



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HOMOGENEIZACION DE MATERIALES NATURALES CON SIMETRIA HEXAGONAL EQUIVALENTES AL HUESO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C A
P R E S E N T A :
LUCIA DOVAL MONTES

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO JUAN SABINA CISCAR



2002



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias

Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Homogeneización de Materiales Naturales con Simetría Hexagonal
Equivalentes al Hueso"

realizado por Lucía Doval Montes

con número de cuenta 9561004-1 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Federico Juan Sabina Císcar, IIMAS

Federico Sabina

Propietario

Dra. María del Carmen Jorge y Jorge, IIMAS

María del Carmen Jorge y Jorge

Propietario

Dra. María Cristina Piña Barba, IIM

María Cristina Piña Barba

Suplente

Dra. Catherine García Reimbert, IIMAS

Catherine García Reimbert

Suplente

Dra. Lourdes Esteva Peralta, FC

Lourdes Esteva Peralta

Consejo Departamental de Matemáticas



CG

M. en C. José Antonio Martínez Ortega

GOBIERNO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

Homogeneización de Materiales Naturales con Simetría Hexagonal Equivalentes al Hueso

Lucía Doval Montes

4 de julio de 2002

A Dios...

A mi Familia

A mis padres *María del Pilar y Manuel...* gracias por todo, el apoyo, el cariño, el ser como son... los amo.

A mis hermanas *Pilar, Carmela y Teresa.*

A mis hermanos *Manolo y Pepe.*

Les dedico este trabajo a todos y cada uno de ustedes, hay algo de cada uno que aprendí e hice mío... los amo.

Índice General

Agradecimientos	v
Introducción	vii
1 Elasticidad	1
1.1 Descripción del movimiento de un material en un continuo	1
1.2 Ecuación de continuidad	4
1.3 Esfuerzos	6
1.4 Balance de la cantidad de movimiento lineal	8
1.5 Balance de la cantidad del momento angular	9
1.6 Conservación de la energía	10
1.7 Tensores	12
1.7.1 Tensor de esfuerzos	12
1.7.2 Tensor de deformación	18
1.7.3 Ley tensorial de Hooke	21
2 Homogeneización asintótica	25
2.1 Homogeneización	25
2.1.1 Un ejemplo unidimensional, la función escalar	27
3 Piezoelectricidad	33
3.1 Cristales	33
3.2 Dielectricidad	34

Agradecimientos

Al Dr. Federico J. Sabina Doctor le agradezco muchas cosas, la oportunidad de trabajar con usted, la paciencia, la ayuda y el otorgarme el tiempo suficiente para terminar las cosas... solo quiero escribirle que le tengo un gran respeto y cariño... gracias por todo.

A la Dra. María del Carmen Jorge y J. Dra. Catherine García R., Dra. María Cristina Piña, Dra. Lourdes Esteva a todas ustedes gracias por las correcciones hechas para mejorar este trabajo.

Oscar C. Valdiviezo gracias por ese empujoncito que me hizo tener un lugar y un proyecto de trabajo por un buen tiempo. Por tu ayuda en cómputo, la tesis y Vallarta encontrar gente como tu siempre es agradable.

A mis compañeras de cubículo *Edi* tienes esa chispa que no es fácil encontrar en la gente, *Norma* por haberme escuchado tantas veces en mis locuras, *Sara* por tu ayuda en muchas ocasiones, *Paty, Lulú, Lirio, Ana* todas ustedes han hecho que mi estancia en el departamento de *mym* sea muy agradable.

Alma y Lulú gracias por auxiliarme tantas veces con los trámites.

Eli y Carmen, Eli contigo he crecido en muchos aspectos, gracias por haber sido cómplices en los proyectos y en las ideas ... Carmen por las desveladas en tu casa y esas largas pláticas... las quiero.

Bety y Apolo por los viajes juntos y por saber estar ahí.

Juanita y Ale por las pláticas, *Jose Antonio* por las idas a los museos, al grupo de Judith y el Sensei.

Jorge A. Lopez Velarde A. por el tiempo compartido y por lo que juntos fuimos descubriendo de cada uno, siempre tendrás un lugar especial en mi corazón.

Jorge L. Ortega A., gracias por las sugerencias hechas para mejorar este trabajo, pero sobre todo gracias por tu tiempo y ayudarme en muchos sentidos.

Agradezco el financiamiento otorgado por los proyectos CoNaCyT No. 32237-E y

3.3	Piezoelectricidad en una dimensión	34
4	Problema de deformación mecánica antiplana y potencial eléctrico acoplado	43
4.1	Características generales del hueso	44
4.2	Método de homogeneización asintótica para el caso piezoeléctrico	45
4.3	Planteamiento del problema antiplano $_{pq}L$	49
4.3.1	Problema de deformación mecánica antiplana y potencial eléctrico acoplado $_{23}L$	53
4.3.2	Problema de deformación mecánica antiplana y potencial eléctrico acoplado $_{13}L$	64
4.4	Planteamiento del problema $_pL$	66
4.4.1	Problema $_1L$ y $_2L$	67
4.5	Resultados	68
	Conclusiones	73
	Apéndice A Funciones doblemente periódicas	75
	Apéndice B Programa en MATLAB	79

Agradecimientos

Al Dr. Federico J. Sabina Doctor le agradezco muchas cosas, la oportunidad de trabajar con usted, la paciencia, la ayuda y el otorgarme el tiempo suficiente para terminar las cosas... solo quiero escribirle que le tengo un gran respeto y cariño... gracias por todo.

A la Dra. María del Carmen Jorge y J. Dra. Catherine García R., Dra. María Cristina Piña, Dra. Lourdes Esteva a todas ustedes gracias por las correcciones hechas para mejorar este trabajo.

Oscar C. Valdiviezo gracias por ese empujoncito que me hizo tener un lugar y un proyecto de trabajo por un buen tiempo. Por tu ayuda en cómputo, la tesis y Vallarta encontrar gente como tu siempre es agradable.

A mis compañeras de cubículo *Edi* tienes esa chispa que no es fácil encontrar en la gente, *Norma* por haberme escuchado tantas veces en mis locuras, *Sara* por tu ayuda en muchas ocasiones, *Paty, Lulú, Lirio, Ana* todas ustedes han hecho que mi estancia en el departamento de *mym* sea muy agradable.

Alma y Lulú gracias por auxiliarme tantas veces con los trámites.

Eli y Carmen, Eli contigo he crecido en muchos aspectos, gracias por haber sido cómplices en los proyectos y en las ideas ... Carmen por las desveladas en tu casa y esas largas pláticas... las quiero.

Bety y Apolo por los viajes juntos y por saber estar ahí.

Juanita y Ale por las pláticas, *Jose Antonio* por las idas a los museos, al grupo de Judith y el Sensei.

Jorge A. Lopez Velarde A. por el tiempo compartido y por lo que juntos fuimos descubriendo de cada uno, siempre tendrás un lugar especial en mi corazón.

Jorge L. Ortega A., gracias por las sugerencias hechas para mejorar este trabajo, pero sobre todo gracias por tu tiempo y ayudarme en muchos sentidos.

Agradezco el financiamiento otorgado por los proyectos CoNaCyT No. 32237-E y

PAPIIT (DGSCA, UNAM) No. IN103301 para la realización de esta tesis.

Al Departamento de Matemáticas y Mecánica (IIMAS, UNAM), el apoyo secretarial y logístico prestado. También el apoyo computacional de *Ana Cecilia Arteaga*. A los Drs. *Julian Bravo Castellero* y *Reinaldo Rodríguez Ramos* así como al M.Sc. *Raúl Guinovart Díaz* por sus sugerencias y programas que me permitieron avanzar en el trabajo de tesis. También quiero agradecer a los organizadores del "4th Workshop on Applications of the Physics of Porous Media" la oportunidad de presentar los resultados de esta tesis.

A todos y cada uno de los doctores del departamento de matemáticas y mecánica del IIMAS por saber formar un buen grupo de trabajo, haciendo que la estancia aquí sea agradable y provechosa.

Hay mucha gente a quien debería mencionar en este trabajo agradeciéndole muchas cosas, por que han caminado una parte del trayecto de su vida conmigo, a todas y todos los recuerdo bien, simplemente me limité a la gente que ha estado presente en estos últimos años, a todos ellos una disculpa, pero todas y todos forman parte de mi historia personal.

Introducción

En este trabajo se estudia el problema del reforzamiento de fibras cilíndricas de hidroxiapatita enterradas en una matriz de colágeno, distribuidas de acuerdo a un arreglo hexagonal. Se trata de la combinación de dos materiales naturales, que forman parte del hueso.

Se sabe que el hueso es piezoeléctrico, por lo que se consideró que los elementos constitutivos de éste tengan propiedades elásticas, dieléctricas y piezoeléctricas del tipo 622.

Las ecuaciones que gobiernan esta combinación de materiales están dadas por las ecuaciones de la elasticidad lineal acopladas con las ecuaciones de Maxwell cuasiestáticas. Las relaciones constitutivas entre el esfuerzo, el desplazamiento eléctrico, la deformación y el campo eléctrico son lineales. Por lo tanto los materiales están caracterizados por sus propiedades elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas. Para ello en el primer capítulo se introducen algunos conceptos básicos, necesarios para definir el concepto de elasticidad en forma tensorial, como son: el balance de la cantidad de movimiento lineal, el balance de la cantidad del momento angular, la conservación de la energía y la conservación de masa. Con éstos se puede describir la respuesta experimental que caracteriza a los materiales elásticos por medio de una relación deformación-esfuerzo, conocida como la ley de Hooke.

En el segundo capítulo se introduce el método de homogeneización asintótica, utilizado en este trabajo por medio de un ejemplo unidimensional. Este método matemático pertenece a la teoría de perturbaciones, el cual aporta expresiones analíticas conocidos como coeficientes efectivos. Con éstos se trata de obtener un medio homogéneo más sencillo de resolver que sea equivalente al medio heterogéneo original.

En el capítulo tercero se estudia el concepto de piezoelectricidad. Para ello se analizan en una dimensión, dos sólidos, uno piezoeléctrico y el otro no piezoeléctrico, en donde se observa la respuesta o reacción que se produce en ambos sólidos al aplicarles una fuerza mecánica y un campo eléctrico.

En el capítulo cuarto se tiene un material reforzado, donde la fibra está represen-

tada por hidroxiapatita y la matriz está compuesta por la proteína de colágeno, en el intento de modelar la respuesta piezoeléctrica de un hueso, para ello se aplica el método de homogeneización asintótica el cual conduce a la necesidad de resolver problemas locales antiplanos del tipo pq , ${}_{23}L$ y ${}_{13}L$, así como los problemas locales del tipo p , ${}_{1}L$ y ${}_{2}L$. Debido a la simetría cilíndrica los problemas locales se desacoplan en otros dos problemas más sencillos. Unos de deformación mecánica plana y otros de deformación mecánica antiplana con potencial eléctrico acoplado. Para la simetría propuesta, resulta que los problemas planos son los mismos que para el caso de los problemas de deformación mecánica plana, que fueron estudiados y calculados por Sabina et al (2001). Las ecuaciones o problemas restantes se resuelven usando métodos de potencial. La solución se busca en la celda dada en términos de funciones doblemente elípticas que tienen la periodicidad del arreglo hexagonal, y que por tanto, son armónicas y satisfacen la ecuación de Laplace.

Por último se hace un análisis numérico por medio de un programa computacional realizado en MATLAB. Se comparan las expresiones analíticas encontradas en cada uno de los problemas locales resueltos, en donde los datos introducidos en el programa corresponden a estudios experimentales, tanto de la proteína de colágeno como de la hidroxiapatita, tomados estos de Guzelsu (1979).

Capítulo 1

Elasticidad

Este trabajo se basa en la *mecánica de medios continuos*. El propósito de la mecánica de medios continuos consiste en describir el movimiento de las partículas en el espacio y el tiempo. En este capítulo se hace una breve descripción de la teoría de la elasticidad.

En el caso de un material sólido, el interés radica en determinar la relación que existe entre las deformaciones producidas y los esfuerzos que las producen, o los esfuerzos que aparecerán a consecuencia de cierto estado de deformaciones. En el caso de un piezoeléctrico se busca, además, el campo de desplazamiento eléctrico.

Esta teoría se basa en la hipótesis del continuo. Esta hipótesis desprecia la estructura atómica de la materia, es decir, no toma en cuenta su estructura discreta y supone que es un medio continuo. Esto equivale, físicamente, a decir que cualquier elemento de volumen contiene un gran número de átomos. Con esta hipótesis se consideran fenómenos macroscópicos Valdiviezo (1993).

1.1 Descripción del movimiento de un material en un continuo

Sean las coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un marco inercial de referencia. Sea la localización de una partícula de cierto material $x_i = a_i$ en el tiempo $t = t_0$, con $i = 1, 2, 3$. Sea Ω una región o dominio cerrado en el espacio ocupado por un cuerpo en cualquier tiempo t y $\partial\Omega$ una superficie cerrada orientada que acota a Ω .

Con (a_1, a_2, a_3) , se denota a una partícula cualquiera en movimiento en relación al tiempo

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t).$$

En esta ecuación x_i describe a cada partícula de un cuerpo así como su movimiento, matemáticamente define la transformación o mapeo de un dominio $D(a_1, a_2, a_3, t)$, con t como parámetro en otro dominio $D'(x_1, x_2, x_3, t)$. Este mapeo es continuo e inyectivo, i.e., para cada punto (a_1, a_2, a_3) existe uno y sólo un punto (x_1, x_2, x_3) y viceversa. En una vecindad cualquiera, los puntos en $D(a_1, a_2, a_3)$ son transformados en otra vecindad de puntos en $D'(x_1, x_2, x_3)$, entonces la función $x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ es univaluada, continua, continuamente diferenciable y el Jacobiano es distinto de cero Fung (1994).

La descripción del movimiento de un material en un cuerpo está dada por la velocidad v_i y la aceleración α_i de la partícula (a_1, a_2, a_3) y son respectivamente

$$\begin{aligned} v_i(a_1, a_2, a_3, t) &= \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{(a_1, a_2, a_3)}, \\ \alpha_i(a_1, a_2, a_3, t) &= \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{(a_1, a_2, a_3)} = \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right|_{(a_1, a_2, a_3)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Sea $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ la densidad del material en la posición \mathbf{x} al tiempo t y \mathbf{v} el vector velocidad de la partícula localizada en el punto (x_1, x_2, x_3) .

La *densidad de masa* ρ distribuida en un punto p se define como el límite del cociente de cada masa m_n entre el volumen v_n correspondiente, donde n es un conjunto de vecindades anidadas que contiene al punto p en su interior, es decir

$$\rho(p) = \lim_{n \rightarrow \infty, v_n \rightarrow 0} \frac{m_n}{v_n}.$$

La conservación de la masa se puede expresar por medio de la densidad de un material. Sea $\rho(\mathbf{x})$ la densidad de un material localizado en \mathbf{x} , donde el símbolo \mathbf{x} denota (x_1, x_2, x_3) . Sea $\rho_0(\mathbf{a})$ la densidad de masa en el punto (a_1, a_2, a_3) cuando $t = 0$. La densidad de masa encerrada en un volumen V al tiempo $t = 0$ es entonces

$$\int_D \rho_0(\mathbf{a}) da_1 da_2 da_3 = \int_{D'} \rho(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (1.2)$$

donde la integral se extiende sobre todas las partículas. Por otra parte

$$\int_{D'} \rho(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_D \rho(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right| da_1 da_2 da_3. \quad (1.3)$$

con $i, j = 1, 2, 3$ y $|\partial x_i / \partial a_j|$ el Jacobiano de la transformación, i.e., el determinante de la matriz $(\partial x_i / \partial a_j)$.

1.1 Descripción del movimiento de un material en un continuo 3

Si se identifica (1.2) y (1.3) para cualquier dominio arbitrario D , se observa que los integrandos tienen la forma

$$\rho_0(\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right|, \quad (1.4)$$

análogamente

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{a}) \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right|. \quad (1.5)$$

Estas dos últimas ecuaciones relacionan la densidad de masa en diferentes puntos del cuerpo por medio de la transformación que manda una en otra, bajo la descripción del movimiento en un material continuo.

Sea $I(t)$ una integral de volumen de una función continuamente diferenciable $A(\mathbf{x}, t)$ definida sobre un dominio $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ en el espacio, ocupado por un conjunto de partículas que constituyen un material

$$I(t) = \iiint_{\Omega} A(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Se conoce como *derivada material de I* a la razón de cambio de $I(t)$ con respecto al parámetro t (se denota por dI/dt). Esta se define con las partículas de un material.

Si se quiere conocer el cambio de un cuerpo que ha recorrido ΔV por medio de un movimiento en una superficie S en un pequeño intervalo de tiempo Δt , se tiene

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} [A(\mathbf{x}, t + \Delta t) - A(\mathbf{x}, t)] dV + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dS \right\}. \quad (1.6)$$

Para una función continuamente diferenciable como $A(\mathbf{x}, t)$, el primer término de la derecha contribuye al valor de la derivada material como $\int_{\Omega} \partial A / \partial t dV$. El último término, puede ser evaluado como un cambio infinitesimal dt del integrando al tomar $A(\mathbf{x}, t)$ sobre la frontera $\partial\Omega$ de la superficie S . La integral es igual a la suma de $A(\mathbf{x}, t)$ multiplicada por el volumen desplazado por las partículas situadas en la frontera de S en el intervalo de tiempo Δt .

Si n_i son las componentes del vector normal unitario exterior a S , el desplazamiento de una partícula sobre la frontera es entonces $v_i dt$. El volumen desplazado por las partículas ocupa un elemento de área dS sobre la frontera S equivalente a $dV = v_i n_i dS dt$. Ignorando las cantidades infinitesimales de segundo orden, la

contribución de este elemento a dI/dt es $A v_i n_i dS$. Por lo tanto la contribución total se obtiene entonces integrando sobre la superficie S

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} A dV = \int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} A v_i n_i dS. \quad (1.7)$$

Como en la ecuación anterior, se tiene una integral de volumen igualada a una integral de superficie, se utiliza el Teorema de Gauss para expresar la integral de superficie como una integral de volumen.

El *Teorema de Gauss* afirma que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada orientada es igual a la integral de la divergencia del campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie, i.e., la velocidad del flujo a través de las fuentes y los sumideros es igual a la velocidad de flujo a través de la superficie que limita el espacio que se está considerando.

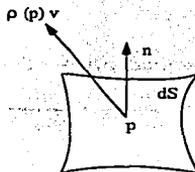
$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\Omega} A dV = \int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} A v_j dV, \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_j \frac{\partial A}{\partial x_j} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV, \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{dA}{dt} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2 Ecuación de continuidad

Principio de conservación de la masa

El principio de conservación de la masa afirma que en el interior de un volumen no hay ni creación ni destrucción de masa, en caso de haberlo es consecuencia de un flujo a través de la superficie.

La cantidad de masa que cruza un elemento parcial de la superficie dS en $\partial\Omega$ al tiempo t es $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, donde \mathbf{n} representa el vector normal unitario dirigido en la dirección del la velocidad \mathbf{v} . Se considera que si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ hay salida de masa. En caso contrario, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ entonces la masa entra.

Figura 1.1: Flujo de masa a través de dS .

El incremento de masa sufrido por unidad de tiempo en un elemento parcial del volumen en la región Ω es

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

La igualdad entre el incremento de masa del volumen en Ω y la masa que entra en la superficie de $\partial\Omega$ se escribe como

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\partial\Omega} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (1.9)$$

Sea \mathbf{F} un campo vectorial suave definido en Ω . A a partir del Teorema de Gauss o también conocido como teorema de la divergencia se tiene entonces que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Por (1.9) y el Teorema de Gauss con $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$, se tiene

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (1.10)$$

La integral $\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ no puede valer siempre cero, ya que significaría que la suma total del incremento de masa en un volumen cualquiera en una región Ω arbitraria es cero. Por lo tanto la función integrada es la que vale cero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Operando algebraicamente sobre esta última ecuación

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad}(\rho) \mathbf{v} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \\
 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} v_{x_1} + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} v_{x_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} v_{x_3} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \\
 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v})
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0. \quad (1.11)$$

A la ecuación (1.11) se le conoce como *ecuación de continuidad*, dado que la $\operatorname{div}(\mathbf{v})$ expresa el cambio sufrido por un volumen en unidad de tiempo. Esta sólo será inválida si una discontinuidad apareciera en el interior del medio del cual fuera saliendo o entrara alguna masa, o en su caso, el fluido de alguna substancia.

1.3 Esfuerzos

Las fuerzas que actúan en un medio continuo se clasifican en dos tipos:

- Fuerzas de cuerpo o masa*, las cuales están distribuidas en todo el medio. Por ejemplo, la fuerza gravitacional y la fuerza electromagnética.
- Fuerzas de superficie* que actúan sólo sobre la superficie del medio (fuerza local). Por ejemplo, la tracción superficial.

Sea B un material continuo que está en la región Ω en cualquier tiempo t y S una superficie cerrada que acota a B . Sea ΔS un pequeño elemento de área parcial de la superficie S . Supongamos que una fuerza \mathbf{F} actúa sobre S de manera continua, de modo que una pequeña parte de la fuerza total $\Delta \mathbf{F}$ se aplique en ΔS . Se define entonces el *esfuerzo* sobre un punto p de la superficie como

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$$

donde ΔS conserva al punto p en su interior.

En el momento que la fuerza \mathbf{F} actúa sobre cualquier punto p de la superficie ΔS el área se desvanece en el límite y se obtiene el *vector de esfuerzo o tracción* que representa la fuerza por unidad de área.

$$\mathbf{T}^n = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$$

donde \mathbf{n} denota la dirección de la normal a la superficie ΔS .

