37

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

DENDRITAS: CARACTERIZACIONES Y EJEMPLOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

JAVIER VALDEZ QUIJADA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis
Dra. Ma. Isabel Puga Espinosa

2002

57

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

DENDRITAS: CARACTERIZACIONES Y EJEMPLOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

JAVIER VALDEZ QUIJADA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis

Dra. Ma. Isabel Puga Espinosa

2002

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Javier Valdez Quijada
FECHA: 14-sep-02
FIRMA:

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Dendritas: Caracterizaciones y ejemplos.

realizado por Valdez Quijada Javier

con número de cuenta 8721442-8 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dra. Isabel Puga Espinosa

Propietario M. en C. Félix Capulín Pérez

Propietario M.enC.David Herrera Carrasco

Suplente Dra. Patricia Pellicer Covarrubias

Suplente Mat. Leopoldo Morales López

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México
Por permitirme ser parte de ella

A la Facultad de Ciencias
Por forjarme como Matemático

A mi esposa
Por todos sus consejos, por estar conmigo,
por alentarme, por . . .

A mi hijo
Por ser parte de mí, por ser mi ilusión,
por ser mi razón de vivir, por . . .

A mis padres
por enseñarme a no rendirme y
a luchar por alcanzar mis sueños

A mis hermanos
Por apoyarme siempre que lo he necesitado

A Isabel Puga
Por su paciencia, por creer en mí,
por sus consejos, por saberme conducir
en la elaboración de este trabajo

A mis sinodales
Por todo su apoyo y comentarios

A todos ustedes
GRACIAS

Índice general

INTRODUCCIÓN 1

1. PRELIMINARES 3
   - 1.1 Continuos de Peano 4
   - 1.2 Arco-conexidad 7
   - 1.3 Continuos de convergencia 9
   - 1.4 Continuos Regulares 11
   - 1.5 Límites Inversos 13

2. DENDRITAS 18
   - 2.1 Caracterización por puntos de separación 19
   - 2.2 Caracterización por puntos terminales y de corte 20
   - 2.3 Algunas propiedades 23
   - 2.4 Caracterización por conexidad de subconjuntos 24
   - 2.5 Caracterización por unicoherencia 26

3. EJEMPLOS 28
   - 3.1 Ejemplo de una dendrita D donde el conjunto de puntos de ramificación es denso en D 29
   - 3.2 El conjunto de puntos que no son de ramificación en una dendrita D, siempre es denso en D 35
   - 3.3 Ejemplo de 2 continuos hlc tales que su unión no es hlc 36
   - 3.4 La unión de 2 dendritas es dendrita si y sólo si la intersección de las 2 dendritas es un conjunto conexo y no vacío 39
   - 3.5 Ejemplo de 2 continuos regulares tales que su unión no es regular 41
   - 3.6 Ejemplo de un continuo regular que no es unión finita de dendritas 44

4. REFERENCIAS 52

Introducción

El objetivo del presente trabajo, como lo indica el título, es presentar algunas caracterizaciones de las dendritas, así como algunos ejemplos relacionados con las mismas; ejemplos que resultan ser atractivos no solo por su representación geométrica, sino también por las propiedades que presentan.

La tesis está dividida en 3 capítulos y, sin embargo, la esencia de ésta se encuentra en el último capítulo, el capítulo denominado "**ejemplos**".

Para la construcción del primer ejemplo (dendrita D cuyo conjunto de puntos de ramificación es denso en D) se requiere de cierta herramienta matemática denominada límites inversos. Esta herramienta, aunque resulta poco atractiva, es muy útil en la construcción de continuos, sin embargo aquí solo utilizaremos lo indispensable para desarrollar el ejemplo antes mencionado.

Después de analizar un poco el ejemplo anterior nos damos cuenta de que el conjunto de puntos que no son de ramificación también resultó denso. Así que nos preguntamos si era posible encontrar una dendrita D donde el conjunto de puntos que no son de ramificación *no* fuese denso en D. La respuesta la encontramos en el mismo capítulo 3, la cual es enunciada como un teorema y para argumentar la validez de dicho teorema se recurrre a una de las propiedades de las dendritas (el conjunto de puntos de ramificación en una dendrita es a lo más numerable).

El siguiente es un ejemplo de 2 continuos hlc (hereditariamente localmente conexos), los cuales resultan ser dendritas (toda dendrita es hlc) y cuya unión resulta que no es hlc (por lo mismo resulta que no es dendrita). En estas condiciones cabe pruguntarse si existen condiciones suficientes y necesarias para que la unión de dendritas sea dendrita. La respuesta se encuentra en el capítulo 3.

También se muestra un ejemplo de 2 continuos regulares (la definición de continuo regular se pude encontrar en este trabajo, pero hay una equivalencia que nos ayuda bastante a simplificar las cosas: Un continuo X es regular si cualesquiera 2 puntos de X son separados por un número finito

de puntos de X), los cuales resultan ser dendritas (Toda dendrita es regular) y cuya unión es un continuo que no es regular.

Un último ejemplo, reservado al final por tratarse de de un resultado que va en contra de nuestra intuición: se sabe que en una dendrita cualesquiera 2 puntos son separados por un tercer punto y que en un continuo regular cualesquiera 2 puntos son separados por una cantidad finita de puntos, así que resulta "natural" suponer que cualquier continuo regular se puede expresar como unión finita de dendritas. Sin embargo esto no es cierto, para ello mostramos un ejemplo de un continuo regular que no es unión finita de dendritas.

Para desarrollar los ejemplos anteriores se requieren de algunas de las *caracterizaciones de las* **dendritas**, las cuales se enuncian en el 2° capítulo y que para desarrollar las mismas se requieren de ciertos resultados **preliminares** desarrollados, claro está, en el capítulo 1.

En este primer capítulo se encuentran ciertos resultados que quizá para algunos sea el primer encuentro con los continuos y por lo mismo resulte un capítulo algo árido, poco "digerible", sin embargo, para aquellos que tienen un primer encuentro con los continuos y, en especial con las dendritas, recomendamos (aunque parezca extraño) leer de atrás hacia adelante. Quizá esto ayude a motivar al estudiante a involucrarse más en esta apasionante área de las Matemáticas.

Septiembre de 2002..

J A V I E R.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este primer capítulo se desarrollan los conceptos y resultados necesarios , tanto para las caracterizaciones que se dan en el siguiente capítulo como para los ejemplos.

Los conceptos desarrollados, a grandes rasgos, son los siguientes:

a) Continuos de Peano

b) Arco – conexidad

c) Continuos de convergencia

d) Continuos regulares

e) Límites inversos

1.1 Continuos de Peano

1.1 *Definición.* Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo.

1.2 *Definición.* Un espacio topológico X es llamado localmente conexo en $p \in X$ (LC en $p \in X$) si para cada vecindad N de p existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U \subset N$ y es llamado espacio de Peano si es localmente conexo en $p \in X$, para toda $p \in X$ (figura 1). Si además el espacio es un continuo, entonces es llamado continuo de Peano.

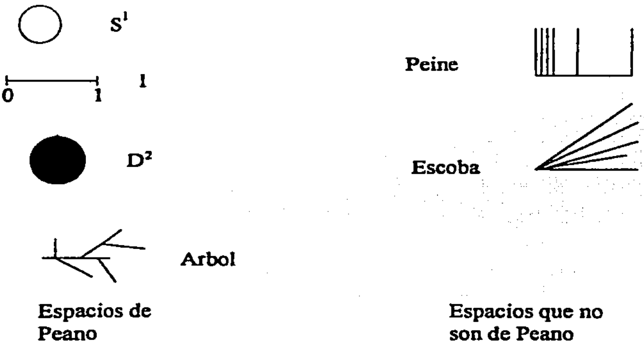


Figura 1

Notemos que un intervalo [a,b] es un continuo de Peano. Llamaremos arco a cualquier espacio homeomorfo a un intervalo [a,b]. En particular dos de estos intervalos son homeomorfos entre sí.

1.3 *Definición.* Un espacio métrico X es llamado conexo en pequeño en $p \in X$ (cik en p) siempre que cada vecindad de p contenga una vecindad conexa de p.

Notemos la similitud entre las definiciones 1.2 y 1.3. A primera vista da la impresión de que dicen lo mismo. Sin embargo no es así, para ello daremos un ejemplo.

1.4 No todo espacio cik en $p \in X$ es localmente conexo en p, tal como se muestra en la figura 2.

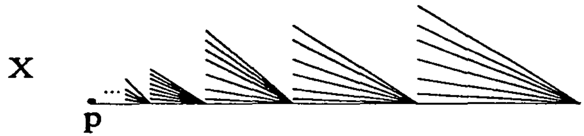


Figura 2

X es cik en p.
X no es localmente conexo en p.
Pues dada cualquier vecindad N de p, podemos encontrar una vecindad conexa U de p tal que $p \in U \subset N$, pero U resulta no ser un conjunto abierto [5,pág.201].

Desde luego , todo espacio X localmente conexo en $p \in X$ es cik en p.

1.5 *Teorema.* Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) X es de Peano
ii) Cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierta en X
iii) X es cik en cada punto $p \in X$.

DEM.

ii) $\Rightarrow$ **i)**. Supongamos que las componentes de todo conjunto abierto son abiertos.
Sea $p \in X$ y N una vecindad abierta de p. Designemos por T a la componente de N que contiene a p. Entonces T es conexo, $T \subset N$, además T es abierto por hipótesis.
$\therefore$ X es de Peano.

i) $\Rightarrow$ **iii)**. Es inmediato.

iii)$\Rightarrow$ii) Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X y C una componente de U. Mostraremos que C es abierto.
Como X es cik en toda $x\in X$; dada $x \in C$, existe una vecindad conexa W de x tal que $x\in \text{Int } W\subset W\subset U$ y de aquí, $W\subset C$
Entonces $x \in \text{Int } C$.
$\therefore$C es abierto.

1.6 ***Definición.*** Un continuo X se llama hereditariamente localmente conexo (hlc) si cualquier subcontinuo de X es localmente conexo.

1.2 Arco-conexidad.

1.7 *Definición.* Decimos que un continuo X es arco-conexo si dados p,q $\in$ X, existe un arco A en X tal que p, q $\in$ A.

1.8 *Definición.* Sean X un continuo y p$\in$ X. Decimos que X es localmente arco-conexo en p (LAC en p) si cualquier vecindad de p contiene una vecindad arco-conexa de p.

Los siguientes 3 teoremas son fundamentales en la teoría de continuos localmente conexos. Los enunciaremos aquí sin demostrar.

1.9 *Teorema.* Todo continuo de Peano es arco-conexo. [1, Teo. 8.23, pág. 130].

