



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Exponentes de Liapunov no nulos. Billares
Caóticos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

José Juan Hernández Aguilar

Director de Tesis:

Dr. Santiago López de Medrano Sánchez



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Exponentes de Liapunov no nulos. Billares Caóticos

realizado por **JOSE JUAN HERNANDEZ ACUILAR**

con número de cuenta **8603833-9**, pasante de la carrera de **Matemáticas**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Santiago López de Medrano Sánchez

Propietario

Dr. Roberto Markarian Abrahamian

Propietario

M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz

Suplente

M. en C. José Luis Lugo Goytia

Suplente

Act. Javier Fernández García.

Consejo Departamental de



FACULTAD DE CIENCIAS

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

MATEMÁTICAS

Quiero agradecer especialmente al Dr. Roberto Markarfan Abramian, por la celeridad para revisar el trabajo pese a sus múltiples ocupaciones. Al Dr. Santiago López de Medrano por su disposición y tiempo que le dedicó al mismo. A Guillermo Gómez por su paciencia e interés en mi titulación. A los Profesores José Luis Lugo y Javier Fernández por la revisión del trabajo.

A Héctor por su ayuda en las dudas sobre Scientific y en general sobre cualquier problema relacionado con la terminación de la tesis. A Rocío por la revisión de la ortografía.

A Maribel y Adrián.

**A mis padres que son la motivación principal para mi titulación.
A mis hermanos que siempre me apoyaron en todo.**

**Exponentes de Liapunov no nulos. Billares
caóticos.**

José Juan Hernández Aguiar.

10 de Julio de 2002

Índice General

1	Nociones Preliminares	4
1.1	Teoría de la Medida.	4
1.2	Espacios $L^p(\mu)$	6
1.3	Teoremas de Convergencia y Teorema de Recurrencia de Poincaré.	6
1.4	Existencia de Medidas Invariantes.	9
2	Ergodicidad.	17
2.1	Teorema ergódico de Birkhoff.	17
2.2	Ergodicidad.	25
2.3	Ejemplos de transformaciones ergódicas	28
2.4	Transformaciones Mezcladoras.	29
2.5	Entropía.	32
2.6	Exponentes de Liapunov. Teoría de Pesin.	34
2.6.1	Exponentes de Liapunov.	34
2.6.2	Teoría de Pesin.	38
2.6.3	Caos y Orden.	40
3	Billares.	42
3.1	Billares Planos.	42
3.2	Medida invariante y función generadora para billares planos. Formulación variacional.	50
3.3	Billares convexos.	51
3.3.1	Geometría elemental.	51
3.3.2	Tres aplicaciones geométricas.	55
3.3.3	Trayectorias periódicas.	58
3.4	Billares Hiperbólicos	61

Introducción.

Supongamos que una masa puntual se mueve sin fricción en una región acotada de \mathbb{R}^d . La partícula choca elásticamente con los bordes o cuando se encuentra algunos obstáculos. En dos dimensiones estas colisiones se describen por una bien conocida ley de óptica geométrica: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Así la teoría de billares y la teoría de óptica geométrica tienen muchas características en común.

El movimiento es muy complicado y las trayectorias no varían con continuidad (si ellas son tangentes a uno de los bordes) o no están definidas para todo tiempo (si ellas encuentran un vértice de la mesa de billar). Ahí el comportamiento puede ser más inesperado; por ejemplo trayectorias que tienen un número infinito de rebotes en un tiempo finito o trayectorias que se acercan tanto como se quiera al borde de un billar convexo en un tiempo infinito. Aún más, podemos construir billares con bordes razonablemente regulares (C^1 , por ejemplo) que no verifican buenas propiedades globales para casi todas sus trayectorias.

Para evitar el último caso debemos añadir una fuerte condición de regularidad en los arcos del borde, y si no queremos tomar en cuenta trayectorias anormales debemos usar teoría de la medida y así entrar en el campo de la teoría ergódica.

Hay motivaciones muy diferentes para estudiar billares y sus aplicaciones, ya que están en un proceso acelerado de expansión. Las razones más significativas para buscar el primer resultado en billares son:

- a) Estudio del movimiento periódico en billares convexos, como aplicaciones de la geometría teorema de Poincaré.
- b) Estudio de las propiedades ergódicas del modelo de gases de Boltzmann-Gibbs [17].

En esta tesis se presentan resultados conocidos de propiedades ergódicas de billares planos no poligonales. Los resultados en billares poligonales (todos los arcos del borde son segmentos de línea) son menos explícitos: está probado que en el conjunto de polígonos convexos con n lados (considera-

dos como un conjunto de \mathbb{R}^{2n}) hay un subconjunto denso, intersección de un número numerable de conjuntos abiertos, tal que su transformación de billar es ergódica; pero no se conoce la descripción de cualquier billar poligonal ergódico. Billares de más dimensiones fueron estudiados solo en el caso de billares semidispersores cuya geometría esta basada en el modelo de gases de bolas duras. La prueba final de la ergodicidad de tal modelo no ha sido obtenida todavía, pero hay resultados parciales muy importantes.

Todo lo anterior se presenta en este trabajo en el capítulo 3, el capítulo 1 contiene definiciones básicas así como teoremas importantes relacionados con Teoría de la medida, Teoremas de Convergencia, Teorema de Recurrencia de Poincaré, etc. y el capítulo 2 esta dedicado a diversos fundamentos de la Teoría Ergódica, demostración del Teorema ergódico de Birkhoff, así como ejemplos de transformaciones ergódicas, transformaciones mezclantes, etc.

Capítulo 1

Nociones Preliminares

En este capítulo introduciremos nociones básicas de Teoría de la medida, que serán de utilidad para los siguientes capítulos (Lema de Fatou, Teorema de la Convergencia Dominada, Teorema de Recurrencia de Poincaré, etc.). Las demostraciones pueden ser consultadas en: [22] y [29].

1.1 Teoría de la Medida.

Definición 1.1 Si X es cualquier espacio, \mathcal{A} es un álgebra de conjuntos de X si:

- i) $X \in \mathcal{A}$;
- ii) $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cup B \in \mathcal{A}$;
- iii) $A \in \mathcal{A}$ implica A^c (relativo a X) $\in \mathcal{A}$;

Si además $A_i \in \mathcal{A}$ $i = 1, 2, \dots$; implica $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, entonces decimos que \mathcal{A} es una σ -álgebra.

Proposición 1.2 Dada una colección C de subconjuntos de X , existe una σ -álgebra \mathcal{A} la cual contiene a C y tal que si \mathcal{B} es cualquier σ -álgebra que contiene a C , entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. \mathcal{A} es llamada la σ -álgebra generada por C .

Definición 1.3 Si \mathcal{A} es un álgebra de subconjuntos de X , decimos que una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ es una medida sobre \mathcal{A} si $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(\cup_i A_i) = \sum \mu(A_i)$ para cualquier familia de conjuntos disjuntos $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$

Si $\mu(X) < \infty$ se dice que la medida es finita y podemos definir una nueva medida dada por: $\nu(A) = \mu(A) / \mu(X)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Si $\mu(X) = 1$ se dice que μ es una medida de probabilidad o simplemente una probabilidad.

Si X es un espacio topológico, llamamos, σ -álgebra de Borel de X , a la σ -álgebra generada por la familia de subconjuntos abiertos de X . A esta σ -álgebra la denotaremos por $\mathcal{B}(X)$ y a los elementos de $\mathcal{B}(X)$ los llamaremos Borelianos.

Definición 1.4 Sean \mathcal{A} una σ -álgebra de conjuntos de X y μ una medida en \mathcal{A} tal que $\mu(X) = 1$, entonces se dice que (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de probabilidad.

Teorema 1.5 (de Extensión de Hahn-Kolmogorov) Sea \mathcal{A}_0 un álgebra de conjuntos de X y ν una medida de probabilidad. Entonces existe una única medida μ definida sobre la σ -álgebra \mathcal{A} generada por \mathcal{A}_0 tal que $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}_0$ (μ es una extensión de ν : $\mu|_{\mathcal{A}_0} = \nu$).

Definición 1.6 a) Dos conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ son equivalentes (mod 0) si su diferencia simétrica $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$ es un conjunto de medida cero.

b) Si \mathcal{S} es una familia de subconjuntos de X decimos que $A \in \mathcal{S}$ (mod 0) si existe $A_1 \in \mathcal{S}$ equivalente (mod 0) a A .

c) Decimos que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ (mod 0) si para cualquier $A_1 \in \mathcal{S}_1$ y $A_2 \in \mathcal{S}_2$ tenemos $A_1 \in \mathcal{S}_2$ (mod 0) y $A_2 \in \mathcal{S}_1$ (mod 0).

d) Finalmente, \mathcal{S} (mod 0)-genera \mathcal{O} si $\mathcal{O} = \bar{\mathcal{S}}$ (mod 0) donde $\bar{\mathcal{S}}$ es la σ -álgebra generada por \mathcal{S}

Definición 1.7 Sean X, Y dos conjuntos y sean \mathcal{A} y \mathcal{B} σ -álgebras de subconjuntos de X y Y respectivamente. $f : X \rightarrow Y$ es medible con respecto a \mathcal{A} y \mathcal{B} si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Teorema 1.8 (Lusin) Sean X y Y espacios métricos separables, \mathcal{B} los borelianos de X y (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $A \in \mathcal{B}$ existe $K \subset A$, compacto, tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Si $f : X \rightarrow Y$ es medible (respecto de los borelianos de ambos espacios) $\exists K_1$ compacto, tal que $\mu(K_1) > 1 - \varepsilon$ y f restringida a K_1 es continua.

Definición 1.9 Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $T : X \rightarrow X$. Decimos que T preserva μ o que μ es T -invariante si para todo $A \in \mathcal{A}$, $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

Recordemos que una propiedad se dice que se cumple en casi todo punto (c.t.p.) si el conjunto de puntos donde falla la propiedad es de medida cero.

Definición 1.10 Decimos que dos transformaciones T_i ; $i = 1, 2$ de espacios de medida $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $i = 1, 2$, respectivamente, son equivalentes, si existe F que preserva medida de $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ en $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ que satisfice:

a) F es invertible, i.e.

$$\exists G : (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) \longrightarrow (X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$$

tal que $G \circ F(x) = x$ c.t.p. $x \in X_1$ y $F \circ G(x) = x$ c.t.p. $x \in X_2$

Definición 1.11 b) $T_2 \circ F = F \circ T_1$ c.t.p.

Observación 1.12 a) $\Rightarrow G$ preserva medida de

$$(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) \text{ sobre } (X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$$

y

$$b) \Rightarrow G \circ T_2 = T_1 \circ G \text{ c.t.p.}$$

1.2 Espacios $L^p(\mu)$.

Sea $p \geq 1$, denotamos por $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ o simplemente $L^p(\mu)$ al conjunto de todas las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles tales que $\int |f|^p d\mu < \infty$, identificando las funciones que coinciden salvo en un conjunto de medida 0. En $L^p(\mu)$ definimos la norma $\|\cdot\|_p$ de f como:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

También definimos $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ o $L^\infty(\mu)$ al conjunto de funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tales que existe $K > 0$ tal que $|f(x)| < K$ para casi todo punto $x \in X$, identificando las funciones que coinciden salvo en un conjunto de medida 0. Al ínfimo de tales K le llamamos la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$.

1.3 Teoremas de Convergencia y Teorema de Recurrencia de Poincaré.

Recordemos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es simple si se puede escribir de la forma $f = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{A_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, N$. Decimos que una función

simple es integrable si $\sum_{i=1}^N \lambda_i \mu(A_i) < +\infty$ en este caso definimos la integral de f como:

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mu(A_i).$$

Se puede probar que este número es independiente de la forma de expresar f como una combinación lineal de funciones características.

Teorema 1.13 (Lema de Fatou): Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables positivas tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \int_X f_n d\mu < +\infty$ y convergente c.t.p. a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es integrable y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$.

Teorema 1.14 (Teorema de la Convergencia Monótona): Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables tales que para casi toda x la sucesión $\{f_n(x)\}$ es monótonamente creciente y $\sup_n \int_X f_n d\mu < \infty$. Entonces la función $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ es integrable y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Teorema 1.15 (Teorema de la Convergencia Dominada): Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables dominada por una función integrable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, i. e. $|f_n(x)| \leq f(x)$ para toda n y c.t.p. x . Entonces si la sucesión $f_n(x)$, $n \geq 1$ converge para casi toda x , la función límite $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ satisface $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$.

Lema 1.16 Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. μ es una medida T -invariante.
2. $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$ para cualquier $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Demostración

2) \Rightarrow 1) Sea $B \in \mathcal{A}$ y tomemos $f = \chi_B$ la función característica de B , entonces

$$\mu(B) = \int \chi_B d\mu = \int \chi_B \circ T d\mu = \mu(T^{-1}(B)),$$

es decir μ es una medida T -invariante.

1) \Rightarrow 2) Si μ es T -invariante entonces

$$\int \chi_B \circ T d\mu = \int \chi_B d\mu,$$

para todo boreliano $B \in \mathcal{A}$. Puesto que cualquier función $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ se puede aproximar mediante sumas finitas de funciones características obtenemos el resultado. ■

Definición 1.17 Si μ y ν son dos medidas de probabilidad en (X, \mathcal{A}) , decimos que μ es absolutamente continua con respecto a ν y lo denotamos $\mu \ll \nu$ si $A \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(A) = 0$ implica que $\mu(A) = 0$. Decimos que las dos medidas son equivalentes si $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$.

Teorema 1.18 (Radon-Nikodym): Sean ν y μ dos medidas de probabilidad en (X, \mathcal{A}) . Entonces $\nu \ll \mu$ si y sólo si existe $f \in L^1(\mu)$ tal que $f \geq 0$, $\int_X f d\mu = 1$ y tal que $\nu(B) = \int_B f d\mu$ para todo $B \in \mathcal{A}$. Esta función es única, cualquier otra función que lo cumpla difiere de ésta sólo en un conjunto de medida cero.

A esta función la llamaremos la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ y la denotamos por: $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Teorema 1.19 (Teorema de Recurrencia de Poincaré): Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $T: X \rightarrow X$ que preserva la medida μ . Para cualquier conjunto medible $B \in \mathcal{A}$ el conjunto

$B_0 = \{b \in B : \{n \in \mathbb{N} : T^n(b) \in B\} \text{ es infinito}\}$ pertenece a \mathcal{A} y $\mu(B_0) = \mu(B)$.

Demostración

Sea

$$C_n = \{b \in B : T^k(b) \notin B \text{ para todo } k \geq n\}.$$

Es claro que $B_0 = B \setminus \bigcup_n C_n$. Por lo tanto el teorema estará demostrado si probamos que $C_n \in \mathcal{A}$ y que $\mu(C_n) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Para todo n observemos que

$$C_n = B \setminus \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(B)$$

Lo que prueba que $C_n \in \mathcal{A}$ y como

$$C_n = B \setminus \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(B) \subset \bigcup_{k \geq 0} T^{-k}(B) \setminus \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(B)$$

resulta

$$\mu(C_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq 0} T^{-k}(B)\right) - \mu\left(\bigcup_{k \geq n} T^{-k}(B)\right)$$

Más aún

$$\bigcup_{k \geq n} T^{-k}(B) = T^{-n}\left(\bigcup_{k \geq 0} T^{-k}(B)\right)$$

de modo que

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq n} T^{-k}(B)\right) = \mu\left(T^{-n}\left(\bigcup_{k \geq 0} T^{-k}(B)\right)\right)$$

lo que implica $\mu(C_n) = 0$. ■

1.4 Existencia de Medidas Invariantes.

En esta sección empezaremos por demostrar la existencia de medidas invariantes. Sea X un espacio métrico completo, cabe señalar que se hará uso de la estructura topológica del espacio, dicha demostración incluirá la demostración de que $M(X)$ es un espacio métrico completo.

Donde $M(X) = \{\mu \in (X, \mathcal{A}) : \mu \text{ es una probabilidad}\}$.

Dada una función continua denotamos $M_T(X)$ a el conjunto de probabilidades T -invariantes (T es una transformación continua en espacios métricos completos).

Proposición 1.20 $M_T(X)$ es no vacío.

Antes de probar la proposición introduciremos una topología en $M(X)$ y probaremos algunos lemas simples pero importantes

Sea la topología en $M(X)$, definida por la siguiente base de vecindades:

$$V_{\varepsilon, \Phi}(\mu) = \{\nu \in M(X) : \left| \int_X \Phi d\nu - \int_X \Phi d\mu \right| \leq \varepsilon\}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Sea $C^0(X)$ el espacio de funciones continuas con la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Lema 1.21 $M(X)$ es un espacio métrico completo.

Como X es métrico completo $\exists \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso en la bola unitaria

$$B := \{f \in C^0(X) : \|f\| \leq 1\}.$$

Consideremos en $M(X)$ la métrica:

$$d(\mu, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu \right|$$

No es difícil verificar que efectivamente d es una métrica:

Demostración

i) $d(\mu, \nu) \geq 0$. Esto se cumple ya que estamos sumando números mayores o iguales a 0.

ii) $d(\mu, \nu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu$

$$d(\mu, \nu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu \right| = 0$$

para cada j

$$\Leftrightarrow \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu = 0 \Leftrightarrow \int_X g_j d\mu = \int_X g_j d\nu \Leftrightarrow \mu = \nu.$$

$$\text{iii) } d(\mu, \nu) = d(\nu, \mu)$$

También es claro, ya que $\left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu \right| = \left| \int_X g_j d\nu - \int_X g_j d\mu \right|$ para cada j .

$$\text{iv) } d(\mu, \nu) \leq d(\mu, \alpha) + d(\alpha, \nu)$$

$$\begin{aligned} d(\mu, \nu) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu \right| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu + \int_X g_j d\alpha - \int_X g_j d\alpha \right| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\alpha + \int_X g_j d\alpha - \int_X g_j d\nu \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\alpha \right| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\alpha - \int_X g_j d\nu \right| \\ &= d(\mu, \alpha) + d(\alpha, \nu) \end{aligned}$$

Para la prueba del Lema 1.20 probaremos antes los siguientes Lemas.

