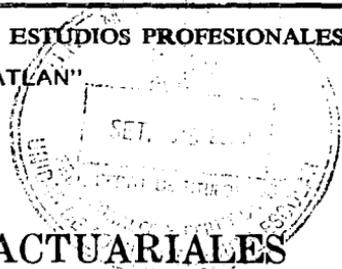


15



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"



METODOS ACTUARIALES ALTERNATIVOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
ACTUARIO
PRESENTA:
RUBEN HERNANDEZ GARCIA

ASESOR: MANUEL VALADEZ RODRIGUEZ



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

SEPTIEMBRE 2002



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

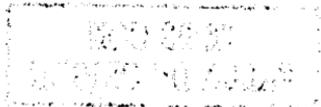
ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Rubén Hernández
García

FECHA: 23-Sep-2002

FIRMA:



Con especial amor y agradecimiento a
mis padres, María Luisa y Rubén.

Para mi esposa Maribel.
Te amo, gracias por impulsarme.

A
Russell
Owen
Alejandra
José Ricardo
Carlos Enrique
Benjamín
Álvaro
Fabiola
Manuel
Roboam

ustedes saben por que...

Control.....	1
<i>Introducción</i>	<i>1</i>
1º.- El Control Antes de 1920	1
2º.- El Control del año 1920 a 1950.....	1
3º.- El Control del año 1950 a 1960.....	2
4º.- El Control del año 1960 a 1970.....	2
5º.- El Control del año 1970 a la fecha	2
<i>Circuitos de Control</i>	<i>6</i>
<i>Modos de Control</i>	<i>9</i>
<i>Teorías del Control Automático.....</i>	<i>10</i>
<i>Esquemas de control.....</i>	<i>12</i>
FLC.....	15
<i>Introducción.....</i>	<i>15</i>
Conceptos básicos de un controlador mediante lógica difusa.....	18
<i>Proceso de Inferencia o Razonamiento en un FLC.....</i>	<i>22</i>
Encadenamiento hacia atrás y hacia adelante.....	23
Razonamiento difuso o aproximado	23
Estructura Interna del FLC.....	23
Reglas Si...Y...Entonces.....	25
Evaluación de las Reglas.....	26
Agregación (Resolución de Conflictos).....	28
Defuzzificación.....	32
Elaboración de un FLC.....	35
<i>Descripción del modelo</i>	<i>35</i>
<i>Resultados de la Simulación del Modelo.....</i>	<i>41</i>
Aplicación de Metodologías Difusas en la Ciencia Actuarial.....	48
<i>Suscripción.....</i>	<i>48</i>
<i>Uso del valor presente actuarial difuso y aritmética difusa.....</i>	<i>49</i>
<i>Clasificación de riesgos y siniestros.....</i>	<i>51</i>
<i>Tarificación de seguro de daños.....</i>	<i>53</i>
<i>Impuestos Difusos.....</i>	<i>55</i>
<i>El futuro de los conjuntos difusos en la Ciencia Actuarial</i>	<i>55</i>
Bibliografía	56

Control

Introducción

Hablar de la evolución del control, es hablar también de la evolución de los instrumentos que ejecutan las acciones de control en los procesos industriales, ya que una acción de control específica tiene asociada una serie de instrumentos que nos ayudan a medir las *variables en el proceso*¹, a modificar los valores de dichas variables, etc. y son los que finalmente ejecutan las *acciones de control*¹.

El alcance de esta tesis se limitará a hablar de la teoría del control, i.e., describiré las leyes y las acciones de control más usuales sin sumergirme en que medios se utilizan para realizar estas acciones. Ya que se trata de diseñar un controlador de flujos de efectivo que controle las funciones de una red de cajeros automáticos; donde la medición y actualización de las variables involucradas en el proceso se realicen virtualmente en un sistema computacional, y las acciones de control, como lo es llevar dinero a algún cajero para que siga dando servicio, las ejecute forzosamente alguien.

Se puede considerar que el control automático nace en 1789 con la invención de un regulador automático para la máquina de vapor que controla la admisión de vapor, ambos inventados por James Watt, la máquina y el controlador. Desde ese año a la fecha el control automático de los procesos industriales ha pasado por las siguientes etapas:

1°.- El Control Antes de 1920

En esta etapa el control de los procesos industriales se reducía a una simple indicación local de las diferentes variables de proceso y a su corrección manual por medio del *elemento final de control*¹.

Las desventajas:

- Muy poca exactitud
- Mala calidad en los productos terminados
- Grandes dificultades en el manejo de la información
- Poca seguridad de los operadores
- Muy costoso

2°.- El Control del año 1920 a 1950

En esta etapa se desarrolla la instrumentación mecánica y neumática, permitiendo la construcción de cuartos de control adyacentes al proceso, en donde era posible centralizar los instrumentos de control y registros necesarios en el proceso.

¹ Ver Circuitos de Control, Cap. I.

Las desventajas:

- Poca exactitud en el control
- Calidad deficiente en el producto terminado
- Frecuente descalibración de la instrumentación
- Difícil *entonamiento* de controladores
- Difícil mantenimiento

3°.- El Control del año 1950 a 1960

En esta década se desarrolla la instrumentación electrónica pero con grandes limitaciones, principalmente por el tipo de componentes utilizados (bulbos), ya que entre otras cosas ocupaban gran espacio, manejaban altos voltajes, consumían mucha energía y eran frágiles.

4°.- El Control del año 1960 a 1970

En esta etapa se desarrolla la instrumentación electrónica de estado sólido (*transistores*), de tipo *analógica*, con la consecuente miniaturización del proceso por área determinada en los tableros de control.

Las desventajas:

- Problemas de *antropotecnia*
- Problemas en el alambrado
- Deficiente manejo de información
- Dificultad en el entonamiento de controladores
- Frecuente y difícil mantenimiento

5°.- El Control del año 1970 a la fecha

Desde el año 1970 se ha venido desarrollando la instrumentación electrónica de estado sólido de tipo *digital*, con las siguientes filosofías de control:

- a) Sistemas de adquisición de datos
- b) Sistemas de control supervisor de setpoint
- c) Sistemas de control digital directo
- d) Sistemas de control distribuido

a) Sistemas de adquisición de datos

Esta filosofía de control utiliza la instrumentación electrónica de tipo analógico y/o digital para el control automático del proceso y en forma paralela, las señales de los *transmisores de campo* son enviadas a los controladores (indicadores y/o registros) y a una computadora, la cual recibe en forma precisa, explícita y ordenada la información del proceso. La

computadora a su vez, entrega esta información (datos) al operador a través de convenientes *interfases* hombre-máquina, eliminando así los problemas en el manejo de la información.

Como la computadora está recibiendo las señales de proceso en forma paralela a los controladores, indicadores y/o registros, si la computadora falla no se tendrá directamente ninguna influencia sobre el proceso, ya que la computadora en este tipo de filosofía trabaja en línea en circuito abierto.

Las desventajas:

- Alto costo en la computadora
- Difícil mantenimiento de la computadora

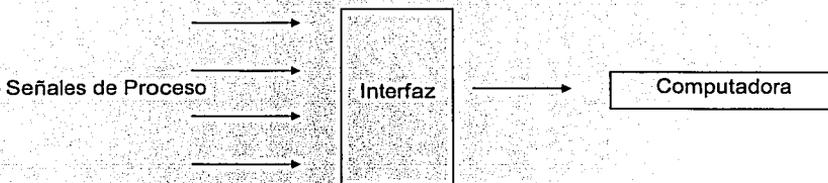


Figura 1.1 Sistema de Adquisición de Datos

b) Sistemas de control supervisorio de *setpoint*²

Esta filosofía de control utiliza la instrumentación electrónica de tipo analógico o digital, para el control automático del proceso y en forma paralela, las señales de los transmisores de campo son enviadas a los controladores y a una computadora, en la cual se encuentra el modelo matemático del proceso por medio del cual es posible determinar el valor del *setpoint* (punto de ajuste), que debe tener el controlador. Este valor de *setpoint* lo envía la computadora al controlador electrónico analógico o digital a través de convenientes interfaces.

Las desventajas:

- Alto costo de la computadora
- Difícil mantenimiento de la computadora
- Necesidad del conocimiento preciso y explícito del modelo matemático del proceso

² Ver Circuitos de Control, Cap. I.



Figura 1.2 Sistema de Control Supervisorio

c) Sistemas de control digital

En esta filosofía de control existe una computadora que realiza directamente el control automático del proceso. Es decir, en este tipo de filosofía se incorporan en la memoria de la computadora las subrutinas desempeñadas por los controladores, así como el modelo matemático del proceso.

En los sistemas de control digital directo, las señales de proceso son recibidas por la computadora a través de convenientes interfases y después de ser procesadas son enviadas a los elementos finales de control.

En este tipo de filosofía si la computadora falla se perdería el control automático de la planta, ya que la computadora se encuentra con el proceso en línea en circuito cerrado.

Las desventajas:

- Alto costo de la computadora
- Difícil mantenimiento de la computadora
- Para respaldo del sistema se requiere de una computadora adicional
- Se requiere conocer el modelo matemático del proceso

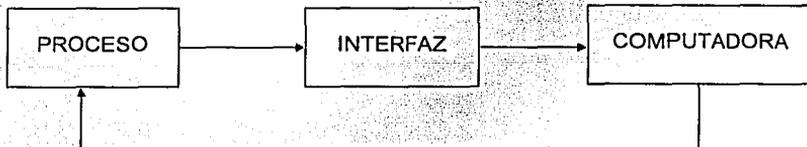


Figura 1.3 Sistema de Control Digital Directo

d) Sistemas digitales de control distribuido

En el año de 1971, con el desarrollo de nuevas tecnologías, se logra reducir el tamaño de los componentes electrónicos, alcanzando con ello la integración de cientos de transistores de una sola unidad llamada *microprocesador*.

En el año de 1976, se logra aplicar por vez primera el microprocesador al control automático de los procesos industriales, permitiendo que las computadoras hicieran mucho más, más rápidamente y a un menor costo; además, el software que estas nuevas computadoras utilizan se ha especializado a niveles insospechados, tanto que algunos cuestan muchas veces lo que el equipo que los utiliza.

Con lo anterior, las filosofías de control antes descritas se reforzaron permitiendo que algunas de sus desventajas desaparecieran y sus capacidades de controlar procesos aumentaran, abriendo paso a una nueva estrategia de control llamada *sistemas digitales de control distribuido*.

Esta nueva filosofía de control tiene las siguientes características:

- Control de Multiprocesos (300 como mínimo, ya que menos sería injustificable debido al costo de los equipos y a su capacidad de procesamiento)
- Capacidad de realizar mantenimientos Correctivos y Preventivos
- Instrumentación y Software especializados y costosos
- Procesos Analógicos y/o Digitales
- Adquisición y procesamiento de la Información del proceso de manera instantánea
- Necesidad de poco personal operativo pero muy especializado
- Espejos de información y procesamiento (computadoras y bases de datos duplicadas)
- Precisión increíblemente buena

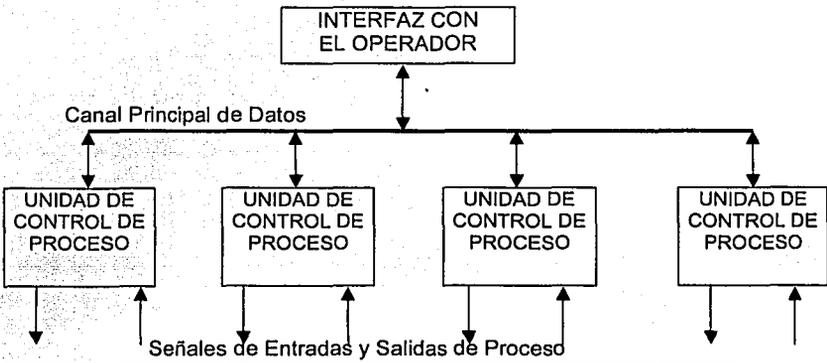


Figura 1.4 Sistema digital de control distribuido

Circuitos de Control

Los circuitos de control se clasifican en dos grandes categorías, sistemas de control en circuito abierto o abiertos y sistemas de control en circuitos cerrados.

El circuito de control abierto es aquel en el que el elemento de decisión y acción lo constituye el elemento humano, y el circuito de control cerrado es aquel en el que el elemento de decisión y acción es un dispositivo de funcionamiento automático.

La forma de diferenciar a los circuitos de control la determina la *acción de control*, la cual está determinada por el modo de control que se utilice.

El control, es una acción o conjunto de acciones, que buscan conformar o mantener una magnitud variable, o conjunto de magnitudes variables, en un patrón predeterminado.

Un circuito de control, es un arreglo de dispositivos cuya finalidad es la de mantener un proceso dado, dentro de un patrón de comportamiento predeterminado. Un circuito de control típicamente consta de un Elemento Primario de Medición o sensor; un Elemento Secundario o transmisor; un Elemento de Decisión y Acción o controlador; uno o varios Elementos Finales de Control y los dispositivos necesarios para acoplar señales.

1.- *Elemento Primario*: Es el primer Instrumento que detecta o censa el valor de la variable de proceso y cuya salida asume un estado predeterminado e inteligible que corresponde al valor de la detección. Puede estar integrado en otros elementos del circuito.

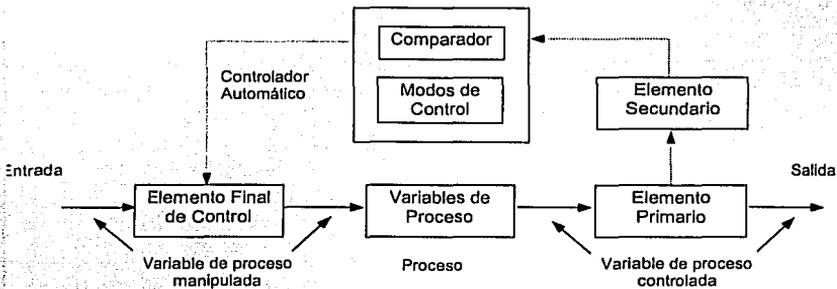


Figura 1.5 Circuito de Control

2.- *Elemento Secundario o Transmisor*: Es el dispositivo que lleva la medición de la variable de proceso tomada por el elemento primario hasta el controlador.

3.- *Controlador Automático*: Esta unidad recibe la señal enviada por el transmisor y realiza dos funciones:

- a) Compara la señal recibida por el transmisor con el punto de ajuste (valor deseado de la variable), y si existe alguna diferencia entre estas dos, genera una señal de error proporcional a la magnitud del disturbio existente en la variable de proceso.
- b) Procesa la señal de error por medio de los modos de control, los cuales generan una señal correctiva que es enviada a el elemento final de control para minimizar la desviación existente entre el valor de la variable del proceso y el punto de ajuste.

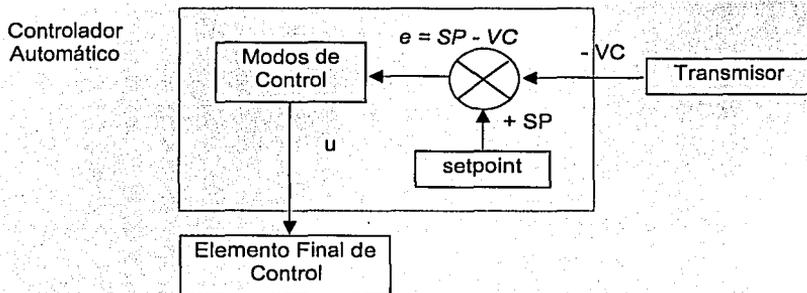


Figura 1.6 Controlador Automático

- 4.- *Elemento Final de Control*: Este elemento recibe la señal correctiva del controlador y actúa directamente sobre la variable manipulada para mantenerla en los límites deseados.
- 5.- *Variables Manipuladas*: Sobre estas magnitudes se efectúan las acciones de control. La variable manipulada puede o no ser la misma que la variable controlada.
- 6.- *Variables Controladas*: Son las magnitudes objeto del control; normalmente son las variables que se miden. Estas variables se denotan como Variable Controlada **VC** o Variable de Proceso **VP**.
- 7.- *Variables de Referencia*: Representan el patrón sobre el cual se desea fijar el resultado de las acciones de control, también conocidas como puntos de ajuste o setpoints **SP**.
- 8.- *Variables de Disturbio*: Estas variables son la razón de la aplicación de las técnicas de control sobre los procesos, ya que si no estuvieran presentes, no habría ningún cambio en las otras variables. Estas magnitudes también son conocidas como ruido. Si el ruido es de patrón definido, se le conoce como ruido rosa, si el ruido no presenta un patrón definido se le conoce como ruido blanco.

Clasificación de las Variables de Proceso

VARIABLES RELACIONADAS CON LA ENERGÍA

Temperatura
Presión y vacío
Electricidad
Sonido
Radiación

VARIABLES RELACIONADAS CON LA CANTIDAD Y EL GASTO

Flujo de fluidos
Nivel de líquidos
Peso
Velocidad

VARIABLES RELACIONADAS CON LAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS Y QUÍMICAS DEL MATERIAL

Densidad o peso específico
Humedad
Viscosidad
Composición
P.H.
etc.

9.- Unidades de Control: Son los dispositivos que realizan las acciones que permiten al proceso operar en condiciones normales, sin la intervención directa de los operadores. Debiendo tener la capacidad de comunicarse con todos los dispositivos inteligentes del sistema, así como con otras unidades de control ya sea para el almacenamiento y procesamiento de datos o para el despliegue de resultados.

Las unidades de control deberán operar al 50% de su capacidad y su número deberá estar de acuerdo con los requerimientos del proceso.

Las unidades de control deben tener la capacidad de manejar los diferentes tipos de control automático, el clásico y el moderno.

10.- Modos de Control: Son los métodos utilizados por los controladores para contrarrestar la desviación de una señal con respecto a su punto de ajuste. Se aplican a circuitos de control retroalimentados e indican la forma en que el controlador corrige las desviaciones o errores.