1.10 *Teorema.* Todo continuo de Peano es LAC. [1, Teo 8.25, pág. 131]

1.11 *Teorema.* Cualquier subconjunto abierto y conexo de un continuo de Peano X es arco-conexo. [1, Teo 8.26, pág. 132].

1.12 *Definición.* Sean X un espacio topológico, Z $\subset$ X, p $\in$ Z Diremos que p es arco-accesible desde X-Z si existe un arco en $(X\text{-}Z)\cup\{p\}$, con p como uno de los extremos del arco .

1.13 *Teorema.* Si X es un continuo LAC y U es un subconjunto abierto de X, entonces el conjunto de todos los puntos de Fr(U) que son arco-accesibles desde U es denso en Fr(U).

DEM.

Sea D $=\{x \in Fr(U) : x$ es arco-accesible desde $U\}$. Sea W_0 un abierto en X tal que $W_0 \cap Fr(U) \neq \phi$. Sea $W= W_0 \cap Fr(U)$. Demostraremos que $D\cap W\neq \phi$.

Sea p $\in$W, por ser X LAC existe una vecindad arco-conexa V de p tal que $V\subset W_0$. Como p $\in$ Fr(U), $U\cap V\neq \phi$. Sea q $\in U\cap V$, entonces existe un arco A de q a p tal que A $\subset$V. Elegimos r$\in A\cap W$, de tal manera que r es el primer punto del arco de q a p que está en Fr(U), entonces r$\in$D y $D\cap W\neq \phi$.

$\therefore$ D es denso en Fr(U).

1.3 Continuos de Convergencia

1.14 ***Definición.*** Sea X un continuo. Un subcontinuo no degenerado A de X es llamado continuo de convergencia de X si existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos A_i de X tales que $A = \lim A_i$ y $A \cap A_i = \phi$ para toda i.

1.15 ***Teorema.*** Sean X un continuo y $N=\{x \in X$: X no es cik en $x\}$. Si $p \in N$ entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K \subset N$.

DEM.

Sea $p \in N$, entonces existe una vecindad V de p tal que si U es vecindad de p y $U \subset V$, tenemos que U no es conexo.

Por otro lado $p \in Int(V)$ por lo que existe un abierto W tal que $p \in W$ y $\overline{W} \subset V$ (porque X es regular). El conjunto $M = \overline{W}$ no es conexo. Sea C la componente de p en M. Entonces $p \notin Int(C)$, ya que si $p \in Int(C)$, entonces C sería una vecindad conexa de p contenida en $M \subset V$.

Se sigue que $p \in \overline{M - C}$, por lo tanto existe una sucesión $\{p_i\}_{i \in N}$ de puntos de $M - C$ tal que

$\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$ ....(1)

Sea C_i la componente de p_i en M, entonces

$C \cap C_i = \phi$ para toda $i \in \mathbb{N}$. ....(2)

Esto es porque si $C \cap C_i \neq \phi$ para alguna i, $C \cup C_i$ sería un subconjunto conexo de M, pero C es una componente de M, entonces tendríamos que $C \cup C_i \subset C$ y $p_i \in C$, lo cual es una contradicción ya que $p_i \in M - C$.

Sea Q una vecindad cerrada de p tal que $Q \subset Int(M)$. Podemos suponer que $p_i \in Q$ para toda i. Sea K_i la componente de p_i en Q. Es claro que

$K_i \subset C_i$ para toda i. ....(3)

Así que $\{K_i\}_{i \in N}$ tiene una subsucesión $\{K_{i_j}\}_{j \in N}$, que converge a un subcontinuo K de X. Como $p_{i_j} \in K_{i_j}$ para toda j, usando 1, y que $\lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j} = K$ tenemos que

$p \in K$ ....(4)

Dado que $K_{i_j} \subset Q$, Q es cerrado en X y $\lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j} = K$ se sigue que

$K \subset Q \subset \mathrm{Int}(M) \subset M$. ....(5)
Como K es conexo, usando 4 llegamos a que

$K \subset C$ ....(6)
Por 6, 3 y 2, $K \cap K_{i_j} = \phi$ para toda j= 1, 2, 3, . . . Por tanto si K es no degenerado, K es un continuo de convergencia.
Veamos que K es no degenerado.
Por [1, Teo 5.4, pág. 73] $K_{i_j} \cap (\overline{X\text{-}Q}) \neq \phi$ para toda j, y como $K = \lim_{j\to\infty} K_{i_j}$, $K \cap (\overline{X\text{-}Q}) \neq \phi$. Como $p \in \mathrm{Int}(Q)$, entonces $p \notin \overline{X - Q}$, de aquí tenemos que existe $q \in \overline{X - Q}$ tal que $q \in K$ y $p \neq q$, Así que K es un continuo no degenerado.
Falta mostrar que $K \subset N$. Supongamos que existe $x \in K$ tal que $x \notin N$. Por 5 tenemos que

M es vecindad de x ....(7)
y por 6

C es la componente de x en M ....(8)
Como $x \notin N$, entonces X es cik en x, por 7 existe una vecindad conexa G de x tal que $G \subset M$, y por 8

$G \subset C$ ....(9)
Por 3, $x \in \mathit{limsup} K_i \subset \mathit{limsup} C_i$ y como $x \in \mathrm{Int}(G) = U$.Por definición de *limsup* $U \cap C_i \neq \phi$ para una infinidad de índices, entonces $G \cap C_i \neq \phi$ para una infinidad de índices, por 9, $C \cap C_i \neq \phi$ para una infinidad de índices, lo cual contradice 2. Por lo tanto $K \subset N$.

1.16 *Teorema.* Si K es un continuo de convergencia en un espacio X y $x,y \in K$, entonces ningún subconjunto de K puede separar a x de y en X.
DEM.
Sea K un continuo de convergencia de X, $x,y \in K$ y $A \subset K$.
Supongamos que A separa a x de y.
Entonces existen U,V abiertos, ajenos, no vacíos en X–A tales que $X–A= U \cup V$, con $x \in U$, $y \in V$.

Como K es continuo de convergencia, existe $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\lim K_i = K$ y $K \cap K_i = \phi$.

Entonces $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X - A$

Como $x \in U$ y U es abierto, entonces $U \cap K_i \neq \phi$ para toda i suficientemente grande, digamos $i > i_0$

De esta forma $K_i \subset U$ para toda $i > i_0$, ya que K_i es conexo.

Análogamente $K_i \subset V$ para toda $i > i_0$.

Por lo que $U \cap V \neq \phi$. Lo cual contradice que U,V sean ajenos.

1.17 *Teorema*. Si un continuo X no contiene continuos de convergencia entonces X es hlc.

Dem.

Sea X un continuo tal que X no contiene continuos de convergencia.

Probaremos que cualquier subcontinuo de X es localmente conexo.

Sea Y un subcontinuo de X

Como Y no contiene continuos de convergencia (pues si los tuviera, también X los tendría), entonces $N = \{y \in Y \mid Y \text{ no es cik en } y\} = \phi$ (Teo.1.15)

Por tanto Y es cik en todo punto $p \in Y$.

De aquí que Y es localmente conexo (Teo. 1.5)

Así que X es hlc.

1.4 Continuos Regulares

1.18 ***Definición.*** Si X es un continuo y $p \in X$, entonces X es llamado regular en p si tenemos una base local $\pounds_p$ de p tal que la frontera de cada miembro de $\pounds_p$ es de cardinalidad finita. Un continuo es regular si es regular en todos sus puntos.

1.19 ***Proposición.*** Todo subcontinuo de un continuo regular es regular.
DEM.
Sea A un subcontinuo de un continuo regular X y $p \in A$. Sea $\pounds_p$ una base local para $p \in X$. Entonces $\pounds_p^A = \{A \cap U : U \in \pounds_p\}$.
Afirmamos que Fr $(A \cap U)$ es de cardinalidad finita para cada $U \in \pounds_p$.
En efecto:
$\mathrm{Fr}\,(A \cap U) = \overline{A \cap U}^A \cap \overline{A \setminus (A \cap U)}^A \subseteq \overline{A}^A \cap \overline{U}^A \cap (A \setminus U)$
$= A \cap \overline{U}^A \cap (A \setminus U) \subseteq \overline{U} \cap \overline{X \setminus U} = \mathrm{Fr}_X(U)$, el cual es de cardinalidad finita.

1.20 ***Teorema.*** Todo continuo regular es hlc.
DEM.
Sea X un continuo regular. Supongamos que X no es hlc, entonces X contiene un continuo de convergencia K (ver Teo. 1.17). De aquí que existe una sucesión $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos K_i de X tales que $K = \lim K_i$ y $K \cap K_i = \phi$ para toda *i*. Sea $p \in K$, $\pounds_p$ una base local para $p \in X$ y $U \in \pounds_p$. Entonces $K_i \cap U \neq \varnothing$ para toda i suficientemente grande, digamos para toda $i > i_0$, por lo que Fr(U) no tendría cardinalidad finita, lo cual no es posible. Por tanto X no contiene continuos de convergencia y por el Teo. 1.17 X es hlc.

1.21 ***Definición.*** Sea Ç una colección de subconjuntos cerrados de un espacio X. Diremos que Ç es aditivo si $C_1 \cup C_2 \in$ Ç, cuando C_1, $C_2 \in$ Ç. Diremos que Ç es hereditario si cada vez que $C \in$ Ç y A es un subconjunto cerrado de C, entonces $A \in$ Ç. Diremos que Ç es un sistema aditivo-hereditario si Ç es aditivo y hereditario.

1.22 *Teorema.* Sean X un continuo y Ç un sistema aditivo-hereditario de subconjuntos cerrados de X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Cada $p \in X$ tiene una base local $\pounds_p$ tal que cada $U \in \pounds_p$ es abierto en X y $Fr(U) \in C$.

ii) Cualesquiera 2 puntos de X son separados en X por algún miembro de Ç.[1, Teo. 10.18, pág 172]

1.23 *Teorema.* Un continuo X es regular si y solo si cualesquiera 2 puntos de X son separados en X por algún conjunto finito.

DEM.

Sea Ç$=\{A \subseteq X : A$ es finito$\}$

Puesto que $C_1 \cup C_2$ es finito si C_1, C_2 son finitos y C es finito si C es subconjunto de $C_1 \in$ Ç, se tiene que Ç es un sistema aditivo-hereditario. Por el teorema anterior se tiene que cualesquiera 2 puntos de X son separados por algún conjunto finito.

1.5 Límites inversos

Observación. Sea X un espacio. Recordemos que una familia $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de intersección finita si la intersección de cualquier subcolección finita de $\mathcal{E}$ es no vacía. Si X es compacto, $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita y los elementos de $\mathcal{E}$ son cerrados entonces la intersección de todos los elementos de $\mathcal{E}$ es no vacía. [5, pág. 117, 118].