La demostración de este Lema nos permite probar que $M(X)$ es metrizable, la idea es demostrar que la métrica $d(\cdot, \cdot)$ genera la topología de $M(X)$ arriba descrita.

Lema 1.22 Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión en $M(X)$ las siguientes proposiciones son equivalentes:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu_n, \mu) = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_j d\mu_n = \int_X g_j d\mu \text{ para toda } j \geq 1.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g d\mu_n = \int_X g d\mu \text{ para toda } g \in C^0(X).$$

Demostración

a) \Rightarrow b) se cumple, ya que

$$\left| \int_X g_j d\mu_n - \int_X g_j d\mu \right| \leq 2^j d(\mu_n, \mu).$$

b) \Rightarrow c) $\|g\| = 0$ es inmediato.

Dados $g \in C^0(X)$ y $\varepsilon > 0 \exists j$ tal que

$$\left\| g_j - \frac{g}{\|g\|} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3\|g\|}.$$

Sea N tal que $n \geq N \Rightarrow$

$$\left| \int_X g_j d\mu_n - \int_X g_j d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{3\|g\|}.$$

Entonces para $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \int_X g d\mu_n - \int_X g d\mu \right| &\leq \|g\| \left| \int_X \left(\frac{g}{\|g\|} - g_j \right) d\mu_n \right| \\ &\quad + \|g\| \left| \int_X g_j d\mu_n - \int_X g_j d\mu \right| \\ &\quad + \|g\| \left| \int_X \left(g_j - \frac{g}{\|g\|} \right) d\mu \right| \\ &\leq \|g\| \frac{\varepsilon}{3\|g\|} + \|g\| \frac{\varepsilon}{3\|g\|} + \|g\| \frac{\varepsilon}{3\|g\|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

c) \Rightarrow a) Sea j_0 tal que $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ entonces para $n \geq N$

$$\begin{aligned} d(\mu_n, \mu) &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu_n - \int_X g_j d\mu \right| \\ &\quad + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\int_X |g_j| d\mu_n + \int_X |g_j| d\mu \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \left| \int_X g_j d\mu_n - \int_X g_j d\mu \right| + 2\frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

como μ_n satisface c) podemos encontrar N tal que $n \geq N \Rightarrow$

$$\left| \int_X g_j d\mu_n - \int_X g_j d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces para cualquier j tal que $1 \leq j \leq j_0$ implica que para cualquier $n \geq N$ tenemos:

$$d(\mu_n, \mu) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Para probar que es completo, utilizaremos el siguiente teorema llamado Teorema de la representación de Riesz.

Teorema 1.23 Sea $\varphi : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $\varphi(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$ (donde 1 es la función constante 1). Entonces $\exists \mu \in M(X)$ tal que $\int_X f d\mu = \varphi(f)$ para todo $f \in C^0(X)$.

Como $M(X)$ es metrizable, probar la completitud de $M(X)$ equivale a probar que toda sucesión en $M(X)$ tiene una subsucesión convergente.

Lema 1.24 Toda sucesión en $M(X)$ admite una subsucesión convergente.

Demostración

Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión en $M(X)$ y sea $\bar{\mu}_n : \mathbb{N} \rightarrow [-1, 1]$ definida por:

$$\bar{\mu}_n(j) = \int_X g_j d\mu_n.$$

Como $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ provisto de la topología producto es un espacio métrico compacto \exists una subsucesión $\{\mu_{n_m}\}$ tal que $\{\bar{\mu}_{n_m}(j)\}$ converge para toda $j \geq 1$ o sea que $\{\int_X g_j d\mu_{n_m}\}$ converge para todo $j \geq 1$ y así $\{\int_X g d\mu_{n_m}\}$ converge para todo $g \in C^0(X)$.

Definamos $\varphi : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\varphi(g) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X g d\mu_{n_m}$.

Por el Teorema de Riesz y dado que φ es una función real positiva $\exists \mu \in M(X)$ tal que $\varphi(g) = \int_X g d\mu$ para todo $g \in C^0(X)$, o sea que $\{d(\mu_{n_m}, \mu)\}$ converge a 0. ■

Demostración de la Proposición 1.19:

Sea $\mu \in M(X)$ la medida de Dirac concentrada en $x_0 \in X$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A \end{cases}$$

Sea

$$\mu_n = \frac{1}{n}(\mu + \mu \circ T^{-1} + \dots + \mu \circ T^{-n+1}).$$

Por el Lema 1.23, existe una subsucesión convergente $\{\mu_{n_m}\}$. Llamamos $\nu = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{n_m}$, entonces:

$$\begin{aligned} \nu \circ T^{-1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m}(\mu \circ T^{-1} + \dots + \mu \circ T^{-n_m}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m}(\mu + \mu \circ T^{-1} + \dots + \mu \circ T^{-n_m} - \mu) = \nu. \end{aligned}$$

■

Puede pasar que un mapeo continuo de un espacio métrico completo tenga exactamente una probabilidad invariante. Tales mapeos son llamados únicamente ergódicos. El ejemplo más común es la traslación irracional de $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$.

Vamos a introducir el concepto de ergodicidad. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ que preserva la medida. La órbita de un punto $x \in X$ es la sucesión $x, T(x), T^2(x), \dots$. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable consideremos sus promedios sobre los segmentos de órbita $x, T(x), \dots, T^n(x)$, esto es los números:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j(x)). \quad (1)$$

Uno de los resultados fundamentales de la teoría ergódica, es el teorema de Birkhoff (que se demostrará en el siguiente capítulo), que establece que la sucesión (1) de los promedios de funciones integrables sobre segmentos de órbita converge c.t.p. $x \in X$, a un número denominado promedio orbital de f en el punto x , y que la función $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j(x)).$$

es integrable y

$$\int_X \tilde{f} d\mu = \int_X f d\mu. \quad (2)$$

Un caso especialmente interesante es cuando f es la función característica \mathcal{X}_A de un conjunto $A \in \mathcal{A}$. Entonces es inmediato ver que:

$$\tilde{\mathcal{X}}_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in A\}.$$

Este valor se denomina tiempo promedio de estadía de x en A y es el porcentaje de órbita que se encuentra en A . Por (2)

$$\int_X \tilde{\mathcal{X}}_A d\mu = \int_X \mathcal{X}_A d\mu = \mu(A). \quad (3)$$

Decimos que T es una transformación ergódica si para toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ vale

$$\tilde{f}(x) = \int_X f d\mu. \quad (4)$$

para c.t.p. $x \in X$. Es fácil ver que esto equivale a exigir que \tilde{f} sea constante en casi todo punto: (2) implica que esta constante tiene que estar dada por la igualdad (4). Si aplicamos (4) a la función característica \mathcal{X}_A obtenemos:

$$\tilde{\mathcal{X}}_A(x) = \mu(A) \text{ c.t.p. } x \in X.$$

Ahora daremos un resultado que caracteriza las transformaciones continuas únicamente ergódicas en términos de promedios orbitales.

Teorema 1.25 *Sea X un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una transformación continua. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- 1) T es únicamente ergódica.
- 2) Para cualquier $f \in C^0(X)$ el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j(x)).$$

existe para cualquier x y no depende de x .

- 3) Para cualquier $f \in C^0(X)$ la sucesión de funciones:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f \circ T^j$$

converge uniformemente a una constante.

Demostración

1) \Rightarrow 3) Si 3) no se cumple entonces $\exists f \in C^0(X)$ tal que la sucesión

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f \circ T^j$$

no converge uniformemente a $\int_X f d\mu$, donde μ es el único elemento de $M_T(X)$.

Entonces existen $\varepsilon > 0$, una sucesión divergente de enteros $\{n_i\}_{i \geq 1}$ y una sucesión $\{x_i\}_{i \geq 1}$ de puntos de X tal que

$$\left| \frac{1}{n_i+1} \sum_{j=0}^{n_i} f(T^j(x_i)) - \int_X f d\mu \right| \geq \varepsilon$$

para cualquier i . Sea $\mu_{n_i} \in M(X)$ tal que:

$$\int_X g d\mu_{n_i} = \frac{1}{n_i+1} \sum_{j=0}^{n_i} g(T^j(x_i))$$

para cualquier $g \in C^0(X)$; la existencia de esta medida es garantizada por el teorema de la representación de Riesz.

Como $M(X)$ es espacio métrico completo, podemos suponer que la sucesión $\{\mu_{n_i}\}$ converge a $\nu \in M(X)$. Ahora probaremos que $\nu \in M_T(X)$. Sea $g \in C^0(X)$; entonces:

$$\begin{aligned} \int_X (g \circ T) d\nu &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_X (g \circ T) d\mu_{n_i} \\ &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=0}^{n_i} g(T^{j+1}(x_i)) \\ &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_X g d\mu_{n_i} - \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i + 1} g(x_i) \\ &\quad + \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i + 1} g(T^{n_i+1}(x_i)) \\ &= \int_X g d\nu. \end{aligned}$$

así que $\nu \in M_T(X)$. Pero

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \left| \int_X f d\mu_{n_i} - \int_X f d\mu \right| \\ &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=0}^{n_i} f(T^j(x_i)) - \int_X f d\mu \right| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \nu \neq \mu$ contradiciendo el hecho de que T es únicamente ergódico.

3) \Rightarrow 2) Trivial.

2) \Rightarrow 1) Sea $\phi : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por:

$$\phi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j).$$

Entonces si $\mu \in M_T(X)$

$$\int_X f d\mu = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_X (f \circ T^j) d\mu$$

porque

$$\int_X f d\mu = \int_X (f \circ T^j) d\mu$$

para cualquier j .

Como la sucesión $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j)$ es acotada por $\|f\|_0$ se sigue por teorema de la convergencia dominada que:

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_X (f \circ T^j) d\mu \\ &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n (f \circ T^j) \right) d\mu \\ &= \int_X \phi(f) d\mu = \phi(f)\end{aligned}$$

Así el único elemento de $M_T(X)$ es la medida asociada con la función lineal positiva ϕ . ■

Capítulo 2

Ergodicidad.

2.1 Teorema ergódico de Birkhoff.

En este capítulo se demostrará el teorema ergódico de Birkhoff y se darán ejemplos de mapeos ergódicos una referencia para este capítulo es [22].

Teorema 2.1 (ergódico de Birkhoff): Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ que preserva medida. Entonces:

1) Si $f \in L^1(\mu)$, el siguiente límite existe para μ -casi todo $x \in X$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$.

2) Si $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, la función definida por $\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$ pertenece a $L^p(\mu)$ y satisface:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \bar{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \right\|_p = 0$$

$$ii) \bar{f}(T(x)) = \bar{f}(x) \text{ c.t.p.}$$

$$3) \int_X \bar{f} d\mu = \int_X f d\mu \text{ para toda } f \in L^p(\mu).$$

La propiedad i) es la más importante y difícil de probar, ya que las otras dos se deducen de propiedades de integrabilidad.

Para hacer la demostración recurriremos al siguiente Lema conocido como el Teorema ergódico maximal.

Lema 2.2 Sea $f \in L^1(\mu)$ y definimos:

$$E(f) = \{x : \sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n f \circ T^j(x) > 0\}$$

entonces $\int_{E(f)} f d\mu \geq 0$.

Demostración

Definimos la siguiente función:

$$f_n(x) = \max_{0 \leq m \leq n} \left\{ \sum_{j=0}^m f \circ T^j(x) \right\}$$

como

$$E(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x : f_n(x) > 0\}$$

basta demostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{x: f_n(x) \geq 0\}} f d\mu \geq 0.$$

Sea

$$E = \{x : f_n(x) \geq 0\}.$$

Observemos que si $0 \leq m \leq n$ entonces

$$f_n(x) \geq \sum_{j=0}^m f \circ T^j(x)$$

es decir:

$$f_n(T(x)) + f(x) \geq \max_{0 \leq m \leq n} \left\{ \sum_{j=0}^{m+1} f \circ T^j(x) \right\}.$$

En particular, si

$$f_n(T(x)) + f(x) \geq f(x)$$

entonces

$$f_n(T(x)) + f(x) \geq f_n(x).$$

De hecho, esto se cumple cuando $f_n(T(x)) \geq 0$.

Dado que

$$\int_E f d\mu(x) = \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) < 0\}} f d\mu(x) + \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} f d\mu(x)$$

y como

$$f_n(T(x)) + f(x) \geq f_n(x) \text{ si } f_n(T(x)) \geq 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu(x) &\geq \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) < 0\}} f d\mu(x) + \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} f d\mu(x) \\ &\quad - \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} (f_n \circ T) d\mu(x). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$f_n(x) \geq 0 \text{ y } f_n(T(x)) < 0 \Rightarrow f_n(x) = f(x) \text{ y } f(x) > 0.$$

Por definición, si $f_n(T(x)) < 0$ equivale a

$$\sum_{j=1}^{m+1} f \circ T^j(x) = \sum_{j=0}^m f \circ T^{j+1}(x) < 0,$$

para toda $0 \leq m \leq n$.

Además, si $f_n(x) \geq 0 \exists m \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\sum_{j=0}^m f \circ T^j(x) \geq 0.$$

Por lo tanto

$$f(x) \geq 0 \text{ y } f_n(x) = \max_{0 \leq m \leq n} \left\{ \sum_{j=0}^m f \circ T^j(x) \right\} = f(x).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &\geq \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) < 0\}} f d\mu + \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} f d\mu \\ &\quad - \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} (f_n \circ T) d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_E f d\mu - \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} (f_n \circ T) d\mu \\ &= \int_{T^{-1}(E)} (f_n \circ T) d\mu - \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} (f_n \circ T) d\mu. \end{aligned}$$

Pero como

$$T^{-1}(E) = \{f_n \circ T \geq 0\} \subset E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\},$$

entonces

$$\int_{T^{-1}(E)} (f_n \circ T) d\mu - \int_{E \cap \{f_n \circ T(x) \geq 0\}} (f_n \circ T) d\mu \geq 0$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ $\int_E f d\mu \geq 0$. ■

Corolario 2.3 Si $A \subset E(f)$, $A \in \mathcal{A}$ y $T^{-1}(A) = A$ entonces: $\int_A f d\mu \geq 0$.

Demostración Como $T^{-1}(A) = A$, entonces $E(f \circ \mathcal{X}_A) = A$, y por el T. E. M.

$$0 \leq \int_{E(f \circ \mathcal{X}_A)} f \circ \mathcal{X}_A d\mu = \int_A f \circ \mathcal{X}_A d\mu = \int_A f d\mu. \quad \blacksquare$$

Demostración (Teorema de Birkhoff): Supongamos que se cumple 1) para demostrar 2) y 3)

Dem. 2): Observemos que

$$|\bar{f}(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j(x)| \text{ en c.t.p. } x \in X.$$

y por tanto, si $f \in L^p(\mu)$ y $1 \leq p < \infty$

$$|\bar{f}(x)|^p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j(x)| \right)^p \quad (1).$$

Como $|\bar{f}|^p$ es una función positiva, para demostrar que es integrable basta mostrar que el límite define una función integrable, que por el Lema de Fatou, se reduce a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_X \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right)^p d\mu < \infty$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_X \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right)^p d\mu &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j(x)| \right\|_p^p \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f \circ T^j\|_p \right)^p \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f\|_p \right)^p = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

Ya que $\|f \circ T^j\|_p^p = \|f\|_p^p$ por que T preserva medida.

Por lo tanto el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j(x)| \right)^p$$

define una función integrable cuya integral es menor o igual que $\|f\|_p^p$.

Por lo tanto $|\bar{f}(x)|^p$ es integrable $\bar{f} \in L^p(\mu)$ y su integral también es menor o igual que $\|f\|_p^p$. En particular

$$\|\bar{f}\|_p \leq \|f\|_p \quad (2).$$

Por lo tanto $\bar{f} \in L^p(\mu)$.

Para probar el inciso i) de 2), consideremos el caso en que $f \in L^\infty(\mu)$.

Por 1), la sucesión de funciones:

$$\left| \bar{f}(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \right|^p \quad (3).$$

converge a 0 en casi todo punto $x \in X$. Además en casi todo punto:

$$|\bar{f}(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left| \bar{f}(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \right|^p &\leq \left| \|\bar{f}\|_\infty + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f \circ T^j(x)\|_\infty \right|^p \\ &\leq 2^p \|f\|_\infty^p \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión definida en (3) está dominada por una constante y por el teorema de la convergencia dominada, concluimos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{X}} \left| \bar{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right|^p d\mu = 0$$

Esto demuestra i) para $f \in L^\infty(\mu)$.

