



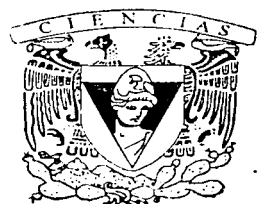
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"SISTEMAS DE FACTORIZACION COMO ALGEBRAS DE EILENBERG-MOORE"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
J O E L Z A M O R A R A M O S

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS



2002



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
 ASESORIA
 MÉRIDA

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
 Facultad de Ciencias
 Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"SISTEMAS DE FACTORIZACION COMO ALGEBRAS DE EILENBERG-MOORE",
 realizado por Joel Zamora Ramos

con número de cuenta 8927087-1 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
 Propietario

Dr. Francisco Marmolejo Rivas

Propietario

Dr. José Ríos Montes

Propietario

Dra. Martha Takane Imay

Suplente

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Suplente

Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas

Consejo Departamental



de Ciencias

M. en C. José Arfaola Gómez

CONSEJO DEPARTAMENTAL

1

SISTEMAS DE FACTORIZACIÓN COMO ÁLGEBRAS DE EILENBERG-MOORE



TESIS PRESENTADA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO
POR EL GRADO DE MATEMÁTICO
EN LA FACULTAD DE CIENCIAS

Por
Joel Zamora Ramos
Departamento de Matemáticas
Julio 2002

Contenido

Agradecimientos	5
Prefacio	7
0 Preliminares	11
0.1 Categorías	12
0.2 Adjunciones	14
0.3 Conos y límites	19
1 Mónadas	23
1.1 Mónadas	24
1.2 Álgebras para una mónada	29
1.3 T -Álgebras al menos tan completas como \mathcal{D}	40
2 2-Categorías	45
2.1 2-Categorías	46
2.2 2-Adjunciones	53
2.3 2-Mónadas y T -álgebras	54
2.4 El comonoide 2 y su mónada inducida en Cat	56
3 Sistemas de Factorización	61
3.1 Sistemas de Factorización Ortogonales	62
3.2 Sistemas de Factorización de Eilenberg-Moore	76
4 Sistemas de Factorización como Álgebras de Eilenberg-Moore	93
4.1 Funtores relacionados con $(-)^2$	94

4.2	Álgebras y Sistemas de Factorización	100
	Referencias	125

4.2	Álgebras y Sistemas de Factorización	100
	Referencias	125

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mis padres por darme la vida y por motivarme siempre a ser mejor con su dedicación y esfuerzo, a mi mamá por siempre cuidar de nosotros y a mi papá por siempre trabajar tan duro para que nada nos falte, a mis hermanos por ser siempre un apoyo.

Agradezco también a mi asesor Francisco Marmolejo por enseñarme tanto a lo largo de este tiempo y por cuidar hasta el último detalle trabajando jornada doble en la parte final de esta tesis. A todos mis sinodales, a Pepe Ríos por apoyarme siempre y por ser una inspiración para seguir en álgebra, igual que Hugo Rincón, a Martha Takane y a Francisco Raggi por todo el tiempo que dedicaron a revisar esta tesis.

Quiero agradecer de manera especial a Oscar Palmas por apoyarme todo el tiempo, y a todas y cada una de las personas con las que conviví e hicieron mejor mi estancia en la facultad y que por falta de espacio y temor a excluir a alguna de ellas no doy sus nombres.

Prefacio

Durante las últimas décadas los sistemas de factorización han sido objeto de estudio, conforme ha pasado el tiempo se ha logrado dar cada vez una definición mas compacta, en los últimos años, un sistema de factorización es presentado por dos clases \mathcal{E} y \mathcal{M} de morfismos, la primera cerrada bajo composición con isomorfismos por la izquierda y la segunda cerrada bajo composición con isomorfismos por la derecha, tal que cualquier morfismo f , se factoriza como $f = m_f \cdot e_f$ con $e_f \in \mathcal{E}$ y $m_f \in \mathcal{M}$ (la propiedad del llenado diagonal), i.e, cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & C \\ u \downarrow & \nearrow d & \downarrow v \\ B & \xrightarrow{m} & D. \end{array}$$

con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$ admite un único morfismo $d : C \rightarrow B$ que hace conmutar los dos triángulos en el diagrama. En esta tesis además de tratar a los sistemas de factorización de esta forma, definiremos un sistema de factorización débil como un funtor $F : \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ tal que $FI_{\mathcal{K}} \simeq Id_{\mathcal{K}}$, veremos que sin pérdida de generalidad podemos considerar la igualdad $FI_{\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}}$ y entonces, un sistema de factorización de Eilenberg-Moore ($E-M$ sistema) es definido como sistema de factorización débil F tal que, si $\mathcal{E}_F = \{h | m_h \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{M}_F = \{h | e_h \text{ es invertible}\}$, entonces para toda $f \in \mathcal{K}$, $e_f \in \mathcal{E}_F$ y $m_f \in \mathcal{M}_F$. Es decir en estos sistemas tenemos una factorización funtorial de los morfismos de la categoría. Uno de los puntos en la tesis es la demostración de que los sistemas de factorización son equivalentes a los $E-M$ sistemas. Y el segundo punto es la demostración de que para el caso concreto de la 2-mónada asociada a $(-)^2$, los sistemas de factorización son equivalentes a las pseudoálgebras normales para $(-)^2$.

La tesis tiene la siguiente estructura: dedicaremos las primeras páginas a preliminares y lo pondremos como capítulo cero; en esta parte daremos las definiciones de categoría, adjunción y cono, en esta última veremos ejemplos que dan lugar a conceptos importantes como son límites y productos fibrados, los cuales utilizaremos en esta tesis.

En el capítulo uno introduciremos el concepto de Mónada, veremos que está íntimamente relacionado con el concepto de adjunción, dado que cualquier adjunción da lugar a una mónada; e inversamente veremos que cualquier mónada viene de una adjunción, dando sólo la solución máxima al problema de encontrar una adjunción de la cual una mónada proviene. Para esto introduciremos el concepto de Álgebras para una mónada y así la categoría de Eilenberg-Moore, veremos al final de este capítulo que esta categoría es al menos tan completa como la categoría base.

En el capítulo dos definiremos conceptos básicos de 2-categorías, los cuales utilizaremos en el capítulo cuatro y demostraremos que cualquier objeto de Cat tiene estructura de comonoide, viendo al final el caso de 2 (la categoría con 2 objetos y solo un morfismo entre ellos) como objeto de Cat y su 2-mónada inducida en Cat .

El capítulo tres es dedicado a sistemas de factorización ortogonales; aquí daremos una definición muy compacta y veremos que de ésta se desprenden varias propiedades, algunas de las cuales corresponden a propiedades que incluyen en su definición otros autores. Definiremos sistemas de factorización de Eilenberg-Moore; en los cuales tenemos una factorización funtorial de los morfismos de la categoría y concluiremos el capítulo demostrando que los sistemas de factorización ortogonales y los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore son equivalentes.

En el capítulo cuatro y último de esta tesis, trabajaremos con la 2-mónada asociada al endo-2-functor $(-)^2$, demostrando al final que en este caso en particular las pseudo-álgebras normales para esta 2-mónada son equivalentes a los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore.

En general todo el material de la tesis puede consultarse en libros estandar de teoría de categorías y artículos de álgebra y categorías. Al final de la tesis damos una bibliografía básica, la cual nos sirvió para desarrollar esta tesis; para lograr ésto tomamos fragmentos de cada una de las referencias y desarrollamos todo el trabajo que no se hace en estas, con la finalidad de hacerlo más accesible al lector. En este proceso nos encontramos con algunos contratiempos como son el error al final del artículo de Tholen y Korostenski [9], del cual extrajimos el título de la tesis, este error pudo haber sido porque en el tiempo que escribieron el artículo no se sabía tanto acerca de coherencia como en la actualidad y tuvimos suerte al aparecer el artículo de Rosebrugh

y Wood [10], el cual corrige el error. Nos apoyamos fuertemente en el primer capítulo en las notas de Jaap van Oosten [2] para la parte de mónadas y en el libro de Lambek y Scott [3] para la parte de resoluciones. En el capítulo dos utilizamos el artículo de Paré y Makkai [7] y el de Marmolejo [12], y en la última parte del capítulo el de Tholen y Korostenski [9]. Para el capítulo tres tomamos como base la definición de sistema de factorización que dan Janelidze y Tholen [13] y entonces tomamos bibliografía como Barr y Wells [5], Carboni, Janelidze, Kelly y Paré [14] para demostrar que todas las propiedades que dan estos autores son propiedades que se demuestran con la definición en este capítulo, y para demostrar la equivalencia entre $E\text{-}M$ sistemas de factorización y los sistemas de factorización ortogonales lo tomamos de Korostenski y Tholen [9]. El último capítulo es extraído del artículo de Rosebrugh y Wood [10] y para hacerlo más accesible al lector empezamos por definir los funtores que se utilizan a lo largo del capítulo.

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones de categoría, funtor, transformación natural y algunos ejemplos, definiremos adjunción $F \dashv G$, si hay una biyección natural entre morfismos: $\mathcal{C}(FD, C) \xrightarrow{\theta_{D,C}} \mathcal{D}(D, GC)$ para cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$, y veremos que esto es equivalente a tener funtores $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$, junto con $\eta : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow GF$ y $\varepsilon : FG \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$ transformaciones naturales que satisfacen las identidades triangulares $(G\varepsilon) \cdot (\eta G) = id_G$ y $(\varepsilon F) \cdot (F\eta) = id_F$. Definiremos conos, y veremos ejemplos que dan lugar a conceptos importantes como son límites, igualadores y productos fibrados, los cuales utilizaremos en esta tesis.

0.1 Categorías

Definición 1. Una categoría \mathcal{C} consta de:

i) Una clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$.

ii) Una clase de flechas o morfismos $Mor(\mathcal{C})$, los cuales tienen la siguiente estructura.

iii) Cada flecha $f : X \longrightarrow Y$ tiene un dominio $dom(f) = X$ y un codominio $cod(f) = Y$ los cuales son objetos de \mathcal{C} . Y para cada par de flechas $f, g \in Mor(\mathcal{C})$, tales que $cod(f) = dom(g)$, hay una composición gf definida como

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{gf}$

iv) La composición de flechas es asociativa, explícitamente en la situación

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W,$$

tenemos $h(gf) = (hg)f$.

v) Para cualquier objeto X de \mathcal{C} , hay una flecha identidad id_X que satisface $fid_X = f$ y $id_Xg = g$ para $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Z \longrightarrow X$.

Ejemplo 1.

1) Escribiremos $\mathbf{0}$ para la categoría vacía, la cual no tiene objetos ni morfismos.

2) Escribiremos $\mathbf{1}$ para la categoría con un objeto $*$ y un morfismo, id_* .

3) Escribiremos $\mathbf{2}$ para la categoría con dos objetos $0, 1$, un morfismo entre ellos α e identidades, la cual escribiremos también como $\{ 0 \xrightarrow{\alpha} 1 \}$.

4) **Con** es la categoría de conjuntos, la cual tiene la clase de todos los conjuntos como objetos y funciones entre ellos como morfismos.

Veremos en el siguiente ejemplo que hay categorías que tienen como objetos a estructuras matemáticas y como morfismos a funciones que preservan estructura.

5) **Top** es la categoría de espacios topológicos y funciones continuas. **Grp** es la categoría de grupos y homomorfismos de grupos. De la misma forma está **An** la categoría de Anillos y **Gra** la categoría de gráficas.

6) Un monoide es un conjunto X junto con una operación binaria, la cual se escribe como multiplicación: xy para $x, y \in X$, la cual es asociativa y tiene un elemento unidad $e \in X$ que satisface $ex = xe = x$ para todo $x \in X$. Un monoide es una categoría con un objeto y un morfismo para cada $x \in X$.

7) Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto X junto con una relación binaria \leq la cual es reflexiva ($x \leq x$ para toda $x \in X$) antisimétrica (si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$ para toda $x, y \in X$) y transitiva (si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$ para toda $x, y, z \in X$). Un conjunto parcialmente ordenado es una categoría con el conjunto de objetos X y exactamente un morfismo en toda la categoría: $x \longrightarrow y$ si y solo si $x \leq y$.

Definición 2. Si \mathcal{C}, \mathcal{D} son categorías, un funtor de \mathcal{C} a \mathcal{D} , es una operación F la cual asigna a cada objeto C de \mathcal{C} un objeto FC de \mathcal{D} y a cada morfismo f de \mathcal{C} un morfismo Ff de \mathcal{D} de tal forma que F respeta dominio y codominio y satisface:

$$i) F(f \cdot g) = Ff \cdot Fg.$$

$$ii) F(id_C) = id_{FC} \text{ para cada } C \in \mathcal{C}.$$

Ejemplo 2.

1) Hay un funtor identidad $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, para cada categoría \mathcal{C} .

2) Para cualquier categoría \mathcal{C} , hay un único funtor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{1}$ y un único $\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}$.

3) Hay un funtor $U : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Con}$ que asigna a cada espacio topológico (X, τ) , su conjunto subyacente X y a cada función continua le asigna simplemente la función sin la estructura. Llamaremos a este funtor "funtor que olvida", este olvida la estructura matemática. Similarmente hay un funtor que olvida de $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Con}$, $U : \mathbf{An} \longrightarrow \mathbf{Con}$, $U : \mathbf{Gra} \longrightarrow \mathbf{Con}$.

Nota 1. Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ son funtores, definimos la composición

de la forma obvia. Esta composición resulta un funtor y además con el funtor identidad para cada categoría, obtenemos una categoría \mathbf{Cat} la cual tiene categorías como objetos y funtores como morfismos.

Definición 3. Una transformación natural entre dos funtores $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, consta de una familia de morfismos $(\mu_C : FC \longrightarrow GC)_{C \in \mathcal{C}}$ indexada por la clase de objetos de \mathcal{C} y satisface que para cualquier morfismo $f : C \longrightarrow C'$ en \mathcal{C} , el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} FC & \xrightarrow{\mu_C} & GC \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FC' & \xrightarrow{\mu_{C'}} & GC' \end{array}$$

conmuta en \mathcal{D} . A esta propiedad la llamaremos naturalidad, diremos que μ_C es la componente en C de μ y denotaremos a la transformación natural por $\mu : F \Rightarrow G$.

Nota 2. Si $\mu : F \Rightarrow G$ y $\eta : G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales, obtenemos una transformación natural por su composición $(\eta\mu)_C = \eta_C \mu_C : FC \longrightarrow HC$ y con esto obtenemos una categoría $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ con funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ como objetos y transformaciones naturales como morfismos.

0.2 Adjunciones

Definición 4. Consideremos dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} y dos funtores F, G entre ellas de la siguiente forma $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$. Diremos que F es adjunto izquierdo de G , o que G es adjunto derecho de F y lo escribiremos como $F \dashv G$, si hay una biyección natural entre morfismos:

$$\mathcal{C}(FD, C) \xrightarrow{\theta_{D, C}} \mathcal{D}(D, GC)$$

para cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$.

La naturalidad significa que, si $d : D \longrightarrow D'$ esta en \mathcal{D} y $c : C' \longrightarrow C$ en \mathcal{C} , el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(FD', C') & \xrightarrow{\theta_{D', C'}} & \mathcal{D}(D', GC') \\
 \mathcal{C}(Fd, c) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(d, Gc) \\
 \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\theta_{D, C}} & \mathcal{D}(D, GC)
 \end{array}$$

conmuta en **Con**. Recuerde que si $f : FD' \longrightarrow C'$, entonces $\mathcal{C}(Fd, c)(f) = c f Fd$; explícitamente la composición

$$FD \xrightarrow{Fd} FD' \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{c} C.$$

Tenemos entonces lo siguiente:

Empecemos con una adjunción como arriba, definimos morfismos η_D y ε_C para cada $D \in \mathcal{D}$ y $C \in \mathcal{C}$ como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(FD, FD) & \xrightarrow{\theta_{D, FD}} & \mathcal{D}(D, GFD) \\
 1_{FD} \dashv \longrightarrow & & \eta_D
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(FGC, C) & \xleftarrow{\tau_{GC, C}} & \mathcal{D}(GC, GC) \\
 \varepsilon_C \longleftarrow & & 1_{GC}
 \end{array}$$

es decir $\theta_{D, FD}(id_{FD}) = \eta_D$ y $\tau_{GC, C}(id_{GC}) = \varepsilon_C$, donde $\tau = \theta^{-1}$. Observemos que por naturalidad de θ el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(FD, FD) & \xrightarrow{\theta_{D, FD}} & \mathcal{D}(D, GFD) \\
 \mathcal{C}(FD, f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(D, Gf) \\
 \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\theta_{D, C}} & \mathcal{D}(D, GC)
 \end{array}$$

conmuta para cada f en \mathcal{C} . Si perseguimos elementos en este diagrama, obtenemos:

$$\begin{array}{ccc}
 1_{FD} \dashv \longrightarrow & \eta_D \\
 \downarrow & \downarrow \\
 f \dashv \longrightarrow & \theta_{D, C}(f) = Gf \eta_D.
 \end{array}$$

Es decir $\theta_{D,C}(f) = Gf \eta_D$. Análogamente obtenemos que $\tau_{D,C} = \varepsilon_C Fg$ para cada g en \mathcal{D} .

Veamos entonces que $\eta : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow GF$ y $\varepsilon : FG \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$ son transformaciones naturales. Para η tenemos que demostrar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\eta_D} & GFD \\ d \downarrow & & \downarrow GFd \\ D' & \xrightarrow{\eta_{D'}} & GFD', \end{array}$$

conmuta para todo morfismo $d : D \rightarrow D'$ en \mathcal{D} . Para esto basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C(FD', FD') & \xrightarrow{\theta_{D',FD'}} & \mathcal{D}(D', GFD') \\ C(Fd, FD') \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(d, GFD') \\ C(FD, FD') & \xrightarrow{\theta_{D,FD'}} & \mathcal{D}(D, GFD'). \end{array}$$

Si perseguimos elementos en este diagrama, obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} 1_{FD'} & \xrightarrow{\quad} & \eta_{D'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Fd & \xrightarrow{\quad} & G(Fd)\eta_D = \eta_{D'}d. \end{array}$$

Por lo tanto concluimos que η es natural. Análogamente obtenemos que ε es natural.

Ahora observemos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} FD & \xrightarrow{f} & C \\ F\eta_D \downarrow & & \uparrow \varepsilon_C \\ FGFD & \xrightarrow{FGf} & FGC. \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & GC \\ \eta_D \downarrow & & \uparrow G\varepsilon_C \\ GFD & \xrightarrow{GFg} & GFGC. \end{array}$$

Utilizando el hecho que θ es una biyección obtenemos:

$$\varepsilon_C(FGf)F\eta_D = \varepsilon_C F(Gf \eta_D) = \varepsilon_C F(\theta_{D,C}(f)) = \tau_{D,C}(\theta_{D,C}(f)) = f.$$

$$G(\varepsilon_C)(GFg)\eta_D = G(\varepsilon_C Fg)\eta_D = G(\tau_{D,C}(g))\eta_D = \theta_{D,C}(\tau_{D,C}(g)) = g.$$

Es decir los dos cuadrados previos conmutan. Aplicando esto a las identidades en FD y GC obtenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} FD & \xrightarrow{id_{FD}} & FD \\ F\eta_D \downarrow & & \uparrow \varepsilon_{FD} \\ FGFD & \xrightarrow{FG(id_{FD})} & FGFD \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} GC & \xrightarrow{id_{GC}} & GC \\ \eta_{GC} \downarrow & & \uparrow G\varepsilon_C \\ GFGC & \xrightarrow{GF(id_{GC})} & GFGC. \end{array}$$

Es decir obtenemos que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta_G} & GFG \\ & \searrow id_G & \downarrow G\varepsilon \\ & & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow id_F & \downarrow \varepsilon_F \\ & & F. \end{array}$$

A las identidades $(G\varepsilon) \cdot (\eta_G) = id_G$ y $(\varepsilon_F) \cdot (F\eta) = id_F$, las llamaremos identidades triangulares.

Inversamente veamos que si tenemos un par de funtores $C \xrightleftharpoons[G]{F} D$, junto con $\eta : id_D \Rightarrow GF$ y $\varepsilon : FG \Rightarrow id_C$ transformaciones naturales que satisfacen las identidades triangulares $(G\varepsilon) \cdot (\eta_G) = id_G$ y $(\varepsilon_F) \cdot (F\eta) = id_F$, entonces $F \dashv G$.

Observe que como η y ε son transformaciones naturales, si $f : FD \longrightarrow C$ y $g : D \longrightarrow GC$, entonces los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\eta_D} & GFD \\ g \downarrow & & \downarrow GFg \\ GC & \xrightarrow{\eta_{GC}} & GFGC \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FGFD & \xrightarrow{\varepsilon_{FD}} & FD \\ FGf \downarrow & & \downarrow f \\ FGC & \xrightarrow{\varepsilon_C} & C. \end{array}$$

Veamos que existen biyecciones

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\theta_{D,C}} & \\ C(FD, C) & & D(D, GC). \\ & \xleftarrow{\tau_{D,C}} & \end{array}$$

Definamos

$$\theta_{D,C}(f) := Gf \eta_D \quad \text{y} \quad \tau_{D,C}(g) := \varepsilon_C Fg,$$

entonces con los diagramas previos y teniendo en mente las identidades triangulares obtenemos

$$1) (\tau_{D,C} \circ \theta_{D,C})(f) = \tau_{D,C}(Gf \eta_D) = \varepsilon_C F(Gf \eta_D) = \varepsilon_C FGf F \eta_D \\ = f \varepsilon_{FD} F \eta_D = f \operatorname{id}_{FD} = f.$$

$$2) (\theta_{D,C} \circ \tau_{D,C})(g) = \theta_{D,C}(\varepsilon_C Fg) = G(\varepsilon_C Fg) \eta_D = G \varepsilon_C GFg \eta_D \\ = G \varepsilon_C \eta_{GC} g = \operatorname{id}_{GC} g = g,$$

por lo tanto son inversas.

Para demostrar naturalidad en C sea $c : C \longrightarrow C'$ un morfismo en \mathcal{C} , y observemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\theta_{D,C}} & \mathcal{D}(D, GC) \\ \mathcal{C}(FD, c) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(D, Gc) \\ \mathcal{C}(FD, C') & \xrightarrow{\theta_{D,C'}} & \mathcal{D}(D, GC') \end{array}$$

Si perseguimos elementos en este diagrama obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & \theta_{D,C}(f) = Gf \eta_D \\ \downarrow & & \downarrow \\ cf & \xrightarrow{\quad} & G(cf) \eta_D = Gc Gf \eta_D \end{array}$$

Para demostrar naturalidad en D , sea $d : D' \longrightarrow D$ un morfismo en \mathcal{D} , y observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\theta_{D,C}} & \mathcal{D}(D, GC) \\ \mathcal{C}(Fd, C) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(d, GC) \\ \mathcal{C}(FD', C) & \xrightarrow{\theta_{D',C}} & \mathcal{D}(D', GC) \end{array}$$

Si perseguimos elementos en este diagrama obtenemos:

$$\begin{array}{ccc}
 g & \xrightarrow{\quad} & \theta_{D,C}(g) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g Fd & \xrightarrow{\quad} & G(g Fd) \eta_{D'} = Gg \eta_D d.
 \end{array}$$

Observemos que por ser η natural el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 D' & \xrightarrow{\eta_{D'}} & GF D' \\
 d \downarrow & & \downarrow GFd \\
 D & \xrightarrow{\eta_D} & GF D,
 \end{array}$$

entonces obtenemos que $G(g Fd) \eta_{D'} = Gg \eta_D d$, y por lo tanto θ es natural.

0.3 Conos y límites

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías y D un objeto de \mathcal{D} , consideremos $\Delta_D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ el functor constante con valor D y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ cualquier functor. Un cono en F con vértice D es una transformación natural $\nu : \Delta_D \Rightarrow F$, es decir tenemos una familia de morfismos $\langle D \xrightarrow{\nu_C} FC \rangle_{C \in \mathcal{C}}$, y naturalidad en este caso significa que para cualquier flecha $c : C \longrightarrow C'$ en \mathcal{C} el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \\
 \nu_C \swarrow & & \searrow \nu_{C'} \\
 FC & \xrightarrow{F_c} & FC'
 \end{array}$$

conmuta en \mathcal{D} . Escribiremos el cono de la siguiente forma (D, ν) . Entonces un morfismo de conos $(D, \nu) \longrightarrow (D', \nu')$ será un morfismo entre sus vértices $d : D \longrightarrow D'$ tal que $\nu'_C d = \nu_C$ para toda $C \in \mathcal{C}$.

Definición 5. Diremos que un cono (D, ν) es un cono límite si para cualquier otro cono (E, ε) existe un único morfismo $E \xrightarrow{u} D$, que hace conmutar los triángulos en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \varepsilon_C \swarrow & \Downarrow \mu & \searrow \varepsilon_{C'} \\
 & D & \\
 \nu_C \swarrow & & \searrow \nu_{C'} \\
 FC & \xrightarrow{Fc} & FC'
 \end{array}$$

Observación 1. Es fácil ver que hay una categoría de conos en F la cual escribiremos como $\text{Cono}(F)$. Así un cono límite o simplemente un límite para F , es un objeto terminal en $\text{Cono}(F)$.

Como los objetos terminales son únicos salvo isomorfismos, entonces dos límites son isomorfos en $\text{Cono}(F)$ y en particular sus vértices son isomorfos en \mathcal{D} .

Ejemplo 3.

i) Un cono límite para el único funtor $! : \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{D}$ (donde $\mathbf{0}$ es la categoría vacía), es un objeto terminal en \mathcal{D} .

Como $\mathbf{0}$ no tiene objetos ni flechas, cualquier $D \in \mathcal{D}$ determina junto con la familia vacía un cono para $!$ y un morfismo de conos es simplemente un morfismo en \mathcal{D} , luego $\text{Cono}(!)$ es isomorfa a \mathcal{D} .

ii) Si llamamos \mathcal{A} a la categoría con solo dos objetos A, B y morfismos la identidad para cada objeto, un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un par de objetos de \mathcal{D} , $\langle X, Y \rangle$, entonces un cono para este funtor consta de un objeto $D \in \mathcal{D}$ y dos morfismos

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\nu_X} & X \\
 & \searrow \nu_Y & \\
 & & Y
 \end{array}$$

$(D, (\nu_X, \nu_Y))$ es un cono límite para $\langle X, Y \rangle$ si y solo si para cualquier objeto D' y cualesquiera morfismos $D' \xrightarrow{x} X$ y $D' \xrightarrow{y} Y$ hay un único morfismo $D' \xrightarrow{u} D$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & D' & \\
 x \swarrow & \downarrow u & \searrow y \\
 & D & \\
 \nu_X \swarrow & & \searrow \nu_Y \\
 X & & Y
 \end{array}$$

conmuta. En otras palabras para cualquier D' hay una correspondencia uno a uno, entre morfismos $D' \longrightarrow D$ y pares de morfismos $D' \longrightarrow X$, $D' \longrightarrow Y$, esto es la propiedad de un producto; entonces un cono límite para (X, Y) se llama un cono producto y usualmente se escribe como

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y, \end{array}$$

y los morfismos π_X y π_Y son llamados proyecciones.

iii) Sea $\hat{2}$ la categoría $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} B$ donde solo se representan los morfismos no identidad. Un functor $G: \hat{2} \longrightarrow \mathcal{D}$, es un par de morfismos $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y$ en \mathcal{D} ; un cono para G esta dado por

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ \nu_X \swarrow & & \searrow \nu_Y \\ X & \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} & Y. \end{array}$$

Del diagrama vemos que ν_Y esta determinado por ν_X como $\nu_Y = f\nu_X = g\nu_X$, entonces un cono es lo mismo que dar un morfismo $\nu_X: D \longrightarrow X$ tal que $f\nu_X = g\nu_X$. Tal cono es límite si y solo si para cualquier otro morfismo $h: C \longrightarrow X$ con $fh = gh$, existe un único $k: C \longrightarrow D$ tal que $h = \nu_X k$ (ver diagrama abajo).