Los modos de control existentes son:

- De dos posiciones (si-no) (*on-off*)
- De dos posiciones con banda muerta
- Proporcional (P)
- Integral (I)
- Derivativo (D)
- Combinado

- a) Proporcional + Integral (PI)
- b) Proporcional + Derivativo (PD)
- c) Proporcional + Integral + Derivativo (PID)

La operación es de dos posiciones cuando la señal correctora solo puede tener dos valores iguales y de signo contrario. La acción será proporcional, integral, derivativa o combinada, cuando la señal correctora sea un valor proporcional, integral, derivativo o combinado de la señal de error.

Modos de Control

El circuito o dispositivo común en todos los controladores es el comparador, el cual resta el valor deseado de la variable **SP** (setpoint), del valor de la variable controlada **VC**. La diferencia constituye la señal de error del sistema, la cual es proporcional a la verdadera diferencia. **Figura 1.6.**

$$e = SP - VC \quad (1)$$

El valor deseado de la variable **SP** (setpoint) puede modificarse a voluntad en el controlador.

Todos los controladores además de presentar un tipo de acción específica (modos de control), presentan otra característica que depende de la relación existente entre la señal de medición y la señal de control. Esta acción puede ser: directa, cuando el aumento en la señal de medición produce un aumento en la señal de control; o indirecta, cuando una disminución en la señal de medición produce un aumento en la señal de control.

En el **Controlador (on-off)**, el elemento final de control adopta solo una de dos posiciones posibles, dependiendo de si la variable controlada se encuentra arriba o abajo del setpoint, estas posiciones son, generalmente, encendido o apagado. Por ejemplo, algunos postes de alumbrado público tienen un sistema que controla el encendido o apagado de estos, el cual funciona con un sensor que se activa o desactiva con la cantidad de luz que incide sobre él; otro ejemplo es el de una válvula que permanecerá completamente abierta o cerrada, permitiendo o no, el flujo de algún líquido a través de él, dependiendo de la lectura de nivel de líquido en un contenedor donde este líquido se almacena. Se suele llamar a este tipo de controlador de dos posiciones como de *todo o nada*.

El **Controlador Proporcional (P)** realiza una salida que cambia proporcionalmente con el error del sistema. La ecuación que rige al modo de control proporcional es:

$$u = K_p \cdot e \quad (2)$$

donde K_p es una constante de proporcionalidad.

El **Controlador Derivativo (D)** tiene una salida u proporcional a la derivada de su entrada, i.e.,

$$u = K_D \cdot \frac{de}{dt} \quad (3)$$

donde K_D es una constante de proporcionalidad.

El **Controlador Integral (I)** tiene una salida proporcional a la integral de su entrada e , o sea,

$$u = K_I \cdot \int e(t) dt \quad (4)$$

donde K_I es una constante de proporcionalidad.

Los **Controladores PD, PI, DI, PID** etc. son combinaciones de los controladores P, D, e I. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} u_{PD} &= K_P \cdot e + K_D \cdot \frac{de}{dt} \\ u_{PID} &= K_P \cdot e + K_D \cdot \frac{de}{dt} + K_I \int e(t) dt \end{aligned} \quad (5)$$

Teorías del Control Automático

Las Teorías del Control Automático, son modelos matemáticos que interrelacionan el comportamiento de las variables controladas de un proceso, referidas a la naturaleza de éste y a los disturbios que lo afectan, buscando su estabilidad y desempeño óptimo.

Existen varios enfoques para definir estas interrelaciones, así como existen varios tipos de modelos cuya complejidad dependerá del objetivo que se persiga con el modelado. Las principales corrientes se definen en la Teoría Clásica del Control Automático y en la Teoría Moderna del Control Automático.

La teoría clásica del control automático fue la primera en ser desarrollada, a partir de los trabajos que James Watt realizara en el siglo XVIII para el control de turbinas de vapor.

En este enfoque solo se consideran modelos con Una Entrada-Una Salida o SISO (Single Input-Single Output), que ocurren en el dominio de la frecuencia compleja.

Estas restricciones solo permiten que se manejen procesos invariables en el tiempo, relativamente lineales y con tiempos muertos moderados, lo que en general aplica para el 95% de los casos de control que se presentan en aplicaciones industriales. Su expresión matemática se conoce como ecuación PID.

El procesamiento de la ecuación PID requiere poca capacidad de cálculo, pero el ajuste de esta ecuación solo puede realizarse por métodos heurísticos o de caracterización-entonamiento, los que sí requieren de cálculos considerables, aunque normalmente no dan como resultado ajustes óptimos.

La teoría moderna del control automático se comienza a desarrollar a partir de los trabajos realizados por Winer en la Segunda Guerra Mundial, basada en la notación de estado, que se utilizaba con anterioridad en el estudio de la Mecánica Dinámica.

La notación de espacios de estado es una manera conveniente de representar sistemas de ecuaciones diferenciales de orden "n", de tal forma que sean expresadas como ecuaciones matriciales. Esto permite que los sistemas dinámicos puedan ser manipulados, transformados y estudiados mediante procedimientos sencillos de álgebra lineal.

Este enfoque dio la pauta a que se mejorara el desempeño de los *modelos matemáticos*, lo que permitió que se puedan manejar modelos de Entradas Múltiples-Salidas Múltiples o MIMO (Multiple Input-Multiple Output), que se manifiestan en el dominio del tiempo.

Estos modelos permiten que se manejen procesos variables en el tiempo, no lineales y con cualquier tiempo muerto. Por lo que en general aplica a casos de control que no se pueden manejar satisfactoriamente con la ecuación PID.

La ecuación de Estado de Control Automático, es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) - B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t)\end{aligned}\tag{6}$$

donde:

- $x(t)$ es el vector de las variables de estado (de magnitud $n \times 1$)
- $\dot{x}(t)$ es el vector derivada de $x(t)$
- $u(t)$ es el vector de las variables manipuladas (de magnitud $m \times 1$)
- $y(t)$ es el vector de las variables de salida (de magnitud $j \times 1$)
- A es la matriz de parámetros de estado (de magnitud $n \times n$)
- B es la matriz de parámetros de entrada (de magnitud $n \times m$)
- C es la matriz de parámetros de salida (de magnitud $j \times n$)

Con la finalidad de tener una analogía con otras cantidades o parámetros, se puede establecer lo siguiente:

- $x(t)$ se puede interpretar como la salida de los integradores o elementos de retraso, en un diagrama de bloques o de señales del proceso; este vector es de orden consistente con el orden del proceso dinámico
- $u(t)$ es la lista de cosas que se pueden ver o medir del proceso dinámico
- $y(t)$ es la lista de variables que son usadas para controlar o que alteran el proceso dinámico

El procesamiento de las ecuaciones de estado requiere una gran capacidad de cálculo, pero el ajuste de esta ecuación se realiza con métodos mas directos, los que normalmente proporcionan ajustes óptimos.

Se puede considerar que la Teoría Moderna del Control Automático es de carácter general, ya que la Teoría Clásica del Control Automático es un caso particular de la primera.

Esquemas de control

Control Lógico: La naturaleza de las variables controladas, en este esquema es de carácter booleano o discreto, i.e., solo presentan dos estados; existencia o no existencia, 1 o 0, si o no. La finalidad de este esquema de control es la de conformar los estados de una serie de variables booleanas con respecto a patrones o combinaciones de referencia predefinidos. Los patrones predefinidos buscan el cambio ordenado de las condiciones de operación, la detección y manejo de condiciones anormales y en caso crítico el paro ordenado de los procesos.

Control Secuencial: En este esquema de control, las variables controladas también son de naturaleza booleana, la finalidad de este tipo de control es la de permitir la ocurrencia ordenada, de determinados eventos en un orden preestablecido. En este tipo de control también se realizan acciones de control lógico, por lo que es común que se relacionen estos dos últimos esquemas como Control Lógico/Secuencial.

Control Regulatorio: En este esquema de control la variable controlada, de naturaleza continua, busca igualar a la variable de referencia (setpoint), que en la mayoría de los casos es constante. Dentro de este esquema se pueden diferenciar varios niveles los que dependerán de la complejidad de los algoritmos aplicados, así tenemos que de mayor a menor complejidad estos niveles se clasifican como Control Regulatorio Convencional, Control Avanzado, Control de Optimización y Control Gerencial.

Control Regulatorio Convencional: En este esquema de control, la variable controlada busca igualar al setpoint, que normalmente es constante o varía poco con respecto al tiempo, esto mediante la modificación de la variable manipulada. El modo de control PID define satisfactoriamente este esquema, así como combinaciones sencillas de circuitos de control. El principal objetivo de este tipo de control es estabilizar los procesos.

Control Avanzado de Procesos: El objetivo de este tipo de control es aumentar la controlabilidad de los procesos, i.e., la habilidad de los circuitos de control de manejar condiciones cambiantes en rangos cada vez más amplios, lo que en algunos casos se logra mediante la aplicación de técnicas complementarias al control PID, mientras que en otros se quiere la aplicación de técnicas relativas a la Teoría Moderna del Control Automático.

Del control avanzado de procesos, se diferencian tres niveles los que se caracterizan por su grado de complejidad matemática, que son:

- 1.- **Control Avanzado de Bajo Nivel.** Se caracteriza por utilizar recursos sencillos de procesamiento y compensación de señales y circuitos prealimentados.
- 2.- **Control Avanzado de Medio Nivel:** Utiliza técnicas más complejas para el control, requiriendo normalmente para su procesamiento de dispositivos auxiliares de cálculo, los ejemplos más comunes de este tipo de técnicas son las siguientes:

- Control Adaptativo
- Autoentonamiento
- Lógica Difusa
- Control por Restricciones
- Control Predictivo
- Modelación Estática de los Procesos
- Control Estadístico de Calidad
- Control Multivariable / Desacopladores
- Sistemas Expertos

3.- Control Avanzado de Alto Nivel: En este nivel se consideran los métodos más avanzados de control, los que para su aplicación requieren de una labor muy especializada, necesitándose el uso de procesadores de muy alta capacidad, que generalmente son microcomputadores de tipo VAX o similares. En esta clasificación se tienen las siguientes estrategias:

- Control Multivariable Predictivo
- Sistemas Neurales o Neuronales
- Integración a Gran Escala

Control de Optimización: Mientras que los objetivos del control regulatorio convencional y del control avanzado de procesos, son de carácter preponderantemente operativos (aunque con inherentes beneficios económicos), el objetivo del Control de Optimización es el de aumentar la productividad de los procesos, lo que solo se puede realizar después de haber aplicado los dos esquemas anteriores.

El tipo de modelos que se utilizan en este esquema requieren una capacidad de procesamiento muy grande, y en algunos casos información actualizada de costos de insumos, de productos y así como de políticas corporativas, ya que estos modelos hacen interactuar aspectos técnicos y económicos. Las estrategias que se clasifican dentro de este esquema son las siguientes:

- Modelación Dinámica de Procesos
- Modelación Económica
- Control de Inventarios
- Programación de la Producción
- Rutinas de Mantenimiento
- Control de la Calidad
- Asignación de Recursos

Control Gerencial: Aunque las estrategias que se incluyen en esta clasificación, se pueden considerar dentro del ámbito puramente administrativo, su estructura aún se define por los lineamientos de la Teoría del Control. El objetivo de estas estrategias es el aumento de las utilidades de los procesos, clasificándose las siguientes:

- Control de Nóminas
- Control de Personal

- Contabilidad
- Control Financiero
- Establecimiento de Políticas
- Sistemas Gerenciales de Procesamiento de Información

Control Servo o de Seguimiento: Similarmente al control regulatorio, la variable controlada de naturaleza continua, busca seguir y en su oportunidad igualar a la variable de referencia, la que en este caso es variable y generalmente en función del tiempo.

FLC

Introducción

Los fundamentos de la Teoría del Control están asociados, en general, con la Teoría del Control Matemático, desarrollada en su mayor parte después de la segunda guerra mundial; pero los principios básicos del control retroalimentado, en forma de experiencia, intuición y habilidades prácticas, han sido conocidas y utilizadas durante siglos. El periodo que siguió al controlador revolucionario retroalimentado de Watt estuvo dominado por una ingeniería formalizada y técnicas matemáticas, ignorando el hecho que la gente era perfectamente capaz de controlar satisfactoriamente los diferentes procesos tecnológicos.

El diagrama básico elemental de un sistema de control retroalimentado se presenta en la Figura 2.1

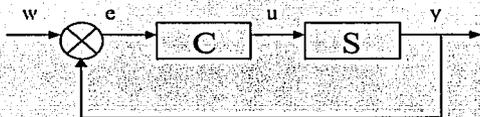


Figura 2.1 Diagrama de bloques de un sistema de control retroalimentado básico

El objeto a ser controlado se le llama sistema (planta, proceso, vehículo, etc.) se denota por S. El propósito del controlador retroalimentado es garantizar una respuesta deseada de la salida y. El proceso de mantener la salida cerca del *setpoint* (entrada de referencia) w, a pesar de la presencia de distorsiones, fluctuaciones de los parámetros del sistema y ruido, se le llama *regulación*. Las leyes que gobiernan las acciones del controlador se llaman *algoritmos de control*. La salida del controlador, C, es la acción de control u. La forma general de una ley de control es:

$$u(k) = f(e(k), e(k-1), \dots, e(k-v), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-v)) \quad (1)$$

debido a que una ley de control describe las relaciones entre la entrada y la salida del controlador. En (1), $e = w - y$ representa el error entre el *setpoint* deseado w y la salida del objeto; el parámetro v define el orden del controlador C y f es en la mayoría de los casos una función no lineal. Diferentes algoritmos de control pueden ser derivados de la ley de control (1) para diferentes valores del parámetro v y diferentes funciones f, como por ejemplo: proporcional (P), derivativo (D), integral (I), proporcional + integral (PI), proporcional + integral + derivativo (PID), y otros (Ver Modos de Control Capítulo 1). Para distinguir entre la ley de control (1) y las leyes de control utilizadas en el control mediante lógica difusa, llamaré a (1) *ley de control convencional*.

Una característica común del control convencional es que el algoritmo de control está descrito analíticamente por ecuaciones ya sea algebraicas, en diferencia, diferenciales u otras. La síntesis de tales algoritmos de control generalmente requiere de una descripción analítica formalizada del sistema controlado mediante modelos matemáticos, lo cual no siempre es una tarea fácil.

L. Zadeh introdujo la idea de formular algoritmos de control mediante reglas lógicas, aunque ya existían intentos por introducir a la lógica booleana en los algoritmos en la Teoría del Control. La principal diferencia entre estas ideas no radica en el tipo de lógica utilizada sino en la inspiración. Las ideas basadas en la lógica booleana intentaban incrementar la eficiencia de los algoritmos de control convencionales; mientras que la idea de Zadeh se basaba en la implementación del pensamiento humano en dichos algoritmos.

La realidad nos provee de numerosos ejemplos de la efectividad de los algoritmos de control basados u operados por seres humanos, por ejemplo, regular la temperatura y el flujo del agua en la regadera combinando las acciones de manipular las llaves del agua fría y la caliente; controlar la velocidad y la dirección de algún vehículo, automóvil, avión, motocicleta, barco, etc. La teoría de los conjuntos difusos ofrece las herramientas apropiadas para el manejo heurístico de los algoritmos descritos lingüísticamente.

El primer acercamiento al control difuso, originado por Mamdani y sus colaboradores, no se hizo desde el punto de vista de la Teoría del Control sino desde el punto de vista de la Inteligencia Artificial. Mamdani y otros desarrollaron el concepto de Zadeh y demostraron que las reglas lógicas con predicados imprecisos se pueden utilizar para obtener conclusiones de datos obtenidos en forma vaga. Ellos concluyeron que los algoritmos de control lingüístico se pueden usar para controlar sistemas sumamente complejos tanto técnicos como de naturaleza humana. La idea de los algoritmos de control lingüístico resultó ser una brillante generalización de la práctica humana en utilizar reglas lingüísticas con predicados imprecisos para formular acciones de control. Por ejemplo:

- Si le falta algo Entonces revisamos los objetivos "al rato".
- Si no se ve parejo Entonces mueve la figura "tantito" a tu izquierda.

Lo que nos obliga inmediatamente a preguntarnos: ¿Cuánto falta para "al rato"? y ¿Qué tanto es "tantito"?

Si le preguntamos a un grupo de personas si les gusta la música clásica obtendremos respuestas como las siguientes:

-no	-poco	-a veces
-no mucho	-algo	-más o menos
-más que menos	-mucho	-muchísimo
-bastante	-demasiado	-sí

De las respuestas anteriores, sí y no, son las respuestas que los métodos de inferencia tradicional nos permiten ingresar; si la respuesta fuera alguna de las otras, tendríamos que filtrarlas e interpretarlas para ingresar a un análisis convencional específicamente un sí o no, ya que tienen implícitas preferencias, gustos, estados de ánimo, experiencias y otros factores que están asociados directamente con el individuo que las dice

Este filtro provoca que la información recopilada esté manipulada, sobre todo en datos que presentan un valor impreciso medio, y en aquellos en donde las respuestas son contradictorias provocando que el dato se elimine o que se le asigne un solo valor, siendo que no es así.

La formalización que la Teoría de los Conjuntos Difusos hizo de estos conceptos los llevó al campo del control, utilizando como base el razonamiento aproximado (*approximate reasoning*).

El paradigma principal del control difuso es que el algoritmo de control está basado en el conocimiento (*knowledge-base algorithm*), descrito por los métodos de la Lógica Difusa. El sistema de control basado en lógica difusa es una clase de sistema experto basado en el conocimiento (*expert knowledge-base system*) que contiene el algoritmo de control en una simple base de reglas (*rule-base*). El conocimiento codificado en la base de reglas se deriva de la experiencia e intuición humana y del entendimiento teórico-práctico que de la dinámica del objeto a controlarse se tenga. Lo que hace especial y conceptualmente diferente al control difuso del control convencional, es la ausencia de una descripción analítica del sistema. La arquitectura del razonamiento aproximado convierte el conocimiento implícito en la base de reglas en un algoritmo de control preciso (no difuso), i.e. nos permite obtener una respuesta concreta a partir de información vaga.

Los sistemas complejos involucran diferentes grados y tipos de vaguedad que indudablemente representan un reto enorme para el que intenta modelarlos.