Si tomamos $f \in L^p(\mu)$, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $f_0 \in L^\infty(\mu)$ tal que

$$\|f - f_0\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

y $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left\| \bar{f}_0 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_0 \circ T^j \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (4).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left\| \bar{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right\|_p &\leq \|f - f_0\|_p + \left\| \bar{f}_0 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_0 \circ T^j \right\|_p \\ &\quad + \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f - f_0) \circ T^j \right\|_p \end{aligned}$$

Pero $\bar{f} - \bar{f}_0 = \overline{(f - f_0)}$, entonces por (2).

$$\left\| \bar{f} - \bar{f}_0 \right\|_p \leq \|\overline{(f - f_0)}\|_p \leq \|f - f_0\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

También:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f - f_0) \circ T^j \right\|_p \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f - f_0\|_p = \|f - f_0\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

por (4) si $n \geq N$ implica

$$\left\| \bar{f}_0 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_0 \circ T^j \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto si $n \geq N$

$$\left\| \bar{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right\|_p \leq \varepsilon,$$

por lo tanto i) está demostrado.

Demostraremos primero 3) y luego la propiedad ii) de 2).

Como $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ converge en $L^1(\mu)$ a \bar{f} , luego

$$\int_X \bar{f} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f \circ T^j d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f d\mu = \int_X f d\mu.$$

Ya que T preserva medida.

Finalmente probaremos la propiedad enunciada en ii) $\bar{f}(T(x)) = \bar{f}(x)$.

En c.t.p. $x \in X$ (i.e. \bar{f} es T -invariante), esto se sigue de:

$$\begin{aligned} \bar{f}(T(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(T(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^n f \circ T^j(x) - \frac{1}{n} f(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f \circ T^j(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f \circ T^j(x) = \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Finalmente demostraremos 1). Si $f \in L^1(\mu)$ definimos:

$$E_{\alpha}^{+}(f) = \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n f \circ T^j(x) > \alpha \right\}$$

$$E_{\alpha}^{-}(f) = \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n f \circ T^j(x) < \alpha \right\}$$

Observemos que:

$$E_{\alpha}^{+}(f) = E_0^{+}(f - \alpha) \quad (5)$$

$$E_{\alpha}^{-}(f) = E_{-\alpha}^{+}(-f) \quad (6)$$

Entonces, es cierto que:

$$\int_{E_{\alpha}^{+}(f)} f d\mu \geq \alpha \mu(E_{\alpha}^{+}(f)) \quad (7)$$

ya que:

$$\begin{aligned} \int_{E_{\alpha}^{+}(f)} f d\mu &= \int_{E_{\alpha}^{+}(f)} (f - \alpha) d\mu + \alpha \mu(E_{\alpha}^{+}(f)) \\ &= \int_{E_{\alpha}^{+}(f - \alpha)} (f - \alpha) d\mu + \alpha \mu(E_{\alpha}^{+}(f)) \end{aligned}$$

y como

$$T^{-1}(E_{\alpha}^{+}(f - \alpha)) \subset E_{\alpha}^{+}(f - \alpha) \text{ y } E_{\alpha}^{+}(f - \alpha) \subset E(f - \alpha)$$

entonces, por el corolario anterior

$$\int_{E_{\alpha}^{+}(f - \alpha)} (f - \alpha) d\mu \geq 0$$

Por lo tanto:

$$\int_{E_{\alpha}^{+}(f)} f d\mu \geq \alpha \mu(E_{\alpha}^{+}(f))$$

Entonces, si $A \in \mathcal{A}$, tal que $T^{-1}(A) = A$.

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_A f \circ \mathcal{X}_A d\mu = \int_{E_{\alpha}^{+}(f \circ \mathcal{X}_A)} f \circ \mathcal{X}_A d\mu \\ &\geq \alpha \mu(E_{\alpha}^{+}(f \circ \mathcal{X}_A)) = \alpha \mu(A) \quad (8). \end{aligned}$$

De manera análoga podemos concluir que si $A \in \mathcal{A}$, tal que $A \subset E_{\beta}^{-}(f)$ y $T^{-1}(A) = A$, entonces:

$$\int_A f d\mu = \beta \mu(A) \quad (9).$$

Sean $\alpha < \beta$. Si tomamos $A = E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)$ y aplicamos la desigualdad (8) obtenemos,

$$\int_{E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)} f d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f))$$

y si aplicamos la desigualdad (9)

$$\int_{E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)} f d\mu \leq \beta \mu(E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f))$$

como $\alpha < \beta$, por lo tanto

$$\mu(E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)) = 0 \quad (10)$$

Tomemos $\{\alpha_n \in \mathbb{R}\}$ una sucesión densa en \mathbb{R} , entonces:

$$\alpha \left(\left\{ x : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \right\} \right) = 0$$

ya que

$$\begin{aligned} & \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \right\} \\ &= \bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} E_{\alpha_n}^+(f) \cap E_{\alpha_m}^-(f) \end{aligned}$$

que por (10) es la unión de conjuntos de medida 0.

Por lo tanto el límite de $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$ existe en c.t.p. $x \in X$. ■

2.2 Ergodicidad.

Definición 2.4 Si (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva medida, decimos que T es ergódica si para cualquier $A \in \mathcal{A}$, T -invariante, resulta que: $\mu(A) = 0$ ó 1.

Proposición 2.5 Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) T es μ -ergódica.

ii) Si $f \circ T = f$, $f \in L^1(\mu)$ entonces f es constante c.t.p. $x \in X$.

iii) Si $f \circ T = f$, $f \in L^p(\mu)$ entonces f es constante c.t.p. $x \in X$.

iv) Para cualquier $A, B \in \mathcal{A}$ tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

v) Para cualquier $f \in L^1(\mu)$ tenemos: $\bar{f} = \int_X f d\mu$, la \bar{f} definida en el teorema de Birkhoff.

Demostración

i) \Rightarrow ii) Si suponemos que existe $f \in L^1(\mu)$ no constante tal que $f \circ T = f$, entonces podemos encontrar alguna $c \in \mathbb{R}$ no constante que el conjunto $B = \{x \in X : f(x) > c\}$ tiene medida $0 < \mu(B) < 1$. Ahora $f \circ T = f$ implica que B es T -invariante, es decir $T^{-1}(B) = B$. Por lo tanto $\mu(B) = 0$ ó 1 lo cual es una contradicción, por lo tanto f es constante casi donde quiera.

iii) \Rightarrow i) Si $A \in \mathcal{A}$ es T -invariante su función característica χ_A es T -invariante y esta en $L^p(\mu)$. Por hipótesis χ_A es constante casi donde quiera i.e. $\mu(B) = 0$ ó 1 . Por lo tanto T es μ -ergódica.

ii) \Rightarrow v) Como demostramos antes $\bar{f} \in L^1(\mu)$ y es T -invariante, entonces tiene que ser una función constante. Por lo tanto

$$\bar{f} = \int_X \bar{f} d\mu = \int_X f d\mu.$$

v) \Rightarrow iv) Por el teorema de Birkhoff

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j(x) = \bar{\chi}_A = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$$

casi donde quiera. Por el Teorema de la Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(B) &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j(x) \circ \chi_B d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j(x) \circ \chi_B d\mu \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B).$$

iv) \Rightarrow i) Si A es T -invariante, aplicamos iv) a el conjunto A y A^c . Entonces:

$$\mu(A)\mu(A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap A^c).$$

así $\mu(A) = 0$ ó 1 .

i) \Rightarrow iii) Es claro ya que $L^p(\mu) \subset L^1(\mu)$. ■

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva medida, tal que existe un conjunto B , T -invariante, es decir $T^{-1}(B) = B$, de hecho, también es cierto que su complemento es T -invariante, entonces podemos estudiar la dinámica de la transformación por separado $T|_B$ y $T|_{B^c}$. Esto nos lleva a analizar aquellas transformaciones que no se pueden descomponer de esta forma, las transformaciones ergódicas.

Por esto, podemos interpretar las transformaciones ergódicas como aquellas que, dado un conjunto $A \in \mathcal{A}$ no trivial ($\mu(A) > 0$), su órbita $\{T^{-n}(A)\}_{n=1}^{\infty}$ se esparce por todo el espacio X .

Teorema 2.6 Si T es ergódica respecto a μ y ν otra medida T -invariante, las siguientes propiedades son equivalentes

i) $\nu \neq \mu$

ii) ν no es absolutamente continua con respecto a μ

iii) $\exists A \in \mathcal{A}$ T -invariante tal que $\mu(A) = 0$ y $\nu(A) > 0$

Demostración

i) \Rightarrow ii) Si $\nu \ll \mu$, entonces $\frac{d\nu}{d\mu}$ es una función T -invariante, puesto que ν es T -invariante. Como T es ergódica entonces $\frac{d\nu}{d\mu}$ es constante. Por lo tanto $\nu = \mu$.

ii) \Rightarrow iii) Si ν no es absolutamente continua con respecto a μ , existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A_0) = 0$ y $\nu(A_0) > 0$. Entonces el conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(A_0)$ es T -invariante y satisface iii)

iii) \Rightarrow i) Si $\exists A \in \mathcal{A}$, tal que $\mu(A) = 0$ y $\nu(A) \neq 0$, es claro que $\nu \neq \mu$. ■

Dado un subconjunto convexo C de un espacio vectorial topológico V definimos el conjunto de puntos extremos de C como.

$$\text{Ext}(C) = \{u \in V : u = (1 - \alpha)x + \alpha y, \alpha \in [0, 1], x \neq y \Rightarrow \alpha = 0, 1\}.$$

Si $C \neq \emptyset$, entonces $\text{Ext}(C) \neq \emptyset$.

Lema 2.7 Los puntos extremos de $M_T(X)$ son las medidas T -ergódicas.

Demostración

Sea μ punto extremo de $M_T(X)$ y supongamos que $\exists A \in \mathcal{A}$ tal que $T^{-1}(A) = A$ y $\mu(A) \neq 0, 1$. Definamos μ_A y μ_{A^c} mediante

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}, \quad \mu_{A^c}(B) = \frac{\mu(B \setminus A)}{1 - \mu(A)},$$

entonces $\mu_A, \mu_{A^c} \in M_T(X)$ y

$$\mu = \mu(A)\mu_A + (1 - \mu(A))\mu_{A^c}$$

Contradiciendo el hecho de que μ es punto extremo de $M_T(X)$

Recíprocamente supongamos que μ es ergódica y $\mu = (1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2$ con $0 < \alpha < 1$, $\mu_1, \mu_2 \in M_T(X)$. Entonces $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu_i(A) = 0$, es decir $\mu_i \ll \mu$ y así $\exists f_i \in L^1(\mu)$ tal que $f_i \geq 0$ y $\mu_i(A) = \int_A f_i d\mu$ como T preserva μ y μ_i se tiene que $f_i \circ T = f_i$. Como μ es ergódica f_i es constante y así $\mu = \mu_i$. ■

Donde $(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$ para μ y ν probabilidades.

2.3 Ejemplos de transformaciones ergódicas

Lema 2.8 Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad, con X espacio métrico compacto y \mathcal{A} la σ -álgebra de Borel, tal que $\mu(U) > 0$ para todo abierto no vacío U . Sea $T: X \rightarrow X$ continua y ergódica. Entonces la órbita $\{T^m(x) : m \in \mathbb{N}\}$ es densa para casi todo $x \in X$.

Demostración Sea $\{U_m\}$ base numerable para la topología de X .

$\{T^m(x) : m \in \mathbb{N}\}$ es densa $\iff \forall m \exists n_m$ con $T^{n_m}(x) \in U_m \iff x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U_m)$.

Sea $B_m = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U_m)$ es abierto y $T^{-n}(B_m) \subset B_m$.

Como T es ergódica, $\mu(B_m) = 0$ ó 1 . En efecto sea $B_m^* = \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(B_m)$, entonces $T^{-1}(B_m^*) = B_m^*$ y $\mu(B_m^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(B_m)) = \mu(B_m)$.

Como $\mu(B_m) \geq \mu(U_m) > 0$, $\mu(B_m^*) = 1$ y así B_m^* es denso.

Por inducción $A_k = \bigcap_{m \geq k} B_m$ es abierto no vacío y $T^{-1}(A_k) \subset A_k$.

Así $\mu(A_k) = 1$ y

$$\mu \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_k) = 1. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.9 Consideremos la rotación $R_a : T^n \rightarrow T^n$ definida por $R_a(x + \mathbb{Z}^n) = x + a + \mathbb{Z}^n$. Son equivalentes:

- a) R_a es ergódica.
- b) La órbita $\{R_a^m(\mathbb{Z}^n) : m \in \mathbb{N}\}$ es densa.
- c) $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \quad \langle k, a \rangle \notin \mathbb{Z}$.

Demostración Utilizaremos series de Fourier: Para $k \in \mathbb{Z}^n$ definimos $\varphi_k : T^n \rightarrow S^1$ mediante

$\varphi_k(x + \mathbb{Z}^n) = \exp(2\pi i \langle k, x \rangle)$. Entonces $\varphi_k \circ R_a = \exp(2\pi i \langle k, a \rangle) \varphi_k$

a) \Rightarrow b) Es consecuencia del Lema anterior.

b) \Rightarrow c) Si $\langle k, a \rangle \in \mathbb{Z}$, entonces $\varphi_k \circ R_a^m(\mathbb{Z}^n) = \exp(2m\pi i \langle k, a \rangle) = 1$
 $\forall m \in \mathbb{N}$. Como φ_k es continua y $\{R_a^m(\mathbb{Z}^n) : m \in \mathbb{N}\}$ es densa,
 $\varphi_k \equiv 1$ y así $k = 0$.

c) \Rightarrow a) Sea $f \in L^2(T^n)$ entonces $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} b_k \varphi_k$

Si $f \circ R_a = f$ entonces $b_k = \exp(2\pi i \langle k, a \rangle) b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n$

Si $b_k \neq 0$ entonces $\langle k, a \rangle \in \mathbb{Z}$, luego $k = 0$ y así f es constante. ■

Una aplicación sencilla del teorema ergódico es la siguiente:

Tomando $f = \chi_B$ para $B \in \mathcal{A}$ (Recordemos que si T es μ -ergódica entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) = \int f d\mu$) tenemos que si $T : X \rightarrow X$ es ergódica entonces para casi todo $x \in X$

$$\tau_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in B\} = \mu(B)$$

Ejemplo 2.10 Para casi todo $x \in [0, 1]$ (con respecto a la medida de Lebesgue) el número promedio de ceros en la expansión decimal $x = 0.x_1x_2\dots$ es $\frac{1}{10}$. En efecto, consideremos $T : S^1 \rightarrow S^1$, $T(z) = z^{10}$. T es ergódica. Sea $B = \{e^{2\pi i x} : x \in [0, \frac{1}{10})\}$ $x_i = 0 \Leftrightarrow T^j(e^{2\pi i x}) \in B$ y $\mu(B) = \frac{1}{10}$.

2.4 Transformaciones Mezcladoras.

Definición 2.11 Un automorfismo $T : X \rightarrow X$ es mezclador si para todos $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Lema 2.12 Las transformaciones mezcladoras son ergódicas.

Demostración

Sea A cualquier conjunto medible T -invariante, entonces $T^{-n}(A) = A$.

Puesto que si $T^{-n}(A) = A$, para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\mu(A)\mu(A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap A^c) = \mu(A \cap A^c) = 0.$$

Por lo tanto $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A^c) = 0$. ■

Recordemos que en $L^2(\mu)$ está definido un producto interior de la siguiente manera:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{X}} f \cdot g d\mu$$

y por lo tanto para cada transformación $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, está asociado a T el operador $U_T : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$, definido por $U_T(f) = f \circ T$. Puesto que T preserva medida resulta que U_T es una isometría de $L^2(\mu)$

$$\|U_T(f)\|_2^2 = \int_{\mathbb{X}} |f \circ T|^2 d\mu = \int_{\mathbb{X}} |f|^2 \circ T d\mu = \int_{\mathbb{X}} |f|^2 d\mu = \|f\|_2^2.$$

A este operador se le llama el operador espectral asociado a T .

Definición 2.13 Sean $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu)$, $i = 1, 2$, espacios de medida y $T_i : X_i \rightarrow X_i$ transformaciones que preservan medida con operadores lineales asociados U_{T_i} . Decimos que T_1 y T_2 son espectralmente equivalentes si existe una isometría invertible $L : (X_1, \mathcal{A}_1, \mu) \rightarrow (X_2, \mathcal{A}_2, \mu)$ tal que $LU_{T_2} = U_{T_1}L$.

Si T_1 y T_2 son equivalentes, son espectralmente equivalentes ya que el mapeo $F : X_1 \rightarrow X_2$ dado por la definición de equivalencia permite definir una isometría $U_F : L^2(X_2, \mathcal{A}_2, \mu) \rightarrow L^2(X_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ la cual satisface la condición $U_F U_{T_2} = U_{T_1} U_F$.

Teorema 2.14 Un automorfismo T es mezclador si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle g, 1 \rangle \quad (11)$$

para toda $f, g \in L^2(\mu)$ (11)

Demostración \Leftarrow Si T satisface (11), entonces tomamos \mathcal{X}_A y \mathcal{X}_B las funciones características de A y $B \in \mathcal{A}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap (B)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n(\mathcal{X}_A), \mathcal{X}_B \rangle \\ &= \langle \mathcal{X}_A, 1 \rangle \langle \mathcal{X}_B, 1 \rangle = \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

⇒) De la misma manera, si T es mezcladora, obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle g, 1 \rangle \quad (12)$$

para f, g funciones caracterfsticas.