1.24 *Teorema.* Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos tales que $X_i \supset X_{i+1}$ para cada i=1, 2, . . . , y sea $X=\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces, dado un subconjunto abierto U de X_1 tal que $U \supset X$, existe N tal que $U \supset X_i$ $(X_i - U = \phi)$ $\forall$ $i \geq N$.

DEM.

Como $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de la intersección finita entonces $X \neq \phi$.

Ahora supongamos que para cada i $X_i - U \neq \phi$, es decir, supongamos que para cada i existe $x_i \in X_i - U \subset X_1 - U$.

Nótese que la sucesión $\{X_i - U : i \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de intersección finita, así que $X \setminus U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (X_i - U) \neq \phi$. Lo cual contradice que $X \subset U$.

Para demostrar el siguiente Teorema, recordemos que todo espacio métrico X es normal, es decir, dados dos subconjuntos cerradas y ajenos A,B de X, existen abiertos, ajenos U,V en X con $A \subset U$, $B \subset V$.

1.25 *Teorema.* Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tales que $X_i \supset X_{i+1}$ para cada i=1, 2, . . . , y sea $X=\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces X es continuo.

DEM.

Por la observación X es un espacio métrico, compacto y no vacío.

Mostraremos que X es conexo. Supongamos, por el contrario, que X no es conexo. Entonces $X = A \cup B$, donde A,B son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos.

Como X_1 es normal, existen subconjuntos abiertos, ajenos V,W de X_1 tales que $A \subset V, B \subset W$.

Sea $U = V \cup W$, entonces por 1.24 $U \supset X_n$ a partir de alguna n.

Entonces $X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$.
Como $X_n \supset X = A \cup B$ y como $A \neq \phi$ y $B \neq \phi$, tenemos que $X_n \cap A \neq \phi$ y $X_n \cap B \neq \phi$, pero esto significa que X_n no es conexo, lo cual es una contradicción.
Por tanto X es conexo y por consiguiente continuo.

1.26 *Teorema.* El producto numerable de continuos es continuo.
DEM.
El producto de espacios conexos es conexo [3, Teo 3.13, pág. 150].
El producto de espacios compactos es compacto [3,Teo. 3.16 , pág. 152] .
El producto numerable de espacios métricos es métrico [4, pág. 212-213].

1.27 *Definición.* Una sucesión inversa es una "doble sucesión" $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de espacios , llamados espacios coordenados, y funciones continuas $f_i : X_{i+1} \to X_i$, llamadas funciones de ligadura. Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, entonces el límite inverso de $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es el subespacio del espacio producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definido por:

$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty}\,{}_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \quad \forall\ i\}.$$

1.28 *Proposición.* Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa.
Para cada n =1,2, . . ., se define $Q_n(X_i, f_i)$ de la siguiente forma:
$Q_n(X_i, f_i) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \quad \forall\ i \leq n\}$. Entonces se cumple lo siguiente:

1) $Q_n(X_i, f_i) \supseteq Q_{n+1}(X_i, f_i)\ \forall\ n = 1, 2, \ldots$
2) $Q_n(X_i, f_i)$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\ \forall\ n = 1, 2, \ldots$
3) $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$.

DEM.

1) Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_{n+1}(X_i, f_i)$, entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, donde $f_i(x_{i+1}) = x_i$ $\forall\ i \leq n+1 \leq n$. Por consiguiente $f_i(x_{i+1}) = x_i$ y por tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i)$.

1. Fijemos n, y definamos
   $h : Q_n(X_i, f_i) \to \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ como

$h(x_i)_{i=1}^{\infty} = (x_i)_{i=n+1}^{\infty}$

Es fácil notar que h es homeomorfismo.

2. Es inmediato que $\forall$ n, $Q_n(X_i, f_i) \supseteq \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Por consiguiente $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i) \supseteq \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$ entonces $\forall$ n $f_i(x_{i+1}) = x_i$ de donde $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

$\therefore \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$.

1.29 ***Teorema.*** Cualquier límite inverso de continuos es continuo.

DEM.

Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa donde cada X_i es un continuo.

Para n=1,2,. . . , definimos $Q_n(X_i, f_i)$ como en la Proposición 1.28. Entonces por 1.28 $Q_n(X_i, f_i)$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ $\forall$ n = 1, 2, . . ., y por 1.26 $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ es continuo. Por consiguiente $Q_n(X_i, f_i)$ es continuo $\forall$ n=1, 2, . . .

Además $Q_n(X_i, f_i) \supseteq Q_{n+1}(X_i, f_i)$ $\forall$ n = 1, 2, . . ., entonces por 1.25 $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$ es continuo. Pero $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i) = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

$\therefore \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es continuo.

1.30 ***Definición.*** Sean S_1, S_2 espacios topológicos. Una función $f: S_1 \to S_2$ se llama monótona si f es continua y $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in S_2$.

1.31 ***Teorema.*** Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso X_∞. Para cada i=1,2,. . . , sea $\pi_i : X_\infty \to X_i$ la i-ésima proyección. Sea A un subconjunto compacto de X_∞. Entonces $\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas y además $\varprojlim \{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^{\infty} = A$. [1,Lema 2.6, pág. 20].

1.32 *Teorema.* Sea $X_\infty=\underleftarrow{\lim}\{X_i,f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sean A,B subconjuntos compactos de X_∞, y sea $C=A\cap B$. Para cada i, sea $\pi_i:X_\infty\to X_i$ la i-ésima proyección y $C_i=\pi_i(A)\cap\pi_i(B)$. Entonces $C=\underleftarrow{\lim}\{C_i,f_i|_{C_{i+1}}\}_{i=1}^{\infty}$.

DEM.

Por 1.31 se tiene lo siguiente:

$A=\underleftarrow{\lim}\{\pi_i(A),f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^{\infty}$

$B=\underleftarrow{\lim}\{\pi_i(B),\ f_i|_{\pi_{i+1}(B)}\}_{i=1}^{\infty}$

$C=A\cap B=\underleftarrow{\lim}\{\pi_i(A\cap B),\ f_i|_{\pi_{i+1}(A\cap B)}\}_{i=1}^{\infty}$.

Como $\pi_i(A\cap B)\subseteq\pi_i(A)\cap\pi_i(B)$, se tiene que

$\underleftarrow{\lim}\{\pi_i(A\cap B),f_i|_{\pi_{i+1}(A\cap B)}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\underleftarrow{\lim}\{C_i,f_i|_{C_{i+1}}\}_{i=1}^{\infty}$.

Sea $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\underleftarrow{\lim}\{C_i,f_i|_{C_{i+1}}\}_{i=1}^{\infty}$ y fijemos i de tal forma que $\frac{1}{2^i}<\frac{1}{n}$,

entonces $x_i\in\pi_i(A)\cap\pi_i(B)$ con $f_i(x_{i+1})=x_i$,

de donde $x_i=\pi_i(a_n)=\pi_i(b_n)$ con $a_n\in A$ y $b_n\in B$, entonces

$d(x,a_n)<\frac{1}{2^i}<\frac{1}{n}$

$d(x,b_n)<\frac{1}{2^i}<\frac{1}{n}$, de aquí que

$d(a_n,b_n)<\frac{2}{n}$.

Como A,B son compactos, existen $a\in B$ y $b\in B$ tales que $a_{n_k}\to a$ y $b_{n_k}\to b$, para algunas subsucesuines $\{a_{n_k}\}$de $\{a_n\}$ y $\{b_{n_k}\}$ de $\{b_n\}$

de aquí que $d(a,b)<\frac{2}{n}$, para n suficientemente grande.

Entonces $a=b$ y $a\in A\cap B$.

Además $d(x,a)\leq d(x,a_{n_k})+d(a_{n_k},a)<\frac{2}{n}$, para n suficientemente grande.

Por lo que, entonces $x=a$, de donde $x\in A\cap B$, y entonces $x_i\in\pi_i(A\cap B)$ y por consiguiente $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\underleftarrow{\lim}\{\pi_i(A\cap B),f_i|_{\pi_{i+1}(A\cap B)}\}_{i=1}^{\infty}$.

De esta forma se concluye la igualdad requerida.

1.33 *Teorema.* Si $X=\underleftarrow{\lim}\{X_i,f_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde cada X_i es un continuo de Peano y cada f_i es una función monótona sobre X_i entonces X es un continuo de Peano [1, ejercicio 8.47, pág. 137].

1.34 *Teorema (Anderson-Choquet).* Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa donde cada X_i es un subconjunto compacto, no vacío de X y cada f_i es una función suprayectiva.

Sea

$f_{ij} = f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : X_j \to X_i$ si $j > i+1$ y $f_{ii+1} = f_i$.

Supóngase que:

(1) Para cada $\varepsilon > 0$, existe k tal que para toda p $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i} \in X_k$, diam$[\bigcup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p)] < \varepsilon$.

(2) Para cada i y cada $\delta > 0$, existe $\delta^* > 0$ tal que, siempre que $j > i$ y $p, q \in X_j$ tales que si $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) > \delta$ entonces $d(p,q) > \delta^*$.

Entonces, $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\bigcap_{l=1}^{\infty}(\overline{\bigcup_{m\geq l} X_m})$. En particular, si $X_i \subset X_{i+1}$ para cada i, entonces $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i}$ [1,Teo.2.10, pág. 23].

Capítulo 2

DENDRITAS

A lo largo del presente capítulo se desarrollan varias caracterizaciones de las dendritas, así como de algunas propiedades de las mismas, para lo cual se hace uso de los resultados presentados en el capítulo precedente.
Las caracterizaciones son las siguientes:

a) Un continuo X es dendrita si y sólo si cualesquiera 2 puntos de X son separados por un tercer punto de X.

b) Un continuo X es dendrita si y sólo si todo punto de X es punto de corte o bien es punto terminal.

c) Un continuo X es dendrita si y sólo si la intersección de cualesquiera 2 subconjuntos conexos de X es conexo.

d) Un continuo de Peano X es dendrita si y sólo si X es hereditariamente unicoherente.

2.1 Caracterización por puntos de separación

2.1 *Definición.* Una curva cerrada simple es un continuo que es homeomorfo al círculo unitario $S^1=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2=1\}$.

2.2 *Definición.* Una dendrita es un continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples.

2.3 *Teorema.* Un continuo X es dendrita si y solo si cualesquiera 2 puntos de X son separados en X por un tercer punto de X.

DEM.

$\Rightarrow$)Supongamos que X es dendrita.

Sean $p,q \in X$ tales que $p \neq q$. Como X es arco-conexo [Teo. 1.9], existe un arco A en X de p a q. Sea $r \in A-\{p,q\}$.Sea U la componente de p en $X-\{r\}$.

Afirmamos que $q \notin U$.