El principio de esfuerzo de Cauchy-Euler dice que en el interior de un continuo cerrado S , la tracción que actúa sobre el material es igual a la acción del exterior del material. Este principio es válido en un sólido mecánico o un flujo convencional.

La resultante del vector de esfuerzos se asume que está representada en forma de integral sobre la región Ω (acotado por la superficie $\partial\Omega$) como

$$\int_{\Omega} \mathbf{X} dV.$$

La tracción es el conjunto de las fuerzas de superficie que actúan sobre el cuerpo. De acuerdo al principio de Cauchy-Euler, las fuerzas que actúan sobre un material son

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^n dS + \int_{\Omega} \mathbf{X} dV. \quad (1.12)$$

De la misma forma, la torca sobre el origen está dado por la expresión

$$\mathbf{L} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{T}^n dS + \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{X} dV. \quad (1.13)$$

donde \mathbf{r} es el vector entre el origen y el punto p

Combinando las dos últimas ecuaciones con el balance de las cantidades de movimiento lineal y momento angular ¹, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^n dS + \int_{\Omega} \mathbf{X} dV &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV, \\ \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{T}^n dS + \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{X} dV &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Estas dos últimas ecuaciones se conocen como las *ecuaciones de movimiento*.

¹De estos balances se escribirá en las siguientes secciones.

1.4 Balance de la cantidad de movimiento lineal

La *cantidad de movimiento lineal* o *momento lineal* de una partícula p se define como el producto de su masa por su velocidad

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

La masa contenida en la región Ω al tiempo t es

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}, t) dV.$$

El momento lineal de todas las partículas contenidas en Ω en un instante del tiempo t es

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}, t) \mathbf{v} dV.$$

o bien

$$P_i = \int_{\Omega} \rho v_i dV \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.15)$$

Por la segunda ley de Newton y como establece Euler para un medio continuo, se tiene que el balance de la cantidad del movimiento lineal es

La razón de cambio del momento lineal es igual a la fuerza externa \mathbf{F} aplicada sobre el cuerpo

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.16)$$

Si el cuerpo está sujeto a la tracción T_i^n y a las fuerzas de masa por unidad de volumen X_i , la resultante de la fuerza es entonces

$$\mathcal{F}_i = \int_{\partial\Omega} T_i^n dS + \int_{\Omega} X_i dV.$$

Transformando la integral de superficie en integral de volumen por medio del Teorema de Gauss

$$\mathcal{F}_i = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV. \quad (1.17)$$

donde σ_{ij} representa el tensor de esfuerzo de segundo orden, con $i, j = 1, 2, 3$.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, se sabe que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_i \equiv \mathcal{F}_i.$$

Igualando esta última ecuación con (1.17), resulta la llamada *Ecuación euleriana de movimiento*

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i. \quad (1.18)$$

Nótese que la ecuación de equilibrio es un caso especial de esta ecuación (1.18), cuando el conjunto de componentes de la aceleración son iguales a cero.

1.5 Balance de la cantidad del momento angular

Se define el vector *momento angular* L_o respecto a cualquier punto o de una partícula p que se mueve en un plano, como el vector que resulta del producto cruz entre la posición de la partícula p y su momento lineal. Se considera positivo cuando la partícula p se mueve en sentido contrario de las manecillas del reloj con respecto a o .

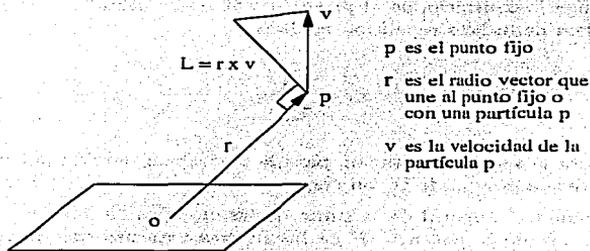


Figura 1.2: Momento angular en el plano con respecto a una partícula p

Otra forma de interpretar el momento angular es como el producto de la distancia de la posición de la partícula p al origen o , multiplicada por la componente del momento lineal perpendicular a la recta que une a la partícula con o

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV,$$

donde \mathbf{r} es el vector entre el origen o y p .

La integral del momento angular de las partículas sobre el origen en el dominio Ω es entonces

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV. \quad (1.19)$$

El principio de balance de la cantidad del momento angular establece que

La razón de cambio del momento angular de un material con respecto al origen es igual a la resultante (torca) de las fuerzas externas totales \mathbf{L} aplicadas sobre el origen.

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{L}. \quad (1.20)$$

1.6 Conservación de la energía

Salvo que se diga lo contrario, en el presente trabajo se usará la convención de la suma de Einstein de índices repetidos, es decir

$$x_{ii} = \sum_{i=1}^3 x_i.$$

Además se usará la siguiente notación para la derivación parcial, por ejemplo, $U_{,i}$ significa la derivada parcial de U con respecto a x_i , es decir, $U_{,i} \equiv \partial U / \partial x_i$.

La razón de cambio temporal de la suma de las energías cinética K e interna U es igual a la suma de la potencia P de las fuerzas externas más todas las otras energías Q que entran o salen del cuerpo por unidad de tiempo, Valdiviezo (1993).

$$\frac{d}{dt}(K + U) = P + Q, \quad (1.21)$$

donde U y P son la energía interna y el trabajo de las fuerzas externas por unidad de tiempo respectivamente. Q es la energía calorífica por unidad de tiempo y es la única otra energía que se considera en este capítulo.

Se calcula explícitamente P ,

$$P = \int_{\Omega} X_i v_i dV + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ji} n_j v_i dS. \quad (1.22)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en la ecuación anterior se tiene que

$$P = \int_{\Omega} \left[v_i (X_i + \sigma_{ij,j}) + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV. \quad (1.23)$$

La primera parte de la ecuación anterior es igual a $\rho dv_i/dt$ por el principio del balance de la cantidad de movimiento lineal, de esta manera la ecuación anterior es ahora

$$P = \int_{\Omega} \left(\rho v_i \frac{dv_i}{dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV, \quad (1.24)$$

identificando a la energía cinética por unidad de tiempo como

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v_i v_i dV. \quad (1.25)$$

Para obtener la variación temporal de la energía interna se tiene que definir a E como la energía interna por unidad de masa, esto es

$$U = \int_{\Omega} \rho E dV, \quad (1.26)$$

por lo tanto, el cambio de U con respecto al tiempo es

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\Omega} \rho \frac{dE}{dt} dV. \quad (1.27)$$

Usando las ecuaciones (1.24) y (1.25) la ecuación de la conservación de la energía se puede escribir como

$$Q = \int_{\Omega} \left(\rho \frac{dE}{dt} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV. \quad (1.28)$$

Supongamos que los procesos que tienen lugar son reversibles, es decir, no hay disipación de energía. Si S es la entropía por unidad de masa y T es la temperatura absoluta entonces se tiene que

$$Q = \int_{\Omega} \rho T \frac{dS}{dt} dV. \quad (1.29)$$

Sustituyendo la ecuación (1.28) en (1.29) se obtiene que

$$\int_{\Omega} \left[\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \left(T \frac{dS}{dt} - \frac{dE}{dt} \right) \right] dV = 0. \quad (1.30)$$

Por lo que se llega fácilmente a

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \left(T \frac{dS}{dt} - \frac{dE}{dt} \right) = 0, \quad (1.31)$$

dato que Ω es arbitrario. Esta es la *ecuación de la conservación de la energía local*.

Se puede reescribir la ecuación (1.31) de la siguiente manera

$$\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} - T \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial t} (e_{ij} - w_{ij}), \quad (1.32)$$

donde

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

con e_{ij} y w_{ij} tensores, pero $\sigma_{ij} dw_{ij}/dt = 0$ porque es el producto de un tensor simétrico con uno antisimétrico. Por lo tanto se puede escribir la ecuación (1.32) como

$$\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} - T \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}. \quad (1.33)$$

Teniendo la *ecuación general para la conservación local de la energía*.

1.7 Tensores

1.7.1 Tensor de esfuerzos

La representación geométrica de los esfuerzos requiere algo más que un vector, ya que a través de un punto hay infinitos esfuerzos. Sin embargo es suficiente con representar tres elementos de la superficie mutuamente ortogonales, e imponer la condición de conservación de masa y cantidad de movimiento que dan la *fórmula de Cauchy*.

Para demostrar la fórmula de Cauchy para un estado de fuerzas, se utiliza la ecuación de continuidad (1.11); identificando las componentes de la velocidad v_i respecto al tiempo se tiene

$$\int_{\partial V} (\rho \frac{dv}{dt} - \mathbf{X}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{T}^n dS. \quad (1.34)$$

Para obtener la ecuación de la cantidad de movimiento lineal es necesario expresar a la integral de superficie (1.34) como una integral de volumen. Con este propósito se aplica la ecuación (1.34) a un pequeño volumen tetraedral V como lo muestra la siguiente figura

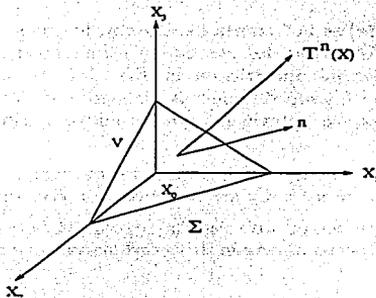


Figura 1.3: Tetraedro de volumen V . Se muestra la tracción $\mathbf{T}^n(x)$ sobre la cara inclinada de área Σ y el vector normal unitario \mathbf{n} .

Sea \mathbf{n} la normal exterior a la cara inclinada del tetraedro de área Σ , y que dista h del centro \mathbf{x}_0 . Suponemos que \mathbf{T}^n es una función continua de \mathbf{x} y que \mathbf{X} y $d\mathbf{v}/dt$ son finitas en V . Aplicando el teorema del valor medio para integrales a (1.34) se tiene que

$$\Sigma [n_1 T_{x_1}^{-i_1} + n_2 T_{x_2}^{-i_2} + n_3 T_{x_3}^{-i_3} + T_{x_4}^n] + \frac{1}{3} h \Sigma \mathbf{k} = 0 \quad (1.35)$$

donde \mathbf{k} está acotado y es $[(\rho d\mathbf{v}/dt - \mathbf{X})](\theta)$ para algún θ que está dentro de V . Los vectores unitarios en las direcciones de los ejes son \mathbf{i}_i y son perpendiculares a las otras tres caras del tetraedro con vértice \mathbf{x}_0 , donde \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, son puntos

en cada una de las caras del tetraedro. En el límite, cuando $h \rightarrow 0$, siendo \mathbf{x} el punto límite correspondiente del tetraedro, se tiene

$$T_{\mathbf{x}_0}^n = -[n_1 T_{\mathbf{x}_1}^{-i_1} + n_2 T_{\mathbf{x}_2}^{-i_2} + n_3 T_{\mathbf{x}_3}^{-i_3}]. \quad (1.36)$$

es decir

$$T_{\mathbf{x}_0}^{-ij} = -(\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \sigma_{j3}) \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.37)$$

donde σ_{ji} es la i ésima componente de la tracción en la dirección \mathbf{x}_j .

Se tiene entonces que, para cualquier punto \mathbf{x} ,

$$T_i^n = \sigma_{ji} n_j. \quad (1.38)$$

Esta última ecuación (1.38) es la fórmula de Cauchy, lo que significa que la tracción puede ser expresada en términos del campo de esfuerzos σ_{ij} , tal que $T_i^n = \sigma_{ji} n_j$ donde n_j es el vector normal unitario en la dirección del eje j . De esta forma se ha comprobado que el estado de fuerzas alrededor de cualquier punto de un cuerpo está completamente caracterizado por las nueve componentes del tensor de esfuerzo.

Como una consecuencia de la ley del balance del momento angular, el tensor de esfuerzos es simétrico ($\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$). Como se muestra a continuación.

Un cuerpo cualquiera que ocupa una región regular Ω acotada por $\partial\Omega$ tiene un momento angular con respecto al origen de coordenadas en un instante del tiempo t

$$\mathcal{H}_i = \int_{\Omega} \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV. \quad (1.39)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi - Chivita y se define por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } ijk \text{ son una permutación} \\ & \text{par de } 123 \\ 0, & \text{si } ijk \text{ hay dos índices} \\ & \text{repetidos} \\ -1, & \text{si } ijk \text{ son una permutación} \\ & \text{impar de } 123 \end{cases}$$

Por convención los subíndices latinos van de 1, 2, 3, salvo que se haga explícito lo contrario en este trabajo se considerarán de esa forma.

Si el cuerpo se sujeta a una tracción T_i^n y un estado de fuerzas por unidad de volumen X_i , la resultante del momento sobre el origen es

$$\mathcal{L}_i = \int_{\Omega} \epsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_{\partial\Omega} \epsilon_{ijk} x_j T_k^n dS. \quad (1.40)$$

Introduciendo la fórmula de Cauchy $T_k^n = \sigma_{lk} n_l$ dentro de la integral, así como transformándola en una integral de volumen por medio del teorema de la divergencia, se tiene

$$\mathcal{L}_i = \int_{\Omega} \epsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_{\Omega} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} dV. \quad (1.41)$$

Las leyes de Euler establecen que para cualquier región Ω

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}_i = \mathcal{L}_i. \quad (1.42)$$

Evaluando la derivada material de \mathcal{H}_i usando las ecuaciones (1.8) y (1.41) se tiene

$$\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_j \rho v_k v_l) = \epsilon_{ijk} x_j X_k + \epsilon_{ijk} (x_j \sigma_{lk})_{,l} \quad (1.43)$$

como ϵ_{ijk} es un tensor antisimétrico y $v_j v_k$ es simétrico con respecto a j, k , el último término del lado derecho se puede escribir como $\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}$, por tanto

$$\epsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_k v_l) - X_k - \sigma_{lk,l} \right] - \epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0. \quad (1.44)$$

La suma de los términos que están en el corchete se hacen cero debido a la ecuación de movimiento, por lo tanto la ecuación anterior se reduce a

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (1.45)$$

Como se observa en la ecuación anterior, se obtiene que el tensor de esfuerzos es simétrico, $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$, como una consecuencia de la ley del balance del momento angular.

Las 9 componentes que especifican el estado de esfuerzos, pueden ser arreglados en forma matricial. La matriz del tensor de esfuerzo está dada por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

donde para cada componente σ_{ij} con $i, j = 1, 2, 3$ el primer subíndice i indica la dirección del esfuerzo mismo y el segundo subíndice j señala la dirección de la normal al área de superficie.

Se llama *esfuerzo normal* al conjunto de componentes σ_{ii} (no se suma), que representa la componente normal del esfuerzo ejercido sobre un elemento de superficie paralelo al eje i . El esfuerzo normal se considera positivo cuando representa tensiones y negativo con las compresiones.

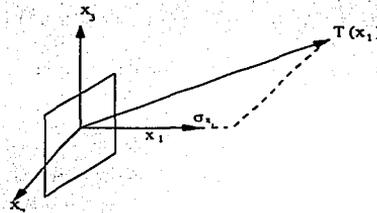


Figura 1.4: Componente normal del esfuerzo $T(x_1)$

Se conoce como los *esfuerzos tangenciales o cortantes* a las componentes σ_{ij} donde $i \neq j$

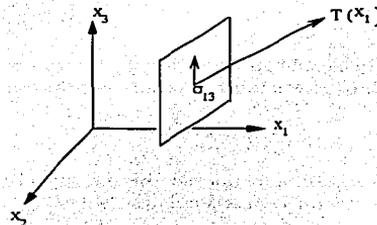


Figura 1.5: Componente tangencial del esfuerzo $T(x_1)$

Obsérvese que para el caso ilustrado en la Fig.(1.5), se cumple que

$$\sigma_{13} = \frac{\Delta F_3}{\Delta x_3 \Delta x_2}$$

Por lo tanto para caracterizar completamente el estudio de tensión interna en un material, es suficiente con conocer el conjunto de las componentes σ_{ij} (la acción del vector de esfuerzo en cualquier superficie) junto con el vector normal n_j , lo cual está descrito en la *fórmula de Cauchy*.

$$T_i = \sigma_{ji}n_j. \quad (1.46)$$

El esfuerzo tangencial será positivo cuando esté dirigido en sentido positivo del eje correspondiente a su segundo subíndice, de lo contrario será negativo. La regla se invierte cuando el esfuerzo normal de tensión está orientado en la dirección negativa.

Como ya se demostró, una consecuencia del balance del momento angular es que los esfuerzos tangenciales son simétricos. Esto significa que al cambiar el orden de los subíndices, el esfuerzo cortante cambia en dirección pero no en magnitud. Como las cantidades son las mismas, resulta entonces simétrica la matriz de esfuerzos

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}.$$

La siguiente figura ilustra la simetría de las componentes tangenciales

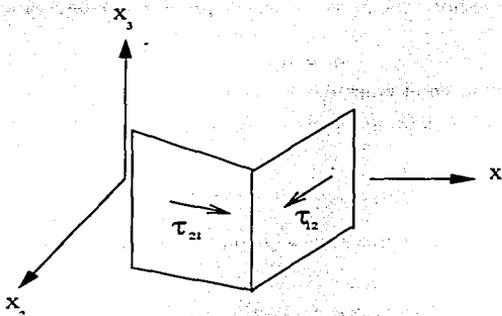


Figura 1.6: Simetría de las componentes tangenciales

1.7.2 Tensor de deformación

Sea P una partícula localizada originalmente en las coordenadas (a_1, a_2, a_3) , éstas se desplazan al lugar Q con coordenadas (x_1, x_2, x_3) , a causa de una deformación. Entonces el vector PQ se conoce como el vector desplazamiento.

El vector desplazamiento u se define por las componentes

$$u_i = x_i - a_i. \quad (1.47)$$

Se puede reconstruir la posición original de un cuerpo por medio de la deformación, si se conoce el desplazamiento para cada partícula que lo compone.

La deformación puede ser descrita por el campo de desplazamiento. Sea la variable (a_1, a_2, a_3) la posición original de la partícula, y sea (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de la partícula cuando el cuerpo se deforma. Entonces la deformación del cuerpo se conoce si (x_1, x_2, x_3) están en función de (a_1, a_2, a_3)

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3). \quad (1.48)$$

Esta es una transformación o mapeo de (a_1, a_2, a_3) a (x_1, x_2, x_3) , es decir, una vecindad se transforma en otra vecindad de manera inyectiva, i.e, la función en (1.48) es univaluada, continua, y tiene una inversa única Fung (1994).

En mecánica de medios continuos se asume que la deformación es continua.

Sea

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3). \quad (1.49)$$

para cualquier punto en el cuerpo.

Si el vector desplazamiento se asocia con cada partícula en la posición original, se puede escribir

$$u_i(a_1, a_2, a_3) = x_i(a_1, a_2, a_3) - a_i.$$

Ahora que si el desplazamiento se asocia con la partícula en la posición deformada, se expresa como

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - a_i(x_1, x_2, x_3).$$

Consideremos una línea infinitesimal que une al punto $P(a_1, a_2, a_3)$ con $P'(a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3)$ en una vecindad cercana al punto P . La longitud ds_0 de PP' esta originalmente dada por

$$ds_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2. \quad (1.50)$$

Cuando P y P' se deforman en los puntos $Q(x_1, x_2, x_3)$ y $Q'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, respectivamente, la longitud ds de la nueva línea QQ' es

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (1.51)$$

Por las ecuaciones (1.48) y (1.49) se tiene

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j, \\ da_i &= \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j. \end{aligned}$$

Introduciendo la delta de Kronecker δ_{ij} , que tiene la siguiente propiedad

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

se puede escribir

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da_l da_m. \quad (1.52)$$

La diferencia entre las longitudes de los elementos se puede conocer después de hacer unos cambios en los símbolos de los índices como

$$ds^2 - ds_0^2 = \delta_{ij} - \delta_{kn} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_n}{\partial x_j} dx_i dx_j. \quad (1.53)$$

Se define el tensor de deformación Fung (1994)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \delta_{kn} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_n}{\partial x_j} \right), \quad (1.54)$$

tal que

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j.$$

El tensor de deformación ε_{ij} fue introducido por Cauchy para cambios infinitesimales y por Almansi y Hamel para deformaciones finitas. Este se conoce como el tensor de deformación de Almansi.

Obviamente el tensor ε_{ij} es simétrico, i.e.,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}.$$

Introduciendo las coordenadas cartesianas rectangulares para el tensor de esfuerzo, se tiene el vector del desplazamiento u con componentes

$$u_j = x_j - a_j,$$

entonces

$$\frac{\partial x_j}{\partial a_i} = \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \delta_{ji}, \quad \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \delta_{ji} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Por lo anterior el tensor de deformación se reduce a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} \delta_{kn} \left(-\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki} \right) \left(-\frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \delta_{nj} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{12} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.56)$$

donde (u, v, w) se consideran como funciones de (a, b, c) que representan la posición de los puntos en el cuerpo sin deformación, i.e., en su configuración original. Cuando las componentes del desplazamiento u_i sus primeras derivadas son muy pequeñas y las longitudes de los productos de las derivadas parciales de u_i se pueden desprestigiar, entonces ε_{ij} se reduce al *tensor de esfuerzo infinitesimal de Cauchy*.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.57)$$

Para un sistema con coordenadas (x_1, x_2, x_3) , tenemos el campo de desplazamiento de los vectores como $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(x_1, x_2, x_3)$, $w(x_1, x_2, x_3)$. La matriz del tensor de deformación se define como

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Analíticamente a primer orden en el gradiente de la deformación, cada deformación está dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{12} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) / 2 = \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) / 2 = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) / 2 = \varepsilon_{13}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

La clase de materiales cuyas propiedades mecánicas no dependen de la dirección se dice que son *isótropos*. Las deformaciones en un medio isótropo consisten en cambios de volumen, por eso se les llama *deformaciones volumétricas*. También existen los cambios en la forma sin cambio en el volumen.