Puesto que U_T es un operador lineal, (12) se cumple para funciones simples (combinaciones lineales de funciones caracterfsticas). Y el conjunto de estas funciones es denso en $L^2(\mu)$. Así que, dados $\varepsilon > 0$ y f y $g \in L^2(\mu)$, existen f_0 y g_0 funciones simples tales que:

- a) $\|f - f_0\|_2 < \varepsilon$
- b) $\|g - g_0\|_2 < \varepsilon$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n f_0, g_0 \rangle = \langle f_0, 1 \rangle \langle g_0, 1 \rangle$

Entonces:

$$\langle U_T^n f, g \rangle = \langle U_T^n f_0, g_0 \rangle + \langle U_T^n f, g - g_0 \rangle + \langle U_T^n (f - f_0), g_0 \rangle$$

De manera que:

$$\begin{aligned} |\langle U_T^n f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle g, 1 \rangle| &\leq |\langle U_T^n f_0, g_0 \rangle + \langle U_T^n f, g - g_0 \rangle + \langle U_T^n (f - f_0), g_0 \rangle| \\ |\langle U_T^n f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle g, 1 \rangle| &\leq |\langle U_T^n f_0, g_0 \rangle + \langle U_T^n f, g - g_0 \rangle + \langle U_T^n (f - f_0), g_0 \rangle| \\ &\leq |\langle U_T^n f_0, g_0 \rangle - \langle f_0, 1 \rangle \langle g_0, 1 \rangle| + \|f\|_2 \|g - g_0\|_2 \\ &\quad + \|g_0\|_2 \|f - f_0\|_2 + |\langle f_0, 1 \rangle \langle g_0 - g, 1 \rangle| \\ &\quad + |\langle f_0 - f, 1 \rangle \langle g_0, 1 \rangle| \quad (13) \\ &\leq |\langle U_T^n f_0, g_0 \rangle - \langle f_0, 1 \rangle \langle g_0, 1 \rangle| \\ &\quad + \varepsilon (\|f\|_2 + \|g + \varepsilon\|_2 + \|f + \varepsilon\|_2 + \|g\|_2) \end{aligned}$$

ya que:

$$\begin{aligned} \langle U_T^n f, g - g_0 \rangle &\leq \|f\|_2 \|g - g_0\|_2 \\ \langle U_T^n (f - f_0), g_0 \rangle &\leq \|g_0\|_2 \|f - f_0\|_2 \\ \langle f_0, 1 \rangle \langle g_0 - g, 1 \rangle + \langle f_0 - f, 1 \rangle \langle g_0, 1 \rangle &= \langle f_0, 1 \rangle \langle g_0, 1 \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle g, 1 \rangle \end{aligned}$$

y si n es suficientemente grande, el primer sumando de (13) es menor que ε .

Por lo tanto

$$|\langle U_T^n f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle g, 1 \rangle| < k\varepsilon$$

donde k solo depende de $\|f\|_2$ y $\|g\|_2$. ■

De hecho, la igualdad (11) se cumple para: f una función caracterfstica y $g \in L^1(\mu)$, dado que está bien definida y $L^2(\mu)$ es denso en $L^1(\mu)$.

Teorema 2.15 Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ un automorfismo mezclante respecto a μ . Si existe ν otra medida de probabilidad, absolutamente continua respecto a μ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(T^{-n}(A)) = \mu(A), \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Demostración Sea $A \in \mathcal{A}$ y $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, donde $f \in L^1(\mu)$, entonces

$$\begin{aligned} \nu(T^{-n}(A)) &= \int_{T^{-n}(A)} f d\mu = \int_A (f \circ T^n) d\mu = \int_X \chi_A (f \circ T^n) d\mu \\ &= \langle \chi_A, U_T^n f \rangle \rightarrow \langle \chi_A, 1 \rangle \langle f, 1 \rangle = \mu(A). \end{aligned}$$

■

Este es un resultado muy importante, ya que muestra como las medidas mezcladoras son límite de las medidas que son absolutamente continuas.

Definición 2.16 Si X es un espacio topológico, una transformación $T : X \rightarrow X$ es topológicamente mezcladora si para cualquier par de conjuntos abiertos, $U, V \subset X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq N$.

Proposición 2.17 Sean X espacio topológico y μ una medida de probabilidad sobre los borelianos de X tal que $\mu(U) > 0$ para todo U abierto no vacío. Supongamos que $T : X \rightarrow X$ preserva μ y es mezcladora. Entonces T es topológicamente mezcladora.

Demostración Sean U, V abiertos no vacíos, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V) > 0$$

Así que existe N tal que $\mu(T^{-n}(U) \cap V) > 0$ para $n > N$. Por lo tanto $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ para $n > N$. ■

2.5 Entropía.

En esta sección se presentan solo los enunciados de los resultados que permiten definir entropía.

Definición 2.18 Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad.

a) Una partición de (X, \mathcal{A}, μ) es una familia $P \subset \mathcal{A}$ de conjuntos de medida positiva tales que $X = \bigcup P \pmod{0}$ y $\mu(A \cap B) = 0$ si $A, B \in P$, $A \neq B$. En tal caso P es una familia numerable. Los elementos de P se llaman átomos.

b) Si P y Q son particiones decimos que Q es un refinamiento de P lo que denotamos $P \leq Q$ si todo átomo de Q esta contenido en un átomo de $P \pmod{0}$. Esto implica que todo átomo de P es la unión de átomos de $Q \pmod{0}$.

Definición 2.19 Sean P y Q particiones finitas del espacio de probabilidad (X, \mathcal{A}, μ) . Sea $\phi(x) = x \log x$ si $0 < x \leq 1$, $\phi(0) = 0$.

a) Definimos la entropía de P como:

$$H(P) = H_\mu(P) = - \sum_{A \in P} \phi(\mu(A)).$$

b) Definimos la entropía condicional de P dado Q como:

$$H(P|Q) = \sum_{A \in P, B \in Q} \mu(B) \phi\left(\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}\right).$$

c) ϕ es convexa y $\phi(x) < 0$ si $0 < x < 1$.

b) Si \hat{I} es la partición trivial $\{X\}$ entonces $H(P|\hat{I}) = H(P)$

Proposición 2.20 Sean P, Q, M particiones de (X, \mathcal{A}, μ) . Denotamos por $P \vee Q$ la partición cuyos átomos son los conjuntos $A \cap B$ con medida positiva y $A \in P, B \in Q$. Entonces:

a) $H(P \vee Q|M) = H(P|M) + H(Q|M \vee P)$

b) Si $P \leq Q$, $H(M|P) \geq H(M|Q)$ y $H(P|M) \leq H(Q|M)$

c) $H(Q) \leq H(P) + H(Q|P)$

d) $H(P \vee Q|M) \leq H(P|M) + H(Q|M)$

e) Si $T : X \rightarrow X$ preserva μ entonces $H(T^{-1}P|T^{-1}Q) = H(P|Q)$

f) $H(P|Q) = 0 \Leftrightarrow P \leq Q$

Definición 2.21 Supongamos que $T : X \rightarrow X$ preserva medida y sea P una partición, definimos la entropía $h(T, P)$ de T respecto a P como:

$$h(T, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(P \vee T^{-1}P \vee \dots \vee T^{-(n-1)}P)$$

Proposición 2.22 Se tiene que:

Definición 2.23 a) $h(T, P) - h(T, Q) \leq H(P|Q)$

b) Si $P \leq Q$ entonces $h(T, P) \leq h(T, Q)$

c) $h(T, T^{-1}P) = h(T, P)$

d) $\forall n \geq 0, h(T, P \vee T^{-1}P \vee \dots \vee T^{-n}P) = h(T, P)$

e) $h(T, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(P|T^{-1}P \vee \dots \vee T^{-n}P)$.

f) La sucesión $\{\frac{1}{n}H(P \vee T^{-1}P \vee \dots \vee T^{-(n-1)}P)\}$ es decreciente

Definición 2.24 La entropía de una transformación

$T : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ que preserva medida se define como: $h(T) = h_\mu(T) = \sup\{h(T, P) : P \text{ es partición finita}\}$

Observación 2.25 $h(T) = \sup\{h(T, P) : H(P) < \infty\}$

Definición 2.26 Si A_n es una familia de subconjuntos de $X \forall n \in \mathbb{N}$, $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n$ es la σ -álgebra generada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Teorema 2.27 Sean $P_1 \leq P_2 \leq \dots$ y sea P una partición con $H(P) < \infty$. Entonces $P \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} P_i \pmod{0}$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} H(P|P_n) = 0$.

Corolario 2.28 Si $P_1 \leq P_2 \leq \dots$ es una sucesión de particiones con entropía finita tal que $\mathcal{A} = \bigvee_{n=1}^{\infty} P_n$, entonces

$$h(T) = \sup_n h(T, P_n)$$

Definición 2.29 Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad supongamos que $T : X \rightarrow X$ es invertible y preserva μ . Una partición P con $H(P) < \infty$ se llama T -generador si $\bigvee_{n=1}^{\infty} T^n P = \mathcal{A}$

Corolario 2.30 (Kolmogorov-Sinai) Si P es T -generador entonces:

$$h(T, P) = h(T)$$

Corolario 2.31 Si P es una partición tal que $H(P) < \infty$ y $\bigvee_{n=1}^{\infty} T^n P = \mathcal{A}$, entonces $h(T, P) = h(T)$.

2.6 Exponentes de Liapunov. Teoría de Pesin.

2.6.1 Exponentes de Liapunov.

Sea p un punto fijo del difeomorfismo $f : A \rightarrow A$, de un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^d$. Queremos estudiar el comportamiento de f^n ($n \in \mathbb{Z}$) en una vecindad de p . Como una primera aproximación a f consideremos su parte lineal (es decir, la derivada) $(f)'_p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \bar{\alpha}_{r+1}, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s$ todas las raíces distintas del polinomio característico de $(f)'_p$. En esta secuencia suponemos que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son números reales y las raíces conjugadas complejas (como $\alpha_s, \bar{\alpha}_s$) aparecen con el mismo subíndice. Sean también \tilde{m}_j , $1 \leq j \leq s$ sus respectivas multiplicidades. El teorema de Jordan (en su forma canónica real) establece que estas raíces (eigenvalores de $(f)'_p$) están asociadas a eigenespacios generalizados $(f)'_p$ -invariantes \tilde{E}_j , $1 \leq j \leq s$, cuyas dimensiones son \tilde{m}_j respectivamente para $1 \leq j \leq r$ y $2\tilde{m}_j$ para $r < j \leq s$ (en este último caso el espacio \tilde{E}_j está asociado al par $\alpha_j, \bar{\alpha}_j$). Además $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^r \tilde{E}_i$. Note que como f es un difeomorfismo, entonces $\det (f)'_p \neq 0$, de aquí tenemos que $\alpha_j \neq 0$ para toda j .

Si v_i es un eigenvector de \tilde{E}_i entonces $(f^n)'_p v_i = \alpha_i^n v_i$, y de esto tenemos

$$\log \left\| (f^n)'_p v_i \right\| = n \log |\alpha_i| + \log \|v_i\|$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto no es cierto para cualquier vector $v_i \in \tilde{E}_i$, pero es cierto que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| (f^n)'_p v_i \right\| = \log |\alpha_i| \quad (1)$$

para cualquier $0 \neq v_i \in \tilde{E}_i$. Esto muestra que cuando $|\alpha_i| > 1$, el vector $(f^n)'_p v_i$ crece con rapidez exponencial cuando $n \rightarrow \infty$ y decrece exponencialmente cuando $n \rightarrow -\infty$. Si $|\alpha_i| < 1$, entonces se cumple lo contrario. Si $|\alpha_i| = 1$, entonces no hay crecimiento o contracción exponencial, pero puede haber crecimiento o contracción de una forma moderada del vector $(f^n)'_p v_i$.

La ecuación (1) sugiere que no estudiemos los eigenvalores α_i , pero sí el logaritmo de sus módulos, $\lambda_i = \log |\alpha_i|$ los cuales son llamados exponentes de Liapunov del mapeo f en el punto fijo p . Notamos que algunos eigenvalores distintos $\alpha_i \neq \alpha_j$ corresponden al mismo exponente de Liapunov si $|\alpha_i| = |\alpha_j|$. En este caso cada vector no cero de la suma directa del espacio correspondiente $\tilde{E}_i \oplus \tilde{E}_j$ satisface (1). Así, tenemos una descomposición de \mathbb{R}^d como una suma directa de subespacios $\tilde{E}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{E}_{m(p)}$ tal que si $0 \neq v_i \in \tilde{E}_i$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| (f^n)'_p v_i \right\| = \lambda_i(p) \quad (2)$$

donde $\lambda_i(p)$ es el exponente de Liapunov asociado a p .

Además, si no hay exponentes de Liapunov nulos en el punto fijo p (diremos que tal punto es hiperbólico), podemos sumar todos los subespacios con exponentes de Liapunov negativos y todos los subespacios con exponentes de Liapunov positivos para obtener, respectivamente, subespacios E^u y E^s , tal que:

- 1) $\mathbb{R}^d = E^u \oplus E^s$,
- 2) $f'_p(E^s) = E^s$ y $f'_p(E^u) = E^u$
- 3) Existe $\lambda > 0$ y $n_0 \geq 1$ tal que para todo $|n| \geq n_0$

$$\frac{1}{n} \log \left\| (f^n)'_p v \right\| \leq -\lambda \quad v \in E^s, \quad \|v\| = 1$$

y

$$\frac{1}{n} \log \left\| (f^n)'_p v \right\| \geq \lambda \quad v \in E^u, \quad \|v\| = 1$$

Esto significa que los vectores de E^s son contraídos por iteraciones hacia adelante de f'_p y se expanden por iteraciones hacia atrás de f'_p . Y viceversa para los vectores de E^u . Notamos que puede pasar que $E^u = \{\vec{0}\}$ o $E^s = \{\vec{0}\}$. Estaremos primeramente interesados en el estudio de puntos hiperbólicos.

El teorema de Grobman-Hartman [28] asegura que en un punto fijo hiperbólico el comportamiento de f es similar a su parte lineal. Precisamente, para subespacios (f'_p) -invariantes E^u , E^s les corresponden subvariedades $W^s(p)$, $W^u(p) \subset A$ f -invariantes (inmersas diferenciables en A) tales que:

- 1) $T_p W^s(p) = E^s$ y $T_p W^u(p) = E^u$,
- 2) Hay una vecindad $U(p) \subset A$ tal que

$$f(W^s(p) \cap U(p)) \subset W^s(p) \text{ y } f(W^u(p) \cap U(p)) \subset W^u(p)$$

y

- 3) Tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = p \quad y \in W^s(p)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(y) = p \quad y \in W^u(p)$$

Es necesario para nuestro estudio subsecuente especificar la velocidad de convergencia en 3). Denotemos por $dist(\cdot, \cdot)$ la distancia en la variedad Riemanniana M . Sea $\lambda > 0$ tal que no hay exponentes de Liapunov en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$. Así podemos especificar 3) como:

- 3') Tenemos

$$dist(f^n(y), p) \leq C \exp^{-\lambda n} \quad y \in W^s(p)$$

y

$$\text{dist}(f^{-n}(y), p) \leq C \exp^{-\lambda n} \quad y \in W^u(p)$$

para todo $n \geq 0$ y alguna constante $C > 0$.

Si p no es un punto fijo, pero sí periódico, con periodo k , todos estos resultados se aplican al mapeo $f^k : A \rightarrow A$.

Si p no es un punto periódico, podemos definir exponentes de Liapunov de manera similar.

Definición 2.32 Sea el mapeo f^n diferenciable en un punto $p \in M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Supongamos que el espacio tangente $T_p M$ es una suma directa de subespacios $E_1 \oplus \cdots \oplus E_m(p)$ tal que si $0 \neq v_i \in E_i$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| (f^n)'_p v_i \right\| = \lambda_i(p)$$

Entonces los valores $\lambda_i(p)$ son llamados exponentes de Liapunov en el punto p , cuyas multiplicidades son $\dim E_i$.

Para un punto hiperbólico $p \in M$, tenemos $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$, donde

$$E_p^s = \bigoplus_{\lambda_i(p) < 0} E_i \quad y \quad E_p^u = \bigoplus_{\lambda_i(p) > 0} E_i \quad (4)$$

Definición 2.33 Sea M una unión finita de variedades Riemannianas compactas M_1, M_2, \dots, M_s , todas de la misma dimensión $d \geq 2$, pegadas a lo largo de un número finito de C^1 subvariedades de codimensiones positivas. Estas subvariedades están contenidas en G , la unión de un número finito de C^1 subvariedades compactas de codimensiones positivas en M_1, M_2, \dots, M_s . Entonces $V = M \setminus G$ es un subconjunto abierto denso de M . Por último, sea $N \subset V$ un conjunto abierto y $f : N \rightarrow V$ un C^r difeomorfismo ($r \geq 1$) entre N y su imagen, es decir, un difeomorfismo inmerso de N sobre V . Llamamos a f un mapeo suave con singularidades.

Note que el mapeo inverso f^{-1} está bien definido en el conjunto abierto $f(N)$. De aquí, f^{-1} es también un mapeo suave con singularidades. Denotemos por $H = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n N$ el conjunto de puntos donde todas las iteraciones de f están definidas.

