3 00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

"PRIMERA CLASE DE CHERN EN GEOMETRIA ALGEBRAICA".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

P R E S E N T A :

JOSE DE JESUS MALAGON LOPEZ

DIRECTOR DE TESIS. DR ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

MEXICO, D. F. AGOSTO, 2002

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Maldonado López José de Jesús

FECHA: 03/SEP/02

FIRMA:

Primera Clase de Chern en Geometría Algebraica

A mi Familia.

Agradecimientos

Agradezco a todos los que hicieron posible la realización de este trabajo. A mi familia: mis padres, Trinidad López y Agustín Malagón; mis hermanas, María de los Angeles, Rosa Martha, Guadalupe y Lilia; y a mi hermano Agustín. A mis sobrinos Hugo, Emmanuel, Mariana, Emiliano, Josué y Oliver; mis cuñados Rosalio y Hugo, y a mi tío Rafael.

A mis sinodales por su ayuda, tiempo y comprensión. El profe Javier, Marcelo, Pedro Luis, Quico y Laura.

Y a la ya un poco desgastada banda del instituto y de la fac

Índice General

Introducción

El lenguaje utilizado en este trabajo es el de esquemas, desarrollado por Grothendick, el cual logró unificar en un lenguaje común a la geometría aritmética y la geometría algebraica clásica. La geometría algebraica es una de las áreas de las matemáticas que no se puede desarrollar directamente a partir de ciertos axiomas, requiriendo de resultados de varias áreas. Una de tales áreas en las últimas decadas ha sido la topología algebraica.

La finalidad de este trabajo de tesis es definir en geometría algebraica el concepto de primera clase de Chern de un haz lineal sobre una variedad, o de manera más general, sobre un esquema. Para esto, nos basaremos en el material presente en Fulton [5], el cual está basado a su vez en el trabajo que fundamento a la Teoría de Intersección, realizado por él mismo Fulton y MacPherson.

En el primer capítulo daremos los conceptos básicos que utilizaremos en los restantes capítulos, siendo la categoría de esquemas nuestro objeto geométrico a tratar. Comenzaremos con gavillas, el objeto en el que se encontrará toda la información geométrica de nuestros objetos geométricos. En la sección de esquemas, después de tratar con esquemas afines, se procuró motivar las definiciones y resultados más generales a partir del caso afín. Una vez definido lo que es una variedad algebraica en un contexto moderno, se termina este capítulo dando los resultados que necesitamos sobre haces vectoriales, relacionándolos con gavillas localmente libres.

El trabajo formal de la tesis comienza en el capítulo dos, estudiando el grupo generado por las subvariedades de un esquema dado, al que llamaremos grupo de ciclos. La idea es definir funtores covariantes y contravariantes de la categoría de subespacios irreducibles de un esquema, en la categoría de grupos abelianos. Esto es pensando en rescatar los conceptos de homología y comohología. Aunque estos conceptos están presentes en la geometría algebraica moderna, los funtores que se definen en este capítulo son, por construcción, una herramienta que permite desarrollar conceptos de manera más general. Se introduce el concepto de equivalencia racional sobre ciclos, el cual ha sido historicamente de central importancia en geometría algebraica, para considerar las clases de equivalencia racional del grupo de ciclos. Acabamos este capítulo con un pequeño estudio de las propiedades funtoriales de los grupos definidos.

En el último capítulo trataremos el concepto de divisores sobre un esquema, los cuales inicialmente están definidos por las subvariedades de codimensión uno del esquema. Posteriormente damos generalizaciones de este concepto, las cuales, aunque dificulta su trato, nos permitirán aplicar herramientas de topología algebraica, logrando definir el concepto de primera clase de Chern sobre un haz vectorial.

Hay cuatro apéndices en donde se enuncian definiciones y resultados que no encajan en el seguimiento de ideas del presente trabajo. En el primero tratamos sobre espacios topológicos irreducibles y espacios topológicos noetherianos. En el segundo enunciamos resultados técnicos sobre longitud. Los últimos dos contienen las demostraciones de los dos resultados más importantes del capítulo dos.

Convenciones: Todos los anillos considerados son conmutativos con unidad. Todos los morfismos entre anillos mandan el 1 al 1. En un dominio entero o campo, $1 \neq 0$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones y resultados básicos que estaremos manejando a lo largo del presente trabajo Las referencias de los resultados aquí presentados son muy variadas, por lo que haremos mención particular de cada referencia Comenzamos este capítulo con la noción de gavillas sobre un espacio topológico, noción necesaria para definir en la segunda sección nuestro nuestros objetos geométricos de interes, los esquemas, siendo la gavilla el objeto que guarda la información geométrica del estos En la sección tres retomamos el concepto de gavilla como tema de estudio al considerar el caso de módulos de gavillas, lo cual nos da más flexibilidad al lenguaje que manejamos, permitiendonos desarrollar más la teoría. Continuamos con la definición de variedad algebraica (en el sentido moderno), objeto de estudio de la geometría algebraica. Acabamos este capítulo con las principales definiciones y resultados que necesitamos sobre haces vectorales.

1.1 Gavillas

En la primera parte de esta sección damos los resultados básicos sobre gavillas de grupos abelianos (anillos) sobre un espacio vectorial, continuando con una construcción que juega un papel muy importante en la teoría, la cual es asociarle una gavilla a una pregavilla. Finaliza esta sección con propiedades funtoriales de morfismos entre gavillas. Las referencias para los resultados dados en esta sección se encuentran en el libro de Tennison [12].

Conceptos Básicos

Sea X un espacio topológico Denotaremos por $\mathfrak{Top}(X)$ a la categoría definida de la siguiente manera

$$Ob(\mathfrak{Top}(X)) = \{U \subseteq X \,|\, U \text{ es abierto}\}$$

$$Hom(V,U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } V \nsubseteq U \\ \imath(\text{inclusión}) & \text{si } V \subseteq U \end{cases}$$

Definición 1.1.1. Dado un espacio topológico X, una *pregavilla de grupos abelianos (anillos)* $\mathcal{F}$ sobre X es un funtor contravariante de la categoría $\mathfrak{Top}(X)$ a la categoría $\mathfrak{Ab}$ ($\mathfrak{Anillos}$) de grupos abelianos (anillos)

Dada una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, a los elementos de $\mathcal{F}(U)$ los llamaremos *secciones* de la pregavilla $\mathcal{F}$ sobre U. A los elementos en $\mathcal{F}(X)$ se les dice *secciones globales*. Dados $V \subseteq U \subseteq X$ abiertos, denotaremos por $\rho^{\mathcal{F}}_{uv}$ al morfismo

$$\rho^{\mathcal{F}}_{uv} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V),$$

y lo llamaremos *mapeo restricción*. Cuando sea claro en que pregavilla estemos trabajando usaremos la notación ρ_{uv} También utilizaremos la notación $\Gamma(U, \mathcal{F})$ para denotar al grupo $\mathcal{F}(U)$ y, si $s \in \mathcal{F}(U)$, usaremos $s_{|v}$ para denotar a la imagen $\rho_{uv}(s)$.

Definición 1.1.2. Decimos que una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre X es una *gavilla* si satisface la siguiente condición:

(A) Si $U \subseteq X$ es un abierto, si $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de U, y si tenemos secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, para cada i, tales que

$$s_i\,_{|u_i \cap u_j} = s_j\,_{|u_i \cap u_j}$$

para todo i, j, entonces existe una única sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_{|u_i} = s_i$, para toda i

Observación 1.1.3. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre X El conjunto $\emptyset$ es un subconjunto abierto de X, el cual se puede ver como la unión de una familia vacía de abiertos. Por el axioma de gavilla, $\mathcal{F}(\emptyset)$ consiste del grupo de un sólo elemento, es decir, $\mathcal{F}(\emptyset)$ es el grupo abeliano cero.

En lo que resta de la sección, las gavillas que consideremos serán de grupos abelianos, y las definiciones y resultados dados serán válidos también en la categoría de anillos.

Ejemplo 1.1.4. Sea X un espacio topológico. El funtor que asocia a cada abierto de X el grupo (anillo) cero, es llamado la *gavilla cero*, y la denotaremos por $\mathbf{0}$.

Ejemplo 1.1.5. Sea X una variedad algebraica (en el sentido clásico) sobre un campo K algebraicamente cerrado. Para cada abierto $U \subseteq X$, sea $\mathcal{O}(U)$ el anillo de funciones regulares de U a K. Dados dos abiertos $V \subseteq U$ de la variedad, sea $\rho_{uv} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ el mapeo restricción (en el sentido usual). Entonces $\mathcal{O}$ es una gavilla de anillos sobre X.

Definición 1.1.6. Dadas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ (pre)gavillas sobre un espacio topológico X, un *morfismo* entre (pre)gavillas

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

es una transformación natural del funtor $\mathcal{F}$ al funtor $\mathcal{G}$.

Un *isomorfismo* entre (pre)gavillas $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo el cual tiene inverso.

De la definición podemos ver que una gavilla es una pregavilla cuyas secciones están determinadas localmente. En la siguiente proposición especificaremos más la naturaleza local de las gavillas, haciendo uso de la siguiente definición.

Definición 1.1.7. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre X y $x \in X$ un punto fijo. Consideremos a todos los grupos abelianos $\mathcal{F}(U)$, con $x \in U$. Definimos el *tallo* $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ en x como el límite directo $\varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U)$, el cual define una colección de morfismos entre grupos abelianos

$$\rho_{ux} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$$

para abiertos $U \subseteq X$, con $x \in U$. A la imagen de $s \in \mathcal{F}(U)$ bajo ρ_{ux} la denotaremos por s_x. A los elementos de $\mathcal{F}_x$ se les dice *germenes de secciones* de $\mathcal{F}$.

Cada germen en $\mathcal{F}_x$ se ve como s_x, para alguna sección $s \in \mathcal{F}(U)$, con $x \in U$. Más aún, para $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$, donde U, V son abiertos de X que contienen a x, se tiene que $s_x = t_x$ si, y sólo si, existe un abierto W de $U \cap V$ tal que $x \in W$ y $s_{|w} = t_{|w}$.

Proposición 1.1.8. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X. Entonces, para todo abierto $U \subset X$ y secciones $s, s' \in \mathcal{F}(U)$, tenemos que $s = s'$ si, y sólo si, $s_x = s'_x$ para todo $x \in U$.*

Todo morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre (pre)gavillas sobre X induce, para todo $x \in X$, un morfismo $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ sobre los tallos, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

para todo abierto $U \subseteq X$ que contenga a x.

El concepto de tallo también nos permite decir cuando dos morfismos entre gavillas son iguales.

Proposición 1.1.9. *Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla y $\mathcal{G}$ una gavilla sobre X. Si φ, $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ son morfismos entre pregavillas tales que $\varphi_x = \psi_x$, para todo $x \in X$, entonces $\varphi = \psi$.*

$\sharp$

Definición 1.1.10. Una *subgavilla* $\mathcal{F}'$ de un gavilla $\mathcal{F}$ es una gavilla tal que para todo abierto U de X, $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo abeliano de $\mathcal{F}(U)$ y los mapeos restricción de $\mathcal{F}'$ son los inducidos por los mapeos restricción de $\mathcal{F}$. Así, para todo punto $x \in X$, el tallo $\mathcal{F}'_x$ es un subgrupo de $\mathcal{F}_x$.

Lema 1.1.11. *Sean $U \subseteq X$ un abierto y $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X. Entonces $\mathcal{F}_{|U}$ es una gavilla sobre U.*

$\sharp$

Hasta el momento sólo hemos trabajado con gavillas sobre un espacio topológico dado. Ahora, dados un mapeo continuo $f : X \to Y$ y una gavilla sobre X, definiremos sobre Y una gavilla inducida por este mapeo.

Definición 1.1.12. Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo entre espacios topológicos. Para cada gavilla $\mathcal{F}$ sobre X, definimos la gavilla *imagen directa* sobre Y, denotada por $f_*\mathcal{F}$, como $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$, para todo abierto $V \subseteq Y$.

Engavillación

No toda pregavilla resulta ser una gavilla. Así, a una pregavilla le asociaremos la gavilla que "más se le parezca"

Dada una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre X, le asociaremos un espacio topológico $Sp\acute{e}\mathcal{F}$ llamado *espacio étale*, que esta dado como $Sp\acute{e}\mathcal{F} = \coprod_{x\in X} \mathcal{F}_x$, teniendo un mapeo proyección

$$\begin{aligned} \pi : Sp\acute{e}\mathcal{F} &\longrightarrow X \\ s_x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Así, $\pi^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$. Ahora le daremos una topología a $Sp\acute{e}\mathcal{F}$. Sean $U \subseteq X$ un abierto y $s \in \mathcal{F}(U)$, definimos el mapeo

$$\begin{aligned} \tilde{s} : U &\longrightarrow Sp\acute{e}\mathcal{F} \\ x &\longmapsto s_x \end{aligned}$$

y notamos que $\pi \circ \tilde{s} = Id_U$.

Los conjuntos $\tilde{s}(U) = \{s_x \in Sp\acute{e}\mathcal{F} | \, x \in U\}$ con $s \in \mathcal{F}(U)$, son una base de abiertos de la topología que generan, siendo ésta la topología más fuerte tal que: los mapeos $\tilde{s} : U \to Sp\acute{e}\mathcal{F}$ son continuos, para todo abierto $U \subseteq X$ y toda sección $s \in \mathcal{F}(U)$. Además, la proyección π definida anteriormente es continua. A las funciones $\tilde{s}$ les llamaremos las *secciones continuas* de $Sp\acute{e}\mathcal{F}$ sobre U.

Dada una sección $s \in \mathcal{F}(U)$, con $U \subseteq X$ abierto, tenemos sobre el abierto $\tilde{s}(U) \subseteq Sp\acute{e}\mathcal{F}$ que

$$\tilde{s} \circ \pi = Id_{\tilde{s}(U)}.$$

Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo entre pregavillas, y consideremos el morfismo sobre los tallos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}'_x$. Definimos

$$\begin{aligned} Sp\acute{e}\varphi : Sp\acute{e}\mathcal{F} &\longrightarrow Sp\acute{e}\mathcal{F}' \\ s_x &\longmapsto \varphi_x(s_x) \end{aligned}$$

teniendo que $Sp\acute{e}\varphi$ es continua, y es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Sp\acute{e}\mathcal{F} \arrow[rr, "Sp\acute{e}\varphi"] \arrow[dr] & & Sp\acute{e}\mathcal{F}' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Dada una pregavilla $\mathcal{F}$ y su espacio étalé $Sp\acute{e}\mathcal{F}$, le asociaremos la *gavilla de secciones* $\Gamma Sp\acute{e}\mathcal{F}$, definida para todo abierto U de X como el conjunto de secciones continuas de $Sp\acute{e}\mathcal{F}$ sobre U, denotándola como $\Gamma(U, Sp\acute{e}\mathcal{F})$

Notemos que existe un morfismo entre pregavillas $\theta : \mathcal{F} \to \Gamma Sp\acute{e}\varphi$, definido para todo abierto U de X

$$\begin{aligned} \theta(U) : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \Gamma(U, Sp\acute{e}\mathcal{F}) \\ s &\longmapsto \tilde{s} \end{aligned}$$

Dado $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, un morfismo entre (pre)gavillas, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\theta^{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \Gamma Sp\acute{e}\mathcal{F} \arrow[d, "\Gamma Sp\acute{e}\varphi"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "\theta^{\mathcal{G}}"] & \Gamma Sp\acute{e}\mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Lema 1.1.13. *Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre X. Para cada $x \in X$, los mapeos*

$$\theta_x^{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_x \longrightarrow (\Gamma Sp\acute{e}\mathcal{F})_x$$

son isomorfismos. ♯

Proposición 1.1.14. *Si $\mathcal{F}$ es un gavilla, entonces $\theta : \mathcal{F} \to \Gamma\ Sp\acute{e}\mathcal{F}$ es un isomorfismo entre gavillas.* ♯

El siguiente teorema nos da la propiedad universal que caracteriza a la gavilla $\Gamma Sp\acute{e}\mathcal{F}$, que es a lo que nos referiamos al decir que obtendriamos la gavilla que más se le parece.

Teorema 1.1.15. Sean $\mathcal{F}$ pregavilla y $\mathcal{G}$ gavilla sobre X. Entonces todo morfismo entre pregavillas $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ se factoriza de modo único a través de $\theta^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \Gamma\ Sp\acute{e}\mathcal{F}$, es decir, existe un único morfismo $\psi : \Gamma Sp\acute{e}\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta^{\mathcal{F}}"'] & & \mathcal{G} \\ & \Gamma Sp\acute{e}\mathcal{F} \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

♯

Definición 1.1.16. Sean X un espacio topológico y A un grupo. La gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto A$ es llamada la *gavilla constante* A.

Propiedades de Morfismos Entre Gavillas

Definición 1.1.17. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre pregavillas. Para todo abierto U de X definimos

$$K(U) := ker\,\varphi(U)$$

A esta pregavilla le llamaremos la *pregavilla núcleo de* φ, y la denotaremos como $Ker\,\varphi$.

Proposición 1.1.18. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre gavillas. Entonces la pregavilla núcleo es una gavilla.* ♯

Nota 1.1.19. La (pre)gavilla núcleo es precisamente el núcleo categórico.

Teorema 1.1.20. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre gavillas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $ker\,\varphi = 0$.

2. Para todo abierto U de X, $\varphi(U)$ es inyectivo.

3. Para todo $x \in X$, φ_x es inyectivo.

4. φ es un monomorfismo.

♯

Proposición 1.1.21. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre gavillas. Entonces para todo $x \in X$, $(ker\,\varphi)_x \cong ker\,\varphi_x$* ♯

Definición 1.1.22. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre pregavillas. Para todo abierto U de X definimos

$$Im(U) := Im\,\varphi(U)$$

A esta pregavilla le llamaremos la *pregavilla imagen de* φ. A su gavilla asociada le llamaremos *la gavilla imagen*, y la denotaremos como $Im\,\varphi$.

Definición 1.1.23. Sea $\mathcal{F}'$ una subgavilla de la gavilla $\mathcal{F}$. Definimos la *gavilla cociente* $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ como la gavilla asociada a la pregavilla $U \to \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$

Proposición 1.1.24. *Sea $\mathcal{F}'$ una subgavilla de la gavilla $\mathcal{F}$. Entonces para todo $x \in X$, $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \cong \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$* ♯

Definición 1.1.25. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre gavillas. A la gavilla cociente $\mathcal{G}/Im\,\varphi$ le llamaremos la *gavilla conúcleo de* φ

Nota 1.1.26. Esta gavilla conúcleo es el conúcleo categórico

Teorema 1.1.27. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre gavillas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. $\mathcal{G}/Im\,\varphi = 0$.
2. Para todo $x \in X$, $(\mathcal{G}/Im\,\varphi)_x = 0$.
3. Para todo $x \in X$, φ_x es suprayectivo
4. φ es un epimorfismo

♯

Teorema 1.1.28. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo entre gavillas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. φ es un isomorfismo
2. Para todo abierto U de X, $\varphi(U)$ es una biyección
3. Para todo $x \in X$, φ_x es una biyección.
4. φ es monomorfismo y epimorfismo

♯

Definición 1.1.29. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ pregavillas de grupos abelianos sobre X. A la pregavilla $U \to \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ con mapeos restricción $\rho^{\oplus}_{uv} = (\rho^{\mathcal{F}}_{uv}, \rho^{\mathcal{G}}_{uv})$, le llamaremos la *pregavilla suma directa*, y la denotaremos por $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Es inmediato de la definición que si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas, entonces $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es una gavilla

Nota 1.1.30. La gavilla suma directa es el producto y coproducto categórico

1.2 Esquemas

En esta sección trataremos con el concepto de esquema. Comenzamos con una clase particular de esquemas, los esquemas afines, que es la forma en que expresaremos localmente a un esquema. Seguiremos con espectros homogéneos, la generalización de espacios proyectivos. Una vez hecho esto, estudiaremos por partes a los esquemas, comenzando con definiciones y resultados básicos, para después dar la definición del producto fibrado en la categoría de esquemas, usandolo para dar propiedades sobre estos. Acabamos esta sección estudiando varios tipos de morfismos que podemos definir en la categoría de esquemas, morfismos que nos servirán para describir la geometría de los esquemas. Particular interes tendremos en las funciones y morfismos racionales.

Daremos la demostración de los resultados en los que no se requiera desarrollar teoría que nos desvie del tema a tratar, dando las refencias en aquellas en las que se omite la demostración.

1.2.1 Esquemas Afines

Sea A un anillo. Definimos el conjunto $Spec\, A = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo}\}$. Por convención $A \notin Spec\, A$. Sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal, definimos el subconjunto $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Spec\, A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Lema 1.2.1. *Sea A un anillo*

1. *Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ son ideales, entonces $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.*

2. *Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ es cualquier conjunto de ideales de A, entonces $V(\sum_i \mathfrak{a}_i) = \bigcap_i V(\mathfrak{a}_i)$*

3. *$V(A) = \emptyset$, y $V(\langle 0 \rangle) = Spec\, A$.*

4. *Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ son ideales, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ si, y sólo si, $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Demostración Hartshorne [7], pag 70.

♯

Este lema nos permite definir una topología sobre $Spec\, A$, tomando a los subconjuntos $V(\mathfrak{a})$ como los cerrados de $Spec\, A$. A esta topología la llamaremos la *topología Zariski* de $Spec\, A$. Así, por definición los puntos cerrados de $Spec\, A$ son los ideales maximales de A.

Para cualquier elemento $f \in A$, denotamos por $D(f)$ al abierto $Spec\,A \setminus V((f))$, los cuales son llamados *abiertos principales*. Observemos que el conjunto de abiertos $\{D(f)\}_{f\in A}$ es una base para la topología de $Spec\,A$. En efecto,

$$Spec\,A \setminus V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}))^c = \left(\bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(f)\right)^c = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} Spec\,A \setminus V(f)$$
$$= \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(f)$$

Sea $\mathfrak{p} \in Spec\,A$, y denotemos por $A_\mathfrak{p}$ a la localización de A con respecto a $\mathfrak{p}$. Consideremos los morfismos naturales entre anillos

$$A \longrightarrow A_\mathfrak{p} \longrightarrow A_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$$

donde $\bar{\mathfrak{p}}$ denota a la clase de $\mathfrak{p}$ en $A_\mathfrak{p}$. Denotemos por $\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ al campo de residuos de A en $\mathfrak{p}$.

Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo entre anillos, y consideremos al mapeo inducido entre espacios topológicos

$$\begin{aligned} {}^a\varphi : Spec(B) &\longrightarrow Spec\,A \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

el cual está bien definido al tener que la imagen inversa de un ideal primo es primo. El mapeo definido es continuo al tener que ${}^a\varphi^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a})B)$, con $\mathfrak{a} \subseteq A$ ideal.

Con ésto, las correspondencias $A \longmapsto Spec\,A$, y

$$\begin{aligned} Hom(A,B) &\longrightarrow Hom(Spec\,B, Spec\,A) \\ \varphi &\longmapsto {}^a\varphi \end{aligned}$$

definen un funtor contravariante de la categoría de anillos, a la categoría de espacios topológicos.

Ejemplo 1.2.2. Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A. Consideremos el morfismo natural entre anillos $\varphi : A \to A_S$, y a su mapeo inducido entre espacio topolológicos ${}^a\varphi : Spec\,A_S \to Spec\,A$. Probaremos que ${}^a\varphi$ nos da un homeomorfismo entre $Spec\,A_S$ y el subespacio $\{\mathfrak{p} \in Spec\,A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$. Al tener que hay una biyección entre los ideales primos de A_S y los ideales primos de A que son ajenos a S, ${}^a\varphi$ nos da una biyección entre tales conjuntos, por lo que si probamos que es cerrada acabaremos. Sea $V(\mathfrak{a}A_S)$ un cerrado de $Spec\, A_S$, así

$$\begin{aligned} {}^a\varphi(V(\mathfrak{a}A_S)) &= {}^a\varphi(\{\mathfrak{p}A_S \in Spec\, A_S \mid \mathfrak{a}A_S \subseteq \mathfrak{p}A_S\}) \\ &= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}A_S) \in Spec\, A \mid \mathfrak{a}A_S \subseteq \mathfrak{p}A_S\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in Spec\, A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p},\, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3. Sea A un anillo y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. Veamos que ${}^a\varphi : Spec\, A/\mathfrak{a} \to Spec\, A$ nos da un homeomorfismo entre $Spec\, A/\mathfrak{a}$ y el cerrado $V(\mathfrak{a})$. Sabemos que hay una biyección entre los ideales primos de $A/\mathfrak{a}$ y los ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{a}$, restándonos probar que ${}^a\varphi$ es cerrada. Para ésto notemos que

$$\begin{aligned} {}^a\varphi(V(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})) &= {}^a\varphi(\{\mathfrak{p}+\mathfrak{a} \in Spec\, A/\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}+\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}+\mathfrak{a}\}) \\ &= \{\mathfrak{q} \in Spec\, A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}\} \\ &= V(\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

Definición 1.2.4. Sea A un anillo. Un punto $\mathfrak{p} \in Spec\, A$ es *regular* si $A_\mathfrak{p}$ es noetheriano y regular.

Definición 1.2.5. Sea Z un subconjunto cerrado irreducible de un espacio topológico X. Entonces decimos que un punto $\xi \in Z$ es *genérico* si $\overline{\{\xi\}} = Z$, o lo que es equivalente, que todo abierto no vacío U de Z contenga a ξ.

Ejemplo 1.2.6. Sea A un dominio entero, entonces $\langle 0 \rangle \in Spec\, A$ y es el punto genérico de $Spec\, A$.

Proposición 1.2.7. *Sea A un anillo*

1. *Si $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, entonces $V(\mathfrak{p})$ es irreducible.*

2. *Si $V(\mathfrak{a}) \subseteq Spec\, A$ es irreducible, entonces $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p})$, para algún $\mathfrak{p} \in Spec\, A$.*

Demostración. 1. Supongamos que existen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ideales tales que

$$V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

entonces $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Al ser $\mathfrak{p}$ primo tenemos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, o $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Supongamos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{a})$, lo cual implica que $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{a})$ y por lo tanto es irreducible.

2. Sea $V(\mathfrak{a})$ irreducible, y notemos que $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Probaremos que $\sqrt{\mathfrak{a}} \in Spec\, A$ si $V(\mathfrak{a})$ es irreducible

   Sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Así $\langle fg \rangle \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, y por lo tanto

   $$V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\langle fg \rangle) = V(\langle f \rangle) \cup V(\langle g \rangle)$$

   Esto nos dice que

   $$V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \big(V(\langle f \rangle) \cap V(\sqrt{\mathfrak{a}})\big) \cup \big(V(\langle g \rangle) \cap V(\sqrt{\mathfrak{a}})\big)$$

   Al ser $V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ irreducible podemos suponer que $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\langle f \rangle) \cap V(\sqrt{\mathfrak{a}})$, es decir, $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\langle f \rangle)$, y por 4. del lema (1.2.1)

   $$f \in \langle f \rangle \subseteq \sqrt{\langle f \rangle} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

♯

Proposición 1.2.8. *Sea A un anillo. $Spec\, A$ es irreducible si, y sólo si, $Nil(A) \in Spec\, A$.*

Demostración. Supongamos que $Spec\, A$ es irreducible. Sean $f, g \in A$ tales que $fg \in Nil(A)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n g^n = (fg)^n = 0$. Así, $f^n g^n \in \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$. Por el lema (1.2.1)

$$V(f^n) \cup V(g^n) = V(f^n g^n) = Spec\, A$$

Al ser $Spec\, A$ irreducible, podemos suponer que $V(f^n) = Spec\, A$. Entonces $f^n \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, concluyendo que $f \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$. Por lo tanto

$$f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec\, A} \mathfrak{p} = Nil(A).$$

La otra contención está dada por 1. de la proposición anterior, con $\mathfrak{p} = Nil(A)$.

♯

Nota 1.2.9. En el caso de las proposiciones anteriores, si $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, entonces $\mathfrak{p}$ es el único punto genérico de $V(\mathfrak{p})$. Además, si $V(\mathfrak{a})$ es irreducible, entonces $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es el único punto genérico de $V(\mathfrak{a})$.

Proposición 1.2.10. *Sea A un anillo, entonces $Spec\,A$ es compacto.*

Demostración Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $Spec\,A$ Como los abiertos de la forma $D(f)$, con $f \in A$, son base de la topología, tenemos que para toda $i \in I$, U_i es unión de abiertos principales. Así, tenemos que para un cierto conjunto de indices Λ,

$$Spec\,A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D(f_\lambda),$$

con $f_\lambda \in A$ Por lo que si probamos que existe una subcubierta finita de los $\{D(f_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ que cubra a $Spec\,A$, habremos acabamos. Como

$$Spec\,A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D(f_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(Spec\,A \setminus V(\langle f_\lambda\rangle))$$

tenemos que

$$\begin{aligned} V(1) = \emptyset = (Spec\,A)^c &= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(Spec\,A \setminus V(\langle f_\lambda\rangle))\right)^c \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(\langle f_\lambda\rangle) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda) \end{aligned}$$

Por 4. del lema (1.2 1) tenemos que $1 \in \sqrt{\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda}$, es decir, $1 \in \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, existiendo $f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}$ tales que $1 = \sum_{i=1}^n h_i f_{\lambda_i}$, con $h_i \in A$. Por lo tanto

$$\emptyset = V(1) = V(\langle f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\rangle) = \bigcap_{i=1}^n V(\langle f_{\lambda_i}\rangle)$$

Lo anterior imlpica que

$$Spec\,A = \left(\bigcap_{i=1}^n V(\langle f_{\lambda_i}\rangle)\right)^c = \bigcup_{i=1}^n (Spec\,A \setminus V(\langle f_{\lambda_i}\rangle)) = \bigcup_{i=1}^n D(f_{\lambda_i})$$

♯

Para todo anillo A se puede construir (Shafarevich [11]) sobre $Spec\,A$ una gavilla de anillos, la cual denotaremos por $\mathcal{O}_{Spec\,A}$, y será llamada la *gavilla estructural* de $Spec\,A$. En ocasiones la denotaremos por $\mathcal{O}$ cuando esté claro sobre qué espacio la estamos tomando En el presente trabajo omitiremos la construcción de tal gavilla, describiendo únicamente como se ven las secciones de la gavilla sobre cualquier abierto de $Spec\,A$

Una sección $s \in \mathcal{O}(U)$ sobre un abierto U de $Spec\, A$ es una función

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$$

tal que para todo $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, y s esta dada localmente como cociente de elementos de A. Diremos más explicitamente esta última condición. Para cada $\mathfrak{p} \in U$, existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos $a, f \in A$, tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{q}}$.