Las metodologías del control clásico se desarrollaron principalmente para ingeniería y se basan en modelos matemáticos de los objetos a ser controlados. A través de los modelos se simplifican y conceptualizan eventos en la naturaleza y en actividades de interés donde interviene el ser humano, empleando una diversidad de ecuaciones que deben ser resueltas. Sin embargo, su utilización nos obliga a preguntarnos ¿Qué tan preciso representan la realidad estos modelos?. En casos complicados, su construcción puede ser imposible. Esto es especialmente cierto en Negocios, Finanzas y Sistemas Administrativos que involucran un número considerable de factores que interactúan, algunos de naturaleza social y/o psicológica.

Los modelos basados en lógica difusa emplean conjuntos difusos para manejar y describir fenómenos imprecisos y complejos y utilizan operaciones lógicas para inferir conclusiones.

Los conjuntos difusos (en particular los números difusos) y la lógica difusa aplicados a problemas de control forman un campo de conocimientos llamado *control mediante lógica difusa* (FLC *Fuzzy Logic Controller*). Tiene que ver con problemas de control en un ambiente de incertidumbre; es muy efectivo "cuando no se requiere una precisión excesiva" y los objetos a ser controlados involucran variables medibles y estimables.

La metodología que se presenta es de naturaleza heurística y puede ser aplicada fácilmente a numerosos problemas de control en la Industria, Negocios, Finanzas y Administración. Un FLC es efectivo cuando se busca una solución aceptable; no debe utilizarse si se pretende encontrar la solución óptima precisa (la mejor). Sin embargo, es importante aclarar que en el trabajo diario es difícil determinar a que nos referimos exactamente con "lo mejor".

Los controladores mediante lógica difusa, utilizan valores lingüísticos encuadrados en reglas Si...Entonces imitando el razonamiento del juicio humano y el sentido común. Por ejemplo: *Si el ingreso anual del cliente es bajo y su patrimonio es alto, entonces su tolerancia al riesgo es moderada*. Aquí, las variables lingüísticas *ingreso anual* y *patrimonio* son *entradas*; la variable lingüística *tolerancia al riesgo* es la *salida*; *bajo*, *alto* y *moderado* son valores (*términos* o *etiquetas*) de las variables lingüísticas.

La implementación de un FLC requiere del desarrollo de una base de conocimientos la cual debe permitir la construcción de reglas Si...Entonces utilizando conjuntos difusos. Para lo anterior es importante contar con la experiencia y el conocimiento (entre otras cosas) de expertos en el área de interés. Ellos deben ser capaces de especificar el objetivo del sistema a ser controlado.

La meta del Control en la Ingeniería es una acción. Sin embargo, aquí se amplía la interpretación de acción; la cual puede ser consejo, sugerencia, instrucción, conclusión, evaluación, predicción, etc.

Conceptos básicos de un controlador mediante lógica difusa

Un controlador mediante lógica difusa (FLC) es una ley de control descrita por un sistema basado en el conocimiento consistente en reglas SI... ENTONCES con predicados vagos o imprecisos y un mecanismo de inferencia basado en lógica difusa.

Las reglas SI ... ENTONCES son la parte medular del FLC. Están formadas por reglas lógicas que describen las relaciones entre la entrada e y salida u del controlador. Por ejemplo la regla:

SI la temperatura del agua es "baja" Y el flujo del agua es "medio" ENTONCES abrir la llave del agua caliente "poco".

Podemos representar el FLC de forma similar a (1)

$$u(k) = g(e(k), e(k-1), \dots, e(k-v), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-v)) \quad (2)$$

Donde la función g , la ley de control, está descrita por una base de reglas como la anterior; sin embargo, esto no significa que el FLC sea una especie de *función de transferencia* o de ecuación diferencial.

Diferentes combinaciones de valores de $e(\cdot)$ y $u(\cdot)$ que tienen algún significado físico real, pueden ser utilizados en el FLC, como:

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1) \quad \text{el cambio en el error}$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad \text{el cambio en el control}$$

$$\sum_l e(k) = \sum_{l=1}^k e(l-1) \quad \text{la suma de los errores}$$

Un FLC típico describe las relaciones entre, el cambio en el control $\Delta u(k)$ por un lado, y el error $e(k)$ y su cambio $\Delta e(k)$ por el otro. Tal ley de control puede ser formalizada de la siguiente forma:

$$\Delta u(k) = F(e(k), \Delta e(k)) \quad (3)$$

la cual es un caso particular de (2) para $v = 1$.

El valor actual de la salida del controlador $u(k)$ se obtiene del valor de salida previo $u(k-1)$ y se actualiza con el error $\Delta u(k)$ teniendo $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$. Este tipo de controlador fue sugerido por Mamdani y Assilian en 1975.

Un ejemplo de base de reglas que describe la ley de control (3) se muestra en la tabla 2.1 para un FLC simple.

Tabla 2.1 Ejemplo de base de reglas de un FLC simple

-
- 1.- SI el error $e(k)$ es *positivo* Y el cambio del error $\Delta e(k)$ es *aproximadamente cero*
ENTONCES el cambio del control $\Delta u(k)$ es *positivo*
ADEMÁS
 - 2.- SI el error $e(k)$ es *negativo* Y el cambio del error $\Delta e(k)$ es *aproximadamente cero*
ENTONCES el cambio del control $\Delta u(k)$ es *negativo*
ADEMÁS
 - 3.- SI el error $e(k)$ es *aproximadamente cero* Y el cambio del error $\Delta e(k)$ es *aproximadamente cero*
ENTONCES el cambio del control $\Delta u(k)$ es *aproximadamente cero*
ADEMÁS
 - 4.- SI el error $e(k)$ es *aproximadamente cero* Y el cambio del error $\Delta e(k)$ es *positivo*
ENTONCES el cambio del control $\Delta u(k)$ es *positivo*
ADEMÁS
 - 5.- SI el error $e(k)$ es *aproximadamente cero* Y el cambio del error $\Delta e(k)$ es *negativo*
ENTONCES el cambio del control $\Delta u(k)$ es *negativo*
-

Cada una de las reglas del FLC cuenta con una parte **SI**, llamada antecedente, y otra parte **ENTONCES**, llamada consecuente. El antecedente de la regla contiene el conjunto de condiciones que se deben cumplir para que se ejecute la acción o conclusión que se encuentra en el consecuente. El FLC es un sistema que tiene como entrada las variables contenidas en el antecedente de las reglas, y como salida, la variable que se encuentra en el consecuente.¹ Llamaremos al error $e(k)$ y a su cambio $\Delta e(k)$ las entradas, y al cambio en el control $\Delta u(k)$, la salida del FLC representado por (3).

¹ En este caso se trata de un sistema con 2 entradas y 1 salida; pero se podría construir un sistema mas general MIMO (multiple inputs multiple outputs) de múltiples entradas y múltiples salidas o uno SISO (simple input simple output) de una entrada y una salida.

Nótese que las entradas y las salidas del FLC son las variables antecedente y consecuente de las reglas en la base, las cuales están asociadas con la estructura interna del FLC (Figura 2.2).

Obsérvese que las reglas de la Tabla 2.1 tienen valores lingüísticos en la entrada y en la salida del FLC; en general estas variables son imprecisas y cualitativas, por ejemplo "el error $e(k)$ es *aproximadamente cero*" y "el cambio del control $\Delta u(k)$ es *positivo*". Su finalidad es describir cualitativamente la ley que gobierna el FLC. Los valores lingüísticos se representan por conjuntos difusos; el conjunto de valores lingüísticos de una variable forma un *conjunto de términos*.

Los conjuntos difusos de referencia se definen sobre universos de discusión que están determinados por los rangos operativos de las variables respectivas. Consecuentemente los conjuntos difusos de referencia relativos a un conjunto de términos deberán estar definidos en el mismo universo o dominio.

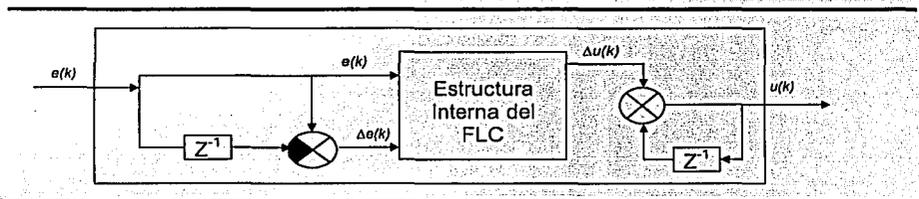


Figura 2.2 Posición de la Estructura Interna del FLC en un sistema de control. Las entradas y salidas del FLC son los estados (o un subconjunto de los estados) del sistema controlado; por lo que el FLC es una especie de controlador de variable de estado gobernado por un conjunto de reglas y un mecanismo de inferencia difuso.

La figura 2.3 muestra las funciones de membresía de los tres conjuntos difusos de referencia representando los valores lingüísticos del error e : *positivo*, *aproximadamente cero* y *negativo*. Estos valores lingüísticos forman el conjunto de términos de la variable error. El rango operativo del error se presenta en el intervalo $[-1, 1]$.

La construcción o formulación de un algoritmo de control de esta forma, nos permite implementar estrategias heurísticas, definidas por afirmaciones descritas lingüísticamente. El algoritmo de control difuso refleja el mecanismo de control implementado por personas, sin utilizar ningún conocimiento formalizado en forma de modelos matemáticos ni tampoco una descripción analítica del algoritmo, acerca del objeto a ser controlado. Aunque el algoritmo presentado como ejemplo es muy simple, es evidente pensar que no puede dar solución a problemas de control muy sofisticados; para lograrlo, necesitamos conocimiento suficiente del objeto y por lo tanto una base de reglas mucho más detallada, para tener una descripción mas completa de la estrategia de control a seguir.

Una fuente adecuada y directa para la formulación de estrategias de control, es el conocimiento y la experiencia que del objeto tenga un ser humano, ya que él, puede describir

el modelo del sistema de control que en esencia se busca, aunque desde su muy particular punto de vista.

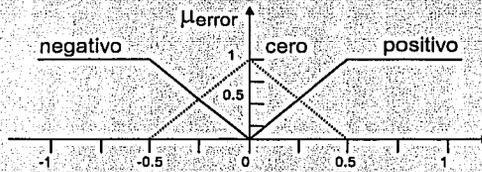


Figura 2.3 Funciones de membresía de los conjuntos difusos que representan los valores lingüísticos *positivo*, *aproximadamente cero* y *negativo*

La base de reglas de la Tabla 2.1 puede ser mejorada significativamente si consideramos afirmaciones lógicas más detalladas, i.e. podemos hacer un refinamiento de los valores lingüísticos que describe cada variable del FLC sobre su mismo universo de definición, lo que se traduce en incrementar el número de elementos que constituyen cada conjunto de términos de cada variable. Así por ejemplo, si en vez de contar con tres elementos en el conjunto de términos de cada variable de entrada y salida del FLC planteado anteriormente, lo incrementamos a siete elementos, estaremos realizando un refinamiento del universo de definición de cada variable $[-1, 1]$ en este caso) obteniendo una mejor descripción de cada variable (Tabla 2.2). Además, nos permite manejar información contradictoria sin riesgo a inferir algo incorrecto.

Los siete elementos del conjunto de términos de las variables $e(k)$, $\Delta e(k)$ y $\Delta u(k)$ ahora son *positivo grande* (PG), *positivo medio* (PM), *positivo pequeño* (PP), *aproximadamente cero* (Z), *negativo pequeño* (NP), *negativo medio* (NM) y *negativo grande* (NG). Las funciones de membresía relativos a los conjuntos difusos de referencia se presentan en la Figura 2.4.

El procedimiento anterior no ofrece solo ventajas, ya que la descripción de las variables que intervienen en el sistema se agudiza, lo que provoca que para cada valor particular de una variable, por ejemplo x_0 , se tengan dos o tres valores disponibles en los valores lingüísticos de referencia para obtener una inferencia posterior, i.e. se incrementa la información de las variables al igual que se complica el modelo; el tipo de inferencia que se utilice determinará si los resultados obtenidos son diferentes, ya que hablar de complicar la inferencia no tiene sentido ya que el proceso es automático en una computadora.

La forma del FLC nos hace preguntarnos ¿Cómo implementar un FLC en la práctica, dada su considerable diferencia con la formulación de los algoritmos de control clásico?. Es decir, ¿Cómo calcular la salida de la base de reglas suponiendo que tenemos algunos valores de las variables de entrada?. En lo siguiente discutiré algunos aspectos importantes relacionados con el mecanismo de inferencia de un FLC.

Tabla 2.2 Base de reglas mejorada de un FLC simple

1.- SI $e(k)$ es PG Y $\Delta e(k)$ es Z ENTONCES $\Delta u(k)$ es PG SI $e(k)$ es PM Y $\Delta e(k)$ es Z ENTONCES $\Delta u(k)$ es PM SI $e(k)$ es PP Y $\Delta e(k)$ es Z ENTONCES $\Delta u(k)$ es PP	ADEMÁS ADEMÁS ADEMÁS
2.- SI $e(k)$ es NG Y $\Delta e(k)$ es Z ENTONCES $\Delta u(k)$ es NG SI $e(k)$ es NM Y $\Delta e(k)$ es Z ENTONCES $\Delta u(k)$ es NM SI $e(k)$ es NP Y $\Delta e(k)$ es Z ENTONCES $\Delta u(k)$ es NP	ADEMÁS ADEMÁS ADEMÁS
3.- SI $e(k)$ es Z Y $\Delta e(k)$ es Z ENTONCES $\Delta u(k)$ es Z	ADEMÁS
4.- SI $e(k)$ es Z Y $\Delta e(k)$ es PG ENTONCES $\Delta u(k)$ es PG SI $e(k)$ es Z Y $\Delta e(k)$ es PM ENTONCES $\Delta u(k)$ es PM SI $e(k)$ es Z Y $\Delta e(k)$ es PP ENTONCES $\Delta u(k)$ es PP	ADEMÁS ADEMÁS ADEMÁS
5.- SI $e(k)$ es Z Y $\Delta e(k)$ es NP ENTONCES $\Delta u(k)$ es NP SI $e(k)$ es Z Y $\Delta e(k)$ es NM ENTONCES $\Delta u(k)$ es NM SI $e(k)$ es Z Y $\Delta e(k)$ es NG ENTONCES $\Delta u(k)$ es NG	ADEMÁS ADEMÁS

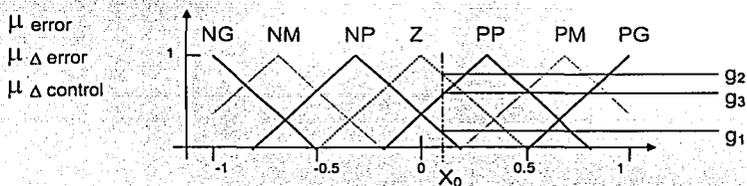


Figura 2.4 Funciones de membresía de los conjuntos difusos que representan los valores lingüísticos *positivo grande* (PG), *positivo medio* (PM), *positivo pequeño* (PP), *aproximadamente cero* (Z), *negativo pequeño* (NP), *negativo medio* (NM) y *negativo grande* (NG). Nótese que x_0 toma valores Negativos, Aproximadamente Cero y Positivos al mismo tiempo, g_1 , g_2 y g_3 respectivamente

Proceso de Inferencia o Razonamiento en un FLC

Como he dicho, un FLC puede verse como una relación funcional de alta complejidad entre variables relevantes. Además, la forma utilizada para representar esta relación involucra el uso de reglas que presentan predicados imprecisos. La colección de estas reglas se llama

base de conocimientos asociada con el FLC. Usaré el término *razonamiento* para indicar el proceso mediante el cual, dados valores de las variables de entrada, variables antecedentes, en conjunción con la base de conocimientos, se obtiene el valor de la salida, consecuente.

Encadenamiento hacia atrás y hacia adelante

Existen dos tipos principales de mecanismos de razonamiento en un sistema experto convencional o en un sistema basado en el conocimiento: el encadenamiento hacia atrás y hacia adelante. En el encadenamiento hacia atrás, el mecanismo de razonamiento se presenta como una meta y se trata de encontrar todos los procesos necesarios y suficientes para llegar a esa meta. Entonces por ejemplo: dado un radio transmisor averiado, y sus síntomas observados (estática, sin luz de encendido, antena rota, etc.), ¿Cuáles serían las causas probables de la falla y cuáles las medidas a seguir para reparar la avería?. En el encadenamiento hacia adelante, se intenta reunir datos y construir a partir de éstos un estado sostenible de un problema y eventualmente, un estado de solución. Por lo tanto, dadas una serie de tareas, su requerimiento de recursos, orden de precedencia y costos, un sistema de encadenamiento hacia adelante construiría una agenda viable o una orden de envío de costo mínimo, o una red de proyectos para trabajar.

El encadenamiento hacia atrás y hacia adelante constituyen las dos formas principales de inferencia utilizados en sistemas inteligentes. Juntos proveen de las herramientas necesarias para construir sistemas que puedan conducir a un diagnóstico profundo, evaluación de políticas múltiples, administración de proyectos, asignación de recursos, planeación de la producción, planeación de requerimientos de material, y programación de tareas en general.

Razonamiento difuso o aproximado

Un tercer tipo de razonamiento lo constituye el razonamiento difuso o aproximado, que combina la representación del conocimiento por medio de reglas así como conjuntos difusos. Los sistemas de razonamiento aproximado funcionan con información ambigua e imprecisa y el procesamiento de las reglas se realiza en paralelo en forma efectiva. Toda variable de solución es resuelta acumulando evidencia a favor o en contra de su valor posible. Cada regla contribuye a la forma final de la variable de solución. Cuando todas las reglas han sido activadas, los conjuntos difusos resultantes representando cada una de las variables de salida son *defuzzificados*² para encontrar un valor esperado. Este valor está basado en evidencia preponderante.

Un diagrama de bloques que describe el proceso de control se muestra en la figura 2.5. El significado de cada bloque se explica a continuación.

Estructura Interna del FLC

Los problemas de control tienen entradas y salidas consideradas como variables lingüísticas.

² Ver Agregación (Resolución de Conflictos) y Defuzzificación, más adelante en éste capítulo.