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \exists! k \downarrow & \searrow h & \\ D & \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\nu_X} \\ \xrightarrow{\nu_X} \end{smallmatrix} & X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y. \end{array}$$

Llamaremos a ν_X si es límite, un igualador del par f, g .

En conjuntos un igualador de f, g es isomorfo (como cono) a la inclusión de $I = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ en A .

$$I \xrightarrow{i} A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} B.$$

iv) Sea \mathcal{J} la categoría

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow y & \\ X & \xrightarrow{x} & Z, \end{array}$$

un functor $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{D}$ es determinado por dar dos morfismos en \mathcal{D} con el mismo codominio, digamos $a : A \longrightarrow C$, $b : B \longrightarrow C$. Entonces un límite para F está dado por un objeto D junto con proyecciones $D \xrightarrow{p_B} B$, que satisfacen $ap_A = bp_B$, y tal que cualquier otro par

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p_B} & B \\ p_A \downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

de morfismos s, t con $bs = at$ (como en el diagrama abajo), hay un único morfismo $u : V \longrightarrow D$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & & & & \\ & \searrow u & & & \\ & & D & \xrightarrow{p_B} & B \\ & & p_A \downarrow & & \downarrow b \\ & & A & \xrightarrow{a} & C \\ & \swarrow t & & & \\ & & & & \end{array}$$

conmuta. Al cuadrado en el diagrama se le llama producto fibrado. En Con el producto fibrado para a, b es isomorfo al conjunto

$$\{(x, y) \in A \times B \mid a(x) = b(y)\}.$$

Dualmente tenemos los conceptos de cocono y colímite.

Capítulo 1

Mónadas

En este capítulo introduciremos el concepto de Mónada, veremos que está íntimamente relacionado con el concepto de adjunción, dado que cualquier adjunción da lugar a una mónada; e inversamente veremos que cualquier mónada viene de una adjunción, dando sólo la solución máxima al problema de encontrar una adjunción de la cual una mónada proviene. Para esto introduciremos el concepto de Álgebras para una mónada y así la categoría de Eilenberg-Moore, veremos al final de este capítulo que esta categoría es al menos tan completa como la categoría base.

1.1 Mónadas

Definición 6. Un triple (T, η, μ) , donde T es un endofunctor en una categoría \mathcal{D} , $\eta : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow T$, y $\mu : T^2 \Rightarrow T$ son transformaciones naturales, que satisface la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\
 \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\
 T^2 & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 & \xleftarrow{T\eta} & T \\
 & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\
 & & T & &
 \end{array}$$

es llamado una Mónada.¹

Aquí $(T\mu)_D = T(\mu_D) : T^3D \rightarrow T^2D$, y $(\mu T)_D = \mu_{TD} : T^3D \rightarrow T^2D$. Similarmente $(T\eta)_D = T(\eta_D) : TD \rightarrow T^2D$, y $(\eta T)_D = \eta_{TD} : TD \rightarrow T^2D$.

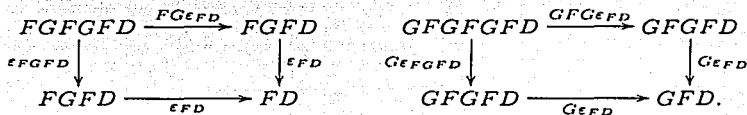
Dada una adjunción $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{G} \mathcal{D}$ nos fijamos en el endofunctor $T = GF$ en \mathcal{D} . Definimos transformaciones naturales $\eta : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow T$, $\mu : T^2 \Rightarrow T$, donde η es la unidad de la adjunción y $\mu = G\varepsilon F$, esta última transformación tiene componentes $T^2D = GFGFD \xrightarrow{G\varepsilon FD} GFD = TD$. Además demostraremos en la siguiente proposición que con estas definiciones los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 (GF)^3 & \xrightarrow{GFG\varepsilon F} & (GF)^2 \\
 G\varepsilon FGF \downarrow & & \downarrow G\varepsilon F \\
 (GF)^2 & \xrightarrow{G\varepsilon F} & GF
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 GF & \xrightarrow{\eta GF} & (GF)^2 & \xleftarrow{GF\eta} & GF \\
 & \searrow & \downarrow G\varepsilon F & \swarrow & \\
 & & GF & &
 \end{array}$$

Proposición 1. Si tenemos una adjunción $F \dashv G$ con unidad η y counidad ε , entonces $(GF, \eta, G\varepsilon F)$ es una mónada.

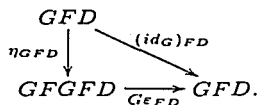
Demostración. Primero veamos que $G\varepsilon F \circ G\varepsilon FGF = G\varepsilon F \circ GFG\varepsilon F$. Para esto observemos los siguientes diagramas

¹En algunos textos la llaman sólo Triple, si necesitamos ser mas específicos diremos Mónada en \mathcal{D} .



El diagrama de la izquierda conmuta para toda $D \in \mathcal{D}$ por naturalidad de ϵ ya que ϵ_{FD} es un morfismo en \mathcal{C} y al aplicar el funtor G a este diagrama obtenemos el primer diagrama en la definición 1, como lo muestra el diagrama de la derecha.

Ahora veamos que la siguiente igualdad se satisface $G\epsilon F \circ \eta GF = id_{GF}$. Observemos el siguiente diagrama



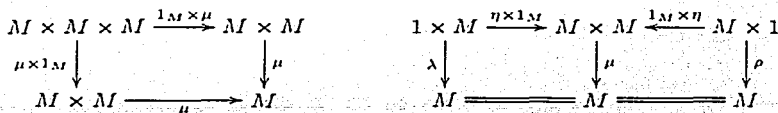
Al usar la identidad triangular $G\epsilon \circ \eta G = id_G$ en este último diagrama, obtenemos el primer triángulo en el segundo diagrama de la definición 1.

Por último veamos que $G\epsilon F \circ GF\eta = id_{GF}$. Observamos que $\epsilon F \circ F\eta = id_F$ es una de las identidades triangulares, así al aplicar el funtor G a esta identidad obtenemos el segundo diagrama de la definición 1. Por lo tanto $(GF, \eta, G\epsilon F)$ es una mónada. \square

En el siguiente ejemplo veremos la relación que hay entre los axiomas de monoide y los de mónada, y mostraremos que todo monoide induce una mónada.

Ejemplo 4. En términos de diagramas podemos ver los axiomas de monoide de la siguiente manera. Un Monoide M puede ser descrito como un conjunto M junto con dos funciones:

$$\mu : M \times M \rightarrow M \qquad \eta : 1 \rightarrow M \quad \text{tales que}$$



conmutan. Donde

$$1 \times M \xrightarrow{\lambda} M \xleftarrow{\rho} M \times 1$$

están dadas por

$$\lambda\langle 0, x \rangle = x \quad \rho\langle x, 0 \rangle = x.$$

Y en $1 \times M$, $1 = \{0\}$ es el conjunto con un punto y $\eta(0) = u \in M$ su único valor. Al perseguir elementos en los diagramas anteriores obtenemos lo siguiente

$$\begin{array}{ccc} \langle x, y, z \rangle & \xrightarrow{\quad} & \langle x, yz \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle xy, z \rangle & \xrightarrow{\quad} & (xy)z = x(yz) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \langle 0, x \rangle & \xrightarrow{\quad} & \langle u, x \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \xrightarrow{\quad} & x = ux \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \langle x, u \rangle & \xleftarrow{\quad} & \langle x, 0 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ xu = x & \xleftarrow{\quad} & x. \end{array}$$

Es decir, tenemos exactamente los axiomas familiares en un monoide: que la multiplicación sea asociativa y tenga un elemento u como identidad izquierda y derecha. Inversamente esto indica cómo identidades algebraicas pueden ser expresadas por diagramas conmutativos.

Así llamaremos a μ la *multiplicación* de la mónada y a η su *unidad*.

De hecho podemos ver que todo monoide induce una mónada. Dado un Monoide M con unidad u considere el endofunctor $M \times _ : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}$, que manda $X \mapsto M \times X$, $f \mapsto id_M \times f$, y las siguientes transformaciones

$$\begin{array}{ll} \eta : id_{\mathbf{Con}} \Rightarrow M \times _ & \mu : M \times M \times _ \Rightarrow M \times _ \\ \eta_X : X \rightarrow M \times X & \mu_X : M \times M \times X \rightarrow M \times X \\ x \mapsto (u, x) & (m_1, m_2, x) \mapsto (m_1 m_2, x). \end{array}$$

Es fácil ver que estas transformaciones son naturales. Veamos que $(M \times _, \eta, \mu)$ hacen conmutar los diagramas de la definición 1

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M \times X & \xrightarrow{M \times \mu_X} & M \times M \times X \\ \downarrow \mu_{M \times X} & & \downarrow \mu_X \\ M \times M \times X & \xrightarrow{\mu_X} & M \times X, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} M \times X & \xrightarrow{M \times \eta_X} & M \times M \times X & \xleftarrow{\eta_{M \times X}} & M \times X \\ & \searrow & \downarrow \mu_X & \swarrow & \\ & & M \times X & & \end{array}$$

Al perseguir elementos en los diagramas anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 (m_1, m_2, m_3, x) & \xrightarrow{\quad} & (m_1, m_2 m_3, x) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (m_1 m_2, m_3, x) & \xrightarrow{\quad} & ((m_1 m_2) m_3, x) = (m_1 (m_2 m_3), x) \\
 \\
 (m_1, x) & \xrightarrow{\quad} & (m_1, u, x) \quad (u, m_1, x) \xleftarrow{\quad} (m_1, x) \\
 \searrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow \\
 & (m_1 u, x) & (u m_1, x) &
 \end{array}$$

Por lo tanto $(M \times -, \eta, \mu)$ es una mónada. Lo que es más interesante y veremos en la siguiente sección, son las álgebras para esta mónada.

Ejemplo 5. Sea $P : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}$ el functor que manda a cada conjunto a su conjunto potencia, y a cada morfismo f a Pf , donde $Pf.A = f.A = \{f(a) \mid a \in A\}$, y considere a η y μ las transformaciones naturales descritas abajo

$$\begin{array}{ccc}
 \eta : id_{\mathbf{Con}} \Rightarrow P & & \mu : PP \Rightarrow P \\
 \eta_X : X \rightarrow PX & & \mu_X : PPX \rightarrow PX \\
 x \mapsto \{x\} & & \chi \mapsto \bigcup X = \bigcup_{Y \in \chi} Y.
 \end{array}$$

Veamos que (P, η, μ) es una mónada.

Es fácil ver que P es functor. Lo siguiente es ver que η y μ son transformaciones naturales, es decir que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\eta_X} & PX \\
 f \downarrow & & \downarrow Pf \\
 Y & \xrightarrow{\eta_Y} & PY
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 PPX & \xrightarrow{\mu_X} & PX \\
 PPf \downarrow & & \downarrow Pf \\
 PPY & \xrightarrow{\mu_Y} & PY.
 \end{array}$$

Al perseguir elementos en los diagramas obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\quad} & \{x\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f(x) & \xrightarrow{\quad} & \{f(x)\} = f[\{x\}]
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \chi & \xrightarrow{\quad} & \bigcup \chi \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{f[Z] \mid Z \in \chi\} & \xrightarrow{\quad} & \bigcup \{f[Z] \mid Z \in \chi\} = f[\bigcup \chi].
 \end{array}$$

Aquí $\{f(x)\} = \{f(y) | y \in \{x\}\} = f[\{x\}]$, además tenemos que $\bigcup \{f[Z] | Z \in \mathcal{X}\} = \{f(y) | y \in \bigcup_{Z \in \mathcal{X}} Z\} = f[\bigcup \mathcal{X}]$. Así η y μ son transformaciones naturales.

Veamos ahora que (P, η, μ) es una mónada. Al perseguir elementos en los diagramas de la definición 1

$$\begin{array}{ccc} P^3 X & \xrightarrow{P\mu_X} & P^2 X \\ \mu_{PX} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\ P^2 X & \xrightarrow{\mu_X} & PX \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} PX & \xrightarrow{\eta_{PX}} & P^2 X \\ \text{id}_{PX} \swarrow & & \downarrow \mu_X \\ & & PX \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P^2 X & \xleftarrow{P\eta_X} & PX \\ \mu_X \downarrow & & \swarrow \text{id}_{PX} \\ & & PX \end{array}$$

obtenemos

$$\begin{array}{ccc} \Theta & \xrightarrow{\quad} & \mu_X[\Theta] \\ \downarrow & & \downarrow \\ U\Theta & \xrightarrow{\quad} & U(U\Theta) = U(\mu_X[\Theta]) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \{x\} \\ \swarrow & & \downarrow \\ & & U\{x\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \eta_X[x] & \xleftarrow{\quad} & x \\ \downarrow & & \swarrow \\ U\eta_X[x] & & U\{x\} \end{array}$$

Para cualquier $x \in PX$, se tiene $\bigcup \eta_X[x] = x$, y $\bigcup \{x\} = x$ así el segundo diagrama en la definición 1 conmuta. Además para cualquier conjunto \mathcal{X} , y cualquier $\Theta \in P^3 X$ se satisface

$$\mu_X[\Theta] = \{\mu_X(\chi) | \chi \in \Theta\} = \{\bigcup \chi | \chi \in \Theta\} = \left\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X \mid X \in \mathcal{X}, \chi \in \Theta \right\},$$

así $\bigcup (\mu_X[\Theta]) = \bigcup \left\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X \mid X \in \mathcal{X}, \chi \in \Theta \right\} = \bigcup (\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$.

Luego entonces tenemos que conmuta el primer diagrama en la definición 1. Con lo cual concluimos que (P, η, μ) es una mónada.

Ejemplo 6. Una mónada en un conjunto parcialmente ordenado \mathcal{P} visto como categoría es una función monótona $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ con las propiedades

$$x \leq T(x) \quad \text{y} \quad T^2(x) \leq T(x) \quad \forall x \in \mathcal{P}.$$

Tal operación es llamada una "operación de cerradura" en \mathcal{P} . Además como T es monótona tenemos $T^2 = T$.

Dualmente tenemos la noción de Comónada (L, δ, ε) en una categoría \mathcal{C} , con $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, δ, ε transformaciones naturales, que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\delta} & L^2 \\
 \delta \downarrow & & \downarrow L\delta \\
 L^2 & \xrightarrow{\delta L} & L^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & // & \downarrow \delta & // & \\
 L & \xleftarrow{\epsilon L} & L^2 & \xrightarrow{L\epsilon} & L
 \end{array}$$

Dada una adjunción $(F, G, \varepsilon, \eta)$, tenemos que $(FG, \delta = F\eta G, \varepsilon)$ es una comónada en \mathcal{C} . Llamamos a δ la *comultiplicación* y a ε la *counidad* (esto está en armonía con la terminología para adjunciones) y el tratamiento de comónadas es dual al de mónadas.

Nota 3. Cualquier adjunción da lugar a una mónada; inversamente cualquier mónada viene de una adjunción, pero la adjunción no es única. Esencialmente, se trabaja en las soluciones máxima y mínima, al problema de encontrar una adjunción de la cual una mónada dada proviene. Aquí estudiaremos la solución máxima en la siguiente sección.

1.2 Álgebras para una mónada

Definición 7. Dada una mónada (T, η, μ) en una categoría \mathcal{C} , definimos la categoría de T -Álgebras (T -Álg) o categoría de Eilenberg-Moore,² como sigue:

Objetos: son pares $(X, h : TX \rightarrow X)$ con $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y $h \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tales que

$$\begin{array}{ccc}
 T^2X & \xrightarrow{Th} & TX \\
 \mu_X \downarrow & & \downarrow h \\
 TX & \xrightarrow{h} & X
 \end{array}
 \quad \text{conmutan.}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\eta_X} & TX \\
 \text{id}_X // & & \downarrow h \\
 & & X
 \end{array}$$

Morfismos: $(X, h) \rightarrow (Y, k)$ son morfismos $X \xrightarrow{f} Y$ en \mathcal{C} , para los cuales

$$\begin{array}{ccc}
 TX & \xrightarrow{Tf} & TY \\
 h \downarrow & & \downarrow k \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \quad \text{conmuta.}$$

²la cual denotaremos también como \mathcal{C}^T .

Definimos la composición de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T(gf) & & \\
 & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\
 TX & \xrightarrow{Tf} & TY & \xrightarrow{Tg} & TZ \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow l \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 & \xrightarrow{\quad} & gf & &
 \end{array}$$

Se puede ver fácilmente que esto define una categoría.

Ejemplo 7. Las $M \times -$ -Álgebras, dada la mónada $(M \times -, \eta, \mu)$ del ejemplo 1, son parejas $(A, h : M \times A \rightarrow A)$ tales que:

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M \times A & \xrightarrow{\mu_A} & M \times A \\
 M \times h \downarrow & & \downarrow h \\
 M \times A & \xrightarrow{h} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & M \times A \\
 \parallel id_A & & \downarrow h \\
 & & A
 \end{array}
 \qquad \text{conmutan.}$$

Al perseguir elementos en estos diagramas obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 (m_1, m_2, a) & \xrightarrow{\quad} & (m_1 m_2, a) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (m_1, m_2 \cdot a) & \xrightarrow{\quad} & m_1 \cdot (m_2 \cdot a) = (m_1 m_2) \cdot a
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\quad} & (u, a) \\
 \searrow & & \downarrow \\
 & & a = u \cdot a.
 \end{array}$$

Es decir es una acción de M en A .

Dada otra álgebra $(B, k : M \times B \rightarrow B)$ los morfismos son funciones $f : A \rightarrow B$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M \times A & \xrightarrow{M \times f} & M \times B \\
 \downarrow h & & \downarrow k \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

conmuta. Al perseguir elementos en este diagrama obtenemos

$$\begin{array}{ccc} (m, a) & \xrightarrow{\quad} & (m, f(a)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ m \cdot a & \xrightarrow{\quad} & f(m \cdot a) = m * f(a). \end{array}$$

Es decir, funciones que respetan la acción del monoide.

Ejemplo 8. ¿Cómo son las P -Álgebras dada la mónada (P, η, μ) del ejemplo 2?

Una P -Álgebra es una pareja $(X, h : PX \rightarrow X)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} PPX & \xrightarrow{\mu_X} & PX \\ Ph \downarrow & & \downarrow h \\ PX & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & PX \\ \parallel id_X & & \downarrow h \\ & & X \end{array} \quad \text{conmutan.}$$

Al perseguir elementos en estos diagramas obtenemos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \bigcup X \\ \downarrow & & \downarrow \\ h[X] & \xrightarrow{\quad} & h(h[X]) = h(\bigcup X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \{x\} \\ \searrow & & \downarrow \\ x & & h(\{x\}). \end{array}$$

Es decir cumplen:

$$h(\{x\}) = x$$

$$h(\bigcup X) = h(h[X]).$$

Definimos la siguiente relación en X :

$$x \leq y \quad \text{si} \quad y = h(\{x, y\}).$$

Entonces tenemos:

- 1) $x \in X \quad \Rightarrow \quad x = h(\{x\}) = h(\{x, x\}) \Rightarrow x \leq x \quad (\text{reflexiva})$
- 2) $x \leq y \quad y \leq x \quad \Rightarrow \quad y = h(\{x, y\}) = h(\{y, x\}) = x$
 $\Rightarrow y = x \quad (\text{antisimétrica})$
- 3) $x \leq y \quad y \leq z \quad \Rightarrow \quad y = h(\{x, y\}), \quad z = h(\{y, z\})$
 $\Rightarrow z = h(\{h(\{x, y\}), h(\{z\})\}) = h(\bigcup \{\{x, y\}, \{z\}\})$
 $= h(\bigcup \{\{x\}, \{y, z\}\}) = h(\{h(\{x\}), h(\{y, z\})\})$
 $= h(\{x, z\}) \Rightarrow x \leq z \quad (\text{transitiva})$

Es decir (X, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos también que si $A \subseteq X$ entonces la función $h : PX \rightarrow X$ satisface:

- i) $\forall a \in A \quad (a \leq h(A))$
 ii) $\forall x \in X, \text{ si } a \leq x \Rightarrow h(A) \leq x.$

Demostración. i) Sean $A \subseteq X, a \in A$ entonces

$$\begin{aligned} h(\{a, h(A)\}) &= h(\{h(\{a\}), h(A)\}) = h\left(\bigcup\{\{a\}, A\}\right) \\ &= h\left(\bigcup\{A\}\right) = h(\{h(A)\}) = h(A) \end{aligned}$$

luego $a \leq h(A).$

ii) Sea $x \in X$ tal que $\forall a \in A \quad a \leq x$ ($h(\{a, x\}) = x$), entonces

$$\begin{aligned} h(\{h(A), x\}) &= h(\{h(A), h(\{x\})\}) \\ &= h\left(\bigcup\{A, \{x\}\}\right) = h\left(\bigcup\{\{a, x\} | a \in A\}\right) \\ &= h(\{h(\{a, x\}) | a \in A\}) = h(\{x\}) = x \end{aligned}$$

luego $h(A) \leq x.$

□

En otras palabras lo que acabamos de demostrar es que h es el supremo \vee .

Definición 8. Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cualesquiera dos elementos x, y tienen supremo $x \vee y$ e ínfimo $x \wedge y$, además tiene un mínimo 0 y un máximo 1 . Decimos que la retícula es completa si tiene supremos e ínfimos arbitrarios.

Si además tomamos $\bigwedge : PX \rightarrow X, \bigwedge(X) := h(\{x \in X | \forall a \in A (x \leq a)\})$ como el supremo de las cotas inferiores, entonces (X, \leq, h, \bigwedge) es una Retícula completa. Por lo tanto las P -Álgebras para (P, η, μ) son Retículas completas.

Inversamente toda retícula completa resulta una P -Álgebra, ya que si empezamos con L una retícula completa y consideramos la pareja $(L, h : PL \rightarrow L)$, definiendo $h = \vee$ entonces los diagramas en la definición 2 conmutan. Al perseguir elementos en los diagramas de la definición 2

$$\begin{array}{ccc}
 \lambda & \longrightarrow & V[\lambda] = \{V L | L \in \lambda\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \cup \lambda & \longrightarrow & V(\cup \lambda) = V\{V L | L \in \lambda\}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 l & \longrightarrow & \{l\} \\
 \searrow & & \downarrow \\
 & & l,
 \end{array}$$

obtenemos el resultado.

Además obtenemos que los morfismos entre P -Álgebras $(X, h) \longrightarrow (Y, k)$ son morfismos $f : X \longrightarrow Y$ tales que:

$$\begin{array}{ccc}
 PX & \xrightarrow{Pf} & PY \\
 h \downarrow & & \downarrow k \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & f[A] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 h(A) & \longrightarrow & f(h(A)) = k(f[A]).
 \end{array}$$

Es decir tales que $k(f[A]) = f(h(A))$. Luego entonces f es una función que preserva supremos y por tanto preserva el orden. Por lo tanto los morfismos de P -Álgebras son funciones que preservan el orden y supremos.

Teorema 1. Dada una mónada (T, η, μ) , hay una Adjucción entre T -Álg y \mathcal{C} , cuya mónada inducida es (T, η, μ) .

Demostración. Tenemos un par de funtores

$$\begin{array}{ccc}
 T\text{-Álg} & \xrightarrow{U^T} & \mathcal{C} \\
 (X, h) & \longmapsto & X \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 (Y, k) & \longmapsto & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F^T} & T\text{-Álg} \\
 X & \longmapsto & (TX, \mu_X) \\
 f \downarrow & & \downarrow Tf \\
 Y & \longmapsto & (TY, \mu_Y).
 \end{array}$$

Donde U^T es el functor que olvida, y el morfismo f de la izquierda en el primer diagrama satisface $fh = kTf$ (por ser morfismo de T -Álgebras).

Primero veamos que F^T está bien definido. Para esto necesitamos demostrar dos cosas:

1) (TX, μ_X) es una T -Álgebra. Los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 T^3 X & \xrightarrow{T\mu_X} & T^2 X \\
 \mu_{TX} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T^2 X & \xrightarrow{\mu_X} & TX
 \end{array}
 \quad \text{y} \quad
 \begin{array}{ccc}
 TX & \xrightarrow{\eta_{TX}} & T^2 X \\
 \text{id}_{TX} \searrow & & \downarrow \mu_X \\
 & & TX
 \end{array}$$

conmutan por ser T mónada, luego (TX, μ_X) es una T -Álgebra.

2) Tf es un morfismo de T -Álgebras $(TX, \mu_X) \rightarrow (TY, \mu_Y)$. El diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 T^2 X & \xrightarrow{T^2 f} & T^2 Y \\
 \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_Y \\
 TX & \xrightarrow{Tf} & TY
 \end{array}$$

conmuta por naturalidad de μ , así F^T está bien definido.

Ahora veamos que $F^T \dashv U^T$, i.e. que tenemos un isomorfismo natural

$$C(X, U^T(Y, h)) \simeq T\text{-Álg}(F^T X, (Y, h)).$$

1) Dado $g : X \rightarrow U^T(Y, h)$, sea $\tilde{g} : (TX, \mu_X) \rightarrow (Y, h)$ el morfismo

$$\begin{array}{ccccc}
 TX & \xrightarrow{Tg} & TY & \xrightarrow{h} & Y \\
 & \searrow \tilde{g} & \nearrow & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Entonces \tilde{g} es un morfismo de T -Álgebras por

$$\begin{array}{ccccc}
 T^2 X & \xrightarrow{T^2 g} & T^2 Y & \xrightarrow{T h} & TY \\
 \mu_X \downarrow & & \mu_Y \downarrow & & \downarrow h \\
 TX & \xrightarrow{Tg} & TY & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

donde el primer diagrama conmuta por naturalidad de μ y el segundo porque (Y, h) es T -Álgebra, así \tilde{g} es un morfismo de T -Álgebras.

2) Dado $f : (TX, \mu_X) \rightarrow (Y, h)$, sea $\bar{f} : X \rightarrow U^T(Y, h)$ el morfismo en C

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{f} Y \\ \xrightarrow{f} \end{array}$$

3) Veamos que $\tilde{f} = f$. Como $\tilde{f} : TX \xrightarrow{T\eta_X} T^2X \xrightarrow{Tf} TY \xrightarrow{h} Y$, construimos el siguiente diagrama

$$TX \begin{array}{c} \xrightarrow{T\eta_X} T^2X \xrightarrow{Tf} TY \xrightarrow{h} Y \\ \xrightarrow{id_{TX}} TX \xrightarrow{f} Y \\ \searrow \mu_X \nearrow \end{array}$$

El triángulo de la izquierda conmuta por ser T mónada y el cuadrado porque f es morfismo de T -Álgebras, entonces $\tilde{f} = f$.

4) Queremos que $\tilde{g} = g$. Como $\tilde{g} : X \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{Tg} TY \xrightarrow{h} Y$, y de la observación que el siguiente diagrama

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{Tg} TY \xrightarrow{h} Y \\ \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{\eta_Y} TY \xrightarrow{h} Y \\ \searrow \eta_Y \nearrow \\ \xrightarrow{id_Y} \end{array}$$

conmuta; la parte de abajo por ser (Y, h) una T -Álgebra y el cuadrado por naturalidad de η . Entonces $\tilde{g} = g$ y así tenemos un isomorfismo para cada par de objetos $X \in \mathcal{C}$ y $(Y, k) \in T$ -Álg.

$$\theta_{X, (Y, k)} : T\text{-Álg}(F^T X, (Y, h)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(X, U^T(Y, h)).$$

Por último demos que el isomorfismo es natural. Dados dos morfismos cualesquiera $x : X' \rightarrow X$ en \mathcal{C} , y el morfismo $y : (Y, k) \rightarrow (Y', k')$ en T -Álg, necesitamos ver que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 T\text{-}\mathring{\text{A}}\text{lg}(F^T X, (Y, k)) & \xrightarrow{\theta_{X, (Y, k)}} & \mathcal{C}(X, U^T(Y, k)) \\
 T\text{-}\mathring{\text{A}}\text{lg}(Tx, y) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(x, y) \\
 T\text{-}\mathring{\text{A}}\text{lg}(F^T X', (Y', k')) & \xrightarrow{\theta_{X', (Y', k')}} & \mathcal{C}(X', U^T(Y', k'))
 \end{array}$$

Sea $TX \xrightarrow{g} Y$ en $T\text{-}\mathring{\text{A}}\text{lg}(F^T X, (Y, k))$, entonces si perseguimos el elemento g en el diagrama, obtenemos lo siguiente:

$\theta_{X, (Y, k)}(g) = g\eta_X$ y $\mathcal{C}(x, y)(g\eta_X) = y(g\eta_X)x$. Por otro lado $T\text{-}\mathring{\text{A}}\text{lg}(Tx, y)(g) = ygTx$ y $\theta_{X', (Y', k')}(ygTx) = (ygTx)\eta_{X'}$. Comparemos estos dos morfismos en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X' & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{\eta_X} & TX & \xrightarrow{g} & Y \xrightarrow{y} Y' \\
 & \searrow \eta_{X'} & & \nearrow Tx & & & \\
 & & TX' & & & &
 \end{array}$$

Observamos que esto no es más que la naturalidad de η seguida del morfismo yg . Por lo tanto θ es natural y así $F^T \dashv U^T$.

También tenemos que

$$U^T F^T X = U^T(TX, \mu_X) = TX$$

$$U^T F^T f = U^T(Tf) = Tf.$$

Es decir $U^T F^T = T$.

Calculemos la unidad y la counidad de la adjunción $F^T \dashv U^T$. La unidad

$$\eta^T : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow U^T F^T \text{ así } \eta_X^T : X \longrightarrow U^T F^T X = TX.$$

$$T\text{-}\mathring{\text{A}}\text{lg}(F^T X, F^T X) \longrightarrow \mathcal{C}(X, U^T F^T X).$$

Por un lado tenemos que $id_{F^T X} = id_{TX} \longmapsto \eta_X^T$ y por otro lado

$$(TX \xrightarrow{id_{TX}} TX) \longmapsto (X \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{id_{TX}} TX),$$

como esto pasa para toda $X \in \mathcal{C}$, entonces $\eta^T = \eta$ la unidad de T . Para la counidad tenemos $F^T U^T(X, h) = F^T X = (TX, \mu_X)$ y $\varepsilon^T : F^T U^T \Rightarrow id_{T\text{-}\mathring{\text{A}}\text{lg}}$ así

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(X,h)}^T : F^T U^T(X, h) &\longrightarrow (X, h) \\ (TX, \mu_X) &\longrightarrow (X, h). \end{aligned}$$

$hT(h) = h\mu_X$, con lo anterior vemos que $\varepsilon_{(X,h)}^T = h$. Del isomorfismo

$$\begin{aligned} T\text{-Álg}(F^T U^T(X, h), (X, h)) &\longleftarrow C(U^T(X, h), U^T(X, h)) \\ h = hT(id_X) &\longleftarrow id_X \end{aligned}$$

como observamos en 1), $h : (TX, \mu_X) \longrightarrow (X, h)$ resulta morfismo de $T\text{-Álg}$. Sabemos también que $\varepsilon_{(X,h)}^T \longleftarrow id_{U^T(X,h)} = id_X$ y como tenemos un isomorfismo, concluimos que $\varepsilon_{(X,h)}^T = h$.

Únicamente nos falta ver que la adjunción $F^T \dashv U^T$ induce (T, η, μ) . Por lo anterior tenemos: $T^2 = U^T F^T U^T F^T \xrightarrow{U^T \varepsilon^T F^T} U^T F^T = T$ y $(U^T \varepsilon^T F^T)_X = U^T \varepsilon^T_{(TX, \mu_X)} = U^T(\mu_X) = \mu_X$. Por lo tanto $U^T \varepsilon^T F^T = \mu$ la multiplicación de la mónada (T, η, μ) . \square

Lo siguiente que haremos es ver que la adjunción que obtuvimos nos da la solución máxima al problema de encontrar una adjunción de la cual una mónada proviene, para esto introduciremos la siguiente definición.

Definición 9. Dada una mónada (T, η, μ) en \mathcal{A} , una resolución para la mónada es $(\mathcal{B}, U, F, \varepsilon)$ donde \mathcal{B} es una categoría, U y F son un par de funtores adjuntos $\mathcal{B} \xrightleftharpoons[F]{U} \mathcal{A}$ tales que $UF = T$ con unidad η la de la mónada y ε counidad de la adjunción, la cual satisface $U\varepsilon F = \mu$. Dada otra resolución $(\mathcal{B}', U', F', \varepsilon')$ definimos un morfismo entre resoluciones $(\mathcal{B}, U, F, \varepsilon) \longrightarrow (\mathcal{B}', U', F', \varepsilon')$ como un functor $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ tal que :

$$\phi F = F', \quad U' \phi = U \quad \text{y} \quad \phi \varepsilon = \varepsilon' \phi.$$

Proposición 2. Las resoluciones para una mónada (T, η, μ) en \mathcal{A} forman una categoría \mathcal{R} , donde la composición de morfismos se define de la manera obvia como la composición de funtores.

Demostración. Veamos que \mathcal{R} es una categoría. i) Tomamos el funtor identidad $\phi : \mathcal{B} \xrightarrow{id_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}$ entonces tenemos que $id_{\mathcal{B}}F = F$, $U id_{\mathcal{B}} = U$ y $id_{\mathcal{B}}\varepsilon = \varepsilon id_{\mathcal{B}}$.
 ii) dados $\phi : (\mathcal{B}, U, F, \varepsilon) \rightarrow (\mathcal{B}', U', F', \varepsilon')$, $\phi' : (\mathcal{B}', U', F', \varepsilon') \rightarrow (\mathcal{B}'', U'', F'', \varepsilon'')$.
 Tenemos $(\phi'\phi)F = \phi'F' = F''$ y $U = U'\phi = (U''\phi')\phi = U''(\phi'\phi)$. Y también $(\phi'\phi)\varepsilon = \phi'(\phi\varepsilon) = (\phi'\varepsilon')\phi = \varepsilon''(\phi'\phi)$, como la composición de funtores es asociativa, concluimos que \mathcal{R} es una categoría. \square

Nota 4. Con el Teorema 1 y el trabajo extra, demostramos que $(T\text{-Álg}, U^T, F^T, \varepsilon^T)$ es una resolución para la mónada (T, η, μ) .

Teorema 2. $(\mathcal{A}^T, U^T, F^T, \varepsilon^T)$ es un objeto terminal en \mathcal{R} .³

Demostración. Sea $(\mathcal{B}, U, F, \varepsilon)$ otra resolución para (T, η, μ) . Veremos que hay un único funtor $K^T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^T$, llamado el funtor de comparación (ver diagrama abajo), tal que:

$$K^T F = F^T, \quad U^T K^T = U, \quad \text{y} \quad K^T \varepsilon = \varepsilon^T K^T.$$

Definimos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{K^T} & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\quad} & (UB, U\varepsilon B) \\ \downarrow b & & \downarrow U\varepsilon \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{\quad} & (UB', U\varepsilon B') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\ & \searrow F^T & \downarrow K^T \\ & & \mathcal{A}^T \\ & & \nearrow U^T \\ & \mathcal{A} & \end{array}$$

Comenzaremos viendo que K^T está bien definido.

1) $K^T B$ es una T -Álgebra. Para esto observemos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} UB & \xrightarrow{\eta UB} & TUB \\ \parallel id_{UB} & & \downarrow U\varepsilon_B \\ & & UB \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TTUB & \xrightarrow{TU\varepsilon_B} & TUB \\ \mu_{UB} \downarrow & & \downarrow U\varepsilon_B \\ TUB & \xrightarrow{U\varepsilon_B} & UB. \end{array}$$

El primer diagrama es una de las identidades triangulares de $F^T \dashv U^T$. Por otro lado observemos que por naturalidad de ε el siguiente diagrama conmuta

³categoría de todas las resoluciones para la mónada (T, η, μ) .

$$\begin{array}{ccc}
 FUFUB & \xrightarrow{\epsilon_{FUB}} & FUB \\
 FU\epsilon_B \downarrow & & \downarrow \epsilon_B \\
 FUB & \xrightarrow{\epsilon_B} & B.
 \end{array}$$

Si Aplicamos el funtor U al diagrama anterior obtenemos que conmuta el segundo diagrama, con lo cual $K^T B$ es una T -Álgebra y K^T está bien definido en los objetos.

2) $K^T g = Ug$ es un morfismo de T -Álgebras. Observemos que por naturalidad de ϵ

$$\begin{array}{ccc}
 FUB & \xrightarrow{FUg} & FUB' & \text{conmuta.} \\
 \epsilon_B \downarrow & & \downarrow \epsilon_{B'} \\
 B & \xrightarrow{g} & B'
 \end{array}$$

Si Aplicamos el funtor U al diagrama anterior obtenemos que $Ug \circ U\epsilon_B = U\epsilon_{B'} \circ TUg$, con lo cual $K^T g = Ug$ es un morfismo de T -Álgebras y K^T está bien definido en los morfismos. Además K^T es un funtor porque U es funtor.

3) Demostremos que $K^T \in \mathcal{R}((\mathcal{B}, U, F, \epsilon), (\mathcal{A}^T, U^T, F^T, \epsilon^T))$.

i) Sean $A, A' \in \mathcal{A}$, $B, B' \in \mathcal{B}$, $A \xrightarrow{f} A'$, $B \xrightarrow{g} B'$, entonces
 $-(K^T F)A = K^T(FA) = (UF.A, U\epsilon_{FA}) = (TA, \mu_A) = F^T A$.

$-(K^T F)f = K^T(Ff) = UFf = Tf = F^T f$.

Luego $K^T F = F^T$.

$-(U^T K^T)B = U^T(K^T B) = U^T(UB, U\epsilon_B) = UB$.

$-(U^T K^T)g = U^T(K^T g) = U^T(Ug) = Ug$.

Luego $U^T K^T = U$.

Concluimos que $K^T F = F^T$ y $U^T K^T = U$, además

ii) $(\epsilon^T K^T)_B = \epsilon^T_{K^T B} = \epsilon^T_{(UB, U\epsilon_B)} = U\epsilon_B = K^T \epsilon_B = (K^T \epsilon)_B$.

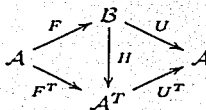
Así tenemos que $\epsilon^T K^T = K^T \epsilon$, con lo cual

$$K^T \in \mathcal{R}((\mathcal{B}, U, F, \epsilon), (\mathcal{A}^T, U^T, F^T, \epsilon^T)).$$

4) Por último veamos que $K^T : (\mathcal{B}, U, F, \epsilon) \longrightarrow (\mathcal{A}^T, U^T, F^T, \epsilon^T)$ es el único morfismo de resoluciones. Para esto supongamos que tenemos otro morfismo de resoluciones

$$H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}^T$$

$$B \longmapsto (A, k)$$



Debe pasar entonces lo siguiente:

$$i) HF = F^T, \quad U^T H = U$$

$$ii) H\varepsilon = \varepsilon^T H.$$

Como $U^T H = U$ tenemos $UB = U^T H B = U^T(A, k) = A$. Luego $A = UB$ y así K^T y H tienen el mismo objeto subyacente. Para ver que tienen la misma estructura observamos que en los morfismos $Ug = U^T H g = Hg$ por ser U^T functor que olvida. Además como $H\varepsilon = \varepsilon^T H$ obtenemos lo siguiente

$$U\varepsilon_B = H\varepsilon_B = (H\varepsilon)_B = (\varepsilon^T H)_B = \varepsilon_{(HB)}^T = \varepsilon_{(A,k)}^T = k.$$

Así $U\varepsilon_B = k$ y entonces $H = K^T$. Por lo tanto $(\mathcal{A}^T, U^T, F^T, \varepsilon^T)$ es un objeto terminal en \mathcal{R} . \square

Nota 5. Además U^T como functor que olvida es fiel.

1.3 T -Álgebras al menos tan completas como \mathcal{D}

Sea T una mónada en \mathcal{D} . La siguiente Proposición es para mostrar que si \mathcal{D} tiene todos los límites de cierto tipo, también los tiene T -Álg. En particular, si \mathcal{D} es completa, también lo es T -Álg; ésta es además una aplicación importante de una situación monádica.

Sea \mathcal{I} una categoría tal que cualquier functor $M : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D}$ tiene un cono límite (ver preliminares). Ahora supongamos

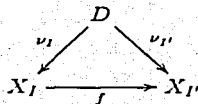
$$M : \mathcal{I} \longrightarrow T\text{-Álg}$$

$$I \longmapsto (X_I, h_I),$$

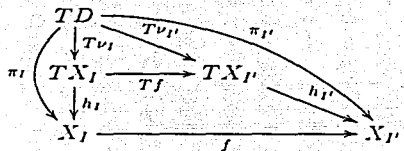
y consideremos la composición de M con el functor fiel U^T .

Proposición 3. Si \mathcal{D} tiene \mathcal{I} límites, entonces T -Álg tiene \mathcal{I} límites.

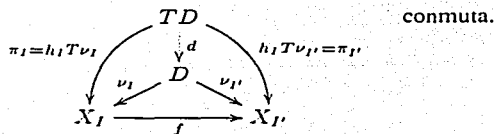
Demostración. a) Sea $\langle D \xrightarrow{\nu_I} U^T M I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ un cono límite para $U^T M : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$. Entonces veremos también que al aplicar T hay un cono $\langle TD \xrightarrow{\pi_I} U^T M I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ para $U^T M$, con π_I dado por $h_I T \nu_I$ para toda $I \in \mathcal{I}$. Como $\langle D \xrightarrow{\nu_I} U^T M I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ es un cono límite para $U^T M$ y tenemos que $U^T M(I) = X_I$ para todo $I \in \mathcal{I}$, el diagrama



conmuta para cualquier $f : I \rightarrow I'$ en \mathcal{I} . Observemos entonces el siguiente diagrama



Como T es un funtor y $\langle D \xrightarrow{\nu_I} X_I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ un cono límite, el triángulo conmuta. Además tenemos que f es morfismo de T -Álgebras, y así el trapecio conmuta. Por lo tanto $\langle TD \xrightarrow{\pi_I} X_I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ es cono para $U^T M$. Entonces $\exists! TD \xrightarrow{d} D$ tal que el diagrama



Es decir obtenemos que

$$\begin{array}{ccc}
 TD & \xrightarrow{T\nu_I} & TX_I \\
 d \downarrow & & \downarrow h_I \\
 D & \xrightarrow{\nu_I} & X_I
 \end{array}$$

conmuta para todo $I \in \mathcal{I}$, y cómo demostraremos más adelante que d es un objeto de T -Álg, ν_I será un morfismo de T -Álgebras para todo $I \in \mathcal{I}$.

b) Veamos que el único morfismo de conos $d : (TD, \pi) \rightarrow (D, \nu)$ es una T -Álgebra $TD \xrightarrow{d} D$ en \mathcal{D} . Sabemos que como (X_I, h_I) es una T -Álgebra, los primeros dos diagramas en la definición 2 conmutan. Construimos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\nu_I} & X_I & \xrightarrow{\eta_{X_I}} & TX_I \\
 \eta_D \searrow & & \downarrow 1 & \xrightarrow{T\nu_I} & \downarrow h_I \\
 & & TD & \xrightarrow{4} & TX_I \\
 & & d \downarrow & & \downarrow h_I \\
 & & D & \xrightarrow{\nu_I} & X_I
 \end{array}$$

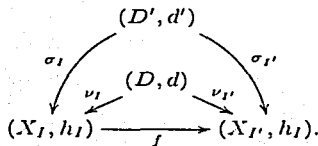
Donde 1 conmuta por naturalidad de η , 3 conmuta por la propiedad universal de $\langle D \xrightarrow{\nu_I} X_I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ y 4 conmuta porque (X_I, h_I) es T -Álgebra. Así obtenemos que el diagrama 2 conmuta seguido de las proyecciones ν_I , por lo tanto 2 conmuta.

Ahora para ver que el cuadrado en la definición 2 conmuta, basta seguirlo de proyecciones ν_I y ver que conmuta. Construya entonces el siguiente diagrama

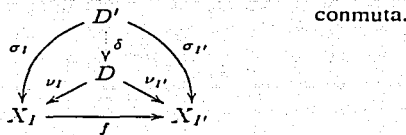
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & T^2 X_I & & \\
 & & & & \uparrow T^2 \nu_I & & \\
 & & & & T^2 D & \xrightarrow{Td} & TD & \xrightarrow{T\nu_I} & TX_I & \xrightarrow{Th_I} & X_I \\
 & & & & \downarrow \mu_D & & \downarrow d & & \downarrow h_I & & \\
 & & & & TD & \xrightarrow{d} & D & \xrightarrow{\nu_I} & X_I & & \\
 & & & & \downarrow T^2 \nu_I & & \downarrow T\nu_I & & \downarrow h_I & & \\
 & & & & T^2 X_I & \xrightarrow{\mu_{X_I}} & TX_I & \xrightarrow{h_I} & X_I & & \\
 & & & & \downarrow Th_I & & \downarrow h_I & & & & \\
 & & & & TX_I & \xrightarrow{h_I} & X_I & & & &
 \end{array}$$

Aquí **1** conmuta por naturalidad de μ , **2** conmuta porque (X_I, h_I) es T -Álgebra, **3** conmuta por la propiedad universal de $\langle D \xrightarrow{\nu_I} X_I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ y la parte de arriba **5** es T aplicado a este último diagrama **3**, que conmuta porque T es funtor. Tenemos entonces que **4** conmuta y así el cuadrado en la definición 2. Por lo tanto $TD \xrightarrow{d} D$ es una T -Álgebra en \mathcal{D} .

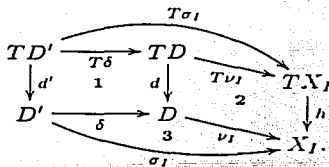
c) Demostremos que $TD \xrightarrow{d} D$ es el vértice de un cono límite para M en T -Álg. Observemos que $\nu_I : (D, d) \rightarrow (X_I, h_I)$ resulta como para M . Supongamos que (D', d') es el vértice de otro cono para M en T -Álg y considere el siguiente diagrama



Si Aplicamos el funtor U^T al diagrama anterior obtenemos que $\exists! D' \xrightarrow{\delta} D$ por la propiedad universal de $\langle D \xrightarrow{\nu_I} X_I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$ tal que el siguiente diagrama



Para ver que (D, d) es el vértice de un cono límite, basta demostrar que δ es morfismo de T -Álgebras. Observemos entonces el siguiente diagrama



Aquí **2** conmuta por la propiedad universal de $\langle D \xrightarrow{\nu_I} X_I \rangle_{I \in \mathcal{I}}$, **3** conmuta porque así indujimos a δ , la parte de arriba es T aplicado a **3** que conmuta porque T es funtor, y la parte externa del diagrama conmuta porque $\sigma_I : (D', d') \rightarrow (X_I, h_I)$ estamos suponiendo que es morfismo de T -Álgebras, así **1** conmuta. Por lo tanto $TD \xrightarrow{d} D$ es el vértice de un cono límite para M en T -Álg. \square

Capítulo 2

2-Categorías

En este capítulo definiremos conceptos básicos de 2-categorías, los cuales utilizaremos en el capítulo cuatro y demostraremos que cualquier objeto de \mathbf{Cat} tiene estructura de comonoide, viendo al final el caso de $\mathbf{2}$ (la categoría con 2 objetos y un único morfismo entre ellos) como objeto de \mathbf{Cat} y su 2-mónada inducida en \mathbf{Cat} .

2.1 2-Categorías

Definición 10. Una 2-categoría \mathcal{K} consta de:

5 i) Un conjunto de objetos $Ob(\mathcal{K})$ (no necesariamente pequeño).

5 ii) Para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathcal{K})$, una categoría $\mathcal{K}(A, B)$.

Los objetos de $\mathcal{K}(A, B)$ son llamados 1-celdas o morfismos de \mathcal{K} con dominio A y codominio B ; escribiremos $f : A \longrightarrow B$ para decir que f es un objeto de $\mathcal{K}(A, B)$. Las flechas de la categoría $\mathcal{K}(A, B)$ son llamadas 2-celdas ó 2-morfismos de \mathcal{K} ; para f y g 1-celdas con el mismo dominio y codominio, escribimos $\alpha : f \Rightarrow g$ para indicar que α es una 2-celda con dominio f y codominio g ; composición en $\mathcal{K}(A, B)$ (i.e. composición vertical de 2-celdas) es denotada por \circ (así la composición de $\alpha : f \Rightarrow g$ y $\beta : g \Rightarrow h$ es denotada por $\beta \circ \alpha$) y la identidad en f es denotada id_f .

5 iii) Para cada $A \in Ob(\mathcal{K})$, un objeto de $\mathcal{K}(A, A)$ llamada la flecha *identidad* $Id_A : A \longrightarrow A$.

5 iv) Para cada triple de objetos $A, B, C \in Ob(\mathcal{K})$, un functor de *composición*

$$\cdot_{A,B,C} : \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) \longrightarrow \mathcal{K}(A, C).$$

Denotamos la composición horizontal de 1-celdas (\cdot) simplemente por yuxtaposición i.e. $gf = \cdot_{A,B,C}(f, g)$, en el caso de composición horizontal de 2-celdas tendremos $\beta\alpha = \cdot_{A,B,C}(\alpha, \beta)$. Funtorialidad de $\cdot_{A,B,C}$ equivale a: la composición de 1-celdas

$$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C \longmapsto gf : A \longrightarrow C$$

y las dos composiciones de 1-celdas con 2-celdas:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} C \\ \longmapsto \end{array} & \begin{array}{c} A \begin{array}{c} \xrightarrow{hf} \\ \Downarrow h\alpha \\ \xrightarrow{hg} \end{array} C \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{h} \end{array} C \\ \longmapsto \end{array} & \begin{array}{c} A \begin{array}{c} \xrightarrow{gf} \\ \Downarrow \beta f \\ \xrightarrow{hf} \end{array} C \end{array} \end{array}$$

donde $h\alpha = \cdot_{A,B,C}(\alpha, \text{id}_h)$, $\beta f = \cdot_{A,B,C}(\text{id}_f, \beta)$ y en la situación

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{i} \end{array} C,$$

el diagrama

$$\begin{array}{ccc} hf & \xrightarrow{h\alpha} & hg \\ \beta f \downarrow & & \downarrow \beta g \\ if & \xrightarrow{i\alpha} & ig \end{array}$$

conmuta en la categoría $\mathcal{K}(A, C)$. De hecho tenemos que $\beta\alpha$ (composición horizontal de 2-celdas) es la diagonal común del diagrama anterior, i.e.

$$(\beta g) \circ (h\alpha) = (i\alpha) \circ (\beta f).$$

Nos referiremos a instancias del diagrama conmutativo como casos de *naturalidad interna*, o más específicamente, *naturalidad de β* . Además en el caso del ejemplo estereotípico de la 2-categoría **CAT** (el cuál daremos más adelante), la conmutatividad del diagrama es una consecuencia de la naturalidad de la transformación natural β .

Dados

$$f, g, h: A \rightarrow B, \quad i, j, k: B \rightarrow C;$$

$$f \xrightarrow{\alpha} g \xrightarrow{\beta} h, \quad i \xrightarrow{\gamma} j \xrightarrow{\delta} k$$

tenemos

$$i(\beta \circ \alpha) = (i\beta) \circ (i\alpha), \quad (\delta \circ \gamma)f = (\delta f) \circ (\gamma f);$$

y en la situación

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \text{id}_f \Downarrow \\ \xrightarrow{f} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \text{id}_h \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

tenemos

$$h \text{id}_f = \text{id}_h f = \text{id}_h f.$$

5 v) Con Id_A, Id_B las 1-celdas identidad, y $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ tenemos

$$f \text{Id}_A = f, \quad \alpha \text{Id}_A = \alpha, \quad \text{Id}_B f = f, \quad \text{Id}_B \alpha = \alpha.$$

5 vi) Para cualesquiera objetos $A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{K})$, el diagrama de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) \times \mathcal{K}(C, D) & \xrightarrow{\cdot A, B, C \times \text{Id}_{\mathcal{K}(C, D)}} & \mathcal{K}(A, C) \times \mathcal{K}(C, D) \\ \text{Id}_{\mathcal{K}(A, B)} \times \cdot B, C, D \downarrow & & \downarrow \cdot A, C, D \\ \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, D) & \xrightarrow{\cdot A, B, D} & \mathcal{K}(A, D) \end{array}$$

conmuta.

Esta condición es la asociatividad de la composición horizontal y puede ser expresada equivalentemente como sigue: en la situación

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{i} \end{array} C \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{k} \end{array} D,$$

tenemos

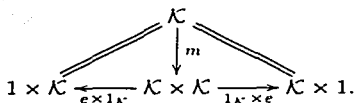
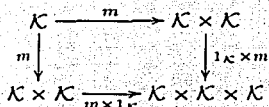
$$j(h\alpha) = (jh)\alpha, \quad j(\beta f) = (j\beta)f, \quad (\gamma h)f = \gamma(hf).$$

Ejemplo 9. El ejemplo estándar de 2-categoría es **CAT**; sus objetos son todas las categorías, 1-celdas todos los funtores, y 2-celdas todas las transformaciones naturales. De igual forma tenemos **CON** y **Cat** (sub-2-categoría de categorías pequeñas).

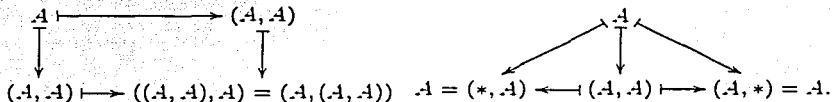
Observación 2. Cada objeto \mathcal{K} de **Cat** tiene estructura de comonoide, con e el único funtor de \mathcal{K} en $\mathbf{1}$ (la categoría con un sólo objeto) y m la diagonal

$$\begin{array}{ccc} e: \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & * \\ f \downarrow & & \downarrow 1 \\ B & \longrightarrow & * \end{array} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} m: \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K} \times \mathcal{K} \\ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & (A, A) \\ f \downarrow & & \downarrow (f, f) \\ B & \longrightarrow & (B, B) \end{array} & & \end{array}$$

Para ver esto construyamos los siguientes diagramas



Si perseguimos elementos en estos diagramas; primero para objetos obtenemos

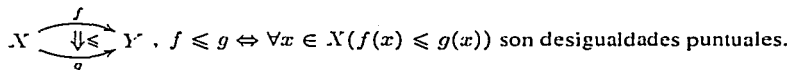


Y para los morfismos es exactamente lo mismo, sólo sustituimos f por A en los diagramas anteriores. Por lo tanto cualquier objeto de Cat , tiene estructura de comonoide.

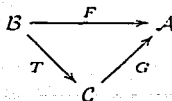
Ejemplo 10. 1) El ejemplo trivial de 2-categoría es considerar cualquier categoría como una 2-categoría con solamente 2-celdas identidad.

2) Tomando una 2-categoría fija \mathcal{K} , tenemos una 2-categoría $\text{End } \mathcal{K}$: sus objetos son endo-2-funtores $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, sus 1-celdas son transformaciones 2-naturales $\eta : D \Rightarrow E$ y sus 2-celdas son modificaciones $\rho : \eta \rightarrow \xi$ (las cuales definiremos más adelante).

3) Otro ejemplo es Ord , el cual tiene como objetos conjuntos parcialmente ordenados (X, \leq) , 1-celdas $(X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \leq)$ son funciones monótonas y 2-celdas



4) Para una categoría \mathcal{A} , la categoría CAT/\mathcal{A} : un objeto de la cual es una categoría \mathcal{B} junto con un funtor $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ y una 1-celda de (\mathcal{B}, F) a (\mathcal{C}, G) es un funtor $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que



conmuta. Las 2-celdas $\tau : T \Rightarrow S : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, son las transformaciones naturales $\tau : T \Rightarrow S$ para las cuales $G\tau = id_F$.

Una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, consta de una categoría \mathcal{C} junto con un objeto $I \in \mathcal{C}$ y un functor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \simeq \mathcal{C} \otimes 1 & \xrightarrow{\mathcal{C} \otimes I} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{I \otimes \mathcal{C}} & 1 \otimes \mathcal{C} \simeq \mathcal{C} \\
 & \searrow & \downarrow \otimes & & \swarrow \\
 & & \mathcal{C} & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{C} \times \otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\
 \otimes \times \mathcal{C} \downarrow & & \downarrow \otimes \\
 \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C}.
 \end{array}$$

Nota 6. Una 2-categoría con un solo objeto, es una categoría monoidal.

Definición 11. Dadas 2-categorías \mathcal{K}, \mathcal{L} , un 2-functor $L : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ consta de:

6 i) Una función objeto $Ob(\mathcal{K}) \longrightarrow Ob(\mathcal{L})$ (también denotada por L).

6 ii) Para cada par de objetos A, B de \mathcal{K} , un functor

$$L_{A,B} : \mathcal{K}(A, B) \longrightarrow \mathcal{L}(L_A, L_B).$$

Escribimos Lf para $L_{A,B}(f)$, y $L\alpha$ para $L_{A,B}(\alpha)$; así para $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ tenemos

$$L_A \begin{array}{c} \xrightarrow{Lf} \\ L\alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{Lg} \end{array} L_B. \text{ La funtorialidad de } L_{A,B} \text{ es expresada por las identidades}$$

$$L(id_f) = id_{Lf}, \quad L(\beta \circ \alpha) = L\beta \circ L\alpha.$$

6 iii) Para cada objeto A de \mathcal{K} , $Id_{L_A} = L(Id_A)$.

6 iv) Para cada triple de objetos A, B, C de \mathcal{K} , la siguiente igualdad de funtores

$$(\cdot_{L_A, L_B, L_C}) \circ (L_{A,B} \times L_{B,C}) = (L_{A,C}) \circ (\cdot_{A, B, C}),$$

más fácilmente visualizado en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) & \xrightarrow{\cdot_{A,B,C}} & \mathcal{K}(A, C) \\
 \downarrow L_{A,B} \times L_{B,C} & & \downarrow L_{A,C} \\
 \mathcal{L}(L A, L B) \times \mathcal{L}(L B, L C) & \xrightarrow{\cdot_{L A, L B, L C}} & \mathcal{L}(L A, L C).
 \end{array}$$

Para $f : A \rightarrow B$ y $h : B \rightarrow C$, tenemos la igualdad $Lh \circ Lf = L(hf)$. Además en la situación

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{i} \end{array} C,$$

tenemos las siguientes igualdades

$$Lh \circ L\alpha = L(h\alpha) \quad \text{y} \quad L\beta \circ Lf = L(\beta f).$$

Definición 12. Dadas 2-categorías \mathcal{K}, \mathcal{L} y 2-funtores $L, M : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, una transformación 2-natural $\phi : L \Rightarrow M$ consta de:

7 i) una familia $\langle \phi_A \rangle_{A \in \text{Ob}(\mathcal{K})}$ de 1-celdas $\phi_A : L A \rightarrow M A$.

7 ii) Para cada 1-celda $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{K} , tenemos que $M f \circ \phi_A = \phi_B \circ L f$, es decir naturalidad en el sentido ordinario

$$\begin{array}{ccc}
 L A & \xrightarrow{\phi_A} & M A \\
 L f \downarrow & & \downarrow M f \\
 L B & \xrightarrow{\phi_B} & M B.
 \end{array}$$

7 iii) Siempre que $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ esté en \mathcal{K} , entonces

$$L A \begin{array}{c} \xrightarrow{L f} \\ L \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{L g} \end{array} L B \xrightarrow{\phi_B} M B = L A \xrightarrow{\phi_A} M A \begin{array}{c} \xrightarrow{M f} \\ M \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{M g} \end{array} M B,$$

esto lo podemos visualizar en la siguiente igualdad de diagramas en \mathcal{L}

$$\begin{array}{ccc} LA & \xrightarrow{\phi_A} & MA \\ \begin{array}{c} Lg \swarrow \\ \text{\scriptsize } L\alpha \\ \searrow Lf \end{array} & & \downarrow Mf \\ LB & \xrightarrow{\phi_B} & MB \end{array} = \begin{array}{ccc} LA & \xrightarrow{\phi_A} & MA \\ Lg \downarrow & & \begin{array}{c} Mg \swarrow \\ \text{\scriptsize } M\alpha \\ \searrow Mf \end{array} \\ LB & \xrightarrow{\phi_B} & MB, \end{array}$$

y nos referiremos a esta propiedad como 2-naturalidad.

Definición 13. Dadas 2-categorías \mathcal{K}, \mathcal{L} , 2-funtores $L, M : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, y transformaciones 2-naturales $\phi, \psi : L \Rightarrow M$, una modificación $\nu : \phi \rightarrow \psi$ consta de:

8 i) una familia $\langle \nu_A \rangle_{A \in \text{Ob}(\mathcal{K})}$ de 2-celdas $\nu_A : \phi_A \Rightarrow \psi_A$ tal que:

8 ii) para cualquier 1-celda $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{K} tenemos

$$LA \xrightarrow{Lf} LB \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_B} \\ \nu_B \downarrow \\ \xrightarrow{\psi_B} \end{array} MB = LA \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_A} \\ \nu_A \downarrow \\ \xrightarrow{\psi_A} \end{array} MA \xrightarrow{Mf} MB,$$

esto lo podemos visualizar en la siguiente igualdad de diagramas en \mathcal{L}

$$\begin{array}{ccc} LA & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_A} \\ \nu_A \downarrow \\ \xrightarrow{\psi_A} \end{array} & MA \\ Lf \downarrow & & \downarrow Mf \\ LB & \xrightarrow{\psi_B} & MB \end{array} = \begin{array}{ccc} LA & \xrightarrow{\phi_A} & MA \\ Lf \downarrow & & \downarrow Mf \\ LB & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_B} \\ \nu_B \downarrow \\ \xrightarrow{\psi_B} \end{array} & MB. \end{array}$$

Veamos que 2-funtores, transformaciones 2-naturales y modificaciones se componen.

(1) Dados 2-funtores $L : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, $M : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$, f una 1-celda en \mathcal{K} y α una 2-celda en \mathcal{K} definimos:

$$(ML)A = M(LA), (ML)f = M(Lf), (ML)\alpha = M(L\alpha).$$

(2) Dados 2-funtores $L, M, N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ y transformaciones 2-naturales entre ellos $\phi : L \Rightarrow M$, $\psi : M \Rightarrow N$ definimos $\psi\phi : L \Rightarrow N$ como:

$$(\psi\phi)_A = \psi_A\phi_A, \quad Nf \circ (\psi\phi)_A = (\psi\phi)_B \circ Lf,$$

más fácil visto en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} LA & \xrightarrow{\phi_A} & MA & \xrightarrow{\psi_A} & NA \\ Lf \downarrow & & \downarrow Mf & & \downarrow Nf \\ LB & \xrightarrow{\phi_B} & MB & \xrightarrow{\psi_B} & NB. \end{array}$$

(3) Dadas modificaciones $L \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \downarrow \mu \\ \xrightarrow{\psi} \\ \downarrow \nu \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} M$, su composición $\nu \circ \mu$ es definida como:

$$(\nu \circ \mu)_A = \nu_A \circ \mu_A.$$

(4) En la situación $L \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \downarrow \mu \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} M \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma} \\ \downarrow \nu \\ \xrightarrow{\delta} \end{array} N$, definimos:

$$(\gamma\mu)_A = \gamma_A\mu_A, \quad (\nu\phi)_A = \nu_A\phi_A.$$

(5) En la situación $A \xrightarrow{F} \mathcal{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \circ \downarrow \\ \xrightarrow{M} \end{array} \mathcal{L} \xrightarrow{G} B$, definimos:

$$(\phi F)_A = \phi_{FA}, \quad \text{y} \quad (G\phi)_A = G(\phi_A).$$

2.2 2-Adjunciones

Definición 14. Dadas 2-categorías \mathcal{K}, \mathcal{L} y 2-funtores $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ diremos que F es 2-adjunto izquierdo de U (y lo seguiremos denotando por $F \dashv U$) si existen transformaciones 2-naturales $\eta : 1 \Rightarrow UF$, y $\varepsilon : FU \Rightarrow 1$ que satisfacen las identidades triangulares:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K} & \xrightarrow{1_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K} \\
 \downarrow U & \nearrow F & \downarrow U \\
 \mathcal{L} & \xrightarrow{1_{\mathcal{L}}} & \mathcal{L} \\
 \uparrow \epsilon & \uparrow \eta & \\
 \mathcal{L} & \xrightarrow{1_{\mathcal{L}}} & \mathcal{L} = id_U
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{K} & \xrightarrow{1_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K} = id_F \\
 & \nearrow F & \searrow U & \nearrow F \\
 \mathcal{L} & \xrightarrow{1_{\mathcal{L}}} & \mathcal{L} & \\
 & \uparrow \eta & \uparrow \epsilon & \\
 & \mathcal{L} & \xrightarrow{1_{\mathcal{L}}} & \mathcal{L}
 \end{array}$$

Seguiremos llamando a η la unidad y a ϵ la counidad de la adjunción. Equivalentemente diremos que $F \dashv U$, si hay un isomorfismo de categorías $\mathcal{K}(FB, A) \cong \mathcal{L}(B, UA)$ el cual es 2-natural en A y B .

2.3 2-Mónadas y \mathbb{T} -álgebras

Definición 15. Una 2-mónada $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ consta de un endo-2-functor $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, junto con dos transformaciones 2-naturales $\eta : 1 \Rightarrow T$, $\mu : TT \Rightarrow T$ que satisfacen la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \xrightarrow{\eta T} & TT & \xleftarrow{T\eta} & T \\
 & \searrow Id_T & \downarrow \mu & \swarrow Id_T & \\
 & & pT & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 TTT & \xrightarrow{T\mu} & TT \\
 \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\
 TT & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}$$

Definición 16. Dada una 2-mónada $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ en una 2-categoría \mathcal{K} , una \mathbb{T} -álgebra para la mónada consta de un objeto A de \mathcal{K} junto con una acción $a : TA \rightarrow A$ (1-celda en \mathcal{K}) que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_A} & TA \\
 & \searrow Id_A & \downarrow a \\
 & & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 TTA & \xrightarrow{Ta} & TA \\
 \mu_A \downarrow & & \downarrow a \\
 TA & \xrightarrow{a} & A
 \end{array}$$

Definición 17. Una pseudo-álgebra ¹ consiste de un objeto A de \mathcal{K} , junto con una 1-celda $a : TA \rightarrow A$ y 2-celdas invertibles

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_A} & TA \\
 & \searrow \phi & \downarrow a \\
 & & A \\
 & \text{Id}_A &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 TTA & \xrightarrow{Ta} & TA \\
 m_A \downarrow & \xrightarrow{\phi} & \downarrow a \\
 TA & \xrightarrow{a} & A.
 \end{array}$$

que satisfacen las siguientes condiciones de coherencia:

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \begin{array}{ccc}
 TTTA & \xrightarrow{TTa} & TTA \\
 m_{TA} \downarrow & \xrightarrow{Tm_A} & \downarrow T\phi \\
 TTA & \xrightarrow{Ta} & TA \\
 m_A \downarrow & \xrightarrow{\phi} & \downarrow a \\
 TA & \xrightarrow{a} & A
 \end{array}
 = \begin{array}{ccc}
 TTTA & \xrightarrow{TTa} & TTA \\
 m_{TA} \downarrow & & \downarrow m_A \\
 TTA & \xrightarrow{Ta} & TA \\
 m_A \downarrow & \xrightarrow{\phi} & \downarrow a \\
 TA & \xrightarrow{a} & A.
 \end{array} \\
 \\
 2) \quad \begin{array}{ccc}
 TA & \xrightarrow{Ti_A} & TTA \\
 & \searrow m_A & \downarrow Ta \\
 & & TA \\
 & & \downarrow a \\
 & & A
 \end{array}
 = \begin{array}{ccc}
 TA & \xrightarrow{Ti_A} & TTA \\
 & \searrow m_A & \downarrow Ta \\
 & & TA \\
 & & \downarrow a \\
 & & A
 \end{array} \\
 \\
 3) \quad \begin{array}{ccc}
 TA & \xrightarrow{i_{TA}} & TTA \\
 \downarrow Id_{TA} & \xrightarrow{\exists_A} & \downarrow m_A \\
 TA & \xrightarrow{a} & A
 \end{array}
 = \begin{array}{ccc}
 TA & \xrightarrow{i_{TA}} & TTA \\
 a \downarrow & \xrightarrow{i_A} & \downarrow Ta \\
 A & \xrightarrow{\phi} & TA \\
 \downarrow Id_A & & \downarrow a \\
 & & A.
 \end{array}
 \end{array}$$

Las pseudo-álgebras normales son aquellas para las que el axioma de unidad es estricto ($\phi = id$), es decir $ai_A = Id_A$.

¹ diremos pseudo-T-álgebra en el caso que necesitemos ser más específicos.

2.4 El comonoide 2 y su mónada inducida en Cat

Definición 18. La categoría \mathcal{K}^2 con $2 = \{0 \xrightarrow{\alpha} 1\}$ la categoría con dos objetos y un único morfismo entre ellos, y \mathcal{K} una categoría arbitraria tiene:

Objetos: $f, g \dots$ los morfismos de \mathcal{K} .

Morfismos: $s = (u, v) : f \longrightarrow g$ en \mathcal{K}^2 tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{v} & B \end{array} \quad \text{conmuta.}$$

Ahora considere la categoría con un solo objeto $1 = \{*\}$. El funtor

$$\begin{array}{ccc} e : 2 & \longrightarrow & 1 \\ 0 & \longmapsto & * \\ \alpha \downarrow & & \downarrow id_* \\ 1 & \longmapsto & * \end{array}$$

tiene ambos $d_0 \dashv e \dashv d_1$

$$\begin{array}{ccc} d_0 : 1 & \longrightarrow & 2 \\ * & \longmapsto & 0 \\ id_* \downarrow & & \downarrow id_0 \\ * & \longmapsto & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} d_1 : 1 & \longrightarrow & 2 \\ * & \longmapsto & 1 \\ id_* \downarrow & & \downarrow id_1 \\ * & \longmapsto & 1 \end{array}$$

d_0 como adjunto izquierdo preserva colímites, i.e. preserva objeto inicial y d_1 como adjunto derecho preserva lÍmites, así preserva objeto terminal, además tenemos las siguientes identidades

$$ed_0(*) = e(0) = *$$

$$ed_1(*) = e(1) = *$$

$$ed_0(id_*) = e(id_0) = id_*$$

$$ed_1(id_*) = e(id_1) = id_*$$

Por lo tanto $ed_0 = Id$ y $ed_1 = Id$.

Note que entonces la unidad de la adjunción $d_0 \dashv e$ y la counidad de la adjunción $e \dashv d_1$ son identidades y la counidad de la primera $\eta : d_0 e \rightarrow 1$ y la unidad de la segunda $\mu : 1 \rightarrow d_1 e$ satisfacen respectivamente: las identidades triangulares de $d_0 \dashv e$

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{1e} & ed_0e \\ & \searrow \text{id} & \downarrow e\eta \\ & & e \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} d_0 & \xrightarrow{d_0 1} & d_0 ed_0 \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \eta d_0 \\ & & d_0, \end{array}$$

las identidades triangulares de $e \dashv d_1$

$$\begin{array}{ccc} d_1 & \xrightarrow{\mu d_1} & d_1 ed_1 \\ & \searrow \text{id} & \downarrow d_1 \mu \\ & & d_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{e\mu} & ed_1 e \\ & \searrow \text{id} & \downarrow 1e \\ & & e, \end{array}$$

como estamos trabajando en conjuntos parcialmente ordenados cualquier diagrama conmuta, y de las identidades triangulares obtenemos lo siguiente:

$$e\eta = \text{id}, \quad \eta d_0 = \text{id}, \quad \mu d_1 = \text{id}, \quad e\mu = \text{id}.$$

Tenemos una única transformación $k : d_0 \Rightarrow d_1 : 1 \rightarrow 2$

$$k_* : d_0(*) \rightarrow d_1(*)$$

i.e. $k_* : 0 \rightarrow 1$. Por lo tanto $k_* = \alpha$ y satisface:

i) $ek = \text{id}_*$. $ek : e(0) \rightarrow e(1)$, además $e(0) = * = e(1)$, por lo tanto $ek = \text{id}_*$.

ii) $ke = \mu\eta$.

$$(ke)(0) = k(e(0)) = k_* = \alpha$$

$$(\mu\eta)_0 = \mu_0 \eta_0 = \alpha \text{id}_0 = \alpha$$

$$(ke)(1) = k(e(1)) = k_* = \alpha$$

$$(\mu\eta)_1 = \mu_1 \eta_1 = \alpha \text{id}_1 = \alpha.$$

Por lo tanto $ke = \mu\eta$.

iii) $\eta d_1 = k = \mu d_0$.

$$(\eta d_1)(*) = \eta(d_1(*)) = \eta_1 = \alpha = k.$$

$$(\mu d_0)(*) = \mu(d_0(*)) = \mu_0 = \alpha = k_*$$

Por lo tanto $\eta d_1 = k = \mu d_0$, así tenemos las relaciones

$$ek = id_*, \quad \eta d_1 = k = \mu d_0, \quad ke = \mu \eta.$$

Como cualquier objeto de \mathbf{Cat} , 2 tiene estructura de comonoide $(2, e, m)$ con la multiplicación m dada por la diagonal

$$\begin{array}{ccc} m : 2 & \longrightarrow & 2 \times 2 \\ 0 & \longmapsto & (0, 0) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow (\alpha, \alpha) \\ 1 & \longmapsto & (1, 1). \end{array}$$

Por lo tanto uno tiene

$$(e, 1)m = 1 = (1, e)m, \quad (m \times 1)m = (1 \times m)m;$$

aquí $(e, 1), (1, e) : 2 \times 2 \longrightarrow 2$ son las proyecciones correspondientes, y de nuevo m tiene ambos adjuntos $l \dashv m \dashv r$. Explícitamente

$$\begin{array}{ccc} l : 2 \times 2 & \longrightarrow & 2 \\ (i, j) & \longmapsto & i \vee j \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} r : 2 \times 2 & \longrightarrow & 2 \\ (i, j) & \longmapsto & i \wedge j \end{array}$$

que satisfacen:

$$i) \quad lm = id = rm$$

$$lm(0) = l(0, 0) = 0 \qquad rm(0) = r(0, 0) = 0$$

$$lm(1) = l(1, 1) = 1 \qquad rm(1) = r(1, 1) = 1$$

$$lm(\alpha) = l(\alpha, \alpha) = \alpha \qquad rm(\alpha) = r(\alpha, \alpha) = \alpha.$$

Por lo tanto $lm = id = rm$.

Entonces la counidad de $l \dashv m$ y la unidad de $m \dashv r$ son identidades, y la unidad $\bar{\varphi} : id \longrightarrow ml$ de $l \dashv m$ y la counidad $\bar{\psi} : mr \longrightarrow id$ de $m \dashv r$, satisfacen las identidades triangulares y por lo tanto obtenemos las siguientes identidades

$$l\bar{\varphi} = id_l, \quad \bar{\varphi}m = id_m, \quad r\bar{\psi} = id_r, \quad \bar{\psi}m = id_m.$$

Observe que $r\bar{\varphi} : r \longrightarrow rml = l$, $l\bar{\psi} : lmr = r \longrightarrow r$, y que tenemos una única transformación

$$\begin{aligned} \bar{\tau} : r &\Longrightarrow l : 2 \times 2 \longrightarrow 2 \\ (0, 0) &\longmapsto id_0 \\ (0, 1) &\longmapsto \alpha \\ (1, 0) &\longmapsto \alpha \\ (1, 1) &\longmapsto id_1 \end{aligned}$$

$r\bar{\varphi} = \bar{\tau} = l\bar{\psi}$ que satisface:

$$\bar{\tau}m = id \quad m\bar{\tau} = \bar{\varphi}\bar{\psi}.$$

Aquí $\bar{\tau}m : id = rm \longrightarrow lm = id$, $m\bar{\tau} : mr \longrightarrow ml$ y $\bar{\varphi}\bar{\psi} : mr \longrightarrow ml$.

Observemos que $((-)^2, (-)^e, (-)^m)$ forma una 2-mónada en \mathbf{Cat} .

Capítulo 3

Sistemas de Factorización

El capítulo tres es dedicado a sistemas de factorización ortogonales; aquí daremos una definición muy compacta y veremos que de ésta se desprenden varias propiedades, algunas de las cuales corresponden a propiedades que incluyen en su definición otros autores. Definiremos un sistema de factorización de Eilenberg-Moore; en los cuales tenemos una factorización funtorial de los morfismos de la categoría y concluiremos el capítulo demostrando que los sistemas de factorización ortogonales y los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore son equivalentes.

3.1 Sistemas de Factorización Ortogonales

Definición 19. Un sistema de factorización ortogonal para una categoría \mathcal{K} consta de dos clases de morfismos \mathcal{E} y \mathcal{M} tales que:

i) las clases \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerradas bajo composición con isomorfismos; la primera por la izquierda y la segunda por la derecha.

ii) Cualquier morfismo $f \in \mathcal{K}$, se factoriza como $f = m_f e_f$ con $e_f \in \mathcal{E}$ y $m_f \in \mathcal{M}$.

iii) (Propiedad del llenado diagonal) Cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & C \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ B & \xrightarrow{m} & D, \end{array}$$

con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$ admite un único morfismo $t: C \rightarrow B$ que hace conmutar los dos triángulos en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & C \\ u \downarrow & \swarrow t & \downarrow v \\ B & \xrightarrow{m} & D. \end{array}$$

Observación 3. \mathcal{E} y \mathcal{M} son distintas del vacío.

Ejemplo 11.

i) Definamos las siguientes clases de morfismos en \mathcal{K}^2 :

$\mathcal{E}_F = \{(u, v) : f \rightarrow g | u \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{M}_F = \{(u, v) : f \rightarrow g | v \text{ es invertible}\}$, y veamos que estas clases forman un sistema de factorización ortogonal.

Si empezamos con un morfismo (u, v) en \mathcal{K}^2

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{v} & B. \end{array}$$

Este se factoriza en \mathcal{K}^2 de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{v} & B
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{u} & Y \\
 f \downarrow & \varepsilon & \downarrow v f & \mathcal{M} & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{1_B} & B.
 \end{array}$$

Con el cuadrado de la izquierda en \mathcal{E} y el de la derecha en \mathcal{M} , porque 1_X y 1_B son isomorfismos. Las clases \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerradas bajo composición con isomorfismos por ambos lados. Veamos que se satisface la propiedad del llenado diagonal, es decir si empezamos con un morfismo (u, v) en \mathcal{E} y (u', v') en \mathcal{M} queremos ver que existe una única d que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{(u,v)} & g \\
 (x,a) \downarrow & \exists! d & \downarrow (y,b) \\
 f' & \xrightarrow{(u',v')} & g'
 \end{array}$$

para esto observemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & & \\
 f \downarrow & \varepsilon & \downarrow g & & \\
 A & \xrightarrow{v} & B & & \\
 & & \searrow x & & \searrow v \\
 & & X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\
 & & f' \downarrow & \mathcal{M} & \downarrow g' \\
 & & A' & \xrightarrow{v'} & B' \\
 & & \swarrow a & & \swarrow b
 \end{array}$$

Del cual obtenemos un morfismo de $g \xrightarrow{(xu^{-1}, v'^{-1}b)} f'$.

Para demostrar que es única, llamemos d al morfismo xu^{-1} , y consideremos el siguiente diagrama sólido (es decir la tapa de arriba en el cubo anterior)

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y \\
 \downarrow x & \searrow \exists h & \downarrow y \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y'
 \end{array}$$

y supongamos que existe otro morfismo h como en el diagrama anterior, tal que los dos triángulos conmutan. Observemos que como u es isomorfismo (en particular epimorfismo) entonces $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{d} X' \xrightarrow{h} X$, implica que $d = h$. Análogamente considere el siguiente diagrama sólido (la tapa de abajo del cubo)

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{v} & B \\
 \downarrow a & \searrow \exists k & \downarrow b \\
 A' & \xrightarrow{v'} & B'
 \end{array}$$

y suponga que existe otro morfismo k como en el diagrama anterior, tal que los dos triángulos conmutan. Observemos que como v' es isomorfismo (en particular monomorfismo) entonces $B \xrightarrow{d} A' \xrightarrow{v'} B' \xrightarrow{k} B$, implica que $d = k$. Por lo tanto la diagonal es única.

ii) En Con , si \mathcal{E} es la clase de epimorfismos y \mathcal{M} la clase de monomorfismos, entonces las epi-mono factorizaciones forman un sistema de factorización ortogonal.

Observemos que si f está en Con , entonces tenemos la siguiente descomposición

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \searrow e_f & \text{Im } f & \nearrow m_f
 \end{array}$$

Es claro que las clases \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerradas bajo composición con isomorfismos por ambos lados y para ver la propiedad del llenado diagonal, observemos que si tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{e} & C \\
 \downarrow f & & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{m} & D
 \end{array}$$

con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$. Entonces como e es epi, si empezamos con un objeto c en C existe un objeto a en A tal que $e(a) = c$, tomando ese a y aplicando f obtenemos un objeto b de B , el cual es único porque m es mono, con lo cual tenemos un morfismo $d : C \longrightarrow B$. Para ver que es única la diagonal, supongamos que existe otro morfismo k que hace conmutar los dos triángulos del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & C \\ f \downarrow & \swarrow k & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{m} & D. \end{array}$$

Observemos que como m es monomorfismo, entonces $C \xrightarrow[\underset{k}{\dots}]{d} B \xrightarrow{m} D$, implica que $d = k$ (lo mismo si usamos que e es epi). Por lo tanto la diagonal es única.

Observación 4. De hecho en cualquier topos, las epi-mono factorizaciones forman un sistema de factorización ortogonal. En particular en el topos de pregavillas \mathbf{Con}^C .

iii) En **Top** un ejemplo es considerar a \mathcal{E} como la clase de epimorfismos (donde el codominio tiene la topología cociente) y \mathcal{M} las funciones inyectivas. Otro es considerar a \mathcal{E} con los epimorfismos y \mathcal{M} las funciones inyectivas donde el dominio es subespacio.

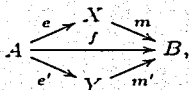
Teorema 3. Para cualquier $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sistema de factorización ortogonal se tiene lo siguiente:

i) Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & C \\ e \downarrow & \swarrow t & \downarrow m \\ C & \xrightarrow{m} & D, \end{array}$$

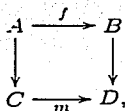
con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$ el único morfismo t con $te = e$, y $mit = m$ es $t = id$.

ii) Dadas dos descomposiciones de un morfismo f en \mathcal{K} con $e, e' \in \mathcal{E}, m, m' \in \mathcal{M}$



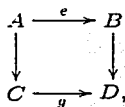
existe un único isomorfismo compatible $h: X \rightarrow Y$, es decir tal que $he = e'$ y $m'h = m$.

iii) Si f tiene la propiedad que siempre que se tenga un diagrama conmutativo



con $m \in \mathcal{M}$ entonces hay un morfismo $h: B \rightarrow C$ que hace conmutar los dos triángulos, entonces f pertenece a \mathcal{E} .

Dualmente si g tiene la propiedad que siempre que se tenga un diagrama conmutativo



con $e \in \mathcal{E}$ entonces hay un morfismo $h: B \rightarrow C$ que hace conmutar los dos triángulos, entonces g pertenece a \mathcal{M} .

iv) Si f está en \mathcal{E} entonces m_f es un isomorfismo, dualmente si g está en \mathcal{M} entonces e_g es un isomorfismo.

v) Las clases \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerradas bajo composición.

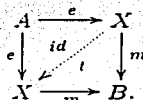
vi) $\mathcal{E} \cap \mathcal{M}$ es la clase de todos los isomorfismos de \mathcal{K} .

vii) Las clases \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerradas bajo coproductos fibrados y productos fibrados respectivamente.

viii) Las siguientes leyes de cancelación se satisfacen:

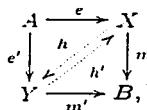
Si $fg \in \mathcal{E}$ y $g \in \mathcal{E}$, entonces $f \in \mathcal{E}$
 Si $fg \in \mathcal{M}$ y $f \in \mathcal{M}$, entonces $g \in \mathcal{M}$.

Demostración. i) Consideremos el siguiente diagrama de flechas sólidas

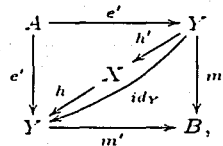
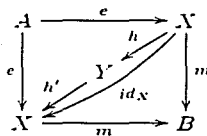


Por la propiedad del llenado diagonal definición 11 iii) obtenemos un morfismo $t : X \rightarrow X$ y si usamos la unicidad de ese morfismo obtenemos el resultado.

ii) Consideremos el siguiente diagrama de flechas sólidas

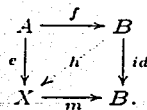


entonces por la definición 11 iii) obtenemos morfismos únicos h y h' que hacen conmutar el diagrama anterior. Y con los siguientes diagramas

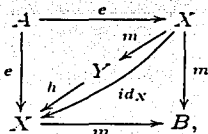


obtenemos $h'h = id$ y $hh' = id$. Por lo tanto h es isomorfismo.

iii) Sea $f = me$ con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$, y consideremos el diagrama sólido

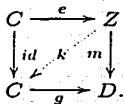


Suponga que existe h tal que el diagrama anterior conmuta, así $mh = id_B$. Por otro lado construyamos el diagrama

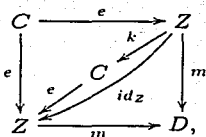


entonces por la definición 11 iii) obtenemos un único morfismo de X en X que hace conmutar el diagrama anterior. Por lo tanto $hm = id_X$, así h es isomorfismo, entonces $f = h^{-1}e$ y como \mathcal{E} es cerrada bajo composición con isomorfismos por la izquierda, concluimos que $f \in \mathcal{E}$.

Dualmente Sea $g = me$ con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$, y consideremos el diagrama sólido

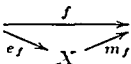


Suponga que existe k tal que el diagrama anterior conmuta, así $ke = id_C$. Por otro lado construyamos el diagrama



entonces por la definición 11 iii) obtenemos un único morfismo de Z en Z que hace conmutar el diagrama anterior. Por lo tanto $ek = id_Z$, así k es isomorfismo y $g \in \mathcal{M}$.

iv) Consideremos una descomposición de f : $A \xrightarrow{f} B$, supongamos que $f \in$



\mathcal{E} y construyamos el siguiente diagrama de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 e_f \downarrow & \nearrow h & \parallel id_B \\
 X & \xrightarrow{m_f} & B.
 \end{array}$$

Como f está en \mathcal{E} y m_f en \mathcal{M} , por la definición 11 iii) $\exists!$ h tal que el diagrama anterior conmuta y así $m_f h = id_B$. Por otro lado construyamos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{e_f} & X & & \\
 \downarrow e_f & \nearrow f & \swarrow m_f & & \downarrow m_f \\
 & & B & & \\
 & \searrow h & \swarrow id & & \\
 X & \xrightarrow{m_f} & B. & &
 \end{array}$$

Como cada triángulo en el diagrama conmuta, entonces el diagrama de flechas sólidas conmuta. Vemos también que si ponemos id_X en la diagonal, conmuta el diagrama. Pero por la definición 11 iii) $\exists!$ morfismo que hace conmutar el diagrama sólido, así $hm_f = id_X$. Por lo tanto m_f es isomorfismo.

Análogamente consideremos una descomposición de g ; $C \xrightarrow{g} D$ y construyamos el siguiente diagrama de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{e_g} & Z \\
 id_C \parallel & \nearrow k & \downarrow m_g \\
 C & \xrightarrow{g} & D.
 \end{array}$$

Como g está en \mathcal{M} y e_g en \mathcal{E} por la definición 11 iii) $\exists!$ k tal que el diagrama anterior conmuta y así $ke_g = id_C$. Por otro lado construyamos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{e_g} & Z & & \\
 \downarrow e_g & \nearrow id & \swarrow m_g & & \downarrow m_g \\
 & & C & & \\
 & \searrow e_g & \swarrow g & & \\
 Z & \xrightarrow{m_g} & D. & &
 \end{array}$$

Como cada triángulo en el diagrama conmuta, entonces el diagrama de flechas sólidas conmuta. Vemos también que si ponemos id_Z en la diagonal, conmuta el diagrama. Pero por la definición 11 iii) $\exists!$ morfismo que hace conmutar el diagrama sólido, así $e_g k = id_Z$. Por lo tanto e_g es isomorfismo.

v) Primero demosetremos que \mathcal{E} es cerrada bajo composición. Sean $f, f' \in \mathcal{E}$ y consideremos: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} C$. Entonces el diagrama de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f'} & C \\ & \searrow^{e_{f'f}} & & \nearrow_{m_{f'f}} & \\ & & X & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & \xrightarrow{f'f} & \\ & & & \nearrow & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f'} & C \\ & \searrow^{e_{f'f}} & & \nearrow_{m_{f'f}} & \\ & & X & \xrightarrow{m_{f'f}} & C \\ & & & \searrow & \\ & & & & id_C \end{array}$$

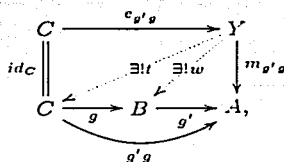
conmuta. Luego por la definición 11 iii) $\exists! w$ que hace conmutar el diagrama sólido y de nuevo por la definición 11 iii) $\exists! t$ que hace conmutar el diagrama. Por lo tanto $m_{f'f} t = id_C$. Por otro lado construyamos

$$\begin{array}{ccccc} & & & \xrightarrow{e_{f'f}} & \\ & & & \nearrow & \\ A & \xrightarrow{f'f} & C & \xrightarrow{id} & X \\ & \searrow^{e_{f'f}} & & \nearrow_{m_{f'f}} & \\ & & X & \xrightarrow{m_{f'f}} & C \\ & & & \searrow & \\ & & & & id_C \end{array}$$

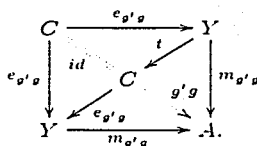
Como cada parte del diagrama conmuta entonces el diagrama sólido conmuta y si ponemos id_X en la diagonal también conmuta, si usamos la unicidad de la definición 11 iii) obtenemos $tm_{f'f} = id_X$. Por lo tanto $m_{f'f}$ es isomorfismo y así $f'f \in \mathcal{E}$.

Para ver que \mathcal{M} es cerrada bajo composición. Sean $g, g' \in \mathcal{E}$ y consideremos:

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{g'} & A \\ & \searrow^{e_{g'o}} & & \nearrow_{m_{g'o}} & \\ & & Y & & \end{array}$$



conmuta. Luego por la definición 11 iii) $\exists! w$ que hace conmutar el diagrama sólido y de nuevo por la definición 11 iii) $\exists! t$ que hace conmutar el diagrama. Por lo tanto $te_{g'g} = id_C$. Por otro lado construyamos

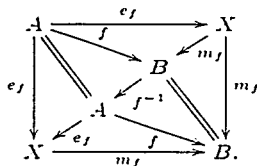


Como cada parte del diagrama conmuta entonces el diagrama sólido conmuta y si ponemos id_Y en la diagonal también conmuta, si usamos la unicidad de la definición 11 iii) obtenemos $e_{g'g}t = id_Y$. Por lo tanto $e_{g'g}$ es isomorfismo y así $g'g \in \mathcal{M}$.

vi) Sea f es un isomorfismo en \mathcal{K} y $A \xrightarrow{f} B$, veamos que $e_f^{-1} = f^{-1}m_f$

entonces $f^{-1}m_f e_f = f^{-1}f = 1_A$.

Consideremos el siguiente diagrama



Por la unicidad de la definición 11 iii) obtenemos $e_f f^{-1} m_f = 1_X$. Por lo tanto e_f es isomorfismo y como \mathcal{M} es cerrado bajo isomorfismos por la derecha entonces $f \in \mathcal{M}$.

Análogamente proponga $m_f^{-1} = e_f f^{-1}$ entonces $m_f e_f f^{-1} = f f^{-1} = 1_B$ y como demostramos que $e_f f^{-1} m_f = 1_X$, entonces m_f es isomorfismo. Además \mathcal{E} es cerrado bajo isomorfismos por la izquierda entonces $f \in \mathcal{E}$. Por lo tanto $f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$.
 Para la otra contención sea $f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$ y consideremos el siguiente diagrama sólido

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 id_A \parallel & \swarrow h & \parallel id_B \\
 A & \xrightarrow{f} & B.
 \end{array}$$

Por la definición 11 iii) $\exists!$ h que hace conmutar el diagrama anterior, así $hf = id_A$ y $fh = id_B$. Por lo tanto f es isomorfismo.

vii) Dado un producto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 m' \downarrow & & \downarrow m \\
 C & \xrightarrow{g} & D,
 \end{array}$$

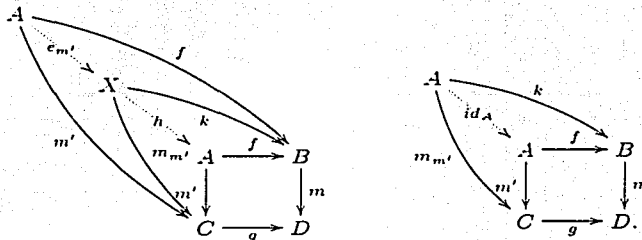
con $m \in \mathcal{M}$ queremos ver que $m' \in \mathcal{M}$. Primero haga la siguiente descomposición (donde $d = gm_{m'}$)

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow m' & \searrow e_{m'} & \downarrow m \\
 & X & \\
 & \swarrow m_{m'} & \searrow e_d \\
 C & \xrightarrow{g} & D, \\
 & & \downarrow m_d
 \end{array}$$

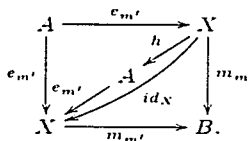
entonces $\exists!$ $k : X \rightarrow B$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{k} & B \\
 m_{m'} \downarrow & & \downarrow m \\
 C & \xrightarrow{g} & D
 \end{array}$$

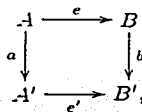
conmuta. Y como empezamos con un producto fibrado entonces $\exists! h : X \rightarrow A$ tal que los dos triángulos en el siguiente diagrama $m'h = m_{m'}$, y $fh = k$ conmutan. Observemos entonces los siguientes diagramas conmutativos



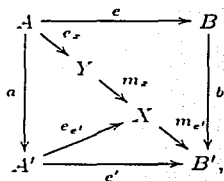
Ahora como tenemos un producto fibrado $\exists!$ morfismo de A en A . Por lo tanto $he_{m'} = id_A$. Por otro lado consideremos el siguiente diagrama



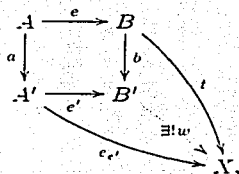
Como el diagrama conmuta para los dos morfismos $e_{m'}h$ y id_X , obtenemos por 11 i) $e_{m'}h = id_X$. Así $e_{m'}$ es isomorfismo y por lo tanto $m' \in \mathcal{M}$. Análogamente, dado un coproducto fibrado



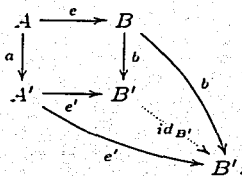
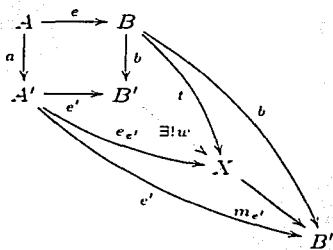
con $e \in \mathcal{E}$ queremos ver que $e' \in \mathcal{E}$. Primero haga la siguiente descomposición (donde $x = e_e \cdot a$)



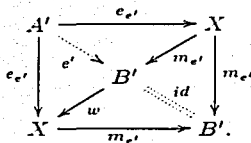
entonces $\exists! t : B \rightarrow X$ tal que el diagrama anterior conmuta. Y así $\exists! w : B' \rightarrow X$ tal que



conmuta. Consideremos entonces los siguientes diagramas

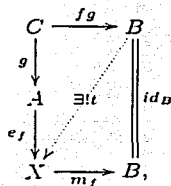
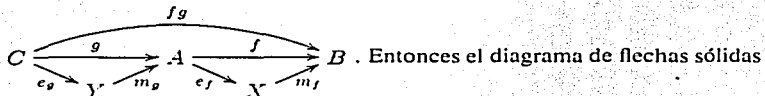


Y como tenemos un coproducto fibrado concluimos que $m_{e'} w = id_{B'}$. Por otro lado consideremos el diagrama

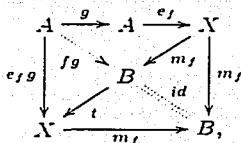


Como el diagrama conmuta y con id_X también, por la definición 11 iii) obtenemos $wm_{e'} = id_X$. Por lo tanto $m_{e'}$ es isomorfismo y así $e' \in \mathcal{E}$.

viii) Demostremos la primera ley de cancelación. Sean $fg \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{E}$ y consideremos

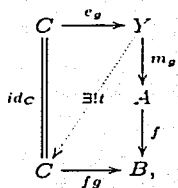


conmuta. Y por la definición 11 iii) obtenemos $m_f t = id_B$. Por otro lado

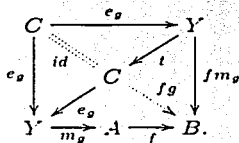


conmuta. Así el diagrama sólido conmuta y con id_X en la diagonal también conmuta, si usamos la unicidad de la definición 11 iii) obtenemos $tm_f = id_X$. Por lo tanto m_f es isomorfismo y así $f \in \mathcal{E}$.

Análogamente para la segunda ley de cancelación. Sean $fg \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{M}$, entonces el diagrama



conmuta. Por lo tanto $te_g = id_C$. Por otro lado construyamos el diagrama



Como el diagrama de flechas sólidas conmuta y también si ponemos id_Y en la diagonal conmuta, concluimos por la definición 11 iii) que $e_g t = id_Y$. Por lo tanto e_g es isomorfismo y entonces $g \in \mathcal{M}$. □

3.2 Sistemas de Factorización de Eilenberg-Moore

Si $I_{\mathcal{K}}$ es el siguiente funtor:

$$\begin{array}{ccc}
 I_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K}^2 \\
 A & \longmapsto & 1_A \\
 f \downarrow & & \downarrow (f, f) \\
 B & \longmapsto & 1_B
 \end{array}$$

definimos un sistema de factorización débil como sigue:

Definición 20. *Un sistema de factorización débil en una categoría \mathcal{K} es un funtor $F : \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ tal que $FI_{\mathcal{K}} \simeq Id_{\mathcal{K}}$.*

Veamos que sin pérdida de generalidad podemos considerar la igualdad $FI_{\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}}$, en lugar de isomorfismo.

Sean $F : \mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$ un funtor y $\gamma : Id_{\mathcal{K}} \longrightarrow FI_{\mathcal{K}}$ isomorfismo natural en \mathcal{K} , definamos $\delta : F' \longrightarrow F : \mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$ como

$$\delta_f := \begin{cases} \gamma_A & \text{si } f = id_A \\ 1_{Ff} & \text{si } f \neq id \end{cases}$$

y $F' : \mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$ en los objetos de la siguiente forma

$$F'f := \begin{cases} A & \text{si } f = id_A \\ Ff & \text{si } f \neq id \end{cases}$$

y en morfismos $(u, v) : f \longrightarrow g$ como $\delta_g^{-1}F(u, v)\delta_f$.

Veamos primero que F' es funtor. Observemos que manda objetos de \mathcal{K}^2 en objetos de \mathcal{K} y morfismos \mathcal{K}^2 en morfismos de \mathcal{K} , para ver que respeta composiciones e identidades, basta considerar los casos posibles. Además δ definida en términos del isomorfismo natural γ e identidades, resulta un isomorfismo natural.

Entonces podemos considerar de ahora en adelante la igualdad $FI_{\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}}$ en la definición de sistema de factorización débil en lugar de isomorfismo.

Dado un morfismo $f : X \longrightarrow A$ en \mathcal{K} , definimos $\eta_f : 1_X \longrightarrow f$ y $\mu_f : f \longrightarrow 1_A$ como

$$\eta_f = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ 1_X \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

$$\mu_f = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & A \\ f \downarrow & & \downarrow 1_A \\ A & \xrightarrow{1_A} & A \end{array}$$

Además si F es un sistema de factorización débil, definimos $F(\eta_f) = e_f$ y $F(\mu_f) = m_f$.

Proposición 4. Si $F : \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ es un sistema de factorización débil e $I_{\mathcal{K}}$ es el funtor definido anteriormente, entonces $f = m_f e_f$.

Demostración. Consideremos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow 1_A & \xrightarrow{(f,f)} & \downarrow 1_B \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{1_A} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow 1_A & \xrightarrow{\eta_f} & \downarrow f & \xrightarrow{\mu_f} & \downarrow 1_B \\
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{1_B} & B
 \end{array}
 \end{array}$$

Al aplicar F a los diagramas anteriores obtenemos

$$A \xrightarrow{F(f,f)} B = A \overset{f}{\underset{e_f \rightarrow Ff \rightarrow m_f}{\curvearrowright}} B.$$

□

Observación 5. e_f , m_f , en contraposición con lo que se hace con los sistemas de factorización ortogonales, ya están fijas, es decir, tenemos una factorización funtorial de f .

Definición 21. Un E - M sistema de factorización ¹ en una categoría \mathcal{K} es un sistema de factorización débil F tal que, si $\mathcal{E}_F = \{h | m_h \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{M}_F = \{h | e_h \text{ es invertible}\}$, entonces para toda $f \in \mathcal{K}$, $e_f \in \mathcal{E}_F$ y $m_f \in \mathcal{M}_F$.

Teorema 4. Para un E - M sistema de factorización, se tienen las siguientes identidades

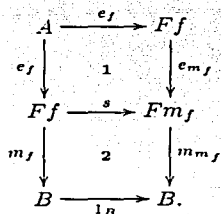
$$e_{m_f} = F\lambda_f \quad \text{y} \quad m_{e_f} = F\rho_f$$

con

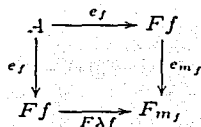
$$\rho_f = (1_A, m_f) : e_f \rightarrow f \quad \text{y} \quad \lambda_f = (e_f, 1_B) : f \rightarrow m_f.$$

¹Sistema de Factorización de Eilenberg-Moore.

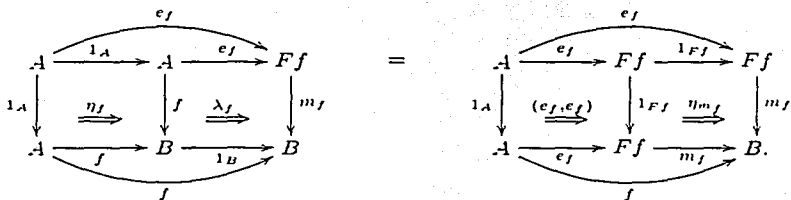
Demostración. Para demostrar la primera identidad observemos el siguiente diagrama



Comenzaremos por demostrar que para $s = e_{m_f}$ y $s = F\lambda_f$ el diagrama anterior conmuta. Para $s = e_{m_f}$, el diagrama 1 conmuta trivialmente, y el diagrama 2 conmuta porque $m_{m_f}e_{m_f} = m_f = 1_B m_f$. Por otro lado para $s = F\lambda_f$ necesitamos demostrar que



conmuta. Observemos que $e_{m_f} = F(\eta_{m_f})$ y $e_f = F(\eta_f)$ y consideremos la siguiente igualdad de diagramas



Al aplicar F a los diagramas anteriores obtenemos

$$A \xrightarrow{e_f} Ff \xrightarrow{F(\lambda_f)} F(m_f) = A \xrightarrow{F(e_f, e_f)} Ff \xrightarrow{e_{m_f}} F(m_f).$$

Así el digrama 1 conmuta. Para ver que el digrama 2 conmuta para $s = F(\lambda_f)$, observemos que $m_{m_f} = F(\mu_{m_f})$ y $m_f = F(\mu_f)$, y consideremos la siguiente igualdad de diagramas

The image shows two commutative diagrams separated by an equals sign. The left diagram has nodes A, B, Ff, and F(m_f). Morphisms are: A to B (f), A to Ff (e_f), Ff to B (m_f), A to B (lambda_f), Ff to B (m_f), B to B (1_B), B to Ff (1_B), and B to F(m_f) (1_B). There are also curved arrows from A to B labeled f and from B to B labeled 1_B. The right diagram has nodes A, B, B, and B. Morphisms are: A to B (f), B to B (1_B), A to B (mu_f), B to B (1_B), B to B (1_B), and B to B (1_B). There are also curved arrows from A to B labeled f and from B to B labeled 1_B.

Al aplicar F a los diagramas anteriores obtenemos

$$Ff \xrightarrow{F\lambda_f} F(m_f) \xrightarrow{m_{m_f}} B = Ff \xrightarrow{m_f} B \xrightarrow{1_B} B.$$

Así el digrama 2 conmuta y el primer diagrama en la demostración conmuta para ambas elecciones de s . Por lo tanto el morfismo de \mathcal{K}^2 dado por $(e_{m_f}, e_f, m_f) : e_f \rightarrow m_{m_f}$ se factoriza como

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{e_f} & Ff & \xrightarrow{s} & F(m_f) \\ e_f \downarrow & \xrightarrow{\mu_{e_f}} & 1_{Ff} \downarrow & \xrightarrow{(s, m_f)} & \downarrow m_{m_f} \\ Ff & \xrightarrow{1_{Ff}} & Ff & \xrightarrow{m_f} & B. \end{array}$$

Esto lo podemos visualizar con las diagonales en el primer diagrama de la demostración. Dado que $F\mu_{e_f} = m_{e_f}$ cuando aplicamos F a las dos descomposiciones anteriores obtenemos

$$F(e_{m_f}, m_f) \cdot m_{e_f} = F(F\lambda_f, m_f) \cdot m_{e_f}.$$

y como $e_f \in \mathcal{E}_F$ entonces m_{e_f} es isomorfismo, luego $\bar{s} := F(s, m_f)$ no depende de la elección de s .

Ahora demosntremos que \bar{s} hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Ff & \xrightarrow{s} & F(m_f) \\ 1_{Ff} \downarrow & \mathfrak{3} & \downarrow e_{m_f} \\ Ff & \xrightarrow{\bar{s}} & F(m_{m_f}) \end{array}$$

para las mismas dos elecciones de s . Para la elección $s = e_{m_f}$, hagamos la sustitución $g = m_f$ en el diagrama $\mathfrak{3}$

$$\begin{array}{ccc} Ff & \xrightarrow{e_g} & Fg \\ 1_{Ff} \downarrow & \mathfrak{3} & \downarrow e_{m_g} \\ Ff & \xrightarrow{F(e_g, g)} & F(m_g), \end{array}$$

y consideremos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc} Ff & \xrightarrow{e_g} & Fg \\ 1_{Ff} \downarrow & \underline{(e_g, g)} & \downarrow m_g \\ Ff & \xrightarrow{g} & B \end{array} = \begin{array}{ccccc} Ff & \xrightarrow{e_g} & Fg & \xrightarrow{1_{Fg}} & Fg \\ 1_{Ff} \downarrow & \underline{(e_g, e_g)} & \downarrow 1_{Fg} & \underline{\eta_{m_g}} & \downarrow m_g \\ Ff & \xrightarrow{e_g} & Fg & \xrightarrow{m_g} & B. \end{array}$$

Al aplicar F al diagrama anterior obtenemos

$$F(e_g, g) = Ff \xrightarrow{e_g} Fg \xrightarrow{e_{m_g}} F(m_g).$$

Así el digrama $\mathfrak{3}$ conmuta.

Para la elección $s = F\lambda_f$, consideremos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 Ff & \xrightarrow{F\lambda_f} & Fm_f \\
 \downarrow 1_{Ff} & \searrow (F\lambda_f, m_f) & \downarrow m_{m_f} \\
 Ff & \xrightarrow{m_f} & B
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 Ff & \xrightarrow{F\lambda_f} & Fm_f & \xrightarrow{1_{Fm_f}} & Fm_f \\
 \downarrow 1_{Ff} & \searrow (F\lambda_f, F\lambda_f) & \downarrow 1_{Fm_f} & \searrow \eta_{m_{m_f}} & \downarrow m_{m_f} \\
 Ff & \xrightarrow{F\lambda_f} & Fm_f & \xrightarrow{m_{m_f}} & B.
 \end{array}$$

Al aplicar F al diagrama anterior obtenemos

$$F(F\lambda_f, m_f) = Ff \xrightarrow{F\lambda_f} Fm_f \xrightarrow{e_{m_f}} Fm_{m_f}.$$

Así el digrama 3 conmuta, y observemos que e_{m_f} es un isomorfismo, Por lo tanto concluimos que $e_{m_f} = F\lambda_f$.