> Supongamos que $q \in U$. Nótese que $X-\{r\}$ es abierto y por el Teorema 1.5 U es abierto. Al ser X un continuo de Peano y por el Teorema 1.11 U es arco-conexo, de aquí que existe un arco B en U de p a q. Claramente $A \neq B$ puesto que $r \in A$ y $r \notin B$ de aquí se sigue que $A \cap B$ no es conexo. Por lo que $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple.
>
> Esto contradice el hecho de que X sea dendrita.
>
> Entonces $q \notin U$.

Por consiguiente q debe estar en otra componente de $X-\{r\}$.

Así que r separa a p de q.

$\Leftarrow$)Supongamos que cualesquiera 2 puntos de X son separados por un tercer punto de X. Entonces X no contiene continuos de convergencia (Teo. 1.16). Por consiguiente X es cik para toda $x \in X$ (Teo. 1.15). Por lo tanto X es un continuo de Peano (Teo. 1.5). Claramente X no contiene curvas cerradas simples pues si las tuviera habría 2 puntos de X que no pueden separarse por algún otro punto de X lo cual, contradice la hipótesis.

Entonces X es dendrita.

2.2 Caracterización por puntos terminales y de corte

Para la siguiente caracterización de una dendrita se requiere de las siguientes 2 definiciones, así como de las siguientes 2 proposiciones.

2.4 *Definición.* Sea X un continuo. Un punto $p \in X$ es llamado punto terminal de X si para cada abierto U tal que $p \in U$, existe un abierto V tal que $p \in V \subset U$ y Fr(V) consiste de exactamente un punto.

2.5 *Definición.* Sea X un continuo, un subconjunto C de X se llama conjunto de corte de X si X-C no es conexo. Si $C=\{p\}$, p se llama punto de corte.

2.6 *Proposición.* Sea X un continuo de Peano y $p \in X$ un punto que no es de corte. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$ existe $U \subset X$, abierto y conexo tal que $p \in U$, diam $(U) < \varepsilon$ y X-U es conexo. [2, Proposición 2.4, pág. 27].

2.7 *Proposición.* Sea X un continuo,

a) Si $Ç=\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección no numerable de conjuntos cerrados de corte mutuamente ajenos de X, entonces existe $C \in Ç$ tal que $X \setminus C = U|V$ donde $U \cap (\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha) \neq \varnothing$ y $V \cap (\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha) \neq \varnothing$.

b) Si K es un continuo de convergencia de X, entonces K no contiene colecciones no numerables de conjuntos cerrados de corte mutuamente ajenos de X.

c) Sea $Y=\{p \in X : p$ es un punto de corte de $X\}$. Si $Z \subset X$ y Z es conexo, entonces todos los puntos de $Y \cap Z$ (excepto, quizás, una cantidad numerable de ellos) son puntos de corte de Z.

Demostración de a) Supongamos que no existe $C \in Ç$ que satisfaga a), entonces para toda $\alpha \in I$ podemos escribir

$X-C_\alpha = U_\alpha | V_\alpha$ donde $\bigcup_{j \neq \alpha} C_j \subset U_\alpha$ o $\bigcup_{j \neq \alpha} C_j \subset V_\alpha$.

Es decir, para toda $\alpha \in I$, se puede expresar a $X-C_\alpha$ como la unión de 2 conjuntos, donde uno de ellos, digamos V_α no intersecta a ningún elemento de $Ç$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in I$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, tales que $X-C_{\alpha_1} = U_{\alpha_1} | V_{\alpha_1}$, $X-C_{\alpha_2} = U_{\alpha_2} | V_{\alpha_2}$, con $\bigcup_{\alpha \neq \alpha_1} C_\alpha \subset U_{\alpha_1}$ y $\bigcup_{\alpha \neq \alpha_2} C_\alpha \subset U_{\alpha_2}$.

Afirmación: X= $(U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})\cup(V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2})$

$\supseteq$] Es clara

$\subseteq$] Sea $x\in X$, entonces

$x\in(U_{\alpha_1}\cup V_{\alpha_1}\cup C_{\alpha_1})\subset(U_{\alpha_1}\cup V_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})$ y

$x\in(U_{\alpha_2}\cup V_{\alpha_2}\cup C_{\alpha_2})\cup(U_{\alpha_2}\cup V_{\alpha_2}\cup U_{\alpha_1})$.

Así que $x\in(U_{\alpha_1}\cup V_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})\cap(U_{\alpha_2}\cup V_{\alpha_2}\cup U_{\alpha_1})$

$=((U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})\cup V_{\alpha_1})\cap((U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})\cup V_{\alpha_2})$

$=(U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})\cup(V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2})$.

Por tanto X= $(U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})\cup(V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2})$.

Observemos que $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}$ son abiertos de X, por lo que $V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2}$ es abierto.

Notemos que $(U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})\cap(V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2})$

$=(U_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2})\cup(U_{\alpha_2}\cap V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2})=\varnothing$.

Por lo que $(U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})$ y $(V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2})$ formarían una disconexión de X. Como X es conexo concluimos que $V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2}=\varnothing$ para cualesquiera $\alpha_1,\alpha_2\in I$.

Por otra parte, como X es separable, X contiene un subconjunto denso numerable D. Entonces para cada $\alpha\in I$, $D\cap V_\alpha\neq\varnothing$, lo cual es una contradicción, puesto que, entonces, D no sería numerable.

Demostración de b) Sea **Ç** como en a). Supongamos que $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha\subset K$.

Por a), existe $C\in$ **Ç** tal que X-C=U|V donde $U\cap(\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha)\neq\varnothing$ y $V\cap(\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha)\neq\varnothing$.

Sean $x\in U\cap(\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha)$, $y\in V\cap(\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha)$, entonces, como $x\in U$ y $y\in V$, tenemos que C separa a x de y en X, entonces K no es continuo de convergencia [Teo. 1.16].

Lo anterior implica que a lo más una cantidad numerable de puntos de K pueden ser puntos de corte de X, y entonces, K contiene una cantidad no numerable de puntos que no son de corte de X.

Demostración de c).Sea $A=\{p\in Y\cap Z : Z-\{p\}$ es conexo$\}$.

Demostraremos que A es numerable. Supongamos, por el contrario, que A no es numerable. Sea **Ç**$=\{\{p\} : p\in A\}$. Entonces **Ç** satisface las condiciones del inciso a). Por tanto existe $p_0\in A$ tal que X-$\{p_0\}$=U|V,

$U\cap A \neq \varnothing$ y $V\cap A\neq \varnothing$. Por otro lado, $Z-\{p_0\}$ es conexo, entonces $Z-\{p_0\}\subset U$ o $Z-\{p_0\}\subset V$. Supongamos que $Z-\{p_0\}\subset U$, entonces $(Z-\{p_0\})\cap V=\varnothing$ y $A-\{p_0\}\subset Z-\{p_0\}$. Por lo que $(A-\{p_0\})\cap V=\varnothing$. Además $p_0 \notin V$. Por tanto $A\cap V=\varnothing$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto A es numerable.

2.8 *Teorema*. Un continuo X es dendrita si y solo si todo punto de X es punto de corte o punto terminal.

DEM.

$\Rightarrow$)Supongamos que X es una dendrita no degenerada, p un punto que no es de corte de X y $\varepsilon>0$.

Entonces, por 2.6, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p\in U$, diam $(U)<\varepsilon$ y X-U es conexo.

Supongamos que $|Fr(U)|\geq 2$.

Como X es localmente arco-conexo [Teo. 1.10] y U es un subconjunto abierto de X, existen $q,r\in Fr(U), q\neq r$ tales que q,r son arco-accesibles desde U [Teo. 1.13].

Como U es arco-conexo [Teo 1.11], existe un arco A en $U\cup\{p,q\}$ de q a r.

Notemos que $q,r\in X-U$ y que X-U es conexo, así que X-U es un subconjunto cerrado y conexo de X , por lo que X-U es un continuo de Peano.

Entonces existe un arco B en X-U de q a r. Claramente $A\cup B$ es una curva cerrada simple. Esto contradice el hecho de que X sea dendrita.

$\therefore |Fr(U)|\leq 1$. Pero como X es un continuo no degenerado, se sigue entonces que $|Fr(U)|=1$, por lo que, entonces, p es un punto terminal.

$\Leftarrow$)Supongamos que cada punto de X es punto de corte o punto terminal de X, entonces $K=\{\{p\}$ donde p es punto de corte de $X\}$ es una colección no numerable de conjuntos cerrados de corte mutuamente ajenos. Se sigue [Prop. 2.7 b] que X no contiene continuos de convergencia. Entonces X es hlc. En particular X es un continuo de Peano.

Supongamos que X contiene una curva cerrada simple Z. Claramente ningún punto de Z puede ser punto terminal de X. Entonces cada punto de Z es punto de corte de X. Entonces [Prop. 2.7], estos puntos también son puntos de corte de Z, esto contradice que Z sea curva cerrada simple. Por consiguiente X no contiene curvas cerradas simples.

$\therefore$X es dendrita.

2.3 Algunas propiedades

2.9 *Teorema.* Toda dendrita es regular.

DEM.

Sea X una dendrita y $p,q \in X$.

Entonces existe z en X tal que z separa a p de q en X [Teo. 2.3]

Como $\{z\}$ es finito, se tiene que X es regular [Teo. 1.23].

2.10 *Definición.* Un punto p de una dendrita X se llama punto de ramificación de X si para cada abierto U tal que $p \in U$, existe un abierto V tal que $p \in V \subset U$ y $|Fr(U)|>2$.

2.11 *Teorema.* El conjunto de puntos de ramificación de una dendrita es a lo más numerable [1, Teo. 10.23, pág. 174].

2.12 *Teorema.* Toda dendrita es hlc

DEM.

Sea X una dendrita.

Por 2.3, cualesquiera 2 puntos de X están separados por un tercer punto de X, entonces, por 1.16 X no contiene continuos de convergencia y por 1.17 X es hlc.

2.13 *Teorema.* Todo subcontinuo de una dendrita es dendrita.

DEM.

Sea X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Entonces Y es localmente conexo (Cor.2.4). Claramente Y no contiene curvas cerradas simples, pues si las tuviera X también las tendría y esto contradice el hecho de que X sea dendrita. De aqui que Y es un continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples.

$\therefore$ Y es dendrita.

2.4 Caracterización por conexidad de subconjuntos

2.14 *Proposición.* Todo subconjunto conexo de una dendrita es arco-conexo.

DEM.

Sea C un subconjunto conexo no degenerado de una dendrita X y p,q $\in$C con p$\neq$q. Como $\overline{C}$ es subcontinuo de X, se tiene que $\overline{C}$ es dendrita [Teo.2.13], por tanto existe un arco A en $\overline{C}$ de p a q.

Mostraremos que A$\subset$C.