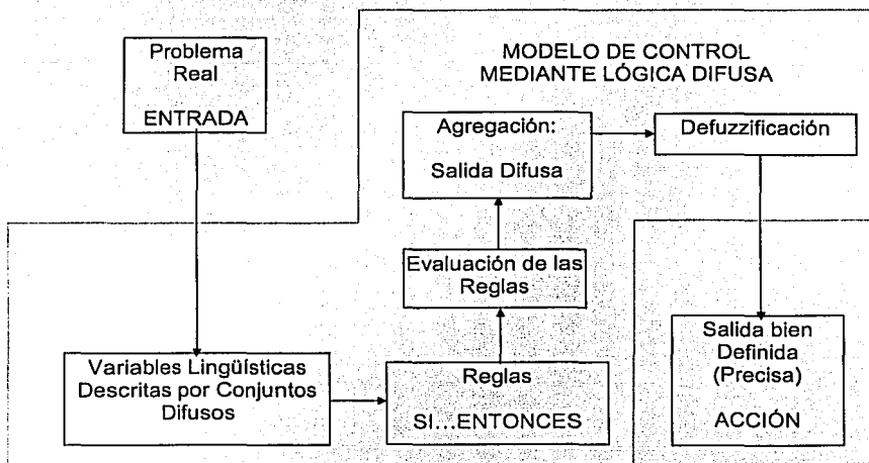


Figura 2.5 Diagrama de bloques de un proceso de control mediante lógica difusa

Aquí se presenta un ejemplo de FLC de un sistema con dos entradas A , B y una salida C . Lo mismo puede extenderse para más entradas y salidas. Puede ser utilizado también para una entrada y una salida.

Las variables lingüísticas se modelan por conjuntos difusos A , B , C , las cuales pueden tomar cierto número de valores o términos A_i , B_j , C_k :

$$\begin{aligned}
 A &= \{A_1, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n\}, \\
 B &= \{B_1, \dots, B_j, B_{j+1}, \dots, B_m\}, \\
 C &= \{C_1, \dots, C_k, C_{k+1}, \dots, C_s\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Los términos A_i , B_j y C_k son conjuntos difusos definidos como:

$$\begin{aligned}
 A_i &= \{(x, \mu_{A_i}(x)) / x \in A_i \subset U_1\} \\
 B_j &= \{(y, \mu_{B_j}(y)) / y \in B_j \subset U_2\} \\
 C_k &= \{(z, \mu_{C_k}(z)) / z \in C_k \subset U_3\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

El diseño de los conjuntos (5) requiere:

- i. Determinación de los conjuntos universales U_1, U_2, U_3 (dominios de operación) de las variables base x, y, z , para las variables lingüísticas descritas por A, B y C .
- ii. Selección de las formas, picos y valles de las funciones de membresía de A_i, B_j, C_k (los términos). En general se utilizan las formas de campana, triangular y trapezoidal para representar las funciones de membresía (o parte de estas), en la mayoría de los casos son números difusos.
- iii. Especificar el número de valores (términos) en (4), i.e., los números n, m y s . Usualmente se usan números (enteros) entre 2 y 7^3 .
- iv. Especificar los intervalos de definición (dominios) para cada valor (término) A_i, B_j, C_k .

En el capítulo 3, se describe un método para construir conjuntos difusos.

Reglas Si...Y...Entonces

El siguiente paso es dar de alta (construir) las reglas de inferencia SI...ENTONCES, también llamadas *reglas de control* o *reglas de producción*.

El número de reglas es nm , el producto del número de términos en cada variable lingüística de entrada A y B (véase (4))⁴. Las reglas se diseñan para producir o tener como conclusión $s < nm$ diferentes salidas (s es el número de términos de la variable de salida C).

Las reglas con las salidas difusas posibles, con etiqueta C_j , se presentan simbólicamente en una matriz de $n \times m$ (Tabla 2.3) llamada tabla de decisión, donde $C_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, son elementos del conjunto $\{C_1, \dots, C_s\}$ solo que con otro nombre.

Las reglas de la tabla 2.3 se leen:

$$\text{Si } x \text{ está en } A_i \text{ Y } y \text{ está en } B_j \text{ Entonces } z \text{ está en } C_j \quad (6)$$

donde C_j es alguno de los elementos del conjunto $\{C_1, \dots, C_s\}$ solo que renombrado.

Sean

$$p_i = x \text{ está en } A_i, \quad q_j = y \text{ está en } B_j, \quad r_k = r_{ij} = z \text{ está en } C_j$$

ahora se puede escribir (6) como

$$\text{Si } p_i \text{ Y } q_j \text{ Entonces } r_{ij} \quad (7)$$

El antecedente de (6) y (7), que es la parte que une la conjunción $Y (p_i \text{ Y } q_j)$, se define como una agregación de tipo Y o una intersección difusa (entre conjuntos difusos). Es una relación difusa en $A \times B \subseteq U_1 \times U_2$ con función de membresía

³ Un solo término, sería útil si pudiéramos comparar si se tiene o no ese valor; y mas de siete, resultaría inusual aunque no imposible, ya que manejar mas de siete valores o modificadores de un término lingüístico no se usa.

⁴ Podemos considerar más de dos entradas (pero una sola salida), digamos por ejemplo tres entradas con sus términos correspondientes n, m y p . Por lo tanto tendremos $n \times m \times p$ reglas del tipo SI ... Y ... Y ... Entonces.

$$p_i \wedge q_j = \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(y)), \quad (x, y) \in A \times B \subset U_1 \times U_2 \quad (8)$$

Tabla 2.3 Tabla de decisión: Reglas Si ... Y ... Entonces

	B_1	...	B_j	B_{j+1}	...	B_m
A_1	C_{11}	...	C_{1j}	$C_{1,j+1}$...	$C_{1,m}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
A_j	C_{j1}	...	C_{jj}	$C_{j,j+1}$...	$C_{j,m}$
A_{j+1}	$C_{j+1,1}$...	$C_{j+1,j}$	$C_{j+1,j+1}$...	$C_{j+1,m}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
A_n	C_{n1}	...	C_{nj}	$C_{n,j+1}$...	C_{nm}

La regla de inferencia (7) es una implicación. Expresa el grado de veracidad del antecedente de la regla. Existen muchas formas de representar la implicación, pero para efectos de esta tesis se usará el propuesto por Mamdani, que expresa la inferencia de una regla por medio del operador \wedge (min); a r_k se le llama el consecuente de la regla. Por lo tanto (7) puede expresarse de la forma siguiente

$$p_i \wedge q_j \wedge r_k = \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(y), \mu_{C_{ij}}(z)), \quad r_k = r_{ij} \quad (9)$$

$$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, s; y (x, y, z) \in A \times B \times C \subset U_1 \times U_2 \times U_3$$

Esta representación proporciona el grado de veracidad de la regla que es el resultado de la operación min sobre las funciones de membresía de los conjuntos difusos A , B y C .

Evaluación de las Reglas

Si las entradas del FLC son $x = x_0$ y $y = y_0$, entonces se debe encontrar su correspondiente salida z . A los números reales x_0 y y_0 se les llama *lecturas*; pueden obtenerse midiendo, observando, estimando, etc. Para que las lecturas puedan ser introducidas al modelo difuso, estas deben ser transformadas a los valores (términos) adecuados de las variables lingüísticas correspondientes.

Cada lectura debe ser comparada contra la función de membresía apropiada que represente el o los términos de la variable lingüística. La comparación es necesaria debido a que los valores de las variables lingüísticas no son mutuamente exclusivos, i.e., sus dominios se traslapan, a cada lectura le puede corresponder uno o más valores o términos; esto se llama *codificar las entradas*.

Esto se ilustra en la figura 2.6 donde a la lectura $x_0 \in U_1$ le corresponden dos valores constantes $\mu_{A_i}(x_0)$ y $\mu_{A_{i+1}}(x_0)$ llamados *lecturas difusas de entrada*. Pueden ser interpretadas como los valores de verdad de x_0 relativos a A_i y A_{i+1} .

De la misma forma se pueden obtener las lecturas difusas de entrada correspondientes a la lectura $y_0 \in U_2$ (figura 2.7). En ambos casos solo se presentan algunos términos de los conjuntos difusos A y B.

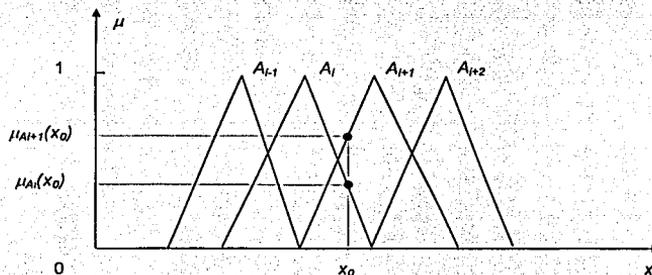


Figura 2.6. Lecturas difusas de entrada correspondientes a la lectura x_0

La línea recta que pasa por x_0 paralela al eje μ , intersecta solo los valores A_i y A_{i+1} de A en la figura 2.6, reduciendo con esto los términos difusos a *valores singulares bien definidos*⁵ denotados por $\mu_{A_{i+1}}(x_0)$ y $\mu_{A_i}(x_0)$. La línea $x = x_0$ no intersecta el resto de los términos, por lo que la intersección es el conjunto vacío con función de membresía 0. Similarmente, la línea que atraviesa y_0 intersecta solo los valores B_j y B_{j+1} de B (figura 2.7) que proporciona los singulares $\mu_{B_{j+1}}(y_0)$ y $\mu_{B_j}(y_0)$.

En un sentido más general, cuando las medidas tomadas por un sensor se encuentren contaminadas por ruido, se puede pensar que éstas son conjuntos difusos con función de membresía triangular. La función de membresía se construye a partir de la densidad de probabilidad del ruido; el vértice del triángulo será dependiente de la media de la distribución y la base del triángulo de la desviación estándar.

Si las variables de entrada toman valores difusos, esto es $U_1 = A_1$ y $U_2 = A_2$, donde A_1 y A_2 son subconjuntos difusos de los universos X_1 y X_2 , entonces la medida de apareamiento entre el valor difuso A_1 y el valor lingüístico B_{j1} se obtiene de la posibilidad condicional $Poss(B_{j1}|A_1) = \text{Max}_{x_1} (B_{j1} \wedge A_1(x_1))$ en lugar del grado de membresía. Similarmente, para la segunda variable de entrada utilizamos $Poss(B_{j2}|A_2) = \text{Max}_{x_2} (B_{j2} \wedge A_2(x_2))$. El nivel de activación en este caso será:

$$\tau_j = Poss(B_{j1}|A_1) \wedge Poss(B_{j2}|A_2) \quad (10)$$

⁵ El término utilizado en inglés es SINGLETONS, aquí se usará SINGULARES.

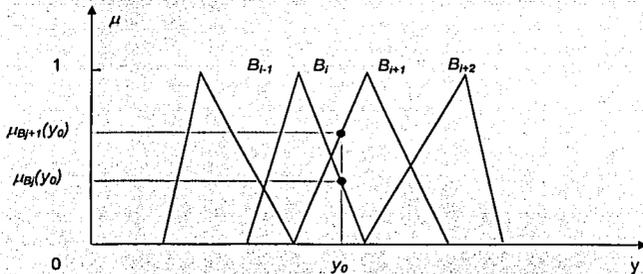


Figura 2.7 Lecturas difusas de entrada correspondientes a la lectura y_0

Ambas expresiones (5) y (10) para el cálculo del nivel de activación para valores de entrada precisos y difusos se ilustran en la figura 2.8.

La tabla de decisión (Tabla 2.3) con $x = x_0$ y $y = y_0$, y los términos sustituidos por sus funciones de membresía, se reduce a la tabla 2.4; llamada *tabla de decisión inducida*.

Tabla 2.4 Tabla de decisión inducida y celdas activas

	0	...	$\mu_{B_i}(y_0)$	$\mu_{B_{i+1}}(y_0)$...	0
0	0	...	0	0	...	0
:	:		:	:		:
$\mu_{A_i}(x_0)$	0	...	$\mu_{C_{ij}}(z)$	$\mu_{C_{i+1,j}}(z)$...	0
$\mu_{A_{i+1}}(x_0)$	0	...	$\mu_{C_{i+1,j}}(z)$	$\mu_{C_{i+1,j+1}}(z)$...	0
:	:		:	:		:
0	0	...	0	0	...	0

Solo cuatro celdas contienen términos diferentes de cero (celdas activas). Si para $x = x_0$ y $y = y_0$ al menos una de las funciones de membresía es cero, el operador min produce cero como resultado.

Agregación (Resolución de Conflictos)

La agregación o resolución de conflictos, es la metodología que se utiliza para decidir que acción de control es la que se seguirá como resultado de la activación de varias reglas.

La tabla 2.4 muestra que solo se activaron cuatro reglas, el resto no producirá ningún resultado.

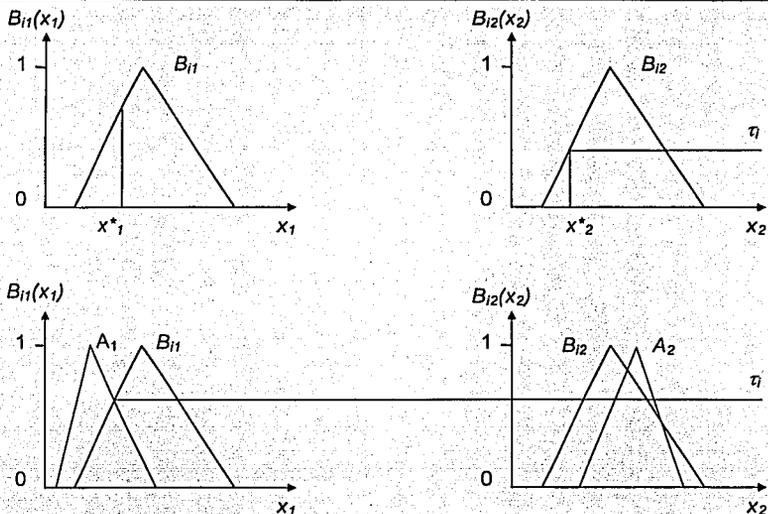


Figura 2.8

A continuación se ilustra el proceso de resolución de conflictos utilizando las cuatro reglas activadas de la tabla 2.4 numeradas por conveniencia de la uno a la cuatro; estas reglas forman un subconjunto de (10) :

Regla 1.- Si x está en $A_i^{(0)}$ Y y está en $B_j^{(0)}$ Entonces z está en C_{ij}

Regla 2.- Si x está en $A_i^{(0)}$ Y y está en $B_{j+1}^{(0)}$ Entonces z está en C_{ij+1}

Regla 3.- Si x está en $A_{i+1}^{(0)}$ Y y está en $B_j^{(0)}$ Entonces z está en $C_{i+1,j}$

Regla 4.- Si x está en $A_{i+1}^{(0)}$ Y y está en $B_{j+1}^{(0)}$ Entonces z está en $C_{i+1,j+1}$

El antecedente de cada regla, también llamado *nivel de activación*, se denota por

$$\tau_{ij} = \mu_{A_i}(x_0) \wedge \mu_{B_j}(y_0) = \min(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_j}(y_0))$$

$$\tau_{ij+1} = \mu_{A_i}(x_0) \wedge \mu_{B_{j+1}}(y_0) = \min(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_{j+1}}(y_0))$$

(11)

$$\tau_{i+1,j} = \mu_{Ai+1}(x_0) \wedge \mu_{Bj}(y_0) = \min(\mu_{Ai+1}(x_0), \mu_{Bj}(y_0))$$

$$\tau_{i+1,j+1} = \mu_{Ai+1}(x_0) \wedge \mu_{Bj+1}(y_0) = \min(\mu_{Ai+1}(x_0), \mu_{Bj+1}(y_0))$$

Las igualdades (11) se obtienen de (8) para $x = x_0$ y $y = y_0$. Los números reales τ_{ij} , $\tau_{i,j+1}$, $\tau_{i+1,j}$ y $\tau_{i+1,j+1}$ se muestran en la tabla 2.5.

Tabla 2.5 Tabla de niveles de activación de reglas

	0	...	$\mu_{Bj}(y_0)$	$\mu_{Bj+1}(y_0)$...	0
0	0	...	0	0	...	0
:	:		:	:		:
$\mu_{Ai}(x_0)$	0	...	τ_{ij}	$\tau_{i,j+1}$...	0
$\mu_{Ai+1}(x_0)$	0	...	$\tau_{i+1,j}$	$\tau_{i+1,j+1}$...	0
:	:		:	:		:
0	0	...	0	0	...	0

La tabla 2.5 es similar a la tabla 2.4 con la diferencia que las celdas activas en la primera están ocupadas por los niveles de activación de cada regla activada, mientras que en la segunda las mismas celdas están ocupadas por conjuntos difusos (salidas). Ahora se utilizan las celdas activas en ambas tablas para introducir el concepto de *salida de control*.

La salida de control (SC) de cada regla se define como la conjunción del nivel de activación y el consecuente de cada regla.

SC de la Regla 1.- $\tau_{ij} \wedge \mu_{Cij}(z) = \min(\tau_{ij}, \mu_{Cij}(z))$

SC de la Regla 2.- $\tau_{i,j+1} \wedge \mu_{Cij+1}(z) = \min(\tau_{i,j+1}, \mu_{Cij+1}(z))$ (12)

SC de la Regla 3.- $\tau_{i+1,j} \wedge \mu_{Ci+1,j}(z) = \min(\tau_{i+1,j}, \mu_{Ci+1,j}(z))$

SC de la Regla 4.- $\tau_{i+1,j+1} \wedge \mu_{Ci+1,j+1}(z) = \min(\tau_{i+1,j+1}, \mu_{Ci+1,j+1}(z))$

Las SC se pueden obtener a partir de (9) para $x = x_0$ y $y = y_0$. Esto es equivalente a realizar una conjunción u operación min entre los elementos correspondientes de las tablas 2.4 y 2.5 como se muestra en la tabla 2.6.

Las celdas no activas tienen elementos cero; no se presentan en la tabla 2.6.

Las salidas de las cuatro reglas (12) localizadas en las celdas activas de la tabla 2.6, deben ser agregadas o combinadas con la finalidad de obtener una sola acción de control con función de membresía $\mu_{col}(z)$. La operación utilizada para la combinación de las salidas de control individuales es la unión de conjuntos difusos \vee expresado por el operador max.