Análogamente, para demostrar la identidad $m_{e_f} = F\rho_f$, observemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{1_A} & A \\
 \downarrow e_{e_f} & \searrow s & \downarrow e_f \\
 Fe_f & \xrightarrow{s} & Ff \\
 \downarrow m_{e_f} & \searrow \theta & \downarrow m_f \\
 Ff & \xrightarrow{m_f} & B.
 \end{array}$$

Comenzaremos por demostrar que para $s = m_{e_f}$ y $s = F\rho_f$ el diagrama anterior conmuta. Para $s = e_{m_f}$ el diagrama 6 conmuta trivialmente, y el diagrama 5 conmuta porque $m_{e_f}e_{e_f} = e_f = e_f 1_A$. Por otro lado para $s = F\rho_f$ necesitamos demostrar que

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{1_A} & A \\
 \downarrow e_{e_f} & & \downarrow e_f \\
 Fe_f & \xrightarrow{F\rho_f} & Ff
 \end{array}$$

conmuta. Observemos que $e_{e_f} = F(\eta_{e_f})$ y $e_f = F(\eta_f)$ y consideremos la siguiente igualdad de diagramas

The diagram shows two commutative squares separated by an equals sign. The left square has nodes A at the top and A at the bottom. The top row consists of three A 's connected by 1_A maps. The bottom row consists of A and B connected by f . Vertical maps are 1_A on the left and f on the right. A curved arrow 1_A goes from the top-left A to the top-right A . A curved arrow f goes from the bottom-left A to the bottom-right B . A horizontal arrow $(1_A, 1_A)$ goes from the top-left A to the top-middle A . A horizontal arrow η_f goes from the top-middle A to the top-right A . A horizontal arrow f goes from the top-middle A to the bottom-middle A . A horizontal arrow f goes from the bottom-middle A to the bottom-right B .

The right square has nodes A at the top and A at the bottom. The top row consists of three A 's connected by 1_A maps. The bottom row consists of A and B connected by Ff . Vertical maps are 1_A on the left and f on the right. A curved arrow 1_A goes from the top-left A to the top-right A . A curved arrow f goes from the bottom-left A to the bottom-right B . A horizontal arrow η_{e_f} goes from the top-left A to the top-middle A . A horizontal arrow e_f goes from the top-middle A to the top-right A . A horizontal arrow ρ_f goes from the top-middle A to the bottom-middle A . A horizontal arrow Ff goes from the top-middle A to the bottom-middle A . A horizontal arrow m_f goes from the bottom-middle A to the bottom-right B .

Como $F1_A = A$, al aplicar F a los diagramas anteriores obtenemos

$$A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{F\eta_f} Ff = A \xrightarrow{F\eta_{e_f}} Fe_f \xrightarrow{F\rho_f} Ff.$$

Así el diagrama 5 conmuta.

Para ver que el diagrama 6 conmuta para $s = F(\rho_f)$, observemos que $m_{e_f} = F(\mu_{e_f})$ y $m_f = F(\mu_f)$, y consideremos la siguiente igualdad de diagramas

The diagram shows two commutative squares separated by an equals sign. The left square has nodes A at the top and B at the bottom. The top row consists of A and B connected by f . The bottom row consists of Ff and B connected by m_f . Vertical maps are e_f on the left and 1_B on the right. A curved arrow f goes from the top-left A to the top-right B . A curved arrow m_f goes from the bottom-left Ff to the bottom-right B . A horizontal arrow ρ_f goes from the top-left A to the bottom-left Ff . A horizontal arrow f goes from the top-middle A to the bottom-middle B . A horizontal arrow μ_f goes from the top-middle A to the bottom-middle B .

The right square has nodes A at the top and A at the bottom. The top row consists of A and B connected by Ff . The bottom row consists of Ff and B connected by m_f . Vertical maps are e_f on the left and 1_B on the right. A curved arrow f goes from the top-left A to the top-right B . A curved arrow m_f goes from the bottom-left Ff to the bottom-right B . A horizontal arrow μ_{e_f} goes from the top-left A to the bottom-left Ff . A horizontal arrow 1_{Ff} goes from the top-middle A to the bottom-middle Ff . A horizontal arrow (m_f, m_f) goes from the top-middle A to the bottom-middle Ff .

Al aplicar F a los diagramas anteriores obtenemos

$$Fe_f \xrightarrow{F\rho_f} Ff \xrightarrow{m_f} B = Fe_f \xrightarrow{F\mu_{e_f}} Ff \xrightarrow{\frac{m_f}{F(m_f, m_f)}} B.$$

Así el diagrama 6 conmuta también para ambas elecciones de s . Por lo tanto el morfismo de \mathcal{K}^2 dado por $(e_f, m_f m_{e_f}) : e_f \rightarrow m_f$ se factoriza como

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{e_f} & Ff & \xrightarrow{1_{Ff}} & Ff \\
 \downarrow e_{e_f} & \searrow (e_f, s) & \downarrow 1_{Ff} & \searrow \eta_{m_f} & \downarrow m_f \\
 Fe_f & \xrightarrow{s} & Ff & \xrightarrow{m_f} & B.
 \end{array}$$

Esto lo podemos visualizar con las diagonales en el diagrama compuesto por 5 y 6. Dado que $F\eta_{m_f} = e_{m_f}$ cuando aplicamos F a las dos descomposiciones anteriores obtenemos

$$e_{m_f} \cdot F(e_f, m_{e_f}) = e_{m_f} \cdot F(e_f, F\rho_f),$$

y como $m_f \in \mathcal{M}_F$ entonces e_{m_f} es isomorfismo, luego $\bar{s} := F(e_f, s)$ no depende de la elección de s .

Ahora demostramos que \bar{s} hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Fe_{e_f} & \xrightarrow{\bar{s}} & Ff \\
 m_{e_f} \downarrow & \bar{s} & \downarrow 1_{Ff} \\
 Fe_f & \xrightarrow{s} & Ff,
 \end{array}$$

para las mismas dos elecciones de s . Para la elección $s = m_{e_f}$ hagamos la sustitución $g = e_f$

$$\begin{array}{ccc}
 Fc_g & \xrightarrow{F(e_f, m_g)} & Ff \\
 m_{e_g} \downarrow & \bar{s} & \downarrow 1_{Ff} \\
 Fg & \xrightarrow{m_g} & Ff,
 \end{array}$$

y consideremos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & Ff \\
 \downarrow e_\sigma & \Downarrow (g, m_g) & \downarrow 1_{Ff} \\
 Fg & \xrightarrow{m_g} & Ff
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{e_\sigma} & Fg & \xrightarrow{m_g} & B \\
 \downarrow e_\sigma & \Downarrow \mu_{e_g} & \downarrow 1_{Fg} & \Downarrow (m_g, m_g) & \downarrow 1_B \\
 Fg & \xrightarrow{1_{Fg}} & Fg & \xrightarrow{m_g} & B.
 \end{array}$$

Al aplicar F al diagrama anterior obtenemos

$$F(g, m_g) = Fe_g \xrightarrow{m_{e_g}} Fg \xrightarrow{m_g} Ff.$$

Así el digrama 8 conmuta.

Para la elección $s = F\rho_f$ hagamos la sustitución $g = e_f$

$$\begin{array}{ccc}
 Fe_g & \xrightarrow{F(e_f, F\rho_f)} & Ff \\
 \downarrow m_{e_g} & \text{8} & \downarrow 1_{Ff} \\
 Fg & \xrightarrow{F\rho_f} & Ff,
 \end{array}$$

y consideremos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & Ff \\
 \downarrow e_\sigma & \Downarrow (g, F\rho_f) & \downarrow 1_{Ff} \\
 Fg & \xrightarrow{F\rho_f} & Ff
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{e_\sigma} & Fg & \xrightarrow{F\rho_f} & B \\
 \downarrow e_\sigma & \Downarrow \mu_{e_g} & \downarrow 1_{Fg} & \Downarrow (F\rho_f, F\rho_f) & \downarrow 1_B \\
 Fg & \xrightarrow{1_{Fg}} & Fg & \xrightarrow{F\rho_f} & B.
 \end{array}$$

Al aplicar F al diagrama anterior obtenemos

$$F(g, F\rho_f) = Fe_g \xrightarrow{m_{e_g}} Fg \xrightarrow{F\rho_f} Ff.$$

Así el digrama 8 conmuta, y observemos que m_{e_e} es un isomorfismo. Por lo tanto concluimos que $m_e = F\rho_f$. □

Teorema 5. Sea F un E-M sistema de factorización y $(u, v) : f \rightarrow g$ un morfismo en \mathcal{K}^2 . Si tenemos un diagrama conmutativo

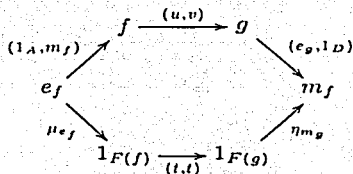
$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & C \\
 e_f \downarrow & & \downarrow e_g \\
 F(f) & \xrightarrow{t} & F(g) \\
 m_f \downarrow & & \downarrow m_g \\
 B & \xrightarrow{v} & D
 \end{array}$$

necesariamente $t = F(u, v)$.

Demostración. Primero observemos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{1_A} & A & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{e_g} & F(g) \\
 e_f \downarrow & & f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow m_g \\
 F(f) & \xrightarrow{m_f} & B & \xrightarrow{v} & D & \xrightarrow{1_D} & D
 \end{array} & = & \begin{array}{ccccccc}
 & & & & F(f) & & \\
 & & & & e_f \nearrow & & \searrow t \\
 A & \xrightarrow{1_A} & A & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{e_g} & F(g) \\
 e_f \downarrow & & f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow m_g \\
 F(f) & \xrightarrow{m_f} & B & \xrightarrow{v} & D & \xrightarrow{1_D} & D \\
 & & & & \nwarrow t & & \nearrow m_g \\
 & & & & F(g) & &
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & F(f) & & \\
 & & & & e_f \nearrow & & \searrow t \\
 A & \xrightarrow{1_A} & A & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{e_g} & F(g) \\
 e_f \downarrow & & f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow m_g \\
 F(f) & \xrightarrow{m_f} & B & \xrightarrow{v} & D & \xrightarrow{1_D} & D \\
 & & & & \nwarrow t & & \nearrow m_g \\
 & & & & F(g) & &
 \end{array} & = & \begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{e_f} & F(f) & \xrightarrow{t} & F(g) & \xrightarrow{1_{F(g)}} & F(g) \\
 e_f \downarrow & & 1_{F(f)} \downarrow & & \downarrow 1_{F(g)} & & \downarrow m_g \\
 F(f) & \xrightarrow{1_{F(f)}} & F(f) & \xrightarrow{t} & F(g) & \xrightarrow{m_f} & D.
 \end{array}
 \end{array}$$

Es decir obtenemos que el diagrama :



conmuta. Al aplicar F a este último diagrama y usando el teorema anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
 e_{m_g} \cdot F(u, v) \cdot m_{e_f} &= F(e_g, 1_D) \cdot F(u, v) \cdot F(1_A, m_f) \\
 &= F\eta_{m_g} \cdot F(t, t) \cdot F\mu_{e_f} \\
 &= e_{m_g} \cdot t \cdot m_{e_f}.
 \end{aligned}$$

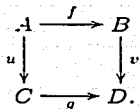
Como e_{m_g} y m_{e_f} son isomorfismos, concluimos que $t = F(u, v)$. □

Teorema 6. Para un E-M sistema de factorización $(F : \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathcal{K}, FI_{\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}})$ tal que $\forall f \in \mathcal{K}, e_f \in \mathcal{E}_F$ y $m_f \in \mathcal{M}_F$ el par $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_F)$ es un sistema ortogonal de factorización, y viceversa todo sistema ortogonal de factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ induce un E-M sistema de factorización.

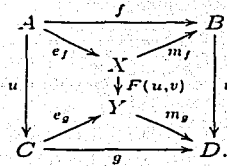
Demostración. Demostraremos primero que si F es un E-M sistema de factorización entonces $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_F)$ es un sistema ortogonal de factorización. Recordemos que $\mathcal{E}_F = \{h | m_h \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{M}_F = \{h | e_h \text{ es invertible}\}$.

Comencemos con *iii*) de la definición 11.

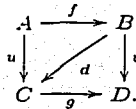
Sean $f \in \mathcal{E}_F$ y $g \in \mathcal{M}_F$, y supongamos que tenemos un diagrama conmutativo



Observemos el siguiente diagrama



Como $f \in \mathcal{E}_F$ y $g \in \mathcal{M}_F$, entonces m_f y e_g son isomorfismos y obtenemos un morfismo $d: B \rightarrow C$, dado por $d = e_g^{-1}F(u,v)m_f^{-1}$ que hace conmutar el diagrama



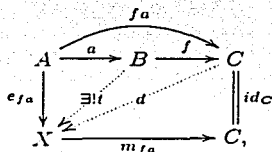
Para demostrar unicidad, suponga que existe otro morfismo $h: B \rightarrow C$, que hace conmutar el diagrama anterior y considere el morfismo

$$X \xrightarrow{m_f} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{e_g} Y.$$

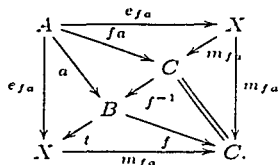
Como $X \xrightarrow{F(u,v)} Y$ es el único morfismo de X a Y por el teorema anterior, entonces $e_g h m_f = F(u,v)$ y utilizando que m_f y e_g son isomorfismos obtenemos $h = e_g^{-1}F(u,v)m_f^{-1}$. Por lo tanto $h = d$ y así para cualquier E-M sistema, $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_F)$ satisface la propiedad del llenado diagonal; es decir satisface el inciso iii) de la definición 11.

El inciso ii) en la definición 11, lo tenemos por la definición de E-M sistema de factorización. Por último demostraremos i). Dado $a \in \mathcal{E}_F$ y f isomorfismo, consideremos el diagrama: $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{f} C$. Entonces el diagrama de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow e_{fa} & \downarrow & \nearrow m_{fa} & \\ & & X & & \end{array}$$



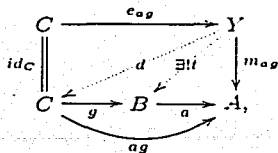
conmuta. Luego por la primera parte de la demostración $\exists ! t$ tal que $e_{fa} = ta$ y $m_{fa} = f$. Definamos $d : C \longrightarrow X$ como $d := tf^{-1}$ y veamos que es inversa de m_{fa} . Del diagrama vemos que $m_{fa}d = m_{fa}tf^{-1} = ff^{-1} = id_C$. Para demostrar que $dm_{fa} = id_X$ considere el siguiente diagrama



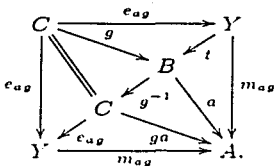
Como cada parte del diagrama conmuta entonces el diagrama sólido conmuta y si ponemos id_X en la diagonal también conmuta, si usamos la unicidad de la primera parte de la demostración obtenemos $dm_{fa} = id_X$. Por lo tanto m_{fa} es isomorfismo y así $fa \in \mathcal{E}_F$. Por lo tanto \mathcal{E}_F es cerrado bajo composición con isomorfismos por la izquierda. Análogamente, dado $a \in \mathcal{M}_F$ y g isomorfismo, consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{a} & A \\ & \searrow c_{ag} & & \nearrow m_{ag} & \\ & & X & & \end{array}$$

Entonces el siguiente diagrama de flechas sólidas



conmuta. Luego por la primera parte de la demostración $\exists! t$ tal que $m_{ag} = at$ y $te_{ag} = g$. Definamos $d = g^{-1}t$ veamos que es inversa de e_{ag} , del diagrama vemos que $de_{ag} = g^{-1}te_{ag} = g^{-1}g = id_C$. Para demostrar que $e_{ag}d = id_Y$ considere el siguiente diagrama



Como cada parte del diagrama conmuta entonces el diagrama sólido conmuta y si ponemos id_Y en la diagonal también conmuta, si usamos la unicidad de la primera parte de la demostración obtenemos $e_{ag}d = id_Y$. Por lo tanto e_{ag} es isomorfismo y así $ag \in \mathcal{M}_F$. Por lo tanto \mathcal{M}_F es cerrado bajo composición con isomorfismos por la derecha. Concluimos que $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_F)$ es un sistema ortogonal de factorización.

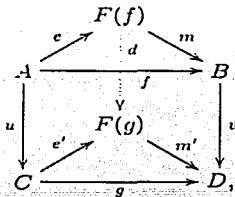
Inversamente, dado un sistema ortogonal de factorización queremos definir un functor $F: \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathcal{K}$. Para definirlo en los objetos tenemos dos casos:

a) si tenemos una identidad $A \xrightarrow{1_A} A$, definimos $F(1_A) = A$.

b) para cualquier f no identidad elegimos una factorización $A \xrightarrow{f} B$, de f

(utilizando fuertemente el axioma de elección) y definimos $F(f) = *$.

Y para los morfismos $(u, v): f \rightarrow g$ de \mathcal{K}^2 tenemos que como el diagrama de flechas sólidas



conmuta y $e \in \mathcal{E}$, $m' \in \mathcal{M}$ entonces $\exists! d =: F(u, v) : F(f) \dashrightarrow F(g)$ por la definición 11 iii).

Demostremos que F es funtor. Dada una identidad en \mathcal{K}^2 :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{1_B} & B, \end{array}$$

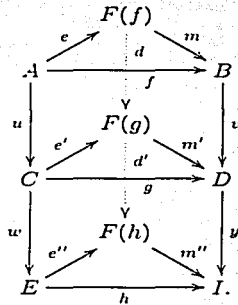
obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & Ff & & \\ & e_f \nearrow & \vdots 1_{Ff} & \searrow m_f & \\ A & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow \gamma & & \\ & e_f \nearrow & Ff & \searrow m_f & \\ 1_A \downarrow A & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{f} & 1_B \downarrow B \\ & & & & \end{array}$$

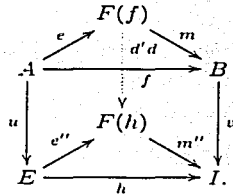
Es decir $F(1_f) = 1_{F(f)}$. Y si tenemos la siguiente composición de morfismos en \mathcal{K}^2

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{w} & E \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{v} & D & \xrightarrow{y} & I, \end{array}$$

entonces obtenemos el siguiente diagrama al aplicar F a cada uno de los cuadrados anteriores



Por otro lado si aplicamos F a todo el diagrama obtenemos



Y como tenemos unicidad en la definición 11 iii), existe un único morfismo de $F(f)$ a $F(h)$, entonces F preserva composiciones. Y por lo tanto F es un funtor.

Ahora veamos que se satisface la ecuación $FI_{\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}}$. Dado un objeto A de \mathcal{K} tenemos que $I_{\mathcal{K}}(A) = 1_A$ y $F(1_A) = A$, por lo tanto es la identidad en los objetos. Y dado un morfismo f de \mathcal{K} tenemos que $I_{\mathcal{K}}(f) = (f, f)$ y $F(f, f) = f$, por lo tanto es la identidad en los morfismos, por lo tanto $FI_{\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}}$.

Y por último, como empezamos con un sistema de factorización ortogonal $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, sabemos que cualquier $f \in \mathcal{K}$, se factoriza como $f = m_f e_f$ con $e_f \in \mathcal{E}$ y $m_f \in \mathcal{M}$. luego por el Teorema 3 iv) obtenemos que m_{e_f} y e_{m_f} son isomorfismos. Por lo tanto obtenemos un \mathcal{E} - \mathcal{M} sistema de factorización.

□

Capítulo 4

Sistemas de Factorización como Álgebras de Eilenberg-Moore

En el capítulo cuatro y último de esta tesis, empezaremos trabajando en \mathcal{K}^2 y definiremos funtores que utilizaremos a lo largo del capítulo, algunos de los cuales tienen como dominio o codominio a $(\mathcal{K}^2)^2$ y $((\mathcal{K}^2)^2)^2$. Trabajaremos con la 2-mónada asociada al endo-2-functor $(-)^2$, demostrando al final que en este caso en particular las pseudo-álgebras normales para esta 2-mónada son equivalentes a los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore.

4.1 Funtores relacionados con $(-)^2$

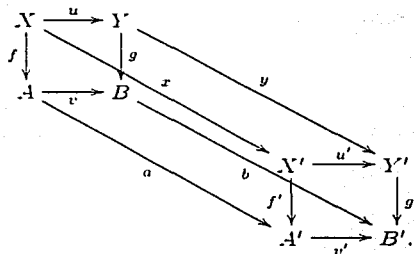
Dado un morfismo de \mathcal{K}^2 ,

$$s = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{v} & B, \end{array}$$

aquí pensaremos a los objetos como flechas verticales y a los morfismos como las flechas horizontales. Es decir $f \xrightarrow{(u,v)} g$.
 Dados dos objetos s, s' de $(\mathcal{K}^2)^2$

$$s = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{v} & B, \end{array} \quad s' = \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ f' \downarrow & & \downarrow g' \\ A' & \xrightarrow{v'} & B', \end{array}$$

un morfismo entre ellos está dado por el siguiente cubo



El cual llamaremos t y escribiremos como $t = [x, y, a, b]$. Así entenderemos por t'' el mismo cubo poniendo biprima a cada una de las variables, y por r un morfismo de t a t'' .

Nota 7. En las siguientes definiciones pondremos del lado izquierdo el diagrama correspondiente al dominio de los funtores y del lado derecho el codominio de estos.

Observemos que si empezamos con un functor $G : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$, con \mathcal{K} y \mathcal{L} categorías arbitrarias, entonces G^2 está definido como:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{G^2} & \mathcal{L}^2 \\ 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \gamma \Downarrow \\ \xrightarrow{H'} \end{array} \mathcal{K} & \xrightarrow{\quad} & 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \gamma \Downarrow \\ \xrightarrow{H'} \end{array} \mathcal{K} \xrightarrow{G} \mathcal{L}. \end{array}$$

Definamos ahora los siguientes funtores que utilizaremos continuamente en esta parte

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & & \\ f \downarrow & \searrow & \downarrow g & \searrow & \\ A & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{x} & X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ & \searrow & \downarrow a & \searrow & \downarrow f' & \searrow & \downarrow g' \\ & & A' & \xrightarrow{v'} & B' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F^2 : (\mathcal{K}^2)^2 & \longrightarrow & \mathcal{K}^2 \\ s \xrightarrow{\quad} & F(u, v) & \\ t \downarrow & \downarrow (F(x, a), F(y, b)) & \\ s' \xrightarrow{\quad} & F(u', v'), & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f & \xrightarrow{s} & g & & & & \\ \phi \downarrow & \searrow & \downarrow \gamma & \searrow & \Gamma & & \\ f' & \xrightarrow{s'} & g' & \xrightarrow{\Phi} & f'' & \xrightarrow{s''} & g'' \\ & \searrow & \downarrow \phi' & \searrow & \downarrow \Gamma' & \searrow & \downarrow \gamma'' \\ & & f''' & \xrightarrow{s'''} & g''' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (F^2)^2 : ((\mathcal{K}^2)^2)^2 & \longrightarrow & (\mathcal{K}^2)^2 \\ t \xrightarrow{\quad} & (F(\phi), F(\gamma)) & \\ r \downarrow & \downarrow [F(\Phi), F(\Gamma), F(\phi'), F(\Gamma')] & \\ t'' \xrightarrow{\quad} & (F(\phi''), F(\gamma'')). & \end{array}$$

Dado el functor

$$I_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^2$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ 1_A \downarrow & & \downarrow 1_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

definamos los siguientes funtores; el primero no es otra cosa que el $I_{\mathcal{K}}$ si sustituimos \mathcal{K}^2 por \mathcal{K} .

$$I_{\mathcal{K}^2} : \mathcal{K}^2 \longrightarrow (\mathcal{K}^2)^2$$

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{1_f} & 1_f \\ (u,v) \downarrow & & \downarrow [u,u,v,v] \\ g & \xrightarrow{1_g} & 1_g \end{array}$$

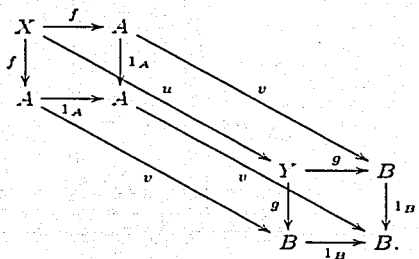
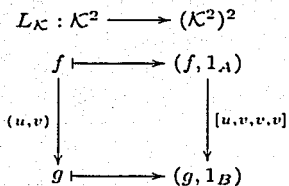
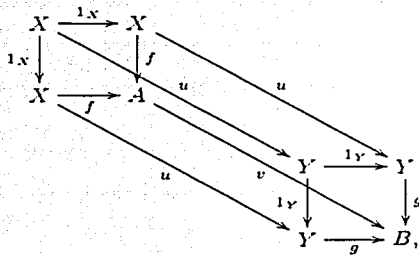
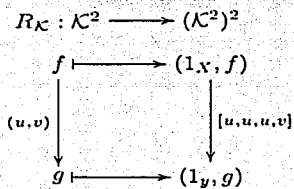
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & & \\ f \downarrow & \searrow & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow{1_A} & A & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \downarrow g \\ & \searrow v & & \searrow v & & & & \downarrow 1_B \\ & & B & \xrightarrow{1_B} & B & & & \end{array}$$

$$(I_{\mathcal{K}})^2 : \mathcal{K}^2 \longrightarrow (\mathcal{K}^2)^2$$

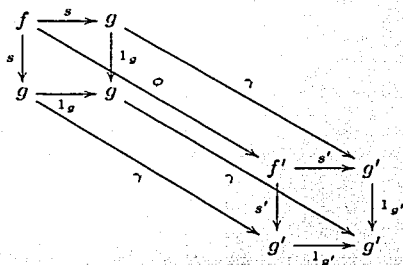
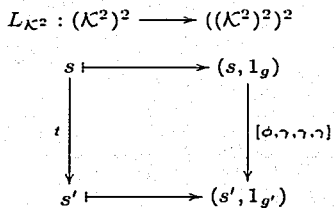
$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{(f,f)} & (f,f) \\ (u,v) \downarrow & & \downarrow [u,v,u,v] \\ g & \xrightarrow{(g,g)} & (g,g) \end{array}$$

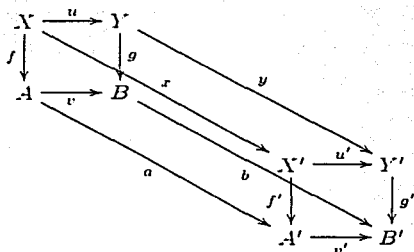
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & A & & \\ 1_X \downarrow & \searrow & \downarrow 1_A & & \\ X & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{g} & B & \downarrow 1_B \\ & \searrow v & & \searrow v & & & & \downarrow 1_B \\ & & Y & \xrightarrow{g} & B & & & \end{array}$$

También llamaremos $V_{\mathcal{K}}$ al functor $I_{\mathcal{K}^2}$ y $H_{\mathcal{K}}$ al functor $(I_{\mathcal{K}})^2$, si pensamos en que $I_{\mathcal{K}^2}$ incluye a los objetos de \mathcal{K}^2 verticalmente en $(\mathcal{K}^2)^2$ y que $H_{\mathcal{K}}$ es la inclusión horizontal. Consideremos a $s = (u, v)$ como antes y definamos



En los siguientes diagramas también llamaremos γ al morfismo entre g y g' , es decir $\gamma = (y, b)$ si seguimos la notación en F^2 . Tendremos $\phi = (x, a)$ y así sucesivamente.