Como C es conexo ningún punto de $\overline{C}$-C es punto de corte de $\overline{C}$ y como $\overline{C}$ es dendrita, cada punto de $\overline{C}$-C es punto terminal de $\overline{C}$ [Teo. 2.8].

Ahora, los únicos puntos de A que pueden ser puntos terminales de $\overline{C}$ son p y q y como p,q$\in$C, tenemos que A$\cap$ ($\overline{C}$-C)= ϕ.

Así que A$\subset$C.

$\therefore$ C es arco-conexo.

2.15 *Teorema.* Un continuo X es dendrita si y sólo si la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es conexo.

DEM.

$\Rightarrow$)Sean C_1, C_2 subconjuntos conexos de X.

Supongamos que $C_1 \cap C_2$ no es conexo.

Sean p,q puntos de diferentes componentes de $C_1 \cap C_2$.

Como p,q$\in C_1$ y p,q$\in C_2$ entonces, por 2.14,

existe un arco A_1 en C_1 de p a q , y existe un arco A_2 en C_2 de p a q.

Claramente $A_1 \cap A_2$ no es conexo. Entonces $A_1 \cup A_2$ contiene una curva cerrada simple. Lo cual contradice que X sea dendrita.

Por consiguiente $C_1 \cap C_2$ es conexo.

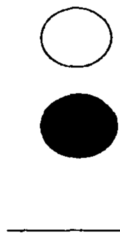
$\Leftarrow$)Supongamos que la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos es conexo .(*)

Supongamos que X tiene un continuo de convergencia K.
Sea Ç una familia no numerable de conjuntos cerrados de corte mutuamente ajenos de K. Entonces [Prop. 2.7 b], existe $C \in$ Ç tal que X-C es conexo.

Entonces por (*) $K \cap (X-C)$ es conexo.
Pero esto no es posible, pues $K \cap (X-C) = K-C$ y C es conjunto de corte de K. Entonces X no contiene continuos de convergencia, de aquí que X es hlc [Teo. 1.17].
Claramente la hipótesis implica que X no contiene curvas cerradas simples.
$\therefore$ X es dendrita.

2.5 Caracterización por unicoherencia

2.16 *Definición.* Un continuo X se llama unicoherente si siempre que se tengan A,B subcontinuos de X tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Si todo subcontinuo de X es unicoherente entonces X se llama hereditariamente unicoherente (h.u.).



Este continuo no es unicoherente y por lo tanto no es hereditariamente unicoherente

Este continuo es unicoherente, pero no es hereditariamente unicoherente.

Este continuo es hereditariamente unicoherente y por lo tanto unicoherente

Figura 3. Unicoherencia

2.17 *Teorema.* Un continuo de Peano X es dendrita si y sólo si X es h.u.

DEM.

$\Rightarrow$)Sea X dendrita, Y subcontinuo de X y C_1, C_2 subcontinuos de Y tales que $Y = C_1 \cup C_2$.

Como C_1, C_2 son subcontinuos de Y, entonces también lo son de X, así que C_1, C_2 son subconjuntos conexos de X. Por consiguiente $C_1 \cap C_2$ es conexo. [Teo. 2.10].

$\Leftarrow$)Sea X un continuo de Peano h.u.

Una curva cerrada simple no es unicoherente, por consiguiente X no contiene curvas cerradas simples.

$\therefore$ X es dendrita.

2.18 *Teorema.* Cualquier límite inverso de dendritas con funciones de ligadura monótonas y sobres es dendrita.

DEM.

Sea $X_\infty=\varprojlim\{X_i,f_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde cada X_i es dendrita y cada f_i es monótona.

Para probar que X_∞ es dendrita probaremos 2 cosas:

a) X_∞ es h.u.

b) X_∞ es continuo de Peano.

Así por el Teo. 2.17 X_∞ es dendrita.

a) X_∞ es h.u.

Por 1.29 X_∞ es continuo.

Sean A,B subcontinuos de X_∞ y $C=A\cap B$

Para cada i=1,2, . . . , Sea $C_i=\pi_i(A)\cap\pi_i(B)$ con $\pi_i:X_\infty\to X_i$ la i-ésima proyección. Entonces por el teo. 1.32 $C=\varprojlim\{C_i,f_i|_{C_{i+1}}\}_{i=1}^{\infty}$.

Como π_i es continua y A,B son continuos, $\pi_i(A),\pi_i(B)$ son subcontinuos de X_i. Entonces cada C_i es continuo y por 1.29 C es un continuo y por lo tanto conexo.

b) X_∞ es continuo de Peano

Imnediato a partir del teo. 1.33.

Capítulo 3

Ejemplos

Finalmente, en este último capítulo se desarrollan 4 ejemplos y se demuestran 2 teoremas, todos relacionados de alguna forma con las dendritas.
Se utilizan las caracterizaciones así como las propiedades desarrolladas en el capítulo anterior.

Los "ejemplos" vienen, por decirlo de alguna forma, agrupados de 2 en 2.

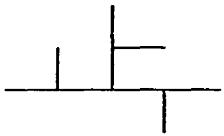
Los primeros 2 tratan sobre los puntos de ramificación y de no ramificación de una dendrita.

Los siguientes 2 tratan sobre la condición hereditaria de conexidad local en la unión de dendritas.

Finalmente los últimos 2 tratan sobre la relación que guardan las dendritas con los continuos regulares.

3.1 Ejemplo de una dendrita D donde el conjunto de puntos de ramificación es denso en D.

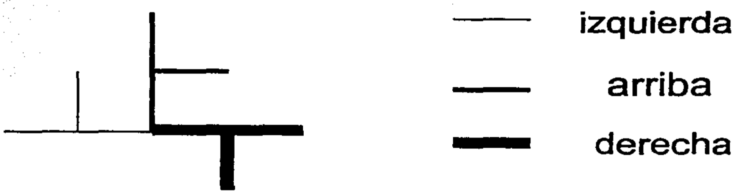
Daremos primero algunas definiciones:



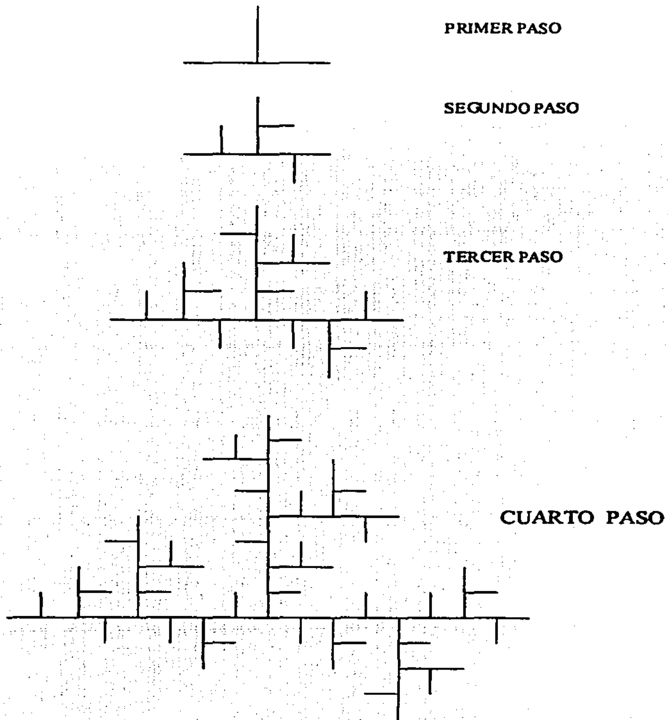
T_f

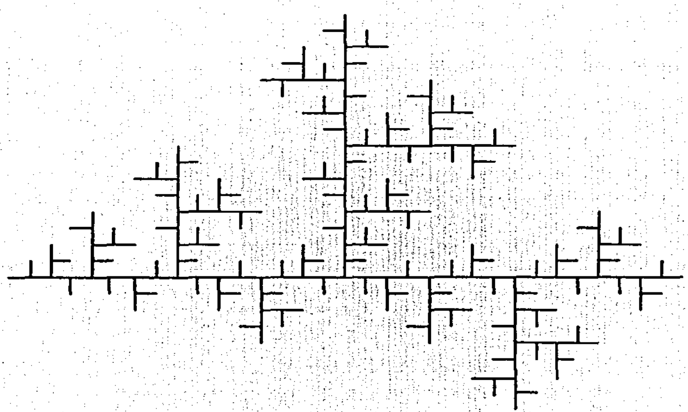
T_c

Observación: Los T_f y T_c, están formados por 3 triodos, los identificaremos como el triodo de la izquierda, el triodo de arriba y el triodo de la derecha.

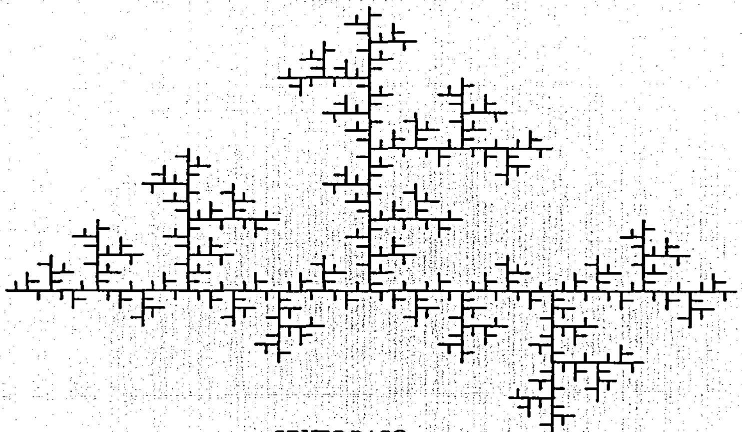


Instrucciones para las ramificaciones:
Si tenemos un T_f, las ramificaciones que se añadan, harán que el triodo de la izquierda se transforme en T_f, el de arriba se transforme en T_c y el de la derecha se transforme en T_c. ($T_f \rightarrow T_f, T_c, T_c$)
Si tenemos un T_c, las ramificaciones que se añadan, harán que el triodo de la izquierda se transforme en T_f, el de arriba se transforma en T_f y el de la derecha se transforme en T_c. ($T_c \rightarrow T_f, T_f, T_c$).