Tabla 2.6 Salidas de control de las reglas 1-4

...
...	$\tau_{ij} \wedge \mu_{Cij}(z)$	$\tau_{i,j+1} \wedge \mu_{Cij+1}(z)$...
...	$\tau_{i+1,j} \wedge \mu_{Cj+1,j}(z)$	$\tau_{i+1,j+1} \wedge \mu_{Cj+1,j+1}(z)$...
...

$$\begin{aligned} \mu_{oi}(z) &= (\tau_{ij} \wedge \mu_{Cij}(z)) \vee (\tau_{i,j+1} \wedge \mu_{Cij+1}(z)) \vee \\ &\vee (\tau_{i+1,j} \wedge \mu_{Cj+1,j}(z)) \vee (\tau_{i+1,j+1} \wedge \mu_{Cj+1,j+1}(z)) \\ &= \max\{(\tau_{ij} \wedge \mu_{Cij}(z)), (\tau_{i,j+1} \wedge \mu_{Cij+1}(z)), \\ &(\tau_{i+1,j} \wedge \mu_{Cj+1,j}(z)), (\tau_{i+1,j+1} \wedge \mu_{Cj+1,j+1}(z))\} \end{aligned} \quad (13)$$

Nótese que en (12) y (13) la operación \wedge (min) se realiza entre un número y una función de membresía de un conjunto difuso. Esta operación es fácilmente realizable entre dos números (axiomas de orden), entre dos conjuntos normales (intersección de conjuntos), y entre dos conjuntos difusos, por lo que la siguiente explicación se vuelve necesaria.

Suponga que se cuenta con el número real α y el conjunto difuso C con función de membresía $\mu_C(z)$. Entonces se define

$$\mu_{\alpha, \mu_C}(z) = \alpha \wedge \mu_C(z) = \min(\mu_\alpha(z) = \alpha, \mu_C(z)) \quad (14)$$

donde $\mu_\alpha(z) = \alpha$ es una línea recta paralela al eje z ; geoméricamente esto representa un truncamiento de la curva $\mu_C(z)$.

La función de membresía (14) se muestra en la figura 2.9 para las dos formas más usuales de $\mu_C(z)$, triangular y trapezoidal; la figura representa un número difuso no normalizado (el máximo valor de su función de membresía puede no ser uno).

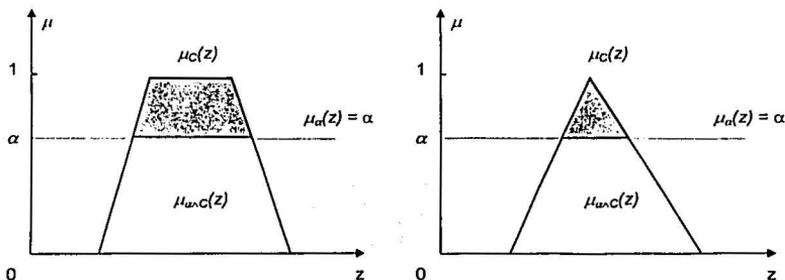


Figura 2.9 Números difusos no normalizados



La función de membresía (13) también representa un conjunto difuso no normalizado formado de partes de funciones de membresía no normalizadas del tipo de la figura 2.9. Puede pensarse como una agregación ponderada de los consecuentes de cada regla, donde los pesos los determinan los niveles de activación (relevancia) de cada regla.

De acuerdo con el contexto y la aplicación que se desee desarrollar, es posible que la salida del FLC como un conjunto difuso sea adecuada, como en (13), o que por el contrario, necesitemos un valor preciso único que sea la salida del sistema controlado, como normalmente ocurrirá. Para obtener una sola acción o decisión de control de salida debemos resumir $\mu_{tot}(z)$; a este proceso se le llama **defuzzificación**.

Para ejemplificar lo anterior, imagine que no cuenta con un reloj a la mano y requiere saber que hora es, así que decide preguntar la hora a alguien que pase cerca de usted. Tras haber preguntado, obtiene la respuesta "las tres".

De la enorme gama de posibles reacciones que usted tendrá al escuchar la respuesta, por el momento solo nos interesan dos. La primera, es que entienda que son exactamente las tres horas con cero minutos (figura 2.10a); la segunda, es que sean alrededor de las tres (figura 2.10b), si esto último ocurre y usted entra a trabajar a las tres en punto (3:00) quizás le interesará saber si todavía tiene unos minutos o si ya llegó tarde y pregunte otra cosa, si no, puede que con esa respuesta sea suficiente.

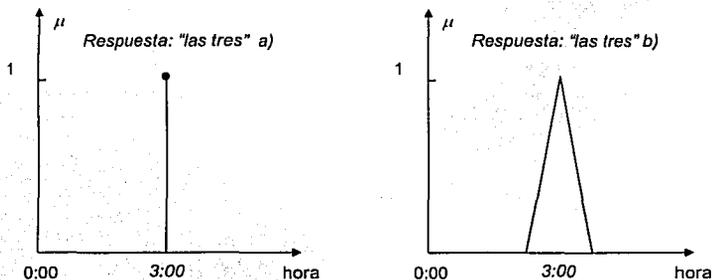


Figura 2.10 ¿Qué hora es? R. Las tres.

Defuzzificación

El conjunto (13), indica el nivel de certeza con que cada valor de su dominio puede ser una buena salida de la base de reglas para una entrada en particular. El algoritmo de defuzzificación utiliza $\mu_{tot}(z)$ para seleccionar el mejor valor de salida y^* del FLC.

El problema de *defuzzificar* aparece también como parte medular en el proceso de toma de decisiones basadas en conjuntos difusos. En este caso tenemos un conjunto de alternativas A y un subconjunto difuso S sobre A indicando el grado en que cada alternativa satisface el criterio de decisión y las metas. El problema que se describe en este apartado, define la estrategia de utilizar S para seleccionar un elemento de A que sea representativo.

Las formas más usuales de realizar la defuzzificación de un conjunto difuso son:

- Calcular la media de los valores máximos de la función de membresía asociada al conjunto difuso (*Mean of Maxima, MOM*)
- Calcular el centro de masa de la función de membresía asociada al conjunto difuso (*Center of Area, COA*)

Yager y Filev, visualizan el problema como si se tratase de seleccionar un elemento a partir de un subconjunto difuso (figura 2.11). El problema de selección consiste en convertir el conjunto difuso en una densidad de probabilidades y utilizar esta última para seleccionar el valor defuzzificado. La selección se realiza mediante alguno de dos procedimientos:

- S_1 Experimento aleatorio
- S_2 Calculando el valor esperado de la distribución

S_1 : Muestrear una Distribución Uniforme Continua en $[0, 1]$ y obtener $r \in [0, 1]$. Posteriormente evaluar en r la inversa de la función de distribución p convertida, i.e., Acumular los valores de la función de densidad p hasta que el valor obtenido sea mayor o igual a r ; entonces habremos seleccionado la alternativa de salida.

S_2 : Calcular la esperanza (media) de la distribución de p .

La conversión del subconjunto difuso a la densidad, dependerá de la forma de la función de membresía asociada al subconjunto así como de la confianza que tengamos de la información contenida en él subconjunto. Se requieren dos propiedades para realizar la conversión:

- (i) Si $\mu(x_i) = \mu(x_k)$ entonces $p(x_i) = p(x_k)$ (identidad)
- (ii) Si $\mu(x_i) > \mu(x_k)$ entonces $p(x_i) \geq p(x_k)$ (monotonía)

Entonces la condición de identidad (i) requiere que si dos alternativas mapean el mismo valor en la función de membresía del conjunto difuso, entonces deberán tener la misma probabilidad de selección. La condición de monotonía (ii) establece que si una alternativa mapea en un valor mas alto que otra en la función de membresía, entonces la primera tendrá tanta o más probabilidad de selección que la segunda.

El caso en el que solo seleccionamos los valores máximos de μ (función de membresía) - MOM-, satisface ambas condiciones siempre que

$$\begin{aligned} p(x_i) &= 0 & \text{si } x_i \neq \text{Max}_x(\mu(x)) \\ p(x_k) &= 1/m & \text{si } x_k = \text{Max}_x(\mu(x)) \end{aligned}$$

donde m es el número de elementos de X que mapean el máximo valor de la función de membresía.

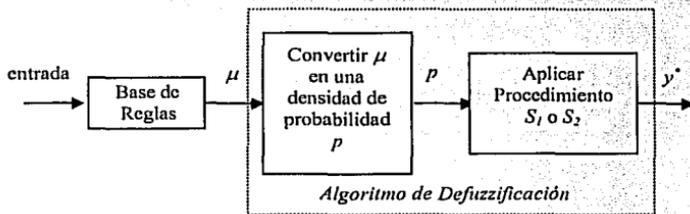


Figura 2.11 Vista general del proceso de Defuzzificación

Si normalizamos el conjunto difuso ajustando los valores de la función de membresía para que, conservando su forma, cumpla con las condiciones de una función de densidad de probabilidades, lograremos que satisfaga las dos condiciones y sea igual a COA.

$$p(x_i) = \frac{\mu(x_i)}{\sum_k \mu(x_k)}$$

Yager y Filev demostraron que de la infinidad de procedimientos posibles de convertir un conjunto difuso en una función de densidad de probabilidades, el equivalente a MOM, es el que menor entropía⁶ puede presentar.

Además, si asignáramos la misma probabilidad de selección a cada alternativa, i.e., si n es el número de alternativas posibles con mapeo de función de membresía mayor que cero y asignamos $p(x_k) = 1/n$, $k: 1 \rightarrow n$ -distribución uniforme- entonces realizaríamos la conversión de la función de densidad con la mayor entropía. Para el caso donde la función de membresía tiene dominio continuo (alternativas de decisión), entonces $p(x_k) = 1/n$, donde n será la distancia entre la menor y la mayor de las alternativas, suponiendo que el área de la función de membresía es conexas, i.e., las alternativas forman un intervalo.

⁶ La entropía mide el nivel de incertidumbre manifestada por una distribución de probabilidades.

Elaboración de un FLC

El problema que se plantea resolver en este capítulo consiste en controlar el servicio en una red de cajeros automáticos, el servicio que prestará cada cajero en la red, consistirá únicamente en retiro de efectivo.

Mi decisión de utilizar el Control Mediante Lógica Difusa (FLC) y la Simulación Asistida por Computadora para diseñar y modelar el Sistema que se encargará de dar respuesta al problema razón de este capítulo, se debe a que mediante datos de entrenamiento se puede construir un modelo del sistema basado en un reconocimiento de patrones mediante lógica difusa, el cual asistido por la simulación puede llevarnos a una mejor descripción y exposición del problema, y así poder establecer una solución óptima sobre bases comprobadas antes de su implantación.

Para comenzar el diseño del sistema en cuestión se deben establecer los supuestos sobre los que se basará el modelo final del mismo y un bosquejo general del problema.

Descripción del modelo

Un supuesto básico y fundamental es que existirá siempre dinero suficiente para ser llevado a los cajeros cuando estos lo requieran, además de contar con el transporte respectivo. Se supondrá también que solo se cuenta con una persona para atender los cajeros, esto último fácilmente puede relajarse y permitir un mayor número de personas disponibles. De hecho el número de cajeros en la red, los cuales se suponen 4, así como el flujo de dinero que estos manejen, determinarán si una persona es suficiente para mantener controlado en un nivel óptimo el sistema, o si es necesario mas personal.

Si el dinero disponible en el cajero no es suficiente comparado con la cantidad requerida, entonces se marcará una cantidad negativa en el monto disponible del cajero; así mismo, si el monto ya es negativo, se restará del monto la cantidad solicitada haciendo más negativo el monto del cajero.

El objetivo que debe cumplir el sistema a ser modelado es mantener el monto de dinero disponible en cada cajero, en un nivel mínimo, cuando sea atendido para rellenarlo. Aunque algunos cajeros automáticos también proporcionan otros servicios, como consulta de saldos y depósitos, aquí no serán tomados en cuenta.

Los cajeros se suponen dispersos en cierta zona geográfica sin importar específicamente cual; lo que sí será importante es cuanto tiempo se necesita para ir del Centro de Control (Central) a cada cajero, ya que el personal encargado de atenderlos solo transportará el dinero que necesite un cajero a la vez, siendo obligatorio que regrese a la Central por más dinero y partir hacia otro si así se requiere. Cabe mencionar que el tiempo de ida se supone igual que el de vuelta, ya que no se afecta la complejidad del sistema y sí se facilita su exposición.

La matriz aleatoria MTU (Matriz de Tiempos por Ubicación) es una muestra de tamaño 4 de una distribución Binomial Negativa con parámetros $r = 38$ y $p = 0.7$, que contiene en cada posición el tiempo promedio que se requiere para llegar a cada cajero partiendo de la Central. No hay razón para no utilizar cualquier otra distribución, ya que no se está hablando de una red en especial; los parámetros usados los obtuve haciendo un muestreo de diversos cajeros automáticos y sus usuarios y posteriormente ajustando los datos a las distribuciones aquí usadas. Así por ejemplo, $MTU(1) = 10$, i.e. se necesitan aproximadamente 10 minutos para ir de la Central al cajero uno y viceversa.

$$MTU = [10, 12, 26, 30] \quad (1)$$

A los valores de MTU se les añadirá una magnitud aleatoria con distribución Logarítmica Normal de media 0.9 y varianza .15 que representa el tiempo que se necesita para asistir al cajero en cuestión. La suma de estas magnitudes será entonces el tiempo total aproximado que durará el personal fuera de la Central. Si es preciso que se asista un nuevo cajero tras regresar de otro, se despreciará el tiempo que tardaría en enterarse que debe ir a otro cajero y tomar más dinero para después partir.

La asistencia consiste en llevar dinero al cajero que lo requiera.

Se necesita un proceso que valide qué cajero despachará dinero en el minuto actual ya que pueden ser todos o ninguno; la unidad de tiempo base establecida en la simulación es de un minuto. Si la variable vectorial *Tiempo* es igual a cero en alguna de sus posiciones, esto querrá decir que faltan cero minutos para un nuevo retiro, i.e., se hace un muestreo de una variable aleatoria Logarítmica Normal de parámetros $\mu=.7$ y $\sigma=1.3$ para determinar el monto del retiro del cajero en cuestión; para hacer el retiro un múltiplo de 50, al resultado de la muestra aproximado a su entero inmediato superior se le multiplicará por 50, si el resultado es cero, se asigna cincuenta. Inmediatamente después, se hace un muestreo de una variable aleatoria Binomial Negativa de parámetros $r=19$ y $p=.75$ la cual simulará el tiempo necesario para el próximo retiro del cajero. Lo anterior se hará por cada cero en la variable Tiempo.

$$Tiempo = (tiempo cajero 1, \dots, tiempo cajero 4) \quad (2)$$

Los retiros efectuados a través del tiempo se suman para determinar la cantidad que aún permanece en cada cajero.

Se utilizará una función que calculará una proyección del monto disponible en el cajero al momento que lo asistan. Tomará dos parámetros, el tiempo total necesario para asistir al cajero y la cantidad de dinero que se encuentre disponible en ese momento en el mismo. El primero, unas veces será igual a la posición respectiva de MTU y otras, cuando el personal se encuentre viajando de o hacia algún cajero, será mayor.

La proyección esta basada en un algoritmo que utiliza Lógica Difusa para establecer un patrón de comportamiento basado en una serie de datos (serie de tiempo en este caso); ya establecido el patrón se utiliza como plantilla para estimar uno o más datos siguientes de la serie. Más adelante explicaré como funciona el algoritmo.

Tomando en cuenta el pronóstico de salida de la función anterior y el tiempo que tomaría llegar al cajero en cuestión como entradas en un Controlador Mediante Lógica Difusa (FLC), se espera obtener la urgencia con que cada cajero necesita ser asistido y así establecer prioridades de atención.

El cajero con la mayor urgencia será el siguiente en ser asistido, si se da el caso que 2 o más cajeros tengan la misma urgencia, entonces se sorteará uno al azar.

El algoritmo en el que se basa la proyección del monto de los cajeros necesita conjuntos de datos y una descripción de la estructura del modelo a ser diseñado. Se hace uso de un mecanismo de descubrimiento de reglas que genera los conjuntos difusos necesarios para cada variable en los datos y produce las reglas que describen el comportamiento del modelo, con lo que se construye la naturaleza del sistema en forma conjunta, como un todo.

Cuando se diseña el modelo de algún fenómeno, frecuentemente se enfrenta el problema de cuantificar y describir cuales serán los parámetros de control y de solución del sistema en términos de su representación lingüística, a menos que cada parámetro y variable estén en función de abstracciones que de todos modos se tienen que describir en términos lingüísticos, si se quiere saber a que se está haciendo referencia; por lo que si el modelo se entiende y las descripciones matemáticas son robustas y deterministas, entonces podemos representar el comportamiento del fenómeno con confianza.

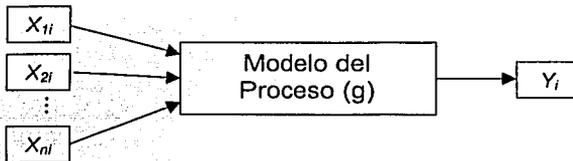


Figura 3.1 Función de Transferencia

Sin embargo, las relaciones que se describen en el modelo, a menudo causales, no son bien comprendidas o justificadas, además, son altamente imprecisas y sujetas a múltiples interpretaciones dentro de un mismo conjunto de expertos. La ventaja es que a menudo se cuenta con datos del fenómeno a ser modelado lo que nos brinda la posibilidad de tener un conocimiento básico de la respuesta o comportamiento (salida) del fenómeno que una serie de condiciones o supuestos (entradas) producen.

En este contexto se puede ver un mapeo que va desde un vector de datos $x=(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$, que representa un estado inicial del modelo, hasta y_i , que representa el estado solución del problema, lo anterior para el caso i . Eso sugiere que puede existir una *función de transferencia* entre estos estados.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= g(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) \\
 y_2 &= g(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) \\
 &\vdots \\
 y_k &= g(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

El mecanismo exacto del Proceso del Modelo esquematizado en la **Figura 3.1**, es desconocido o pobremente entendido. Usando esta relación, sería idóneo poder derivar un conjunto de reglas o asociaciones difusas condicionales de la forma:

Si x_1 está en P_{i1} y x_2 está en P_{i2} y ... x_s está en P_{is} , Entonces y está en C_i

Donde P es un predicado que hace referencia a una región difusa y C es una región difusa consecuente. Estas regiones se generan directamente de los datos mediante particiones o subconjuntos de los dominios donde las variables están definidas. El proceso que encuentra las reglas busca la mejor combinación entre predicados y consecuentes donde ambos sean consistentes con los datos, por lo que se necesita un método que compare reglas conflictivas o contradictorias, que consolide reglas redundantes y que asigne jerarquías a las reglas según la confiabilidad en los datos y el grado de membresía en los conjuntos difusos respectivos. A este último proceso se le conoce como reconocimiento de patrones, los cuales estarán implícitos en el listado de reglas.