Definición 1.2.11. Sea A un anillo. A la pareja $(Spec\, A, \mathcal{O}_{Spec\, A})$ le llamaremos el *espectro* de A

A continuación daremos algunas propiedades que cumple la gavilla estructural

Proposición 1.2.12. *Sea A un anillo y $(Spec\, A, \mathcal{O})$ su espectro*

1. *Para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, el morfismo entre anillos*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} &\longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \\ s_{\mathfrak{p}} &\longmapsto s(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo, donde (U, s) es un representante de $s_{\mathfrak{p}}$

2. *Sea $f \in A$, el morfismo entre anillos*

$$\begin{aligned} A_f &\longrightarrow \mathcal{O}(D(f)) \\ \frac{a}{f^n} &\longmapsto s \end{aligned}$$

es un isomorfismo, donde

$$\begin{aligned} s : D(f) &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \frac{a}{f^n} \end{aligned}$$

3. *En particular, $\Gamma(Spec\, A, \mathcal{O}) \cong A$*

Demostración. Hartshorne [7], página 71 $\square$

De lo anterior tenemos la correspondencia $A \mapsto (Spec\, A, \mathcal{O})$, la cual nos gustaría que fuera funtorial. Para esto necesitamos definir una categoría adecuada.

Definición 1.2.13. Un *espacio anillado* es una pareja $(X, \mathcal{O}_X)$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de anillos sobre X. Un *morfismo* entre espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es una pareja $(\varphi, \varphi^\sharp)$, donde $\varphi : X \to Y$ es continuo y $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to \varphi_*\mathcal{O}_X$ es un morfismo entre gavillas sobre Y.

Un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *espacio localmente anillado* si para todo $p \in X$, el tallo $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local. Para definir un morfismo entre espacios localmente anillados hagamos la siguiente observación.

Sean p un punto de X y U, V abiertos respectivos de X y Y tales que $p \in U$ y $\varphi(U) \subseteq V$. Entonces tenemos morfismos

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

Tomando límites directos obtenemos el morfismo

$$\varphi_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\varphi(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$$

Un *morfismo* $(\varphi, \varphi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre espacios localmente anillados, es un morfismo entre espacios anillados tal que $\varphi_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\varphi(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es morfismo local entre anillos locales, es decir, $\varphi_p^\sharp(\mathfrak{m}_{Y,\varphi(p)}) \subseteq \mathfrak{m}_{X,p}$. Un *isomorfismo* entre espacios localmente anillados es un morfismo $(\varphi, \varphi^\sharp)$ tal que φ es homeomorfismo y $\varphi^\sharp$ es un isomorfismo entre gavillas

Proposición 1.2.14. *Sean A, B anillos.*

1. *$(Spec\, A, \mathcal{O})$ es un espacio localmente anillado.*

2. *Si $\varphi : A \to B$ es un morfismo entre anillos, entonces φ induce un morfismo natural entre espacios localmente anillados*

$$({}^a\varphi, {}^a\varphi^\sharp) : (Spec\, B, \mathcal{O}_{Spec B}) \longrightarrow (Spec\, A, \mathcal{O}_{Spec A})$$

3. *Todo morfismo entre espacios localmente anillados*

$$(\varphi, \varphi^\sharp) : (Spec\, B, \mathcal{O}_{Spec B}) \to (Spec\, A, \mathcal{O}_{Spec A})$$

esta inducido por un morfismo entre anillos $f : A \to B$ como en 2.

Demostración. Hartshorne [7], página 73 $\sharp$

Nota 1.2.15. En 3. de la proposición anterior, f es el morfismo inducido por $\varphi^\sharp(Spec\, A)$.

Corolario 1.2.16. *Sean A y B anillos. Entonces*

$$\begin{aligned} Hom(A,B) &\longrightarrow Hom(Spec\,A, Spec\,B) \\ f &\longmapsto {}^a f \end{aligned}$$

es una biyección. $\sharp$

Con esto hemos definido la categoría de espacios localmente anillados, que denotaremos por $\mathfrak{ELA}$. También hemos construido un funtor contravariante

$$\begin{aligned} \mathfrak{Anillos} &\longrightarrow \mathfrak{ELA} \\ A &\longmapsto (Spec\,A, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

Dado un morfismo entre anillos $f : A \to B$, el morfismo inducido entre espectros $({}^a f, {}^a f^\sharp) : (Spec\,B, \mathcal{O}_{Spec\,B}) \to (Spec\,A, \mathcal{O}_{Spec\,A})$ induce, para todo $\mathfrak{p} \in Spec\,B$, un monomorfismo entre campos

$$\kappa({}^a f(\mathfrak{p})) \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$$

al tener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{f^{-1}(\mathfrak{p})} \arrow[r] \arrow[d] & B_{\mathfrak{p}} \arrow[d] \\ \kappa(f^{-1}(\mathfrak{p})) \arrow[r] & \kappa(\mathfrak{p}) \end{tikzcd}$$

Proposición 1.2.17. *Sea f un elemento de un anillo A. Entonces $(D(f), \mathcal{O}_{Spec A}|_{D(f)})$ es canónicamente isomorfo a $(Spec\,A_f, \mathcal{O}_{Spec\,A_f})$*

Demostración. Definiremos el isomorfismo $(\varphi, \varphi^\sharp) : (D(f), \mathcal{O}_{Spec A}|_{D(f)}) \to (Spec\,A_f, \mathcal{O}_{Spec\,A_f})$. Tenemos un morfismo natural entre anillos $g : A \to A_f$, que induce un mapeo entre espacios topológicos

$$\begin{aligned} \varphi : D(f) &\longrightarrow Spec\,A_f \\ \mathfrak{p} &\longmapsto g(\mathfrak{p})A_f. \end{aligned}$$

Por los argumentos dados en el ejemplo (1.2.2), φ es una biyección. Como todo ideal de A_f es de la forma $g(\mathfrak{a})A_f$, con $\mathfrak{a} \subseteq A$ ideal, tenemos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ si, y sólo si, $\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \varphi(\mathfrak{p})$, y por lo tanto se cumple que

$$\varphi^{-1}(V(g(\mathfrak{a})A_f)) = V(\mathfrak{a}) \cap D(f),$$
$$\varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D(f)) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$$

Por lo tanto φ es un homeomorfismo. Para definir $\varphi^\sharp$ mostraremos que hay un isomorfismo entre anillos locales $\varphi_\mathfrak{p} : (A_f)_{g(\mathfrak{p})A_f} \to A_\mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$. Consideremos los siguientes morfismos entre anillos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_f \arrow[d] \\ A_\mathfrak{p} & (A_f)_{g(\mathfrak{p})A_f} \end{tikzcd}$$

Sea $\frac{a}{f^n} \in A_f$ tal que $\frac{a}{f^n} \notin g(\mathfrak{p})A_f$, con lo cual $a \notin \mathfrak{p}$. Definimos

$$A_f \longrightarrow A_\mathfrak{p}$$
$$b \longmapsto b$$

el cual está bien definido al tener que $f \notin \mathfrak{p}$.

Al no pertenecer $\frac{a}{f^n}$ a $g(\mathfrak{p})A_f$, tenemos que manda a los elementos de esa forma a unidades. Por la propiedad universal del anillo de fracciones existe un único morfismo

$$\varphi_\mathfrak{p} : (A_f)_{g(\mathfrak{p})A_f} \longrightarrow A_\mathfrak{p}$$

Sea $a \in A$, tal que no pertenezca a $\mathfrak{p}$. Entonces bajo la composición

$$A \longrightarrow A_f \longrightarrow (A_f)_{g(\mathfrak{p})A_f}$$

el elemento a va a dar a $\frac{a}{1}$, el cual es unidad. Por la propiedad universal del anillo de fracciones existe un único morfismo

$$\varphi_\mathfrak{p}^{-1} : A_\mathfrak{p} \to (A_f)_{g(\mathfrak{p})A_f}$$

Por lo tanto $\varphi_\mathfrak{p}$ es un isomorfismo para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$.

Esto nos permite definir

$$\hat{\varphi}_\mathfrak{p} : \coprod_{\mathfrak{p} \in D(f)} (A_f)_{g(\mathfrak{p})A_f} \to \coprod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_\mathfrak{p}$$

Todo lo anterior nos permite definir un morfismo entre gavillas

$$\begin{aligned}\varphi^\sharp(U) : \mathcal{O}_{Spec\,A_f}(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_{Spec\,A|_{D(f)}}(\varphi^{-1}(U)) \\ s &\longmapsto \hat{\varphi}_\mathfrak{p} \circ s \circ \varphi\end{aligned}$$

para todo abierto $U \subseteq Spec\,A_f$. Por construcción $\varphi^\sharp_\mathfrak{p} = \varphi_\mathfrak{p}$, lo que implica que $\varphi^\sharp$ es un isomorfismo entre gavillas.

$\sharp$

Definición 1.2.18. Un *esquema afín* es un espacio localmente anillado isomorfo al espectro de algún anillo.

Ejemplo 1.2.19. Sea K un campo, así $Spec\,K$ es un esquema afín que consiste de un sólo punto $\{\xi\}$, más aún, $\mathcal{O}_{Spec\,K} \cong K$. Para ver ésto último sólo hay que notar que $\mathcal{O}_{Spec\,K}$ está formado por funciones $s : \{\xi\} \to K$, con lo que tenemos tantas funciones como elementos en el campo.

Ejemplo 1.2.20. Sea $K[x]$ el anillo de polinomios en una variable sobre un campo K. Definimos la *línea afín* sobre K, denotada por $\mathbb{A}^1_K$, como $(Spec\,K[x], \mathcal{O})$. El ideal cero corresponde al punto genérico de $\mathbb{A}^1_K$. Al ser $K[x]$ un dominio de ideales principales, todo ideal primo es maximal, los cuales estan dados por polinomios irreducibles mónicos. Así, $Spec\,K[x]$ tiene sólo puntos cerrados y un único punto genérico.

Ejemplo 1.2.21. Sea K un campo. Definimos el *plano afín*, denotado por $\mathbb{A}^2_K$, como $(Spec\,K[x,y], \mathcal{O})$. Si K es algebraicamente cerrado, el plano afín tiene: un único punto genérico que corresponde al ideal cero; puntos cerrados que corresponden a los ideales maximales, los cuales son de la forma $\langle x-a, y-b\rangle$; y puntos que no son cerrados y que corresponden a los ideales primos que no son maximales, ideales que están dados por polinomios irreducibles. Los puntos que no son cerrados son los puntos genéricos de los cerrados irreducibles $V(\langle f\rangle)$, donde f es el polinomio irreducible que define al punto no cerrado.

Ejemplo 1.2.22. Sea K un campo, y consideremos al anillo local $K[x]_{(x)} = A$. Como conjunto $Spec\,A$ consiste de dos puntos: $\langle 0\rangle$ y $\langle x\rangle$, al ser $\langle x\rangle$ el ideal maximal de A. Como espacio topológico $Spec\,A$ tiene sólo tres conjuntos abiertos: $\emptyset$, $U = \{\langle 0\rangle\}$, y $X = \{\langle 0\rangle, \langle x\rangle\}$, donde U es abierto básico, al ser igual a $D(x)$. Por las proposiciones (1.2.12) y (1.2.17), su gavilla estructural en sus abiertos no vacíos es: $\mathcal{O}(X) = K[x]_{(x)}$, y $\mathcal{O}(U) = K(x)$.

Acabamos esta parte con una noción muy importante.

Definición 1.2.23. Sea A un anillo, y X su espectro. Un morfismo entre esquemas afines

$$f : X \longrightarrow Spec\, A[x] \cong \mathbb{A}^1_A$$

es llamado una *función A-regular* sobre X.

Por el corolario (1.2.16)

$$Hom(X, \mathbb{A}^1_A) \longleftrightarrow Hom(A[x], A) \cong A$$

Por lo que las funciones A-regulares sobre X se corresponden biyectivamente con los elementos de A, que por 3. de la proposición (1.2.12), se corresponden biyectivamente con las secciones globales de X

Dado un anillo A y su espectro X, buscando rescatar la noción de función regular sobre variedades (clásicas), definimos una *función regular* f sobre X, como una sección de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong A$, donde $f(\mathfrak{p}) \in \kappa(\mathfrak{p})$ será la imagen de f bajo la composición

$$A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}}$$

para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. Así, todo elemento f de A será visto como una función sobre $Spec\, A$ que toma valores en campos que varian de punto en punto.

Nota 1.2.24. Existen un par de inconvenientes al pensar a las funciones regulares como funciones. La primera es que no son siempre funciones en el sentido usual. La segunda es que una función regular f no esta necesariamente determinada por sus valores, ya que aún siendo f no cero, todos sus valores pueden ser cero (esto ocurre si f es nilpotente), y así, dos funciones regulares g y h pueden tomar valores distintos, y su diferencia ser cero.

Observación 1.2.25. Dado $f \in A$, observemos que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, $f(\mathfrak{p}) = 0$ si, y sólo si, $f \in \mathfrak{p}$. Con esto, $D(f)$ es el abierto más grande de $Spec\, A$ en el cual f no se anula.

Ejemplo 1.2.26. Sean I un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, con K un campo algebraicamente cerrado. Consideremos al anillo $A = K[x_1, \ldots, x_n]/I$. Observemos que para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, el campo $\kappa(\mathfrak{p})$ es una extensión algebraica de K, y al ser K algebraicamente cerrado, $\kappa(\mathfrak{p}) = K$. Así, una función regular sobre $Spec\, A$ será una función (en el sentido usual) de $Spec\, A$ a K.

Nota 1.2.27. Con la noción de funciones A-regulares, vemos que hemos generalizado la noción de función regular en el sentido clásico al tener, en ese caso, que el espacio afín $\mathbb{A}^1$ es homeomorfo a K, y donde una función regular sobre una variedad se puede ver como una función de la variedad a $\mathbb{A}^1$.

1.2.2 Espectro Homogéneo

En §1.2.1 dimos el primer paso para generalizar a las variedades afines de geometría algebraica clásica. Ahora haremos lo análogo para generalizar a las variedades proyectivas, omitiendo las demostraciones al ser análogas a las vistas en 1.2.1.

Sea S un anillo graduado, denotaremos por S_+ al ideal $\oplus_{d>0} S_d$. Definimos el conjunto

$$Proj\, S = \left\{ \mathfrak{p} \in Spec\, S \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathfrak{p} \text{ ideal homogéneo;} \\ S_+ \nsubseteq \mathfrak{p} \end{array} \right\}$$

Sea $\mathfrak{a} \subseteq S$ un ideal homogéneo, definimos el subconjunto $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Proj\, S \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Lema 1.2.28. *Sea S un anillo graduado.*

1. *Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq S$ son ideales homogéneos, entonces $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$*
2. *Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ es cualquier conjunto de ideales homogéneos de S, entonces $V(\sum_i \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$*
3. *$V(S) = \emptyset$, y $V(\langle 0 \rangle) = Proj\, S$*

♯

Definiremos una topología sobre $Proj\, S$ tomando a los subconjuntos $V(\mathfrak{a})$ como los cerrados de $Proj\, S$. Sea $f \in S_+$ un elemento homogéneo, y consideremos al conjunto $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in Proj\, S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$, el cual es un abierto de $Proj\, S$.

Existe una gavilla de anillos sobre $Proj\, S$, la cual denotaremos por $\mathcal{O}_{Proj\, S}$, y si es claro sobre qué espacio la estamos tomando la denotaremos por $\mathcal{O}$. Para describir sus secciones necesitamos considerar al anillo $S_{(\mathfrak{p})}$ de elementos homogéneos de grado cero en la localización $T^{-1}S$, donde T es el conjunto multiplicativo que consiste de todos los elementos homogéneos de S que no están en $\mathfrak{p}$. Así, dado un abierto U de $Proj\, S$, una sección s sobre U es una función

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$$

tal que para todo $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ y s está dada localmente como cociente de elementos homogéneos del mismo grado de S, es decir, para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos homogéneos del mismo grado $a, f \in S$, tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in S_{(\mathfrak{q})}$

A todo anillo graduado S le hemos asociado una pareja $(Proj\, S, \mathcal{O})$ que consiste de un espacio topológico y una gavilla de anillos sobre tal espacio.

Proposición 1.2.29. *Sea S un anillo graduado.*

1. *Para todo $\mathfrak{p} \in Proj\,S$, el tallo $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es isomorfo al anillo local $S_{(\mathfrak{p})}$. Y por lo tanto $(Proj\,S, \mathcal{O})$ es un espacio localmente anillado.*

2. *El conjunto de abiertos $\{D_+(f)\}_{f \in S}$ es una cubierta abierta de $Proj\,S$*

3. *Sea $S_{(f)} \subset S_f$ el subanillo de elementos de grado cero. Entonces tenemos un isomorfismo entre espacios localmente anillados*

$$(D_+(f), \mathcal{O}_{|D_+(f)}) \cong (Spec\,S_{(f)}, \mathcal{O}_{Spec\,S_{(f)}}),$$

para todo $f \in S_+$ homogéneo

♯

Por 2. y 3. de la proposición anterior, y siguiendo un razonamiento análogo al visto en la demostración de la proposición (1.2.10), vemos que $Proj\,S$ tiene una cubierta finita de espectros de anillos. Esto nos permite trabajar a $Proj\,S$ mediante su cubierta finita de esquemas afines, teniendo en particular que $Proj\,S$ es compacto, al serlo cada abierto de su cubierta afín finita

Definición 1.2.30. Sea A un anillo. Definimos el *n-espacio proyectivo*, denotado por $\mathbb{P}^n_A$, como $Proj\,A[x_0, \ldots, x_n]$.

1.2.3 Esquemas en General

Definiciones Básicas

Definición 1.2.31. Un *esquema* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que para todo $\mathfrak{p} \in X$, existe $U \subseteq X$ abierto que contiene a $\mathfrak{p}$, con $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ isomorfo a un esquema afín. Un *morfismo* entre esquemas es un morfismo entre espacios localmente anillados

Ejemplo 1.2.32. Sea A un anillo, entonces $(Spec\,A, \mathcal{O})$ es un esquema

Ejemplo 1.2.33. Sea S un anillo, entonces $(Proj\,S, \mathcal{O})$ es un esquema por la proposición (1.2.29)

Fijaremos algo de notación y terminología.

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Para todo punto $p \in X$ consideremos el anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$, y sea $\mathfrak{m}_{X,p}$ su ideal maximal. Definimos el *campo de residuos* de p sobre X como el campo $\kappa(p) = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_{X,p}$.

Dado $p \in X$, una ***vecindad afín*** de p es un abierto $U \subseteq X$ con $p \in U$, tal que $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ es un esquema afín. Dada una vecindad afín $U = Spec\, A \subseteq X$ de un punto $p \in X$, tenemos que $\mathcal{O}_{X,p} \cong (\mathcal{O}_{X|_U})_p \cong A_p$. De lo anterior notamos que el campo de residuos de un punto $p \in X$ no depende de la vecindad afín.

Como un morfismo entre esquemas $(\varphi, \varphi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ nos induce para todo punto $p \in X$ un morfismo

$$\varphi_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\varphi(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$$

que es local, es decir, $\varphi_p^\sharp(\mathfrak{m}_{Y,\varphi(p)}) \subseteq \mathfrak{m}_{X,p}$, podemos definir un morfismo natural entre campos

$$\kappa(\varphi(p)) \longrightarrow \kappa(p)$$

al tener que la clase del cero va a dar a la clase del cero.

Dado $x \in X$, decimos que x es *regular* si $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo noetheriano regular. Decimos que x es ***singular*** si no es regular.

En ocasiones, abusando de la notación, simplemente escribiremos que X es un esquema, omitiendo en la notación su gavilla estructural. También a un morfismo entre esquemas lo escribiremos usando el morfismo entre espacios topológicos, omitiendo el morfismo entre gavillas.

Ahora definiremos los tipos de subesquemas de un esquema dado. Primero haremos uso del siguiente lema.

Lema 1.2.34. *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema y $U \subseteq X$ un abierto. Entonces $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ es un esquema que será llamado* subesquema abierto *de $(X, \mathcal{O}_X)$.*

Demostración. Claramente es un espacio localmente anillado. Sea $x \in U$. Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema, existe un abierto $U_x \subseteq X$ tal que $x \in U_x$ y $(U_x, \mathcal{O}_{X|_{U_x}}) \cong (Spec\, A, \mathcal{O}_{Spec A})$, con A anillo. Consideremos a $U \cap U_x$, el cual es abierto de U y U_x. Al ser U_x afín, existe $f \in A$ tal que $x \in D(f) \subseteq U \cap U_x$, el cual es isomorfo a un abierto de U. Por la proposición (1.2.17)

$$(D(f), \mathcal{O}_{Spec A|_{D(f)}}) \cong (Spec\, A_f, \mathcal{O}_{Spec\, A_f})$$

$\sharp$

De manera más general tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.35. Un *subesquema abierto* de un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema $(U, \mathcal{O}_U)$, tal que U es un abierto de X y $\mathcal{O}_U \cong \mathcal{O}_{X|_U}$.

Una *inmersión abierta* es un morfismo $\varphi : X \to Y$ que induce un isomorfismo de X con un subesquema abierto de Y

Ya hemos definido un subesquema abierto, lo siguiente será definir lo que es un subesquema cerrado, lo cual es más complejo.

Definición 1.2.36. Una *inmersión cerrada* es un morfismo $(\varphi, \varphi^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ entre esquemas, tal que φ induce un homeomorfismo entre Y y un subconjunto cerrado de X, y además $\varphi^\sharp$ es un epimorfismo.

Un *subesquema cerrado* de un esquema X es una clase de equivalencia de inmersiones cerradas, donde $\varphi : Y \to X$ es equivalente a $\varphi' : Y' \to X$ si existe un isomorfismo $i : Y' \to Y$ tal que $\varphi' = \varphi \circ i$.

Detengamonos un poco y consideremos el caso afín.

Ejemplo 1.2.37. Sean A un anillo y $V(\mathfrak{a}) \subseteq Spec\, A$ un cerrado de su espectro, donde $\mathfrak{a} \subset A$ es un ideal Consideremos el morfismo natural entre anillos $A \to A/\mathfrak{a}$. En el ejemplo (1.2.3) vimos que este morfismo induce un homeomorfismo φ entre $Spec\, A/\mathfrak{a}$ y $V(\mathfrak{a})$. Veamos que el morfismo inducido entre esquemas afines

$$(\varphi, \varphi^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

donde $Y = Spec(A/\mathfrak{a})$ y $X = Spec\, A$, es una inmersión cerrada Para esto sólo resta ver que $\varphi^\sharp$ es un epimorfismo, y lo haremos mostrando que el morfismo inducido sobre los tallos es suprayectivo Tal morfismo es $A_\mathfrak{p} \to (A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \in Spec\, A$, el cual es claramente suprayectivo.

Para todo subesquema cerrado Y de un esquema afín $X = Spec\, A$, podemos repetir el proceso del ejemplo anterior con todo ideal $\mathfrak{a} \subset A$ que cumpla con $V(\mathfrak{a}) = Y$. De esta forma Y tiene varias estructuras posibles de subesquema cerrado, estructuras que dependen del ideal $\mathfrak{a}$ que tomemos. Entre todas las posibles estructuras existe una muy importante Sea Y un cerrado de X, y sea $\mathfrak{a}_\cap$ el ideal obtenido por intersectar a todos los ideales primos de Y. A la estructura $V(\mathfrak{a}_\cap)$ de Y definida la llamaremos la *estructura reducida inducida* de Y.

El lema (1.2.1) nos permite definir las siguientes operaciones sobre subesquemas cerrados de un esquema afín. Dado un anillo A y dos subesquemas cerrados de su espectro, $Spec\,A/\mathfrak{a}$ y $Spec\,A/\mathfrak{b}$, la *unión* será el subesquema cerrado $Spec\,A/(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, la *intersección* será el subesquema cerrado $Spec\,A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, y diremos que $Spec\,A/\mathfrak{a}$ *contiene* a $Spec\,A/\mathfrak{b}$, si este último se puede ver como subesquema cerrado de $Spec\,A/\mathfrak{a}$, es decir, si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

Necesitamos desarrollar un poco más de teoría para generalizar esta manera de ver a los subesquemas cerrados de un esquema arbitrario, por lo que esto se hará más adelante.

Definición 1.2.38. Sea X un esquema. Si Y es un subesquema cerrado de un subesquema abierto de X, entonces decimos que Y es un *subesquema* de X

Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre esquemas Decimos que φ es una *inmersión* si existe un subesquema Z de Y tal que $\varphi : X \to Z$ es un isomorfismo.

Nota 1.2.39. En particular, todo subesquema cerrado es un subesquema.

Definición 1.2.40. Sea S un esquema fijo Un *esquema sobre* S, o S-*esquema*, es una pareja (X,φ), donde X es un esquema y $\varphi : X \to S$ es un morfismo entre esquemas.

Si (X,φ) y (Y,φ') son S-esquemas, un *morfismo entre S-esquemas*, o S-*morfismo*, es un morfismo $\phi : X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Así, dado un esquema S, hemos definido la categoría de S-esquemas, siendo S el *esquema base* Si A es un anillo y S su espectro, en ocasiones diremos que estamos en la categoría de A-esquemas. Denotaremos por $Hom_S(X,Y)$ al conjunto de S-morfismos entre cualesquiera S-esquemas X y Y.

Ejemplo 1.2.41. Sea A un anillo. El morfismo natural entre anillos $A \to A[x_0, \ldots, x_n]$, nos induce el ver a $\mathbb{P}^n_A$ como un A-esquema

Definición 1.2.42. Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un esquema. Definimos la *dimensión* de X, denotada por $dim(X)$, como el supremo de todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que existe una cadena

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$$

de distintos cerrados irreducibles de X.

Si Z es un cerrado irreducible de X, definimos la *codimensión* de Z en X, denotada por *codim*(Z, X), como el supremo de todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que existe una cadena

$$Z = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$$

de distintos cerrados irreducibles de X, comenzando con Z.

Si Y es un cerrado de X, definimos las *codimensión* de Y en X, denotada por *codim*(Y, X), como

$$codim(Y, X) = \inf_{Z \subseteq Y} codim(Z, X)$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los cerrados irreducibles de Y.

Propiedades Básicas

Comenzamos dando un resultado que será de utilidad más adelante.

Lema 1.2.43. *Sean X un esquema y K un campo. Fijar un punto $x \in X$ y un morfismo inclusión $\kappa(x) \to K$, es equivalente a dar un morfismo entre esquemas $Spec K \to X$.*

$\sharp$

El siguiente resultado nos prueba la existencia, en ciertos esquemas, del punto genérico. Este resultado jugará un papel muy importante en la sección de variedades y en los capítulos posteriores.

Proposición 1.2.44. *Sea $(X, \mathcal{O})$ un esquema y $Z \subseteq X$ un subconjunto cerrado irreducible. Entonces existe un único punto $\xi \in Z$ tal que ξ es genérico.*

Demostración. Al ser Z irreducible, todo abierto no vacío en Z es irreducible y denso. Entonces todo punto genérico de Z estará contenido en todo abierto $U \subset Z$, ya que de no ser así, si $\xi \in Z$ es un punto genérico con $\xi \notin U$, tendríamos que $\xi \in U^c \subset Z$, el cual es cerrado, contradiciendo el hecho que ξ es genérico.

Dado un abierto afín $U \subseteq X$ que intersecte a Z, y un punto $\xi \in U \cap Z$ cuya cerradura contenga a $U \cap Z$, al ser $U \cap Z$ abierto denso de Z, tenemos que ξ es denso en Z.

Así, dado un abierto afín U de X, nos basta probar la proposición para $U \cap Z$, el cual es cerrado irreducible en U. Pero por la nota (1.2.9) acabamos.

$\sharp$

Definición 1.2.45. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es *reducido* si para todo abierto $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ es libre de nilpotentes.

Proposición 1.2.46. *Sea $(X, \mathcal{O})$ un esquema.*

1. *El esquema es reducido si, y sólo si, $\mathcal{O}_p$ es libre de nilpotentes para todo $p \in X$.*

2. *Sea $\mathcal{O}_{red}$ la gavilla asociada a la pregavilla $U \to \mathcal{O}(U)/Nil(\mathcal{O}(U))$, donde $Nil(\mathcal{O}(U))$ es el ideal formado por todos los elementos nilpotentes del anillo $\mathcal{O}(U)$. Entonces $(X, \mathcal{O}_{red})$ es un esquema reducido, llamado el* esquema reducido *asociado a X.*

3. *Existe un morfismo entre esquemas $(\varphi, \varphi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_{red}) \to (X, \mathcal{O})$ tal que φ es homeomorfismo*

Demostración. 1. Supongamos que existe $p \in X$ tal que $\mathcal{O}_p$ tiene un elemento nilpotente s_p, con lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(s_p)^n = \bar{0}$. Sea $s \in \mathcal{O}(U)$ un representante de s_p. Entonces

$$\rho_{up}(s^n) = (s^n)_p = (s_p)^n = \bar{0}$$

Al ser s^n y 0 dos secciones de $\mathcal{O}(U)$ que coinciden en el tallo, existe $W \subseteq U$ abierto que contiene a p tal que

$$0 = s^n_{|w} = \rho_{uw}(s^n) = (\rho_{uw}(s))^n$$

Por lo tanto $\rho_{uw}(s)$ es un elemento nilpotente de $\mathcal{O}(W)$.

Inversamente, sean U un abierto de X y $s \in \mathcal{O}(U)$ una sección no cero tal que $s^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $p \in U$, entonces

$$\bar{0} = \rho_{up}(0) = \rho_{up}(s^n) = (\rho_{up}(s))^n$$

Esto fue para todo $p \in U$ al no ser s la sección cero, para algún $q \in U$, $\rho_{uq}(s) \neq \bar{0}$. Por lo tanto $\rho_{uq}(s)$ es un elemento nilpotente de $\mathcal{O}_q$

2. Como para todo punto de X el tallo de una pregavilla es isomorfo al tallo de la gavilla asociada, para ver que $(X, \mathcal{O}_{red})$ es un espacio localmente anillado basta probar que el tallo de la pregavilla en un punto arbitrario es un anillo local. Al conmutar límites directos con cocientes, tenemos que $(\mathcal{O}_{red})_p \cong \mathcal{O}_p/Nil(\mathcal{O}_p)$, para todo $p \in X$. Pero $\mathcal{O}_p/Nil(\mathcal{O}_p)$ es local, ya que cocientes de anillos locales es local.