1.7.3 Ley tensorial de Hooke

Las *relaciones constitutivas* de los materiales son relaciones que se obtienen de la observación y la experimentación con los mismos. Tal es el caso de la Ley de Hooke.

La *ley de Hooke* es una relación de deformación-esfuerzo. Esta describe las propiedades mecánicas de materiales elásticos a nivel lineal.

Un material se comporta elásticamente cuando sus deformaciones son proporcionales a los esfuerzos que los producen.

El factor de proporcionalidad que correlaciona la deformación con el esfuerzo se conoce como el *módulo elástico*. Este depende del material que se esté analizando, así como las condiciones de temperatura, presión, etc. a la que esté sometido dicho material.

En un material que obedece la ley de Hooke, el tensor de esfuerzo es linealmente proporcional al tensor de deformación

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.59)$$

donde:

σ_{ij} es el tensor de esfuerzo.

ε_{kl} es el tensor de deformación.

C_{ijkl} es el tensor de constantes elásticas.

C_{ijkl} es un tensor de cuarto orden. Como por convención, los subíndices latinos va de 1 a 3 lo que implicaría obtener $3^4 = 81$ componentes. Sin embargo, considerando que el tensor de esfuerzos es simétrico, sólo posee 6 cantidades distintas. De igual forma el tensor de deformación, al ser también un tensor simétrico de segundo orden, tiene 6 componentes linealmente independientes entre sí. De aquí que el conjunto de cantidades total a calcular para C_{ijkl} se reduce a 36. Este número se simplifica aún más si el tensor de esfuerzo es simétrico, como ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) implica que $C_{ijkl} = C_{jikt}$, así se encuentra que el total de componentes independientes serán sólo 21.

El tensor C_{ijkl} para un material isótropo es

$$C_{ijkl} = \lambda(\delta_{ij}\delta_{kl}) + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

A partir del tensor C_{ijkl} , un material isótropo se caracteriza entonces por dos constantes λ y μ conocidas como constantes de Lamé (en la literatura de Ingeniería es más común encontrar a la letra G en lugar de μ). Con μ el *módulo de rigidez cortante*.

Asimismo existen otros coeficientes para caracterizar materiales como por ejemplo, E que es el *módulo de Young*, K es el *módulo de compresibilidad* y el cociente de Poisson ν . Todos estos coeficientes pueden obtenerse entre sí, tomando cualquier par de ellos, ya que son linealmente independientes. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+G)}, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ E &= 2G(1+\nu), \\ K &= \lambda + 2G/3. \end{aligned}$$

Con estos módulos y los tensores de deformación y esfuerzo se caracteriza la relación deformación-esfuerzo en un material elástico.

En resumen, en este capítulo se parte de la hipótesis del continuo y se aceptan cuatro leyes del balance: masa, momento lineal, momento angular y energía, en su forma integral como herramientas de la mecánica de medios continuos, así como del concepto de elasticidad en su forma tensorial, por medio de las deformaciones y los esfuerzos en los cuerpos sólidos.

Capítulo 2

Homogeneización asintótica

Los procesos físicos en medios heterogéneos, con coeficientes variables rápidamente oscilantes, cuya solución no es trivial, pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales. Al usar ecuaciones diferenciales, podemos utilizar algún método de homogeneización que permita transformar el problema original en otro cuya solución es más simple, es decir, cuyos coeficientes no oscilen rápidamente sobre un medio globalmente equivalente al dado. A este medio globalmente equivalente se le conoce como *homogeneizado*, y los parámetros que lo caracterizan se llaman *coeficientes efectivos*. Un método es el de homogeneización asintótica. En este capítulo se introducirá el método de homogeneización asintótica por medio de un ejemplo en una dimensión, Parton (1993).

2.1 Homogeneización

El método de homogeneización asintótica (M.H.A) se basa en la construcción de dos escalas de longitud relacionadas entre sí

- La primera escala representa la estructura macroscópica en donde se señala la composición física de cierto material en el espacio. Esta estructura asume condiciones de periodicidad mecánica, térmica, u otra. Las coordenadas del sistema global se denotan por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. La variable (\mathbf{x}), también es conocida como la variable lenta.
- La segunda escala representa la microestructura del material. Las coordenadas del sistema local se denotan como $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Esta variable (\mathbf{y}), también es conocida como la variable rápida.

La relación entre ambas escalas está dada por medio de un parámetro pequeño ϵ , que representa el cociente entre la longitud global del sistema L y la longitud local l , de tal forma que $l/L = \epsilon \ll 1$. En mecánica, este parámetro normalmente se asocia con una pequeña perturbación que modifica el movimiento.

Sea Ω la región donde se encuentra \mathbf{x} . Esta región se descompone en pequeñas celdas unitarias, generalmente representadas por paralelepípedos, que se distribuyen de manera periódica sobre toda la región Ω .

Las celdas se denotan por $\epsilon \bar{y}_1, \epsilon \bar{y}_2, \epsilon \bar{y}_3, \dots$, y se encuentran dentro del sistema de coordenadas locales $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$. Considerando a estas celdas simplemente como y_1, y_2, y_3, \dots , cada una y -periódica. La unión de estas celdas da origen a la composición macroscópica o global del sistema.

Considérese un problema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) en una dimensión, como por ejemplo

$$\begin{aligned} A^\epsilon U &= f & \text{en } \Omega, \\ U_\epsilon &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.1)$$

En estas ecuaciones U es una función escalar y A^ϵ es un operador diferencial. Este problema (2.1) es uno con condiciones de frontera.

Para encontrar la solución equivalente de (2.1), por medio del M.H.A así como para cualquier otro fenómeno físico descrito por ecuaciones diferenciales parciales, usando este método, se propone un desarrollo en series de potencias de ϵ , de la siguiente forma

$$U_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \epsilon^0 U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^1 U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon. \quad (2.2)$$

donde las funciones U_0, U_1, U_2 son uniformes con respecto a \mathbf{x} y son y -periódicas en \mathbf{y} .

Se introduce el desarrollo (2.2) en el problema original (2.1), se utiliza la regla de la cadena y se agrupan las ecuaciones resultantes a las distintas potencias del parámetro ϵ . De esta forma se llega a que $U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv U_0(\mathbf{x})$, es decir la función U_0 está únicamente en función de la variable global del sistema \mathbf{x} .

La función $U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se propone como el producto de dos funciones, cada una de estas en relación sólo o de la variable global o de la variable local, es decir, $U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$, sustituyendo $U_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ en $U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y siguiendo el análisis operacional respectivo de acuerdo al problema que se está considerando, se llega entonces a trabajar solo con la variable local \mathbf{y} , es así como se obtienen los llamados *coeficientes efectivos*. Tales coeficientes reproducen de manera equivalente el comportamiento o las propiedades del sistema global, i.e., el sistema se ha homogeneizado.

2.1.1 Un ejemplo unidimensional, la función escalar

Sea Ω el dominio del sistema con $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ y $\partial\Omega$ su frontera. Sea y_1 una celda unitaria cualquiera en donde las propiedades del material están determinadas por la matriz simétrica constante $a_{ij}(\mathbf{y})$.

Sea $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, es decir, $\mathbf{y} = (x_1/\epsilon, x_2/\epsilon, x_3/\epsilon)$.

Consideraremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A^\epsilon U &= f & \text{en } \Omega, \\ U_\epsilon &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sea f una función definida en la región Ω que físicamente puede interpretarse como una fuerza externa, sea $U(\mathbf{x})$ la temperatura (si se piensa en un problema de conducción del calor), y sea A^ϵ un operador elíptico de la forma

$$A^\epsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

De acuerdo con el M.H.A., se propone la solución de la ecuación (2.3b) como un desarrollo en serie de potencias de ϵ , en este caso hasta segundo orden, aunque la contribución a orden mayor que uno es muy pequeña. Además se pide la condición de que la solución $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sea una función de clase C^2 y las funciones U_i sean y_i -periódicas, es decir

$$U_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^1 U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 U_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.5)$$

Desarrollando de igual forma el operador elíptico, pero ahora con exponentes de ϵ negativos hasta ϵ^0 , se tiene

$$A^\epsilon = \epsilon^{-2} A_1 + \epsilon^{-1} A_2 + \epsilon^0 A_3. \quad (2.6)$$

Se puede representar la solución de la ecuación (2.3a) sustituyendo el desarrollo de la ecuación (2.5) en el operador elíptico (2.6), derivando implícitamente para introducir la variable local, ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx_j} \quad \text{con} \quad \frac{dy_i}{dx_j} = \epsilon^{-1}$$

Se encuentra que las componentes de dicho operador son

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ A_2 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Agrupando a las distintas potencias de ϵ se describe un sistema recursivo de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2}(A_1 U_0) &= 0, \\ \epsilon^{-1}(A_1 U_1 + A_2 U_0) &= 0, \\ \epsilon^0(A_1 U_2 + A_2 U_1 + A_3 U_0) &= f. \end{aligned} \quad (2.8)$$

De la serie A^ϵ , el término A_1 está en función sólo de la escala local \mathbf{y} , lo que le hereda periodicidad.

$$A_1 U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F \quad \text{en la celda } \mathbf{y}_1 - \text{periódica.}$$

Se dice que el sistema tiene solución única si

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|y_1|} \int_{y_1} F \, d\mathbf{y} = 0. \quad (2.9)$$

donde $|y_1|$ denota el volumen de la celda unitaria.

Observando la primera ecuación de (2.8a)

$$\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} = 0,$$

⟹

$$U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv U_0(\mathbf{x}).$$

Es decir, U_0 está sólo en función del sistema global \mathbf{x} . Sustituyendo $U_0(\mathbf{x})$ en (2.8b) se encuentra que

$$\begin{aligned}
 A_1 U_1 + A_2 U_0 &= 0, \\
 A_1 U_1 &= -A_2 U_0, \\
 A_1 U_1 &= -\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial y_j}, \\
 A_1 U_1 &= -\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como se observa, $A_1 U_1$ está en función de las dos variables \mathbf{y} y \mathbf{x} . Una forma de resolver tal ecuación es utilizar los métodos de superposición de soluciones y de separación de variables, dado que el lado derecho de (2.10c) tiene esa estructura. Se propone la solución de la ecuación como un producto de funciones que dependen de cada una de las variables.

$$U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_i(\mathbf{y}) g_j(\mathbf{x}) + \bar{U}_1(x_i) \tag{2.11}$$

donde $\bar{U}_1(x_i)$ es la constante de integración, con i, j fijas.

Sea $g_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j}$. Esta definición es válida por el hecho de que $g_j(\mathbf{x})$ depende sólo de la variable lenta \mathbf{x} . Sustituyendo A_1 y (2.11) en la ecuación (2.10c) y considerando el valor dado a $g_j(\mathbf{x})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 A_1 U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left(-\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial h_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right) g_j(\mathbf{x}) \\
 &= -\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_i} g_j(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

De (2.12) se pasa el lado derecho de la igualdad al lado izquierdo. Se factoriza $g_j(\mathbf{x})$, y por último, se divide todo entre $g_j(\mathbf{x})$ (dado que es distinto de cero), llegando a

$$A_1 h_i(\mathbf{y}) = -\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_j} \quad \text{en la celda } y_1. \tag{2.13}$$

Esto significa que $h_i(\mathbf{y})$ es periódica por pertenecer a y_1 , que es una de las celdas del sistema local.

El siguiente paso a resolver es el valor de U_2 . Tomando a \mathbf{x} como parámetro en la condición de unicidad (2.9) se tiene

$$\frac{1}{|Y_1|} \int_{y_1} (A_2 U_1 + A_3 U_0) dy = f. \quad (2.14)$$

Lo que desarrollado significa

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Y_1|} \int_{y_1} \left(-\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (h_i(\mathbf{y}) g_j(\mathbf{x}) + \bar{U}_1(x_i)) \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} (h_i(\mathbf{y}) g_j(\mathbf{x}) + \bar{U}_1(x_i)) \right. \\ \left. - \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) dy = f. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Las constantes de integración desaparecen al ser derivadas junto con el primer término. Sustituyendo $g_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ y factorizando, se obtiene

$$\frac{1}{|Y_1|} \int_{y_1} -\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{y})}{\partial y_i} + 1 \right) dy = f.$$

Como la matriz $a_{ij}(\mathbf{y})$ es constante y depende sólo de \mathbf{y} , se puede re-exresar la ecuación anterior como

$$\frac{1}{|Y_1|} \int_{y_1} -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{y})}{\partial y_i} + 1 \right) \right) dy = f. \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) adquiere la forma

$$-\bar{A}_{ij} \frac{\partial^2 U_0(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} = f, \quad (2.17)$$

$$\text{con } \bar{A}_{ij} = \frac{1}{|Y_1|} \int_{y_1} \left(a_{ij}(\mathbf{y}) + a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial h_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right) dy. \quad (2.18)$$

donde \bar{A}_{ij} son los *coeficientes efectivos* que reproducen en forma equivalente las propiedades del material global, haciendo que el límite de la microestructura periódica tienda a cero, y converja a la solución del problema dado. Nótese la superposición de tres soluciones de otros tantos problemas locales en el segundo término del lado derecho de (2.18).

El operador homogeneizado es

$$A = -\bar{A}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}.$$

De esta forma, se ejemplifica de manera sencilla el método de homogeneización asintótica (M.H.A) en una dimensión donde por medio de la composición de la microestructura, y bajo ciertas hipótesis, se llega a observar las características generales del sistema global.

En general este método utiliza un desarrollo asintótico en potencias de ϵ (2.2), este se sustituye en el sistema de ecuaciones original (2.3). El resultado de la derivación usando regla de la cadena (ya que $y = x/\epsilon$) debe agruparse a distintos ordenes de ϵ , originando un nuevo sistema de ecuaciones. Al resolver a cada orden de ϵ se encuentra que, a orden *cero* (ϵ^0), la ecuación U_0 está sólo en función de la variable global del sistema x , es decir, $(U_0(x, y) \equiv U_0(x))$. A orden *uno* (ϵ^1) queda en relación tanto de la llamada variable rápida y como de la variable lenta x . Se propone entonces una solución de tipo producto en términos de cada una de las variables, a fin de usar separación de variables o, en su caso, análisis numérico. Para obtenerse así los llamados *coeficientes efectivos* del problema original.

Existen muchos problemas en mecánica que pueden ser resueltos bajo este método de manera favorable. Sin esta técnica, su solución sería muy complicada.

Capítulo 3

Piezoelectricidad

En este capítulo se quiere ejemplificar la respuesta de un material piezoeléctrico en comparación con un material no piezoeléctrico, como dicha respuesta es algo complicada, se ejemplificará ambas respuestas en un modelo en una dimensión, Auld (1973).

3.1 Cristales

El término cristal se aplica a sólidos en los cuales los átomos están alineados por medio de algún patrón que se repite en todo el cuerpo Zwick *et. al* (1992). La configuración de los átomos se encuentra por medio de difracción de rayos X.

El cristal se forma por pilas o montones de pequeños grupos que están similarmente orientados y regularmente alineados en las tres direcciones espaciales. Estos grupos pueden ser acotados por medio de un paralelepípedo. A cada bloque o paralelepípedo se le conoce como *celda o red cristalina*. La elección de un conjunto particular de átomos para formar una celda es arbitraria.

Las simetrías internas de los cristales se manifiestan en las propiedades físicas macroscópicas del cristal. Dependiendo de los grados de simetría, los cristales se clasifican comúnmente en siete sistemas: monoclinico, triclinico, tetragonal, trigonal, hexagonal, cúbico y ortorrómbico.

El sistema hexagonal se distingue por un eje séxtuple de simetría. El eje más comúnmente usado es z . Este eje se elige haciendo un paralelo a los dos ejes perpendiculares al plano de simetría. En un cristal no existen simetrías rotacionales mayores que la séxtuple, tal que pueda dejar el diagrama o patrón del cristal invariante mediante una rotación de una vuelta completa $\theta = 2\pi/n$ con

$n = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ ó } 6$.

En cristalografía, las propiedades elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas de un cristal están descritas en términos del sistema de coordenadas natural. Tal sistema está dado por el cristal mismo. Sin embargo, la determinación de las constantes elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas en un material piezoeléctrico se caracterizan por conocer las constantes fundamentales referidas al sistema rectangular coordinado, relativo a los ejes cristalográficos Zwick *et. al* (1992).

Los átomos de los cristales tienden a conservar el nivel más bajo de energía posible. Cuando se deforma un cristal, varía su volumen o forma. Estas variaciones generan un aumento de la energía.

En un sólido isótropo no puede presentarse la piezoelectricidad, sin embargo si se considera un sólido transversalmente isótropo puede presentarse este fenómeno en el eje perpendicular a la isotropía.

3.2 Dielectricidad

Los materiales aislantes se conocen como *dieléctricos*. Por ejemplo, el aislante que llena completamente el espacio entre las placas de un condensador. La capacitancia aumenta en un cierto factor k que depende de la naturaleza del material aislante. El factor k es una propiedad del dieléctrico y se llama *constante dieléctrica*.

La constante dieléctrica relativa del vacío es la unidad, siendo $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$.

La capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

donde:

A es el área de las placas.

d es la distancia entre las placas.

ϵ_0 es la permitividad del vacío.

Cuando se aplica un campo eléctrico a un material dieléctrico se induce un momento dipolar sobre sus átomos.

3.3 Piezoelectricidad en una dimensión

La piezoelectricidad está relacionada en un cuerpo sólido con su microestructura. La característica del comportamiento piezoeléctrico de un sólido es la respuesta

eléctrica a una fuerza mecánica aplicada, ó la respuesta mecánica a una fuerza eléctrica.

El efecto directo piezoeléctrico es un fenómeno lineal que consiste en una polarización eléctrica causada por una deformación mecánica. Este efecto se manifiesta cuando hay cargas eléctricas en la superficie de un medio, al cual se le ha aplicado una fuerza mecánica que le produjo deformación.

Para comprender la piezoelectricidad en una dimensión, se analizará el tipo de comportamiento que caracteriza a un sólido piezoeléctrico y a uno no piezoeléctrico al aplicarles un campo eléctrico o una fuerza mecánica, Auld (1973).

Consideraremos un sólido cuyo sistema sea eléctricamente neutro, con partículas a y b cargadas con iones positivos y negativos. Ambas cargas conectadas por medio de un resorte (cuya constante de rigidez es K) que se desplazan a lo largo del eje X , en el cual se encuentra rigidamente fijas y en equilibrio con respecto al punto fijo $x = 0$. La distancia entre ambas cargas a y b en relación a $x = 0$ es la misma distancia media, pero se encuentran en direcciones contrarias.

Las figuras 3.1 y 3.2 ilustran el sistema original en equilibrio en ambos sólidos (piezoeléctrico y no piezoeléctrico).

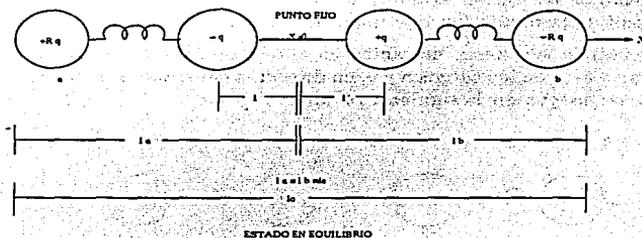


Figura 3.1: Modelo de un sólido piezoeléctrico en estado de equilibrio para una dimensión en la dirección X.

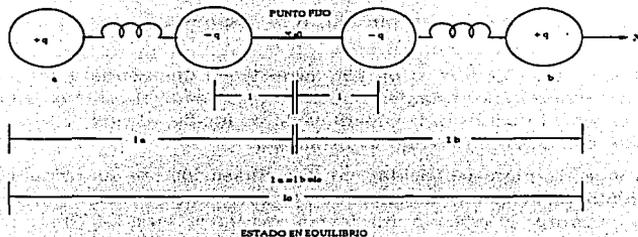


Figura 3.2: Modelo de un sólido no piezoeléctrico en estado de equilibrio para una dimensión en la dirección X .

en donde:

l_o es la longitud total del sólido en estado de equilibrio.

l_a es la longitud en equilibrio de la carga a al punto fijo $x = 0$ del sistema.

l_b es la longitud en equilibrio de la carga b al punto fijo $x = 0$ del sistema.

l_e es la longitud de las cargas al punto fijo en estado de equilibrio.

l es la longitud de la banda fija que une a las cargas.

a) Para observar la respuesta mecánica en ambos sólidos, se les aplica la misma fuerza mecánica δF_m en las cargas a y b , en dirección cada una al punto de equilibrio $x = 0$, como se observa en la siguientes figuras

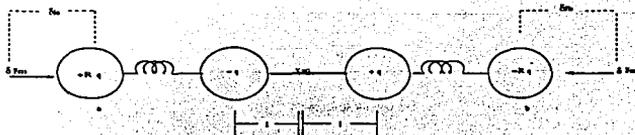


Figura 3.3: Modelo de un sólido piezoeléctrico aplicándole una fuerza mecánica δF_m en una dimensión.

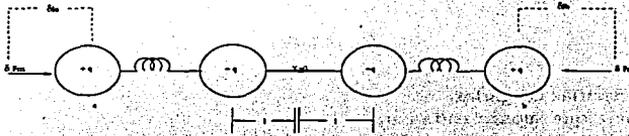


Figura 3.4: Modelo de un sólido no piezoeléctrico aplicándole una fuerza mecánica δF_m en una dimensión.

La respuesta mecánica se define como el cambio en la longitud del sistema, es decir:

$$\delta L = \delta l_a + \delta l_b \quad (3.1)$$

b) Aplicando ahora por medio de un campo la misma cantidad de fuerza eléctrica δE en las cargas a y b en dirección al punto de equilibrio $x = 0$, se tiene que

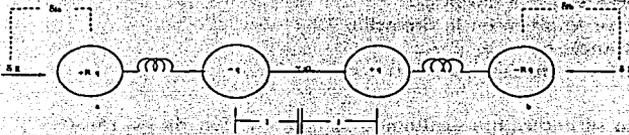


Figura 3.5: Modelo de un sólido piezoeléctrico aplicándole una fuerza eléctrica δE en una dimensión.

