

01161  
9



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ANÁLISIS NO LINEAL DE DOMOS**

**T E S I S**

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA  
E S T R U C T U R A S**

P R E S E N T A :  
**JUAN CARLOS IBARRA CASTILLO**

DIRIGIDA POR:  
**ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## DEDICATORIA

**A MIS PADRES, por su apoyo incondicional para llegar a satisfacer mis más grandes aspiraciones.**

**A MIS HERMANOS, por brindarme su afecto, recordándoles "La base del éxito es la superación."**

**A MI NOVIA ROSY VILLA MEZA, por su apoyo, confianza y amor depositado en mi persona.**

**A MI PRIMA BLANCA ESTELA CASTILLO, por acordarse durante mi permanencia en el Distrito Federal.**

**AL ING. NEFTALI RODRÍGUEZ CUEVAS, por su gran ayuda y paciencia en la terminación de este trabajo.**

**AL ING. LEOPOLDO  
STEVENS AMARO, por su  
motivación a la presentación del  
presente trabajo.**

## **A G R A D E C I M I E N T O**

**A mis sinodales, por sus valiosas correcciones y comentarios al presente trabajo.**

<b>DR. GUSTAVO AYALA MILIAN</b>	<b>Presidente</b>
<b>ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS</b>	<b>Vocal</b>
<b>DR. OSCAR LÓPEZ BATIZ</b>	<b>Secretario</b>
<b>M. en I. OCTAVIO GARCÍA DOMÍNGUEZ</b>	<b>Suplente</b>
<b>DR. J. ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ</b>	<b>Suplente</b>

**Asimismo un agradecimiento muy en especial a los profesores:**

**ING. NEFTALI RODRÍGUEZ CUEVAS**  
**ING. OSCAR DE BUEN LÓPEZ DE HEREDIA**

**Por su enseñanza en el aula.**

**También agradezco al M. en I. OCTAVIO GARCÍA DOMÍNGUEZ, por su gran apoyo en todo lo necesario para la presentación de este trabajo.**

INDICE

Resumen  
Abstract

	Página
<b>Cap. 1 : Introducción</b>	1
<b>Cap. 2 : Tipos comunes de domos formados por estructuras reticulares de lámina</b>	3
<i>2.1 Generalidades</i>	3
<i>2.2 Clases de domos</i>	5
<i>2.2.1 Domos tipo lamella</i>	6
<i>2.2.2 Domos reticulares con enrejados discontinuos</i>	8
<i>2.2.3 Domo parabólico</i>	9
<i>2.2.4 Domos con miembros primarios, secundarios y terciarios</i>	10
<b>Cap. 3 : Cargas comunes en el análisis</b>	11
<i>3.1 Tipos de cargas (Acciones)</i>	11
<i>3.1.1 Acciones permanentes</i>	11
<i>3.1.2 Acciones variables</i>	11
<i>3.1.3 Acciones accidentales</i>	12
<i>3.2 Cargas debidas al viento</i>	13
<i>3.2.1 Determinación de la velocidad de diseño</i>	13
<i>3.2.2 Categorías de terrenos y clases de estructuras</i>	14
<i>3.2.3 Mapas de isotacas (Velocidad regional)</i>	14
<i>3.2.4 Factor de exposición</i>	15
<i>3.2.5 Factor de tamaño</i>	15
<i>3.2.6 Factor de rugosidad y altura</i>	15
<i>3.2.7 Factor de topografía</i>	16
<i>3.2.8 Presión dinámica de base</i>	16
<i>3.2.9 Análisis dinámico</i>	17
<i>3.2.10 Determinación de la velocidad de diseño</i>	18
<i>3.2.11 Cálculo de presiones y fuerzas</i>	18

3.2.11.1 <i>Presiones en la dirección del viento</i>	18
3.3 <i>Pruebas de presión en túneles de viento con diferentes capas límite</i>	19
3.3.1 <i>Discusión</i>	21
3.4 <i>Comparación de los códigos de práctica usados en diferentes países</i>	28
3.5 <i>Carga debida a la nieve</i>	34
3.5.1 <i>Densidad de la nieve</i>	34
3.5.2 <i>Efectos dinámicos debidos a la nieve</i>	36
3.5.3 <i>Carga en el terreno contra cargas en las cubiertas</i>	38
3.5.4 <i>Variación de la capa de nieve con la elevación</i>	39
3.5.5 <i>Relación entre el periodo de retorno y la carga máxima anual debida a la nieve</i>	40
3.5.6 <i>Coeficientes y distribuciones de la carga de nieve</i>	41
3.5.7 <i>Cargas debidas a nieve sobre la cubierta</i>	42
3.5.8 <i>Modelos de prueba para la acumulación de nieve</i>	44
3.6 <i>Cargas aplicadas para el análisis de algunas estructuras importantes en el mundo</i>	45
3.6.1 <i>Domo para las albercas del centro de diversiones Swindom en Inglaterra</i>	45
3.6.2 <i>Poliedro de Caracas (Domo geodésico)</i>	48
<b>Cap. 4 : Análisis estructural de domos</b>	50
4.1 <i>Domos tipo lamella</i>	50
4.1.1 <i>Análisis de elementos mecánicos</i>	51
4.1.2 <i>Ecuaciones</i>	52
4.2 <i>Domos reticulares tridireccionales</i>	57
4.2.1 <i>Inestabilidad de un anillo rígido discontinuo</i>	57
4.2.2 <i>Inestabilidad de una junta de discontinuidad en un domo con juntas de articuladas</i>	60
4.3 <i>Domos formados por miembros primarios, secundarios y terciarios en su arreglo estructural</i>	62
4.3.1 <i>Métodos analíticos</i>	62
4.4 <i>Análisis por la teoría de la membrana</i>	67
4.5 <i>Domos geodésicos</i>	69
4.5.1 <i>Precedentes históricos</i>	69
4.5.2 <i>Domos geodésicos tipo Crystogon</i>	72
4.5.3 <i>Domo geodésico Polyframe</i>	72



8.5.2 <i>Modelado de las conexiones</i>	114
8.6 <i>Modelos de conexiones</i>	115
8.6.1 <i>Modelo polinomial</i>	115
8.6.2 <i>Modelo B-Spline</i>	115
8.6.3 <i>Modelo exponencial</i>	116
8.7 <i>Modelos de conexión para marcos espaciales</i>	116
8.8 <i>Matriz de rigidez tangente para conexiones flexibles</i>	117
8.9 <i>Método de solución</i>	121
8.10 <i>Ejemplos numéricos</i>	123
8.10.1 <i>Marcos planos</i>	123
8.10.2 <i>Análisis elasto - plástico de un marco portal con juntas flexibles</i>	124
8.11 <i>Pandeo súbito (elástico) en el comportamiento de un marco de dos aguas</i>	126
8.12 <i>Marcos espaciales</i>	128
8.12.1 <i>Comportamiento con grandes desplazamientos elásticos de un marco en cantiliver con soporte flexible</i>	128
8.12.2 <i>Análisis elasto - plástico de un marco espacial parcialmente restringido</i>	128
<b>Cap. 9 : Consideraciones comunes de diseño y revisión</b>	<b>130</b>
9.1 <i>Consideraciones para la elección de un determinado tipo de estructura</i>	130
9.2 <i>Elección del tipo de estructura</i>	130
9.3 <i>Detalles y arreglo general de la estructura</i>	130
9.4 <i>Cargas de diseño</i>	131
9.5 <i>Estabilidad</i>	132
9.5.1 <i>Pandeo general</i>	132
9.5.2 <i>Pandeo local</i>	133
9.6 <i>Otros factores de diseño</i>	134
9.7 <i>Desplazamientos</i>	134
9.8 <i>Efectos aerodinámicos (formación de vórtices) y fatiga</i>	134
9.9 <i>Efectos provocados por temperatura</i>	134
9.10 <i>Pruebas de estructura</i>	135
9.11 <i>Propuesta para el análisis no lineal</i>	135
<b>Cap. 10 : Ejemplo de aplicación</b>	<b>137</b>
10.1 <i>Descripción del domo</i>	137
10.2 <i>Consideraciones para el análisis del domo</i>	139
10.2.1 <i>Consideraciones</i>	139

---

10.2.2	<i>Area tributaria por nudo</i>	139
10.2.3	<i>Intensidades de las cargas</i>	140
10.2.3.1	<i>Carga viva</i>	140
10.2.3.2	<i>Carga muerta</i>	140
10.2.3.3	<i>Carga debida a la nieve</i>	140
10.2.3.4	<i>Carga debida al viento</i>	140
10.2.4	<i>Combinaciones de carga</i>	141
10.2.5	<i>Análisis efectuados</i>	141
10.2.5.1	<i>Análisis común del domo (con tubos tipo D2)</i>	142
10.2.5.2	<i>Análisis no lineal del domo</i>	143
10.2.5.3	<i>Comparación de resultados entre el análisis no lineal y el análisis común</i>	145
10.2.5.4	<i>Carga crítica del domo</i>	146
10.2.6	<i>Análisis del domo al utilizar dos tubos de dimensiones diferentes</i>	147
10.2.7	<i>Una alternativa de solución al domo anterior</i>	152
10.2.8	<i>Análisis común del domo</i>	153
10.2.9	<i>Análisis no lineal del domo</i>	154
10.2.10	<i>Comparación de resultados entre el análisis no lineal y el análisis común</i>	156
10.2.11	<i>Carga crítica del domo</i>	157
10.3	<i>Comentarios a los resultados</i>	158

**CONCLUSIONES**

**REFERENCIAS**

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un procedimiento de análisis no lineal de un domo.

En la práctica los domos se construyen con barras simétricas huecas de pared delgada ( tubos ), por otro lado no se dispone de métodos de análisis confiables para determinar las acciones internas y predecir el comportamiento del mismo. Debido a las complejidades asociadas con este tipo de estructuras; se clasifican dentro de las más difíciles de analizar.

En este trabajo se tratan dos tipos de no linealidades que ocurren en problemas estructurales. El primer tipo de no linealidad se debe a los materiales y es debido a la no linealidad elástica o viscoelástica del material estructural. El segundo tipo depende de la geometría no lineal y esto ocurre cuando los desplazamientos son lo suficientemente grandes para causar cambios significativos en la geometría de la estructura, de tal manera que las ecuaciones de equilibrio se plantean para la configuración deformada.

El análisis antes descrito fue aplicado a un domo geodésico con un diámetro de 62.36 m. y una altura cubierta de 18.6 m., que cubre un área 3054.33 m<sup>2</sup>. Este domo está construido a base de secciones tubulares huecas de aluminio con un diámetro exterior de 6.0325cm y un diámetro interior de 5.7023 cm.

Se hace un análisis comparativo del comportamiento del domo al realizar un análisis común y un análisis no lineal, esto; al utilizar diferentes diámetros en las barras de aluminio del mismo; también se calcula el valor de la carga crítica ( $P_{cr}$ ) aplicada en el centro del domo, que lleva al pandeo local a la estructura.

Para efectuar el análisis, se utilizó el programa de análisis y diseño de estructuras STAAD III versión 21.2; finalmente, se presenta una alternativa de solución que podría ser empleada. Se sintetizan los resultados de los análisis en Histogramas de Eficiencia de trabajo de las barras del domo.

## ABSTRACT

This work presents a nonlinear analysis of framed domes.

In practice, the domes are constructed using symmetrical thin walled close sections, such as pipes, on the other hand, analysis methods for determining internal actions and predicting the behavior of domes are not available. The complexities associated with this kind of structures are some of the most difficult to analyze.

Two types of nonlinearities that occur in structural problems are treated. The first type of nonlinearity is due to the materials and to the nonlinearly elastic and plastic or viscoelastic of the structural material. The second type is referred to as geometric nonlinearity and occurs when the deflections are large enough to cause significant changes in the geometry of the structure, so that the equations of equilibrium must be formulated for the deformed configuration.

The analysis described was applied to a geodesic dome 62.36 meters in diameter and 18.60 meters high, that covers an area of 3054.33 square meters. This dome was constructed with members aluminium pipes, The pipes forming the dome have a external diameter 6.0325 cm. and internal diameter 5.7023 cm.

The nonlinear analysis of the dome and commonly analysis (linear) used are compared using several pipe diameters on it, at the same time, for this structure, the critical value of the concentrated load  $P_{cr}$ , applied at the center of the dome has been evaluated. The STAAD program for the analysis and design of structures, is used to find the internal actions and the displaced configuration of the dome.

An alternative simplified solution is presented which might be used. The results of the analysis are presented recurring to efficiency hostograms.

**CAPÍTULO 1****INTRODUCCIÓN**

Las estructuras espaciales diseñadas para cubrir grandes claros han incrementado su popularidad, debido a que gracias a ellas se puede disponer de amplias áreas, sin el empleo de columnas. La aplicación de estos sistemas estructurales se desarrollaron para salas de exhibición, estadios deportivos, así como para diferentes tipos de edificios industriales. En adición a esto, se puede decir que son estructuras ligeras y de bajo costo, para formar sistemas de techumbres o para otros propósitos, como pueden ser refuerzo para sistemas de losa en la construcción de concreto reforzado. En cualquier caso, esto hace que el costo de manufactura disminuya.

Se ha visto en trabajos previos, referentes a sobre esfuerzos secundarios en armaduras planas, que el comportamiento de una junta rígida, con los programas de software disponibles, estos esfuerzos secundarios se obtienen de manera directa. De lo anterior, se puede esperar que para incluir las imperfecciones de excentricidades en los extremos y curvaturas iniciales en el análisis de estos esfuerzos secundarios, estos pueden aumentar o disminuir de acuerdo a los valores relativos de tales imperfecciones. Existen en la literatura algunos trabajos que se han desarrollado y que están disponibles, donde se estudian los esfuerzos adicionales provocados por efectos no lineales. En estos trabajos se hacen notar que los esfuerzos secundarios pueden cambiar significativamente las condiciones en los extremos de las barras y por consiguiente, cambiar el comportamiento de la carga ante los desplazamientos axiales. Ello puede llevar a un comportamiento tipo frágil a partir de un comportamiento más dúctil.

Otros trabajos estudian el comportamiento de la distribución de esfuerzos provocados por fuerzas alrededor de la junta, los cuales han sido desarrollados para excentricidades, tanto positivas como negativas.

En particular, la construcción con tubulares soldados, ha recibido una gran atención.

Muchas investigaciones se han enfocado a la determinación de los esfuerzos secundarios causados por los momentos de segundo orden provocados por varias causas. Existe información, acerca de los efectos no lineales, en la rigidez de sistemas estructurales planos o espaciales que consideran esta parte.

De lo anterior se puede esperar que si la rigidez de un miembro se modifica por tales efectos, entonces el comportamiento de una estructura espacial apoyada sobre algunos soportes, pueda cambiar en comparación con la misma estructura, cuando la intersección de miembros es concéntrica.

El propósito de este trabajo es investigar los efectos no lineales en el comportamiento de estructuras espaciales.

La investigación muestra que los efectos no lineales son significativos en la determinación de la capacidad de carga de la estructura; y que también, juegan un papel muy importante en la determinación de su rigidez.

Finalmente, el comportamiento de estructuras es generalmente sensible a la naturaleza y magnitud de los efectos no lineales, los cuales surgen inevitablemente. En este trabajo se muestran los resultados obtenidos de analizar un domo con las características que se indican en el capítulo 10 del mismo, se hace un análisis comparativo del comportamiento del domo al realizar un análisis común y un análisis no lineal; se sintetizan los resultados de los análisis en histogramas de eficiencia de trabajo de las barras del domo.

## CAPÍTULO 2

TIPOS COMUNES DE DOMOS FORMADOS POR ESTRUCTURAS  
RETICULARES DE LÁMINA*2.1 Generalidades acerca de estructuras espaciales reticulares*

Los constructores de todos los tiempos han afrontado el problema de cubrir claros o espacios de gran luz, lo cual se ha visto siempre limitada por las restricciones impuestas por los materiales en uso, y los conocimientos propios de cada época. En las cúpulas y cubiertas con forma de bóvedas de las iglesias primitivas, integradas por dovelas de piedra o de ladrillo, sujetas a compresión, se conseguía encontrar con bastante exactitud superficies que podrían llamarse, antifuniculares de las cargas, por analogía con las directrices de los arcos. Constituyen ejemplos clásicos de las primeras conquistas en este terreno; que trabajan según lo que hoy en día se denomina estado de esfuerzos de membrana, compatible aún con láminas curvas de gran espesor.

De lo anterior, se concluye que en el análisis y clasificación de diversos tipos de estructuras construidas para cubrir grandes claros, han sido lo más exhaustivo posible, aún cuando no es factible incluir todas las estructuras conocidas, la capacidad creadora del ingenio humano ha generado formas novedosas, las cuales podrían ser clasificadas, una vez que se conozcan los resultados obtenidos en su construcción. Puede considerarse como estructuras de grandes claros aquellas mayores de 25 m. La razón de buscar estructuras para grandes claros mediante domos y de otro tipo de estructuras, se debe más que nada a la necesidad de encontrar la estructura más eficiente que pueda cubrir grandes áreas y que distribuya de manera más uniforme la energía de la deformación en todos los elementos estructurales, para aprovechar al máximo la capacidad de los materiales de absorber esa energía de deformación, al generar esfuerzos y desplazamientos.

Por ello es necesario buscar un tipo de cubierta que resulte eficiente para soportar las diferentes sollicitaciones, con márgenes de eficiencia aceptables, sin que se presenten problemas de inestabilidad de la estructura.

Una ventaja importante de las estructuras espaciales (especialmente los domos) es su facilidad de construcción, ya que los cascarones reticulares,

consisten de miembros tipo barras similares entre sí, los que requieren de un procedimiento de fabricación preciso, que facilite su manejo y su conexión.

A continuación se mencionan algunas de las ventajas de las estructuras espaciales:

- a) La cantidad de material es más baja comparada con la requerida por otras estructuras y el trabajo de montaje es más fácil
- b) Se pueden construir estructuras estéticamente más bellas
- c) Permiten cubrir grandes claros.

Se clasifican en este trabajo con base principalmente en su comportamiento estructural, las estructuras reticulares formadas por barras rectas conectadas en el espacio en cualquier dirección, recubiertas por elementos laminares que no participan del trabajo estructural, son estructuras espaciales conocidas como domos.

Las estructuras espaciales surgen al tratar de resolver el problema que se presenta en sistemas reticulares formados por estructuras planas, en los cuales no se considera el trabajo tridimensional de la estructura; al apoyar lateralmente a las estructuras planas, mediante miembros normales al plano, se evitan problemas de inestabilidad. Las estructuras tridimensionales, por su lado, transmiten las solicitaciones que actúan sobre la cubierta, en todas las direcciones hacia los apoyos. En las estructuras espaciales, se aprovechan las características tridimensionales de la cubierta, para reducir el nivel de sollicitación de cada miembro, y disminuir así la cantidad del material necesario, sin incrementar el riesgo de inestabilidad de la cubierta.

Aparentemente, las primeras estructuras espaciales tipo Lamella, fueron construidas por Siegel (ref. 7), durante la segunda década de este siglo, como estructura falsa para la construcción de cascaras de concreto reforzado; posteriormente se desarrollaron dos tipos de bóvedas cilíndricas, en la Gran Bretaña, durante los años 50, para formar un sistema estructural portante, con una cubierta prefabricada.

Torroja (ref. 8) hizo uso de cascarones reticulares en dos de sus estructuras. El primero en el frontón Recoletos, construido en 1935, donde los techos ligeros en los cascarones de concreto reforzado, formaron una retícula de triángulos equiláteros; posteriormente construyó un cascaron múltiple que cubrió los laboratorios de concreto reforzado, construido en 1948.

Nervi (ref. 9) utilizó Lamellas para sus hangares, construidos entre 1935 y 1940.

También a principios de este siglo se construyeron cúpulas de acero estructural tipo Schwedler, formadas por armaduras meridionales y en paralelo, que aún se emplean para cubrir grandes claros.

Las estructuras tridimensionales han permitido en varias partes del mundo construir grandes cúpulas para responder a las diferentes necesidades, con arquitectura moderna y sobre todo para la solución de proyectos de recintos con concurrencia masiva de personas. Algunos usos que se le han dado a estas estructuras son:

- a) Grandes centros comerciales
- b) Auditorios de gran capacidad
- c) Espacios destinados a la industria.

Una alternativa común que se ha desarrollado desde principios del siglo, consiste en emplear Lamellas de acero, las cuales ofrecen la posibilidad de cubrir grandes claros, que pueden alcanzar longitudes libres superiores a 200 m.

## *2.2 Clases de domos*

El domo se utiliza desde hace siglos; permite al constructor cubrir áreas considerables por el uso de materiales en compresión sin el beneficio del análisis. Tales domos son por supuesto muy pesados, por ejemplo la catedral de St. Paul en Londres, tiene un peso de  $4886.8 \text{ Kg/m}^2$ ; los claros que se pueden cubrir con estas estructuras están limitados por la magnitud de las fuerzas debidas a su peso propio.

En este siglo, el domo ha encontrado una considerable aceptación para cubrir estadios, vestíbulos y lugares de reunión.

Domos de concreto reforzado, marcos o cascarones, han sido exitosamente empleados, pero desde el uso de hierro y el acero estructural en el siglo XIX, y el desarrollo de la mecánica estructural se ha logrado una mejoría en la construcción de domos de grandes claros.

Makowski (1962), al revisar algunos domos reticulares ha clasificado estas estructuras y ha citado muchos ejemplos notables, comenzando con el de Brunet de 38.71 m de diámetro en París, construido en 1811.

Posteriormente se han logrado salvar claros mucho más grandes con materiales de poco peso. Un ejemplo reciente ha sido discutido por Loo (1965) con claro de 68.58 m con un peso promedio de 35.67 Kg/m<sup>2</sup>.

### *2.2.1 Domos tipo Lamella*

La búsqueda de mejores soluciones, condujo a la construcción de cúpulas tipo Lamella como sucedió en la Cúpula de Descubrimiento en Londres (ref. 1), donde se recurrió a módulos triangulares, formados por armaduras de aluminio.

En los últimos años, en los Estados Unidos se han construido domos con claros que van desde los 9.144 m hasta 182.88 m, mediante muchas variaciones para cada tipo de domo; se describen para este estudio dos clases generales de domos Lamella, unos con conexiones articuladas y otros con conexiones rígidas. Esta distinción hace la diferencia entre dos aproximaciones analíticas para el diseño de domos Lamella. Las juntas de domos de madera y acero se consideran como nudos articulados.

Los métodos de análisis serán discutidos mas adelante para ambas clasificaciones consideradas en este trabajo.

Muchos ejemplos de domos con uniones articuladas han aparecido en los Estados Unidos. Los métodos de análisis varían e incluyen técnicas de pruebas en modelos, analogía de la membrana porosa y soluciones a partir de armaduras espaciales. De los tres métodos el modelo de pruebas es el más apropiado. Serán domos del tipo 1 aquellos resueltos con conexiones articuladas.

Algunas variaciones en los domos de nodos articulados se muestran en las Figs. 2.1a - 2.1d. Los entramados mostrados en las figuras son del tipo 1 y son la forma más común de construir (ref. 3). El domo más grande del tipo 1 construido a la fecha tiene un diámetro aproximado de 73.15 m.

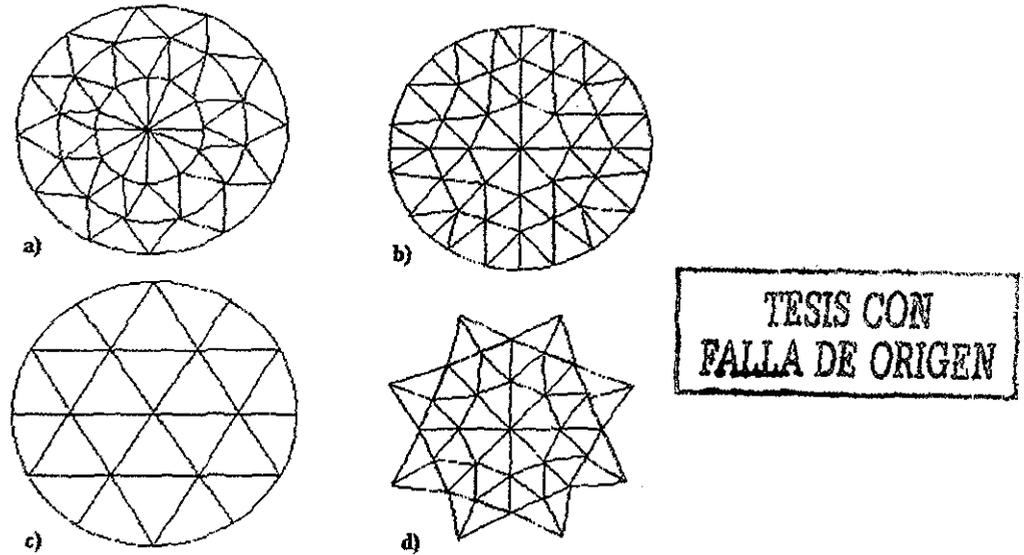


FIG 2.1 Tipos de domos Lamella

Existen algunos domos del tipo 1 (figuras 2.1a - 2.1d) el gimnasio St. Joseph, Missouri; iglesia, Fort Lauderdale, Florida; auditorio Frederick, Oklahoma; estadio deportivo, Houston, Texas (ref. 3).

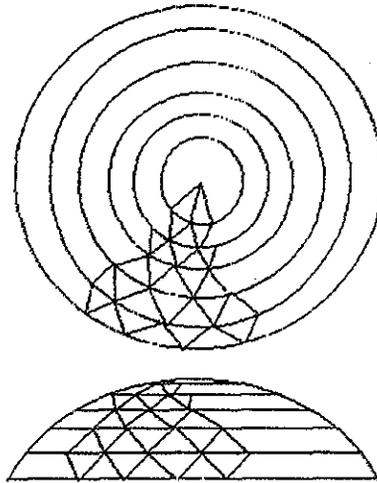
El domo del auditorio, Green Way, Wisconsin<sup>(3)</sup> está construido a base de conexiones rígidas y se identificarán como del tipo 2; en este domo las instalaciones están soportadas sobre columnas conectadas radialmente y fijadas tangencialmente al arco exterior. En este domo, las variaciones de temperatura desplazan la columna hacia la parte exterior; esta acción originó algunos problemas durante el montaje de las columnas.

La preparación del análisis al domo de Houston fue una experiencia interesante desde el punto de vista estructural. Se prepararon 3 modelos de prueba, 2 de los cuales al ser instrumentados indicaron que el análisis para los modelos, tenían un error menor al 20 por ciento al comparar con una solución teórica, tal error fue parcialmente debido, a la fabricación inexacta del modelo y a la instrumentación del mismo (ref. 3).

El tercer modelo a escala representó la superficie del estadio y se sometió a pruebas en túnel de viento, se hicieron 48 análisis diferentes y las fuerzas de viento idealizadas para aplicaciones de diseño a la estructura real, resultaron estar de acuerdo en los datos de la ASCE. Las condiciones de carga fueron: de  $73.3 \text{ Kg/m}^2$  para carga de nieve y se aceptó una velocidad de viento igual a  $209.17 \text{ Km/h}$ .

### 2.2.2 Domos reticulares con enrejados discontinuos

Todos los estudios (ref. 4), desprecian el efecto de las discontinuidades en las uniones de las subdivisiones regulares de un domo. La irregularidad del armazón estructural incrementa los esfuerzos, generando subestimaciones severas en las fuerzas que actúan en los miembros (ref. 4).



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.2: Reticula de un domo simétrico

Este tipo de domos aparecen en la figura 2.2; presentan un problema de estabilidad local, y regiones de discontinuidad en el diseño de una malla regular. El comportamiento de un arco de discontinuidad depende de detalles estructurales. Un estudio del pandeo súbito de los arcos discontinuos articulados a las diagonales basado en pruebas recomienda emplear conexiones de juntas con pasadores, aplicables a domos con malla común. Los resultados (ref. 4) condujeron al uso de conexiones tipo Triodetic, que se presentará más adelante.

Un estudio realizado en la Universidad de Waterloo examinó los problemas de estabilidad asociados con un domo simétrico con malla triangular, de capa sencilla, de tipo arcos y espirales, en el cual algunas diagonales, a intervalos

regulares, se apoyan en sus intersecciones con un arco horizontal. Dicho arco se conoce **Arco de Discontinuidad**.

Un domo con la forma indicada en la figura 2.2, se probó en la Universidad de Waterloo (ref. 4). El domo se construyó con un sistema de conexiones Triodetic, que desarrolla una parte grande de rigidez a la flexión en las juntas. Este fue probado bajo presiones externas del viento. Cuando la malla era relativamente fina, con un domo esbelto, la rigidez a la flexión fue de mayor importancia y los valores calculados para la falla súbita de la junta fueron conservadores. El domo falló en un modo asimétrico, con una presión de  $9.64 \text{ Kg/cm}^2$ . El modo de falla muestra que la inestabilidad fue iniciada por pandeo súbito en el arco exterior de discontinuidad bajo esta presión; los valores calculados están de acuerdo con el hecho de que la falla debía ser asimétrica, pero también indicaron que el domo con uniones articuladas hubiera fallado con una presión mucho menor a la obtenida durante las pruebas.

Por lo tanto para poder lograr mayor rigidez del domo es recomendable emplear juntas rígidas.

### 2.2.3 Domo parabólico

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Se ha estudiado (ref. 23) la estabilidad del domo parabólico, del tipo mostrado en la figura 2.3. Para este domo se hizo un análisis iterativo no - lineal, el valor crítico de la carga concentrada  $P$ , aplicado en el centro del domo, se estimó igual a  $P_{cr} = 181509.2 \text{ Kg}$ .

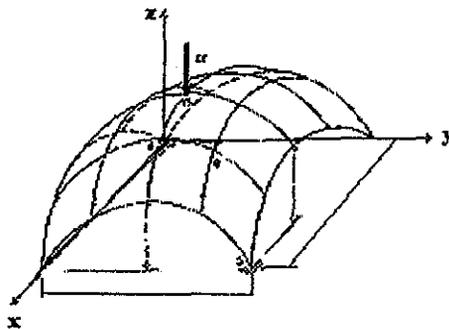
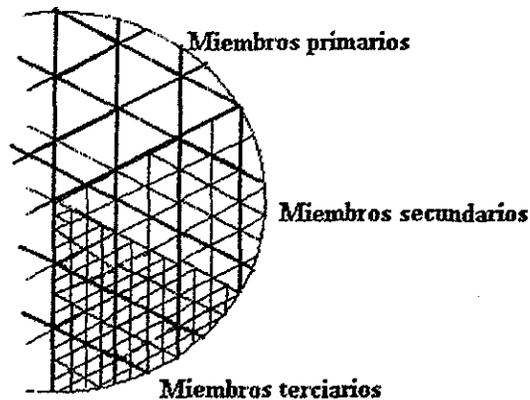


Figura 2.3: Domo parabólico

El pandeo del domo ocurre principalmente por exceso de desplazamiento en los arcos del domo, antes de que el material sea sobreesforzado más allá del límite elástico.

### 2.2.4 Domos con miembros primarios, secundarios y terciarios en su arreglo estructural (tipo triodectic)

Los detalles para la forma de este tipo de domo se muestran en la figura 2.4. Este sistema recurre a entramados, usados en la construcción de domos.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.4: Domo con elementos primarios, secundarios y terciarios

Este sistema de entramados está formado por tres juegos de nervaduras, interconectadas aproximadamente a 60 grados una de otra. Estas nervaduras, pueden formar círculos en domos esféricos.

## CAPÍTULO 3

### CARGAS COMUNES EN EL ANÁLISIS

Antes de iniciar el análisis de la estructura seleccionada en este trabajo, es necesario, conocer las sollicitaciones que actuarán en la misma (ref 15).

#### *3.1 Tipos de cargas (Acciones)*

Para fines de diseño, generalmente se proporciona un sistema de cargas y/o deformaciones, el cual se supone es equivalente a las sollicitaciones que se espera se presenten en la estructura real. Éstas pueden ser cargas gravitacionales o accidentales. En el diseño de una estructura se debe considerar el efecto combinado de las acciones que tengan cierta probabilidad de actuar simultáneamente sobre dicha estructura.

Las acciones pueden ser de tres tipos:

##### *3.1.1 Acciones permanentes*

Son aquellas que obran de manera continua sobre la estructura y cuya intensidad puede considerarse que no varía con el tiempo. Comprenden:

- a) *Carga muerta*: incluye tanto el peso propio de los elementos estructurales como el peso de las instalaciones y equipo que ocupen una posición fija y permanente en la construcción, así como los pesos estimados de los elementos que posteriormente puedan colocarse en forma permanente
- b) Empuje estático de tierras, granos y líquidos
- c) Desplazamientos diferenciales permanentes en los apoyos.

##### *3.1.2 Acciones variables*

Son las que actúan en la estructura con una intensidad variable en el tiempo. Comprenden:

- a) *Carga viva*: representa las fuerzas que actúan en la construcción y no tienen carácter permanente

- b) Efectos causados en la estructura por los cambios de temperatura y contracciones
- c) Deformaciones impuestas y hundimientos diferenciales que tengan una intensidad variable en el tiempo
- d) Efectos de operación de maquinaria y equipo.

### 3.1.3 Acciones accidentales

Éstas acciones pueden alcanzar valores significativos durante lapsos breves de tiempo, incluyen:

- Sismo
- Viento
- Cargas de montaje
- Otras acciones accidentales como nieve, explosiones, incendios y otros agentes que pueden ocurrir en casos extraordinarios.

Las acciones se clasifican de acuerdo con la duración con la que obran sobre la estructura con su intensidad máxima.

En el reglamento para construcciones del D.F., las acciones se clasifican en permanentes, variables y accidentales. Los criterios generales de determinación de estas acciones son las siguientes:

Las acciones permanentes y variables tienen distribuciones de frecuencia como la indicada en la forma aproximada de la figura 3.1 y en la cual se han señalado tres valores de las intensidades de las acciones:

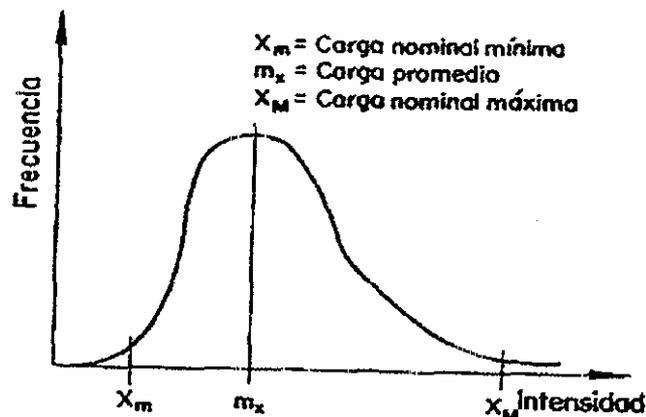


Figura 3.1: Distribución de frecuencias.

- a) Una intensidad nominal máxima,  $X_M$ , cuya probabilidad de ser excedida es pequeña, es decir, que corresponde a un valor máximo de carga

- b) Una intensidad nominal mínima,  $X_m$ , cuya probabilidad de no ser alcanzada es pequeña, o sea, que corresponde a un valor mínimo de carga
- c) La intensidad nominal mediana,  $m_x$ , que corresponde a una probabilidad de excedencia del 50 por ciento.

La carga viva está especificada comúnmente en los reglamentos de construcción, como una carga repartida uniformemente, con las distintas intensidades de acuerdo con el uso considerado. Para acciones variables, además de las tres condiciones anteriores, se considera una intensidad instantánea ( $W_a$ ) que se utiliza en las combinaciones que incluyen acciones accidentales o más de una acción variable. El valor máximo probable en el lapso en que pueda presentarse una acción como el sismo. Tiene valores comprendidos entre la intensidad media  $M_x$ ; y la intensidad máxima  $X_m$  (fig. 3.1).

### **3.2 Cargas debidas al viento**

En la República Mexicana, existe ya la normatividad para estructuras editada por el Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE), y la Comisión Federal de Electricidad (CFE), a través del Manual de Diseño de Obras Civiles C.2.3.

#### **3.2.1 Determinación de la velocidad de diseño, $V_D$ (ref. 31)**

La velocidad de diseño,  $V_D$ , es la velocidad a partir de la cual se calculan los efectos sobre una estructura o sobre un componente de la misma. Para fines de diseño estructural de estructuras espaciales, la velocidad regional del viento,  $V_R$ , se puede tomar de los mapas de isotacas o del tomo III de ayudas de diseño (ref. 31), que se presentan en una tabla con las principales ciudades del país y sus correspondientes velocidades regionales para diferentes periodos de retorno. En las figuras 1.2 a 1.4 de (ref. 31), se muestran los mapas de isotacas regionales correspondientes a los periodos de recurrencia de 200, 50 y 10 años respectivamente y en la figuras 1.6 y 1.7, de la misma referencia, se muestran los mapas de isotacas regionales para periodos de retorno de 2000 y 100 años. Estos últimos datos se usarán solo si se demuestra la necesidad de emplear velocidades de retorno diferente a los 200, 50 y 10 años. En la figura I.3, se muestra el mapa de isotacas para un periodo de retorno de 50 años (ref. 31).

Cuando se tengan registros confiables, que indiquen la existencia de velocidades diferentes a las propuestas, se podrán emplear dichas velocidades.

La velocidad de diseño,  $V_D$ , en Km/hr, se obtendrá de acuerdo con la ecuación:

$$V_D = F_I F_\alpha V_R \quad (3.1)$$

donde

$F_I$  : Factor adimensional que depende de la topografía del sitio

$F_\alpha$  : Factor adimensional que toma en cuenta el efecto combinado de las características de exposición locales, del tamaño de la construcción y de la variación de la velocidad con la altura

$V_R$  : Velocidad regional en el sitio donde se construirá la estructura.

La velocidad regional,  $V_R$ , y factores  $F_\alpha$  y  $F_I$  se definen en las normas antes citadas.

### 3.2.2 Categorías de terrenos y clases de estructuras

Tanto en el análisis estático como en el dinámico intervienen factores que dependen de las condiciones topográficas y de la exposición local del sitio donde se desplantará la estructura, así como del tamaño de la misma. Por lo tanto, a fin de evaluar correctamente dichos factores, se establecen clasificaciones de carácter práctico. En la tabla 1.1 (ref. 31) se consideran cuatro categorías de terrenos en función del grado de rugosidad que se presenta alrededor de la zona de desplante. La tabla 1.2 (ref. 31) divide a las estructuras y a los elementos que forman parte de ellas en tres clases, de acuerdo con su tamaño, en la dirección del análisis el terreno inmediato deberá presentar la misma rugosidad, cuando menos en una distancia denominada longitud mínima de desarrollo, como se indica en la tabla 1.1 (ref. 31). Cuando no exista esta longitud mínima, el factor de exposición  $F_\alpha$ , deberá modificarse. En este caso el proyectista podrá seleccionar entre las categorías del terreno que se encuentren en una dirección del análisis dada, la que provoque los efectos más desfavorables y determinar el factor de exposición para tal categoría o seguir un procedimiento analítico más refinado, a fin de corregir el factor de exposición como el que se muestra en 4.6.3 (tomo II, ref. 31).

### 3.2.3 Mapas de isotacas (Velocidad regional)

La velocidad regional del viento,  $V_R$ , es la máxima velocidad media probable a presentarse con un cierto periodo de recurrencia en una zona determinada del país. En el mapa de isotacas de la figura 1.3 (ref. 31) la velocidad se refiere a las condiciones homogéneas que corresponden a una altura de 10 metros

sobre la superficie del suelo en el terreno plano (categoría 2 según la tabla 1.1); no considera las características de rugosidad locales del terreno ni la topografía específica del sitio. Así mismo, dicha velocidad se asocia con ráfagas de 3 segundos y toma en cuenta la posibilidad de que se presenten vientos debidos a huracanes en las zonas costeras.

Para determinar  $V_R$ , se debe tomar en cuenta la localización geográfica del sitio.

### 3.2.4 Factor de exposición

El coeficiente  $F_\alpha$  refleja la variación de la velocidad del viento con una altura  $Z$ . Así mismo, considera el tamaño de la estructura y las características de exposición; se evalúa con la expresión:

$$F_\alpha = F_C F_{rz} \quad (3.2)$$

donde:

$F_C$  : Factor adimensional que determina la influencia del tamaño de la estructura

$F_{rz}$  : Factor adimensional que toma en cuenta la variación de la velocidad del viento con una altura  $Z$  en función de la rugosidad del terreno de los alrededores.

### 3.2.5 Factor de tamaño

El factor de tamaño,  $F_C$ , es el que toma en cuenta el tiempo en el que la ráfaga del viento actúa de manera efectiva sobre la estructura. Al considerar la clasificación de estructuras según su tamaño (Tabla 1.2.3-2) (ref. 31), este factor puede determinarse de acuerdo con la tabla 1.1.3 (ref. 31).

### 3.2.6 Factor de rugosidad y altura

El factor de rugosidad y altura,  $F_{rz}$ , establece la variación de la velocidad del viento con la altura  $Z$ . Dicha variación está en función de la categoría del terreno y del tamaño de la estructura; se obtiene de acuerdo a las expresiones siguientes:

$$F_{rz} = 1.56 \left[ \frac{10}{\delta} \right]^\alpha \quad \text{Si } Z \leq 10 \quad (3.3)$$

$$F_{rz} = 1.56 \left[ \frac{Z}{\delta} \right]^\alpha \quad \text{Si } 10 < Z < \delta \quad (3.4)$$

$$F_{rz} = 1.56 \quad \text{Si } Z \geq \delta \quad (3.5)$$

donde:

$\delta$  : Altura máxima en metros a partir del nivel de desplante, por encima de la cual la variación de la velocidad del viento no es importante y se puede mantener constante; a esta altura se le conoce como altura gradiente

$\alpha$  : Exponente que determina la forma de la variación de la velocidad del viento con la altura  $z$ , adimensional.

Los valores de los coeficientes  $\alpha$  y  $\delta$  están en función de la rugosidad del terreno (Tabla 1.1) (ref. 31) y del tamaño de la estructura (Tabla 1.2) (ref. 31). En la tabla 1.4 (ref. 31) se muestran los valores recomendables para estos coeficientes.

### 3.2.7 Factor de topografía

Este factor toma en cuenta el efecto topográfico local del sitio en donde se desplantará la estructura. Así, por ejemplo, si la construcción se localiza en las laderas o cimas de colinas o montañas de altura importante con respecto al nivel general del terreno de los alrededores, es muy probable que se generen aceleraciones del flujo del viento y, por consiguiente, deberá incrementarse la velocidad regional.

En la tabla 1.5 (ref. 31) se muestran los valores que se recomiendan, con base en la experiencia, para el  $F_T$  de acuerdo con las características topográficas del sitio.

En casos críticos, este factor puede obtenerse con alguno de los siguientes procedimientos:

- 1) Experimentos a escala en túneles de viento
- 2) Mediciones realizadas directamente en el sitio
- 3) Empleo de ecuaciones basadas en ensayos experimentales como las que se citan en (ref. 31).

Expertos en la materia deberán justificar y validar ampliamente los resultados con cualquiera de estos procedimientos.

### 3.2.8 Presión dinámica de base

Cuando el viento actúa sobre un obstáculo, genera presiones sobre la superficie que varían según la intensidad de la velocidad y la dirección del viento. A esto se le conoce como presión dinámica de base y se evalúa a partir de:

$$q_z = 0.0048 G V_D^2 \quad (3.6)$$

donde:

G : Factor adimensional de corrección por temperatura y por altura con respecto al nivel del mar

$V_D$  : Velocidad de diseño, en Km/hr, definida en 3.2.1 (ref. 31)

$q_z$  : Presión dinámica de base a una altura Z sobre el nivel del terreno, en  $Kg/m^2$ .

El factor de 0.0048 corresponde a un medio de la densidad del aire, y el factor G se obtiene de la expresión:

$$G = \frac{0.39\Omega}{273 + \tau} \quad (3.7)$$

donde:

$\Omega$  : Presión barométrica, en mm de Hg

$\tau$  : Temperatura ambiental en °C.

En la tabla 1.1.3-7 se presenta la relación entre los valores de altitud  $h_m$ , en metros sobre el nivel del mar (msnm), y la presión barométrica,  $\Omega$ .

La presión actuante sobre una estructura determinada,  $p_z$ , en  $Kg/m^2$ , se obtiene al tomar en cuenta principalmente su forma y esta dada, de manera general, por la ecuación:

$$p_z = C_p q_z \quad (3.8)$$

donde:

$C_p$  : Coeficiente de presión adimensional.

### 3.2.9 Análisis dinámico

Este procedimiento permite evaluar los empujes ocasionados por la interacción dinámica entre el flujo del viento y la estructura.

Se aplicará un análisis dinámico para calcular las cargas por viento que actúan sobre las estructuras sensibles a los efectos dinámicos, producidos por la turbulencia del viento (ref. 31). En particular, se aplicará a las estructuras que cumplan con alguna de las siguientes condiciones:

- 1)  $H/D > 0.5$  donde H es la altura total de la estructura y D la dimensión mínima de la base
- 2) El periodo fundamental de la estructura es mayor que un segundo.

### 3.2.10 Determinación de la velocidad de diseño

La velocidad de diseño  $V_D$ , se calculará con el mismo procedimiento definido en 1.1.2 (ref. 31), con base en la ecuación:

$$V_D = F_I F_\alpha V_R \quad (3.9)$$

en donde  $V_R$  es la velocidad regional de la ráfaga establecida en 1.1.4 (ref. 31) y los factores  $F_\alpha$  y  $F_I$  definidos en 1.1.5 y 1.1.8 (ref. 31) respectivamente, se evaluarán de acuerdo con las características del sitio donde se desplante la estructura. Sin embargo para análisis dinámico, el factor  $F_C$  y del cual es función  $F_\alpha$ , se tomará igual a 1.0 (ref. 31). Esta velocidad de diseño también se considerará en la revisión de la posible aparición de vórtices periódicos y problemas de inestabilidad.

### 3.2.11 Cálculo de presiones y fuerzas

#### 3.2.11.1 Presiones en la dirección del viento

La presión total en la dirección del viento se calculará con la expresión:

$$p_Z = F_g C_a q_Z \quad (3.10)$$

donde:

$F_g$ : Factor de amplificación dinámica de ráfagas

$C_a$ : Coeficiente de arrastre, adimensional; depende de la forma de la estructura

$q_Z$ : Presión dinámica de base en la dirección del viento,  $\text{Kg/m}^2$ , a una altura  $Z$ , en m, sobre el nivel del terreno, definida en 3.2.8.

#### Fuerzas en la dirección del viento

Las fuerzas que se generan en la dirección del viento sobre las estructuras se obtienen al multiplicar la presión  $p_Z$ , definida en 3.2.11.1, por el área tributaria  $A_Z$ , ( $\text{m}^2$ )

La fuerza total,  $F$ , sobre la estructura, en kg, debida al flujo de viento, resultará de sumar la contribución de cada una de las fuerzas que actúan sobre el área expuesta de la estructura o parte de ella, a una altura  $Z$  dada, según:

$$F = \Sigma F_Z = \Sigma p_Z A_Z \quad (3.11)$$

El momento de volteo máximo de diseño se determinará mediante la suma de los momentos producidos por cada una de las fuerzas  $F_Z$ .

### 3.3 Pruebas de presión en túneles de viento con diferentes capas límite

Se han realizado trabajos experimentales para obtener distribuciones de presión realistas en la superficie de los domos; los más citados son los de Maher (1966) y Blessman (1971). Maher obtuvo la distribución de presión en la superficie de dos domos esféricos (30 cm, 60 cm de diámetro) en una sección cuadrada de 1.8 m, los modelos fueron probados en el piso del túnel de viento, donde la capa límite tuvo profundidad de unos 10 cm. Blessman por otro lado probó una gran variedad de domos con diferentes radios que generaron diferentes capas límite. Para el caso de un domo de 50 cm de diámetro la capa límite fue de 12 cm de profundidad. En ambos casos, los autores midieron la distribución de presión de domos inmersos en una capa límite cuyo espesor es menor que la altura del domo. Esta es una condición que no es estrictamente válida desde la capa límite de la tierra, (como lo muestra la figura 3.2 según Davenport, 1960), con alrededor de unos 600 m de altura, para uno de los domos más grandes, representa un espesor de la capa límite de alrededor de 4 veces la altura del domo.