Sea $p \in X$. Como $(X, \mathcal{O})$ es un esquema, existe un abierto afín $U = Spec\, A$ de X que contiene a p. Consideremos al esquema afín $(Spec\,(A/Nil(A)), \mathcal{O}_N)$. El morfismo natural entre anillos $\varphi : A \to A/Nil(A)$ nos induce un mapeo continuo

$$^a\varphi : Spec\,(A/Nil(A)) \longrightarrow Spec\, A$$

el cual es una biyección, ya que $Nil(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec\, A} \mathfrak{p}$. Más aún, $^a\varphi(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$, por lo que φ es un homeomorfismo.

Para que $(Spec\,(A/Nil(A)), \mathcal{O}_N)$ sea un abierto afín de $(X, \mathcal{O}_{red})$ que contiene a p, resta ver que $\mathcal{O}_{red|_U} \cong \mathcal{O}_N$. Pero ésto se sigue de que

$$(\mathcal{O}_{red})_p \cong (A/Nil(A))_p \cong (\mathcal{O}_N)_p$$

Por lo tanto $(X, \mathcal{O}_{red})$ es un esquema. Al tener que $(\mathcal{O}_N)_p$ es libre de nilpotentes para todo $p \in X$, $(X, \mathcal{O}_{red})$ es un esquema reducido por el inciso anterior.

3. El morfismo $(\varphi, \varphi^\sharp)$ está dado con φ igual a la identidad y $\varphi^\sharp$ el morfismo dado por la composición

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/Nil \longrightarrow \mathcal{O}_{red}$$

donde $\mathcal{O}/Nil$ es la pregavilla $U \to \mathcal{O}(U)/Nil(\mathcal{O}(U))$

$\sharp$

Corolario 1.2.47. *Sea $X = Spec\, A$ un esquema afín. Entonces X es reducido si, y sólo si, A es libre de nilpotentes.* $\sharp$

Ejemplo 1.2.48. Sean A un anillo, X su espectro y Y un cerrado de X. Sea $V(\mathfrak{a}_\cap)$ la estructura reducida inducida de Y. Al tener que $Y \cong Spec\, A/\mathfrak{a}_\cap$, Y tiene asociada una estructura de esquema reducido, ya que para todo $\mathfrak{p} \in Y$

$$\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}_{Spec\, A/\mathfrak{a}_\cap, \mathfrak{p}} \cong (A/\mathfrak{a}_\cap)_\mathfrak{p},$$

y por construcción $\sqrt{\mathfrak{a}_\cap} = \mathfrak{a}_\cap$. Por lo tanto, $(A/\mathfrak{a}_\cap)_\mathfrak{p}$ es libre de nilpotentes, al serlo $A/\mathfrak{a}_\cap$.

Nota 1.2.49. Dado un subesquema cerrado de un esquema arbitrario, se le puede puede construir (Hartshorne [7], pag. 86) una estructuta de esquema cerrado que sea reducida, construcción que omitiremos en el presente trabajo

Definición 1.2.50. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es *noetheriano* si X tiene una cubierta afín finita $X = \bigcup_{i=1}^n Spec\, A_i$, con A_i anillo noetheriano para todo i.

Proposición 1.2.51. *Si A es un anillo noetheriano, entonces $Spec\,A$ es un espacio topológico noetheriano (Apéndice A)*

Demostración. Sea A un anillo noetheriano, y consideremos una cadena descendente de cerrados de $Spec\,A$

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \cdots \supseteq V(\mathfrak{a}_n) \supseteq \cdots \tag{1.2}$$

Por el lema (1.2.1) la cadena (1.2) nos induce una cadena ascendente de ideales

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \cdots \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_n} \subseteq \cdots$$

que al ser A noetheriano, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\mathfrak{a}_N} = \sqrt{\mathfrak{a}_{N+i}}$, para $i \geq 0$.

Nuevamente por el lema (1.2.1) tenemos que la cadena (1.2) es de la forma

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \cdots \supseteq V(\mathfrak{a}_N) = V(\mathfrak{a}_{N+1}) = \cdots$$

Por lo tanto $Spec\,A$ es un espacio topológico noetheriano. ♯

Corolario 1.2.52. *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, entonces X es un espacio topológico noetheriano*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de abiertos de X que le dan estructura de esquema noetheriano. Consideremos una cadena descendente de cerrados de X

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \cdots \supseteq Y_n \supseteq \cdots \tag{1.3}$$

Al cubrir los U_i a X, sin perdida de generalidad, existe $0 < l \leq n$ tal que $U_j \cap Y_0 \neq \emptyset$, $j = 1, \ldots, l$. Al ser la cadena descendente, los U_j intersectan a todos los Y_k. Así, la cadena (1.3) induce una cadena descendente de cerrados en cada U_j

$$Y_0 \cap U_j \supseteq Y_1 \cap U_j \supseteq \cdots \supseteq Y_n \cap U_j \supseteq \cdots$$

la cual se estaciona al ser los U_j esquemas noetherianos. Por lo tanto, para toda $j = 1, \ldots, l$, existe N_j tal que

$$Y_{N_j} \cap U_j = Y_{N_j+m} \cap U_j$$

para todo $m \geq 0$. Pero para toda k, $Y_k = \bigcup_{j=1}^{l} Y_k \cap U_j$. Por lo tanto, la cadena (1.3) se estaciona a lo más en el nivel $max\{N_j \mid j = 1, \ldots, l\}$. ♯

Definición 1.2.53. Decimos que un esquema X es *puro k-dimensional* si todos sus componentes irreducibles (Apéndice A) tienen dimensión k.

Definición 1.2.54. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es *irreducible* si X es irreducible.

Definición 1.2.55. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es *entero* si para todo abierto $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ es dominio entero.

Ejemplo 1.2.56. Sea $X = Spec\, A$ un esquema afín. Del corolario (1.2.47) y la proposición (1.2.8) tenemos que X es entero si, y sólo si, X es reducido e irreducible, es decir, A es un dominio entero.

El resultado del ejemplo anterior es un caso particular de la siguiente proposición.

Proposición 1.2.57. *Un esquema es entero si, y sólo si, es reducido e irreducible.*

Demostración. Hartshorne [7], página 82 ♯

Definición 1.2.58. Un esquema X es *normal* si para todo $x \in X$, el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ es enteramente cerrado

A todo esquema entero se le puede asociar un esquema normal. Consideremos el caso afín.

Sea $X = Spec\, A$ un esquema afín entero Denotemos por $\tilde{A}$ a la cerradura entera de A en su campo cociente $A_{(0)}$, El anillo $\tilde{A}$ es entero, y al tener que localizaciones de dominios enteramente cerrados son enteramente cerrados, el esquema $\tilde{X} = Spec\, \tilde{A}$ es normal. El morfismo natural $A \to \tilde{A}$ induce un morfismo $\tilde{X} \to X$

En general, dado un esquema entero X, asociando a cada abierto afín U de X su esquema normal $\tilde{U}$, se puede construir (Itaka [8]) un esquema entero normal $\tilde{X}$ y un morfismo $\tilde{\theta} : \tilde{X} \to X$ tales que

Para todo esquema entero normal Z, y para cada morfismo dominante $\varphi : Z \to X$, existe $\varphi' : Z \to \tilde{X}$ tal que $\varphi = \tilde{\theta} \circ \varphi'$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\theta}"] & X \\ Z \arrow[u, dashed, "\varphi'"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Al esquema $\tilde{X}$ le llamaremos la *normalización* de X

Producto de Esquemas y Primeras Aplicaciones

Definición 1.2.59. Sean S un esquema y (X,φ), (Y,ψ) S-esquemas Definimos el *producto fibrado* de X y Y sobre S como una terna $(X \times_S Y, p_1, p_2)$, donde $X \times_S Y$ es un S-esquema y

$$p_1 : X \times_S Y \longrightarrow X$$

$$p_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y$$

son S-morfismos que cumplen $\varphi \circ p_1 = \psi \circ p_2$, y tales que dado cualquier S-esquema Z con morfismos $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ que cumplen $f \circ p_1 = g \circ p_2$, entonces existe un único morfismo $\theta : Z \to X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ \theta$, y $g = p_2 \circ \theta$

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dr, "\varphi"] & \\
Z \arrow[urr, "f"] \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[drr, "g"'] & X \times_S Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & S \\
 & & Y \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Los morfismos p_1, p_2 son llamados *morfismos proyección*

Nota 1.2.60. El producto fibrado es el producto fibrado en la categoría de S-esquemas, con S un esquema dado.

Nota 1.2.61. Dados dos S-esquemas X y Y, la propiedad universal del producto fibrado la podemos reescribir diciendo que para todo S-esquema Z, existe una biyección

$$Hom_S(Z,X) \times Hom_S(Z,Y) \longleftrightarrow Hom_S(Z, X \times_S Y)$$

donde denotaremos por $(\varphi \times_S \psi)$ al morfismo asociado a $(\varphi, \psi)_S$ bajo esta biyección. Si es claro cual es nuestro esquema base, lo omitiremos de la notación

En lo que resta, omitiremos a los morfismos proyección al denotar a un producto fibrado

Teorema 1.2.62. Para cualesquiera S-esquemas X y Y, el producto $X \times_S Y$ existe y es único salvo isomorfismo.

Demostración. Hartshorne [7], página 87. $\sharp$

Nota 1.2.63. Sean $X = Spec A$, $Y = Spec B$, y $S = Spec C$ esquemas afines Obtenemos por la propiedad universal de producto tensorial que $X \times_S Y = Spec(A \otimes_C B)$, donde

$$p_1 = {}^a f : X \times_S Y \to X$$

$$p_2 = {}^a g : X \times_S Y \to Y$$

son los morfismos entre espectros inducidos por

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow A \otimes_C B \\ a &\longmapsto a \otimes_C 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : B &\longrightarrow A \otimes_C B \\ b &\longmapsto 1 \otimes_C b \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.64. Sea A un anillo. Al tener que $A[x] \otimes_A A[y] \cong A[x, y]$, tenemos que $\mathbb{A}^1_A \times_{Spec A} \mathbb{A}^1_A \cong \mathbb{A}^2_A$

Nota 1.2.65. Como conjunto $X \times_S Y$ es

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x) = \psi(y)\}$$

donde $X \times Y$ es el producto cartesiano. Así, si S es el espectro de un campo, el producto fibrado coincide como conjunto con el producto cartesiano.

Proposición 1.2.66. *Sean S un esquema y X, Y, Z S-esquemas. Entonces*

1. $X \times_S S \cong X$.

2. $X \times_S Y \cong Y \times_S X$

3. $(X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z)$.

Demostración La demostración es inmediata haciendo uso de la propiedad universal del producto fibrado.

$\sharp$

Sean S, S' dos esquemas base. Un morfismo entre esquemas $S' \to S$ nos induce un funtor contravariante de la categoría de S-esquemas a la categoría de S'-esquemas, dado por

$$X \to S \longmapsto X \times_S S' \to S'$$
$$\varphi : X \to Y \longmapsto \varphi^\times : X \times_S S' \to Y \times_S S'$$

donde $\varphi^\times$ es el morfismo único inducido por la propiedad universal de $Y \times_S S'$.

$$\begin{tikzcd}
Y \times_S S' \arrow[drrr] \arrow[ddr] & & & \\
& X \times_S S' \arrow[ul, dashed, "\varphi^\times"'] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\
& S' \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

Decimos que $X \times_S S'$ se obtuvo de X al hacer una *extensión de base* $S \to S'$.

Proposición 1.2.67. *Sean $\varphi : X \to S$ un morfismo suprayectivo (como mapeo continuo) y $\psi : Y \to S$ cualquier morfismo. Entonces $p_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y$ es un morfismo suprayectivo.*

Demostración. Mumford [10], página 86. $\sharp$

Como aplicación de la existencia de producto fibrado tenemos la definición de gráfica de un S-morfismo.

Definición 1.2.68. Sea $\varphi : X \to Y$ un S-morfismo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dr] \arrow[dd, "\varphi"] & \\
X \arrow[urr, "Id"] \arrow[r, "\Gamma_\varphi"'] \arrow[drr, "\varphi"'] & X \times_S Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & & S \\
& & Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

con Γ_φ el morfismo único de X en $X \times_S Y$ tal que

$$p_1 \circ \Gamma_\varphi = Id$$
$$p_2 \circ \Gamma_\varphi = \varphi$$

Al morfismo Γ_φ le llamaremos la *S-gráfica* de φ.

Proposición 1.2.69. *Sea S un esquema afín.*

1. *Sea $\varphi : X \to Y$ un S-morfismo entre S-esquemas afines. Entonces Γ_φ es una inmersión cerrada.*

2. *Sea $\varphi : X \to Y$ un S-morfismo entre S-esquemas, con Y afín. Entonces Γ_φ es una inmersión cerrada.*

3. *En general, Γ_f es una inmersión, con lo que $\Gamma_f(X)$ es un subesquema de $X \times_S Y$.*

Demostración. Itaka [8], página 72 ♯

Lo siguiente será definir la fibra en un punto. Para esto nos basaremos en el caso afín.

Sea $f : A \to B$ un morfismo entre anillos con ${}^a f : Spec\, B \to Spec\, A$ el morfismo inducido por f entre esquemas afines. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y consideremos al conjunto

$$ {}^a f^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in Spec\, B \mid f^{-1}(\mathfrak{q}) = {}^a f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\} $$

Veamos que ${}^a f^{-1}(\mathfrak{p})$, con la topología inducida, es homeomorfo a $Spec(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$.

Como $\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} \cong (A/\mathfrak{p})_{\bar{\mathfrak{p}}} \cong A/\mathfrak{p} \otimes_A A_\mathfrak{p}$, si denotamos por $S = A \setminus \mathfrak{p}$

$$ \begin{aligned} B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) &\cong B \otimes_A A/\mathfrak{p} \otimes_A A_\mathfrak{p} \cong B/f(\mathfrak{p})B \otimes_A A_\mathfrak{p} \cong (B/f(\mathfrak{p})B)_\mathfrak{p} \\ &\cong (B/f(\mathfrak{p})B)_{f(S)} \end{aligned} $$

Por lo que como espacios topológicos $Spec(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$ y $Spec\left((B/f(\mathfrak{p})B)_{f(S)}\right)$ son homeomorfos.

Ahora, como

$$ Spec(B/\mathfrak{p}B)_{f(S)} = \{\mathfrak{q} \in Spec\, B \mid \mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{q};\ \mathfrak{q} \cap f(S) = \emptyset\} $$

tenemos que

$$ Spec(B/f(\mathfrak{p})B)_{f(S)} \subseteq {}^a f^{-1}(\mathfrak{p}) $$

ya que la condición $\mathfrak{q} \cap f(S) = \emptyset$ nos induce $f^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$, y la condición $f(\mathfrak{p})B \subseteq \mathfrak{q}$ nos da $\mathfrak{p} \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})$.

La conteción $(B/f(\mathfrak{p})B)_{f(S)} \supseteq {}^a f^{-1}(\mathfrak{p})$ es inmediata. Así, ${}^a f^{-1}(\mathfrak{p})$ con la topología inducida es homeomorfo a $Spec(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$.

Con esto, resulta natural la siguiente definición.

Definición 1.2.70. Sean $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre esquemas y $y \in Y$ un punto. Sea $\kappa(y)$ el campo de residuos de y, y consideremos al morfismo $Spec\,\kappa(y) \to Y$ dado en el lema (1 2 43). Definimos la *fibra* del morfismo φ sobre y como el esquema

$$X_y = X \times_Y Spec\,\kappa(y)$$

el cual resulta ser homeomorfo al cerrado $\varphi^{-1}(y)$ de X.

Acabamos la parte de las primeras aplicaciones del producto fibrado con la definición del esquema imagen inversa. Veamos primero el caso afín.

Sea $f : A \to B$ un morfismo entre anillos con ${}^a f : Spec\,B \to Spec\,A$ el morfismo inducido por f entre esquemas afines. Sea Z un subesquema cerrado de $Spec\,A$, con $\mathfrak{a}$ un ideal de A que lo define, es decir, $Z = V(\mathfrak{a}) \cong Spec\,A/\mathfrak{a}$ Consideremos al subesquema de $Spec\,B$ definido por el ideal $f(\mathfrak{a})B$, es decir, al esquema $Spec\,B/f(\mathfrak{a})B$. Notando que

$$\begin{aligned} {}^a f^{-1}(Z) &= \{\mathfrak{q} \in Spec\,B \mid \mathfrak{a} \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in Spec\,B \mid f(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q}\} \end{aligned}$$

decimos que $Spec\,B/f(\mathfrak{a})B$ es el *esquema imagen inversa* de Z.

Para generalizar esta noción, observemos que hemos obtenido un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Spec\,B/f(\mathfrak{a})B \arrow[r] \arrow[d] & Spec\,B \arrow[d] \\ Spec\,A/\mathfrak{a} \arrow[r] & Spec\,A \end{tikzcd}$$

el cual está inducido por el diagrama conmutativo de anillos

$$\begin{tikzcd} B/f(\mathfrak{a})B & B \arrow[l] \\ A/\mathfrak{a} \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Al tener que $B \otimes_A A/\mathfrak{a} \cong B/f(\mathfrak{a})B$ como A-módulos, llegamos a la siguiente definición

Definición 1.2.71. Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre esquemas, dado $Z \subset Y$ un subesquema cerrado, al esquema $X \times_Y Z$ le llamaremos el *esquema imagen inversa* de Z bajo φ, el cual resulta ser isomorfo como esquema al subesquema cerrado $\varphi^{-1}(Z)$ de X

Morfismos

Proposición 1.2.72. *Sean R un anillo, X un R-esquema y A una R-álgebra. Entonces*

$$Hom_R(X, Spec\,A) \longrightarrow Hom_R(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

es una biyección.

Demostración. Mumford [10], página 79. ♯

Corolario 1.2.73. *El esquema $(Spec\,\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{Spec\,\mathbb{Z}})$ es el objeto final en la categoría de esquemas. Por lo tanto, para cualesquiera dos esquemas existe su producto fibrado sobre $\mathbb{Z}$.* ♯

Definición 1.2.74. Un morfismo entre esquemas $\varphi : X \to Y$ es de *tipo finito* si existe una cubierta de Y por abiertos afines $V_i = Spec\,B_i$, tal que cada $\varphi^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por un número finito de abiertos afines $U_{ij} = Spec\,A_{ij}$, donde cada A_{ij} tiene estructura de B_i-álgebra finitamente generada inducida por el morfismo $\mathcal{O}_Y(V_i) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U_{ij}))$

En este caso, decimos que X es un *esquema de tipo finito* sobre Y. Si $Y = Spec\,K$, con K campo, decimos que X es de tipo finito sobre K.

Ejemplo 1.2.75. Sea X un esquema de tipo finito sobre un campo K. Como K es un espacio topológico con un sólo punto, $X = \bigcup_{i=1}^{n} Spec\,A_i$, con A_i una K-álgebra finitamente generada, y por lo tanto un anillo noetheriano.

Definición 1.2.76. Un morfismo entre esquemas $\varphi : X \to Y$ es *finito* si existe una cubierta de Y por abiertos afines $V_i = Spec\,B_i$, tal que para toda i, $\varphi^{-1}(V_i) = Spec\,A_i$ y el morfismo $\mathcal{O}_Y(V_i) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V_i))$ induce en A_i una estructura de B_i-módulo finitamente generado.

Definición 1.2.77. Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre esquemas. El *morfismo diagonal* es el morfismo único $\Delta : X \to X \times_Y X$ cuya composición con $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ es el morfismo identidad $X \to X$.

Decimos que φ es *separado* si $Im\,\Delta \subseteq X \times_Y X$ es cerrado. Si $\varphi : X \to Spec\,K$ es separado, con K un campo, decimos que X es separado sobre K.

Proposición 1.2.78. *Si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo entre esquemas afínes, entonces es separado.*

Demostración. Hartshorne [7], página 96. ♯

Proposición 1.2.79. *Todos los morfismos considerados son entre esquemas noetherianos*

1. *Inmersiones cerradas y abiertas son separadas.*

2. *Composición de morfismos separados es separado.*

3. *Si $\varphi : X \to Y$ es separado y $\psi : Z \to Y$ es cualquier morfismo, entonces el morfismo $p_2 : X \times_Y Z \to Z$ es separado.*

4. *Si $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Z \to Y$ son dos morfismo tales que $\psi \circ \varphi$ es separado, entonces φ es separado.*

Demostración. Hartshorne [7], página 99. ♯

Definición 1.2.80. Un morfismo entre esquemas $\varphi : X \to Y$ es *universalmente cerrado* si es cerrado, y para todo morfismo $Y' \to Y$ el morfismo $X \times_Y Y' \to Y'$ es cerrado.

Decimos que φ es *propio* si es separado, de tipo finito y universalmente cerrado.

Definición 1.2.81. Sea K un campo y (X, φ) un K-esquema. Decimos que X es *completo* si φ es propio.

Proposición 1.2.82. *Sea K un campo. Entonces $\mathbb{P}^n_K$ es completo para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Itaka [8], página 169. ♯

Proposición 1.2.83. *Todos los morfismos considerados son entre esquemas noetherianos.*

1. *Inmersiones cerradas son propias.*

2. *Composición de morfismos propios es propio*

3. *Si $\varphi : X \to Y$ es propio y $\psi : Z \to Y$ es cualquier morfismo, entonces $p_2 : X \times_Y Z \to Z$ es propio.*

4. *Sean $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Z \to Y$ dos morfismo. Si $\psi \circ \varphi$ es propio y ψ es separado, entonces φ es propio*

Demostración. Hartshorne [7], página 102. ♯

Si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo propio entre esquemas, entonces (Grothendieck [15]) φ es finito.

Definición 1.2.84. Un morfismo $\varphi : X \to Y$ es *plano* si para $U' \subset Y$, $U \subset X$ abiertos afines con $\varphi(U) \subset U'$, la composición

$$\mathcal{O}_Y(U') \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U')) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

da a $\mathcal{O}_X(U)$ estructura de $\mathcal{O}_Y(U')$-módulo plano

Proposición 1.2.85. *1. Inmersiones abiertas son planas.*

2. Si $\varphi : X \to S$ es un morfismo plano, y $S' \to S$ es cualquier morfismo, entonces $\varphi' : X \times_S S' \to S'$ es plano.

3. Si $\varphi : A \to B$ es un morfismo entre anillos, entonces ${}^a\varphi : Spec\, B \to Spec\, A$ es plano si, y sólo si, B es plano sobre A

Demostración. Hartshorne [7], página 254. ♯

Funciones Regulares, Funciones Racionales y Morfismos Racionales

Generalizaremos la noción de función regular dada en el caso afín. Sea A un anillo, y consideros por el momento sólo a A-esquemas.

Definición 1.2.86. Sea X un A-esquema, un A-morfismo

$$\varphi : X \to Spec\, A[x] \cong \mathbb{A}^1_A$$

es llamado una *A-función regular* sobre X.

Por la proposición (1.2.72),

$$Hom_A(X, \mathbb{A}^1_A) \longleftrightarrow Hom_A(A[x], \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

Así, toda A-función regular f sobre X está identificada con una sección global de X

Como en el caso afín, podemos pensar a una sección de $\mathcal{O}_X$ como una función que toma valores en campos diferentes en puntos diferentes: si $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y $p \in U$, $s(p)$ es la imagen de s bajo la composición

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p} \longrightarrow \kappa(p)$$

Con lo anterior, una *función regular* sobre un abierto $U \subseteq X$ es una sección de $\mathcal{O}_X(U)$. Una sección global es un *función regular global*. Por esto, en ocaciones se le llama a $\mathcal{O}_X$ la gavilla de funciones regulares de X

Proposición 1.2.87. *Sean X un A-esquema, con A un anillo, y $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Si X es reducido, U es un abierto denso de X y $f_{|_U} = 0$, entonces $f = 0$*

Demostración. Al ser U denso en X, todo abierto no vacío de X intersecta a U. Al tener X una cubierta abierta afín $\{U_i = Spec B_i\}$, nos bastará probar que para toda i, $f_{|_{U_i}} = 0$, al ser $\mathcal{O}_X$ una gavilla. Así, podemos suponer que $X = Spec B$ es un esquema afín. Al tener que $f_{|_U} = 0$, se sigue que $U \subseteq V(f)$, por lo que $X = V(f)$, al ser U denso. Entonces $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec B} \mathfrak{p}$, y al ser X reducido, $f = 0$.

$\sharp$

Lo siguiente será dar la noción de función racional.

Consideremos al conjunto

$$\mathbb{E} = \{(U, f) \mid U \text{ abierto denso de } X;\ f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)\}$$

Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{E}$ de la siguiente forma: $(U, f) \sim (V, g)$ si, y sólo si, $f_{|_W} = g_{|_W}$, para algún abierto denso W de $U \cap V$. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia al tener que la intersección finita de abiertos densos de un espacio topológico es abierto denso de este.

Definición 1.2.88. Sea X un A esquema Una *A-función racional* sobre X es un elemento de $\mathbb{E}/\sim$, denotando por $\Gamma_{rat}(X/A)$ al conjunto de todas las A-funciones racionales sobre X. El *dominio* de una función A-racional s está dado como

$$dom(s) = \{x \in X \mid x \in U \text{ para algún } (U, f) \in s\}$$

Si $(U, f) \in s$, decimos que s es una *función racional definida por* f

Daremos a $\Gamma_{rat}(X/A)$ estructura de A-álgebra. Sean $s, t \in \Gamma_{rat}(X/A)$, con (U, f), y (V, g) representantes de s y t respectivamente. La función racional definida por $\alpha f_{|_{U\cap V}} + \beta g_{|_{U\cap V}}$, con $\alpha, \beta \in A$, depende unicamente de α, β, s, y t, es decir, no depende de los representantes de s y t (esto se sigue de la definición de la relación $\sim$) Así, tenemos una A-función racional bien definida que denotaremos por $\alpha s + \beta t$ De igual forma tenemos una funcion A-racional definida por $f_{|_{U\cap V}} \cdot g_{|_{U\cap V}}$, que denotaremos por $s \cdot t$.

Con lo anterior, $(\Gamma_{rat}(X/A), +, \cdot)$ es una A-álgebra que denotaremos por $R(X)$, y que llamaremos el *anillo de A-funciones racionales sobre X*.

Lema 1.2.89. *Sea X un A esquema, con A anillo. Entonces*

$$R(X) \cong \varinjlim_{\substack{U \in X \\ U \text{ denso}}} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

Demostración Itaka [8], página 80

Lo siguiente es definir lo que es un morfismo regular, que es una generalización de función racional. Ahora estaremos trabajando en la categoría de S-esquemas, con S un esquema arbitrario.

Sean X, Y dos S-esquemas. Consideremos al conjunto

$$\mathbb{E}^* = \{(U, \varphi) \mid U \text{ abierto denso de } X;\ \varphi : U \to Y \text{ un } S\text{-morfismo } \}$$

Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{E}^*$ de la siguiente forma: $(U, \varphi) \sim (V, \psi)$ si, y sólo si, $\varphi_{|W} = \psi_{|W}$, para algún abierto denso W de $U \cap V$.

Definición 1.2.90. Sean X, Y dos S-esquemas. Un *S-morfismo racional* $\phi : X \to Y$ es un elemento de $\mathbb{E}^* / \sim$. El *dominio* de un S-morfismo racional ψ está dado como

$$dom(\psi) = \{x \in X \mid x \in U \text{ para algún } (U, \varphi) \in \psi\}$$

Si $x \in dom(\psi)$, decimos que ψ está *definida en* x.

Observación 1.2.91. Sean A un anillo, S su espectro y $Y = \mathbb{A}^1_A$. Entonces un A-morfismo racional sobre X es justamente una A-función racional sobre X.

En lo que resta, unicamente diremos funciones racionales y morfismos racionales, omitiendo al esquema base.

Ejemplo 1.2.92. Sean A un anillo, $\varphi : X \to Y$ un A-morfismo dominante y $f \in R(Y)$. Entonces la composición $f \circ \varphi$ define una función racional sobre X, la cual llamaremos el *pull-back* de f por φ.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& \mathbb{A}^1_A &
\end{tikzcd}$$

1.3 Gavillas de Módulos

En esta sección retomamos el concepto de gavilla para definir gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos, con X cualquier esquema. Particular importancia tendrán las gavillas localmente libres (las cuales relacionaremos en la última sección con haces vectoriales) y las gavillas casi-coherentes, las cuales nos servirán para dar una descripción más completa de lo que es un subesquema cerrado.

Definiciones Básicas

Definición 1.3.1. Sea $(X, \mathcal{O})$ un esquema. Un $\mathcal{O}$-*módulo* es una gavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X, tal que para cada abierto U de X, el grupo $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}(U)$-módulo, y para cada inclusión de abiertos $V \subseteq U$, los morfismos restricción $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ son compatibles con la estructura de módulo a través de los morfismos restricción $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{O}(V) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}
$$

Un *morfismo* $\varphi : X \to Y$ entre $\mathcal{O}$-modulos es un morfismo entre gavillas, tal que para cada abierto U de X, $\varphi(U)$ es morfismo entre $\mathcal{O}(U)$-módulos.

Como en la sección 1, tendremos que la suma directa y límite directo de $\mathcal{O}$-módulos es nuevamente un $\mathcal{O}$-módulo. Si U es un abierto de X y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}$-módulo, entonces $\mathcal{F}_{|_U}$ es un $\mathcal{O}$-módulo.

Sea $(\varphi, \varphi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo entre esquemas. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $f_*\mathcal{F}$ tiene estructura de $\mathcal{O}_Y$-módulo, la cual esta inducida por el morfismo entre gavillas $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$.

Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos. La pregavilla $U \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ resulta ser (Tennison [12]) un $\mathcal{O}_X$-módulo, que denotaremos por $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. En el caso particular que $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$, a la gavilla $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ le llamaremos la *gavilla dual* de $\mathcal{F}$.

Consideremos a la pregavilla $U \to \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. A su gavilla asociada, que denotaremos por $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$, le llamaremos la *gavilla producto tensorial* de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, la cual tiene de forma natural estructura de $\mathcal{O}_X$-modulo.

Ejemplo 1.3.2. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo, y consideremos a la gavilla $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X$ Para todo abierto U de X, por propiedades de producto tensorial, $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{F}(U)$, lo que implica que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F}$ En particular, $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X$.

Veamos cómo son los tallos de la gavilla producto tensorial. Sean $x \in X$ un punto y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos. Como límites directos conmutan con producto tensorial (Bourbaki [2])

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} \left(\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)\right) \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}_x$$

Definición 1.3.3. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$-módulo.

- Definimos $\mathcal{O}^n$, para $n \geq 0$, como la pregavilla

$$U \longrightarrow \mathcal{O}^n(U) := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}(U)$$

  la cual claramente es un $\mathcal{O}$-módulo.