En este caso no cuento con información verdadera de retiros en cajeros automáticos, así que simulé retiros de cajeros automáticos basado en información de una muestra en diversos cajeros. A partir de esta información ajusté los tiempos entre retiros y sus montos con las distribuciones Binomial Negativa y Logaritmo Normal descritas al principio de este capítulo.

Una vez generada la información de retiros, decidí que con la información de 4 periodos hacia atrás sería suficiente para captar el comportamiento de la función de transferencia.

Para obtener las variables X_{ji} a la X_{4i} acomodé los datos de la simulación en una sola serie de tiempo con los montos de los retiros acumulados por minuto y calculé la cantidad de dinero que se retiraba del cajero en una unidad de tiempo t , entonces la primera observación obtenida es el monto acumulado de retiro al tiempo t menos el monto acumulado de retiro al tiempo 1, la siguiente observación es el monto acumulado de retiro al tiempo $t+1$ menos el monto acumulado de retiro al tiempo 2, y así sucesivamente.

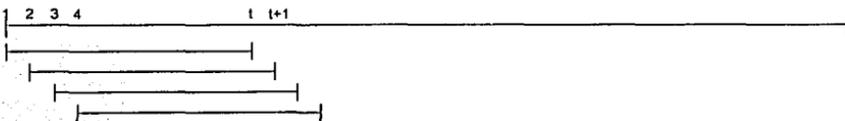


Figura 3.2 Registros de serie de tiempo con los montos de los retiros acumulados por minuto

El cálculo anterior da como resultado una serie de tiempo que llamare S_t con montos sucesivos de retiros cada t minutos de tiempo. Con esta información, X_{4t} es el primer registro de S_t , X_{3t} es el registro $t+1$ de S_t , X_{2t} es el registro $2t+1$ de S_t , X_{1t} es el registro $3t+1$ de S_t y Y_t es el registro $4t+1$ de S_t con lo que completamos el primer registro de la serie de entrenamiento para la generación de patrones SE_t para un tiempo t (X_{4t} , X_{3t} , X_{2t} , X_{1t} ; Y_t).

Para el segundo registro de SE_t , X_{42} es el segundo registro de S_t , X_{32} es el registro $t+2$ de S_t , X_{22} es el registro $2t+2$ de S_t , X_{12} es el registro $3t+3$ de S_t y Y_2 es el registro $4t+2$ de S_t (X_{42} , X_{32} , X_{22} , X_{12} ; Y_2). Los demás registros se calculan de manera similar.

La búsqueda de reglas consiste en tres pasos fundamentales, La descomposición de las variables del proceso en conjuntos difusos (variables de SE_t), la generación de reglas tentativas a partir de los datos y la creación de las reglas difusas combinadas.

La descomposición de las variables del proceso en conjuntos difusos, consiste en descomponer el universo de discusión o dominio de cada variable de entrada, así como de salida, en un conjunto de conjuntos difusos en forma de campanas de Gauss. Este primer paso tiene intervención directa con la persona que esté diseñando ya que tendrá que escoger el número de conjuntos difusos en los que se hará la descomposición para así representar correctamente el dominio de cada variable. Éste número tendrá que ser impar mayor o igual que tres, aquí usé tres para cada variable. Se pide que sea impar debido a la forma en que se crean los conjuntos difusos; se coloca un conjunto central y se abarca el dominio a la izquierda y derecha de éste hasta completarlo. Véase figura 3.3.

Esta descomposición no está relacionada con ninguna estructura semántica, explícita o implícita, de la variable en cuestión i.e., si la variable fuera la presión en una tubería, las divisiones no corresponden a términos tales como baja, moderada, media o alta presión. Tampoco se sugiere que el proceso esté exento del conocimiento de las propiedades y naturaleza semántica de las variables; solo que el descubrimiento de las reglas será idéntico con o sin éste conocimiento.

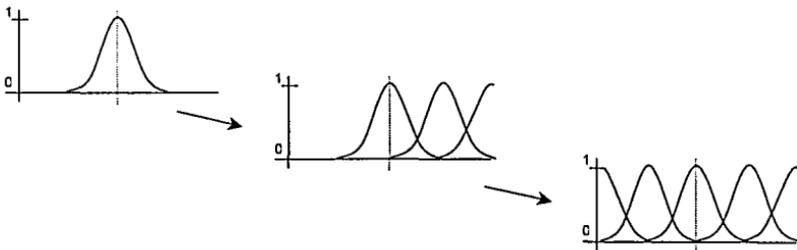


Figura 3.3 Descomposición de variables del proceso en conjuntos difusos

Tomando como base que las variables han sido descompuestas en conjuntos difusos, se procede a la generación de reglas tentativas a partir de los datos. Primero se crea una matriz

de reglas que contiene una posible regla por cada registro en los datos, ya que cada línea de datos contiene información de entrada y de salida del proceso que puede ser importante. El problema de esto es que además tendremos relaciones contradictorias y/o redundantes entre las variables, por lo que se asigna una medida de contribución a cada regla, para así poder filtrar la matriz creada y poder estar seguros que las reglas que permanezcan después de la resolución de conflictos sean las que, en su conjunto, contribuyan a la mejor descripción del proceso en cuestión basados en los datos de origen.

La medida o grado de contribución de cada regla es el resultado de multiplicar el grado de efectividad por el de credibilidad de cada regla i.e.,

$$\text{Contrib}(\text{regla}) = \text{Eff}(\text{regla}) \cdot \text{Cred}(\text{regla}) \quad (4)$$

El grado de efectividad puede verse como el nivel de activación de cada regla que es el resultado de operar los conjuntos difusos que intervienen en cada regla, calculando los respectivos grados de membresía y calculando su agregación. El grado de Credibilidad está asociado en general con la creencia que tenemos en la validez de los datos i.e., se puede basar en función de cierto conocimiento que tengamos de los datos o de cómo fueron obtenidos, o puede utilizarse cualquier otra métrica. Esto último incorpora factores que sesgan los datos de acuerdo con la experiencia del que diseña.

Los datos disponibles en los procesos de modelado de sistemas, contienen diferentes clases y niveles de importancia, aplicabilidad y ruido. El grado de contribución ajusta cada regla según la confianza que se tenga en los datos implicados. Nótese que se puede prescindir de tal subjetividad humana o de cierta información inútil de los datos y asignar al grado de Credibilidad el valor de 1.

Para finalizar el proceso de generación de reglas se necesita la creación de las reglas difusas combinadas. Este último paso consiste en filtrar las reglas generadas de acuerdo con su grado de Contribución asociado, i.e., si hay dos reglas en las que intervengan los mismos conjuntos difusos, reglas redundantes, una de ellas desaparecerá, la de menor grado de Contribución.

En lo que se refiere a la contradicción entre reglas, los sistemas de inferencia difusa tienen la bondad de permitir que en una misma base de conocimientos se utilice información conflictiva y que esto no afecte la validez de la inferencia; contrario a lo que se pudiese pensar, esta característica permite que la información con que se cuenta no sea sobrefiltrada o anulada, y así, ser parte decisiva en el proceso de inferencia. Así que las posibles contradicciones entre reglas se filtran automáticamente cuando se infiere de la base de reglas final.

Una vez generados los insumos necesarios se procede a ejecutar la simulación con la que obtendremos los resultados buscados.

Resultados de la Simulación del Modelo

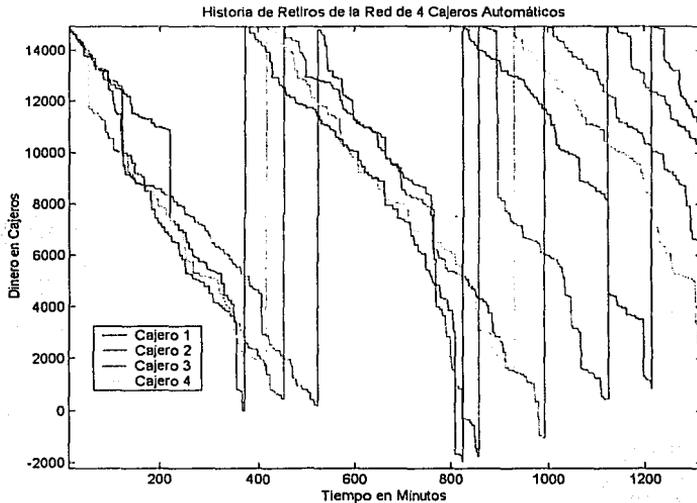


Figura 3.4 Detalle de simulación, primeros 1300 minutos de la red de 4 cajeros

Al principio de la simulación, como se muestra en la **Figura 3.4**, todos los cajeros presentan un comportamiento similar. Las pendientes de las curvas de retiro son sumamente homogéneas, a excepción quizás de algunos retiros fuertes aislados, pero la pendiente promedio se mantiene casi constante. A medida que la simulación avanza, se evidencia que cada cajero comienza a presentar un comportamiento más heterogéneo.

El hecho de tener un solo centro de distribución de dinero provoca que los cajeros no puedan ser rellenados al mismo tiempo, así que consecutivamente se hace la asistencia de los cajeros según el tiempo en el que la estimación del monto de dinero en cada uno fue siendo menor o igual a cero. El orden en que se asiste a los cajeros no se conserva, ya que la pendiente de los retiros no es exactamente igual entre los cajeros, además de seguir un comportamiento aleatorio.

Por otro lado, cuando se echa a andar el sistema se observa que las primeras dos veces que se llenan los cajeros hay tiempos muertos para el personal que atiende a los cajeros, pero a medida que la simulación continúa los tiempos muertos se disminuyen en frecuencia y en tamaño hasta estabilizarse en 70 minutos en promedio, sugiriendo que para el caso

particular de este sistema, es suficiente con un equipo que rellene los cajeros, aunque más de 3 quintas partes del tiempo están en la central; 3300 minutos de los 5000 simulados.

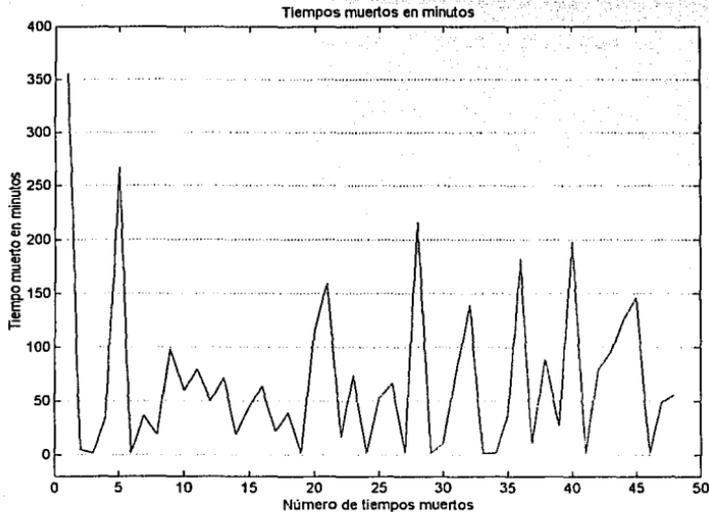


Figura 3.5 Tiempos Muertos del equipo que asiste la red de cajeros

Cada cajero tiene disponible \$15,000.00 cada vez que lo rellenan, si quisiéramos aumentar el número de cajeros o el número de equipos que los atendiesen, probablemente tendríamos que aumentar el monto que se deja en cada cajero o armar subgrupos de cajeros o redes locales.

Debido a la similitud que se observa en la pendiente de los retiros en los cajeros, puede pensarse que una estimación simple del monto en estos a través del tiempo sería la media de las pendientes agrupadas de los cajeros, desgraciadamente la variación que presenta es mayor a la que obtenemos con este modelo.

La decisión de cual utilizar queda determinada por factores como:

- El costo de mantenimiento
- Nivel de satisfacción esperado por servicio de cajeros
- Montos de dinero en riesgo, etc.

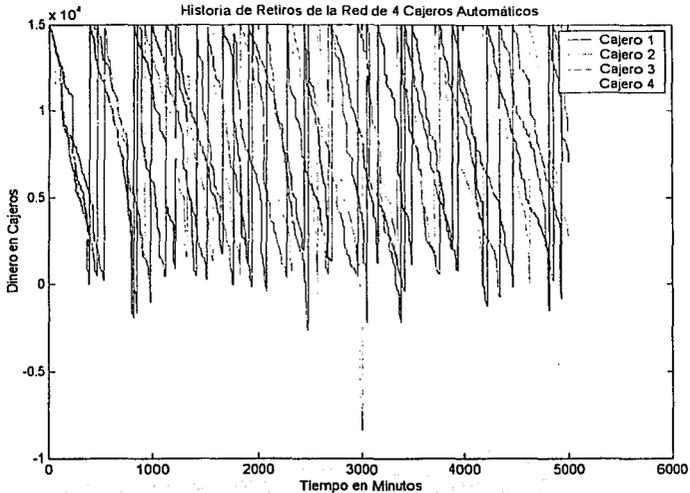
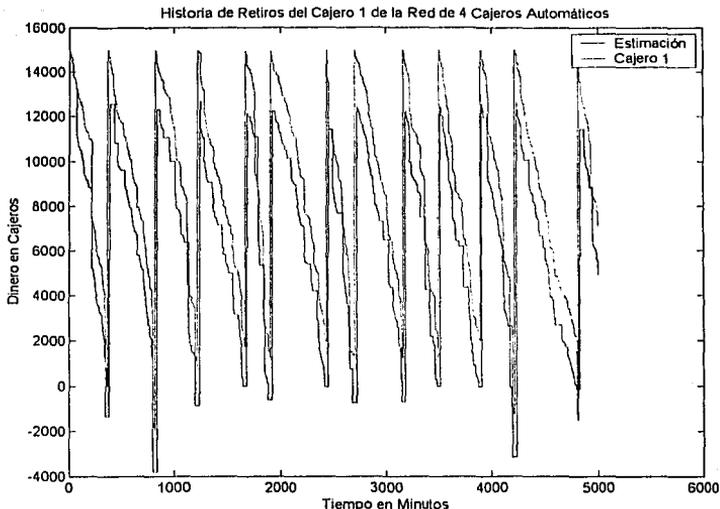


Figura 3.6 Historia de retiros de la red de 4 Cajeros Automáticos

Para el caso de cada cajero, se observa que la estimación oscila con respecto al dato real simulado, i.e., a veces está más cerca y a veces más lejos del dato real; debido a que el modelo toma en cuenta el tiempo que tardarán en asistirlo para estimar el monto de dinero que será retirado, si el equipo que asiste los cajeros está ocupado, entonces tardará más en llegar de lo que normalmente necesita. Además, se adapta a las condiciones cambiantes del cajero minuto a minuto.

Para medir la efectividad del modelo, obtenemos:

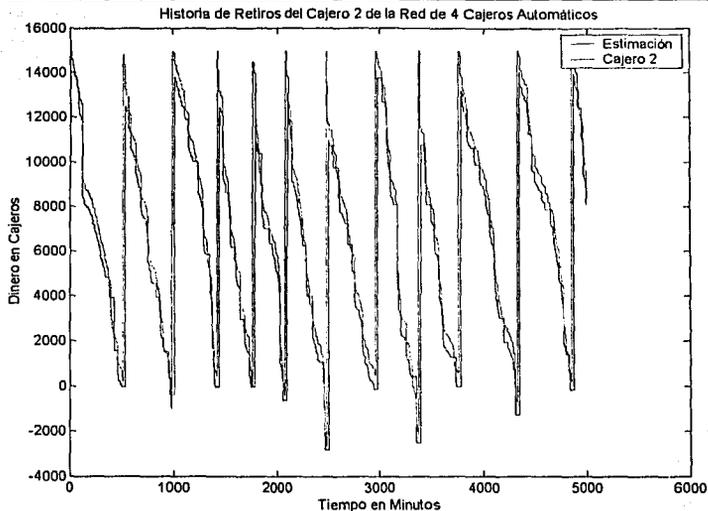
- ¿Cuántos retiros posteriores a que se quedó sin dinero se intentaron en promedio?
- Error del modelo. ¿Cuánto dinero quedó en el cajero o le hizo falta?
- Tiempo promedio que tardó en quedar vacío
- Gráficas de las estimaciones hechas por el modelo contra el dato real simulado.