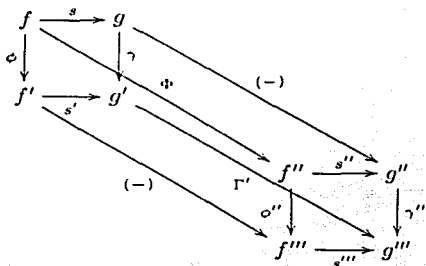




$$C_{\mathcal{K}} : (\mathcal{K}^2)^2 \longrightarrow \mathcal{K}^2$$

$$\begin{array}{ccc} s & \longrightarrow & d = vf = gu \\ \downarrow t & & \downarrow (r,b) \\ s' & \longrightarrow & d' = v'f' = g'u' \end{array}$$

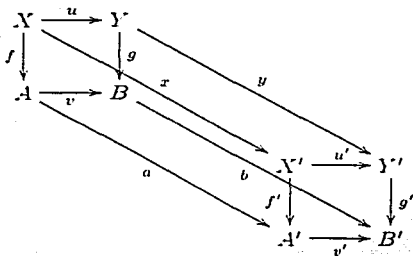
En la siguiente definición solo nos quedamos con los morfismo de la diagonal Φ, Γ' los cuales a su vez son pares de flechas



$$C_{\mathcal{K}^2} : ((\mathcal{K}^2)^2)^2 \longrightarrow (\mathcal{K}^2)^2$$

$$\begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & c = \gamma s = s' \phi \\ \downarrow r & & \downarrow [\Phi, \dots, \Gamma'] \\ t' & \longrightarrow & c' = \gamma' s' = s''' \phi'' \end{array}$$

Es decir aquí nos quedaremos solo con los morfismos Φ y Γ' que unen las diagonales de t y t'' .



$$(C_{\mathcal{K}})^2 : ((\mathcal{K}^2)^2)^2 \longrightarrow (\mathcal{K}^2)^2$$

$$t \longrightarrow \delta = (x, b)$$

y si pensamos en otro objeto t'' en $((\mathcal{K}^2)^2)^2$, al poner biprima a las variables en el diagrama anterior, entonces $(C_{\mathcal{K}})^2(t'') = \delta'' = (x'', b'')$ y así en un morfismo $r : t \longrightarrow t''$, $(C_{\mathcal{K}})^2(r)$ consta de las cuatro flechas que unen a δ con δ'' .

Ahora demostraremos algunas relaciones importantes de los morfismos que acabamos de definir y que serán de utilidad en las siguientes páginas.

Lema 1. Si \mathcal{K} es una categoría arbitraria y $(F^2)^2$, $L_{\mathcal{K}^2}$, $L_{\mathcal{K}}$, F^2 , $C_{\mathcal{K}}$, $C_{\mathcal{K}^2}$ los funtores definidos anteriormente, entonces:

$$i) (F^2)^2 L_{\mathcal{K}^2} = L_{\mathcal{K}} F^2.$$

$$ii) C_{\mathcal{K}}(F^2)^2 = F^2 C_{\mathcal{K}^2}.$$

Demostración. Veamos que $(F^2)^2 L_{\mathcal{K}^2} = L_{\mathcal{K}} F^2$.

Dado un objeto $s = (f; u, v; g)$ de $(\mathcal{K}^2)^2$, observemos que:

$$(F^2)^2 L_{\mathcal{K}^2}(s) = (F^2)^2((u, v), (1_Y, 1_B)) = (F^2)^2((u, v), 1_g) = (F(u, v), F(1_g)) \text{ y}$$

$$L_{\mathcal{K}} F^2(s) = L_{\mathcal{K}}(F(u, v)) = (F(u, v), 1_{Fg}).$$

Además si tomamos $t : s \longrightarrow s'$ como en las definiciones anteriores, entonces

$$(F^2)^2 L_{\mathcal{K}^2}(t) = (F^2)^2[\phi, \gamma, \gamma, \gamma] = [F\phi, F\gamma, F\gamma, F\gamma] \text{ y}$$

$$L_{\mathcal{K}} F^2(t) = L_{\mathcal{K}}(F(x, a), F(y, b)) = L_{\mathcal{K}}(F\phi, F\gamma) = [F\phi, F\gamma, F\gamma, F\gamma].$$

Por lo tanto, $(F^2)^2 L_{\mathcal{K}^2} = L_{\mathcal{K}} F^2$.

Ahora demosremos que $C_{\mathcal{K}}(F^2)^2 = F^2 C_{\mathcal{K}^2}$.

Dado un objeto t de $((\mathcal{K}^2)^2)^2$, observemos la diagonal común de:

$$\begin{array}{ccc} Ff & \xrightarrow{F(x,a)} & Ff' \\ F(u,v) \downarrow & \searrow & \downarrow F(u',v') \\ Fg & \xrightarrow{F(y,b)} & Fg' \end{array}$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{K}}(F^2)^2(t) &= C_{\mathcal{K}}(F(\phi), F(\gamma)) = C_{\mathcal{K}}(F(x, a), F(y, b)) \\ &= F(u', v')F(x, a) = F(y, b)F(u, v) \\ &= F(u'x, v'a) = F(yu, bv). \end{aligned}$$

De la misma manera observemos la diagonal común de

$$\begin{array}{ccc}
 & (u,v) & \\
 & \xrightarrow{f} & g \\
 (x,a)=\phi & \downarrow & \downarrow \gamma=(y,b) \\
 & d & \\
 & \xrightarrow{f'} & g' \\
 & (u',v') &
 \end{array}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 F^2 C_{\mathcal{K}^2}(t) &= F^2(d) = F^2(yu, bv) = F^2(u'x, v'a) \\
 &= F(yu, bv) = F(u'x, v'a).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, coinciden en los objetos. Además en los morfismos

$$C_{\mathcal{K}}(F^2)^2(h) = C_{\mathcal{K}}[F\Phi, F\Gamma, F\Phi', F\Gamma'] = (F\Phi, F\Gamma').$$

$$F^2 C_{\mathcal{K}^2}(h) = F^2[\Phi, \Gamma] = (F\Phi, F\Gamma').$$

Por lo tanto, $C_{\mathcal{K}}(F^2)^2 = F^2 C_{\mathcal{K}^2}$.

□

4.2 Álgebras y Sistemas de Factorización

Para un sistema de factorización débil $F : \mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$, una estructura de álgebra en F es un isomorfismo $\gamma : FF^2 \xrightarrow{\cong} FC_{\mathcal{K}}$ el cual satisface:

- (1) $\gamma I_{\mathcal{K}^2} = 1_F$
- (2) $\gamma (I_{\mathcal{K}})^2 = 1_F$
- (3) $\gamma C_{\mathcal{K}^2} \cdot \gamma (F^2)^2 = \gamma (C_{\mathcal{K}})^2 \cdot F\gamma^2$.

Observación 6. Estas ecuaciones son el caso especial de las ecuaciones de coherencia para una pseudo-álgebra normal para el caso en consideración $(-)^2$.

En este caso $F I_{\mathcal{K}} = 1_{\mathcal{K}}$, la 2-celda invertible está dada por

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathcal{K}^2 \\
 C_{\mathcal{K}} \downarrow & \xleftarrow{\alpha} & \downarrow F \\
 \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K}
 \end{array}$$

y satisfacen las siguientes condiciones

$$1) \quad \begin{array}{ccc} ((\mathcal{K}^2)^2)^2 \xrightarrow{(F^2)^2} (\mathcal{K}^2)^2 & & \\ \downarrow (C_{\mathcal{K}^2})^2 & \searrow \alpha^2 & \downarrow F^2 \\ (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathcal{K}^2 \\ \downarrow C_{\mathcal{K}} & \swarrow \alpha & \downarrow F \\ \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \end{array} = \begin{array}{ccc} ((\mathcal{K}^2)^2)^2 \xrightarrow{(F^2)^2} (\mathcal{K}^2)^2 & & \\ \downarrow C_{\mathcal{K}^2} & \searrow C_{\mathcal{K}} & \downarrow F^2 \\ (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathcal{K}^2 \\ \downarrow C_{\mathcal{K}} & \swarrow \alpha & \downarrow F \\ \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{K}^2 & & \\ & & \uparrow F & & \\ \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{(I_{\mathcal{K}})^2} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \\ & & \downarrow C_{\mathcal{K}} & & \\ & & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \alpha \\ \uparrow F \\ \uparrow F \end{array} = Id_F.$$

$$3) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{I_{\mathcal{K}^2}} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathcal{K}^2 \\ & & \downarrow C_{\mathcal{K}} & & \downarrow F \\ & & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \end{array} = Id_F.$$

Lema 2. Para $F : \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ un sistema de factorización débil,

$$s = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{v} & B, \end{array}$$

un objeto de $(\mathcal{K}^2)^2$, y c la diagonal común en el diagrama anterior $c = vf = gu$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & F(e_c) & \\
 F(e_f, F(u, 1_B)) \swarrow & & \searrow m_{ec} \\
 F(F(u, v)) & & F(c) \\
 F(F(1_X, v), m_g) \swarrow & & \searrow \epsilon_{m_c} \\
 & F(m_c) &
 \end{array}$$

Demostración. Primero observemos que los dos morfismos de la izquierda del diagrama en el lema están explícitamente definidos en el diagrama de abajo

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{e_f} & Ff & \xrightarrow{F(1_X, v)} & Fc \\
 \epsilon_{ec} \downarrow & & \downarrow \epsilon_{F(u, v)} & & \downarrow \epsilon_{m_c} \\
 Fc & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & F(F(u, v)) & \xrightarrow{F(F(1_X, v), m_g)} & Fm_c \\
 m_{ec} \downarrow & & \downarrow m_{F(u, v)} & & \downarrow m_{m_c} \\
 Fc & \xrightarrow{F(u, 1_B)} & Fg & \xrightarrow{m_g} & B.
 \end{array}$$

Veamos entonces que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{e_f} & Ff & \xrightarrow{F(1_X, v)} & Fc \\
 \epsilon_c \downarrow & & \downarrow F(u, v) & & \downarrow m_c \\
 Fc & \xrightarrow{F(u, 1_B)} & Fg & \xrightarrow{m_g} & B, \\
 & & \text{with } (e_f, F(u, 1_B)) \text{ and } (F(1_X, v), m_g) \text{ commutative} & &
 \end{array}$$

conmuta. Para ver que el cuadrado de la derecha conmuta, observemos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{c} & B \\
 \downarrow f & \xrightarrow{(1_X, v)} & \downarrow c & \xrightarrow{\mu_c} & \downarrow 1_B \\
 A & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{1_B} & B
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{g} & B \\
 \downarrow f & \xrightarrow{(u, v)} & \downarrow g & \xrightarrow{\mu_g} & \downarrow 1_B \\
 A & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{1_B} & B
 \end{array}$$

si aplicamos F obtenemos

$$Ff \xrightarrow{F(1_X, v)} Fc \xrightarrow{m_c} B = Ff \xrightarrow{F(u, v)} Fg \xrightarrow{m_g} B.$$

Para ver que el cuadrado de la derecha conmuta, observemos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{u} & Y \\
 \downarrow 1_X & \xrightarrow{\eta_f} & \downarrow f & \xrightarrow{(u, v)} & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{v} & B
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{u} & Y \\
 \downarrow 1_X & \xrightarrow{\eta_c} & \downarrow c & \xrightarrow{(u, 1_B)} & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{c} & B & \xrightarrow{1_B} & B
 \end{array}$$

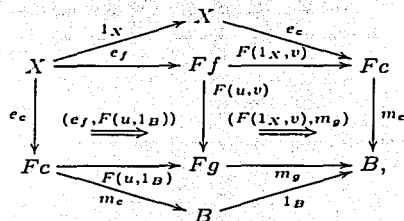
y aplicando F obtenemos

$$X \xrightarrow{e_f} Ff \xrightarrow{F(u, v)} Fg = X \xrightarrow{e_c} Fc \xrightarrow{F(u, 1_B)} Fg.$$

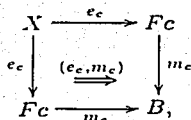
Observemos entonces el siguiente diagrama conmutativo, el cual nos dice cómo están definidos explícitamente $F(1_X, v)$ y $F(u, 1_B)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{u} & Y \\
 e_f \downarrow & & \downarrow e_c & & \downarrow e_g \\
 Ff & \xrightarrow{F(1_X, v)} & Fc & \xrightarrow{F(u, 1_B)} & Fg \\
 m_f \downarrow & & \downarrow m_c & & \downarrow m_g \\
 A & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{1_B} & B
 \end{array}$$

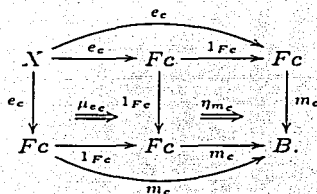
Del diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama



el cual es equivalente al siguiente cuadrado



pero este último lo podemos escribir de la siguiente forma



Note que al aplicar F al segundo diagrama en la demostración y también a este último diagrama obtenemos el lema, porque $F(\eta_{m_c}) \cdot F(\mu_{e_c}) = e_{m_c} \cdot m_{e_c}$.

□

Lema 3. Para transformaciones naturales $A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{G} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{T} \end{array} C$, si $T\sigma$ es invertible entonces τF está determinado por τG , en el sentido que $\tau F = (T\sigma)^{-1} \cdot \tau G \cdot S\sigma$.

Similarmente, si $S\sigma$ es invertible entonces τG está determinado por τF .

Demostración. Recordemos del capítulo 2, que la composición $\tau\sigma$ está dada por

$$\tau\sigma = \tau G \cdot S\sigma = T\sigma \cdot \tau F.$$

Entonces si $T\sigma$ es invertible, si despejamos de la última igualdad obtenemos que $\tau F = (T\sigma)^{-1} \cdot \tau G \cdot S\sigma$. Y en el caso en que $S\sigma$ sea invertible entonces obtenemos $\tau G = T\sigma \cdot \tau F \cdot (S\sigma)^{-1}$. □

Corolario 1. Para la siguiente composición

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{1_B} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{G} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{T} \end{array} C,$$

con $T\sigma$ invertible y G bien-punteado por σ (i.e. $G\sigma = \sigma G$), precomposición con G nos da una biyección

$$\text{CAT}(B, C)(S, T) \xrightarrow{(-)G} \text{CAT}(B, C)(SG, TG).$$

Demostración. Como $T\sigma$ es invertible podemos definir

$$g : \text{CAT}(B, C)(SG, TG) \longrightarrow \text{CAT}(B, C)(S, T)$$

como sigue:

Para $w : SG \longrightarrow TG$, definimos $g(w)$ como la composición:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{S\sigma} & SG \\ g(w) \downarrow & & \downarrow w \\ T & \xleftarrow{(T\sigma)^{-1}} & TG, \end{array}$$

observemos que por el diagrama anterior el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 SG & \xrightarrow{S\sigma G} & SGG \\
 g(w)G \downarrow & \mathbf{2} & \downarrow wG \\
 TG & \xleftarrow{(T\sigma G)^{-1}} & TGG,
 \end{array}$$

conmuta, además como σ es bien punteado $TG\sigma$ resulta invertible $(T\sigma G)^{-1} = (TG\sigma)^{-1}$. Por naturalidad de w el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 SG & \xrightarrow{SG\sigma} & SGG \\
 w \downarrow & \mathbf{3} & \downarrow wG \\
 TG & \xleftarrow{(TG\sigma)^{-1}} & TGG,
 \end{array}$$

conmuta. Y si usamos que G es bien punteado por σ los diagramas 2 y 3 son iguales en sus flechas horizontales. Y como $T\sigma$ es invertible concluimos que $g(w)G = w$.

Para ver que la composición $g \cdot ((-)G)$ da la identidad, considere un morfismo

$S \xrightarrow{u} T$, observemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{S\sigma} & SG \\
 u \downarrow & & \downarrow uG \\
 T & \xrightarrow{T\sigma} & TG,
 \end{array}$$

que conmuta por naturalidad de σ . Y del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{S\sigma} & SG \\
 u \downarrow & & \downarrow uG \\
 T & \xleftarrow{(T\sigma)^{-1}} & TG,
 \end{array}$$

vemos que $u = (T\sigma)^{-1}uGS\sigma$ y como el lado derecho de la igualdad es $g \cdot ((-)G)u$, obtenemos que $(-)G$ es una biyección. \square

Recuerde que además de $C_{\mathcal{K}} : (\mathcal{K}^2)^2 \rightarrow \mathcal{K}^2$ y de $I_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^2$, definimos cuatro funtores $V_{\mathcal{K}}, R_{\mathcal{K}}, L_{\mathcal{K}}, H_{\mathcal{K}}$ de \mathcal{K}^2 en $(\mathcal{K}^2)^2$, ahora considere transformaciones naturales entre ellos definidas como se indica abajo:

$$\begin{array}{ccc}
 & V_{\mathcal{K}} & \\
 R_{\mathcal{K}} \nearrow & & \searrow L_{\mathcal{K}} \\
 & H_{\mathcal{K}} & \\
 & \nearrow L_{\mathcal{K}} & \\
 & & (\mathcal{K}^2)^2
 \end{array}$$

Están definidas en un objeto $c : X \rightarrow B$ de \mathcal{K}^2 por el siguiente cuadrado conmutativo en $(\mathcal{K}^2)^2$

$$\begin{array}{ccc}
 & (1_X, 1_B) & \\
 [1_X, 1_X, c, 1_B] \nearrow & & \searrow [1_X, c, 1_B, 1_B] \\
 (1_X, c) & & (c, 1_B) \\
 [1_X, c, 1_X, 1_B] \searrow & & \nearrow [1_X, 1_B, c, 1_B] \\
 & (c, c) &
 \end{array}$$

No obstante $V_{\mathcal{K}} = I_{\mathcal{K}^2}$, $H_{\mathcal{K}} = I_{\mathcal{K}^2}$. Además tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5. $R_{\mathcal{K}} \dashv C_{\mathcal{K}} \dashv L_{\mathcal{K}}$.

Demostración. Observemos que la unidad de $R_{\mathcal{K}} \dashv C_{\mathcal{K}}$ dada por $\rho : 1_{\mathcal{K}^2} \Rightarrow C_{\mathcal{K}} R_{\mathcal{K}}$ y la counidad de $C_{\mathcal{K}} \dashv L_{\mathcal{K}}$ dada por $\lambda : 1_{\mathcal{K}^2} \Rightarrow C_{\mathcal{K}} L_{\mathcal{K}}$ son identidades. La counidad de $R_{\mathcal{K}} \dashv C_{\mathcal{K}}$ es

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{K}^2 & \\
 C_{\mathcal{K}} \nearrow & \circ \Downarrow & \searrow R_{\mathcal{K}} \\
 (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{1_{(\mathcal{K}^2)^2}} & (\mathcal{K}^2)^2
 \end{array}$$

La cual está explícitamente definida como

$$\phi_s = (1_X, c) \xrightarrow{[1_X, u, f, 1_B]} (u, v),$$

y la unidad de $C_{\mathcal{K}} \dashv L_{\mathcal{K}}$ es

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{1_{(\mathcal{K}^2)^2}} & (\mathcal{K}^2)^2 \\ C_{\mathcal{K}} \searrow & \Downarrow \psi & \nearrow L_{\mathcal{K}} \\ & \mathcal{K}^2 & \end{array}$$

La cual está explícitamente definida como

$$\phi_s = (u, v) \xrightarrow{[1_X, g, v, 1_B]} (c, 1_B).$$

Las identidades triangulares se tienen porque $\phi R_{\mathcal{K}}$ y $C_{\mathcal{K}} \psi$ son la identidad, y entonces $R_{\mathcal{K}} \dashv C_{\mathcal{K}} \dashv L_{\mathcal{K}}$. \square

Ahora observemos que si $s = (u, v)$ es como en el lema 1, con $C_{\mathcal{K}} s = X \xrightarrow{c} B$, entonces la counidad de la primera $\phi : R_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}} \Rightarrow 1_{(\mathcal{K}^2)^2}$ y la unidad de la segunda $\psi : 1_{(\mathcal{K}^2)^2} \Rightarrow L_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}}$, se componen de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{K}^2 & & \\ & C_{\mathcal{K}} \nearrow & \Downarrow \phi & \searrow R_{\mathcal{K}} & \\ (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{1_{(\mathcal{K}^2)^2}} & & \xrightarrow{1_{(\mathcal{K}^2)^2}} & (\mathcal{K}^2)^2 \\ & C_{\mathcal{K}} \searrow & \Downarrow \psi & \nearrow L_{\mathcal{K}} & \\ & & \mathcal{K}^2 & & \end{array}$$

Lo cual podemos visualizar en el siguiente diagrama

$$(1_X, c) \xrightarrow{[1_X, u, f, 1_B]} (u, v) \xrightarrow{[1_X, g, v, 1_B]} (c, 1_B),$$

es decir como la composición de un par de cubos en $(\mathcal{K}^2)^2$.

Para F un sistema de factorización débil, sea $\alpha : FF^2 \longrightarrow FC_{\mathcal{K}} : (\mathcal{K}^2)^2 \longrightarrow \mathcal{K}$ una transformación natural cualquiera.

Primero observemos que si aplicamos F^2 al diagrama anterior obtenemos

$$e_c \xrightarrow{(e_f, F(u, 1_B))} FF(u, v) \xrightarrow{(F(1_X, v), m_g)} m_c,$$

y al aplicar $C_{\mathcal{K}}$ a ese mismo diagrama, obtenemos

$$c \xrightarrow{(1_X, 1_B)} c \xrightarrow{(1_X, 1_B)} c.$$

Entonces al aplicar α al mismo diagrama, obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} Fe_c & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & FF(u, v) & \xrightarrow{F(F(1_X, v), m_g)} & Fm_c \\ \alpha R_{\mathcal{K}} c = \alpha R_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}} s \downarrow & & \downarrow \alpha s & & \downarrow \alpha L_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}} s = \alpha L_{\mathcal{K}} c \\ Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc, \end{array}$$

que conmuta por naturalidad de α , y porque $F(1_X, 1_B) = 1_{Fc}$ y $C_{\mathcal{K}} s = c$. Análogamente para una transformación natural arbitraria $\beta : FC_{\mathcal{K}} \longrightarrow FF^2$ obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Fe_c & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & FF(u, v) & \xrightarrow{F(F(1_X, v), m_g)} & Fm_c \\ \beta R_{\mathcal{K}} c = \beta R_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}} s \uparrow & & \uparrow \beta s & & \uparrow \beta L_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}} s = \beta L_{\mathcal{K}} c \\ Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc. \end{array}$$

Lema 4. Para F un sistema de factorización débil, cualquier transformación natural $\alpha : FF^2 \longrightarrow FC_{\mathcal{K}}$ está determinada por $\alpha L_{\mathcal{K}} : FF^2 L_{\mathcal{K}} \longrightarrow F$. Análogamente cualquier transformación natural $\beta : FC_{\mathcal{K}} \longrightarrow FF^2$ está determinada por $\beta R_{\mathcal{K}}$, con $\beta R_{\mathcal{K}} : F \longrightarrow FF^2 R_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$. Además si α es un isomorfismo, entonces $F(e_f, F(u, 1_B))$ y $F(F(1_X, v), m_g)$ son isomorfismos.

Demostración. Para demostrar la primera parte observemos que

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{1} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} & = & 1_{FC_{\mathcal{K}}}, \\
 & \searrow^{C_{\mathcal{K}}} & & \nearrow^{L_{\mathcal{K}}} & & & & & \\
 & & \mathcal{K}^2 & & & & & &
 \end{array}$$

$\Downarrow \psi$

por una de las identidades triangulares, así $FC_{\mathcal{K}}\psi$ es identidad y si aplicamos el lema 3 obtenemos que α está determinado por $\alpha L_{\mathcal{K}}$ de la siguiente manera $\alpha = \alpha L_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}} \cdot FF^2\psi$. Análogamente para ϕ usamos una de las identidades triangulares para $R_{\mathcal{K}} \dashv C_{\mathcal{K}}$, para ver que $FC_{\mathcal{K}}\phi = 1_{FC_{\mathcal{K}}}$, por lo tanto es invertible y así por el lema 3, β está determinado por $\beta R_{\mathcal{K}}$ de la siguiente manera $\beta = FF^2\phi \cdot \beta R_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}}$. Para demostrar la última parte del lema, note que si α es un isomorfismo, entonces del diagrama anterior al lema obtenemos

$$\begin{array}{ccccc}
 Fe_c & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & FF(u, v) & \xrightarrow{F(F(1_X, v), m_g)} & Fm_c \\
 (\alpha R_{\mathcal{K}c})^{-1} \uparrow & & \alpha s \uparrow & & \downarrow \alpha L_{\mathcal{K}c} \\
 Fc & \xleftarrow{1_{Fc}} & Fc & \xleftarrow{1_{Fc}} & Fc
 \end{array}$$

y así $F(e_f, F(u, 1_B))$ y $F(F(1_X, v), m_g)$ son isomorfismos. □

Corolario 2. Para F un sistema de factorización débil, la precomposición con $L_{\mathcal{K}}$ proporciona una biyección

$$\text{CAT}((\mathcal{K}^2)^2, \mathcal{K})(FF^2, FC_{\mathcal{K}}) \xrightarrow{(-)L_{\mathcal{K}}} \text{CAT}(\mathcal{K}^2, \mathcal{K})(FF^2L_{\mathcal{K}}, F).$$

Demostración. Primero veamos que $L_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}}$ es bien punteada por ψ , para esto observe-mos que

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{1} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}}} & (\mathcal{K}^2)^2 & = & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}}} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{1} & (\mathcal{K}^2)^2 \\
 & \searrow^{C_{\mathcal{K}}} & & \nearrow^{L_{\mathcal{K}}} & & & & & & \searrow^{C_{\mathcal{K}}} & & \nearrow^{L_{\mathcal{K}}} & & \searrow^{C_{\mathcal{K}}} & & \nearrow^{L_{\mathcal{K}}} \\
 & & \mathcal{K}^2 & & & & & & & & \mathcal{K}^2 & & & & & \mathcal{K}^2
 \end{array}$$

$\Downarrow \psi$

son identidad por las identidades triangulares para $C_{\mathcal{K}} \dashv L_{\mathcal{K}}$ y así $L_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}}$ es bien puntuada por ψ . Además vimos en el lema anterior que $FC_{\mathcal{K}}\psi$ es invertible y si aplicamos el corolario 1, obtenemos una biyección $(-)_L_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}}$. Para ver que

$$\text{CAT}((\mathcal{K}^2)^2, \mathcal{K})(FF^2, FC_{\mathcal{K}}) \xrightarrow{(-)_L_{\mathcal{K}}} \text{CAT}(\mathcal{K}^2, \mathcal{K})(FF^2L_{\mathcal{K}}, F)$$

es biyectiva, observemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{CAT}((\mathcal{K}^2)^2, \mathcal{K})(FF^2, FC_{\mathcal{K}}) & \xrightarrow{(-)_L_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}}} & \text{CAT}((\mathcal{K}^2)^2, \mathcal{K})(FF^2L_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}}, FC_{\mathcal{K}}) \\ & \searrow^{(-)_L_{\mathcal{K}}} & \downarrow^{(-)_L_{\mathcal{K}}} \\ & & \text{CAT}(\mathcal{K}^2, \mathcal{K})(FF^2L_{\mathcal{K}}, F) \end{array}$$

así basta demostrar que el morfismo vertical $(-)_L_{\mathcal{K}}$ en el diagrama es biyectivo. Para esto propongamos como inversa a $(-)_C_{\mathcal{K}}$.