Teorema 2.34 (Oseledec) Supongamos que el mapeo $f : N \rightarrow V$ preserva la medida de probabilidad Borel μ en M y $\mu(H) = 1$. Si

$$\int_{\mu} \log^+ \left\| (f)'_p \right\| d\mu(p) < \infty$$

y

$$\int_{\mu} \log^+ \|(f^{-1})'_p\| d\mu(p) < \infty$$

donde $\log^+ s = \max\{\log s, 0\}$, entonces existe un conjunto $E \subset H$ f -invariante, $\mu(E) = 1$, tal que para cualquier punto $p \in E$ todos los exponentes de Liapunov existen.

2.6.2 Teoría de Pesin.

El teorema de Oseledec implica que μ -c.t.p. $x \in H$ tiene todos sus exponentes de Liapunov $\lambda_1(x) < \dots < \lambda_{m(x)}(x)$. El conjunto de todos los puntos hiperbólicos en N son a menudo llamados región de Pesin de f :

$$\Sigma(f) = \{x \in H : \lambda_i(x) \neq 0, \text{ para cualquier } i = 1, \dots, m(x)\}.$$

Notamos que la región de Pesin $\Sigma(f)$ es invariante bajo f . En cualquier punto $x \in H$ tenemos los subespacios usuales E_x^s y E_x^u definidos por (4), y sea

$$\lambda^+(x) = \min\{\lambda_i(x) > 0\} \quad y \quad \lambda^-(x) = \max\{\lambda_i(x) < 0\}$$

el más pequeño (en valor absoluto) exponente positivo y negativo, respectivamente.

Agregando algunas condiciones técnicas que no explicaremos en este trabajo se puede probar:

Teorema 2.35 Para μ -c.t.p. $x \in \Sigma(f)$ existe una $\delta(x) \in (0, r(x, N))$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ pequeña y una vecindad V el conjunto

$$W^s(x) = \left\{ y \in V_{\delta(x)}(0) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \log \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^-(x) + \varepsilon \right\}$$

es una variedad C^∞ diferenciable (estable). Similarmente.

$$W^u(x) = \left\{ y \in V_{\delta(x)}(0) : \limsup_{n \rightarrow -\infty} \log \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \geq \lambda^+(x) - \varepsilon \right\}$$

es una variedad C^∞ diferenciable (inestable). También tenemos

$$T_x W^s(x) = E_x^s \quad y \quad T_x W^u(x) = E_x^u$$

Notamos que estas variedades son transversales en x , es decir, ellas se intersectan en el punto x y el ángulo entre ambas es positivo.

Las variedades estable e inestable, $W^s(y)$ y $W^u(y)$, son transversales una a la otra en cualquier $y \in \Sigma(f)$, (y, de hecho, su límite esta lejos de cero en una vecindad de x). Note también que $\dim W^s(y) + \dim W^u(y) = \dim M$ por hiperbolicidad.

Teorema 2.36 (Pesin) Sea $\mu(\Sigma(f)) > 0$. Entonces existen conjuntos $\Sigma_i \subset \Sigma(f)$, $i = 0, 1, 2, \dots, J$ ($J \leq +\infty$) tal que

i) $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup \Sigma_i = \Sigma(f)$;

ii) $\mu(\Sigma_0) = 0$ y $\mu(\Sigma_i) > 0$ para $i > 0$;

iii) $f(\Sigma_i) = \Sigma_i$ para $i \geq 0$;

iv) $f|_{\Sigma_i}$ es ergódica con respecto a μ_{Σ_i} para $i > 0$.

Además, para cualquier $i > 0$ tenemos $\Sigma_i = \Sigma_{i,1} \cup \dots \cup \Sigma_{i,J(i)}$ con algún $1 \leq J(i) < \infty$ tal que

v) $\Sigma_{i,j} \cap \Sigma_{i,k} = \emptyset$ para $j \neq k$;

vi) $f(\Sigma_{i,j}) = \Sigma_{i,j+1}$ para $1 \leq i < J(i)$ y $f(\Sigma_{i,J(i)}) = \Sigma_{i,1}$;

vii) el mapeo $f^{J(i)}$ restringido a $\Sigma_{i,j}$ es mezclador para cualquier $1 \leq j < J(i)$.

Definición 2.37 Si $\mu(\Sigma(f)) = 1$, esto es, si la región de Pesin tiene medida total en N , diremos que el mapeo f es hiperbólico no uniforme, o que tiene comportamiento caótico.

Agregando algunas condiciones técnicas que no explicaremos en este trabajo se puede probar:

Teorema 2.38 (Fórmula de Pesin) Supongamos que la medida μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en N , y supongamos que existe $C_3 > 0$ y $c > 0$ tal que para cualquier $x \in N$ tenemos $\|f'_x\| < C_3 d(x, s)^{-c}$. Entonces la entropía de f con respecto a la medida μ es

$$h_\mu(f) = \int_H \sum_{\lambda_i(x) > 0} \lambda_i(x) \dim E_i(x) d\mu$$

es decir, la entropía es igual a la suma promedio de todos los exponentes de Liapunov positivos, contando sus multiplicidades.

2.6.3 Caos y Orden.

Finalmente discutiremos las relaciones entre las tres propiedades mas importantes en la teoría de sistemas dinámicos suaves.

1. Hiperbolicidad (todos los exponentes de Liapunov son no nulos, cuando $\mu(\Sigma(f)) = 1$).

2. Entropía positiva: $h_\mu(f) > 0$;

3. Ergodicidad (y su versión fuerte mezclador).

Cada una de estas propiedades de alguna forma representa caos en sistemas dinámicos. Sin embargo no hay una definición común adoptada para el término caos, cada una de las propiedades arriba mencionadas se puede ver como una posible definición formal de caos.

Aunque estas propiedades no son equivalentes, y de hecho, ninguna de ellas implica lógicamente a ninguna de las otras dos (bajo algunas condiciones, la hiperbolicidad implica entropía positiva, como en el teorema de Pesin). Pero es mas importante para nuestros propósitos que estas tres propiedades caractericen aspectos diferentes de comportamiento caótico de sistemas dinámicos. La entropía positiva es la característica mas local de todas -un pequeño subconjunto $E \subset M$ f -invariante de medida pequeña, $\mu(E) > 0$, puede ser usado para hacer $h_\mu(f) > 0$, mientras en el resto del espacio $M \setminus E$ el mapeo f puede no ser caótico en algún sentido. La hiperbolicidad es también una condición local (esto caracteriza la separación de trayectorias próximas), pero por lo menos debe mantenerse casi donde quiera, ya que se requiere $\mu(\Sigma(f)) = 1$. Sin embargo no hay garantía de que un mapeo hiperbólico f sea ergódico o mezclador, la región de Pesin $\Sigma(f)$ puede ser descompuesta hasta en un número numerable de subregiones que no se intersectan.

La ergodicidad es la propiedad mas global de las tres. Aún así, sólo ergodicidad no implica hiperbolicidad, o caos para esta materia.

Una observación final. El fracaso de la ergodicidad en sistemas con entropía positiva y región de Pesin grande es un fenómeno bastante común en sistemas Hamiltonianos. Esto fue extensamente estudiado por Kolmogorov, Arnold y Moser, cuya teoría es ahora llamada teoría KAM. Ellos descubrieron que para mapeos Hamiltonianos típicos $f : M \rightarrow M$, hay algunas regiones $D \subset M$ f -invariantes de medida positiva donde la dinámica es muy estable. Esto significa que todos los exponentes de Liapunov en D son cero y cada región D contiene un subconjunto de medida positiva, el cual es la unión de curvas f -invariantes, una característica que hace a la dinámica dentro de D casi integrable. Tal región estable ocurre alrededor de un punto periódico $p \in M$, $f^n(p) = p$, cuando el espectro de la derivada

$(f^n)'_p : T_p M \rightarrow T_p M$ está situado en el círculo unitario (hay algunas otras condiciones técnicas que omitiremos). Tales puntos periódicos son llamados elípticos (opuestos a hiperbólicos), y las regiones estables alrededor de estos puntos son llamadas islas elípticas o islas estables. En un sistema Hamiltoniano típico, las islas estables coexisten con grandes regiones de Pesin $\Sigma(f)$ de medida positiva. La región de Pesin es algunas veces llamada mar caótico. En este mar, uno puede encontrar pequeñas islas estables separadas de $\Sigma(f)$ por algunas curvas f -invariantes. Tal ilustración es típica como muestran varios experimentos numéricos. El fenómeno de coexistencia de comportamiento estable y caótico en sistemas dinámicos no está muy bien entendido todavía, y éste es uno de los más intrigantes asuntos en la física-matemática moderna.

En este sentido (existencia de regiones estables), presentaremos una versión del teorema de KAM en dimensión 2. Empezamos definiendo la rotación de una función en \mathbb{R}^2 : en coordenadas polares tienen la siguiente forma $(r, \theta) \rightarrow (r, \theta + \alpha_0 + \alpha_1 r)$, $\alpha_0, \alpha_1 \neq 0$ constantes reales. Así como la rotación de la función mantiene invariantes las circunferencias $r = \text{constante}$, y produce rotación de ángulos que dependen de r .

Ahora sea $r \geq 4$, x_0 un punto fijo elíptico (los eigenvalores de f'_{x_0} son complejos conjugados, λ_1, λ_2 que satisfacen $\lambda_1 \lambda_2 = 1$), no degenerado ($\arg \lambda_1 = \alpha_0 + 0, \pm \pi/2, \pi, \pm 3\pi/2$), y f localmente conjugada a un mapeo de la rotación. La última condición significa que existe una vecindad U de x_0 , y un difeomorfismo C^4 , $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x_0) = 0$ tal que $(h \circ f \circ h^{-1})(r, \theta) = (r, \theta + \alpha_0 + \alpha_1 r) + F$, donde (r, θ) son las coordenadas polares de $h(U \cap f^{-1}(U))$ y las derivadas de F hasta el tercer orden, en 0, son nulas. La expresión del segundo miembro es conocida como la forma normal de Birkhoff.

En estas condiciones el teorema de KAM establece que dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad V de x_0 y un conjunto $V_0 \subset V$ tal que $\mu(V \setminus V_0) \leq \varepsilon \mu(V)$. V_0 es la unión de curvas invariantes simples de clase C^{r-1} , $x_0 \in \text{int} V_0$ y la restricción de f para estas curvas es topológicamente equivalente a una rotación irracional.

En resumen, el teorema de KAM establece que si f es C^4 y x_0 es un punto fijo elíptico no degenerado (recuerda que f es μ -invariante), entonces existe una familia de curvas invariantes, que cubre a un conjunto de medida positiva. En esta región hay exponentes de Liapunov que se anulan: f no es ergódica ya que V_0 contiene conjuntos invariantes de medida positiva y no totales.

Capítulo 3

Billares.

3.1 Billares Planos.

Un billar plano es un sistema dinámico descrito por el movimiento libre de una masa puntual en el interior de una región acotada Q (que llamaremos "mesa del billar") contenida en el plano, la cual choca elásticamente con el borde. Éste consiste de un conjunto finito de arcos cerrados ∂Q_i que son de clase C^3 sin curvatura nula, o segmentos de recta. En ambos casos el valor absoluto de la curvatura $|K|$ es acotada: Las componentes regulares del borde $\partial \overset{\circ}{Q}_i = \partial Q_i \setminus \cup_{j \neq i} \partial Q_j$ pueden tener curvatura positiva (componente focalizador), negativa (dispersor) o cero (neutral). La dirección de la parametrización de $\partial \overset{\circ}{Q}_i$ y el signo de K son determinados por el vector normal: si $n(q)$ es el vector normal unitario interior a $\partial \overset{\circ}{Q}_i$ en q , entonces $q(s)$ es la parametrización de $\partial \overset{\circ}{Q}_i$ mediante la longitud de arco tal que $q''(\bar{s}) = K n(q)$, $n(q) = K i q'(\bar{s})$ donde i es el operador $\pi/2$ -rotación, $q(\bar{s}) = q$.

La referencia estándar acerca de la formalización de la teoría de billares es [9] cap. 6.

La forma más simple de parametrizar el espacio de fase es medir la longitud de arco de ∂Q y considerar el ángulo θ que forma el vector de salida con la normal $n(q)$ a ∂Q en q , que será el mismo que el de entrada. Si L es la longitud total de ∂Q resulta que el espacio de fase es el rectángulo $[0, L] \times [-\pi/2, \pi/2]$ al que hay que sacarle las verticales que corresponden a los vértices $\partial \overset{\circ}{Q}_i \cap \partial \overset{\circ}{Q}_j$.

En esta sección probaremos algunas propiedades de la transformación de billar (diferenciabilidad, medida invariante, Teorema de Oseledec).

Definimos el conjunto

$$M_1 = \left\{ (q, v) : q \in \partial \overset{\circ}{Q}_i, \|v\| = 1, \langle v, n(q) \rangle > 0 \right\}$$

de parejas formadas por un punto en una componente regular y un vector unitario interior. Dado $x_1 = (q_1, v_1) \in M_1$, Tx_1 (si está definido) se obtiene con un movimiento hacia adelante en la tabla de billar, en la dirección v_1 , una distancia (tiempo) t_1 hasta la intersección con $\partial \overset{\circ}{Q}_j$ en q_2 . Formalmente $Tx_1 = (q_2, v_2)$ donde $v_2 = v_1 - 2 \langle v_1, n(q_2) \rangle n(q_2)$, $v_1 \cdot n(q_2) > 0$. Ver fig.1. Sean s_1, s_2 las longitudes de arco de $\partial \overset{\circ}{Q}_i, \partial \overset{\circ}{Q}_j$ en una vecindad de q_1, q_2 , respectivamente: $q_2(s_2) = q_1(s_1) + t_1 v_1(s_1)$; $K_j(s_j)$ la curvatura en $q_j(s_j)$; $\theta_j(s_j)$ el ángulo de $v_j(s_j)$ con $n(q_j(s_j))$, $j = 1, 2$.

Si la variable (\cdot) no está indicada, significa que estamos en un punto base, por ejemplo $K_2 = K_2(s_2(0))$.

Teorema 3.1 Si $x_1 = (q_1, v_1) \in M_1$, $Tx_1 = x_2 = (q_2, v_2) \in M_1$ y q_1, q_2 están en una componente regular de clase C^{r+1} del borde ($r \geq 1$), entonces T es un difeomorfismo local de clase C^r en alguna vecindad de x_1 .

Demostración

Sea $(F_1(s_1), G_1(s_1)), (F_2(s_2), G_2(s_2))$ la representación paramétrica de $\partial \overset{\circ}{Q}_i, \partial \overset{\circ}{Q}_j$, respectivamente, en una vecindad de $q_1 = q_1(s_1)$ y $q_2 = q_2(s_2)$ en un sistema cartesiano ortogonal xOy .

Sean $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$ como en la fig.1.

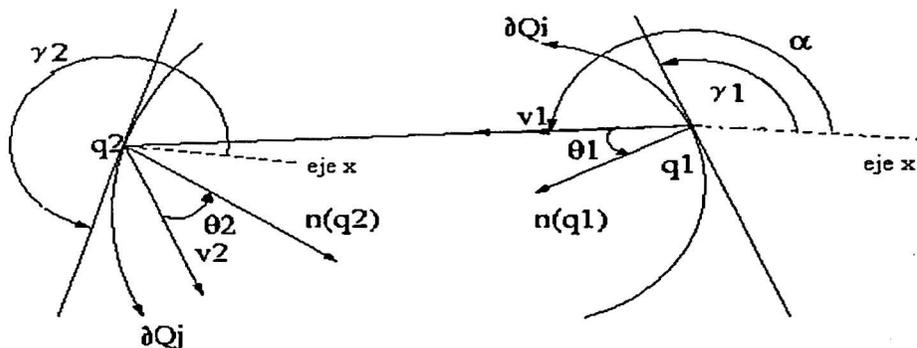


Figura. 1.

Los ángulos son medidos empezando en el eje positivo x . Esto resulta

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \alpha - \gamma_1 - \pi/2, \\ \theta_2 &= \gamma_2 - \alpha - \pi/2\end{aligned}$$

Si es necesario podemos rotar Q en el plano; entonces podemos suponer que $F'_1(s_1)$, $F'_2(s_2) \neq 0$ en una vecindad suficientemente pequeña de q_1 , q_2 , y

$$\begin{aligned}tg\gamma_i &= \frac{G'_i(s_i)}{F'_i(s_i)} \quad i = 1, 2, \\ tg\alpha &= \frac{G_2(s_2) - G_1(s_1)}{F_2(s_2) - F_1(s_1)}\end{aligned}$$

(omitimos variables s_i), y así

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \text{Arctg} \frac{G_2 - G_1}{F_2 - F_1} - \text{Arctg} \frac{G'_1}{F'_1} - \frac{\pi}{2} = L(s_1, s_2) \\ \theta_2 &= \text{Arctg} \frac{G'_2}{F'_2} - \text{Arctg} \frac{G_2 - G_1}{F_2 - F_1} - \frac{\pi}{2} = M(s_1, s_2)\end{aligned}$$

Estas dos funciones definen la transformación de billar T de clase C^r , de $x_1 = (s_1, \theta_1)$ a $x_2 = (s_2, \theta_2)$, con $H(x_1, T(x_1)) = 0$ si (teorema de la función implícita)

$$\det \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \neq 0$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} L(s_1, s_2) - \theta_1 = 0 \\ M(s_1, s_2) - \theta_2 = 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} L_{s_2} & 0 \\ M_{s_2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$-L_{s_2} = - \left(\frac{G'_2(F_2 - F_1) - F'_2(G_2 - G_1)}{(F_2 - F_1)^2 + (G_2 - G_1)^2} \right) = \frac{\cos \theta_2}{t_1}$$

Ya que $q_2 \neq q_1$, el denominador es diferente de cero y $\cos \theta_2$ será diferente de cero si el vector tangente (F'_2, G'_2) en q_2 y el vector de la trayectoria $v_1 = (F_2 - F_1, G_2 - G_1) \frac{1}{t_1}$ son linealmente independientes; esto sucede ya que estamos suponiendo $x_2 \in M_1$ y entonces las trayectorias no son tangentes a las curvas del borde.