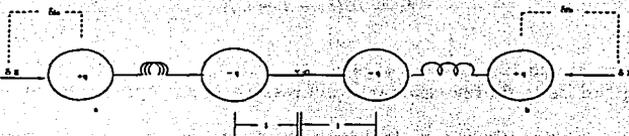


Figura 3.6: Modelo de un sólido no piezoeléctrico aplicándole una fuerza eléctrica δE en una dimensión.

La respuesta eléctrica se define como el cambio en el momento eléctrico dipolar (se conoce como dipolo cuando dos cargas están muy cerca una de otra) P_x del sistema.

$$P_x = q_n x_n, \quad (3.2)$$

donde:

q_n son n partículas cargadas.

x_n la distancia que separa cada carga.

Se dice que un medio es estático cuando todas las cargas permanecen fijas en el espacio. En el caso de que se muevan, lo hacen en forma de flujo estacionario, es decir, en circuito.

De acuerdo con la ley de Coulomb

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} e_{12} = -F_2. \quad (3.3)$$

donde:

F_1 es la fuerza sobre la carga q_1 .

F_2 es la fuerza sobre la carga q_2 .

e_{12} es el vector unitario en la dirección 12.

r_{12} es la distancia entre q_1 y q_2 .

ϵ_0 es la constante dieléctrica relativa del vacío.

El equilibrio se determina evaluando la combinación de los resortes y las fuerzas electrostáticas que actúan en las cargas a y b , e igualando estas fuerzas a cero.

Los resortes sin forzamiento tienen una fuerza de rigidez constante K , cuya longitud en este caso es l_0 . De acuerdo con la *ley de Hooke*

$$f_a = K(l_a - l - l_0). \quad (3.4)$$

donde:

f_a es la fuerza aplicada sobre la carga a .

l_0 es la longitud de la fuerza constante del resorte K sin aplicación de ningún tipo de fuerza.

l_a es la longitud en equilibrio de la carga a al punto fijo $x = 0$ del sistema.

l es la longitud de la banda fija que une a las cargas y los resortes.

Análogamente, para la carga b se tiene

$$f_b = K(l_b - l - l_0). \quad (3.5)$$

donde

f_b es la fuerza aplicada sobre la carga b .

l_b es la longitud en equilibrio de la carga b al punto fijo $x = 0$ del sistema.

Si se combinan la acción de las fuerzas electrostáticas y del resorte sobre las cargas a y b para un cuerpo no piezoléctrico Fig.(3.2) de acuerdo con la Ley de Coulomb (3.3),(3.4) y (3.5) se obtiene que

$$\begin{aligned}(F_a)_x &= K(l_a - l - l_0) + q^2 \left(\frac{1}{(l_a - l)^2} + \frac{1}{(l_a + l)^2} - \frac{1}{(l_a + l_b)^2} \right) \\(F_b)_x &= -K(l_b - l - l_0) - q^2 \left(\frac{1}{(l_b - l)^2} + \frac{1}{(l_b + l)^2} - \frac{1}{(l_a + l_b)^2} \right).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Considerando primero un cuerpo sólido no piezoléctrico dispuesto simétricamente Fig.(3.2). Al aplicar un campo eléctrico sobre las cargas a y b , las componentes de la fuerza electrostática comprimen los resortes de ambas cargas en la misma proporción.

El equilibrio l_e se encuentra tomando a $l_a = l_b$ en (3.6) e igualando $(F_a)_x$ ó $(F_b)_x$ a cero. Una condición adicional que se puede añadir para asegurar la estabilidad del sistema es

$$\left(\frac{\partial [(F_a)_x]_{l_a=l_b}}{\partial l_a} \right)_{l_a=l_e} > 0.$$

Esto garantiza la restauración de fuerzas de cualquier desviación del equilibrio, es decir, todo lo que se requiere para obtener un estado de equilibrio es elegir la constante del resorte K adecuada.

Si la configuración de equilibrio es simétrica, como se observa en la figura (3.2), y se mantiene el momento dipolar en equilibrio, resulta que (3.2) es igual a cero.

$$(P_x)_e = -ql_e + ql - ql + ql_e = 0. \quad (3.7)$$

Por lo tanto el sistema no tiene una *polarización eléctrica espontánea*.

Consideremos el efecto de aplicar una fuerza mecánica (δF_m) sobre un sólido no piezoléctrico, bajo las mismas consideraciones usadas al aplicar una fuerza electrostática. Como se observa en la Fig.(3.4), el movimiento de las cargas a y b se desplazan en dirección al punto de equilibrio con la misma magnitud o distancia.

$$|\delta l_a| = |\delta l_b|. \quad (3.8)$$

Por (3.1) y (3.8), la respuesta mecánica es entonces

$$\delta L = -2|\delta l_a|. \quad (3.9)$$

Se observa que no hay respuesta eléctrica a la aplicación de la fuerza mecánica δF_m . De acuerdo con (3.2) y (3.8)

$$\delta P_x = q|\delta l_a| - q|\delta l_b| = 0. \quad (3.10)$$

La fuerza eléctrica δE aplicada a este sistema (material no piezoeléctrico) por medio de un campo eléctrico da como resultado una respuesta antisimétrica Fig. 3.6. Cuando se aplica el campo eléctrico a las cargas a y b , éstas se desplazan hasta que el total de fuerzas en cada carga se balancean nuevamente, es decir

$$\begin{aligned} (F_a)_x + q\delta E_x &= 0, \\ (F_b)_x + q\delta E_x &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para pequeñas desviaciones en el equilibrio se pueden usar aproximaciones como

$$\begin{aligned} (F_a)_x &= (F_a)_{x_e} + \left(\frac{\partial(F_a)_x}{\partial l_a}\right)_e \delta l_a + \left(\frac{\partial(F_a)_x}{\partial l_b}\right)_e \delta l_b, \\ (F_b)_x &= (F_b)_{x_e} + \left(\frac{\partial(F_b)_x}{\partial l_a}\right)_e \delta l_a + \left(\frac{\partial(F_b)_x}{\partial l_b}\right)_e \delta l_b, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde el equilibrio de fuerzas es igual a cero. Sea $l_a = l_b$ en equilibrio, tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(F_a)_x}{\partial l_a}\right)_e &= -\left(\frac{\partial(F_b)_x}{\partial l_b}\right)_e = A \\ \left(\frac{\partial(F_a)_x}{\partial l_b}\right)_e &= -\left(\frac{\partial(F_b)_x}{\partial l_a}\right)_e = B. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.12) y (3.13) en (3.11) se encuentra

$$\begin{aligned} A\delta l_a + B\delta l_b &= -q\delta E_x, \\ -B\delta l_a - A\delta l_b &= -q\delta E_x. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Resolviendo el sistema lineal para δl_a y δl_b se obtiene que

$$\delta l_b = -\delta l_a = \frac{q\delta E_x}{A - B} \quad (3.15)$$

con la condición de que $A - B \neq 0$ para que el sistema (3.14) tenga solución no trivial.

Como se ilustra en la Fig.(3.6), la respuesta eléctrica del cuerpo no piezoeléctrico está dada por

$$\delta P_x = -q\delta l_a + q\delta l_b = 2 \frac{-q^2\delta E_x}{A - B} \quad (3.16)$$

Mientras que la respuesta mecánica es

$$\delta L = \delta l_a + \delta l_b = 0. \quad (3.17)$$

En resumen, en un material no piezoeléctrico se observa que no hay respuesta mecánica al aplicar una fuerza eléctrica, y no hay respuesta eléctrica al aplicar una fuerza mecánica.

En el caso de un sólido piezoeléctrico, la situación es diferente. Como se observa en las figuras (3.1, 3.3, 3.5), las componentes mecánicas se disponen simétricamente pero la distribución de cargas es ahora antisimétrica. El equilibrio es claro, ya que si a los dos resortes se les aplica una fuerza de tal forma que se les comprima, volverán a estar en simetría por las fuerzas electrostáticas ($l_a = l_b = l_e$). La polarización total eléctrica está en equilibrio por (3.2) como

$$\begin{aligned} P_{x_e} &= -R_q l_e + ql + ql - R_q l_e \\ &= 2q(l - R l_e). \end{aligned}$$

Esta última ecuación puede o no ser nula dependiendo de la elección de R , que determina las cargas sobre a y b . Puede entonces darse una polarización espontánea en este caso.

En las figuras (3.3) y (3.5) se observa que al aplicar una fuerza eléctrica y mecánica, ambas son simétricas. Por lo tanto, se obtiene (3.8). En ambos casos, la respuesta eléctrica y mecánica del sistema para un material piezoeléctrico es

$$\delta L = 2\delta l_a.$$

$$\delta P_x = -q\delta l_a - q\delta l_b = -2q\delta l_a,$$

donde ambas, δL y δP_x , son distintas de cero.

Resumiendo, el comportamiento del modelo piezoeléctrico Fig.(3.1, 3.3, 3.5) se puede describir por la siguiente relación

$$\begin{aligned}\delta P_x &= \chi \delta E_x + d \delta F_{mx}, \\ \delta L &= \underline{d} \delta E_x + s \delta F_{mx}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

donde $\chi, d, s, \underline{d}$ son parámetros del sistema. Por la simetría que se muestra en las figuras de un sólido no piezoeléctrico (3.2, 3.4, 3.6), los términos electromecánicos se acoplan en la ecuación (3.18) haciendo que tienda a cero.

Si el modelo se extiende a tres dimensiones la relación lineal corresponde a

$$\begin{aligned}\delta P_i &= \chi_{ij} \delta E_j + d_{ij} \delta F_{mj}, \\ \delta L_i &= \underline{d}_{ij} \delta E_j + s_{ij} \delta F_{mj}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

con $i, j = x, y, z$.

Este modelo es aceptable, aunque debería ser más realista en algunos otros aspectos. Por ejemplo, al calcular los cambios en la polarización eléctrica de (3.2), se generan cambios en la posición de las partículas cargadas, las cuales representan los iones de un sólido. En un material real esto se conoce como *polarización iónica*. Otro efecto importante es que el modelo no resulta realista es la *polarización eléctrica*, donde los iones en sí mismos empiezan a polarizarse al aplicarles un campo eléctrico. Esto puede ser incluido en el modelo para permitir a las cargas de los elementos en ambas figuras ser polarizadas, sin embargo esto no cambia la relación piezoeléctrica básica (3.19).

Capítulo 4

Problema de deformación mecánica antiplana y potencial eléctrico acoplado

En 1953, Fukada observó que el hueso posee propiedades piezoelectricas apreciables. En 1991, Telega usó el método de homogenización asintótica (MHA) para modelar el hueso, sin realizar cálculos numéricos.

El propósito de este trabajo es encontrar los *coeficientes efectivos* elásticos, piezoelectricos y dieléctricos de un material reforzado, compuesto de dos elementos que constituyen parte del hueso; el primer elemento es la proteína de *colágeno* que ocupa el espacio de la matriz (H_1) representando a la parte orgánica y en el lugar de la fibra (H_2) se encuentra la *hidroxiapatita* que representa la parte inorgánica.

Para encontrar las propiedades efectivas hay que resolver los llamados problemas locales sobre la celda periódica, para ello nos basamos en el MHA, las funciones doblemente periódicas o elípticas de Weierstrass para un arreglo hexagonal cuyos periodos son $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (\cos\mu, \sin\mu)$ con $\mu = \pi/3$ y las relaciones lineales piezoelectricas. El problema se desacopla en dos, uno de deformación mecánica plana y otro de deformación mecánica antiplana con el potencial eléctrico acoplado; es con este segundo grupo de problemas con el que se trabaja.

Por último se realizan cálculos numéricos para comparar los resultados analíticos encontrados al resolver los distintos problemas locales antiplanos. Esto sirve para corroborar que los resultados analíticos de los diferentes problemas locales y su integración numérica generen el mismo resultado.

4.1 Características generales del hueso

Los huesos responden a las fuerzas aplicadas sobre su superficie siguiendo un patrón característico. Inicialmente, la respuesta del hueso es elástica y depende de su rigidez. La deformación que se produce es temporal y se mantiene sólo durante el tiempo de aplicación de la fuerza. Al eliminar la fuerza, el hueso recupera su forma original. Si aumentamos la fuerza, el hueso entra en una fase plástica, y aunque se recupera parcialmente, queda deformado. Cuando la fuerza aplicada es superior a la resistencia del tejido se produce la fractura, Serrano (1998?). Las fuerzas que pueden actuar sobre el tejido óseo son de tres tipos: tensión, compresión y torsión.

La matriz ósea es la responsable de las propiedades biomecánicas del hueso. Las fibras colágenas le proporcionan flexibilidad y resistencia a la tensión, mientras que las sales minerales le confieren dureza, rigidez y resistencia a la compresión.

Más de un 99% de la masa ósea se halla mineralizada, por lo que posee un componente orgánico y otro inorgánico. El componente orgánico se halla integrado por *colágeno tipo I*, en proporción de 85% a 90% y una pequeña proporción por otras proteínas, de 10% a 15%.

La componente inorgánica de la matriz ósea está constituida en su mayor parte por fosfato cálcico en forma de cristales de *hidroxiapatita* (HAP) cuya fórmula química es $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$.

El tejido óseo es considerado en ciencia de materiales un *composite*, lo cual significa que es un material polimérico, reforzado, con una o más fases orgánicas o inorgánicas (Ashby, & Jones, 1993). Se trata principalmente de dos fases: las fibrillas de colágeno y el carbonato de hidroxiapatita (CHAp) (Ozin, et al. 1997). Esta última fase (mineral e inorgánica), que se encuentra en forma cristalina, es cerca del 70% del peso seco total del tejido óseo, y su estructura cristalina no es conocida con todo detalle. Se sabe que ésta pertenece al tipo estructural de las apatitas, con simetría hexagonal. Dentro de las apatitas, es la hidroxiapatita $Ca_5(PO_4)_3OH$, en la que se basan generalmente los estudios de síntesis y diseño de materiales (Mann, S. 1993, Merry, J.C., et al. 1998), Heredia (2000).

Un material *composite* es un material multicomponente, es decir, generalmente compuesto de fibras reforzadas o mezclas de cerámicas y polímeros con propiedades biológicas. Las propiedades de los materiales *composites* pueden ser muy variadas, pero en forma general, se pueden enunciar (Ozin, et al 1997):

- Contienen dos o más fases distintas, pero estrechamente relacionadas. Estas pueden ser continuas o discontinuas.
- Estas fases están relacionadas por mecanismos de adhesión en la interfase de una o más fases.
- Las propiedades del material *composite* son distintas de los materiales que componen cada fase.

El conocimiento de los componentes totales del tejido óseo es importante desde la perspectiva de la toxicología médica, a fin de poder sintetizar un material lo más parecido al tejido óseo, y que no genere rechazo al implantarse. Al hablar de materiales para restitución de partes óseas, se está indirectamente hablando de la sustitución mecánica, sin olvidar la porción correspondiente fisiológica, Heredia (2000).

4.2 Método de homogeneización asintótica para el caso piezoeléctrico

El MHA se basa en dos escalas de desarrollo asintótico, mediante las cuales se analiza las propiedades macroscópicas y microscópicas de un medio heterogéneo. Desde el punto de vista matemático, este método garantiza la solución del problema original por medio del supuesto de que una microestructura periódica converge a la solución del problema homogeneizado, cuando dicha microestructura tiende a cero, Sabina, *et. al* (2001). Para ello, se requiere la solución de los llamados problemas locales $p_q L, pL$ ($p, q = 1, 2, 3$), en donde se encuentran las propiedades efectivas de la estructura del sistema. Este método aporta expresiones analíticas que después son fáciles de computarizar y analizar.

Se tiene entonces un arreglo hexagonal, doblemente periódico, cuyos períodos son $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (\cos \mu, \sin \mu)$ con $\mu = \pi/3$. Como se muestra en la Fig. (4.1), cada celda H se encuentra en el plano local (y_1, y_2) , i.e. en términos de la variable rápida y tal que $H = H_1 \cup H_2$ y $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. El dominio H_1 está ocupado por la matriz y H_2 es su complemento, el cual es un círculo de radio R y centro en el origen 0.

Tanto matriz como fibra se supondrán con propiedades de simetría 622, además el contacto entre ambas regiones es continuo.

Los ejes de simetría Ox_3 coinciden con la dirección de las fibras, las cuales están periódicamente distribuidas en dirección paralela al eje Ox_1 , y en ángulo $\pi/3$, es decir, en arreglo hexagonal.

Se tiene un arreglo hexagonal periódico de la siguiente forma

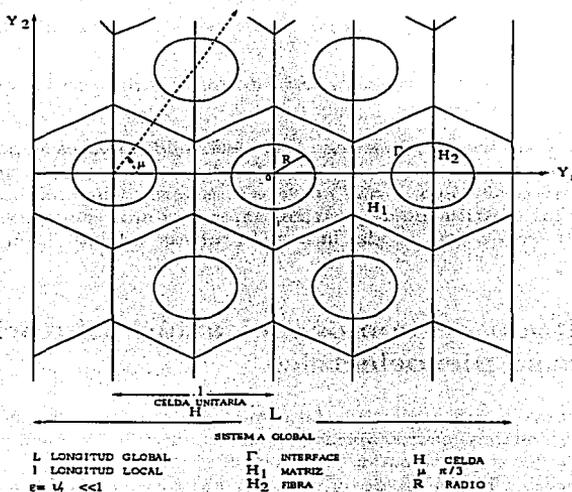


Figura 4.1: Arreglo hexagonal periódico.

Sea Γ el contacto entre la matriz y la fibra. El cociente entre la longitud de la escala local l y la longitud de la escala global del sistema L se representa como ϵ ($\epsilon = l/L$), cuyo parámetro es muy pequeño ($\epsilon \ll 1$).

Las oscilaciones rápidas de las propiedades del material, el desplazamiento, etc. se asumen que dependen de dos variables espaciales x e $y = x/\epsilon$, conocidas como la variable lenta y rápida respectivamente.

Recuérdese que por convención, los índices latinos i, j, k, l , etc. van de 1 a 3 mientras que los griegos van de 1 a 2. En este trabajo se usarán los supraíndices (1) y (2) para denotar si se habla de la matriz o de la fibra respectivamente, con la letra griega Υ .

Como se utiliza el MHA, que trabaja en los problemas locales ${}_{pq}L$ y ${}_pL$, cuando se antepone pq ó p a alguna componente indica que se está haciendo referencia a

esa componente del problema pq ó p respectivo, por ejemplo, 23σ es el tensor de esfuerzo del problema antiplano 23.

Las relaciones constitutivas de un material piezoeléctrico están dadas según Ikeda (1990) por la siguiente relación lineal

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^e E_k. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Los exponentes E y ε denotan que se está haciendo la medición de la base mediante dichos exponentes constantes, los cuales atribuyen alguna característica física.

Cada componente en la ecuación (4.1) significa: σ_{ij} es el tensor de esfuerzo de segundo orden, C_{ijkl}^E el tensor de elasticidad de cuarto orden, ε_{kl} es el tensor de deformación de segundo orden, e_{kij} es el tensor piezoeléctrico de tercer orden, ϵ_{ik}^e el tensor dieléctrico de segundo orden, E_k es el vector del campo eléctrico, y por último D_i es el vector de desplazamiento eléctrico.

Las componentes del tensor de deformación y el vector de desplazamiento u_i están relacionados por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.2)$$

Las propiedades del material satisfacen las siguientes simetrías

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}. \quad (4.3)$$

Las ecuaciones que gobiernan un medio piezoeléctrico están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} + \lambda_i &= \rho \frac{\partial^2 U_i^s}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial D_i^s}{\partial x_i} &= 0, \\ E_i^s &= -\frac{\partial \varphi^s}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde

λ_i es la fuerza de cuerpo por unidad de volumen.

φ es el potencial eléctrico.

U es el desplazamiento mecánico.

ρ es la densidad de masa.