- Decimos que $\mathcal{F}$ es *libre* si $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}^n$, para alguna $n \geq 0$

- Decimos que $\mathcal{F}$ es *localmente libre* si para cada $x \in X$, existe un abierto U tal que $\mathcal{F}_{|U} \cong \mathcal{O}^n_{|U}$. En este caso decimos que n es el *rango* de $\mathcal{F}$ sobre U

- Si $\mathcal{F}$ es localmente libre de rango uno, diremos que es una *gavilla invertible*.

Sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible sobre X, con $\{U_i\}$ la cubierta abierta de X que le da tal estructura A las imagenes de $1 \in \mathcal{O}_X(U_i)$ bajo los isomorfismos $\mathcal{O}_X(U_i) \cong \mathcal{L}(U_i)$ le llamaremos los *generadores locales* de $\mathcal{L}$. Haciendo uso de la siguiente proposición, a la colección de gavillas invertibles sobre un esquema X se le puede dar una estructura de grupo abeliano.

Proposición 1.3.4. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema*

1. *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son gavillas invertibles sobre X, entonces $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ es una gavilla invertible sobre X.*

2. *Si $\mathcal{L}$ es una gavilla invertible sobre X, entonces*

$$\mathcal{O}_X \cong \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$$

Demostración Tennison [12], página 105. ♯

La proposición anterior define una estructura de grupo abeliano sobre la colección de gavillas invertibles sobre un espacio topológico

Definición 1.3.5. Para un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ definimos el *grupo de Picard* de X, denotado por $Pic\,X$, como el grupo de clases de isomorfismos de gavillas invertibles sobre X, bajo la operación $\otimes$.

Nota 1.3.6. Por el ejemplo (1.3.2), $\mathcal{O}_X$ es la unidad en $Pic\,X$, y por la proposición anterior tenemos que $Pic\,X$ es un grupo abeliano.

Sean A un anillo, X su espectro y M un A-módulo. Se puede construir una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulo sobre X de forma análoga a como se construye $\mathcal{O}_X$. A esta gavilla la llamaremos *la gavilla asociada* a M sobre X, y la denotaremos por $\tilde{M}$. Sólo describiremos a sus secciones Dado $\mathfrak{p} \subset A$ ideal primo, denotemos por $M_\mathfrak{p}$ a la localización de M en $\mathfrak{p}$ Para cada abierto U de X, una sección $s \in \tilde{M}(U)$ sobre U es una función

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p}$$

tal que para todo $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$ y s esta dada localmente como un cociente de la forma $\frac{m}{f}$ con $m \in M$ y $f \in A$, es decir, para cada $\mathfrak{p} \in U$, existe una vecindad abierta V de $\mathfrak{p}$, y elementos $m \in M$ y $f \in A$ tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \in M_\mathfrak{p}$.

Proposición 1.3.7. *Sean $f : A \to B$ un morfismo entre anillos con ${}^af : Y \to X$ el morfismo entre espectros inducido por f, M un A-módulo y $\tilde{M}$ la gavilla asociada a M sobre X.*

1. *$\tilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.*
2. *Para cada $\mathfrak{p} \in X$, el tallo $(\tilde{M})_\mathfrak{p}$ es isomorfo al anillo local $M_\mathfrak{p}$*
3. *Para todo $f \in A$, el A_f-módulo $\tilde{M}(D(f))$ es isomorfo al módulo M_f.*
4. *En particular $\Gamma(X, \tilde{M}) \cong M$.*
5. *Si $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A-módulos, entonces $(\bigoplus_{i \in I} M_i)^{\sim} \cong \bigoplus_{i \in I} \tilde{M}_i$*
6. *Para todo B-módulo N, ${}^af_*(\tilde{N}) \cong ({}_AN)^{\sim}$, donde ${}_AN$ denota a N con estructura de A-módulo*

Demostración. Hartshorne [7], página 110

$\sharp$

Como un caso particular de un $\mathcal{O}_X$-módulo tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.8. Una *gavilla de ideales* $\mathcal{I}$ sobre X es un $\mathcal{O}$-módulo tal que para cada abierto U de X, $\mathcal{I}(U)$ es un ideal de $\mathcal{O}(U)$.

Ejemplo 1.3.9. Consideremos al anillo local $A = K[x]_{(x)}$, con K un campo (ejemplo 1.2.22) Definimos la gavilla de ideales

$$\mathcal{I}(Spec\, A) = 0$$
$$\mathcal{I}(\{\langle 0\rangle\}) = \mathcal{O}_X(\{\langle 0\rangle\})$$

Definición 1.3.10. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ es *casi-coherente* si para cada abierto afín $U = Spec\, A$ de X, existe un A-módulo M tal que $\mathcal{F}_{|_U} \cong \tilde{M}$.

Si X es un esquema noetheriano, decimos que $\mathcal{F}$ es *coherente* si es casi-coherente con M un A-módulo finitamente generado.

El ejemplo anterior es un ejemplo de una gavilla de ideales que no es casi-coherente

Ejemplo 1.3.11. Sea X un esquema, la gavilla estructura $\mathcal{O}_X$ es coherente.

Subesquemas Cerrados

Con la noción de gavilla de ideales y basándonos en el caso afín, podemos decir más explicitamente como son los subesquemas cerrados de un esquema arbitrario Para esto, reescribamos con el nuevo lenguaje lo visto en el caso afín

Sean A un anillo, X su espectro y Y un subesquema cerrado de X definido por un ideal $\mathfrak{a} \subset A$, con $i : Y \to X$ el morfismo inclusión que existe al ser Y una clase de equivalencia de inmersiones cerradas Lo que haremos es reemplazar al ideal $\mathfrak{a}$ por una gavilla de ideales $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$, tomando sobre cada abierto principal $D(f)$ de X que intersecte a Y al ideal $\mathfrak{a}A_f$. Así, por la visto en ejemplo (1.2.37), identificamos a la estructura gavilla $\mathcal{O}_Y$ de Y con la gavilla cociente $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Al tener que la estructura gavilla de Y es el push-out $i_*\mathcal{O}_Y$, es natural la siguiente definición.

Definición 1.3.12. Sea Y un subesquema cerrado de un esquema X con $i : Y \to X$ el morfismo inclusión. Definimos la *gavilla ideal* de Y, denotada por $\mathcal{I}_Y$, como el núcleo del morfismo

$$i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$$

Ejemplo 1.3.13. Sea X un esquema, entonces $\mathcal{I}_X$ es la gavilla cero

Aún podemos decir algo más regresando al caso afín. Como vimos en el ejemplo (1.3.9), si $X = Spec A$ es un esquema afín, no todas las gavillas de ideales estan dadas por ideales de A. Por los pasos seguidos anteriormente, los subesquemas cerrados están dados por gavillas de ideales que estan dadas por ideales de A, es decir, gavillas casi-coherentes de $\mathcal{O}_X$. Así, podemos dar una definición completa de lo que es un subesquema cerrado de cualquier esquema haciendo uso de la siguiente proposición

Proposición 1.3.14. *Sea Y un subesquema cerrado de un esquema X.*

1. *La gavilla ideal $\mathcal{I}_Y$ es una gavilla de ideales casi-coherente de $\mathcal{O}_X$*

2. *Si X es noetheriano, entonces $\mathcal{I}_Y$ es coherente.*

3. *Toda gavilla de ideales casi-coherente de $\mathcal{O}_X$ es la gavilla ideal de un subesquema cerrado de X determinado de forma única*

Demostración. Hartshorne [7], página 116. ♯

Corolario 1.3.15. *Sea $X = Spec A$ un esquema afín. Entonces se corresponden biyectivamente los ideales $\mathfrak{a}$ de A con los subesquemas cerrados Y de X, teniendo $Y = V(\mathfrak{a})$. En particular, todo subesquema cerrado de un esquema afín, es afín.*

Definición 1.3.16. Un *subesquema cerrado* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ de un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es un subespacio topológico cerrado Y de X, junto con una gavilla de anillos $\mathcal{O}_Y$ que es una gavilla cociente de la estructura gavilla $\mathcal{O}_X$ por una gavilla de ideales casi-coherente $\mathcal{I}_Y$, tal que la intersección de Y con cualquier abierto afín U de X es el subesquema cerrado asociado al ideal $\mathcal{I}_Y(U)$.

Ejemplo 1.3.17. Consideremos al esquema $(\mathbb{A}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2})$, con K campo algebraicamente cerrado. Sean $f, g \in K[x,y]$ polinomios, y F, G los subesquemas definidos por f y g, respectivamente. Definimos el *esquema intersección* $Z \subset \mathbb{A}^2_K$ como el subesquema definido por el ideal $(f,g) \subset K[x,y]$. Sea $p = (a,b) \in \mathbb{A}^2_K$ un punto. Definimos la *multiplicidad de intersección* de F y G en p, como

$$\begin{aligned} i(p, F \cdot G) &= dim_k \mathcal{O}_{Z,p} \\ &= dim_k K[x,y]_p/(\bar{f}, \bar{g}) = dim_k \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k, p}/(\bar{f}, \bar{g}). \end{aligned}$$

Este número de intersección cumple (Fulton [3]) con las siguientes propiedades que lo caracterizan:

A. $i(p, F \cdot G) = \infty$, si p está en una componente común de F y G.

B. $i(p, F \cdot G) = 0$, si $p \notin F \cap G$.

En el caso que $p \in F \cap G$ sin que esté en una componente común de F y G, decimos que F y G se *intersectan propiamente* en p, siendo este el caso que nos interesa y en el que se cumplen las restantes propiedades:

1. $0 < i(p, F \cdot G) < \infty$.

2. $i(p, F \cdot G) = i(p, G \cdot F)$.

3. $i(p, (F_1 + F_2) \cdot G) = i(p, F_1 \cdot G) + i(p, F_2 \cdot G)$, donde $F_1 + F_2$ es el subesquema inducido por el ideal (f_1, f_2), con $F_i = V(f_i)$, $i = 1, 2$

4. $i(p, F \cdot G) = i(p, F' \cdot G)$, donde $F' = V(f + gh)$, $h \in K[x, y]$

5. $i(p, F \cdot G) = 1$, si la jacobiana $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ no es cero en p. En este caso diremos que F y G se *intersectan transversalmente* en p.

Ahora daremos el subesquema cerrado asociado a la imagen de un morfismo entre esquemas.

Definición 1.3.18. Sean $\varphi : X \to Y$ un morfismo de esquemas y $X' \subset X$ un subesquema cerrado. Definimos el *esquema imagen* $\overline{\varphi(X')}$ de X' como el subesquema cerrado de Y definido por la gavilla de ideales $\tilde{\mathcal{I}}$, con

$$\tilde{\mathcal{I}}(U) = \{s \in \mathcal{O}_Y(U) \mid \varphi^\sharp(U)(s) \in \mathcal{I}_{X'}(\varphi^{-1}(U))\}$$

Proposición 1.3.19. *Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre esquemas y $X' \subset X$ un subesquema reducido. Entonces $\overline{\varphi(X')}$ es reducido*

Demostración. Trabajaremos con $\varphi_{|_{X'}}$, por lo que podemos suponer que X es reducido y $\overline{\varphi(X)} = Y$. Sea $U \subset Y$ un abierto, al tener que $\overline{\varphi(X)} = Y$, $\varphi^{-1}(U)$ es un abierto no vacío de X. Consideremos el morfismo entre anillos

$$\varphi^\sharp(U) : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$$

Al ser $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ reducido, su radical es el ideal cero, y al ocurrir que bajo un morfismo entre anillos la imagen inversa del radical es nuevamente radical, tenemos que $\sqrt{\mathcal{O}_Y(U)}$ es igual a $Ker(\varphi^\sharp(U))$, que por construcción es el ideal gavilla de $\overline{\varphi(X)}$ sobre U, es decir, es el cero de $\mathcal{O}_Y(U)$. Por lo tanto $\overline{\varphi(X)}$ es reducido. ♯

Proposición 1.3.20. *Sea $f : A \to B$ un morfismo entre anillos. Entonces el morfismo inducido $^af : Spec\,B \to Spec\,A$ es una inmersión cerrada si, y sólo si, f es suprayectivo.*

Demostración. Supongamos que ^af es una inmersión cerrada, entonces $Spec\,B$ es homeomorfo a un subesquema cerrado $V(\mathfrak{a})$ de $Spec\,A$, con $\mathfrak{a}$ ideal de A, notando que

$$^af(Spec\,B) = \overline{^af(Spec\,B)} = V(\mathfrak{a})$$

Así, ^af se factoriza de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} Spec\,B \arrow[rr, "^af"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Spec\,A \\ & V(\mathfrak{a}) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

donde φ es un homeomorfismo, e i es la inclusión natural. El diagrama (1.4) nos induce los morfismos entre gavillas

$$\Gamma(Spec\,A, \mathcal{O}_{Spec\,A}) \longrightarrow \Gamma(Spec\,A/\mathfrak{a}, \mathcal{O}_{Spec\,A/\mathfrak{a}}) \longrightarrow \Gamma(Spec\,B, \mathcal{O}_{Spec\,B})$$

es decir, f se factoriza como

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow B$$

El morfismo natural $A \to A/\mathfrak{a}$ es suprayectivo, y al tener que φ es homeomorfismo, $A/\mathfrak{a} \to B$ es suprayectivo. Por lo tanto, f es suprayectivo.

Supongamos que f es suprayectivo, entonces para todo $\mathfrak{q} \in Spec\,B$, tenemos que el morfismo $f_{f^{-1}(\mathfrak{q})} : A_{f^{-1}(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}$ es suprayectivo por propiedades de localización. Sea

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}=f^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \mathfrak{q}\in Spec\,B}} \mathfrak{p}$$

y consideremos al subesquema cerrado $V(\mathfrak{a})$ de $Spec\,A$, el cual cumple

$$^af(Spec\,B) = V(\mathfrak{a}) \cong Spec\,A/\mathfrak{a}$$

Así, f se factoriza como

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\varphi} B$$

Necesitamos probar que ${}^a\varphi$ es un homeomorfismo. Por como definimos al ideal $\mathfrak{a}$, ${}^a\varphi$ es una biyección, y al tener que ${}^a\varphi$ es un mapeo continuo, sólo hay que probar que es cerrado. Dado $\mathfrak{b}$ ideal de B,

$$\begin{aligned} {}^a\varphi(V(\mathfrak{b})) &= {}^a\varphi(\{\mathfrak{q} \in Spec\,B \mid \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}\}) \\ &= \{\mathfrak{p} \in Spec\,A \mid \mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q});\ f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= V(f^{-1}(\mathfrak{b})A) \subset V(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, ${}^af$ es una inmersión cerrada. $\sharp$

1.4 Variedades

Todos los esquemas que consideremos en lo que resta del presente trabajo serán esquemas separados de tipo finito sobre algún campo K.

En esta sección damos la definición de variedad algebraica en el contexto moderno. Utilizando los resultados de las secciones anteriores damos las propiedades básicas de las variedades, tomando particular interes en los campos de funciones racionales de una variedad.

Definición 1.4.1. Una *variedad (algebraica)* $(X, \mathcal{O})$ es un esquema entero.

Así, una variedad X es un esquema noetheriano, reducido, irreducible, separado de tipo finito sobre algún campo K. Al ser X irreducible tenemos que $dim(U) = dim(X)$, para todo abierto $U \subseteq X$ no vacío, y al ser X esquema noetheriano, es de dimensión finita. Por 4. de la proposición (1.2.79), todo morfismo entre variedades es separado.

Dado $U \subseteq X$ un abierto afín, llamaremos a $\mathcal{O}_X(U)$ el *anillo de coordenadas* del abierto afín U.

Si X es una variedad tal que $\mathcal{O}_{X,x}$ es regular para todo punto $x \in X$, decimos que X es *suave*. Una *subvariedad* V de un esquema X es un subesquema entero, el cual corresponde a un ideal primo en el anillo de coordenadas de cualquier abierto afín que lo intersecta.

Si X es un esquema, todo cerrado irreducible Y de X tiene asociado una estructura de esquema reducido, es decir, todo cerrado irreducible de un esquema tiene asociado una estructura de subvariedad.

Recordando que toda subvariedad tiene un único punto genérico, definimos el *anillo local de X a lo largo de V*, denotado por $\mathcal{O}_{X,V}$, como el tallo de la estructura gavilla $\mathcal{O}_X$ de X en el punto genérico de V. Si $U = Spec A$ es un abierto afín que intersecta a V, entonces U contiene al punto genérico de V, el cual corresponde a un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, y por lo tanto $\mathcal{O}_{X,V} \cong A_{\mathfrak{p}}$ Esto fue para todo abierto afín que intersecta a V, por lo que podemos identificar a las localizaciones en el ideal primo que corresponde al punto genérico de todos los anillos de coordenadas de los abiertos afínes que intersectan a V. Denotaremos por $\mathfrak{m}_{X,V}$ al ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,V}$.

Como para todo abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es libre de nilpotentes, las funciones regulares $s \in \mathcal{O}_X(U)$ están determinadas de manera única por sus valores en todos los puntos de U.

La siguiente proposición nos servirá para definir un invariante muy importante de toda variedad.

Proposición 1.4.2. *Sea ξ el punto genérico de un variedad X.*

1. $\mathcal{O}_\xi \cong R(X)$

2. *Si $U = Spec A$ es un abierto afín de X, entonces $\mathcal{O}_\xi$ es isomorfo al campo cociente de A.*

3. *Si $V \subseteq X$ es una subvariedad de X, entonces $R(V)$ es el campo de residuos de $\mathcal{O}_{X,V}$.*

Demostración. 1. Se sigue del lema (1.2.89), al tener que ξ está contenido en todo abierto no vacío de X.

2. Al ser X irreducible, todo abierto contiene a su punto genérico. Así, $\xi \in U$, y es tal que en U la cerradura de ξ es todo U Al ser U afín de una variedad, es irreducible y reducido, y por lo tanto ξ en U es el ideal cero de A Así, $\mathcal{O}_\xi \cong A_{(0)}$, el cual es el campo de cocientes de A al ser dominio entero.

3. Sea $V \subset X$ una subvariedad y $U = Spec A$ un abierto afín de X que intersecte a V. Entonces $V \cap U = V(\mathfrak{p}) \cong Spec A/\mathfrak{p}$, con $\mathfrak{p}$ el punto genérico de V e ideal primo de A. Así, $\mathcal{O}_{X,V} \cong A_{\mathfrak{p}}$, y su campo de residuos es $(A_{\mathfrak{p}})/\tilde{\mathfrak{p}}$, el cual es el campo de residuos de $A/\mathfrak{p}$.

$\sharp$

Al campo $\mathcal{O}_\xi$ de la proposición anterior lo llamaremos el *campo de funciones racionales* de X. La parte 2. de la proposición anterior nos dice la naturaleza local de las funciones racionales, y justifica su nombre al ser localmente un cociente de elementos de algún anillo A, es decir, cociente de funciones regulares. También nos dice que, estrictamente, una función racional es una función sobre algún abierto U, siendo U el abierto de definición de dicha función. La parte 3. nos dice como son las funciones racionales localmente sobre una subvariedad.

Nota 1.4.3. En la demostración de 1. de la proposición anterior sólo se hizó uso de la existencia del punto genérico, aplicandose el resultado a todo esquema entero.

Ejemplo 1.4.4. Sean K un campo, $X = \mathbb{P}^1_K$ y $P_\infty = (0:1)$ el punto al infinito de X. Sabemos que $\mathbb{P}^1_K \setminus P_\infty$ es un abierto afín del plano proyectivo de la forma $Spec\, K[t]$, donde $t = \frac{x_1}{x_0}$. Por la proposición anterior tenemos que $R(X) = K(t)$.

Observación 1.4.5. Si dos variedades X, Y son isomorfos, entonces $R(X) \cong R(Y)$.

Observación 1.4.6. Sean V una subvariedad de una variedad X y $U = Spec\, A$ un abierto afín de X que intersecte a V. Entonces $R(X) = A_{(0)}$ y $\mathcal{O}_{X,V} = A_{\mathfrak{p}}$. Si $\frac{a}{b} \in R(X)$, los elementos $\frac{a}{g}, \frac{b}{g} \in A_{\mathfrak{p}}$, con g un elemento de A^* que no pertenece a $\mathfrak{p}$, son tales que en $A_{(0)}$ cumplen

$$\frac{ag}{bg} = \frac{a}{b}$$

ya que para toda $r \in A^*$, $r(agb - bga) = 0$ en A. Por lo tanto, todo elemento de $R(X)$ es de la forma $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathcal{O}_{X,V}$.

Definición 1.4.7. Un morfismo $\varphi : X \to Y$ entre variedades es *dominante* si la imagen de φ es densa in Y, es decir, si el morfismo

$$\mathcal{O}_Y(U') \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

es monomorfismo para cualesquiera abiertos $U' \subset Y$ y $U \subset X$, tales que $\varphi(U) \subset U'$.

Proposición 1.4.8. *Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre variedades. Entonces φ induce un monomorfismo $R(Y) \to R(X)$.*

Demostración. Sea $U \subset Y$ un abierto no vacío, el cual intersecta a $\varphi(X)$ al ser U denso en Y. Entonces $\varphi^{-1}(U)$ es un abierto no vacío de X, obteniendo el morfismo

$$\mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$$

Como todo abierto de un espacio irreducible contiene al punto genérico, tenemos un morfismo entre límites directos

$$R(Y) = \lim_{\substack{U \subset Y \\ U \neq \emptyset}} \longrightarrow \lim_{\substack{V \subset X \\ V \neq \emptyset}} = R(X)$$

que al ser no cero, nos da un monomorfismo. ♯

Proposición 1.4.9. *Sean $\varphi : X \to Y$ un morfismo y $V \subset X$ una subvariedad. Entonces $\overline{\varphi(V)}$ es una subvariedad de Y tal que $\varphi(V)$ es dominante sobre $\overline{\varphi(V)}$.*

Demostración Como trabajaremos con $\varphi_{|V}$, asumimos que el morfismo es $\varphi : V \to Y$. Tenemos que probar que $\overline{\varphi(V)}$ es variedad de Y. Por la proposición (1.3.19) $\overline{\varphi(V)}$ es reducido, al ser V reducido, y por la proposición (A 1 6) es irreducible, al ser V irreducible. Por lo tanto $\overline{\varphi(V)}$ es subvariedad de Y, y es claro que $\varphi(V)$ es denso en $\overline{\varphi(V)}$. ♯

Corolario 1.4.10. *Sea U un subesquema abierto de un esquema X, con $i : U \to X$ el morfismo inclusión. Entonces toda subvariedad V de U se extiende a una subvariedad $\overline{V}$ de X.* ♯

Observación 1.4.11. Siguiendo la notación de la proposición anterior, si ξ es el punto genérico de V, entonces $\varphi(\xi)$ es el punto genérico de $\overline{\varphi(V)}$

Proposición 1.4.12. *Sea U un subesquema abierto de un esquema X, W una subvariedad de U y $\overline{W}$ la subvariedad de X obtenida al tomar la cerradura de W en X. Entonces $R(W) \cong R(\overline{W})$.*

Demostración. Si U' es un abierto de W, entonces U' es también un abierto de $\overline{W}$. Al tener que el punto genérico de W es el punto genérico de $\overline{W}$, si $U' = Spec\, A$ es un abierto afín de W, por la proposición (1.4 2) tenemos que $R(W) \cong A_{(0)}$, y por lo notado anteriormente tenemos que

$$R(W) \cong A_{(0)} \cong R(\overline{W})$$

♯

Proposición 1.4.13. *Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo suprayectivo propio entre variedades de la misma dimensión. Entonces existe un abierto no vacío de X que se mapea de forma finita sobre un abierto de Y.*

Demostración. Grothendieck [15], puntos 4.3 1 y 4 4.1. ♯

Definición 1.4.14. Diremos que un morfismo entre esquemas $\varphi : X \to Y$ tiene *dimensión relativa n* si para toda subvariedad W de Y, todo componente irreducible V de $\varphi^{-1}(W)$ cumple con $dim(V) = dim(W) + n$.

Definición 1.4.15. Un morfismo entre variedades $\varphi : X \to Y$ es *birracional* si es dominante y el morfismo que induce entre los campos de funciones es un isomorfismo. En este caso, diremos que X y Y son *birracionalmente equivalentes*

La normalización $\tilde{X}$ de un variedad X es una variedad, y el morfismo $\tilde{\theta} : \tilde{X} \to X$ es un epimorfismo finito, cumpliendo las siguientes propiedades que lo caracterizan.

Teorema 1.4.16. Sean X, Y, Z variedades

1. Si $\varphi : Z \to X$ un morfismo dominante con Z normal, entonces existe un único morfismo dominante y finito $\varphi' : Z \to \tilde{X}$ tal que $\varphi = \tilde{\theta} \circ \varphi'$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\theta"] & X \\ Z \arrow[u, dashed, "\varphi'"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

2. Si Y es una variedad normal y $\lambda : Y \to X$ es un epimorfismo finito, entonces $\tilde{X} \cong Y$

3. Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre variedades, entonces $\tilde{\varphi} := \tilde{\theta}_Y^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\theta}_X : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ es un morfismo tal que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ \tilde{X} \arrow[u, "\tilde{\theta}_X"] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \tilde{Y} \arrow[u, "\tilde{\theta}_Y"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Itaka [8], página 141 ♯

Estaremos interesados en estudiar las subvariedades de un esquema X, teniendo particular interés en las subvariedades de codimensión uno. Consideremos un poco este caso.

Sea V una subvariedad de codimensión uno de un subesquema X. Esto quiere decir que existe un cerrado irreducible $V_1 \subset X$ tal que $V \subsetneq V_1 \subsetneq X$. Así, para todo abierto afín $U = Spec A$ de X que intersecte a V, si $V(\mathfrak{p}) = V \cap U$ y $V(\mathfrak{p}_1) = V_1 \cap U$, con $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}_1 \subset A$ ideales primos, tenemos que $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}$, siendo $\mathfrak{p}_1$ el único ideal primo de A distinto del ideal cero que está contenido en $\mathfrak{p}$. Por lo tanto, $dim(A_\mathfrak{p}) = 1$. Pero $A_\mathfrak{p} \cong \mathcal{O}_{X,V}$, teniendo que $\mathcal{O}_{X,V}$ es un dominio entero de dimensión uno.

1.5 Haces Vectoriales

Las referencias para esta sección son Shafarevich [11] y Wells [13]

Definición 1.5.1. Sean K un campo, S su espectro y X un K-esquema. Un *haz vectorial* de rango n sobre X consiste de un K-esquema E y un K-morfismo $p : E \to X$ tal que satisface las siguientes condiciones

1. Para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} E_x = p^{-1}(x) &\cong Spec\,\kappa(x) \times_K \mathbb{A}^n_K = Spec\,\kappa(x) \times_K Spec\,K[x_1, \ldots, x_n] \\ &= Spec(\kappa(x) \otimes_K K[x_1, \ldots, x_n]) = Spec\,\kappa(x)[x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

2. Existe una cubierta abierta $\{U_i\}$ de X junto con un isomorfismo para toda i

$$\varphi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times_S \mathbb{A}^n_K$$

tal que para toda i, j, el automorfismo

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times_S \mathbb{A}^n_K \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times_S \mathbb{A}^n_K$$

es lineal

Observación 1.5.2. Los campos $\kappa(x)$ considerados en la definición, son campos de extensión de K, por lo que todo $\kappa(x)$-espacio vectorial, es en particular un K-espacio vectorial

Expliquemos un poco el punto 2. El automorfismo φ_{ij} se puede ver como $\varphi_{ij} = (Id \times a_{ij})$, con $Id : U_i \cap U_j \to U_i \cap U_j$ la identidad y $a_{ij} : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$ un automorfismo K-lineal, lo que nos da un morfismo

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, K)$$

A los morfismo g_{ij} les llamaremos *funciones transición* Estas funciones cumplen

$$\begin{aligned} g_{ik} &= g_{ij} g_{jk} \\ g_{ij}^{-1} &= g_{ji} \\ g_{ii} &= I_n \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde I_n es la matriz identidad de rango n.

Dada una cubierta abierta $\{U_i\}$ de X tal que para toda intersección no vacía $U_i \cap U_j$, existe un morfismo

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, K)$$

que cumplan (1.5), entonces la colección de morfismo $\{g_{ij}\}$ determinan un haz vectorial de rango n.

Diremos que X es el *esquema espacio base*, E es el *esquema espacio total*, y a cada pareja (U_i, φ_i) le llamaremos *trivialización local* Denotaremos por (X, E, p) a un haz vectorial rango n sobre X, y solo nos referiremos a él como un haz vectorial sobre X, cuando no sea importante cuál es su rango.

Si (X, E, p) es un haz vectorial de rango uno, diremos que es un *haz lineal*.

Definición 1.5.3. Sean (X, E, p) y (X, E', p') dos haces vectoriales. Un *morfismo*

$$\lambda : (X, E, p) \to (X, E', p')$$

es un K-morfismo que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Sean $(X, E, p), (X, E', p')$ dos haces vectoriales de rango n, con $\{(U_i, \varphi_i)\}, \{(U_i', \varphi_i')\}$ sus respectivas trivializaciones locales Un morfismo $\lambda : (X, E, p) \to (X, E', p')$ es un *isomorfismo* si λ es K-isomorfismo de E en E', tal que E y p, junto con la cubierta abierta $\{U_i, U_i'\}$ de X y los isomorfismos $\{\varphi, \varphi_i' \circ \lambda\}$ sea un haz vectorial sobre X.

Definición 1.5.4. Una *sección* de un haz vectorial (X, E, p) sobre un abierto U de X, es un morfismo $s : U \to E$ tal que $p \circ s = Id_{|_U}$

Observemos que $s(U) \subseteq p^{-1}(U) \cong U \times_S \mathbb{A}_K^n$.

De manera natural podemos restringir secciones a abiertos más pequeños, y pegar secciones, con lo que la pregavilla

$$U \longmapsto \{s : U \to E \mid p \circ s = Id_{|_U}\}$$

es una gavilla de conjuntos sobre X que denotaremos por $\mathcal{L}(E/X)$.

Sean (X, E, p) y (X, E', p') dos haces vectoriales. Un morfismo entre haces vectoriales

$$\lambda : (X, E, p) \longrightarrow (X, E', p')$$

induce un morfismo entre los conjuntos secciones asociadas a los haces vectoriales

$$\begin{aligned} \lambda_*(U) : \mathcal{L}(E/X)(U) &\longrightarrow \mathcal{L}(E'/X)(U) \\ s &\longmapsto \lambda \circ s \end{aligned}$$

para todo abierto U de X y toda sección $s \in \mathcal{L}(E/X)(U)$. Este morfismo está bien definido al tener por definición

$$p' \circ \lambda \circ s = p \circ s = Id_{|U}$$

Si (X, E, p) está determinado por funciones transición $\{g_{ij}\}$, entonces una sección del haz está determinada por una colección de morfismos $s_i : U_i \to \mathbb{A}^n$, tales que

$$s_i = g_{ij} s_j$$

sobre $U_i \cap U_j$.