Un argumento similar prueba que T^{-1} , definida en una vecindad de x_2 es también una función C^r . ■

Derivando H tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} T'(x_1) = 0$$

de aquí

$$\begin{aligned} T'(x_1) &= \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)^{-1} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{s_2}} & 0 \\ \frac{M_{s_2}}{L_{s_2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L_{s_1} & 1 \\ -M_{s_1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{L_{s_1}}{L_{s_2}} & \frac{1}{L_{s_2}} \\ -\frac{M_{s_2} L_{s_1}}{L_{s_2}} + M_{s_1} & \frac{M_{s_2}}{L_{s_2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (T'(x_1))^{-1} &= \left(-\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{M_{s_1}} \\ 1 & -\frac{L_{s_1}}{M_{s_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{s_2} & 0 \\ M_{s_2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{M_{s_2}}{M_{s_1}} & \frac{1}{M_{s_1}} \\ -\frac{M_{s_2} L_{s_1}}{M_{s_1}} + L_{s_2} & \frac{L_{s_1}}{M_{s_1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Si en alguna vecindad de $q_1, q_2 \in M_1$, las curvas del borde son C^2 , entonces para todo (s_1, θ_1) en una vecindad del valor correspondiente de x_1 , es válido*

$$T'(s_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} -\frac{L_{s_1}}{L_{s_2}} & \frac{1}{L_{s_2}} \\ -\frac{M_{s_2} L_{s_1}}{L_{s_2}} + M_{s_1} & \frac{M_{s_2}}{L_{s_2}} \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.3 *Si en la hipótesis del teorema anterior consideramos una vecindad suficientemente pequeña U de x_1 , entonces T restringida a U preserva la medida definida por $d\mu = \cos \theta ds d\theta$.*

Demostración Tenemos que

$$\det T' = -\frac{L_{s_1} M_{s_2}}{L_{s_2}^2} + \frac{M_{s_2} L_{s_1}}{L_{s_2}^2} - \frac{M_{s_1}}{L_{s_2}} = -\frac{M_{s_1}}{L_{s_2}} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}$$

De aquí, cambiando las variables de integración, tenemos

$$\begin{aligned} \mu(T(S)) &= \int_{T(S)} \cos \theta_2 ds_2 d\theta_2 = \int_S \cos \theta_2 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} ds_1 d\theta_1 \\ &= \int_S \cos \theta_1 ds_1 d\theta_1 = \mu(S) \end{aligned}$$

Para todo conjunto de Borel $S \subset U$. ■

Observación 3.4 a) *Damos el mismo nombre a la medida normalizada (si $d\mu = \cos \theta ds d\theta$ entonces $\mu = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta ds d\theta = 2ds$, $\mu(M_1) = \int_0^L 2ds = 2L$ por lo tanto la medida de toda la frontera es $2L$ donde L es la longitud de arco y con esto encontramos la medida normalizada), y de aquí ésta será usada: $\mu(M_1) = 1$. Esta medida es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en M_1 .*

b) *En vez del difeomorfismo T podemos considerar el flujo T^t , que actúa en el conjunto M_0 de las parejas (q, v) , $q \in Q$, $\|v\| = 1$. Se define como $T^t(q, v) = (q + tv, v)$ si $q + sv \notin \partial \overset{\circ}{Q}_i$ para $0 < s \leq t$ y $T^t(q, v) = (q_t, v_t)$ si hay único \bar{s} tal que $q + \bar{s}v \in \partial \overset{\circ}{Q}_i$, con $v_t = v - 2 \langle n, v \rangle n$, $n = n(q + \bar{s}v)$ y $q_t = q + \bar{s}v + (t - \bar{s})v_t$. Entonces si $(q, v) \in M_0$, sea $\gamma > 0$ tal que $x = T^{-\gamma}(q, v) \in M_1$; podemos introducir coordenadas en M_0 tomando el número γ y las coordenadas de x en M_1 . Entonces $d\nu = d\mu d\gamma$ es una medida invariante para T^t :*

$$\nu(T^t(A)) = \nu(A)$$

para cualquier conjunto de Borel A de M_0 . Ver [9].

c) H^+ es el conjunto de puntos de M_1 tal que T^k está definida y es continua para todo $k \in \mathbb{N}$. Este no incluye los puntos que en un futuro van a un vértice o cuyas trayectorias son tangentes (dispersoras) a una curva

del borde (ver fig.2). Definimos H^- , tomando k negativa en T^k .

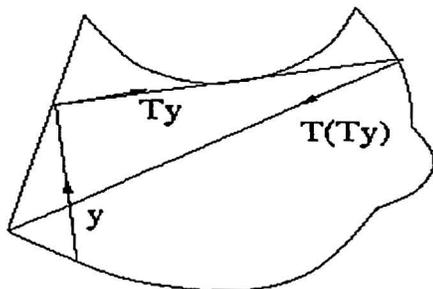


Figura 2.

d) F^+ es el conjunto de puntos cuyas trayectorias tienen infinitos rebotes en tiempo finito.

Sea N_{ij} el conjunto de elementos (q, v) de M_1 tal que $q + tv \in \partial \overset{\circ}{Q}_i \cap \partial \overset{\circ}{Q}_j$ para algún $t \in \mathbb{R}$, y C el conjunto de elementos $x_1 = (q_1, v_1) \in M_1$ tal que $Tx_1 = (q_2, v_2)$ verifica $\langle v_2, n(q_2) \rangle = 0$ (observe que en este caso $v_1 = v_2$). Resulta que $\cup_{i \neq j} N_{ij} \cup C = D$ es la unión de un conjunto numerable de curvas en M_1 . Así su medida de Lebesgue es cero, y $\mu(D) = 0$.

Teorema 3.5 Sea $V = \cup_{k \geq 0} T^{-k}(D)$ y $F^+ = \{x \in H^+ = M_1 \setminus V : \sum t_i(x) < \infty\}$ donde $t_i(x) = d(T^{i+1}x, T^i x)$. Entonces $\mu(V) = \mu(F^+) = 0$. (d es la distancia euclídeana en \mathbb{R}^2).

Demostración

V tiene medida nula por que es la unión numerable de conjuntos de medida cero.

Si $t(x) = d(x, Tx)$ resulta que $t(x) > 0$ μ -casi todo $x \in M_1$. Sea $A_m = \{x \in H^+ : t(x) > 1/m\}$, $m = 1, 2, \dots$. El conjunto de puntos $x \in A_m$ que regresan a A_m infinitas veces (teorema de recurrencia de Poincaré) tiene medida total. Ellos satisfacen $\sum t(T^i x) = +\infty$, pero $\cup_{m=1}^{\infty} A_m = H^+ \setminus F^+$, entonces en un conjunto de medida nula se verifica que $\sum t(T^i x) < \infty$. ■

Corolario 3.6 En $H = (H^+ \cap H^-) \setminus (F^+ \cup F^-)$, que tiene medida total, T es biyectiva, medible y preserva μ . Además, T es un difeomorfismo de clase C^r (si los arcos $\partial \overset{\circ}{Q}_i$ son de clase C^{r+1}) en un conjunto abierto de M_1 que contiene H . De aquí en adelante consideraremos $T : H \rightarrow H$.

Teorema 3.7 Si la longitud total del borde de un billar es finita, sus arcos ∂Q_i son C^3 y el valor absoluto de la curvatura es uniformemente acotado, entonces el teorema de Oseledec puede ser aplicado a la transformación de billar.

Demostración De la observación pasada y del hecho que

$$\begin{aligned} \|T'(x_1)\| &\leq \left\| \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)^{-1} \right\| \left\| \left(-\frac{\partial H}{\partial x_1} \right) \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{s_2}} & 0 \\ \frac{M_{s_2}}{L_{s_2}} & -1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -L_{s_1} & 1 \\ -M_{s_1} & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \frac{C}{\cos \theta_2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|(T'(x_1))^{-1}\| &\leq \left\| \left(-\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)^{-1} \right\| \left\| \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{M_{s_1}} \\ 1 & -\frac{L_{s_1}}{M_{s_1}} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} L_{s_2} & 0 \\ M_{s_2} & -1 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \frac{C_1}{\cos \theta_1} \end{aligned}$$

ya que la curvatura y t_1 son uniformemente acotados, basta probar que

$$\int_H \log^+ \|T'(s, \theta)\| \cos \theta ds d\theta < \infty \quad (\log^+ s = \max\{0, \log s\})$$

(el caso para $\int_H \log^+ \|(T'(x_1))^{-1}\| \cos \theta ds d\theta < \infty$ es analogo). Entonces

$$\begin{aligned} \int_H \log^+ \|T'(s, \theta)\| \cos \theta ds d\theta &\leq \int_H \log^+ \left(\frac{C}{\cos \theta_2} \right) \cos \theta ds d\theta \\ &\leq \int_H \left| \log \frac{C}{\cos \theta_2} \right| \cos \theta ds d\theta \\ &\leq |\log C| \int_H \cos \theta ds d\theta \\ &\quad - \int_H \log \cos \theta_2 \cos \theta ds d\theta \end{aligned}$$

Ya que $\int_H \cos \theta ds d\theta = \mu(H) = 1$, debemos probar que el otro término es tan grande como $-\infty$. Como μ es T -invariante

$$\int_H \log \cos \theta_2 \cos \theta ds d\theta = \int_H \log \cos \theta \cos \theta ds d\theta$$

y esta integral es acotada por que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log \cos \theta \cos \theta ds d\theta = \log 4 - 2,$$

y la longitud de la curva es finita. ■

Observación 3.8 a) En [15], parte V, es dado un ejemplo de un billar simplemente conexo cuyo borde es C^1 (todavía mas es C^∞ excepto en un punto), que verifica

$$\int_H \log^+ \|T'(s, \theta)\| \cos \theta ds d\theta = +\infty.$$

b) Muchas propiedades geométricas y ergódicas para difeomorfismos en variedades compactas son deducidas de la no anulación de los exponentes de Liapunov aplicando teoría de Pesin. Para deducir estas propiedades para nuestra transformación de billar podemos probar algunas condiciones en las derivadas de T . Como fue observado al principio de esta sección omitiremos tales consideraciones.

Una trayectoria que hace un número infinito de rebotes en un intervalo de tiempo finito, puede ocurrir igual para un billar plano estrictamente convexo cuyos bordes son tres veces diferenciables (pero esta tercera derivada es no acotada). Un ejemplo tal fue construido por B. Halpern. Su construcción mas bien involucra estimaciones meticulosas, su idea es, de cualquier modo, completamente transparente.

Consideremos una sucesión de puntos p_n del círculo unitario que convergen monótonamente a un punto del círculo (en el ejemplo las coordenadas angulares de p_n son iguales a $n^{1/2}$). Los puntos p_n son los puntos consecutivos de la reflexión de una trayectoria de billar en la curva de billar γ construída. Uniendo los puntos p_n obtenemos una trayectoria poligonal. La ley de reflexión determina la dirección de γ en los puntos p_n . Uno construye porciones pequeñas γ_n de γ a través de cada punto p_n y entonces uniendo γ_n en forma suave obtener γ . Omitimos los detalles; pero se puede consultar en [13]. Vale la pena mencionar que, en un sentido, el ejemplo de Halpern es el mejor posible. A saber, Halpern probó el siguiente teorema: si una curva de billar tiene una tercera derivada acotada y en ninguna parte se anula la curvatura, entonces el flujo de billar está definido para todos los tiempos.

3.2 Medida invariante y función generadora para billares planos. Formulación variacional.

Esta es otra prueba de la invarianza de la medida.

Sea Q una mesa de billar plana acotada. Considera la variedad V de vectores tangentes unitarios (q, v) con la dirección de v hacia adentro y el punto base q en el borde ∂Q . Si el borde consiste de una componente entonces V es el anillo $S^1 \times I$. Ahora definimos la transformación de billar T de V . Un vector (q, v) se mueve a lo largo de la línea a través de q en la dirección de v a el próximo punto q_1 de su intersección con ∂Q , y entonces v reflejado en ∂Q a un nuevo vector v_1 : $T(q, v) = (q_1, v_1)$.

Una propiedad muy notable de la transformación de billar T es la existencia de una forma de área invariante. Parametrizamos ∂Q por la longitud del parámetro s y sea θ el ángulo entre v y la dirección del borde en el punto $q(s)$. Use (s, ϕ) como las coordenadas en V , $\phi \in [0, \pi]$.

Lema 3.9 *La forma de área $\sin \phi d\phi \wedge ds$ es T - invariante.*

Demostración Sea $T(s, \phi) = (s_1, \phi_1)$. Uno quiere probar que

$$\sin \phi_1 d\phi_1 \wedge ds_1 = \sin \phi d\phi \wedge ds.$$

Sea $f(s, s_1)$ la distancia entre los puntos $q(s)$ y $q(s_1)$ que es lo que venimos llamando. Se sigue de geometría elemental que

$$\frac{\partial f(s, s_1)}{\partial s} = -\cos \phi \text{ y } \frac{\partial f(s, s_1)}{\partial s_1} = \cos \phi_1$$

de aquí

$$\cos \phi_1 ds_1 - \cos \phi ds = \frac{\partial f(s, s_1)}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial f(s, s_1)}{\partial s} ds = df$$

y tomando derivadas

$$\sin \phi_1 d\phi_1 \wedge ds_1 - \sin \phi d\phi \wedge ds = 0 \blacksquare$$

Consideremos tres puntos consecutivos $T(s, \theta) = (s_1, \phi_1)$, $T(s_1, \phi_1) = (s_2, \phi_2)$. Se sigue de la prueba previa que

$$\frac{\partial f(s, s_1)}{\partial s_1} = \cos \phi_1, \quad \frac{\partial f(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\cos \phi_1$$

De aquí

$$\frac{\partial f(s, s_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial f(s_1, s_2)}{\partial s_1} = 0$$

Esta fórmula tiene la siguiente interpretación. Supongamos que uno quiere comenzar la bola de billar en el punto q si después de reflejar en el borde en algún punto q_1 este llega al punto dado q_2 . ¿Cómo encuentra uno el punto no conocido q_1 ? respuesta: este punto es un punto crítico de la funcional $dist(q, q_1) + dist(q_1, q_2)$. Este principio variacional juega un papel importante en el estudio de billares.

3.3 Billares convexos.

3.3.1 Geometría elemental.

La tabla de billar mas simple es una circular. No hay mucho que decir acerca de este: cada trayectoria hace un ángulo constante con el borde y permanece tangente a un círculo concéntrico (ver Fig.3).

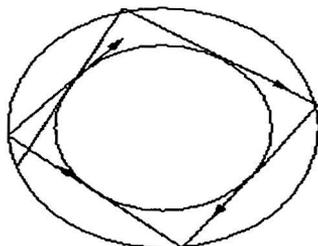


Figura 3.

La transformación inducida en este círculo tangente es una rotación a través de un ángulo fijo, esto es una traslación.

Si un segmento de una trayectoria en un círculo forma un ángulo con la normal cuya magnitud es racional, entonces la trayectoria es cerrada y en el espacio de fase se ve como en la figura 4, si el ángulo tuviera una magnitud irracional la trayectoria nunca cierra y en el espacio de fase se vería como

en la figura 5 (una hilera densa de puntos horizontal).

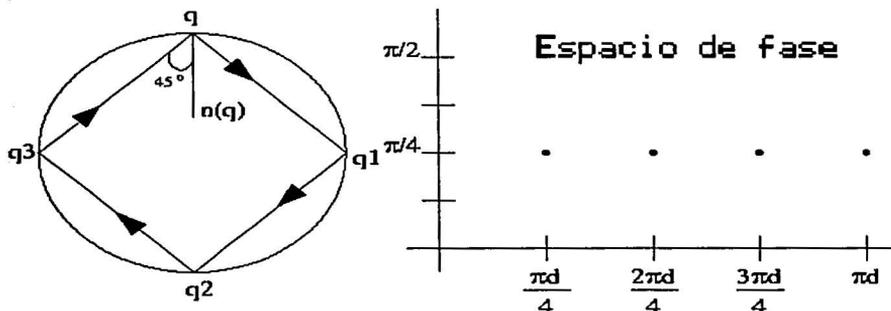


Figura 4.

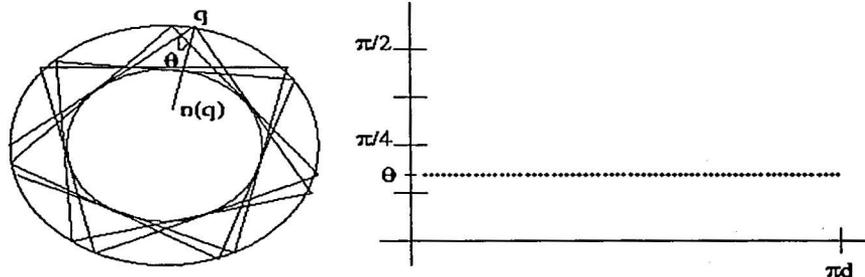


Figura 5

Definición 3.10 Una cáustica de un billar plano es una curva tal que si una trayectoria es tangente a ésta, entonces vuelve a ser tangente a esta después de toda reflexión.