Se propone la solución de la ecuación (4.4) como un desarrollo hasta orden lineal de ϵ , tanto del desplazamiento mecánico $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como del potencial eléctrico $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\begin{aligned} U^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \epsilon^0 U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^1 U_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \varphi^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \epsilon^0 \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^1 \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Dicho desarrollo se sustituye en las ecuaciones que gobiernan un medio piezoelectrico (4.4), en donde se utiliza la regla de la cadena, ya que $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$. El problema queda factorizado a distintas potencias de ϵ . Al agrupar los valores a orden cero de ϵ (ϵ^0), y al realizarse los cálculos correspondientes, se llega a que tanto el desplazamiento mecánico $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como el potencial eléctrico $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ están sólo en función de la escala global del sistema \mathbf{x}

$$\begin{aligned} U^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv U^0(\mathbf{x}), \\ \varphi^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \varphi^0(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Asociando ahora los términos a orden uno de ϵ (ϵ^1) se encuentra que las funciones $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ están en relación de ambas variables, tanto la variable lenta \mathbf{x} como la variable rápida \mathbf{y} , por lo que se propone una solución del tipo producto para resolverlas

$$\begin{aligned} U^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= {}_{pq}M(\mathbf{y}) \frac{\partial U_p^0(\mathbf{x})}{\partial x_q} + {}_pP(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_p}, \\ \varphi^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= {}_{pq}N(\mathbf{y}) \frac{\partial U_p^0(\mathbf{x})}{\partial x_q} + {}_pQ(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_p}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Las funciones ${}_{pq}M(\mathbf{y})$ y ${}_pP(\mathbf{y})$ representan desplazamiento mecánico, mientras que ${}_{pq}N(\mathbf{y})$ y ${}_pQ(\mathbf{y})$ se relacionan con el campo vectorial eléctrico. Nótese que por la linealidad de (4.4) y en virtud de los índices pq , por una parte, y el índice p por la otra, la solución (4.6) a,b es la superposición de la solución de nueve problemas locales de la clase ${}_{pq}L$ y tres de la clase ${}_pL$. Nuevamente se sustituye (4.6) en la ecuación original (4.4); después de hacer los cálculos que se generan de esta

sustitución en (4.4), se encuentra uno trabajando sólo en las celdas o escala local y , es aquí donde se obtienen los *coeficientes efectivos* de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\bar{C}_{ijpq} &= \langle C_{ijpq} + C_{ijkl} M_{k,l} + e_{kij} N_{k} \rangle, \\ \bar{e}_{ipq} &= \langle e_{ipq} + e_{ikl} M_{k,l} - \epsilon_{ik} N_{k} \rangle, \\ \bar{e}_{pij} &= \langle e_{pij} + C_{ijkl} P_{k,l} + e_{kij} Q_{k} \rangle, \\ \bar{\epsilon}_{ip} &= \langle \epsilon_{ip} - e_{ikl} P_{k,l} + \epsilon_{ik} Q_{k} \rangle.\end{aligned}\quad (4.7)$$

4.3 Planteamiento del problema antiplano pqL

De acuerdo a las simetrías internas de los cristales, éstas se clasifican comunmente en siete sistemas. Para cada uno de estos sistemas se pueden identificar distintas matrices, las cuales representan la respuesta experimental de algún sólido que pertenezca a ese grupo de simetrías.

Del grupo de los cristales hexagonales, se eligió la matriz denominada 622, ya que ejemplifica la piezoelectricidad encontrada de manera experimental en el hueso. Esta matriz es la más simple en su grupo que caracteriza dicha respuesta encontrada en los huesos, las siguientes matrices hexagonales que poseen dicho dato d_{14} ó e_{123} son más complejas.

Se tiene que la matriz 622 está conformada de la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{2323} & 0 & 0 & 2e_{123} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{3131} & 0 & 0 & 2e_{231} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2e_{123} & 0 & 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2e_{231} & 0 & 0 & \epsilon_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33} & 0 \end{array} \right) \quad (4.8)$$

En donde el cuadrante superior izquierdo representa la parte elástica, el cuadrante superior derecho junto con el cuadrante inferior izquierdo representa la respuesta piezoeléctrica y por último el cuadrante inferior derecho representa a la parte dieléctrica.

De acuerdo a los módulos que están representados en un cristal 622 se tiene en la notación matricial de Voigt

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} k+m & k-m & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k-m & k+m & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & l & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 & 2s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 & -2s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2s & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{array} \right). \quad (4.9)$$

donde cada módulo representa:

k es el módulo de incompresibilidad plano, sin extensión longitudinal.

p, m son los módulos de rigidez transversal y axial respectivamente.

l es el módulo cruzado.

n es el módulo longitudinal plano sin deformación.

s es el coeficiente piezoelectrico en la dirección normal al eje de simetría y relativo a un plano que incluye el eje de simetría.

t es el coeficiente dieléctrico en el plano.

u es el coeficiente dieléctrico en el plano axial.

Recordando la relación que constituye un material piezoelectrico (4.1), pero ahora escrita de forma matricial sin incluir los subíndices, se tiene

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -e^T \\ e & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ E \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

El planteamiento del problema ${}_{pq}L$ está dado por

$$\begin{aligned} {}_{pq}\sigma_{i\delta,\delta}^{(\tau)} &= 0 & \text{en } H_\tau, \\ {}_{pq}D_{\delta,\delta}^{(\tau)} &= 0 & \text{en } H_\tau, \\ \|{}_{pq}M_i^{(\tau)}\| &= 0 & \text{en } \Gamma, \\ \|{}_{pq}N^{(\tau)}\| &= 0 & \text{en } \Gamma, \\ \|{}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\tau)} n_\delta\| &= -\|C_{i\delta pq}^{(\tau)}\| n_\delta & \text{en } \Gamma, \\ \|{}_{pq}D_\delta^{(\tau)} n_\delta\| &= -\|e_{\delta pq}^{(\tau)}\| n_\delta & \text{en } \Gamma, \\ \langle {}_{pq}M_i \rangle &= 0, \\ \langle {}_{pq}N \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde

$$\begin{aligned} {}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\mathbf{r})} &= C_{i\delta k\lambda}^{(\mathbf{r})} {}_{pq}M_{k,\lambda}^{(\mathbf{r})} + e_{\lambda i\delta}^{(\mathbf{r})} {}_{pq}N_{,\lambda}^{(\mathbf{r})}, \\ {}_{pq}D_{\delta}^{(\mathbf{r})} &= e_{\delta k\lambda}^{(\mathbf{r})} {}_{pq}M_{k,\lambda}^{(\mathbf{r})} - \epsilon_{\delta\lambda}^{(\mathbf{r})} {}_{pq}N_{,\lambda}^{(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Con \mathbf{n} el vector normal unitario exterior a H_2 que está sobre la condición de interface Γ .

La notación de coma denota la derivada parcial con respecto a la componente y_{δ} , i.e. $\sigma_{i,\delta}^{(\mathbf{r})} = \partial\sigma_i^{(\mathbf{r})}/\partial y_{\delta}$. Usando la notación de Einstein de índices repetidos, se entiende que los subíndices repetidos, significa que se está haciendo la suma sobre dichos índices, por ejemplo, $\sigma_{i,\delta}^{(\mathbf{r})} = \sum_{i=1}^3 \partial\sigma_i^{(\mathbf{r})}/\partial y_{\delta}$.

La doble barra denota el salto de la función $f^{(\mathbf{r})}(\mathbf{y})$ entre la matriz y la fibra o el cruce entre las condiciones de interface en ambas regiones, i.e

$$\|f^{(\mathbf{r})}\| = f^{(1)}(\mathbf{y}) - f^{(2)}(\mathbf{y}) \quad \text{para} \quad \mathbf{y} \in \Gamma.$$

La notación de paréntesis angulares $\langle \rangle$ define el promedio sobre la celda, esto es

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|H|} \int_H F(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

donde el área de H es $|H|$.

Mientras que para los problemas locales ${}_pL$ el planteamiento del problema está dado por

$$\begin{aligned} {}_p\sigma_{i\delta,\delta}^{(\mathbf{r})} &= 0 \quad \text{in } H_{\mathbf{r}}, \\ {}_pD_{\delta,\delta}^{(\mathbf{r})} &= 0 \quad \text{in } H_{\mathbf{r}}, \\ \|{}_pP_i^{(\mathbf{r})}\| &= 0 \quad \text{on } \Gamma, \\ \|{}_pQ^{(\mathbf{r})}\| &= 0 \quad \text{on } \Gamma, \\ \|{}_p\sigma_{i\delta}^{(\mathbf{r})} n_{\delta}\| &= -\|e_{pi\delta}^{(\mathbf{r})}\| n_{\delta} \quad \text{on } \Gamma, \\ \|{}_pD_{\delta}^{(\mathbf{r})} n_{\delta}\| &= \|\epsilon_{\delta p}^{(\mathbf{r})}\| n_{\delta} \quad \text{on } \Gamma, \\ \langle {}_pP_i \rangle &= \langle {}_pQ \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

El problema ${}_{pq}L$ se desacopla en dos sistemas, uno de deformación mecánica plana y otro de deformación elástica antiplana con potencial eléctrico acoplado. En este trabajo se desarrolla la parte elástica antiplana con potencial eléctrico acoplado. El sistema de deformación plano es igual al tratado en el artículo, Guinovart et. al (2001 I).

Para tener la solución completa a los problemas de deformación antiplana se requiere resolver 12 problemas locales, seis de ellos con solución no nula, sin embargo este número se reduce a cinco debido a las relaciones universales que existe entre ellos.

Los problemas locales a resolver son cuatro: ${}_{31}L$, ${}_{23}L$, ${}_{2L}$, ${}_{1L}$. Como la solución de estos es análoga, se describirá sólo uno de ellos, para los demás se escribirá el resultado solamente para las expresiones analíticas y con ellas se realizará además un análisis numérico para comparar los resultados obtenidos en cada problema.

Calculando los coeficientes efectivos (4.7) para los distintos problemas planos y antiplanos ${}_{pp}L$, ${}_{pq}L$, y ${}_pL$ se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{k} &= k_v + \langle k({}_{11}M_{1,1} + {}_{11}M_{2,2}) \rangle \\ &= k_v + \langle k({}_{22}M_{1,1} + {}_{22}M_{2,2}) \rangle,\end{aligned}\quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\bar{l} &= l_v + \langle l({}_{11}M_{1,1} + {}_{11}M_{2,2}) \rangle \\ &= l_v + \langle l({}_{22}M_{1,1} + {}_{22}M_{2,2}) \rangle \\ &= l_v + \langle k({}_{33}M_{1,1} + {}_{33}M_{2,2}) \rangle,\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\bar{n} = n_v + \langle l({}_{33}M_{1,1} + {}_{33}M_{2,2}) \rangle,\quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p_v + \langle p {}_{13}M_{3,1} + s {}_{13}N_{,1} \rangle \\ &= p_v + \langle p {}_{23}M_{3,2} + s {}_{23}N_{,2} \rangle,\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\bar{m} &= m_v + \langle m({}_{11}M_{1,1} - {}_{11}M_{2,2}) \rangle \\ &= m_v - \langle m({}_{22}M_{1,1} - {}_{22}M_{2,2}) \rangle \\ &= m_v + \langle m({}_{12}M_{1,2} + {}_{12}M_{2,1}) \rangle,\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\bar{q} &= q_v + \langle q({}_{11}M_{1,1} + {}_{11}M_{2,2}) \rangle \\ &= q_v + \langle q({}_{22}M_{1,1} + {}_{22}M_{2,2}) \rangle \\ &= q_v + \langle k({}_{33}P_{1,1} + {}_{33}P_{2,2}) \rangle,\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\bar{r} &= r_v + \langle q({}_{33}M_{1,1} + {}_{33}M_{2,2}) \rangle \\ &= r_v + \langle l({}_{33}P_{1,1} + {}_{33}P_{2,2}) \rangle,\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}\bar{s} &= s_v + \langle s {}_{13}M_{3,1} - t {}_{13}N_{,1} \rangle \\ &= s_v + \langle s {}_{23}M_{3,2} - t {}_{23}N_{,2} \rangle \\ &= s_v + \langle p {}_{13}P_{3,1} + s {}_{13}Q_{,1} \rangle \\ &= s_v + \langle p {}_{23}P_{3,2} + s {}_{23}Q_{,2} \rangle,\end{aligned}\quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t_v - \langle s {}_{13}P_{3,1} - t {}_{13}Q_{,1} \rangle \\ &= t_v - \langle s {}_{23}P_{3,2} - t {}_{23}Q_{,2} \rangle,\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\bar{u} = u_v - \langle q({}_{33}P_{1,1} + {}_{33}P_{2,2}) \rangle.\quad (4.23)$$

El subíndice v del primer término en cada una de las ecuaciones (4.14-4.23) denota el promedio aritmético de Voigt, éste tiene la siguiente propiedad

$$k_v = V_1 k_1 + V_2 k_2, \text{ etc.},$$

donde la fracción de área ocupada por la matriz y la fibra en las regiones H_1 y H_2 está dada por V_1 y V_2 respectivamente. Se tiene entonces que $V_1 + V_2 = 1$, lo cual implica que $V_2 = \pi R^2 / \sin \mu$.

Si se combinan las propiedades efectivas de (4.14-4.23) unas con otras, se llega a las conocidas *relaciones universales* de Schulgasser (1992), con estas a partir del conocimiento de algunos de los coeficientes efectivos, se pueden encontrar otros. Además que ofrecen una solución general, dado que no dependen de la solución de los problemas locales, como se observa a continuación, Sabina *et. al* (2001 II)

$$\begin{aligned} \frac{\|k_T\|}{\|q_T\|} &= \frac{\bar{k} - k_v}{\bar{q} - q_v} = \frac{\bar{l} - l_v}{\bar{r} - r_v} = -\frac{\bar{q} - q_v}{\bar{u} - u_v} \\ &= \frac{\bar{k} - k_1}{\bar{q} - q_1} = \frac{\bar{k} - k_2}{\bar{q} - q_2}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.3.1 Problema de deformación mecánica antiplana y potencial eléctrico acoplado $_{23}L$

Por simplicidad se omitirá el prefijo (23) de cada variable en el entendido que se está trabajando en los problemas $_{23}$ -locales.

El tensor de esfuerzo σ_{13} , σ_{23} y el desplazamiento eléctrico D_1 , D_2 están dados de acuerdo a la ecuación (4.12) por

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{(T)} &= C_{1331} M_{3,1}^{(T)} + e_{113}^{(T)} N_{,1}^{(T)} + e_{213}^{(T)} N_{,2}^{(T)}, \\ \sigma_{23}^{(T)} &= C_{2332} M_{3,2}^{(T)} + e_{123}^{(T)} N_{,1}^{(T)} + e_{223}^{(T)} N_{,2}^{(T)}, \\ D_1^{(T)} &= e_{131}^{(T)} M_{3,1}^{(T)} + e_{132}^{(T)} M_{3,2}^{(T)} - \epsilon_{11} N_{,1}^{(T)}, \\ D_2^{(T)} &= e_{231} M_{3,1}^{(T)} + e_{232} M_{3,2}^{(T)} - \epsilon_{22} N_{,2}^{(T)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Reemplazando los valores no nulos de la matriz 622, en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{(T)} &= (p_{(T)} M_{3,1} - s_{(T)} N_{,2}), \\ \sigma_{23}^{(T)} &= (p_{(T)} M_{3,2} + s_{(T)} N_{,1}), \\ D_1 &= (s_{(T)} M_{3,2} - t_{(T)} N_{,1}), \\ D_2 &= -(s_{(T)} M_{3,1} + t_{(T)} N_{,1}), \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sustituyendo (4.26) en (4.11)a, b, e, f, g, h.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{31,1} + \sigma_{23,2} &= 0 & \text{en } H_{\Gamma}, \\
 D_{1,1} + D_{2,2} &= 0 & \text{en } H_{\Gamma}, \\
 \|\sigma_{31}n_1 + \sigma_{23}n_2\| &= -\|C_{3232}^{(T)}\|n_2 & \text{en } \Gamma, \\
 \|D_1n_1 + D_2n_2\| &= -\|e_{132}^{(T)}\|n_1 & \text{en } \Gamma, \\
 \langle M_3 \rangle &= \langle N \rangle = 0. & (4.27)
 \end{aligned}$$

Si se sustituye los valores del tensor de esfuerzo y el desplazamiento eléctrico dados en (4.26) en la ecuación (4.27)a,b se encuentra la ecuación de Laplace para el desplazamiento M_3 y el potencial eléctrico N tal que

$$\begin{aligned}
 p\Delta M_3 &= 0 \\
 -t\Delta N &= 0
 \end{aligned}$$

Bajo las consideraciones anteriores se reformula el problema planteado en (4.11) para ${}_{23}L$ como

$$\begin{aligned}
 \Delta M_3 &= 0 & \text{en } H_{\Gamma}, \\
 \Delta N &= 0 & \text{en } H_{\Gamma}, \\
 \|M_3\| &= 0 & \text{en } \Gamma, \\
 \|N\| &= 0 & \text{en } \Gamma, \\
 \|(pM_{3,1} - sN_{,2})n_1 + (pM_{3,2} + sN_{,1})n_2\| &= -\|p_{\Gamma}\|n_2 & \text{en } \Gamma, \\
 \|(sM_{3,2} - tN_{,1})n_1 - (sM_{3,1} + tN_{,2})n_2\| &= -\|s_{\Gamma}\|n_1 & \text{en } \Gamma, \\
 \langle M_3 \rangle &= 0, \\
 \langle N \rangle &= 0. & (4.28)
 \end{aligned}$$

La paridad de las funciones se obtiene fácilmente si se observa el lado derecho de (4.28e,f) en donde $M_{3,1}$ es impar, $M_{3,2}$ es par, $N_{,1}$ es par, $N_{,2}$ es impar, por lo tanto la función M_3 es impar y N es par.

Se propone a las funciones para el desplazamiento mecánico $M_3^{(T)}$ y el campo vectorial eléctrico $N^{(T)}$ como la parte real e imaginaria de las series $f_1(z)$, $f_2(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$

$$\begin{aligned}
 M_3^{(1)} &= \text{Im}(Az + f_1(z)), \\
 N^{(1)} &= \text{Re}(Bz + g_1(z)), \\
 M_3^{(2)} &= \text{Im}(f_2(z)), \\
 N^{(2)} &= \text{Re}(g_2(z)). & (4.29)
 \end{aligned}$$

Donde las series $f_1(z)$, $g_1(z)$, $f_2(z)$, $g_2(z)$ son

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{k=1}^{\infty o} a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!}, \\ g_1 &= \sum_{k=1}^{\infty o} b_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!}, \\ f_2 &= \sum_{k=1}^{\infty o} c_k z^k, \\ g_2 &= \sum_{k=1}^{\infty o} d_k z^k. \end{aligned}$$

El supraíndice o en la suma significa que va recorriéndose sobre los números impares. Las constantes a_k, b_k, c_k, d_k son reales e indeterminadas, sin embargo se encontrarán resolviendo cuatro sistemas infinitos. Los valores A, B de $M_3^{(1)}$ y $N^{(1)}$ son constantes que se determinarán por medio de la función zeta de Weierstrass.

Las series $f_1(z)$, $g_1(z)$ tienen las derivadas de la función zeta de Weierstrass $\zeta(z)$, se sabe que esta función tiene un polo simple en el origen y es cuasiperiódica (ver Apéndice A), se introduce el $(k-1)!$ en el denominador por conveniencia en los cálculos.

Las series $f_2(z)$, $g_2(z)$ están expresadas como series de Taylor ya que se consideran analíticas en todo el plano.

Para determinar el valor de A que se encuentra en el caso del desplazamiento mecánico $M_3^{(1)}$, se usa la cuasiperiodicidad de la $\zeta(z)$ de Weierstrass, $\zeta(z + \omega_\alpha) - \zeta(z) = \delta_\alpha$, para este problema hexagonal $\delta_1 = \pi/\text{sen} \mu$ y $\delta_2 = \delta_1 e^{-i\mu}$

$$\begin{aligned} M_3^{(1)}(z + e^{i\mu}) - M_3^{(1)}(z) &= 0, \\ \text{Im} \left(A e^{i\mu} + a_1 (\zeta(z + e^{i\mu})) - \zeta(z) \right) &= 0 \\ &\implies \\ A \text{sen} \mu + \left(a_1 \frac{\pi}{\text{sen} \mu} \text{sen} \left(\frac{\pi}{\text{sen} \mu} \right) \right) &= 0 \\ &\implies \\ A &= a_1 \pi / \text{sen} \mu. \end{aligned} \tag{4.30}$$

análogamente usando el potencial eléctrico $N^{(1)}$ para determinar B se tiene

$$B = -b_1 \pi / \text{sen}(\mu). \tag{4.31}$$

Al estar determinados A y B se puede demostrar que la propuesta de solución es armónica y doblemente periódica.

$$M^{(1)}(z) = \text{Im} \left\{ a_1(\zeta(z) - \pi(z)/\text{sen}\mu) + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \frac{\zeta^k(z)}{(k-1)!} \right\}.$$

$$N^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ b_1(\zeta(z) - \pi(z)/\text{sen}\mu) + \sum_{k=3}^{\infty} b_k \frac{\zeta^k(z)}{(k-1)!} \right\}.$$

P.D. que $N^{(1)}(z)$ es armónica

Sea $\beta_{m,n} = mw_1 + nw_2$ para m, n en los enteros, que representa la dobleperiodicidad sobre todo el plano complejo (ver Apéndice A) y desarrollando a z en su forma $z = x + iy$.

El símbolo ' sobre el sigma indica la doble suma que va sobre n y m excluyendo a $n = m = 0$

$$N^{(1)}(z) = \left(b_1 \left(\frac{1}{(x+iy)} + \sum_{m,n} \frac{1}{(x+iy) - \beta_{m,n}} + \frac{1}{\beta} + \frac{(x+iy) - \pi(z)}{\beta_{m,n}^2 \text{sen}\mu} \right) \right. \\ \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{(k-1)!} \left((-1)^k (k)! \frac{1}{(x+iy)^{(k+1)}} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m,n} (-1)^k (k)! \frac{1}{(z - \beta_{m,n})^{(k+1)}} \right) \right).$$

Sacando la primera y segunda derivada con respecto a la variable x y la variable y se encuentra que la segunda derivada de $N^{(1)}$ con respecto a cada variable está dada por

$$\frac{\partial^2 N^{(1)}}{\partial x^2} = b_1 \left(\frac{2}{(x+iy)^3} + \sum_{m,n} \frac{2}{((x+iy) - \beta_{m,n})^3} \right) \\ + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{(k-1)!} \left((-1)^{k+2} (k+2)! \frac{1}{(x+iy)^{(k+3)}} \right. \\ \left. + \sum_{m,n} (-1)^{k+2} (k+2)! \frac{1}{(z - \beta_{m,n})^{(k+3)}} \right).$$

$$\frac{\partial^2 N^{(1)}}{\partial y^2} = b_1 (i^2) \left(\frac{2}{(x+iy)^3} + \sum_{m,n} \frac{2}{((x+iy) - \beta_{m,n})^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{(k-1)!} (i^2)^{k+2} \frac{1}{(x+iy)^{(k+3)}} \\
& + \sum_{m,n} (-1)^{k+2} (k+2)! \frac{1}{(z-\beta_{m,n})^{(k+3)}}
\end{aligned}$$

lo que sumando, dado que $i^2 = -1$, es

$$\frac{\partial^2 N^{(1)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 N^{(1)}}{\partial Y^2} = 0$$

por lo tanto $N^{(1)}$ es armónica ya que $\Delta N^{(1)} = 0$.