Tiempo de Servicio	Retiros Posteriores	Minutos sin Servicio	Error del Modelo
373	0	0	-
453	3	18	1,950
388	0	0	850
451	0	0	1,750
240	0	0	1,250
541	0	0	1,950
267	0	0	1,300
453	0	0	1,200
324	0	0	1,100
396	0	0	2,000
332	7	45	1,250
592	2	11	1,500

Figura 3.7 Historia de retiros del Cajero 1 de la red

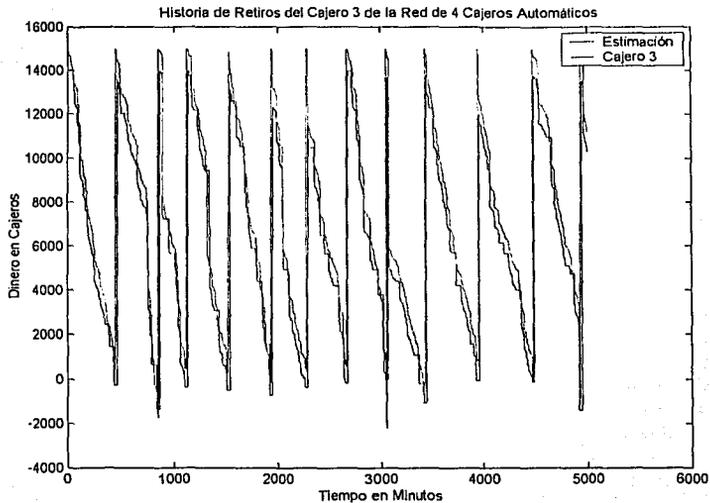
Con esta información, el responsable de la administración de la red, tiene lo necesario para evaluar la efectividad del modelo para predecir el comportamiento de la red original y poder simular con libertad los cambios que se presentarán si decide cambiar alguna de las variables, como son: el número de cajeros, su localización geográfica, el número de personas que dan servicio a los cajeros, el



Tiempo de Servicio	Retiros Posteriores	Minutos sin Servicio	Error del Modelo
523	0	0	200
468	2	12	- 1,050
431	0	0	450
343	1	7	- 50
323	2	16	- 450
396	3	21	- 2,650
481	0	0	450
421	10	52	- 2,200
375	0	0	600
572	3	21	- 750
515	0	0	200

Figura 3.8 Historia de retiros del Cajero 2 de la red

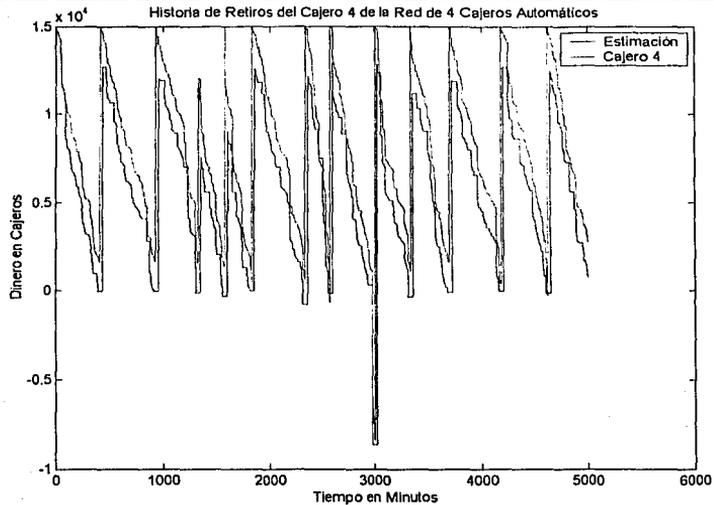
monto de dinero disponible en cada cajero por separado, etc., pero también, y no menos importante, puede evaluar información particular de cada cajero relativa a la demanda que cada uno tiene dependiendo si es fin de semana, fin de mes, días festivos, mezcla de denominación de billetes etc.



Tiempo de Servicio	Retiros Posteriores	Minutos sin Servicio	Error del Modelo
454	0	0	450
405	6	36	- 1,750
264	0	0	450
404	0	0	250
411	1	5	- 150
343	0	0	350
399	0	0	550
375	2	8	- 2,250
367	5	25	- 400
522	0	0	800
519	1	5	- 150
468	3	16	- 850

Figura 3.9 Historia de retiros del Cajero 3 de la red

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Tiempo de Servicio	Retiros Posteriores	Minutos sin Servicio	Error del Modelo
416	0	0	1,550
515	0	0	1,650
400	0	0	1,550
251	0	0	1,350
246	0	0	450
506	0	0	650
244	2	5	- 700
430	4	25	- 8,400
335	0	0	1,100
367	0	0	1,600
468	0	0	400
448	2	17	- 300

Figura 3.9 Historia de retiros del Cajero 4 de la red

Aplicación de Metodologías Difusas en la Ciencia Actuarial.

Los conjuntos difusos fueron mencionados por primera vez en 1965, pero la primera aplicación asociada a la Ciencia Actuarial se hizo en Europa en 1982 y en la década de los 90's se presentó un marcado incremento en el desarrollo de aplicaciones actuariales, la razón principal para tal comportamiento se debió a la inflexibilidad de las leyes de EU hasta 1990 y a la relajación de éstas en Europa, aunque destaca el periodo de aplazamiento de más de 15 años sin alusión a los conjuntos difusos.

Hace algunos años, el número de muertes en un grupo de personas cualquiera en un año dado se consideraba una cifra bien definida que podía ser calculada a partir de una tabla de mortalidad; posteriormente, se comenzó a tratar como una magnitud aleatoria y el uso de la teoría de las probabilidades se extendió en toda la Ciencia Actuarial. Hoy, es una magnitud incierta o difícil de precisar, al igual que las tasas de interés y otros elementos básicos en la Ciencia Actuarial. Los libros de texto y otras publicaciones sobre Matemáticas Actuariales contienen diferentes opciones para el tratamiento de estas magnitudes, pero de ninguna manera presentan recetas con métodos o fórmulas fijas para cada caso que se presente, así, el Actuario decide como tratar estas magnitudes a través de metodologías sustentables que cumplan con las normas y políticas establecidas.

A continuación presento un resumen de aplicaciones compiladas por Derrig y Ostaszewski y publicadas por Zimmerman(1999) sobre metodologías difusas en la Ciencia Actuarial.

Suscripción

El primer trabajo publicado con aplicaciones de conjuntos difusos a la Ciencia Actuarial fue presentado por DeWit (1982), donde señala que el proceso de selección y evaluación de riesgos a ser asegurados, está cargado con incertidumbre que no se describe adecuadamente por la probabilidad. Por ejemplo, en el seguro de grupo, aunque el precio del seguro se calcula basado en datos concretos, no se pueden aplicar conclusiones directamente a ningún grupo en el que la participación es voluntaria. Tradicionalmente, una participación mínima del 75% es requerida para establecer las pólizas de grupo, pero esta cota tajante y precisa no implica la resolución de la incertidumbre de los participantes asegurados. Además, la composición sexo-edad del grupo asegurado debe cumplirse generalmente para ser estable o alcanzar la estabilidad de manera eventual. El concepto "estable" está sujeto al juicio del suscriptor, por lo tanto, es difuso. Otros factores de naturaleza similar incluyen la descripción de la industria, si el grupo tiene relaciones de trabajo, si el asegurado es sujeto a crédito y la estabilidad de la aseguradora (un grupo que cambia la situación de la empresa cada año suele ser un riesgo muy malo) . Finalmente, existe un problema clásico actuarial de "credibilidad" de la experiencia del grupo. Usualmente un grupo que busca ser asegurado debe proveer a la aseguradora con la información relativa a su historia de siniestros. Estos datos proveen una base para el cálculo de la prima, pero ¿Es prudente (aconsejable) basar el costo en información tan limitada? ¿Debe usarse experiencia de la industria? Si la experiencia de siniestros de la industria es mejor, i.e., sus pagos son menores que los correspondientes de la industria, el grupo puede no ver bien tal generalización hecha por la aseguradora. La solución estándar a este problema es asignar

un grado o nivel de credibilidad, un número entre 0 y 1, a la prima obtenida de los datos del grupo, y uno menos ese número a la prima obtenida de la industria. El promedio ponderado de las dos se usa entonces como la prima para el grupo. No se puede evitar observar la similitud entre este método y la lógica difusa. Karwowski y Ostaszewski (1992 y 1993) investigaron el desarrollo de medidas de credibilidad en seguros basados en lógica difusa.

El trabajo de DeWit fue seguido por Erbach(1990) quien en 1987, junto con otros dos colegas con los que trabajaba en una aseguradora en Canadá, desarrollaron "Zeno", un prototipo automatizado para suscribir pólizas de seguro de vida utilizando una mezcla de técnicas entre las que se encuentra la lógica difusa.

La intención de Zeno fue realizar la suscripción final de la mayoría de los casos de seguro de vida individual. El sustento del prototipo fue suficiente para probar ser factible a tal punto que sustituyo al sistema regular de suscripción, pero pronto fue abandonado a favor del juicio humano. Uno se preguntará si esto es prueba de alguna deficiencia de la metodología difusa, o un síntoma que indica que del mundo todavía no esta listo para este tipo de innovación.

Lamaire(1990) extendió el trabajo de DeWit(1982) sugiriendo que se usara la lógica difusa para la suscripción de pólizas en general, así como el cálculo difuso de primas y reservas. La metodología de suscripción se refinó en el trabajo de Young(1993) quien publico un algoritmo específico para seguro de salud de grupo, utilizando técnicas difusas como las mencionadas arriba. Horgby et al (1997) introdujeron reglas de inferencia difusa a través de modus ponens generalizado para suscribir coberturas por muerte para solicitantes con *diabetes mellitus*. Veintisiete factores médicamente relacionados son representados por parámetros de entrada difusos a un controlador difuso con un defusificador del tipo centro de área para obtener la sobreprima que se cargará.

Uso del valor presente actuarial difuso y aritmética difusa

El trabajo de Lamaire(1990) incluye el cálculo de valores presentes bajo tasas de interés difusas y factores difusos afectando flujos de efectivo futuros que serán descontados. El primer trabajo sobre el cálculo de valores presentes actuariales, basado en reglas estándar de aritmética difusa lo realizó Buckley(1986,1987) al que le siguió Calzi(1990) y posteriormente Zimmerman(1991). A pesar de que la ciencia actuarial tradicional que se aplica al seguro de vida supone tasas de interés constantes y conocidas durante la vigencia del contrato, se reconoce la incertidumbre en las tasas de interés. En su discusión del valor del dinero a lo largo del tiempo Trowbridge(1989) dice lo siguiente: "El actuario inexperto tiende a suponer que el valor del dinero a lo largo del tiempo es conocido y le dedica poca o nula importancia a lo apropiado que puede resultar la tasa de interés supuesta. Conforme va ganando conocimiento y experiencia, aprende a diferenciar entre tasas brutas y netas, antes y después de impuestos, nominales y efectivas y tasas de interés reales y tasas internas de retorno. Aprende la relación entre tasas de interés para diferentes plazos de inversión de la curva de rendimientos. Reconoce además, que cualquier tasa de interés específica tiene un componente básico para el tiempo y componentes adicionales para la posibilidad de no pagar y la esperanza de inflación. Sabe que los cambios en las tasas de interés afectan de diferente forma a los activos que a los pasivos". La última frase de Trowbridge puede resultar en un tema independiente de investigación profunda usando lógica difusa.

Otro principio actuarial que nos sugiere consideraciones vagas de naturaleza financiera es el establecido por Dicke et al (1991) que dice: "A veces se requiere que los actuarios calculen el valor futuro de montos contingentes de dinero relacionados a la operación de sistemas de seguridad financiera. Ya que en general, el valor actuarial es una variable aleatoria, y es preferible establecer condiciones o supuestos bajo los cuales el valor actuarial debe caer dentro de un rango dado". Estos modelos probabilísticos de tasas de interés fueron propuestos por Panjer y Bellhouse (1980), Frees (1990), Dufresne (1992) y otros. Pero la gran complejidad de los modelos estocásticos hacen un llamado a la simplicidad, cuando menos en la presentación del análisis realizado. Uno de los retos principales de la teoría moderna de seguros recae en la administración de activos y pasivos. Esta se refiere al proceso de mantener protegida a la compañía y sus ganancias en el ambiente de tasas de interés variables. Una herramienta de la administración de activos y pasivos es el concepto de *Duración*, definido como la derivada del logaritmo del precio de un instrumento financiero, por ejemplo, los activos o pasivos de una aseguradora. Un modelo simple de una aseguradora compara la duración de activos contra la duración de pasivos esperando que sean iguales o muy parecidos, con la finalidad de empatar la sensibilidad de activos y pasivos a cambios en tasas de interés. Desafortunadamente el análisis basado en la duración tiene ciertos peligros. El mayor lo representa el llamado *Short Straddle Model* de una aseguradora que dice que una compañía con activos y pasivos con la misma duración perderá valor económico cuando se presenten cambios en tasas de interés (Babel y Stricker, 1987).

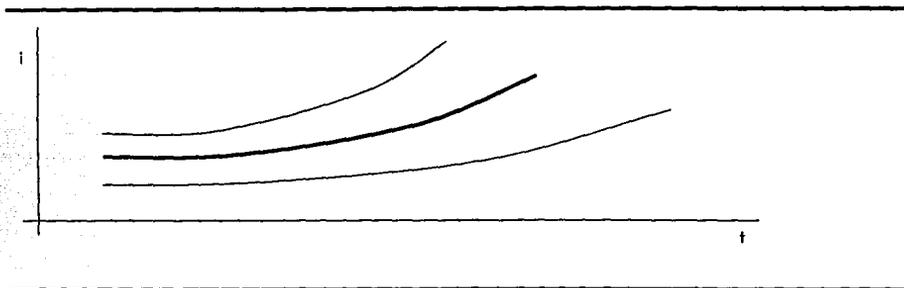


Figura 4.1 Tasas de Interés Difusas

Una mayor visión de la situación de la empresa se obtiene si podemos ver como cambia el valor económico con cambios en tasas de interés inciertas. Ostaszewski (1993) menciona que modelos financieros difusos tradicionales sugieren la representación de tasas de interés inciertas. Las tasas de interés a corto plazo son, por lo general, menos inciertas que las de largo plazo, las cuales, presentan una pendiente hacia arriba en la curva de rendimientos. Además, se pueden recibir incentivos por aceptar riesgos de inversiones a plazos mayores de tiempo. Por lo tanto, una representación de tasas de interés difusas puede ser la que se muestra en la figura 4.1. La curva de rendimientos difusos resultante se puede usar para calcular valores presentes difusos y puede brindarnos una muy buena representación de la sensibilidad a cambios en los niveles de tasas de interés. Nótese que el vasto campo del

análisis de inversiones ha sido infiltrado por metodologías de conjuntos difusos de manera efectiva, utilizadas principalmente para crear sistemas expertos para fines de selección segura de inversiones y diseño de portafolios de inversiones. Como ejemplo está el trabajo realizado por Wong, Wang, Goh y Quek (1992), pero los sistemas expertos que resultan satisfactorios tienden a manejarse como software propietario, debido a los tremendos incentivos monetarios involucrados.

Clasificación de riesgos y siniestros

Ostaszewski (1993) señala que para realizar la clasificación de riesgos de una aseguradora usualmente se tiene que recurrir a métodos inciertos y vagos, o por el contrario, a métodos excesivamente precisos y tajantes, como por ejemplo en el caso de una persona que no puede clasificar como un riesgo aceptable para seguro de vida por pesar un cuarto de kilo mas del límite establecido (esto último también mencionado por Lamaire, 1990). Kandel (1982), escribió sobre otra perspectiva: "De manera muy fundamental, la íntima relación existente entre la teoría de los conjuntos difusos y la teoría del reconocimiento de patrones y clasificación se sustenta en el hecho que la mayoría de los conjuntos o clases que existen el mundo real son de naturaleza difusa".

Ebanks, Karwowski y Ostaszewski (1992) utilizaron medidas difusas para clasificar riesgos. En muchas situaciones, conocemos de antemano que características deben cumplir los riesgos aceptables. Cualquier solicitante puede ser comparado usando medidas establecidas en las características, contra el ideal de riesgo aceptable, y por lo tanto se puede asignar un grado de membresía a cada medición. Esto produce un vector de atributos de mediciones difusas que describe al individuo. Midiendo el nivel de difusidad (fuzziness) del individuo como un riesgo aceptable, se puede determinar una nueva clasificación.

Derrig y Ostaszewski (1995) utilizaron conglomerados difusos para clasificar riesgos y siniestros. Usaron el algoritmo difuso fuzzy c-means algorithm propuesto por Bazdek (1981). Aquí hay un pequeño ejemplo ilustrativo originado por Lamaire (1990) y en parte por Ostaszewski (1993). Supongamos que cuatro solicitantes de un seguro definidos por cuatro características: altura, peso, sexo y pulso en reposo y clasificados de manera inicial por sexo. Se tienen los siguientes datos:

Persona	Estatura	Sexo	Peso	Pulso en Reposo
1	175 cm	0 (M)	92 kg	110
2	185 cm	0 (M)	75 kg	75
3	160 cm	1 (F)	55 kg	72
4	150 cm	1 (F)	90 kg	100

Las personas uno y dos tienen un grado de membresía en el cluster 1 de 1.0 y 0.0 en el cluster 2, las personas 3 y 4 en situación contraria. Aunque el ejemplo exagera las situaciones, pretende resolver el problema fundamental de cómo determinar la naturaleza de grupos o clusters de riesgos similares en seguros. Si se aseguran riesgos significativamente distintos bajo la misma tarifa, los riesgos más bajos tienden a no asegurarse o a buscar mejores tarifas. Este proceso es conocido como selección adversa. El resultado final es que la aseguradora pierde buenos clientes y termina asegurando un grupo con una esperanza de futuros siniestros mayor a la que calculó. Por otro lado, crear demasiados grupos de

clasificación incrementa costos, ya que esquemas precisos producen situaciones tales como el de una persona un centímetro menor a la estatura de una tarifa preferible, terminará pagando una prima sustancialmente mayor, debido a la distinción inexistente de riesgos aceptables. Ostaszewski (1993) asegura que la ausencia de una clasificación actuarial justa es económicamente equivalente a la discriminación de precios en favor de solicitantes con riesgos más grandes.

Cuando el algoritmo fuzzy c-means se aplica al grupo arriba mencionado de 4 riesgos, gradualmente pasamos de conglomerados basados en el sexo a una partición difusa combinando los cuatro factores (altura, peso, sexo y pulso en reposo) para medir su riesgo.

Derrig y Ostaszewski (1995) aplicaron el algoritmo al problema de tasar territorios de automóviles en Massachussets. Como lo describe Conger(1987) "Massachussets, ha presenciado los últimos diez años, la evolución de un creciente y sofisticado sistema de metodologías para determinar las definiciones de territorios para seguro de automóviles de uso particular. En contraste con el esquema de territorios en otros estados, los cuales tienden a agrupar ciudades geográficamente contiguas, las nuevas metodologías tienden a agruparlas con pérdidas esperadas similares de exposición al riesgo, independientemente de la cercanía entre las ciudades".