Así los billares circulares tienen una familia de cáusticas, consistente de círculos concéntricos.

Ahora demos un vistazo a las elipses. Recordemos que una elipse consiste de puntos cuya suma de distancias a dos puntos dados es constante; estos dos puntos son llamados los focos de la elipse. Existen diferentes formas de construir una elipse, una de ellas es usar una cuerda cuyos extremos están fijos a dos puntos.

Una propiedad óptica muy conocida sobre elipses es la siguiente.

Un rayo de luz, que sale de un foco, llega al otro foco después de una reflexión en la elipse. En otras palabras, los segmentos que unen un punto de la elipse con los focos hacen igual ángulo con la elipse. No es difícil verificar esta propiedad.

Consideremos el siguiente problema: dada una línea l y dos puntos F_1 y F_2 en un lado de ésta, encuentra un punto X en l tal que la distancia es mínima.

Solución: refleja F_1 en la línea y una con F_2 por una línea recta. El punto de intersección con l es X . Se sigue que los ángulos hechos por F_1X y F_2X con l son iguales. Ver fig. 6.

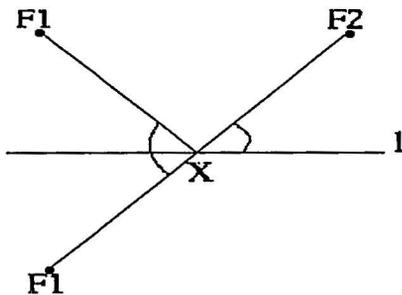


Figura 6.

Otra propiedad de la trayectoria de billar que pasa por los focos es que converge al eje mayor de la elipse. Veamos, considere segmentos consecutivos de la trayectoria. El punto A_2 es más próximo al eje mayor que A_1 , etc. Así, se puede demostrar que existe el límite A_∞ de la sucesión A_1, A_2, \dots ; y, de la misma manera, se ve la existencia del límite B_∞ de la sucesión B_1, B_2, \dots . El segmento $A_\infty B_\infty$ es por sí mismo trayectoria del billar. La bola de billar va de A_∞ a B_∞ y viceversa infinitas veces. Así el segmento $A_\infty B_\infty$ es perpendicular a la elipse en ambos extremos.

Este tipo de trayectoria se muestra en el espacio de fase figura 7, como se puede apreciar los puntos se van acumulando en dos puntos y el ángulo

va tendiendo a cero.

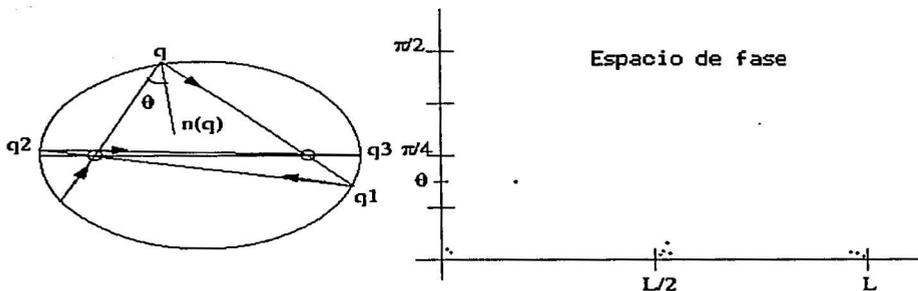


Figura 7.

Elipses e hipérbolas con el mismo foco son llamadas confocales. En las coordenadas cartesianas (x, y) ellas están dadas por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1, 0 < a < b$$

Aquí λ es un parametro variable; para $-b^2 < \lambda < -a^2$ la curva es una hipérbola, y para $-a^2 < \lambda$ la curva es una elipse.

El principal resultado en billares elípticos dice que ellos son completamente integrables.

Teorema 3.11 *Una mesa de billar elíptica tiene una familia de cáusticas, que consisten de elipses e hipérbolas confocales. Mas precisamente, si un segmento de una trayectoria de billar no intersecta el segmento determinado por los focos F_1 y F_2 , entonces todos los segmentos de esta trayectoria no intersectan $F_1 F_2$ y son todos tangentes a la elipse con focos F_1 y F_2 ; si un segmento de una trayectoria intersecta $F_1 F_2$, entonces todos los segmentos de esta trayectoria intersectan $F_1 F_2$ y son todos tangentes a la misma hipérbola con focos F_1 y F_2 .*

Demostración Sean $A_0 A_1$ y $A_1 A_2$ segmentos consecutivos de una trayectoria, ver figura 8. Supongamos que $A_0 A_1$ no intersecta el segmento $F_1 F_2$ (el otro caso es totalmente análogo), se sigue de la propiedad óptica que los ángulos $A_0 A_1 F_1$ y $A_2 A_1 F_2$ son iguales.

Reflejando F_1 en $A_0 A_1$ da F_1' , y F_2 en $A_1 A_2$ da F_2' , y sean

$$B = F_1' F_2 \cap A_0 A_1, C = F_2' F_1 \cap A_1 A_2.$$

Considere la elipse con focos F_1 y F_2 , que es tangente a A_0A_1 . Ya que los ángulos F_2BA_1 y F_1BA_0 son iguales, esta elipse toca a A_0A_1 en el punto B . Asimismo una elipse con focos F_1 y F_2 toca a A_1A_2 en el punto C . Uno quiere mostrar que estas dos elipses coinciden, o equivalentemente, que $F_1B + BF_2 = F_1C + CF_2$ lo cual nos llevaría a $F_1'F_2 = F_1F_2'$.

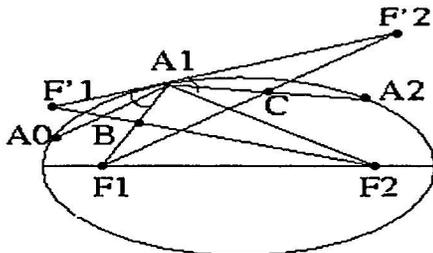


Figura 8.

Para tener esto observe que los triángulos $F_1'A_1F_2$ y $F_1A_1F_2'$ son congruentes: $F_1'A_1 = F_1A_1$, $A_1F_2 = A_1F_2'$ por simetría y los ángulos $F_1'A_1F_2$ y $F_1A_1F_2'$ son iguales. De aquí $F_1'F_2 = F_1F_2'$. ■

Entonces recordemos que billares acotados por diferentes cónicas confocales son integrables, por que sus cáusticas son cónicas confocales.

3.3.2 Tres aplicaciones geométricas.

La primera es un resultado muy elemental de la geometría euclidiana, si $AB + BF = AD + DF$, entonces $AC + CF = AE + EF$. Ver fig. 9.

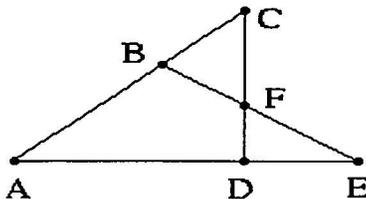


Figura 9.

Este teorema tiene una prueba sintética; sin embargo, se deducirá de integrabilidad de billares elípticos.

El teorema establece que si B y D pertenecen a una elipse con focos A y F , entonces C y E pertenecen a una elipse confocal.

Considere dos elipses confocales. Los billares en estas tienen la misma colección de cáusticas que como sabemos consisten de elipses confocales. La familia de rayos, tangentes a una cáustica, es una curva invariante de la transformación de billar del conjunto de rayos. En [32] página 16 se demuestra que esto implica que las dos transformaciones de billar conmutan.

Construimos las elipses Γ_1 y Γ_2 con focos A y F , que contienen los puntos B y C , respectivamente. La anterior elipse contiene a D ; uno quiere mostrar que la otra contiene a E . La reflexión de billar en Γ_2 , y entonces en Γ_1 envía el rayo AB a DA . Entonces la reflexión, primero en Γ_1 , y entonces en Γ_2 envía AB otra vez a DA . Esto significa que los puntos de intersección $BF \cap \Gamma_2$ y $AD \cap \Gamma_2$ coinciden. De aquí $E = BF \cap AD$ esta en Γ_2 . Fig.10.

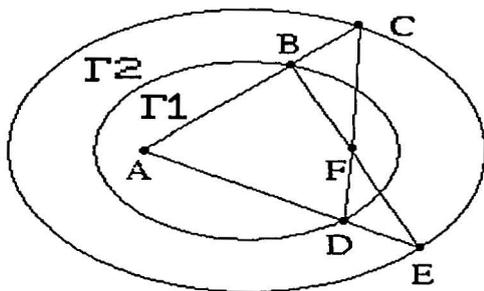


Figura 10.

La *segunda* es una construcción de una trampa para un rayo de luz, esto es, una curva reflejante tal que una colección de rayos paralelos de luz, reflejados en él, permanecen atrapados, esto fue resuelto por varias personas. Descubrimos la trampa construida por R. Peirone.

La curva γ es una parte de una elipse con focos F_1 y F_2 ; la curva Γ es una parábola con foco F_2 ver fig. 11. Estas curvas son unidas de manera suave para producir una trampa: se sigue de las propiedades antes mencionadas para cónicas, que un rayo v paralelo a el eje de la parábola entrando a la curva a través de una "ventana", tenderá al eje mayor de la elipse y por lo

tanto nunca escapa.

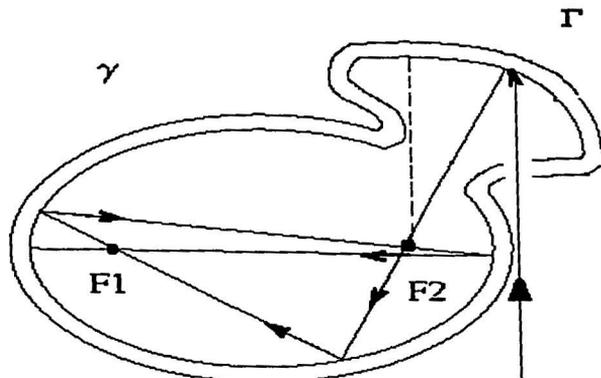


Figura 11.

Cambiamos el problema ligeramente, intentemos atrapar un conjunto de rayos suficientemente cerca a uno dado en el espacio de rayos (en otras palabras permitir que los rayos hagan un ángulo pequeño con uno dado). Sin embargo en este caso la trampa no existe, esto se sigue del teorema de recurrencia de Poincaré.

Veamos, sea U una vecindad en el espacio de rayos, que uno quiere atrapar. Cerramos la ventana de la trampa y consideremos el billar dentro de esta curva cerrada. Existe un rayo en U , que regresa a U después de un cierto número de reflexiones. El único camino para regresar a U es tener reflexiones en la parte de la curva que constituye la ventana, de aquí estos rayos no son atrapados.

La tercera aplicación concierne a un trabajo de iluminación. Sea una habitación con paredes de espejo; ¿es posible iluminar este con un punto como origen de luz, que emite rayos en todas direcciones?

Un ejemplo de un cuarto que no puede ser iluminado desde cualquiera de sus puntos, es mostrado en la figura 12. Las curvas superiores e inferiores son mitades de elipses con focos F_1F_2 y G_1G_2 . Ya que un rayo, que pase entre los focos, se refleja y pasa otra vez entre los focos, un rayo no puede entrar en el área sombreada de entre las líneas F_1F_2 y G_1G_2 , y viceversa. Una modificación de esta construcción produce una región que, para cualquier positivo n , requiere al menos n faros para su iluminación. Asimismo uno

construye una región acotada, cuyo borde es suave en todo menos en un punto, que no puede ser iluminado por un número finito de faros.

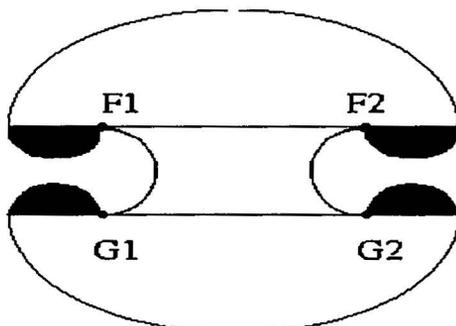


Figura 12.

3.3.3 Trayectorias periódicas.

¿Dada una curva de billar suave estrictamente convexa C^1 , el mapeo de billar tiene trayectorias periódicas, esto es, puntos en el espacio fase que regresan después de un cierto número de iteraciones?. Llamaremos rotación de una órbita periódica al número de vueltas que se da alrededor de la curva borde al volver a llegar al punto de partida $T^n(x) = x$. Estas trayectorias periódicas son polígonos inscritos, cuyos lados consecutivos hacen ángulos iguales con la curva del billar. Distinguímos la estrella formada por n -puntos con rotación r ver fig.13.

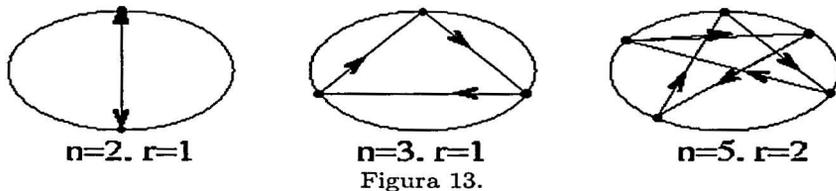


Figura 13.

La respuesta a la pregunta de arriba está dada por el siguiente teorema dado por G. Birkhoff.

Teorema 3.12 Para cualquier $n \geq 2$ y $r \leq \frac{1}{2}n$, coprimo con n , existen dos trayectorias n -periódicas geoméricamente distintas con rotación r .

Demostración

Considere el conjunto M de n puntos inscritos x_1, \dots, x_n . Entonces M es un toro n -dimensional. Sea f la función longitud $|x_1x_{r+1}| + |x_{r+1}x_{2r+1}| + \dots$. Esta función es suave fuera del conjunto singular $M_0 = \bigcup \{x_i = x_{i+1}\}$ (adoptando la convención $n + 1 = 1$). Sabemos de la sección 3.1 que los puntos críticos de la función f son trayectorias de billar.

Probaremos que para cualquier n existe una trayectoria n -periódica. El espacio M es compacto, f consigue su máximo en éste. Este máximo no se alcanza en M_0 : el perímetro de un k polígono $k < n$ puede ser incrementado por la introducción de un nuevo vértice ver fig. 14. Así este máximo corresponde a la trayectoria n poligonal.

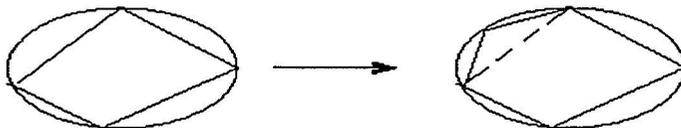


Figura 14.

Para probar el resultado por completo considere el conjunto de n -puntos con rotación r . Llamémosle N . Este conjunto es el "producto" de un círculo y un disco $(n - 1)$ -dimensional, y su borde consiste de polígonos degenerados de M_0 . La función f tiene por lo menos n máximos en N , obtenidos por permutaciones cíclicas de los vértices del mismo polígono de perímetro máximo en N .

Use el argumento mínimo-máximo para mostrar, que hay otro punto crítico de f dentro de N . Conectando dos máximos por una curva dentro de N y considerando el mínimo de f en ésta. Tomando el máximo de estos mínimos de todas las curvas posibles. Este es también un punto crítico de f , que no es el máximo. Algo difícil es establecer su existencia.

La razón para considerar r coprimo con n , es que, de lo contrario, el argumento de arriba puede producir un polígono con pocos vértices, transversal a sí mismo varias veces. ■

Se sigue, que hay al menos $\phi(n)$ órbitas n -periódicas distintas, donde $\phi(n)$ es el número de enteros, menores que n y coprimos con n .

El siguiente caso particular puede ilustrar un poco la prueba de este teorema. Considere trayectorias 2-periódicas de una parte a otra, esto es, la cuerda de la curva de billar, perpendicular a ésta en ambos extremos. Una de tales curvas es fácilmente encontrada: es el diámetro; es decir, la cuerda mas grande de la curva. Ya que la curva del billar es estrictamente convexa hay una única cuerda de longitud máxima en cada familia de cuerdas paralelas.

Así uno tiene una familia paramétrica de las longitudes de estas cuerdas, parametrizadas por sus direcciones, cuyo elemento inicial es el diámetro, y cuyo elemento final es el mismo diámetro con el punto final intercambiado. En esta familia existe una cuerda mas corta, y esta cuerda es perpendicular a la curva en ambos extremos. Esta es la segunda trayectoria de billar 2-periódica deseada.

Después de establecer la existencia de trayectorias periódicas, a uno le gustaría aprender acerca de su estabilidad.

Definición 3.13 *Un punto fijo p de un mapeo T es estable (en el sentido de Liapunov) si para cualquier vecindad U de x existe una vecindad V tal que la órbita $\bigcup_{-\infty < i < \infty} T^i(V)$, esta contenida en U .*

Dada una trayectoria n -periódica de la bola de billar, considere un punto fijo del mapeo T^n . La derivada de T^n en un punto fijo es una transformación lineal que preserva el área del plano; de aquí su determinante es igual a 1. Generalmente dos casos son posibles: los eigenvalores son reales recíprocos distintos, o son números complejos conjugados distintos con norma igual a 1. En el primer caso llamado hiperbólico el mapeo lineal es una rotación hiperbólica; el punto fijo no es estable (igual que en la aproximación lineal). En el último caso llamado elíptico el mapeo lineal es una rotación, y el punto fijo es estable en la aproximación lineal. Se sigue de la teoría de KAM, que en la posición general, existen curvas invariantes del mapeo T^n cerca del punto fijo. Así una trayectoria elíptica periódica es generalmente estable.