Observemos que $(-)_L_{\mathcal{K}} \cdot (-)_C_{\mathcal{K}} = (-)_C_{\mathcal{K}}(-)_L_{\mathcal{K}}$ y como $C_{\mathcal{K}}L_{\mathcal{K}} = 1_{\mathcal{K}^2}$, entonces $(-)_L_{\mathcal{K}} \cdot (-)_C_{\mathcal{K}}$ es la identidad. Para ver que la otra composición también es la identidad. Sea $\theta : FF^2L_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}} \longrightarrow FC_{\mathcal{K}}$ y consideremos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}}} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \\ (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}}} & (\mathcal{K}^2)^2 & & & & & & \\ & & & & & \searrow^{C_{\mathcal{K}}} & & & & & \\ & & & & & & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & & & \mathcal{K} \end{array}$$

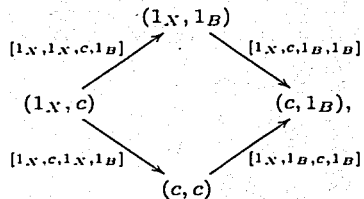
Observemos que las flechas puntuadas nos dan la identidad en $C_{\mathcal{K}}$ porque $C_{\mathcal{K}}L_{\mathcal{K}}$ es la identidad en \mathcal{K}^2 . También observemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}}} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \\ (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}}} & (\mathcal{K}^2)^2 & & & & & & \\ & & & & & \searrow^{C_{\mathcal{K}}} & & & & & \\ & & & & & & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & & & \mathcal{K} \end{array}$$

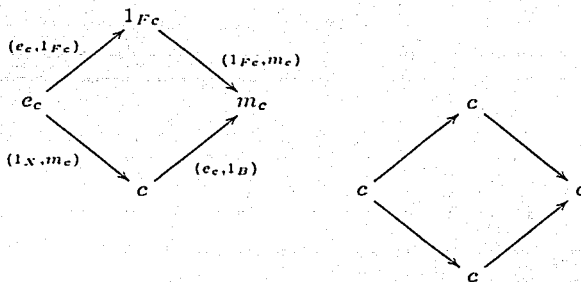
aquí las parte puntuada es la identidad en $C_{\mathcal{K}}$ por una de las identidades triangulares. Entonces $(-)_C_{\mathcal{K}} \cdot (-)_L_{\mathcal{K}}$ nos da la identidad y $(-)_L_{\mathcal{K}}$ nos da una biyección.

□

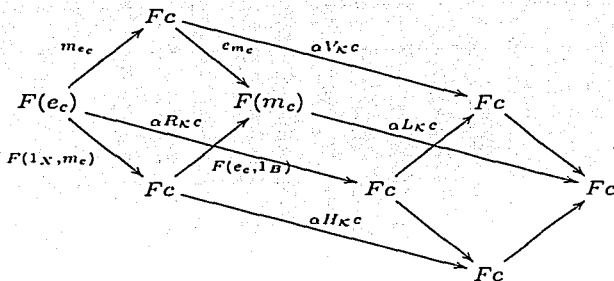
Observemos que si aplicamos F^2 al diagrama



obtenemos el rombo de la izquierda y si aplicamos C_K obtenemos el rombo de la derecha en el siguiente diagrama



Ahora si aplicamos nuestro $\alpha : FF^2 \longrightarrow FC_K$ arbitrario al mismo diagrama, obtenemos la conmutatividad del diagrama



Lema 5. Para F un sistema de factorización débil y cualquier transformación natural $\alpha : FF^2 \longrightarrow FC_K$, tenemos que $\alpha R_K c$ está determinada por $\alpha V_K c$, la cual está determinada por $\alpha L_K c$ y también $\alpha R_K c$ está determinada por $\alpha H_K c$, la cual está determinada por $\alpha L_K c$. Además si $\alpha : FF^2 \longrightarrow FC_K$ es un isomorfismo entonces, para cualquier flecha c en K , obtenemos que $m_e c$, $e_m c$, $F(1_X, m_e)$ y $F(e_c, 1_B)$ son isomorfismos y $m_e c = F(1_X, m_e)$ y $e_m c = F(e_c, 1_B)$.

Demostración. Observamos del diagrama anterior que

$\alpha R_K c = 1_{Fc} \cdot \alpha V_K c \cdot m_e c$ con $\alpha V_K c = 1_{Fc} \cdot \alpha L_K c \cdot e_m c$, y también $\alpha R_K c = 1_{Fc} \cdot \alpha H_K c \cdot F(1_X, m_e)$ con $\alpha H_K c = 1_{Fc} \cdot \alpha L_K c \cdot F(e_c, 1_B)$.

Así tenemos la primera parte del lema. Y si α es un isomorfismo entonces de las ecuaciones anteriores (y más fácil visualizado en el diagrama anterior) obtenemos

1. $(m_e c)^{-1} = (\alpha R_K c)^{-1} \cdot \alpha V_K c$
2. $(e_m c)^{-1} = (\alpha V_K c)^{-1} \cdot \alpha L_K c$
3. $F(1_X, m_e)^{-1} = (\alpha R_K c)^{-1} \cdot \alpha H_K c$
4. $F(e_c, 1_B)^{-1} = (\alpha H_K c)^{-1} \cdot \alpha L_K c$.

Por lo tanto $m_e c$, $e_m c$, $F(1_X, m_e)$ y $F(e_c, 1_B)$ son isomorfismos.

Para la última afirmación observamos que $F(1_X, m_e) = F\rho_c$ y $F(e_c, 1_B) = F\lambda_c$, así que las identidades del lema no son otra cosa que el teorema 4 del capítulo 3. \square

Corolario 3. Para F de \mathcal{K}^2 en \mathcal{K} y cualquier isomorfismo natural $\alpha : FF^2 \rightarrow FC_{\mathcal{K}}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\alpha V_{\mathcal{K}} = 1_F$

ii) $\alpha L_{\mathcal{K}} = (e_{m_-})^{-1}$

iii) $\alpha H_{\mathcal{K}} = 1_F$

iv) $\alpha R_{\mathcal{K}} = m_{e_-}$.

Demostración. observemos que obtenemos $i) \Leftrightarrow ii)$ por la ecuación 2 de la demostración del lema 5. $i) \Leftrightarrow iv)$ por la ecuación 1 de la demostración del lema 5. $iii) \Leftrightarrow iv)$ por la ecuación 3 de la demostración del lema 5 y porque $m_{e_e} = F(1_X, m_e)$. □

Recordemos ahora que $V_{\mathcal{K}} = I_{\mathcal{K}^2}$ y $H_{\mathcal{K}} = (I_{\mathcal{K}})^2$.

Teorema 7. Para un sistema de factorización débil $F : \mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$, si

$\gamma : FF^2 \xrightarrow{\cong} FC_{\mathcal{K}}$ es un isomorfismo que satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del corolario anterior, entonces para $s = (f; u, v; g)$ en $(\mathcal{K}^2)^2$ con $C_{\mathcal{K}}s = X \xrightarrow{c} B$, tenemos que

$$\gamma s = m_{e_e} \cdot (F(e_f, F(u, 1_B)))^{-1}$$

y

$$\gamma s = e_{m_e}^{-1} \cdot F(F(1_X, v), m_g).$$

Además, γ satisface las tres condiciones (1), (2) y (3) del inicio de la sección, haciendo así a (F, γ) una $(-)^2$ -álgebra normal.

Demostración. Suponga que $\gamma : FF^2 \xrightarrow{\cong} FC_{\mathcal{K}}$ satisface la condición i) del corolario anterior; esto es $\gamma I_{\mathcal{K}^2} = 1_F$, la cual es (1). Entonces del diagrama anterior al lema 4 obtenemos

$$\begin{array}{ccccc}
 Fe_c & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & FF(u, v) & \xrightarrow{F(F(1_X, v), m_g)} & Fm_c \\
 \gamma R_{\mathcal{K}c} \downarrow & & \downarrow \gamma s & & \downarrow \gamma L_{\mathcal{K}c} \\
 Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc,
 \end{array}$$

es decir $\gamma s = \gamma L_{\mathcal{K}c} \cdot F(F(1_X, v), m_g)$ y por la ecuación 2 en la demostración del lema 5, $(e_{m_c})^{-1} = (\gamma V_{\mathcal{K}c})^{-1} \cdot \alpha L_{\mathcal{K}c}$ obtenemos

$$\gamma s = e_{m_c}^{-1} \cdot F(F(1_X, v), m_g).$$

Para obtener la ecuación $\gamma s = m_{e_c} \cdot (F(e_f, F(u, 1_B)))^{-1}$, observemos que por el lema 4, como γ es isomorfismo, entonces $F(e_f, F(u, 1_B))$ es también isomorfismo y del diagrama anterior obtenemos

$$\gamma s = \gamma R_{\mathcal{K}c} \cdot (F(e_f, F(u, 1_B)))^{-1},$$

también. Como γ satisface la condición *i*) del corolario anterior, entonces por la ecuación 1 en la demostración del lema 5, $(m_{e_c})^{-1} = (\alpha R_{\mathcal{K}c})^{-1} \cdot \alpha V_{\mathcal{K}c}$ obtenemos

$$\gamma s = m_{e_c} \cdot (F(e_f, F(u, 1_B)))^{-1}.$$

Además *iii*) del corolario anterior es $\gamma(I_{\mathcal{K}})^2 = 1_F$, la cual es (2).

Para ver que γ satisface (3) $\gamma C_{\mathcal{K}^2} \cdot \gamma(F^2)^2 = \gamma(C_{\mathcal{K}})^2 \cdot F\gamma^2$ lo visualizamos en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & FC_{\mathcal{K}}(F^2)^2 = FF^2C_{\mathcal{K}^2} & \\
 \nearrow \gamma(F^2)^2 & & \searrow \gamma C_{\mathcal{K}^2} \\
 FF^2(F^2)^2 & & FC_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}^2} = FC_{\mathcal{K}}(C_{\mathcal{K}})^2 : ((\mathcal{K}^2)^2) \longrightarrow \mathcal{K}. \\
 \searrow F\gamma^2 & & \nearrow \gamma(C_{\mathcal{K}})^2 \\
 & FF^2C_{(\mathcal{K})^2} &
 \end{array}$$

Para ver que las dos composiciones son iguales, observemos primero que la unidad de la adjunción $C_{\mathcal{K}^2} \dashv L_{\mathcal{K}^2}$ seguida de $C_{\mathcal{K}^2}$ nos da la identidad, porque para cualquier \mathcal{K} la unidad de la adjunción $C_{\mathcal{K}} \dashv L_{\mathcal{K}}$ seguida de $C_{\mathcal{K}}$ nos da la identidad (ésta es una de las identidades triangulares).

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{1} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} & = & 1_{FC_{\mathcal{K}}} \\
 & \searrow C_{\mathcal{K}} & & \downarrow \psi & \nearrow L_{\mathcal{K}} & & & & \\
 & & & \mathcal{K}^2 & & & & &
 \end{array}$$

Así la unidad ν de $C_{\mathcal{K}^2} \dashv L_{\mathcal{K}^2}$ seguida de $FC_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}^2}$

$$\begin{array}{ccccc}
 ((\mathcal{K}^2)^2)^2 & \xrightarrow{1} & ((\mathcal{K}^2)^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}^2}} & (\mathcal{K}^2)^2 & \xrightarrow{C_{\mathcal{K}}} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} & = & 1_{FC_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}^2}} \\
 & \searrow C_{\mathcal{K}^2} & & \downarrow \nu & \nearrow L_{\mathcal{K}^2} & & & & & & \\
 & & & (\mathcal{K}^2)^2 & & & & & & &
 \end{array}$$

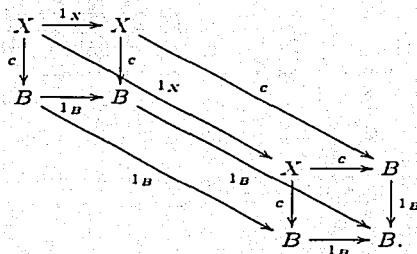
también nos da la identidad y al aplicar el corolario 2 obtenemos que cualquier transformación natural $\alpha : FF^2(F^2)^2 \longrightarrow FC_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}^2}$ está determinada por $\alpha L_{\mathcal{K}^2}C_{\mathcal{K}^2}$ de la siguiente forma $\alpha = \alpha L_{\mathcal{K}^2}C_{\mathcal{K}^2} \cdot FF^2(F^2)^2\psi_{\mathcal{K}^2}$ y por lo tanto está determinada por $\alpha L_{\mathcal{K}^2} : FF^2(F^2)^2L_{\mathcal{K}^2} \longrightarrow FC_{\mathcal{K}}$. Si repetimos el mismo argumento para $C_{\mathcal{K}} \dashv L_{\mathcal{K}}$ vemos que $\alpha L_{\mathcal{K}^2}$ está determinada por $\alpha L_{\mathcal{K}^2}L_{\mathcal{K}} : FF^2(F^2)^2L_{\mathcal{K}^2}L_{\mathcal{K}} \longrightarrow F$ de la siguiente forma $\alpha L_{\mathcal{K}^2} = \alpha L_{\mathcal{K}^2}L_{\mathcal{K}}C_{\mathcal{K}} \cdot FF^2(F^2)^2L_{\mathcal{K}^2}\psi_{\mathcal{K}^2}$.

Considere

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}^2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{V_{\mathcal{K}}} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{L_{\mathcal{K}}} \end{array} & (\mathcal{K}^2)^2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{FF^2(F^2)^2L_{\mathcal{K}^2}} \\ \Downarrow \alpha L_{\mathcal{K}^2} \\ \xrightarrow{FC_{\mathcal{K}}} \end{array} & \mathcal{K} ,
 \end{array}$$

donde σ es la transformación natural de $V_{\mathcal{K}}$ en $L_{\mathcal{K}}$ definida por $[1_X, c, 1_B, 1_B]$, como se puede ver en el rombo después del corolario 1. Afirmamos que $FF^2(F^2)^2L_{\mathcal{K}^2}\sigma$ es invertible.

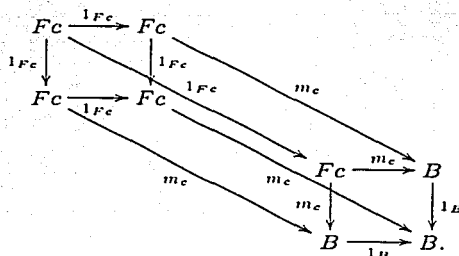
Recuerde la relación $(F^2)^2L_{\mathcal{K}^2} = L_{\mathcal{K}}F^2$, que demostramos en el inciso *i* del lema 1. Entonces $FF^2(F^2)^2L_{\mathcal{K}^2}\sigma = FF^2L_{\mathcal{K}}F^2\sigma$ y como σ_c es el siguiente morfismo en $(\mathcal{K}^2)^2$



Se tiene que $F^2(\sigma_c) = (F(1_X, 1_B), m_c) = (1_{Fc}, m_c)$, el cual es el morfismo

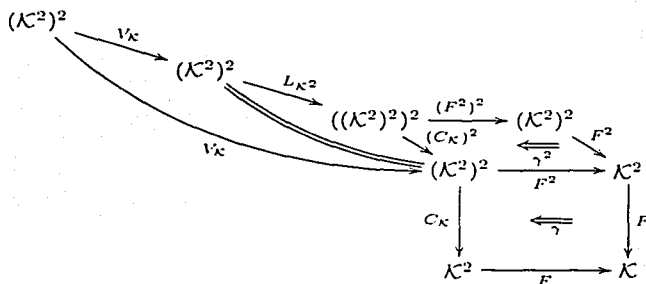
$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc \\
 1_{Fc} \downarrow & & \downarrow m_c \\
 Fc & \xrightarrow{m_c} & B,
 \end{array}$$

y al aplicar $L_{\mathcal{K}}$ a este último diagrama obtenemos el siguiente morfismo en $(\mathcal{K}^2)^2$



Ahora si aplicamos F^2 al cubo, obtenemos $FF^2L_{\mathcal{K}}F^2\sigma_c = (F(1_{Fc}, m_c), F(m_c, m_c)) = (e_{m_c}, m_c)$ el cual está dado como

$\gamma(F^2)^2 L_{\mathcal{K}^2} V_{\mathcal{K}^2} c = \gamma(F^2)^2 L_{\mathcal{K}^2}(1_X, 1_B) = \gamma L_{\mathcal{K}} F^2(1_X, 1_B) = \gamma L_{\mathcal{K}} F(1_X, 1_B) = \gamma L_{\mathcal{K}}(1_{F_c}) = \gamma V_{\mathcal{K}}(1_{F_c}) = (1_{F_c})$. Además la parte de abajo del diagrama es $\gamma C_{\mathcal{K}^2} L_{\mathcal{K}^2} V_{\mathcal{K}^2}$, pero $C_{\mathcal{K}^2} L_{\mathcal{K}^2} = 1$ entonces tenemos $\gamma V_{\mathcal{K}^2} c$ y suponiamos que $\gamma V_{\mathcal{K}^2} c = (1_{F_c})$. Por otro lado consideremos el siguiente diagrama



primero observemos que la composición de la parte de abajo del diagrama es $\gamma V_{\mathcal{K}^2}$, que evaluada en c es (1_{F_c}) .

De la observación que $(1_X, 1_B) = V_{\mathcal{K}^2} c$, donde c es la diagonal en $s = (u, v)$ como en las definiciones al principio del capítulo, obtenemos:

$\gamma^2 L_{\mathcal{K}^2} V_{\mathcal{K}^2} c = \gamma^2 L_{\mathcal{K}^2}(1_X, 1_B) = \gamma^2((1_X, 1_B), 1_c) = (\gamma(1_X, 1_B), \gamma 1_c) = (\gamma V_{\mathcal{K}^2} c, \gamma V_{\mathcal{K}^2} c)$
 por lo tanto $(\gamma C_{\mathcal{K}^2} \cdot \gamma(F^2)^2) L_{\mathcal{K}^2} V_{\mathcal{K}^2} c = 1_{F_c}$ y cada $(\gamma(C_{\mathcal{K}^2})^2 \cdot F \gamma^2) L_{\mathcal{K}^2} V_{\mathcal{K}^2} c = 1_{F_c}$
 también, lo cual muestra que $(\gamma C_{\mathcal{K}^2} \cdot \gamma(F^2)^2) = (\gamma(C_{\mathcal{K}^2})^2 \cdot F \gamma^2)$.

□

Teorema 8. Para $F : \mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$, un sistema de factorización débil. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) F admite una (necesariamente única) estructura de álgebra;
- ii) Hay un isomorfismo $F F^2 \xrightarrow{\cong} F C_{\mathcal{K}}$;
- iii) Todas las m_e , y todas las e_m , son isomorfismos.

Demostración. De 4.2 vemos que i) \Rightarrow ii).

$ii) \Rightarrow iii)$ está contenido en el lema 5.

Suponga que tenemos $iii)$, como vimos en el capítulo anterior $\mathcal{E}_F = \{h | m_h \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{M}_F = \{h | e_h \text{ es invertible}\}$ nos da $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_F)$ un sistema de factorización ortogonal para \mathcal{K} . Consideremos el siguiente diagrama de la demostración del lema 2.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{e_f} & Ff & \xrightarrow{F(1_X, v)} & Fc \\
 e_{e_c} \downarrow & & \downarrow e_{F(u, v)} & & \downarrow e_{m_c} \\
 Fe_c & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & F(F(u, v)) & \xrightarrow{F(F(1_X, v), m_g)} & Fm_c \\
 m_{e_c} \downarrow & & \downarrow m_{F(u, v)} & & \downarrow m_{m_c} \\
 Fc & \xrightarrow{F(u, 1_B)} & Fg & \xrightarrow{m_g} & B.
 \end{array}$$

Observemos el primer cuadrado arriba a la izquierda; como flechas de la forma e_h están en \mathcal{E}_F y por el teorema 3, la clase de morfismos \mathcal{E}_F , es cerrada con respecto a la composición entonces $e_{F(u, v)} \cdot e_f \in \mathcal{E}_F$. Por lo tanto $F(e_f, F(u, 1_B)) \cdot e_{e_c} \in \mathcal{E}_F$ y por el teorema 3, \mathcal{E}_F es cerrada con respecto a cancelación entonces $F(e_f, F(u, 1_B)) \in \mathcal{E}_F$. Además como $m_g F(u, 1_B) = m_c$ por el diagrama en la demostración del lema 2, $m_c \in \mathcal{M}_F$ y \mathcal{M}_F es cerrado con respecto a cancelación entonces $F(u, 1_B) \in \mathcal{M}_F$. Observemos que del diagrama que tenemos arriba, si usamos que \mathcal{M}_F es cerrado bajo cancelación, en el cuadrado de abajo a la izquierda obtenemos que $F(e_f, F(u, 1_B)) \in \mathcal{M}_F$. Así $F(e_f, F(u, 1_B)) \in \mathcal{E}_F \cap \mathcal{M}_F$ y por el teorema 3, concluimos que $F(e_f, F(u, 1_B))$ es un isomorfismo. Entonces del rombo en el lema 2 concluimos que $F(F(1_X, v), m_g)$ es un isomorfismo. Ahora para $s = (f; u, v; g)$, con $C_{\mathcal{K}}s = c$ como siempre, definimos $\gamma_s = m_{e_c} \cdot (F(e_f, F(u, 1_B)))^{-1}$. Del rombo en el lema 2 vemos que esto proporciona un isomorfismo $\gamma_s : FF^2s \xrightarrow{\cong} FC_{\mathcal{K}}s$ para $s \in (\mathcal{K}^2)^2$.

Veamos que γ es natural. Para esto consideremos $s = (u, v)$, $s' = (u', v')$ y morfismos entre ellos como en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{(u, v)} & g \\
 (x, a) \downarrow & & \downarrow (y, b) \\
 f' & \xrightarrow{(u', v')} & g'.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F e_c & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & FF(u, v) \\
 F(x, F(x, b)) \downarrow & & \downarrow F(F(x, a), F(y, b)) \\
 F e_{c'} & \xrightarrow{F(e_{f'}, F(u', 1_{B'}))} & FF(u', v').
 \end{array}$$

Primero observemos que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{e_f} & Ff \\
 x \downarrow & \text{\textcircled{3}} & \downarrow F(x, a) \\
 X' & \xrightarrow{e_{f'}} & Ff'.
 \end{array}$$

Para esto basta observar el siguiente diagrama conmutativo, el cual define explícitamente al morfismo $F(x, a)$,

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{x} & X' \\
 e_f \downarrow & & \downarrow e_{f'} \\
 Ff & \xrightarrow{F(x, a)} & Ff' \\
 m_f \downarrow & & \downarrow m_{f'} \\
 A & \xrightarrow{a} & A'.
 \end{array}$$

Ahora veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{F(u, 1_B)} & Fg \\
 F(x, b) \downarrow & \text{\textcircled{4}} & \downarrow F(y, b) \\
 Fc' & \xrightarrow{F(u', 1_{B'})} & Fg'.
 \end{array}$$

Para esto observemos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Y' \\
 \downarrow c & \searrow \underline{(u, 1_B)} & \downarrow g & \searrow \underline{(y, b)} & \downarrow g' \\
 B & \xrightarrow{1_B} & B & \xrightarrow{b} & B'
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{x} & X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\
 \downarrow c & \searrow \underline{(x, b)} & \downarrow c' & \searrow \underline{(u', 1_{B'})} & \downarrow g' \\
 B & \xrightarrow{b} & B' & \xrightarrow{1_{B'}} & B'
 \end{array}$$

y al aplicar F obtenemos

$$Fc \xrightarrow{F(u, 1_B)} Fg \xrightarrow{F(y, b)} Fg' = Fc \xrightarrow{F(x, b)} Fc' \xrightarrow{F(u', 1_{B'})} Fg'.$$

Luego con 3 y 4, obtenemos la siguiente igualdad de diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{e_f} & Ff & \xrightarrow{F(x, a)} & Ff' \\
 \downarrow e_c & \searrow \underline{F(u, v)} & \downarrow & \searrow \underline{F(u', v')} & \downarrow \\
 Fc & \xrightarrow{F(u, 1_B)} & Fg & \xrightarrow{F(y, b)} & Fg'
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{x} & X' & \xrightarrow{e_{f'}} & Ff' \\
 \downarrow e_c & \searrow \underline{e_c'} & \downarrow & \searrow \underline{F(u', v')} & \downarrow \\
 Fc & \xrightarrow{F(x, b)} & Fc' & \xrightarrow{F(u', 1_{B'})} & Fg'
 \end{array}$$

y al aplicar F obtenemos

$$Fc \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} Fg \xrightarrow{F(F(x, a), F(y, b))} Fg' = Fc \xrightarrow{F(x, F(x, b))} Fc' \xrightarrow{F(e_{f'}, F(u', 1_{B'}))} Fg'.$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{ccc}
 Fe_c & \xrightarrow{F(e_f, F(u, 1_B))} & FF(u, v) \\
 \downarrow F(x, F(x, b)) & & \downarrow F(F(x, a), F(y, b)) \\
 Fe_{c'} & \xrightarrow{F(e_{f'}, F(u', 1_{B'}))} & FF(u', v').
 \end{array}$$

conmuta, y así 1 conmuta. Con la conmutatividad de 1 y 2, concluimos que γ es natural. Regresando a la demostración, se sigue entonces que

$$\gamma J_{K^2} c = \gamma V_{K^2} c = m_{e_c} \cdot (F(e_c, F(1_X, 1_B)))^{-1} = m_{e_c} \cdot (F(e_c, 1_{F_c}))^{-1}.$$

Además

$$(e_c, 1_{F_c}) = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e_c} & F_c \\ e_c \downarrow & \xRightarrow{\mu_{e_c}} & \downarrow 1_{F_c} \\ F_c & \xrightarrow{1_{F_c}} & F_c \end{array}$$

y como $F(\mu_{e_c}) = m_{e_c}$, obtenemos

$$\gamma J_{K^2} c = m_{e_c} \cdot (m_{e_c})^{-1} = 1_{F_c},$$

la cual es i) en el corolario 3 y entonces por el teorema 7, (F, γ) es una álgebra. Con lo cual queda demostrado el teorema. □

Referencias

- [1] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician* (Springer, Berlin, 1971).
- [2] Jaap van Oosten, *Basic Category Theory* (BRICS LS-95-1, Dinamarca, 1995).
- [3] J. Lambek and P.J. Scott, *Introduction to Higher Order Categorical Logic* (Cambridge University Press, U.K., 1989).
- [4] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra* (Cambridge University Press, U.K., 1994).
- [5] Michel Barr and Charles Wells, *Toposes, Triples and Theories* (Springer-Verlag, New York 1985).
- [6] S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic* (Springer, Berlin, 1992).
- [7] M. Makkai and R. Paré, Accessible categories: The foundations of categorical model theory, *Contemporary Mathematics vol. 104* (AMS, 1989).
- [8] G.M. Kelly and R. Street, Review of the elements of 2-categories, *Lecture Notes in Mathematics 420, 75-103* (Springer-Verlag, 1974).
- [9] M. Korostenski and W. Tholen, Factorization systems as Eilenberg-Moore algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra 85, 57-72* (North-Holland, 1993).
- [10] R. Rosebrugh and R.J. Wood, Coherence for factorization algebras, *Theory and Applications of Categories Vol. 10 No. 6, 134-147* (2002).
- [11] G.B. Im and G.M. Kelly, On classes of morphisms closed under limits, *J. Korean Math. Soc. 23, No. 1, 1-18* (1986).

- [12] F. Marmolejo, Doctrines whose structure forms a fully faithful adjoint string, *Theory and Applications of Categories Vol. 3 No. 2, 24-44* (1997).
- [13] G. Janelidze and W. Tholen, Functorial factorization, well-pointedness and separability, *Journal of Pure and Applied Algebra 142, 99-130* (North-Holland, 1999).
- [14] A. Carboni, G. Janelidze, G.M. Kelly, R. Paré, On localization and stabilization for factorization systems, *Appl. Categor. Struct. 5, 1-58* (1994).
- [15] R. Street, The formal theory of monads, *Journal of Pure and Applied Algebra 2, 149-168* (North-Holland, 1972).
- [16] R. Blackwell, G.M. Kelly and A.J. Power, Two-dimensional monad theory, *Journal of Pure and Applied Algebra 59, 1-41* (North-Holland, 1989).