Análogamente sucede con $M^{(1)}$.

La demostración de la doble periodicidad se observa fácilmente, por ejemplo para el primer componente de $N^{(1)}$ se tiene que, $b_1(\zeta(z) - \pi(z)/\text{sen}\mu) = 0$, puesto que $\pi(z)/\text{sen}\mu = \delta_1$ es un periodo de la zeta de Weierstrass $\zeta(z)$ y para la suma infinita que parte de $k=3$ corriendo sobre los impares, solo es necesario recordar la relación $\wp(z) = -\zeta'(z)$, como $\wp(z)$ es una función doblemente periódica, resulta entonces que la función $N^{(1)}$ es doblemente periódica. De igual forma sucede con $M^{(1)}$.

Por lo tanto se tiene que la propuesta de solución es una base completa de funciones armónicas y doblemente periódicas.

Sustituyendo (4.29) en (4.28), el tensor de esfuerzo de la matriz y de la fibra resulta

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}^{(1)} &= p_1 \left(\text{Im}(Az + f_1(z)) \right)_{,1} - s_1 \left(\text{Re}(Bz + g_1(z)) \right)_{,2} \\
&= p_1 \left(\text{Im}(f_1'(z)) \right) - s_1 \left(\text{Re}(g_1'(z)i) \right) \\
&= \text{Im} \left(p_1 f_1'(z) + s_1 g_1'(z) \right) \\
\sigma_{31}^{(2)} &= p_2 \left(\text{Im}(f_2(z)) \right)_{,1} - s_2 \left(\text{Re}(g_2(z)) \right)_{,2} \\
&= p_2 \left(\text{Im}[f_2'(z)] \right) - s_2 \left(\text{Re}(g_2'(z)i) \right) \\
&= \text{Im} \left(p_2 f_2'(z) + s_2 g_2'(z) \right)
\end{aligned}$$

La diferencia entre ambos tensores está dada por

$$\sigma_{31}^{(1)} - \sigma_{31}^{(2)} = \text{Im} \left(p_1 f_1'(z) + s_1 g_1'(z) - p_2 f_2'(z) - s_2 g_2'(z) \right).$$

Análogamente se realizan los cálculos para los tensores de deformación $\sigma_{32}^{(r)}$, el desplazamiento eléctrico $D_1^{(r)}$ y $D_2^{(r)}$

$$\begin{aligned}\sigma_{32}^{(1)} - \sigma_{32}^{(2)} &= p_1 A + s_1 B + \operatorname{Re} \left(p_1 f_1'(z) + s_1 g_1'(z) - p_2 f_2'(z) - s_2 g_2'(z) \right) \\ D_1^{(1)} - D_1^{(2)} &= s_1 A - t_1 B + \operatorname{Re} \left(s_1 f_1'(z) - t_1 g_1'(z) - s_2 f_2'(z) + t_2 g_2'(z) \right) \\ D_2^{(1)} - D_2^{(2)} &= -\operatorname{Im} \left(s_1 f_1'(z) - t_1 g_1'(z) - s_2 f_2'(z) + t_2 g_2'(z) \right)\end{aligned}$$

De la condición de continuidad $\|M_3\| = 0$ y $\|N\| = 0$ (4.28)c,d entre ambas regiones H_1, H_2 se llega a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \left(f_2(z) \right) &= \operatorname{Im} \left(Az + f_1(z) \right), \\ \operatorname{Re} \left(g_2(z) \right) &= \operatorname{Re} \left(Bz + g_1(z) \right).\end{aligned}$$

Para simplificar la notación se define

$$H'(z) = p_1 f_1'(z) + s_1 g_1'(z) - p_2 f_2'(z) - s_2 g_2'(z).$$

Siguiendo con el análisis de las condiciones de interface entre ambas regiones en el planteamiento del problema (4.28)e se encuentra

$$\operatorname{Re} \left(H'(z) \right) n_2 + \operatorname{Im} \left(H'(z) \right) n_1 + \left(p_1 A + s_1 B + \|p\| \right) n_2 = 0. \quad (4.32)$$

Considérese a $H(z) = u + iv$ como una función de variable compleja analítica, por lo que cumple con las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial y_1} + i \frac{\partial v}{\partial y_1} \quad (4.33)$$

es igual a (Cauchy-Riemann)

$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{\partial v}{\partial y_2} - i \frac{\partial u}{\partial y_2} \quad (4.34)$$

Cambiando ahora a coordenadas polares, el vector normal unitario en la dirección 1 y el vector normal unitario en la dirección 2 se transforman en: $n_1 = \cos \theta$ y $n_2 = \operatorname{sen} \theta$ respectivamente

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{1}{R} \frac{dy_2}{d\theta}, \\ n_2 &= \frac{-1}{R} \frac{dy_1}{d\theta}.\end{aligned}$$

Transformando ahora a coordenadas polares la ecuación (4.32) se reescribe como

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} \left(\frac{-1}{R} \frac{dy_1}{d\theta} \right) - \frac{\partial u}{\partial y_2} \left(\frac{1}{R} \frac{dy_2}{d\theta} \right) + (p_1 A + s_1 B + \|p\|) \left(\frac{-1}{R} \frac{dy_1}{d\theta} \right) = 0$$

Como se observa u está en función de las variables y_1, y_2 ($u = u(y_1, y_2)$), reagrupando la ecuación anterior e integrándola con respecto al ángulo θ (suponiendo que u es univaluada, es decir de 0 a 2π) se tiene que la parte real de $H(z)$ está dada por

$$u + (p_1 A + s_1 B + \|p\|) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) = 0. \quad (4.35)$$

Reescribiendo la parte real de $H(z)$ es

$$\operatorname{Re}(p_1 f_1(z) + s_1 g_1(z) - p_2 f_2(z) - s_2 g_2(z)) + (p_1 A + s_1 B + \|p\|) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) = 0.$$

La parte imaginaria de $H(z)$ ($v(y_1, y_2)$) se encuentra análogamente de la condición (4.28)f

$$\operatorname{Im}(p_1 f_1(z) + s_1 g_1(z) - p_2 f_2(z) - s_2 g_2(z)) + (s_1 A - t_1 B + \|s'\|) \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = 0.$$

Como las funciones $f_1(z)$ y $g_1(z)$ tienen una singularidad en $z = 0$ (polo simple) dada por la $\zeta(z)$ de Weierstrass se hace un desarrollo en serie de Laurent

$$f_1(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{a_p}{z^p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} z^p \right),$$

$$g_1(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{b_p}{z^p} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} z^p \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_{kp} &= -C_{k+p-1}^p S_{k+p}, \\ C_k^p &= k! / p!(k-p)!, \\ S_{p+l} &= \sum_{m,n} \beta_{mn}^{-k-p} \quad \text{para} \quad k+p \geq 3. \end{aligned}$$

La serie S_{k+p} es la doble suma sobre los dos periodos ω_1 y ω_2 , con $\beta_{mn} = \omega_1 m + \omega_2 n$ en todo el plano. La serie S_{k+p} es convergente a partir de $k+p \geq 3$, nótese que $S_2 \equiv 0$, los detalles se encuentran en la página 355 del Markushevich (1970).

Transformando las funciones $f_1(z)$, $g_1(z)$, $f_2(z)$, $g_2(z)$ a coordenadas polares y sustituyendo éstas en (4.28)c,d,e,f se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \left(c_p R^p - \left(-\frac{a_p}{R^p} + A\delta_{1p}R + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} R^p \right) \right) \sin p\theta = 0, \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \left(d_p R^p - \left(\frac{b_p}{R^p} + B\delta_{1p}R + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} R^p \right) \right) \sin p\theta = 0, \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \left(p_1 \left(\frac{a_p}{R^p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} R^p \right) + s_1 \left(\frac{b_p}{R^p} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} R^p \right) \right. \\ & \quad \left. + (p_1 A + s_1 B + \|p\|) \delta_{1p} R - p_2 (c_p r^p) - s_2 (d_p R^p) \right) \cos p\theta = 0, \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \left(s_1 \left(-\frac{a_p}{R^p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} R^p \right) - t_1 \left(-\frac{b_p}{R^p} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} R^p \right) \right. \\ & \quad \left. + (s_1 A - t_1 B + \|s\|) \delta_{1p} R - s_2 (c_p r^p) + t_2 (d_p R^p) \right) \sin p\theta = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Como se observa en las ecuaciones anteriores se tienen series infinitas multiplicadas por las funciones seno y coseno cuyo valor da cero, esto representa entonces una serie de Fourier nula, cuyos coeficientes son cero. Utilizando este hecho se encuentran los valores de $c_p R^p$ y $d_p R^p$

$$\begin{aligned} c_p R^p &= -\frac{a_p}{R^p} + AR\delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} R^p, \\ d_p R^p &= \frac{b_p}{R^p} + BR\delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} R^p. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Con estos valores (4.37) sustituyendo en (4.36)c,d se llega a un sistema infinito acoplado, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & (p_1 + p_2) \left(\frac{a^p}{R^p} \right) + \|s\| \left(\frac{b^p}{R^p} \right) + \|p\| \left(AR\delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} R^p \right) \\ & \quad + \|s\| \left(BR\delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} R^p \right) = -\|p\| R\delta_{1p}, \\ & -\|s\| \left(\frac{a^p}{R^p} \right) + (t_1 + t_2) \left(\frac{b^p}{R^p} \right) + \|s\| \left(AR\delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} R^p \right) \\ & \quad - \|t\| \left(BR\delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} R^p \right) = -\|s\| R\delta_{1p}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Con la resolución de este último sistema se obtienen las constantes reales a_k y b_k con k un natural impar, con estas se obtiene la solución a la expresión analítica de los coeficientes efectivos.

Del MHA se obtuvieron las expresiones de las propiedades efectivas elásticas y piezoeléctricas, para el caso ${}_{23}L$, para una matriz del grupo hexagonal 622 esto resulta ser

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p_v + (p_{23}M_{3,2} + s_{23}N_{,1}), \\ \bar{s} &= s_v + (s_{23}M_{3,2} - t_{23}N_{,1}).\end{aligned}\quad (4.39)$$

Donde el subíndice v en p_v y s_v denota el promedio aritmético de Voigt.

$$\begin{aligned}p_v &= V_1 p_1 + V_2 p_2, \\ s_v &= V_1 s_1 + V_2 s_2.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Usando el Teorema de Green, la doble periodicidad en ∂H_1 y la condición de continuidad en la interface para el desplazamiento se encuentra

$$\begin{aligned}\langle p^{(r)} M_{3,2} \rangle &= \left(\int_{H_1} p_1 M_{3,2}^{(1)} dy_1 dy_2 + \int_{H_2} p_2 M_{3,2}^{(2)} dy_1 dy_2 \right) / \text{sen} \mu \\ &= \left(\int_{\partial H_1} p^{(r)} M_3 dy_1 - \int_{\Gamma} p^{(r)} M_3 dy_1 \right) / \text{sen} \mu \\ &= \left(\int_{\Gamma} p_1 M_3^{(1)} dy_1 - \int_{\Gamma} p_2 M_3^{(2)} dy_1 \right) / \text{sen} \mu \\ &= \left(\int_{\Gamma} p_1 M_3^{(1)} dy_1 - \int_{\Gamma} p_2 M_3^{(1)} dy_1 \right) / \text{sen} \mu \\ &= \|p\| \left(\int_{\Gamma} M_3 dy_1 \right) / \text{sen} \mu.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Nuevamente haciendo el cambio a coordenadas polares para $\|p\| \left(\int_{\Gamma} M^{(3)} dy_1 \right) / \text{sen} \mu$ y sustituyendo este valor en M_3

$$\langle p^{(r)} M_{3,2} \rangle = -\|p\| \frac{R}{\text{sen} \mu} \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \left(AR \delta_{1p} - \frac{a_p}{R^p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} R^p \right) \text{sen} p \theta \text{sen} \theta. \quad (4.42)$$

Como la función seno es ortogonal se sabe que

$$\text{sen} p \theta \text{sen} \theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 1, \\ \pi & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Usando la ortogonalidad del seno en la ecuación (4.42)

$$\langle p^{(T)} M_{3,2} \rangle = -\|p\| \frac{\pi R^2}{\text{sen} \mu} \left(A - \frac{\alpha_1}{R^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{k1} \right). \quad (4.43)$$

Análogamente se resuelve para el promedio $\langle s^{(T)} N_{,1} \rangle$, pero en este caso se usa la ortogonalidad de la función coseno

$$\langle s^{(T)} N_{,1} \rangle = -\|s\| \frac{\pi R^2}{\text{sen} \mu} \left(B + \frac{b_1}{R^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{k1} \right). \quad (4.44)$$

El coeficiente efectivo del módulo de rigidez transversal \bar{p} (4.39) se reescribe por (4.43) y (4.44) como

$$\bar{p} = p_0 - \frac{\pi R}{H} \left(\|s\| \frac{b_1}{R} - \|p\| \frac{\alpha_1}{R} + \|p\| R \left(A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{k1} \right) + \|s\| R \left(B + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{k1} \right) \right). \quad (4.45)$$

Al sistema infinito acoplado (4.38) se le confiere el valor a p de $p = 1$ para poder despejar y simplificar términos en (4.45). Después de algunas manipulaciones algebraicas queda el coeficiente efectivo \bar{p} como una expresión sencilla y fácil de analizar. En donde sólo queda por determinar el término real α_1 . El mismo procedimiento se hace para encontrar el coeficiente efectivo piezoeléctrico \bar{s} el cual tiene como incógnita al término también real b_1

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p_1 \left(1 + \frac{2\pi\alpha_1}{\text{sen} \mu} \right), \\ \bar{s} &= s_1 \left(1 + \frac{2\pi b_1 t_1}{\text{sen} \mu s_1} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para determinar los valores de α_1 y b_1 hay que resolver el sistema infinito acoplado (4.38). Las η_{kp} se hacen cero cuando la serie S_{k+p} se anula, esto sucede cuando $k+p$ no es un múltiplo de seis ($6t$, con $t = 1, 2, 3, \dots$).

Para resolver el sistema infinito acoplado se descompone éste en cuatro sistemas, como se observa en la siguiente tabla

Tabla de η_{kp} Los valores de η_{kp} para los cuales se hace cero con $t, s = 1, 2, 3, \dots$

$k \setminus p$	1	$6s - 3$	$6s - 1$	$6s + 1$
1	0	0		0
$6t - 3$	0		0	0
$6t - 1$		0	0	
$6t + 1$	0	0		0

Después de algunas manipulaciones algebraicas, desarrollando el sistema infinito acoplado (4.38) para los valores distintos de cero propuestos en la tabla, despejando y sustituyendo las distintas relaciones de los cuatro sistemas se llega a la solución del sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} a_1 &= R^2_{23} \Delta_1 / 23 \Delta, \\ b_1 &= R^2_{23} \Delta_2 / 23 \Delta, \end{aligned} \quad (4.47)$$

con

$$\begin{aligned} 23 \Delta &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \\ 23 \Delta_1 &= \begin{vmatrix} - \| p_{\tau} \| & \xi_{12} \\ - \| s_{\tau} \| & \xi_{22} \end{vmatrix}, \\ 23 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & - \| p_{\tau} \| \\ \xi_{21} & - \| s_{\tau} \| \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde los elementos de los determinantes están definidos como

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= (p_1 + p_2) + V_2 \| p \| + V_1^T \mathcal{M}^{-1} V_2, \\ \xi_{12} &= V_1 \| s \| + \tilde{V}_1^T \mathcal{M}^{-1} V_2, \\ \xi_{21} &= -V_1 \| s \| + V_1^T \mathcal{M}^{-1} V_2, \\ \xi_{22} &= (t_1 + t_2) - V_2 \| t \| + \tilde{V}_1^T \mathcal{M}^{-1} \tilde{V}_2, \end{aligned}$$

el supraíndice T denota el vector transpuesto, tanto la matriz $\mathcal{M}(m_{ts})$, como los vectores $\mathcal{V}_1(v_{1s})$, $\mathcal{V}_1(\bar{v}_{1s})$, $\mathcal{V}_2(v_{t1})$, $\mathcal{V}_2(\bar{v}_{t1})$ son de orden infinito, cada vector está compuesto por dos componentes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_{1s} &= R^{6s} \left(\|p_T\| \eta_{16s-1} \quad \|s_T\| \eta_{16s-1} \right)^T, \\ \bar{v}_{1s} &= R^{6s} \left(\|s_T\| \eta_{16s-1} \quad - \|t_T\| \eta_{16s-1} \right)^T, \\ v_{t1} &= R^{6t} \left(- \|p_T\| \eta_{6t-11} \quad - \|s_T\| \eta_{6t-11} \right)^T, \\ \bar{v}_{t1} &= R^{6t} \left(- \|s_T\| \eta_{6t-11} \quad + \|t_T\| \eta_{6t-11} \right)^T, \\ m_{ts} &= \begin{bmatrix} -(p_1 + p_2) \delta_{6t-16s-1} - a \bar{r}_{6t-16s-1} & - \|s\| \delta_{6t-16s-1} - b \bar{r}_{6t-16s-1} \\ \|s_T\| \delta_{6t-16s-1} - c \bar{r}_{6t-16s-1} & -(t_1 + t_2) \delta_{6t-16s-1} - d \bar{r}_{6t-16s-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con

$$\bar{r}_{6t-16s-1} = R^{12s} \sum_{i=1}^{\infty} R^{12i} \eta_{6t-16i+1} \eta_{6i+16s-1}$$

y

$$\begin{aligned} a &= \left[-(t_1 + t_2) \|p_T\|^2 + \|s_T\|^2 \|p_T\| - 2p_1 \|s_T\|^2 \right] / e, \\ b &= \left[- \|s_T\|^3 - (p_1 + p_2) \|s_T\| \|t_T\| - 2t_2 \|s_T\| \|p_T\| \right] / e, \\ c &= \left[\|s_T\|^3 - (t_1 + t_2) \|s_T\| \|p_T\| + 2p_1 \|s_T\| \|t_T\| \right] / e, \\ d &= \left[(p_1 + p_2) \|t_T\|^2 + \|s_T\|^2 \|t_T\| - 2t_2 \|s_T\|^2 \right] / e, \\ e &= (p_1 + p_2)(t_1 + t_2) + \|s_T\|^2. \end{aligned}$$

para $t, s = 1, 2, 3, \dots$

Así se determinan los valores de a_1 y b_1 , estas constantes reales dan la solución analítica que faltaba para determinar los coeficientes efectivos \bar{p} y \bar{s} para el problema antiplano ${}_{23}L$.

4.3.2 Problema de deformación mecánica antiplana y potencial eléctrico acoplado ${}_{13}L$

La solución del problema local ${}_{13}L$ se resuelve de manera análoga al problema desarrollado para ${}_{23}L$, en este caso los coeficientes efectivos están dados de la forma

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p_v + \langle p_{13}M_{3,1} - s_{13}N_{,2} \rangle, \\ \bar{s} &= s_v + \langle s_{13}M_{3,1} + t_{13}N_{,2} \rangle,\end{aligned}\quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p_1 \left(1 - \frac{2\pi}{\text{sen } \mu} a_1 \right), \\ \bar{s} &= s_1 \left(1 + \frac{2\pi}{\text{sen } \mu} \frac{t_1}{s_1} b_1 \right).\end{aligned}\quad (4.50)$$

Como se observa este problema antiplano aporta las mismas propiedades efectivas al ${}_{23}L$, \bar{p} y \bar{s} .

