * b_y + a_x * b_x$	259.2125	=(E20*E28)+(E19*E27)
$H = a_y * b_x - a_x * b_y$	-233.6	=(E20*E27)-(E19*E28)
$A = (T*(a_x + b_x - l) + a_y * y_j - l)$	-198.7125	=(E19*E38)+(E20*E39)+(E27*E38)-((E38)^2)-(E40)
$B = (T*(b_y - a_y - Y_j) + a_x * Y_j + H)$	-118.44	=(E19*E39)-(E20*E38)+(E28*E38)-(E38*E39)+E41
$C = (T*(T - a_x - b_x) + (Y_j*(Y_j/2 - b_y) + l)$	209.0325	=(E28*E39)+(E38^2)+((E39^2)/2)+E40
Angulo Inicial en Grados	5.4321894	9.80276293
Angulo Inicial en Radianes	0.09480959	=E45*PI()/180
$F_j = A * \cos b_j + B * \text{sen} b_j + C$	-1.978E-06	=E42*COS(E46)+E43*SENO(E46)+E44
$F_j' = B * \cos b_j - A * \text{sen} b_j$	-136.71972	=E43*COS(E46)+E42*SENO(E46)
Division Fj/Fj'	1.4465E-08	=E47/E48
Método Newton-Rhapson	0.09480958	=E46-(E49)
Valor Convertido a Grados	5.43218857	=E50*180/PI()

1.4465E-08

**Bache Coordenadas ax',ax'**

ax'=	22.5	=E23
ay'=	12.25	=E24
D=T*cosBj-T+ay*senBj+ax'-ax'*cosBj	1.1439594	=E38*COS(E50)- E38+E55*SENO(E50)+E54-E54*COS(E50)
E=T*senBj-Yj-ax'*senBj+ay'-ay'*cosBj	2.38635212	=E38*SENO(E50)-E39- E54*SENO(E50)+E55-E55*COS(E50)
F=ax'*(t*cosBj+Yj*senBj-t)+ay*(Yj*cosBj-t*senBj)+T^2+(Yj^2/2)-t^2*cosBj-t*Yj*senBj	-51.47024	=E54*((E38)*COS(E50)+(E39)*SENO(E50)- (E38))+E55*((E39)*COS(E50)- (E39)*SENO(E50))+((E38)^2)+((E39^2)/2)- (((E38)^2)*COS(E50))- ((E38)*((E39)*SENO(E50)))

**Posición Inferior (Tope)  
Coordenadas ay,ax**

T=	26	=E5/2 Ancho de Via / 2
Y2=	4	Despl. en Eje Y del Punto Medio de la Llanta
l=ay*by+ax*bx	259.2125	=(E20*E28)+(E19*E27)
H=ay*bx-ax*by	-233.6	=(E20*E27)-(E19*E28)
A= (T*(ax+bx-t) + ay*yj-l)	-146.2125	=(E19*E62)+(E20*E63)+(E27*E62)- ((E62)^2)-(E64)
B=(T*(by-ay-Yj))+ax*Yj+H)	-142.96	=(E19*E63)-(E20*E62)+(E28*E62)- (E62*E63)+E65
C=(T*(T-ax-bx)+(Yj*(Yj/2-by)+l)	137.5725	=(E19*E62)-(E27*E62)- (E28*E63)+(E62^2)+((E63^2)/2)+E64
Angulo Inicial en Grados	-3.3637313	-5.17692201
Angulo Inicial en Radianes	-0.0587082	=E69*PI()/180
Fj=A*cosbj+B*senbj+C	1.1486E-06	=E66*COS(E70)+E67*SENO(E70)+E68
Fj'=B*cosbj - A*senbj	-134.13476	=E67*COS(E70)+E66*SENO(E70)
Division Fj/Fj'	-8.563E-09	=E71/E72
Método Newton-Rhapson	-0.0587082	=E70-(E73)
Valor Convertido a Grados	-3.3637308	=E74*180/PI()

**Tope Coordenadas ax',ay'**

ax'=	22.5	=E23
ay'=	12.25	=E24
D=T*cosBj-T+ay*senBj+ax'-ax'*cosBj	-0.724792	=E62*COS(E74)- E62+E80*SENO(E74)+E79-E79*COS(E74)
E=T*senBj-Yj-ax'*senBj+ay'-ay'*cosBj	-4.1842559	=E62*SENO(E74)-E63- E79*SENO(E74)+E80-E80*COS(E74)
F=ax'*(t*cosBj+Yj*senBj-t)+ay*(Yj*cosBj-t*senBj)+T^2+(Yj^2/2)-t^2*cosBj-t*Yj*senBj	76.5816162	=E79*(E62*COS(E74)+E63*SENO(E74)- (E62))+E80*(E63*COS(E74)- E62*SENO(E74))+E62^2+(E63^2)/2- (E62^2)*COS(E74)+E62*E63*SENO(E74)

**Coordenas bx',by'**

by'=((D2*F1-F2*D1)/(E2*D1-E1*D2))	16.4543268	=(E81*E58)-(E83*E56))/((E82*E56)- (E57*E81))
bx'=(-F1-E1*by')/D1	10.6685803	=(E58)-(E57*E86))/E56
LBarra1 = SQRT((ax-bx)^2+(ay-by)^2)	16.5319569	Barra de Entrada (bx,by) a (ax,ay)
LBarra2 = SQRT((ax'-ax)^2+(ay'-ay)^2)	3.5	Barra Acopladora (ax,ay) a (ax',ay')
LBarra3 = SQRT((bx'-ax')^2+(by'-ay')^2)	12.5562278	Barra de Salida (ax',ay') a (bx',by')

**Cálculo de Ecuaciones para cualquier Sistema de Suspensión  
Generación de Trayectoria**

**Datos de Entrada**

Av	52	Ancho de Via
All	5	Ancho del Neumático
M	5	Longitud del Mango
m	5	Longitud de la Masa
R	26	Diametro total del Ensamble Rueda-Neumático
Ac	20	Ancho de Carroceria
Af	15	Ancho de Sección Frontal del Vehiculo
Hmax	18	Altura de la Barra Frontal transversal
hmin	13	Altura del piso del Vehiculo
Angulo g de la Masa/Rueda Gra	90	
Angulo g de la Masa/Rueda Rad	1.57079633	=E14*PI()/180

**Punto Ax (ax , ay)**

$P_m = A_v/2$	26	=E5/2 Coord. en X del punto medio de la rueda
$ax = P_m - M$	21	=E18-E7
$ay = R/2 - m/2$	10.5	=E9/2-E8/2

**Punto Ax' (ax' , ay')**

$ax' = ax + m * \text{cosg}$	21	=E19+(E8*COS(E15))
$ay' = ay + m * \text{seng}$	15.5	=E20+(E8*SENO(E15))

**Punto Bx (bx , by)**

$bx = (Ac/2 - Af/2) / 2 + (Af/2)$	8.75	=((E10/2-E11/2)/2)+(E11/2)
$by = hmin + (Hmax - hmin) / 2$	15.5	=E13 +((E12-E13)/2)

**Posición Inferior (Bache)  
Coordenadas ay,ax**

T=	26	=E5/2 Ancho de Via / 2
Y1=	-2	Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta
$l = ay*by + ax*bx$	346.5	=(E20*E28)+(E19*E27)
$H = ay*bx - ax*by$	-233.625	=(E20*E27)-(E19*E28)
$A = (T*(ax+bx-t) + ay*yj-l)$	-270	=(E19*E38)+(E20*E39)+(E27*E38)-((E38)^2)-(E40)
$B = (T*(by-ay-Yj) + ax*Yj+H)$	-93.625	=(E19*E39)-(E20*E38)+(E28*E38)-(E38*E39)+E41
$C = (T*(T-ax-bx) + Yj*(Yj/2-by) + l)$	282	=(E19*E38)-(E27*E38)-(E28*E39)+(E38^2)+((E39^2)/2)+E40
Angulo Inicial en Grados	9.80120405	9.80276293
Angulo Inicial en Radianes	0.17106328	=E45*PI()/180
$Fj = A*\text{cosbj} + B*\text{senbj} + C$	0.00303009	=E42*COS(E46)+E43*SENO(E46)+E44
$Fj' = B*\text{cosbj} - A*\text{senbj}$	-138.22064	=E43*COS(E46)+E42*SENO(E46)
Division Fj/Fj'	-2.192E-05	=E47/E48
Método Newton-Rhapson	0.1710852	=E46-(E49)
Valor Convertido a Grados	9.80246009	=E50*180/PI()