Teorema 1.5.5. Sea X un K-esquema, con K campo. La gavilla de conjuntos $\mathcal{L}(E/X)$ es una gavilla localmente libre de rango n, y la correspondencia

$$(X, E, p) \longmapsto \mathcal{L}(E/X)$$

es una biyección entre clases de isomorfismos de gavillas localmente libres de rango n sobre X, y clases de isomorfismos de haces vectoriales de rango n sobre X. $\sharp$

Denotaremos por $E_{\mathcal{L}}$ al haz vectorial asociado a una gavilla invertible $\mathcal{L}$ bajo la correspondencia del teorema anterior.

Nota 1.5.6. Dada una gavilla invertible $\mathcal{L}$, que tenga a $\{f_i\}$ como sus generadores locales, el haz vectorial $E_{\mathcal{L}}$ es aquel determinado por las funciones transicion $\{g_{ij} = \frac{f_i^{-1}}{f_j^{-1}}\}$.

Diremos que una sección $s \in \mathcal{L}(E/X)$ se anula en un punto x de U si $0 = s(x) \in E_x$. Observemos que de manera natural el esquema base X vive en E como la sección que se anula en todo punto x de X. A esta sección la llamaremos la *sección cero*

Sean K un campo, (X, E, p) un haz vectorial y $\varphi : X' \to X$ un K-morfismo entre Consideremos al producto fibrado

$$\begin{tikzcd} E \times_X X' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "\varphi"] & X \end{tikzcd}$$

La terna (E', X', p'), con $E' = E \times_X X'$, es un haz vectorial que llamaremos el *pull-back* de E, y lo denotaremos por $\varphi^*(E)$ Tenemos que el rango de (X', E', p') es igual al rango de (X, E, p)

Haciendo uso que dados dos K-espacios vectoriales, siempre se puede considerar su producto tensorial sobre K Se puede extender esta idea a haces vectoriales $(X, E, p), (X', E', p')$ sobre un esquema base fijo, obteniendo un haz vectorial que denotaremos por $E \otimes E'$.

Capítulo 2

Equivalencia Racional

La idea en este capítulo es definir funtores de la categoría de esquemas a la categoría de grupos abelianos. Para esto, se define el grupo de ciclos del esquema, como el grupo abeliano libre generado por el conjunto de subvariedades del esquema, notando que nos bastá en realidad trabajar con los cerrados irreducibles. Relacionamos a las funciones racionales de subvariedades del esquema con elementos del grupo de ciclos, lo que da lugar a una relación de equivalencia sobre el grupo, llamandola equivalencia racional. Daremos la definición original de equivalencia racional y probaremos que coincide con la dada inicialmente. La segunda parte de este capítulo trata de las propiedades funtoriales de los grupos formados, definiendo el push-out y el pull-back en ciertas clases de esquemas. Acabamos con una aplicación a una sucesión exacta de grupos de ciclos.

2.1 Ciclos Algebraicos y Equivalencia Racional

Formaremos un grupo del conjunto de subvariedades de X de dimensión k, las cuales llamaremos k-subvariedades.

Definición 2.1.1. Sea X un esquema. Un *k-ciclo* sobre X es una suma finita formal

$$\sum n_i[V_i]$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y V_i es una k-subvariedad de X.

El *grupo de k-ciclos* sobre X, denotado por Z_kX, es el grupo abeliano libre generado por las k-subvariedades de X. A una k-subvariedad $V \subset X$ le asociamos el k-ciclo $[V] \in Z_kX$

El *soporte* de un k-ciclo $\alpha = \sum n_i[V_i]$ sobre X, denotado por $\mid \alpha \mid$, es la unión de todas las subvariedades V_i de X que aparecen con coeficiente distinto de cero en α. Al ser un número finito de tales subvariedades, $\mid \alpha \mid$ es un cerrado de X

La información geométrica de la variedad se encuentra en su gavilla $\mathcal{O}_X$, por lo que estudiar su campo de funciones racionales es estudiar a la variedad. Lo que buscaremos hacer es relacionar elementos del campo de funciones racionales y las subvariedades de codimensión uno

Sean X una variedady $r \in R(X)^*$. Definiremos un morfismo entre anillos

$$ord_V : R(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

llamado *orden de anulación* de r en V, con $V \subset X$ subvariedad de codimensión uno. Recordemos que todo elemento $r \in R(X)^*$ es de la forma $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathcal{O}_{X,V}$. Como buscamos que ord_V sea un morfismo, deberá cumplir que

$$ord_V(r) = ord_V\left(\frac{a}{b}\right) = ord_V(a) - ord_V(b)$$

Por lo que nos basta definir ord_V para los elementos de $\mathcal{O}_{X,V}$.

Definición 2.1.2. Definimos el morfismo entre anillos

$$\begin{aligned} ord_V : R(X)^* &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ r &\longmapsto l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle r\rangle) \end{aligned}$$

donde $l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle r\rangle)$ es la longitud de $\mathcal{O}_{X,V}/\langle r\rangle$ visto como $\mathcal{O}_{X,V}$-módulo

Veamos que está bien definido el morfismo. Los elementos de $\mathcal{O}_{X,V}$ son clases, sean $a, a', b, b' \in \mathcal{O}_{X,V}$ tales que

$$r = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Entonces $ab' = a'b$, al ser $\mathcal{O}_{X,V}$ un dominio entero. Así,

$$l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle ab'\rangle) = ord_V(ab') = ord_V(a'b) = l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle a'b\rangle).$$

Dados $a, b' \in \mathcal{O}_{X,V}$, siempre tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,V}/\langle a\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_{X,V}/\langle ab'\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_{X,V}/\langle b'\rangle \longrightarrow 0$$

Por propiedades de longitud obtenemos

$$l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle ab'\rangle) = l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle a\rangle) + l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle b'\rangle)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ord_V(ab') &= l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle ab'\rangle) = l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle a\rangle) + l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle b'\rangle) \\ &= ord_V(a) + ord_V(b') \end{aligned}$$

Analogamente

$$ord_V(a'b) = ord_V(a') + ord_V(b).$$

Por lo tanto

$$ord_V(a) - ord_V(b) = ord_V(a') - ord_V(b')$$

Ejemplo 2.1.3. Sea $X = Spec\,A$ un esquema afín, con A un dominio entero de ideales principales. Sea f un elemento no cero de $A \cong R(X)$. Al ser $A_{(f)}/\langle f\rangle$ un campo, tenemos que como $A_{(f)}$-módulo está generado por cualquier elemento no cero, y por lo tanto

$$1 = l_{A_{(f)}}(A_{(f)}/\langle f\rangle)$$

Ejemplo 2.1.4. Sean $V \subset \mathbb{A}^2_k$ una curva sobre un campo k algebraicamente cerrado, $\xi \in V$ su punto genérico, y supongamos que ξ no es singular. Entonces $\mathcal{O}_{X,V}$ es un anillo local regular de dimensión uno, es decir, es un anillo de valuación discreta. Esto implica que existe $t \in \mathcal{O}_{X,V}$ tal que $\mathfrak{m}_{X,V} = \langle t\rangle$. Por lo tanto, $r \in R(X)^*$ es de la forma $r = ut^n$, $u \in \mathcal{O}_{X,V}$ unidad, $n \in \mathbb{Z}$. Por lo visto en el apéndice (B)

$$ord_V(r) = l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/\langle r\rangle) = dim_k(\mathcal{O}_{X,V}/\langle r\rangle) = n.$$

Ejemplo 2.1.5. Sean $f, g \in k[x,y]$ con k campo algebraicamente cerrado, y f irreducible. Sean F y G las curvas planas definidas por f y g respectivamente. Al ser f irreducible, F es una variedad afín. Consideremos al campo de funciones racionales $R(F) \cong k[x,y]/\langle f\rangle$ de F, donde la clase $\bar{g}$ de g en $k[x,y]/\langle f\rangle$ es una función racional sobre F.

Sea $p \in F$ un punto cerrado, el cual es una subvariedad de F de codimensión uno, con p ideal primo de $k[x,y]$ que contiene a f. Con lo anterior tenemos que

$$\mathcal{O}_{F,p} \cong (k[x,y]/\langle f\rangle)_p \cong (k[x,y])_p/\langle \bar{f}\rangle = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,p}/\langle \bar{f}\rangle$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ord_p(\bar{g}) &= l_{\mathcal{O}_{F,p}}(\mathcal{O}_{F,p}/\langle \bar{g}\rangle) = l_{\mathcal{O}_{F,p}}((\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,p}/\langle \bar{f}\rangle)/\langle \bar{g}\rangle) \\ &= l_{\mathcal{O}_{F,p}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,p}/\langle \bar{f},\bar{g}\rangle) \end{aligned}$$

Igual que en ejemplo anterior

$$\begin{aligned} ord_p(\bar{g}) &= l_{\mathcal{O}_{F,p}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,p}/\langle \bar{f},\bar{g}\rangle) = dim_k(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,p}/\langle \bar{f},\bar{g}\rangle) \\ &= i(p, F\cdot G) \end{aligned}$$

Dada $r \in R(X)^*$ y una subvariedad V de X, si $ord_V(r) > 0$, diremos que r tiene un *cero* en V de *orden* $ord_V(r)$. Si $ord_V(r) < 0$, diremos que r tiene un *polo* en V de *orden* $-ord_V(r)$.

Ahora ya podemos dar la relación que buscabamos.

Sean W una $(k+1)$-subvariedad de un esquema X y $r \in R(W)^*$. Definimos el k-ciclo $[div(r)]$ sobre X como

$$[div(r)] = \sum ord_V(r)\,[V],$$

donde la suma corre sobre todas las subvariedades de codimensión uno V de W, y ord_V es el morfismo orden sobre $R(W)^*$ considerando a $\mathcal{O}_{W,V}$

Para ver que este ciclo está bien definido basta el siguiente lema.

Lema 2.1.6. *Sean X una variedad y $r \in R(X)^*$. Entonces $ord_V(r) \neq 0$ para un número finito de subvariedades V de X de codimensión uno.*

Demostración. Sabemos que $X = \bigcup_{i=1}^n Spec\, A_i$, con lo que toda subvariedad de codimensión uno debe intersectar a algún abierto afín. Si probamos que para cada abierto afín $Spec\, A_i$ existe un número finito de subvariedades V tales que $ord_V(r) \neq 0$, habremos acabado. Dada $r \in R(X)^*$, localmente en $Spec\, A_i$ es de la forma $\frac{a_1}{a_2}$, con $a_1, a_2 \in A_i^*$, por lo que nos bastará probar que sólo hay un número finito de subvariedades V que intersectan a $Spec\, A_i$ tales que $ord_V(a_i) \neq 0$, para $i = 1, 2$.

Sea $a \in A_i$. Toda subvariedad $V \subseteq X$ que intersecta a $Spec\, A_i$ es de la forma $V(\mathfrak{p})$, con $\mathfrak{p} \in Spec\, A_i$. Denotemos por $\bar{a} \in (A_i)_\mathfrak{p}$ a la imagen de $\mathfrak{p}$ bajo a. Ahora, si

$$0 = ord_\mathfrak{p}(a) = l_A(A_\mathfrak{p}/\langle \bar{a}\rangle)$$

tenemos que $\bar{a}$ es unidad, es decir, $\langle a\rangle \nsubseteq \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p}$ no es componente de $V(a)$. Lo que implica que sólo es posible que $ord_\mathfrak{p}(a) \neq 0$ si $\mathfrak{p}$ es componente de $V(a)$. Como $V(a)$ sólo tiene un número finito de componentes, hemos acabado. ♯

Ejemplo 2.1.7. Sean K un campo y $X = \mathbb{P}^1_K$. Como vimos en el ejemplo (1.4.4), tenemos que $R(X) \cong K(t)$, con $t = \frac{x_1}{x_0}$. Consideremos a la función racional t. Por los argumentos seguidos en la demostración del lema anterior, t sólo se puede anular en los puntos definidos por los ideales $\langle 0 \rangle$ y $\langle t \rangle$ de $K[t]$, y en el punto al infinito P_∞ En el idela cero t se anula al ser unidad en el campo $K(t)$. Por los argumentos seguidos en el ejemplo (2.1.3), tenemos que $ord_{\langle t \rangle}(t) = 1$. Ahora, al ser P_∞ una subvariedad de codimensión uno de $\mathbb{P}^1_K$, su anillo local $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K, P_\infty}$ es un anillo de valuación discreta Así, su ideal maximal está generado por un solo elemento, $s = \frac{1}{t}$, es decir, $t = \frac{1}{s}$, y por el ejemplo (2.1.4), $ord_{P_\infty}(t) = -1$. Por lo tanto

$$[div(t)] = [P_0] - [P_\infty]$$

Ejemplo 2.1.8. Sea $S = Spec\, K$, con K campo El esquema S tiene sólo una subvariedad, S mismo, y su punto genérico (él mismo) es el ideal $\langle 0 \rangle$. Así, $R(S) \cong K_{\langle 0 \rangle} \cong K$. Al tener para toda función racional no cero sobre S que $[div(r)] = l_K(K/\langle r \rangle)[S]$, con $r \in K^*$, vemos que $[div(r)] = 0[S]$, ya que $K/\langle r \rangle \cong \langle 0 \rangle$.

Definición 2.1.9. Un k-ciclo α es *racionalmente equivalente a cero*, denotado por $\alpha \sim 0$, si existen un número finito de $(k+1)$-subvariedades W_i de X y $r_i \in R(W_i)^*$, tales que

$$\alpha = \sum_i [div(r_i)]$$

Dada $r \in R(W)^*$, localmente para toda subvariedad $V \subset W$ de codimensión uno, $r = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathcal{O}_{W,V}$. Así,

$$\begin{aligned} ord_V(r^{-1}) &= ord_V\left(\frac{b}{a}\right) = ord_V(b) - ord_V(a) = -(ord_V(a) - ord_V(b)) \\ &= -ord_V(r), \end{aligned}$$

es decir, $[div(r^{-1})] = -[div(r)]$ Por lo tanto, asociarle a una función racional r el k-ciclo $[div(r)]$, es un morfismo del grupo multiplicativo $R(X)^*$ al grupo aditivo de k-ciclos, siendo su imagen, los k-ciclos racionalmente equivalentes a cero, un subgrupo de Z_kX, el cual denotaremos por Rat_kX

Definición 2.1.10. Definimos el grupo de *k-ciclos módulo equivalencia racional* sobre X, como el cociente

$$A_kX = Z_kX/Rat_kX$$

Con esto, consideraremos a los grupos

$$Z_*X = \bigoplus_{k\geq 0} Z_kX,$$
$$Rat_*X = \bigoplus_{k\geq 0} Rat_kX,$$
$$A_*X = \bigoplus_{k\geq 0} A_kX.$$

Un *ciclo* sobre X será un elemento de Z_*X, y una *clase de ciclos* sobre X será un elemento de A_*X. Si $\alpha \in A_*X$ y k es un entero, denotaremos por $\{\alpha\}_k$ a la componente de α en A_kX, teniendo que

$$\alpha = \sum_{k\geq 0}\{\alpha\}_k$$

Diremos que un ciclo es *positivo* si no es cero y todos sus coeficientes son enteros positivos. Una clase de ciclos es *positivo* si tiene un representante positivo.

Ejemplo 2.1.11. Sean $(X, \mathcal{O})$ un esquema y $(X_{red}, \mathcal{O}_{red})$ su esquema reducido asociado. Al ser homeomorfos como espacios topológicos, tenemos un isomorfismo canónico

$$A_*X \cong A_*X_{red}$$

Observación 2.1.12. Todo ciclo incluye a cualquier componente irreducible de X, al menos con coeficiente igual a cero. Un ciclo α racionalmente equivalente a cero incluye a una componente irreducible de X con coeficiente igual cero, siendo este el único caso posible. Bastará ver esto para un k-ciclo de la forma $[div(r)]$, con $r \in R(W)^*$ y $W \subset X$ subvariedad. Si X_i es una componenete irreducible de X tal que

$$[div(r)] = \sum n_i[V] + n[X_i]$$

con $n \neq 0$, significaría que $X_i \subsetneq W$, lo cual es una contradicción al ser X_i una componente.

Con lo anterior tenemos que cualesquiera dos ciclos α, β racionalmente equivalentes sobre X, incluyen a toda componente irreducible de X con el mismo coeficiente.

Ejemplo 2.1.13. Sea X un esquema de dimensión n. Toda subvariedad de dimensión n, es una componente irreducible de X al no haber cerrado irreducible propio de X que lo contenga. Además, al ser toda componente irreducible una subvariedad, Z_nX es el grupo abeliano libre generado por las componentes irreducibles de dimensión n de X. Ahora, por la observación hecha arriba, todo n-ciclo es sólo racionalmente equivalente a él mismo, por lo tanto $A_nX = Z_nX$

Ejemplo 2.1.14. Sea $S = Spec K$, con K campo. Como S consiste de un sólo punto, tenemos que $Z_0 S = \mathbb{Z}[S]$, el cual identificamos de manera natural con $\mathbb{Z}$ Concluimos por el ejemplo anterior y el ejemplo (2.1.8) que

$$A_0 S \cong Z_0 S \cong \mathbb{Z}$$

Ejemplo 2.1.15. Si X es un esquema qque no sea irreducible, con $X_1, \dots, X_t$ sus componentes, es decir, X es la unión de los subesquemas $\cup_{i=1}^{t} X_i$. Al tener que los cerrados irreducibles de X son los cerrados irreducicles de los X_i, de forma natural tenemos

$$Z_* X = \bigoplus Z_* X_i$$

$$A_k X = \bigoplus_{i=1}^{t} A_k(X_i)$$

Definición 2.1.16. Sea X un esquema, $\alpha \in A_* X$ y X_i una componente irreducible de X. Definimos el *coeficiente de X_i en α*, como el coeficiente de $[X_i]$ en cualquier ciclo que represente a α, el cual está bien definido por la observación (2.1.12)

Sean X un esquema y $X_1, \dots X_t$ sus componentes irreducibles. Consideremos a los anillos locales $\mathcal{O}_{X,X_i}$. Al ser X_i componente irreducible, no existe cerrado irreducible $Y \subset X$ tal que $X_i \subsetneq Y$, y por lo tanto $\mathcal{O}_{X,X_i}$ es un anillo artiniano, siendo entonces noetheriano de dimensión cero.

Definición 2.1.17. Definimos la *multiplicidad geométrica* m_i de X_i en X como

$$m_i = l_{\mathcal{O}_{X X_i}}(\mathcal{O}_{X,X_i})$$

Definimos el *ciclo fundamental* $[X]$ de X como

$$[X] = \sum_{i=1}^{t} m_i [X_i] \in Z_* X$$

Abusando de la notación, denotaremos por $[X]$ a la imagen de $[X]$ en $A_* X$. Si Y es un subesquema cerrado de un esquema X, las subvariedades de Y son subvariedades de X, por lo que $Z_* Y \subset Z_* X$ Denotaremos por $[Y]$ a la imagen de $[Y]$ en $Z_* X$, al igual que a su imagen en $A_* X$.

Ejemplo 2.1.18. Sea X un esquema puro k-dimensional. Si $X_1 \dots, X_t$ son sus componentes irreducibles, $[X] \in Z_k X$, y por el ejemplo (2.1.13) $Z_k X = A_k X$.

2.2 Propiedades Funtoriales

2.2.1 Push-Out Propio de Ciclos

Sea $(\varphi, \varphi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo propio entre esquemas. Por la proposición (1.4.9), dada una subvariedad V de X, $W = \varphi(V)$ es una subvariedad cerrada de Y. A nivel de gavillas tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Y|W} \arrow[r] \arrow[d] & \varphi_* \mathcal{O}_{X|V} \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{Y,W} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,V} \arrow[d] \\
R(W) \arrow[r] & R(V)
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $\mathcal{O}_{Y,W} \to \mathcal{O}_{X,V}$ esta definido al ir el punto genérico de V al punto genérico de W (observación 1.4.11). Al no ser $\varphi^\sharp$ el morfismo cero, $R(V)$ es un campo de extensión de $R(W)$. Se puede probar (Grothendick [16]) que si W tiene la misma dimensión de V, entonces $R(V)$ es un campo de extensión finita de $R(W)$.

Definimos

$$gr(V/W) := \begin{cases} [R(V) : R(W)] & \text{si } dim(W) = dim(V) \\ 0 & \text{si } dim(W) \neq dim(V) \end{cases}$$

donde $[R(V) : R(W)]$ es el grado de extensión de campos. Esto nos permite asociar a todo k-ciclo $[V]$ sobre X, el k-ciclo $\varphi_*[V] = gr(V/W)[W]$ sobre Y. Extendiendo linealmente obtenemos el *push-out propio* de ciclos

$$\varphi_* : Z_k X \to Z_k Y$$

Dados $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ morfismos propios entre esquemas sobre el mismo campo, si $V \subset X$ es una subvariedad, entonces $\varphi(V)$ y $\psi(\varphi(V))$ son subvariedades de Y y Z respectivamente. Al tener por propiedades de grado de extensión de campos que $[R(V) : R(\psi(\varphi(V)))] = [R(V) : R(\varphi(V))][R(\varphi(V)) : R(\psi(\varphi(V)))]$, concluimos que

$$(\psi\varphi)_* = \psi_* \varphi_*$$

Con esto, vemos que el push-out propio es funtorial. Ahora buscaremos extenderlo al grupo de clases de ciclos.

Definición 2.2.1. Sean $\varphi : X \to Y$ un morfismo propio entre variedades de la misma dimensión y $r \in R(X)^*$ una función racional. Definimos la *norma* de r, denotada por $N(r)$, como el determinante del $R(Y)$-endomorfismo lineal de $R(X)$ dado por $s \mapsto rs$, con $s \in R(X)$.

Proposición 2.2.2. *Sean $\varphi : X \to Y$ un morfismo supravectivo propio entre variedades y $r \in R(X)^*$.*

1. Si $dim(Y) = dim(X)$, entonces $\varphi_*[div(r)] = [div(N(r))]$.

2. Si $dim(Y) < dim(X)$, entonces $\varphi_*[div(r)] = 0$.

Demostración. Vease el Apéndice (C). $\sharp$

Teorema 2.2.3. Sean $\varphi : X \to Y$ un morfismo propio entre esquemas y α un k-ciclo sobre X racionalmente equivalente a cero. Entonces $\varphi_*\alpha \in Z_kY$ es racionalmente equivalente a cero.

Por lo tanto, induce un morfismo entre grupos abelianos

$$\varphi_* : A_kX \longrightarrow A_kY$$

Demostración. Al tener que φ es lineal y que suma de k-ciclos racionalmente equivalentes a cero es un k-ciclo racionalmente equivalente a cero, podemos suponerque el k-ciclo α es de la forma $\alpha = [div(r)]$, con $r \in R(V)^*$ y V una $(k+1)$-subvariedad de X, bastándonos trabajar con

$$\varphi_{*|_V} : V \longrightarrow \varphi(V),$$

teniendo que $\varphi_{|_V}$ es suprayectivo y $\varphi(V) \subset Y$ es una subvariedad al ser φ propio Por la proposición anterior $\varphi_*\alpha$ es igual a cero o igual a $[div(N(r))]$, siendo ambos ciclos racionalmente equivalentes a cero sobre $\varphi(V)$.

La segunda implicación es inmediata al respetar clases el morfismo φ_* $\sharp$

Nota 2.2.4. Del teorema anterior tenemos que A_* es un funtor covariante de la categoría de esquemas con morfismos propios, a la categoría de grupos abelianos libres

Definición 2.2.5. Sean X un esquema completo sobre un campo base K y $\alpha = \sum_p n_p[p]$ un cero ciclo de X. Definimos el *grado* de α, denotado por $\int_X \alpha$, como

$$\int_X \alpha = \sum_p n_p[R(p) : K],$$

el cual resulta ser un morfismo de Z_0X a $\mathbb{Z}$.

Sean $S = Spec\,K$, $\pi : X \to S$ el morfismo que da a X la estructura de S-esquema y α como en la definición anterior. Entonces

$$\begin{aligned}\pi_*(\alpha) = \pi_*\left(\sum_p n_p[p]\right) &= \sum_p n_p\pi_*[p] \\ &= \sum_p n_p[R(P):K][S]\end{aligned}$$

Por la identificacion natural $Z_0S \cong \mathbb{Z}$ del ejemplo (2.1.14)

$$\pi_*(\alpha) = \sum_p n_p[R(p):K] = \int_X (\alpha).$$

Extenderemos el morfismo grado a A_0X usando esta definición equivalente. Sean α, β 0-ciclos sobre X racionalmente equivalentes, por lo que para algún número finito funciones racionales r_i

$$\alpha - \beta = \sum[div(r_i)]$$

Así,

$$\int_X \alpha - \beta = \pi_*(\alpha - \beta) = \pi_*(\sum[div(r_i)])$$

Por el teorema anterior $\pi_*(\sum[div(r_i)])$ es un 0-ciclo racionalmente equivalente a cero. Por el ejemplo (2.1.8) tenemos que $\pi_*(\sum[div(r_i)])$ es el 0-ciclo cero, por lo tanto, α y β tienen el mismo grado.

Esto ya nos permite inducir el morfismo grado a todo A_*X como: $\int_X \alpha = 0$ si $\alpha \in A_kX$, con $k > 0$; y si $\alpha \in A_0X$, $\int_X \alpha$ será el grado de cualquier representante.

Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo propio entre esquemas completos sobre K, entonces por la propiedad funtorial del push-out el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_*X \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\pi_{X_*}"'] & & A_*Y \arrow[dl, "\pi_{Y_*}"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Y por lo tanto

$$\int_X \alpha = \int_Y \varphi_*(\alpha)$$

Definición Clásica de Equivalencia Racional

Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.6. Sea K un campo, S su espectro y V una S-variedad de dimensión $k+1$ Sea

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{P}^1_K \\ v &\longmapsto (\varphi_1(v) : \varphi_2(v)) \end{aligned}$$

un S-morfismo dominante, y consideremos al punto cero $P_0 = (1:0)$ y al punto al infino $P_\infty = (0:1)$ de $\mathbb{P}^1_K$ Por la proposición (1 4.8) tenemos un monomorfismo entre campos

$$K(t) \cong R(\mathbb{P}^1_K) \longrightarrow R(V) \tag{2.1}$$

donde $t = \frac{x_1}{x_0}$ (ejemplo 1.4.4).

Con lo anterior tenemos que $t \circ \varphi \in R(\mathbb{P}^1_K) \subseteq R(V)$, siendo $t \circ \varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}$. Abusando de la notación, denotemos por φ a la función racional sobre V definida por φ bajo el morfismo (2 1).

Ahora, bajo el isomorfismo $R(\mathbb{P}^1_K) \cong K(t)$, la función racional $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ resulta ser la función t Por el ejemplo (2.1.7), *tenemos que* $[div(t)] = [P_0] - [P_\infty]$, *concluyendo que*

$$[div(\varphi)] = [\varphi^{-1}(P_0)] - [\varphi^{-1}(P_\infty)]$$

Este ejemplo nos da la idea de como deben ser los ciclos racionalmente equivalentes a cero sobre un esquema.

Hagamos una observación

Sean K,S y X como en el ejemplo anterior. Consideremos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \times_S \mathbb{P}^1_K \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{P}^1_K \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Sea V una $(k+1)$-subvariedad de $X \times_S \mathbb{P}^1_K$, donde $i : V \to X \times_S \mathbb{P}^1_K$ es la inmersión cerrada que da a V tal estructura Supongamos que $\varphi = q \circ i : V \to \mathbb{P}^1_K$ es dominante

Sea $P \in \mathbb{P}^1_K$ un punto racional, es decir, un punto tal que $\kappa(P) \cong K$, implicando que $Spec\,\kappa(P) \cong Spec\,K$ Viendo a $\{P\}$ como un subesquema de $\mathbb{P}^1_K$, tenemos que $\{P\} \cong S$.

Con todo lo anterior, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & V \times_{\mathbb{P}^1_K} S \arrow[dl] \arrow[d] & & & \\
S \arrow[dr] & V \arrow[drr, "i"] & & X \times_S \{P\} \arrow[dll] \arrow[dr] & \\
 & \{P\} \arrow[drr] & & X \times_S \mathbb{P}^1_K \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d] \\
 & & & \mathbb{P}^1_K \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

donde $V \times_{\mathbb{P}^1_K} S \cong \varphi^{-1}(P)$. Notemos que de manera natural

$$X \times_S \{P\} \cong X \times_S S \cong X \tag{2.2}$$

Al ser $\varphi^{-1}(P)$ un subesquema cerrado de $X \times_S \mathbb{P}^1_K$, al restringirlo a $X \times_S \{P\}$ sigue siendo cerrado, concluyendo por el isomorfismo (2.2) que $\varphi^{-1}(P)$ es isomorfo, bajo el morfismo proyección p, a un subesquema cerrado de X, esquema que denotaremos por $V(P)$. Al ser isomorfos $V(P)$ y $\varphi^{-1}(P)$, sus campos de funciones racionales son isomorfos, y por lo tanto

$$p_*[\varphi^{-1}(P)] = [V(P)]$$

Proposición 2.2.7. *Sea X un S-esquema, con S el espectro de un campo K. Un k-ciclo α sobre X es racionalmente equivalente a cero si, y sólo si, existen $(k+1)$-subvariedades $V_1, \ldots, V_t$ de $X \times_S \mathbb{P}^1_K$, tal que las proyecciones $\varphi_i : V_i \to \mathbb{P}^1_K$ son dominantes, con*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{t} [V_i(P_0)] - [V_i(P_\infty)]$$

en $Z_k X$.

Demostración. Como todo k-ciclo racionalmente equivalente a cero es de la forma $\sum[div(r_i)]$, con $r_i \in R(W_i)^*$ y W_i una $(k+1)$-subvariedad de X, nos bastará probar la proposición para un k-ciclo de la forma $[div(r)]$.