La solución del sistema para obtener las constantes reales a_1 y b_1 se resuelve de manera similar a la exhibida para ${}_{23}L$, los resultados que se obtienen son

$$\begin{aligned}a_1 &= R^2 {}_{13}\Delta_1 / {}_{13}\Delta, \\ b_1 &= R^2 {}_{13}\Delta_2 / {}_{13}\Delta,\end{aligned}\quad (4.51)$$

donde

$$\begin{aligned}{}_{13}\Delta &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \\ {}_{13}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} -\|p_T\| & \xi_{12} \\ -\|s_T\| & \xi_{22} \end{vmatrix}, \\ {}_{13}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & -\|p_T\| \\ \xi_{21} & -\|s_T\| \end{vmatrix},\end{aligned}\quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}-\xi_{11} &= p_1 + p_2 + V_2 \|p_T\| + \mathcal{V}_1^T \mathcal{M}^{-1} \mathcal{V}_2, \\ \xi_{12} &= V_1 \|s_T\| - \tilde{\mathcal{V}}_1^T \mathcal{M}^{-1} \mathcal{V}_2, \\ \xi_{21} &= V_1 \|s_T\| - \mathcal{V}_1^T \mathcal{M}^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_2, \\ \xi_{22} &= t_1 + t_2 + V_2 \|t_T\| - \tilde{\mathcal{V}}_1^T \mathcal{M}^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_2,\end{aligned}$$

el supraíndice T denota el vector transpuesto, tanto la matriz $\mathcal{M}(m_{\ell s})$, como los vectores $\mathcal{V}_1(v_{1s})$, $\tilde{\mathcal{V}}_1(\tilde{v}_{1s})$, $\mathcal{V}_2(v_{21})$, $\tilde{\mathcal{V}}_2(\tilde{v}_{21})$ son de orden infinito, cada vector está compuesto por dos componentes de la siguiente forma

$$v_{1s} = R^{12s} \left(-\|p_T\| \eta_{1\ 6s-1} \quad -\|s_T\| \eta_{1\ 6s-1} \right)^T,$$

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_{1s} &= R^{12s} \left(\| s_{\Gamma} \| \eta_{l \ 6s-1} - \| t_{\Gamma} \| \eta_{l \ 6s-1} \right)^T, \\
 v_{t1} &= \left(- \| p_{\Gamma} \| \eta_{6t-1 \ 1} - \| s_{\Gamma} \| \eta_{6t-1 \ 1} \right)^T, \\
 \bar{v}_{t1} &= \left(\| s_{\Gamma} \| \eta_{6t-1 \ 1} - \| t_{\Gamma} \| \eta_{6t-1 \ 1} \right)^T, \\
 m_{ts} &= \begin{bmatrix} -(p_1 + p_2) \delta_{6t-1 \ 6s-1} - a \bar{r}_{6t-1 \ 6s-1} & \| s \| \delta_{6t-1 \ 6s-1} - b \bar{r}_{6t-1 \ 6s-1} \\ \| s \| \delta_{6t-1 \ 6s-1} - c \bar{r}_{6t-1 \ 6s-1} & (t_1 + t_2) \delta_{6t-1 \ 6s-1} + d \bar{r}_{6t-1 \ 6s-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

con

$$\bar{r}_{6t-1 \ 6s-1} = R^{12s} \sum_{i=1}^{\infty} R^{12i} \eta_{6t-1 \ 6i+1} \eta_{6i+1 \ 6s-1}$$

y

$$\begin{aligned}
 a &= \left[(t_1 + t_2) \| p_{\Gamma} \|^2 - \| p_{\Gamma} \| \| s_{\Gamma} \|^2 + 2p_1 \| s_{\Gamma} \|^2 \right] / e, \\
 b &= \left[- \| s_{\Gamma} \|^3 - 2t_1 \| s_{\Gamma} \| \| p_{\Gamma} \| + \| s_{\Gamma} \| (p_1 + p_2) \| t_{\Gamma} \| \right] / e, \\
 c &= \left[- \| s_{\Gamma} \|^3 + (t_1 + t_2) \| s_{\Gamma} \| \| p_{\Gamma} \| - 2p_1 \| s_{\Gamma} \| \| t_{\Gamma} \| \right] / e, \\
 d &= \left[-(p_1 + p_2) \| t_{\Gamma} \|^2 + \| s_{\Gamma} \|^2 \| t_{\Gamma} \| - 2t_1 \| s_{\Gamma} \|^2 \right] / e, \\
 -e &= (p_1 + p_2)(t_1 + t_2) + \| s_{\Gamma} \|^2.
 \end{aligned}$$

para $t, s = 1, 2, 3, \dots$

4.4 Planteamiento del problema pL

El planteamiento de los problemas p -locales ${}_1L$ y ${}_2L$ como se mostró anteriormente está dado por

$$\begin{aligned}
 {}_p\sigma_{i\delta,\delta}^{(\Gamma)} &= 0 \text{ in } H_{\Gamma}, \\
 {}_pD_{\delta,\delta}^{(\Gamma)} &= 0 \text{ in } H_{\Gamma}, \\
 \| {}_pP_i^{(\Gamma)} \| &= 0 \text{ on } \Gamma, \\
 \| {}_pQ^{(\Gamma)} \| &= 0 \text{ on } \Gamma, \\
 \| {}_p\sigma_{i\delta}^{(\Gamma)} n_{\delta} \| &= - \| e_{pi\delta}^{(\Gamma)} \| n_{\delta} \text{ on } \Gamma, \\
 \| {}_pD_{\delta}^{(\Gamma)} n_{\delta} \| &= \| \epsilon_{ip}^{(\Gamma)} \| n_{\delta} \text{ on } \Gamma, \\
 \langle {}_pP_i \rangle &= \langle {}_pQ \rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Con el MHA se encontraron los coeficientes efectivos piezoeléctricos y dieléctricos, (4.7)c,d.

$$\begin{aligned}\bar{e}_{pij} &= \langle e_{pij} + C_{ijkl} p P_{k,l} + e_{kij} p Q_{,k} \rangle, \\ \bar{\epsilon}_{ip} &= \langle \epsilon_{ip} - e_{ikt} p P_{k,t} + \epsilon_{ik} p Q_{,k} \rangle.\end{aligned}\quad (4.54)$$

como la solución y desarrollo son símiles de los problemas anteriores, sólo se darán los resultados de los coeficientes efectivos que aportan, en este caso son el piezoeléctrico \bar{s} y dieléctrico \bar{t} .

4.4.1 Problema ${}_1L$ y ${}_2L$

Los coeficientes efectivos del problema local ${}_1L$ son

$$\begin{aligned}\bar{s} &= s_v + \langle p {}_1P_{3,1} + s {}_1Q_{,1} \rangle, \\ \bar{t} &= t_v - \langle s {}_1P_{3,1} - t {}_1Q_{,1} \rangle.\end{aligned}\quad (4.55)$$

Desarrollando las ecuaciones anteriores los coeficientes efectivos quedan en términos de las constantes reales a_1 y b_1 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\bar{s} &= s_1 \left(1 + \frac{2\pi p_1 a_1}{\text{sen} \mu s_1} \right), \\ \bar{t} &= t_1 \left(1 - \frac{2\pi b_1}{\text{sen} \mu} \right).\end{aligned}\quad (4.56)$$

Considérese un sistema lineal matricial de la forma $Ax = b$, donde A es la matriz del sistema, x es el vector incógnita y b es el vector solución, se identifica que para el caso ${}_1L$ la matriz del sistema infinito es la misma que la del problema ${}_2L$, entonces la solución analítica para el problema 1-local es

$$\begin{aligned}a_1 &= R^2 {}_1\Delta_1 / {}_{23}\Delta, \\ b_1 &= R^2 {}_1\Delta_2 / {}_{23}\Delta,\end{aligned}\quad (4.57)$$

donde

$$\begin{aligned}{}_{23}\Delta &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \\ {}_1\Delta_1 &= \begin{vmatrix} - \| s_T \| & \xi_{12} \\ \| t_T \| & \xi_{22} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

$${}_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\xi_{11} & \|s_{\tau}\| \\ \xi_{21} & \|t_{\tau}\| \end{vmatrix}, \quad (4.58)$$

analogamente para el caso ${}_2L$ se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{s} &= s_v + \langle p \quad {}_2P_{3,2} + s \quad {}_2Q_{,2} \rangle, \\ \bar{t} &= t_v - \langle s \quad {}_2P_{3,2} - t \quad {}_2Q_{,2} \rangle. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \bar{s} &= s_1 \left(1 + \frac{2\pi}{\text{sen}\mu} \frac{p_1 a_1}{s_1} \right), \\ \bar{t} &= t_1 \left(1 + \frac{2\pi}{\text{sen}\mu} b_1 \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Se tiene que para el caso ${}_2L$ la matriz del sistema infinito es la misma que la del problema ${}_{13}L$, sólo cambia el vector incógnita y el vector solución esto es

$$\begin{aligned} a_1 &= R^2 {}_2\Delta_1 / {}_{13}\Delta, \\ b_1 &= R^2 {}_2\Delta_2 / {}_{13}\Delta, \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde

$$\begin{aligned} {}_{13}\Delta &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \\ {}_2\Delta_1 &= \begin{vmatrix} \|s_{\tau}\| & \xi_{12} \\ -\|t_{\tau}\| & \xi_{22} \end{vmatrix}, \\ {}_2\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & \|s_{\tau}\| \\ \xi_{21} & -\|t_{\tau}\| \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.5 Resultados

Para verificar el álgebra que condujo a las expresiones de las propiedades efectivas: para el caso elástico \bar{p} los problemas ${}_{13}L$ y ${}_{23}L$, para el caso piezoeléctrico \bar{s} aportado por los problemas ${}_{13}L$, ${}_{23}L$, ${}_1L$ y ${}_2L$, y para el caso dieléctrico \bar{t} los problemas locales ${}_1L$ y ${}_2L$, se escribió un programa en MATLAB, para calcular dichos coeficientes de manera numérica. Este programa se reproduce en el Apéndice B.

Para generar el programa hay que calcular las series infinitas que están involucradas con las matrices ${}_{13}\Delta$, y ${}_{23}\Delta$, y los vectores solución para cada uno de los distintos problemas ${}_{23}\Delta_1$, ${}_{23}\Delta_2$, en el caso de ${}_{23}L$, ${}_{13}\Delta_1$, ${}_{13}\Delta_2$, para el problema ${}_{31}L$, ${}_{1}\Delta_1$, ${}_{1}\Delta_2$ para el problema local ${}_{1}L$ y por último ${}_{2}\Delta_1$, ${}_{2}\Delta_2$, para ${}_{2}L$, para ello las series fueron truncadas a orden finito, esto no afecta de manera considerable los cálculos ya que se utiliza un radio para la fibra R comprendido entre 0 y .5, lo que se traduce en una rápida convergencia de las series, donde los sumandos multiplicados por potencias de radio R con términos muy altos tienden a ser muy pequeños y por tanto puede despreciarse su contribución.

En la práctica el truncamiento a orden dos es suficiente para tener una buena aproximación a las propiedades efectivas. Esyo simplifica de manera considerable los cálculos y los coeficientes a_1 y b_1 son relativamente sencillos de calcular.

En el intervalo de la fracción volumétrica 0 hasta el límite de percolación, la coincidencia de las curvas que arroja cada problema es total.

Los valores que se les asignó tanto a la matriz (colágeno) como a la fibra (hidroxiapatita) son datos experimentales para la parte elástica, los datos de la parte dieléctrica y por último los datos para la parte piezoeléctrica fueron para la matriz el colágeno y para la fibra, el hueso mineral, estos fueron tomados del artículo de Guzelsu & Demiry, (1979).

Los datos que se utilizaron para fibra son

$$\begin{aligned} t_2 &= [11.15 * 8.854e - 12], \quad \text{con } \epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} F/m \\ p_2 &= [44.5 * 1e9/2], \quad \text{medido en } GPa \\ s_2 &= [1.4833e - 4] \quad \text{medido en } C/N \end{aligned}$$

Mientras que los datos para la matriz fueron

$$\begin{aligned} t_1 \equiv k11m &= [5 * 8.854e - 12], \quad \epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} F/m \\ p_1 \equiv c44m &= [0.46 * 1e9/2], \quad \text{medido en } GPa \\ s_1 \equiv e14m &= [0] \quad \text{medido en } C/N. \end{aligned}$$

Cada uno de los problemas aquí estudiados aportan el coeficiente efectivo piezoeléctrico, que es una respuesta encontrada en el hueso. En la Figura 4.2 se presenta el coeficiente efectivo piezoeléctrico \bar{s} medido en C/N contra la fracción volumétrica que ocupa la fibra V_2 .

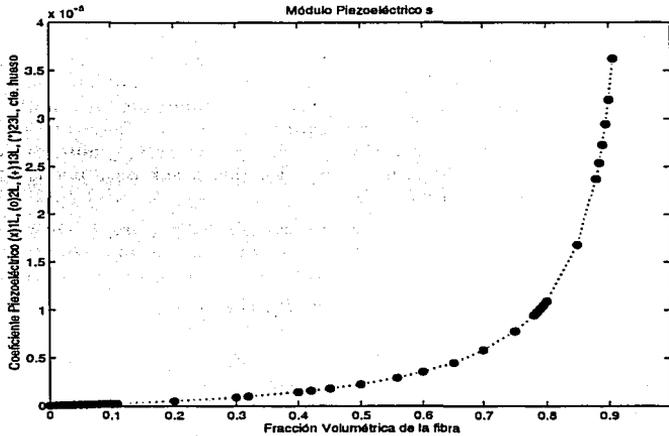


Figura 4.2: Coeficiente efectivo piezoeléctrico

Con el símbolo (x) se grafica los resultados del análisis del problema $1L$, con (o) se grafica el problema local $2L$, con (+) se grafica el problema antiplano $13L$, y por último con (*) se observan los resultados del problema local antiplano $23L$. Nótese la coincidencia de los cuatro resultados. Esto implica que los cuatro resultados analíticos aportan el mismo valor, lo que así debería ser. La monotonía de la gráfica es congruente con los datos introducidos para la matriz y la fibra.

Esta gráfica representa la propiedad efectiva elástica, \bar{p} medida en GPA contra la fracción volumétrica que ocupa la fibra V_2 . Los problemas que aportaron el coeficiente elástico fueron el $23L$ y $13L$. El término constante es el dato experimental elástico del femur. En la Fig. 4.3 se observa la intersección del coeficiente elástico \bar{p} con el dato experimental elástico del hueso a cierta área de la fracción volumétrica. Nótese tra vez que los valores de \bar{p} coinciden tal y como debería ser.

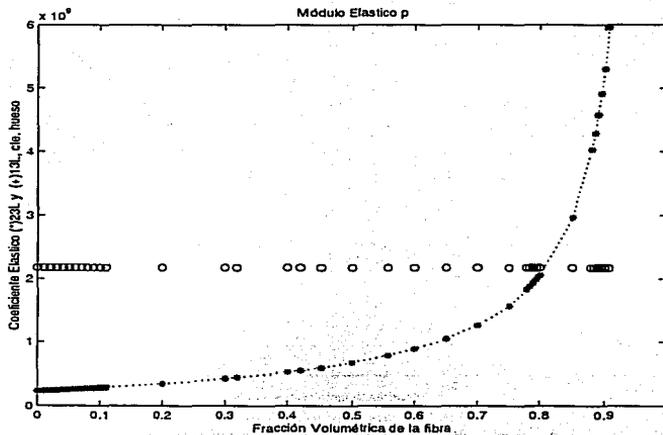


Figura 4.3: Coeficiente efectivo elástico

Por último se graficó el coeficiente efectivo dieléctrico, $\bar{\epsilon}$ medido en F/m contra la fracción volumétrica que ocupa la fibra V_2 . El dato constante es la dielectricidad encontrada en el femur de un bovino. Los problemas que aportaron el coeficiente dieléctrico fueron los casos locales $_1L$ y $_2L$. Nuevamente los dos valores independientes de $\bar{\epsilon}$ coinciden.

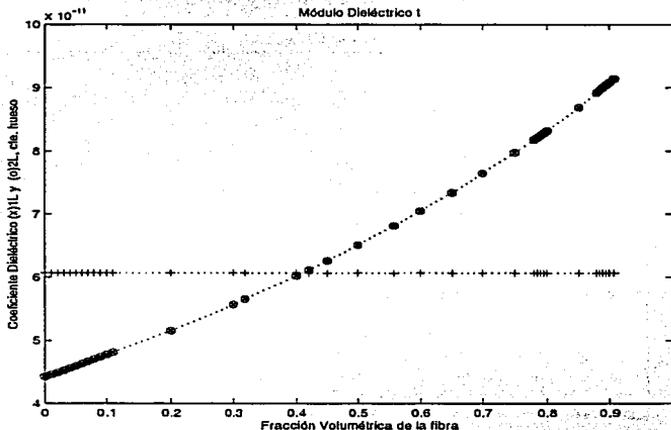


Figura 4.4: Coeficiente efectivo dieléctrico

Como se pudo observar, todas las gráficas en cada uno de los casos, arrojan el mismo dato para cada propiedad efectiva, vía los distintos problemas resueltos. Además en todas ellas existe monotonía, que es congruente con los datos reportados para generar el programa. Los resultados favorables (dado que el resultado es el mismo para cada coeficiente) del análisis numérico realizado le confieren confiabilidad a las expresiones analíticas encontradas.

Conclusiones

El problema estudiado en esta tesis es el de encontrar los coeficientes efectivos que resultan de la homogeneización de las ecuaciones que gobiernan un compuesto piezoléctrico. Se calcularon estos coeficientes por medio del método de homogeneización asintótica, que involucra dos escalas, una local l y otra global L lo que da lugar a buscar una solución en términos de dos variables, una lenta \mathbf{x} y otra rápida y por medio de una serie asintótica en $\epsilon = l/L \ll 1$. Para resolver las ecuaciones generadas por este método se utilizaron métodos de potencial y funciones doblemente periódicas, en arreglo hexagonal.

En conclusión

- Se encontraron las expresiones analíticas de los coeficientes efectivos piezoléctricos ${}_{13}\bar{\epsilon}$, ${}_{23}\bar{\epsilon}$, ${}_{1}\bar{\epsilon}$, ${}_{2}\bar{\epsilon}$, elásticos ${}_{13}\bar{\nu}$, ${}_{23}\bar{\nu}$ y dieléctricos ${}_{1}\bar{\epsilon}$, ${}_{2}\bar{\epsilon}$ de los distintos problemas locales antiplanos.
- Las series usadas tienen una convergencia rápida.
- Los cálculos numéricos son relativamente fáciles al serlo las expresiones analíticas a analizar. Las cantidades reportadas para cada coeficiente efectivo encontrados por dos o cuatro caminos distintos fueron las mismas.
- Se aprecia la necesidad de un estudio experimental más profundo de ambos componentes (hidroxiapatita y colágeno) acerca de la unión de ambos elementos para posibles aplicaciones médicas tal como la elaboración de implantes.
- El siguiente ejercicio a realizarse cuya complejidad es mayor, sería con la matriz con una simetría C_6 , para otro tipo de colágeno, i.e. Esto involucraría, que en el problema de deformación antiplana con potencial eléctrico acoplado, ejemplo ${}_{23}L$ aparecieran funciones que no serían puramente pares o impares.

Matriz C_6

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc}
 C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{311} \\
 C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{322} \\
 C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{333} \\
 0 & 0 & 0 & 2C_{2323} & 0 & 0 & 2e_{123} & 2e_{223} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{3131} & 0 & 2e_{131} & 2e_{231} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 2e_{123} & 2e_{131} & 0 & e_{11} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2e_{223} & 2e_{231} & 0 & 0 & e_{22} & 0 \\
 e_{311} & e_{322} & e_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33}
 \end{array} \right) \cdot (4.63)$$

Apéndice A

Funciones doblemente periódicas

Una función $f(z)$ se dice que es periódica si existe una constante distinta de cero $2w$ tal que

$$f(z + 2w) = f(z) \quad \forall z \in C.$$

El número $2w$ es llamado el periodo de $f(z)$.

Una función de un solo periodo se dice simplemente periódica y de más de un periodo se llama multiperíodica. En el caso particular de las funciones que tienen dos periodos se les conoce como *funciones doblemente periódicas de Weierstrass* este es el caso de $\wp(z)$.

Se llaman *periodos mínimos o fundamentales* aquéllos que tienen la propiedad de que cualquier otro periodo es una combinación lineal de ellos, es decir, sean para una función doblemente periódica $2w_1$ y $2w_2$ los periodos fundamentales, entonces:

$$\begin{aligned} \beta_{a,b} &= a2w_1 + b2w_2, \\ \beta_{c,d} &= c2w_1 + d2w_2, \end{aligned}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y además se tiene la condición $ad - bc = 1$.

Una celda o paralelogramo principal es aquél que se forma con vértices de periodos primitivos, por ejemplo, se tiene $\beta_{m,n} = m2w_1 + n2w_2$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $\beta_{m,n}, \beta_{m+1,n}, \beta_{m+1,n+1}, \beta_{m,n+1}$ forman los cuatro vértices del paralelogramo o celda, con la restricción de no tener polos en la frontera, en caso de haberlos se desplaza o recorre dicho paralelogramo. Esta estructura se repite a través de todo el plano complejo por medio de movimientos rígidos.

Una *función elíptica* es una función meromorfa, o analítica con un número finito de puntos singulares, lo cuales son polos, con un periodo doble. El comportamiento de una función elíptica está completamente determinado por el conocimiento de

los valores primitivos de la celda. La suma de los residuos de una función elíptica en cualquier paralelogramo es cero.

Jacobi demostró que una función analítica constante cuyo cociente entre sus periodos es un número no real es necesariamente doblemente periódica.

Una *función integral* es aquella que se repite en cada red los valores primitivos del paralelogramo.

$\zeta(z)$ de Weierstrass

La función *zeta de Weierstrass* está definida por:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left\{ \frac{1}{z - \beta_{m,n}} + \frac{1}{\beta_{m,n}} + \frac{z}{\beta_{m,n}^2} \right\}.$$

donde la notación de la coma (') arriba de la sigma indica la doble suma sobre los enteros m, n excluyendo $m = 0$ y $n = 0$.

La $\zeta(z)$ es una función cuyo residuo es 1, es impar, (si se reemplaza z por $-z$ se obtiene $\zeta(-z) = -\zeta(z)$) y posee un polo simple.

Una característica importante de la función $\zeta(z)$ es que es absoluta y uniformemente convergente en cada celda.

$\wp(z)$ de Weierstrass

La función elíptica de Weierstrass $\wp(z)$ se define como menos la derivada de la $\zeta(z)$ de Weierstrass, es decir

$$\wp(z) = -\frac{d\zeta(z)}{dz},$$

lo que es igual a

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(z - \beta_{m,n})^2} - \frac{1}{\beta_{m,n}^2} \right\}$$

La función $\wp(z)$ representa una serie doble, la cual se toma sobre el conjunto de todos los periodos distintos de cero $\beta_{m,n}$, también converge uniforme y absolutamente en cada paralelogramo, es una función par, meromorfa con un polo doble en cada punto de la celda o red, cuyo residuo es igual a cero.

La pseudo periodicidad de $\zeta(z)$

En este trabajo se utiliza la pseudo periodicidad de la $\zeta(z)$, ésta está dada de acuerdo al teorema del residuo por

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{\text{res de } \zeta(z)} &= \int_{\Delta} \zeta(z) dz \\ 2\pi i &= \int_{\Delta} \zeta(z) dz. \end{aligned}$$

donde Δ es una celda o paralelogramo.

Integrando sobre el paralelogramo fundamental aparece como consecuencia la *relación de Legendre* que es

$$\frac{\pi}{2}i = \eta_1 w_2 - \eta_2 w_1.$$

La pseudo-periodicidad de $\zeta(z)$ aparece como consecuencia al integrar $\wp(z+2w_1) = \wp(z)$ y $\wp(z+2w_2) = \wp(z)$ con $2w_1$ y $2w_2$ los dos periodos de $\wp(z)$, se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \zeta(z+2w_1) &= \zeta(z) + 2\eta_1, \\ \zeta(z+2w_2) &= \zeta(z) + 2\eta_2. \end{aligned} \quad (64)$$

donde $2\eta_1$ y $2\eta_2$ son las constantes de integración

Las constantes η_1 y η_2 están relacionadas por la relación de Legendre, tomando los periodos de $\wp(z)$ como $2w_1 = 1$ $2w_2 = e^{i\mu}$, con $\mu = \pi/3$; sustituyendo $2w_1$ en (64a) se encuentra el valor de η_1

$$\begin{aligned} \zeta(z+1) - \pi(z+1) &= \zeta(z) - \pi(z) \\ \zeta(z+1) - \zeta(z) &= \pi(z+1) - \pi(z) \\ &\implies \\ 2\eta_1 &= \pi \end{aligned}$$

análogamente para $2w_2$, se obtiene

$$2\eta_2 = \pi e^{i\mu}$$

Por lo tanto la pseudo periodicidad de $\zeta(z)$ transmitido por la función doblemente periodica $\wp(z)$ para un arreglo hexagonal, dividiendo entre el área de un hexágono

se tiene

$$\begin{aligned}\zeta(z + 2w_1) - \zeta(z) &= \pi/\operatorname{sen}\mu \\ \zeta(z + 2w_2) - \zeta(z) &= \pi/\operatorname{sen}\mu * e^{i\mu}\end{aligned}$$

Apéndice B

Programa en MATLAB

```
%APENDICE B
%PROGRAMA COMPUTACIONAL
%*****
%DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES EFECTIVOS ANTIPLANOS PARA EL CASO
%MAS SIMPLE DE HUESOS
%*****
%*****
```

```
%*****
%INTRODUCCION DE LOS DATOS DE LA MATRIZ *
%*****
```

clear all

```
%*****
% Combinacion
Matriz=1;
Fibra=1;
```

```
%*****
%INTRODUCCION DE LOS DATOS DE LA Matriz *
%*****
```

```
k11f=[ 11.15*8.854e-12 ]; %t
c44f=[ 44.5*1e9/2]; %p
e14f=[ 1.4833e-4 ]; %s'
```

```
%*****
%INTRODUCCION DE LOS DATOS DE LA FIBRA *
%*****
```

```
k11m=[ 5*8.854e-12 ]; %t
c44m=[0.46*1e9/2]; %p
e14m=[0 ]; %s'
```

```
%*****
a=Matriz;
b=Fibra;
```

```
%*****
%CONTRASTE ENTRE LAS PROPIEDADES DE LA MATRIZ Y LA FIBRA *
%*****
```

```
dt5=c44m(a)-c44f(b); %|p|
dt6=e14m(a)-e14f(b); %|s|
dt7=k11m(a)-k11f(b); %|t|
```

```
%*****  
ang=pi/3;  
  
%*****  
S=0;  
S(6)=5.8630316;  
S(12)=6.00096399;  
S(18)=5.9997183;  
S(24)=6.0000116;  
S(30)=5.9999996;  
S(36)=6.0000000;  
S(42)=6.0000000;  
S(48)=6.0000000;  
S(54)=6.0000000;  
S(60)=6.0000000;  
S(66)=6.0000000;  
S(72)=6.0000000;  
S(78)=6.0000000;  
S(84)=6.0000000;  
S(90)=6.0000000;  
S(96)=6.0000000;  
S(102)=6.0000000;  
%*****  
  
% Matriz factorial  
clear fact  
for n=1:40,  
    for k=1:n,  
        fact(n,k)=prod(1:1:n)/(prod(1:1:k)*prod(1:1:n-k));  
    end  
end  
  
%*****  
%matriz unitaria  
for n=1:40,  
    for k=1:40,  
        if n==k,  
            di(n,k)=1;  
        else di(n,k)=0;  
        end  
    end  
end  
%*****  
% Comienzo de un ciclo para variar el volumen de la fibra  
  
%v2=0:0.1:0.9;
```

```
v2=[ 0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1 0.11 ...  
    0.2 0.3 0.32 0.4 0.42 0.45 0.5 0.558 0.6 0.65 0.7 0.75 0.78 0.785...  
    0.79 0.795 0.8 0.85 0.88 0.885 0.89 0.895 0.9 0.9069];
```

```
for jj=1:length(v2), %comienzo de ciclo de lam
```

```
r=sqrt(v2(jj)*sin(ang)/pi);
```

```
%*****  
%Matriz Eta
```

```
for n=1:2:20,  
    for k=1:2:20,
```

```
Eta(n,k)=-(fact(n+k-1,k))*S(n+k)*(r^(n+k));
```

```
    end  
end
```

```
%.....  
%Matriz del sistema infinita truncada (t=1,3; s=1,3)
```

```
L32(1,1) = c44m(a) + c44f(b) + dt5*v2(jj);  
L32(1,2) = dt6*(1-v2(jj));  
L32(1,3) = dt5*Eta(5,1);  
L32(1,4) = dt6*Eta(5,1);  
L32(2,1) = -dt6*(1-v2(jj));  
L32(2,2) = k11m(a)+k11f(b) + dt7*v2(jj);  
L32(2,3) = dt6*Eta(5,1);  
L32(2,4) = -dt7*Eta(5,1);  
L32(3,1) = dt5*Eta(1,5);  
L32(3,2) = dt6*Eta(1,5);  
L32(3,3) = c44m(a) + c44f(b);  
L32(3,4) = dt6;  
L32(4,1) = dt6*Eta(1,5);  
L32(4,2) = -dt7*Eta(1,5);  
L32(4,3) = -dt6;  
L32(4,4) = k11m(a)+k11f(b);
```

```
%*****  
%*****Matriz en forma abreviada,sistema infinito 32L*****
```

```
Lim=11;
```

```
for p1=1:2:Lim  
    for k1=1:2:Lim
```

```
M32(p1,k1) = (c44m(a)+c44f(b))*di(p1,k1) + ...  
            dt5*(v2(jj)*di(1,p1)*di(1,k1) + Eta(k1,p1));
```

```
M32(p1,k1+1) = dt6*(di(p1,k1) - v2(jj)*di(1,k1)*di(1,p1) + Eta(k1,p1));  
M32(p1+1,k1) = dt6*(-di(p1,k1) + v2(jj)*di(1,k1)*di(1,p1) + Eta(k1,p1));  
M32(p1+1,k1+1) = (k11m(a)+k11f(b))*di(p1,k1) - ...  
dt7*(-v2(jj)*di(1,k1)*di(1,p1) + Eta(k1,p1));
```

```
end  
end  
% Vector independiente asociado a 32_L (forma abreviada)
```

```
v32a(1) = -r*dt5;  
v32a(2) = -r*dt6;  
Lim2=length(M32);  
for p11=3:Lim2  
v32a(p11) = 0;  
end
```

```
Xap32Lab =inv(M32)*v32a';  
%  
a132Lab=Xap32Lab(1);  
b132Lab=Xap32Lab(2);
```

```
*****  
%vector independiente asociado a 32_L
```

```
v32(1) = -r*dt5;  
v32(2) = -r*dt6;  
v32(3) = 0;  
v32(4) = 0;
```

```
Xap32L =inv(L32)*v32';
```

```
a132L=Xap32L(1);  
b132L=Xap32L(2);
```

```
*****  
%vector independiente asociado a 1_L
```

```
v1(1) = -r*dt6;  
v1(2) = r*dt7;  
v1(3) = 0;  
v1(4) = 0;
```

Xap1L =inv(L32)*v1';

a11L=Xap1L(1);

b11L=Xap1L(2);

%.....
%Matriz del sistema infinita truncada (t=1,3; s=1,3)

L31(1,1) = -(c44m(a) + c44f(b)) - dt5*v2(jj);

L31(1,2) = dt6*(1-v2(jj));

L31(1,3) = dt5*Eta(5,1);

L31(1,4) = -dt6*Eta(5,1);

L31(2,1) = dt6*(1-v2(jj));

L31(2,2) = k11m(a)+k11f(b) + dt7*v2(jj);

L31(2,3) = dt6*Eta(5,1);

L31(2,4) = dt7*Eta(5,1);

L31(3,1) = dt5*Eta(1,5);

L31(3,2) = -dt6*Eta(1,5);

L31(3,3) = -(c44m(a) + c44f(b));

L31(3,4) = dt6;

L31(4,1) = dt6*Eta(1,5);

L31(4,2) = dt7*Eta(1,5);

L31(4,3) = dt6;

L31(4,4) = k11m(a)+k11f(b);

%***** Matriz en forma abreviada 13L*****

for p1=1:2:Lim

for k1=1:2:Lim

M31(p1,k1) = -(c44m(a)+c44f(b))*di(p1,k1) + ...

dt5*(v2(jj)*di(1,p1)*di(1,k1) + Eta(k1,p1));

M31(p1,k1+1) = dt6*(di(p1,k1) - v2(jj)*di(1,k1)*di(1,p1) - Eta(k1,p1));

M31(p1+1,k1) = dt6*(di(p1,k1) - v2(jj)*di(1,k1)*di(1,p1) + Eta(k1,p1));

M31(p1+1,k1+1) = (k11m(a)+k11f(b))*di(p1,k1) + ...

dt7*(v2(jj)*di(1,k1)*di(1,p1) + Eta(k1,p1));

end

end

% Vector independiente asociado a 13_L (forma abreviada)

v31a(1) = -r*dt5;

v31a(2) = -r*dt6;

Lim2=length(M32);

for p11=3:Lim2

v31a(p11) = 0;

```
end

Xap31Lab =inv(M31)*v31a';
%
a131Lab=Xap31Lab(1);
b131Lab=Xap31Lab(2);

%*****

%vector independiente asociado a 31_L

v31(1) = -r*dt5;
v31(2) = -r*dt6;
v31(3) = 0;
v31(4) = 0;

Xap31L =inv(L31)*v31';
a131L=Xap31L(1);
b131L=Xap31L(2);

%*****

%vector independiente asociado a 2_L

v2L(1) = r*dt6;
v2L(2) = -r*dt7;
v2L(3) = 0;
v2L(4) = 0;

Xap2L = inv(L31)*v2L';
a12L=Xap2L(1);
b12L=Xap2L(2);

%***** MATRIZ del Sistema. Problema antiplano 31L

for t=1:1,
    for s=1:1;
AP31(2*t-1,2*s-1)=- (c44m(a)+c44f(b))*di(s,t) + ...
    dt5*(-v2(jj)*di(1,t) + Eta(2*s-1,2*t-1)); %AP11
AP31(2*t-1,2*s)=dt6*(di(s,t) - v2(jj)*di(1,t) + Eta(2*s-1,2*t-1)); %AP21
AP31(2*t,2*s-1)=dt6*(di(s,t) - v2(jj)*di(1,t) - Eta(2*s-1,2*t-1)); %AP12
```

```
AP31(2*t,2*s)=(k11m(a)+k11f(b))*di(s,t) + dt7*(v2(jj))*...  
di(1,t) + Eta(2*t-1,2*s-1)); %AP22
```

```
end  
end
```

```
% termino independiente del sistema infinito del Problema 31L
```

```
Nap31(1)=-r*dt5;  
Nap31(2)=-r*dt6;
```

```
for t=3:2*t  
Nap31(t)=0;  
end
```

```
% solucion de 31L
```

```
Xap31=inv(AP31)*Nap31';
```

```
a131=Xap31(1);  
b131=Xap31(2);
```

```
%*****
```

```
% MATRIZ del Sistema. Problema antiplano 32L
```

```
for t=1:l,  
for s=1:l;
```

```
AP32(2*t-1,2*s-1)=(c44m(a)+c44f(b))*di(t,s) + ...  
dt5*(v2(jj)*di(1,s) + Eta(2*t-1,2*s-1)); %AP11
```

```
AP32(2*t,2*s-1)=dt6*(-di(t,s) + v2(jj)*di(1,s) + Eta(2*t-1,2*s-1)); %AP21
```

```
AP32(2*t-1,2*s)=dt6*(di(t,s) - v2(jj)*di(1,s) + Eta(2*t-1,2*s-1)); %AP12
```

```
AP32(2*t,2*s)=(k11m(a)+k11f(b))*di(t,s) + dt7*(v2(jj))*...  
di(1,s) - Eta(2*s-1,2*t-1)); %AP22
```

```
end  
end
```

```
% termino independiente del sistema infinito del Problema 32L
```

```
Nap32(1)=-r*dt5;  
Nap32(2)=-r*dt6;
```

```
for t=3:2*t  
Nap32(t)=0;  
end
```

```
% solucion de 32L
```

```
Xap32=inv(AP32)*Nap32';
```

```
a132=Xap32(1);  
b132=Xap32(2);
```

```
%***** Coeficientes Antiplanos
```

```
c4431=c44m(a)-2*pi*r*c44m(a)*a131/sin(ang);  
c4432=c44m(a)+2*pi*r*c44m(a)*a132/sin(ang);  
c4432L=c44m(a)+2*pi*r*c44m(a)*a132L/sin(ang);  
c4431L=c44m(a)-2*pi*r*c44m(a)*a131L/sin(ang);
```

```
s31=e14m(a)+2*pi*r*k11m(a)*b131/sin(ang);  
s32=e14m(a)+2*pi*r*k11m(a)*b132/sin(ang);  
s32L=e14m(a)+2*pi*r*k11m(a)*b132L/sin(ang);  
s31L=e14m(a)+2*pi*r*k11m(a)*b131L/sin(ang);  
s2L=e14m(a)+2*pi*r*c44m(a)*a12L/sin(ang);  
s1L=e14m(a)+2*pi*r*c44m(a)*a11L/sin(ang);
```

```
t1=k11m(a)-2*pi*r*k11m(a)*b11L/sin(ang);  
t2=k11m(a)+2*pi*r*k11m(a)*b12L/sin(ang);
```

```
%*****Formula abreviada*****
```

```
c4432Lab=c44m(a)+2*pi*r*c44m(a)*a132Lab/sin(ang);  
c4431Lab=c44m(a)-2*pi*r*c44m(a)*a131Lab/sin(ang);  
s32Lab=e14m(a)+2*pi*r*k11m(a)*b132Lab/sin(ang);  
s31Lab=e14m(a)+2*pi*r*k11m(a)*b131Lab/sin(ang);
```

```
%*****  
% Deposito de los coeficientes para la salida
```

```
RR0(jj,1,a,b)=v2(jj);  
RR0(jj,2,a,b)=c4432L;  
RR0(jj,3,a,b)=c4431L;  
RR0(jj,4,a,b)=4.35*1e9/2;
```

```
RR(jj,1,a,b)=v2(jj);  
RR(jj,2,a,b)=c4431;  
RR(jj,3,a,b)=c4432;  
RR(jj,4,a,b)=c4432L;  
RR(jj,5,a,b)=c4431L;
```

```
RR1(jj,1,a,b)=v2(jj);  
RR1(jj,2,a,b)=t1;  
RR1(jj,3,a,b)=t2;  
RR1(jj,4,a,b)=6.85*8.854e-12;
```

```
RR2(jj,1,a,b)=v2(jj);  
RR2(jj,2,a,b)=s1L;  
RR2(jj,3,a,b)=s2L;  
RR2(jj,4,a,b)=s32L;  
RR2(jj,5,a,b)=s31L;
```

end

* Formato de salida

```
disp('      V2      c4431      c4432      c4432L      4.35*1e9/2')  
disp('-----')  
format long  
disp(RR(:, :, a, b))
```

pause

```
disp('      V2      s1L      s2L      s32L      s31L      ')  
disp('-----')  
format long  
disp(RR2(:, :, a, b))
```

pause

```
disp('      V2      t1L      t2L      6.85*8.854e-12')  
disp('-----')  
format long
```

```
disp(RR1(:, : , a, b))
```

```
pause
```

```
format long
```

```
for a=a:a;  
    for b=b:b;  
%*****  
%*****GRAFICAS*****  
%En azul las de el prob 2L, en verde las del 1L, en negro las del 13L  
%En rojo las del 32L
```

```
    figure(1);  
        plot(RR2(:, 1, a, b), RR2(:, 2, a, b), 'gx:', ...  
RR2(:, 1, a, b), RR2(:, 3, a, b), 'bo:', ...  
RR2(:, 1, a, b), RR2(:, 4, a, b), 'r*:', ...  
RR2(:, 1, a, b), RR2(:, 5, a, b), 'k+:')  
        xlabel('Fracción Volumétrica de la fibra') ,  
        ylabel('Coeficiente Piezoeléctrico (x)1L, (o)2L, (+)13L, (*)23L, cte. hueso')  
        title('Módulo Piezoeléctrico s')
```

```
pause
```

```
    figure(2);  
        plot(RR1(:, 1, a, b), RR1(:, 2, a, b), 'gx:', ...  
RR1(:, 1, a, b), RR1(:, 3, a, b), 'bo:', ...  
RR1(:, 1, a, b), RR1(:, 4, a, b), 'r+:')  
        xlabel('Fracción Volumétrica de la fibra') ,  
        ylabel('Coeficiente Dieléctrico (x)1L y (o)2L, cte. hueso')  
        title('Módulo Dieléctrico t')
```

```
pause
```

```
%Grafica de las p  
    figure(3);  
        plot(RR0(:, 1, a, b), RR0(:, 2, a, b), 'r*:', ...  
RR0(:, 1, a, b), RR0(:, 3, a, b), 'k+:', ...  
RR0(:, 1, a, b), 4.35*1e9/2, 'bo:')  
        xlabel('Fracción Volumétrica de la fibra') ,  
        ylabel('Coeficiente Elástico (*)23L y (+)13L, cte. hueso')  
        title('Módulo Elástico p')
```

end
end

disp(' Fin de las gráficas')
disp('En verde las del 1L, en negro las del 13L y en azul las del 2L')

Bibliografía

Auld, B.A., *Acoustic Field and Waves in Solids*, Vol. I, John Wiley & Sons New York, 1973.

Copson E.T., *An Introduction to the Theory of functions of a complex variable*, Oxford University Press, Oxford, 1944.

Fung, Y.C., *A First Course in Continuum Mechanics*, third edition, Prentice Hall, New Jersey, 1994.

Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos R., Sabina, F.J., (2001), *Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents-I. Elastic and hexagonal symmetry*. J. Mech. Phys. Solids 49, 1445-1492.

Guzelsu, N., Demiray, H., (1979), *Electromechanical Properties and Related Models of Bone Tissues*, J. Engng. Sci. Vol. 17, 813-851.

Heredia B.A., *Estudio de huesos antiguos y modernos: morfología, estructura y aportaciones al estudio de biomateriales*, México, 2000. (tesis).

Ikeda, T., *Fundamentals of Piezoelectricity*, Orxford University Press, Oxford, 1990.

Levi E., *Elementos de Mecánica del Medio Continuo*, Limusa-Wily, México, 1971.

Markushevich A., *Teoría de las Funciones Analíticas*, Vol. 2, Ed. Mir, Moscú, 1970.

Parton, V.Z., Kudryavtsev, B.A., *Engineering Mechanics of Composite Structures*. CRC Press, Boca Raton, FL., 1993.

Sabina F.J., Rodríguez-Ramos R., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., (2001), *Closed-form expressions for the effective coefficients of a fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents -II. Piezoelectric and hexagonal symmetry*. J. Mech. Phys. Solids 49, 1463-1479.

Bibliografía

Auld, B.A., *Acoustic Field and Waves in Solids*, Vol. I, John Wiley & Sons New York, 1973.

Copson E.T., *An Introduction to the Theory of functions of a complex variable*, Oxford University Press, Oxford, 1944.

Fung, Y.C., *A First Course in Continuum Mechanics*, third edition, Prentice Hall, New Jersey, 1994.

Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos R., Sabina, F.J., (2001), *Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents-I. Elastic and hexagonal symmetry*. J. Mech. Phys. Solids 49, 1445-1492.

Guzelsu, N., Demiray, H., (1979), *Electromechanical Properties and Related Models of Bone Tissues*, J. Engng. Sci. Vol. 17, 813-851.

Heredia B.A., *Estudio de huesos antiguos y modernos: morfología, estructura y aportaciones al estudio de biomateriales*, México, 2000. (tesis)

Ikeda, T., *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

Levi E., *Elementos de Mecánica del Medio Continuo*, Limusa-Wily, México, 1971.

Markushevich A., *Teoría de las Funciones Analíticas*, Vol. 2, Ed. Mir, Moscú, 1970.

Parton, V.Z., Kudryavtsev, B.A., *Engineering Mechanics of Composite Structures*. CRC Press, Boca Raton, FL., 1993.

Sabina F.J., Rodríguez-Ramos R., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., (2001), *Closed-form expressions for the effective coefficients of a fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents -II. Piezoelectric and hexagonal symmetry*. J. Mech. Phys. Solids 49, 1463-1479.

- Schulgasser, K. (1992), *Relationships between the effective properties of transversely isotropic piezoelectric composites*, J. Mech. Phys. Solids 40, 473-479.
- Serrano S., *Estructura y función del hueso normal*, Barcelona (pre print).
- Telega, J. J., *Piezoelectricity and homogenization. Application to biomechanics*, In: Maugin, G.A., ed Continuum Models and Discrete Systems 2, Longman, London, 1991.
- Valdiviezo O., *Propagación de Ondas Elásticas en Materiales Policristalinos*, México, 1993. (tesis).
- Zwicky R.C., Hiremath V.B., Newnham R., *Key Papers in Physics, Piezoelectricity* Published by American Institute of Physics, New York, 1992.