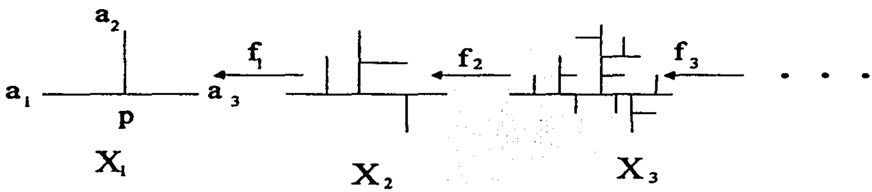


QUINTO PASO



SEXTO PASO

Ahora demostraremos que este procedimiento nos lleva a la dendrita buscada.
Consideremos el siguiente diagrama:



En X_1 cada uno de los segmentos $\overline{pa_i}$, $i = 1, 2, 3$, tiene longitud igual a 1.
Obtenemos X_2 como la unión de X_1 y 3 segmentos de longitud $\frac{1}{2}$, donde estos segmentos se añaden de tal forma que X_2 sea un T_f, como se indica en el paso 2.
Obtenemos X_3 como la unión de X_2 y 9 segmentos de longitud $\frac{1}{4}$, donde estos segmentos se añaden como se indica en el 3^{er} paso y según las instrucciones.
Obtenemos X_4 como la unión de X_3 y 27 segmentos de longitud $\frac{1}{8}$, donde estos segmentos se añaden como se indica en el 4° paso y según las instrucciones.
Obtenemos X_n como la unión de X_{n-1} y 3^{n-1} segmentos de longitud $\frac{1}{2^{n-1}}$, donde estos segmentos se añaden según las instrucciones.
Como se puede observar, cada X_i es dendrita y $X_{i+1} \supset X_i$.
Observación: La menor distancia que existe entre 2 puntos de ramificación en X_n es $\frac{1}{2^{n-1}}$. Es más, dado cualquier punto $p \in X_n$ existe un punto de ramificación r tal que $d(p,r) < \frac{1}{2^{n-1}}$ (*)
Las funciones de ligadura están definidas de la siguiente manera:

$$f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$$

$$f_i(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in X_i \\ x_0 \text{ donde } x_0 \text{ es tal que el arco } \overline{xx_0} \cap X_i = \{x_0\} \end{cases}$$

Mostraremos que las funciones de ligadura son
a) monótonas y
b) sobres.
Así por el Teo. 2.18 $\varprojlim_{i=1}^{\infty} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es dendrita.

a) Cada f_i es monótona
Sea $y \in X_n$

i) $f_n^{-1}(y)$ es conexo
pues $f_n^{-1}(y) = y$ o bien $f_n^{-1}(y) = \overline{yy_0}$, donde y_0 es tal que el arco $\overline{yy_0} \cap X_{n+1} = \{y_0\}$ y en ambos casos $f_n^{-1}(y)$ es conexo.

ii) f_n es continua
Sean $x,y \in X_{n+1}$. Sea $\varepsilon > 0$
Caso 1. $f_n(x) = x$, $f_n(y) = y$.
Tomamos $\delta = \varepsilon$. Entonces si $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(y)) = d(x, y) < \delta = \varepsilon$.
Caso 2. $f_n(x) = x$, $f_n(y) = y_0$, donde y_0 es tal que el arco $\overline{yy_0} \cap \{X_n\} = \{y_0\}$.
Tomamos $\delta < \varepsilon - \frac{1}{2^n}$.
Si $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(y)) = d(x, y_0) \leq d(x,y) + d(y, y_0) < \delta + \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.
Caso 3. $f_n(x) = x_0$, donde x_0 es tal que el arco $\overline{xx_0} \cap \{X_n\} = \{x_0\}$ y
$f_n(y) = y_0$, donde y_0 es tal que el arco $\overline{yy_0} \cap \{X_n\} = \{y_0\}$.
Tomamos $\delta < \varepsilon - \frac{1}{2^{n-1}}$.
Si $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(y)) = d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x,y) + d(y, y_0) < \frac{1}{2^n} + \delta + \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

b) Evidentemente f_n es sobre para toda n.

Por el teorema 2.18 se tiene que $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es dendrita.
Llamamos D a esta dendrita.
Mostraremos ahora que se cumplen las hipótesis del Teorema de Anderson-Choquet. [1, Teo. 2.10, pág. 23].
$\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa donde cada X_i es un compacto, no vacío y cada f_i es un mapeo sobre X_i.
$f_{ij} = f_i \circ \ldots \circ f_{j-1}$ si $j > i+1$ y $f_{ii+1} = f_i$.
La primera condición del Teorema de Anderson-Choquet dice:
i) Para cada $\varepsilon > 0$, $\exists$ k tal que para toda $p \in X_k$, diam $\left| \bigcup_{p>k} f_{kj}^{-1}(p) \right| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ y k tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$, $p \in X_k$.

Entonces $\operatorname{diam}\left[\bigcup_{j>k} f_{jk}^{-1}(p)\right] \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+j}} + \ldots = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$.

Una equivalencia de la segunda condición del Teorema de Anderson-Choquet dice:
ii) Para cada i y cada $\delta > 0$, existe $\delta^* > 0$ tal que si $j > i$, $p,q \in X_j$, se tiene que si $d(p,q) < \delta^*$ entonces $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) < \delta$.
Fijemos i.
Sea $\delta > 0$, $j > i$.
Sea $\delta^* < \frac{1}{2^{j-1}} < \delta$ y $p,q \in X_j$ tales que $d(p,q) < \delta^*$.
Por la observación (*), se tiene que a lo más hay un punto de ramificación r, tal que $d(r,p) < \delta^*$ y $d(r,q) < \delta^*$.
Por consiguiente, para todo punto z tal que $d(z,p) < \delta^*$ y $d(z,q) < \delta^*$ se tiene que $f_{j-1}(z) = z$ o bien $f_{j-1}(z) = r$. En ambos casos $d(f_{j-1}(p), f_{j-1}(q)) < \delta^*$.
Como la composición de funciones continuas en un compacto es uniformemente continua se tiene que f_{ij} es uniformemente continua y por tanto $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) < \delta^* < \delta$.

Por el Teorema de Anderson-Choquet $D = \underleftarrow{\lim}\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i}$.
Probaremos ahora que cualquier abierto, no vacío U de D, tiene puntos de ramificación de D.
Sea U un abierto tal que $U \cap D \neq \phi$. Entonces existe un arco $A = [p,q]$ tal que $A \subset U \cap D$ [Teo 1.11]. Por la observación (*) existen 2 puntos de ramificación a,b tales que $d(a,b) < \frac{1}{2^{j-1}} < d(p,q)$. Por tanto a,b son puntos de ramificación que están en U.
Por lo tanto el conjunto de puntos de ramificación es denso en D.

Como se puede observar, el conjunto de puntos que no son de ramificación también es un conjunto denso. Esto no es casualidad como podrá verse en el siguiente teorema.

3.2 Teorema. Sea X una dendrita y NR (X) $=\{x\in X$: x no es punto de ramificación de X}. Entonces NR es denso en X.

DEM.

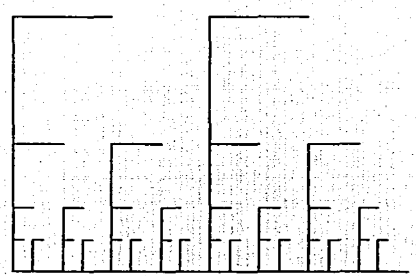
Demostraremos que si U es abierto y $U\neq\phi$ entonces $U\cap NR\neq\phi$.

Sea U abierto, no vacío y $p\in U$. Se sigue por la conexidad por trayectorias que existe un arco A que contiene a p; así $A\cap U\neq\phi$. Más aún, $A\cap U$ no es numerable. Como el conjunto de puntos de ramificación en una dendrita es a lo más numerable (Teo. 2.15), entonces existe $q\in A\cap U$ tal que $q\in NR(X)$.

Por tanto NR(X) es denso en X.

3.3 Ejemplo de 2 continuos D_1, D_2 hlc, donde $D_1 \cup D_2$ es un continuo que no es hlc.

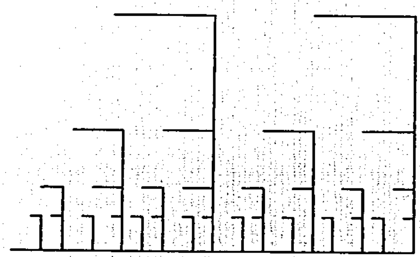
Consideremos $A_{0,0}=\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$.
Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ y cada $m = 0, 2, 4, \ldots, 2^{n+1} - 2$,
Sea $A_{n,m}=\{(x,2^{-n-1}) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{m}{2^{n+1}}, \frac{m+1}{2^{n+1}}\right]\}$.
Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ y cada m tal que $0 \leq m \leq 2^{n+1} - 1$.
Sea $B_{n,m}=\{(m \cdot 2^{-n-1}, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$.
Finalmente, Sea $D_1=\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{2^{n+1}-1} A_{n,m}\right] \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{2^{n+1}-1} B_{n,m}\right]$.



D_1

Como cualquier punto $x \in D_1$ es punto terminal o bien punto de corte, se tiene que D_1 es dendrita [Teo. 2.8], y por lo tanto D_1 es hlc [Teo. 2.16].

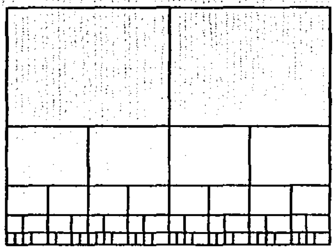
Consideremos ahora $C_{0,0}=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1\}$.
Para cada n = 1, 2, 3, . . . y cada m = 0, 2, 4, . . . , $2^{n+1}-2$,
Sea $C_{n,m}=\left\{(x,2^{-n+1})\in\mathbb{R}^2 : x\in\left[\frac{m+1}{2^{n+1}},\frac{m+2}{2^{n+1}}\right]\right\}$.
Para cada n = 0, 1, 2, . . . y cada m tal que $0< m\leq 2^{n+1}-1$.
Sea $E_{n,m}=\{((m+1)\cdot 2^{-n-1},y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 2^{-n}\}$.
Finalmente Sea $D_2=\left[\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{2^{n+1}-1}C_{n,m}\right]\cup\left[\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{2^{n+1}-1}E_{n,m}\right]$



D_2

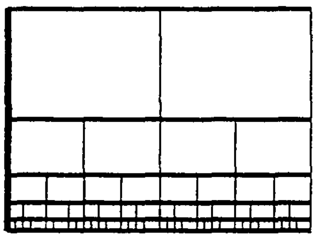
Como cualquier punto x de D_2 es punto terminal o punto de corte, se tiene que D_2 es dendrita [Teo. 2.10], y por lo tanto D_2 es hlc [Teo. 2.16].

Unamos ahora D_1 con D_2.



$D_1 \cup D_2$

Obsérvese que este continuo no es hlc por contener un peine. (este se muestra en un tono más fuerte en la siguiente figura).



Peine contenido en $D_1 \cup D_2$

Por este motivo nos preguntamos: ¿bajo qué condiciones la unión de dendritas es dendrita?

3.4 Teorema. Sea X un continuo tal que $X=D_1 \cup D_2$, D_i dendrita, $i=1,2$. Entonces, X es dendrita si y sólo si $D=D_1 \cap D_2$ es conexo, no vacío.

$\Rightarrow$) Como X es dendrita, entonces X es unicoherente y como D_1, D_2 son subcontinuos de X tales que $X=D_1 \cup D_2$, entonces $D=D_1 \cap D_2$ es conexo, no vacío.

$\Leftarrow$)Primero mostraremos que X es localmente conexo.
Sea $p \in X$, N abierto en X tal que $p \in N$. Demostraremos que existe U abierto y conexo en X tal que $p \in U \subseteq N$.

Caso 1. $p \in D_1 \setminus D_2$, entonces $N^*=N \cap D_1$ es abierto en D_1 y $p \in N^*$.
Como D_1 es localmente conexo, existe U abierto y conexo en D_1 tal que $p \in U \subseteq N^*$. Como $U \subseteq D_1 \setminus D_2$, U es abierto y conexo en X.

Caso 2, $p \in D=D_1 \cap D_2$.
Sea E_i una vecindad conexa de p en D_i (i=1,2).
Entonces $p \notin \overline{D_i \setminus E_i}$ (Nótese que $\overline{D_i \setminus E_i} = \overline{D_i \setminus E_i}^{(D_i)}$)
Así que $p \notin \overline{D_1 \setminus E_1} \cup \overline{D_2 \setminus E_2}$.
Ahora $\overline{D_1 \setminus E_1} \cup \overline{D_2 \setminus E_2} \supseteq [D_2 \setminus (E_1 \cup E_2)] \cup [D_1 \setminus (E_1 \cup E_2)] = (D_1 \cup D_2) \setminus (E_1 \cup E_2)$.
Entonces $p \notin \overline{(D_1 \cup D_2) \setminus (E_1 \cup E_2)}. = \overline{X \setminus (E_1 \cup E_2)}$
Por tanto, la vecindad conexa de $X=D_1 \cup D_2$ que tiene a p en su interior es $E_1 \cup E_2$.
$\therefore$ X es localmente conexo en p.

Mostraremos ahora que cualesquiera 2 puntos de X están unidos por un único arco.
Sean $p,q \in X$.
Caso 1. $p,q \in D_1$.
Como D_1 es dendrita, existe un único arco $[p,q] \subset D_1 \subset X$.
Supongamos que existe otro arco α en X que une a p con q.

Como D_1 es dendrita, $\alpha \not\subset D_1$, pues D_1 tendría una curva cerrada simple. Así que $\alpha \cap D_2 \backslash D_1 \neq \varnothing$ (digamos que $a \in \alpha \cap D_2 \backslash D_1$) y $\alpha \cap D \neq \varnothing$ (digamos $b \in \alpha \cap D$). Además α intersecta a D en otro punto $c \neq b$ (pues si b=c, entonces $[b,a] \cup [a,c]$ es una curva cerrada simple contenida en D_2).
Así que $b,c \in D$. Pero D es dendrita, por ser subcontinuo de D_2, entonces existe un arco $[b,c] \subset D$. Pero, entonces $[p,q] \cup [p,b] \cup [b,c] \cup [c,q]$ es una curva cerrada simple contenida en D_1. Lo cual no es posible, pues contradice el hecho de que D_1 sea dendrita.
Por tanto $[p,q]$ es el único arco que une a p con q en X.
Caso 2. $p \in D_1 \backslash D_2$, $q \in D_2 \backslash D_1$.
$X = D_1 \cup D_2$ es arco-conexo, pues D_i lo es y $D \neq \varnothing$.
Entonces existe $[p,q]$ en X.
Supongamos que existe otro arco α que los une.
$[p,q] \cap D \neq \varnothing$ y $\alpha \cap D \neq \varnothing$.
Además $[p,q] \cap \alpha = \{p,q\}$

En efecto.

Supongamos que existe $r \notin \{p,q\}$ tal que $r \in [p,q] \cap \alpha$.

Si $r \in D_1$, entonces $[p,r] \cup [r,p]$ (con $[p,r] \subset \alpha$ y $[r,p] \subset [p,q]$) es una curva cerrada simple contenida en D_1.

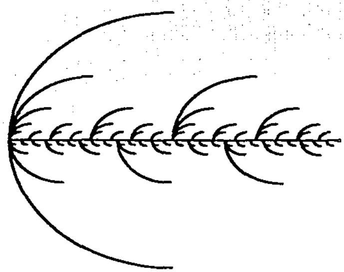
Análogamente si $r \in D_2$.

Por lo que existen $r,s \in D$, $r \neq s$, $r \in [p,q]$, $s \in \alpha$.
Como D es dendrita, por ser subcontinuo de D_1, existe un arco $[r,s] \subset D$.
Entonces, $[p,r] \cup [r,s] \cup [s,p]$ es una curva cerrada simple contenida en D_1, lo cual no es posible, pues contradice el hecho de que D_1 sea dendrita.
Por tanto $[p,q]$ es el único arco que une a p con q en X.

$\therefore$ X es dendrita.

3.5 Ejemplo de 2 continuos regulares D_1, D_2 tales que $X = D_1 \cup D_2$ es un continuo que no es regular.

Sea $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\}$.
Para cada n= 1, 2, . . . , y cada k= 1, 2, . . . 2^{n-1}
Sea $D_{n,k} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + y^2 = 4^{-n}, \text{ con } y \ge 0,\ x \le \frac{2k-1}{2^n}\right\}$
Para cada n=0, 1, 2, . . . , y cada k = 1, 3, . . . , 3^n
Sea $E_{n,k} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{2k-1}{2\cdot 3^n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\cdot 9^{\ n}, \text{ con } y \le 0,\ x \le \frac{2k-1}{2\cdot 3^n}\right\}$
Finalmente Sea $D_1 = A \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} D_{n,k}\right] \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{3^n} E_{n,k}\right]$

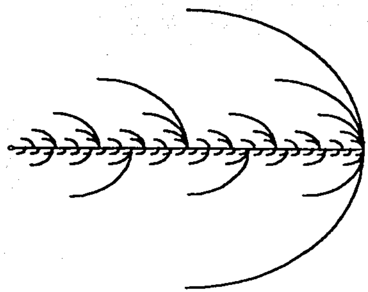


D_1

D_1 es continuo. Es más, D_1 es dendrita, pues cualesquiera 2 puntos de D_1, son separados por un tercer punto de D_1 [Teo. 2.3].

Por tanto D_1 es regular [Teo. 2.13].

Sea $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1\}$.
Para cada n= 1, 2, . . . , y cada k= 1, 2, . . . 2^{n-1}
Sea $F_{n,k} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + y^2 = 4^{-n}, \text{ con } y \geq 0,\ x \geq \frac{2k-1}{2^n}\right\}$.
Para cada n=0, 1, 2, . . . , y cada k = 1, 3, . . . , 3^n
Sea $G_{n,k} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{2k-1}{2\cdot 3^n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\cdot 9^{-n}, \text{ con } y \leq 0,\ x \geq \frac{2k-1}{2\cdot 3^n}\right\}$.
Finalmente, sea $D_2 = A \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} F_{n,k}\right] \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{3^n} G_{n,k}\right]$.

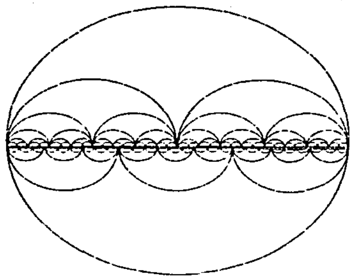


D_2

D_2 es continuo, es más D_2 es dendrita pues cualesquiera 2 puntos de D_2 son separados por un tercer punto de D_2 [Teo. 2.3].

Por tanto D_2 es un continuo regular [Teo. 2.13].

Unamos ahora D_1 con D_2.



$D_1 \cup D_2$

Mostaremos que $D_1 \cup D_2$ no es regular. Para ello mostraremos que existen 2 puntos en X tales que no pueden separarse con un número finito de puntos.
Sean $x, y \in A$.
Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$, k puntos en A tales que $x < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < y$.
Tomemos un punto $y_1 \in (D_{n,k} \cup E_{n,k}) \cap A$ tal que $x < y_1 < x_1$ y el otro extremo (y_{11}) de la semicircunferencia que contiene a y_1 sea tal que $x_1 < y_{11} < x_2$.
Tomamos un punto $y_2 \in (D_{n,k} \cup E_{n,k}) \cap A$ tal que $y_{11} < y_2 < x_2$ y el otro extemo (y_{22}) de la semicircunferencia que contiene a y_2 sea tal que $y_2 < y_{22} < x_3$.
Continuamos el proceso hasta $x_k < y_{kk} < y$.
A las semicircunferencias obtenidas se les añaden los segmentos $\overline{xy_1}$, $\overline{y_{11}y_2}$, . . . , $\overline{y_{kk}y}$.
Con esto mostramos que no podemos separar a x de y con una cantidad finita de puntos.

$\therefore$ $X = D_1 \cup D_2$ es un continuo que no es regular.

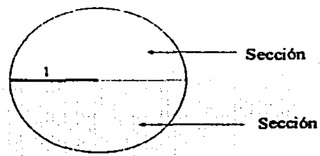
3.6 Ejemplo de un continuo regular que no es unión finita de dendritas.

(Fund. Math. 22. 1934. "Sur la décomposition des courbes régulières en dendrites". Karol Borsuk).

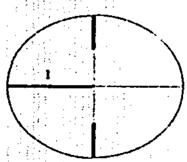
La construcción de este continuo requiere de la construcción de otros continuos.
Para construir el primero de éstos, se tomarán en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los segmentos que se tracen, se trazarán a partir de la circunferencia.
- Cuando se trace un segmento se especificará su longitud.
- También se trazará la prolongación de dicho segmento hasta formar un diámetro (a esta línea le llamaremos su línea auxiliar).

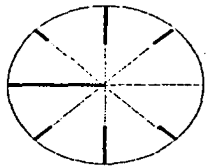
Comenzamos con $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$, trazamos un radio (línea de longitud 1) y trazamos su línea auxiliar.



Cada sección se divide en 2 partes iguales, trazando en cada una de ellas un semi-radio de longitud $\frac{1}{2}$, junto con su línea auxiliar. Se forman 4 secciones.



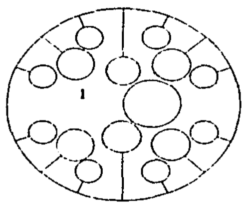
Cada sección se divide en 2 partes iguales, trazando en cada una de ellas un semi-radio de longitud $\frac{1}{4}$, junto con su línea auxiliar.



Este proceso se continúa indefinidamente. Borramos ahora las líneas auxiliares.

En cada uno de los extremos de estas líneas trazamos una circunferencia con el radio adecuado, para que cualesquiera dos de ellas no se intersecten.

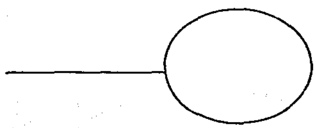
A este continuo le llamaremos C_2.