**Bache Coordenadas ax',ax'**

ax'=	21	=E23
ay'=	15.5	=E24
D=T*cosBj-T+ay'*senBj+ax'-ax*cosBj	2.56590599	=E38*COS(E50)- E38+E55*SENO(E50)+E54-E54*COS(E50)
E=T*senBj-Yj-ax'*senBj+ay'-ay*cosBj	3.07754991	=E38*SENO(E50)-E39- E54*SENO(E50)+E55-E55*COS(E50) =E54*((E38)*COS(E50)+(E39)*SENO(E50)- (E38))+E55*((E39)*COS(E50)- (E39)*SENO(E50))+((E38)^2)+((E39^2)/2)- (((E38)^2)*COS(E50))- (((E38)*((E39)*SENO(E50))))
F=ax'*(t*cosBj+Yj*senBj-t)+ay'*(Yj*cosBj-t*senBj)+T^2+(Yj^2/2)-t^2*cosBj-t*Yj*senBj	-93.558456	

**Posición Inferior (Tope)  
Coordenadas ay,ax**

T=	26	=E5/2 Ancho de Via / 2
Y2=	4	Despl. en Eje Y del Punto Medio de la Llanta
l=ay*by+ax*bx	346.5	=(E20*E28)+(E19*E27)
H=ay*bx-ax*by	-233.625	=(E20*E27)-(E19*E28)
A=(T*(ax+bx-t) + ay*yj-l)	-207	=(E19*E62)+(E20*E63)+(E27*E62)- (((E62)^2)-(E64)
B=(T*(by-ay-Yj))+ax*Yj+H)	-145.625	=(E19*E63)-(E20*E62)+(E28*E62)- (E62*E63)+E65 =(-E19*E62)-(E27*E62)- (E28*E63)+(E62^2)+((E63^2)/2)+E64
C=(T*(T-ax-bx)+(Yj*(Yj/2-by)+l)	195	
Angulo Inicial en Grados	-4.4782086	-5.17692201
Angulo Inicial en Radianes	-0.0781595	=E69*PI()/180
Fj=A*cosbj+B*senbj+C	0.0023399	=E66*COS(E70)+E67*SENO(E70)+E68
Fj'=B*cosbj - A*senbj	-129.01788	=E67*COS(E70)+E66*SENO(E70)
Division Fj/Fj'	-1.814E-05	=E71/E72
Método Newton-Rhapon	-0.0781413	=E70-(E73)
Valor Convertido a Grados	-4.4771695	=E74*180/PI()

**Tope Coordenadas ax',ay'**

ax'=	21	=E23
ay'=	15.5	=E24
D=T*cosBj-T+ay'*senBj+ax'-ax*cosBj	-1.2252161	=E62*COS(E74)- E62+E80*SENO(E74)+E79-E79*COS(E74)
E=T*senBj-Yj-ax'*senBj+ay'-ay*cosBj	-4.3430113	=E62*SENO(E74)-E63- E79*SENO(E74)+E80-E80*COS(E74) =E79*(E62*COS(E74)+E63*SENO(E74)- (E62))+E80*(E63*COS(E74)- E62*SENO(E74))+E62^2+(E63^2)/2- (E62^2)*COS(E74)-E62*E63*SENO(E74)
F=ax'*(t*cosBj+Yj*senBj-t)+ay'*(Yj*cosBj-t*senBj)+T^2+(Yj^2/2)-t^2*cosBj-t*Yj*senBj	103.227664	

**Coordenas bx',by'**

by'=((D2*F1-F2*D1))/(E2*D1-E1*D2)	20.3772167	(((E81*E58)-(E83*E56))/((E82*E56)- (E57*E81)))
bx'=(-F1-E1*by')/D1	12.0217009	=(-(E58)-(E57*E86))/E56
LBarra1 = SQR((ax-bx)^2+(ay-by)^2)	13.2311186	Barra de Entrada (bx,by) a (ax,ay)
LBarra2 = SQR((ax'-ax)^2+(ay'-ay)^2)	5	Barra Acopladora (ax,ay) a (ax',ay)
LBarra3 = SQR((bx'-ax)^2+(by'-ay)^2)	10.2174898	Barra de Salida (ax',ay) a (bx',by)

**Cálculo de Ecuaciones para cualquier Sistema de Suspensión  
Conducción de Cuerpo Rígido**

**Datos de Entrada**

<b>Av</b>	52	Ancho de Via
<b>All</b>	5	Ancho del Neumático
<b>M</b>	3.5	Longitud del Mango
<b>m</b>	3.5	Longitud de la Masa
<b>R</b>	21	Diametro total del Ensamble Rueda-Neumático
<b>Ac</b>	13	Ancho de Carroceria
<b>Af</b>	13	Ancho de Sección Frontal del Vehículo
<b>Hmax</b>	15.15	Altura de la Barra Frontal transversal
<b>hmin</b>	10.67	Altura del piso del Vehículo
<b>Angulo b Camber en Bache</b>	5	Angulo Camber Bache por diseño
<b>Angulo b Camber en Bache (Rad)</b>	0.08726646	Valor en Radianes
<b>Angulo b Camber en Tope</b>	-3	Angulo Camber Tope por diseño
<b>Angulo b Camber en Tope (Rad)</b>	-0.0523599	Valor en Radianes
<b>Angulo g de la Masa/Rueda Gra</b>	90	
<b>Angulo g de la Masa/Rueda Rad</b>	1.57079633	= $d17 \cdot \pi() / 180$

**Punto Ax (ax , ay)**

$Pm = Av/2$	26	=D4/2 Coord. en X del punto medio de la rueda
$ax = Pm - M$	22.5	=D21-D6
$ay = R/2 - m/2$	8.75	=D8/2-D7/2

**Punto Ax' (ax' , ay')**

$ax' = ax + m \cdot \cos g$	22.5	=D22+(D7 * COS(D18))
$ay' = ay + m \cdot \text{seng}$	12.25	=D23+(D7 * SIN(D18))

**Bache Coordenadas ay,ax**

$ax =$	22.5	=D22
$ay =$	8.75	=D23
$T = Av/2$	26	=D4/2 Coord. en X del punto medio de la rueda
$Y1 =$	-2	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D1 = T \cdot \cos B_j - T + ay \cdot \text{sen} B_j + ax - ax \cdot \cos B_j$	0.74929419	=D32 * COS(D14) - D32 + (D31 * SIN(D14)) + D30 - (D30 * COS(D14))
$E1 = T \cdot \text{sen} B_j - Y_j - ax \cdot \text{sen} B_j + ay - ay \cdot \cos B_j$	2.33834149	=(D32 * SIN(D14)) - D33 - (D30 * SIN(D14)) + D31 - (D31 * COS(D14))
$F1 = ax \cdot (t \cdot \cos B_j + Y_j \cdot \text{sen} B_j - t) + ay \cdot (Y_j \cdot \cos B_j - t \cdot \text{sen} B_j) + T^2 + (Y_j^2 / 2) - t^2 \cdot \cos B_j - t \cdot Y_j \cdot \text{sen} B_j$	-34.304966	=D30 * ((D32 * COS(D14)) + (D33) * SIN(D14) - (D32)) + D31 * ((D33) * COS(D14) - (D32) * SIN(D14)) + ((D32)^2) + ((D33^2) / 2) - (((D32)^2) * COS(D14)) - ((D32) * (D33) * SIN(D14))

**Tope Coordenadas ax,ay**

$ax =$	22.5	=E23
$ay =$	8.75	=E24

$T=Av/2$	26	=E4/2
$Y2 =$	4	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D2=T*\cos B_j-T+ay*\sen B_j+ax'-ax'*\cos B_j$	-0.4627362	=D41*COS(D16)- D41+(D40*SIN(D16))+D39- (D39*COS(D16))
$E2=T*\sen B_j-Y_j-ax'*\sen B_j+ay'-ay'*\cos B_j$	-4.1711843	=(D41*SIN(D16))-D42- (D39*SIN(D16))+D40*(D40*COS(D16))
$F2=ax'*(t*\cos B_j+Y_j*\sen B_j-t)+ay'*(Y_j*\cos B_j-t*\sen B_j)+T^2+(Y_j^2/2)-t^2*\cos B_j-t*Y_j*\sen B_j$	55.7158795	=D39*((D41)*COS(D16)+(D42)*SIN(D16)- (D41))+D40*((D42)*COS(D16)- (D41)*SIN(D16))+((D41)^2)+((D42^2)/2)- (((D41)^2)*COS(D16))- ((D41)*(D42)*SIN(D16))

**Posición Inferior (Bache)  
Coordenadas bx,by**

$by=((D2*F1-F2*D1)/(E2*D1-E1*D2))$	12.661898	(((D43*D36)-(D45*D34))/((D44*D34)- (D35*D43))
$bx=(-F1-E1*by)/D1$	6.26873202	=(-(D36)-(D35*D49))/D34

**Bache Coordenadas ay,ax'**

$ax'=$	22.5	=E23
$ay'=$	12.25	=E24
$T=Av/2$	26	=E4/2
$Y1 =$	-2	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D1=T*\cos B_j-T+ay*\sen B_j+ax'-ax'*\cos B_j$	1.05433929	=D55*COS(D14)-D55+D54*SIN(D14)+D53- D53*COS(D14)
$E1=T*\sen B_j-Y_j-ax'*\sen B_j+ay'-ay'*\cos B_j$	2.35166005	=D55*SIN(D14)-D56-D63*SIN(D14)+D54- D54*COS(D14)
$F1=ax'*(t*\cos B_j+Y_j*\sen B_j-t)+ay'*(Y_j*\cos B_j-t*\sen B_j)+T^2+(Y_j^2/2)-t^2*\cos B_j-t*Y_j*\sen B_j$	-49.209501	=D53*(D55*COS(D14)+D56*SIN(D14)- (D55))+D54*(D56*COS(D14)- D55*SIN(D14))+D55^2+(D56)/2- (D55^2)*COS(D14)-D55*D56*SIN(D14)

**Tope Coordenadas ax',ay'**

$ax'=$	22.5	=E23
$ay'=$	12.25	=E24
$T=Av/2$	26	=E4/2
$Y2 =$	4	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D2=T*\cos B_j-T+ay*\sen B_j+ax'-ax'*\cos B_j$	-0.6459121	=D64*COS(D16)-D64+D63*SIN(D16)+D62- D62*COS(D16)
$E2=T*\sen B_j-Y_j-ax'*\sen B_j+ay'-ay'*\cos B_j$	-4.1663876	=D64*SIN(D16)-D65-D62*SIN(D16)+D63- D63*COS(D16)
$F2=ax'*(t*\cos B_j+Y_j*\sen B_j-t)+ay'*(Y_j*\cos B_j-t*\sen B_j)+T^2+(Y_j^2/2)-t^2*\cos B_j-t*Y_j*\sen B_j$	74.459265	=D62*(D64*COS(D16)+D65*SIN(D16)- (D64))+D63*(D65*COS(D16)- D64*SIN(D16))+D64^2+(D65)/2- (D64^2)*COS(D16)-D64*D65*SIN(D16)

**Coordenas bx',by'**

$by=((D2*F1-F2*D1)/(E2*D1-E1*D2))$	16.2572144	(((D66*D59)-(D68*D57))/((D67*D57)- (D58*D66))
$bx'=(-F1-E1*by)/D1$	10.4122648	=(-(D59)-(D58*D71))/D57

$LBarra1 = \text{SQRT}((ax-bx)^2+(ay-by)^2)$	16.6960177	Barra de Entrada (bx,by) a (ax,ay)
$LBarra2 = \text{SQRT}((ax'-ax')^2+(ay'-ay')^2)$	3.5	Barra Acopadora (ax,ay) a (ax',ay')
$LBarra3 = \text{SQRT}((bx'-ax')^2+(by'-ay')^2)$	12.7346421	Barra de Salida (ax',ay') a (bx',by')

**Cálculo de Ecuaciones para cualquier Sistema de Suspensión  
Conducción de Cuerpo Rígido**

**Datos de Entrada**

<b>Av</b>	52	Ancho de Via
<b>All</b>	5	Ancho del Neumático
<b>M</b>	5	Longitud del Mango
<b>m</b>	5	Longitud de la Masa
<b>R</b>	26	Diametro total del Ensamble Rueda-Neumático
<b>Ac</b>	20	Ancho de Carrocería
<b>Af</b>	15	Ancho de Sección Frontal del Vehículo
<b>Hmax</b>	18	Altura de la Barra Frontal transversal
<b>hmin</b>	13	Altura del piso del Vehículo
<b>Angulo b Camber en Bache</b>	9	Ángulo Camber Bache por diseño
<b>Angulo b Camber en Bache (Rad)</b>	0.15707963	Valor en Radianes
<b>Angulo b Camber en Tope</b>	-4	Ángulo Camber Tope por diseño
<b>Angulo b Camber en Tope (Rad)</b>	-0.0698132	Valor en Radianes
<b>Angulo g de la Masa/Rueda Gra</b>	90	
<b>Angulo g de la Masa/Rueda Rad</b>	1.57079633	=d17*PI()/180

**Punto Ax (ax , ay)**

$P_m = A_v/2$	26	=D4/2 Coord. en X del punto medio de la rueda
$ax = P_m - M$	21	=D21-D6
$ay = R/2 - m/2$	10.5	=D8/2-D7/2

**Punto Ax' (ax' , ay')**

$ax' = ax + m * \cos g$	21	=D22+(D7*COS(D18))
$ay' = ay + m * \text{seng}$	15.5	=D23+(D7*SIN(D18))

**Bache Coordenadas ay,ax**

$ax=$	21	=D22
$ay=$	10.5	=D23
$T=A_v/2$	26	=D4/2 Coord. en X del punto medio de la rueda
$Y1 =$	-2	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D1=T*\cos B_j - T + ay*\text{sen} B_j + ax - ax*\cos B_j$	1.58100359	=D32*COS(D14)-D32+(D31*SIN(D14))+D30-(D30*COS(D14))
$E1=T*\text{sen} B_j - Y_j - ax*\text{sen} B_j + ay - ay*\cos B_j$	2.91144475	=(D32*SIN(D14))-D33-(D30*SIN(D14))+D31-(D31*COS(D14))
$F1=ax*(t*\cos B_j + Y_j*\text{sen} B_j - t) + ay*(Y_j*\cos B_j - t*\text{sen} B_j) + T^2 + (Y_j^2/2) - t^2*\cos B_j - t*Y_j*\text{sen} B_j$	-58.283204	=D30*((D32)*COS(D14)+(D33)*SIN(D14)-(D32))+D31*((D33)*COS(D14)-(D32)*SIN(D14))+((D32)^2)+((D33^2)/2)-(((D32)^2)*COS(D14))-((D32)*(D33)*SIN(D14))

**Tope Coordenadas ax,ay**

$ax=$	21	=E23
$ay=$	10.5	=E24

$T=Av/2$	26	$=E4/2$
$Y2 =$	4	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D2=T*\cos Bj-T+ay*\sen Bj+ax'-ax*\cos Bj$	-0.7446227	$=D41*\cos(D16)-D41+(D40*\sin(D16))+D39-(D39*\cos(D16))$
$E2=T*\sen Bj-Yj-ax*\sen Bj+ay'-ay*\cos Bj$	-4.3232049	$=(D41*\sin(D16))-D42-(D39*\sin(D16))+D40-(D40*\cos(D16))$
$F2=ax*(t*\cos Bj+Yj*\sen Bj-t)+ay*(Yj*\cos Bj-t*\sen Bj)+T^2+(Yj^2/2)-t^2*\cos Bj-t*Yj*\sen Bj$	70.6530104	$=D39*((D41*\cos(D16))+D42*\sin(D16)-(D41))+D40*((D42*\cos(D16)-(D41)*\sin(D16)))+((D41)^2+((D42^2)/2)-(((D41)^2)*\cos(D16))-((D41)*(D42)*\sin(D16)))$

**Posición Inferior (Bache)  
Coordenadas bx,by**

$by=((D2*F1-F2*D1)/(E2*D1-E1*D2))$	14.6352205	$(((D43*D36)-(D45*D34))/((D44*D34)-(D35*D43)))$
$bx=(-F1-E1*by)/D1$	9.91368263	$=(-(D36)-(D35*D49))/D34$

**Bache Coordenadas ay',ax'**

$ax' =$	21	$=E23$
$ay' =$	15.5	$=E24$
$T=Av/2$	26	$=E4/2$
$Y1 =$	-2	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D1=T*\cos Bj-T+ay*\sen Bj+ax'-ax*\cos Bj$	2.36317591	$=D55*\cos(D14)-D55+D54*\sin(D14)+D53-D53*\cos(D14)$
$E1=T*\sen Bj-Yj-ax*\sen Bj+ay'-ay*\cos Bj$	2.97300305	$=D55*\sin(D14)-D56-D53*\sin(D14)+D54-D54*\cos(D14)$
$F1=ax*(t*\cos Bj+Yj*\sen Bj-t)+ay*(Yj*\cos Bj-t*\sen Bj)+T^2+(Yj^2/2)-t^2*\cos Bj-t*Yj*\sen Bj$	-88.496568	$=D53*(D55*\cos(D14)+D56*\sin(D14)-(D55))+D54*(D56*\cos(D14)-D55*\sin(D14))+D55^2+(D56)/2-(D55^2)*\cos(D14)-D55*D56*\sin(D14)$

**Tope Coordenadas ax',ay'**

$ax' =$	21	$=E23$
$ay' =$	15.5	$=E24$
$T=Av/2$	26	$=E4/2$
$Y2 =$	4	<b>Despl Eje Y del Punto Medio de la Llanta</b>
$D2=T*\cos Bj-T+ay*\sen Bj+ax'-ax*\cos Bj$	-1.0934051	$=D64*\cos(D16)-D64+D63*\sin(D16)+D62-D62*\cos(D16)$
$E2=T*\sen Bj-Yj-ax*\sen Bj+ay'-ay*\cos Bj$	-4.3110251	$=D64*\sin(D16)-D65-D62*\sin(D16)+D63-D63*\cos(D16)$
$F2=ax*(t*\cos Bj+Yj*\sen Bj-t)+ay*(Yj*\cos Bj-t*\sen Bj)+T^2+(Yj^2/2)-t^2*\cos Bj-t*Yj*\sen Bj$	99.672633	$=D62*(D64*\cos(D16)+D65*\sin(D16)-(D64))+D63*(D65*\cos(D16)-D64*\sin(D16))+D64^2+(D65)/2-(D64^2)*\cos(D16)-D64*D65*\sin(D16)$

**Coordenas bx',by'**

$by'=((D2*F1-F2*D1)/(E2*D1-E1*D2))$	20.0059226	$(((D66*D59)-(D68*D57))/((D67*D57)-(D58*D66)))$
$bx'=(-F1-E1*by')/D1$	12.2796185	$=(-(D59)-(D58*D71))/D57$

$LBarra1 = \text{SQRT}((ax-bx)^2+(ay-by)^2)$	11.8324335	Barra de Entrada (bx,by) a (ax,ay)
$LBarra2 = \text{SQRT}((ax-ax')^2+(ay-ay')^2)$	5	Barra Acopladora (ax,ay) a (ax',ay')
$LBarra3 = \text{SQRT}((bx'-ax')^2+(by'-ay')^2)$	9.81572167	Barra de Salida (ax',ay') a (bx',by')

## APÉNDICE D

### SINTESIS CINEMATICA DE UNA SUSPENSION DELANTERA PARA UN VEHICULO TODO TERRENO

Angel Rojas Salgado, Miguel Angel Cruz Morales\*\*, Carlos Sánchez Murguiondo, Carlos MartínezCastañeda  
Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.  
Circuito exterior, Cd., Universitaria D.F., 04510, México, D.F.

\*Teléfono: (5)4809423. Fax: (5) 4809429.

\*\*mcruz@ccelanese.com.mx

#### RESUMEN

En este artículo se proponen dos métodos de síntesis cinemática de un mecanismo de suspensión delantera del tipo brazo-largo-corto, para un vehículo de competencia todo terreno. La primera propuesta de síntesis es la representación analítica del método gráfico de generación de trayectoria, el cual ha sido ampliamente utilizado en este tipo de proyectos. En tanto que la segunda propuesta, se basa en el concepto de conducción de cuerpo rígido, definiendo el ángulo de camber de la suspensión para realizar la síntesis del mecanismo. Ambos métodos se presentan como un caso particular de síntesis exacta mediante polinomios para un mecanismo plano del tipo RRRR aplicado a una suspensión automotriz y en la cual se considerarán tres posiciones a satisfacer.

#### ABSTRACT

This article is proposing two different methodologies of mechanism synthesis for a short-long-arm front suspension system, used in all-terrain vehicles. The first proposal, is the analytical simulation of the path generation graphic methodology, used extensively in previous designs for such competitions. The second proposal is based on the rigid body Guidance concept, where the camber angle is defined as an entry variable to the mechanism synthesis. Both methodologies, represent a specific case of exact synthesis through the usage of polynomials for a RRRR type plain mechanism, applied to an automotive suspension, considering three different positions for compliance.

#### NOMENCLATURA

A <sub>C</sub>	Ancho de la Carrocería.
A <sub>F</sub>	Ancho de la sección frontal del Vehículo.
A <sub>V</sub>	Ancho del Vehículo.
a <sub>x</sub>	Coordenada x, Rótula de la Barra Inferior.
a <sub>y</sub>	Coordenada y, Rótula de la Barra Inferior.
a <sub>x</sub> '	Coordenada x, Rótula de la Barra Superior.
a <sub>y</sub> '	Coordenada y, Rótula de la Barra Superior.
b <sub>x</sub>	Coordenada x, Pivote de la Barra Inferior.
b <sub>y</sub>	Coordenada y, Pivote de la Barra Inferior.
b <sub>x</sub> '	Coordenada x, Pivote de la Barra Superior.
b <sub>y</sub> '	Coordenada y, Pivote de la Barra Superior.

H <sub>max</sub>	Altura de la Barra Frontal Transversal de la Carrocería.
h <sub>min</sub>	Altura del Piso del Vehículo.
M	Longitud del Mango.
m	Longitud de la Masa.
P <sub>m</sub>	Punto medio de la Rueda-Neumático al Nivel del Piso.
R	Diámetro del Ensamble Rueda-Neumático.
RRRR	Cuatro Pares de Revolución.
SLA	Brazo-Largo-Corto.
t	Mitad del Ancho de Vía
x <sub>j</sub>	Coordenada x de las Posiciones del Punto Medio de la Rueda
y <sub>j</sub>	Coordenada y de las Posiciones del Punto Medio de la Rueda
β <sub>j</sub>	Ángulos en la Posición de Jounce y Rebound.
γ	Ángulo de Inclinación de la Rueda.
θ	Ángulo para Cambio de Variable.

#### INTRODUCCIÓN

Una suspensión automotriz es el conjunto de dispositivos elásticos destinados a proporcionar [1]:

- Protección a los componentes del vehículo cualesquiera que sean el estado del terreno y las condiciones de manejo.
- Estabilidad del vehículo ante cualquier obstáculo, desnivel del terreno, radio de viraje, pendiente, frenado, etc.
- Además de la comodidad de los pasajeros y protección de la carga, reduciendo los movimientos de la masa amortiguada del vehículo.

El sistema de suspensión tiene dos funciones principales[1]:

- Proveer un elemento vertical de unión entre las masas amortiguadas y no amortiguadas. Este elemento debe permitir a las ruedas mantener contacto con la superficie del camino, cualquiera que este sea, mejorando la Calidad de Manejo de las masas amortiguadas.
- Proveer un mecanismo (en conjunto con el sistema de dirección) que sea capaz de mantener una orientación apropiada de las ruedas, relativa al vehículo y a la superficie del camino. Donde las fuerzas y momentos (generados por la masa de carga, inercia, frenado y las ruedas) sean transmitidos y

Sometido a revisión en Mayo de 2002, para su arbitraje. Aprobado para su publicación en Agosto de 2002.

Derechos Reservados SOMIM 2002.

295

distribuidos entre las masas amortiguadas y las no amortiguadas.

Un estudio cinemático de un sistema de suspensión esta relacionado con la estructura de los mecanismos que forman dicho sistema y de su interacción con otros sistemas. Una suspensión, se puede representar como la aplicación de un mecanismo RRRR, en donde el movimiento de las ruedas del vehículo hacia arriba y hacia abajo están controladas por algunas combinaciones de eslabonamientos en un plano, dispuestas por duplicado para proporcionar control tridimensional. En todos los casos el ensamble de las ruedas se une a la barra acopladora del eslabonamiento, y su movimiento es a lo largo de un conjunto de curvas de la barra acopladora. En el caso de un mecanismo de suspensión, donde también interesa la orientación de la rueda, el estudio del mecanismo no es estrictamente un problema de generación de trayectoria, sino de conducción de cuerpo rígido [2]. La curva generada por el Cuerpo Rígido unido a la barra acopladora, en el punto medio de la rueda, es casi una línea recta sobre el pequeño desplazamiento vertical requerido. Esto es deseable si se quiere mantener la llanta perpendicular al pavimento para una mejor tracción en todos los cambios de dirección, aceleración y frenado de la carrocería del vehículo.

En la figura 1, se muestra una suspensión de brazo-largo-corto (SLA, por sus siglas en inglés). Este tipo de suspensión es la que presenta las mayores ventajas para un vehículo todo terreno [3]. El resorte sostiene el peso del vehículo y proporciona un quinto "eslabón de fuerza" de longitud variable que estabiliza el mecanismo.

La síntesis cinemática de mecanismos RRRR, para generación de trayectoria y conducción de cuerpo rígido ha sido ampliamente estudiada y Rojas [4] propone la síntesis exacta de dichos mecanismos en base a polinomios, los cuales se utilizan para el caso particular de la suspensión delantera, con el fin de establecer las ecuaciones de síntesis considerando tres posiciones.

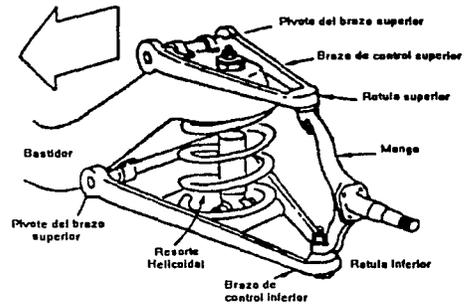


Figura 1. Suspensión SLA.

### SÍNTESES DE LA SUSPENSIÓN POR GENERACIÓN DE TRAYECTORIA.

El método analítico propuesto, se basa en los mismos principios del método gráfico de Saldivar [5], el cual ha sido utilizado en las suspensiones de los vehículos que han participado desde el año de 1990 en las competencias del proyecto SAE Mini-Baja, por parte de los equipos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México [3],[5], [6].

Para definir las características de comportamiento deseado en la trayectoria de las ruedas ante diferentes condiciones de terreno, se establecen las siguientes condiciones:

- 1.- Es necesario mantener el máximo contacto de los neumáticos sobre el terreno, por lo que se requiere que el punto medio Pm se traslade sobre una línea recta perpendicular al terreno.
- 2.- Se define el viaje máximo de la suspensión, determinando las posiciones máximas de Jounce y Rebound sobre la línea de traslado del punto Pm como un límite para el mecanismo de suspensión. La posición de Jounce corresponde a un tope y la posición de Rebound a un bache en el camino, figura 2.

Esto define el movimiento de un punto asociado a la barra acopladora para un mecanismo de cuatro barras. Debido a que las incógnitas son los ángulos de posición de la rueda  $\beta_j$ , el problema de la síntesis del mecanismo es tratado como generación de trayectoria.

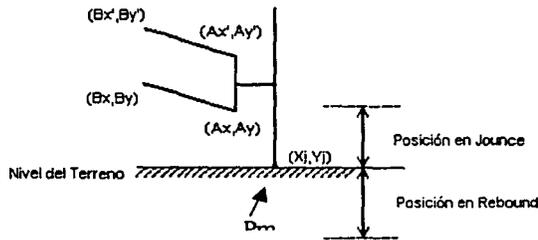


Figura 2. Posiciones de bache y tope.

### Determinación de los Puntos Básicos del Mecanismo.

En primer lugar, se determinan los puntos  $(bx, by)$ ,  $(ax, ay)$  y  $(ax', ay')$  de la siguiente manera, figura 3: Se define un sistema coordenado X,Y con el origen situado por convención en la línea central del vehículo (coordenada X) y a nivel del piso (coordenada Y).

Se obtienen las coordenadas de los puntos  $(ax, ay)$ :

$$a_x = P_m - M \quad (1)$$

$$a_y = \frac{R}{2} - \frac{m}{2} \quad (2)$$

Asimismo para el punto  $(ax', ay')$ :

$$a_x' = a_x + m \cos \gamma \quad (3)$$

$$a_y' = a_y + m \sin \gamma \quad (4)$$

Se define el punto  $P_m$  como la coordenada en x del punto medio de la llanta:

$$P_m = Av/2 \quad (5)$$

Las coordenadas del punto  $(bx, by)$  se localizan por diseño en el punto medio de la barra que une la barra lateral del piso del vehículo con la barra frontal transversal, por lo que es necesario definir los otros planos coordenados ZX y YZ.

En el plano ZX, con el origen del eje Z en el frente del vehículo, se puede definir a la coordenada  $bx$  como:

$$bx = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{A_c}{2} - \frac{A_f}{2} \right) + \left( \frac{A_f}{2} \right) \quad (6)$$

En el plano ZY, se define la coordenada  $by$  como,

$$by = \frac{H_{MAX} - h_{MIN}}{2} + h_{MIN} \quad (7)$$

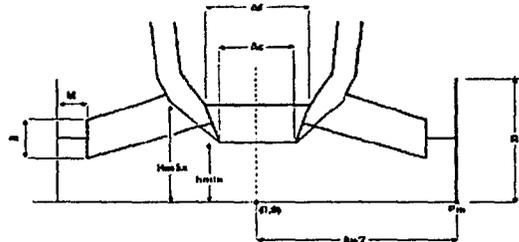


Figura 3. Puntos básicos del mecanismo.

### Ecuación de Síntesis de la Diada Inferior.

Tomando como referencia, la diada formada entre los puntos  $(bx, by)$ ,  $(ax, ay)$  y  $(xj, yj)$  con  $j=1, 2$ , se inicia la síntesis cinemática para una suspensión delantera de tipo SLA. De la función de síntesis de Rojas [4]:

$$f_j = a_{j1}a_x + a_{j2}a_y + a_{j3}bx + a_{j4}by + b_j' + (a_y b_x - a_x b_y)c_j' + (a_y b_y + a_x b_x)d_j' = 0 \quad (8)$$

Donde:

$$a_{j1} = \cos \beta_j x_j + \sin \beta_j y_j - x_0 \quad (9)$$

$$a_{j2} = \cos \beta_j y_j - \sin \beta_j x_j - y_0 \quad (10)$$

$$a_{j3} = \cos \beta_j x_0 - \sin \beta_j y_0 - x_j \quad (11)$$

$$a_{j4} = \cos \beta_j y_0 + \sin \beta_j x_0 - y_j \quad (12)$$

$$b_j' = \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \sin \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) \quad (13)$$

$$c_j' = \sin \beta_j \quad (14)$$

$$d_j' = 1 - \cos \beta_j \quad (15)$$

Se sustituyen los valores de las ecuaciones (9) a (15) en la ecuación (8) y se obtiene:

$$f_j = (\cos \beta_j x_j + \operatorname{sen} \beta_j y_j - x_0) a_x + (\cos \beta_j y_j - \operatorname{sen} \beta_j x_j - y_0) a_y \\ + (\cos \beta_j x_0 - \operatorname{sen} \beta_j y_0 - x_j) b_x + (\cos \beta_j y_0 + \operatorname{sen} \beta_j x_0 - y_j) b_y \\ + \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \operatorname{sen} \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) \\ + (a_x b_x - a_y b_y) \operatorname{sen} \beta_j + (a_x b_y + a_y b_x) (1 - \cos \beta_j) = 0 \quad (16)$$

con  $j=1,2$

Para el sistema en estudio, se consideran las siguientes premisas:

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = x_j = x_1 = x_2 = x_i = t$$

Y los valores de  $(ax, ay)$  y  $(bx, by)$  obtenidos de las ecuaciones (1), (2), (6) y (7), respectivamente.

Sustituyendo en la ecuación (5.16) se obtiene:

$$f_j = (t \cos \beta_j + y_j \operatorname{sen} \beta_j - t) a_x + (y_j \cos \beta_j - t \operatorname{sen} \beta_j) a_y \\ + (t \cos \beta_j - y_0 \operatorname{sen} \beta_j - t) b_x + (y_0 \cos \beta_j + t \operatorname{sen} \beta_j - y_j) b_y \\ + \frac{t^2 + y_0^2 + t^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (t \cdot t + y_0 y_j) - \operatorname{sen} \beta_j (t \cdot y_j - y_0 t) \\ + (a_x b_x - a_y b_y) \operatorname{sen} \beta_j + (a_x b_y + a_y b_x) (1 - \cos \beta_j) = 0 \quad (17)$$

Eliminando y factorizando:

$$f_j = \cos \beta_j (a_x t + a_y y_j + b_x t - t^2 - t) \\ + \operatorname{sen} \beta_j (a_x y_j - a_y t + b_y t - t \cdot y_j + H) \\ - a_x t - b_y t - b_x y_j + t^2 + \frac{y_j^2}{2} + I \quad (18)$$

Donde:

$$H = (a_x b_x - a_y b_y) \quad (19)$$

$$I = (a_x b_y + a_y b_x) \quad (20)$$

Y definiendo las constantes:

$$A = (a_x t + a_y y_j + b_x t - t^2 - t) \quad (21)$$

$$B = (a_x y_j - a_y t + b_y t - t y_j + H) \quad (22)$$

$$C = (-a_x t - b_y t - b_x y_j + t^2 + \frac{y_j^2}{2} + I) \quad (23)$$

Se obtiene el siguiente polinomio:

$$f_j = A \cos \beta_j + B \operatorname{sen} \beta_j + C = 0 \quad (24)$$

Las soluciones para  $j=1,2$ , dan como resultado los ángulos  $\beta_j$  en las posiciones de Jounce y Rebound.

La ecuación (24) se puede transformar, en base a un cambio de variable en una ecuación de segundo grado en base a la tangente del ángulo medio de  $\theta$  de la siguiente forma:

Sean:

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2} \quad (25)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2 \tan \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2} \quad (26)$$

Por lo tanto:

$$A \cdot [1 - \tan^2 \theta/2] + B \cdot [2 \tan \theta/2] + C \cdot [1 + \tan^2 \theta/2] = 0 \quad (27)$$

Factorizando y aplicando la fórmula de solución de ecuaciones de segundo grado se obtiene:

$$\theta = \operatorname{ang} \tan \left[ \frac{-2B \pm \sqrt{(2B)^2 - 4 \cdot (C-A) \cdot (A+C)}}{2 \cdot (C-A)} \right] \cdot 2 \quad (28)$$

Donde se obtienen 2 posibles valores de  $\theta$  siendo una de las raíces una solución real al sistema de suspensión buscado.

**Ecuación de Síntesis de la Diada Superior.**

Haciendo el estudio de la diada formada por los puntos  $(ax', ay')$ ,  $(bx', by')$  y  $(xj, yj)$  para  $j=1,2$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$f_j = a_{j1} a_x' + a_{j2} a_y' + a_{j3} b_x' + a_{j4} b_y' + b_j' \\ + (a_{j1} b_x' - a_{j2} b_y') c_j' + (a_{j3} b_y' + a_{j4} b_x') d_j' = 0 \quad (29)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (9) a (15) en la ecuación (29) se obtiene:

$$f_j = (\cos \beta_j x_j + \operatorname{sen} \beta_j y_j - x_0) a_x' + (\cos \beta_j y_j - \operatorname{sen} \beta_j x_j - y_0) a_y' \\ + (\cos \beta_j x_0 - \operatorname{sen} \beta_j y_0 - x_j) b_x' + (\cos \beta_j y_0 + \operatorname{sen} \beta_j x_0 - y_j) b_y' \\ + \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - \cos \beta_j (x_0 x_j + y_0 y_j) - \operatorname{sen} \beta_j (x_0 y_j - y_0 x_j) \\ + (a_{j1} b_x' - a_{j2} b_y') \operatorname{sen} \beta_j + (a_{j3} b_y' + a_{j4} b_x') (1 - \cos \beta_j) = 0 \quad (30)$$

con  $j=1,2$

Para esta diada en estudio, se consideran las siguientes premisas:

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = x_j = x_1 = x_2 = x, \quad t$$

$\beta_j$ . = Resultado de la síntesis de la primer diada, con  $j=1,2$

Y los valores de  $(ax, ay)$ ,  $(ay', ax')$  y  $(bx, by)$  obtenidos de las ecuaciones (1) a la (4), (6) y (7) respectivamente.

Sustituyendo y Eliminando se obtiene la ecuación (31):

$$f_j = (t \cos \beta_j + y, \text{sen} \beta_j - t) a'_x + (y, \cos \beta_j - t \text{sen} \beta_j) a'_y + (t \cos \beta_j - t) b'_x + (t \text{sen} \beta_j - y) b'_y + t^2 + \frac{y^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y, \text{sen} \beta_j + a'_x b'_x \text{sen} \beta_j - a'_y b'_y \text{sen} \beta_j + a'_x b'_y - a'_y b'_x \cos \beta_j + a'_x b'_x - a'_y b'_y \cos \beta_j = 0$$

Factorizando para  $(bx', by')$  se obtiene la ecuación (32):

$$f_j = b'_x (t \cos \beta_j - t + a'_x \text{sen} \beta_j + a'_x - a'_x \cos \beta_j) + b'_y (t \text{sen} \beta_j - y, - a'_x \text{sen} \beta_j + a'_y - a'_y \cos \beta_j) + a'_x (t \cos \beta_j + y, \text{sen} \beta_j - t) + a'_y (y, \cos \beta_j - t \text{sen} \beta_j) + t^2 + \frac{y^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y, \text{sen} \beta_j = 0$$

Y definiendo las constantes:

$$D = (t \cos \beta_j - t + a'_x \text{sen} \beta_j + a'_x - a'_x \cos \beta_j) \quad (33)$$

$$E = (t \text{sen} \beta_j - y, - a'_x \text{sen} \beta_j + a'_y - a'_y \cos \beta_j) \quad (34)$$

$$F = [a'_x (t \cos \beta_j + y, \text{sen} \beta_j - t) + a'_y (y, \cos \beta_j - t \text{sen} \beta_j) + t^2 + \frac{y^2}{2} - t^2 \cos \beta_j - t \cdot y, \text{sen} \beta_j] \quad (35)$$

Se obtiene el siguiente polinomio:

$$f_j = D_j b'_x + E_j b'_y + F_j = 0 \quad (36)$$

Con  $j=1,2$ , se forma un sistema de ecuaciones lineales con  $bx'$  y  $by'$  como incógnitas, resolviendo se obtiene:

$$b'_x = \frac{-F_1 - E_1 b'_y}{D_1} \quad (37)$$

$$D_2 \left[ \frac{-F_1 - E_1 b'_y}{D_1} \right] + E_2 b'_y + F_2 = 0 \quad (38)$$

Desarrollando la ecuación para despejar  $by'$  se obtiene:

$$b'_y = \frac{D_2 F_1 - F_2 D_1}{E_2 D_1 - E_1 D_2} \quad (39)$$

Finalmente sustituyendo el valor de  $by'$  en la ecuación (37) se obtienen las coordenadas del punto  $(bx', by')$ .

### SÍNTESIS DE LA SUSPENSIÓN POR CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO.

La síntesis de una suspensión del tipo SLA, bajo el concepto de conducción de cuerpo rígido requiere que el punto medio del neumático se desplace sobre una línea vertical durante el muelleo, para evitar el excesivo desgaste de los neumáticos, además de que se tenga control sobre el ángulo de inclinación lateral (camber), de la rueda. El camber en este caso corresponde al ángulo de posición de la rueda  $\beta_j$ .

Para que el diseño de una suspensión sea óptimo, se deben elegir características de maniobrabilidad que permitan tener una adecuada Calidad de Manejo. Es decir tener un camber positivo en la posición de Jounce y negativo en la posición de Rebound, con lo que se consigue que el vehículo, al afrontar un obstáculo, siga la irregularidad del camino con una ligera turbulencia.

Para la propuesta de síntesis por conducción de cuerpo rígido los datos de entrada incluyen:

a) La definición de las coordenadas de la barra acopladora o masa que se une a la rueda, puntos  $(ax, ay)$  y  $(ax', ay')$ , por medio de las ecuaciones (1) a (4).

b) La definición de las coordenadas del punto medio de la rueda, Pm, en las tres diferentes posiciones establecidas.

c) Finalmente, el establecimiento del ángulo de camber en dichas posiciones.

Por lo tanto, para establecer la síntesis del mecanismo se pueden utilizar las ecuaciones de síntesis de la diada superior del caso de generación de trayectoria de la propuesta anterior, ya que es la misma información que se utiliza para determinar las coordenadas del punto central de la barra, solo que en este caso se aplicará tanto para la diada inferior como para la superior. Finalmente, las ecuaciones de la (29) a la (39) constituyen la segunda propuesta de síntesis.

### CASO DE ESTUDIO

Se presenta a continuación un caso de estudio, en donde se demuestra la aplicación de ambos métodos. Los datos de entrada están basados en el proyecto Mini-Baja del año 1993.

#### Generación de Trayectoria.

En la Tabla 1, se muestran los datos de entrada y los resultados obtenidos al evaluar las ecuaciones de

síntesis de generación de trayectoria. En las figuras 4, 5 y 6 se muestra el mecanismo resultante en las posiciones de referencia, bache y tope respectivamente. Asimismo, se puede verificar por medio de la escala de la gráfica, que el mecanismo cumple con las posiciones establecidas, siguiendo una línea recta perpendicular al terreno, figura 7.

Tabla 1. Generación de trayectoria.

Datos de Entrada	Parámetros Iniciales Posición de Bache:	Resultados de ángulos $\beta$ :	Resultados de Coordenadas:
$A_c = 13$ $A_f = 13$ $A_v = 52$ $H_{max} = 15.15$ $h_{min} = 10.85$ $M = 3.5$ $m = 3.5$ $R = 21$ $\gamma = 90$	$y_1 = -2$	$\beta_1 = 5.55$ Grados	$(b_x, b_y) = (6.5, 13.0)$ $(a_x, a_y) = (22.50, 8.75)$ $(a'_x, a'_y) = (22.50, 12.25)$ $(b'_x, b'_y) = (10.74, 16.50)$
	Posición de Tope: $y_2 = 4$	$\beta_2 = -3.46$ Grados	$L_{barra\ Entrada} = 16.55483313$ $L_{barra\ Acopladora} = 3.5$ $L_{barra\ Salida} = 12.50299315$

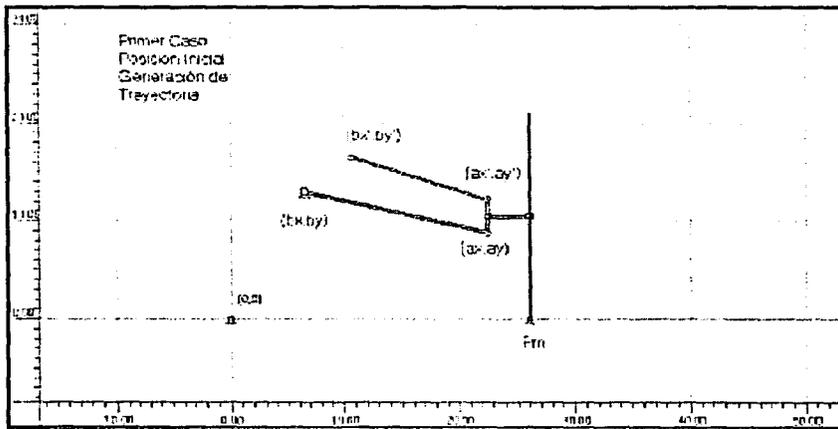


Figura 4. Posición de referencia

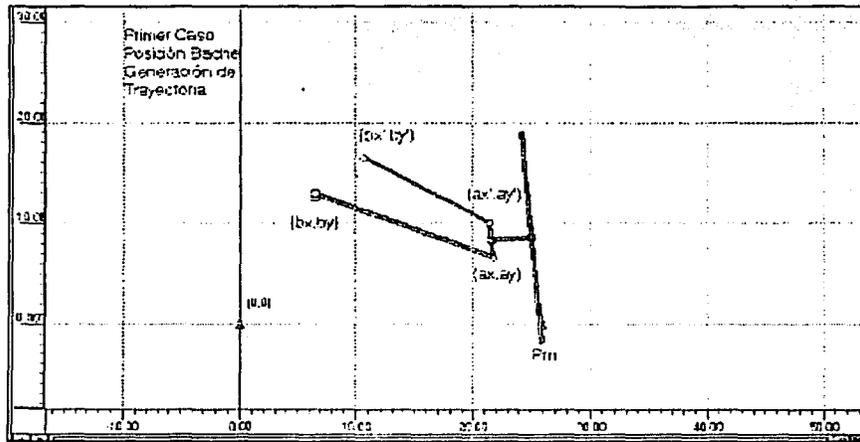


Figura 5. Posición de bache

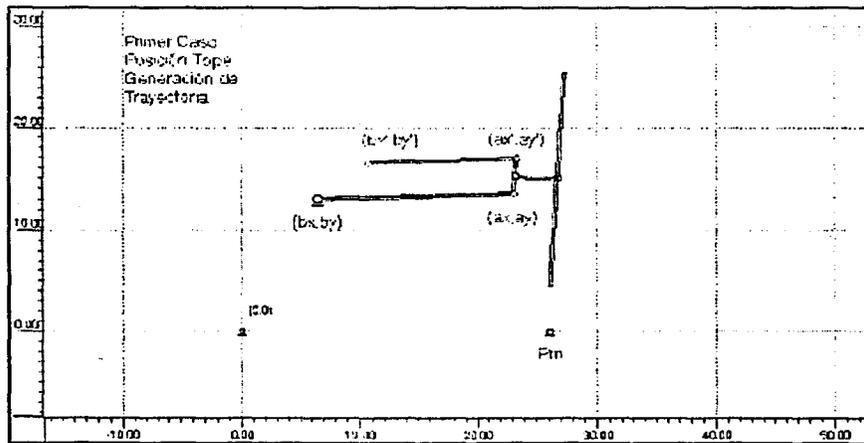


Figura 6. Posición de tope

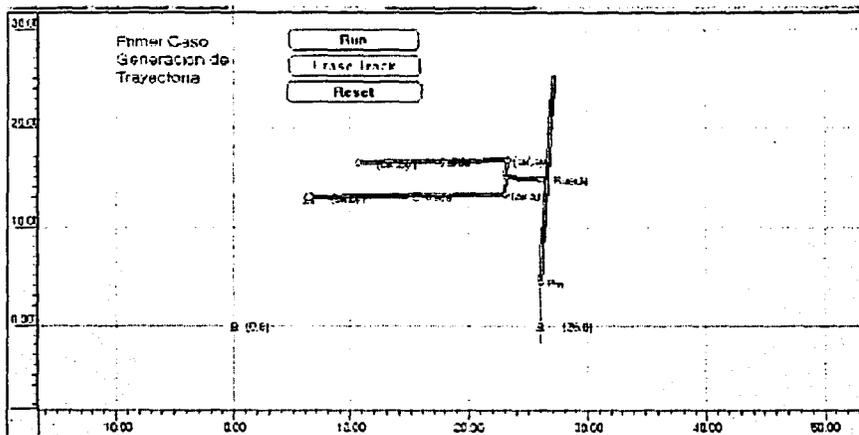


Figura 7. Trayectoria lineal

**Conducción de Cuerpo Rígido**

En la Tabla 2 se muestran los datos de entrada y resultados obtenidos, considerando el problema como conducción de cuerpo rígido. En este caso, se establece el valor del camber en las posiciones de

referencia, tope y bache. El mecanismo obtenido, se muestra en las figuras 8 a 11 y el cual es muy similar al del caso anterior.

Tabla 2. Conducción de cuerpo rígido.

Datos de Entrada	Parámetros Iniciales	Cálculos de Posición	Resultados de Coordenadas:
Ac = 13 Af = 13 Av = 52 Hmax = 15.15 hmin = 10.85 M = 3.5 m = 3.5 R = 21 γ = 90 β0 = 0	Posición de Bache: Y1 = -2 β1 = 5	Resultados Diada 1: bx = 6.268 by = 12.662	(bx,by) = (6.27,12.66) (ax,ay) = (22.50, 8.75) (ax',ay') = (22.50, 12.25) (bx',by') = (10.41, 16.26)
	Posición de Tope: Y2 = 4 β2 = -3	Resultados Diada 2: bx' = 10.412 by' = 16.257	Lbarra Entrada = 16.696 Lbarra Acopladora = 3.5 Lbarra Salida = 12.735

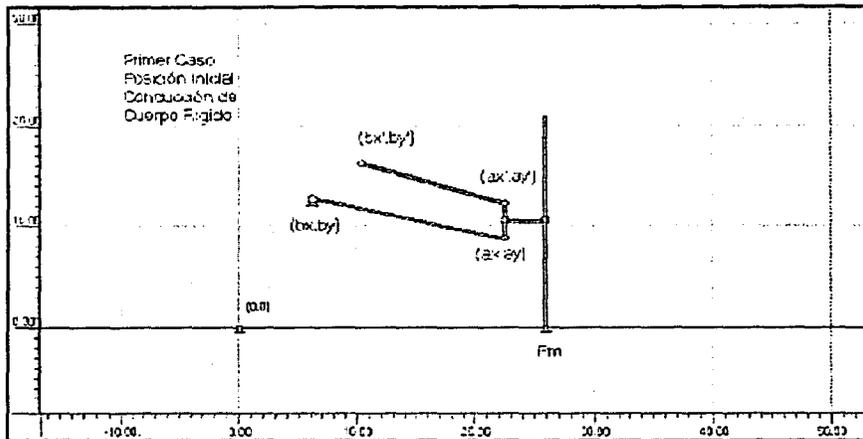


Figura 8. Posición de referencia

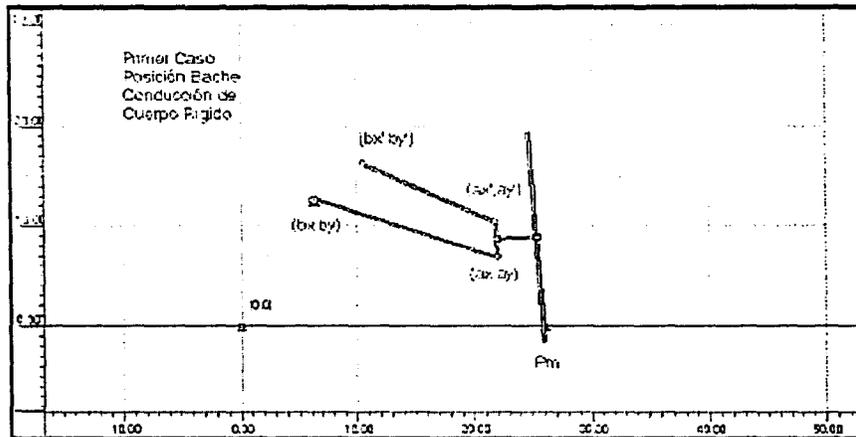


Figura 9. Posición de bache

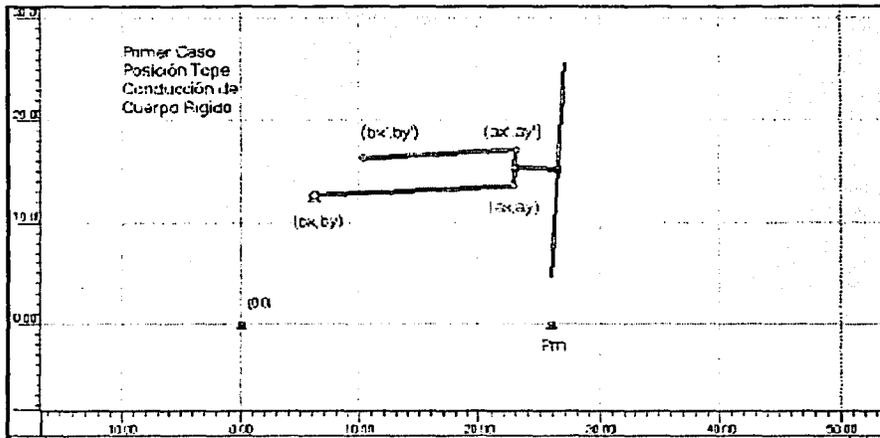


Figura 10. Posición de tope

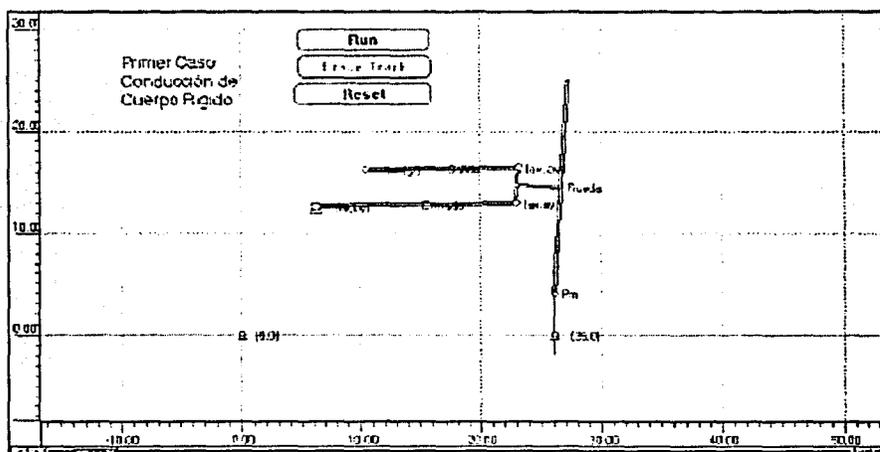


Figura 11. Trayectoria lineal

## CONCLUSIONES

De la discusión de ambos casos de síntesis, generación de trayectoria y conducción de cuerpo rígido, se pueden obtener resultados en forma rápida y precisa, mediante dos diferentes métodos analíticos, que pueden ser programados en una hoja de cálculo o establecer la base para un sistema de diseño de suspensiones asistido por computadora, que permita el análisis y la representación gráfica de dichos mecanismos, con el fin de poder seleccionar la solución más adecuada para el problema de diseño planteado.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Charlotheaux, "Suspensión y Dirección en Automóviles", Serie Técnica del Automóvil No. 7, Marcombo, pp. 10, 1979.
- [2] Robert L. Norton, "Diseño de Maquinaria", McGraw Hill, 1999.
- [3] Domínguez A., Guzmán E. y Rodríguez U., "Diseño, Manufactura y Pruebas de un Vehículo Monoplaza", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1996.
- [4] Rojas, A., "Síntesis Exacta de Conducción de Cuerpo Rígido Mediante Polinomios", UNAM.
- [5] Saldivar J., "Proyecto de un Automóvil", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1992.
- [6] Sánchez A., "Diseño de una Estructura Tubular Mediante CAD y CAE", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002.