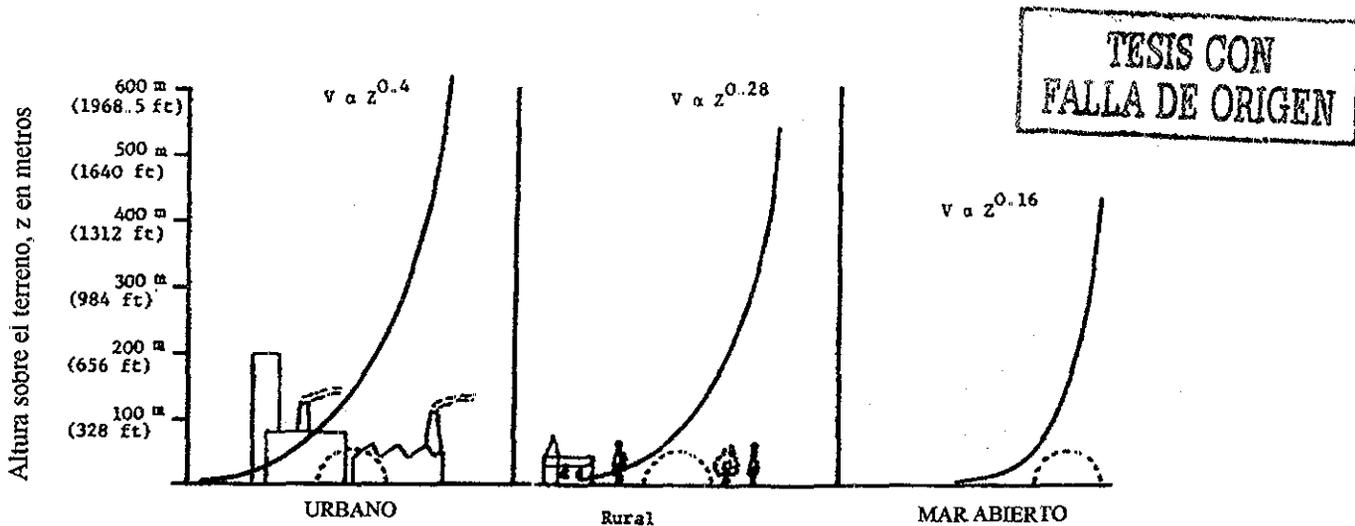


Fig. 3.2: Perfiles de velocidad de viento sobre terrenos con diferentes rugosidades

La figura 3.3 hace referencia a un experimento que toma espesores diferentes de capa límite. En todas las pruebas (excepto una) éste fue provisto de rugosidad artificial con arena, rugosidad relativa  $\epsilon/d=0.001$ , la rotación simétrica del modelo permitió rotar éste  $10^\circ$  en intervalos entre  $\psi$  igual a  $0^\circ$  y  $\psi$  igual a  $180^\circ$ . (Las mediciones de presión se tomaron con un micrómetro Furness y un analizador Solartron Time Domain JM 1860).

El domo se probó para tres diferentes capas límite:

- a) Una capa límite delgada, en la cual el espesor es mucho mas pequeño que la altura del domo
- b) Una capa límite lisa y densa, con espesor aproximado de 2.2 veces la altura del domo
- c) Una capa límite rugosa y densa, de espesor aproximado de 2.7 veces la altura del domo.

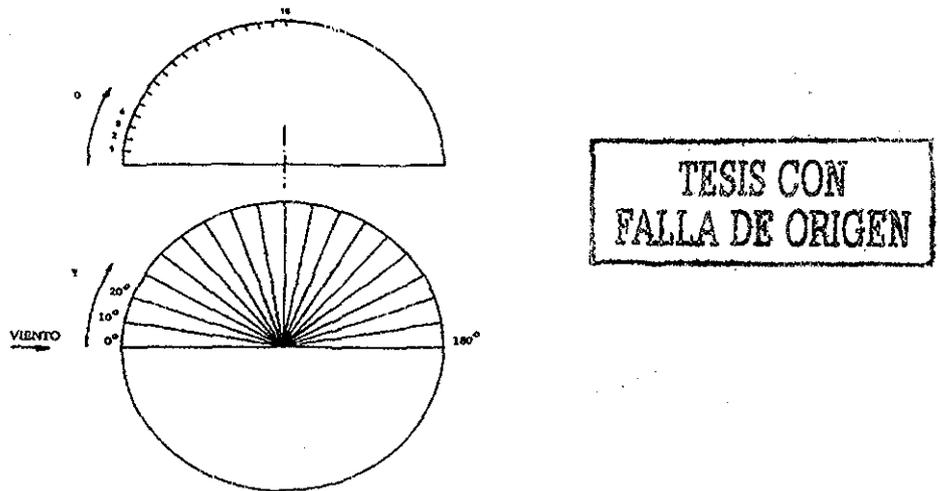
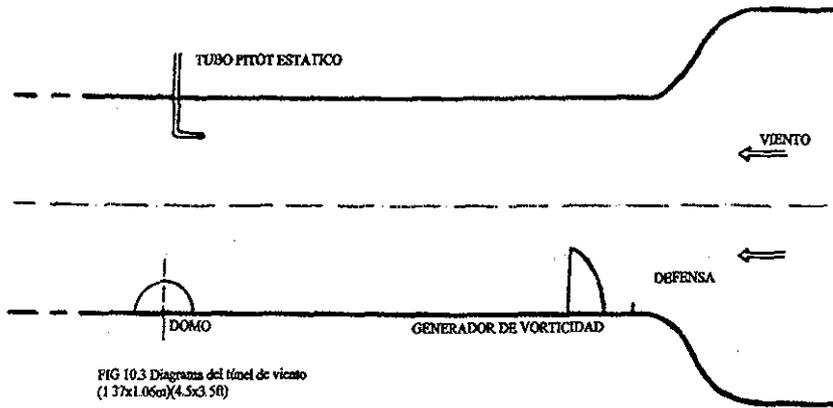


Fig 3.3 Posición de 18 divisiones de presión sobre un domo de diámetro 225mm (8.86in)

En la figura 3.4 se muestra el arreglo del túnel de viento para el experimento del domo. Para la capa límite lisa, las paredes del túnel se mantienen prácticamente lisas, mientras que para la capa límite rugosa, la pared se le dio rugosidad al utilizar pequeños ladrillos de Lego en su superficie.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Fig 3.4 Arreglo del túnel de viento

En la figura 3.5 se muestran los perfiles de velocidad de cada una de las diferentes capas límite, en su aproximación al domo.

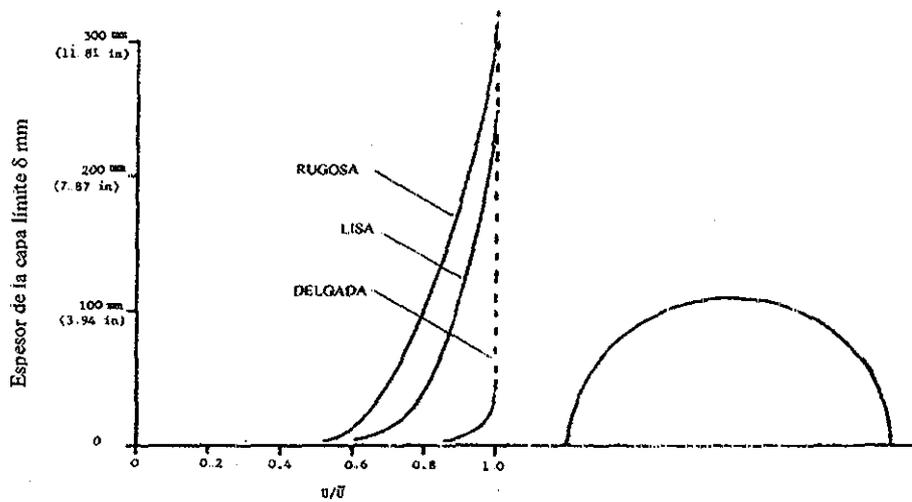


FIG 3.5 Perfiles de velocidad para cada una de las capas límite en su aproximación al domo.

### 3.3.1 DISCUSION

Todas las mediciones de presión en la superficie del domo, fueron reducidas a coeficientes de presión al usar la definición:

$$C_p = \frac{(p - p_o)}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (3.12)$$

Donde:

- $p$  Presión local en la superficie del domo
- $p_o$  Presión estática
- $\frac{1}{2}\rho U^2$  Presión dinámica.

Esto decide la presión dinámica a usar, al utilizar la velocidad de flujo libre  $\hat{U}$ , o alguna otra velocidad local  $U$ , dentro de la capa límite.

Para el caso de una esfera con flujo uniforme, hay solo una velocidad que afecta las presiones en la superficie, que es, la velocidad de flujo libre  $\hat{U}$ . Por consiguiente es sensible usar la presión dinámica basada en esa velocidad. Para domos inmersos en una capa límite espesa, los argumentos son mas difíciles. Una sugerencia es utilizar la velocidad local  $U$ , que asciende del domo. De hecho Blessman (1971) usó esta definición para muchos de sus resultados, pero desafortunadamente, para el caso de domos semiesféricos, la capa límite fue menor que la altura de éste y por consiguiente la presión dinámica otra vez se basó en la velocidad del flujo libre.

Como un ejemplo de lo anterior consideremos una esfera en flujo uniforme, para dos diferentes números de Reynolds, donde se usa para evaluar los coeficientes de presión local, la presión dinámica  $\frac{1}{2}\rho\hat{U}^2$ . La figura 3.6 muestra la distribución de presión alrededor de una esfera lisa en el intervalo subcrítico (Menor que  $3 \times 10^5$ ) y supercrítico (mayor que  $3 \times 10^5$ ) del número de Reynolds. Para una esfera en el intervalo subcrítico del número de Reynolds, la estela detrás de la esfera es larga y también su coeficiente de arrastre  $C_D$ , al considerar el número de Reynolds para el intervalo supercrítico, la estela es estrecha con un coeficiente de arrastre pequeño. Esta reducción repentina en el coeficiente de arrastre del número de Reynolds crítico de aproximadamente  $3 \times 10^5$ , es el resultado directo del cambio de la distribución de presiones alrededor de la esfera. En el intervalo subcrítico, la presión base encima de la mitad posterior de la esfera es aproximadamente constante en  $-0.4$ , al considerar que la presión para la esfera en el intervalo supercrítico, cae en forma continua de  $+1.0$  a  $-1.0$  sobre la mitad frontal de la esfera y recupera en parte la presión positiva, sobre la mitad posterior. La diferencia en este

intervalo de presiones, están relacionadas al cambio de posición del punto de separación de la capa límite, que existe sobre la superficie de una esfera con flujo uniforme. (Con un incremento del número de Reynolds, el coeficiente de arrastre se comporta independiente del número de Reynolds y permanece constante, hasta que predominen los efectos de compresión. La descripción del flujo uniforme alrededor de una esfera está bien documentado, pero desafortunadamente la mayoría de las observaciones que involucran los coeficientes de presión local, están relacionados a la presión dinámica de flujo libre.

Para un domo completo, el número de Reynolds es del orden de  $10^8 - 10^9$ , lo cual podría significar que el domo podría estar en un intervalo supercrítico del número de Reynolds. Ninguna prueba de domos en túnel de viento podría, estar comprendida en este intervalo. El número de Reynolds mas alto que se logró en un experimento (ref. 43) fue aproximadamente  $1.6 \times 10^5$ , que está en el intervalo subcrítico. Es quizá, que por la superficie rugosa del modelo, se pueda inducir la separación de flujo, y crear así una distribución de presiones similar al de un modelo en el intervalo supercrítico del número de Reynolds.

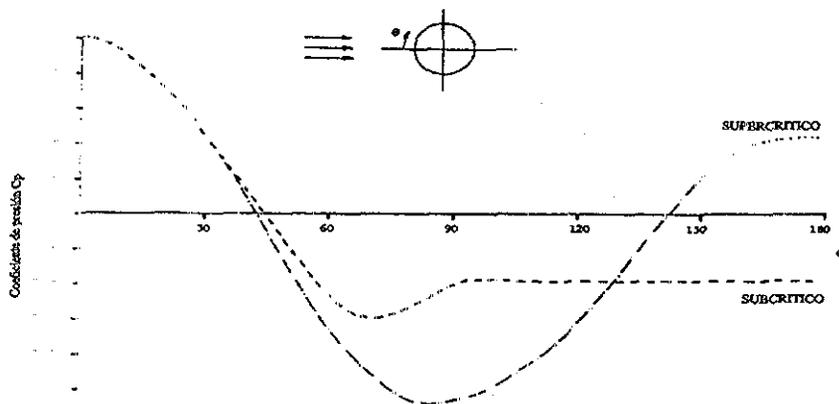


FIG 3.6 Distribución de presiones alrededor de una esfera lisa en flujo uniforme

Por esta razón, la superficie del domo fue provista artificialmente de rugosidad mediante arena (rugosidad relativa  $\epsilon/d=0.001$ ). La figura 3.7 muestra la distribución de presiones (basada en la presión dinámica  $\frac{1}{2}\rho\hat{U}^2$ ), para una superficie lisa y rugosa en el domo en una capa límite delgada (ref. 43). Ambos resultados son similares en la primera cuarta parte del domo. El coeficiente de presión base para domos lisos es aproximadamente constante en  $-0.4$  sobre la mitad posterior del domo (similar al de una esfera en intervalo subcrítico, figura 3.6). El coeficiente de presión para el domo rugoso cae

aproximadamente a  $-0.9$  sobre la mitad frontal del mismo, existe alguna recuperación de presión para la mitad posterior (similar al de una esfera en intervalo supercrítico, figura 3.6), esto porque el domo descansa sobre una superficie plana, el incremento de presión en la parte posterior indica, que no será necesariamente igual que para una esfera. Estos resultados indican que para una superficie rugosa del domo, éste se comporta como si estuviera en un intervalo supercrítico del número de Reynolds. Todas las pruebas subsecuentes fueron realizadas con este modelo con el número de Reynolds alrededor de  $1.6 \times 10^5$ .

Es importante mencionar que para un domo que descansa sobre una superficie plana, el efecto de la capa límite en la distribución de presiones en el borde del domo ( $\psi=0^\circ$ ), es tal que el coeficiente de presión no es  $+1.0$  como es para una esfera en flujo uniforme, pero tiende a cero. Esto se debe a que la velocidad de la capa límite cercana al terreno es pequeña, comparada con la velocidad en flujo libre y es cero sobre una superficie plana.

Para un domo inmerso en una capa límite densa, lisa y rugosa, donde la altura del domo es menor que la mitad de la altura de la capa límite, se obtienen diferentes distribuciones de presión (figura 3.8)

Con incrementos en los espesores de la capa límite, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- 1) La presión base, entre aproximadamente  $120^\circ$  y  $180^\circ$ , permanece constante y aproximada a  $-0.15$
- 2) La fuerza de succión máxima se reduce notablemente
- 3) La máxima presión positiva se reduce notablemente
- 4) Una gran porción de la parte frontal del domo es afectada por la capa límite.

Si en cambio, al calcular la presión dinámica se usa la velocidad de flujo libre, se tiene una nueva distribución de presiones alrededor del domo, que se muestra en la figura 3.9; se pueden hacer las siguientes observaciones concernientes al efecto de los espesores de la capa límite:

- 1) La presión base para ambas distribuciones son muy similares y permanecen constantes entre  $120^\circ$  y  $180^\circ$

- 2) La diferencia entre las dos etapas de resultados, se reducen notablemente en comparación con el caso previo (figura 3.8)

Para considerar la presión dinámica, con base en la velocidad local en la mitad de la altura del domo, la distribución de presión se muestra en la figura 3.10, se puede observar que las dos pruebas dan resultados similares, ambas tienen presión negativa de aproximadamente -1.0 (similar al de una esfera con el número de Reynolds en el intervalo supercrítico), la región de presión positiva en la parte frontal del domo parece ser mas grande, para un domo con capa límite delgada.

La distribución de presiones, basada en una presión dinámica de flujo libre, sobre el domo completo con capa límite densa, rugosa y lisa, se muestra como líneas de presión constante en las figuras 3.11 y 3.12. La figura 3.11a muestra la distribución de presiones para el domo, en una capa límite espesa en un corte en planta del mismo. Este es un diagrama distorsionado, y es, desafortunadamente como se publica en la literatura. La figura 3.11b muestra la misma información, pero presenta la gráfica de una proyección tridimensional y es por eso que el contorno de presión está en posición correcta con respecto al perfil del domo. Las figuras 3.11a y 3.12a muestran diagramas similares de presión para el domo con capa límite rugosa y densa. La comparación entre las figuras 3.11a y 3.12a muestra la influencia de la capa límite densa y rugosa afecta las presiones bajas en la región de presión positiva y altas presiones en la región de presión negativa. La transición de la presión positiva a negativa permanece constante para ambos modelos.

## **CONCLUSIONES**

En la discusión anterior se ha mostrado que para un domo con diferentes capas límite, debe tomarse como referencia la presión local  $p$ , que se usa para calcular los coeficientes de presión. Claramente las distribuciones encima del domo, basados simplemente en la presión dinámica de flujo libre, son diferentes para cada una de las capas límite investigadas. Desafortunadamente en estos estudios, no han sido realizados para estimar los efectos de la intensidad de la turbulencia, en las distribuciones de presión.

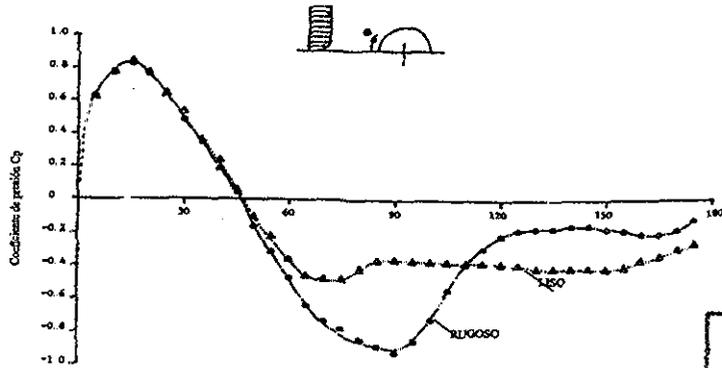


Fig 3.7 Distribución de presiones alrededor de un domo liso y rugoso en una capa límite delgada

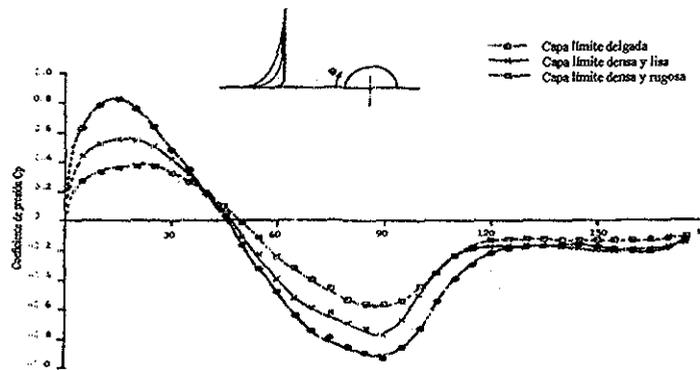


Fig 3.8 Distribución de presiones alrededor de un domo semiesférico rugoso en diferentes capas límite (presión dinámica basada en velocidad de flujo libre)

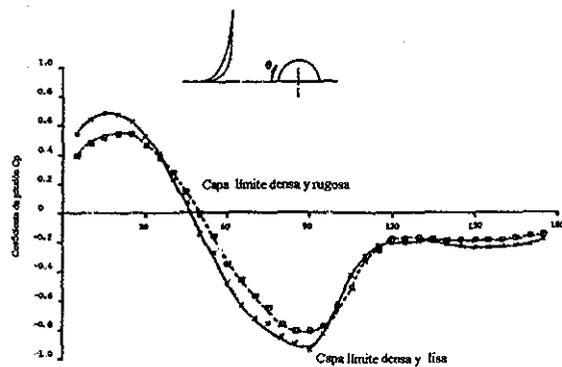


Fig. 3.9 Distribución de presiones alrededor de un domo semiesférico liso en dos capas límite delgadas

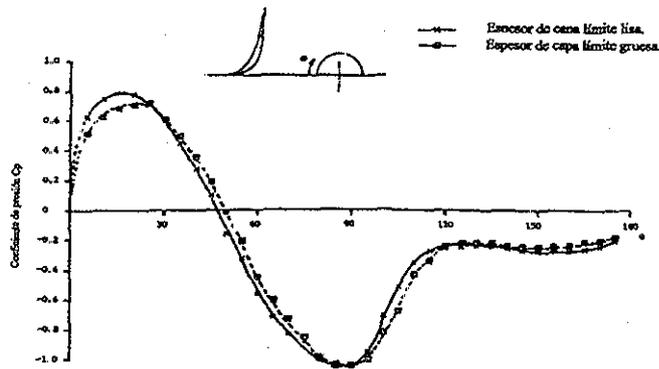


Fig 3.10 Distributions de presión alrededor de un domo semiesférico rugoso en dos capas límite

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

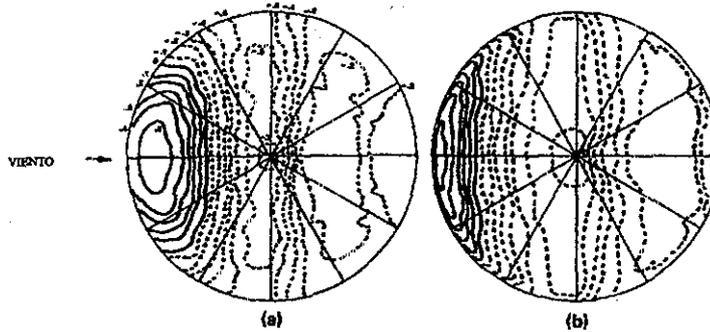


Fig 3.11 Distribución de presiones sobre un domo semiesférico rugoso en una capa límite densa y lisa en dos espesores de capa límite (presión dinámica basada en la velocidad a la mitad de la altura del domo)  
 a) Diagrama de presiones en dos dimensiones  
 b) Medición como una proyección tridimensional.

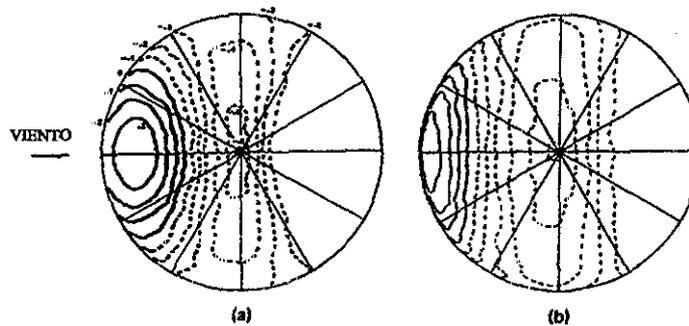


FIG 3.12 Distribución de presiones sobre un domo semiesférico rugoso en una capa límite densa y rugosa:  
 a) Diagrama de presiones en dos dimensiones.  
 b) Medición como una proyección tridimensional

### 3.4 Comparación de los códigos de práctica usados en diferentes países

La magnitud y distribución de presiones sobre una estructura, está regida primeramente por el modelo de carga de viento alrededor de ésta. Normalmente la presión en un punto se expresa en términos de coeficientes de presión adimensionales  $C_p$ :

$$C_p = \frac{P}{Q} \quad Q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (3.13)$$

donde:

- P Presión en el punto de interés
- Q Presión dinámica (energía cinética) del viento
- $\rho$  Densidad del aire
- V Velocidad del flujo.

Para algunas estructuras el modelo del flujo de viento permanece constante, con la variación de la velocidad del viento, la magnitud y distribución de los coeficientes de presión permanecen iguales; a la vez que, para otras estructuras el modelo del flujo varía y ambas, la magnitud y la distribución de los coeficientes de presión también varía. El fenómeno de separación del flujo del modelo de carga de viento alrededor de una estructura depende de la posición de separación de la carga constante o variable.

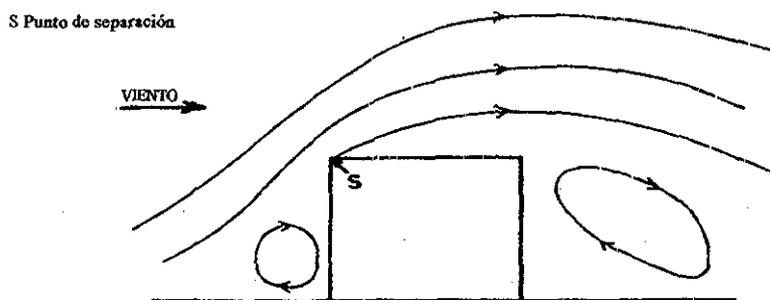


FIG 3.13 Flujo sobre de una estructura de bordes afilados

En estructuras que tienen una discontinuidad severa en su superficie, por ejemplo edificios de bordes afilados, el punto de separación del flujo es fijo en la discontinuidad y el modelo de flujo será constante para todas las velocidades del viento.

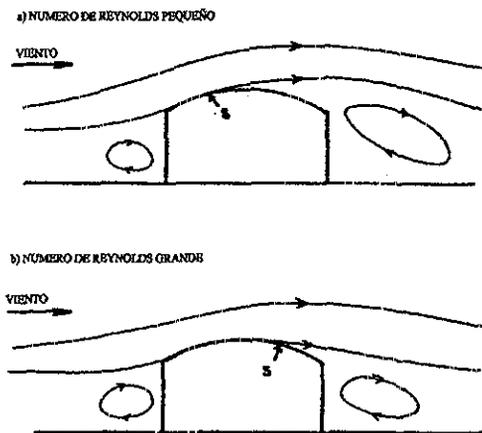
La separación del flujo en superficies curvas (cilindros, esferas y domos), ocurre cuando el fluido en la capa límite no es lo suficientemente grande, para adherirse a la superficie debido a un incremento de la presión en la dirección del flujo. La posición de la separación en este caso es variable (figura 3.14) y depende del régimen del flujo definido por el número de Reynolds:

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (3.14)$$

donde:

- v Velocidad del flujo en la aproximación
- D Dimensión característica de la estructura
- $\nu$  Viscosidad cinemática (para el aire  $1.46 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/seg).

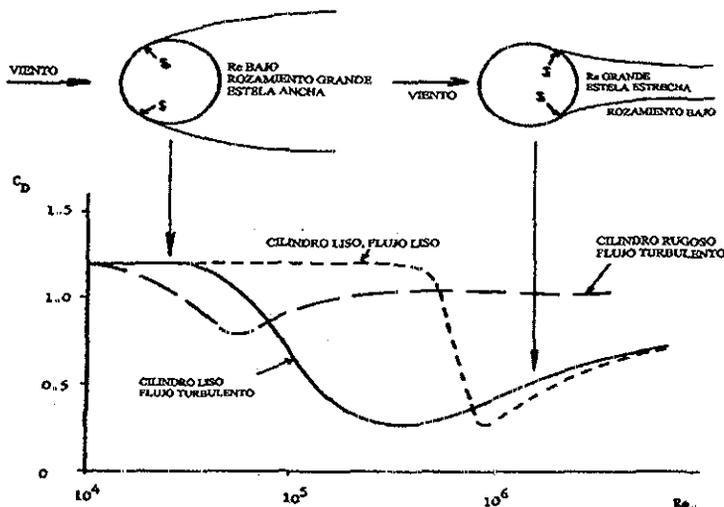
El número de Reynolds expresa el promedio de las fuerzas de viscosidad a las fuerzas internas en un fluido en movimiento. En números de Reynolds pequeños (velocidades y objetos pequeños), el flujo está dominado por las fuerzas de viscosidad, mientras que para números de Reynolds altos, el flujo está regido por las fuerzas de inercia que resultan de la turbulencia del flujo.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FIG 3.14 Flujo sobre una estructura curva  
Separación variable:  
a) Número de Reynolds pequeño  
b) Número de Reynolds grande

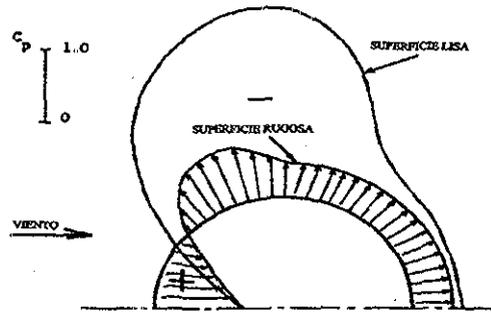
Para cilindros circulares, se puede usar la carga de viento para mostrar la variación del flujo en el modelo, y del coeficiente de fuerza, (promedio del coeficiente de presión por área frontal efectiva), con números de Reynolds para superficies curvas. En números de Reynolds pequeños, la separación del flujo ocurre en la capa superior del cilindro, que resulta en una estela ancha que provoca una fuerza de arrastre grande. Para números de Reynolds grandes, la separación ocurre en la capa inferior del mismo, y resulta una estela estrecha y una fuerza de arrastre pequeña.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

FIG 3.15 Variación de la fuerza de rozamiento con  $Re$  para domos circulares ( $Re$ = Reynolds)

La fuerza y los coeficientes de presión en el cilindro, son también dependientes del grado de turbulencia del flujo y de la rugosidad de la superficie curva. Para cuerpos curvos es extremadamente difícil evaluar los coeficientes de presión en los puntos de separación, del flujo en los modelos que son afectados por el número de Reynolds y la superficie rugosa. Investigadores del Departamento de Ingeniería Civil, de la Universidad de Surrey, han intentado controlar la posición de separación con ajustes a la superficie rugosa del modelo curvo.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig 3.16 Distribución de presiones alrededor de un cilindro liso y rugoso

Al referirse a un arco o bóveda, los coeficientes de presión tomados de diferentes códigos de práctica de diferentes países varían, debido primero, a que en algunos países no toman en cuenta el promedio en las dimensiones del edificio y en segundo a las diferencias en los métodos de prueba de túnel de viento (en su mayoría investigaciones llevadas entre 1930 y 1950 en túneles diseñados para investigaciones aeronáuticas, las condiciones de flujo en estos túneles no tuvieron representación de flujo turbulento del viento de la superficie terrestre). La tabla 3.1, muestra los coeficientes de presión para el arco - bóveda. El arco - bóveda es un tipo de estructura curva en donde los coeficientes de presión dependen del número de Reynolds y de la rugosidad del mismo. Los pocos códigos que incluyen arcos - bóveda proporcionan generalmente coeficientes de presión similares, con la excepción del código de la India (ref. 43), donde el valor de la mitad central, por ejemplo, se da independientemente de la variación del promedio del radio y la altura, esto es una aproximación incorrecta.

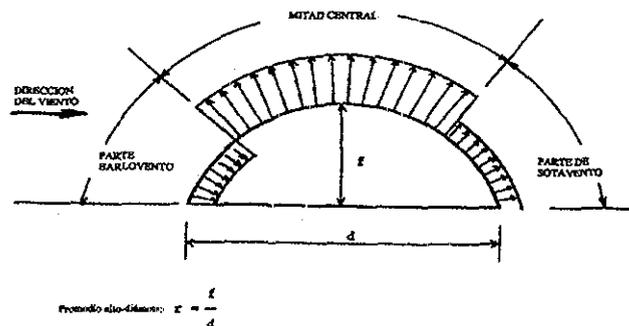


FIG 3.17 Arcos de bóveda. Promedio elevación - diámetro  $r = f/d$

País/Código	Parte de barlovento	Mind central	Parte de sotavento	Relación $r$ alto diámetro
Australia AS 1170, Pt 2: 1973	1.40r	-0.7 -r	-0.5	$0 < r < 0.6$
India IS 875: 1964	0.95	-0.55	-0.45	$0 < r < 0.6$ Mismos valores para cualquier r
USA ANSLA58.1: 1972	1.42r	-0.7 -r	-0.5	$0 < r < 0.6$
USSR	+0.1	-0.8	-0.4	0.1
BC & R II-A.11-62	+0.3	-0.9	-0.4	0.2
	+0.4	-1.0	-0.4	0.3
	+0.6	-1.1	-0.4	0.4
	+0.7	-1.2	-0.4	0.5
UK	+0.3 -0.3	-0.6 -0.7	-0.6 -0.2	r = 0.2
Manual de carga de viento	Av = 0.0	Av = -0.85	Av = -0.4	

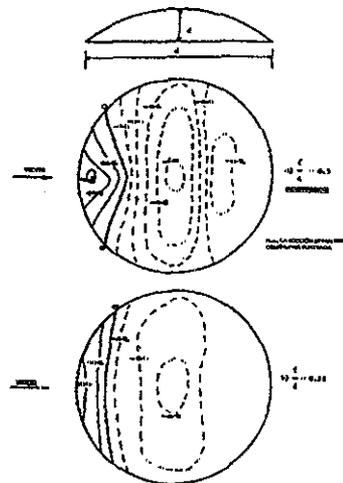
TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Tabla 3.1 Coeficientes de presión para arcos de bóveda

El Manual de Carga de Viento (ref 42) proporciona coeficientes de presión y fuerza (arrastre y levantamiento), para domos que descansan en una base cilíndrica, con promedio de diámetro-altura variable. Las figuras 3.18 y 3.19 muestran los coeficientes de presión, contenidos dentro del manual. Esta información debe ser aplicada con cuidado, por las deficiencias en las cuales están basados.

La información se refiere a la distribución de los coeficientes de presión sobre las superficies de dos domos, con promedios de diámetro-altura de 0.5 y 0.25, apoyados directamente en el terreno; en ambos casos existe una zona de presión positiva en el lado de barlovento, con el resto del domo bajo presiones negativas (succión). En domos semiesféricos, la región de presión positiva es mas extensa y mas grande (+0.6).

Las figuras 3.19a y 3.19b muestran dos ejemplos para un domo semiesférico y poco profundo (el promedio altura-diámetro es de 0.1). En en la figura 3.19a existe una zona de presión positiva en el lado de barlovento, con succiones en el resto del domo, el coeficiente de presión máximo en este caso es +0.8 y la succión máxima -1.7 en la cima del domo. Estos valores son muy independientes de la altura del cilindro, para valores de h/d mayores de 0.25.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig 3.18 Distribución de presiones en domos circulares apoyado directamente en el terreno.

Para domos de poca altura montados en cilindros, la zona de presiones positivas en la cara de barlovento desaparece, para valores de  $f/d$  menores de 0.2; abajo de este valor, la junta domo-base asume las características de un borde afilado y la separación de flujo ocurre en este punto, y aparecen presiones promedio mas grandes en la cara de barlovento. Esta succión decrece progresivamente en la cima del domo y hacia la parte posterior del mismo. El coeficiente de presión máximo negativo para el domo en la figura 3.19b, tiene un valor de -1.7 cerca del borde de barlovento.

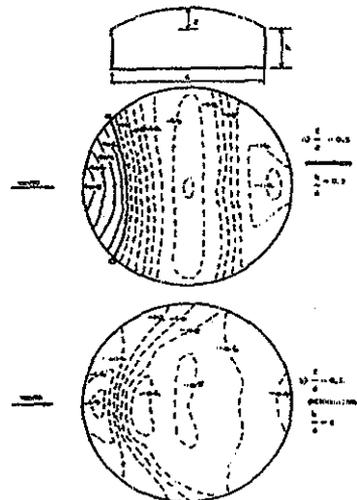


FIG 3.19 Distribución de presiones de un domo circular montado en una base cilíndrica (visto en planta)

### 3.5 Carga debida a la nieve

Las cargas producidas por nieve en las cubiertas, varían de acuerdo con la localización geográfica (clima), sitio de exposición, forma y tipo de la cubierta.

#### 3.5.1 Densidad de la nieve

La nieve es un estado climático natural, el cual se desarrolla bajo la influencia de la temperatura y el viento. Su efecto sobre las estructuras depende de las condiciones de su respectiva localización dentro de una zona geográfica, por lo cual algunas veces las estructuras están reforzadas para la acumulación debida al viento, así como de la forma de la misma.

Las cargas por nieve juegan un papel muy importante en la certeza de la seguridad en las estructuras, las líneas de transmisión eléctricas, etc. Muchas construcciones modernas han cambiado sus formas tradicionales y su comportamiento, debido a que el efecto de la acumulación de nieve en las cubiertas no es aún bien conocido.

A partir de 1965 se han tenido grandes progresos en la valoración de cargas por nieve sobre las estructuras, sobre todo por los estudios realizados en Canadá, Rusia, Rumania, Francia y en los países nórdicos.

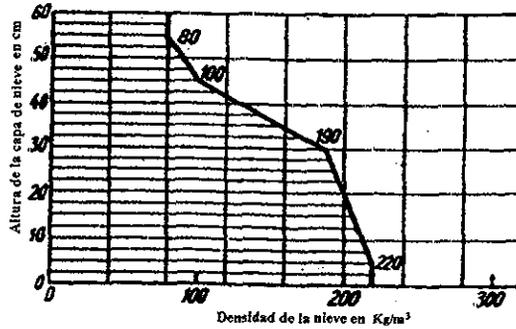
La determinación de carga debida a la nieve sobre las estructuras depende del valor aceptado de su densidad, esto es, una variable aleatoria en el tiempo y en el espacio y su estimación por una constante numérica es demasiado difícil.

La densidad de peso promedio de la nieve está definida como el promedio entre el agua equivalente y su volumen de nieve expresada en  $\text{Kg/m}^3$ . La densidad de la nieve es actualmente determinada en centros meteorológicos por la siguiente relación:

$$\rho = \frac{\omega}{10h} \quad (3.15)$$

en la cual  $\omega$  es el agua equivalente del volumen de nieve, el peso de esta agua que resulta al fundirse se dará en gramos y  $h$  es el espesor de la capa de nieve en cm.

La densidad de la nieve recién caída varía bruscamente entre 50 y 100  $\text{Kg/m}^3$  dentro de una misma muestra. La densidad se incrementa hacia abajo debida a la compresibilidad de las capas bajas o inferiores, con lo cual se concluye que la densidad de la nieve se incrementa a medida que se aumenta la profundidad de la misma.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 3.20: Variación de la densidad de la nieve con el espesor de la capa

Para una estimación simple de la densidad de la nieve los reglamentos de construcción presentan una práctica que tiende a describir un valor único con respecto a la profundidad de la capa de nieve o duración de la misma. Otra manera de hacerlo sería mediante la interpretación de los resultados obtenidos por las estaciones meteorológicas, como por ejemplo los obtenidos en Francia, los cuales nos llevan a los valores siguientes para nieve recién caída:

Más desfavorable :  $173 \text{ Kg/m}^3$

Término medio :  $140 \text{ Kg/m}^3$

Condiciones normales :  $110 - 120 \text{ Kg/m}^3$

En Rumania y Rusia los reglamentos de construcción recomiendan  $220 \text{ Kg/m}^3$  de densidad de nieve. En Canadá la densidad usada para calcular la carga debida a la nieve es de  $200 \text{ Kg/m}^3$ , lo cual resulta relativamente bajo. Una densidad alta de la nieve ( $300$  a  $400 \text{ kg/m}^3$ ) no indica que necesariamente se tengan espesores muy grandes de la misma sino que esto es debido a factores que dependen de circunstancias muy particulares. El promedio de la densidad de la nieve indica que no se debe tener un valor más alto de  $250 \text{ Kg/m}^3$ , el cual es un valor recomendado en los reglamentos de construcción, con un alto grado de confiabilidad.

La densidad de la nieve, la profundidad de la misma, así como su historia climatológica no pueden ser tratados separadamente, esto debido a la variación de la densidad de la nieve con la profundidad del espesor de la capa; esto es, que la densidad promedio debería ser expresada en relación a la profundidad de la capa.

### 3.5.2 Efectos dinámicos debidos a la nieve

En sus trabajos, Mateescu (ref. 34 y 35) hace un análisis completo sobre los efectos dinámicos debidos a la nieve.

El movimiento de las partículas de nieve que caen, obedece la ley de movimiento de cuerpos sólidos dentro de un fluido. La ecuación de movimiento vertical de una partícula cuasiesférica de diámetro  $D$ , masa  $m$ , peso  $m \times g$ , y su velocidad  $v$  en el tiempo  $t$  es:

$$m \frac{dv}{dt} = m \cdot g - F_{Arh} - F_D \quad (3.16)$$

Donde  $F_{Arh}$  es la fuerza que se opone a la caída de la partícula, y  $F_D$  es la fuerza de arrastre que actúa en dirección opuesta al movimiento, se puede evaluar por la siguiente ecuación:

$$F_D = C_D \frac{\rho v^2}{2} A \quad (3.17)$$

en la cual  $\rho$  es la densidad del aire,  $A$  es el área frontal del cuerpo y  $C_D$  es el coeficiente de rugosidad, el cual depende de la forma de la partícula así como el número de Reynolds:

$$R = \frac{v D}{\nu} \quad (3.18)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemática del aire.

En su movimiento, las partículas de nieve alcanzan velocidades prácticamente iguales a las velocidades de deposición. Esta velocidad corresponde al equilibrio entre la fuerza activa ( $m g - F_{Arh}$ ) y la fuerza resistente  $F_D$ , lo cual es característico de un movimiento uniforme  $m dv/dt = 0$  de una partícula de nieve durante su trayectoria vertical hacia el suelo. Si  $m g - F_{Arh} = F_D$  entonces la velocidad de deposición de una partícula esférica es:

En un flujo laminar:

$$V_{dep} = \frac{g D^3}{18 \nu} \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \quad (3.19a)$$

En flujo turbulento:

$$V_{dep} = 1.2 \sqrt{g D \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)} \quad (3.19b)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad de la nieve. La primera ecuación es válida para  $R < 0.1$ , según la fórmula de Stokes.

Para partículas de nieve de formas irregulares y cuando  $R < 0.1$  la velocidad de deposición es más pequeña que las obtenidas por las ecuaciones 3.19a y 3.19b, por ejemplo para un flujo turbulento, es 40 por ciento más pequeña.

El modelo de Stokes para el movimiento de partículas en un flujo laminar es interesante solo para grupos de nieve formados de una manera uniforme. Para tormentas de nieve se deben utilizar las leyes del flujo turbulento. La velocidad crítica de arrastre de una partícula dentro de un paquete de nieve se calcula como en el caso de el movimiento de arena o aluviones en los ríos.

Para encontrar el valor crítico de la velocidad,  $V_{drag}$  para el cual la fuerza de arrastre  $F_D$  es obtenida de manera similar a como se obtiene la velocidad promedio en un arroyo  $V$  paralela al terreno y que es igual a la resistencia de la fuerza de fricción,  $f(mg - F_{Arh} - F_L)$ ;

$$F_D < \acute{o} = f(mg - F_{Arh} - F_L) \quad (3.20)$$

Donde  $f$  es el coeficiente de fricción y  $F_L$  es la fuerza que se opone al movimiento.

$$F_L = C_L \frac{\rho v^2}{2} A \quad (3.21)$$

lo cual conduce a:

$$mg - F_{Arh} = \frac{F_D + f F_L}{f} \quad (3.22)$$

Si las partículas de nieve son de formas cuasiesféricas y de un diámetro  $D$  ( $A = \pi D^2/4$  y  $m = (\pi D^3/6)\rho_s$ ), la velocidad del viento con la cual las partículas caen está dada por la ecuación:

$$V_{drag} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{f}{C_D + f C_L}} \cdot \sqrt{g \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) D} \quad (3.23) \quad \text{o si } K = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{f}{C_D + f C_L}}$$

La ecuación se transforma en:

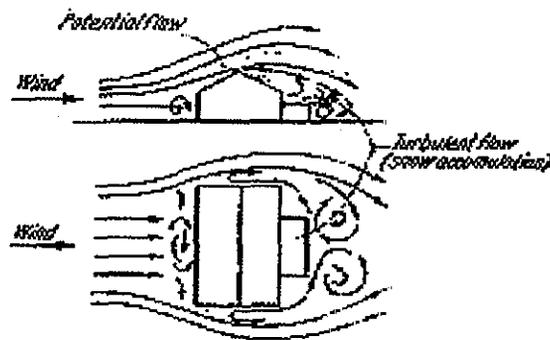
$$V_{drag} \geq K \sqrt{g D \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)} \quad (3.24)$$

que depende del número de Reynolds. Las partículas generalmente caen a velocidades próximas a los 6 m/s y durante nevadas a 3 - 4 m/s.

Las tormentas de nieve son fenómenos naturales en los cuales ocurren simultáneamente tanto la caída de nieve como el viento, el viento transporta la nieve existente en la atmósfera y la coloca en el suelo, tejados, etc.

La intensidad de las tormentas de nieve  $i$  es la cantidad de nieve que pasa a través de una unidad de sección normal a la dirección del viento, en un intervalo de unidad de tiempo, esto es usualmente medido en  $g/(cm^2 \times min)$  o  $Kg/(m^2 \times 24 \text{ horas})$ .

La intensidad de las tormentas de nieve crece con el viento y se concluye que las tormentas de nieve ocurren solo si  $V > 6$  m/s. Debajo de los 10 m/s la intensidad de la tormenta es despreciable y arriba de 15 m/s se incrementa de gran manera. De manera general, en áreas de flujo laminar, el viento deja de soplar sobre la nieve y en áreas de flujo turbulento, la acumulación de nieve puede o no ocurrir, según sea la intensidad de la nevada, la construcción y forma de la cubierta, la velocidad del viento, duración y ángulo de ataque, las condiciones naturales o artificiales de la topografía, localización y forma de los vecindarios, edificios, obstrucciones naturales cercanas, etc.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 3.21: Flujo del viento y acumulación de nieve

Se puede concluir que el viento juega un papel decisivo en la magnitud y distribución de las cargas de nieve.

### 3.5.3 Carga en el terreno contra cargas en las cubiertas

Estudios realizados en Rusia, Canadá y Finlandia han demostrado que las cargas por nieve en cubiertas son considerablemente bajas comparadas con las que se presentan en el terreno, debido a los efectos del viento. Los siguientes promedios entre las cargas en tejados o cubiertas con respecto a cargas en el terreno fueron reportados por Lutes (ref. 38).

Cubiertas bien protegidas	= 0.9
Cubiertas poco expuestas	= 0.6
Cubiertas expuestas	= 0.3

Estudios realizados en Canadá en 1970 y la ANSI A58.1 - 1972 recomiendan un factor básico de reducción de cargas debidas a nieve en las cubiertas

protegidas con respecto a las cargas de nieve en el terreno, igual a  $C_r = 0.8$ . Para cubiertas totalmente expuestas en todos sus lados a un viento de gran velocidad, el factor básico se reduce en un 25 por ciento para llegar al valor de  $C_r = 0.6$ .

Acorde con los códigos canadienses y estadounidenses, la reducción adicional podría ser usada solo si:

- 1) La cubierta no tiene muros de parapeto que detengan la nieve
- 2) La cubierta no está protegida en uno de sus lados por una construcción, a una distancia de  $10 H$  del edificio, donde  $H$  es la altura de las construcciones del vecindario arriba de la cubierta
- 3) El edificio no se localiza en regiones de baja velocidad del viento
- 4) La carga de nieve en una cubierta no será menor que  $60 \text{ Kg/m}^2$  (esta condición aparece solo en el Reglamento ANSI).

El factor  $C_r$  es entendido en una forma primaria, para cubiertas planas, en reglamentos que han sido extendidos para cubiertas con inclinaciones pequeñas, curvas, simples o múltiples.

#### 3.5.4 Variación de la capa de nieve con la elevación

Schaller trabajó desde 1909 para definir la variación del peso de la nieve con respecto a la profundidad de la misma.

Schaller (ref. 36) describe este fenómeno como sigue: 'Es bien conocido que la cantidad de nieve sobre el terreno se incrementa con la elevación. La baja temperatura del aire puede causar mas precipitaciones de nieve que de lluvia, con lo cual se retrasa la fusión, esta es la razón principal por la cual se incrementa la carga por nieve, con la profundidad de la capa de la misma'.

Como regla, la relación entre la profundidad de la nieve (o carga de nieve), y la elevación  $H$  sobre el nivel del mar  $S_H$ , y la carga de nieve con la elevación  $S_0$ , se pueden aproximar por una función de segundo grado entre  $S_H$  y  $H$  (ref. 36)(ref. 37).

$$S_H = S_0 + aH + bH^2 \quad (3.25)$$

Los coeficientes  $a$  y  $b$  varían de acuerdo con la localización climática y con la probabilidad con la cual es definida la carga debida a la nieve.

La junta en seguridad estructural CEB - CECM - CIB - FIP - IABSE (ref. 33) recomienda la siguiente ecuación:

$$S_H = AB^H \quad (3.26)$$

para la variación rápida de una carga de nieve con la elevación de la misma; obviamente los coeficientes A y B en la ecuación anterior concuerdan con algunas condiciones para a y b de la ecuación anterior. De lo anterior, se puede concluir que la estimación de las cargas debidas a la nieve, con la elevación y exposición de la misma depende de las diferencias locales en regiones montañosas, las cuales pueden ser muy significativas.

### 3.5.5 Relación entre el periodo de retorno y la carga máxima anual debida a la nieve

Estadísticas de las máximas anuales registradas para una capa de nieve de profundidad  $h$ , se han ajustado con la distribución extrema de Gumbel o Frechet (ref. 33) de distribución extrema, las fracciones de la anual máxima,  $h_r$ , asociadas con diferentes probabilidades,  $r$ , se transforma en lo excedido en un año y se puede determinar con facilidad.

La relación entre el periodo de retorno y las fracciones de la máxima anual se define de una regresión de estas probabilidades, mediante:

$$\bar{T}(h_r) = \frac{1}{P(h > h_r)} = \frac{1}{1-r} \quad (3.27)$$

Esto expresa el promedio del periodo de tiempo en años, entre la ocurrencia de la carga de nieve que excede las cargas propuestas como máximas.

Es común diseñar con un periodo de retorno de 50 años para estructuras permanentes; por lo tanto, la probabilidad de que se exceda esta carga es de tan solo un 2 por ciento.

Para estructuras que presentan alto riesgo de pérdida, tanto humana como material al fallar, se recomienda un período de retorno básico de 100 años. Esto es, la probabilidad de ser excedida en un año es de 0.01 (1 por ciento). Para estructuras que representan un bajo riesgo de pérdida se recomienda un periodo de retorno básico de 25 años. Esto es, la probabilidad de ser excedido en un año es de 0.04 (4 por ciento).

Para dar una indicación cuantitativa de la influencia del periodo de retorno en las cargas de nieve anual máxima, a continuación se muestran las variaciones de la misma.

$$\frac{h_{\bar{T}} = 100 \text{ años}}{h_{\bar{T}} = 50 \text{ años}} = 1.1 - 1.15$$

$$\frac{h_{\bar{T}} = 100 \text{ años}}{h_{\bar{T}} = 25 \text{ años}} = 1.15 - 1.35$$

### 3.5.6 Coeficientes y distribuciones de la carga de nieve

El promedio de la carga de nieve en el techo, comparado con el existente en el suelo comúnmente es más pequeño. Una cubierta pequeña inclinada que está expuesta en todos sus lados (sin valles u obstrucciones) y si la construcción se encuentra en regiones en la que la velocidad de el viento es suficiente, se pueden utilizar los valores de reducción correspondientes; se justifica su uso, debido a que la nieve es arrastrada por el viento.