Sea $\alpha = [div(r)]$, con $r \in R(W)^*$ y W una $(k+1)$-subvariedad de X. Al ser r una función racional sobre W, r tiene un representante

$$s : U \longrightarrow \mathbb{A}^1_K$$

con U un abierto de W. Como $\mathbb{A}^1_K \cong \mathbb{P}^1_K \setminus P_\infty$, r define un morfismo racional de W en $\mathbb{P}^1_K$, es decir, define un morfismo

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

Consideremos a la gráfica Γ_f de f

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dr] & \\
U \arrow[urr, "Id"] \arrow[r, "\Gamma_f"'] \arrow[drr, "f"'] & U \times_S \mathbb{P}^1_K \arrow[ur, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & S \\
 & & \mathbb{P}^1_K \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Sea V la cerradura de Γ_f en $X \times_S \mathbb{P}^1_K$, al tener que $p \circ \Gamma_f = Id_U$ con U abierto denso de W, tenemos que $p_{|_V}$ es un morfismo de V en W, teniendo la composición de morfismos

$$U \xrightarrow{\Gamma_f} V \xrightarrow{p_{|_V}} W \tag{2.3}$$

Al ser U denso en V, U es denson en $p(V)$, lo que implica que $p(V) = W$, siendo $p_{|_V}$ un morfismo dominante. El subesquema cerrado V es irreducible, ya que U es irreducible (A.1.5), lo que implica (A.1.6) que $\Gamma_f(U)$ es irreducible, y por la proposición (A.1.4) V es irreducible. Por lo tanto, V tiene estructura de subvariedad de $X \times_S \mathbb{P}^1_K$.

Ahora, sea ξ el punto genérico de W, el cual está contenido en U. Por la composición de morfismos (2.3) y 1. de la proposición (1.4.8) tenemos una composición de monomorfismos

$$R(W) \longrightarrow R(V) \longrightarrow R(W)$$

es decir, $R(W) \cong R(V)$. Por lo tanto, p es un morfismo birracional de V en W, siendo ambas variedades de la misma dimensión. Por 3. de la proposición (1.2.83), p restringido a V es un morfismo propio, al ser $\mathbb{P}^1_K$ completo.

Sea φ el morfismo inducido de V a $\mathbb{P}^1_K$. Al tener que bajo p, V es birracionalmente equivalente a W, y por la construcción hecha

$$p_*[div(\varphi)] = [div(r)]$$

Y por las observaciones hechas antes de la proposición,

$$p_*[div(\varphi)] = [V(P_0)] - [V(P_\infty)]$$

Inversamente, sean $V_1, \ldots, V_t$ subvariedades de $X \times_S \mathbb{P}^1_K$ de dimensión $k+1$, tales que para toda i, la proyección $\varphi_i : V_i \to \mathbb{P}^1_K$ es dominante. Consideremos al k-ciclo sobre X

$$\sum_{i=1}^{t}[V_i(P_0)] - [V_i(P_\infty)]$$

Nos bastará probar que para toda i, $[V_i(P_0)] - [V_i(P_\infty)]$ es racionalmente equivalente a cero. Pero esto se sigue de lo visto en el ejemplo y observación hechos arriba, al tener que φ_i determina una función racional sobre X, y que cumple

$$[div(\varphi_i)] = [\varphi_i^{-1}(P_0)] - [\varphi_i^{-1}(P_\infty)]$$

Implicando que

$$p_*[div(\varphi_i)] = p_*\left([\varphi_i^{-1}(P_0)] - [\varphi_i^{-1}(P_\infty)]\right) = [V(P_0)] - [V(P_\infty)]$$

Y por el teorema (2.2.3), $p_*[div(\varphi_i)]$ es un ciclo racionalmente equivalente a cero. ♯

2.2.2 Pull-backs Planos de Ciclos

En lo que resta del presente trabajo, todos los morfismos planos tendrán dimensión relativa n, para algún natural n.

Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo plano de dimensión relativa n. Sea V una subvariedad de Y. El esquema imagen inversa $\varphi^{-1}(V)$ es un subesquema de X puro dimensional, al ser φ de dimensión relativa. Por lo tanto, toda componente irreducible de $\varphi^{-1}(V)$ será de dimensión $dim(V) + n$, para alguna n. Definimos

$$\varphi^*[V] = [\varphi^{-1}(V)],$$

donde $[\varphi^{-1}(V)]$ es el ciclo fundamental del esquema imagen inversa. Por linealidad definimos el *pull-back plano*

$$\varphi^* : Z_n Y \longrightarrow Z_{k+n} X$$

Veamos que el pull-back plano se aplica también a todo subesquema cerrado de Y.

Lema 2.2.8. *Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo plano de dimensión relativa n. Entonces*

$$\varphi^*[Z] = [\varphi^{-1}(Z)]$$

para todo subesquema Z de Y.

Demostración. Sean $Z_{\alpha_1}, \ldots, Z_{\alpha_t}$ las componentes irreducibles de Z, y $W_{\beta_1}, \ldots, W_{\beta_s}$ las componentes irreducibles de $\varphi^{-1}(Z)$. Así

$$\varphi^*[Z] = \sum_{j=1}^{t} l_{\mathcal{O}_{Z,Z_{\alpha_j}}}(\mathcal{O}_{Z,Z_{\alpha_j}})[\varphi^{-1}(Z_{\alpha_j})] \tag{2.4}$$

$$[\varphi^{-1}(Z)] = \sum_{i=1}^{s} l_{\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z),W_{\beta_i}}}(l_{\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z),W_{\beta_i}}})[W_{\beta_i}] \tag{2.5}$$

Para probar que ambas sumas son iguales veamos primero que las subvariedades que aparecen en ambas sumas coinciden. Para cada i, sea $V_i = \overline{\varphi(W_{\beta_i})}$, el cual es irreducible por las proposiciones (A.1.6) y (A.1.4). Consideremos el morfismo local plano

$$f : \mathcal{O}_{Z,V_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z),W_{\beta_i}}$$

y a su morfismo inducido entre espectros

$${}^a f : Spec\, \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z),W_{\beta_i}} \longrightarrow Spec\, \mathcal{O}_{Z,W_{V_i}}$$

el cual es suprayectivo por el lema (B.2.8). Esto implica que V_i es una componente irreducible de Z, ya que si no fuera así, existiría un cerrado irreducible V_i' de Z que correspondería a un ideal primo no cero $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{O}_{Z,V_i}$, por lo que existiría un ideal primo no cero $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z),W_{\beta_i}}$ tal que ${}^a f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Esto último diría que $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z),W_{\beta_i}}$ no es cero dimensional, es decir, W_{β_i} no es componente irreducible de $\varphi^{-1}(Z)$.

En particular tenemos que para toda $i = 1, \ldots, s$, existe una $j \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $\varphi(W_{\beta_i}) \subseteq Z_{\alpha_j}$, lo que implica

$$W_{\beta_i} \subseteq \varphi^{-1} \circ \varphi(W_{\beta_i}) \subseteq \varphi^{-1}(Z_{\alpha_j})$$

es decir, W_{β_i} es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(Z_{\alpha_j})$, y por lo tanto, todo $[W_{\beta_i}]$ aparece en la suma (2.4).

Aplicando el razonamiento anterior a cada $\varphi^{-1}(Z_{\alpha_i})$, si W es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(Z_{\alpha_l})$, entonces $Z_{\alpha_l} = \overline{\varphi(W)}$. Si W no es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(Z)$, por la proposición (A.1.8), $W \subset W_{\beta_j}$, para alguna j, teniendo además que $Z_{\alpha_l} \neq Z_{\alpha_j}$ y

$$Z_{\alpha_l} = \overline{\varphi(W)} \subsetneq \overline{\varphi(W_j)} = Z_{\alpha_j}$$

Por lo tanto, toda componente irreducible de los $\varphi^{-1}(Z_{\alpha_i})$ aparece en la suma (2.5). Con esto, sólo resta ver la igualdad entre los coeficientes, bastándanos trabajar con alguna Z_α fija.

Supongamos que $W_{\beta_1}, \ldots, W_{\beta_l}$ son las componentes irreducibles de $\varphi^{-1}(Z_\alpha)$. Denotemos por

$$n_\alpha = l_{\mathcal{O}_{Z,Z_\alpha}}(\mathcal{O}_{Z,Z_\alpha})$$
$$m_{\beta_i} = l_{\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z)\,W_{\beta_i}}}(l_{\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z)\,W_{\beta_i}}})$$

La igualdad que queremos probar es

$$\sum_{i=1}^{l} m_{\beta_i}[W_{\beta_i}] = n_\alpha[\varphi^{-1}(Z_\alpha)]$$
$$= \sum_{i=1}^{l} n_\alpha \quad l_{\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z_\alpha)\,W_{\beta_i}}}(\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z_\alpha),W_{\beta_i}})$$

es decir, probar que para toda i

$$m_{\beta_i} = n_\alpha \quad l_{\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z_\alpha)\,W_{\beta_i}}}(\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z_\alpha),W_{\beta_i}})$$

Considerando el morfismo

$$\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z),W_{\beta_i}} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,Z_\alpha}$$

al tener que $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(Z_\alpha),W_{\beta_i}}$ nos da la preimagen del punto cerrado de $Spec\,\mathcal{O}_{Z,Z_\alpha}$, por el lema (B.2.8) tenemos el resultado deseado. ♯

Veamos que el pull-back plano es funtorial. Sean $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ morfismos planos y V una subvariedad de Z. Entonces

$$(\psi\varphi)^*[V] = [(\psi\varphi)^{-1}(V)] = [\varphi^{-1}\psi^{-1}(V)] = \varphi^*[\psi^{-1}(V)]$$
$$= \varphi^*\psi^*[V]$$

Observemos que se usó el lema anterior en las dos ultimas igualdades.

Proposición 2.2.9. *Sean (X,φ) y (Y',ψ) dos Y-esquemas, con φ propio y ψ plano. Consideremos el producto fibrado de X y Y' sobre Y*

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y' \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces φ' es propio, ψ' es plano y para todo $\alpha \in Z_*X$,

$$\varphi'_*\psi'^*\alpha = \psi^*\varphi_*\alpha$$

en Z_*Y'.

Demostración. Por 3. de las proposiciones (1.2.83) y (1.2.85) φ' es propio y ψ' es plano. Como el pull-back plano y el push-out propio son lineales, podemos suponer que $\alpha = [V]$, con V una subvariedad de X. Al ser φ propio, $\varphi(V) = \overline{\varphi(V)}$, lo que implica

$$\varphi_{|V} : V \longrightarrow \varphi(V)$$

es un morfismo suprayectivo (como mapeo continuo) entre variedades (proposición 1.4.9). Como solo trabajaremos en V, podemos suponer que φ es un morfismo suprayectivo entre variedades con $\alpha = [X]$, lo que implica por la proposicion (1.2.67) que φ' es suprayectivo. Si $[R(X) : R(Y)] = d$.

$$\psi^*\varphi_*[X]\psi^*(d[Y]) = d[\psi^{-1}(Y)] = d[Y \times_Y Y'] = d[Y']$$

Además

$$\varphi'_*\psi'^*[X] = \varphi'_*[\psi'^{-1}(X)] = \varphi'_*[X \times_X X \times_Y Y'] = \varphi'_*[X \times_Y Y']$$

donde $[Y']$ y $[X \times_Y Y']$ son ciclos fundamentales. Hay que probar que $d[Y'] = \varphi'_*[X']$, donde $X' = X \times_Y Y'$. Sean $Z_1, \dots, Z_t$ y $W_1, \dots, W_s$ las respectivas componentes irreducibles de X' y Y'. Así

$$\varphi'_*[X'] = \sum_{i=1}^{t} n_i[\varphi'(Z_i)]$$

$$d[Y'] = \sum_{i=1}^{s} dm_i[W_i]$$

donde $n_i = l_{\mathcal{O}_{X',Z_i}}(\mathcal{O}_{X',Z_i})$, y $m_i = l_{\mathcal{O}_{Y',W_i}}(\mathcal{O}_{Y',W_i})$. Consideremos a una componente irreducible Z_i de X'. Al ser $\varphi(Z_i) \subseteq Y'$ irreducible, existe W_j tal que $\varphi(Z_i) \subseteq W_j$, con lo que

$$Z_i \subseteq \varphi'^{-1}\varphi'(Z_i) \subseteq \varphi'^{-1}(W_j)$$

es decir, toda componente irreducible de X' es componente irreducible de algún $\varphi'^{-1}(W_j)$, y por lo tanto, las componentes irreducibles de tal $\varphi'^{-1}(W_j)$ deben ser componentes irreducibles de X'. Si algún $\varphi'^{-1}(W_i)$ no fuera así, toda componente irreducible Z'_i de $\varphi'^{-1}(W_i)$ está contenida en alguna componente irreducible Z_i de X', por lo que

$$\bigcup \varphi'(Z'_i) = W_i \subseteq \bigcup \varphi'(Z_i)$$

lo que implicaría que W_i no es irreducible, al tener que $W_i = \bigcup(W_i \cap \varphi'(Z_i))$

Si W_i es una componente irreducible de Y', y $Z_1, \ldots, Z_l$ las componentes irreducibles de $\varphi'^{-1}(W_i)$, entonces

$$W_i = \varphi' \circ \varphi'^{-1}(W_i) = \bigcup(\varphi(Z_j))$$

con lo que $\varphi'(Z_j) = W_i$ para toda j, al ser W_i irreducible. Sólo nos resta probar la igualdad entre los coeficientes. Fijemos una componente irreducible W_α de Y', y sean $Z_i, \ldots, Z_l$ las componentes irreducibles de $\varphi'^{-1}(W_\alpha)$. Lo que buscamos probar es que

$$\sum_{i=1}^{l}[\varphi'(Z_i)] = dm_\alpha[W_\alpha]$$

Como sólo nos interezan las componentes irreducibles de X' cuyos puntos genéricos se mapean, bajo φ', en el punto genérico de W, podemos suponer que $X = Spec\, R(X)$, $Y = Spec\, R(Y)$, $Y' = Spec\, \mathcal{O}_{Y',W_\alpha}$ y $X' = Spec(\mathcal{O}_{Y',W_\alpha} \otimes_{R(Y)} R(X)$, con $\mathcal{O}_{Y',W_\alpha}$ un anillo local artineano de dimensión cero

Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Y',W_\alpha} \otimes_{R(Y)} R(X) & R(X) \arrow[l] \\
\mathcal{O}_{Y',W_\alpha} \arrow[u] & R(Y) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Estamos interesados en la localización de los ideales primos de $\mathcal{O}_{Y',W_\alpha} \otimes_{R(Y)} R(X)$ cuya preimagen da en el ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y',W_\alpha}$. Por el lema (B.2.3) tenemos la igualdad deseada. Si $[R(X) : R(Y)]$ no es finito, haciendo las construcciones anteriores, tenemos que $[R(X') : R(Y')]$ tampoco es finito, concluyendo que $\varphi'_* \psi'^* \alpha = 0 = \psi^* \varphi_* \alpha$. ♯

Teorema 2.2.10. Sean K un campo, S su espectro, $\varphi : X \to Y$ un morfismo plano entre S-esquemas de dimensión relativa n, y α un k-ciclo sobre Y racionalmente equivalente a cero. Entonces $\varphi^* \alpha$ es racionalmente equivalente a cero en $Z_{k+n} X$

Por lo tanto, induce un morfismo entre grupos abelianos

$$\varphi^* : A_k Y \longrightarrow A_{k+n} X$$

Demostración. Vease el Apendice (D). ♯

Del teorema anterior tenemos que A_* es un funtor contravariante de la categoría de esquemas con morfismos planos, a la categoría de grupos abelianos libres.

Una Sucesión Exacta

Proposición 2.2.11. *Sea Y un subesquema cerrado de un esquema X, y sea $U = X \setminus Y$. Sean $i : Y \to X$, $j : U \to X$ las inclusiones. Entonces la sucesión*

$$A_kY \xrightarrow{i_*} A_kX \xrightarrow{j^*} A_kU \longrightarrow 0$$

es exacta para todo k.

Demostración. Al ser i una inmersión cerrada, por la proposición (1.2.83) es propio. Por el teorema (2.2.3) podemos considerar a los morfismos

$$i_* : Z_kY \longrightarrow Z_kX$$
$$i_* : A_kY \longrightarrow A_kX$$

Al ser j una inmersión abierta, por la proposición (1.2.85) es plana. Por el teorema (2.2.10) podemos considerar a los morfismos

$$j^* : Z_xX \longrightarrow Z_kU$$
$$j^* : A_xX \longrightarrow A_kU$$

al ser claramente j un morfismo de dimensión relativa cero.

Con lo anterior tenemos las sucesiones

$$Z_kY \xrightarrow{i_*} Z_kX \xrightarrow{j^*} Z_kU \tag{2.6}$$

$$A_kY \xrightarrow{i_*} A_kX \xrightarrow{j^*} A_kU \tag{2.7}$$

Probaremos primero que (2.6) es exacta derecha, y haciendo uso de este hecho probaremos la proposición. Al tener que $U = X \setminus Y$, es claro que (2.6) es exacta en Z_kX. Por el corolario (1.4.10) tenemos que toda subvariedad V de U se extiende a una subvariedad $\overline{V}$ de X, por lo que el pull-back j^* es un epimorfismo. Por lo tanto, la sucesión

$$Z_kY \xrightarrow{i_*} Z_kX \xrightarrow{j^*} Z_kU \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

es exacta. Consideremos al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z_kY \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, dashed] & Z_kX \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] & Z_kU \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ A_kY \arrow[r, "i_*"] & A_kX \arrow[r, "j^*"] & A_kU & \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Al ser la composición $Z_kX \to Z_kU \to A_kU$ un epimorfismo, el morfismo

$$j^* : A_kX \to A_kU$$

es un epimorfismo. Sólo resta ver que es exacto en A_kX. Por la conmutatividad del diagrama (2.9), es claro que a nivel de clases $Im(i_*) \subseteq Ker(j^*)$. Sea $[\alpha] \in Ker(j^*)$, y α un representante de dicha clase. Por hipótesis $j^*\alpha \sim 0$, con lo que

$$j^*\alpha = \sum_i [div(r_i)]$$

donde $r_i \in R(W_i)^*$ y W_i subvariedad de U. Como $R(W_i) = R(\overline{W_i})$ (proposición 1.4.12), r_i corresponde a una función racional $\overline{r_i} \in R(\overline{W_i})$, y por lo tanto

$$j^*\left(\alpha - \sum_i [div(\overline{r_i})]\right) = 0$$

Por exactitud de (2.8) existe $\beta \in Z_kY$ tal que

$$i_*\beta = \alpha - \sum_i [div(\overline{r_i})]$$

Sea $[\beta]$ la imagen de β bajo el morfismo $Z_kY \to A_kY$. Así,

$$i_*[\beta] = [i_*\beta] = \left[\alpha - \sum_i [div(\overline{r_i})]\right] = [\alpha]$$

Por lo tanto, la sucesión

$$A_kY \xrightarrow{i_*} A_kX \xrightarrow{j^*} A_kU \longrightarrow 0$$

es exacta. ♯

Capítulo 3

Divisores

En este capítulo trabajaremos con ciclos sobre un esquema X de codimensión uno, a los cuales llamaremos divisores de Weil. Buscando un lenguaje más flexible que nos permita desarrollar más la teoría, definiremos a los divisores de Cartier, una primera generalización de los divisores de Weil. Diremos cuando coinciden ambos tipos de divisores, además de relacionar a los divisores de Cartier con haces lineales. Daremos una simple generalización de los divisores de Cartier, generalización que consistira de lo necesario para definir la clase de Chern de un haz lineal sobre un esquema (bajo nuestra convención de lo que significa un esquema). Acabamos este capítulo con la definición del morfismo de Gysin, el cual es un caso particular de clases de intersección y que relaciona ciclos sobre un esquema con ciclos sobre una cierta clase de divisores del esquema.

3.1 Divisores de Weil

Definición 3.1.1. Sea X un esquema de dimensión n. Un *divisor de Weil* α sobre X es un $(n-1)$-ciclo sobre X

Estaremos considerando al grupo abeliano libre generado por los divisores de Weil, siendo este el grupo $Z_{n-1}X$ definido en §2.1 del capítulo anterior.

Fijemos algo de terminología. Sea X un esquema, si Y es una subvariedad de X de codimensión uno, diremos que el divisor de Weil $[Y]$ es un *divisor primo*. Un divisor de Weil sobre X de la forma $\sum_i n_i[Y_i]$ será llamado *efectivo*, si $n_i \geq 0$ para todo i

A los divisores de Weil sobre un esquema X que son racionalmente equivalentes a cero se les dice *principales*. En lo que resta, denotaremos por $Cl\,X$ al grupo $A_{n-1}X$.

Proposición 3.1.2. *Sea A un dominio entero noetheriano. Si A es un dominio de factorización única, entonces $Cl\,X = \langle 0 \rangle$, donde $X = Spec\,A$.*

Demostración. Al ser A un dominio de factorización única, por la proposición (B.1.1) todo ideal primo de altura uno es principal. Sea $[V]$ un divisor primo sobre X, es decir, V es una subvariedad de codimensión uno de X. Así, V corresponde a un ideal primo $\langle f \rangle$ de A, con

$$dim\,A_{\langle f \rangle} = dim\,\mathcal{O}_{X,\langle f \rangle} = 1$$

que al ser X entero, el ideal cero es el único ideal primo de A que está contenido en $\langle f \rangle$. Para todo ideal primo $\mathfrak{q}$ de A con $\mathfrak{q} \neq \langle f \rangle$, f se anula en $\mathfrak{q}$ al ser unidad en $A_{\mathfrak{q}}$. Por lo tanto

$$[div(f)] = n_0\langle 0 \rangle + n_1[V]$$

Por el ejemplo (2.1.3) $n_1 = 1$, y al ser $f \neq 0$, f es unidad en $A_{\langle 0 \rangle}$, y por lo tanto $n_0 = 0$. Con esto

$$[div(f)] = [V]$$

Así, todo divisor primo es principal, y por lo tanto $Cl\,X = \langle 0 \rangle$. ∎

Ejemplo 3.1.3. Sea K un campo y $X = \mathbb{A}^n_K$ el n-espacio afín sobre K. Tenemos por definición $X = Spec\,K[x_1, \ldots, x_n]$, siendo X el espectro de un dominio entero noetheriano de factorización única. Entonces por la proposición anterior $Cl\,X = 0$.

3.2 Divisores de Cartier

Definición 3.2.1. Sea X un esquema. Para cada abierto U de X, sea $S(U)$ el conjunto de elementos de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ que no son divisores de cero en $\mathcal{O}_{X,x}$, para todo $x \in U$. Entonces el funtor $U \mapsto S(U)^{-1}\,\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ es una pregavilla de anillos sobre X. A su gavilla asociada la denotaremos por $\mathcal{K}$, y la llamaremos la *gavilla de anillos cociente total* de $\mathcal{O}_X$.

Denotaremos por $\mathcal{K}^*$ a la gavilla de grupos abelianos (como grupo multiplicativo) de unidades en la gavilla $\mathcal{K}$. De manera similar consideraremos a la gavilla $\mathcal{O}^*$ de unidades en $\mathcal{O}$.

Nota 3.2.2. Sobre un esquema arbitrario X, la gavilla $\mathcal{K}$ rescata la noción de campo de funciones que existe en los esquemas enteros.

Ejemplo 3.2.3. Sea X una variedad Al ser X entero, para todo abierto U de X

$$\mathcal{K}(U) = S(U)^{-1}\,\mathcal{O}_X(U) = (\mathcal{O}_X(U))_{(0)},$$

es decir, $\mathcal{K}$ es la gavilla constante asociada a la pregavilla $U \mapsto R(X)$

Consideremos los morfismos entre pregavillas

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\quad i(U) \quad} S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\quad \mathcal{O}_X(U) \quad} \mathcal{K}(U)$$

Por como se definio $S(U)$, para todo $x \in U$ el morfismo i_x es inyectivo. Por el lema (1.1.13) $\theta_x \circ i_x$ es monomorfismo, y por el teorema (1.1.20) $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}$ es un monomorfismo entre gavillas. Así, $\mathcal{O}_X$ es una una subgavila de $\mathcal{K}$, en particular, $\mathcal{O}_X^*$ es una subgavilla de $\mathcal{K}^*$.

Definición 3.2.4. Sea X un esquema Un *divisor de Cartier* sobre X es una sección global de la gavilla cociente $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$, es decir, un divisor de Cartier D está determinado por una colección de parejas $\{(U_i, f_i)\}$, tales que $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de X y $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$, cumpliendo que para toda i, j, $\frac{f_i}{f_j}$ pertenece a la clase del cero, es decir, $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$

A las secciones f_i se les llamará las *ecuaciones locales* de D Un divisor de Cartier es *principal* si la correspondiente sección de $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ es la imagen de una seción global, es decir, si sus ecuaciones locales son de la forma $f_{|U_i}$, con $f \in \mathcal{K}^*(X)$.

Nota 3.2.5. Aunque la operación con la que $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ tiene estructura de gavilla de grupos es la multiplicación, para preservar la analogía con divisores de Weil usaremos el lenguaje de grupo aditivo sobre $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$.

Los divisores de Cartier de un esquema X forman un grupo abeliano $Div(X)$: si D y E son dos divisores de Cartier definidos respectivamente por las colecciones $\{(U_i, f_i)\}$ y $\{(U_i, g_i)\}$, la suma $D + E$ será el divisor de Cartier definido por la colección $\{(U_i, f_i g_i)\}$

Definición 3.2.6. Dos divisores de Cartier son *linealmente equivalentes* si su diferencia es un divisor de Cartier principal. Analogamente al caso de ciclos, podemos considerar al grupo de clases de equivalencia lineal de $Div(X)$, el cual denotaremos por $CaCl\,X$

Divisores de Cartier sobre un Esquema Noetheriano y Entero

Si X es un esquema noetheriano y entero, dado un divisor de Cartier D sobre X, se le puede asociar un divisor de Weil $\alpha \in Z_{n-1}X$ a D.

Sea $D \in Div(X)$ definido por la colección $\{(U_i, f_i)\}$, donde $f_i \in R(X)^*$ al tener que $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*) = R(X)^*$, por ser X entero (ejemplo 3.1.3). Sean V una subvariedad de codimensión uno de X, y f_i, f_j dos ecuaciones locales de D tales que U_i y U_j intersectan a V Así, tanto $\frac{f_i}{f_j}$ como $\frac{f_j}{f_i}$ pertenecen a $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, siendo ambos invertibles, lo que implica

$$ord_V(f_i) - ord_V(f_j) = ord_V\left(\frac{f_i}{f_j}\right) = l_{\mathcal{O}_{X,V}}\left(\mathcal{O}_{X,V} / \left\langle \frac{f_i}{f_j} \right\rangle\right) = l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\langle 0 \rangle) = 0$$

Por lo tanto, $ord_V(f_i) = ord_V(f_j)$ para toda subvariedad V de codimensión uno de X y para cualesquiera ecuaciones locales f_i y f_j tales que U_i y U_j intersectan a V.

Con esto, para toda subvariedad V de codimensión uno de X, denotaremos por

$$ord_V D = ord_V(f_i)$$

a la imagen de una ecuación local f_i de D bajo el morfismo "orden de anulación", con $U_i \cap V \neq \emptyset$

Ahora ya podemos decir que divisor de Weil se le asocia a un divisor de Cartier D sobre un esquema X noetheriano y entero Definimos el *divisor de Weil asociado* a D, denotado por $[D]$, como

$$[D] = \sum_V ord_V D\,[V]$$

donde la suma corre sobre todas las subvariedades de codimensión uno de X Para ver que este ciclo está bien definido, si D esta determinado por la colección $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$, al ser X noetheriano y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de X, por la proposición (A.2 3) existen índices $i_1, \ldots i_n \in I$ tales que $X = \cup_{j=1}^{n} U_{i_j}$. Por como se definió $ord_V D$, resta ver que para cada j, sólo hay un número finito de subvariedades de codimensión uno de X para las cuales $ord_V(f_{i_j}) \neq 0$, pero esto es lo que dice el lema (2 1 6).

Por la aditividad del morfismo "orden de anulacion" tenemos un morfismo entre grupos abelianos

$$\begin{aligned} Div(X) &\longrightarrow Z_{n-1}X \\ D &\longmapsto [D] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observemos que dado D un divisor de Cartier principal que esté determinado por la sección $f \in \mathcal{K}^*(X)$ y la cubierta $\{U_i\}$

$$\begin{aligned}[D] &= \sum_V ord_V D\,[V] = \sum_V ord_V(f_{|U_i})\,[V] = \sum_V ord_V(f)\,[V] \\ &= [div(f)]\end{aligned}$$

Es decir, el divisor de Weil asociado a un divisor de Cartier principal es nuevamente principal. Esto nos permite extender el morfismo (3.1) a las clases, obteniendo

$$ClCa\,X \longrightarrow Cl\,X \tag{3.2}$$

En lo que resta, denotaremos por $div(f)$ a los divisores de Cartier principales sobre un esquema X, donde $f \in \mathcal{K}^*(X)$

En general, el morfismo (3.2) no es monomorfismo o epimorfismo, siendo lo siguiente dar un criterio para saber cuando es isomorfismo.

Proposición 3.2.7. *Sea X un esquema entero, separado y noetheriano, con $\mathcal{O}_{X,x}$ un dominio de factorización única para todo $x \in X$ Entonces el grupo $Z_{n-1}X$ de divisores de Weil sobre X es isomorfo al grupo $Div(X)$ de divisores de Cartier sobre X. Más aún, bajo este isomorfismo, los divisores de Weil principales se corresponden con los divisores de Cartier principales.*

Demostración. Dado el morfismo (3.1), resta dar su morfismo inverso Sean $\alpha = \sum_{i=1}^n n_i[V_i]$ un divisor de Weil sobre X y $x \in X$ un punto arbitrario. Si $x \in V_i$ para alguna i, entonces V_i corresponde a un ideal primo $\mathfrak{p}_i$ de $\mathcal{O}_{X,x}$. Así, α induce un divisor de Weil α_x sobre $Spec\,\mathcal{O}_{X,x}$

$$\alpha_x = \begin{cases} [0] & \text{si } x \notin V_i,\ i = 1, \ldots, n \\ \sum_{\substack{j \\ x \in V_j}} n_j[V(\mathfrak{p}_j)] & \text{si } x \in V_i,\ i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{3.3}$$

Al ser $\mathcal{O}_{X,x}$ un dominio de factorización única, por la proposición (3 1 2) tenemos que α_x es divisor de Weil principal, es decir, $\alpha_x = [div(f_x)]$, para alguna $f_x \in R(X)^* = \mathcal{K}(X)^*$ Los divisores de Weil principales sobre X, $[div(f_x)]$ y α, inducen el mismo divisor de Weil α_x sobre $Spec\,\mathcal{O}_{X,x}$. Por como definimos (3 3), como divisores sobre X, $[div(f_x)]$ y α, difieren en divisores de Weil primos que no conienen a x, siendo un número finito de tales divisores con coeficiente no cero en α y $[div(f_x)]$. Así, en el complemento U_x de ese número finito de cerrados que no contiene a x, los divisores $[div(f_x)]$ y α coinciden

Al hacer esto para todo $x \in X$, obtenemos una colección $\{(U_x, f_x)\}_{x \in X}$ que define un divisor de Cartier sobre X, al tener que si f y f' definen al mismo divisor de Cartier sobre un abierto U, tendríamos que f y f' generan al mismo divisor de Weil principal sobre $\mathcal{O}_{X,x}$, para todo $x \in U$, teniendo que $f' \in f\mathcal{O}(U)^*$, es decir, $\frac{f}{f'} \in \mathcal{O}(U)^*$. Por lo tanto, el divisor de Cartier asociado a un divisor de Weil está bien definido

Por las construcciones hechas, se sigue que son inversas una de la otra, y que divisores principales se corresponden entre si

$\sharp$

Corolario 3.2.8. *Si X un esquema entero, separado y noetheriano, con $\mathcal{O}_{X,x}$ un dominio de factorización única para todo $x \in X$, entonces $Cl\,X \cong CaCl\,X$*

$\sharp$

Nota 3.2.9. Al tener que anillos locales regulares son dominio de factorización única (Matsumura [9]), la proposición y corolario anteriores se aplican a variedades suaves.

Divisores de Cartier y Gavillas Invertibles

A todo divisor de Cartier sobre un esquema X le asociaremos una gavilla invertible.

Definición 3.2.10. Sea D un divisor de Cartier sobre un esquema X representado por $\{(U_i, f_i)\}$. Definimos una subgavilla $\mathcal{L}(D)$ de $\mathcal{K}$, como el $\mathcal{O}_X$-submódulo de $\mathcal{K}$ generado por f_i^{-1} en U_i

Esta gavilla está bien definida al tener que $\frac{f_i}{f_j}$ es un elemento invertible de $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$, por lo que f_i^{-1} genera el mismo $\mathcal{O}_X$-submódulo que f_j^{-1} en $\mathcal{K}(U_i \cap U_j)$.

A la gavilla $\mathcal{L}(D)$ le llamaremos la *gavilla asociada* a D.

Proposición 3.2.11. *Sea X un esquema. Entonces*

1. *Para todo divisor de Cartier D sobre X, la gavilla $\mathcal{L}(D)$ es una gavilla invertible sobre X. La correspondencia $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ es biyectiva*

2. $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.

3. *$D_1 \sim D_2$ si, y sólo si, $\mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$ (el isomorfismo es como gavillas abstractas, es decir, sin tomarlas como subgavillas de $\mathcal{K}$)*

Demostración. 1. Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{U_i} &\longrightarrow \mathcal{L}(D)_{|U_i} \\ 1 &\longmapsto f_i^{-1} \end{aligned}$$

Este morfismo es claramente suprayectivo. Si $s \in \mathcal{O}_{U_i}(U)$, con U abierto de U_i, es tal que $sf_i^{-1} = 0$, para todo $x \in U$, entonces $s_x(f_i^{-1})_x = \bar{0}$, y al tener que $f_i^{-1} \in \mathcal{K}(U_i)^*$, se sigue que $s_x = \bar{0}$, para todo $x \in U$. Por la proposición (1.1 8), $s = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(D)$ es una gavilla invertible

Sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible sobre X, con $\{U_i\}$ la cubierta abierta de X que le da tal estructura Sea f_i el inverso del generador local de $\mathcal{L}$. Así, la colección $\{(U_i, f_i^{-1})\}$ define un divisor de Cartier sobre X.

En particular, si la gavilla invertible es de la forma $\mathcal{L}(D)$, con D un divisor de Cartier, la construcción dada recupera al divisor de Cartier

2. Sean $\{(U_i, f_i)\}$, $\{(U_i, g_i)\}$ las colecciones que definen a los divisores de Cartier D_1, D_2, respectivamente. Con esto, la gavilla $\mathcal{L}(D_1 - D_2)$ está generada localmente por $f_i^{-1}g_i$, y por lo tanto, $\mathcal{L}(D_1 - D_2) = \mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ Consideremos el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2)^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1} \\ f_i^{-1} & \longmapsto & f_i^{-1} \otimes 1 \\ g_i & \longmapsto & 1 \otimes g_i \end{array}$$

el cual, siguiendo los argumentos dados en el inciso 1 , es un isomorfismo al tener que $f_i^{-1}, g_i \in \mathcal{K}(U_i)^*$.

3. Por 2., basta probar que un divisor de Cartier D es principal si, y sólo si, $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_X$ Supongamos que D es principal, siendo $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ la sección global que lo define. Así, $\mathcal{L}(D)$ es el $\mathcal{O}_X$-submódulo de $\mathcal{K}$ generado globalmente por f^{-1} Por los argumentos dados en 1 , el morfismo $1 \mapsto f^{-1}$ da un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$ en $\mathcal{L}(D)$

Inversamente, dado un divisor de Cartier D y un isomorfismo $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{L}(D)$, la imagen de 1 bajo el isomorfismo es un elemento de $\Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, cuyo inverso multiplicativo define a D, lo que implica que D es principal.

♯

Proposición 3.2.12. *Sea X un esquema entero. El mapeo $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ da una biyección entre clases de equivalencia lineal de divisores de Cartier $CaCl\, X$, y clases de isomorfismo de gavillas invertibles $Pic\, X$.*

Demostración. Por la proposición anterior, el mapeo dado es un monomorfismo. Sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible, y consideremos a la gavilla $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}$. Sea U un abierto de X tal que $\mathcal{L}(U) \cong \mathcal{O}_X(U)$. Sobre este abierto,

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$$

que por el ejemplo (3.2.3) es la gavilla constante $\mathcal{K}$. Así, en una cubierta abierta $\{U_i\}$ de X, $(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K})_{|U_i}$ es la gavilla constante $\mathcal{K}$, y X es conexo al ser irreducible. Por lo tanto, la gavilla $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}$ es isomorfa a la gavilla constante $\mathcal{K}$.

Bajo el morfismo natural $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$, la gavilla $\mathcal{L}$ es isomorfa a una subgavilla de $\mathcal{K}$. Esta subgavilla define un divisor de Cartier sobre X determinado por $\{(U_i, f_i)\}$, donde f_i es el generador local de $\mathcal{L}$ en U_i. ♯

Nota 3.2.13. En la demostración de la proposición anterior, para mostrar que el morfismo entre clases era monomorfismo no se usó la hipótesis de que el esquema era entero.

Corolario 3.2.14. *Sea X un esquema entero, separado, noetheriano cuyos tallos sean dominios de factorización única en todo punto. Entonces $Cl\, X \cong CaCl\, X \cong Pic\, X$*

Demostración. Es justo lo que dice la proposición anterior y el corolario (3.2.8).

♯

Corolario 3.2.15. *Sean K un campo y X un K-esquema entero. El mapeo*

$$D \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow E_{\mathcal{L}(D)}$$

da una biyección entre clases de equivalencia lineal de divisores de Cartier sobre X, clases de isomorfismo de gavillas invertibles sobre X y clases de isomorfismo de haces lineales sobre X.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior y el teorema (1.5.5) ♯

Notación 3.2.16. Denotaremos por D_E al divisor de Cartier asociado al haz lineal (X, E, p) Al haz lineal asociado a un divisor de Cartier D lo denotaremos por $\mathcal{O}(D)$.

Nota 3.2.17. Las correspondencias del corolario anterior son:

- Si D es un divisor de Cartier determinado por $\{(U_i, f_i)\}$, $\mathcal{L}(D)$ será la gavilla invertible que tenga a $\{f_i^{-1}\}$ como generadores locales
- Si $\mathcal{L}(D)$ tiene a $\{f_i^{-1}\}$ como generadores locales, $\mathcal{O}(D) = E_{\mathcal{L}(D)}$ será el haz vectorial determinado por las funciones transición $\{g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}\}$.
- Si E es un haz lineal de terminado por las funciones transición $\{g_{ij}\}$, fijemos un índice i_0, y denotemos por f_i a la sección g_{ii_0}. Así,

$$\frac{f_i}{f_j} = \frac{g_{ii_0}}{g_{ji_0}} = g_{ii_0} g_{ji_0}^{-1} = g_{ii_0} g_{i_0 j} = g_{ij}$$

Con esto, D_E será el divisor de Cartier determinado por $\{(U_i, f_i)\}$.

Con lo anterior, $\mathcal{O}(D) \cong E$

Ejemplo 3.2.18. Si D es un divisor de Cartier principal, existe $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ tal que $D = div(f)$. Por la nota anterior, las funciones transición de $\mathcal{O}(D)$ son la idéntidad, por lo que $\mathcal{O}(D)$ es el haz lineal trivial.

Definición 3.2.19. Un divisor de Cartier sobre un esquema X es *efectivo* si puede ser representado por $\{(U_i, f_i)\}$, con $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$.

Si $\mathcal{L}(D)$ es la gavilla invertible asociada a un divisor de Cartier efectivo D, $\mathcal{L}(D)$ es un $\mathcal{O}_X$/submódulo de $\mathcal{K}$ que está contenido en $\mathcal{O}_X$, por lo que $\mathcal{L}(D)$ define un subesquema cerrado de X, que por abuso de notación denotaremos por D.

Lema 3.2.20. *Sea X un esquema puro n-dimensional, siendo $X_1, \ldots, X_t$ sus componentes irreducibles y $m_1, \ldots, m_t$ sus respectivas multiplicidades geométricas. Sea D un divisor de Cartier efectivo sobre X, y para cada i, sea $D_i = D \cap X_i$ la restricción de D en X_i (viendo a D como subesquema cerrado de X). Entonces*

$$[D] = \sum_{i=1}^{t} m_i [D_i] \tag{3.4}$$

en $Z_{n-1} X$.

Demostración Para cada subvariedad V de codimensión uno de X, hay que probar que aparece en cada lado de la igualdad (3 4) con el mismo coeficiente.

Sea $A = \mathcal{O}_{X,V}$, el cual es un anillo local de dimensión uno. Los ideales primos minimales $\mathfrak{p}_i$ de A corresponden a las componentes irreducibles X_i de X que contienen a V, por lo que

$$m_i = l_{A_{\mathfrak{p}_i}}(A_{\mathfrak{p}_i})$$

Como toda función racional no cero sobre X se ve como cociente de elementos en A, podemos considerar una ecuación local f de D en A, teniendo que el coeficiente de $[V]$ en $[D]$ es

$$l_A(A/\langle f\rangle) = ord_V(f)$$

Con esto, el coeficiente de $[V]$ en $[D_i]$ es

$$l_{A/\mathfrak{p}_i}(A/\mathfrak{p}_i + fA)$$

Por el lema (B.2 7)

$$l_A(A/\langle f\rangle) = \sum m_i l_{A/\mathfrak{p}_i}(A/\mathfrak{p}_i + fA)$$

que es la igualdad deseada. ♯

Sea D un divisor de Cartier efectivo sobre X, determinado por $\{(U_i, f_i)\}$. Al tener que $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$, por lo visto en §1.1.5, los f_i determinan una sección s_D sobre $\mathcal{O}(D)$, sección que llamaremos la *sección canónica* de $\mathcal{O}(D)$.

Definición 3.2.21. El *soporte* de un divisor de Cartier D sobre X, denotado por $\mid D \mid$, como el conjunto de puntos x de X tales que una ecuación local para D no pertenece a $\mathcal{O}^*_{X,x}$, es decir, pertenece a la clase del cero en $\mathcal{K}_x$

Si $x \notin \mid D \mid$, existe una vecindad $U \subseteq X \setminus \mid D \mid$ tal que en $\mathcal{K}_{|_U}$, la ecuación local es cero, es decir, $\mid D \mid$ es un subconjunto cerrado de X.

Si D es un divisor de Cartier arbitrario sobre X determinado por $\{(U_i; f_i)\}$, entonces

$$\{(U_i, f_i); (U = X \setminus \mid D \mid, 1)\}$$

también determina a D, ya que en $U \cap U_i$, $\frac{f_i}{1} \in \Gamma(U \cap U_i, \mathcal{O}^*_X)$. A la sección 1 la llamaremos la sección canónica de D, que denotaremos por s_D.

3.3 Pseudo-divisores

Dado un morfismo entre esquemas $\varphi : X \to Y$, no siempre se puede definir el pull-back de un divisor de Cartier sobre Y (Grothendick [16]), por lo que daremos una generalización de los divisores de Cartier que si permita definir su pull-back.

Definición 3.3.1. Un *pseudo-divisor* sobre un esquema X es una terna (L, Z, s), donde L es un haz lineal sobre X, Z es subconjunto cerrado de X y s es una sección de L que no se anule en todo $X \setminus Z$.

Diremos que L es el *haz lineal*, Z es el *soporte* y s es la *sección* del pseudo-divisor.

Dos ternas (L, Z, s), (L', Z', s') *definen* el mismo pseudo divisor si $Z = Z'$ y existe un isomorfismo $\lambda : L \to L'$ tal que $\lambda^*_{X \setminus Z}(s) = s'$.

Ejemplo 3.3.2. Un pseudo-divisor con soporte X es una clase de isomorfismo entre haces lineales sobre X

Todo divisor de Cartier D sobre un esquema X determina el pseudo-divisor

$$(\mathcal{O}(D), \mid D \mid, s_D)$$

sobre X.

Diremos que un divisor de Cartier D *representa* a un pseudo-divisor (L, Z, s), si $\mid D \mid \subseteq Z$ y existe un isomorfismo $\lambda : \mathcal{O}(D) \to L$ tal que para todo abierto U de $X \setminus Z$, $\lambda^*_U(s_D) = s$.

Lema 3.3.3. *Sea X una variedad Todo pseudo-divisor (L, Z, s) sobre X es representado por algún divisor de Cartier D sobre X, teniendo que*

1. *Si $X = Z$, D está determinado salvo equivalencia lineal*

2. *Si $X \neq Z$, D está determinado de forma única.*

Demostración. Sea (L, Z, s) un pseudo-divisor sobre X Por el corolario (3.2.15), dado L, existe un divisor de Cartier D sobre X tal que $L \cong \mathcal{O}(D)$.

1. Si $X = Z$, entonces $\mid D \mid \subseteq Z$, por lo que $\mathcal{O}(D)$ representa a (L, Z, s). Si D' es otro divisor de Cartier que representa al pseudo-divisor dado, por el corolario (3.2.15) tenemos que $D \sim D'$.

2. Si $Z \neq X$, entonces $U = X \setminus Z$ es no vacío. Sabemos por lo visto en §1.5 que s está determinada por funciones regulares s_i sobre $U \cap U_i$, tales que $s_i = g_{ij}s_j$, con $\{g_{ij}\}$ las funciones transición de L. Recordando que si D está determinado por $\{(U_i, f_i)\}$, entonces las funciones transición son de la forma $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$, tenemos que $\frac{s_i}{f_i} = \frac{s_j}{f_j}$. Pegando estás funciones se obtiene una función racional $r \in R(X)^*$ tal que en todo U_i, $r = \frac{s_i}{f_i}$.

   Consideremos al divisor de Cartier $D' = D + div(r)$, siendo sus ecuaciones locales f' de la forma
$$f_i' = f_i \cdot r = f_i \frac{s_i}{f_i} = s_i \tag{3.5}$$
   Lo que implica que la sección $s_{D'}$ corresponde a la sección s. Por el corolario (3.2.15)
$$\mathcal{O}(D') = \mathcal{O}(D + div(r)) \cong \mathcal{O}(D) \cong L$$
   y por construcción $\mid D' \mid \subset Z$, lo que prueba que D' representa a (L, Z, s).

   Para ver que es único, sean D, D' dos divisores de Cartier que representan a un pseudo-divisor (L, Z, s), siendo $\{f_i\}, \{f_i'\}$ sus respectivas ecuaciones locales. Por hipótesis $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}(D')$, existiendo por el corolario (3.2.15) una función racional r no cero sobre X tal que para toda i, $f_i = r f_i'$. Al ser U no vacío y tener que $s_D = s_{D'}$, por (3.5) $f_i = f_i'$ en $U \cap U_i$, al representar D y D' al mismo pseudo-divisor. Esto implica que $r = 1$ en U, y por lo tanto $f_i = f_i'$ en U. Así concluimos que $D = D'$.

♯

Si $D = (L, Z, s)$ y $D' = (L', Z', s')$ son dos pseudo-divisores sobre X, definimos la *suma* $D + D'$ como el pseudo-divisor
$$D + D' = (L \otimes L', Z \cup Z', s \otimes s')$$

La operación suma definida coincide con la suma definida en $Div(X)$, excepto en el hecho que el soporte de la suma de dos divisores de Cartier puede ser más pequeña que la suma de sus soportes.

Definimos el inverso de un pseudo-divisor $D = (L, Z, s)$ como
$$-D = \left(L^{-1}, Z, \frac{1}{s}\right)$$

Así, fijando a un cerrado Z de X, los pseudos-divisores con soporte Z forman un grupo abeliano

En lo que resta denotaremos por D a un pseudo-divisor, escribiendo en ocaciones a $\mathcal{O}(D)$ como su haz lineal, $\mid D \mid$ como su soporte, y s_D como su sección.

Sea D un pseudo-divisor sobre una n-variedad X. Denotemos por

$$[D] \in A_{n-1} \mid D \mid$$

a la clase del divisor de Weil asociado a algún divisor de Cartier que represente a D. Veamos que $[D]$ está bien definido haciendo uso del lema (3.3.3) Si $\mid D \mid \neq X$, el divisor de Cartier asociado a D es único, estando bien definido $[D]$. Si $\mid D \mid = X$, el divisor de Cartier que representa a D está definido salvo equivalencia lineal, y por lo visto al definir (3 2), $[D]$ está bien definido

A la clase $[D]$ le llamaremos *clase de divisor de Weil* de D.

Definición 3.3.4. Sean $\varphi : X' \to X$ un morfismo entre esquemas y $D = (L, Z, s)$ un pseudo-divisor sobre X. Definimos el *pull-back* $\varphi^* D$ como el pseudo-divisor sobre X' definido como

$$\varphi^* D = (\varphi^* L, \varphi^{-1}(Z), \varphi^* s)$$

Por las propiedades funtoriales del pull-back en haces lineales, el pull-back sobre pseudo-divisores es funtorial.

Clases de Intersección

Sean D un pseudo-divisor sobre un esquema X y V una k-subvariedad de X, con j la inmersión cerrada que da a V tal estructura. La restricción de D en V es el pull-back $j^* D$, y es un pseudo-divisor sobre V con soporte $\mid D \mid \cap V$ A la clase del divisor de Weil de $j^* D$ lo denotaremos como

$$[j^* D] = D \cdot [V]$$

el cual pertenece a $A_{k-1}(\mid D \mid \cap V)$.

Veamos que significa está definición si D es un divisor de Cartier sobre X. Si $V \not\subseteq \mid D \mid$, entonces $j^* D$ es un divisor de Cartier sobre V, siendo $D \cdot [V]$ el divisor de Weil asociado a $j^* D$ Si $V \subset \mid D \mid$, entonces $D \cdot [V]$ es la imagen de C bajo el morfismo (3.2), donde C es un divisor de Cartier sobre V con haz lineal $\mathcal{O}(C)$ isomorfo a $j^* \mathcal{O}(D)$

Haciendo abuso de notación, si Y es un cerrado de X que contiene a $| D | \cap V$, denotaremos también por $D \cdot [V]$ a la imagen de este en $A_{k-1} Y$.

Sea $\alpha = \sum n_V[V]$ un k-ciclo sobre X. Al tener por definición que $V \subset | \alpha |$, para toda subvariedad V que aparece en α con coeficiente no cero, para cualquier pseudo-divisor D sobre X, la clase de divisor de Weil $D \cdot [V]$ es una clase en $A_{k-1}(| D | \cap | \alpha |)$.

Definición 3.3.5. Sean $\alpha = \sum n_v[V]$ un k-ciclo sobre X y D un pseudo-divisor sobre X. Definimos la *clase de intersección* $D \cdot \alpha \in A_{k-1}(| D | \cap | \alpha |)$ como

$$D \cdot \alpha = \sum n_V D \cdot [V]$$

Nuevamente haciendo abuso de notación, si Y es un cerrado de X con $| D | \cap | \alpha | \subseteq Y$, veremos a $D \cdot \alpha$ como una clase en $A_{k-1}Y$.

Proposición 3.3.6. *Sean X', X esquemas.*

1. *Si D es un pseudo-divisor sobre X y α, α' son k-ciclos sobre X, entonces*

$$D \cdot (\alpha + \alpha') = D \cdot \alpha + D \cdot \alpha'$$

   en $A_{k-1}(| D | \cap (| \alpha | \cup | \alpha' |))$.

2. *Si D, D' son pseudo-divisores sobre X y α es un k-ciclo sobre X, entonces*

$$(D + D') \cdot \alpha = D \cdot \alpha + D' \cdot \alpha$$

   en $A_{k-1}((| D | \cup | D' |) \cap | \alpha |)$.

3. *(Fórmula de Proyección) Sean $\varphi : X' \to X$ un morfismo propio entre esquemas, D un pseudo-divisor sobre X, α un k-ciclo sobre X' y ψ el morfismo de $\varphi^{-1}(| D |) \cap | \alpha |$ en $| D | \cap \varphi(| \alpha |)$ inducido por φ. Entonces*

$$\psi_*(\varphi^* D \cdot \alpha) = D \cdot \varphi_*(\alpha)$$

   en $A_{k-1}(| D | \cap \varphi(| \alpha |))$.

4. *Sean $\varphi : X' \to X$ un morfismo plano entre esquemas de dimensión relativa n, D un pseudo-divisor sobre X, α un k-ciclo sobre X y ψ el morfismo inducido de $\varphi^{-1}(| D | \cap | \alpha |)$ en $| D | \cap | \alpha |$. Entonces*

$$\varphi^* D \cdot \varphi^* \alpha = \psi^*(D \cdot \alpha)$$

   en $A_{k+n-1}(\varphi^{-1}(| D | \cap | \alpha |))$.

5. *Si D es un pseudo-divisor sobre X cuyo haz lineal $\mathcal{O}(D)$ es trivial, y α es un k-ciclo sobre X, entonces*

$$D \cdot \alpha = 0$$

en $A_{k-1} \mid \alpha \mid$

Demostración 1. Si $\alpha = \sum n_V[V]$ y $\alpha' = \sum n_{V'}[V']$, calculando directamente tenemos

$$\begin{aligned} D \cdot (\alpha + \alpha') &= D \cdot \left(\sum n_V[V] + \sum n_{V'}[V']\right) \\ &= \sum n_V D \cdot [V] + \sum n_{V'} D \cdot [V'] = D \cdot \alpha + D \cdot \alpha' \end{aligned}$$

2. Por como definimos la clase de intersección, podemos suponer que $\alpha = [V]$, con V una k-subvariedad de X. Así,

$$(D + D') \cdot [V] = ord_V(D + D') \cdot [V] = ord_V(D) \cdot [V] + ord_V(D') \cdot [V]$$

3. Por funtorialidad y linealidad del push-out propio y pull-back plano, y usando argumentos pasados, podemos suponer que $\alpha = [V]$, $V = X'$ y $X = \varphi(V)$. Consideremos un divisor de Cartier que represente a D, que por abuso de notación denotaremos por D. Así, la igualdad a probar es

$$\varphi_*([\varphi^* D]) = gr(X'/X)[D]$$

Para probar esta igualdad basta trabajar sobre un abierto de U de X que forme parte de la representación de D, por lo que podemos suponer que $D = div(r)$ para alguna $r \in R(X)^*$. Por la proposición (2.2.2), si $d = gr(X'/X)$

$$\varphi_*[div(\varphi^*(r))] = [div(N(\varphi^*(r)))] = div(r^d) = div[div(r)]$$

4. Por argumentos ya seguidos, podemos suponer que $\alpha = V = X$, por lo que existe un divisor de Cartier D que represente a D. La igualdad a probar ahora es

$$[\varphi^* D] = \varphi^*[D]$$

como ciclos sobre X'. Al ser esto también una cuestión local sobre X, podemos suponer que D es la diferencia de dos divisores de Cartier efectivos, bastándonos probarlo cuando D es efectivo. Pero esto se sigue del lema (2.2.8)

5. Supongamos que V es una variedad, $\alpha = [V]$, $V = X$ y D es representado por un divisor de Cartier D sobre X, buscando probar que $[D] = 0$ en $A_{k-1}X$ cuando D es principal, pero esto es justo lo que se vio al asociar a un divisor de Cartier un divisor de Weil.

$\sharp$

Sean D, D' divisores de Cartier sobre una variedad X, con $[D], [D']$ sus respectivos divisores de Weil asociados. Por lo visto anteriormente, las clases de intersección $D \cdot [D']$ y $D' \cdot [D]$ son clases en $(| D | \cap | D' |)$. Aunque el siguiente teorema es un resultado fudanmental para lo que sigue, omitiremos su demostración, la cual se encuentra en Fulton [4].

Teorema 3.3.7. Sean D, D' divisores de Cartier sobre una n-variedad X. Entonces

$$D \cdot [D'] = D' \cdot [D]$$

en $A_{n-2}(| D | \cap | D' |)$.

Corolario 3.3.8. *Sean D un pseudo-divisor sobre un esquema X y α un k-ciclo sobre X racionalmente equivalente a cero. Entonces*

$$D \cdot \alpha = 0$$

en $A_{k-1} \ | D |$.

Demostración. Por hipótesis $\alpha = [div(r)]$, con $r \in R(V)^*$ y V una subvariedad de X, lo que nos permite trabajar en V. Así, podemos suponer que $X = V$. Por definición de clase de intersección, podemos reemplazar al pseudo-divisor D por un divisor de Cartier D que lo represente

Por el teorema anterior

$$D \cdot [div(r)] = div(r) \cdot [D]$$

Y por 5. de la proposición (3.3.6)

$$D \cdot [div(r)] = div(r) \cdot [D] = 0$$

en $A_{k-1} \ | D |$ $\sharp$

Para todo pseudo-divisor D sobre un esquema X, dado un subesquema cerrado Y de X, hemos definido un morfismo

$$\begin{aligned} D \cdot \_ : Z_k Y &\longrightarrow A_{k-1}(| D | \cap Y) \\ \alpha &\longmapsto D \cdot \alpha \end{aligned} \tag{3.6}$$

teniendo una colección de morfismo del tipo (3.6), uno por cada pseudo-divisor D sobre X.

Si α', α'' son k-ciclos sobre Y tales que $\alpha' \sim \alpha''$, existe un k-ciclo $\alpha \sim 0$ sobre Y tal que $\alpha' - \alpha'' = \alpha$. Aplicando el corolario anterior a la restricción de D en Y, $D \cdot \alpha = 0$. Por 1. de la proposición (3.3.6)

$$0 = D \cdot \alpha = D \cdot (\alpha' - \alpha'') = D \cdot \alpha' - D \cdot \alpha''$$

Esto implica que los morfismos (3.6) están bien definidos si se aplican a $A_k Y$, lo que nos da una colección de morfismos

$$D \cdot \_ : A_k Y \longrightarrow A_{k-1}(| D | \cap Y) \tag{3.7}$$

Denotaremos a la imagen de una clase α de k-ciclos como $D \cdot \alpha$. Fijo un pseudo-divisor D, al morfismo (3.7) lo llamaremos *intersectando con* D.

Corolario 3.3.9. *Sean D, D' pseudo-divisores sobre un esquema X, y α un k-ciclo sobre X. Entonces*

$$D \cdot (D' \cdot \alpha) = D' \cdot (D \cdot \alpha)$$

en $A_{k-2}(| D | \cap | D' | \cap | \alpha |)$.

Demostración. Primero veamos que los productos pertenecen al grupo que se afirma. Por definición $D' \cdot \alpha \in A_{k-1}(| D' | \cap | \alpha |)$, e intersectando con D a la clase de intersección $D' \cdot \alpha$, obtenemos un elemento que pertenece a $A_{k-2}(| D' | \cap | \alpha | \cap | D |)$. De forma análoga vemos que $D' \cdot (D \cdot \alpha) \in A_{k-2}(| D | \cap | D' | \cap | \alpha |)$.

Al ser (3.6) lineal, podemos suponer que $\alpha = [V]$, con V una k-subvariedad de X. Sea j la inmersión cerrada que le da a V tal estructura. Para obtener las clases de intersección hay que tomar divisores de Cartier que representen a los pseudos-divisores, por lo que podemos suponer que D y D' son divisores de Cartier sobre X.

Para probar la igualdad deseada hay que considerar a $[j^* D]$ y $[j^* D']$, es decir, las restricciones de D y D' a V

Así, podemos suponer que D y D' son divisores de Cartier sobre V, y la igualdad a probar adquiere la forma

$$D \cdot [D'] = D' \cdot [D]$$

Por el teorema (3.3.7) tenemos el resultado. ∎

Definición 3.3.10. Sean $D_1, \ldots, D_n$ pseudo-divisores sobre un esquema X. Para cualquier $\alpha \in Z_k X$, definimos inductivamente a

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_n \cdot \alpha \tag{3.8}$$

como

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_n \cdot \alpha = D_1 \cdot (D_2 \cdot \ldots \cdot D_n \cdot \alpha)$$

y el cual vive en $A_{k-n}(\mid D_1 \mid \cap \cdots \cap \mid D_n \mid \cap \mid \alpha \mid)$.

Por el corolario anterior está definición es independiente del ordenamiento de los D_i. Por 1. y 2. de la proposición (3.3.6), esta operación es lineal en cada D_i y α.

De forma más general, si $P(T_1, \ldots, T_n)$ es un polinomio homogéneo de grado d con coeficientes enteros, y Z es un subesquema cerrado de X tal que

$$(\mid D_1 \mid \cup \cdots \cup \mid D_n \mid) \cap \mid \alpha \mid \subseteq Z$$

al ser lineal (3.8) en los D_i y α, podemos considerar a la clase

$$P(D_1, \ldots, D_n) \cdot \alpha \tag{3.9}$$

la cual pertenece a $A_{k-d} Z$.

Si $n = k$, $D_1 \cdot \ldots \cdot D_n \cdot \alpha$ es una clace de un cero ciclo, y si $Y = \mid D_1 \mid \cap \cdots \cap \mid D_n \mid \cap \mid \alpha \mid$ es completo, definimos el *número de intersección*

$$(D_1 \cdot \ldots \cdot D_n \cdot \alpha)_X = \int_Y D_1 \cdot \ldots \cdot D_n \cdot \alpha$$

De manera más general, considerando (3.9), si $d = n$ y $Z = (\mid D_1 \mid \cup \cdots \cup \mid D_n \mid) \cap \mid \alpha \mid$ es completo, definimos

$$(P(D_1, \ldots, D_n) \cdot \alpha))_X = \int_Z P(D_1, \ldots, D_n) \cdot \alpha$$

3.4 Clase de Chern de un Haz Lineal

Sea L un haz lineal sobre un esquema X. Si V es una k-subvariedad de X, el haz restricción L_V tiene asociado un divisor de Cartier C sobre X tal que $\mathcal{O}(C) \cong L_V$, donde C es único salvo equivalencia lineal. Así, el divisor de Weil $[C]$ asociado a C es un elemento bien definido en $A_{k-1}X$. A está clase la llamaremos la *clase de Chern* de L sobre V, y la denotaremos como $c_1(L)\cap[V]$. Si $\alpha = \sum n_V[V]$ es un k-ciclo, denotemos por $c_1(L)\cap\alpha$ a la clase $\sum n_V c_1(L)\cap[V]$. Con esto hemos definido un morfsimo

$$\begin{aligned} Z_k X &\longrightarrow A_k X \\ \alpha &\longmapsto c_1(L)\cap\alpha \end{aligned}$$

para cada haz lineal L sobre X. Notemos que si L es el haz lineal de un pseudo-divisor $D = (L, Z, s)$

$$c_1(L)\cap\alpha = D \cdot \alpha$$

en $A_{k-1}X$.

Proposición 3.4.1. *Sean X', X esquemas*

1. *Si L es un haz lineal sobre X y α es un k-ciclo racionalmente equivalente a cero, entonces*

$$c_1\cap\alpha = 0$$

2. *(Conmutatividad) Si L, L' son haces lineales sobre X y α es un k-ciclo sobre X, entonces*

$$c_1(L)\cap(c_1(L')\cap\alpha) = c_1(L')\cap(c_1(L)\cap\alpha)$$

en $A_{k-2}X$.

3. *(Fórmula de Proyección) Si $\varphi : X' \to X$ es un morfismo propio, L un haz lineal sobre X y α un k-ciclo sobre X', entonces*

$$\varphi_*(c_1(\varphi^*L)\cap\alpha) = c_1(L)\cap\varphi_*(\alpha)$$

4. *(Pull-back Plano) Si $\varphi : X' \to X$ es un morfismo plano de dimensión relativa n, L es un haz lineal sobre X y α un k-ciclo sobre X, entonces*

$$c_1(\varphi^*L)\cap\varphi^*\alpha = \varphi^*(c_1(L)\cap\alpha)$$

en $A_{k+n-1}X'$

5. *(Aditividad) Si L, L' son haces lineales sobre X y α es un k-ciclo sobre X, entonces*

$$c_1(L \otimes L') \cap \alpha = c_1(L) \cap \alpha + c_1(L') \cap \alpha$$

y

$$c_1(L^{\check{}}) \cap \alpha = -c_1(L) \cap \alpha$$

en $A_{k-1}X$.

Demostración. Todo haz lineal L sobre X determina a un pseudo-divisor con soporte X, y tomando en cuenta que $c_1(L) \cap \alpha = D_L \cdot \alpha$, 1. se sigue del corolario (3.3.8), 2. se sigue del corolario (3.3.9), y 3., 4., 5. se siguen respectivamente de 3., 4., 5. de la proposición (3.3.6) ♯

Nota 3.4.2. Por 1. de la proposición anterior, existe un morfismo

$$c_1(L) \cap \_ : A_k X \longrightarrow A_{k-1} X$$

para cada haz lineal L sobre X.

Definición 3.4.3. Sea L un haz lineal sobre un esquema X. Al morfismo $c_1(L) \cap \_$ le llamaremos el 1-*operador clase de chern* de L.

Observación 3.4.4. Si $L_1, \ldots L_n$ son haces lineales sobre X, $\alpha \in A_k X$ y $P(T_1, \ldots, T_n)$ es un polinomio homogéneo de grado d con coeficientes enteros, por 2. y 5. de la proposición anterior

$$P(c_1(L_1), \ldots, c_1(L_n)) \cap \alpha$$

es un elemento bien definido de $A_{k-d}X$. En particular, para un haz lineal L sobre X y $\alpha \in A_k X$, $c_1^d(L) \cap \alpha$ es un elemento de $A_{k-d}X$ definido inductivamente como

$$c_1(L)^d \cap \alpha = c_1(L) \cap (c_1(L)^{d-1} \cap \alpha)$$

3.5 Morfismo de Gysin para Divisores

Definición 3.5.1. Sea D un divisor de Cartier efectivo sobre un esquema X. Denotemos por $i : D \to X$ a la inmersión cerrada que da a D estructura de subesquema cerrado de X. Al morfismo

$$\begin{aligned} i^* : Z_k X &\longrightarrow A_D X \\ \alpha &\longmapsto D \cdot \alpha \end{aligned}$$

lo llamaremos el *morfismo de Gysin*.

Proposición 3.5.2. *Sean D un divisor de Cartier efectivo sobre un esquema X y L un haz lineal sobre X*

1. *Si α es un k-ciclo racionalmente equivalente a cero sobre X, entonces*

$$i^*(\alpha) = 0$$

en $A_{k-1}D$.

2. *Si α es un k-ciclo sobre X, entonces*

$$i_*i^*(\alpha) = c_1(\mathcal{O}(D)) \cap \alpha$$

3. *Si α es un k-ciclo sobre D, entonces*

$$i^*i_*(\alpha) = c_1(i^*\mathcal{O}(D)) \cap \alpha$$

4. *Si X es k-puro dimensional, entonces*

$$i^*[X] = [D]$$

en $A_{n-1}D$

5. *Si L es un haz lineal sobre X y α es un k-ciclo sobre X, entonces*

$$i^*(c_1(L) \cap \alpha) = c_1(i^*L) \cap i^*(\alpha)$$

en $A_{k-2}D$.

Demostración. 1. Por definicion $i^*(\alpha) = D \cdot \alpha$, siguiendo el resultado del corolario (3.3.8).

2. Por definición del operador primera clase de Chern, $c_1(\mathcal{O}(D)) \cap \alpha = D \cdot \alpha$ Por definición del morfismo de Gysin, $i^*(\alpha) = D \cdot \alpha$. La igualdad se sigue de que i es la inclusión, y por lo tanto tenemos de manera natural que $i_*(D \cdot \alpha)$ está representado por $D \cdot \alpha$

3. Siguiendo los argumentos del inciso anterior, al tener que $i_*(\alpha)$ está representado de manera natural por α, $i^*i_*(\alpha) = D \cdot \alpha$. Ahora, como i es la inclusión, el haz pull-back $i^*(\mathcal{O}(D))$ es canonicamente $\mathcal{O}(D)$, con lo que, $c_1(i^*\mathcal{O}(D)) \cap \alpha = D \cdot \alpha$

4. Por definición del morfismo de Gysin, tenemos que probar

$$D \cdot [X] = [D]$$

que es justo lo que dice el lema (3.2.20).

5. Por linealidad podemos suponer que $\alpha = V$, con V subvariedad de X. Consideremos a la clase de isomorfismo de L, la cual define un pseudo-divisor D' sobre X. Denotemos por D' al divisor de Cartier que representa al pseudo-divisor considerado. Por definición,

$$c_1(i^*L) \cap i^*[V] = c_1(i^*L) \cap D \cdot [V] = D' \cdot (D \cdot [V])$$

teniendo la última igualdad al ser de forma natural D' un representante de i^*L en $D \cdot [V]$. Calculando directamente la otra ecuación tenemos

$$i^*(c_1(L) \cap [V]) = i^*(D' \cdot [V]) = D \cdot (D' \cdot [V])$$

El resultado se sigue del corolario (3.3.9).

Nota 3.5.3. Por 1. de la proposición anterior, existe un morfismo

$$i^* : A_k X \longrightarrow A_{k-1} D$$

para cada divisor de Cartier efectivo D sobre X

Apéndice A

Topologia

A.1 Espacios Irreducibles

Definición A.1.1. Un espacio topológico X es *irreducible* si toda intersección finita de abiertos no vacíos de X es no vacía.

Que un espacio topológico X sea irreducible es equivalente a que X no se pueda expresar como unión de dos subconjuntos cerrados.

Definición A.1.2. Sea U un subconjunto abierto de un espacio toplógico X Decimos que U es *denso* en X si $\overline{U} = X$.

Proposición A.1.3. *Sea X un espacio topológico no vacío. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *X es irreducible*

2. *Cada subconjunto abierto no vacío de X es denso en X.*

3. *Cada subconjunto abierto de X es conexo.*

Proposición A.1.4. *Sea X un espacio topológico. Un conjunto E de X es irreducible si, y sólo si, $\overline{E}$ es irreducible.*

Proposición A.1.5. *Si X un espacio topológico irreducible, entonces todo abierto no vacío de X es irreducible.*

Proposición A.1.6. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo entre espacios topológicos. Entonces para cada subconjunto irreducible E de X, $f(E)$ es un subconjunto irreducible de Y.*

Definición A.1.7. Todo subconjunto maximal irreducible de un espacio topoógico X es llamado una *componente irreducible* de X.

Proposición A.1.8. *Sea X un espacio topológico Todo subconjunto irreducible de X está contenido en una componente irreducible de X, y X es la unión de sus componentes irreducibles*

Proposición A.1.9. *Sea U un subconjunto abierto de un espacio topológico X. El mapeo $V \to \overline{V}$ (cerradura en X) es una biyección entre el conjunto de subconjuntos irreducibles de U que son cerrados en U, y el conjunto de subconjuntos irreducibles de X que son cerrados en X e intersectan a U; la biyección inversa es el mapeo $Z \to Z \cap U$. En particular, esta biyección mapea el conjunto de componentes irreducibles de U sobre el conjunto de componentes irreducibles de X quwe intersectan a U*

A.2 Espacios Noetherianos

Definición A.2.1. Un espacio topológico X es *noetheriano* si todo conjunto no vacío de subconjuntos cerrados de X, ordenados por inclusión, satisfacen la condición de cadenas descendentes.

Proposición A.2.2.

1. *Cada subespacio de un espacio noetheriano es noetheriano.*
2. *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta finita de un espacio topológico X. Si los subespacios U_i de X son noetherianos, entonces X es noetheriano.*

Proposición A.2.3. *Un espacio topológico X es noetheriano si, y sólo si, todo subconjunto abierto en X es compacto.*

Proposición A.2.4. *En un espacio topológico noetheriano X, todo cerrado Y puede ser escrito como unión finita de cerrados irreducibles Y_i. Si requerimos que $Y_i \nsubseteq Y_j$, para todo $i \neq j$, entonces los Y_i son únicos, y son precisamente los componentes irreducibles de Y.*

Apéndice B

Algebra

En este apéndice enunciamos una serie de resultados de algebra que se utilizan en la tesis Las referencias para encontrar las pruebas son: Bourbaki [1], Fulton [5] y Matsumura [9]

B.1 Altura y Coaltura

Sea A un anillo. Consideremos todas las cadenas de ideales primos de A de la forma

$$\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_r$$

Al supremo de todas las longitudes r le diremos la *dimensión (de Krull)* del anillo, y la denotaremos por $dim(A)$.

Para un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, al supremo de las longitudes, tomando todas las cadenas estrictamente decrecientes de ideales primos

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_r$$

comenzando con $\mathfrak{p}$, le diremos la *altura* de $\mathfrak{p}$, y la denotaremos por $ht(\mathfrak{p})$

Si el anillo es noetheriano, la altura de cualquier ideal primo es finita.

Si ahora consideramos al supremo de todas las cadenas estrictamente crecientes de ideales primos

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$$

comenzando con $\mathfrak{p}$, le llamaremos la *coaltura* de $\mathfrak{p}$, denotándola como $coht(\mathfrak{p})$

De las definiciones es inmediato que

$$ht(\mathfrak{p}) = dim(A_{\mathfrak{p}})$$
$$coht(\mathfrak{p}) = dim(A/\mathfrak{p})$$

Proposición B.1.1. *Un dominio entero noetheriano es un dominio de factorización única si, y sólo si, todo ideal primo de altura uno es principal.*

B.2 Longitud

Sean A un anillo y M un A-módulo. Una cadena

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$$

de submódulos de M es llamada una *serie de composición* de M si cada M_i/M_{i+1} es *simlpe*, es decir, sus únicos A-submódulos son él mismo y el cero. Este r es independiente de la serie de composición tomada, llamando r la *longitud* de M, y denotándolo como

$$l_A(M)$$

Si M no tiene serie de composición, $l_A(M) = \infty$.

Lema B.2.1. *Si $0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_k \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos de longitud finita, entonces*

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i l_A(M_i) = 0$$

Lema B.2.2. *Sea M un A-módulo de longitud finita. Entonces*

$$l_A(M) = \sum_{p} l_{A_p}(M_p)$$

donde la suma corre sobre todos los ideales primos de A.

Lema B.2.3. *Sean $A \to B$ un morfismo local entre anillos locales, d el grado de extensión de los campos residuales. Un B-módulo M no cero tiene longitud finita sobre A si, y sólo si, $d < \infty$ y M tiene longitud finita sobre B, teniendo*

$$l_A(M) = d \cdot l_B(M)$$

De manera particular, si A es un anillo local con un subanillo k que se mapea isomorficamente en el campo de residuos de A, entonces

$$l_A(M) = l_k(M) = dim_k(M)$$

para cualquier A-módulo M

Sea $f : M \to M$ un morfismo A-lineal de un A-módulo finitamente generado Consideremos

$$M_f = Coker\ f$$
$$_fM = Kernel\ f$$

Si M_f y $_fM$ tienen longitud finita, definimos

$$e_A(f, M) = l_A(M_f) - l_A(_fM)$$

Si f es multiplicar por un elemento a no divisor de cero de A, $e_A(f, M) = l_A(M/aM)$.

Lema B.2.4. *Si $e_A(f, M)$ está definido, entonces*

$$e_A(f, M) = \sum_p e_{A_p}(f_p, M_p)$$

donde la suma corre sobre todos los ideales primos de A

Lema B.2.5. *Sean $A \to B$ un morfismo local entre anillos locales, d el grado de extensión de los campos residuales. Sea $f : M \to M$ un endomorfismo A-lineal de un B-módulo M. Si $d < \infty$, entonces $e_A(f, M)$ está definido si, y sólo si, $e_B(f, M)$ está definido, teniendo*

$$e_A(f, M) = d \cdot e_B(f, M)$$

Lema B.2.6. *Sean A un dominio de dimensión uno con campo cociente K, $f : M \to M$ un endomorfismo de un A-módulo finitamente generado y f_K el endomorfismo inducido de $M_K = M \otimes_A K$. Si $det(f_k) \neq 0$, entonces*

$$e_A(f, M) = l_A(A/det(f_K)A)$$

Lema B.2.7. *Sean A un anillo local de dimensión uno, $p_1, \ldots, p_t$ los ideales primos minimales de A, M un A-módulo finitamente generado y a un elemento de A que no pertenece a ningún p_i. Entonces*

$$e_A(a, M) = \sum_{i=1}^{t} l_{A_{p_i}}(M_{p_i}) \cdot e_A(a, A/p_i) = \sum_{i=1}^{t} l_{A_{p_i}}(M_{p_i}) \cdot (l_A(A/p_i) - l_A(A/p_i + aA))$$

Lema B.2.8. *Sea $A \to B$ un morfismo local plano entre anilos locales. Entonces el mosfismo inducido entre espectros $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es suprayectivo. Si A y B son artineanos, entonces*

$$l_B(B) = l_A(A) \cdot l_B(B/mB)$$

donde m es el ideal máximo de A

Apéndice C

Prueba de la Proposición (2.2.2)

Proposición C.0.9. *Sea $\varphi : X \to Y$ un epimorfismo propio entre variedades, y sea r una función racional no cero sobre X.*

1. *Si $dim(Y) = dim(X)$, entonces $\varphi_*[div(r)] = [div(N(r))]$.*

2. *Si $dim(Y) < dim(X)$, entonces $\varphi_*[div(r)] = 0$.*

Para demostrar esta proposición haremos uso de dos resultados preliminares, que son casos particulares de la proposición.

Lema C.0.10. *Sea K un campo, $X = \mathbb{P}^1_K$, $Y = Spec\,K$, y $r \in R(X)^*$. Si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo entre variedades (el cual es suprayectivo y propio), entonces $\varphi_*[div(r)] = 0$.*

Demostración. Por el ejemplo (1 4 4) sabemos que $R(X) = K(t)$, donde $t = \frac{x_1}{x_0}$, por lo que toda función racional no cero sobre X es un cociente de polinomios. Por pasos seguidos anteriormente, al ser ord un morfismo, podemos suponer que r es un polinomio en $K[t]$, por lo que se puede expresar como producto de polinomios irreducibles. Usando nuevamente que ord es un morfismo, podemos suopner que r es un polinomio irreducible de grado d en $K[t]$.

Sea $P_\infty \in \mathbb{P}^1_K$ su punto al infinito, es decir, $P_\infty = (0 : 1)$. Sabemos que r se anula en todos los puntos de $\mathbb{P}^1_K \setminus V(P_\infty)$ que no están en $V(\langle r \rangle)$, siendo el punto al infinito, el punto definido por el ideal cero de $K[t]$ y el punto definido por $\langle r \rangle$, los únicos posibles puntos donde r no se anule.

Al ser r irreducible, $\langle r \rangle$ es un ideal maximal de $K[t]$, y por lo tanto

$$ord_{\langle r \rangle}(r) = l_{K[t]}\left(K[t]/\langle r \rangle\right) = 1$$

En el punto dado por el ideal cero, r se anula al ser unidad en $K[t]_{(0)}$. Ahora, al ser P_∞ una subvariedad de codimensión uno de $\mathbb{P}^1_K$, su anillo local $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,P_\infty}$ es un anillo de valuación discreta. Así, su ideal maximal está generado por el elemento, $s = \frac{1}{t}$. Al tener que r es un polinomio de grado d, $r = us^d$, es decir, $r = u\frac{1}{t^d}$, con u unidad. Por lo tanto,

$$ord_{P_\infty}(r) = -d$$

Con lo anterior tenemos que $[div(r)] = [\langle r\rangle] - d[P_\infty]$, y por lo tanto

$$\varphi_*[div(r)] = [R(\langle r\rangle) : K][Y] + [R(P_\infty) : K](-d)[Y]$$

Al tener que $R(\langle r\rangle) = K[t]/\langle r\rangle$ y $R(P_\infty) = K$, llegamos a la igualdad deseada

$$\varphi_*[div(r)] = d[Y] - d[Y] = 0.$$

♯

Lema C.0.11. *Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo suprayectivo finito entre variedades, y sea $r \in R(X)^*$. Entonces*

$$\varphi_*[div(r)] = [div(N(r))]$$

Demostración. Observemos que al ser φ finito, $dim(X) = dim(Y)$. Sea W una subvariedad de codimensión uno de Y tal que $ord_W(N(r)) \neq 0$. Sean $\{V_i\}$ las subvariedades de X cuya imagen bajo φ es W. Por la definición del push-out propio de ciclos y linealidad, será suficiente probar que

$$\sum_i ord_{V_i}(r) \cdot [R(V_i) : R(W)] = ord_W(N(r)) \tag{C.1}$$

Sea U un abierto afín de Y que intersecte a W. Al ser φ finito, $\varphi^{-1}(U)$ es un abierto afín de X que intersecta a todos los V_i, y tal que el morfismo entre anillos

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

da a $\Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ estructura de $\Gamma(U\mathcal{O}_Y)$-módulo finitamente generado. Así, podemos suponer que $X = Spec\,R$, $Y = Spec\,S$ son espectros de anillos, y $\varphi = {}^a f$, con $f : S \to R$.

El anillo $\mathcal{O}_{Y,W}$ es la localización de S en el ideal primo $\mathfrak{p}$ que define a W. Consideremos al S-módulo

$$B = R \otimes_S S_\mathfrak{p} = R_{\mathfrak{p}R}$$

Siendo B un dominio finito sobre $S_{\mathfrak{p}}$. Al tener que $R \setminus \mathfrak{p}R \subset R \setminus \{0\}$, por propiedades de localización, $R_{\mathfrak{p}R}$ tiene a $R(X)$ como su campo cociente Por construcción, los ideales primos $\mathfrak{p}_i$ que definen a los V_i en R, corresponden a los ideales maximales $\mathfrak{m}_i$ en B tales que $B_{\mathfrak{m}_i} \cong R_{\mathfrak{p}_i}$.

Al tener que r pertenece al campo cociente de B, por argumentos ya seguidos, al ser $N(\_)$ y *ord* morfismos, podemos suponer que $r \in B$. Observemos que

$$B \otimes_{S_{\mathfrak{p}}} R(Y) = R \otimes_S S_{\mathfrak{p}} \otimes_{S_{\mathfrak{p}}} S_{(0)} \cong R \otimes_S S_{(0)} \cong R(X)$$

Sean ψ el endomorfismo de B dado al multiplicar por r, y ψ_K el endomorfismo inducido por ψ sobre $R(X)$, teniendo por definición que $N(r) = det(\psi_K)$.

Al ser B un $S_{\mathfrak{p}}$-módulo finitamente generado, B es un $S_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}}$-espacio vectorial. El lema (B.2.5) nos dice que $l_A(B) = dim(B)$ como $S_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}}$-espacio vectorial. Al tener que $r \in B$, de forma natural $r \in B_{\mathfrak{m}_i}$ para toda i. Al ser $B_{\mathfrak{m}_i}$ un anillo regular, existe π_i generador del ideal máximo en $B_{\mathfrak{m}_i}$, con lo que $r = u\pi_i^{d_i}$, con u unidad Por lo tanto, $d_i = ord_{\mathfrak{m}_i}(r)$ Si ψ_i es el conúcleo de morfismo

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{m}_i} &\longrightarrow B_{\mathfrak{m}_i} \\ s &\longrightarrow s \cdot r \end{aligned}$$

$Coker\, \psi_i = B_{\mathfrak{m}_i}/\bar{\mathfrak{m}}_i^{d_i}$ Por el lema (B 2.5),

$$l_{B_{\mathfrak{m}_i}}(Coker\ \psi_i) = dim(Coker\ \psi_i)$$

que es justamente d_i. Al tener que $R(V_i) \cong B_{\mathfrak{m}_i}$, por el lema (B.2.6) tenemos la igualda deseada. ♯

Demostración de la Proposición 2.2.2 1 Al tener que $dim(X) = dim(Y)$, por la proposición (1.4 13) existe un abierto no vacío U de X tal que $\varphi(U)$ es un abierto de Y y $\varphi|_U$ es finito. Por 2. de la proposición (1 4.2) podemos suponer que $r \in R(U)^*$, estando en el caso del lema anterior

2. Sea $[div(r)] = \sum n_i[V_i]$, donde los V_i son subvariedades de codimensión uno de X. Si para toda i, $dim(V_i) > dim(\varphi(V_i))$, por definición del push-out propio

$$\varphi_*[div(r)] = 0$$

Si para alguna i, $dim(V_i) = dim(\varphi(V_i))$, por linealidad nos bastará fijar una subvariedad W de Y tal que $W = \varphi(V_i)$ y $dim(V_i) = dim(W)$, para algunas i. Por argumentos ya seguidos, podemos suponer que $Y = W$, lo que nos diría que $dim(X) = dim(Y) + 1$, y que la igualdad a probar es

$$\sum_{i=1}^{t} ord_{V_i}(r) \cdot [R(V_i) : R(Y)] = 0$$

con la suma corriendo sobre todas las subvariedades de codimensión uno de X tales que $ord_{V_i}(r) \neq 0$ y $dim(V_i) = dim(Y)$. Como estas subvariedades V_i son las únicas que su imagen contiene al punto genérico de Y, podemos sustituir a X por $X \times_Y Spec\, R(Y)$, y a Y por $Spec\, R(Y)$, al tener que $Spec\, R(Y)$ es el punto genérico de Y. Por la 3 de la proposición (1.2.83), la proyección $X \times_Y Spec\, R(Y) \to Spec\, R(Y)$ es propio.

Al tener que $X \times_Y Spec\, R(Y)$ es la fibra de φ del punto genérico de Y, y tener que $dim(X) = dim(Y) + 1$, la dimensión de $X \times_Y Spec\, R(Y)$ es uno, siendo una curva sobre $Spec\, R(Y)$. Poedemos suponer que X es irreducible, ya que trabajaremos con sus componentes irreducibles. Si $\tilde{\theta} : \tilde{X} \to X$ la normalización de X, siguiendo los argumentos dados en la parte final de la sección §2.2.1, existe un morfismo racional $\psi : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1_K$.

Como $\psi(\tilde{X})$ no puede ser un sólo punto, $\psi(\tilde{X})$ es todo $\mathbb{P}^1_K$, al tener que todo morfismo entre variedades es separado y que $\mathbb{P}^1_K$ es completo, por 4. de la proposición (1.2.83), ψ es propio, y por lo tanto finito. Sea $p : \mathbb{P}^1_K \to Y$ el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tilde{\theta}"'] & \mathbb{P}^1_K \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Notemos que p existe al ser Y el espectro de un campo. Al tener que $R(X) \cong R(\tilde{X})$, isomorfismo inducido por $\tilde{\theta}$, si $\tilde{r}$ es la imagen de r bajo el isomorfismo, al ser $\tilde{\theta}$ finito, podemos aplicarle el lema anterior, resultando de funtorialidad

$$\varphi_*[div(r)] = \varphi_*\tilde{\theta}_*[div(\tilde{r})] = p_*\psi_*[div(\tilde{r})]$$

Aplicando el lema anterior a ψ, $\psi_*[div(\tilde{r})] = [N(\tilde{r})]$, siendo $[N(\tilde{r})]$, un k-ciclo racionalmente equivalente a cero. Aplicando ahora el lema (C.0.10) a p_*, tenemos que $p_*[N(\tilde{r})] = 0$, que da el resultado deseado.

♯

Apéndice D

Prueba del Teorema (2.2.10)

Teorema D.0.12. Sean K un campo, S su espectro, $\varphi : X \to Y$ un morfismo plano entre S-esquemas de dimensión relativa n, y α un k-ciclo sobre Y racionalmente equivalente a cero. Entonces $\varphi^*\alpha$ es racionalmente equivalente a cero en $Z_{k+n}X$.

Por lo tanto, induce un morfismo entre grupos abelianos

$$\varphi^* : A_k Y \longrightarrow A_{k+n} X$$

Demostración. Por linealidad y la proposición (2 2.7) podemos suponer que

$$\alpha = [V(P_0)] - [V(P_\infty)]$$

con V una subvariedad de $Y \times_S \mathbb{P}^1_K$ y la proyección $g : V \to \mathbb{P}^1_K$ es dominante, y por lo tanto plano. Consideremos al producto fibrado de $Y \times_S \mathbb{P}^1_K$ y X sobre Y

$$X \times_Y Y \times_S \mathbb{P}^1_K \cong X \times_S \mathbb{P}^1_K$$

con lo que obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times_S \mathbb{P}^1_K \arrow[r, "(\varphi, Id)"] \arrow[d, "p"'] & Y \times_S \mathbb{P}^1_K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{P}^1_K \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Sean $W = (\varphi, Id)^{-1}(V)$ y $h := (g \circ (\varphi, Id))_{|W} : W \to \mathbb{P}^1_K$, entonces

$$\alpha = [V(P_0)] - [V(P_\infty)] = q_*([g^{-1}(P_0)] - [g^{-1}(P_\infty)])$$

Por la proposición (2 2 9)

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\alpha) &= \varphi^* q_*([g^{-1}(P_0)] - [g^{-1}(P_\infty)]) \\
&= p_*(\varphi, Id)^*([g^{-1}(P_0)] - [g^{-1}(P_\infty)]) \\
&= p_*((\varphi, Id)^*[g^{-1}(P_0)] - (\varphi, Id)^*[g^{-1}(P_\infty)])
\end{aligned}$$

Por el lema (2.2.8)

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\alpha) &= p_*((\varphi, Id)^*[g^{-1}(P_0)] - (\varphi, Id)^*[g^{-1}(P_\infty)]) \\
&= p_*([(\varphi, Id)^{-1} \circ g^{-1}(P_0)] - [(\varphi, Id)^{-1} \circ g^{-1}(P_\infty)]) \\
&= p_*([h^{-1}(P_0)] - [h^{-1}(P_\infty)])
\end{aligned}$$

Por el teorema (2.2 3) bastará probar que $[h^{-1}(P_0)] - [h^{-1}(P_\infty)]$ es racionalmente equivalente a cero.

Sean $W_1, \ldots, W_t$ las componentes irreducibles de W, $h_i = h_{|W_i}$ y $[W] = \sum_{i=1}^t m_i[W_i]$, donde m_i es la multiplicidad geometrica de W_i. Por lo visto en la parte final de la sección §2.2.1

$$[h_i^{-1}(P_0)] - [h_i^{-1}(P_\infty)] = [div(h_i)]$$

Por el lema (3.2.20)

$$\begin{aligned}
[h_i^{-1}(P_0)] &= \sum_{i=1}^t m_i[h_i^{-1}(P_0)] \\
[h_i^{-1}(P_\infty)] &= \sum_{i=1}^t m_i[h_i^{-1}(P_\infty)]
\end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned}
[h^{-1}(P_0)] - [h^{-1}(P_\infty)] &= \sum_{i=1}^t m_i[h_i^{-1}(P_0)] - \sum_{i=1}^t m_i[h_i^{-1}(P_\infty)] \\
&= \sum_{i=1}^t m_i \left([h_i^{-1}(P_\infty)] - [h_i^{-1}(P_\infty)]\right) \\
&= \sum_{i=1}^t m_i[div(h_i)]
\end{aligned}$$

el cual es racionalmente equivalente a cero

Bibliografía

[1] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics, Commutative Algebra* Addison-Wesley, 1972.

[2] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics, Algebra.* Addison-Wesley, 1973.

[3] W. Fulton. *Algebraic Curves.* W.A. Benjamin, 1969

[4] W. Fulton A note on residual intersections and the double point formula. *Acta. Math.*, (140):93–101, 1978

[5] W. Fulton. *Intersection Theory.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2nd edition, 1998.

[6] W. Fulton. *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry.* American Mathematical Society, 2nd edition, 1996.

[7] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics* Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] S. Itaka. *Algebraic Geometry* Springer-Verlag, 1982

[9] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory* Cambridge University Press, 1990.

[10] D. Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes* Number 1358 in Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988

[11] I. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry, Schemes and Complex Manifolds.* Springer-Verlag, 1994 Second Edition.

[12] B.R. Tennison. *Sheaf Theory* Cambridge University Press, 1975.

[13] R.O. Wells. *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Springer-Verlag, 1980

[14] A. Grothendick y J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique, Le langage des schémas*, volume 4 of *Publ. Math.* IHES, 1960.

[15] A. Grothendick y J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique, Étude locale élémentaire de quelques classes de morphismes*, volume 17 of *Publ. Math.* IHES, 1963.

[16] A. Grothendick y J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, volume 20,24,28,32 of *Publ. Math.* IHES, 1964,1965,1966,1967