La condición de estabilidad para una órbita 2-periódica se estudia como sigue. Sea t la longitud del segmento de una trayectoria, y r_1, r_2 son los radios de curvatura (con signo) de la frontera en los puntos de rebote.

Lema 3.14 *Una orbita 2-periódica es elíptica si y sólo si*

$$\frac{r_1 + r_2 - t}{r_1 r_2} > 0 \text{ y } \frac{(t - r_1)(t - r_2)}{r_1 r_2} > 0.$$

Ya que una trayectoria periódica es un punto crítico de la funcional de longitud, otra aproximación al problema de estabilidad es vía el estudio de la matriz Hessiana en este punto crítico.

En un billar elíptico la trayectoria a lo largo del eje menor es estable. Y la trayectoria del eje mayor es hiperbólica (inestable). El conjunto de rayos a través de uno y otro foco constituye una curva, invariante bajo la transformación de billar, que une los dos puntos de esta trayectoria 2-periódica (esta curva es llamada una separatriz) ver la figura. Cualquier

punto de la separatriz va a uno de los dos puntos (B en la figura 15) bajo iteraciones positivas del mapeo de billar, y al otro (punto A) bajo negativas.

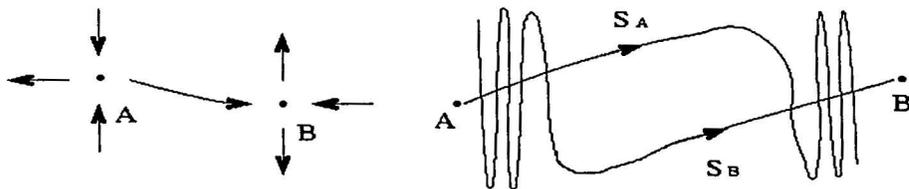


Figura 15.

Hacer una perturbación pequeña de la curva de billar. La trayectoria hiperbólica 2-periódica persistirá (todavía será el diámetro de la curva), sin embargo las curvas construidas arriba para los nuevos puntos A y B no coincidirán necesariamente. De manera más precisa, sea S_A la curva que consiste de puntos x con $T^{-n}x \rightarrow A$ cuando $n \rightarrow \infty$, y $S_B = \{x : T^n x \rightarrow B, n \rightarrow \infty\}$. Si las curvas S_A y S_B se intersectan una vez, ellas se intersectan infinitas veces por que ambas son invariantes bajo el mapeo de billar. Las dos curvas constituyen una telaraña complicada, cuya existencia no va de acuerdo con la integrabilidad.

Levallois y Tabanov analizaron el corte de separatrices en el caso cuando la perturbación de la mesa de billar es la siguiente curva de grado 4:

$$x = a \cos \alpha, y = b \sin \alpha (1 + \varepsilon \cos^2 \alpha), \alpha \text{ es un parametro pequeño.}$$

Ellos prueban que para toda ε suficientemente pequeña las separatrices se intersectan transversalmente, y estima los ángulos hechos por estas en los puntos de intersección. V. Donnay obtuvo un resultado similar para perturbaciones pequeñas de una elipse en una vecindad de un punto; esta perturbación cambia la curvatura, pero preserva el punto y la dirección tangente en este.

3.4 Billares Hiperbólicos

Llamaremos billares hiperbólicos o caóticos a aquellos cuya transformada de billar tiene exponentes de Liapunov no nulos en μ -casi todo punto del espacio de fase.

Avances más recientes en el estudio de propiedades ergódicas de billares planos son descritos por el Teorema general sobre la no anulación de exponentes de Liapunov. Este teorema se refiere a la construcción de familias

invariantes de conos o formas cuadráticas crecientes de Liapunov. Ambos métodos son esencialmente equivalentes y fueron introducidos por Wojtkowski [34,35] y Markarian [23,25], respectivamente [10 años antes Pesin y Sinai (1981) escribieron que el estudio de propiedades ergódicas de billares vía la teoría de sistemas dinámicos discontinuos (funciones suaves con singularidades) condujeron al problema no muy simple de checar que la característica de los exponentes de Liapunov del sistema son diferentes de cero. Hasta ahora el único método efectivo (pero no riguroso) para checar es el cálculo de exponentes característicos usando una computadora digital].

Fue probada la existencia de una clase grande de billares planos con componentes regulares focalizadores del borde los cuales tienen comportamientos caóticos.

Se demostró que los siguientes tipos de componentes focalizadores C^4 pueden ser parte del borde de billares caóticos:

a) Arcos de curvas que satisfacen $\frac{d^2r}{ds^2} < 0$ [35]. En este grupo están las epicicloides, las hipocicloides, la cicloide y en particular, la cardioide (curva cerrada cuya ecuación en coordenadas polares es $r(t) = 1 + \cos t$, $-\pi \leq t \leq \pi$). El arco de elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $b^2 > a^2$, con $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ también satisface esta condición.

b) Arcos que satisfacen $L_2(t_1 + t_2) < 2t_1t_2$ para sucesivos rebotes en el mismo componente focalizador. Esta condición se verifica localmente (trayectorias con segmentos cortos) si $\frac{d^2(r^{1/3})}{ds^2} > 0$ (donde L es la longitud de la trayectoria dentro del círculo de semicurvatura). Para trayectorias largas otras condiciones deben ser agregadas. Por ejemplo en la elipse previa debe ser $\sin^2 t > \frac{b^2}{b^2+a^2}$ que corresponde a un arco disjunto con el anterior. Ver [23], p.93.

c) Cualquier arco focalizador corto, donde la brevedad está definida por la negatividad del desarrollo de Taylor en una vecindad de uno de sus puntos. El primer término de este desarrollo tiene orden par e implica la cuarta derivada de la curva. Ver [24,25] y [10].

Como cerrar una mesa de billar con arcos neutrales o dispersores y curvas focalizadoras fueron discutidas en los libros mencionados en a) y b). En [23] se da una descripción que incluye todo lo mencionado previamente. Las dos siguientes familias de billares tienen comportamiento caótico:

1. Componentes C^3 del borde pueden ser de cualquier tipo excepto que el focalizador debe ser C^4 y satisfacer a) o c). Referente a componentes no adyacentes el círculo de semicurvatura en cada punto de cada componente focalizador no contiene puntos de cualquier otra componente regular o del círculo de semicurvatura de otros componentes focalizadores. Componen-

tes focalizadores adyacentes que forman ángulos interiores mas grandes que π . Componentes adyacentes focalizadores y dispersores forman ángulos no menores que π , y componentes adyacentes focalizadores y neutrales forman ángulos mas grandes que $\pi/2$. Los ángulos entre componentes adyacentes es siempre no cero.

2. Componentes regulares C^3 del borde pueden ser de cualquier tipo excepto que el focalizador debe ser C^4 y satisfacer b) o c). Los círculos de curvatura de componentes focalizadores no pueden contener puntos de otras componentes. Condiciones en arcos adyacentes son como en el caso 1.

En [10] se define una clase de curvas (llamadas arcos focalizadores) que pueden ser parte de billares caóticos si ellas son unidas por segmentos suficientemente largos, cerrando regiones convexas. Un arco focalizador es una curva $C^\infty \gamma(s)$, $0 \leq s \leq \bar{s}$ con $\int_0^{\bar{s}} K(s)ds < \pi$. Se prueba que en la elipse referida arriba, su mitad con $x \geq 0$ es un arco focalizador si y solo si $a/b < \sqrt{2}$.

En [35], apendice c, se describe un billar con comportamiento caótico y tres componentes ergódicos, por lo menos.

Curvas que satisfacen las igualdades a) y b) pueden ser partes de billares de tipo 1 o 2. Arcos de circunferencias estan en los bordes de ambas condiciones. Pero si estos son perturbados las propiedades ergódicas pueden fallar. Este es el caso de billares de Bunimovich con mas de una semicircunferencia o el billar "cacahuate" estudiado numericamente en [14] que satisface la descripción 1 o 2 con $\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d^2(r^{1/3})}{ds^2} = 0$.

En [25] se prueba que arcos mas pequeños que semicircunferencias pueden ser C^4 perturbados manteniendo comportamiento caótico. En particular, el ejemplo mas conocido de tipo billar de Bunimovich, el estadio (ver fig. 16) puede tener ambas de sus semicircunferencias perturbadas si mantenemos los segmentos y la tangencia de ellos con los arcos perturbados en

los puntos de contacto.

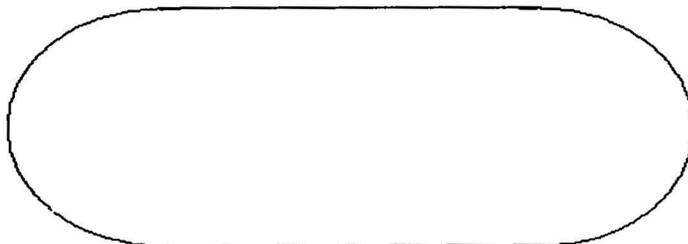


Figura 16. Arcos de circunferencias unidos por rectas.

Ahora, teniendo variedades locales invariantes, podemos adaptar el argumento que Hopf usó para probar la ergodicidad de flujos geodésicos (los cuales también fueron usados en conjuntos hiperbólicos compactos). Dos dificultades aparecen inmediatamente, cuando intentamos extender a fibras estables e inestables.

a) Hay cambios en la pendiente de las fibras invariantes debido a la existencia de ángulos en los bordes así como trayectorias que son tangentes a los bordes.

b) La longitud de las componentes suaves de la variedad invariante pueden ser muy pequeñas.

Estas dificultades fueron resueltas estudiando la probabilidad de que las componentes suaves de la variedad invariante fueran muy pequeñas. Mas precisamente se estudia la medida del conjunto de los puntos donde las variedades locales tienen longitud pequeña menor que δ , cuando $\delta \rightarrow 0$.

Este es el contenido del Teorema Fundamental para Billares Dispersores [4]. Este permite probar ergodicidad local y global. La ergodicidad local significa que cualquier vecindad pequeña de todo "punto bueno" está contenida en un componente ergódico de T (en este caso, T verifica una fuerte propiedad ergódica en este conjunto: es un sistema de Kolmogorov).

En [30] y [18] fue presentada una mejor versión del Teorema Fundamental, ahora para billares semi-dispersores.

La base de estas ideas fue probar que billares dispersores (todos los componentes regulares del borde tienen $K < 0$) o semidispersores ($K \leq 0$) los cuales tienen casi todas sus trayectorias pasando por puntos con $K < 0$, son ergódicos. La siguiente condición debe ser también satisfecha: $\partial \dot{Q}_i$

, $\partial\dot{Q}_j$ no tienen normal común en $\partial\dot{Q}_i \cap \partial\dot{Q}_j$; esto es, ellos deben tener intersecciones transversales.

Estas construcciones también simplifican el estudio de órbitas periódicas, pero hay estimaciones de su número para billares semidispersores hecho en [31] usando métodos completamente independientes.

En [3] fue probado que la ergodicidad se mantiene si:

- a) En una vecindad de cada ángulo de un billar dispersor ambos arcos del borde son substituidos por un arco de circunferencia Γ_i ;
- b) Γ_i y Γ_j son arcos de circunferencias diferentes si $i \neq j$;
- c) La parte de la circunferencia Γ_i que no esta en el borde del nuevo billar esta completamente contenido en la superficie del billar.

Bunimovich mostró en [5] que billares ergódicos pueden ser construidos con arcos de circunferencias y segmentos (sin componentes dispersores). La figura mas conocida de este tipo es el estadio. El da una versión mejorada de este resultado en [6]. En este trabajo probó que un billar plano es ergódico si su borde verifica todas las condiciones dadas al principio de la sección 3.1 y

- i) Hay por lo menos un componente regular focalizador y uno no focalizador del borde;
- ii) Todos los componentes regulares focalizadores son arcos de circunferencia Γ_i tal que $\Gamma_i/\partial Q$ es no vacío y contenido en el interior de Q ;
- iii) Los componentes dispersores del borde se intersectan uno al otro y los componentes neutrales se intersectan transversalmente.
- iv) La parte neutral del borde consiste de a lo más dos componentes regulares.

Bibliografía

- [1] Arnold, V. I. & Avez, A. (1967), Problèmes ergodiques de la Mécanique Classique. Paris: Gauthier-Villars.
- [2] Baryshnikov, Yu. Indices for Extremal Embeddings of 1-Complexes, Adv. in Soviet Math., Amer. Math. Soc., t. 1, 1990, p. 137-144.
- [3] Bunimovich, L.A. (1974), On billiards close to dispersing. Math. USSR. Sb. 23, No. 1, 45-67.
- [4] Bunimovich, L.A. & Sinai, Ya. G. (1973), On a fundamental theorem in the theory of dispersing billiards, Math. USSR. Sb. 19. 407-423.
- [5] Bunimovich, L.A. (1979), On ergodic properties of nowhere dispersing billiards. Commun. Math. Phys. 65, 295-312.
- [6] Bunimovich, L.A. (1990), A Theorem on Ergodicity of Two-Dimensional Hyperbolic Billiards. Commun. Math. Phys. 130, 599-621.
- [7] Carmo, Manfredo do (1979), Geometría Riemanniana. Río de Janeiro: IMPA.
- [8] Chernov, N & Markarian, R., Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards. IMCA, Lima (2001)
- [9] Cornfeld, I. P.; Fomin, S. V. & Sinai, Ya. G. (1982), Ergodic Theory (Berlin, Heidelberg, New York: Springer).
- [10] Donnay, V. Perturbations of Elliptic Billiards. Preprint.
- [11] Douady, R. (1982), Applications du Théorème des tores invariants. These. Université Paris VII.
- [12] Gallavotti, G. & Ornstein, D.S. (1974), Billiards and Bernoulli Schemes. Commun Math. Phys. 38, 83-101.

- [13] Halpern B. 1977, Strange Billiard Table, Trans. Amer. Math. Soc., p. 297-305.
- [14] Hayli, A. & Dumont, Th. (1986), Experiences numeriques sur les billiards C^1 formés de quatre arcs de cercles. Celestial Mechanics 38, 23-66.
- [15] Katok, A. & Strelcyn, J. M. in collaboration with Ledrappier F., Przytycki, F. (1986), Smooth maps with singularities. Invariant Manifolds. Entropy and Billiards. Lecture Notes in Mathematics 1222, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [16] Katok, A., Periodic and Quasi-Periodic Orbits for Twists Maps, Lect. Notes in Phys., t. 179, 1983, p. 47-65.
- [17] Khinchin, A. I. (1949), Mathematical Foundations of Statistical Mechanics (New York: Dover).
- [18] Krámlí, A.; Simányi, N. & Szász, D. (1991), A "transversal" fundamental theorem for Semi-Dispersing Billiards. Commun Math. Phys. 535-560.
- [19] Lazutkin, V. F. (1973), On the existence of caustics for the billiard ball problem in a convex domain. Math. USSR Izv. 7, 185-215.
- [20] Levallois, Ph., Tabanov, M. Séparation des séparatrices du billiard elliptique pour une perturbation algébrique et symétrique de l'ellipse, C.R. Acad. Sci., t. 316, 1993, p. 589-592.
- [21] Mackay, R., Meises, J., Linear Stability of Periodic Orbits in Lagrangian Systems, Phys. Lett., 98 A, 1983, p. 92-94.
- [22] Mañe, R. (1983) Introducao à Teoria Ergódica. Rio de Janeiro, IMPA.
- [23] Markarian, R (1988), Billiards with Pesin region of measure one. Commun Math. Phys. 118, No. 1, 87-97.
- [24] Markarian, R (1989), Non Uniform Hyperbolicity. Billiards. In Workshop on Dynamical Systems, ICTP, Trieste, 1988. Edited by Z. Coelho and E. Shiels. Longman, 129-135.
- [25] Markarian, R (1990), Non Uniform Hyperbolicity billiards. Tese de doutoramento. Rio de Janeiro, IMPA.

- [26] Markarian, R (1991), The Fundamental Theorem of Sinai-Chernov for dynamical systems with singularities
- [27] Markarian, R (1993), Introduction to the ergodic theory of plane billiards. Dynamical Systems, Santiago de Chile 1990. Edited by R. Balmón, R. Labarca, J. Lewowicz and J. Pallis (Harlow, Longman) pp. 327-439.
- [28] Perko, Lawrence. Differential equations and dynamical systems, New York : Springer-verlag, c1991.
- [29] Royden, H L, Real analysis, New York : Macmillan, c1963
- [30] Sinai. Ya. G. & Chernov, N. I. (1987), Ergodic Properties of two dimensional discs and three dimensional balls. Russ. Math. Surv. 42:3,181-207.
- [31] Stojanov, L. (1989), An Estimate from above of the number of periodic orbits for semi-dispersed billiards. Commun. Math. Phys. 124, 217-227.
- [32] Tabachnikov, Serge (1995), Billiards [Paris] Societe Mathematique de France.
- [33] Walters, P. (1982), An Introduction to Ergodic Theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [34] Wojtkowski, M. (1985), Invariant families of cones and Lyapunov exponents. Ergod. The & Dynam. Sys. 5, 145-161.
- [35] Wojtkowski, M. (1986), Principles for the desing of billiards with non-vanishing Lyapunov exponents. Commun. Math. Phys. 105, 391-414.