La cantidad y distribución de la nieve acumulada depende del tipo de cubiertas, la severidad del clima, la localización de obstrucciones vecinas con respecto a la dirección del viento.

Los códigos canadienses y estadounidenses, distinguen los siguientes tipos de acumulaciones de nieve, en cubiertas o techos:

- 1) No uniforme : carga de nieve desbalanceada sobre arcos y techados curvos
- 2) Acumulación de nieve en cubiertas curvas
- 3) Acumulación de nieve en áreas adyacentes a obstrucciones de techos.

Los coeficientes de acumulación de nieve para varias formas de cubiertas están dadas en las figuras 14.10 - 14.16 (de la referencia 32). El coeficiente de acumulación de nieve se expresa en función a el promedio de carga acumulada:

$$C_s = \frac{S}{S_g} \quad (3.28)$$

Los coeficientes de acumulación de nieve han sido prescritos por diferentes reglamentos, los cuales han tenido que considerar necesariamente, la seguridad, lo que influye en la economía en el diseño de las cubiertas de las estructuras:

- 1) Los reglamentos canadienses y de E.U., incluyen un factor de reducción  $C_r = 0.8$  en los valores permitidos para todos los coeficientes de acumulación de nieve. Para cubiertas altamente expuestas, pero solo para distribuciones uniformes de carga, este factor se puede reducir en un 25 por ciento para alcanzar  $C_r = 0.6$ . Estos valores están dados en las figuras 14.10 - 14.16 (ref. 32)
- 2) El reglamento Ruso de construcciones recomienda la reducción de todas las distribuciones de carga debidas a nieve sobre techos, en regiones donde la velocidad promedio del viento en los tres meses de invierno excede 4 m/s con 20 por ciento ( $C_r = 0.8$ ). Acorde con el reglamento de Rumania, todas las cargas de nieve sobre techos localizados en áreas completamente desprotegidas, se deben reducir en un 40 por ciento ( $C_r = 0.60$ ). Estos valores se incluyen en las figuras 14.10 - 14.16 (ref. 32)

- 3) Los coeficientes de acumulación de nieve recomendados por los reglamentos franceses aun no incluyen los factores de reducción para cubiertas expuestas
- 4) En adición a los coeficientes de acumulación de nieve dados en las figuras 14.10 y 14.16 (ref. 32), los códigos de E.U., y Canadá utilizan cargas de nieve de intensidad completa que sean aplicadas a una porción de área del techo con carga nula en toda la demás área. Esto se realiza para ver si se producen efectos más desfavorables que la carga aplicada a toda el área (ANSI A58.1 - 1972).

Esta condición de carga es particularmente útil para el diseño de ciertos miembros estructurales de la cubierta.

### 3.5.7 Cargas debidas a nieve sobre la cubierta

La carga debida a la nieve sobre las cubiertas se calcula como el producto de la carga de nieve sobre el terreno  $S_g$  y el coeficiente de acumulación de nieve,  $C_s$ .

$$S = C_s S_g \quad (3.29)$$

$S_g$  para este caso, es el producto de la densidad de nieve promedio y su profundidad, definida como una fracción de la máxima anual o de la vida de servicio máxima.

$$S_g = h\rho \quad (3.30)$$

Por consiguiente, la carga debida a nieve sobre la cubierta así como la carga sobre el terreno, pueden ser definidas probabilísticamente. Esta interpretación puede ser aceptada por los reglamentos de diseño.

Usualmente el coeficiente  $C_s$  incluye un factor de reducción  $C_r$ , aunque, otras veces  $C_r$ , es dado como un factor de  $S_g$ .

Para la densidad de peso de la nieve los reglamentos adoptan un valor de  $200 \text{ Kg/m}^3$ . Una mejor estimación de la densidad de la nieve esta dada por la ecuación siguiente:

$$\rho = 300 - 200e^{-1.5h} \quad (3.31)$$

Donde:

$\rho$  = se obtiene en  $\text{Kg/m}^3$

$h$  = es la profundidad en m.

Los coeficientes de acumulación de nieve son generalmente más pequeños que 3, para cubiertas de las formas más comunes.

La carga debida a nieve sobre el terreno, prescrita por varios reglamentos, está dada en la tabla 3.2

<i><b>País, reglamento</b></i>	<i><b>Carga por nieve sobre terreno kg/m<sup>2</sup></b></i>
Francia <sup>1)</sup> Reagles NV 65	35/60; 45/75; 55/90
Italia CNR UNI 10012	60; 90
Rumania Loadin Code (T ≅ 10años)	200; 160; 120; 80
Rusia <sup>2)</sup> SNIP II - A 11 - 62	50; 70; 100; 150; 200; 250
Estados Unidos ANSI a58 1 - 1972 (T ≅ 50años)	49; 98; 146; 195; 244; 342; 390
Alemania DIN 1055	75

**Tabla 3.2:** Cargas recomendadas por los reglamentos de algunos países

1) Diferentes valores para cargas normales y extremas

2) Valores correspondientes al promedio anual máximo

Para aumentar la seguridad de estructuras ligeras, ciertos países han incrementado en sus reglamentos las cargas para nieve sobre los techos. De esta manera los reglamentos de Rumania utilizan el factor de amplificación:

$$K = \frac{1}{1.4} \left( 1.2 + 0.8 \frac{S}{W} \right) > 1.0 \quad (3.32)$$

donde S se había estudiado anteriormente y W es el peso total de la cubierta incluyendo la nieve.

En Alemania los reglamentos recomiendan el siguiente factor:

$$K = 1.24 - 0.6 \left( 1 - \frac{S}{W} \right) > 1.0 \quad (3.33)$$

para cubiertas que tienen una carga muerta menor que 200 Kg/m<sup>2</sup>, la edición previa del reglamento de diseño de Rumania recomienda un factor

$$K = \frac{200 + S}{D + S} > 1.0 \quad (3.34)$$

Estos factores deterministas K son adicionales a los factores de seguridad recomendados por los códigos estructurales. De tal forma que los factores de sobrecarga debidos a nieve, serán correctamente calibrados, acorde con un criterio probabilístico, por lo que el uso de factores K antes mencionados podrían no ser necesario.

### 3.5.8 Modelos de prueba para la acumulación de nieve

La acumulación de nieve se puede estudiar cuando el viento y las propiedades de ésta pueden ser modeladas. Modelar las propiedades físicas y mecánicas de la nieve es una operación particularmente difícil, el material más conveniente para hacerlo sería la nieve misma, si el túnel de viento para prueba pudiera tener temperaturas debajo de cero grados. Para simplificar las cosas, se han utilizado materiales granulares (polvorientos) para simular la nieve, despreciando con esto los efectos de la misma, como son la compresibilidad, derretimiento, etc.

Los primeros modelos de acumulación de nieve fueron realizados en Rumania por Mattescu. Los resultados de las pruebas aplicadas para un domo de acero de 94 metros de diámetro, comparados con las medidas realizadas en el invierno de 1963, después de 89 días de nevadas, con una velocidad de viento de 8 a 16 m/s, se presentan en la figura 3.22.

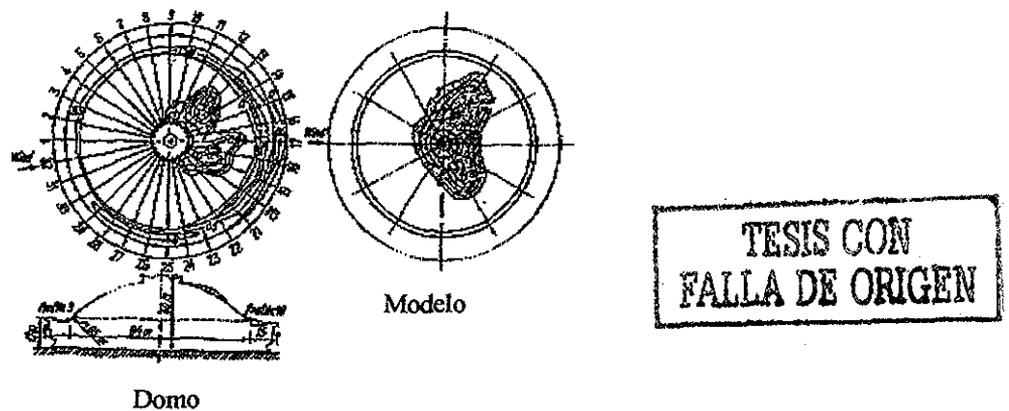


Figura 3.22: Acumulación de nieve teórica y acumulación de nieve obtenida mediante el modelo

La comparación de los factores de acumulación revelaron lo siguiente:

- 1) La máxima acumulación de nieve (en la cresta) para el modelo tuvo un coeficiente de 1.0 y el del domo fue 3.3
- 2) El coeficiente de acumulación de nieve promedio del modelo fue 1.0 y el del domo fue de 1.6
- 3) El índice de distribución de nieve sobre la superficie (techos) fue de 0.35 para el modelo, y de 0.16 para el domo
- 4) La proporción del coeficiente de acumulación máxima debida a nieve fue prácticamente el mismo, 2.05 para el domo y 2.32 para el arco superficial.

Las dimensiones de la sección del túnel utilizado para la prueba son 61 x 30 x 150 cm, el perfil de la velocidad fue constante y la velocidad de prueba fue de 6.3 m/s; el material empleado para simular la nieve fue polvo de aserrín de abeto. Los granos pequeños o iguales a 0.3 mm, son arrastrados por una velocidad de entre 2 m/s.

La escala geométrica de los modelos fue 1:100 y la capa uniforme de aserrín antes de la prueba fue de 5 cm de profundidad; la velocidad del viento simultánea fue de 2.25 m/s en la primera fase de la prueba y 3 m/s en la segunda. Para velocidades de viento arriba de estas, el aserrín es completamente expulsado del techo.

Se obtuvieron así el máximo y el promedio de los coeficientes de acumulación de nieve  $C_m = 1.6 - 4$  y  $C_s = 1.56 - 3.2$  así como el coeficiente lineal promedio de acumulación de nieve  $C_i = 1.8 - 3.34$  (a lo largo de una línea del techo).

### ***3.6 Cargas aplicadas para el análisis de algunas estructuras importantes en el mundo***

A continuación se muestran algunas estructuras sometidas a acciones de nieve y viento respectivamente (ref. 30 y 20).

#### ***3.6.1 Domo para las albercas del centro de diversiones Swindom en Inglaterra***

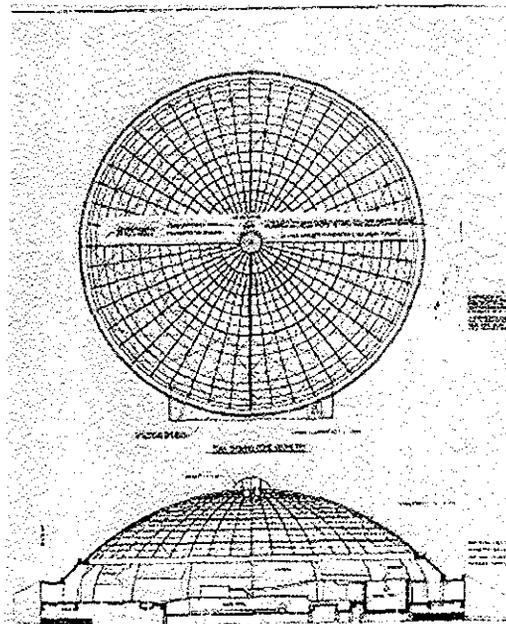


Figura 3.23 Centro de diversiones Swindom

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

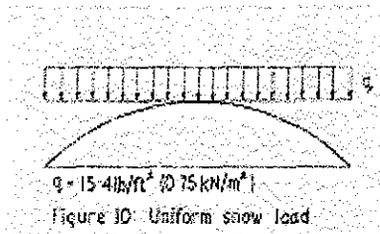
El diseño de este domo se realizó con una capa simple, de un domo reticulado, de aluminio en sus arcos y diagonales, y la incorporación de una capa simple de acrílico, para proporcionar una iluminación adecuada dentro del auditorio.

Los casos de carga considerados en este domo fueron los siguientes:

**3.6.1.1 Carga muerta:** se consideró una carga uniformemente repartida de  $43.98 \text{ Kg/m}^2$  encima de toda la cubierta del domo, la cual se extiende hacia abajo. Esta carga incluye el peso propio de la armazón de aluminio y el acrílico empleado en la estructura (ref. 30).

**3.6.1.2 Carga uniformemente repartida debida a nieve**

Se considero una carga uniformemente repartida de  $76.45 \text{ Kg/m}^2$ , al cual se consideró como carga vertical.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 3.24: Carga uniformemente repartida debida a nieve

**3.6.1.3 Carga asimétrica debida a nieve**

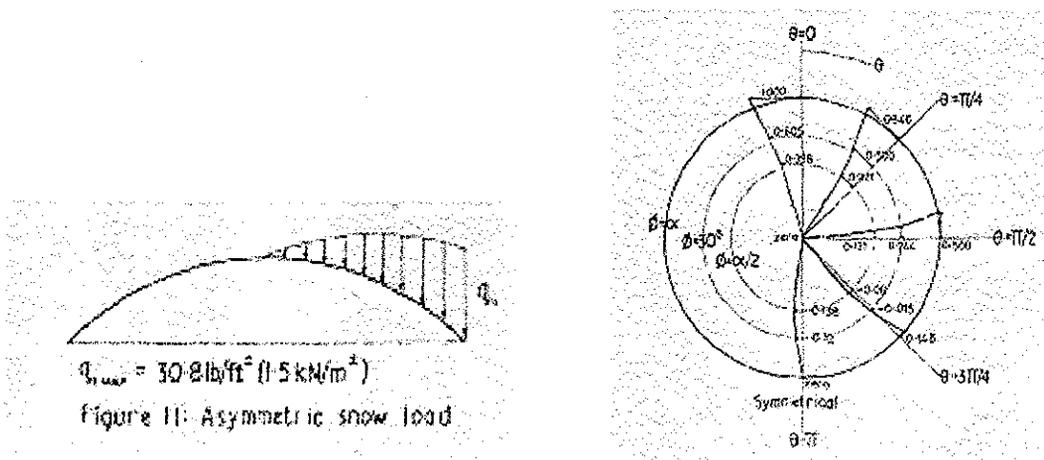
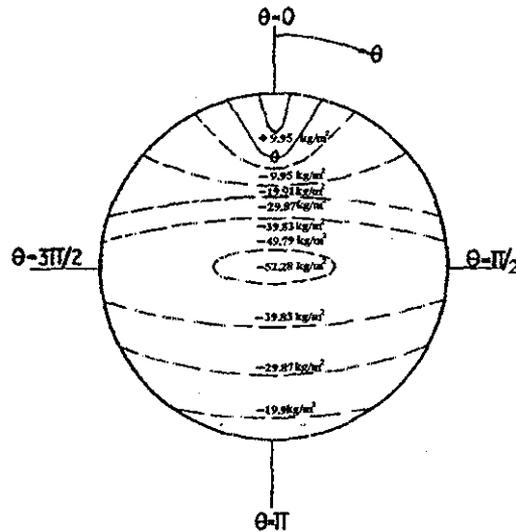


Figura 3.25: Carga asimétrica debida a la nieve

Para esta condición de carga se empleó  $153 \text{ Kg/m}^2$ , calculada con la siguiente ecuación:

$$q = q_1 \frac{a}{r} \left[ \frac{1}{2} \text{sen } \phi \cos \phi + \frac{\text{sen}^2 (1 - \cos \phi)}{2(1 - \cos^2 \phi)} \right] \quad (3.35)$$

**3.6.1.4 Viento:** La estimación real de la distribución de presiones debidas al viento se basó en los conocimientos de los resultados de una investigación previa realizada por la Building Research Establishment. La distribución que se ve en la figura 3.26, la cual, indica los valores de presión con -Ve y +Ve.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 3.26: Distribución de presiones debidas al viento

3.6.1.4.1 Presión interna o succión:

Los límites de la presión interna o succión, estipulada por la Building Research Establishment, fué igual a  $+ 23.94 \text{ kg/m}^2$  y  $-29.81 \text{ kg/m}^2$ , la presión interna es como se muestra en la figura 3.27:

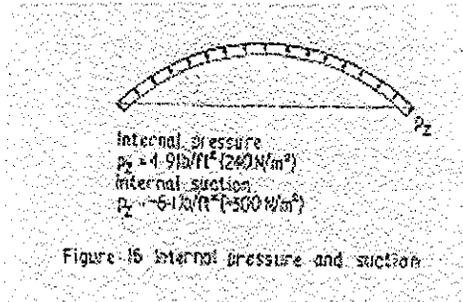


Figura 3.27 Presión interna y succión

3.6.1.5 Línea de carga en el anillo de la cima

Se consideró una línea de carga de  $391 \text{ Kg/m}^2$  uniformemente repartida alrededor de la circunferencia del anillo de la cima. Esto incluía el peso de los trabajadores y una carga por nieve de  $76.4 \text{ Kg/m}^2$ .

3.6.2 Poliedro de Caracas (Domo geodésico)

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

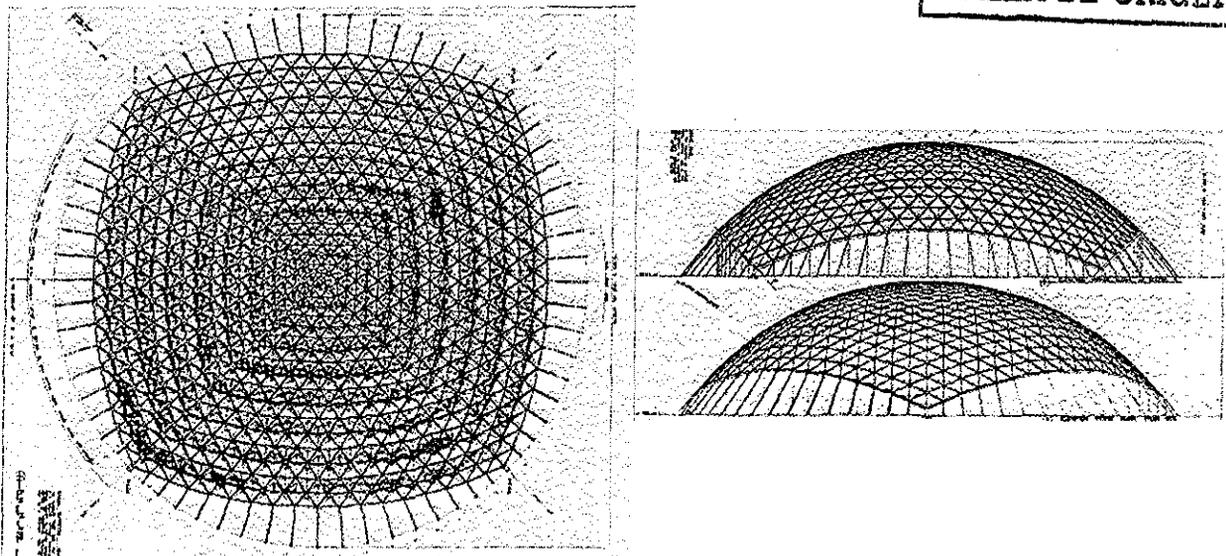


Figura 3.28: Poliedro de Caracas

Los análisis preliminares de ingeniería para el domo, se basaron en la consideración de las siguientes cargas:

**3.6.2.1 Sismo:** La zona en la que se construyó el domo equivale a la zona tres de respuesta sísmica en los E.U. (ref. 20). Para realizar los estudios del sismo se investigaron todos los antecedentes en este respecto que se tenían en la ciudad, con el objeto de determinar los coeficientes sísmicos, mediante una manipulación computacional.

**3.6.2.2 Carga viva:** La carga viva requerida por el reglamento de construcciones de Caracas fue  $154 \text{ Kg/m}^2$ , para construcciones hechas en la ciudad y en los límites de la misma.

**3.6.2.3 Carga debida a instalaciones:** La carga debida a los dispositivos que cuelgan del domo, se consideraron los efectos que produce la carga en la cima. Mientras que esta carga se aplica como una carga viva adicional en las juntas, se debe considerar que ésta se encuentra presente de una manera constante durante todas las fases de análisis y es similar a la aplicación de una carga muerta normal.

**3.6.2.4 Carga muerta:** La carga muerta de la estructura fue procesada directamente con un programa de ordenador digital y se aplicó con un factor de carga constante.

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE DOMOS.

*4.1 Domos tipo Lamella*

En domos para cubrir claros de entre 9.144 m y 182.88 m se usan lamellas; para su análisis se pueden dividir en dos grupos. Domos con juntas articuladas y domos con juntas rígidas (ref. 3). Esta distinción está hecha para diferenciar entre dos aproximaciones analíticas para el diseño de domos Lamella. Los nodos son usualmente considerados como articulados o rígidos. Los métodos de análisis varían y requieren de altas velocidades en los ordenadores para minimizar el tiempo, costo y errores numéricos.

Los métodos para analizar estos tipos de domos varían e incluyen técnicas de prueba en modelos, analogía de membrana y soluciones con armados espaciales.

Algunas variaciones de domos con juntas articuladas, se observan en las siguientes figuras y los identificaremos como tipo I.

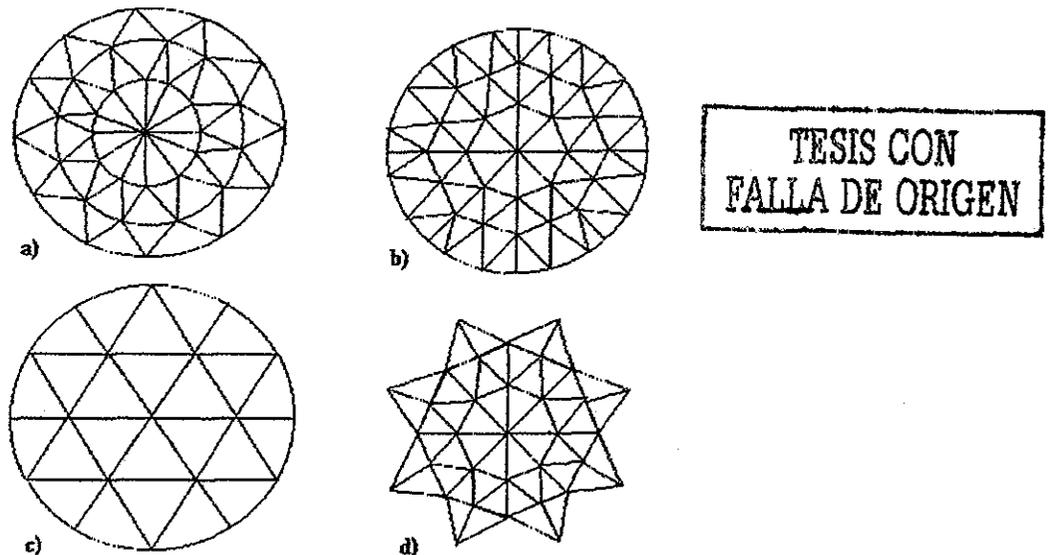


Figura 4.1 Tipos de domos Lamella

En la primera categoría de domos Lamella, los elementos mecánicos de las juntas articuladas se pueden determinar mediante un análisis estático, pero se

dificulta su aplicación cuando las cargas o la forma de armado no son simétricos. Una buena aproximación con armados simétricos o asimétricos, determinados o indeterminados, se describe a continuación.

#### **4.1.1 Análisis de elementos mecánicos**

Se utiliza un proceso iterativo similar al aplicado para la distribución de momentos en estructuras continuas, para conocer las fuerzas en los miembros, se recurre al método de rigideces, en el cual se aplican programas digitales de alta velocidad.

#### **Procedimiento**

- 1 Todas las fuerzas internas se consideran inicialmente iguales a cero.
- 2 Se selecciona un sistema cartesiano de coordenadas y se numeran todos los nodos.
- 3 Se permite que el nodo N-ésimo se traslade a cualquiera de las direcciones  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$  (este movimiento es causado por algunas de las fuerzas internas o externas aplicadas en los nodos), para posteriormente:
  - a) Resolver para los cambios de longitud en todos los miembros conectados a la junta, causados por la traslación de la misma
  - b) Relacionar los cambios en las fuerzas internas de los miembros con los cambios de longitud calculados en el paso anterior
  - c) Escribir las ecuaciones de la estática, al sumar las fuerzas internas y externas de la junta en las direcciones  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$  (esto, en términos de sus desplazamientos).
- 4 Se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas escritas en el paso 3c) para determinar los desplazamientos nodales.
- 5 Usar las relaciones del paso 3b) y 4) para determinar los cambios en las fuerzas internas de los miembros.
- 6 Sumar los cambios de las fuerzas en los miembros calculadas en el paso 5.
- 7 Mantener  $N$  igual al número consecutivo de nodo en la secuencia.
- 8 Repetir los pasos 3 al 7 para todos los nodos numerados.
- 9 Iniciar otra vez con  $N$  igual a 1 y repetir los pasos del 3 al 8, hasta que el cambio de todas las fuerzas en los miembros tenga un valor insignificante.

Generalmente todas las ecuaciones del paso 3 se pueden ordenar de manera matricial para cada nodo, para calcular la inversa y definir la matriz de coeficientes de los desplazamientos.

#### 4.1.2 Ecuaciones

Todas las ecuaciones requieren para su solución lo descrito en el paso 3. Las figuras 4.2b) y 4.2c) describen los desplazamientos en los nudos (i) para cambios de longitud en el miembro (i j).

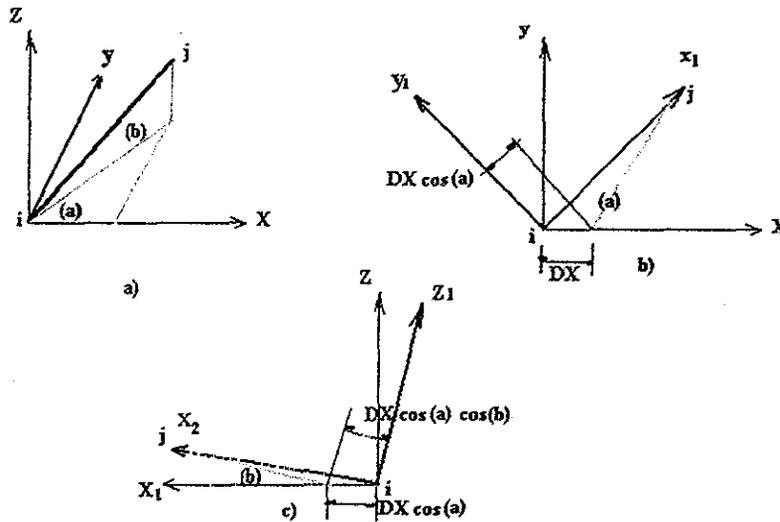


Figura 4.2: Rotaciones de el sistema de ejes

Así:

$$DL_{jix} = -DX * \text{Cos}(a) * \text{Cos}(b) \quad (4.1)$$

De la misma manera:

$$Y: \quad DL_{jiy} = -DY * \text{Sen}(a) * \text{Cos}(b) \quad (4.2)$$

$$DL_{jiz} = -DZ * \text{Sen}(b) \quad (4.3)$$

$$DL_{ji} = DL_{jix} + DL_{jiy} + DL_{jiz} \quad (4.4)$$

Para cambios en las fuerzas debidos a los cambios en la longitud:

$$DP_{ji} = (DL_{ji})(S_{ji}) \quad (4.5)$$

Donde:

$$S_{ji} = \frac{AE}{L} \quad (4.6)$$

es la rigidez del miembro  $ji$ ,  $P_{ji}$  es la sumatoria de todos los cambios previos en las fuerzas calculadas del miembro  $ji$  y  $PX$ ,  $PY$ , y  $PZ$  resultan de todas las fuerzas de la junta  $i$  paralelas al sistema cardinal original.

Por sumatoria de fuerzas:

$$\begin{bmatrix} FX_i \\ FY_i \\ FZ_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PX_i \\ PY_i \\ PZ_i \end{bmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

donde  $FX_i$ ,  $FY_i$  y  $FZ_i$  son las fuerzas externas aplicadas en el nudo  $i$  y además:

$$\begin{bmatrix} PX_i \\ PY_i \\ PZ_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 & B_4 & B_5 \\ B_4 & B_2 & B_6 \\ B_5 & B_6 & B_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} DX \\ DY \\ DZ \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Donde los elementos de la matriz de rotación de coeficientes  $B$  son:

$$B_1 = \sum S(\cos^2 a)(\cos^2 b)$$

$$B_2 = \sum S(\sin^2 a)(\cos^2 b)$$

$$B_3 = \sum S(\sin^2 b)$$

$$B_4 = \sum S(\sin a)(\cos a)(\cos^2 b)$$

$$B_5 = \sum S(\cos a)(\sin b)(\cos b)$$

$$B_6 = \sum S(\sin a)(\sin b)(\cos b)$$

El segundo tipo de domos Lamella, se forma con nodos rígidos y los identificaremos como del tipo II. Este tipo de domo es más complejo debido a la continuidad que existe entre los meridianos al cruzar el nodo. Generalmente

se construyen de acero y se emplean para claros más grandes de los que se pueden cubrir con los domos articulados.

El análisis para estos domos de tipo Lamella se describen en los siguientes pasos:

- 1 Se selecciona un sector del domo (como se muestra en la figura 4.3a)
- 2 Se construye un diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas externas, reacciones, fuerzas circulares en el anillo y el momento actuando en el sector de la corona. Solo se necesita analizar un sector si las cargas son rotacionalmente simétricas; de lo contrario, todos los sectores deben ser analizados
- 3 Se escriben las ecuaciones de desplazamientos horizontales para todos los puntos a lo largo de todos los meridianos
- 4 Se plantean las ecuaciones de desplazamiento horizontales para los anillos en las intersecciones meridionales
- 5 Se igualan los desplazamientos compatibles encontrados en los pasos 3 y 4
- 6 Se resuelven las ecuaciones simultáneas del paso 5 para determinar las reacciones entre los aros y los meridianos
- 7 Por estática, se resuelven las fuerzas internas de los miembros, así como los momentos.

A partir de los teoremas de Castigliano para el desplazamiento general, se tiene que:

$$DX = \frac{d(\text{Trabajo interno})}{d(\text{Fuerza virtual})} = \frac{\int d \left( \frac{P^2 dS}{2EA} + \frac{M^2 dS}{2EI} + \frac{V^2 dS}{2GA} \right)}{dQ_x} \quad (4.9)$$

que es la ecuación de desplazamiento horizontal del meridiano donde:

P : Fuerza axial

M: Momento flexionante

V: Fuerza cortante.

Al desarrollar la ecuación anterior se tiene:

$$DX = \int P \frac{\partial P}{\partial Q_x} \frac{dS}{EA} + \int M \frac{\partial M}{\partial Q_x} \frac{dS}{EI} + \int V \frac{\partial V}{\partial Q_x} \frac{dS}{GA} \quad (4.10)$$

Para simplicidad en la explicación, se usaron tres anillos del domo, en el desarrollo de las fórmulas bajo cargas simétricas (ver las figuras 4.3a y 4.3b).

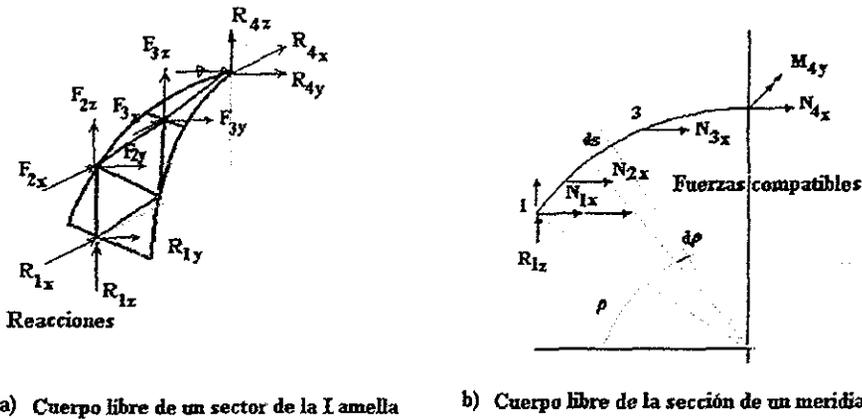


Figura 4.3: Análisis de un sector de la Lamella

Los desplazamientos del aro son :

$$DX = \frac{DL}{2} (\text{Cosec}(a)) = \frac{Pr Lr}{2EA} (\text{Cosec}(a)) \quad (4.11)$$

Donde Lr es la longitud del anillo

$$Nx = 2Pr \text{Sen}(a) \rightarrow Pr = \frac{Nx}{2\text{Sen}(a)} \quad (4.12)$$

Al sustituir 4.12 en 4.11 se obtiene:

$$DX = \frac{NxLr}{4EASen^2 a} \quad (4.13)$$

La ecuación 4.13 establece el desplazamiento horizontal del anillo en la junta. Al reescribir las ecuaciones 4.10 y 4.13:

$$(DXn) + (DX\omega) = (DXr) \quad (4.14)$$

Donde (DXn) y (DXω) son los desplazamientos horizontales de la junta en el meridiano, debido a las fuerzas de reacción horizontal y a la reacción de las cargas externas respectivamente.

(DXr) Es el desplazamiento horizontal del anillo.

$$(DX_n) = \begin{bmatrix} DP_1 & DM_1 & DV_1 \\ DP_2 & DM_2 & DV_2 \\ DP_3 & DM_3 & DV_3 \end{bmatrix} \quad (4.14a)$$

donde DP, DM, y DV son desplazamientos debidos a la energía de la fuerza axial, momento y cortante respectivamente para las juntas meridianas.

Donde:

$$(DP) = \begin{bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ DP_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^4 DP_1 & \sum_2^4 DP_1 & \sum_3^4 DP_1 \\ \sum_2^4 DP_2 & \sum_2^4 DP_2 & \sum_3^4 DP_1 \\ \sum_3^4 DP_3 & \sum_3^4 DP_3 & \sum_3^4 DP_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N1x \\ N2x \\ N3x \end{bmatrix} \quad (4.14b)$$

en la ecuación 4.14 a)

$${}^N DP_i = (\text{Sen} \rho) \frac{\partial P}{\partial N_i} \frac{dS}{EA} \quad (4.14c)$$

Se puede escribir una matriz de expansión para momento y cortante de energía, al cambiar el subíndice P en la ecuación 4.14b por M y V respectivamente donde:

$$DM_i = Z_j \frac{\partial M}{\partial N_i} \frac{dS}{EI} \quad (4.14d)$$

Dado  $Z_j$  es la distancia vertical a la fuerza horizontal, se puede hacer una expansión de matriz para  $(DX_\omega)$ .

Expansión de  $(DX_r)$ :

$$(DX_r) = \begin{bmatrix} \frac{L_1 r N_{1x}}{A_1 r (\text{Sen}^2 a_1)} \\ \frac{L_2 r N_{2x}}{A_2 r (\text{Sen}^2 a_2)} \\ \frac{L_3 r N_{3x}}{A_3 r (\text{Sen}^2 a_2)} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

De acuerdo al paso 5, la ecuación 4.14 puede ahora ser resuelta para obtener las fuerzas de reacción horizontales entre aros y meridianos.

## ***4.2 Domos reticulares tridireccionales***

De lo que se encuentra escrito acerca del análisis de la estabilidad, algunos métodos están basados en el concepto de la cubierta equivalente (el cual tiene sus limitaciones), y en relacionar la estabilidad de trabajo del armazón con el pandeo axisimétrico de la cubierta. Otros consideran casos de pandeo local en un domo regular (ref.4). También se han desarrollado métodos mediante análisis numéricos para las armazones de domos simétricos.

A continuación, se proporciona un análisis de los problemas de estabilidad asociados a los domos simétricos con una parrilla de triángulos del tipo 'Anillos y espirales'.

Las restricciones de este estudio dependen del comportamiento estructural y de la inestabilidad.

### ***4.2.1 Inestabilidad de un anillo rígido discontinuo***

Para un domo como el mostrado en la figura 4.5 existen varios modos de inestabilidad que son potencialmente críticos, pero también es claro que las discontinuidades en la parrilla espacial ocurren en dos de los anillos en los cuales se tienen esfuerzos locales severos, además de deformaciones y pandeo local de los miembros estructurales.

Para analizar el pandeo de anillos rígidos, compuestos de miembros rectos rígidamente conectados en sus extremos y conectados con bisagras o articulaciones a las diagonales adyacentes, se puede considerar lo siguiente:

El domo está sometido a una carga muerta axisimétrica, se considera con esto, que las cargas están concentradas en los nudos y permanecen constantes en magnitud y dirección bajo la deformación del domo. Las fuerzas en el anillo y todas sus diagonales adyacentes se pueden determinar en este caso por estática y simetría.

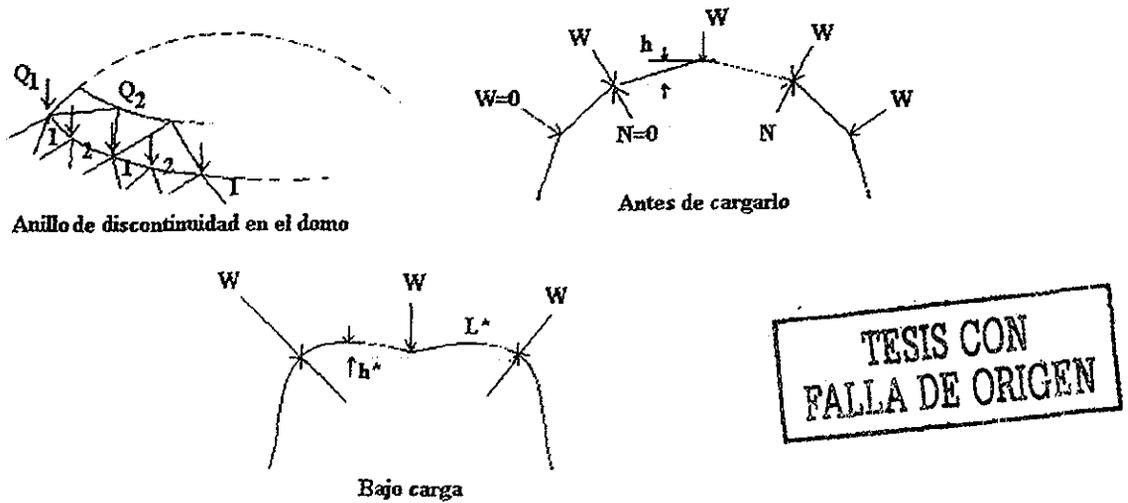


Figura 4.4: Comportamiento de un anillo de discontinuidad

La estabilidad del anillo se analiza aislándolo y cargándolo con fuerzas  $W$  y  $N$ . Estas fuerzas son relacionadas con las fuerzas en los miembros que ya fueron determinadas por los requerimientos de equilibrio. El anillo contiene un gran número de nodos, cada uno de estos nodos tiene un número promedio de seis grados de libertad, y de aquí un igual número de modos de inestabilidad. Los estudios pueden, sin embargo, ser limitados razonablemente a tres de éstos, a saber: pandeo fuera del plano con nodos consecutivos desplazados arriba y abajo del plano del aro respectivamente; y pandeo plano en el cual dos miembros consecutivos se mueven hacia el centro, a la vez que los siguientes dos miembros se mueven lejos del centro, y en el tercer modo ocurre una inestabilidad súbita en todos los nodos que se mueven radialmente.

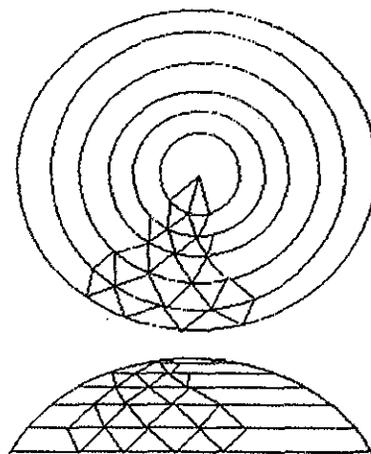


Figura 4.5: Retícula de un domo simétrico

Al considerar la configuración deformada del aro de la figura 4.4, su notación, equilibrio, compatibilidad y acción elástica lineal, se puede expresar que:

$$W = 2 \left( \frac{PL}{h^*} + V \right) \quad (4.16)$$

donde:

$$P = EA \frac{\Delta L}{L} \quad (4.17)$$

$$\Delta L = - \frac{(h^2 - h^{*2})}{2L} + \frac{2\pi v}{n} \quad (4.18)$$

$$V = \frac{12r^2 EA (h - h^* + v)}{L^3} \quad (4.19)$$

La carga del arco está considerada en dos pasos. Primero, se encuentran las deformaciones para la carga uniforme  $W$  y posteriormente para las fuerzas  $N$  actuando en el arco cargado anteriormente por  $W$ . Las deformaciones pueden ser definidas por superposición:

$$v = v_{(1)} + v_{(1+2)} \quad (4.20)$$

$$\Delta L = \Delta L_{(1)} + \Delta L_{(1+2)} \quad (4.21)$$

Para la primera carga  $N=0$  y  $h=h^*$

$$v_{(1)} = \left( \frac{n}{2\pi} \right) \Delta L_{(1)} = \frac{Whn}{4\pi EA} \quad (4.22)$$

Por un análisis de pandeo y al despreciar el incremento de la flexibilidad de los miembros ocasionado por las fuerzas axiales, se obtiene:

$$v_{(1+2)} = \frac{NL^2 h^* n}{96\pi EI} \quad (4.23)$$

$$\Delta L_{(1+2)} = \frac{NnL}{4\pi EA} \quad (4.24)$$

Los valores de las ecuaciones 4.22, 4.23, y 4.24 insertados en las ecuaciones 4.20 y 4.21 que a su vez se introducen en las ecuaciones 4.16 y 4.19, da un equilibrio que relaciona las cargas  $W$  y  $N$  con el parámetro de deformación  $h^*$ . Estas cargas estáticas pueden ser remplazadas por una carga viva uniformemente repartida sobre el domo.

De esta manera, el factor de carga está relacionado con el parámetro de deformación  $h^*$  y puede determinarse la presión de pandeo súbito.

Si las diagonales son continuas y están rígidamente conectadas al arco de discontinuidad, y si tienen rigidez a la flexión comparable con las del arco, el análisis antes presentado no es válido, la región de flexión se extenderá dentro de la cubierta abajo del aro de discontinuidad y el modelo de deformación llega a ser demasiado complejo.

Como se han mostrado resultados en publicaciones previas (ref. 4), el comportamiento en este respecto es caracterizado por el parámetro de esbeltez del domo: :

$$\alpha = \left(\frac{L}{r}\right)\left(\frac{L}{R}\right) \quad (4.25)$$

Los domos que tienen una  $\alpha$  menor que 1 (aproximadamente) resisten deformaciones principalmente por acción de flexión.

Si  $\alpha$  es mayor que 25 (aproximadamente), la flexión es insignificante en comparación con las fuerzas axiales en la medida que el pandeo local de un domo regular de enrejado triangular aparece. Éstas mismas limitaciones pueden ser razonablemente aceptadas para la aplicación al aro de discontinuidad en este tipo de domos.

En la ecuación anterior:

L Es la longitud del elemento

R Radio de la superficie esférica del domo

r Radio de giro de un elemento

#### 4.2.2 Inestabilidad de una junta de discontinuidad en un domo con juntas articuladas

Al considerar los elementos conocidos de una junta discontinua con una carga uniforme  $W$  aplicada en el plano del aro, alguna componente de la carga que está aplicada fuera de este plano se transmite a través de las diagonales marcadas en la figura siguiente.

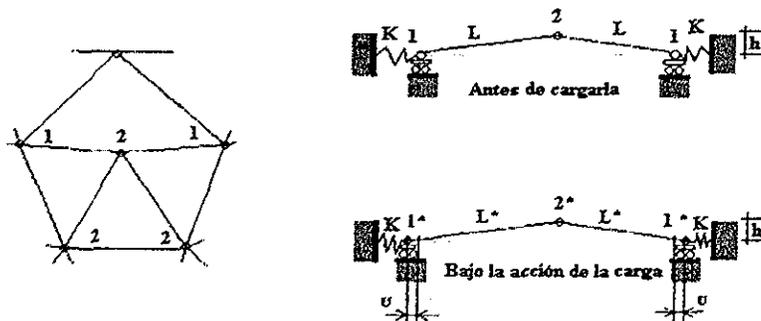


Figura 4.6: Pandeo local súbito de una junta

Bajo la carga  $W$  el nudo 2 se mueve a  $2^*$  y  $h$  se reduce a  $h^*$ ; el nudo 1 se considera que está apoyado en rodillos sostenidos por los resortes cuya rigidez es:

$$K = \frac{EA}{L} \quad (4.26)$$

La rigidez relativa equivalente  $K$  debe ser determinada posteriormente. Los nudos sufren un desplazamiento tangencial  $u$ .

Por condiciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento lineal elástico se tiene que:

$$W = \frac{2Ph^*}{L} \quad (4.27)$$

$$\Delta L = -\frac{(h^2 - h^{*2})}{2L} + u \quad (4.28)$$

$$P = \frac{EA\Delta L}{L} \quad (4.29)$$

$$u = \frac{P}{K} \quad (4.30)$$

Al sustituir las ecuaciones 4.28 - 4.30 en 4.27 se obtiene:

$$W = \frac{Kh^*(h^2 - h^{*2})}{L^2 \left( \frac{KL}{EA} + 1 \right)} \quad (4.31)$$

Al maximizar  $W$  con respecto a  $h^*$  se encontró que la deformación crítica está dada por:

$$h^* = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (4.32)$$

$$y \dots W_{cr} = \frac{2Kh^3}{3\sqrt{3}L^2 \left( \frac{KL}{EA} + 1 \right)} \quad (4.33)$$

Que es el valor de la carga máxima que puede soportar la junta.

La rigidez relativa de la junta 1 está determinada para un suficiente grado de aproximación para considerar separadamente las dos partes del siguiente entramado.

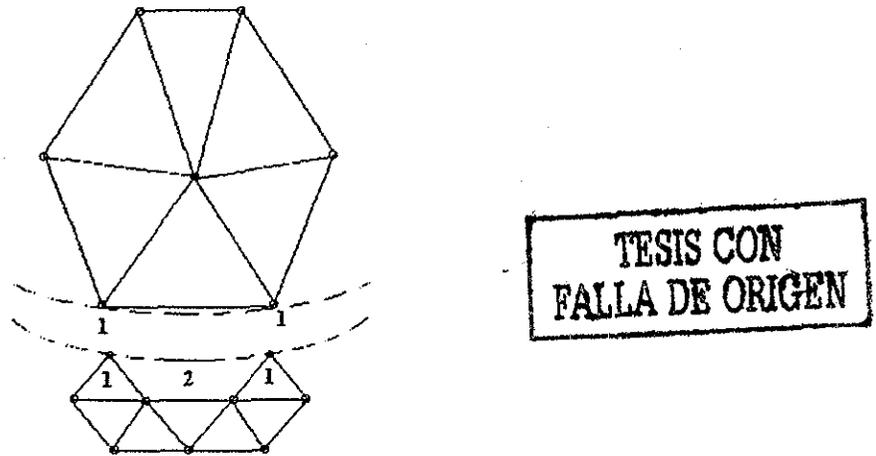


Figura 4.7: Partes de la estructura utilizadas para calcular la rigidez relativa

### 4.3 Domos formados por miembros primarios, secundarios, y terciarios en su arreglo estructural

En el análisis para este tipo de domos es necesario hacer algunas consideraciones, de manera que se puedan utilizar métodos y herramientas que no afecten la distribución de esfuerzos de una manera considerable (ref. 5).

La investigación acerca del comportamiento en la construcción de este tipo de domos se puede estudiar en dos partes: un análisis teórico y el análisis experimental de un modelo a escala.

#### 4.3.1 Métodos analíticos

Los métodos de análisis aplicados a este tipo de domos se basan en tres relaciones fundamentales que son: relación esfuerzo-deformación, condición de compatibilidad y condición de equilibrio. Este tipo de domos son siempre indeterminados en algunas regiones, bajo distintas consideraciones de las juntas, la aplicación de las condiciones de equilibrio no son suficientes para la solución de la estructura.

Una junta articulada se considera como una junta de fricción que solo transmite fuerzas axiales a los miembros. Cuando se consideran nodos rígidos

o parcialmente rígidos, se provee continuidad al nodo en una o más direcciones y las fuerzas axiales, torsionales y momentos se pueden transmitir a los miembros.

### a) *Método de la compatibilidad*

El método de la compatibilidad, se aplica a este tipo de domos en términos de coeficientes de tensión en los miembros primarios de la estructura, debido a fuerzas unitarias en los miembros redundantes y a las cargas externas de la estructura. Después de aplicar la condición de compatibilidad, los valores de las fuerzas redundantes se obtuvieron con la siguiente ecuación, la cual está escrita en forma matricial:

$$FS + U' = 0 \quad (4.34)$$

Donde  $F$  es la matriz de flexibilidad, simétrica e independiente de la matriz de cargas externas  $U'$ , y  $S$  representa las fuerzas redundantes desconocidas. Con el conocimiento de estas fuerzas redundantes, se pueden obtener las fuerzas axiales en todos los miembros de la estructura. Para la aplicación de este tipo de método, se pueden encontrar algunos programas digitales para buscar la solución.

### b) *Métodos de análisis de equilibrio*

Este método de análisis se aplica al utilizar un programa digital que incorpora una técnica de eliminación de bloque mediante la cual, la matriz de rigidez se pueda resolver por grupos.

La ecuación básica del método de equilibrio es:

$$Kd = I \quad (4.35)$$

Esta ecuación puede ser dividida, por ejemplo, en cuatro grupos que se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Los términos  $a_{11}$  .....  $a_{44}$  representan grupos de elementos de la matriz de rigidez  $K$ . Los términos  $X_1$  .....  $X_4$  representan los desplazamientos y rotaciones de los nodos y  $l_1$  .....  $l_4$  son los vectores de cargas externas.

c) *Análisis experimental de un modelo a escala*

El prototipo de la estructura propuesta se formó a partir de un entramado primario con el propósito de sostener a la estructura. Posteriormente se provee de arriostramiento a estos elementos con miembros secundarios y terciarios, que soportan el peso del recubrimiento y lo distribuyen a los miembros primarios.

El arreglo de estos elementos se muestra en la figura 4.8:

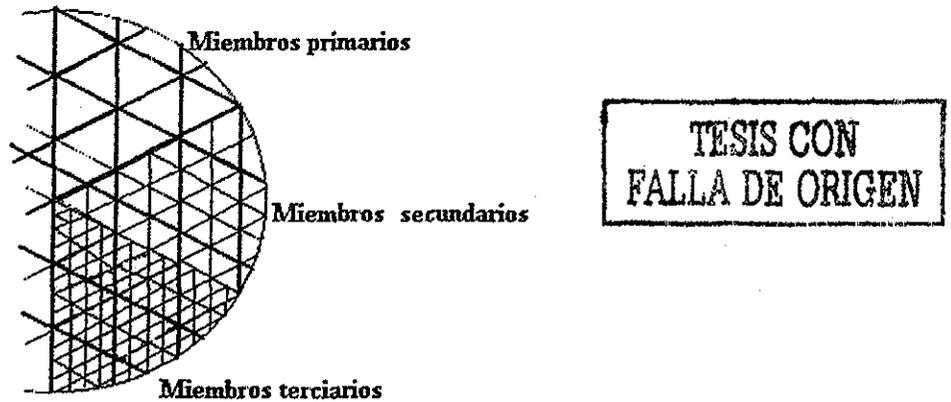


Figura 4.8: Miembros primarios, secundarios y terciarios de un domo

Los miembros primarios se forman con perfiles rectangulares, los secundarios de sección I, y terciarios de perfiles tubulares. Todos los miembros son curvos y se colocan en grandes círculos de la esfera. El modelo se diseña para ser similar en desplazamientos debidos a las fuerzas axiales y momentos flexionantes alrededor del eje principal de flexión. Se puede demostrar que los desplazamientos del modelo y las del prototipo son similares y se tiene que:

$$\frac{(L_m)^2 (AE)_m}{(L_p)^2 (AE)_p} = \left( \frac{I_m}{I_p} \right) \quad (4.37)$$

y

$$\frac{m}{p} = \frac{L_m W_m (AE)_p}{L_p W_p (AE)_m} \quad (4.38)$$

donde  $m$  se refiere al modelo y  $p$  al prototipo de la estructura.

De las relaciones entre las ecuaciones 4.37 y 4.38, una sección de un miembro del modelo se encontró para dar un factor de escala de longitud de aproximadamente 1/15. Los miembros secundarios no pueden ser escogidos por no cumplir con los factores de escala.

El modelo de la estructura, se analizó bajo tres condiciones de carga, que son:

- A) Carga uniformemente repartida en todo el domo
- B) Carga asimétrica, que puede ser cargada uniformemente solo en la mitad del domo
- C) Carga concentrada en la cima del domo

Lo anterior es para estudiar la condición más crítica con la que se puede cargar el domo, y registrar su comportamiento.

Para hacer los análisis del modelo, éste se forma primeramente con los miembros primarios y posteriormente los miembros secundarios y terciarios.

La prueba se realiza, aplicando carga en los nudos y se incrementa la misma cuatro o cinco veces, con lecturas de las deformaciones en cada incremento de carga.

Para algunas cargas, las pruebas se repiten en varias ocasiones, se trazan las gráficas de carga-esfuerzo y carga-desplazamiento, y se unen los puntos que se obtienen de las lecturas. Con todo lo anterior, es posible conocer las fuerzas axiales, los momentos flexionantes y los desplazamientos que producen las cargas aplicadas al modelo.

#### d) *Análisis teórico*

Para este tipo de análisis se aplican las mismas condiciones de carga que las empleadas en el análisis del modelo de la estructura.

Para estudiar los posibles efectos en la estructura, se hacen las siguientes consideraciones en las conexiones y soportes de la misma:

- 1) Todas las juntas y apoyos son articulados
- 2) Las juntas proveen de continuidad en el plano principal de flexión a los miembros, lo cual permite la transmisión de los momentos flexionantes alrededor del eje de las barras

3) Las juntas proveen de continuidad (como en el inciso 2), a los apoyos contra la rotación alrededor del eje principal de flexión, pero se consideran articulados en las otras direcciones.

En todas estas suposiciones se consideraba que el anillo de soporte no permite deformaciones.

### ***Resultados teóricos***

Los resultados del análisis A1 y B1 (A1 se refiere a cargas del tipo A y suposiciones analíticas de tipo 1), se obtuvieron por los métodos de equilibrio y el método de la compatibilidad siendo estos similares.

En el análisis del tipo A3, la influencia de continuidad en los miembros hace que las fuerzas axiales que se presentan en la parte más alta del domo sea despreciable, mientras que, en los miembros de apoyo son de mayor consideración. En este tipo de análisis se transmiten grandes momentos alrededor de las juntas cercanas al apoyo. En el caso A2, la rotación de los miembros de soporte en la base son restringidos; además, el equilibrio de las juntas se mantiene debido principalmente a flexión y a que las fuerzas axiales son menos significativas.

El trabajo total de las fuerzas externas que actúan en la estructura, se reduce por la introducción de una junta rígida. Este resultado concuerda con el teorema de Argyris (ref. 6 y 12), el cual establece que la energía de deformación de un sistema elástico bajo un grupo de fuerzas es máximo cuando a la estructura se le colocan un número mínimo de restricciones lo que sucede en una estructura articulada, puesto que no existe la mejor distribución de los esfuerzos en toda la estructura.

Bajo la carga asimétrica, (caso c), se obtuvo que los efectos en la estructura a base de miembros continuos y nudos rígidos son mucho mayores, ya que ocurre una mejor distribución de esfuerzos; con ello se establece que para el tipo de carga asimétrica, las condiciones de los nodos y de los soportes juegan un papel muy importante en las estructuras, lo que no se vería si se realizara un análisis con carga uniforme para diferentes condiciones de los nodos y los soportes.

Los resultados obtenidos experimentalmente, coinciden con los resultados analíticos y solo existen pequeños ajustes por la corrección de escala; otra posible causa, es que los miembros en el modelo son curvos y no rectos como se supone en el análisis; una última causa podría ser la dificultad en la elaboración de las juntas en el prototipo o modelo.

#### 4.4 *Análisis por la teoría de la membrana*

Cuando en una placa se aplican fuerzas en el plano medio de su configuración inicial se producen esfuerzos en las secciones, cuya resultante por unidad de ancho recibe el nombre de, fuerza de membrana.

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento de un cascarón, según la teoría de la membrana, no contienen términos relacionados a los desplazamientos, y en realidad representan simplemente los requerimientos de equilibrio estático en dos direcciones principales en la superficie del cascarón, y entre las fuerzas del mismo, además de las componentes normales de carga en la superficie.

La teoría de la membrana simple, es adecuada para la forma de la superficie media del cascarón de curvatura positiva. Las fuerzas de membrana, se encuentran estáticamente determinadas; aparecen indeterminaciones únicamente en la vecindad de los soportes, como sucede en vigas. La teoría de la membrana, es inválida cuando los bordes se cargan con momentos o cortantes, o cuando las cargas concentradas significativas tienen componentes normales a la superficie del cascarón y son aplicadas en cualquier parte, debido a que el cambio de curvatura es alto. Sin embargo aún en estos casos, es simple determinar perturbaciones locales y aplicar éstas como correcciones en la solución de la membrana, que será válida en la mayor parte de la superficie del cascarón.

Para un cascarón reticular, con patrón de división de superficie que acepte tres componentes del campo de fuerzas de membrana  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$ , se pueden relacionar las fuerzas de membrana y fuerzas en las barras y se pueden usar en el diseño y el análisis de cascarones reticulares.

En un cascarón de espesor  $\delta$ , muy pequeño en relación con sus otras dos dimensiones, se supone que no existen momentos de flexión ni de torsión. Las fuerzas elásticas producidas bajo la acción de esta carga, son transmitidas a la superficie media, hacia los apoyos y los miembros de borde; se trata, de fuerzas uniformemente distribuidas en la sección.

Los esfuerzos internos que actúan sobre las caras de un elemento diferencial, del cascarón, mediante corte por planos normales, pueden ser integrados en el espesor de la lámina y considerarse localizados en la línea media de cada sección. El estudio del equilibrio de la partícula se reduce, de esta manera, al del correspondiente elemento de la superficie media.

La deducción de las ecuaciones de la membrana se ha hecho, tradicionalmente, por proyección del conjunto de fuerzas internas y externas

sobre la normal y el plano tangente; esto conduce, en general, a soluciones muy complicadas. Se debe a Pücher (ref 11) un planteamiento nuevo:

Se determinan, para ello, los elementos de superficie, de manera que su proyección sobre el plano XY, del sistema de ejes coordenados ortogonales, permita considerar las fuerzas internas en direcciones paralelas a los lados. Se consigue con este procedimiento, que las fuerzas situadas en la superficie, y las correspondientes del plano de base, queden ligadas por una relación sencilla.

Para que no existan giros, debe verificarse, la igualdad de los esfuerzos tangenciales sobre los lados continuos del elemento:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau \quad (4.39)$$

**Equilibrio de un elemento diferencial de superficie**

Sea el elemento ABCD, aislado de la superficie  $z = f(x,y)$ , que se proyecta sobre un plano XY, según el paralelogramo A'B'C'D' de lados  $dx$ ,  $dy$  y un ángulo  $\omega$ . Los esfuerzos  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $V$ ,  $T$  son fuerzas por unidad de longitud en el espesor  $\delta$ , mientras que los componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la carga, son fuerzas por unidad de superficie proyectada.

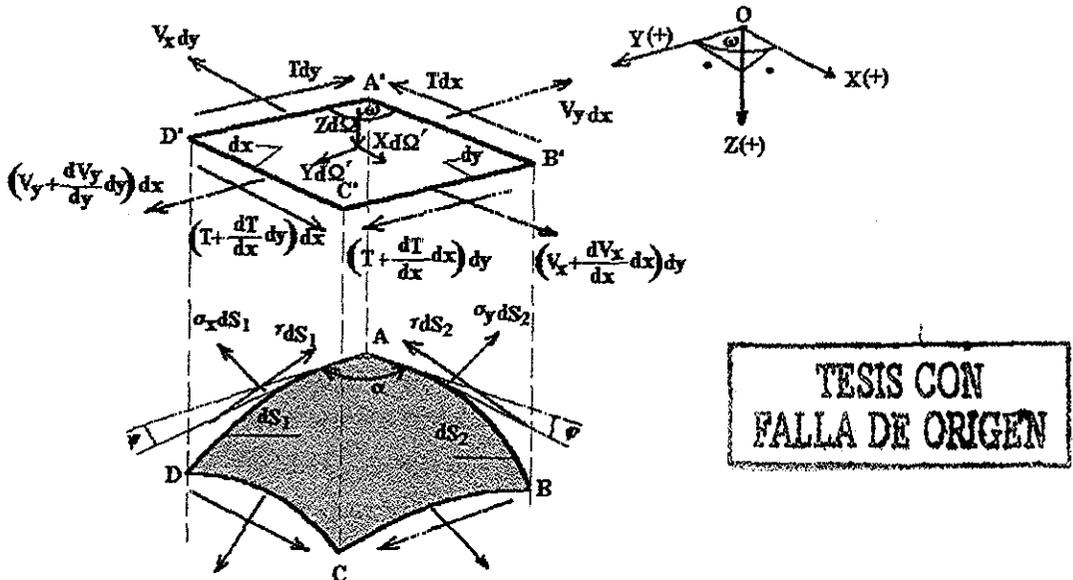


Figura 4.9: Equilibrio de un elemento diferencial de superficie

Los sentidos indicados en la figura, tanto para los ejes coordenados como para las fuerzas, se consideran positivos. Dichas fuerzas representan la acción de la parte de la superficie suprimida y de la carga exterior sobre el elemento aislado.

Puesto que el paralelogramo se encuentra en equilibrio bajo la acción del conjunto de fuerzas internas y externas, su proyección sobre el plano XY resulta ser otro elemento en equilibrio.

## 4.5 Domos geodésicos

### 4.5.1 Precedentes históricos

Los primeros estudios de este tipo de domos llamados geodésicos, se deben a R. Buckminster Fuller en 1949. Un prototipo de este domo fue diseñado y construido por Jeff Lindsay (ref. 21) en Canadá, en ese mismo año.

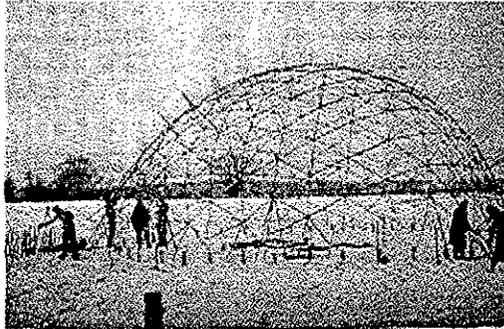


Figura 4.10: Estructura ensayada en Canadá en 1949

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

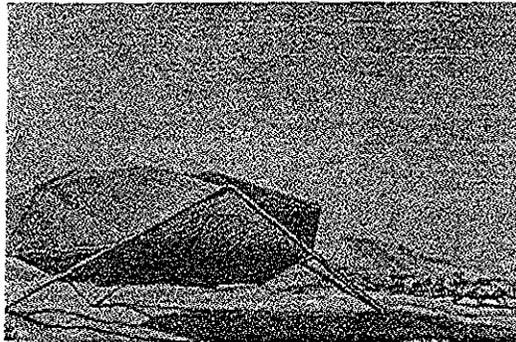
Dada una retícula estructural para el domo, se desarrollaron formas para cubrirlo para lograr un buen resguardo. Además, si estos recubrimientos eran lo suficientemente buenos para asegurar una barrera entre el contenido interior y el medio ambiente exterior, también se podrían usar para llevar una parte de la carga que actúa sobre la estructura; de hecho, la cubierta podría llegar a reemplazar la armazón y convertirse en la estructura total.

Este concepto, lleva a una serie de estudios independientes en los efectos y factores involucrados en las formas que componen el cascarón. Los estudios realizados incluyen muchas diferentes formas de superficie, tales como esferas, paraboloides hiperbólicos, así como otra serie de superficies sin nombre.

Un particular interés, fue puesto en la interacción entre algunas formas estructurales de gran dimensión. Estos estudios incluyeron consideraciones de estabilidad local, grandes desplazamientos y pandeo. Uno de los primeros

resultados útiles del invento, fue el desarrollo de un método práctico de construcción de paneles, con forma de paraboloides hiperbólicos.

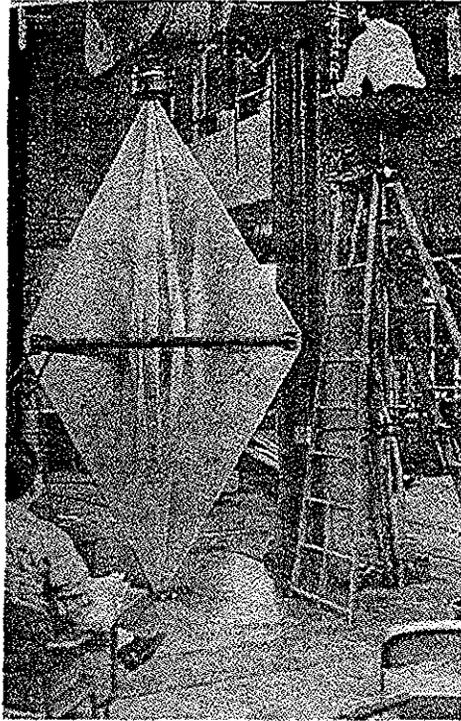
La cubierta *Faceted hp* fue inventada y patentada por Don L. Richter (ref. 21), la cual, la propuso para solucionar problemas de albergue.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 4.11: Cubierta Faceted hp

El primer problema propuesto de tener albergues surgió en Hawai en el año de 1957<sup>(21)</sup>, que consistió en diseñar y construir un domo de aluminio de este tipo. El sistema estructural se hizo a base de una retícula estructural, cubierta por paneles y cuya forma se muestra en la figura 4.12.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 4.12: Ensayo de paneles prefabricados para la construcción del domo

Un total de 162 paneles se probaron; se obtuvieron sus propiedades estructurales y se llegó a una forma óptima, la cual, tiene las siguientes dimensiones: 3.6 metros de longitud del panel, el cual está construido a base de una aleación de aluminio 6061T-6 con 0.2 centímetros de espesor, y su capacidad de carga puede variar entre 3000 y 5500 Kg.

Con el mismo sistema se construyó en N.Y., el Murray Athletic Education Center (figura 4.13), en el cual se construyeron tres domos de tipo geodésicos interconectados entre sí, los cuales tienen un claro cada uno de 71 metros, con una altura de 19 m en el centro del domo y un área de 3530 m<sup>2</sup> cada uno. Los más de 33000 paneles de aluminio que se emplearon, fueron ampliamente analizados y diseñados con una adecuada precisión.

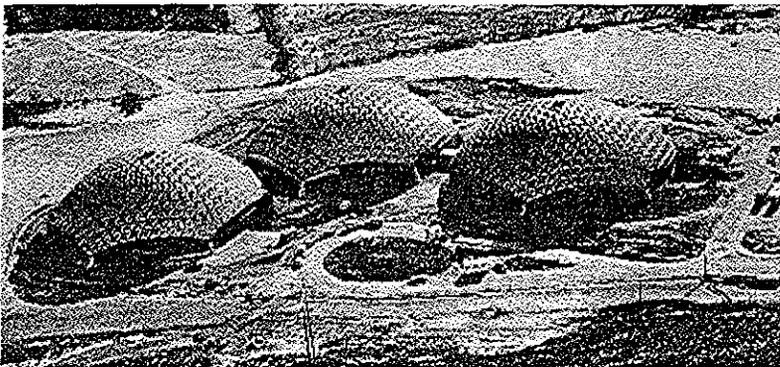


Figura 4.13: Murray Athletic Education Center, NY.

Se mostró que para la construcción de este tipo de domos la eficiencia y rapidez es muy alta, además de que el uso de domos geodésicos de aluminio es una muy buena opción por lo antes mencionado.

#### ***4.5.2 Domos geodésicos tipo Crystogon***

En este tipo de domos, se emplean paneles triangulares de acrílico que están fijados a una estructura espacial de aluminio (ref. 21). Los paneles no participan en el trabajo estructural y únicamente transmiten cargas a la retícula de aluminio, los cuales pueden ser formados de un material transparente o de un material coloreado, con el objeto de controlar la energía solar que penetre el domo.

Los domos tipo Crystogon, se emplean en una gran variedad de aplicaciones, como invernaderos y criaderos de aves, así como tragaluces en restaurantes y en otras construcciones públicas. En las albercas se utilizan para proporcionar energía solar y mantener la temperatura de las mismas. La obra más importante de este tipo es el parque zoológico de Topeka, en Kansas.

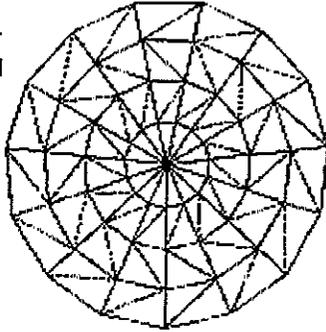
#### ***4.5.3 Domo geodésico Polyframe***

Este domo geodésico, emplea vigas de patín ancho de aluminio y los paneles que se utilizan en la cubierta tienen marcos de aluminio en su periferia, los cuales son de forma triangular y al igual que para los domos Crystogon, no tienen ninguna función estructural (ref. 21). Este tipo de domos es ampliamente usado para cubrir grandes áreas. Al emplearlo, se tienen grandes ventajas, una de las cuales es el ahorro de material y por lo tanto disminuye el peso de la estructura. Por ejemplo, si se quisiera construir un domo de 12.7 metros de diámetro y se emplea este tipo de domos, el peso total de la estructura solo será de un 3.7 por ciento del peso de una cubierta similar de concreto y del 10 por ciento del peso de una estructura de acero.

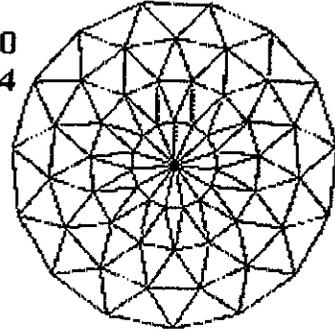
En resumen, al comparar cuatro tipos de domos de los más comúnmente usados en la construcción, los cuales tienen las mismas propiedades de materiales, características geométricas, mismo tipo de conexiones, etc., se tiene lo siguiente:

Si se observa la figura 4.14 puede verse una comparación entre los domos de tipo Schwedler, Lattice, Lamella y geodésicos.

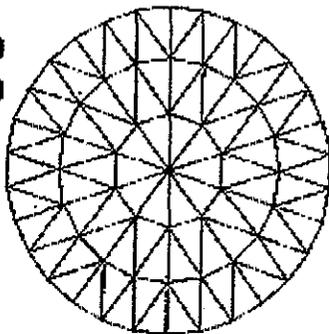
**DOMO  
SCHWEDLER**  
Resistencia 30  
Rigidez 5



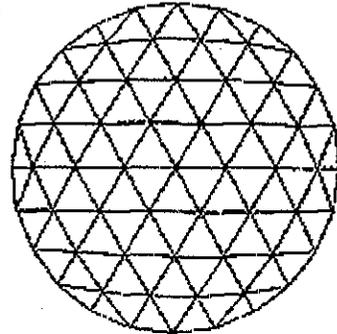
**DOMO  
LATTICE**  
Resistencia 50  
Rigidez 54



**DOMO  
LAMELLA**  
Rigidez 100  
Resistencia 70



**DOMO  
GEODESICO**  
Resistencia  
relativa 100  
Rigidez  
relativa 100



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

Figura 4.14: Comparación estructural entre cuatro tipos de domos

Con los resultados de la figura 4.14, se puede observar que el domo tipo Lamella ofrece más ventajas que los del tipo Schwedler y Lattice, una de ellas es que casi todos los miembros tienen la misma longitud; sin embargo, el domo geodésico presenta una mayor ventaja en este sentido, ya que está construido a base de triángulos equiláteros

Los resultados del estudio anterior se muestran en la tabla 4.1.

Resultados del análisis estructural aplicado a los domos

TIPOS DE DOMOS	SCHWEDLER		LATTICE	LAMELLA	GEODÉSICO
	Con diagonales	Sin diagonales			
Carga aplicada (Kg)	4500	4500	4500	4500	4500
Número de nodos	61	61	61	61	61
Máxima carga aplicada uniformemente (Kg/m <sup>2</sup> )	220	142	122	156	220
Máxima carga asimétrica aplicada (Kg /m <sup>2</sup> )					
En el lado derecho	137	60	98	137	195
En el lado izquierdo	68	30	49	68	98
Esfuerzos relativos con carga asimétrica	70%	30%	50%	70%	100%
Desplazamiento con carga asimétrica de 60 y 30 (Kg/m <sup>2</sup> )	3.9 cm	4.5 cm	4.2 cm	2.2 cm	2.2 cm

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 5

MATRIZ DE DEFORMACIONES Y DEFECTOS INICIALES

5.1 Derivación de la matriz de rigidez

Para la obtención de las matrices de rigidez geométrica y elástica se parte de los dos puntos siguientes: 1) desarrollo de las ecuaciones de desplazamientos virtuales y 2) reducción de estas ecuaciones a una ecuación matricial a través del desarrollo de procedimientos mediante elemento finito.

Aplicación del principio de desplazamientos virtuales:

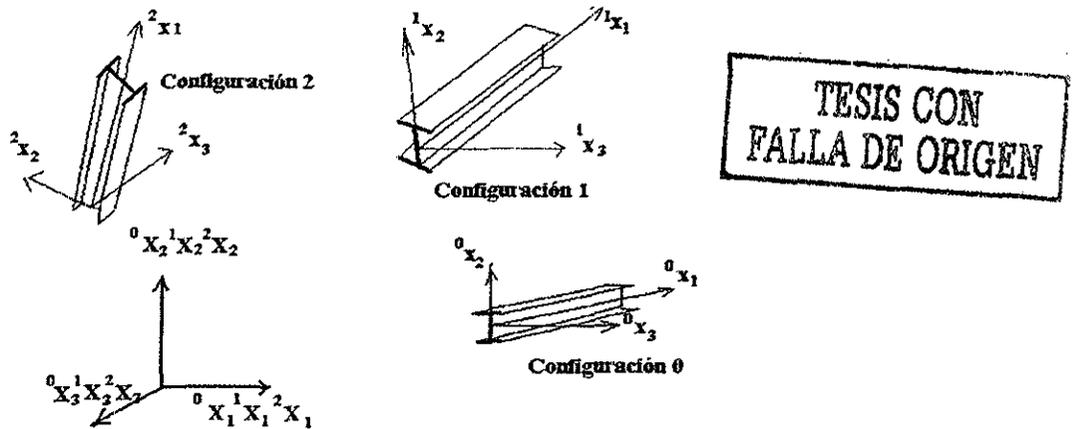


Figura 5.1: Movimiento de una viga tridimensional en un sistema coordenado

La figura 5.1 muestra un elemento típico viga – columna y su posible configuración desplazada. La configuración 0, (C<sub>0</sub>) representa el estado inicial, la configuración C<sub>1</sub> se conoce como un estado de equilibrio deformado próximo al anterior. En la figura también se muestra el sistema de ejes locales y ejes globales.

Una coma denota diferenciación con respecto al sistema de coordenadas; así, por ejemplo:

$${}^2_0 U_{i,j} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial {}^0 X_j} \quad (5.1)$$

$$\int_{2v} \tau_{ij} \delta_2 c_{ij}^2 dV = {}^2_2 R \quad (5.1a)$$

La aplicación del principio de los desplazamientos virtuales, requiere que el equilibrio del cuerpo se exprese en función de la deformación  $C_2$ , en la cual  ${}^2_2R$  es una expresión del trabajo virtual externo.

$${}^2_2R = \int_{2A} {}^2_2t_k \delta u_k^2 dA \quad (5.2)$$

Si las fuerzas del cuerpo son despreciadas, en las dos ecuaciones 5.1 y 5.1a, y  ${}^2\tau_{ij}$  es el tensor de esfuerzos de Cauchy (ref. 12),  $\delta_2 e_{ij}$  son los tensores de deformación de Almansi (ref. 12),  ${}^2_2t_k$  tensor de tracción de superficie, y  $\delta u_k$  es una variación de las componentes de desplazamientos en  $C_2$ .

La ecuación 5.1a no puede ser resuelta, puesto que  $C_2$  es desconocida, sin embargo se demostró en la ref. 12 que:

$$\int_{1V} {}^1C_{ijkl} {}^1e_{kl} \delta_1 e_{ij}^1 dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij}^1 dV = {}^2_1R - {}^1_1R \quad (5.3)$$

en la cual:

$${}^2_1R = \int_{1A} {}^2_1t_k \delta u_k^1 dA \quad (5.4)$$

y

$${}^1_1R = \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta_1 e_{ij}^1 dV \quad (5.5)$$

En las ecuaciones 5.3 y 5.5,  ${}^1e_{ij}$  y  ${}^1\eta_{ij}$  son las componentes lineales y no lineales del tensor de deformación incremental,  ${}^1\tau_{ij}$  es el tensor de fuerzas de Cauchy (ref. 12) y  $C_1$ ,  ${}^1C_{ijkl}$  representan las componentes del tensor constitutivo, y  ${}^2_1t_k$  es la carga de superficie en  $C_2$ , medida en  $C_1$ . Las ecuaciones de equilibrio incremental y las ecuaciones de rigidez correspondientes pueden ser referidas a coordenadas locales. Por conveniencia, el sistema global se representará por  $(X, Y, Z)$  y las coordenadas locales en  $C_1$ , como  $(x, y, z)$ . En la teoría convencional de una viga tridimensional,  ${}^1\tau_{22} = {}^1\tau_{33} = {}^1\tau_{23} = 0$ ,  ${}^1\tau_{12} = {}^1\tau_{21}$ , y  ${}^1\tau_{13} = {}^1\tau_{31}$ . De esta manera, existen tres componentes de esfuerzos independientes  ${}^1\tau_{11}$ ,  ${}^1\tau_{12}$  y  ${}^1\tau_{13}$ , y tres componentes de deformación independientes  ${}^1\varepsilon_{11}$ ,  ${}^1\varepsilon_{12}$  y  ${}^1\varepsilon_{13}$ .

$$\sigma_x = {}^1\tau_{11} \quad (5.6) \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{xx} + \eta_{xx} = {}^1e_{11} + {}^1\eta_{11} = {}^1\varepsilon_{11} \quad (5.9)$$

$$\tau_{yx} = {}^1\tau_{12} \quad (5.7) \quad \gamma_{yx} = e_{yx} + \eta_{yx} = 2({}^1e_{12} + {}^1\eta_{12}) = {}^1\varepsilon_{12} \quad (5.10)$$

$$\tau_{zx} = {}^1\tau_{13} \quad (5.8) \quad \gamma_{zx} = e_{zx} + \eta_{zx} = 2({}^1e_{13} + {}^1\eta_{13}) = {}^1\varepsilon_{13} \quad (5.11)$$

El vector de esfuerzos de Cauchy (ref. 12),  $\langle {}^1\tau \rangle$ , el vector de deformación lineal,  $\langle {}_1\mathbf{e} \rangle$ , y el vector de deformación no lineal  $\langle {}_1\eta \rangle$  se puede escribir:

$$\langle {}^1\tau \rangle = \langle \sigma_x \tau_{yx} \tau_{zx} \rangle \quad (5.12)$$

$$\langle {}_1\mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{e}_{xx} \mathbf{e}_{yx} \mathbf{e}_{zx} \rangle \quad (5.13)$$

$$\begin{array}{c} \text{y} \\ \langle {}_1\eta \rangle = \langle \eta_{xx} \eta_{yx} \eta_{zx} \rangle \end{array} \quad (5.14)$$

La matriz  $[{}_1\mathbf{C}]$  se puede expresar:

$$[{}_1\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & & \\ & \mathbf{G} & \\ & & \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Al sustituir las ecuaciones 5.12 – 5.15 en la ecuación 5.3, se obtiene la ecuación de equilibrio de trabajo virtual para una viga tridimensional.

$$\begin{aligned} & \int_V [E e_{xx} \delta e_{xx} + G e_{yx} \delta e_{yx} + G e_{zx} \delta e_{zx}] dV \\ & + \int_V [\sigma_x \delta \eta_{yx} + \tau_{yx} \delta \eta_{yx} + \tau_{zx} \delta \eta_{zx}] dV = {}^2R^{-1}R \end{aligned} \quad (5.16)$$

Al sustituir las siguientes expresiones para la deformación lineal y no lineal en la ecuación anterior:

$$\mathbf{e}_{xx} = \mathbf{u}_{x,x}; \mathbf{e}_{yx} = \mathbf{u}_{x,y} + \mathbf{u}_{y,x}; \mathbf{e}_{zx} = \mathbf{u}_{x,z} + \mathbf{u}_{z,x} \quad (5.17)$$

$$\begin{array}{c} \text{y} \\ \eta_{xx} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{x,x}^2 + \mathbf{u}_{y,x}^2 + \mathbf{u}_{z,x}^2) \end{array} \eta_{yx} = \mathbf{u}_{x,y} \mathbf{u}_{x,x} + \mathbf{u}_{y,y} \mathbf{u}_{y,x} + \mathbf{u}_{z,y} \mathbf{u}_{z,x}$$

$$\eta_{zx} = \mathbf{u}_{x,z} \mathbf{u}_{x,x} + \mathbf{u}_{y,z} \mathbf{u}_{y,x} + \mathbf{u}_{z,z} \mathbf{u}_{z,x} \quad (5.18)$$

la ecuación del trabajo virtual llega a ser:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V [E \delta (\mathbf{u}_{x,x}^2) + G \delta \{ (\mathbf{u}_{x,y} + \mathbf{u}_{y,x})^2 + (\mathbf{u}_{x,z} + \mathbf{u}_{z,x})^2 \}] dV + \\ & \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \delta (\mathbf{u}_{y,x}^2 + \mathbf{u}_{z,x}^2) dV + \\ & \int_V [\tau_{yx} \delta (\mathbf{u}_{x,y} \mathbf{u}_{x,x} + \mathbf{u}_{z,y} \mathbf{u}_{z,x}) + \tau_{zx} \delta (\mathbf{u}_{x,z} \mathbf{u}_{x,x} + \mathbf{u}_{y,z} \mathbf{u}_{y,x})] dV = {}^2R^{-1}R \end{aligned} \quad (5.19)$$

Se nota que  $u_{y,y} = u_{z,z} = 0$ . Las derivadas para desplazamientos seccionales se obtienen mediante la teoría de Vlasov (ref. 12), las cuales se presentaron anteriormente. Solo se podrán considerar secciones bisimétricas colocando  $a_y = a_z = 0$  en las ecuaciones 8.20 a 8.22 y al sustituir éstas expresiones en la ecuación 5.19, se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \left[ ES \left( U'_x - zU''_z - yU''_y - \omega \theta''_x \right)^2 + 6\delta \left\{ \left( z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} \left( \theta'_x \right)^2 \right] dV + \\ & \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \delta \left[ \left( U'_y - 2\theta'_x \right)^2 + \left( U'_z + y\theta'_x \right)^2 \right] dV + \\ & \int_V \tau_{yx} \delta \left\{ \left[ -U'_y - \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \theta'_x \right] \left( U'_x - zU''_z - yU''_y - \omega \theta''_x \right) + \left( U'_z + y\theta'_x \right) \theta'_x \right\} dV + \\ & \int_V \tau_{zx} \delta \left\{ \left[ -U'_z - \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \theta'_x \right] \left( U'_x - zU''_z - yU''_y - \omega \theta''_x \right) + \left( U'_y + z\theta'_x \right) \theta'_x \right\} dV \\ & = \langle \delta u \rangle \left( \left\{ {}^2 f \right\} - \left\{ {}^1 f \right\} \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

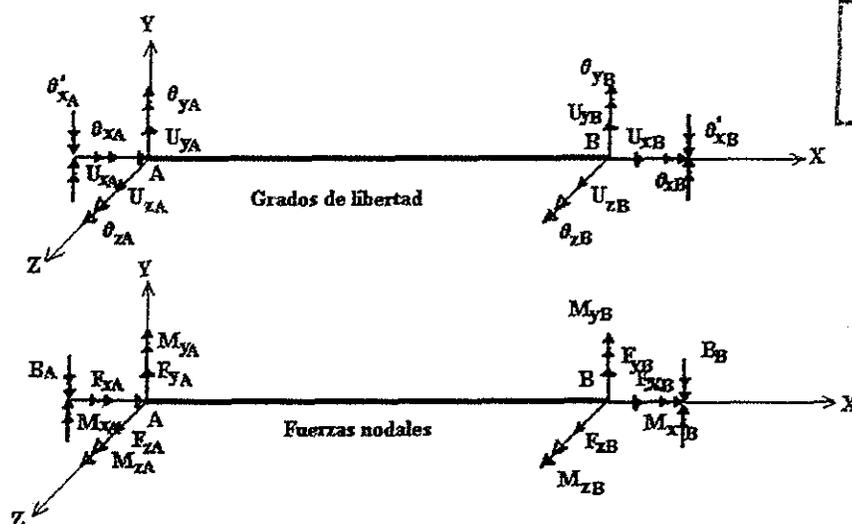


Figura 5.3: Elemento considerado

Donde  $\omega$  es el área sectorial,  $\langle \delta u \rangle$  es la variación de los desplazamientos en los nudos. Se obtiene así:

$$\langle {}^2 f \rangle = \left\langle {}^2 F_{xA} \quad {}^2 F_{yA} \quad {}^2 F_{zA} \quad {}^2 M_{xA} \quad {}^2 M_{yA} \quad {}^2 M_{zA} \quad {}^2 F_{xB} \quad {}^2 F_{yB} \quad {}^2 F_{zB} \quad {}^2 M_{xB} \quad {}^2 M_{yB} \quad {}^2 M_{zB} \quad {}^2 B_A \quad {}^2 B_B \right\rangle \quad (5.21)$$

$\langle^2f\rangle$  es el vector de fuerzas nodales en el extremo 2 del elemento en cada iteración y  $\langle^1f\rangle$  es el vector de fuerzas nodales en el extremo 1.

$$\langle U \rangle = \langle U_{xA} U_{yA} U_{zA} \theta_{xA} \theta_{yA} \theta_{zA} U_{xB} U_{yB} U_{zB} \theta_{xB} \theta_{yB} \theta_{zB} \theta'_{xA} \theta'_{xB} \rangle \quad (5.22)$$

Tanto  $\langle^2f\rangle$  y  $\langle^1f\rangle$  se establecen en términos de  $C_1$ .

Al despreciar los términos de orden superior y al adoptar las condiciones de ortogonalidad para coordenadas principales generalizadas en la ecuación 8.31, y mediante el uso de las expresiones para esfuerzos resultantes, ecuaciones 8.15 - 8.18, se obtiene la siguiente ecuación, en términos de las coordenadas principales generalizadas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [EA\delta(u_x^2) + EI_y\delta(u_z^2) + EI_z\delta(u_y^2) + EC_\omega\delta(\theta_x^2) + GJ\delta(\theta_x^2)] dx + \\ & \int_0^l \left[ \frac{F_x}{2} \delta(u_y^2 + u_z^2) \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l \bar{K}\delta(\theta_x^2) dx + \int_0^l F_{yz}\delta(u_z\theta_x) dx - \int_0^l M_z\delta(u_z\theta_x) dx - \\ & \int_0^l F_z\delta(u_y\theta_x) dx - \int_0^l M_y\delta(u_y\theta_x) dx - \int_0^l [F_{yy}u\delta(u_y u_x) + F_z\delta(u_z u_x)] dx - \\ & \int_0^l (1-\alpha)M_x\delta(u_y u_z) dx + \int_0^l \alpha M_x\delta(u_z u_y) dx = \langle \delta u \rangle (\langle^2 f \rangle - \langle^1 f \rangle) \end{aligned} \quad (5.23)$$

La ecuación de equilibrio para elementos viga - columna de pared delgada, que resulta de la integración de la ecuación 5.23 puede ser reescrita en forma compacta

$$[K_e]\{u\} + [K_g]\{u\} = \{^2f\} - \{^1f\} \quad (5.24)$$

En la que  $[K_e]$  y  $[K_g]$  son la matriz de rigidez lineal y geométrica,  $\{u\}$  es el vector de desplazamiento incremental. Las matrices  $[K_e]$  y  $[K_g]$  se pueden ver en la sección 5.2.1 de este trabajo.

El parámetro  $\alpha$  se define como el promedio del momento torsionante resistido por  $\tau_{zx}$  y el momento total  $M_x$ :

$$\alpha = \int_A \frac{\tau_{zx} y dA}{M_x} = 1 - \int_A \frac{(-\tau_{yx} z) dA}{M_x} \quad (5.25)$$

Para problemas de torsión de St. Venant (ref. 12 y 27) o para miembros de pared delgada, con sección transversal bisimétrica,  $\alpha$  es igual a  $1/2$ ; en estos puntos, los valores de  $\alpha$  igual a  $1/2$ ; podrán ser adoptados como simplificación en la derivación de la matriz de rigidez.

La constante torsional J es:

$$J = \int_A \left[ z^2 + y^2 + 2z \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - 2y \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] dA \quad (5.26)$$

### 5.2 Análisis

Las matrices que se darán más adelante, pueden ser usadas en programas para determinar las cargas críticas y también poder realizar un análisis geométrico no lineal de un marco de una, dos o tres dimensiones.

#### 5.2.1 Naturaleza de los momentos y rotaciones

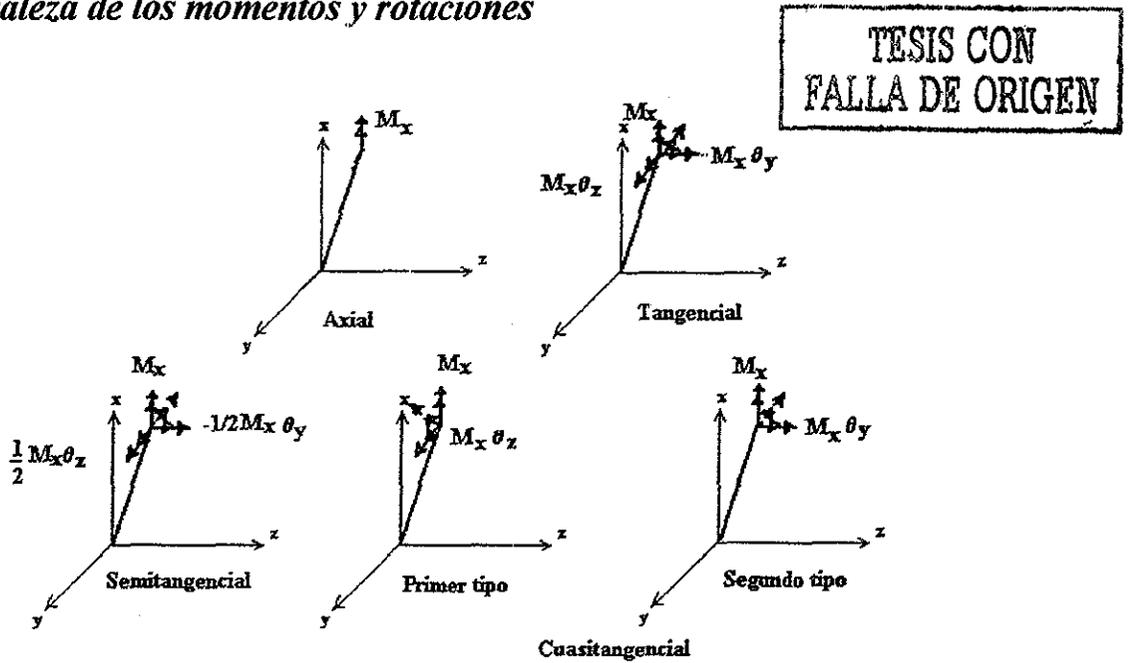


Figura 5.3 : Varios tipos de momento

En la figura 5.3, se muestran cuatro tipos de momentos en una posición desplazada, en el cual todos son de magnitud inicial  $M_x$  y actúa sobre el eje x. Ziegler y Argyris (ref. 6, 7 y 12) identifican un momento flexionante como un momento cuasitangencial y una torsión de St. Venant (ref.12 y 27) como un momento semitangencial. Cuando los elementos se someten a rotaciones torsionales,  $\theta_x$ , los siguientes momentos incrementales se incluyen:

$$d(\Delta M_z) = \sigma_x \theta_x z dA \quad (5.27)$$

$$d(\Delta M_y) = \sigma_x \theta_x y dA \quad (5.28)$$

Que al ser integradas proporcionan:

$$\Delta M_z = M_y \theta_x \quad (5.29)$$

$$\Delta M_y = -M_z \theta_x \quad (5.30)$$

Los mismos momentos incrementales se pueden generar por la alternativa de mecanismos bajo la misma rotación. Los momentos flexionantes  $M_y$  y  $M_z$ , los cuales son generados como esfuerzos resultantes, se refieren a momentos cuasitangenciales de primera clase. Si la sección transversal rota alrededor del eje  $y$ , se podría inducir un momento incremental alrededor del eje  $z$ .

$$d(\Delta M_z) = \tau_{yx} \theta_y z dA \quad (5.31)$$

Similarmente, una rotación alrededor del eje  $z$  conduce a:

$$d(\Delta M_y) = \tau_{zx} \theta_z y dA \quad (5.32)$$

Al integrar las ecuaciones diferenciales, se obtienen los incrementos en los momentos:

$$\Delta M_y = \frac{1}{2} M_x \theta_z \quad (5.33)$$

$$\Delta M_z = -\frac{1}{2} M_x \theta_y \quad (5.34)$$

Es evidente que estos incrementos en los momentos se pueden generar por los mecanismos semi – tangenciales, bajo las mismas rotaciones, en la presencia de rotaciones finitas, la primera clase de torsión cuasitangencial inducirá a las siguientes cantidades:

$$\Delta M_y = M_x \theta_z \quad (5.35)$$

$$\Delta M_z = 0 \quad (5.36)$$

Similarmente, los incrementos en los momentos inducidos por la segunda clase de momento cuasitangencial bajo rotaciones son:

$$\Delta M_y = 0 \quad (5.37)$$

$$\Delta M_z = -M_x \theta_y \quad (5.38)$$

Los momentos flexionantes, son cuasitangenciales de primera clase, cuando se producen esfuerzos resultantes convencionales. Si la restricción de los esfuerzos resultantes se remueve, ellos pueden ser cuasitangenciales de segunda clase o semitangencial. Por ejemplo un momento flexionante induce los siguientes incrementos cuando existen rotaciones finitas:

$$\Delta M_z = \frac{1}{2} M_y \theta_x \quad (5.39)$$

$$\Delta M_x = -\frac{1}{2} M_y \theta_z \quad (5.40)$$

debido a  $M_y$

$$\Delta M_y = -\frac{1}{2} M_z \theta_x \quad (5.41)$$

$$\Delta M_x = \frac{1}{2} M_z \theta_y \quad (5.42)$$

debido a  $M_z$

Como un ejemplo, se considera un miembro sujeto a torsión no uniforme, en el cual la torsión es resistida en parte por St. Venant (ref. 12 y 27) y en parte por el alabeo.

$$M_x = T_{sv} + T_w \quad (5.43)$$

La torsión de St. Venant (ref. 12 y 27) se comporta en forma semitangencial, pero es difícil decir que la torsión de alabeo se comporta en forma semitangencial; en las ecuaciones 8.8 a la 8.10 se indica la necesidad de no ser semitangencial. Para una sección I figura 5.4a, la torsión de alabeo deberá ser tratada como cuasitangencial. Sin embargo para una sección doble I como la que se muestra en la figura 5.4b, resulta ser semitangencial.

En la ecuación 5.23  $K$  es el coeficiente de Wagner (ref. 12).

$$K = \frac{F_x I_p}{A}; (I_p = I_y + I_x)$$

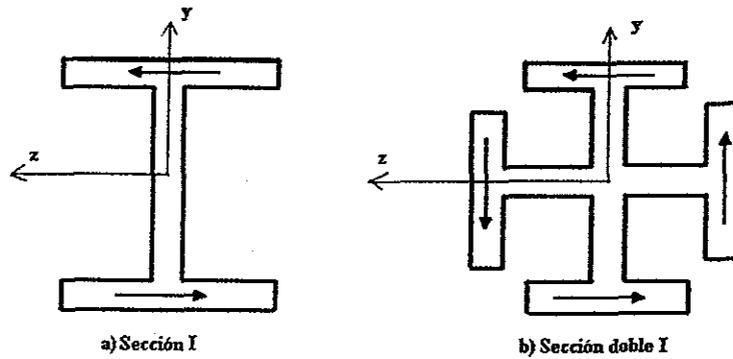


Figura 5.4: Naturaleza de la torsión de alabeo

Así se puede ver que la torsión tiene dos tipos de indeterminación:

1. La porción de la resistencia total a la torsión que aparece como torsión de alabeo,  $T_w$ , es desconocida a priori; y
2. El comportamiento a la rotación de esta porción es dependiente - miembro.

Este problema fue suprimido en la derivación de la matriz de rigidez, por la colocación del parámetro  $\alpha$  en la ecuación 5.25 igual a  $\frac{1}{2}$ , el cual en efecto indica que todo el comportamiento torsional calculado podría ser semitangencial, ver la ecuación 8.9.

MATRIZ DE DEFORMACIONES Y DEFECTOS INICIALES

	$u_{xA}$	$u_{yA}$	$u_{zA}$	$\theta_{xA}$	$\theta_{yA}$	$\theta_{zA}$	$u_{xB}$	$u_{yB}$	$u_{zB}$	$\theta_{xB}$	$\theta_{yB}$	$\theta_{zB}$	$\theta^2_{xA}$	$\theta^2_{xB}$
$F_{xA}$	$EAI$						$-EAI$							
$F_{yA}$	$12EI_z/l^3$					$6EI_z/l^2$	$-12EI_z/l^3$					$6EI_z/l^2$		
$F_{zA}$			$12EI_y/l^3$		$-6EI_y/l^2$						$-6EI_y/l^2$			
$M_{xA}$				$6/5GJ/l^3 + 12EC_w/l^3$						$(-6/5)GJ/l^3 - 12EC_w/l^3$			$GJ/10 + 6EC_w/l^2$	$GJ/10 + 6EC_w/l^2$
$M_{yA}$				$4EI_w/l$			$6EI_w/l^2$		$6EI_w/l^2$		$2EI_w/l$			
$M_{zA}$					$4EI_z/l$		$-6EI_z/l^2$					$2EI_z/l$		
$F_{xB}$						$EAI$								
$F_{yB}$							$12EI_y/l^3$					$-6EI_z/l^2$		
$F_{zB}$									$12EI_y/l^3$		$6EI_y/l^2$			
$M_{xB}$										$6/5GJ/l^3 + 12EC_w/l^3$			$-GJ/10 - 6EC_w/l^2$	$-GJ/10 - 6EC_w/l^2$
$M_{yB}$											$4EI_z/l$			
$M_{zB}$												$4EI_z/l$		
$B_a$	<b>Simétrica</b>													
$B_B$													$2GJ/l^3 + 4EC_w/l$	$-GJ/30 + 2GJ/l^3 + 4EC_w/l + 2EC_w/l$

Matriz de rigidez elástica

MATRIZ DE DEFORMACIONES Y DEFECTOS INICIALES

	$u_{xA}$	$u_{xA}$	$u_{zA}$	$\theta_{xA}$	$\theta_{yA}$	$\theta_{zA}$	$u_{xB}$	$u_{xB}$	$u_{zB}$	$\theta_{yB}$	$\theta_{zB}$	$\theta^2_{xA}$	$\theta^2_{xB}$
$F_{xA}$		$M_{zA}/l^2$ $+M_{yB}/l^2$	$-M_{yA}/l^2$ $-M_{zB}/l^2$										
$F_{yA}$		$6F_{xB}/5l$		$1.1M_{yA}/l$ $-M_{yB}/10l$	$M_{xB}/l$	$F_{xB}/10$		$-M_{zA}/l^2$ $-M_{zB}/l^2$		$-M_{xB}/l$	$F_{xB}/10$	$M_{yA}/10$	$-M_{yB}/10$
$F_{zA}$			$6F_{xB}/5l$	$1.1M_{zA}/l$ $-M_{zB}/10l$	$-F_{xB}/10$	$M_{xB}/l$			$-6F_{xB}/5l$	$-F_{zB}/10$	$-M_{xB}/l$	$M_{zA}/10$	$-M_{zB}/10$
$M_{xA}$				$6K/5l$	$M_{zA}/10$ $+M_{zB}/5$	$-M_{zA}/10$ $-M_{zB}/5$			$-1.1M_{zA}/l$ $-$	$-M_{zA}/5$ $-M_{zB}/10$	$M_{yA}/5+$ $M_{yB}/10$	$K/10$	$K/10$
$M_{yA}$					$2F_{xB}/15$				$M_{yB}/10l$	$F_{xB}/10$	$M_{xB}/2$	$-M_{zA}/10$ $+M_{zB}/30$	$M_{zA}/30$
$M_{zA}$						$2F_{xB}/15$			$M_{yB}/10l$	$-M_{xB}/2$	$-F_{xB}/30$	$M_{yA}/10$ $-M_{yB}/30$	$-M_{yA}/30$
$F_{xB}$									$-M_{xB}/l$				
$F_{yB}$									$M_{zA}/l^2$ $-M_{zB}/l^2$				
$F_{zB}$									$-M_{yB}/l^2$ $-M_{zB}/l^2$				
$M_{xB}$									$6F_{xB}/5l$	$M_{yB}/l$	$-F_{zB}/10$	$-M_{yA}/10$	$M_{yB}/10$
$M_{yB}$										$F_{xB}/10$	$M_{xB}/l$	$-M_{zA}/10$	$M_{zB}/10$
$M_{zB}$										$M_{zA}/5$ $+M_{zB}/10$	$-M_{yA}/5$	$-K/10$	$-K/10$
$B_A$													
$B_B$													

Simétrica

Matriz de rigidez geométrica



## CAPÍTULO 6

### SECCIONES TRANSVERSALES COMUNES

#### *6.1 Propiedades del acero estructural*

##### *6.1.1 Perfiles de acero*

El acero estructural, se lamina en una gran variedad de formas y tamaños, sin cambios apreciables en sus propiedades físicas. Generalmente, los miembros estructurales más convenientes son aquellos con grandes momentos de inercia en comparación con su área. Los perfiles I, T y H, tienen esta propiedad (ref. 28).

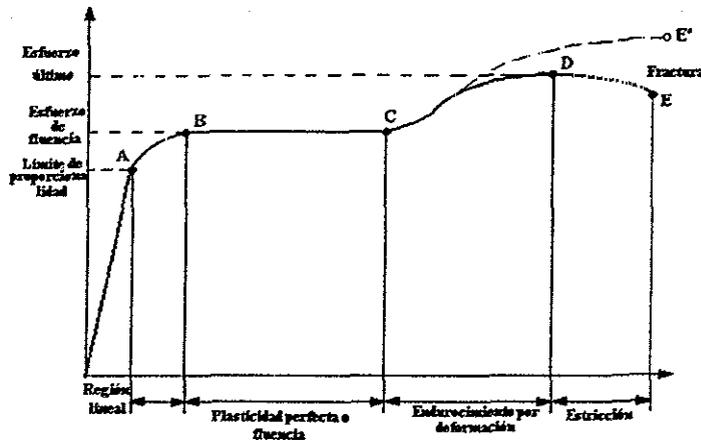
Por lo general, los perfiles de acero se designan por la forma de sus secciones transversales. Por ejemplo, se tienen perfiles en ángulo, T, Z y placas.

Los perfiles se denominan en forma abreviada por medio de un sistema descrito en el manual, para su uso en los planos, especificaciones y diseños. Este sistema está estandarizado, de modo que todos los molinos puedan usar la misma nomenclatura.

Siempre existen variaciones presentes en cualquier proceso de manufactura y la industria del acero no es la excepción. En consecuencia, las dimensiones de las secciones transversales de los perfiles de acero pueden variar, respecto a los indicados en los manuales de diseño.

##### *6.1.2 Relaciones esfuerzo – deformación del acero estructural*

El acero estructural es uno de los materiales de más amplio uso, y es éste el que más se utiliza en los edificios, puentes, torres y otras estructuras (ref. 27). Un diagrama representativo del diagrama esfuerzo – deformación de acero se muestra en la figura 6.1:



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 6.1: Diagrama esfuerzo - deformación del acero estructural

El diagrama comienza con una línea recta de O hasta A. En esta región, el esfuerzo y la deformación son directamente proporcionales y se dice que su comportamiento es lineal. Al punto A se le denomina límite de proporcionalidad.

Al aumentar la carga más allá del límite de proporcionalidad, la deformación empieza a aumentar rápidamente para cada incremento de esfuerzo. La curva esfuerzo - deformación presenta luego una pendiente cada vez más pequeña hasta que en el punto B se vuelve horizontal. A partir de este punto se presenta un alargamiento considerable con un incremento insignificante de carga. Este fenómeno se conoce como cedencia o fluencia del material y el esfuerzo en el punto B se le conoce como límite de fluencia. En la región de B a C, el material fluye, lo que significa que puede deformarse sin ningún incremento de carga aplicada. Después de sufrir grandes deformaciones que se presentan durante la fluencia del material en la región de B a C, el acero comienza a presentar un endurecimiento por deformación. Durante este proceso, sufre cambios en su estructura cristalina y atómica, lo que origina un incremento en la resistencia del material a futuras deformaciones. Finalmente, la carga alcanza su valor máximo y el esfuerzo que corresponde al punto D se conoce como esfuerzo último del material. De hecho, el alargamiento posterior de la barra, se acompaña de una reducción de la carga y finalmente se presenta la fractura en el punto E.

## 6.1.3 Propiedades de aceros estructurales

Designación de la ASTM	Tipo de acero	Formas	Usos recomendados	Esfuerzo mínimo de fluencia en Kg/cm <sup>2</sup>	Resistencia especificada mínima a la tensión en Kg/cm <sup>2</sup>
A36	Al carbono	Perfiles, barras y placas	Puentes, edificios y otras estructuras atornilladas, soldadas o remachadas	2530, pero 2250 si el espesor es mayor que 8 pulgadas	3725 - 4217
A529	Al carbono	Perfiles, placas hasta ½ pulgada	Similar al A36	2950	4217 - 5970
A441	De alta resistencia y baja aleación	Perfiles, placas y barras hasta 8 pulgadas	Similar al A36	2811 - 3500	4217 - 4920
A572	De alta resistencia y baja aleación	Perfiles, placas y barras hasta 6 pulgadas	Construcciones atornilladas, soldadas o remachadas. No para puentes soldados de los $F_y = 3860$ o mayores	2950 - 4570	4217 - 5620
A242	De alta resistencia, baja aleación y resistente a la corrosión atmosférica	Perfiles, placas y barras hasta 4 pulgadas	Construcciones atornilladas, soldadas o remachadas. Técnica de soldado muy importante	2950 - 3510	4430 - 4920
A588	De alta resistencia, baja aleación y resistente a la corrosión atmosférica	Placas y barras	Construcciones atornilladas y remachadas	2950 - 3510	4430 - 4920
A514	Templados y revenidos	Placas solo hasta 4 pulgadas	Estructuras soldadas con mucha atención a la técnica empleada, no se use si la ductilidad es importante.	6325 - 7000	7000 - 9130

Tabla 6.1: Propiedades de algunos tipos de acero estructural

## 6.2 Propiedades del aluminio

### 6.2.1 Diagrama esfuerzo - deformación del aluminio

Muchas aleaciones de aluminio poseen considerable ductilidad, aunque carecen de un punto de fluencia claramente definido (ref. 27). En su lugar, el aluminio muestra una transición gradual entre las regiones lineal y no lineal, como se indica en el diagrama esfuerzo – deformación de la siguiente figura:

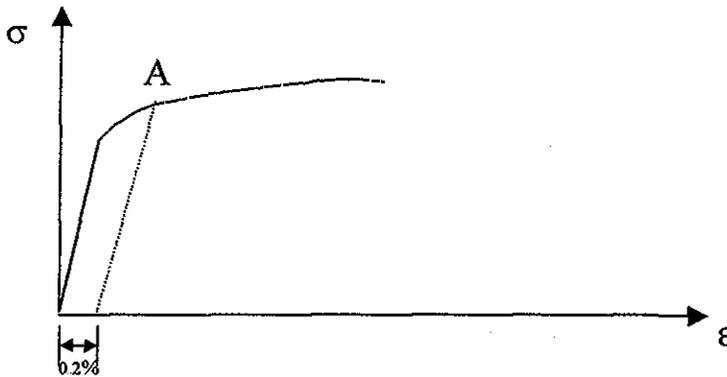


Figura 6.2: Diagrama esfuerzo deformación de una aleación típica de aluminio

Las aleaciones de aluminio son adecuadas para propósitos estructurales, están disponibles con límites de proporcionalidad en intervalos de 700 a 4216  $\text{Kg/cm}^2$  y esfuerzos últimos entre 1400 a 5620  $\text{Kg/cm}^2$ .

Ya que el aluminio no tiene un punto de fluencia definido, y a pesar de ello soporta grandes deformaciones después del límite de proporcionalidad, se puede determinar un esfuerzo de fluencia arbitrario, mediante el método del corrimiento. Esto consiste en trazar una recta paralela a la porción inicial rectilínea de la curva. La intersección de la línea y la curva esfuerzo – deformación (punto A), define el esfuerzo de fluencia. Dado que este esfuerzo se determina mediante una regla arbitraria y no constituye una propiedad física inherente del material, se le conoce como esfuerzo de fluencia aparente del material.

### 6.2.2 Especificaciones para algunas aleaciones

La especificación mínima, en esfuerzo de tensión para aluminio es de 2950  $\text{Kg/cm}^2$  para láminas, placas, tubos, barras, alambres y de 2670  $\text{Kg/cm}^2$  para los demás perfiles (ref.29). El esfuerzo de fluencia mínimo para todos los productos debe ser de 2460  $\text{Kg/cm}^2$ . Las mínimas propiedades mecánicas que

se pueden usar como base para la selección de un esfuerzo límite se muestra en la tabla 6.2:

	Materiales de placas sencillas.	Materiales que se afectan por el calor de la soldadura	
		Todos los materiales soldados con una aleación 5356 o 5556 y material de 3/8 de pulgada o menos en el espesor soldado con una aleación 4043	Materiales mayores que 3/8 de pulgada soldadas con una aleación 4043
Esfuerzo de tensión	2670	1680 <sup>b</sup>	1680 <sup>b</sup>
Esfuerzo de fluencia a la tensión	2460	1400 <sup>c</sup>	1400 <sup>c</sup>
Esfuerzo de fluencia a la compresión	2460	1400 <sup>c</sup>	1400 <sup>c</sup>
Esfuerzo cortante	1690	1050	1050
Esfuerzo de fluencia a cortante	1400	843	632

Tabla 6.2: Especificaciones para la aleación de aluminio 5356 o 5556

Todas las cantidades anteriores están en Kg/cm<sup>2</sup>.

<sup>b</sup> : Valor que se obtiene de la prueba de soldadura para esfuerzo a tensión en la sección apoyada.

<sup>c</sup> : Este es el valor mínimo del esfuerzo de fluencia de la sección que se encuentra apoyada en la soldadura, correspondiendo a un 0.2 por ciento equivalente a 10 pulgadas de longitud del elemento.

Otras propiedades físicas de estas aleaciones son:

Módulo de elasticidad en Kg/cm <sup>2</sup> .....	702830
Módulo de elasticidad en cortante en Kg/cm <sup>2</sup> .....	267075
Cociente o relación de Poisson .....	1/3
Peso en kilogramos por centímetro cúbico .....	0.00271

Las aleaciones 6061-T6 y 6062-T6 son las que se consideraron en la preparación de las especificaciones anteriores. Sin embargo estas especificaciones pueden ser aplicadas a la construcción de edificios con otro tipo de aleaciones.

Existen también especificaciones para aleaciones 6063-T5 y 6063-T6, las cuales se muestran en la siguiente tabla:

	Materiales de placas sencillas		Material que se afectan por el calor de la soldadura. 6063-T5 y 6063-T6
	6063-T5	6063-T6	
Esfuerzo de tensión	1540	2100	1200 <sup>b</sup>
Esfuerzo de fluencia a la tensión	1120	1750	770 <sup>c</sup>
Esfuerzo de fluencia a la compresión	1120	1750	770 <sup>c</sup>
Esfuerzo cortante	910	1340	770
Esfuerzo de fluencia al cortante	630	980	450

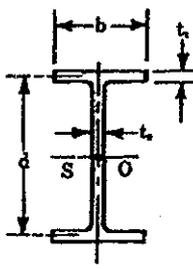
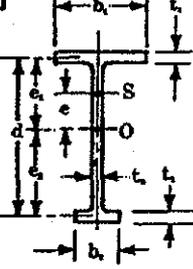
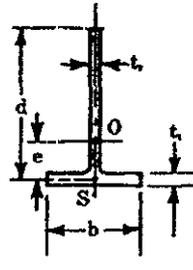
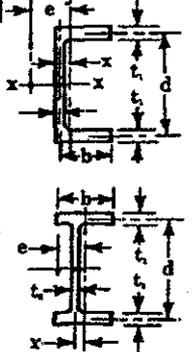
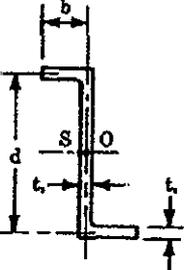
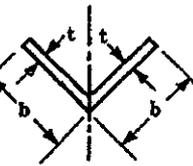
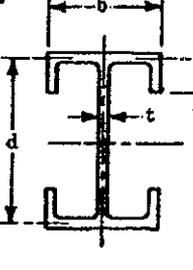
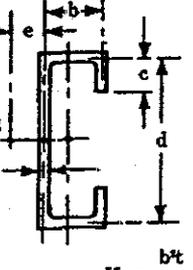
Tabla 6.2: Especificaciones para la aleación de aluminio 6063-T5 y 6063-T6

Todas las cantidades están en Kg/cm<sup>2</sup>.

Las propiedades del material son las mismas que las de la aleación anterior.

<sup>b</sup> : Valor que se obtiene de la prueba de soldadura para esfuerzo a tensión en la sección apoyada

<sup>c</sup> : Este es el valor mínimo del esfuerzo de fluencia de la sección que se encuentra apoyada en la soldadura, correspondiendo a un 0.2%.

<p><b>A</b></p>  $J = \frac{2bt^3}{3} + \frac{dt^3}{3}$ $K_x = \frac{d^3I_y}{4}$	<p><b>B</b></p>  $J = \frac{b_1t_1^3}{3} + \frac{b_1d^3}{3} + \frac{dt_1^3}{3}$ $K_x = \frac{d^3I_1I_2}{I_1 + I_2}$ $e = \frac{\alpha_2I_2 - \alpha_1I_1}{I_1 + I_2}$ <p><math>I_1</math> y <math>I_2</math> = Momentos de inercia máximo y mínimo respectivamente con respecto al eje Y</p>
<p><b>C</b></p>  $J = \frac{bt^3}{3} + \frac{dt^3}{3}$ $K_x = \frac{t^3b^3}{144} + \frac{d^3t^3}{3b}$	<p><b>D</b></p>  $J = \frac{2bt^3}{3} + \frac{dt^3}{3}$ $e = x \left( 1 + \frac{d^2A}{4L} \right)$ $K_x = \frac{d^3}{4} \left[ L_y + x^2A \left( 1 - \frac{d^2A}{4L} \right) \right]$
<p><b>E</b></p>  $J = \frac{2bt^3}{3} + \frac{dt^3}{3}$ $K_x = \frac{d^3I_y}{4}$	<p><b>F</b></p>  $J = \frac{2bt^3}{3}$ $K_x = \frac{A^3}{144}$ <p>A = area of angle</p>
<p><b>G</b></p>  $J = \frac{dt^3}{3} + \frac{2bt^3}{3} + \frac{4at^3}{3}$ $K_x = \frac{I_y d^3}{4} + a^2 b t \left( \frac{d}{2} + \frac{a}{3} \right)$	<p><b>H</b></p>  $J = \frac{dt^3}{3} + \frac{2bt^3}{3} + \frac{2ct^3}{3}$ $e = \frac{bd^2ct}{I_y} \left[ \frac{1}{2} + \frac{b}{4c} - \frac{2c^2}{3d^2} \right]$ $K_x = \frac{b^3t}{6} (4c^3 + 3d^2c + 6dc^2 + bd^3) - Le^3$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Constantes de alabeo

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y FUERZAS AXIALES PERMITIDAS, EN DIFERENTES TUBOS DE ALUMINIO COMUNMENTE EMPLEADOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE DOMOS (SECCIONES HUECAS)

PROPIEDADES GEOMETRICAS								
DATOS	DESIGNACION	DIAMETRO EXTERIOR (cm)	ESPESOR (cm)	AREA (cm <sup>2</sup> )	r (cm)	I (cm <sup>4</sup> )	S (cm <sup>3</sup> )	Peso (Kg/cm)
1	D2	6.033	0.159	3.045	2.075	13.111	5.162	0.024
2	D4	6.033	0.305	5.484	2.028	22.560	8.882	0.043
3	G1	8.890	0.340	9.142	3.025	83.663	32.938	0.072
4	G2	8.890	0.419	11.155	2.998	100.270	39.476	0.088
5	G2A	11.430	0.419	11.155	2.998	100.270	39.476	0.088
6	H1	11.430	0.457	15.761	3.883	237.627	93.554	0.124
7	H1A	11.430	0.457	15.761	3.883	237.627	93.554	0.124
8	H3	11.430	0.635	21.535	3.823	314.796	123.935	0.169
9	H3B	11.430	0.635	21.535	3.823	314.796	123.935	0.169
10	H3C	11.430	0.635	21.535	3.823	314.796	123.935	0.169
11	H5A	11.430	1.270	40.535	3.620	531.236	209.148	0.318
12	N1A	15.240	0.635	29.135	5.164	777.062	305.930	0.229
13	N1B	15.240	0.635	29.135	5.164	777.062	305.930	0.229
14	N1D	15.240	0.635	29.135	5.164	777.062	305.930	0.229
15	N2A	15.240	0.953	42.755	5.063	1095.771	431.406	0.336
16	N2B	15.240	0.953	42.755	5.063	1095.771	431.406	0.336
17	N2C	15.240	0.953	42.755	5.063	1095.771	431.406	0.336
18	N2E	15.240	0.953	42.755	5.063	1095.771	431.406	0.336
19	N3A	15.240	1.270	55.735	4.960	1370.983	539.757	0.438
20	N3E	15.240	1.270	55.735	4.960	1370.983	539.757	0.438
21	N3F	15.240	1.270	55.735	4.960	1370.983	539.757	0.438
22	Q1B	20.320	1.270	76.006	6.750	3463.170	1363.453	0.597
23	Q1G	20.320	1.270	76.006	6.750	3463.170	1363.453	0.597

FUERZAS PERMITIDAS										
DESIGNACION	TENSION PERMITIDA Kg	COMPRESION PERMITIDA EN Kg								
		LONGITUD DE ELEMENTOS EN cm								
		0	182.88	213.36	243.84	274.32	304.8	335.28	365.76	396.24
D2	3178.00	3178.00	3178.00	2882.90	2315.40	1829.62	1484.58	1225.80	1030.58	876.22
D4	7940.46	9724.68	5988.26	5030.32	3986.12	3150.76	2551.48	2106.56	1770.60	1511.82
G1	7940.46	9552.16	9552.16	9552.16	9552.16	9552.16	8880.24	7749.78	6573.92	5597.82
G2	7940.46	11654.18	11654.18	11654.18	11654.18	11654.18	10714.40	9311.54	7876.90	6710.12
G2A	14119.40	17106.72	15431.46	14378.18	13238.64	12021.92	10714.40	9311.54	7876.90	6710.12
H1	7940.46	17597.04	17597.04	17597.04	17597.04	16952.38	16148.78	15304.34	14419.04	13488.34
H1A	14119.40	17106.72	17106.72	17106.72	17106.72	16952.38	16148.78	15304.34	14419.04	13488.34
H3	7940.46	22100.72	22100.72	22100.72	22100.72	22100.72	21891.88	20711.48	19467.52	18164.54
H3B	19331.32	26422.80	25996.04	25065.34	24071.08	23013.26	21891.88	20711.48	19467.52	18164.54
H3C	27839.28	30004.86	25996.04	25065.34	24071.08	23013.26	21891.88	20711.48	19467.52	18164.54
H5A	14119.40	45640.62	45640.62	45640.62	45640.62	45640.62	45640.62	43175.40	39230.14	35062.42
N1A	14119.40	40596.68	36951.06	36138.40	34354.18	34354.18	33387.16	32374.74	31312.38	30209.16
N1B	19331.32	39039.46	36951.06	36138.40	34354.18	34354.18	33387.16	32374.74	31312.38	30209.16
N1D	40596.68	39661.44	36951.06	36138.40	34354.18	34354.18	33387.16	32374.74	31312.38	30209.16
N2A	14119.40	59864.44	59864.44	59864.44	59864.44	59864.44	59446.76	57108.66	54657.06	52096.50
N2B	19331.32	39039.46	39039.46	39039.46	39039.46	39039.46	39039.46	39039.46	39039.46	39039.46
N2C	27839.28	30835.68	30835.68	30835.68	30835.68	30835.68	30835.68	30835.68	30835.68	30835.68
N2E	66188.66	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98
N3A	14119.40	93119.94	87871.70	85374.70	82700.64	79872.22	76880.36	73734.14	70438.10	66992.24
N3E	66188.66	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98	29450.98
N3F	95312.76	35066.96	35066.96	35066.96	35066.96	35066.96	35066.96	35066.96	35066.96	35066.96
Q1B	19331.32	126198.38	124759.20	122561.84	120137.48	117767.60	115179.80	112469.42	109636.46	106694.54
Q1G	129730.50	40682.94	40682.94	40682.94	40682.94	40682.94	40682.94	40682.94	40682.94	40682.94

ELEMENTOS DE SECCIÓN TUBULAR ESTANDAR

Medida nominal del perfil In	Calibre No	Dimensiones			Propiedades de la sección			Area In <sup>2</sup>	Peso		Presión de ruptura	
		D. E In	D. I. In	Espesor in	I In <sup>4</sup>	S In <sup>3</sup>	r In		Del perfil Lb/ft	De agua en el perfil Lb/ft	6063-T6 Psi	6061-T6 6062-T6 Psi
1/8	40	.405	.269	.068	.0011	.0053	.1215	.0720	.085	.025	11620	16280
	80		.215	.095	.0012	.0060	.1146	.0925	.109	.016	17320	24200
1/4	40	.540	.364	.088	.0033	.0123	.1628	.1250	.147	.045	11250	15780
	80		.302	.119	.0038	.0139	.1547	.1574	.185	.031	16070	22450
3/8	40	.675	.493	.091	.0073	.0216	.2090	.1670	.196	.083	9070	12700
	80		.423	.126	.0086	.0255	.1991	.2173	.256	.061	13160	18400
1/2	5	.840	.710	.065	.0119	.0280	.274	.1583	.186	.171	4950	6930
	10		.674	.083	.0143	.0341	.269	.197	.232	.154	6430	9020
	40		.622	.109	.0171	.0407	.2613	.2503	.294	.132	8690	12160
	80		.546	.147	.0201	.0478	.2505	.3200	.376	.101	12210	17100
	160		.466	.187	.0221	.0527	.240	.384	.451	.074	16260	22800
5/8	5	1.050	.920	.065	.0245	.0467	.3491	.2011	.237	.288	3900	5470
	10		.884	.083	.0297	.0566	.3432	.2521	.297	.266	5070	7100
	40		.824	.113	.0370	.0705	.3337	.3326	.391	.231	7070	9900
	80		.742	.154	.0448	.0853	.3214	.4335	.510	.187	9960	13970
	160		.614	.218	.0527	.1004	.304	.570	.670	.128	14930	20950
1	5	1.315	1.185	.065	.0500	.0760	.4425	.2553	.300	.478	3090	3910
	10		1.097	.109	.0757	.1151	.4282	.4130	.486	.409	5340	6750
	40		1.049	.133	.0873	.1328	.4205	.4939	.581	.374	6600	8350
	80		.957	.179	.1056	.1606	.4066	.6388	.751	.311	9160	11600
	160		.815	.250	.1251	.1903	.387	.836	.984	.226	13450	17050
1 1/4	5	1.660	1.530	.065	.104	.125	.564	.326	.383	.797	2430	3080
	10		1.442	.109	.161	.193	.550	.531	.625	.707	4160	5260
	40		1.380	.140	.195	.235	.540	.668	.786	.648	5430	6880
	80		1.278	.191	.242	.291	.524	.882	1.037	.555	7610	9640
	160		1.160	.250	.284	.342	.506	1.107	1.302	.458	10280	13020
1 1/2	5	1.900	1.770	.065	.158	.166	.649	.375	.441	1.067	2110	2670
	10		1.682	.109	.247	.260	.634	.613	.721	.962	3610	4570
	40		1.610	.145	.310	.326	.623	.799	.940	.882	4880	6175
	80		1.500	.200	.391	.412	.605	1.068	1.256	.765	6900	8730
	160		1.338	.281	.482	.508	.581	1.431	1.681	.608	10080	12780
2	5	2.375	2.245	.065	.315	.265	.817	.472	.555	1.716	1680	2130
	10		2.157	.109	.499	.420	.802	.776	.913	1.582	2860	3620
	40		2.067	.154	.666	.561	.787	1.074	1.264	1.453	4120	5210
	80		1.939	.218	.868	.731	.766	1.477	1.737	1.278	5950	7535
	160		1.689	.343	1.163	.979	.728	2.19	1.575	.970	9800	12420
2 1/2	5	2.875	2.709	.083	.710	.494	.988	.728	.856	2.501	1770	2250
	10		2.635	.120	.987	.687	.975	1.039	1.221	2.361	2590	3290
	40		2.469	.203	1.530	1.064	.947	1.704	2.004	2.073	4490	5690
	80		2.323	.276	1.924	1.339	.924	2.254	2.650	1.835	6240	7900
	160		2.125	.375	2.351	1.637	.894	2.945	3.464	1.54	8740	11070
3	5	3.500	3.334	.083	1.301	.744	1.208	.891	1.048	3.785	1450	1840
	10		3.260	.120	1.822	1.041	1.196	1.274	1.498	3.61	2110	2680
	40		3.068	.216	3.017	1.724	1.164	2.228	2.261	3.20	3895	4935
	80		2.900	.300	3.894	2.225	1.136	3.016	3.547	2.86	5520	6995
	160		2.626	.437	5.04	2.879	1.094	4.213	4.945	2.34	8320	10530

TIPOS DE CONEXIONES

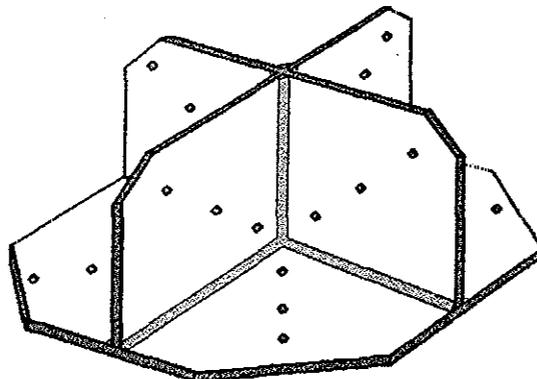
En el campo de las estructuras espaciales formadas por barras rectas, conectadas en el espacio en cualquier dirección, se presenta el problema de conectar los miembros que coinciden en un nudo, y que transmiten todos los elementos mecánicos que se generan por el movimiento de la estructura (ref. 1).

Para lograr la estabilidad, las juntas de los miembros deben tener dos características importantes: resistencia a la flexión y rigidez. Sin esto, el cascarón no puede resistir los momentos internos, o bien, no podría resistir las cargas, en particular, las concentradas.

Aunque hoy en día existen métodos de conexión de gran simplicidad, es conveniente hacer notar que se deben evitar las juntas que induzcan esfuerzos adicionales debidos a excentricidades (ref. 14).

A continuación, se proporciona una breve descripción de los tipos de juntas más comúnmente usados.

7.1 *Conexión para perfiles en cajón*



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 7.1: Conector para estructuras espaciales

Este sistema de conexión, está formado por tres placas metálicas de igual espesor, las cuales, se preparan en el taller para ser unidas entre sí con soldadura eléctrica (ref. 1). Las barras que se conectan al conector están

formadas por dos ángulos cuyos lados están comprendidos entre 2.5 cm y 7.5 cm, los cuales, se unen en forma de cajón por medio de soldadura eléctrica. La conexión entre las barras y la junta se realiza mediante tornillos de alta resistencia.

El maquinado de cada placa es sencillo, por lo que puede fabricarse en serie.

Al analizar este tipo de unión, no se encontraron problemas de distorsión provocados por la colocación de la soldadura. Las dos placas unidas a la inferior, permiten transmitir la fuerza axial en cada barra a los tres tornillos de conexión, donde se producen los esfuerzos cortantes en las dos direcciones de los mismos sin que se introduzca flexión. Además, los tornillos tienen una longitud tal, que permite absorber los momentos flexionantes en una dirección.

## 7.2 Junta hemisférica

Este tipo de elemento de conexión se fabrica con placas de acero de espesor adecuado, y su diámetro, depende del tamaño de los elementos que conecta (ref. 2). Los miembros diagonales, son colocados en forma rígida por medio de tornillos de alta resistencia a la tensión, y para tal fin, al conector se le hacen una serie de orificios con cuerda.

La conexión de los miembros verticales, se realiza mediante el uso de un acoplamiento de soldadura al final de los mismos, fijándolos además con tornillos de alta resistencia a la tensión.

La junta está unida a una barra de forma tubular por medio de un cordón de soldadura.

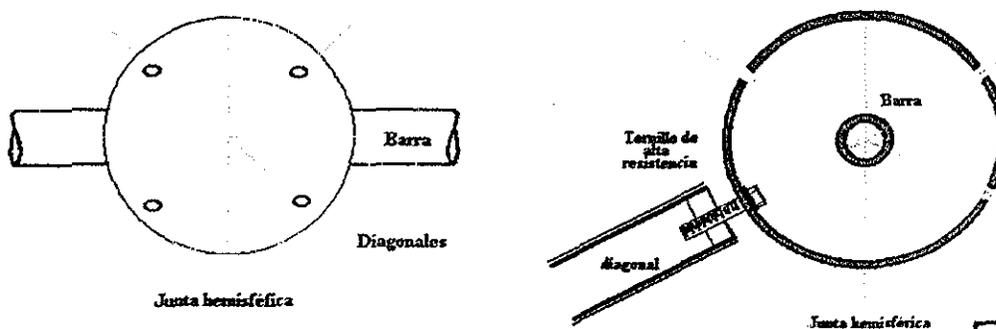


Figura 7.2: Detalles de una junta hemisférica

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Los tornillos de alta resistencia que se pueden usar en esta conexión son W3/4 in, W7/8 in y W1 in, según sea la magnitud de los esfuerzos en los miembros diagonales.

Este tipo de juntas se puede fabricar en serie y de diferentes tamaños, en donde, la elección de una o de otra dependerá de lo que se requiera para satisfacer las solicitaciones de la estructura.

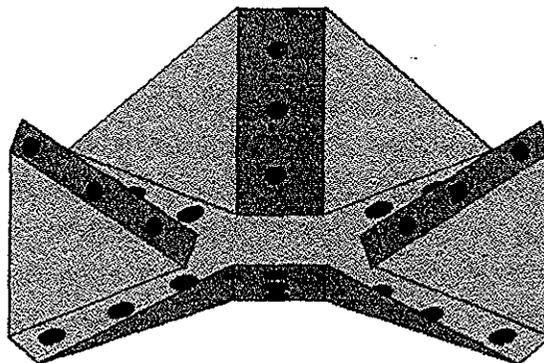
### 7.3 Junta estándar

Este tipo de junta fue desarrollado bajo dos criterios básicos:

- a) Estandarizar los módulos intercambiables que la componen y que ofrecen una gran variedad de opciones para el diseño
- b) La fabricación de las partes básicas, los materiales, la maquinaria de fabricación y los procesos usados en las plantas de fabricación.

Este tipo de junta, se fabrica por una máquina que transforma una placa de acero en una pieza para conectar barras a 45° (ref. 18).

La junta puede ser reforzada por medio de una cruz manufacturada con barras de acero rolado en caliente, además cuenta con una serie de orificios en la parte posterior de la misma, en los cuales se introducen los tornillos que unen los conectores a la junta. Para la unión entre las barras y las juntas se pueden usar tornillos de alta resistencia.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 7.3: Junta estándar

#### 7.4 Junta OKTA -S

Ésta consiste en una serie de elementos básicos (junta prefabricada de forma esférica y de una sección circular hueca ) ( ref. 19).

La esfera hueca, consiste en dos pequeñas cubiertas de acero rolado en caliente y una placa en forma de diafragma dentro de la esfera, todas ellas soldadas para formar una sola pieza.

Para la unión, los elementos se deben soldar en ambos lados de la junta. Durante la construcción en el sitio, las tuercas deben ser apretadas con un par especificado, de manera que exista una unión adecuada entre las barras y la junta.

Al analizar este tipo de junta bajo la acción de compresiones y tensiones, mediante una máquina hidráulica, donde se aumenta gradualmente la carga, no se observaron cambios en el comportamiento y en las deformaciones de las piezas estudiadas.

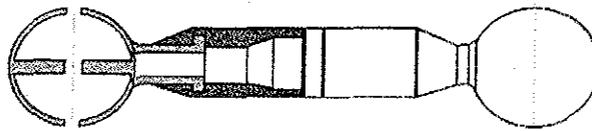


Figura 7.4: Junta OKTA-S



#### 7.5 Nodos espaciales

Este sistema es muy usado en ingeniería debido a que:

- a) Provee una simple y económica forma de construcción
- b) Establece un método fácil para el cálculo de las fuerzas internas en los miembros que componen la estructura
- c) Existe una gran cantidad de literatura referente a este tema, sería fácil consultar acerca del mismo y verificar las posibles soluciones
- d) Tiene respaldo técnico de servicio si se requiere.

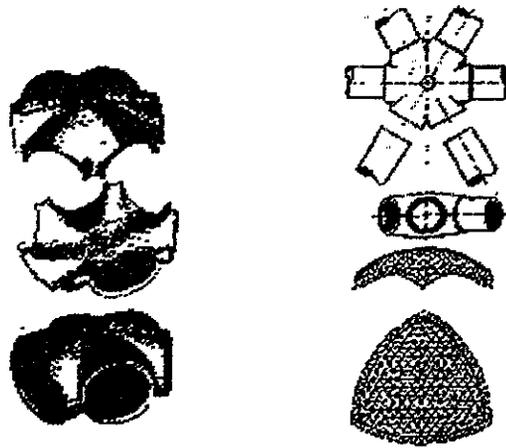
Existen muchas formas de nudos espaciales: triangulares, cuadrangulares y hexagonales. Todos ellos se basan en los módulos que se requieran arquitectónicamente (ref. 22).

Cuando la junta del nudo espacial se diseñó, se decidió que debería lograrse un producto que usara muchas de las técnicas de manufactura existentes.

Los prototipos de juntas, fueron rigurosamente analizados para evitar posibles fallas; los resultados de estas pruebas fueron usados para determinar el comportamiento de la junta, a partir del esfuerzo máximo al que se le debería someter en la práctica.

Este tipo de juntas, con rosca podría llegar a presentar problemas si se descuendara la misma, debido a los esfuerzos que podrían transmitir las barras.

El nudo se compone básicamente de dos cascos abombados en forma de estrella, que pueden estar soldados uno al otro, o unidos mediante un tornillo colocado en el centro del nudo. En cada pico o saliente del elemento de conexión así formado, se le construye una rosca interna en la cual entrarán las barras.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 7.5: Nodos espaciales

### 7.6 Junta Te - Zet usada en la construcción de hangares

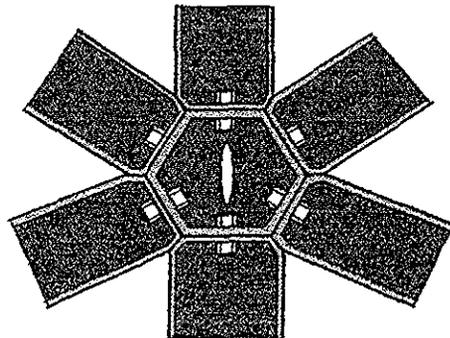


Figura 7.6: Conector usado en hangares Te - Zet

Este tipo de junta es básicamente un cajón de forma hexagonal (ref. 1). Existe además, en cada cara del cajón una perforación, al igual que en el extremo de los conectores. Estos orificios tienen el fin de permitir el paso de un tornillo de alta resistencia para unir el nudo y el conector.

Los conectores son de perfiles prefabricados; por lo general están hechos de un material ligero.

### 7.7 Sistema Oktaplatte

Consiste en un nudo, que está formado por la convergencia de tubos a un punto, los cuales están unidos mediante soldadura (ref. 1).

Este tipo de junta puede presentar algunos problemas como son:

- a) La preparación o habilitación de los miembros diagonales
- b) La acumulación de soldadura en algunas partes, y debido a lo cerrado que se encuentran unos miembros de los otros, impide que penetre la soldadura de una manera adecuada.

La colocación de una pequeña placa de acero inclinada entre el nudo y los miembros diagonales, pueden ser una alternativa para evitar los problemas antes citados, además de separar las diagonales en la junta. Esto permite que éstas, se suelden de una manera más adecuada y en dirección correcta. Por otro lado, cabe mencionar, que el uso de este dispositivo adicional no incrementa demasiado el costo de la estructura.

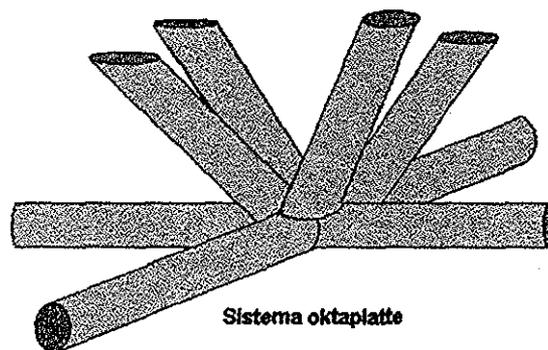


Figura 7.7: Sistema Oktaplatte

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 7.8 Conectores tipo Mero

Conector parecido al sistema de junta hemisférica, pero este tipo de conexión no está conectado a ningún tubo principal, sino que tan solo consta de un nudo de forma esférica, que tiene una serie de orificios roscados a los cuales se unen los conectores (ref. 1).

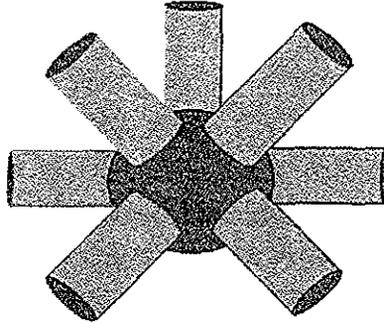


Figura 7.8: Conectores tipo Mero

### 7.9 Conector para estructuras de aluminio

Se han desarrollado sistemas de conexión para estructuras de aluminio, algunas de las cuales son como la que se muestra en la figura 7.9.

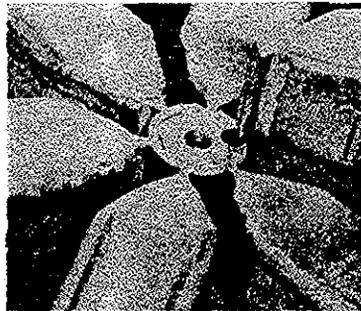


Fig. 7.9: Conector para estructuras de Aluminio

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Los sistemas de conexión anteriormente mostrados, son solo algunos de los que han sido desarrollados para conectar miembros de estructuras espaciales; su empleo ha permitido cubrir grandes claros mediante estructuras de acero o aluminio. Es necesario aclarar que muchos de los sistemas de conexión existentes están patentados, por lo cual el uso de los mismos implica que se tiene que pagar los derechos.

## CAPÍTULO 8

## EFECTOS NO LINEALES GENERADOS POR IMPERFECCIONES INICIALES

*8.1 Introducción*

Dos tipos de no linealidad ocurren en problemas estructurales. El primer tipo se debe a los materiales, en cuanto a la no linealidad elástica del material estructural. El segundo tipo depende de la geometría no lineal y esto ocurre cuando los desplazamientos son lo suficientemente grandes para causar cambios significativos en la geometría de la estructura, de tal manera, que las ecuaciones de equilibrio se deben plantear para la configuración deformada (ref. 12).

Los métodos de análisis matricial desarrollados para estructuras lineales, se extienden para incluir las no linealidades antes mencionadas, tanto la matriz de desplazamientos, como los métodos de análisis de fuerzas, se pueden utilizar para tal propósito.

*8.2 Análisis de la matriz de desplazamientos para grandes deflexiones*

Los términos no lineales de las ecuaciones de desplazamientos, modifican la matriz de rigidez de tal forma que:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \quad (8.1)$$

Donde :

$\mathbf{K}_E$  : Es la matriz de rigidez elástica para la geometría inicial del elemento

$\mathbf{K}_G$  : Es la matriz de rigidez geométrica, la cual depende no solamente de la geometría, sino también de las fuerzas internas iniciales existentes.

Las matrices de rigidez elástica y geométrica son adecuadas para cada elemento, y conjuntadas en la matriz de rigidez total al usar procedimientos convencionales.

El incremento de desplazamientos y fuerzas externas, se calculan de manera convencional, para cada incremento de carga. Si es necesario, las constantes

elásticas utilizadas en la matriz de rigidez elástica, pueden ser modificadas para cada iteración.

Los desplazamientos totales, para el valor total de cargas aplicadas son obtenidas por la suma de los valores de los incrementos.

### 8.3 Teoría de flexión y torsión

#### 8.3.1 Flexión y torsión simple

Cuando una sección transversal bisimétrica, como la de la figura 8.1 se somete a esfuerzo directo, la fuerza axial y los momentos flexionantes son definidos por:

$$F_x = \int_A \sigma_x dA \quad (8.2)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (8.3)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA \quad (8.4)$$

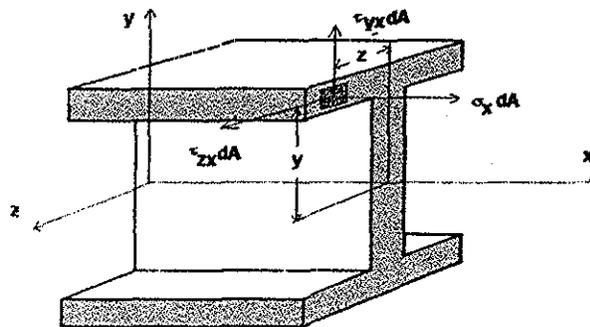
La fuerza cortante transversal que resulta del esfuerzo cortante es igual a:

$$F_y = \int_A \tau_{yx} dA \quad (8.5)$$

$$F_z = \int_A \tau_{zx} dA \quad (8.6)$$

Y el momento torsionante resultante es:

$$M_x = \int_A (\tau_{zx} y - \tau_{yx} z) dA \quad (8.7)$$



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.1: Esfuerzos elementales

Por integración parcial de la ecuación 8.7 en un miembro sujeto a torsión pura, se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \quad (8.8)$$

$$\int y \tau_{zy} dA = - \int_A z \tau_{yx} dA = \frac{1}{2} M_x \quad (8.9)$$

Las ecuaciones 8.8 y 8.9 son válidas únicamente en torsión simple (St. Venant), cuando se presentan restricciones al alabeo, y los esfuerzos normales  $\sigma_\omega$ , que se pueden presentar deben satisfacer:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \neq 0 \quad (8.10)$$

### 8.3.2 Torsión no uniforme

Cuando existe restricción al alabeo, la torsión total,  $M_x$ , es la suma de la torsión de St Venant ( $T_{sv}$ ) y la torsión debida al alabeo ( $T_\omega$ ):

$$M_x = T_{sv} + T_\omega \quad (8.11)$$

La teoría de Vlasov comienza con una generación arbitraria de un sistema de coordenadas que hace referencia a tres puntos C, T, y D sobre una sección transversal típica.

El punto C representa el origen de las coordenadas cartesianas, el punto T es el punto de referencia para la torcedura, y el punto D es el origen sectorial, los puntos de referencia C y T son el centroide y centro de cortante respectivamente, mientras que el punto D, es tomado para obtener el área sectorial principal.

Por simplicidad, las cargas distribuidas se desprecian, los esfuerzos resultantes sobre una sección transversal de un miembro, se refieren al estado inicial de la sección transversal. Así, se tiene que los cambios previos adicionan un bimomento B y  $M_x$  a un eje a través de un punto T.

$$F_x = \int_A \sigma_x dA \quad (8.12)$$

$$F_y = \int_A \tau_{yx} dA \quad (8.13)$$

$$F_z = \int_A \tau_{zx} dA \quad (8.14)$$

$$M_x = \int_A [\tau_{zy}(y - a_y) - \tau_{yx}(z - a_z)] dA \quad (8.15)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (8.16)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA \quad (8.17)$$

$$B = \int_A \sigma_x \omega_I dA \quad (8.18)$$

Todas las integrales se desarrollan sobre la sección de área A.  $\omega_I$ , es el área sectorial en un punto arbitrario N.

$$\omega_I = \int_0^s \rho ds \quad (8.19)$$

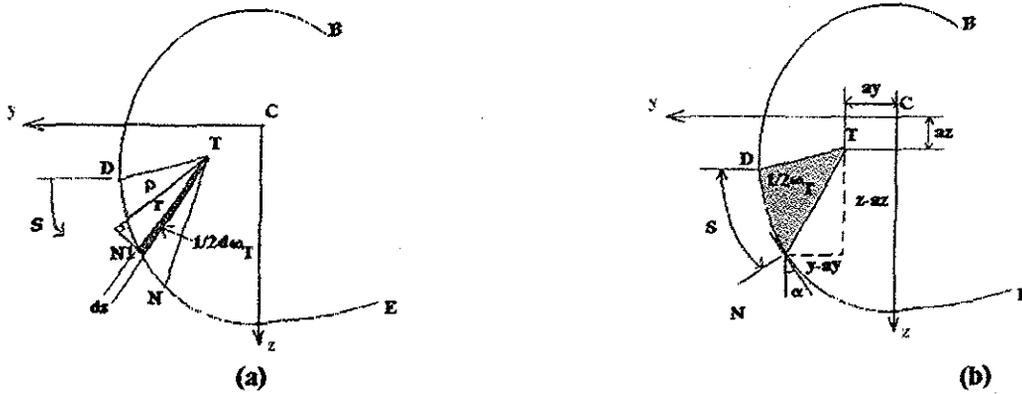
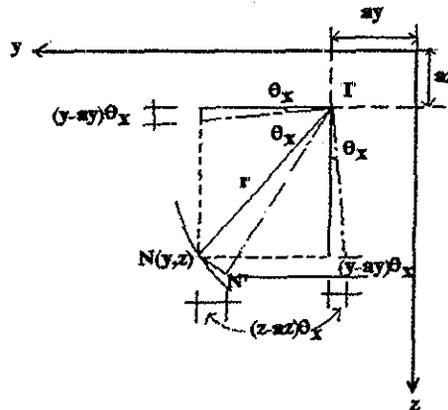


Figura 8.2: Sección geométrica (a) Área sectorial diferencial; (b) Coordenadas

$\rho$  es la distancia del punto T a la tangente del punto NI sobre el arco DN. El bimomento B, es una corrección de los esfuerzos directos y tiene la dimensión de un momento multiplicado por una longitud.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.3: Desplazamiento de un punto en el contorno de la sección

Acorde con las hipótesis geométricas de las secciones transversales planas, solo existen tres componentes de desplazamiento, dos traslaciones y una de rotación por torsión, se describe el comportamiento de la sección transversal en la figura 8.3, en donde los desplazamientos  $U_y$  y  $U_z$  respecto del punto arbitrario N son:

$$U_y = U_{yI} - (z - a_z)\theta_x \quad (8.20)$$

$$U_z = U_{zI} + (y - a_y)\theta_x \quad (8.21)$$

Si el ángulo debido a la torsión  $\theta_x$  es pequeño, en las ecuaciones 8.20 y 8.21 ( $U_{yI}$ ,  $U_{zI}$ ) son los desplazamientos del punto T. El desplazamiento longitudinal  $U_x$  del punto arbitrario N, debido al alabeo de la sección transversal se puede encontrar, mediante la utilización de las hipótesis concernientes a la ausencia de esfuerzo cortante en el perfil.

$$U_x = U_{xc} - zU'_{zI} - yU'_{yI} - \omega_I \theta'_x \quad (8.22)$$

La deformación axial lineal se puede expresar como:

$$\epsilon_x = \frac{dU_x}{dx} = U'_{xc} - zU''_{zI} - yU''_{yI} - \omega_I \theta''_x \quad (8.23)$$

Y el esfuerzo normal como:

$$\sigma_x = E(U'_{xc} - zU''_{zI} - yU''_{yI} - \omega_I \theta''_x) \quad (8.24)$$

Al sustituir  $\sigma_x$  en las ecuaciones 8.12 a 8.18, se pueden expresar los esfuerzos generalizados  $F_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  y  $B$  en una sección transversal de una viga de pared delgada, en términos de las deformaciones generalizadas  $U'_{xc}$ ,  $U''_{yI}$ ,  $U''_{zI}$  y  $\theta''_x$  alrededor de los ejes de referencia, como:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ M_y \\ M_z \\ B \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_z & -S_y & -S_\omega \\ & I_y & -I_{yz} & -I_{\omega z} \\ & & I_x & I_{\omega y} \\ & & & C_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U'_{xc} \\ -U''_{zI} \\ U''_{yI} \\ \theta''_x \end{Bmatrix} \quad (8.25)$$

En la cual:

$$A = \int_A dA$$

$$S_y = \int_A y dA$$

$$S_z = \int_A z dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$C_\omega = \int_A \omega_I^2 dA \quad (8.26)$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (8.27)$$

$$S_\omega = \int_A \omega_I dA \quad (8.28)$$

$$I_{wy} = \int_A y\omega_I dA \quad (8.29)$$

$$I_{wz} = \int_A z\omega_I dA \quad (8.30)$$

Se puede simplificar, si se satisfacen las condiciones de ortogonalidad para las coordenadas generalizadas:

$$S_y = S_z = I_{yz} = S_w = I_{wy} = I_{wz} = 0 \quad (8.31)$$

Las primeras tres condiciones, determinan los ejes centroidales y principales de la sección, las dos ultimas se usan en la determinación del polo sectorial principal, y el centro cortante para  $\omega_I$ .

$$\omega = \omega_I - \frac{1}{A} \int \omega_I dA \quad (8.32)$$

#### ***8.4 Bimomento causado por fuerzas excéntricas***

Todos los elementos en cajón, son muy ligeros (en peso) comparados con otras secciones estructurales, en ellas los efectos que aparecen en este tipo de secciones de pared delgada no deben ignorarse, ya que en la mayoría de las ocasiones suelen ser significativos.

Estos efectos definen los grados de libertad de una sección transversal, en el exterior del borde del alma de una sección en canal, y por consiguiente, juega un papel muy significativo en el pandeo local inicial, debido a que los bordes libres son partes débiles de una sección transversal.

De lo anterior se tiene que el principio de Saint Venant, debería incluir alguna declaración acerca de la limitación de las distorsiones, así como de los esfuerzos.

Cuando aparece el alabeo en un miembro, las secciones transversales no permanecen planas, y aparecen esfuerzos denominados 'Esfuerzos de alabeo'. El esfuerzo longitudinal en un punto, que tiene por coordenadas (x,y), está dado por la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_{yy}} + \frac{M_y x}{I_{xx}} + \frac{M_\omega \omega}{C_\omega} \quad (8.33)$$

donde los primeros tres términos, son esfuerzos axiales y de flexión alrededor de los dos ejes de la sección, y el último término nos da los esfuerzos longitudinales debidos al alabeo; se definen:

$M_\omega$  = bimomento ( $N\ mm^2$ ), que consiste en dos momentos iguales y opuestos que actúan alrededor del mismo eje e igualmente separados, su valor es del producto del momento y la separación.

$C_\omega$  = constante de alabeo de la sección ( $mm^6$ ).

$\omega$  = función de alabeo ( $mm^2$ ).

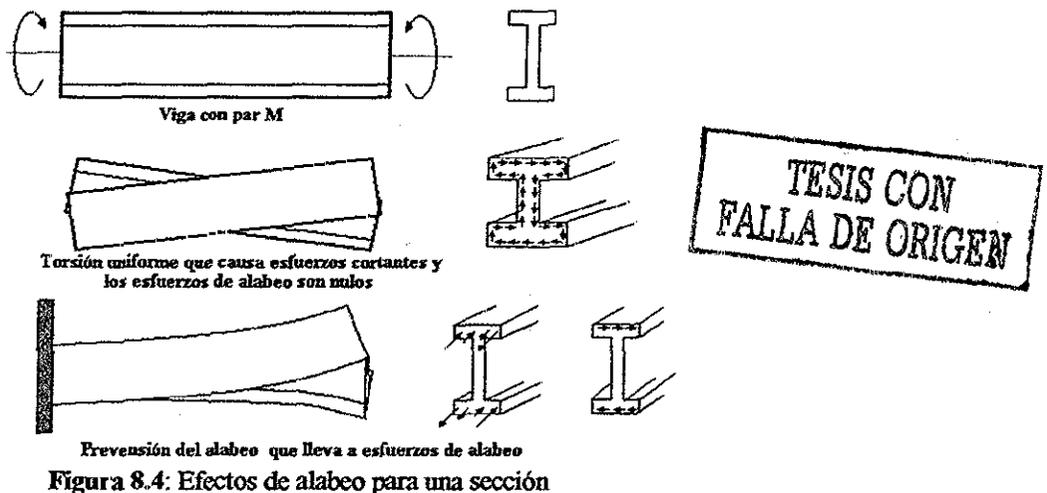


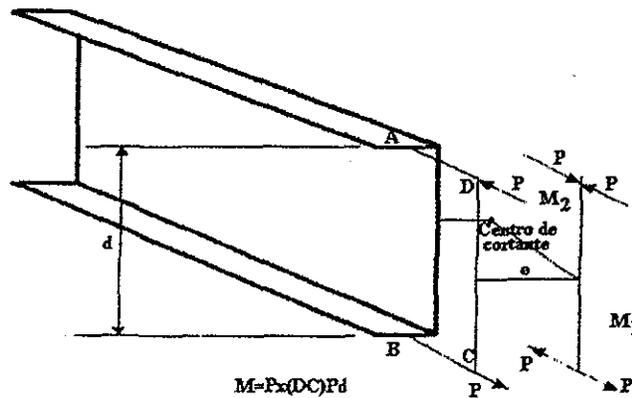
Figura 8.4: Efectos de alabeo para una sección

Para la solución de problemas prácticos de vigas existen, dos teoremas útiles se mencionan en el libro de Zbirohowski - Koscia (1967) (ref. 26).

Teorema : Un par  $Pd = M$  que actúa sobre una sección transversal y en un plano paralelo al eje de la viga, causa el bimomento  $M_\omega$ , el cual, tiene un valor igual al producto de  $M$  y la distancia perpendicular del centro de cortante al plano de  $M'$ .

El significado de este teorema se ilustra en la figura 8.5, donde se observa que se agregan dos pares iguales y opuestos,  $M_1$  y  $M_2$  en el centro de cortante del

par original, que puede ser reemplazado por un par  $M_1 (=M)$  en el centro de cortante y un bimomento  $Me$ .



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.5 : Un par  $Pd$  que no actúa en el centro de cortante, puede ser reemplazado por otro y por un bimomento  $Me$

Este teorema, habilita todos los pares aplicados con el centro de cortante, los cuales llegan a ser el origen de las coordenadas para las ecuaciones de torsión que las gobiernan y que han sido ortogonalizadas.

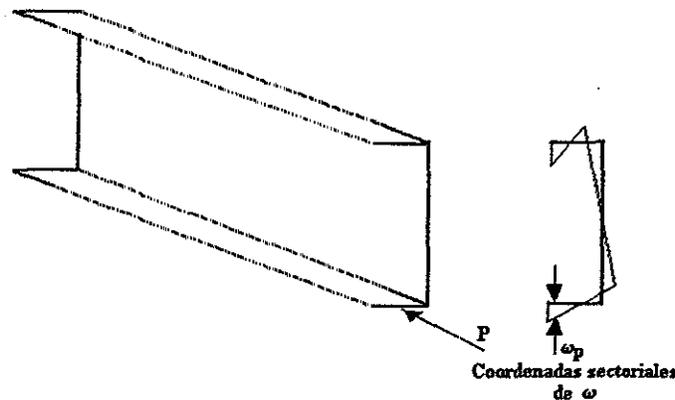


Figura 8.6: Fuerza  $P$  que actúa paralelamente al eje de la viga la cual causa un bimomento

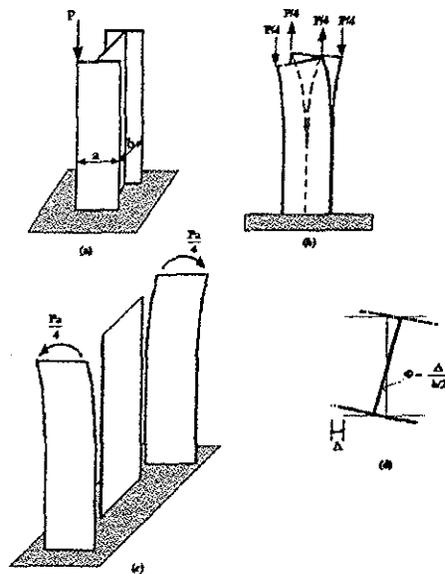
Teorema: Una fuerza externa  $P$ , que actúa paralela al eje de la viga causa un bimomento  $M_\omega$ , igual al producto de  $P$  y la coordenada sectorial  $\omega_p$  del punto donde  $P$  se aplica.

Este teorema se ilustra en la figura 8.6, se puede demostrar a partir del principio de desplazamientos virtuales. Si dos juegos de fuerzas son

estáticamente equivalentes y un desplazamiento arbitrario se impone, el trabajo hecho por un juego de cargas es igual al trabajo realizado por el otro juego; los juegos de carga son la carga  $P$  y el bimomento  $M_\omega$ , los cuales son estáticamente equivalentes. En la discusión de la ecuación  $u(\bar{z},s) = \omega_B(s)$ , se muestra que la coordenada sectorial  $\omega_B$ , es igual a los desplazamientos longitudinales  $\mu$ , cuando el ángulo de rotación  $\phi'$  es de menos un radian por unidad de longitud.

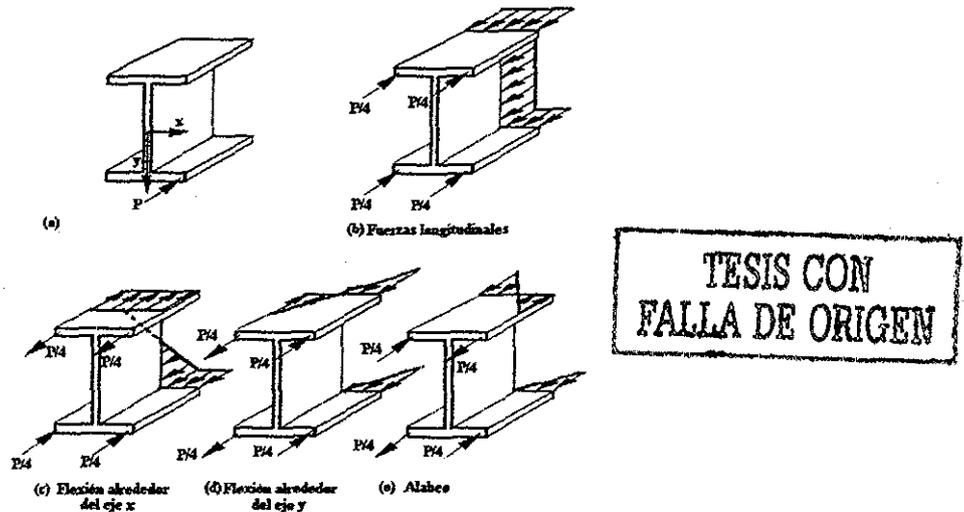
Para entender el significado del bimomento se consideran algunos ejemplos simples.

La distorsión de una columna I (figura 8.7.a), con carga excéntrica  $P$  que actúa paralelamente a su eje se muestra en la figura 8.7.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 8.7: Bimomento aplicado en una columna que resulta de la torsión y los esfuerzos longitudinales



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.8: Componentes de una carga simple P resultante del alabeo del perfil. Los principios de Saint Venant no son válidos y la hipótesis de Bernoulli no es aplicable para el inciso (c)

En la figura 8.8 la carga P, se puede tratar como una combinación de cuatro juegos de cargas, uno de los cuales representa la carga axial, dos que representan la flexión alrededor de un eje de simetría de la sección transversal y la última es un bimomento. Los primeros tres tipos de cargas, resultan de la deformación del modelo que es muy familiar a los ingenieros. El bimomento resultará de las distorsiones de la sección transversal, paralela al eje longitudinal de la columna y a la torsión de la columna alrededor de su eje longitudinal (figura 8.7 b).

Los patines se separan del alma (figura 8.7 c), los pares de momentos  $Pa/4$  son aplicados en el extremo de cada patín. Se muestra a la vez la flexión de cada patín, mientras que el alma permanece recta. La integridad de la sección transversal, puede ser restaurada por la torsión del alma y de cada uno de los patines a través de un ángulo  $2\Delta/b$  (fig 8.7.d) y subsecuentemente estas placas son muy flexibles, por lo tanto las fuerzas requeridas deberán ser muy pequeñas. La torsión pura de cada placa, resulta de esfuerzos cortantes que y son llamados esfuerzos de Saint Venant  $\tau_{st}$ . De esta manera, el bimomento puede resultar de la torsión de una columna y del esfuerzo longitudinal de sus patines, y para fines de diseño esto puede resultar muy importante.

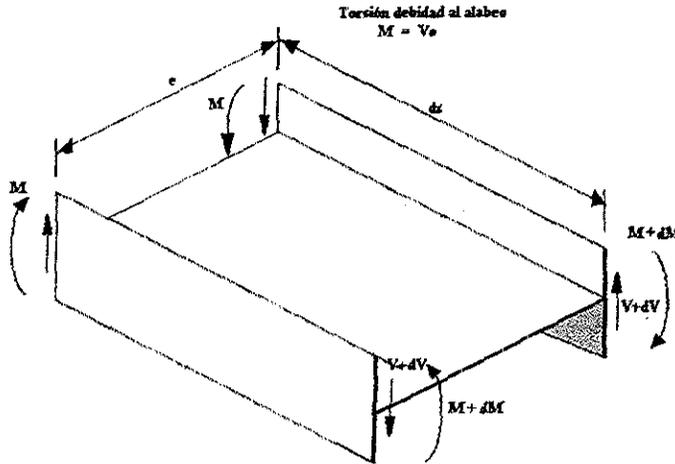
Un segundo ejemplo de la relación entre el bimomento y un momento torsionante, se puede utilizar de una manera simple: Un pequeño elemento de una columna se muestra en la figura 8.9, actúa por un bimomento  $M_\omega$ . Este se representa por un par de momentos  $M$  separados por una distancia  $e$ , entonces,  $M_\omega = Me$  y en el extremo del elemento, el bimomento estará dado por:

$$M_{\omega} + dM_{\omega} = Me + edM \quad (8.34)$$

En la figura 8.9 se puede ver que cada extremo de las fuerzas cortantes forman un par llamado momento torsionante debido al alabeo (Torsión debida al alabeo de la sección)  $M_{DS}$  donde:

$$M_{DS} = Ve = e \frac{dM}{dz} = \frac{d(Me)}{dz} = \frac{dM_{\omega}}{dz} \quad (8.35)$$

de esta manera, el momento torsionante, aparece cuando el bimomento varía a lo largo de la longitud de la viga o columna.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.9: Bimomento que varía a lo largo de la columna, que produce un momento torsionante llamado momento torsionante debido al alabeo

## 8.5 Análisis elasto - plástico no lineal de nodos flexibles en marcos espaciales

### 8.5.1 Sinopsis

En aproximaciones convencionales al diseño y análisis de marcos de acero, se asume que la construcción sea deformable. En la aproximación de construcciones simples, las conexiones entre miembros no son capaces de transmitir momentos, mientras que las conexiones rígidas si aceptan momentos. En la práctica, las conexiones son semirígidas, las cuales poseen algunos grados de rigidez rotacional, como una función de la carga aplicada. Un método para el análisis no lineal de marcos espaciales, que incorpora, los efectos de los nodos flexibles o semirígidos se presenta a continuación.

La conexión de elementos de longitud nula con tres grados de libertad rotacional por nudo se utiliza para modelar al mismo. El elemento de conexión puede ser introducido, en uno o en ambos extremos del elemento de pared delgada viga - columna, por transformación cinemática y condensación estática. El elemento de conexión propuesto, puede ser representado por la colocación no lineal acoplada o desacoplada, ya sea en el plano o fuera del mismo. Varios ejemplos numéricos se presentan, en los cuales, se ve la respuesta de un marco con nudos flexibles y se demuestra que es muy sensible al comportamiento de los nudos.

Desde los años 30<sup>s</sup>, se estudio el comportamiento de conexiones, primero se realizaron a base de remaches, posteriormente a base de pernos y por último han sido conexiones semirígidas, las cuales fueron estudiadas por Jones (1983) (ref. 10).

El comportamiento en una junta  $M - \theta_r$  es no lineal, pero en 1936 se estudió de manera lineal. Posteriormente en 1969 y 1970, se estudió un modelo que empleó una relación bilineal para la matriz de rigidez en el método de análisis. Posteriormente se utilizaron modelos ajustados mediante series polinomiales, las cuales no tuvieron éxito, pues se presentó una rigidez negativa, lo cual es indicativa de inestabilidad; otros modelos tales como los exponenciales multi-parámetro se usaron para representar la no linealidad  $M - \theta_r$ .

### ***8.5.2 Modelado de las conexiones***

#### ***Comportamiento de una conexión***

Mediante las conexiones se transmiten fuerzas axiales, cortantes, momentos flexionantes y torsionales. La deformación axial y cortante son pequeñas, comparadas con las deformaciones rotacionales; para propósitos prácticos éstas no se consideran en el análisis.

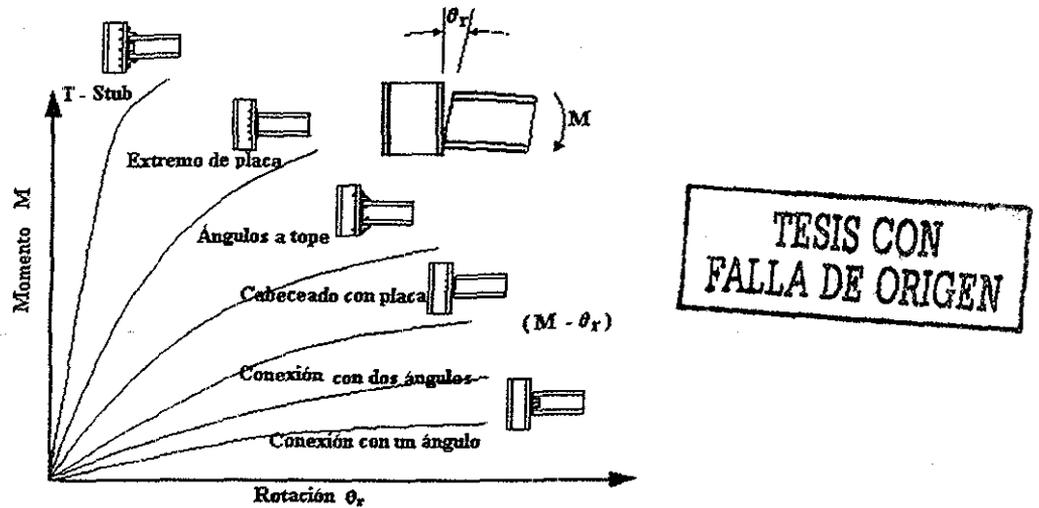


Figura 8.10: Relación entre momento y rotación ( $M - \theta_r$ ) para diferentes tipos de conectores

La figura 8.10, muestra curvas típicas momento - rotación, para diferentes tipos de conexiones semirrigidas. En general, todos los tipos de conexiones exhiben un comportamiento no lineal  $M - \theta_r$ , ya que disminuye la rigidez cuando se incrementa la carga.

### 8.6 Modelos de conexiones

Algunos de los modelos de conexión son descritos a continuación.

#### 8.6.1 Modelo polinomial

Dicho modelo fue propuesto por Frye y Morris en 1975 (ref. 10); el modelo relaciona y representa el comportamiento  $M - \theta_r$  razonablemente bien, pero sufre una desventaja ya que la rigidez de la conexión puede ser negativa en algunos valores. La rigidez negativa también crea dificultades numéricas, al usar la aproximación de rigidez tangente en el análisis.

#### 8.6.2 Modelo B - Spline

Una representación más exacta de una conexión, se logra al utilizar la curva cúbica B - Spline; de este modo se evita a la rigidez negativa y aparenta representar mejor el comportamiento no lineal  $M - \theta_r$ .

### 8.6.3 Modelo exponencial

En este modelo, una función exponencial se usa para representar las características no lineales de la conexión.

$$M = \sum_{j=1}^6 C_j \left[ 1 - \exp \left( - \frac{|\theta_r|}{2j\alpha} \right) \right] \quad (8.36)$$

Donde  $\alpha$  es el factor de escala y  $C_j$  es una constante que ajusta la curva. La rigidez de la conexión depende de que esté o no cargada.

Cuando está cargada, la rigidez tangente está dada por:

$$R = \frac{dM}{d\theta_r} = \sum_{j=1}^6 \frac{C_j}{2j\alpha} \exp \left( - \frac{|\theta_r|}{2j\alpha} \right) \quad (8.37)$$

Y cuando no está cargada la rigidez tangente es:

$$R = \frac{dM}{d\theta_r} = \sum_{j=1}^6 \frac{C_j}{2j\alpha} \quad (8.38)$$

Para determinar si una conexión está cargada o descargada, los momentos y rotaciones sufren incrementos o decrementos. Un decremento en las rotaciones o en el momento significa descarga.

### 8.7 Modelos de conexión para marcos espaciales

Existe una gran cantidad de estudios de conexiones dentro del plano, y poca atención se tiene para el comportamiento de éstas en el espacio, esto mismo ocurre con las características torsionales de la conexión.

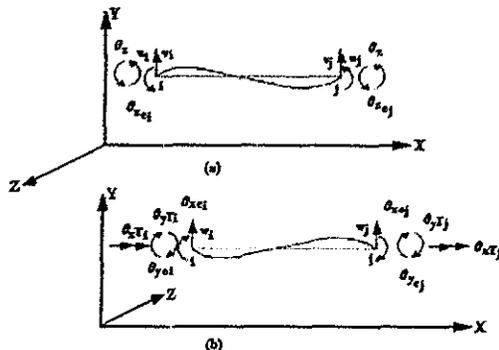


Figura 8.11: Elemento viga columna con juntas flexibles en ambos extremos

En este capítulo un elemento conexión de longitud nula tiene tres grados de libertad rotacional independientes por nudo, y cuando se usa el modelo de comportamiento de una conexión semirígida, en cada dirección (en el plano de

flexión y fuera del plano de flexión y torsión) se utiliza un resorte por cada grado de libertad como se puede observar en la figura 8.11.

El comportamiento de cada resorte rotacional, puede ser modelado independientemente, al usar algunas relaciones no lineales  $M - \theta_r$ . En el estudio que se hace del modelo exponencial de Luy y Chen (ref. 10), que previamente se mencionó, por las ecuaciones anteriores el elemento de conexión se puede usar un elemento de pared delgada viga - columna en ambos extremos.

### 8.8 Matriz de rigidez tangente para conexiones flexibles

En general existen dos aproximaciones básicas, para incorporar conexiones flexibles dentro del método de rigideces de análisis de marcos que son:

- a) **Aproximación del elemento de conexión:** esta aproximación es equivalente a colocar un resorte rotacional en los extremos de los miembros
- b) **Aproximación de la matriz de flexibilidades:** esta aproximación involucra la construcción de una matriz de flexibilidades para los momentos en los grados de libertad. La matriz de rigidez puede entonces ser generada por una transformación conveniente.

En el presente trabajo, la aproximación 'elemento - conexión' se menciona; dicho elemento conexión puede ser introducido en uno o ambos extremos del elemento de pared delgada viga - columna, al aceptar que las deformaciones axiales y cortantes de las conexiones son insignificantes.

La relación de rigidez tangente de un elemento conexión se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} M_{xI} \\ M_{xe} \\ M_{yI} \\ M_{ye} \\ M_{zI} \\ M_{ze} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xi} & -R_{xi} & & & & \\ & -R_{xi} & R_{xi} & & & \\ & & & R_{yi} & -R_{yi} & \\ & & & -R_{yi} & R_{yi} & \\ & & & & & R_{zi} & -R_{zi} \\ & & & & & -R_{zi} & R_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xI} \\ \theta_{xe} \\ \theta_{yI} \\ \theta_{ye} \\ \theta_{zI} \\ \theta_{ze} \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

ó

$$M_{ci} = K_{ci} \theta_{ci} \quad (8.40)$$

Donde  $R_{xi}$ ,  $R_{yi}$  y  $R_{zi}$  son las rigideces rotacional tangente de los elementos conexión en el extremo  $i$  del elemento viga - columna en coordenadas globales;  $M_T$  y  $M_e$ , son las acciones correspondientes, y  $K_{ci}$  es la matriz de rigidez tangente de los elementos conexión en los extremos  $i$ . Las ecuaciones 8.39 y 8.40 no consideran acoplamiento entre los diferentes grados de libertad rotacional en la conexión.

Las rotaciones relativas en los nodos  $\theta_r$  se pueden obtener de:

$$\theta_{xri} = \theta_{xTi} - \theta_{xei} \quad (8.41)$$

$$\theta_{yri} = \theta_{yTi} - \theta_{yei} \quad (8.42)$$

$$\theta_{zri} = \theta_{zTi} - \theta_{zei} \quad (8.43)$$

La relación de rigidez tangente en coordenadas globales de elementos viga - columna con nudos flexibles en ambos extremos, se pueden escribir como sigue:

$$\begin{bmatrix} M_{ci} \\ F_e \\ M_{ej} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ci} & & \\ & K_{Ie} & \\ & & K_{ej} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ci} \\ r_e \\ \theta_{ej} \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

Donde  $K_{Ie}$  es la matriz de rigidez tangente del elemento de pared delgada viga - columna en coordenadas globales;  $r_e$  son los desplazamientos en los extremos como se ve en figura 8.11 y  $F_e$  son las acciones en los extremos.  $M_c$ ,  $\theta_c$ , y  $K_c$  en los extremos  $i$  y  $j$  se obtienen por las ecuaciones 8.39 y 8.40, con lo cual la ecuación 8.44 puede ser reescrita como:

$${}_c F_{ec} = {}_c K_{Iec} {}_c r_{ec} \quad (8.45)$$

Donde  ${}_c K_{Iec}$  es una matriz de rigidez tangente de 24 x 24, de los elementos viga columna con nudos flexibles en ambos extremos. Cuando un nudo flexible se presenta solo en un extremo ( $i$  ó  $j$ ), la relación de rigidez tangente puede ser escrita como:

$${}_c F_e = {}_c K_{Ie} {}_c r_e \text{ en la cual el extremo } i \text{ es flexible} \quad (8.45a)$$

$$F_{ec} = K_{Iec} r_{ec} \text{ en la cual el extremo } j \text{ es flexible} \quad (8.45b)$$

Ambas  ${}_c K_{Ie}$  y  $K_{Iec}$  son matrices de 18 x 18.

Al realizar las relaciones de compatibilidad existentes entre las conexiones de los elementos viga - columna, se pueden escribir las siguientes relaciones cinemáticas:

$${}^c r_{ec} = {}_c T_c {}^c r_{Tc} \text{ en la cual, ambos extremos del nudo son flexibles, y} \quad (8.45c)$$

$${}^c r_{er} = \left\langle \theta_{xTi} \theta_{xei} \theta_{yTi} \theta_{yei} \theta_{zTi} \theta_{zei} \mid u_i v_i w_i \theta_{xei} \theta_{yei} \theta_{zei} \mid u_j v_j w_j \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \mid \theta_{xTj} \theta_{xej} \theta_{yTj} \theta_{yej} \theta_{zTj} \theta_{zej} \right\rangle^I \quad (8.46)$$

$${}^c r_{Tc} = \left\langle u_i v_i w_i \theta_{xTi} \theta_{yTi} \theta_{zTi} \mid u_j v_j w_j \theta_{xTj} \theta_{yTj} \theta_{zTj} \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \right\rangle^I \quad (8.47)$$

La matriz cinemática de 24 x 18,  ${}_c T_c$ , se menciona más adelante.

Si solo el extremo  $i$  del elemento viga - columna, se conecta al nudo flexible, la relación cinemática puede ser escrita como:

$${}^c r_e = {}_c T {}^c r_I \quad (8.48)$$

Mientras que si solo el extremo  $j$  se conecta al nudo flexible:

$$r_{ec} = T_c r_{Tc} \quad (8.49a)$$

$${}^c r_e = \left\langle \theta_{xTi} \theta_{xei} \theta_{yTi} \theta_{yei} \theta_{zTi} \theta_{zei} \mid u_i v_i w_i \theta_{xei} \theta_{yei} \theta_{zei} \mid u_j v_j w_j \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \right\rangle^I \quad (8.49b)$$

$${}^c r_I = \left\langle u_i v_i w_i \theta_{xTi} \theta_{yTi} \theta_{zTi} \mid u_j v_j w_j \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \right\rangle^I \quad (8.50a)$$

$$r_{ec} = \left\langle u_i v_i w_i \theta_{xei} \theta_{yei} \theta_{zei} \mid u_j v_j w_j \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \mid \theta_{xTj} \theta_{xej} \theta_{yTj} \theta_{yej} \theta_{zTj} \theta_{zej} \right\rangle^I \quad (8.50b)$$

$$r_{Tc} = \left\langle u_i v_i w_i \theta_{xei} \theta_{yei} \theta_{zei} \mid u_j v_j w_j \theta_{xTj} \theta_{yTj} \theta_{zTj} \theta_{xej} \theta_{yej} \theta_{zej} \right\rangle^I \quad (8.51)$$

Las matrices cinemáticas de 18 x 15,  ${}_c T$  y  $T_c$ , de las ecuaciones 8.48 y 8.49a se expresan más adelante.

Similarmente, los grados de libertad rotacional entre las juntas de las viga - columna y los elementos conexión, son grados de libertad internos, los cuales pueden ser condensados mediante la condensación estática. La matriz de condensación con ambos extremos flexibles es:

$${}_c C_c = \left[ \begin{array}{c} I \\ {}_c Q_c \end{array} \right] \quad (8.52)$$

En la cual,  ${}_c C_c$  es una matriz condensada de 18 x 12, I es una matriz unitaria de 12 x 12 y  ${}_c Q_c$  es la matriz que contiene los términos de condensación. Si solo el extremo  $i$  de los elementos viga - columna se considera nudo flexible, la condensación es como sigue:

$${}_c C = \left[ \begin{array}{c} I \\ {}_c Q \end{array} \right] \quad (8.53)$$

Mientras que si solo el extremo  $j$  es flexible:

$$C_c = \left[ \begin{array}{c} I \\ Q_c \end{array} \right] \quad (8.54)$$

En la cual,  ${}_c C$  y  $C_c$  son matrices de condensación de 15 x 12 y  ${}_c Q$  y  $Q_c$  son matrices que contienen términos de condensación de 3 x 12.

Al usar las matrices cinemáticas dadas por las ecuaciones 8.45c, 8.48, 8.49a y las matrices de condensación dadas por las ecuaciones 8.52 a 8.54, se obtiene una modificación a la matriz de rigidez tangente para un elemento general de pared delgada viga - columna. Esto explica la presencia de una conexión flexible en uno o en ambos extremos del elemento.

La matriz de rigidez tangente modificada, cuando ambos extremos son flexibles, se puede expresar como:

$${}_c K_{Imc} = {}_c C_c^I {}_c T_c^I {}_c K_{Icc} {}_c T_c {}_c C_c \quad (8.55)$$

Para esto  ${}_c K_{Imc}$  es una matriz de rigidez tangente modificada de 12 x 12 para los elementos viga - columna en coordenadas globales. Si solo el extremo  $i$  es flexible, entonces:

$${}_c K_{Im} = {}_c C^I {}_c T^I {}_c K_{Ic} {}_c T {}_c C \quad (8.56)$$

Y si solo el extremo  $j$  es flexible:

$$K_{Imc} = C_c^I T_c^I K_{Icc} T_c C_c \quad (8.57)$$

En la cual,  ${}_c K_{Im}$  y  $K_{Imc}$  son matrices de rigidez tangente modificadas de 12 x 12, para los elementos viga - columna con los extremos  $i$  o  $j$  flexibles respectivamente.

### 8.9 Método de solución

El método de solución propuesto, incorpora geometría y materiales no lineales y la no linealidad causada por la presencia de nudos flexibles. La geometría y materiales no lineales son tratados como lo describen los autores Al Bermani y Kitiporchai (1990) (ref. 10).

Incluye los efectos de nudos flexibles en marcos, los cuales son considerados flexibles, y tienen que especificarse primero; de otra manera, estos son tratados como rígidos. Esto puede incluir a todos o algunos de los nudos. El tipo de modelo para el nudo, es un resorte rotacional y debe también especificarse.

Esto puede ser un modelo lineal o no lineal, con diferentes relaciones  $M-\theta_r$ , acopladas o no acopladas, para cada uno de los tres resortes con lo que se puede representar un nudo flexible.

La solución para cada incremento de carga, comienza por formular la matriz de rigidez tangente para cada miembro, y se transforma la matriz a las coordenadas globales de la estructura. Si uno o ambos extremos de un elemento particular, se conectan a un nudo flexible, la matriz de rigidez de aquel miembro se modifica por la presencia del nudo flexible. La matriz de rigidez tangente de la estructura se conjunta y se resuelve por el método incremental nodal de desplazamientos  $\Delta r$ .

El desplazamiento incremental nodal  $\Delta r_T$ , para cada nudo flexible se obtienen del vector  $\Delta r$ . Las rotaciones nodales incrementales  $\Delta \theta_e$ , pueden encontrarse de  $\Delta r_T$ , mediante las matrices de condensación dadas por las ecuaciones 8.52 a 8.54. Cuando ambos extremos de los miembros se unen a un nudo flexible, las rotaciones incrementales nodales se pueden expresar por:

$$\Delta \theta_e = {}_c Q_c \Delta r_T \quad (8.58)$$

en el cual

$$\theta_e = \langle \theta_{xci} \theta_{yei} \theta_{zci} \theta_{xcj} \theta_{ycej} \theta_{zej} \rangle^T \quad (8.59)$$

y

$$r_T = \langle M_i V_i w_i \theta_{xii} \theta_{yii} \theta_{zii} M_i V_i w_i \theta_{xij} \theta_{yij} \theta_{zij} \rangle \quad (8.60)$$

${}_c Q_c$ , es una matriz de 6 x 12 que contiene los términos de condensación dados por la ecuación 8.52.

Si el extremo *i* del miembro, se une a un nudo flexible y el extremo *j* a un nudo rígido o viceversa:

$$\Delta\theta_{ci} = {}_c Q \Delta r_I \quad (8.61)$$

$$\Delta\theta_{ej} = Q_c \Delta r_I \quad (8.62)$$

en el cual :

$$\theta_{ci} = \langle \theta_{xei} \ \theta_{yei} \ \theta_{zei} \rangle^I \quad (8.63)$$

$$\theta_{ej} = \langle \theta_{xej} \ \theta_{yej} \ \theta_{zej} \rangle^I \quad (8.64)$$

${}_c Q$  y  $Q_c$  son matrices de 3 x 12 que contienen términos de condensación dados por las ecuaciones 8.53 y 8.54 respectivamente.

Si el extremo *i* del miembro *M*, se conecta a un nudo flexible *O*, el incremento rotacional relativo  $\Delta\theta_{rO-M}$  del nudo *O*, con respecto al nudo *M* es:

$$\Delta\theta_{rO-M} = \Delta\theta_{I_O} - \Delta\theta_{O_iM} \quad (8.65)$$

Donde  $\Delta\theta_{I_O}$  es la rotación incremental nodal del nudo *O*, el cual puede expresarse de  $\Delta r_I$  como:

$$\Delta\theta_I = \langle \Delta\theta_{xI} \ \Delta\theta_{yI} \ \Delta\theta_{zI} \rangle^I \quad (8.66)$$

La rotación incremental relativa,  $\Delta\theta_{rO-M}$ , del nudo *O* respecto al elemento *M* se puede agregar a las rotaciones de los ciclos de carga previamente obtenidas. Las relaciones relativas acumuladas del nudo *O*, con respecto al miembro *M* en el ciclo cargado;  $\theta_r^n$ , es :

$$\theta_r^n = \theta_r^{n-1} + \Delta\theta_r^n \quad (8.67)$$

Las fuerzas nodales resistentes del elemento *Fe* se pueden obtener por:

$$F_e = F_e + K_{Te} \Delta r_{eA} \quad (8.68)$$

Donde, los desplazamientos del elemento nodal  $r_e$  se obtienen de:

$$r_e = \langle U_i \ V_i \ w_i \ \theta_{xei} \ \theta_{yei} \ \theta_{zei} \ U_i \ V_i \ w_i \ \theta_{xej} \ \theta_{yej} \ \theta_{zej} \rangle^I \quad (8.69)$$

Cuando se modifica la matriz de rigidez tangente de un miembro, (por ejemplo, el miembro *M*), por la presencia de una conexión flexible se requiere

conocer la rigidez rotacional del nudo. Al usar el modelo exponencial dado por la ecuación 8.36, la rigidez tangente del nudo en una dirección particular (por ejemplo la dirección  $y$ ) con respecto al miembro  $M$  resulta:

$$R_{YM} = \sum_{j=1}^6 \frac{C_s}{2j\alpha} \text{Exp} \left[ \frac{-|\theta_r|_y}{2j\alpha} \right] \quad (8.70)$$

En el cual  $|\theta_r|_y$  se obtiene de la ecuación 8.67. La matriz de rigidez tangente del miembro  $M$  se modifica por la presencia del nudo flexible, de acuerdo a las ecuaciones 8.55 a 8.57, y se usa  $R_{ym}$  de la ecuación 8.70.

Para determinar si una conexión se encuentra cargada o descargada, las rotaciones relativas acumuladas,  $\theta_r$ , podrán ser obtenidas para cada incremento de carga. Un incremento en la rotación, indica que se está cargando, mientras que un decremento en la rotación significa descarga.

Si por ejemplo, los nudos se comienzan a descargar en la dirección  $Y$ , entonces la rigidez inicial del nudo (ec 8.38) se calcula mediante:

$$R_y = \sum_{j=1}^6 \frac{C_j}{2j\alpha} \quad (8.71)$$

En los ejemplos siguientes la no linealidad debida a los nudos flexibles, es tratada al mismo tiempo con la geometría y la no linealidad de los materiales.

## 8.10 Ejemplos numéricos

### 8.10.1 Marcos planos

Las pruebas realizadas por los investigadores Yu y Shanmugam (1986) (ref.10) en tres marcos planos con juntas flexibles se condensan a continuación. Los tres marcos se identificaron durante la prueba como FR1, FR2 y FR3, al mismo tiempo, sus propiedades se muestran en la figura 8.12. Todos los nudos en los marcos son rígidos, excepto en las conexiones viga - columna, las cuales son semirígidas. La rigidez de los nudos se expresa en términos de factor de fijación  $\rho$ , dada por:

$$\rho = \frac{1}{1 + \frac{4}{R}} \quad (8.72)$$

Donde,  $R$  es el índice de rigidez del nudo. Para una conexión articulada,  $R$  es nula, y para una conexión rígida,  $R$  es infinita.

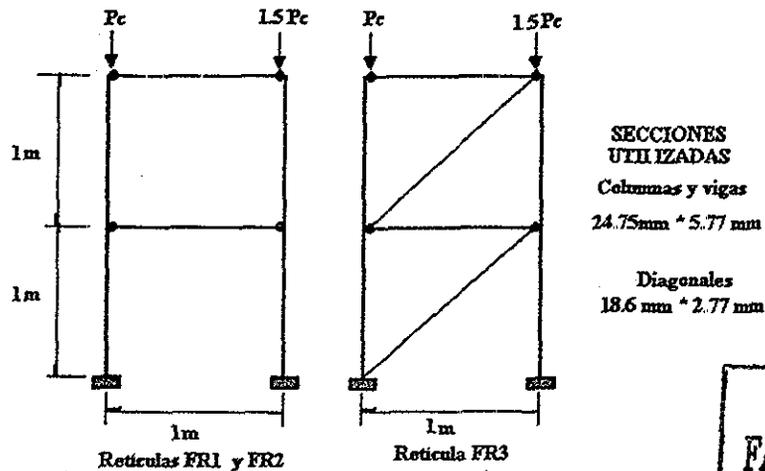


Figura 8.12 : Estructuras ensayadas por Yu y Shammugam

La tabla 8.1 (Pag. 129) compara la carga  $P_{cr}$  de inestabilidad elasto - plástica (bifurcación) obtenida del análisis, con los resultados experimentales y analíticos como fueron reportados por Yu y Shanmugam (1986) (ref 10); se observa que las pruebas fueron ligeramente superiores que aquellas obtenidas analíticamente.

### 8.10.2 Análisis elasto - plástico de un marco con juntas flexibles

La figura 8.13, muestra la geometría de un marco sin diagonales construido con secciones I. El marco se somete a 4.54 ton de carga vertical en la parte intermedia, y una carga lateral aplicada en el entrepiso. Lui y Chen (1987) investigaron los efectos de los nudos flexibles en la respuesta de los marcos con carga horizontal variable. Se muestran tres tipos de conexiones (tipo 1 (rígido), 2, 3) en la figura 8.14, que se consideraron. En el análisis, Lui y Chen utilizan una función de estabilidad. Los efectos de pandeo se ignoraron en el análisis. La carga vertical permaneció constante y la carga horizontal se incrementó hasta llevar la estructura al colapso.

El análisis ilustra los efectos combinados sobre elementos bajo carga axial, momento flexionante y pandeo. Los resultados obtenidos del análisis se comparan con los obtenidos por Lui y Chen (ref 10) en la figura 8.13. Las curvas para el tipo de conexión 1 y 2 de la figura 8.13, corresponden respectivamente a marcos cuya rigidez del nudo viga - columna se representan por la conexión del tipo 1 (rígida) y del tipo 2 de la figura 8.14. Con esos dos tipos de conexiones, los resultados concuerdan con los obtenidos por Lui y Chen (ref 10).

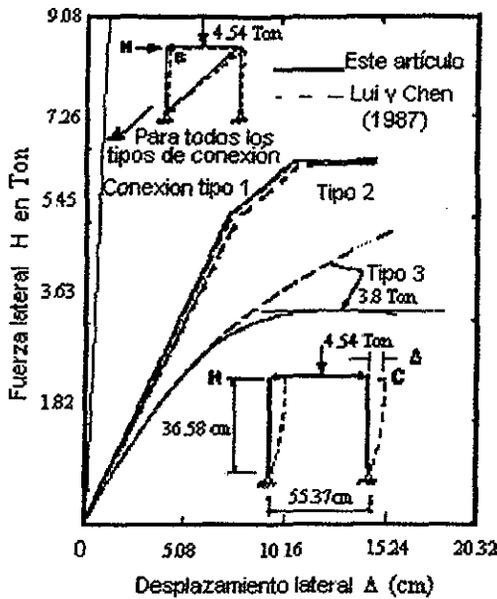


Figura 8.13: Curvas de carga desplazamiento de marcos con diferentes conexiones flexibles viga - columna

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

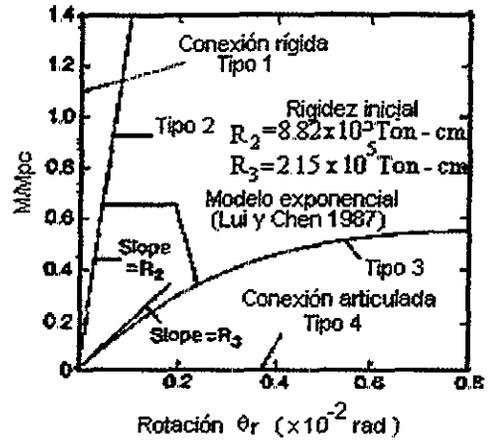


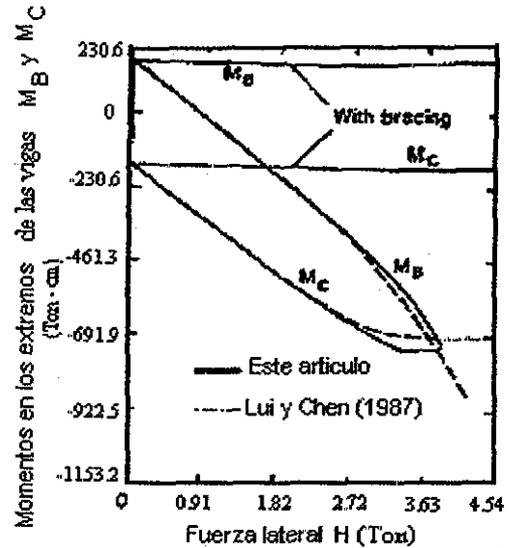
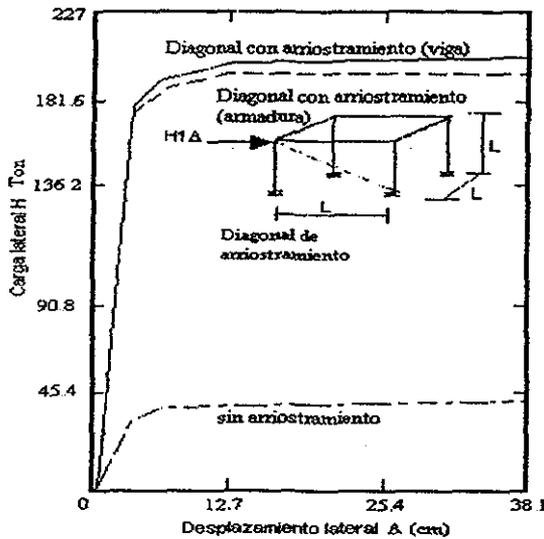
Figura 8.14: Modelo de conexión de los ejemplos

Las curvas de desplazamiento lateral obtenidas para la conexión tipo 3 (fig. 8.14 y ecuación 8.36) se ven en la figura 8.13. Los autores encontraron resultados significativamente diferentes a los de Lui y Chen (ref. 10), cuando la carga lateral excede 3.63 Ton. Esto se atribuye a que se desprecian los efectos de pandeo en sus análisis.

Debido a la secuencia con la cual las cargas se aplican, la conexión en sotavento sigue deformándose, mientras que la conexión en barlovento se descarga al aumentar la aplicación de la carga lateral, se utiliza la rigidez instantánea para la conexión en sotavento, mientras que la rigidez inicial se usa para la conexión en barlovento; por ello, la rigidez de la conexión de sotavento decrece debido a que la carga lateral se incrementa y produce, que la columna de sotavento se vuelva inestable bajo una carga lateral de 3.8 Ton.

Las características de carga - descarga de las conexiones de sotavento y barlovento, aparecen en la figura 8.15b, en la cual se trazaron las variaciones de los momentos de la izquierda y derecha de la viga ( $M_B$  y  $M_C$ ). Se ve que la conexión de barlovento, es relativamente más rígida que la conexión de

sotavento, el extremo izquierdo de la viga agota primero su rigidez y se puede ver que al incrementar la carga lateral se incrementa más el momento  $M_B$ .



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.15a) Curvas carga - desplazamiento de un marco espacial

Figura 8.15b) Variación de momentos en el extremo de las vigas del marco

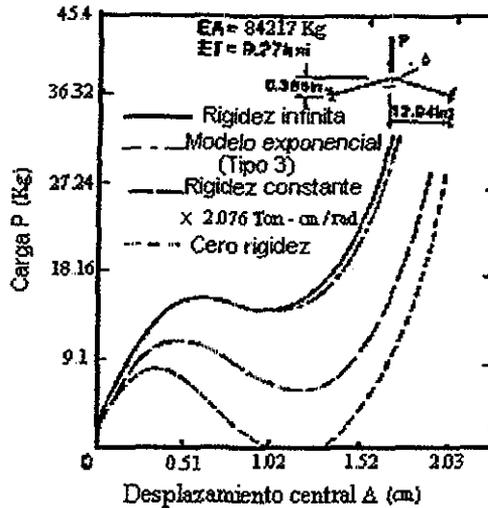
La adición de elementos arriostrados en marcos también se consideraron en el análisis. El miembro diagonal se modeló como un miembro de armadura, por considerar los extremos como miembros flexibles con rigidez nula (figura 8.13). La respuesta carga - desplazamiento del marco arriostrado, con los mismos tres tipos de conexiones se muestran en la misma figura. En ésta se puede observar que la respuesta del marco es independiente del tipo de conexión usada si se provee de arriostramiento. La variación de los momentos a la izquierda y a la derecha en los extremos de la viga,  $M_B$  y  $M_C$ , con arriostramiento, se muestra en la figura 8.15b, y la curva  $M - \theta_r$  del modelo con conexiones tipo 3 aparece en la figura 8.14, los momentos en el extremo de la viga son prácticamente constantes ante la aparición de diagonales.

### 8.11 Pandeo súbito (elástico) en el comportamiento de un marco de dos aguas

En este ejemplo, se investigaron los efectos de junta flexible, en el comportamiento de pandeo súbito de un marco Toggle (Williams 1964)

(ref. 10), la figura 8.16 muestra la curva carga - desplazamiento del marco con cuatro diferentes condiciones de soporte que fueron:

1. Resorte con rigidez rotacional infinita en los apoyos (conexión tipo 1)
2. Relación no lineal  $M - \theta_r$  (conexión tipo 3 en la figura 8.14) y por la ecuación 8.36 con una rigidez inicial de 215641 Kg - cm/rad
3. Resorte de rigidez rotacional constante en los apoyos de 2075.6 Kg - cm/rad
4. Resorte de rigidez rotacional nula en los apoyos (conexión tipo 4)



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.16: Curvas carga - desplazamiento de un marco Toggle con apoyos flexibles

Se puede ver en la figura 8.16, que las curvas carga - desplazamiento resultan muy similares para el marco Toggle (ref. 10) con soportes rígidos (caso 1), y para el mismo marco con soportes flexibles no lineales (caso 2). Se nota diferencia después de la inestabilidad súbita (instantánea); el marco con soportes flexibles no lineales, favorece los desplazamientos debido al deterioro de la rigidez de los soportes como sucede con soportes tipo 3 y 4, que son más flexibles.

Esto ilustra la importancia de la rigidez en los soportes en el comportamiento de inestabilidad súbita del marco.

## 8.12 Marcos espaciales

### 8.12.1 Comportamiento con grandes desplazamientos elásticos de un marco en cantiliver con soporte flexible

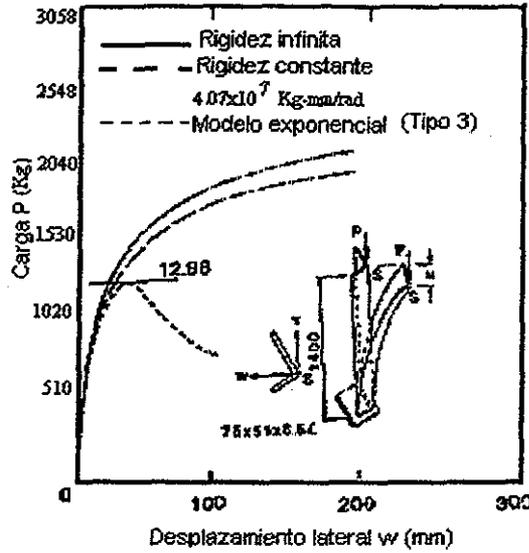
Chan y Kitiporchai (en 1987) investigaron la respuesta no lineal carga - desplazamiento, de una columna en cantiliver con soporte fijo, sujeta a una carga gravitacional aplicada en el centro de cortante (figura 8.17), y en estos estudios, el soporte del cantiliver se consideró flexible dentro del plano, fuera del plano y en las direcciones torsionantes. Al usar los procedimientos analíticos, se obtuvieron las curvas cargas - desplazamiento con tres diferentes tipos de soportes flexibles. La primera curva, se obtuvo al usar la rigidez infinita para los tres resortes rotacionales en los soportes. La segunda curva, que supone que cada resorte rotacional en los apoyos tienen rigidez constante ( $4.07 \times 10^7$  Kg -mm/rad). La tercer curva, se obtuvo al aceptar que cada resorte rotacional en el apoyo se representó por la siguiente función exponencial:

$$M = \sum_{j=1}^6 10^3 C_j \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\theta_r|}{2j\alpha}\right) \right] \quad (8.73)$$

con una rigidez inicial de  $1.90 \times 10^4$  Kg -mm/ rad. Las constantes  $C_j$  y  $\alpha$  se tomaron para la conexión tipo 3 (figura 8.14) de las dadas por Chen y Zhou (1987). Se nota que la rigidez rotacional de los resortes decrece rápidamente al incrementar la carga, especialmente para el eje de menor momento de inercia; la carga de pandeo se alcanzó ( $P_{cr}=1323$  Kg); la columna en cantiliver se descargó rápidamente, con una pequeña reserva de resistencia. Se observa que la rigidez del soporte juega un papel muy importante en el comportamiento de la estructura.

### 8.12.2 Análisis elasto - plástico de un marco espacial parcialmente restringido

Un marco espacial con y sin arriostramiento aparece en la figura 8.15a. Este ejemplo se estudió por Nee y Haldar en 1988 (ref 10). Desafortunadamente ha habido un error en la escala de la curva carga - desplazamiento en su reporte, por ello no son comparables.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 8.17: Curvas carga - desplazamiento de una columna de ángulo en cantiliver con soporte flexible

Se consideraron dos tipos de análisis que son:

Una viga arriostrada y un puntal arriostrado. El puntal arriostrado se modeló con un nudo flexible con rigidez nula en ambos extremos del puntal.

Las curvas carga - desplazamiento para el marco sin arriostrar, con la viga arriostrada y con el puntal arriostrado aparecen en la figura 8.15a. Se observa que la capacidad última del marco arriostrado es seis veces mayor que para el marco sin arriostrar.

TIPO DE MARCO	FACTOR DE FIJACION $\rho$	CARGA DE PANDEO $P_{cr}$		
		Yu y Shanmugam (1986)		PREDICCIÓN
		Prueba	Analítico	
FR1	0.69	0.196	0.233	0.219
FR2	0.80	0.251	0.283	0.252
FR3	0.80	0.886	0.976	0.932

Tabla 8.1 Carga de pandeo para marcos con conexiones flexibles viga a columna

## CAPÍTULO 9

### CONSIDERACIONES COMUNES DE DISEÑO Y REVISIÓN

#### *9.1 Consideraciones para la elección de un determinado tipo de estructura*

Para cualquier diseño se deben considerar los siguientes aspectos:-

- 1 Analizar las ventajas y desventajas, al elegir un tipo de estructura
- 2 Revisar los detalles del diseño y cargas consideradas para el análisis de la estructura
- 3 Hacer un énfasis en la importancia del lugar donde se construirá la estructura
- 4 Hacer pruebas en los elementos para la verificación del diseño
- 5 Revisar los problemas que pudieran presentarse en el montaje de la estructura, y presentar las posibles soluciones a los mismos.

#### *9.2 Elección del tipo de estructura*

Al elegir un determinado tipo de estructura, se debe razonar sobre la ubicación de la misma, requerimientos de diseño, vida útil, etc.

Un aspecto muy importante además de los presentados, es que la estructura seleccionada, armonice con el lugar donde se va a colocar, que tenga un aspecto agradable desde cualquier lugar que se le observe, además, se debe tomar en cuenta, si la estructura requiere un cierto grado de iluminación, se recomienda también cuidar que el peso propio de la misma no sea muy grande.

Una vez que ya se ha elegido un cierto tipo de estructura, se analiza si económicamente es aceptable y por último revisar los tiempos de construcción de la misma.

#### *9.3 Detalles y arreglo general de la estructura*

En el caso de un domo, se debe tomar en cuenta tanto su diámetro como su altura y obtener la relación existente entre ambos. Por lo tanto se toma en cuenta la geometría, así como la forma de unión de las barras en los nudos, el

material de el cual está hecho, ya que de ello depende su comportamiento. Por último también se recomienda tener cuidado al elegir el área de cada miembro, así como el tipo de sección transversal que se utilizará en la estructura.

Un domo puede ser colocado sobre una estructura de concreto reforzado o sobre columnas de acero, las cuales en ciertos casos, se refuerzan mediante una serie de tensores como en el caso del poliedro de Caracas (ref. 20). Los empujes horizontales y verticales que transmiten los arcos y los meridianos al arco de soporte, son absorbidos por la estructura de base, la cual debido a su sección se puede considerar infinitamente rígida. Sin embargo, en adición a minimizar la distorsión en el arco de base, también se puede incorporar el canal de drenaje, el cual, además de servir como un colector para retirar el agua de lluvia del domo, también tiene la función de rigidizar al arco de base del mismo.

#### **9.4 Cargas de diseño**

Las cargas de diseño que se deben tomar para el análisis de un domo, son las mismas que para las de cualquier estructura y estas son:

- a) **Carga muerta:** Es una carga uniformemente distribuida sobre la estructura
- b) **Carga debida a viento:** Se puede analizar mediante el comportamiento de estructuras similares construidas en el lugar, para ello se puede considerar lo existente en los reglamentos de diseño por viento de cada país, lo que recomiendan ciertos autores en la literatura y por último, el ensayo del modelo de la estructura en un túnel de viento. Para una mejor ampliación al respecto se puede revisar el capítulo tres de este trabajo
- c) **Carga debida a nieve:** al igual que para la carga debida al viento se recomienda revisar el capítulo tres de este trabajo
- d) **Carga debida a sismo:** tanto para los domos estudiados en este trabajo, como para las cubiertas semiesféricas de ferrocemento en el caso de aplicación de carga sísmica en dos direcciones ortogonales, la estructura no presenta desplazamientos ni esfuerzos excesivos debido a la poca masa y gran rigidez que poseen, también el utilizar un material homogéneo dentro de ciertos regímenes de carga, y no tener cambios bruscos de resistencia en el material que la constituye, contribuye de manera importante a mejorar su comportamiento. El uso de nervaduras permite definir claramente zonas de igual comportamiento, donde todos los elementos que conforman dicha zona están sometidos a tensión o compresión, esto es, uniformizar la distribución de esfuerzos sobre la superficie del domo (ref. 41).

## 9.5 Estabilidad

El pandeo de miembros, es de un tipo normal encontrado en la falla de columnas. El pandeo local envuelve el pandeo súbito de nudos aislados, y podría iniciar el pandeo general sobre grandes áreas, lo cual llevaría al colapso total de la estructura.

Los tres tipos de pandeo fueron investigados, y se muestran los factores de seguridad adecuados para las cargas de trabajo.

### 9.5.1 Pandeo general

La carga de pandeo crítico ( $P_{cr}$ ) de un domo y la longitud de onda de pandeo ( $w$ ) son las siguientes:

$$P_{cr} = 0.366 E_D \left( \frac{t_M}{a} \right)^2 \left( \frac{t_B}{t_M} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (9.1)$$

$$W = 2(t_M a)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{t_B}{t_M} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (9.2)$$

Donde  $t_M$  es el espesor efectivo de la membrana y  $t_B$  es el espesor efectivo a flexión.

Cuando se diseña con la ecuación 9.1, se recomienda utilizar un factor de seguridad de 2.0, para determinar el esfuerzo de membrana crítico. Dada la carga de pandeo crítico la siguiente relación puede ser aplicada:

$$P_{cr} = \frac{2 t_M \sigma_{cr}}{a} \quad (9.3)$$

sustituyendo  $P_{cr}$  en la ecuación 9.1:

$$\sigma_{cr} = 0.183 E_D \left( \frac{t_M}{a} \right) \left( \frac{t_B}{t_M} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (9.4)$$

Las ecuaciones 9.1, 9.2 y 9.4 se obtuvieron al considerar el pandeo general de un cascarón, basados en la aplicación de energía mínima a la solución de grandes desplazamientos. Las ecuaciones se revisaron experimentalmente, lo cual, requirió también de una revisión exhaustiva al análisis teórico. Las condiciones de frontera pueden permitir grandes desplazamientos y rotaciones en un cascarón ortotrópico, con lo cual puede resultar cargas de pandeo pequeñas. Condiciones de frontera adecuadas, pueden transferir la posible zona de pandeo a regiones más centrales del domo, o incluso, evitarlo.

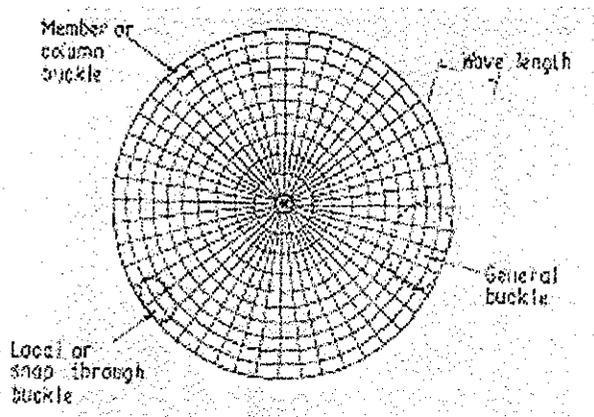


Figura 9.1: Tipos de pandeo que se pueden presentar en un domo

Las cargas de pandeo pueden ser también influenciadas por imperfecciones iniciales en la superficie de una estructura. Las ecuaciones 9.1, 9.2 y 9.4, no incluyen los efectos de las condiciones de frontera o imperfecciones iniciales

### 9.5.2 Pandeo local

Buchert (ref. 30) recomienda un factor de seguridad de elementos de 5.0, el cual se debe emplear para el cálculo de la carga de pandeo local.

La carga de pandeo crítico fue encontrada usando la relación:

$$P_{cr} = \frac{Q}{d^2} \quad (9.5)$$

$$t_m = \frac{A_m}{d} \quad t_B = \left[ \frac{12I_m}{d} \right]^{1/3}$$

Donde:  $Q$  = Carga puntual vertical en el nudo de un marco del domo

$a$  = Radio de la esfera del cual el domo forma parte

$d$  = Espacio entre miembros de un domo

$A_m$  = Área de la sección transversal de un miembro del domo

$I_m$  = Momento de inercia de un miembro del domo

$E_D$  = Modulo de elasticidad de las barras

### ***9.6 Otros factores de diseño***

Se deben evaluar los esfuerzos con los cuales se calcularán las dimensiones de los miembros. En adición al diseño básico otros aspectos como los de localización y otros de aspecto general se tienen que considerar.

### ***9.7 Desplazamientos***

El problema de estimar los desplazamientos en un domo reticular es complejo. Para determinar la condición más crítica, se considera el caso de carga más desfavorable (la carga no simétrica). Satisfactoriamente contra el pandeo, indicado por la teoría de pruebas de pandeo súbito, se considera suficiente, demostrar que los desplazamientos en la dirección radial podrían ser mínimos. Pruebas exhaustivas sobre este tipo de cubiertas, indican una rigidez adecuada en relación al movimiento de los arcos horizontales.

### ***9.8 Efectos aerodinámicos (Formación de vórtices) y fatiga***

Las estructuras de aluminio sujetas a fluctuaciones de carga, pueden sufrir fallas por fatiga. Si el número de fluctuaciones es grande, la falla podría ocurrir bajo esfuerzos más bajos que los esfuerzos estáticos permisibles.

En cuanto a la posibilidad, de que las fluctuaciones en las cargas puedan causar la falla por fatiga en el domo, de lo que se tiene disponible en la literatura en este respecto, se indica que el domo será cubierto por vórtices, particularmente en regiones bajas que podrán causar su falla. Los cambios en el diámetro del domo en relación con la altura causan variaciones en la formación de vórtices, por lo tanto, las cargas pulsantes sobre miembros individuales del domo serán posibles. El número de oscilaciones esperadas no se pueden considerar como críticas, por las características de amortiguamiento de una estructura reticular, debido a ésto; la estructura reticular es lo suficientemente segura para salvaguardar la fatiga en este contexto.

### ***9.9 Efectos provocados por temperatura***

Las consideraciones dadas por Roper International's Consulting Engineer y el Dr. Paul E. Most, para la determinación de los posibles esfuerzos que resultan de los cambios de temperatura, en conjunto con las experiencias de muchos domos construidos en diversos tipos de climas extremosos, se puede verificar que estos efectos no resultan perjudiciales para ningún tipo de domo.

### ***9.10 Pruebas de estructura***

Las pruebas se realizaron de la siguiente forma:

- 1) Pruebas sobre elementos individuales
- 2) Pruebas de carga sobre la estructura completa.

Las pruebas realizadas son:

- a) Pruebas de tensión sobre el conector
- b) Pruebas de cortante en el tablero más grande del domo.
- c) Pruebas de tensión sobre el acrílico (elemento de recubrimiento).
- d) Pruebas de pandeo súbito.
- e) Pruebas de flexión sobre miembros de soporte, y sobre las secciones compuestas.

### ***9.11 Propuesta para el análisis no lineal***

En este trabajo se analiza un domo con las características indicadas en el capítulo 10, para ello se realizan dos tipos de análisis; el primero es un análisis lineal (análisis común) a partir del método de rigideces descrito en el capítulo 5, el segundo es un análisis no lineal 5 iteraciones, ya que los elementos mecánicos no cambian mucho para mas iteraciones, en el capítulo 5 se muestran las matrices de rigidez elástica y geométrica que consideran las no linealidades.

Los bimomentos incluidos en las matrices del capítulo 5, no son consideradas por el programa empleado para analizar el domo (STAAD III versión 21.1).

El procedimiento propuesto en este trabajo para el estudio del domo consiste en realizar un análisis, que tome en cuenta los efectos no lineales de la fuerza axial, de la geometría y de la deformación del elemento y de los esfuerzos secundarios producidos por grandes desplazamientos de los nudos.

El criterio de convergencia, fue aceptar una diferencia máxima del 1% en elementos mecánicos.

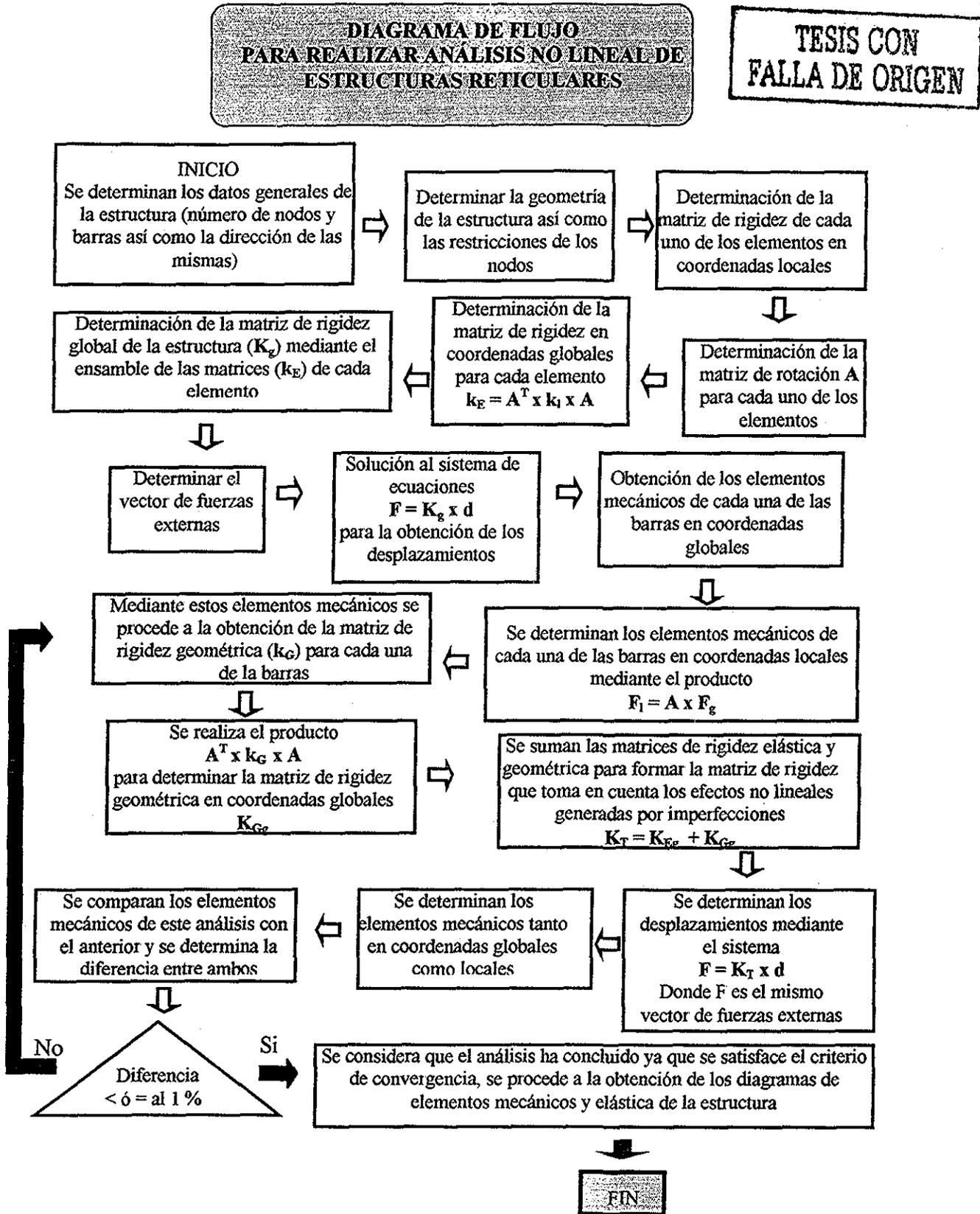


Fig. 9.2: Diagrama de flujo

## CAPÍTULO 10

### EJEMPLO DE APLICACION

#### 10.1 Descripción del domo

En este trabajo se analiza un domo construido mediante una retícula de barras de aluminio, conectadas en el espacio en forma de triángulos equiláteros (domo geodésico) como se puede ver en las figuras 10.1 y 10.2, ésta estructura tiene un diámetro aproximado de 62.3615 m y una altura de cubierta de 18.6547 m, el cual cubre un área de 3054.33 m<sup>2</sup>.

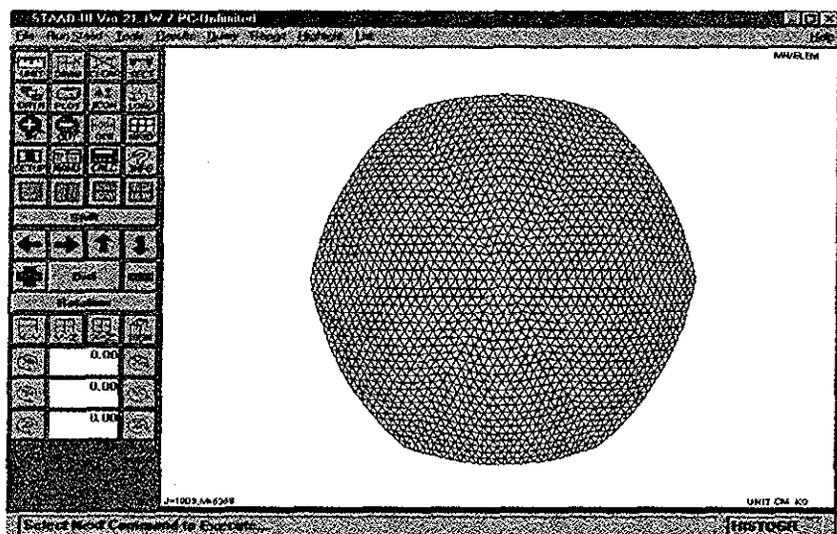
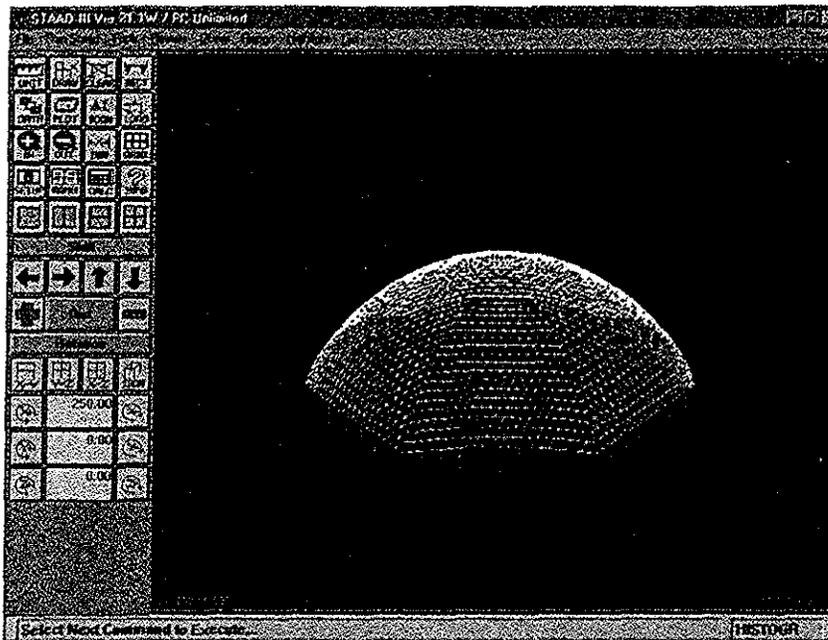


Fig. 10.1: Vista en planta del domo.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig. 10.2: Vista isométrica del domo

El domo está compuesto por 5112 elementos de aluminio, cada uno de los cuales tiene una longitud de 171.95 cm. Dichos elementos de aluminio están formados por secciones circulares huecas, con una área de sección transversal de 3.043 cm<sup>2</sup> y con las dimensiones que se muestran en la figura 10.3, que corresponden a tubos tipo D2.

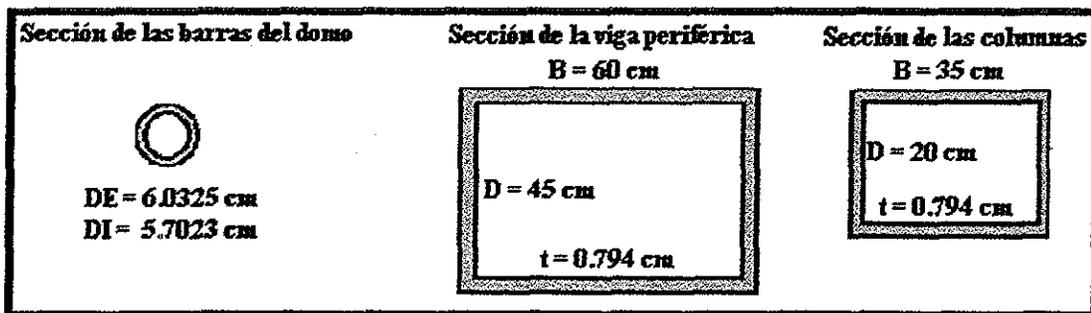


Fig. 10.3: Secciones utilizadas en el domo

Las barras de aluminio en la frontera del domo, están soportadas por una estructura de acero, que consiste en una viga periférica en forma de sección en cajón, la viga periférica a su vez está apoyada en una serie de columnas de acero también de sección en cajón, las dimensiones de las columnas y de la viga periférica pueden verse en la figura 10.3. Además de las columnas de

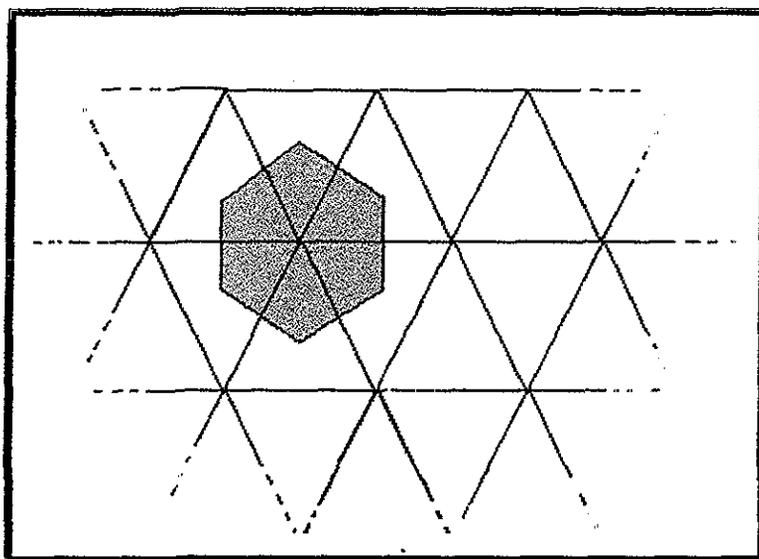
acero, el domo se apoya en cada uno de los límites de sus sextantes sobre columnas de concreto de grandes dimensiones.

## 10.2 Consideraciones para el análisis del domo

### 10.2.1 Consideraciones

- Todas las cargas que se aplican al domo se colocan en los nodos del mismo
- Todas las cargas actúan en dirección vertical, ya sea en sentido positivo o negativo ( $\uparrow\downarrow$ )
- Las unidades de las cargas están en kilogramos, las de longitud en cm y las de área en  $\text{cm}^2$ .

### 10.2.2 Área tributaria por nudo



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig. 10. 4: Área tributaria de un nudo

Después de un análisis a uno de los nudos del domo (fig. 10.4) y al tomar en cuenta que las barras tienen una longitud de 1.71915 m, se tiene que el área tributaria por nudo es la equivalente a dos triángulos equiláteros de los formados por las barras, con lo que tenemos lo siguiente:

$$A_{\text{tributaria}} = 2 \left( \frac{b \times h}{2} \right) = (1.71915\text{m})(1.71915\text{m} \times \text{sen } 60^\circ) = 2.56 \text{ m}^2 \quad (10.1)$$

### 10.2.3 Intensidades de las cargas

#### 10.2.3.1 Carga viva

Carga viva : 60 Kg/m<sup>2</sup>

Carga viva por nudo : 60 x 2.56 = 153.6 Kg/nudo

#### 10.2.3.2 Carga muerta

Evaluada por el programa utilizado en el análisis (STAAD-III)

#### 10.2.3.3 Carga debida a la nieve

Carga debida a la nieve : 76.45 Kg/m<sup>2</sup>

Carga debida a la nieve por nudo = 195.712 Kg/nudo

#### 10.2.3.4 Carga debida al viento

Son las que se muestran a continuación:

Valor de la succión (+) o presión (-) En kg/m <sup>2</sup>	Carga por nudo en kg.
-9.90	-26.344
+19.91	+50.97
+29.87	+76.47
+39.83	+101.96
+49.79	+127.46
+52.28	+133.84

### ***10.2.4 Combinaciones de carga***

Se analizó para las cargas descritas en el capítulo 3 de este trabajo, las cuales en resumen resultan las siguientes:

Carga 1: Carga de nieve en el domo completo (S1)

Carga 2: Peso propio (D)

Carga 3: Carga viva (L)

Carga 4: Carga de nieve en medio domo (S2)

Carga 5: Carga de viento (W)

#### ***Combinaciones :***

Carga 6:  $1.4D$

Carga 7:  $1.2D + 1.6L + 0.5S1$

Carga 8:  $1.2D + 1.3W + 0.5L + 0.5S2$

Carga 9:  $1.2D + 1.5S2 + 0.5L$

### ***10.2.5 Análisis efectuados***

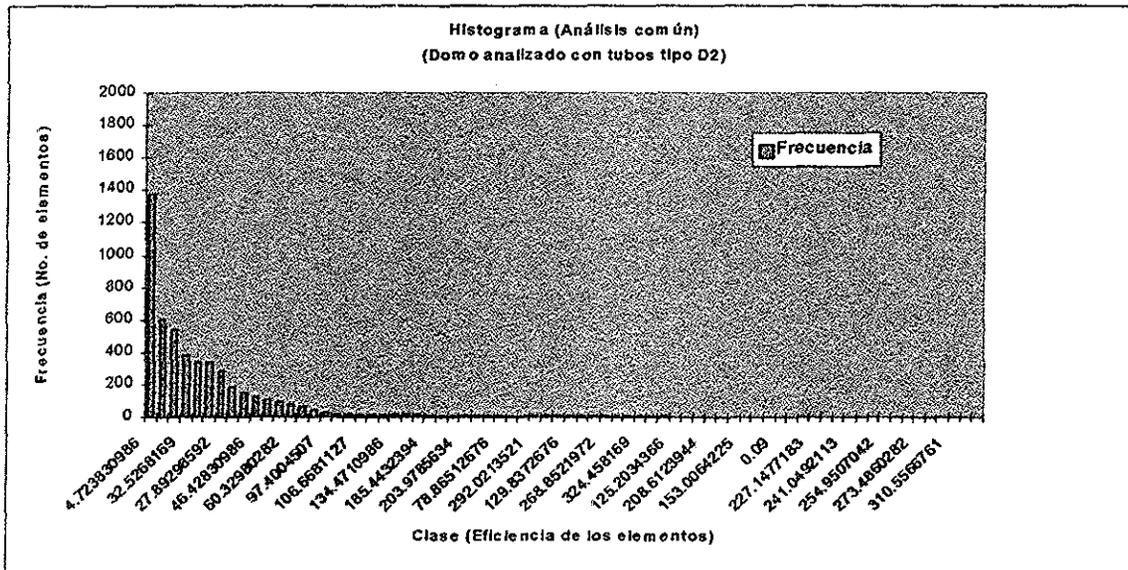
Mediante el programa de análisis estructural STAAD III, se analizó y revisó el domo antes descrito, para ello se llevó acabo un análisis común, uno no lineal (cuatro ciclos) y la determinación de la carga crítica del mismo.

10.2.5.1 Análisis común del domo (Con tubos tipo D2)

Se muestra en la figura 10.5 la elástica del domo, a la vez que en la figura 10.6 se presenta un histograma de eficiencia de trabajo de las barras del mismo.



Fig. 10.5: Elástica del domo



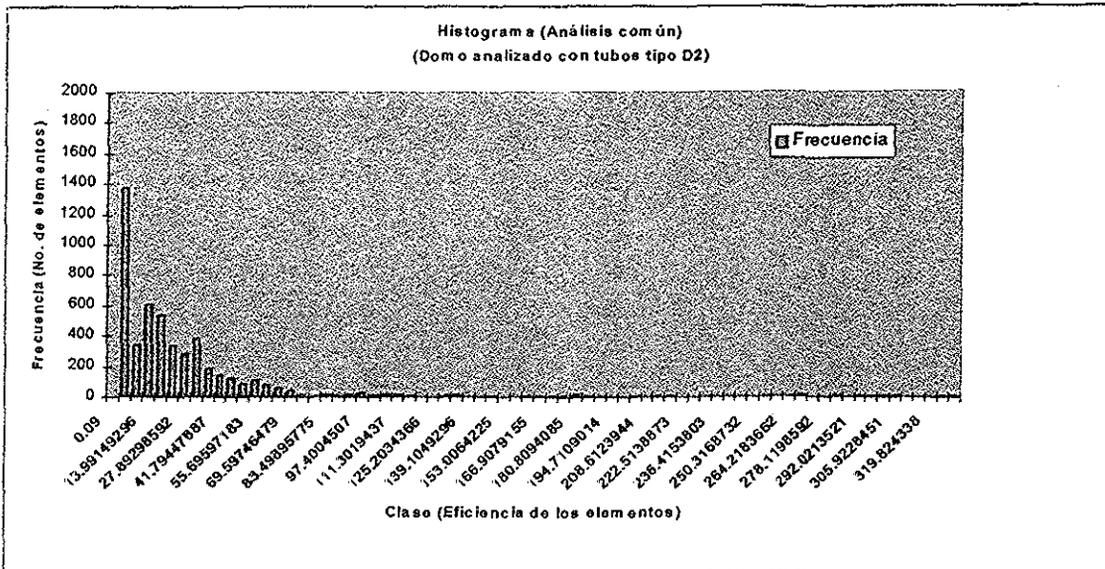


Fig. 10.6: Histogramas de eficiencias de trabajo en las barras

### 10.2.5.2 Análisis no lineal del domo

En este análisis, al igual que para el análisis común, se presentan en las figuras 10.7 y 10.8 gráficas de la elástica e histogramas de eficiencia de trabajo de las barras, respectivamente.

Para el análisis común y para el no lineal, resultó crítica la combinación de cargas número nueve, mostrada en la sección 10.2.4.

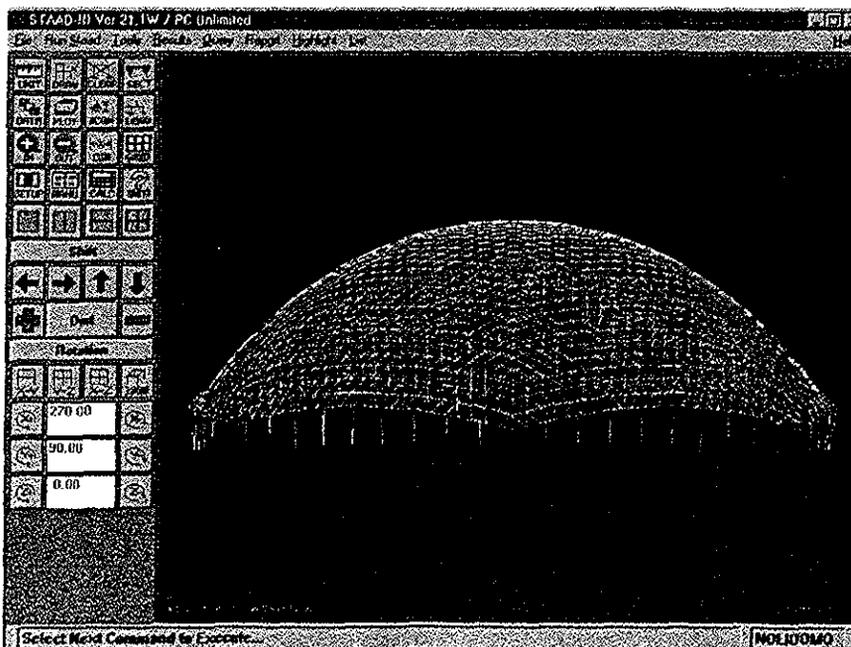


Fig. 10.7: Elástica del domo (Análisis no lineal).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

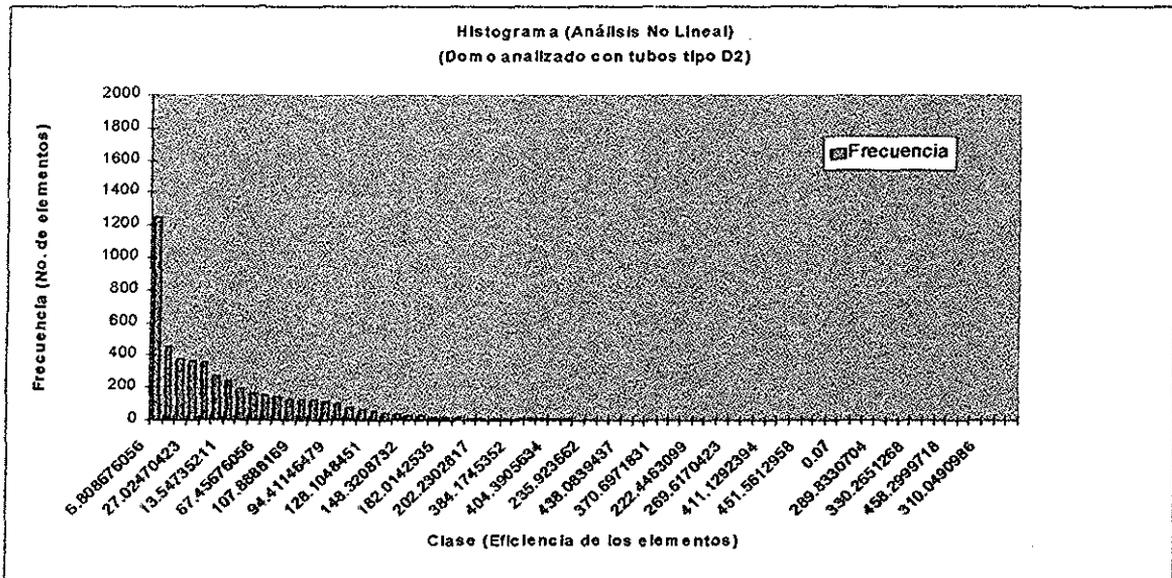
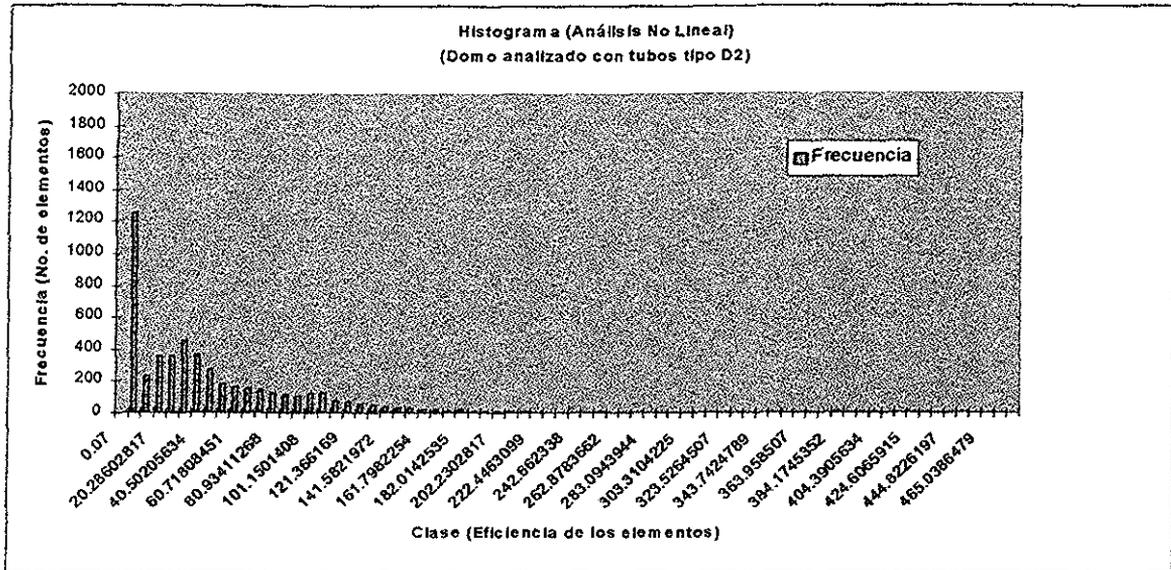


Fig. 10.8: Histogramas de eficiencia de trabajo de las barras del domo

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

10.2.5.3 Comparación de resultados entre el análisis no lineal y el análisis común

En la figura 10.9, se compara la eficiencia de trabajo de las barras entre el análisis común y el análisis no lineal.

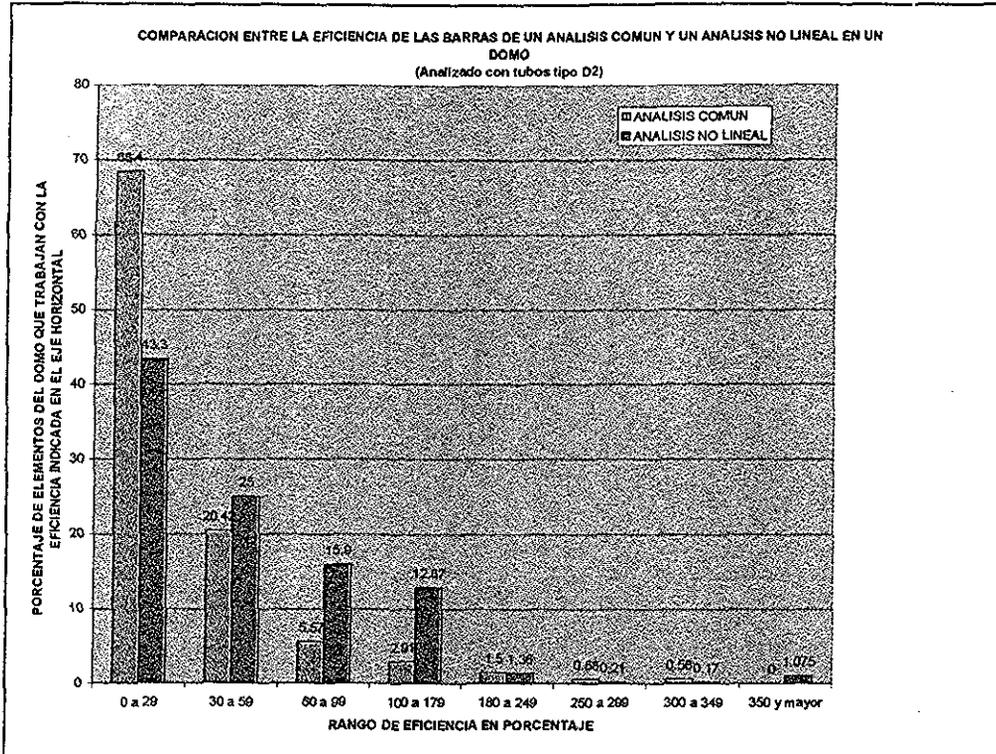


Fig. 10.9: Comparación de las eficiencias de trabajo de las barras entre el análisis no lineal y el análisis común.

Puede notarse en las gráficas de eficiencia de trabajo de las barras, que la gran mayoría se encuentra demasiado sobreesforzada, para las combinaciones de carga que se tienen.

Al observar la comparativa del análisis común y del análisis no lineal se tiene una diferencia de eficiencias muy grande entre los dos análisis.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

#### 10.2.5.4 Carga crítica del domo

Este fenómeno depende de la posición relativa de un domo respecto al plano horizontal que contiene a los seis nudos vecinos, la cual queda definida por la altura  $h$ , en la configuración inicial de la estructura. Al aplicar una fuerza  $W$  en el nudo, las barras que lo soportan experimentan acortamientos, lo que hace que el nudo descienda desde una primer altura  $h^*$ . Se ha demostrado (Wright, 1965) que cuando el nudo desciende hasta alcanzar  $h^*=0.577h$ , se propicia la inestabilidad súbita del nudo, la cual induce el cambio en la curvatura del domo.

Esta condición crítica queda acotada en el siguiente intervalo:

$$1.15 A E [h/l]^3 < W_{crit} < 2.30 A E [h/l]^3$$

donde  $A$ , es el área de la sección transversal de los tubos;  $E$  es el módulo de Young del material y  $l$ , es la longitud de los tubos que concurren al nudo.

El valor de la carga  $W_{crit}$  antes descrito es válido para cubiertas tridireccionales, cuando existe capacidad a la flexión en la unión de los tubos con el conector, y existe rigidez suficiente en la junta.

Para la cubierta tridimensional objeto de esta investigación, se obtuvo que:

$$131.3 \text{ kg} < W_{crit} < 263 \text{ kg}$$

Este resultado indica que por la sola acción del peso propio de la estructura en el nudo, el factor de seguridad contra inestabilidad súbita es próximo a 1.10. Al presentarse alguna de las condiciones de carga probables, es de esperar la aparición de inestabilidad súbita.

En la figura 10.10 se muestra la elástica del mismo al aplicar esta carga.

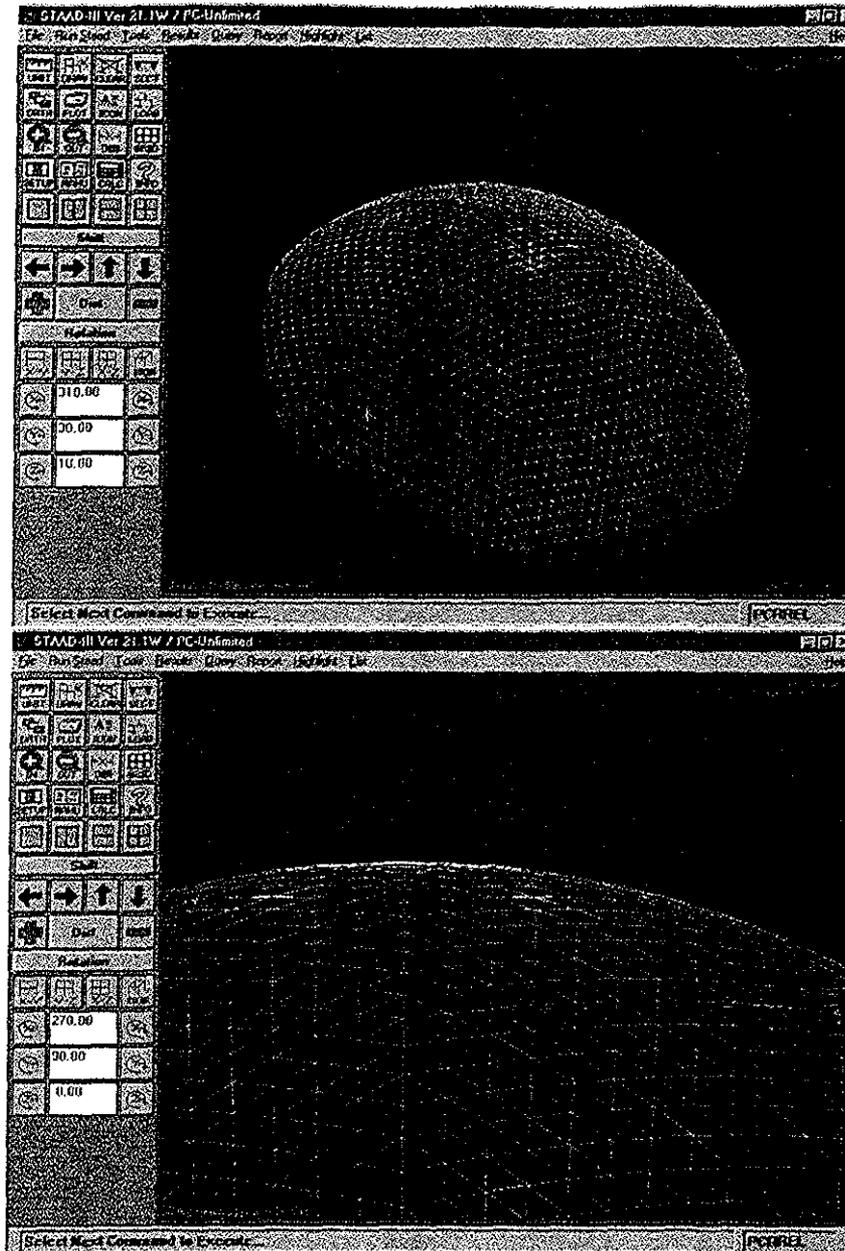


Fig 10.10: Elástica del domo al presentarse la carga crítica en el mismo

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 10.2.6 Análisis empleando dos tubos diferentes en el domo

Las barras cercanas a los apoyos son las más esforzadas como se puede ver en la figura 10.11, por lo tanto en las figuras 10.12 a 10.15 se presentan los resultados de un análisis del domo empleando dos diferentes tubos. Para ello se emplean tubos cercanos a los apoyos tipo D4 que tiene un diámetro exterior de 6.0325 cm y un diámetro interior de 5.3721 cm

A medida que los tubos se alejan de la frontera del domo que se acercan a la cima del mismo, se emplean tubos tipo D2 con diámetro exterior de 6.0325 cm y un diámetro interior de 5.7023 cm.

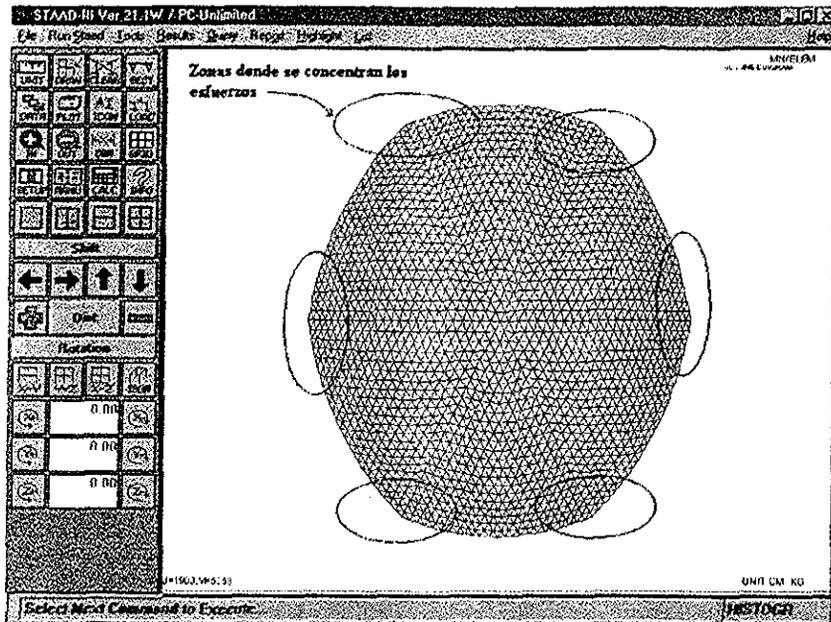


Fig 10.11: Zonas donde se concentran los esfuerzos

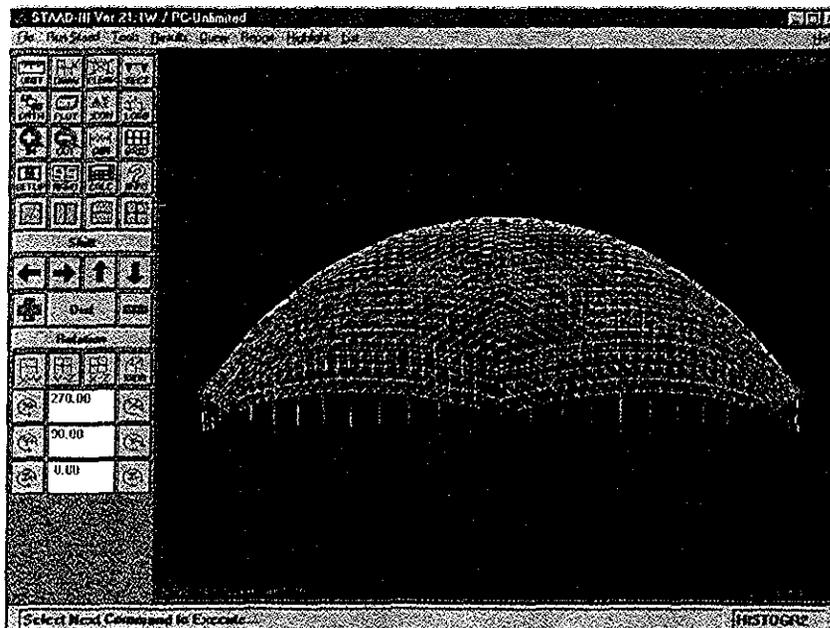


Fig 10.12: Elástica del domo mediante un análisis común con tubos D2 y D4

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

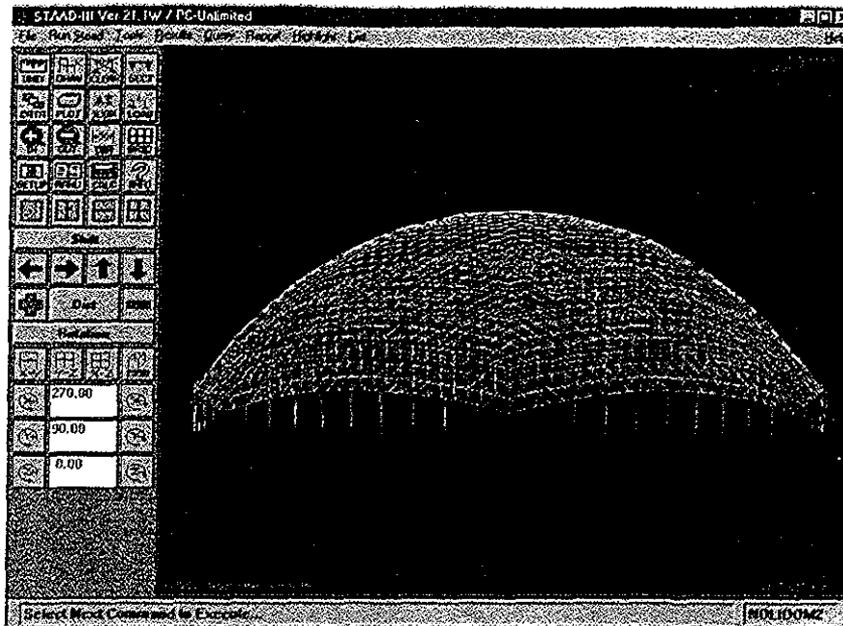
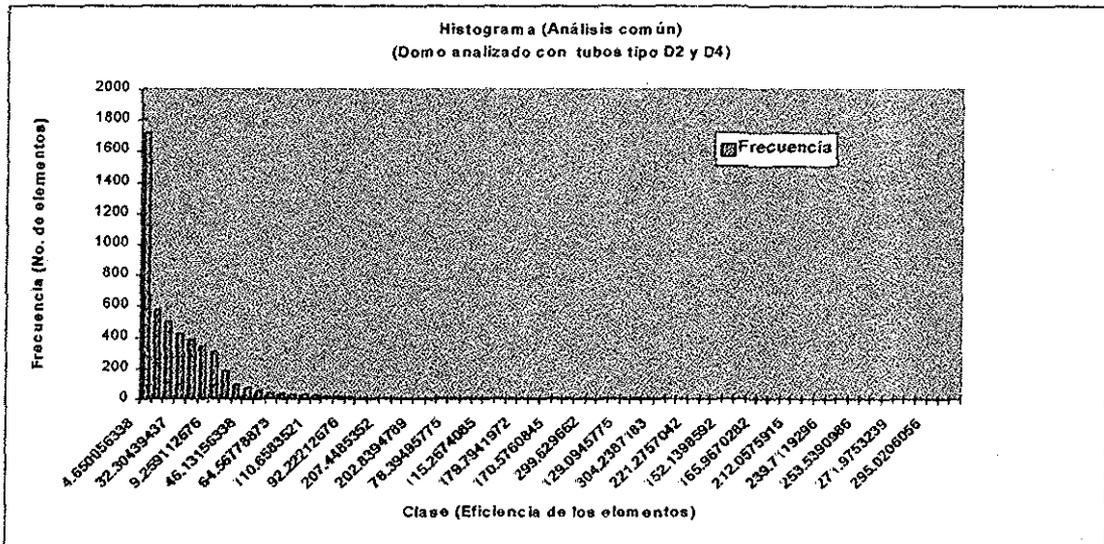


Fig. 10.13: Elástica del domo, mediante un análisis no lineal Tubos D2 y D4



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

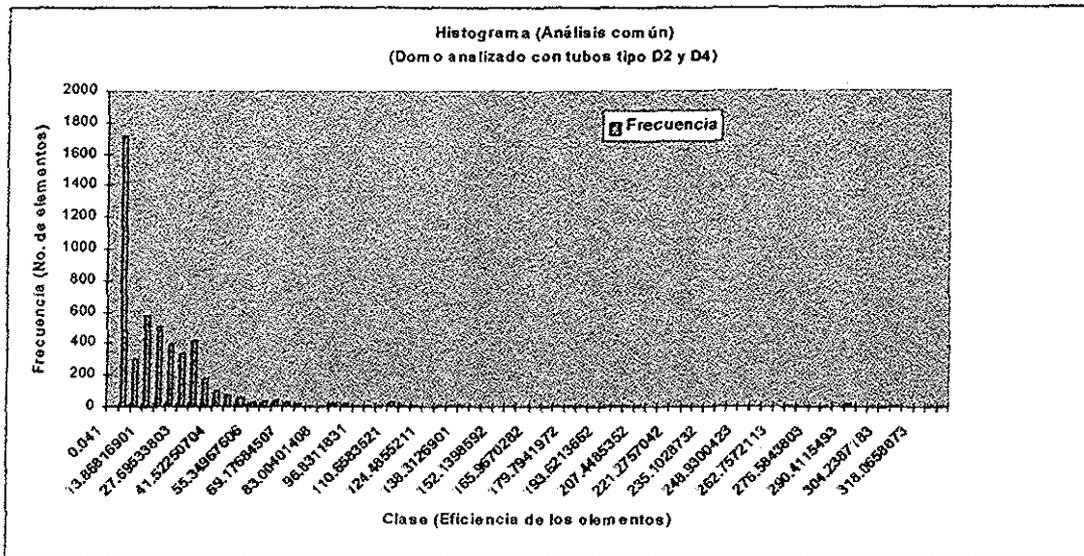
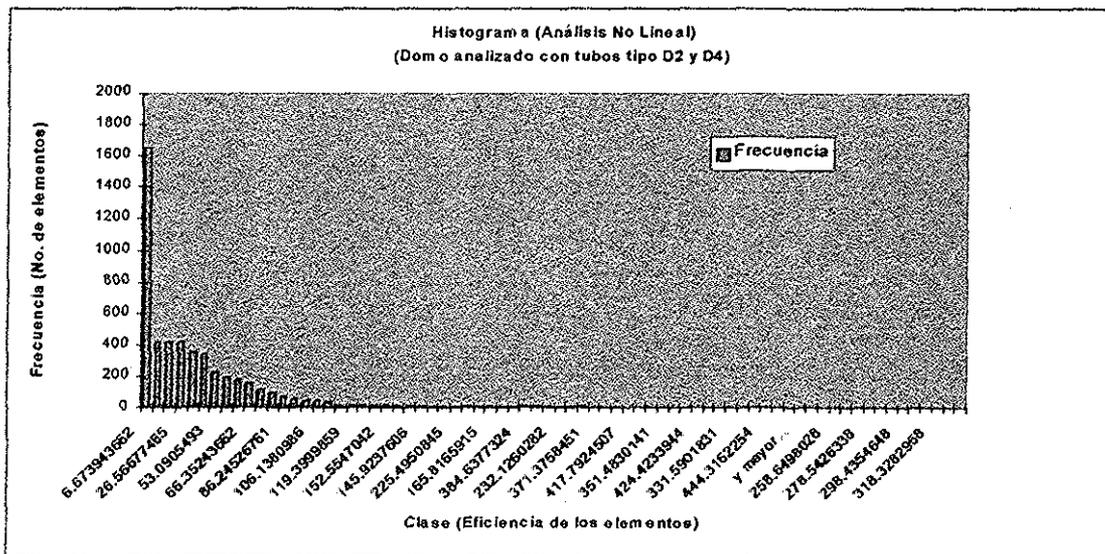


Fig. 10.14: Histogramas de eficiencia de trabajo de las barras del domo en un análisis común (Con tubos D2 y D4)



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

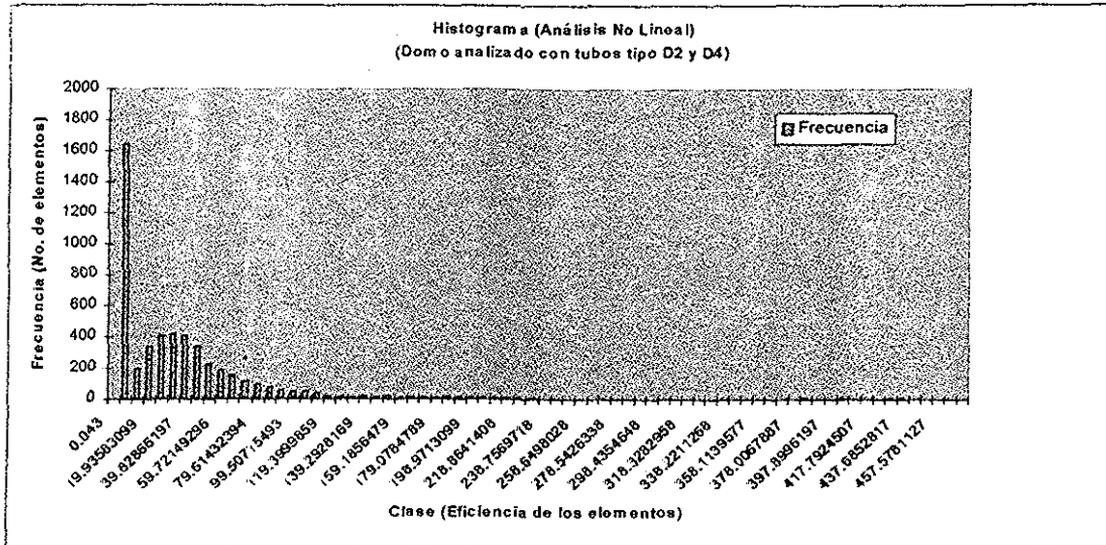


Fig. 10.15: Histogramas de eficiencia de trabajo de las barras de un análisis no lineal en un domo. (Con tubos D2 y D4)

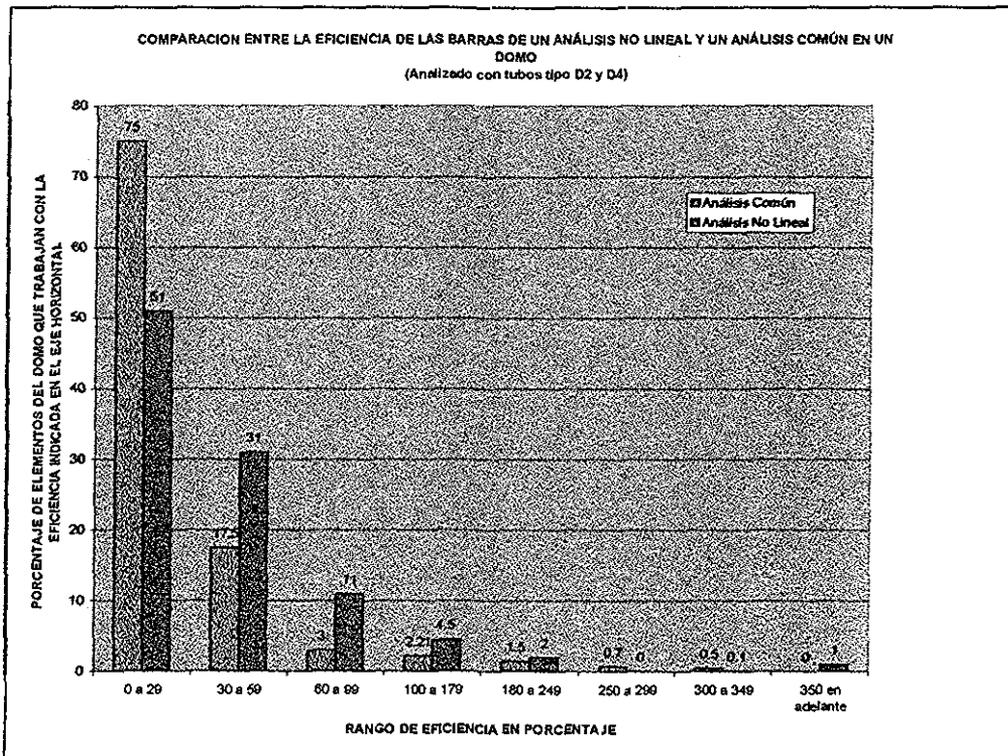


Fig. 10.16: Gráfica comparativa entre un análisis común y un análisis no lineal. (Con tubos D2 y D4)

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

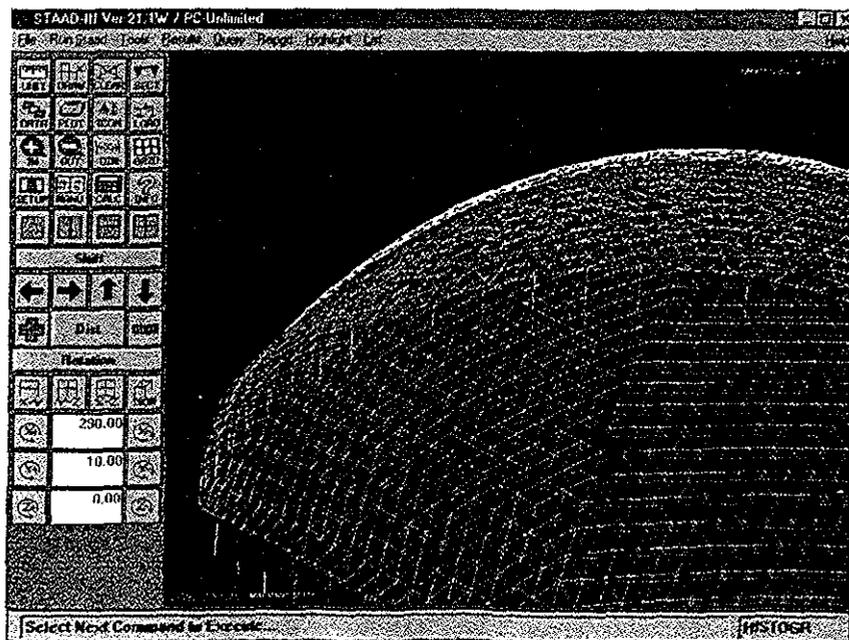
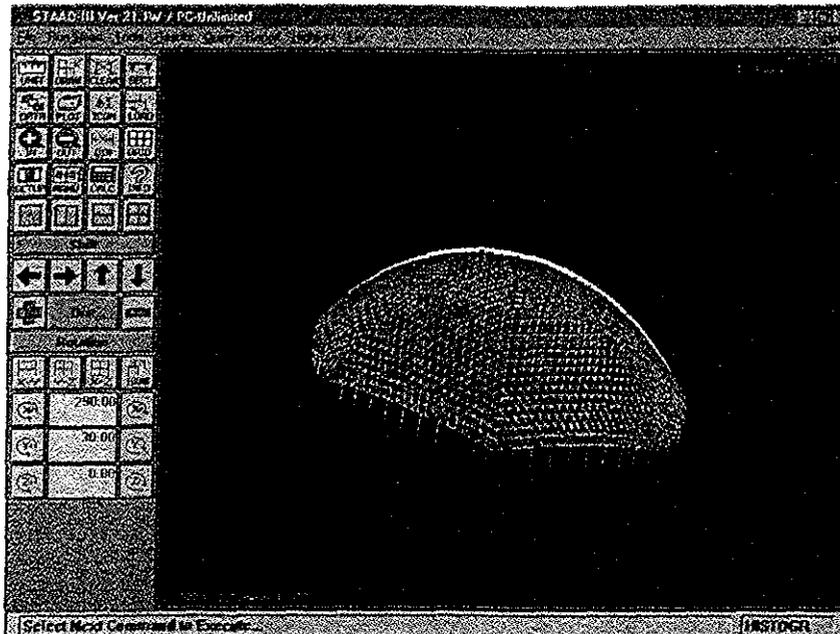
Al observar la eficiencia de trabajo (figuras 10.14 y 10.15) de las barras tanto para el análisis lineal como para el no lineal, se puede observar que los tubos empleados continúan siendo muy escasas en cuanto a sus dimensiones para las combinaciones de carga que se tienen, y al observar la comparativa (figura 10.16) el análisis no lineal incrementa mucho más los esfuerzos en las barras.

### *10.2.7 Una alternativa de solución al domo anterior*

Si en vez de colocar tubos con los diámetros anteriores, se colocan tubos de aluminio con un diámetro exterior de 8.9 cm y un diámetro interior de 7.376 cm que tienen un área de 19.4815 cm<sup>2</sup>, se pueden ver los resultados en la sección 10.2.8 para las mismas condiciones de carga, solo se incrementa el peso propio en un orden de 6.4 veces más que para el domo anteriormente analizado.

### 10.2.8 Análisis común del domo

Puede apreciarse en la figura 10.17 la elástica del domo, así mismo, en la figura 10.18 se presenta un histograma de eficiencia de trabajo de las barras del mismo.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig. 10.17: Elástica del domo (análisis común)

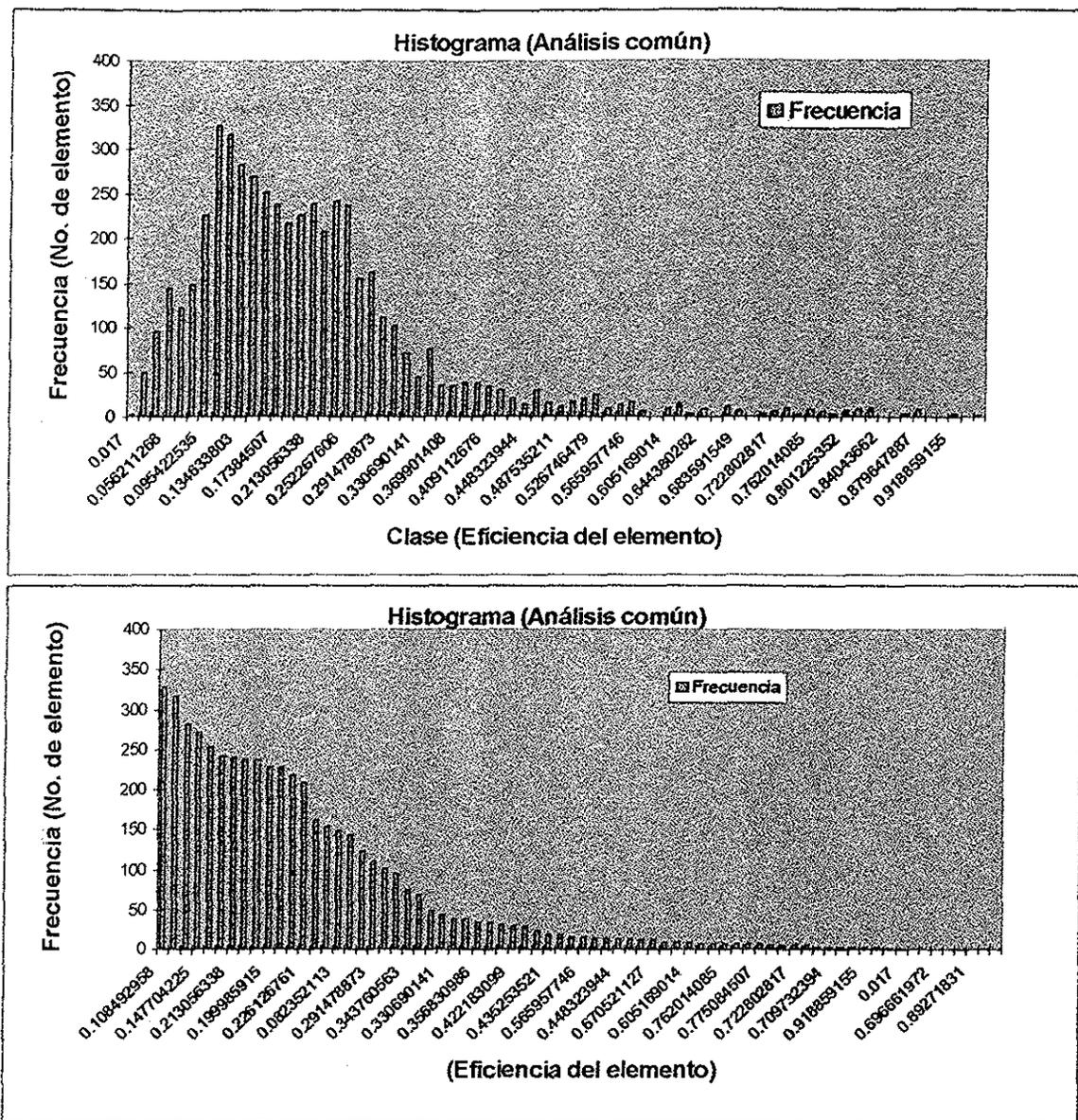


Fig. 10.18: Histogramas de eficiencias de trabajo de las barras

10.2.9 Análisis no lineal del domo

Para este análisis, al igual que para el análisis común, se presentan gráficas de la elástica e histogramas de eficiencia de trabajo de las barras en las figuras 10.19 y 10.20 respectivamente.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

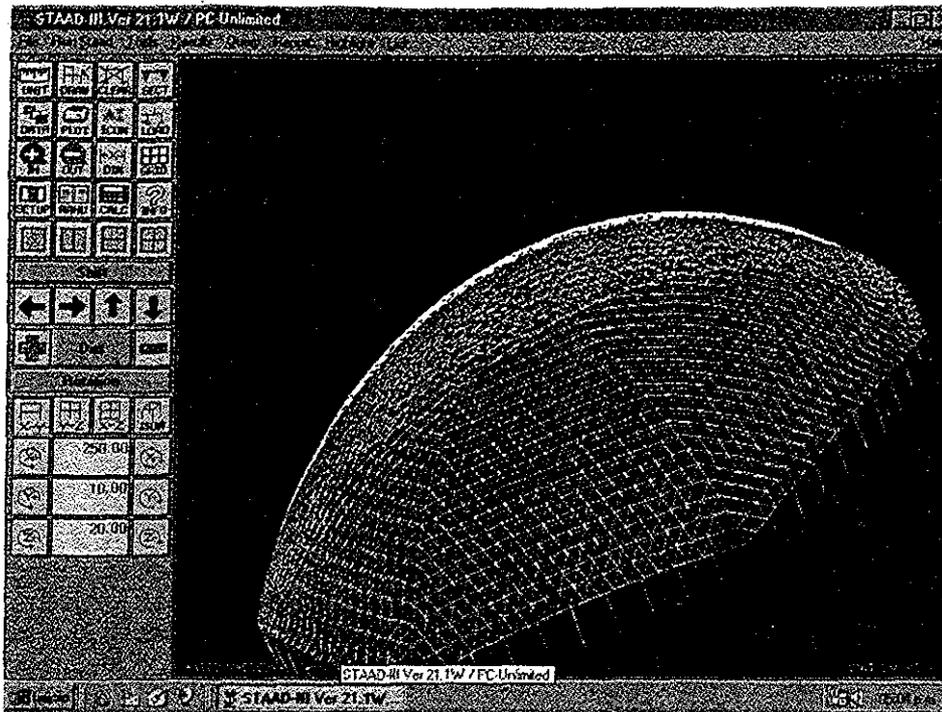
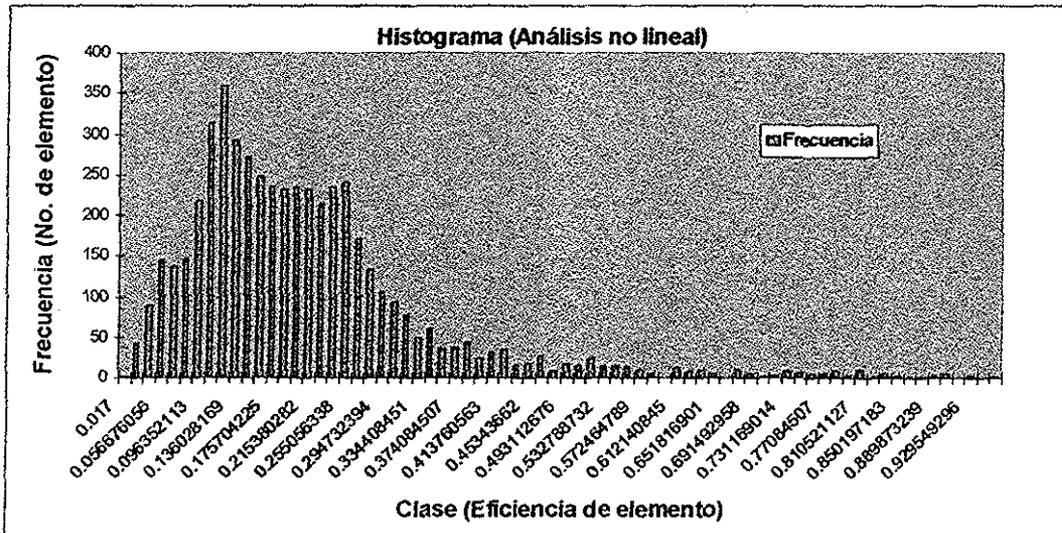


Fig. 10.19: Elástica del domo (Análisis no lineal)



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

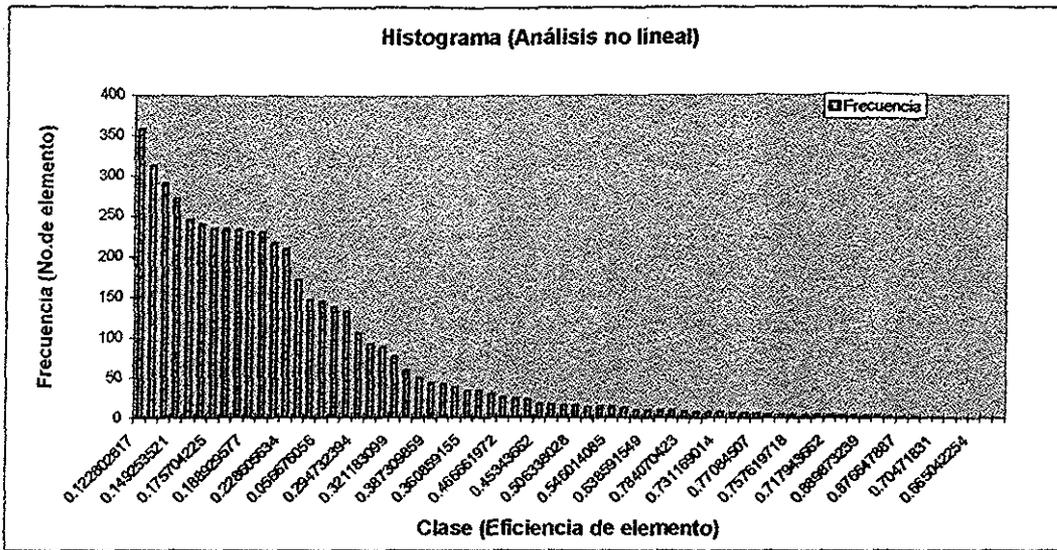


Fig. 10.20: Histogramas de eficiencia de trabajo de las barras del domo.

### 10.2.10 Comparación de resultados entre el análisis no lineal y el análisis común

En la figura 10.21 se muestra una comparación de las eficiencias del trabajo de las barras para el análisis común y el análisis no lineal.

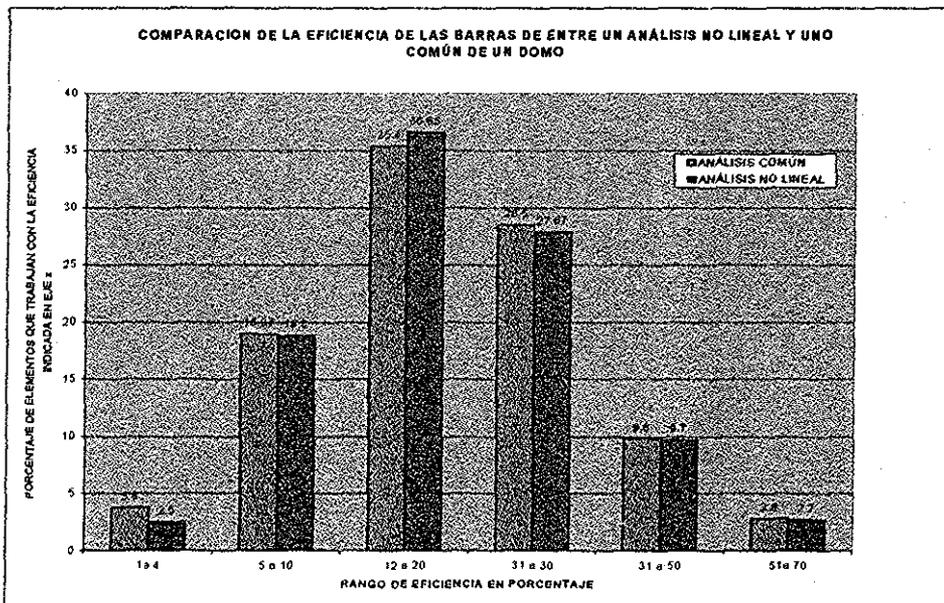


Fig. 10.21: Comparación de las eficiencias de trabajo de las barras entre el análisis no lineal y el análisis común.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

### 10.2.11 Carga crítica del domo

Al igual que en la sección 10.2.5.4 se obtiene en esta sección, la carga crítica de pandeo local del domo para las propiedades geométricas propuestas.

De lo anterior se tiene que cuando se alcanza el desplazamiento relativo de 2.027 cm entre nudos consecutivos, se ha encontrado la carga crítica de pandeo, que para este domo, con las propiedades propuestas resulta igual a 215 Kg. En la figura 10.22 se muestra la elástica del mismo al aplicar dicha carga.

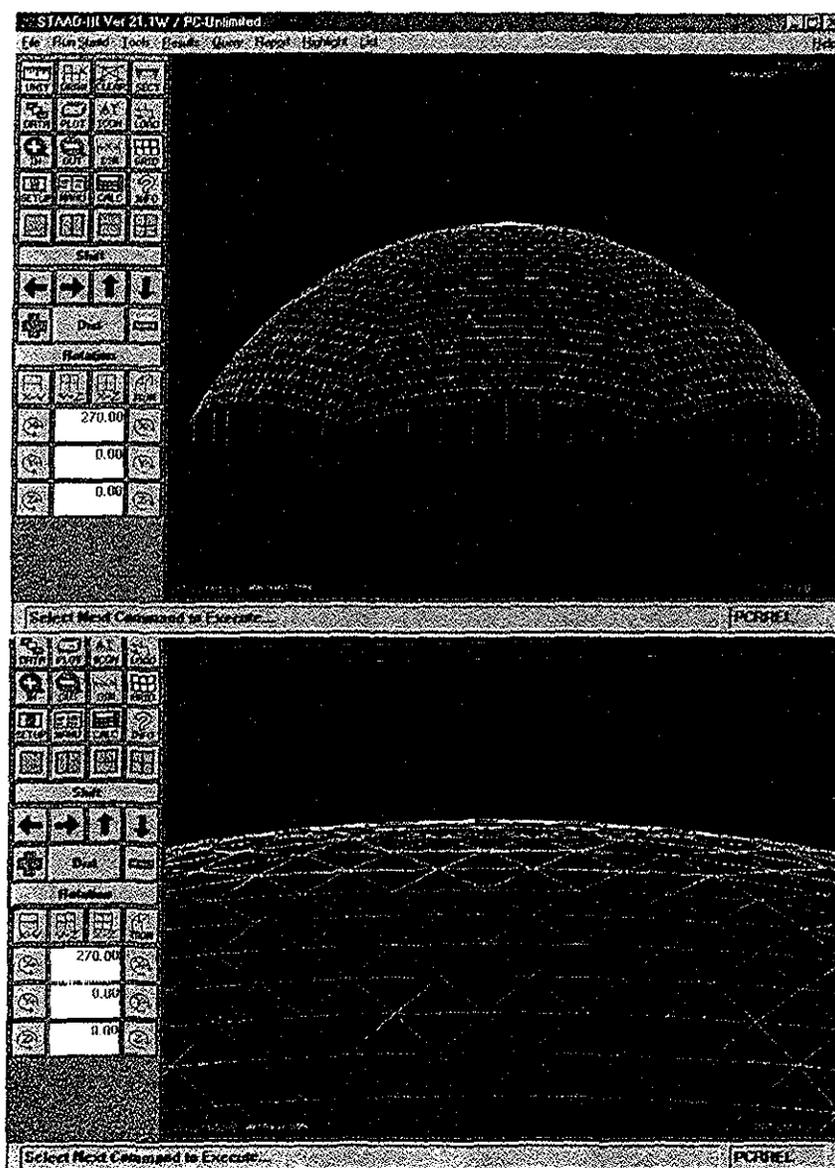


Fig. 10.22: Elástica del domo al aplicar la carga crítica  
( $P_{cr} = 215 \text{ Kg}$ ) en la cima

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 10.3 Comentarios a los resultados

Para las combinaciones de carga descritas en la sección 10.2.4, se obtuvieron la elástica del domo y las eficiencias de trabajo para cada una de las barras del mismo.

En la figura 10.9, se puede ver la comparación entre las eficiencias de trabajo de las barras para un análisis común y un análisis no lineal, esta figura resulta de analizar el domo construido con tubos D2 de aluminio, se puede observar que las barras que trabajan mas allá del rango elástico en el análisis común (alrededor de 6 por ciento del total de las barras), en el análisis no lineal (cuatro ciclos) se sobre esfuerzan mucho más e incrementan los esfuerzos hasta en un 90 por ciento. El porcentaje de barras que trabajan en el rango inelástico se incrementa del 6 al 16 por ciento (de un análisis común al análisis no lineal), las barras que en el análisis común trabajan a un 60 por ciento o menos de su capacidad, incrementan sus esfuerzos en un 40 por ciento en promedio.

En la sección 10.2.6 se analiza nuevamente el domo, pero en este análisis se colocaron tubos D2 y D4 en el arreglo del mismo, ello ya que como en el análisis anterior (sección las barras cercanas a los apoyos fueron las mas esforzadas (fig. 10.11), de aquí que estas sean remplazadas por tubos D4, con esto se forma una especie de anillo de refuerzo, en la figura 10.16 se observa que las barras sobre esforzadas en el análisis común baja de un 6 a un 4 por ciento del total de las barras al emplear este anillo de refuerzo, al realizar un análisis no lineal (cuatro ciclos) las barras que trabajan en el rango inelástico se incrementan del 4 al 7 por ciento y sus esfuerzos se incrementan en un 85 por ciento en promedio, mientras que las que trabajan en el rango elástico incrementan sus esfuerzos en un 30 por ciento en promedio.

Por último, si observamos el análisis de la sección 10.2.7 que corresponde a la alternativa de solución, ya que las secciones transversales de las barras son mucho mas grandes en área que las de las de los tubos D2 y D4, del orden de 6.4 y 3.55 veces más respectivamente, y en diámetro exterior 1.48 veces para ambos tubos. En la figura 10.21 se muestra la comparación de las eficiencias de trabajo de las barras, se observa que los niveles de esfuerzo de trabajo de las barras son pequeños y que éstos se encuentran en el rango elástico, al realizar un análisis no lineal (seis ciclos) los esfuerzos se incrementan en un 6 por ciento en promedio.

Si se desea llegar a la inestabilidad general de este domo, es necesario realizar un buen número de iteraciones en el análisis del mismo. Es importante mencionar que los efectos no lineales en el análisis, pueden hacer que los elementos cercanos a la frontera del domo (apoyos) se esfuerzen mas allá de su capacidad, y hacer que se produzca la inestabilidad del mismo por un pandeo general.

La carga crítica que genera pandeo local al emplear tubos D2 resultó ser de 240 Kg (sección 10.2.5.4), mientras que para la alternativa de solución esta carga se incrementó en 1.24 veces, por la mayor rigidez que estos tubos presentan.

---

## CONCLUSIONES

Se realizó un análisis común del domo utilizando para ello las propiedades geométricas reales de los elementos, posteriormente se realizó un análisis no lineal del mismo para las mismas propiedades geométricas.

De los resultados obtenidos en este trabajo, se concluye que la combinación de carga que produjo los máximos esfuerzos y desplazamientos fue la número nueve, que es la que corresponde a carga muerta, más carga viva y carga de nieve en medio domo. Cabe mencionar que las cargas de viento y nieve utilizadas, no corresponden a un lugar determinado, sino a casos críticos de cargas empleadas para el análisis de estructuras espaciales similares analizadas y diseñadas en Inglaterra y Caracas (referencias 30 y 20 respectivamente).

Se optó por utilizar estas cargas porque se buscó alcanzar niveles altos de esfuerzos, para observar el efecto no lineal. En las barras cercanas a los apoyos se observan mayores concentraciones de esfuerzos (figura 10.11) debido a la gran rigidez que se presenta en los apoyos.

A la estructura no se le sometió a la acción de carga sísmica, ya que debido a la poca masa y gran rigidez que posee, y al utilizar un material homogéneo dentro de ciertos regímenes de carga, y no tener cambios bruscos de resistencia en el material que la constituye, contribuye de manera importante a mejorar su comportamiento, por lo anterior no se presentan esfuerzos y desplazamientos excesivos, debida a esta acción (ref. 41).

Al revisar los esfuerzos en el domo, se encuentra que prácticamente concuerda con lo publicado en la literatura acerca del comportamiento de domos, ya que los esfuerzos meridionales en las barras de la parte superior, son en gran parte de compresión, mientras que los esfuerzos anulares son de compresión en la parte superior y cambian a tensión en la parte inferior. También al observar los momentos que se generan, resultan pequeños, por lo tanto, se puede emplear la teoría de la membrana para determinar los esfuerzos debidos al peso propio.

Los desplazamientos máximos verticales en valor absoluto, para la alternativa de solución mostrada en la sección 10.2.7, para el análisis común y para el análisis no - lineal resultan del orden de 2.75 cm y 3.0 cm respectivamente, que son valores pequeños en consideración con las dimensiones del domo.

Se puede observar que en este tipo de construcciones, la acción del viento, granizo o nieve pueden generar esfuerzos de tensión y compresión, así como

desplazamientos considerables sobre la misma, dependiendo del lugar donde se encuentre ubicada la estructura.

El aluminio como material de construcción, ha sido ampliamente utilizado en la realización de este tipo de estructuras, por las grandes ventajas que presenta y sobre todo por la seguridad, facilidad de elaboración de piezas y del montaje de la estructura.

En resumen se tiene, que inicialmente para niveles de esfuerzos bajos los efectos no lineales no incrementan grandemente los esfuerzos y deformaciones en la estructura, aunque para ello resultarían estructuras poco económicas, en cambio para niveles de esfuerzo altos (es decir, barras que trabajan casi al 100 por ciento de su capacidad o mas) los efectos no lineales en las estructuras, incrementan los esfuerzos en los elementos hasta en un 80 por ciento, esto resulta grave y por lo tanto tales efectos no deben ser ignorados. De aquí se concluye, que los efectos no lineales en el análisis, pueden, para niveles bajos de esfuerzos, no incrementar substancialmente los desplazamientos y esfuerzos y con ello los valores de elementos mecánicos; no así para niveles de esfuerzos altos en el que los efectos no - lineales pueden hacer que ocurra una inestabilidad general de la estructura, ello debido a que la matriz de rigidez global  $[k_E + k_G]$  se degrada, ya que tiende a tener valores pequeños en su arreglo.

---

**REFERENCIAS**

1. Rodríguez Cuevas N., ' **Estructuras para grandes claros** ' Informe, DEPMI, UNAM, México DF, enero 1976.
2. Suzuki E. and Kitamura H., ' **The Design and Construction of Cooling Tower** ', Tasei Construction Co. Ltd., Japan, 1981.
3. Bass L., ' **Lamella Domes in the United States** ', Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma, U.S.A., 1981.
4. Lind N. C. and Puranik B., ' **The stability analysis of reticulated domes with grid discontinuities** ', Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Ontario Canada, 1981.
5. Bayley M. J., ' **An experimental and theoretical investigation in to the behaviour of a three - way aluminium grid dome** ', The British Aluminium Company Limited, London, 1981.
6. Argyris J.H. and Kelsey S., ' **Energy theorems and structural analysis** ', Butterworths, London, 1960.
7. Siegel C., ' **Structure and form in modern architecture** ', Reinhold, New York, 1962.
8. Torroja E., ' **The structures of Eduardo Torroja** ', Dodge, New York, 1958.
9. Nervi P.L. ' **Structures** ', Dodge, New York, 1958.

10. Bermani and Kitipornchai , ' **Elasto - plastic nonlinear analysis of flexibly - jointed space frames** ' , Departament of Civil Engineering, Univerity or Queensland, 1990.
11. Canals I. y Guerin R., ' **Cascarones parabólico - hiperbólicos** ' , Ed LIMUSA, México, 1976.
12. Yang Yeong - Bin and McGuire W. ' **Stiffness Matrix for geometric non linear analysis** ' , Journal of Structural Engineerng, vol 112, 1986.
13. Przemieniecki J.S., ' **Theory of Matrix structural Analysis** ' , DOVER Publications Inc, New York, 1985.
14. Vázquez Ramos V. ' **Inestabilidad de las estructuras espaciales** ' , tesis, DEPFI, UNAM, 1991.
15. Soriano M. J. A. y Ruiz G. S. ' **Análisis teórico de cargas vivas en edificios** ' , Series del Instituto de Ingeniería, informe, volumen 586, febrero 1997.
16. Iglesias J. ' **Notas del curso de Teoría general de las estructuras** ' , DEPFI, UNAM, México DF., 1993.
17. Viridi K.S. and Dowling P. J. , ' **A general formulation of the non-linear analysis and stability of space frames** ' , Second International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.
18. Hsiao S. C. and Dygert G.C., ' **The MODUSPAN space-frame system** ' , Second international conference on space structures, University of Surrey, 1975.
19. Hauk V. and Mannesmannroehren-Werke A. G., ' **The Mannesmann Okta-S joint for tubular space structures** ' , Second International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.

- 
20. Kahn Ch. and William M. L. ' **The analysis and design of the Poliedro de Caracas geodesic dome** ', Second International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.
  21. Ritcher Don L. , ' **Space structures development: from early concepts to Temcor geodesic domes** '. Second International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.
  22. Du Chateau Stephane, ' **Structures spatiales en France leu développement et leur tendance d' industrialisation** ', Second International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.
  23. Tezcan S. S. And Ovunc B. , ' **An iteration method for the non-linear buckling of framed structures** ', Departament of Civil Engineering, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1991.
  24. Willems N. and William L. M., ' **Structural Analysis For Engineers** ', McGraw-Hill Book Company, New York, 1992.
  25. Head N. Ch. ' **Introducción al análisis estructural con matrices** ', McGraw Hill de México, 1974.
  26. Murray N. W., ' **Introduction to the Theory of Thin - Walled Structures** ', Clarendon Press, OXFORD, 1986.
  27. Gere - Timoshenko, ' **Mecánica de materiales** ',segunda edición, grupo editorial Iberoamérica, 1984.
  28. McCormac J. ' **Diseño de estructuras metálicas (LRFD)** ', Editorial Alfaomega, México DF, 1994.
  29. Angermayer K. ' **Estructural aluminum desing** ' Reynolds Metals Company, Richmond Virginia, USA, 1965.

30. Auld F. A., Crowley, Barnett G. and Partners, ' **The design and construction of the 45M diameter, single-layer, reticulated dome for the swimming pool hall at swindon leisure centre, England** ', Second International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.
31. Comisión Federal de Electricidad, ' **Manual de Diseño de Obras Civiles, Diseño por Viento** ', Instituto de Investigaciones Eléctricas, 1993.
32. Ghiocel D and Lungu D., ' **Wind Snow And Temperature effects on Structures Based on Probability** ', Abacus Press, English Edition, 1977.
33. Joint - Committee on Structural Safety CEB - CECM - CIB - FIP - IABSE, ' **Basic Data on Loads** ', second Draft, Lisbon, Marzo, 1974.
34. Mateescu C and Negoita A. , ' **Recherche Roumain Concernant la Surcharge de Neige** '. In Annales de l' Institut Tech du Batiment et des Travaux Publics, Julio - Agosto, 1969, pp. 1171 -1194.
35. Mateescu C, ' **Contributions to the Snow Accumulations on Wind Exposed Roofs** '. In Studii si Cercetari de Mecanica aplicata, No 3, 1965.
36. Schaerer P. A., ' **Variation on Ground Snow Loads in British Columbia**', In Proceedings of the Western Snow Conference, Victoria, B. C., Canada, Abril 1970, pp. 44 - 48.
37. Tistea D., ' **Works on Applied Climatology** ', Meteorological Office of Bucharest, 1972.
38. Zingg Th., ' **Maximale Schneelansten in der Schweiz** ', In Schweizerische Bauzeitung, Agosto, 1968.
39. ANSI A58.1 - 1972, ' **American National Standard Building Code Requirements for Minimum Design Loads in Buildings and Other Structures** ', America National Standards Institute, New York, 1972.

- 
40. Morgan P. R., Schmidt L. C., and Stevens L. K., ' **The influence of imperfections on Behaviour of a space truss** ', Dept. of Civil Engineering University of Melbourne Australia, Second International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.
  41. Montes García P. ' **Análisis y diseño de una cubierta semiesférica de ferrocemento sometida a viento y sismo** ', tesis, DEPMI UNAM, 1996.
  42. Makowski Z. S. ' **Analysis, design and construction of braced domes** ', Nichols Publishing Company, Great Britain, 1981.