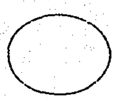
C_2

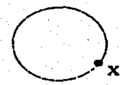
Definiciones:

Paleta (P) :

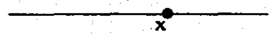


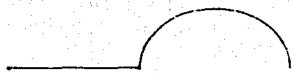
Circunferencia de paleta (C_p) :



Circunferencia de paleta que contiene a x (C_{px}) : 

Arco de paleta (A_p) :

Arco de paleta que contiene a x (A_{px}) : 

Semipaleta (S_p) : 

Observaciones:

1) C_2 es regular.

Demostraremos que cualesquiera 2 puntos pueden separarse con un número finito de puntos.

Sean $x , y \in C_2$.

a) Si $C_{px}=C_{py}$, quitamos 2 puntos z_1, z_2 diametralmente opuestos, tales que $d(z_1,x)=d(z_1,y)$.

b) Si $C_{px} \neq C_{py}$, quitamos cualquier punto del A_p que intersecta a C_{px}.

c) Si $A_{px}=A_{py}$, quitamos cualquier punto entre ellos.

d) Si $A_{px} \neq A_{py}$, quitamos cualquier punto z tal que $d(z,S_1) < d(x,S_1)$.

2) C_2 no es la unión de 2 dendritas.
Supongamos que $C_2=D_1 \cup D_2$, D_i dendrita, i=1, 2.
Como $S_1 \cap D_1$ no contiene curvas cerradas simples, entonces $S_1 \cap D_2$ contiene un arco α tal que $\alpha \cap D_1=\varnothing$.
Esto implica que para cualquier paleta P , tal que $P \cap \alpha \neq \varnothing$, se tiene que $P \subset D_2$. Pero esto no es posible, pues D_2 tendría curvas cerradas simples y esto contradice el hecho de que D_2 sea dendrita.

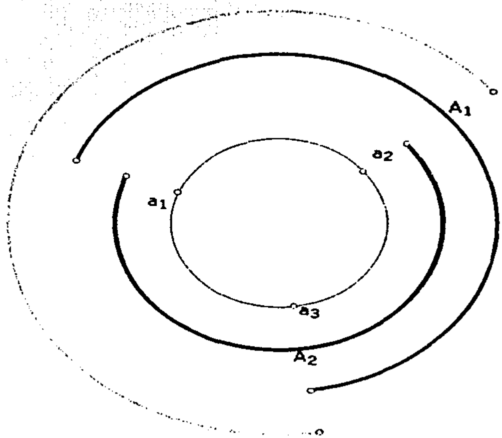
3) C_2 es la unión de 3 dendritas.

Tomemos 3 puntos $a_1, a_2, a_3 \in S_1$ que no sean de ramificación. Considerense los 3 arcos siguientes, marcados en el sentido de las manecillas del reloj.

Sean $A_1 = \widehat{a_1 a_3}$

$A_2 = \widehat{a_2 a_1}$

$A_3 = \widehat{a_3 a_2}$



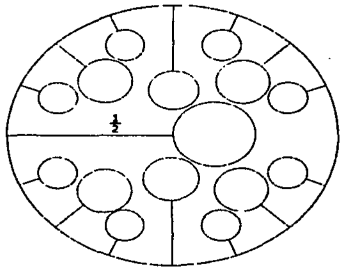
Si una paleta P es tal que $P \cap A_1 \neq \varnothing$ y $P \cap A_2 \neq \varnothing$, entonces P la expresamos como la unión de 2 semipaletas, una de ellas la pintamos de color K_1 y la otra de color K_2.

Si una paleta P es tal que $P \cap A_2 \neq \varnothing$ y $P \cap A_3 \neq \varnothing$, entonces P la expresamos como la unión de 2 semipaletas, una de ellas la pintamos de color K_2 y la otra de color K_3.

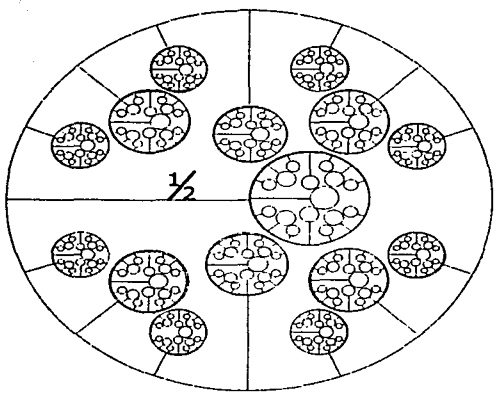
Si una paleta P es tal que $P \cap A_1 \neq \varnothing$ y $P \cap A_3 \neq \varnothing$, entonces P la expresamos como la unión de 2 semipaletas, una de ellas la pintamos de color K_1 y la otra de color K_3.

Consideremos ahora a $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=\frac{1}{4}\}$.

Hacemos la misma construcción que se hizo para C_2 (salvo que en este caso el radio es de longitud $\frac{1}{2}$). Obteniendo lo siguiente:



Dentro de cada C_p se hace la misma construcción. Obteniendo C_3.



C_3

Observaciones:

1) C_3 es regular.
Se argumenta de la misma forma en que se argumenta que C_2 es regular.

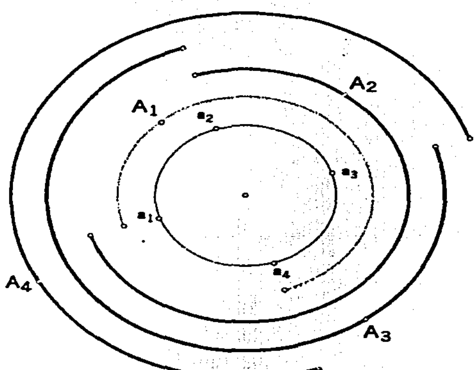
2) C_3 no es unión de 3 dendritas.
Supongamos que $C_3 = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, con D_i dendrita, $i=1, 2, 3$.
En particular $S_2 \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$.
Como $S_2 \cap D_1$ no contiene curvas cerradas simples, entonces existe un arco α tal que $\alpha \subset D_2 \cup D_3$.
Por lo tanto. Cualquier paleta P tal que $P \cap \alpha \neq \varnothing$, $P \subset D_2 \cup D_3$.
Es decir, P se puede expresar como la unión de 2 dendritas. Lo cual no es posible pues en este caso cada C_p es homeomorfo a C_2.

3) C_3 es la unión de 4 dendritas.
Tomemos 4 puntos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in S_2$. Cosidere los 4 arcos siguientes, marcados en el sentido de las manecillas del reloj.
Sean $A_1 = \widehat{a_1 a_4}$ color K_1

$A_2 = \widehat{a_2 a_1}$ color K_2

$A_3 = \widehat{a_3 a_2}$ color K_3

$A_4 = \widehat{a_4 a_3}$ color K_4.

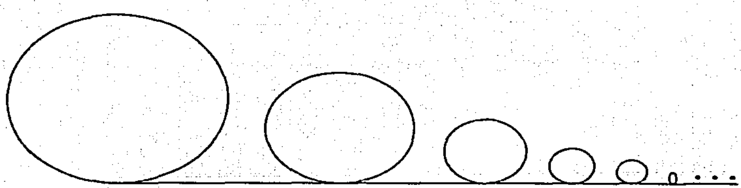


Si una paleta P es tal que $P \cap A_1 \neq \varnothing$, $P \cap A_2 \neq \varnothing$ y $P \cap A_3 \neq \varnothing$, entonces el A_p respectivo lo "pintamos" de color K_1, K_2, K_3 y las C_p las expresamos como unión de 3 dendritas, como se hizo con C_2.
Análogamente si $P \cap A_1 \neq \varnothing$, $P \cap A_2 \neq \varnothing$ y $P \cap A_4 \neq \varnothing$.
Análogamente si $P \cap A_1 \neq \varnothing$, $P \cap A_3 \neq \varnothing$ y $P \cap A_4 \neq \varnothing$.
Análogamente si $P \cap A_2 \neq \varnothing$, $P \cap A_3 \neq \varnothing$ y $P \cap A_4 \neq \varnothing$.

De manera análoga se construyen $C_4, C_5, \ldots, C_n$.
Observaciones:
1) C_n es regular
2) C_n no es la unión de n dendritas
3) C_n es la unión de n+1 dendritas.

Consideremos ahora el segmento B=[0,4].
Trazamos C_2 tangente a B en 0.
Trazamos C_3 tangente a B en 2.
Para cada n > 3, trazamos C_n tangente a B en $2+\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$.

Llamamos $X = B \cup (\bigcup_{i=2}^{\infty} C_i)$.



X

Probaremos que X tiene las propiedades requeridas.

1) X es regular. Probaremos que cualesquiera 2 puntos de X pueden ser separados por un número finito de puntos.
   Sean $x,y \in X$
   a) Si x,y están en el mismo C_i, podemos separarlos, puesto que cada C_i es regular
   b) Si x,y están en distinto C_i, quitamos cualquier $z \in B$ que se encuentre entre las C_i correspondientes.
   c) Si $x,y \in B$, quitamos cualquier $z \in B$ tal que $x < z < y$ ó $y < z < x$, según sea $x < y$ ó $y < x$.
   d) Si $x \in B$, $y \in C_i$, quitamos cualquier $z \in B$ que esté entre x y C_i.
2) X no es unión finita de dendritas.

   Supongamos que existe k tal que $X = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$, D_i dendrita.

   Entonces, cualquier subcontinuo de X se puede expresar como la unión de K dendritas.
   En particular C_k se puede expresar como unión de K dendritas. Lo cual es una contradicción.

52

R E F E R E N C I A S

[1] S. B. Nadler, Jr., Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics, A series ofmonographs and textbooks, 159, Marcel Dekker,Inc., New York, (1992).

[2] Miriam Torres Flores, Caracterizaciones de Dendritas, Tesis de Licenciatura, Julio de 2001.

[3] Adalberto García-Maynez, Angel tamariz Mascarúa. Topología General. Editorial Porrúa S.A. México 1988.

[4] K. Kuratowsky. Topology, Vol. I. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa. Poland 1961.

[5] Stephen Willard. General Topology. Addison-Wesley Publishing Company 1970.

R E F E R E N C I A S

[1] S. B. Nadler, Jr., Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics, A series ofmonographs and textbooks, 159, Marcel Dekker,Inc., New York, (1992).

[2] Miriam Torres Flores, Caracterizaciones de Dendritas, Tesis de Licenciatura, Julio de 2001.

[3] Adalberto García-Maynez, Angel tamariz Mascarúa. Topología General. Editorial Porrúa S.A. México 1988.

[4] K. Kuratowsky. Topology, Vol. I. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa. Poland 1961.

[5] Stephen Willard. General Topology. Addison-Wesley Publishing Company 1970.