La metodología utilizada en Massachussets para obtener los grupos de ciudades en índices de prima pura para cada una de las 350 ciudades y 10 áreas en las que esta dividida la ciudad de Boston para propósito de tarificación de seguro de automóviles. Los índices, que son números relativamente cercanos a 1 (pérdidas esperadas en relación con las de todo el estado) se ordenan y se crean los territorios analizando su ordenamiento. Debido a que el cambio frecuente entre territorios es poco deseable, existen numerosas restricciones al movimiento de los territorios. También se limita el cambio máximo en precios para todas las ciudades. Tales dificultades al agrupar sugieren el uso de conglomerados difusos. Los grupos difusos resultantes son mucho más flexibles como la asignación parcial de una ciudad a dos o más territorios que en la asignación final puede permanecer al mas apropiado según las limitaciones regulatorias. Debe notarse que a pesar de buscarse la estabilidad en la asignación de territorios, el sistema de agrupación de ciudades en territorios debe cumplir los criterios estándar de clasificación de riesgos. Las ciudades cuentan con un incentivo en el precio si reducen sus costos relativos por pérdida, dando mantenimiento a sus caminos, reforzando leyes y aumentando la seguridad.

Derrig y Ostaszewski (1995) aplicaron el algoritmo difuso de c-medias a las 350 ciudades de Massachussets excluyendo a Boston, ya que sus diez áreas ya estaban definidas. Los índices para la prima pura se calcularon para las siguientes coberturas: Responsabilidad Civil en Bienes y Personas, Gastos Médicos de ocupantes y Colisión. Se usaron los datos de los índices de 1993. El agrupamiento inicial fue la asignación prevaleciente en 1993 i.e., 16 territorios excluyendo a Boston. Además del cálculo descrito, añadieron dos coordenadas más para cada ciudad, latitud y longitud. Con esto, incrementaron la posibilidad de agrupar ciudades no solo actuarialmente similares, además, relativamente cercanas geográficamente. Otros estados de la unión americana utilizan la proximidad geográfica como factor determinante en la asignación de precios a territorios. Los resultados fueron muy reveladores. El enfoque tradicional usado en Massachussets, ha provocado que ciertas ciudades cambien de territorios y después de un tiempo regresen al anterior. El

agrupamiento difuso mostró que para estas ciudades su pertenencia en los territorios es mejor descrita como difusa.

Debe notarse que el trabajo de Derrig y Ostaszewski (1995) contiene algunas sugerencias pioneras en el uso de conjuntos difusos para detectar fraudes en siniestros de seguro de daños. Cox(1995) desarrolló parámetros difusos para comparar el comportamiento de proveedores médicos a individuos de un mismo grupo con el propósito de detectar comportamiento "anómalo" (mejor conocido como fraude y fabricación) en seguro médico. El fraude es un problema muy significativo en la industria del seguro, especialmente en presencia de una situación económica desfavorable. Problemas del Seguro Social, como son las incapacidades, han sido blanco de individuos sin escrúpulos que reclaman siniestros fraudulentos. Estas detecciones han sido hechas tradicionalmente por unidades especiales de investigación mediante el procesamiento de siniestros, y requiere de mucho tiempo y dinero con solo modestos logros (Derrig y Weisberg, 1998). Francamente, la persecución de cada siniestro que se paga por unos cuantos dólares de más es económicamente insano. La agrupación difusa nos permite distinguir entre siniestros sumamente fraudulentos y las fabricaciones. Así, el asegurador tiene la libertad y facilidad de investigar los siniestros sospechosos que muestren la mayor amenaza o fraude. La detección de fraudes en seguros es todavía una aplicación reciente de los conjuntos difusos y seguramente existen oportunidades prometedoras para esta metodología en un futuro cercano.

Tarificación de seguro de daños

Una parte del trabajo del actuario es la determinación del costo de los productos de seguros. ¿Cuál es el costo del producto de seguros? Es simplemente el costo de futuros siniestros, gastos e impuestos. Esta definición suena simple pero su aplicación práctica resulta no serlo tanto, debido a la naturaleza difusa de los conceptos: *cubrir, siniestros, gastos, impuestos; y que hay de fraude o fabricación*. Además, una vez que el costo ha sido establecido, se procede a fijar el precio del producto de seguros, que es el costo esperado mas el margen de utilidad esperado. Debido a que el costo y el margen de utilidad son inciertos, debe existir un modelo para esa incertidumbre. Tradicionalmente se realiza de manera probabilística. Derrig(1990) discute el desarrollo de la tarificación del seguro de grupo en EU.

El mayor reto en el seguro de daños recae en el pronóstico de los costos por siniestros, así como en proveer ganancias justas e impuestos. Cummins y Derrig(1993,1997) propusieron un modelo difuso para tarificar seguros de daños. Comenzaron con tendencias en los costos de siniestros. Las estimaciones de primas se basan en la esperanza de costos de siniestros para el periodo de cobertura. La esperanza de costos de siniestros está basada en datos históricos, pero deben considerar costos finales, i.e., deben considerar todos los gastos que se hicieron en el siniestro y los que se harán en el futuro; además deben proyectarse al periodo cubierto en la póliza, i.e., debe considerar cambios esperados en costos por siniestros en el futuro causados por ejemplo por la inflación etc. Observamos que las tendencias estudiadas aquí son difusas, debido a factores tales como:

- Selección de datos históricos y periodos usados en las estimaciones
- Modelos de proyección utilizados, de ajuste de curvas, econométricos etc.
- Curvas que se usaron, lineales, exponenciales y otras

- Medidas estadísticas de ajuste, precisión y sesgos
- Factibilidad de los resultados
- Posible incompatibilidad en los ajustes

Cummins y Derrig (1993) estudiaron las tendencias en los costos de siniestros y compararon métodos de proyección existentes con relación a su precisión en el pronóstico, sesgos y que tan razonables resultaros ser. Su conclusión principal fue que los métodos de pronóstico que resultaron cercanamente precisos e insesgados pueden no producir estimaciones igualmente cercanas. Sugirieron se asignara un grado o nivel de membresía a cada método de acuerdo con su precisión, sesgo y que tan razonables fueron. Entonces calcularon una medida compuesta de inferencia difusa para cada método de pronóstico con los tres parámetros anteriores. Esto produjo más información en cuanto al valor de los métodos, en contraste con las formas comunes de comparación como los parámetros de regresión o las preferencias del Actuario de la compañía.

Cummins y Derrig(1997) también dieron ejemplos del cálculo de primas difusas del seguro de daños. Mencionan que el cálculo presenta un primer nivel de incertidumbre debido a:

- Magnitud de flujos de efectivo
- Patrones de flujos de efectivo
- Tasas de interés libres de riesgo
- Ajuste de riesgos
- Impuestos

Estas incertidumbres se trabajan tradicionalmente a través de modelos probabillsticos y a juicio del Actuario. Pero también existe incertidumbre de segundo nivel debido a:

- Calidad de los datos históricos
- Métodos de desarrollo
- Métodos de tendencia y pronóstico
- Gastos
- Utilidades
- Modelado del mercado de capitales
- Mercado de seguros

Utilizando parámetros difusos como: pérdidas, tasas libres de riesgo y ajustes de riesgos y parámetros precisos como: patrones de flujos y tasas de impuestos, Cummins y Derrig (1997) derivaron primas difusas de seguros como generalizaciones al modelo preciso de tarificación del valor presente neto (Myers y Cohn (1987), Derrig(1990)). Un comentario interesante hecho por los autores acerca de sus resultados es que las respuestas fueron más difusas de lo que esperaban, indicando un grado de incertidumbre no tomado en cuenta en métodos de tarificación tradicional.

Aún cuando no es realista presentarle una prima difusa a un cliente debemos notar que un precio difuso nos proporciona una valiosa herramienta para visualizar el rango de valores necesarios a ser considerados para la prima, así como para notificar a la gerencia de la incertidumbre en el proceso de cálculo de primas.

Impuestos Difusos

Los impuestos asignados a los ingresos tienen un gran efecto en la tarificación de productos y en la administración de portafolios de inversión de seguros. (Derrig, 1994). Derrig y Ostaszewski (1997) desarrollaron aplicaciones de conjuntos difusos a la administración de problemas generados por impuestos en compañías de seguros de daños. El teorema de Myer (1984) dice que el valor presente ajustado por riesgos generados por impuestos en ingresos por inversiones de un portafolio de inversiones riesgoso sostenido por una corporación es:

$$PV(T_{r_A}) = \frac{T r_F}{1 + r_F}$$

donde r_A es la tasa de retorno del portafolio riesgoso y r_F es la tasa de retorno libre de riesgo. El valor presente de la responsabilidad generada por los impuestos es independiente de la estrategia de inversión y se determina solamente por la tasa efectiva del impuesto y la tasa libre de riesgo. Derrig y Ostaszewski (1997) utilizaron conjuntos difusos para evaluar la tasa efectiva del impuesto como un número difuso, considerando retornos difusos de inversiones en un portafolio de bonos del gobierno, acciones y dentro del contexto de un portafolio con un escudo o protección contra impuestos.

El futuro de los conjuntos difusos en la Ciencia Actuarial

Ostaszewski (1993) proporciona una visión general de posibles aplicaciones de conjuntos difusos a la ciencia actuarial. Desarrollos recientes indican que los sistemas expertos en la suscripción y la detección de fraudes son los que más prometen en las aplicaciones inmediatas. De hecho, tales aplicaciones pueden estar actualmente en desarrollo entre las aseguradoras más competitivas.

En el largo plazo, los conjuntos difusos pueden presentar una gran oportunidad en clasificación de riesgos y proveer una nueva y fresca perspectiva en la administración integral de una firma de seguros. Algunos desarrollos recientes combinan conjuntos difusos con intervalos de posibilidades (Babad y Berliner, 1994)

El control de operaciones mediante lógica difusa comenzará a adaptar controladores difusos en procesos industriales a decisiones financieras. Por ejemplo, Young (1996) codificó varios conceptos actuariales comunes como parámetros difusos (cambios de tasas previas, razón de tasas actuales entre esperadas, cambio en el negocio y cancelaciones) en un controlador de cambios en tasas en una inferencia *modus ponens* para producir la indicación de un cambio de tasas en una línea de negocio. Horgby (1998) discute un sistema de inferencia difuso similar para la clasificación en seguro de vida.

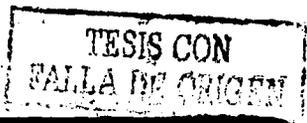
Bibliografía

- Babad, Y. y Berliner, B. (1994). "The Use of Intervals of Possibilities to Measure and Evaluate Financial Risk and Uncertainty", 4th AFIR Vol. 1, 111-140.
- Bojadziej, G., Bojadziej, M. (1997). *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management*. Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory Vol. 12. World Scientific.
- Bontempi, Gianluca & Bonarini, Andrea. (1997). "A qualitative simulation approach for fuzzy dynamical models". Politecnico di Milano Artificial Intelligence and Robotics Project.
- Bontempi, Gianluca. (1997). "Modeling with uncertainty in continuous dynamical systems: the probability and possibility approach". IRIDIA, Université libre de Bruxelles. Brussels, Belgium.
- Bowers, Gerber, Hickman, Jones and Nesbitt. (1986). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries.
- Cox, Earl D. (1995). *FUZZY LOGIC for business and industry*. Charles River Media.
- Derrig, Richard A., Ostaszewski, Krzysztof M. (1994). "Fuzzy Techniques of Pattern Recognition in Risk and Claim Classification", 4th AFIR, Vol. 1, 141-171.
- ISA. (1997). "Especificación y Selección de Sistemas de Control". Sociedad de Instrumentistas de América Sección México, A.C. 1º al 3 de octubre de 1997.
- Kaufmann, Dubois & Cools. (1982) *Ejercicios con soluciones sobre la teoría de los subconjuntos borrosos*. CECSA.
- Lemaire, Jean. (1990) "Fuzzy Insurance", ASTIN Bulletin, vol. 20, 33-56.
- Li, David X., Panjer, Harry H. (1994). "Immunitization Measures for Life Contingencies", 4th. AFIR, Vol. 1, 375-395.
- Mendel, Jerry M. (1995). "Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial". Proceedings of the IEEE, vol. 83, No 3, March. 345-377.
- Moore, Peter. (1993). *The business of risk*. Cambridge University Press.
- Ogata, Katsuhiko, (1993). *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall.
- Ostaszewski, Krzysztof. (1993) *An investigation into possible applications of fuzzy sets methods in Actuarial Science*. Society of Actuaries.
- Boyle, Phelim p. (1992). *Options and the management of financial risk*. Society of Actuaries.

- Yager, Ronald R., Filev, Dimitar P. (1994). *Essentials of fuzzy modeling and control*. Wiley-Interscience.
- Yakoubov, Y. H., Haberman, S. (1998). "Review of Actuarial Applications of Fuzzy Set Theory", Actuarial Research Paper No. 105, City University, London.
- Young, Virginia R., (1993). "The Application of Fuzzy Sets to Group Health Underwriting", Transactions of the Society of Actuaries 45:551,584.
- Zimmermann, Hans-Jürgen, (1999). *Practical Applications of Fuzzy Technologies*. Kluwer Academic Publishers.

Bibliografía Complementaria

- Babel, David F. y Stricker, Robert (1987). "Asset-Liability Management for Insurers", Insurer Perspectives, Goldman Sachs, Mayo.
- Bazdek, J.C. (1981). Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms, New York, Plenum Press.
- Buckley, J.J. (1986). "Portfolio analysis using possibility distributions", Approximate Reasoning in Intelligent System Decision and Control: Proceedings of the International Conference, 69,76, Enero 8-10, Editado por Sanchez, E., Zadeh, L.A., Pergamon Press, Elmsford, New York.
- Buckley, J.J. (1987). "The Fuzzy Mathematics of Finance", Fuzzy Sets and Systems, 21:257-273.
- Conger, R.F.(1987). "The Construction of Automobile Rating Territories in Massachusetts", Proceedings of the Society of Actuaries. Mayo, 74(141):74.
- Cox, Eral (1995). "A Fuzzy System for Detecting Anomalous Behaviors in Healthcare Provider Claims" Intelligent Systems for Finance and Business, editado por S. Goonatilake y P. Trelevent, John Wiley and Sons, 111-135.
- Cummins, J.D. y Derrig, Richard (1993). "Fuzzy Trends in Property-Liability Insurance Claim Costs", Journal of Risk and Insurance, Septiembre, 60:429-465.
- Cummins, J.D. y Derrig, Richard (1997). "Fuzzy Financial Pricing of Property-Liability Insurance" North American Actuarial Journal, Octubre, 1:21-44.
- Calzi, M.L. (1990). "Towards a General Setting of the Fuzzy Mathematics of Finance", Fuzzy Sets and Systems, 35:265-280.
- Derrig, Richard (1990). "The Development of Property-Liability Insurance Pricing Models in the United States 1969-1989", 1st AFIR Conference Proceedings, International Actuarial Association, mayo 23-26, 1990 (Paris), 4:237-264.



Derrig Richard (1994), "Theoretical Considerations of the Effect of Federal Income Taxes on Investment Income in Property-Liability Ratemaking", *Journal of Risk and Insurance*, 61-4:691-709.

Derrig, Richard y Ostaszewski, Krzysztof (1997). "Managing the Tax Liability of a Property-Casualty Insurance Company", *Journal of Risk and Insurance*, 64-4:696-711.

Derrig, Richard y Weisberg, Herbert (1998). "AIB PIP Claim Screening Experiment Final Report, Understanding and Improving the Claim Investigation Process", Massachusetts Fraudulent Claims Payment Filing, DOI Docket R98-41, Boston.

DeWit, G.W., (1982) "Underwriting and Uncertainty", *Insurance: Mathematics and Economics*, 1:277-285.

Dicke, A.A., Bergquist, W., Clancy, R.P., Miller, R.A. III, Panjer, Harry H., Peterson, D.M., Watson, C.B.H. y Luckner, Warren, (1991), *Principles of Actuarial Science*, por the Society of Actuaries Committee of Actuarial Principles, aceptado por the Board of Governors of the Society of Actuaries en Octubre.

Dufresne, Daniel (1992), "On Discounting When Rates of Return are Random", *Proceedings of the Twenty Fourth International Congress of Actuaries*, 1:27-43.

Ebanks, Bruce, Karwowski, Waldemar y Ostaszewski, Krzysztof M. (1992) "Application of Measures of Fuzziness to Risk Classification in Insurance", *Computing and Information*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, 290-291.

Erbach, David W., (1990). "The Use of Expert Systems to do Risk Analysis", *Intelligence Systems in Business*, Editado por Richardson y DeFries, Ablex Publishing Co., New Jersey.

Frees, E.W. (1990), "Stochastic life contingencies with solvency considerations", *Transactions of the Society of Actuaries*, 42:91-129.

Horgby, Per-Johan (1998). "Risk Classification by Fuzzy Inference", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 23:63-82.

Kandel, A. (1982), *Fuzzy Techniques in Pattern Recognition*. John Wiley and Sons, New York.

Karwowski, Waldemar y Ostaszewski, Krzysztof, (1992). "An Analysis of Possible Applications of Fuzzy Set Theory to the Actuarial Credibility Theory", *Proceeding of the Annual Meeting of the north American Fuzzy Information Processing Society*, Puerto Vallarta, Diciembre.

Karwowski, Waldemar y Ostaszewski, Krzysztof, (1993). "Towards Fuzzy Actuarial Credibility", *Proceeding of the Annual Meeting of the north American Fuzzy Information Processing Society*, Allentown, Pennsylvania, Agosto.

Myers, Stewart C. (1984). Massachusetts Rating Bureau Filing for 1985 Automobile Rates, Boston Mass., Diciembre.

Myers, Stewart C. y Cohn, Richard A. (1987), "A Discounted Cash Flow Approach to Property-Liability Insurance Rate Regulations", Kluwer.

Panjer, H.H. y Bellhouse, D.R. (1980), "Stochastic modeling of interest rates with applications to life contingencies", Journal of Risk and Insurance, 47:91-110.

Trowbridge, C.L. (1989). *Fundamental Concepts in Actuarial Science*. Actuarial Education and Research Fund, Schaumburg Illinois.

Wong, F.S., Wang, P.Z., Goh, T.H. y Quek, B.K. (1992), "Fuzzy Neural Systems for Stock Selection" Financial Analysis Journal, Enero/Febrero, 48(1):47-52.

Young, Virginia R. (1996). "Insurance Rate Changing: A Fuzzy Logic Approach", Journal of Risk And Insurance, 63:461-484.

Zimmerman, H.J. (1991). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Second Edition, Kluwer Academic Publishers.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA