9 00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

HIPERESPACIOS DE CONTINUOS ANCLADOS EN UN PUNTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMATICAS

P R E S E N T A :

M. EN C. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

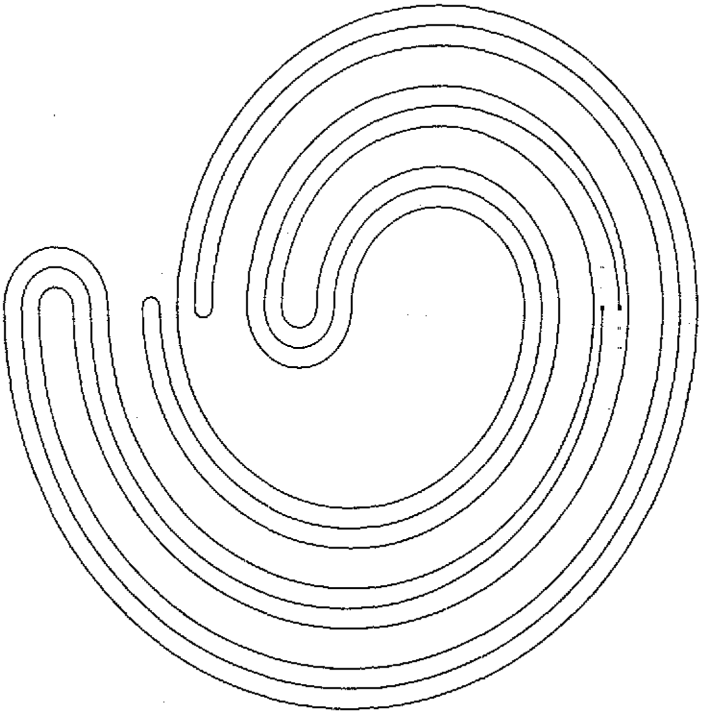
NOTA: APARECE UN PUNTO EN TODA LA TESIS

MEXICO D.F. JULIO /2002

Hiperespacios de Continuos Anclados en un Punto

M. en C. Patricia Pellicer Covarrubias

20 de junio de 2002



Hiperespacios de Continuos anclados en un punto

Agradecimientos

En primer lugar -aunque cualquier agradecimiento resultará quizá insuficiente- quisiera agradecer a alguien a quien admiro mucho, y de quien he recibido tantas enseñanzas, apoyo y consejos: Alejandro Illanes. A pesar de las diferencias :) , creo que hemos hecho un buen trabajo y quiero decir que estoy muy contenta con los resultados, de los cuales, la tesis es sólo uno de ellos.

En segundo lugar agradezco a mi familia, por el apoyo que siempre me han dado, por estar ahí. En particular a Daniel, Lucero, Caro y Alejandro.

Quiero agradecer también a mis sinodales: Alejandro Illanes, Janusz Charatonik, Víctor Neumann, Bety Puga, Sergio Macías, Raúl Escobedo, por haber aceptado leer la tesis, por los atinados comentarios que me han hecho sobre ella y que enriquecieron la versión final de la misma.

Igualmente quisiera expresar mi reconocimiento al Dr. Pawel Krupski, quien, durante su estancia en México, inspiró con sus pláticas y preguntas una parte muy interesante de este trabajo. Hubo también otra persona que contribuyó con la elaboración de esta tesis, y de quien aprecio mucho su tiempo e interés: Javier Páez.

Al grupo de continuos. A los profesores que me han formado y ayudado a llegar a donde estoy; menciono a los más significativos: Alejandro Illanes, Sergio Macías, Janusz y Wlodek Charatonik, Bety Puga, Héctor Méndez y Hugo Rincón.

A algunas de las personas que han estado conmigo ya durante un buen rato, que me son muy importantes y que de alguna manera han contribuido a que este proyecto llegue a su fin. A mi amiga de toda la vida: Rebeca. A un excelente hermano: Daniel. A mis roomies, muy especialmente al mejor roomie :) , con quien he compartido muchas cosas: Paco. A dos grandes amigos: Daniel Arévalo y Cuco. A tres personas que han cambiado mi manera de ver la vida: Sébastien (l'amant des fleurs de cactus et des jardins de givre), Pilar González y Pancho -mi gurú-. A otros amigos y compañeros: Mary López, Isis, Carlos Islas, Félix, Vero, Gerardo, Mario. A dos personas extraordinarias: Adolfo y Marian

A la Dirección General de Estudios de Posgrado, al IMATE, y a todos aquéllos que ahí he conocido, por el apoyo proporcionado durante estos tres años.

Muchas gracias.

Índice General

1 Introducción 4

2 Preliminares sobre Teoría de Continuos 7
- 2.1 Notación . . . 7
- 2.2 Conceptos básicos . . . 7
- 2.3 Continuos Particulares . . . 9
- 2.4 Herramienta general . . . 11

3 Preliminares sobre Teoría de Hiperespacios 16
- 3.1 Topología de 2^X y $C(X)$ . . . 16
- 3.2 Convergencia en Hiperespacios . . . 18
- 3.3 Arcos ordenados y Funciones de Whitney . . . 20
- 3.4 Herramienta general . . . 22

4 *Sobre los continuos Irreducibles 24
- 4.1 Irreducibilidad con respecto a dos puntos . . . 24
- 4.2 Irreducibilidad con respecto a dos subconjuntos . . . 29

5 Los Hiperespacios $C(p, X)$ 31
- 5.1 Introducción . . . 31
- 5.2 Funciones de Whitney para $C(p, X)$ . . . 37
- 5.3 Propiedades generales . . . 38
- 5.4 Algunos ejemplos . . . 47
- 5.5 Continuos arco-similares . . . 53

6 Continuos Estrambóticos 59
- 6.1 La condición dim $(C(p, X)) < 3$ . . . 59
- 6.2 Continuos Estrambóticos . . . 76

6.3 Ejemplos 100
6.4 Una caracterización 107
6.5 Continuos círculo-similares 108
6.6 Relación con la clase $\mathcal{K}_1$ 110

7 Continuos cuyos subcontinuos propios son arcos 118
7.1 Propiedades generales 118
7.2 Caracterizaciones 119
7.3 Ejemplos 126

8 Retracciones 128
8.1 Herramienta general 128
8.2 Caracterizaciones 131
8.3 Una curiosidad 150

9 Los Hiperespacios $K(X)$ 156
9.1 Compacidad 157
9.2 Conexidad local y por trayectorias 160
9.3 Compactaciones y conexidad 166
9.3.1 Cuando el residuo es un arco 166
9.3.2 Cuando el residuo es una curva cerrada simple o un 4-odo 168
9.3.3 Cuando el residuo es una gráfica finita 172
9.3.4 Criterios de conexidad 178
9.3.5 Una caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles 182

10 Continuos atriódicos 190
10.1 Propiedades generales 190
10.2 La caracterización 214

11 Preguntas 233

Capítulo 1

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. Una herramienta importante para el estudio de las propiedades de los continuos es la teoría de hiperespacios.

Los hiperespacios de un continuo X, son espacios cuyos elementos son subconjuntos especiales de X, Los más conocidos son:

i) el hiperespacio de subconjuntos cerrados de X:

$$2^X = \{A \subset X : A \textit{ es cerrado y no vacío}\},$$

ii) el hiperespacio de subcontinuos de X:

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ es conexo}\}.$$

iii) el hiperespacio de subconjuntos de X con a lo más n puntos:

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ elementos}\}.$$

Dos libros que tratan ampliamente la teoría de hiperespacios son *Hyperspaces of Sets*, de S. B. Nadler, Jr. [Nad78] y *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*, de A. Illanes y S. B. Nadler, Jr. [IN99].

La teoría de hiperespacios ha resultado ser muy rica y muy útil en el estudio de los continuos. Más precisamente, se ha visto que muchas propiedades topológicas de un continuo X pueden ser establecidas en términos de las propiedades topológicas de $C(X)$, y viceversa.

Siguiendo esta idea, el objetivo de esta tesis es investigar y presentar relaciones entre las propiedades topológicas de un continuo X y algunos hiperespacios particulares de éste.

Este trabajo nació de la idea de considerar hiperespacios *anclados* en un punto. Lo que queremos decir con esto es: dado un continuo X y un punto $p \in X$, ¿cómo se verá el hiperespacio $C(X)$ anclado en X? es decir, ¿qué propiedades tiene el hiperespacio $C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$? En este trabajo nos ocuparemos de dar respuesta a esta pregunta.

Hasta ahora estos hiperespacios han sido algo estudiados, pero no mucho. Uno de los resultados más importantes, probado por C. Eberhart en 1978, es que estos hiperespacios son retractos absolutos (véase [Ebe78, Thm 2]). También se conocen condiciones bajo las cuales $C(p, X)$ es un cubo de Hilbert. (véase [CS78] y [Ebe78, Thm 4, 6, 8]).

En los capítulos 2 y 3 presentamos nociones y herramientas básicas de las teorías de continuos e hiperespacios. Más adelante, en el capítulo 4 recordamos algo de la teoría de continuos irreducibles que usaremos a lo largo de la tesis; dicho capítulo lleva un asterisco, porque consideramos que el lector familiarizado con el tema quizá no necesite revisarlo. En el capítulo 5 empezaremos el estudio de los hiperespacios $C(p, X)$ analizando relaciones entre algunos continuos particulares X y sus hiperespacios $C(p, X)$. Asimismo presentamos varios ejemplos y contraejemplos en este sentido.

Para un continuo X consideramos también un hiperespacio muy especial: $K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}$ y estudiamos su estructura. En particular, se analizan relaciones entre las propiedades topológicas de X y aquéllas de $K(X)$.

Una primera pregunta es: si X y Y son continuos, ¿cuándo coinciden $K(X)$ y $K(Y)$? Como eso de que *coinciden* no es muy claro, hay que precisarlo. Diremos que $K(X)$ y $K(Y)$ coinciden si existe una biyección $g : K(X) \to K(Y)$ tal que $g(C(p, X))$ es homeomorfo a $C(p, X)$ para cada $x \in X$.

Así pues, nos empezamos preguntando si, dado un arco A, $K(A)$ caracteriza al arco, es decir, si un continuo Z es tal que $K(A)$ y $K(Z)$ coinciden, entonces Z es un arco. En el capítulo 5 vimos que éste no es el caso; no obstante, en el capítulo 6 probamos que si Z es descomponible, y $K(Z)$ coincide con $K(A)$, entonces Z es un arco. Sin embargo, lo que nos interesa es caracterizar a los continuos Z para los cuales $K(Z)$ coincide con $K(A)$. En el capítulo 7 presentamos una caracterización de la clase de dichos continuos. A un continuo en esta clase lo llamamos *arco-similar*.

Una vez resuelto este problema nos hicimos una pregunta similar para una curva cerrada simple S. A saber: ¿si un continuo Z es tal que $K(Z)$ coicide con $K(S)$, entonces Z es una curva cerrada simple? Una vez más encontramos un ejemplo que muestra que éste no es el caso y, más adelante, en el capítulo 6, se muestra que si Z es descomponible, y $K(Z)$ coincide con $K(S)$, entonces Z es una curva cerrada simple. También obtenemos una caracterización de la clase de continuos Z con las propiedades en cuestión y, en el capítulo 7, los caracterizamos como la clase de continuos cuyos subcontinuos propios y no degenerados son arcos, y no tienen puntos extremos. A los continuos de esta clase los llamaremos *círculo-similares*.

Durante la elaboración de este trabajo, el Dr. Pawel Krupski preguntó qué relación había entre la clase de continuos arco-similares y la clase $\mathcal{K}_1$, donde dicha clase consiste en los continuos X tales que X es encadenable, tiene la Propiedad de Kelley, X tiene uno o dos puntos extremos y sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. En el capítulo 6 damos respuesta a esta pregunta, probando que la clase $\mathcal{K}_1$ está contenida en la clase de continuos arco-similares, pero que no son iguales.

Por otra parte, en el estudio de los continuos arco y círculo-similares nos encontramos una clase más general de continuos, a los que llamamos *continuos estrambóticos*. Ya que estábamos en esas, decidimos caracterizarlos a ellos también, en términos de sus hiperespacios $K(X)$. Presentamos esta caracterización en el capítulo 7.

En el capítulo 8 consideramos los hiperespacios $2^X_p = \{A \in 2^X : p \in A\}$ y establecemos condiciones bajo las cuales 2^X_p es un retracto por deformación, o un retracto fuerte por deformación de 2^X. En este capítulo, también se estudian propiedades similares para los hiperespacios $C(p, X)$.

Dedicamos el capítulo 9 a investigar las propiedades topológicas de los hiperespacios $K(X)$ en relación a aquéllas de X. Estos hiperespacios resultaron no portarse tan bien como los hiperespacios $C(X)$ (no siempre resultan ser continuos, por ejemplo); sin embargo, hay muchas cosas que se pueden decir sobre su estructura. Como aplicación, establecemos una caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles.

Finalmente, nos preguntamos qué pasaría con los continuos atriódicos. En esta clase de continuos "el crecer" está muy restringido, así que la estructura de sus hiperespacios $C(p, X)$ resultó ser muy sencilla. Dedicamos el último capítulo a presentar las propiedades generales de esta clase de continuos, a fin de dar una caracterización de sus hiperespacios $C(p, X)$. Con esto terminamos este trabajo.

Capítulo 2

Preliminares sobre Teoría de Continuos

2.1 Notación

Empezaremos presentando la notación básica que se usará a lo largo de este trabajo. La letra I denotará al intervalo $[0,1]$, $\mathbb{N}$ al conjunto de números naturales y $\mathbb{C}$ al conjunto de números complejos. También, S^1 denotará a la circunferencia unitaria en el plano complejo, es decir, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Por otra parte, si X es un espacio topológico, y $A \subset B \subset X$, entonces $\overline{A}^B$, $int_B(A)$, $Fr_B(A)$ y $ext_B(A)$ denotarán a la cerradura, el interior, la frontera y el exterior de A con respecto a B, respectivamente. En el caso en que $B = X$, simplemente omitiremos la B.

Sean (X, d) un espacio métrico, $w \in X$ y $\varepsilon > 0$. Denotaremos a la *ε-bola* alrededor de w como

$$B(\varepsilon, w) = \{x \in X : d(x, w) < \varepsilon\}.$$

Finalmente, para un espacio topológico X, $\dim(X)$ denotará la dimensión de X y $\text{diam}(X)$ denotará su diámetro, en el caso en que X sea métrico.

2.2 Conceptos básicos

Empezaremos por introducir los conceptos elementales que se usarán a lo largo de este trabajo.

Definición 2.2.1 Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un *continuo* si X es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.

Nota: Si X es un continuo, X tiene una métrica d, así que en principio tendríamos que referirnos a X como (X, d). Para facilitar la notación, a menos que se indique lo contrario, en este trabajo establecemos que el símbolo X representa al continuo con su métrica d.

Definición 2.2.2 Un *subcontinuo* de un continuo X es un subespacio no vacío, cerrado y conexo de X.

Para un continuo X pueden definirse varios hiperespacios. A continuación se definirán los que se considerarán en esta tesis.

Definición 2.2.3 Sea X un continuo. Definimos el *hiperespacio de cerrados* de X como:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Definición 2.2.4 Sea X un continuo. Definimos el *hiperespacio de subcontinuos* de X como:

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

Definición 2.2.5 Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Definimos el *hiperespacio* $F_n(X)$ como:

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

Definición 2.2.6 Sea X un continuo. El hiperpespacio $F(X)$ está dado por:

$$F(X) = \bigcup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Estos hiperespacios tienen muchas propiedades interesantes, empezaremos a detallarlas en el Capítulo 2.

2.3 Continuos Particulares

Trabajaremos también con varias clases particulares de continuos, que enseguida definiremos.

Definición 2.3.1 Decimos que un espacio topológico es un *arco* si es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Definición 2.3.2 Decimos que un espacio topológico es una *curva cerrada simple* si es homeomorfo a S^1.

Definición 2.3.3 Un continuo X es una *gráfica finita* si se puede escribir como una unión finita de arcos $A_1, \ldots, A_n$, de tal manera que si los arcos A_i y A_j se intersectan, entonces lo hacen en uno o en sus dos puntos extremos.

Definición 2.3.4 Sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que un subcontinuo Y de un continuo X es un *n-odo* si existe $K \in C(Y)$ tal que $Y \setminus K$ tiene al menos n componentes. Llamaremos a K el *corazón* del n-odo. En el caso en que $n = 3$, diremos que Y es un *triodo*.

Definición 2.3.5 Diremos que un continuo X es *atriódico* si X no contiene triodos.

Definición 2.3.6 Sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que X es un *n-odo simple* si X es un n-odo tal que

i) el corazón de X consta sólo de un punto $x \in X$ y

ii) $X \setminus \{x\}$ consta exactamente de n componentes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que $A_i \cup \{x\}$ es un arco para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 2.3.7 Sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que un continuo X es una *n-celda* si X es homeomorfo a I^n.

Definición 2.3.8 Un *cubo de Hilbert* es un espacio homeomorfo al producto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $I_i = [0,1]$ para cada i.

Se sabe que los cubos de Hilbert son continuos (véase [Nad92, p. 4])

Definición 2.3.9 Sea X un continuo. Decimos que X es *unicoherente* si cada vez que A y B son subcontinuos de X tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición 2.3.10 Sea X un continuo. Decimos que X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A, B de X tales que $A \cup B = X$. En este caso diremos que X se descompone en A y B. Si todos los subcontinuos no degenerados de X son descomponibles, diremos que X es *hereditariamente descomponible*.

Definición 2.3.11 Decimos que un continuo X es *indescomponible* si no es descomponible. Más aún, X es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

A continuación introducimos una definición muy relacionada con el concepto de descomponibilidad.

Definición 2.3.12 Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $p \in A$. Definimos la *composante de* p *en* A como

$$\Sigma_p^A = \bigcup\{K \in C(A) \setminus \{A\} : p \in K\}$$

Cuando $A = X$ escribiremos simplemente Σ_p.

El siguiente es un resultado conocido que se usará mucho en este trabajo.

Teorema 2.3.13 *Si X es un continuo indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes. Más aún, las composantes de X son ajenas dos a dos y son densas en X.*

Véase [Nad92, p. 83, 203, 204].

Finalmente recordamos una definición relacionada con la conexidad.

Definición 2.3.14 Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es conexo en pequeño en p (abreviamos *cik* en p) si para cada subconjunto abierto U de X, que contenga a p, existe un subconjunto conexo K, de X, tal que $p \in int(K) \subset U$.

Diremos que X es conexo en pequeño si lo es en p para cada $p \in X$.

2.4 Herramienta general

La siguiente es una lista de resultados más bien técnicos -y elementales-, sin particular relación entre sí, pero que constituyen una herramienta importante a lo largo de la tesis. Se ha decidido dedicarles una sección particular de este trabajo, a fin de que las pruebas no alteren la continuidad y coherencia del mismo. Por otra parte, un lector familiarizado con la Teoría de Continuos probablemente conocerá varios de ellos, y podrá saltárselos.

Empezaremos con un par de resultados conocidos de la Teoría de Continuos, que nos servirán mucho en el desarrollo de esta tesis.

Teorema 2.4.1 (***de los Golpes en la Frontera***) *[Nad92, Teorema 5.6]. Sean X un continuo y U un subconjunto propio y no vacío de X. Si D es una componente de U entonces $\overline{D} \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

Teorema 2.4.2 (***del Cable Cortado***) *[Nad92, Teorema 5.2]. Sean X un espacio métrico compacto y $A, B \in 2^X$. Si ninguna componente de X intersecta a la vez a A y a B, entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados y ajenos de X que satisfacen $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Lema 2.4.3 *Sean X un continuo y $K \in C(X)$. Si C es una componente de $X \setminus K$, entonces $K \cup C$ es un subcontinuo de X.*

Demostración:
De acuerdo al Teorema 2.4.1 tenemos que $\overline{C} \cap Fr(X \setminus K) \neq \emptyset$. Sin embargo, $Fr(X \setminus K) = Fr(K)$, así que

$$\emptyset \neq \overline{C} \cap Fr(K) \subset \overline{C} \cap K.$$

Por tanto $K \cup C$ es conexo.

Por otra parte, como C es una componente de $X \setminus K$, se tiene que C es un subconjunto cerrado de $X \setminus K$, es decir, $(X \setminus K) \setminus C$ es abierto en $X \setminus K$. Sin embargo, $X \setminus K$ es un subconjunto abierto de X, así que el conjunto

$$(X \setminus K) \setminus C = X \setminus (K \cup C)$$

es abierto en X.

En consecuencia, $K \cup C$ es cerrado. Como ya vimos que también es conexo podemos concluir que $K \cup C \in C(X)$ y terminamos la prueba del lema

□

Lema 2.4.4 *Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Supongamos que existe una familia de subcontinuos $\{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ tales que si $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, entonces*

i) $K_i \cup A$ es conexo y

ii) $(K_i \setminus K_j) \setminus A \neq \emptyset$ para $i \neq j$

Entonces $A \cup K_i$ y $A \cup K_j$ son dos subcontinuos no comparables de X cada vez que $i \neq j$.

Demostración:
Tomemos $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, m\}$ con $i \neq j$.
Entonces

$$\emptyset \neq (K_i \setminus K_j) \setminus A \subset (A \cup K_i) \setminus (A \cup K_j). \tag{2.1}$$

De manera análoga se puede ver que

$$(A \cup K_j) \setminus (A \cup K_i) \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) deducimos que $A \cup K_i$ y $A \cup K_j$ no son comparables.
$\square$

Lema 2.4.5 *Sean X un continuo y $B, B', H \in C(X)$. Supongamos que $B \subset B'$ y $H \cap B \neq \emptyset \neq H \cap Fr(B')$. Entonces $H \cap Fr(B) \neq \emptyset$.*

Demostración:
Tomemos $x \in H \cap Fr(B')$. Analizaremos dos casos.

Caso 1. $x \notin B$.

Por hipótesis tenemos que $H \cap B \neq \emptyset$ y en este caso $H \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$. Como H es conexo se sigue que $H \cap Fr(B) \neq \emptyset$.

Caso 2. $x \in B$.

Como $B \subset B'$ y $x \in Fr(B') \subset \overline{X \setminus B'} \subset \overline{X \setminus B}$, obtenemos que $x \in Fr(B)$. Por tanto $H \cap Fr(B) \neq \emptyset$.

En ambos casos llegamos a la conclusión buscada, así que concluimos la prueba del lema.

□

Lema 2.4.6 *Sean K y L dos subconjuntos cerrados de un continuo X. Entonces $int(K \cup L) \subset int(K) \cup L$.*

Demostración:
Sea $x \in X \setminus \big(int(K) \cup L\big)$.

Sea U un subconjunto abierto cualquiera de X tal que $x \in U$. Como $x \notin L$ podemos suponer que $U \subset X \setminus L$. Además, dado que $x \notin int(K)$ se tiene que $U \setminus K \neq \emptyset$.

De aquí que

$$\emptyset \neq U \setminus K = U \setminus (K \cup L).$$

Así pues, obtenemos que $x \notin int(K \cup L)$ y concluimos la prueba del lema.

□

Lema 2.4.7 *Sea X un continuo y sean L y K dos subconjuntos cerrados de X. Si $w \in Fr(L) \setminus K$, entonces $w \in Fr(L \cup K)$.*

Demostración:
Como L es cerrado tenemos que

$$w \in L \subset \overline{L \cup K} \tag{2.3}$$

Tomemos ahora un subconjunto abierto U de X tal que $w \in U$. Supondremos que $U \subset X \setminus K$. Como $w \in Fr(L)$ existe un punto z tal que

$$z \in (X \setminus L) \cap U \subset (X \setminus L) \cap (X \setminus K) = X \setminus (L \cup K).$$

Por tanto

$$w \in \overline{X \setminus (L \cup K)}.$$

De aquí y de (2.3) se sigue que $w \in Fr(L \cup K)$ y concluimos la prueba del lema.

□

Definición 2.4.8 Sean X un continuo y $a, b \in X$. Decimos que X es *irreducible entre a y b* si cada vez que $A \in C(X)$ es tal que $\{a, b\} \subset A$, se tiene que $A = X$.

Lema 2.4.9 *Sean X un continuo y a, b dos puntos distintos de X, entonces existe $K \in C(X)$ tal que K es irreducible entre a y b*

Demostración:
Consideremos el conjunto $C(\{a, b\}, X)$ con el orden natural de la contención y una cadena $\mathcal{A}$ en $C(\{a, b\}, X)$. En particular se tiene que si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Definimos

$$Y = \bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Como Y es una intersección de continuos anidados se tiene que $Y \in C(X)$ (véase [Nad92, Teorema 1.8]). Por otra parte, para cada $A \in \mathcal{A}$ sabemos que $\{a, b\} \subset A$, así que $\{a, b\} \subset Y$ y claramente $Y \subset A$. Así pues, hemos encontrado una cota inferior para la cadena $\mathcal{A}$, de manera que si aplicamos el Lema de Zorn ([Her98, Teorema 8.10]), obtenemos que el conjunto $C(\{a, b\}, X)$ tiene elementos minimales. Sea K un elemento minimal de $C(\{a, b\}, X)$, veremos que K es irreducible entre a y b.

Si suponemos que K no es irreducible entre a y b, entonces existe un subcontinuo propio L de K tal que $\{a, b\} \subset L$. Así pues, hemos encontrado un elemento de $C(\{a, b\}, X)$ que es menor que K. Esto contradice la minimalidad de K y muestra que K es irreducible entre a y b.

Concluimos la prueba del lema.

□

Lema 2.4.10 *Sea X un continuo, entonces X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño.*

Demostración:
Si X es localmente conexo, entonces es inmediato que X es conexo en pequeño.

Supongamos ahora que X es conexo en pequeño y sea $p \in X$. Para probar que X es locamente conexo en p tomaremos un subconjunto abierto U de X, que contenga a p y la componente V de U que contiene a p. Veremos que V es abierto en X.

Sea $x \in V$. Como X es *cik* en x, podemos tomar un conexo K tal que $x \in int(K) \subset U$. Sin embargo, dado que K es conexo obtenemos que $K \subset V$. Por tanto $x \in int(V)$ y podemos deducir que V es un subconjunto abierto y conexo que contiene a p. Como esto sucede para toda $p \in X$, concluimos que X es locamente conexo.

$\square$

Capítulo 3

Preliminares sobre Teoría de Hiperespacios

En la Sección 1.2, para un continuo X definimos a los conjuntos $C(X)$ y 2^X. En este capítulo veremos que estos conjuntos tienen propiedades muy interesantes. Empezaremos dándoles una topología adecuada, de manera que X pueda darnos información sobre ellos y viceversa.

3.1 Topología de 2^X y $C(X)$

Definición 3.1.1 Sean X un continuo (con métrica d), $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Definimos la *ε-nube alrededor de A* como:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \textit{ existe } a \in A \textit{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Definición 3.1.2 Para un continuo X definimos la función

$$H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$$

dada por

$$H(A, B) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \textit{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\right\}.$$

En [Nad92, Teorema 4.2, Corolario 4.6], se prueba que esta función es una métrica para 2^X (y $C(X)$), y que la topología generada por la métrica H es independiente de la métrica de X. Es decir, si d y d' son dos métricas que generan la misma topología en X, entonces la métrica H inducida por d

en 2^X, y aquélla inducida por d', generan la misma topología en 2^X (y por tanto en $C(X)$).

Así pues, de la misma manera que X denota al continuo X junto con su métrica d, los símbolos 2^X y $C(X)$ denotarán a los espacios respectivos junto con la métrica H. A H se le llama *Métrica de Hausdorff*.

La métrica de Hausdorff H tiene un comportamiento muy agradable en $C(X)$ y 2^X. Por ejemplo, en [Nad78, teoremas 0.8, 1.9 y 1.12] se prueba que, con respecto a la topología generada por H, los espacios $C(X)$ y 2^X resultan ser ¡compactos y conexos por trayectorias! y, en particular:

Teorema 3.1.3 *Si X es un continuo, entonces sus hiperespacios $C(X)$ y 2^X también son continuos.*

Veamos ahora a los hiperespacios de un continuo X desde otro ángulo, buscando una manera alternativa de proporcionarles una topología. Tomemos, por ejemplo, un subconjunto abierto U de un continuo X y consideremos los elementos de 2^X contenidos en U, es decir, consideremos el conjunto $\mathcal{U} = \{A \in 2^X : A \subset U\}$. Algo que se antojaría natural es que $\mathcal{U}$ fuera un subconjunto abierto de 2^X. De manera similar, si B es un subconjunto cerrado de X, sería agradable tener una topología para 2^X en la cual el conjunto $\{A \in 2^X : A \subset B\}$, fuera cerrado. Una primera pregunta es si tal topología existe, y la respuesta es afirmativa; de hecho, existe una topología mínima que satisface estas condiciones y se llama *Topología de Vietoris*. A continuación la definimos con más precisión.

Definición 3.1.4 Para un continuo X, con topología τ, definimos

$$\langle S_1, \ldots, S_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^{n} S_i \text{ y } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}$$

y consideramos la familia

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \ldots U_n\rangle : U_i \in \tau, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

En [IN99, Teorema 1.2] se prueba que, en efecto, $\mathcal{B}_V$ es una base para la Topología de Vietoris. Más aun: en [IN99, Teorema 3.1] se muestra que la Topología de Vietoris coincide con aquélla generada por ¡la Métrica de Hausdorff!

De esta manera, hemos obtenido dos enfoques distintos de la topología que hemos establecido para los hiperespacios $C(X)$ y 2^X. Como veremos más adelante, tener a la mano ambos enfoques nos será de mucha utilidad y, en lo sucesivo, utilizaremos aquél que más nos convenga.

3.2 Convergencia en Hiperespacios

En la sección anterior presentamos una manera de dar una métrica natural a los hiperespacios $C(X)$ y 2^X de un continuo X, y, en este sentido, podemos considerar la convergencia de sucesiones en los hiperespacios en cuestión.

Ahora bien, dado que los elementos de $C(X)$ y 2^X son subconjuntos de X, a continuación presentamos una notación clásica de convergencia en términos de conjuntos.

Definición 3.2.1 Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Denotaremos al *límite inferior* de la sucesión como

$$\begin{aligned} \liminf A_n &= \{x \in X : \text{ para cada } \varepsilon > 0,\ B(\varepsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \\ &\qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \text{ salvo una cantidad finita de ellas}\}. \end{aligned}$$

Similarmente, denotaremos al *límite superior* de la sucesión como

$$\begin{aligned} \limsup A_n &= \{x \in X : \text{ para toda } \varepsilon > 0,\ B(\varepsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \\ &\qquad \text{para una cantidad infinita de números } n\}. \end{aligned}$$

A continuación introducimos una manera equivalente de tratar a los límites superior e inferior, la cual nos convendrá usar frecuentemente.

Observación 3.2.2 Como consecuencia directa de la definición se tiene que:

i) $x \in \liminf A_n$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \in A_n$ para cada n y $a_n \to x$.

ii) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si existen una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada k, tal que $a_{n_k} \to x$.

Algunas propiedades básicas de los límites superior e inferior se presentan en el siguiente lema.

Lema 3.2.3 *[Nad78, Teorema 0.6] Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Entonces*

i) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$,

ii) $\liminf A_n$ *y* $\limsup A_n$ *son subconjuntos cerrados de* X, *iii)* $\limsup A_n \neq \emptyset$ *y*

iv) si A_{n_k} *es una subsucesión de* A_n*, entonces* $\liminf A_n \subset \liminf A_{n_k}$ *y* $\limsup A_{n_k} \subset \limsup A_n$.

La noción de convergencia en términos de subconjuntos de X está dada como sigue:

Definición 3.2.4 Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Decimos que la sucesión A_n *converge* a $A \in 2^X$ si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$. En este caso escribimos $\lim A_n = A$

Una cuestión interesante, con respecto al comportamiento de las sucesiones, es saber qué relación hay entre la convergencia en hiperespacios con respecto a la métrica de Hausdorff y aquélla en términos de la definición anterior. En este sentido, en [Nad78, Teorema 0.7] se prueba que ambas nociones de convergencia son equivalentes; en otras palabras: si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en 2^X, entonces $\lim A_n = A$ si y sólo si $H(A_n, A) \to 0$. Así pues, de ahora en adelante usaremos ambas nociones indistintamente

Finalmente presentamos un par de herramientas que usaremos una y otra vez a lo largo de este trabajo.

Lema 3.2.5 *Sean* X *un continuo y* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones en* 2^X. *Supongamos que* $A_n \to A$ *y* $B_n \to B$ *para algunos* $A, B \in 2^X$*, entonces* $A_n \cup B_n \to A \cup B$.

Demostración:
Sea $x \in A \cup B$. Podemos suponer que $x \in A = \liminf A_n$, entonces por la Observación 3.2.2, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $a_n \in A_n$ de manera que $a_n \to x$. Aplicando una vez más la Observación 3.2.2 obtenemos que $x \in \liminf A_n \cup B_n$. Por tanto,

$$A \cup B \ \subset \ \liminf A_n \cup B_n \tag{3.1}$$

Tomemos ahora $x \in \limsup A_n \cup B_n$, entonces gracias a la Observación 3.2.2 existen una subsucesión $\{A_{n_k} \cup B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $x_{n_k} \in A_{n_k} \cup B_{n_k}$ para cada k, tal que $x_{n_k} \to x$. Tomando una subsucesión de la subsucesión si es necesario, podemos suponer que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. En otras palabras,

$$x \ \in \ \limsup A_n \ = \ A \ \subset \ A \cup B$$

Por tanto, $\limsup A_n \cup B_n \subset A \cup B$. Como consecuencia de esto, de (3.1) y del Lema 3.2.3 obtenemos que

$$\lim A_n \cup B_n = A \cup B$$

y concluimos la prueba del lema.

□

Corolario 3.2.6 *Sean X un continuo, $i \in \mathbb{N}$ y $\{A_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{A_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en 2^X. Si para cada $k \in \{1, \ldots, i\}$ se tiene que $A_n^k \to A^k$ para alguna $A^k \in 2^X$, entonces*

$$\bigcup\{A_n^k : 1 \leq k \leq i\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bigcup\{A^k : 1 \leq k \leq i\}.$$

Demostración.
En el lema anterior vimos el resultado para $i = 2$. Supongamos, inductivamente, que el resultado es válido para $k = i - 1$. Entonces, usando una vez más el lema anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \bigcup\{A_n^k : 1 \leq k \leq i\} &= \bigcup\{A_n^k : 1 \leq k \leq i-1\} \cup A_n^i \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bigcup\{A^k : 1 \leq k \leq i-1\} \cup A^i \\ &= \bigcup\{A^k : 1 \leq k \leq i\}. \end{aligned}$$

Terminamos la prueba del corolario.

□

3.3 Arcos ordenados y Funciones de Whitney

Introducimos a continuación una herramienta básica en la Teoría de Hiperespacios: los arcos ordenados.

Definición 3.3.1 Sea X un continuo y $A, B \in C(X)$ (respectivamente, 2^X). Una función continua $\alpha : I \to C(X)$ (respectivamente, 2^X) es un *arco ordenado de A a B* si

i) $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y

ii) $\alpha(r) \subsetneq \alpha(s)$ cada vez que $r < s$.

La prueba de la existencia de arcos ordenados en 2^X y $C(X)$ puede verse en [Nad78, 1.2-1.8].

En lo sucesivo usaremos mucho los arcos ordenados, así que aprovechamos este momento para introducir la siguiente definición.

Definición 3.3.2 Supongamos que X es un continuo, $A, B \in C(X)$, con $A \subset B$, y que $\alpha : I \to C(X)$ es un arco ordenado de A a B. Diremos que α es el *único arco ordenado* de A a B si cada vez que tomamos un arco ordenado $\beta : I \to C(X)$ de A a B se tiene que $\alpha(I) = \beta(I)$.

Por otra parte, las funciones de Whitney también son de gran ayuda en el desarrollo de la teoría. Las definimos a continuación.

Definición 3.3.3 Sea X un continuo. Una *función de Whitney para* $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ que satisface:

i) $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$ y

ii) $\mu(A) < \mu(B)$ cada vez que $A \subsetneq B$.

A lo largo de esta tesis trabajaremos con varios hiperespacios para un continuo X, para los cuales también nos gustaría tener funciones de Whitney. Así pues, definimos una función de Whitney para un hiperespacio en general.

Definición 3.3.4 Si L es un hiperespacio del continuo X (por ejemplo 2^X), decimos que una función continua μ es una *función de Whitney para* L, si satisface las condiciones i) y ii) de la Definición 3.3.3 y su dominio es L.

En [Nad78, Teoremas 0.50.1, 0.50.2 y 0.50.3] se muestran las construcciones de tres funciones de Whitney, las cuales pueden considerarse para cualquier hiperespacio.

Notemos ahora lo siguiente: si μ es una función de Whitney para un hiperespacio L, podemos definir una nueva función $\mu' : L \to [0, \infty)$ de manera que $\mu'(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$. Así pues, resulta que μ' también es una función de Whitney, pero con la ventaja de que $\mu'(X) = 1$ y, en consecuencia, μ' toma valores en I. Así pues, cada vez que hablemos de una función de Whitney, supondremos que su rango es I.

3.4 Herramienta general

De la misma manera que presentamos una sección de herramienta general en Teoría de Continuos, dedicamos ahora esta sección a desarrollar resultados de Teoría de Hiperespacios que, por su naturaleza más bien técnica, preferimos incluir en una sección aparte, a fin de preservar la continuidad y coherencia de los resultados principales de este trabajo.

Así pues, con respecto a los arcos ordenados tenemos el siguiente hecho.

Lema 3.4.1 *Sean X un continuo y $A \in C(X) \setminus \{X\}$. Supongamos que existen dos arcos ordenados $\alpha_1 : I \to C(X)$ y $\alpha_2 : I \to C(X)$ de A a X tales que $\alpha_1(I) \neq \alpha_2(I)$. Entonces existen $s, t \in I$ tales que*

$$\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset \qquad y \qquad \alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset.$$

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to I$ una función de Whitney. Por hipótesis podemos tomar $s \in I$ tal que $\alpha_1(s) \notin \alpha_2(I)$. Sea $r' = \mu(\alpha_1(s))$.

Como los arcos ordenados son funciones continuas, podemos encontrar $t \in I$ tal que $\mu(\alpha_2(t)) = r'$.

Ahora bien, las funciones de Whitney son estrictamente crecientes, así que $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(t)$ no pueden ser comparables. Por tanto

$$\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset$$

y concluimos la prueba del lema.

□

A continuación presentamos un lema de Teoría de Continuos, que usaremos posteriormente, como aplicación de la existencia de los arcos ordenados.

Lema 3.4.2 *Sea X un continuo descomponible, digamos que X se descompone en los subcontinuos A y B. Si K es una componente de $A \cap B$, entonces $K \cap Fr(A) \neq \emptyset$ y $K \cap Fr(B) \neq \emptyset$.*

Demostración:
Empezaremos viendo que $K \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

Supongamos que $K \cap Fr(A) = \emptyset$. Por definición tenemos que $K \subset A$, así que $K \subset int(A)$. En particular, si consideramos el conjunto

$$\mathcal{D} = \{D \in C(X) : D \subset int(A)\} = \langle int(A) \rangle \cap C(X),$$

tenemos que $\mathcal{D}$ es un subconjunto abierto de $C(X)$ que contiene a K (véase Definición 3.1.4). De aquí que podemos hallar $\delta > 0$ tal que si $L \in C(X)$ y $H(K, L) < \delta$ entonces $L \subset A$.

Consideremos ahora un arco ordenado $\beta : I \to C(B)$ que empiece en K y termine en B. Como β es continua podemos hallar $t > 0$ tal que $H(K, \beta(t)) < \delta$, y de acuerdo a la elección de δ se sigue que $\beta(t) \subset A$. De aquí que $\beta(t)$ es un subcontinuo de $A \cap B$ que contiene propiamente a $K = \beta(0)$, lo cual contradice la elección de K.

Por tanto $K \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

De manera análoga se puede probar que $K \cap Fr(B) \neq \emptyset$ y concluimos la prueba del lema.

□

Finalmente presentamos un lema un tanto técnico, pero que nos será de gran utilidad.

Lema 3.4.3 *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen dos familias $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ y $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ en 2^X tales que $K_1, K_2, \ldots, K_n$ son ajenos dos a dos y $K_i \subset C_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada i tomamos un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(X)$ de K_i a C_i. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|r|, |s| \leq \delta$ y $j \neq i$, se tiene que $\alpha_i(r) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$.*

Demostración:
Sea

$$\varepsilon = \min\{d(x, y) : x \in K_i, \ y \in K_j \ \text{ y } \ j \neq i\}.$$

Es claro que si $i \neq j$, entonces

$$N(\tfrac{\varepsilon}{2}, K_i) \cap N(\tfrac{\varepsilon}{2}, K_j) = \emptyset.$$

Gracias a la continuidad de α_i, existe $\delta_i > 0$ tal que si $|s| \leq \delta_i$, entonces

$$H(\alpha_i(0), \alpha_i(s)) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Si $|s| \leq \delta$, entonces $H(K_i, \alpha_i(s)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así pues, si $|r|, |s| \leq \delta$ y $j \neq i$, entonces

$$\alpha_i(r) \cap \alpha_j(s) \subset N(\tfrac{\varepsilon}{2}, K_i) \cap N(\tfrac{\varepsilon}{2}, K_j) = \emptyset.$$

De manera que δ satisface las condiciones requeridas.

□

Capítulo 4

*Sobre los continuos Irreducibles

Más adelante necesitaremos utilizar teoría sobre los continuos irreducibles, así que dedicaremos esta sección a desarrollarla y a recordar brevemente lo que ya está hecho, a fin de usarlo posteriormente. En su libro [Kur68], K. Kuratowski expone varios resultados sobre continuos irreducibles, algunos de los cuales nos serán de gran utilidad.

4.1 Irreducibilidad con respecto a dos puntos

Definición 4.1.1 Para un continuo X, irreducible entre dos puntos a y b, definimos la familia

$$\mathbb{D}_{(X,a)} = \{A \in C(X) : a \in A \text{ y } A = \overline{int_X(A)}\} \tag{4.1}$$

En toda esta sección asumiremos que X es un continuo irreducible entre los puntos a y b, y veremos algunas de las propiedades de X relacionadas con la familia $\mathbb{D}_{(X,a)}$.

Observación 4.1.2 Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Como $int(A) \subset A$ entonces $\overline{int(A)} \subset A$.

Propiedad 4.1.3 *Sea X un continuo irreducible entre a y b. Claramente $X \in \mathbb{D}_{(X,a)}$, así que $\mathbb{D}_{(X,a)} \neq \emptyset$.*

Propiedad 4.1.4 *[Kur68, §48, II, Teorema 3] Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si $A \in C(X)$ y $a \in A$, entonces $X \setminus A$ es conexo.*

Propiedad 4.1.5 *[Kur68, §48, III, Teorema 1] Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si $A \in \mathbb{D}_{(X,a)}$, entonces A es irreducible entre a y z para cada $z \in Fr(A)$.*

En particular, para dos elementos A y B de $C(X)$ tales que $a \in A \subsetneq B$ y $B \in \mathbb{D}_{(X,a)}$ se tiene que $A \subset int(B)$.

Propiedad 4.1.6 *Sea X un continuo irreducible entre a y b. Supongamos que $A, B \in C(X)$ son tales que $a \in A \subsetneq B$ y $B \in \mathbb{D}_{(X,a)}$, entonces $\overline{X \setminus B} \subsetneq \overline{X \setminus A}$.*

Demostración:
Como $A \subset B$ se tiene que $X \setminus B \subset X \setminus A$, así que

$$\overline{X \setminus B} \subset \overline{X \setminus A}. \tag{4.2}$$

Ahora bien, gracias a la Propiedad 4.1.5 se tiene que $A \subset int(B)$. En particular

$$Fr(A) \cap Fr(B) = \emptyset,$$

así que

$$\emptyset \neq Fr(A) \subset \overline{X \setminus A} \setminus \overline{X \setminus B}.$$

De acuerdo a esto y a (4.2) podemos concluir que $\overline{X \setminus B} \subsetneq \overline{X \setminus A}$ y terminamos la prueba de la propiedad.

□

Propiedad 4.1.7 *Sea X un continuo irreducible entre a y b; consideremos $A \in C(X)$ y $B \in \mathbb{D}_{(X,a)}$. Si $a \in A \subset B$, entonces $B \setminus A$ es conexo.*

Demostración:
En la Propiedad 4.1.4 vimos que el resultado es cierto para $B = X$. Supongamos ahora que $B \subsetneq X$.

Tomemos $z \in Fr(B)$. Por la Propiedad 4.1.5, B es irreducible entre a y z. Así pues, estamos encondiciones de aplicar la Propiedad 4.1.4 al subcontinuo A del continuo irreducible B para obtener que $B \setminus A$ es conexo.

□

Propiedad 4.1.8 *Sea X un continuo irreducible entre a y b y sea $A \in \mathbb{D}_{(X,a)}$. Entonces $int(A) \neq \emptyset$.*

Demostración:
Supongamos que $int(A) = \emptyset$, entonces $\overline{int(A)} = \emptyset$. Como $A \in \mathbb{D}_{(X,a)}$ obtenemos que $A = \overline{int(A)} = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $a \in A$. Por tanto $int(A) \neq \emptyset$.

□

Propiedad 4.1.9 *[Kur68, §48, III, Teorema 2] Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si A y B son dos elementos distintos de $\mathbb{D}_{(X,a)}$, entonces $A \subset int(B)$ o $B \subset int(A)$.*

Propiedad 4.1.10 *[Kur68, §48, II, Teorema 5] Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si $A \in C(X)$ y $a \in A$, entonces $int(A)$ es conexo.*

Propiedad 4.1.11 *Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si $A \in C(X)$ es tal que $int(A) \neq \emptyset$ y $a \in A$, entonces $a \in int(A)$.*

Demostración:
Supondremos que $A \subsetneq X$. Notemos que

$$int(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

Ahora bien, de acuerdo a la irreducibilidad de X y a que estamos considerando $A \subsetneq X$ se sigue que $b \in X \setminus A$. Además, por la Propiedad 4.1.4 tenemos que $X \setminus A$ es conexo, de modo que $\overline{X \setminus A} \in C(X)$ y

$$b \in \overline{X \setminus A} \subset X \setminus int(A) \subsetneq X.$$

Usando una vez más la irreducibilidad de X concluimos que

$$a \in X \setminus \overline{X \setminus A} = int(A).$$

□

Propiedad 4.1.12 *Sean X un continuo (no necesariamente irreducible) y $K \in C(X)$ tales que $K = \overline{U}$ para algún subconjunto abierto U de X. Entonces $K = \overline{int(K)}$.*

Demostración:
De acuerdo a la Observación 4.1.2 se tiene que $\overline{int(K)} \subset K$. Ahora bien, claramente

$$K = \overline{U} = \overline{int(U)} \subset \overline{int(\overline{U})} = \overline{int(K)}.$$

Por tanto $K = \overline{int(K)}$.

□

Propiedad 4.1.13 *Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si $A \in C(X)$ es tal que $int(A) \neq \emptyset$, $a \in A$ y $A' = \overline{int(A)}$, entonces $A' \in \mathbb{D}_{(X,a)}$.*

Demostración:
Gracias a la Propiedad 4.1.11 tenemos que $a \in int(A)$. Además, de acuerdo a la Propiedad 4.1.10 tenemos que $int(A)$ es conexo, de modo que

$$\overline{int(A)} \in C(X). \tag{4.3}$$

De acuerdo a esto y a la Propiedad 4.1.12 se obtiene que $A' \in \mathbb{D}_{(X,a)}$ y concluimos la prueba de la propiedad.

□

Propiedad 4.1.14 *Sea X un continuo irreducible entre a y b y sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{D}_{(X,a)}$. Entonces*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n} = \overline{int\Big(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}\Big)}.$$

Demostración:
Usando la Observación 4.1.2 se tiene que

$$\overline{int\Big(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}\Big)} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}. \tag{4.4}$$

Ahora bien, por hipótesis

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{int(D_n)} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} int(D_n)} \\ &\subset \overline{int\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big)} \subset \overline{int\Big(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}\Big)} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n} \subset \overline{int\Big(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}\Big)}.$$

De lo anterior y de (4.4) concluimos que

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n} = \overline{int\Big(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}\Big)}.$$

□

Propiedad 4.1.15 *Sean X un continuo irreducible entre a y b, $A \in C(X)$ tal que $a \in A$ y $\alpha : I \to C(A, X)$ un arco ordenado de A a X.*

Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ es una sucesión creciente tal que $t_n \to t_0$ y $\alpha(t_n) \in \mathbb{D}_{(X,a)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha(t_0) \in \mathbb{D}_{(X,a)}$.

Demostración:
Como la sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente tenemos que la sucesión $\{\alpha(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ también lo es, de manera que

$$\lim \alpha(t_n) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha(t_n)}$$

y por continuidad de sigue que

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha(t_n)} = \alpha(t_0).$$

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\alpha(t_n) \in \mathbb{D}_{(X,a)}$, así pues podemos aplicar la Propiedad 4.1.14 a la sucesión $\{\alpha(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ para obtener que

$$\alpha(t_0) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha(t_n)} = \overline{int\Big(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha(t_n)}\Big)} = \overline{int(\alpha(t_0))}.$$

De aquí deducimos que $\alpha(t_0) \in \mathbb{D}_{(X,a)}$ y concluimos la prueba de la propiedad.

□

Propiedad 4.1.16 *[Kur68, §48, VII, Teorema 2] Sea X un continuo irreducible entre a y b. Supongamos que existen $A, B \in \mathbb{D}_{(X,a)}$ tales que $A \subsetneq B$. Consideremos la familia*

$$\mathcal{D} = \{D \in C(X) : A \subsetneq D \subsetneq B\}.$$

Si $\mathcal{D} \cap \mathbb{D}_{(X,a)} = \emptyset$, entonces $\overline{B \setminus A}$ es un subcontinuo indescomponible de X.

4.2 Irreducibilidad con respecto a dos subconjuntos

Introducimos ahora la noción de irreducibilidad entre dos subconjuntos de un continuo X.

Definición 4.2.1 Sean X un continuo y $A, B \subset X$. Decimos que X es *irreducible entre A y B* si $A \neq \emptyset \neq B$ y se satisface la siguiente condición:

(*) X es irreducible entre los puntos a y b si y sólo si $a \in A$ y $b \in B$.

Lema 4.2.2 *Sea Y un continuo irreducible entre los subcontinuos A' y B'. Sea $A \in C(Y)$ tal que $A' \cap A \neq \emptyset$ y $A \setminus A' \neq \emptyset$, entonces $A' \subset int(A)$.*

En particular, A' es un subcontinuo terminal de Y.

Demostración:
Por hipótesis podemos tomar $w \in A \setminus A'$. Sea $b \in B'$. Como Y es irreducible entre A' y B', existe un subcontinuo $B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tal que $w, b \in B$. En particular se sigue que $B \cap A' = \emptyset$. Ahora bien, $w \in A \cap B$ y por hipótesis $A' \cap A \neq \emptyset$, de manera que $A \cup B$ es un subcontinuo de Y que intersecta a A' y a B'; así pues gracias a la irreducibilidad de Y se sigue que $A \cup B = Y$.

De acuerdo a lo anterior obtenemos que $A' \subset Y \setminus B \subset A$ y en consecuencia

$$A' \subset int(A).$$

En particular obtenemos que A' es un subcontinuo terminal de Y.

Concluimos así la prueba del lema.

□

Lema 4.2.3 *Sean X un continuo, $Y \in C(X)$ y $A', B' \in C(Y)$. Si Y es irreducible entre A' y B', entonces $int_Y(A') = \emptyset$ e $int_Y(B') = \emptyset$.*

Demostración:
Sean $b \in B'$ y C la componente de $Y \setminus A'$ que contiene a b. Por el Teorema de los Golpes en la Frontera (Teorema 2.4.1),

$$\emptyset \neq \overline{C} \cap Fr_Y(Y \setminus A') \subset \overline{C} \cap A'.$$

De manera que $\overline{C} \cap A' \neq \emptyset$ y $b \in \overline{C} \cap B'$.

Por la irreducibilidad de Y, entre A' y B', obtenemos que $\overline{C} = Y$. Entonces

$$int_Y(A') = Y \setminus (\overline{Y \setminus A'}) \subset Y \setminus \overline{C} = \emptyset.$$

Así que $int_Y(A') = \emptyset$. Similarmente puede probarse que $int_Y(B') = \emptyset$. Esto termina la prueba del lema.

□

Capítulo 5

Los Hiperespacios $C(p, X)$

5.1 Introducción

Definición 5.1.1 Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $D \in C(A)$. Definimos un nuevo hiperespacio

$$C(D, A) = \{B \in C(A) : D \subset B\}$$

A lo largo de este trabajo utilizaremos mucho los hiperespacios $C(\{p\}, A)$, así que para simplificar los denotaremos simplemente como $C(p, A)$.

Una pregunta natural es la siguiente: en el Teorema 3.1.3 vimos que si X es un continuo, entonces los hiperespacios $C(X)$ y 2^X también lo son. Así pues, si $A \in C(X)$ y $D \in C(A)$, ¿será cierto que $C(D, A)$ también es un continuo? El siguiente lema nos da la respuesta.

Lema 5.1.2 *Sean X un continuo $A \in C(X)$ y $D \in C(A)$. Entonces se tiene que $C(D, A) \in C(C(X))$. En particular, $C(D, A)$ es un continuo*

Demostración:
En el Teorema 3.1.3 vimos que $C(X)$ es un continuo. Aplicando el mismo teorema a $C(X)$ obtenemos que $C(C(X))$ también lo es, así que tiene sentido preguntarse si $C(D, A) \in C(C(X))$.

Ahora bien, por definición tenemos que $C(D, A) \subset C(X)$. Empezaremos viendo que $C(D, A)$ es cerrado en $C(X)$.

Así pues, tomemos una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(D, A)$ que converge a $B \in C(X)$. En este caso tenemos que $D \subset B_n \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde es fácil ver que entonces $D \subset B \subset A$. Por tanto, $B \in C(D, A)$.

En consecuencia, $C(D, A)$ es cerrado en $C(X)$. Veamos ahora que $C(D, A)$ es conexo. De hecho, veremos que $C(D, A)$ es conexo por trayectorias

Sea $B \in C(D, A)$, entonces $D \subset B$. Así pues, podemos tomar un arco ordenado que empiece en D y termine en B, en particular, dicho arco ordenado es una trayectoria entre los elementos D y B de $C(D, A)$. Como esto pasa para cualquier $B \in C(D, A)$, podemos concluir que $C(D, A)$ es conexo por trayectorias.

Por tanto, $C(D, A) \in C(C(X))$. En particular, $C(D, A)$ es un continuo. □

No es mucho lo que se ha estudiado sobre los hiperespacios $C(D, A)$, sin embargo, en la literatura pueden encontrarse resultados muy interesantes y útiles. Uno de los más importantes tiene que ver con el concepto de AR, que veremos a continuación.

Definición 5.1.3 Un subconjunto A de un espacio topológico X es un *retracto* de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Dicha función r se llama *retracción*.

Más adelante nos convendrá considerar varios tipos de retracciones:

Definición 5.1.4 Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $r : X \to A$ una retracción. Decimos que r es una *retracción por deformación* si existe una homotopía $H : X \times I \to X$ entre r y la función identidad de X. Más aún, decimos que r es una *retracción fuerte por deformación* si $H(a, t) = a$ para cada $t \in I$.

Definición 5.1.5 Un espacio métrico X es un *retracto absoluto* (abreviado AR) si cada vez que X es homeomorfo a un subespacio cerrado W, de un espacio métrico Y, se tiene que W es un retracto de Y.

Con respecto a los retractos absolutos se ha desarrollado una teoría muy amplia. Nosotros usaremos algunos resultados particulares, como el siguiente.

Teorema 5.1.6 *[Kur68, §, III, Teoremas 1 y 5] Sean X es un espacio topológico y A, B dos subconjuntos cerrados de X. Si A,B y $A \cap B$ son retractos obsolutos, entonces $A \cup B$ también es un retracto absoluto.*

Presentaremos ahora algunos resultados que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de la teoría sobre los hiperespacios $C(D, A)$.

Teorema 5.1.7 *Sean A un continuo y $D \in C(A)$. Entonces $C(D, A)$ es un AR.*

La prueba de este teorema puede hallarse en [Ebe78, Teorema 2].

Corolario 5.1.8 *Sean A un continuo y $D \in C(A)$. Entonces $C(D, A)$ es localmente conexo.*

Demostración:
Se sabe que cualquier continuo puede ser encajado en el cubo de Hilbert (véase [Nad92, p. 4]), en particular, en virtud del Lema 5.1.2 tenemos que $C(D, A)$ es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert. Así pues, de acuerdo al teorema anterior podemos ver a $C(D, A)$ como la imagen continua del cubo de Hilbert, de donde se desprende que $C(D, A)$ es localmente conexo.

$\square$

Por el Teorema 5.1.7 sabemos que los hiperespacios $C(p, X)$ son retractos absolutos, así que cabría preguntarse si el recíproco del teorema es cierto. En otras palabras, nos gustaría saber si cualquier retracto absoluto puede verse como un hiperespacio $C(p, X)$ para algún continuo X y $p \in X$. A fin de dar respuesta a esta pregunta introducimos un lema.

Lema 5.1.9 *Si X es un continuo, $p \in X$ y $C(p, X)$ no es un arco, entonces $C(p, X)$ contiene una 2-celda.*

Demostración:
Como $C(p, X)$ no es un arco, podemos elegir dos arcos ordenados $\alpha_1 : I \to C(X)$ y $\alpha_2 : I \to C(X)$ de p a X tales que $\alpha_1(I) \neq \alpha_2(I)$. Así pues, de acuerdo al Lema 3.4.1 existen $s, t \in I$ tales que

$$\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset.$$

Sean $A = \alpha_1(s)$ y $B = \alpha_2(t)$. Analizaremos dos casos.

Caso 1 $A \cap B$ es conexo.

Sean $\gamma : I \to C(A)$ y $\zeta : I \to C(B)$ arcos ordenados de $A \cap B$ a A y a B, respectivamente. Definimos $h : I \times I \to C(p, X)$ como

$$h(x,y) = \gamma(x) \cup \zeta(y).$$

Notemos que $p \in \gamma(x) \cap \zeta(y)$, así que $h(x,y) \in C(p,X)$. Además, como consecuencia del Lema 3.2.5 obtenemos que h es continua.

Veremos que h es inyectiva. Sean $(x,y),(x',y') \in I \times I$ y supongamos que $x < x'$. Como γ es estrictamente creciente obtenemos que

$$\emptyset \neq \gamma(x') \setminus \gamma(x) = \gamma(x') \setminus \big(\gamma(x) \cup \zeta(y)\big) \subset h(x',y') \setminus h(x,y).$$

De manera similar, si $y \neq y'$ puede probarse que $h(x,y) \neq h(x',y')$. Por tanto, h es inyectiva

Hemos visto que h es inyectiva y continua. Además, el dominio de h es compacto. Así pues h es un homeomorfismo en su imagen. De esta manera deducimos que $C(p,X)$ contiene una 2-celda y concluimos el análisis de este caso.

Caso 2 $A \cap B$ no es conexo.

Supongamos que $A \cap B$ es la unión ajena de dos subconjuntos cerrados y no vacíos P y Q, entonces $P, Q \in 2^X$

Consideremos dos arcos ordenados $\gamma : I \to C(B)$ y $\zeta : I \to C(B)$ de P y Q a B, respectivamente. De acuerdo al Lema 3.4.3 existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [0, \delta]$, entonces

$$\gamma(x) \cap \zeta(y) = \emptyset. \tag{5.1}$$

Así pues, definimos $h : [0,\delta] \times [0,\delta] \to C(p,X)$ como

$$h(x,y) = A \cup \gamma(x) \cup \zeta(y).$$

Observemos que $P \subset A \cap \gamma(x)$ para cada $x \in I$ y $Q \subset A \cap \zeta(y)$ para cada $y \in I$. De acuerdo a esto, y al hecho de que $A \in C(p,X)$, podemos deducir que $h(x,y) \in C(p,X)$ para cada $x, y \in I$. De aquí que h está bien definida. Por otra parte, como consecuencia del Corolario 3.2.6 se tiene que h es continua.

Ahora bien, supongamos que $(x, y), (x', y') \in I \times I$ son tales que $x < x'$. Gracias a la monotonía de γ y a (5 1) se sigue que

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \gamma(x') \setminus \gamma(x) &= \gamma(x') \setminus \big(\gamma(x) \cup A\big) \\ &= \gamma(x') \setminus \big(\gamma(x) \cup A \cup \zeta(y)\big) \subset h(x', y') \setminus h(x, y). \end{aligned}$$

Similarmente, si suponemos que $y \neq y'$ obtenemos que $h(x, y) \neq h(x', y')$. Por tanto, h es inyectiva.

Finalmente, como h es inyectiva y continua, y el dominio de h es compacto, deducimos que h es un homeomorfismo en su imagen. Por tanto, $C(p, X)$ contiene una 2-celda y concluimos el análisis de este caso

Terminamos la prueba del lema.

□

El lema anterior sugiere que no cualquier retracto absoluto se puede ver como un hiperespacio $C(p, X)$ y, en efecto, éste es el caso.

Ejemplo 5.1.10 *Un ejemplo de un AR que no es de la forma $C(p, X)$ para ningún continuo X y $p \in X$.*

Sea Y un triodo simple, entonces podemos ver a Y como la unión de dos arcos cuya intersección es un punto. Así pues, gracias al Teorema 5.1.6 se tiene que Y es un AR.

Si Y fuera de la forma $C(p, X)$ para algún continuo X y $p \in X$, por el Lema 5.1.9 tendríamos que Y contiene una 2-celda, lo cual es absurdo. Por tanto, Y no es de la forma $C(p, X)$ para ningún continuo X y $p \in X$. Notemos que, en realidad, este mismo argumento nos sirve para ver que:

Corolario 5.1.11 *Si un continuo X y $p \in X$ son tales que $C(p, X)$ es unidimensional, entonces $C(p, X)$ es un arco.*

A continuación introducimos dos definiciones importantes

Definición 5.1.12 Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Definimos la *función inducida* $C(f) : C(X) \to C(Y)$ dada por $C(f)(A) = f(A)$. Es decir, $C(f)(A)$ es la imagen de A bajo la función f.

En el artículo [Hos97] se presentan varias propiedades generales de las funciones inducidas

Definición 5.1.13 Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es *confluente* si para cada $B \in C(Y)$ y cada componente A de $f^{-1}(B)$ se tiene que $f(A) = B$.

Lema 5.1.14 *Sean X y Y dos continuos. Entonces una función continua $f : X \to Y$ es confluente si y sólo si para cada $p \in X$ se tiene que*

$$C(f)\big(C(p, X)\big) = C(f(p), Y).$$

Demostración:
Sean $p \in X$ y $A \in C(p, X)$. Como f es continua, es fácil ver que

$$f(A) \in C(f(p), Y).$$

De acuerdo a esto, obtenemos que $f\big(C(p, X)\big) \subset C(f(p), Y)$.

Ahora bien, supongamos que f es confluente y tomemos $B \in C(f(p), Y)$. Sea A la componente de $f^{-1}(B)$ que contiene a p. Entonces $A \in C(p, X)$ y $f(A) = B$. De aquí que $C(f(p), Y) \subset f\big(C(p, X)\big)$. Por tanto

$$C(f)\big(C(p, X)\big) = C(f(p), Y).$$

Supongamos ahora que f no es confluente, es decir, existen $B \in C(Y)$ y una componente A de $f^{-1}(B)$ tales que $f(A) \subsetneq B$. Sea $p \in A$, veremos que

$$C(f)\big(C(p, X)\big) \subset C(f(p), Y) \setminus \{B\}.$$

Supongamos que existe $D \in C(p, X)$ tal que $f(D) = B$. En particular $A \cup D \in C(p, X)$, lo cual quiere decir que $A \cup D$ es un subconjunto conexo contenido en la componente A de $f^{-1}(B)$ y es tal que $f(A \cup D) = B$, lo cual nos lleva a una contradicción con la elección de A. En consecuencia, para cada $D \in C(p, X)$ se tiene que $f(D) \neq B$ y podemos concluir que

$$C(f)\big(C(p, X)\big) \subsetneq C(f(p), Y)$$

Terminamos la prueba del lema.

□

Por otra parte, una pregunta que se antoja natural es si los hiperespacios $C(p, X)$ son invariantes topológicos en algún sentido. Por ejemplo, si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y $p \in X$, entonces ¿$C(p, X)$ será homeomorfo a $C\big(h(p), Y\big)$? El siguiente lema responde esta pregunta de manera afirmativa.

Lema 5.1.15 *Sean X y Y continuos y $h : X \to Y$ un homeomorfismo Entonces $C(p, X) \approx C(h(p), Y)$.*

Demostración:
Como un homeomorfismo es una función confluente, podemos aplicar el Lema 5.1.14 para obtener que

$$C(h(p), Y) = C(h)(C(p, X)).$$

Sin embargo, dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $C(h)$ también es un homeomorfismo (véase [Hos97, p. 239]). La conclusión del lema se desprende fácilmente.

□

5.2 Funciones de Whitney para $C(p, X)$

En esta sección estudiaremos propiedades de las funciones de Whitney definidas en los hiperespacios $C(p, X)$.

Sean X un continuo y $p \in X$. Consideremos una función de Whitney μ' para $C(X)$ y definamos $\mu : C(p, X) \to I$ como $\mu = \mu'|_{C(p,X)}$. Es fácil ver que μ satisface las condiciones i) y ii) de la Definición 3.3.3, así que μ es una función de Whitney para $C(p, X)$.

Las funciones de Whitney para $C(X)$ han sido muy estudiadas, y tienen muchas propiedades interesantes. Nuestro propósito en este momento es desarrollar un par de propiedades de las funciones de Whitney para los hiperespacios $C(p, X)$, las cuales por cierto, resultan ser muy similares a aquéllas para $C(X)$, y nos serán muy útiles más adelante.

Observación 5.2.1 Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $D \in C(A)$. Si $\alpha : I \to C(X)$ es un arco ordenado que empieza en D y termina en A, entonces es fácil ver que $\alpha(s) \in C(D, A)$ para cada $s \in I$. De esta manera hemos visto que α en realidad es un arco ordenado en $C(D, A)$.

Definición 5.2.2 Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Un *nivel de Whitney en $C(p, X)$* es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$ para alguna $t \in I$.

Con respecto a la estructura de los niveles de Whitney en $C(p, X)$, en el libro [IN99, Teorema 66.4] se prueba el siguiente resultado.

Lema 5.2.3 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si μ es una función de Whitney para $C(p, X)$, entonces $\mu^{-1}(r)$ es un AR, para cada $r \in I$. En particular, $\mu^{-1}(t)$ es un continuo para cada $r \in I$.*

5.3 Propiedades generales

El objetivo de esta sección es desarrollar herramienta más general sobre el comportamiento de los hiperespacios $C(p, X)$.

Un concepto que usaremos una y otra vez a lo largo de este trabajo es el de *punto de corte* de un espacio X. Más tarde veremos que analizar los puntos de corte de los hiperespacios $C(p, X)$ nos dará mucha información sobre ellos.

Definición 5.3.1 Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Decimos que p es un *punto de corte* de X si $X \setminus \{p\}$ no es conexo.

Lema 5.3.2 *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces ni $\{p\}$ ni X son puntos de corte de $C(p, X)$.*

Demostración:
Veremos que $C(p, X) \setminus \{X\}$ es conexo.

Sean $K_1, K_2 \in C(p, X) \setminus \{X\}$

Para cada $i \in \{1, 2\}$ se tiene que $p \in K_i$, así que podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(X)$ que empiece en $\{p\}$ y termine en K_i.

Como los arcos ordenados son funciones continuas, y $\{p\}$ está en la imagen de ambos arcos ordenados, se sigue que la unión de las imágenes de α_1 y α_2 es un subconjunto conexo de $C(X) \setminus \{X\}$ que contiene a K_1 y a K_2.

Por tanto $C(p, X) \setminus \{X\}$ es conexo y en consecuencia X no es un punto de corte de $C(p, X)$.

De manera similar (tomando ahora arcos ordenados de K_i a X) se puede probar que $\{p\}$ no es punto de corte de $C(p, X)$.

Concluimos la prueba del lema.

$\square$

Introducimos ahora un nuevo concepto.

Definición 5.3.3 Sean X un continuo, $p \in X$ y $A \in C(p, X)$. Decimos que A es *terminal en* p si cada vez que B está en $C(p, X)$ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Este último concepto es particularmente importante en el estudio de la estructura de los hiperespacios $C(p, X)$. Un ejemplo de esto se muestra en el siguiente lema.

Lema 5.3.4 *Sean X un continuo y $p \in X$. Supongamos que $A \in C(p, X)$ es tal que $\{p\} \subsetneq A \subsetneq X$, entonces A es terminal en p si y sólo si A es punto de corte de $C(p, X)$.*

Demostración:
Supongamos que A es terminal en p y consideremos los siguientes subespacios de $C(p, X)$:

$$\mathcal{A} = \{B \in C(p, X) : B \subset A\}$$
$$\mathcal{B} = \{B \in C(p, X) : A \subset B\}$$

Es fácil ver que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados, y que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A\}$. Además, como $\{p\} \subsetneq A \subsetneq X$ se tiene que

$$\mathcal{A} \setminus \{A\} \neq \emptyset \neq \mathcal{B} \setminus \{A\}.$$

Por otra parte, como A es terminal en p se sigue que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = C(p, X)$.

Por lo tanto A es de corte en $C(p, X)$.

Supongamos ahora que A no es terminal en p. Definimos:

$$\mathcal{A} = \{B \in C(p, X) : A \not\subset B\}$$

Veremos en dos pasos que A no es punto de corte en $C(p, X)$.

Paso 1 $\mathcal{A}$ es conexo por trayectorias.

Sea $B \in \mathcal{A}$. Claramente $\{p\} \in \mathcal{A}$, así que basta ver que existe una trayectoria en $\mathcal{A}$ que conecta a $\{p\}$ con B.

Sea $\alpha : I \to C(p, X)$ un arco ordenado de $\{p\}$ a B. Por definición de arco ordenado, sabemos que cada dos elementos de la imagen de α son comparables y están contenidos en B. Como $A \not\subset B$, A no puede estar contenido en ningún elemento de la imagen de α. Así pues hemos obtenido una trayectoria conectando a $\{p\}$ y a B en $\mathcal{A}$. Por tanto $\mathcal{A}$ es conexo por trayectorias.

Paso 2 $C(p,X)\setminus\{A\}$ es conexo por trayectorias.

Basta ver que dado un elemento $B \in C(p,X)\setminus \mathcal{A}$, con $B \neq A$, existe una trayectoria en $C(p,X)\setminus\{A\}$ que une a B con un elemento de $\mathcal{A}$ (por el paso anterior $\mathcal{A}$ es conexo por trayectorias).

Sea $B \in C(p,X)\setminus\{\mathcal{A}\cup\{A\}\}$, entonces $A \subsetneq B$. Por otra parte, como A no es terminal en p, existe un subcontinuo $K \in C(p,X)$ tal que $K\setminus A \neq \emptyset$ y $A\setminus K \neq \emptyset$. En particular $K \in \mathcal{A}$.

Por construcción tenemos que $K \in C(p,X)\setminus\{A\}$ y veremos que existe una trayectoria en $C(p,X)\setminus\{A\}$ uniendo a K y a B.

Sean $\alpha : I \to C(p,X)$ y $\beta : I \to C(p,X)$ arcos ordenados de K a X y de B a X, respectivamente.

Por definición de arco ordenado tenemos que K está contenido en cada elemento de la imagen de α, pero como $K\setminus A \neq \emptyset$ se sigue que A no está en la imagen de α. Utilizando el mismo argumento (con B en el lugar de K), podemos concluir que A no está en la imagen de β. De aquí que $\alpha\cup\beta$ es una trayectoria en $C(p,X)\setminus\{A\}$ que une a B y a K.

Del Paso 2, concluimos que $C(p,X)\setminus\{A\}$ es conexo, así que A no es punto de corte de $C(p,X)$.

□

Concentrémonos ahora en el caso particular en que el hiperespacio $C(A,X)$ es un arco. Como veremos a continuación, este caso tiene propiedades interesantes.

Observación 5.3.5 Si X es un continuo con un subcontinuo A tal que $C(A,X)$ es un arco, entonces existe un único arco ordenado $\alpha : I \to C(A,X)$ (no como función, sino como arco), que empieza en A, termina en X y $\alpha(I) = C(A,X)$ (véase la Definición 3.3.2). De acuerdo con la monotonía de los arcos ordenados, en particular se tiene que cualesquiera dos elementos de $C(A,X)$ son comparables.

El recíproco de la observación anterior también es cierto:

Lema 5.3.6 *Sea X un continuo. Si $A' \in C(X)$ es tal que para cualesquiera $A, B \in C(A',X)$ se tiene que A y B son comparables, entonces $C(A',X)$ es un arco.*

Demostración:
Sea $\alpha_1 : I \to C(A', X)$ un arco ordenado de A' a X. Supongamos que $C(A', X)$ no es un arco, entonces existe $K \in C(A', X) \setminus \alpha_1(I)$. Tomemos ahora un arco ordenado α_2 de A' a X, que contenga a K (esto se puede hacer tomando un arco ordenado de A' a K y luego tomando otro de K a X). Así pues, en estas condiciones tenemos dos arcos ordenados $\alpha_1 : I \to C(A', X)$ y $\alpha_2 : I \to C(A', X)$, de A' a X, tales que $\alpha_1(I) \neq \alpha_2(I)$. De acuerdo a esto y al Lema 3.4.1 existen $s, t \in I$ tales que

$$\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset.$$

Así pues, hemos obtenido dos elementos de $C(A', X)$, $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(t)$, que no son comparables. De esta manera concluimos la prueba del lema.

$\square$

Lema 5.3.7 *Sean X un continuo y $A' \in C(X)$ tales que $C(A', X)$ es un arco. Sean $A, B \in C(A', X)$ tales que $B \setminus A \neq \emptyset$, entonces $B \setminus A$ es conexo.*

Demostración:
De acuerdo a la Observación 5.3.5 tenemos que A y B son comparables, y como $B \setminus A \neq \emptyset$, entonces $A \subsetneq B$.

Supongamos que $B \setminus A$ no es conexo, entonces podemos considerar dos componentes K y K' de $B \setminus A$. En el Lema 2.4.3 vimos que en este caso

$$A \cup K \ \text{ y } \ A \cup K' \ \text{ son conexos.}$$

Por otra parte, por construcción

$$\begin{aligned} (K \setminus K') \setminus A &= K \setminus A \neq \emptyset \ \text{ y} \\ (K' \setminus K) \setminus A &= K' \setminus A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

En este momento estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.4.4, de acuerdo al cual podemos concluir que $A \cup K$ y $A \cup K'$ son dos elementos de $C(A', X)$ no comparables, lo cual contradice la Observación 5.3.5.

Por tanto $B \setminus A$ es conexo y concluimos la prueba del lema.

$\square$

Lema 5.3.8 *Sean X un continuo y $A' \in C(X)$ tales que $C(A', X)$ es un arco. Si $A \in C(A', X) \setminus \{X\}$, entonces $Fr(A) \in C(X)$.*

Demostración:
Claramente la frontera de A es cerrada en X, así que basta ver que es conexa.

Supongamos que H_1 y H_2 son dos componentes distintas de $Fr(A)$. Como $Fr(A) \subset \overline{X \setminus A}$, y por el Lema 5.3.7 $\overline{X \setminus A}$ es conexo, para cada $i \in \{1, 2\}$ podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(X)$ de H_i a $\overline{X \setminus A}$. En particular para cada $s \in (0, 1]$ se tiene que

$$A \cup \alpha_i(s) \in C(X) \qquad \text{y} \qquad \alpha_i(s) \setminus A \neq \emptyset. \tag{5.2}$$

De acuerdo al Lema 3.4.3 podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\alpha_1(\delta) \cap \alpha_2(\delta) = \emptyset.$$

De aquí que

$$\big(\alpha_i(\delta) \setminus \alpha_j(\delta)\big) \setminus A \;=\; \alpha_i(\delta) \setminus A \;\neq\; \emptyset \tag{5.3}$$

cada vez que $\{i, j\} = \{1, 2\}$

Así pues, utilizando (5.2) y (5.3), estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.4.4 para obtener que $A \cup \alpha_1(\delta)$ y $A \cup \alpha_2(\delta)$ son dos elementos no comparables de $C(A', X)$. Sin embargo esta afirmación contradice la Observación 5.3.5 y por tanto $Fr(A)$ es conexo.

De esta manera concluimos que $Fr(A) \in C(X)$ y terminamos así la prueba del lema.

□

Ya vimos algunas de las propiedades de los hiperespacios $C(p, X)$ cuando éstos resultan ser arcos. Como se mencionaba anteriormente, la idea del estudio de estos hiperespacios es determinar qué se puede decir del continuo X cuando conocemos los hiperespacios $C(p, X)$ y al revés, es decir, qué se puede decir de los hiperespacios $C(p, X)$ cuando conocemos a X. El siguiente lema nos da información sobre este último aspecto.

Lema 5.3.9 *Sean X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si p está en el corazón de un n-odo, entonces $C(p, X)$ contiene una n-celda.*

Demostración:
Supongamos que p está en el corazón de un n-odo, es decir, existen dos subcontinuos K y Y de X tales que $Y \setminus K$ tiene el menos n componentes y $p \in K$.

Elegimos n componentes $K_1, \ldots, K_n$ de $Y \setminus K$ y definimos

$$Y_1 = K \cup \big(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\big).$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, usando el Lema 2.4.3, tenemos que $K \cup K_i$ es un subcontinuo de X. Así pues, podemos considerar un arco ordenado $\gamma_i : I \to C(p, X)$ de K a $K \cup K_i$

Sea ahora $\gamma : I^n \to C(p, X)$ dada por:

$$\gamma(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i(t_i).$$

Veremos en tres pasos que γ es un homeomorfismo en su imagen.

Paso 1 γ está bien definida.

Sea $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$. Por construcción tenemos que

$$p \in K \subset \gamma_i(s) \quad \text{para cada } s \in I,$$

por tanto $p \in \gamma(t_1, \ldots, t_n)$.

Por otra parte, para cada $s \in I$ y para toda i sabemos que $\gamma_i(s)$ es un subcontinuo que contiene a p, de manera que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i(t_i) \; = \; \gamma(t_1, \ldots, t_n) \; \in \; C(p, X).$$

Paso 2 γ es continua.

Tomemos una sucesión $\{(t_{1_m}, \ldots, t_{n_m})\}_{m=1}^{\infty} \subset I^n$ tal que

$$(t_{1_m}, \ldots, t_{n_m}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (t_1, \ldots, t_n).$$

Entonces para cada i se tiene que $\lim_{m\to\infty} t_{i_m} = t_i$ y por continuidad de γ_i se sigue que $\gamma_i(t_{i_m}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \gamma_i(t_i)$. De acuerdo a lo anterior, y usando que la unión respeta la convergencia (Corolario 3.2.6), obtenemos que:

$$\gamma(t_{1_m}, \ldots, t_{n_m}) = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i(t_{i_m}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i(t_i) = \gamma(t_1, \ldots, t_n).$$

Así pues, γ es continua.

Paso 3 γ es inyectiva.

Sean $(t_1, \ldots, t_n)$ y $(s_1, \ldots, s_n)$ dos puntos distintos en I^n. Veremos que sus imágenes bajo γ son distintas.

Como los puntos en cuestión son distintos, podemos suponer que $t_i < s_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$. De acuerdo a la monotonía de los arcos ordenados, podemos entonces tomar un punto x de manera que:

$$x \in \gamma_i(s_i) \setminus \gamma_i(t_i) \subset \gamma_i(s_i) \setminus K. \tag{5.4}$$

Ahora bien, como

$$\gamma_i(s_i) \setminus K \subset K_i \subset Y_1 \setminus \bigcup_{j\neq i} K_j,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_i(s_i) \setminus K &= (\gamma_i(s_i) \setminus K) \cap (Y_1 \setminus \bigcup_{j\neq i} K_j) \\ &= (\gamma_i(s_i) \setminus K) \cap (\gamma_i(s_i) \setminus \bigcup_{j\neq i} K_j) \\ &= \gamma_i(s_i) \setminus (K \cup \bigcup_{j\neq i} K_j) \\ &\subset \gamma_i(s_i) \setminus \bigcup_{i\neq j} \gamma_j(t_j). \end{aligned} \tag{5.5}$$

De acuerdo a (5.4) y (5.5) deducimos que

$$x \in \gamma_i(s_i) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i(t_i).$$

Por tanto

$$x \in \gamma(s_1, \dots, s_n) \setminus \gamma(t_1, \dots, t_n).$$

De esta manera obtenemos que γ es inyectiva.

Gracias a los pasos anteriores se sigue que γ es un homeomorfismo en su imagen, y como su dominio es una n-celda podemos concluir que $C(p, X)$ contiene una n-celda.

□

De la misma manera que X nos proporciona información sobre los hiperespacios $C(p, X)$, éstos a su vez también nos dicen algo sobre la estructura de X. Veamos.

Teorema 5.3.10 *Sean X un continuo y $N \in \mathbb{N}$ tales que:*

1. *la dimensión de $C(p, X)$ es menor que N para cada $p \in X$,*
2. *el conjunto $\{p \in X : C(p, X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable.*

Entonces todos los subcontinuos propios y no degenerados de X son descomponibles.

Demostración:
Supongamos que existe $Y \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que Y es indescomponible y no degenerado. Entonces Y tiene una cantidad no numerable de composantes (véase [Nad92, Teorema 11.15]).

Así pues, de acuerdo a la hipótesis 2 podemos elegir N puntos $x_1, \dots, x_N$ en N composantes distintas de Y de tal manera que $C(x_i, X)$ no tiene puntos de corte para ninguna $i \in \{1, \dots, N\}$. Entonces aplicando el Lema 5.3.4 obtenemos que Y no es terminal en x_i para ninguna i, es decir, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ podemos construir un subcontinuo $K_i \in C(x_i, X)$ tal que

$$Y \setminus K_i \neq \emptyset \quad \text{y} \quad K_i \setminus Y \neq \emptyset. \tag{5.6}$$

Para cada i definimos L_i como la componente de $K_i \cap Y$ que contiene a x_i, en particular se tiene que

i) $L_i \subsetneq Y$, ya que $Y \setminus K_i \neq \emptyset$.

ii) L_i está contenida en la composante de x_i para cada i

iii) $L_i \cap L_j = \emptyset$ cada vez que $i \neq j$, ya que x_i y x_j están en distintas composantes de Y.

Ahora bien, para cada i construimos un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(X)$ que empiece en L_i y termine en K_i.

Por el Lema 3.4.3 podemos tomar una $\delta > 0$ tal que si $|s| \leq \delta$, entonces $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$ cada vez que $i \neq j$.

Definimos

$$Z = Y \cup \bigcup_{i=1}^{N} \alpha_i(\delta) \tag{5.7}$$

Veremos en tres pasos que Z es un N-odo.

Paso 1 $Z \in C(X)$.

Sabemos que $Y \in C(X)$ y para cada i se tiene que $\alpha_i(\delta) \in C(X)$. Además $\alpha_i(0) = L_i \subset Y$, de manera que $\alpha_i(\delta) \cap Y \neq \emptyset$.

Por tanto $Z \in C(X)$.

Paso 2 $\alpha_i(\delta) \setminus Y \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

Sea $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Por (5.6) sabemos que $K_i \setminus Y \neq \emptyset$, de manera que $L_i = \alpha_i(0) \subsetneq \alpha_i(\delta)$.

Ahora bien, si $\alpha_i(\delta) \subset Y$ se tiene que $\alpha_i(\delta)$ es un conexo en $K_i \cap Y$ que contiene a la componente L_i de $K_i \cap Y$, de donde se deduce que $\alpha_i(\delta) = L_i = \alpha_i(0)$, lo cual es una contradicción.

Por tanto $\alpha_i(\delta) \setminus Y \neq \emptyset$.

Paso 3 $Z \setminus Y$ tiene al menos N componentes.

De acuerdo a la definición de δ sabemos que $\alpha_i(\delta) \cap \alpha_j(\delta) = \emptyset$ cada vez que $i \neq j$, y en el paso anterior vimos que para cada i se tiene $\alpha_i(\delta) \setminus Y \neq \emptyset$.

Por tanto, de acuerdo a (5.7), se sigue que $Z \setminus Y$ tiene al menos N componentes.

Del paso 3 concluimos que Z es un N-odo con corazón Y Sin embargo por el Lema 5 3.9 obtenemos que entonces $C(p, X)$ contiene una N-celda para cada $p \in Y$, lo cual contradice la hipótesis 1.

Por tanto los subcontinuos propios de X son descomponibles y concluimos la prueba del teorema.

□

5.4 Algunos ejemplos

Después de desarrollar la teoría introductoria, estamos en condiciones de mostrar algunos ejemplos. Así pues, dedicaremos esta sección a construir ejemplos que muestran cómo son los conjuntos $C(p, X)$ para tres casos particulares simples: cuando X es un arco, una curva cerrada simple y cuando X es hereditariamente indescomponible.

Empecemos viendo qué pasa cuando $X = I$.

Lema 5.4.1

$$C(p, I) = \begin{cases} \textit{un arco}, & \textit{si} \quad p \in \{0,1\}, \\ \textit{una 2-celda}, & \textit{si} \quad p \notin \{0,1\}. \end{cases}$$

Demostración:
Sea $p \in I$. Haremos la prueba analizando dos casos.

Caso 1 si $p \in \{0, 1\}$ entonces $C(p, I)$ es un arco.

Supongamos primero que $p = 0$ y consideremos la función

$$g : I \to C(0, I) \qquad \text{dada por} \qquad g(t) = [0, t].$$

Es muy fácil ver que g es una función inyectiva y que está bien definida. Por otra parte, todos los subcontinuos de I que contienen al cero son de la forma $[0, t]$, así que g es suprayectiva.

Finalmente, si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ es una sucesión que converge a $t \in I$, es fácil ver que

$$g(t_n) = [0, t_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} [0, t] = g(t).$$

por tanto g es continua, y como su dominio es compacto, se sigue que g es un homeomorfismo.

De esta manera concluimos que $C(0,I)$ es un arco De manera similar se puede probar que $C(1,I)$ es un arco.

Caso 2 si $p \notin \{0,1\}$ entonces $C(p,I)$ es una 2-celda.

Consideremos una función $g : [0,p] \times [0,1-p] \to C(p,I)$ dada por $g(r,s) = [p-r, p+s]$. Veremos que g es un homeomorfismo.

Es fácil ver que g está bien definida y que si $A \in C(p,I)$ entonces $A = [p-r, p+s]$ para algunas $r \in [0,p]$ y $s \in [0,1-p]$. Por tanto g es suprayectiva.

Consideremos ahora dos elementos distintos de $[0,p] \times [0,1-p]$, digamos (r_1, s_1) y (r_2, s_2). Sin pérdida de generalidad supondremos que $r_1 \neq r_2$ Así pues,

$$g(r_1, s_1) = [p - r_1, p + s_1] \neq [p - r_2, p + s_2] = g(r_2, s_2),$$

de donde se sigue que g es inyectiva.

Por otra parte, tomemos una sucesión $\{(r_n, s_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,p] \times [0,1-p]$ que converge a $(r,s) \in [0,p] \times [0,1-p]$. Entonces no es difícil ver que

$$g(r_n, s_n) = [p - r_n, p + s_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} [p - r, p + s] = g(r,s)$$

En consecuencia, g es continua Notemos, una vez más, que el dominio de g es compacto, de modo que g es un homeomorfismo y podemos concluir que $C(p,I)$ es una 2-celda.

Terminamos la prueba del lema.

□

Como corolario del lema anterior tenemos que para un arco X en general, con extremos a, b, se tiene una situación similar a la de I, es decir:

Corolario 5.4.2 *Si X es un arco con puntos extremos a y b, entonces*

$$C(p,X) = \begin{cases} \textit{un arco}, & \textit{si} \ \ p \in \{a,b\}, \\ \textit{una 2-celda}, & \textit{si} \ \ p \notin \{a,b\}. \end{cases}$$

Demostración:
Esto es una consecuencia inmediata del Lema 5.1.15 y del Lema 5.4.1.

□

Veamos ahora el caso en que $X = S^1$, la circunferencia unitaria en el plano complejo. Para ello usaremos el siguiente teorema famoso:

Teorema 5.4.3 *(De la Transgresión). Sean X, Y, Z espacios topológicos, $p : X \to Y$ una función cociente y $h : X \to Z$ una función continua. Si h es constante en las fibras de p, entonces existe una función continua $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = h$.*

Lema 5.4.4 *$C(p, S^1)$ es una 2-celda para toda $p \in S^1$.*

Demostración:
Dividiremos la prueba en dos casos.

Caso 1 $p = e^0$.

Para $r, s \in I$ definimos

$$A_{r,s} = \{e^{2\pi i t} : t \in [-r, s]\}.$$

Definimos también una función $f : I \times I \to C(p, S^1)$ dada por

$$f(r, s) = A_{r,s}.$$

Dividiremos la prueba en una serie de pasos.

Paso 1 Sean $r, s \in I$. Si $A_{r,s} \subsetneq S^1$, entonces es fácil ver que $A_{r,s}$ es un arco con extremos $e^{-2\pi i r}$ y $e^{2\pi i s}$. En particular $A_{r,s} \in C(p, S^1)$. Por tanto, f está bien definida.

Paso 2 No es difícil ver que si $K \in C(p, S^1)$, entonces $K = A_{r,s}$ para algunas $r, s \in I$. Por tanto, f es suprayectiva.

Paso 3 Veremos que f es continua.
Sea $\{(r_n, s_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset I \times I$ una sucesión que converge a (r, s). En particular tenemos que $r_n \to r$ y $s_n \to s$. De aquí es fácil ver que

$$f(r_n, s_n) = A_{r_n, s_n} \to A_{r,s} = f(r, s).$$

En consecuencia, f es continua.

Paso 4 Sean $r, s \in I$. Veremos que $r + s \geq 1$ si y sólo si $f(r, s) = S^1$.

Supongamos que $r + s \geq 1$, entonces $s \geq 1 - r$, de donde

$$f(r,s) \;=\; A_{r,s} \;\supset\; \left\{e^{2\pi it} : t \in [-r, 1-r]\right\} \;=\; S^1.$$

Por tanto, $f(r,s) = S^1$.

Por otra parte, si $r + s < 1$ entonces podemos tomar un punto $z \in I$ de manera que $s < z < 1 - r$. Veremos que $e^{2\pi iz} \notin f(r,s)$.

Por construcción de z es fácil ver que

$$e^{2\pi iz} \notin A_{0,s}.$$

Además tenemos que $z < 1 - r$, así que

$$e^{2\pi iz} \;\notin\; \left\{e^{2\pi it} : t \in [1-r, 1]\right\} \;=\; \left\{e^{2\pi it} : t \in [-r, 0]\right\} \;=\; A_{r,0}.$$

En consecuencia,

$$e^{2\pi iz} \;\notin\; A_{r,0} \cup A_{0,s} \;=\; A_{r,s} \;=\; f(r,s).$$

Por tanto, si $r + s < 1$, entonces $f(r,s) \neq S^1$.

Paso 5 Definimos en $I \times I$ la siguente relación. Diremos que

$$(r,s) \sim (r', s') \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} (r,s) = (r', s') & \text{o} \\ r + s \geq 1 \;\text{ y }\; r' + s' \geq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia, así que podemos considerar la función cociente $g : I \times I \to (I \times I)/_\sim$.

Ahora bien, como consecuencia del paso 4 tenemos que f es constante en las fibras de g, así que podemos aplicar el Teorema de la Transgresión para obtener una función continua

$$h : (I \times I)/_\sim \;\longrightarrow\; C(p, S^1)$$

tal que $h \circ g = f$ (véase [Dug66, VI, Teorema 3.2]).

Paso 6 Sea h como en el paso 5. Entonces h es suprayectiva

En el paso 2 vimos que f es suprayectiva, y en el paso 5 vimos que $p \circ h = f$. Por tanto, h es suprayectiva.

Paso 7 Sea h como en el paso 5. Entonces h es inyectiva

Sean $g(r,s), g(r',s') \in (I \times I)/_\sim$ tales que

$$(h \circ g)(r,s) \;=\; (h \circ g)(r',s').$$

En el paso 4 vimos que $f(r,s) = S^1$ si y sólo si $r+s \geq 1$, así que, usando el paso 5, supondremos que

$$f(r,s) \;=\; (h \circ g)(r,s) \;=\; (h \circ g)(r',s') \;=\; f(r',s') \;\subsetneq\; S^1.$$

De esta manera, tenemos que $h(r,s)$ es un arco con extremos $e^{-2\pi ir}$ y $e^{2\pi is}$ por una parte, y con extremos $e^{-2\pi ir'}$ y $e^{2\pi is'}$ por otra. Como consecuencia de esto obtenemos que $r = r'$ y $s = s'$. Por tanto, h es inyectiva.

En el paso 5 dimos una función continua $h : (I \times I)/_\sim \;\to C(p, S^1)$, que resultó ser una biyección, como vimos en los pasos 6 y 7. Por otra parte, el dominio de h es compacto, ya que es el espacio cociente de un espacio compacto. Así pues, de acuerdo a estas consideraciones podemos concluir que h es un homeomorfismo.

Finalmente, es un resultado conocido el que el espacio cociente $(I \times I)/_\sim$ es una 2-celda, así que podemos concluir la prueba de este caso

Caso 2 $p \neq e^0$.

En este caso tenemos que $p = e^{2\pi it}$ para alguna $t \in (0,1)$. Consideremos la función $g : S^1 \to S^1$ dada por

$$g(e^{2\pi ir}) \;=\; e^{-2\pi it} \cdot e^{2\pi ir},$$

donde $\cdot$ denota el producto complejo. Es fácil ver que g es un homeomorfismo en S^1 (de hecho, es una rotación), y que $g(p) = e^0$. Así pues, aplicando el Lema 5.1.15 obtenemos que $C(p, S^1) \approx C(e^0, S^1)$. De esta manera, usando del paso anterior, podemos concluir que $C(p, S^1)$ es una 2-celda.

Como en ambos casos concluimos que $C(p,X)$ es una 2-celda, terminamos la prueba del lema.

□

Como corolario, veremos qué pasa con las curvas cerradas simples.

Corolario 5.4.5 *Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$*

Demostración:
Esto es una consecuencia inmediata del Lema 5.1.15 y del Lema 5.4.4.
$\square$

Finalmente, presentamos el último ejemplo de esta sección, que concierne a los continuos hereditariamente indescomponibles. Uno pensaría que los continuos de este tipo son muy complicados (y lo son), sin embargo, curiosamente resultan ser bastante tratables con respecto a sus hiperespacios $C(p, X)$, como se verá en varias ocasiones a lo largo de este trabajo. Empezaremos con el resultado más sencillo sobre la estructura de estos hiperespacios $C(p, X)$.

Lema 5.4.6 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo X:*

i) X es hereditariamente indescomponible.

ii) $C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$.

Demostración:
Supongamos que existe $p \in X$ tal que $C(p, X)$ no es un arco, entonces gracias al Lema 5.3.6 existen $K, K' \in C(p, X)$ tales que $K \setminus K' \neq \emptyset \neq K' \setminus K$. Sin embargo, $p \in K \cap K'$, de manera que $K \cup K' \in C(X)$ y, por otra parte, $K \cup K'$ es descomponible.

Por tanto X no es hereditariamente indescomponible.

Supongamos ahora que $C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$. Sea $K \in C(X)$ y supongamos que $K = A \cup B$ para algunos $A, B \in C(X)$. Sea $p \in A \cap B$. Por hipótesis $C(p, X)$ es un arco, así que por la Observación 5.3.5 sabemos que

$$A \subset B \qquad \text{o} \qquad B \subset A.$$

En particular se tiene que $K = A$ o $K = B$. Por tanto K es indescomponible. Como K es un subcontinuo arbitrario de X podemos concluir que X es hereditariamente indescomponible y terminamos la prueba del lema.
$\square$

5.5 Continuos arco-similares

En la sección anterior vimos explícitamente cómo son los hiperespacios $C(p,X)$ cuando X es un arco, una curva cerrada simple o un continuo hereditariamente indescomponible. A partir de esto, una pregunta que aparece de manera natural es si la estructura de dichos hiperespacios caracteriza al continuo X. En el caso de los continuos hereditariamente indescomponibles la respuesta es afirmativa, como lo muestra el Lema 5.4.6. Así pues, la pregunta queda abierta para cuando X es un arco o una curva cerrada simple. En este trabajo se estudian ambas preguntas, y las respuestas resultaron ser muy bonitas, aunque un tanto elaboradas. Es por esto que dedicaremos secciones separadas a cada pregunta.

Empecemos con la primera pregunta, es decir, si X es un arco ¿hasta qué punto los hiperespacios $C(p,X)$, lo caracterizan? Así como está hecha, la pregunta resulta un tanto vaga, así que trataremos de precisarla. El Corolario 5.4.2 nos dice que si X es un arco con puntos extremos a y b, entonces

$$C(p,X) = \begin{cases} \text{un arco,} & \text{si } p \in \{a,b\}, \\ \text{una 2-celda,} & \text{si } p \notin \{a,b\}. \end{cases}$$

De esta manera, uno podría preguntarse qué pasa con los continuos que tienen dos puntos especiales a y b, tales que $C(a,X)$ y $C(b,X)$ son arcos, y $C(p,X)$ es una 2-celda para los todos los demás puntos p. ¿Será cierto que el arco es el único continuo con estas características?

Esta ya es una pregunta más precisa; empezaremos a atacarla introduciendo el concepto de *continuo arco-similar*.

Definición 5.5.1 Sean X un continuo y a,b dos puntos distintos de X. Diremos que (X,a,b) es *arco-similar* si se tiene lo siguiente:

i) $C(a,X)$ y $C(b,X)$ son arcos y

ii) $C(p,X)$ es una 2-celda, si $p \notin \{a,b\}$.

Así pues, nuestra pregunta anterior puede traducirse en: si X es un continuo arco-similar, entonces ¿X es un arco? Desafortunadamente (bueno, no tanto) la respuesta a esta pregunta es negativa, como lo muestra el siguiente ejemplo.

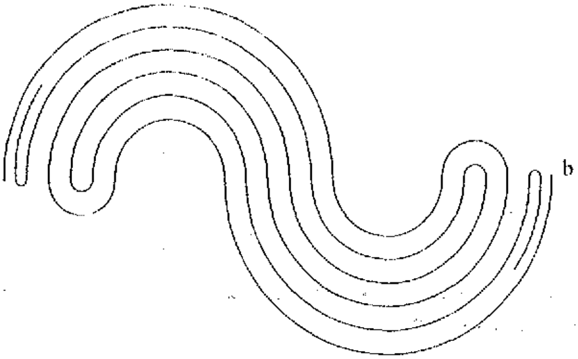


Figura 5.1: Continuo de Knaster con dos puntos extremos

Ejemplo 5.5.2 Consideremos el continuo X representado en la figura.

Es fácil ver que si A y B son subcontinuos de X que contienen a a, entonces A y B son comparables. De esta manera, usando el Lema 5.3.6 obtenemos que $C(a, X)$ es un arco. Usando un argumento similar, obtenemos que $C(b, X)$ también es un arco. Ahora, ¿Qué pasa para los demás puntos p?. Se sabe que si $\Sigma_a \neq \Sigma_p \neq \Sigma_b$, entonces existe una biyección continua de la recta real a Σ_p. De manera similar a como se probó que $C(p, I)$ es una 2-celda, cuando $0 \neq p \neq 1$, se puede probar que en este caso $C(p, X)$ también es una 2-celda. En realidad esto lo probaremos formalmente en el Teorema 7.2.1, pero, para lo que hemos desarrollado, éste resulta ser un teorema demasiado largo y demasiado complicado. Así pues, por el momento baste la analogía con la prueba del Lema 5.4.1. Si creemos esto (¡sólo por el momento!), entonces hemos obtenido un ejemplo de un continuo arco-similar ¡que no es un arco!

Ahora bien, ya tenemos una respuesta negativa a nuestra pregunta original, pero podemos no perder la esperanza y en lugar de eso hacernos muchas otras preguntas interesantes.

En este sentido, el ejemplo anterior nos muestra un continuo arco-similar que no es un arco. Claro, este continuo ¡es muy complicado! (es indescomponible, y eso ya es bastante complicado), así que uno podría preguntarse si existen continuos arco-similares, que no sean arcos, pero que sean más

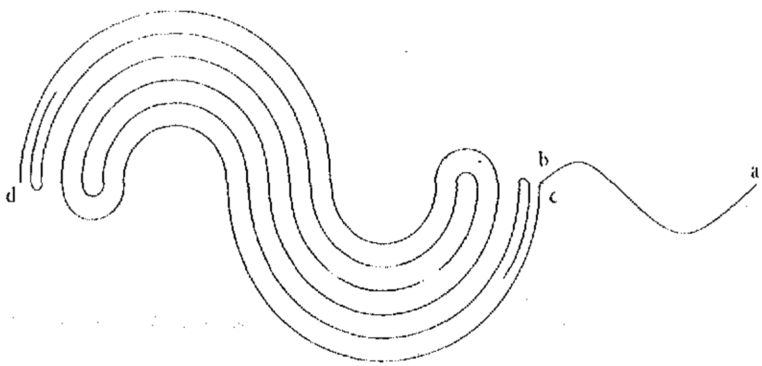


Figura 5.2: Continuo de Knaster con dos puntos extremos unido a un arco

sencillos que aquél presentado en el ejemplo anterior. En otras palabras, vale la pena preguntarse si existen continuos *descomponibles* y arco-similares distintos del arco.

¿Qué pasa, por ejemplo, si pegamos de manera adecuada dos continuos arco-similares? Bueno, hay que decir qué quiere decir esto. Una manera adecuada podría ser pegarlos por uno de sus extremos. Veamos.

Consideremos -por ejemplo- un continuo Y que sea la unión unipuntual de un arco y un continuo X como el del Ejemplo 5.5.2. Supongamos que los puntos extremos del arco son a y b, y los puntos extremos de X son c y d. Si pegamos b con c, Y se vería así:

Ejemplo 5.5.3

Aparentemente Y es un continuo arco-similar... veremos que no es así.

Consideremos un punto $p \in X \subset Y$, de manera que p no esté contenido en la composante de c en X. Denotaremos a dicha composante como Σ_c^X.

Veremos que X es terminal en p.

Así pues, sea $A \in C(p, Y)$ tal que $A \setminus X \neq \emptyset$, entonces, como A es conexo, necesariamente se tiene que $c \in A$. Ahora bien, es fácil ver que $A \cap X$ es un subcontinuo de X que contiene a c y a p. Como X es indescomponible, se sigue que $A \cap X = X$. En otras palabras, $X \subset A$.

Por tanto, X es terminal en p. De esta manera, usando el Lema 5.3.4 obtenemos que $C(p, Y)$ tiene al menos un punto de corte ¡cada vez que $p \in X \setminus \Sigma_c^X$! De acuerdo a esto, claramente X no es un continuo arco-similar.

El ejemplo anterior sugiere que no es tan fácil hallar continuos arco-similares, ¡y menos aún que sean descomponibles! Entonces, retomando nuestra pregunta de hace rato, sobre si los continuos arco-similares y descomponibles son arcos, por el momento sólo diremos que ésta resultó ser una pregunta muy interesante, pero también muy complicada. La contestaremos afirmativamente en su momento.

Y ya que estamos en éstas, podemos ir por el todo y preguntar: ¿qué condiciones son necesarias y/o suficientes para determinar que un continuo es arco-similar? Esta también es una pregunta complicada (¡más que la anterior!), pero también obtendremos una respuesta bastante satisfactoria.

En este sentido, empezaremos viendo un par de lemas que nos dan cierta información sobre los continuos arco-similares.

Lema 5.5.4 *Sea X un continuo tal que (X, a, b) es arco-similar. Entonces X es irreducible entre a y b.*

Demostración:
Supongamos que X no es irreducible entre a y b, entonces por el Lema 2.4.9 existe un subcontinuo propio A de X que es irreducible entre a y b.

Consideremos ahora un punto $p \in A \setminus \{a, b\}$. Por hipótesis tenemos que $C(p, X)$ es una 2-celda, en particular $C(p, X)$ no tiene puntos de corte. Así pues, de acuerdo al Lema 5.3.4 se tiene que A no es terminal en p, es decir, existe $A' \in C(p, X)$ tal que

$$A' \setminus A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad A \setminus A' \neq \emptyset. \tag{5.8}$$

A continuación veremos en dos pasos que A es irreducible entre a y p.

Paso 1 $a \notin A'$ y $b \notin A'$.

Supongamos que $a \in A'$, entonces tenemos que A y A' son dos elementos de $C(a, X)$ que no son comparables gracias a (5.8). Sin embargo, esto contradice la Observación 5.3.5.

Por tanto $a \notin A'$. De la misma manera podemos probar que $b \notin A'$.

Paso 2 A es irreducible entre a y p.

Supongamos que no lo es, es decir, existe $K \in C(A) \setminus \{A\}$ tal que $\{a,p\} \subset K$. Podemos observar que $p \in K \cap A'$, de modo que

$$K \cup A' \in C(a,X).$$

Notemos que como A es irreducible entre a y b se sigue que $b \notin K$, y por el paso anterior $b \notin A'$. De acuerdo a esto y a (5.8) tenemos

$$\begin{array}{rcl} b & \in & A \setminus (K \cup A') \quad \text{y} \\ \emptyset & \neq & A' \setminus A \subset (K \cup A') \setminus A, \end{array}$$

de donde se desprende que A y $K \cup A'$ son dos elementos no comparables de $C(a,X)$. Esto nos lleva una vez más a una contradicción con la Observación 5.3.5.

Por tanto A es irreducible entre a y p.

Ahora bien, dado que a y b juegan papeles simétricos en X, podemos seguir el mismo procedimiento para obtener que A es irreducible entre p y b. Como A ya era irreducible entre a y b y entre a y p, podemos concluir que A es indescomponible (véase [Kur68, §48, VI, Teorema 7']).

Finalmente, por hipótesis tenemos que

1. $\dim C(x,X) < 3$ para cada $x \in X$ y

2. Si $C(x,X)$ tiene puntos de corte entonces $x \in \{a,b\}$,

de manera que podemos aplicar el Teorema 5.3.10 para obtener que todos los subcontinuos propios y no degenerados de X son descomponibles. Sin embargo esto contradice el hecho de que A es un subcontinuo propio de X y es indescomponible.

Esta contradicción vino de suponer que X no es irreducible entre a y b, así que podemos concluir que el lema es cierto.

□

Lema 5.5.5 *Sea X un continuo tal que (X,a,b) es arco-similar. Entonces para cada $M \in C(a,X) \cup C(b,X)$ se tiene que M es unicoherente.*

Demostración:
Sea $M \in C(a, X)$ (la prueba para $M \in C(b, X)$ es análoga).

Supongamos que M no es unicoherente, es decir, existen dos subcontinuos A y B de M tales que $M = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. Supondremos que $a \in A$.

Sean H y K dos componentes de $A \cap B$. En particular, H y K están contenidas en B, así que podemos tomar arcos ordenados $\alpha : I \to C(B)$ y $\beta : I \to C(B)$ de H a B y de K a B, respectivamente. En particular se tiene que para $s > 0$,

$$\alpha(s) \setminus A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \beta(s) \setminus A \neq \emptyset. \tag{5.9}$$

Por otra parte, gracias al Lema 3.4.3 podemos hallar $\delta > 0$ tal que

$$\alpha(\delta) \cap \beta(\delta) = \emptyset. \tag{5.10}$$

Notemos ahora que $H \subset A \cap \alpha(\delta)$ y $K \subset A \cap \beta(\delta)$ así que

$$A \cup \alpha(\delta) \in C(a, X) \quad \text{y} \quad A \cup \beta(\delta) \in C(a, X). \tag{5.11}$$

Ahora bien, de (5.9) y (5.10) podemos deducir que

$$\begin{aligned} \Big(\alpha(\delta) \setminus \beta(\delta)\Big) \setminus A &= \alpha(\delta) \setminus A \neq \emptyset \quad \text{y} \\ \Big(\beta(\delta) \setminus \alpha(\delta)\Big) \setminus A &= \beta(\delta) \setminus A \neq \emptyset. \end{aligned} \tag{5.12}$$

En base al Lema 2.4.4, las ecuaciones (5.11) y (5.12) nos conducen a la conclusión de que $A \cup \alpha(\delta)$ y $A \cup \beta(\delta)$ son dos elementos no comparables de $C(a, X)$, lo cual contradice la Observación 5.3.5.

En consecuencia M es unicoherente y concluimos la prueba del lema.

$\square$

Capítulo 6

Continuos Estrambóticos

6.1 La condición $\dim\big(C(p,X)\big) < 3$

Nuestra intención hasta el momento ha sido estudiar los continuos arco-similares y, de ser posible, caracterizarlos. Una condición que satisface un continuo X en esta clase es que $\dim\big(C(p,X)\big) < 3$ para cada $p \in X$. Analizando solamente esta condición, nos dimos cuenta que resulta ser una condición muy especial, ya que nos proporciona muchísima información sobre los continuos que la satisfacen. Por otra parte, analizarla por separado tiene la ventaja de que se obtienen resultados para una clase de continuos más amplia que la de los arco-similares. En esta sección también estudiaremos algunas propiedades de los continuos atriódicos, los cuales, como veremos más adelante, resultarán ser muy interesantes.

Empezaremos desarrollando herramienta básica.

Lema 6.1.1 *Sean X un continuo atriódico y $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $B \setminus A$ tiene a lo más dos componentes.*

Demostración:
Si $B \setminus A$ tiene el menos tres componentes, entonces $A \cup B$ es un triodo con corazón A, lo cual contradice nuestros supuestos. Por tanto $B \setminus A$ tiene a lo más dos componentes.

$\square$

Lema 6.1.2 *Sean X un continuo atriódico y $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B$ tiene dos componentes distintas H_1 y H_2. Entonces existe una componente W de $B \setminus A$ tal que $\overline{W} \cap H_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$.*

Demostración:
Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= H_1 \cup \bigcup \{K : \overline{K} \cap H_1 \neq \emptyset \text{ y } K \text{ es una componente de } B \setminus A\} \\
\mathcal{H}_2 &= H_2 \cup \bigcup \{K : \overline{K} \cap H_2 \neq \emptyset \text{ y } K \text{ es una componente de } B \setminus A\}.
\end{aligned}$$

Es claro que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son no vacíos y que $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = B$ (ver Teorema 2.4.1).

Por otra parte, de acuerdo al Lema 6.1.1 se sigue que $B \setminus A$ tiene a lo más dos componentes, de manera que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son cerrados en B.

Si suponemos que la cerradura de ninguna componente de $B \setminus A$ intersecta a la vez a H_1 y a H_2 obtenemos que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son ajenos, así que de acuerdo a las consideraciones anteriores se sigue que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ constituyen una separación de B, lo cual contradice nuestras hipótesis.

Por tanto existe una componente W de $B \setminus A$ tal que $\overline{W} \cap H_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$ y concluimos la prueba del lema.

□

Lema 6.1.3 *Sean X un continuo atriódico y $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes.*

Demostración:
Supongamos que H_1, H_2 y H_3 son tres componentes distintas de $A \cap B$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ tomemos un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(X)$ que empiece en H_i y termine en B. De acuerdo al Lema 3.4.3 podemos tomar $\delta > 0$ tal que $\alpha_i(\delta) \cap \alpha_j(\delta) = \emptyset$ cada vez que $i \neq j$. En particular para $i \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que

$$A \cup \alpha_i(\delta) \text{ es conexo} \qquad \text{y} \qquad \alpha_i(\delta) \setminus A \neq \emptyset.$$

De aquí que el continuo

$$A \cup \bigcup_{i=1}^{3} \alpha_i(\delta)$$

es un triodo con corazón A, lo cual nos lleva a una contradicción con nuestras hipótesis.

Por tanto $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes y terminamos la prueba del lema.

□

Corolario 6.1.4 *Sea X un continuo tal que* $\dim(C(p,X)) < 3$ *para cada* $p \in X$. *Sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes.*

Demostración:
Si X contuviera un triodo, entonces por el Lema 5.3.9 X contendría una 3-celda, lo cual contradice nuestras hipótesis. Por tanto X es atriódico. De aquí y del Lema 6.1.3 obtenemos el resultado buscado.

□

Lema 6.1.5 *Sean X un continuo atriódico y $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B$ no es conexo. Entonces $B \setminus A$ es conexo.*

Demostración:
Por el Lema 6.1.3 sabemos que $A \cap B$ tiene dos componentes H_1 y H_2.

Así pues, si suponemos que $B \setminus A$ no es conexo, por el Lema 6.1.1 se sigue que $B \setminus A$ tiene dos componentes. Así pues, aplicando el Lema 6.1.2 obtenemos que existe una componente W de $B \setminus A$ tal que $\overline{W}$ intersecta tanto a H_1 como a H_2.

Sean L_1 y L_2 componentes de $\overline{W} \cap H_1$ y $\overline{W} \cap H_2$, respectivamente. Claramente

$$L_1 \cap L_2 \subset H_1 \cap H_2 = \emptyset. \tag{6.1}$$

Sea Z la componente de $B \setminus A$ distinta de W

Así pues, para cada $i \in \{1,2\}$ podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(X)$ que empiece en L_i y termine en $\overline{W}$. Ahora bien, gracias a (6.1), y al Lema 3.4.3 podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\big(\alpha_1(\delta) \setminus A\big) \cap \big(\alpha_2(\delta) \setminus A\big) = \emptyset.$$

Notemos que $\overline{W} \subset A \cup W$, así que $\overline{W} \cap Z = \emptyset$. Entonces

$$Z \cap \left(\alpha_1(\delta) \cup \alpha_2(\delta)\right) = \emptyset.$$

De acuerdo a lo anterior y al Lema 2.4.3 podemos deducir que si

$$T \;=\; A \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{2} \alpha_i(\delta)\Big) \cup Z,$$

entonces T es un triodo con corazón A. Como esto contradice nuestras hipótesis, podemos concluir que $B \setminus A$ es conexo

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 6.1.6 *Sea* X *un continuo no unicoherente tal que* $\dim(C(p,X)) < 3$ *para cada* $p \in X$. *Entonces existen dos subcontinuos propios* A *y* B *de* X *tales que*

i) $A \cup B = X$,

ii) $int(A) = A \setminus B$, $\;int(B) = B \setminus A$,

iii) $A = \overline{int(A)}$, $\;B = \overline{int(B)}$ *y*

iv) $A \cap B$ *no es conexo.*

Demostración:

Como X no es unicoherente podemos hallar dos subcontinuos propios A' y B' de X, tales que $A' \cup B' = X$ y $A' \cap B'$ no es conexo.

Definimos

$$B = \overline{X \setminus A'} \qquad \text{y} \qquad A = \overline{X \setminus B}.$$

Veremos en varios pasos que A y B son los subcontinuos que nos sirven.

Paso 1 $A' \cap B'$ tiene dos componentes H_1 y H_2.

Por hipótesis tenemos que $A' \cap B'$ no es conexo, así que de acuerdo al Corolario 6.1.4 obtenemos que $A' \cap B'$ tiene dos componentes, a las que llamaremos H_1 y H_2.

Paso 2 $A, B \in C(X)$.

Empezaremos viendo que X es atriódico. Si X contuviera un triodo, entonces el Lema 5.3.9 nos dice que X contiene una 3-celda, lo cual contradice nuestras hipótesis. Por tanto, X es atriódico. Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Lema 6.1.5, de donde obtenemos que $X \setminus A'$ es conexo y, en consecuencia, B también lo es.

De manera análoga se puede probar que A es conexo. Finalmente, como claramente A y B son cerrados, podemos concluir que $A, B \in C(X)$.

Paso 3 $B \subset B' \subsetneq X$.

Como $A' \cup B' = X$ se tiene que $X \setminus A' \subset B'$, de donde

$$B = \overline{X \setminus A'} \subset B' \subsetneq X.$$

Paso 4 $\overline{X \setminus \overline{int(A')}} = \overline{ext(A')}$.

Por un lado tenemos que

$$ext(A') = X \setminus \Big(int(A') \cup Fr(A')\Big) \subset X \setminus \overline{int(A')},$$

así que

$$\overline{ext(A')} \subset \overline{X \setminus \overline{int(A')}}.$$

Por otra parte, no es difícil ver que

$$X \setminus \overline{int(A')} \subset \overline{ext(A')}.$$

En consecuencia

$$\overline{X \setminus \overline{int(A')}} = \overline{ext(A')}.$$

Paso 5 $A = \overline{int(A')}$ (en particular $A \subset A' \subsetneq X$).

Por construcción tenemos que

$$A = \overline{X \setminus B} = \overline{X \setminus \overline{X \setminus A'}} = \overline{X \setminus \overline{ext(A')}} = \overline{int(A')}.$$

En particular,

$$A = \overline{int(A')} \subset A' \subsetneq X.$$

Paso 6 $A \cap B = Fr(A) = Fr(B)$.

Por definición tenemos que

$$Fr(B) \;=\; B \cap \overline{X \setminus B} \;=\; B \cap A.$$

Además, del paso 5 se sigue que

$$Fr(A) \;=\; A \cap \overline{X \setminus A} \;=\; A \cap \overline{X \setminus \overline{int(A')}}$$

Usando ahora el paso 4 y el hecho de que $X \setminus A' = ext(A')$, obtenemos que

$$Fr(A) \;=\; A \cap \overline{ext(A')} \;=\; A \cap \overline{X \setminus A'} \;=\; A \cap B.$$

Paso 7 $int(B) = B \setminus A$ e $int(A) = A \setminus B$.

De acuerdo al paso anterior tenemos que

$$B \setminus A \;=\; B \setminus (B \cap A) \;=\; B \setminus Fr(B) \;=\; int(B).$$

De la misma manera se obtiene que $A \setminus B = int(A)$.

Paso 8 $B = \overline{int(B)}$ y $A = \overline{int(A)}$.

Esto es una consecuencia directa de la Propiedad 4.1.12.

Paso 9 $A \cup B = X$.

$$A \cup B \;=\; (\overline{X \setminus B}) \cup B \;=\; X.$$

Paso 10 $A \cap B$ no es conexo.

Por una parte, de acuerdo a los pasos 1, 3 y 5 tenemos que

$$A \cap B \;\subset\; A' \cap B' \;=\; H_1 \cap H_2 \tag{6.2}$$

Sea $i \in \{1, 2\}$.

Gracias al Lema 3.4.2 tenemos que

$$H_i \cap Fr(A') \neq \emptyset,$$

de donde

$$H_i \cap B = H_i \cap \overline{X \setminus A'} \supset H_i \cap Fr(A') \neq \emptyset. \qquad (6.3)$$

Usando una vez más el Lema 3.4.2 tenemos que $H_i \cap Fr(B') \neq \emptyset$ y en el paso 3 vimos que $B \subset B'$. De acuerdo a esto y a (6.3) podemos aplicar el Lema 2.4.5 para obtener que

$$H_i \cap Fr(B) \neq \emptyset.$$

Finalmente, usando el paso 6 podemos concluir que

$$H_i \cap (A \cap B) \neq \emptyset.$$

Como consecuencia de esto y de (6.2) obtenemos que $A \cap B$ no es conexo.

De esta manera concluimos la prueba del lema.

□

Es momento de introducir un concepto importante.

Definición 6.1.7 Sean X un continuo y $A_1, A_2, A_3 \in C(X)$. Decimos que A_1, A_2 y A_3 forman un *triodo débil* si

i) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ y

ii) $A_i \setminus (A_j \cup A_k) \neq \emptyset$ cada vez que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Uno de los resultados más populares respecto de los triodos débiles es el siguiente teorema. Vale la pena destacarlo, porque lo usaremos a lo largo de este trabajo una y otra vez.

Teorema 6.1.8 *Sean X un continuo y $A, B, C \in C(X)$ tales que forman un triodo débil. Entonces X contiene un triodo.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [Sor44, Teorema 1.8].

El teorema que presentamos a continuación nos proporciona una relación entre el hecho de que un continuo X contenga triodos (o triodos débiles) y la condición de que $\dim(C(p, X)) < 3$ para cada $p \in X$. De esta manera, tiene mucho sentido buscar criterios para determinar si un continuo contiene triodos o triodos débiles. Después del teorema presentamos uno de ellos.

Teorema 6.1.9 *Sea X un continuo tal que* $\dim(C(p,X)) < 3$ *para cada* $p \in X$. *Entonces X no contiene triodos débiles (ni triodos)*

Demostración:
Supongamos que X contiene algún triodo débil, entonces el Teorema 6.1.8 nos garantiza que X contiene un triodo.

Ahora bien, aplicando el Lema 5.3.9 obtenemos que entonces $C(p,X)$ contiene una 3-celda para cada p que pertenezca al corazón del triodo, lo cual contradice nuestras hipótesis.

Por tanto X no contiene triodos débiles y terminamos la prueba del teorema.

□

Lema 6.1.10 *Sea X un continuo y sean $W, Y, Z \in C(X)$ tales que*

i) $Y \cap Z$ *no es conexo,*

ii) $W \subsetneq Y$ *y*

iii) $W \cap Z = Y \cap Z$.

Entonces X contiene un triodo.

Demostración:
Dado que $Y \cap Z$ no es conexo podemos tomar dos componentes distintas L_1 y L_2 de $Y \cap Z$; para cada $i \in \{1,2\}$ tomamos un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(X)$ que empiece en L_i y termine en Z. En particular se tiene que

$$\alpha_i(s) \setminus Y \neq \emptyset \qquad \text{para cada } s > 0. \tag{6.4}$$

Además, gracias al Lema 3.4.3 podemos tomar $\delta > 0$ de manera que, si $i, j \in \{1,2\}$, entonces

$$\alpha_i(\delta) \cap \alpha_j(\delta) = \emptyset, \qquad \text{cuando } i \neq j \tag{6.5}$$

Sea

$$T = Y \cup \alpha_1(\delta) \cup \alpha_2(\delta).$$

Veremos que T es un triodo

Como $\alpha_i(0) = L_i \subset Y$, es fácil ver que T es conexo.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} T \setminus W &= (Y \setminus W) \cup (\alpha_1(\delta) \setminus W) \cup (\alpha_2(\delta) \setminus W) \\ &= (Y \setminus W) \cup (\alpha_1(\delta) \setminus Y) \cup (\alpha_2(\delta) \setminus Y). \end{aligned}$$

De acuerdo a esto, a las hipótesis ii) y iii), a (6.4) y a (6.5) obtenemos que $T \setminus W$ tiene al menos tres componentes, de donde se concluye que T es un triodo en X.

Terminamos la prueba del lema.

□

Uno de los resultados más fuertes e importantes de esta sección tiene que ver con la unicoherencia. Lo presentamos a continuación.

Teorema 6.1.11 *Sea X un continuo atriódico. Si $Y \in C(X)$ no es unicoherente, entonces Y es terminal en todos sus puntos.*

Demostración.
Como Y no es unicoherente, por el Lema 6.1.6 podemos tomar dos subcontinuos propios A y B de Y tales que

i) $A \cup B = Y$,

ii) $int_Y(A) = A \setminus B$, $int_Y(B) = B \setminus A$,

iii) $A = \overline{int_Y(A)}$, $B = \overline{int_Y(B)}$ y

iv) $A \cap B$ no es conexo.

Supongamos que Y no es terminal en un punto p, entonces existe $K \in C(p, X)$ tal que

$$Y \setminus K \neq \emptyset \quad \text{y} \quad K \setminus Y \neq \emptyset. \tag{6.6}$$

Dado que $(A \cup B) \setminus K = Y \setminus K \neq \emptyset$, podemos suponer que $B \setminus K \neq \emptyset$.

Definimos $C = A \cup K$.

Haremos el resto de la prueba en cinco pasos.

Paso 1 $B \setminus C \neq \emptyset$.

Como $Y \setminus K$ es un abierto de Y que contiene puntos de B, y $B = \overline{int_Y(B)}$, sabemos que

$$\big(int_Y(B)\big) \cap (Y \setminus K) \neq \emptyset.$$

Usando lo anterior y el inciso ii) se sigue que

$$\begin{aligned} \emptyset \;&\neq\; \big(int_Y(B)\big) \cap (B \setminus K) \;=\; (B \setminus A) \cap (B \setminus K) \\ &=\; B \setminus (A \cup K) \;=\; B \setminus C. \end{aligned}$$

Paso 2 $B \cap C$ tiene a lo más dos componentes.

Se sigue del Lema 6.1.3.

Paso 3 $A \cap K \neq \emptyset$. En particular, $C \in C(X)$.

Supongamos que $A \cap K = \emptyset$, entonces

$$(B \cap A) \cap (B \cap K) = \emptyset. \tag{6.7}$$

Ahora bien, por el Lema 6.1.3, sabemos que $B \cap C$ tiene a lo más dos componentes. Por otro lado, estamos suponiendo que $A \cap B$ tiene al menos dos componentes y tenemos que

$$B \cap C = B \cap (A \cup K) = (B \cap A) \cup (B \cap K).$$

De acuerdo a las consideraciones anteriores y a (6.7), se desprende que $B \cap K = \emptyset$. Pero entonces, por construcción de K obtenemos que

$$p \in (Y \setminus B) \cap K \subset A \cap K,$$

lo cual nos lleva a una contradicción.

Por tanto, $A \cap K \neq \emptyset$ y, en particular, $C \in C(X)$

Paso 4 Si $A \cap B$ está contenido en una componente de $B \cap C$, entonces Y contiene un triodo.

Sea W la componente de $B \cap C$ que contiene a $A \cap B$. En el paso 1 vimos que $B \setminus C \neq \emptyset$, así que

$$W \subsetneq B.$$

Además, es fácil ver que

$$A \cap B \subset W \cap A \subset B \cap C \cap A = B \cap A,$$

es decir,

$$W \cap A = B \cap A.$$

Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Lema 6.1.10 a los subcontinuos W, B y A para obtener que Y contiene un triodo.

Paso 5 Si $A \cap B$ intersecta a más de una componente de $B \cap C$, entonces X contiene un triodo.

En este caso claramente estamos asumiendo que $B \cap C$ no es conexo. Así pues, del paso 2 se desprende que $B \cap C$ tiene exactamente dos componentes, a las que llamaremos C_1 y C_2.

Notemos que en este caso $A \cup C_1 \cup C_2 \in C(X)$. Además, por el paso 3, C también es un elemento de $C(X)$.

Por otra parte, por (6.6) se tiene que

$$K \setminus (A \cup C_1 \cup C_2) \supset K \setminus Y \neq \emptyset,$$

de donde

$$A \cup C_1 \cup C_2 \subsetneq A \cup K = C.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}(A \cup C_1 \cup C_2) \cap B &= (A \cup (B \cap C)) \cap B \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \\ &= B \cap C.\end{aligned}$$

Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Lema 6.1.10 a los subcontinuos $A \cup C_1 \cup C_2, C$ y B para obtener que X contiene un triodo.

Ahora bien, por construcción de C tenemos que $A \cap B \subset B \cap C$, así que estamos en la situación descrita en el paso 4 o en el paso 5, y en ambos casos concluimos que X contiene un triodo.

Esta contradicción vino de suponer que Y no es terminal en p. Así pues, podemos deducir que todos los subcontinuos propios, no unicoherentes de X son terminales y concluimos la prueba del teorema.

□

Como corolario presentamos el siguiente teorema.

Teorema 6.1.12 *Sea X un continuo tal que*

i) $\dim\big(C(p,X)\big) < 3$ *para cada $p \in X$ y*

ii) el conjunto $\{p \in X : C(p,X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable.

Si $Y \in C(X) \setminus \{X\}$, entonces Y es unicoherente.

Demostración.
Como consecuencia de la hipótesis *i*) y del Lema 5.3.9, obtenemos que X es un continuo atriódico. Por otra parte, de la hipótesis *ii*) y el Lema 5.3.4 se sigue que Y no es terminal en todos sus puntos. De esta manera podemos aplicar el Teorema 6.1.11, para obtener que Y es unicoherente.

□

Lema 6.1.13 *Sean X un continuo atriódico y $Y \in C(X) \setminus \{X\}$. Si A_1 y A_2 son dos subcontinuos propios de Y tales que $A_1 \cup A_2 = Y$, y K es una componente de $A_1 \cap A_2$, entonces existe un único arco ordenado de K a A_i, para cada $i \in \{1,2\}$ (véase la Definición 3.3.2).*

Demostración:
Supongamos que existen dos arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(A_1)$, de K a A_1, tales que $\alpha_1(I) \neq \alpha_2(I)$, entonces gracias al Lema 3.4.1 existen $s, t \in I$ tales que

$$\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset. \tag{6.8}$$

Tomemos ahora un arco ordenado $\gamma : I \to C(A_2)$ que empiece en K y termine en A_2. Por el Lema 6.1.3 sabemos que $A_1 \cap A_2$ tiene a lo más dos componentes, así que podemos tomar $t \in (0,1)$ de manera que $\gamma(t) \cap A_1 = K$.

Consideremos ahora $Z = \gamma(t) \cup \alpha_1(s) \cup \alpha_2(t)$. Veremos que Z es un triodo débil.

Como $\alpha_i(0) = K \in C(Y)$ para $i \in \{1,2\}$, se sigue que

$$K \subset \gamma(t) \cap \alpha_1(s) \cap \alpha_2(t) \tag{6.9}$$

Además, de acuerdo a la construcción de α_1, α_2 y a (6.8) obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) \setminus \big(\gamma(t) \cup \alpha_2(t)\big) &= \big(\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t)\big) \setminus \gamma(t) \\ &= \big(\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t)\big) \setminus K \\ &= \big(\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t)\big) \neq \emptyset. \end{aligned} \tag{6.10}$$

De manera similar se puede ver que

$$\alpha_2(t) \setminus \big(\gamma(t) \cup \alpha_1(s)\big) \neq \emptyset. \tag{6.11}$$

Finalmente

$$\gamma(t) \setminus \big(\alpha_1(s) \cup \alpha_2(t)\big) \supset \gamma(t) \setminus A_1 \neq \emptyset. \tag{6.12}$$

De (6.9), (6.10), (6.11) y (6.12) deducimos que Z es un triodo débil, lo cual contradice el Teorema 6.1.8.

Por tanto obtenemos la conclusión deseada para A_1. Análogamente podemos probar el resultado para A_2 y terminamos la prueba del lema.

□

Como corolario tenemos el siguiente lema.

Lema 6.1.14 *Sean X un continuo tal que $\dim\big(C(p,X)\big) < 3$ para cada $p \in X$ y $Y \in C(X) \setminus \{X\}$. Si A_1 y A_2 son dos subcontinuos propios de Y tales que $A_1 \cup A_2 = Y$, y K es una componente de $A_1 \cap A_2$, entonces existe un único arco ordenado de K a A_i, para cada $i \in \{1,2\}$ (véase la Definición 3.3.2).*

Demostración:

Si X contiene un triodo, por el Lema 5.3.9 sabemos que $C(p,X)$ contiene una n-celda para alguna $p \in X$. Como estamos suponiendo que esto no sucede, podemos concluir que X es atriódico. Así pues, aplicando el Lema 6.1.13 obtenemos el resultado buscado.

□

Teorema 6.1.15 *Sea X un continuo tal que*

i) $\dim(C(p,X)) < 3$ *para cada* $p \in X$ *y*

ii) el conjunto $\{p \in X : C(p,X)$ *tiene puntos de corte*$\}$ *es a lo más numerable.*

Sean $Y \in C(X) \setminus \{X\}$ *y* $A', B' \in C(Y)$ *tales que* Y *es irreducible entre* A' *y* B'.

Si $A_1, A_2 \in C(Y)$ *son tales que* $A' \subset A_1 \cap A_2$, *entonces* $A_1 \subset A_2$ *o* $A_2 \subset A_1$.

Demostración:
Podemos suponer que $A' \subsetneq A_i$ para cada $i \in \{1,2\}$ y que $A_1 \neq A_2$ Haremos el resto de la prueba en dos pasos.

Paso 1 $\overline{int_Y(A_1)} \subset \overline{int_Y(A_2)}$ o $\overline{int_Y(A_2)} \subset \overline{int_Y(A_1)}$.

Sea $a \in A'$.

Como consecuencia del Lema 4.2.2 tenemos que $int_Y(A_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1,2\}$, así pues, aplicando la Propiedad 4.1.13 obtenemos que

$$\overline{int_Y(A_1)}\ ,\ \overline{int_Y(A_2)}\ \in\ \mathbb{D}_{(Y,a)}.$$

Utilizando ahora la Propiedad 4.1.9 concluimos que

$$\overline{int_Y(A_1)} \subset \overline{int_Y(A_2)} \quad \text{o} \quad \overline{int_Y(A_2)} \subset \overline{int_Y(A_1)}.$$

Paso 2 Si A_1 y A_2 no son comparables, entonces Y contiene un triodo débil.

De acuerdo al paso anterior podemos suponer que $\overline{int_Y(A_1)} \subset \overline{int_Y(A_2)}$.

Sea $K = \overline{int_Y(A_1)}$. Si A_1 y A_2 no son comparables entonces

$$K \subsetneq A_1 \qquad \text{y} \qquad K \subsetneq A_2, \tag{6.13}$$

además, gracias a la Propiedad 4.1.13 sabemos que $K \in C(Y)$.

Por otra parte, usando el Lema 4.2.2 podemos ver que

$$A' \subsetneq int_Y(A_1) \subset K, \tag{6.14}$$

así que podemos tomar $w \in K \setminus A'$. Sea $b \in B'$ Por la irreducibilidad de Y, entre A' y B', existe $B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tal que $w, b \in B$ Es fácil ver que entonces

$$A' \subset Y \setminus B. \tag{6.15}$$

Como $A_i \cup B \in C(Y)$, gracias a la irreducibilidad de Y obtenemos que $A_i \cup B = Y$ (por la misma razón, $K \cup B = Y$). En particular, $Y \setminus A_i \subset B$.

Ahora bien, dado que $Y \not\subset X$, podemos aplicar el Teorema 6 1.12, para obtener que

$$A_i \cap B \in C(Y) \tag{6.16}$$

cada vez que $i \in \{1,2\}$.

Veremos que $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$ y K forman un triodo débil.

Usando (6.14) y (6.15) tenemos que

$$A' \ \subset \ K \setminus \Big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \Big). \tag{6.17}$$

Por otra parte, usando (6.13), si $\{i,j\} = \{1,2\}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
(A_i \cap B) \setminus \big((A_j \cap B) \cup K\big) &= \big((A_i \cap B) \setminus (A_j \cap B)\big) \cap \big((A_i \cap B) \setminus K\big) \\
&= \big((A_i \cap B) \setminus (A_j \cap B)\big) \cap (A_i \setminus K) \\
&= \Bigg(\Big((A_i \cap B) \setminus A_j\Big) \cup \Big((A_i \cap B) \setminus B\Big) \Bigg) \\
&\quad \cap (A_i \setminus K) \\
&= \big((A_i \setminus A_j) \cup \emptyset\big) \cap (A_i \setminus K) \\
&= A_i \setminus (A_j \cup K) \\
&= A_i \setminus A_j \ \neq \ \emptyset
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Finalmente, por construcción

$$w \ \in \ K \cap B \ \subset \ (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) \cap K \tag{6.19}$$

De (6.17), (6.18), y (6.19), concluimos que $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$ y K forman un triodo débil

En el paso 2 vimos que, si A_1 y A_2 no son comparables, entonces Y contiene un triodo débil, sin embargo esto contradice el Teorema 6.1.9. Por tanto A_1 y A_2 son comparables y terminamos la prueba del teorema.

$\square$

Lema 6.1.16 *Sea X un continuo tal que* $\dim(C(p, X)) < 3$ *para cada* $p \in X$ *y tomemos* $Y \in C(X)$. *Supongamos que* Y *es irreducible entre* A' *y* B', *donde* $A', B' \in C(Y)$.

Sean $w \in Y \setminus (A' \cup B')$ *y* $Z \in C(w, X)$ *tal que* $Z \setminus Y \neq \emptyset$ *Llamemos* Z_0 *a la componente de* $Z \cap Y$ *que contiene a* w. *Entonces* $A' \subset Z_0$ *o* $B' \subset Z_0$.

Demostración:
Haremos la prueba del lema en dos pasos.

Paso 1 $A' \cap Z \neq \emptyset$ o bien $B' \cap Z \neq \emptyset$.

De acuerdo a la elección de w y a la irreducibilidad de Y, existen $a \in A'$ y $A \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tales que $a, w \in A$. Como $A \subsetneq Y$ obtenemos que

$$A \cap B' = \emptyset \tag{6.20}$$

De la misma manera, existen $b \in B'$ y $B \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tales que $b, w \in B$ y

$$B \cap A' = \emptyset. \tag{6.21}$$

Usando una vez más la irreducibilidad de Y se sigue que $A \cup B = Y$.

Notemos ahora que

$$Z \setminus (A \cup B) = Z \setminus Y \neq \emptyset. \tag{6.22}$$

Por otra parte, si suponemos que

$$Z \cap A' = \emptyset \quad \text{y} \quad Z \cap B' = \emptyset,$$

utilizando (6.21) obtenemos que

$$a \in A' \cap A = (A' \cap A) \setminus (Z \cup B) \subset A \setminus (Z \cup B). \tag{6.23}$$

Similarmente podemos ver que

$$b \in B \setminus (Z \cup A). \tag{6.24}$$

Finalmente, por construcción tenemos que $w \in A \cap B \cap Z$. De acuerdo a esto, a (6.22), a (6.23) y a (6.24) podemos concluir que A, B y Z forman un triodo débil.

Sin embargo esto contradice el Teorema 6.1.9. Por tanto $A' \cap Z \neq \emptyset$ o $B' \cap Z \neq \emptyset$.

Paso 2 $A' \subset Z_0$ o $B' \subset Z_0$.

Sea $\alpha : I \to C(Z)$ un arco ordenado que empiece en Z_0 y termine en Z. En particular tenemos que si $t > 0$ entonces

$$\alpha(t) \setminus Y \neq \emptyset.$$

Por otra parte, gracias al Corolario 6.1.4 sabemos que $Z \cap Y$ tiene a lo más dos componentes, así que por la continuidad de α existe $\delta > 0$ tal que

$$\alpha(\delta) \cap Y = Z_0.$$

Aplicando ahora el paso 1 al subcontinuo $\alpha(\delta)$ obtenemos que

$$A' \cap \alpha(\delta) \neq \emptyset \quad \text{o} \quad B' \cap \alpha(\delta) \neq \emptyset.$$

Supongamos que $A' \cap \alpha(\delta) \neq \emptyset$. Entonces claramente

$$\emptyset \neq A' \cap \alpha(\delta) = A' \cap Y \cap \alpha(\delta) = A' \cap Z_0.$$

Ahora bien, en el Lema 4.2.2 vimos que A' es un subcontinuo terminal de Y. Por otro lado sabemos $w \in Z_0 \setminus A'$, de donde se deduce que

$$A' \subset Z_0.$$

Es fácil ver que si suponemos que $B' \cap \alpha(\delta) \neq \emptyset$, entonces $B' \subset Z_0$.

De esta manera concluimos la prueba del lema.

□

6.2 Continuos Estrambóticos

En nuestro afán de hallar una caracterización de los continuos arco-similares, en la sección precedente analizamos propiedades de los continuos X que satisfacen la condición $\dim(C(p,X)) < 3$ para toda $p \in X$. En esta sección introducimos el concepto de *continuo estrambótico*, con el cual, de alguna manera, aterrizaremos los resultados vistos en la sección anterior. También desarrollaremos herramientas para los continuos estrambóticos que nos permitirán, por fin, obtener algunas de las caracterizaciones buscadas.

Definición 6.2.1 Decimos que un continuo X es *estrambótico* si

i) $C(p,X)$ es un arco o una 2-celda, para cada $p \in X$ y

ii) el conjunto $\{p \in X : C(p,X) \text{ es un arco}\}$ es a lo más numerable.

Veamos un primer resultado.

Teorema 6.2.2 *Sean X un continuo estrambótico y $Y \in C(X)$. Supongamos que $A', B' \in C(Y)$ son tales que Y es irreducible entre A' y B'. Sea $w \in Y \setminus (A' \cup B')$, entonces $C(w,Y)$ no tiene puntos de corte.*

Demostración:
Por el Lema 5.3.2 sabemos que ni Y ni $\{w\}$ son punto de corte de $C(w,Y)$.

Así pues, sea $W \in C(w,Y)$ tal que $\{w\} \subsetneq W \subsetneq Y$. Empezaremos viendo que W no es un subcontinuo de Y terminal en w, y para esto analizaremos dos casos.

Caso 1 $A' \subset W$ o $B' \subset W$.

Supongamos que $A' \subset W$, entonces por irreducibilidad de Y tenemos que

$$W \cap B' = \emptyset$$

Como w no es punto de irreducibilidad de Y, podemos tomar $b \in B'$ y $B \in C(w,Y) \setminus \{Y\}$ tales que $b \in B$. De acuerdo a esto y a la irreducibilidad de Y se sigue que

$$B \cap A' = \emptyset.$$

Así pues, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} A' & \subset & W \setminus B \qquad \text{y} \\ b & \in & B \cap B' \subset B \setminus W. \end{array}$$

Por tanto W no es terminal en w.

Caso 2 $A' \nsubseteq W$ y $B' \nsubseteq W$.

Una vez más, como w no es punto de irreducibilidad de Y, podemos tomar $a \in A'$, $b \in B'$ y $A, B \in C(w, Y) \setminus \{Y\}$ tales que $a \in A$ y $b \in B$. De acuerdo a esto y a la irreducibilidad de Y se sigue que

$$b \in B \setminus A \qquad \text{y} \qquad a \in A \setminus B.$$

Así pues, obtenemos que A y B son dos elementos no comparables de $C(w, X)$. De esta manera, por la Observación 5.3.5 se obtiene que $C(w, X)$ no es un arco. Dado que X es estrambótico, obtenemos que $C(w, X)$ es una 2-celda.

De este modo, sabemos que $C(w, X)$ no tiene puntos de corte, entonces, por el Lema 5.3.4, se tiene que W no es un subcontinuo de X terminal en w.

Así pues, existe $Z \in C(w, X)$ tal que

$$Z \setminus W \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad W \setminus Z \neq \emptyset. \tag{6.25}$$

En el caso en que $Z \subset Y$ obtenemos directamente que W no es un subcontinuo terminal de Y en w. Supongamos entonces que $Z \setminus Y \neq \emptyset$.

Tomando un elemento de un arco ordenado de Y a $Z \cup Y$ si fuera necesario, podemos suponer también que $Z \cup Y \subsetneq X$.

Sea $Z_0 = Z \cap Y$. Usando el Teorema 6.1.12 obtenemos que Z_0 es conexo.

Por otra parte, gracias al Lema 6.1.16 podemos suponer que $A' \subset Z_0$ (si $B' \subset Z_0$ se puede seguir un razonamiento análogo). Por hipótesis de este caso se sigue que

$$\emptyset \neq A' \setminus W \subset Z_0 \setminus W.$$

Además, de (6.25) tenemos que

$$\emptyset \neq W \setminus Z \subset W \setminus Z_0.$$

Por tanto W no es un subcontinuo de Y terminal en w.

Como hemos visto, en cada caso obtenemos que W no es un subcontinuo de Y terminal en w. De esta manera, utilizando el Lema 5.3.4, obtenemos que W no es punto de corte de $C(w,Y)$.

En consecuencia $C(w,Y)$ no tiene puntos de corte y concluimos la prueba del teorema.

□

En el siguiente teorema veremos algunas propiedades de los continuos estrambóticos irreducibles, las cuales, además de ser interesantes por sí mismas, nos serán de gran utilidad más adelante.

Teorema 6.2.3 *Sean X un continuo estrambótico y Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Supongamos que Y es irreducible entre A' y B' para algunos $A', B' \in C(Y)$. Entonces*

i) $C(A',Y)$ y $C(B',Y)$ son arcos,

ii) Si $C(p,Y)$ tiene puntos de corte, entonces $p \in A' \cup B'$,

iii) Y es descomponible.

Demostración.
Haremos la prueba del teorema por pasos, en cada uno de los cuales probaremos un inciso de la conclusión del teorema.

Paso 1 Aplicando el Teorema 6.1.15, obtenemos que cualesquiera dos subcontinuos de Y que contengan a A' son comparables. Usando ahora el Lema 5.3.6 concluimos que $C(A',Y)$ es un arco.

De manera similar puede probarse que $C(B',Y)$ es un arco.

Paso 2 En el Teorema 6.2.2 vimos que si $p \in Y \setminus (A' \cup B')$, entonces $C(p,Y)$ no tiene puntos de corte.

En otras palabras, si $C(p,Y)$ tiene puntos de corte, entonces $p \in A' \cup B'$.

Paso 3 Gracias al Teorema 5.3.10 se tiene que Y es descomponible.

Concluimos la prueba del teorema.

□

El objetivo de esta sección es mostrar un resultado que, al menos en este momento, puede sonar un tanto sorprendente: veremos que si X es un continuo estrambótico, entonces sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. La idea es empezar analizando un subcontinuo propio e irreducible Y, de X (digamos que Y es irreducible entre A' y B'). Veremos que $C(A',Y)$ es un arco y analizaremos la estructura de dicho arco, a partir de lo cual buscaremos mostrar que Y también es un arco.

La prueba de este resultado requiere el desarrollo de varias herramientas, algunas de las cuales serán algo complicadas. Las presentamos a continuación.

Teorema 6.2.4 *Sean X un continuo estrambótico y Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Supongamos que Y es irreducible entre A' y B' para algunos $A', B' \in C(Y)$.*

Sean $a \in A'$ y $\alpha : I \to C(A',Y)$ un arco ordenado de A' a Y. Entonces el conjunto $T = \{t \in I : \alpha(t) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}\}$ es denso en I

Demostración:
Supongamos que T no es denso en I, entonces podemos tomar $r \in (0,1)$ y $\varepsilon \in (0,r)$ tales que $0 < r - \varepsilon < r + \varepsilon < 1$ y

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap T = \emptyset. \tag{6.26}$$

Sea $Z = [0, r-\varepsilon] \cap T$. Definimos

$$t_0 = \begin{cases} sup\ Z, & \text{si } Z \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } Z = \emptyset. \end{cases} \tag{6.27}$$

$$s = inf\{t \in [r+\varepsilon, 1] : t \in T\}, \tag{6.28}$$

y tomamos

$$y \in \alpha(s) \setminus \bigcup\{\alpha(t) : 0 < t < s\}. \tag{6.29}$$

Sea $b \in B'$. Probaremos el resto del Teorema en 14 pasos. Empezaremos viendo que s y y están bien definidos.

Paso 1 s está bien definido y $t_0 < s$.

Por hipótesis $\alpha(1) = Y$, y claramente $Y \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$, así que $1 \in T$. En particular el conjunto $\{t \in [r+\varepsilon, 1] : t \in T\}$ es no vacío. Por tanto

$$s = inf\{t \in [r+\varepsilon, 1] : t \in T\}$$

está bien definido.

Finalmente,

$$t_0 \leq r - \varepsilon < r + \varepsilon \leq s.$$

Paso 2 y está bien definido.

Gracias al Teorema 6.2.3 tenemos que α es una parametrización del único arco ordenado de A' a Y. De acuerdo a esto y a [Mac, Teorema 3.1] obtenemos que y está bien definido.

Paso 3 $t_0 > 0$ y $\overline{int_Y(\alpha(s))} = \overline{int_Y(\alpha(t_0))} = \alpha(t_0)$.

Por hipótesis $A' = \alpha(0) \subsetneq \alpha(s)$, así que podemos aplicar el Lema 4.2.2 para obtener que

$$A' \subset int_Y\big(\alpha(s)\big). \tag{6.30}$$

Como Y es un espacio irreducible entre a y b, y $\alpha(s) \in C(a, Y)$, podemos usar ahora la Propiedad 4.1.13 para obtener que

$$\overline{int_Y(\alpha(s))} \in \mathbb{D}_{(Y,a)}. \tag{6.31}$$

En el Teorema 6.2.3 vimos que $C(A', Y)$ es un arco, así que la Observación 5.3.5 nos garantiza que α es el único arco ordenado de A' a Y. De esta manera

$$\overline{int_Y(\alpha(s))} = \alpha(s_0) \quad \text{para alguna } s_0 \in [0, s]. \tag{6.32}$$

En particular, gracias a (6.30) tenemos que

$$A' \subsetneq \alpha(s_0) \subset \alpha(s),$$

en otras palabras, $s_0 > 0$.

Ahora bien, de acuerdo a lo anterior, a (6.31), al paso 3 y a (6.36) se sigue que

$$0 < s_0 \leq t_0.$$

Así pues, como consecuencia de la definición de t_0 podemos tomar una sucesión creciente de elementos en T que converja a t_0. Si usamos ahora la Propiedad 4.1.15, obtenemos que

$$\alpha(t_0) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}, \tag{6.33}$$

de donde se sigue que

$$\overline{int_Y(\alpha(s))} = \alpha(s_0) \subset \alpha(t_0) = \overline{int_Y(\alpha(t_0))}. \tag{6.34}$$

Por otra parte, dado que $t_0 \leq s$ tenemos que $\alpha(t_0) \subset \alpha(s)$, de donde $int_Y(\alpha(t_0)) \subset int_Y(\alpha(s))$, y en consecuencia

$$\overline{int_Y(\alpha(t_0))} \subset \overline{int_Y(\alpha(s))}. \tag{6.35}$$

De (6.34) y (6.35) concluimos el resultado deseado.

Paso 4 $s \notin T$. En particular $s < 1$.

Por construcción tenemos que

$$(t_0, r] \cap T = \emptyset \;\text{ y }\; [r, s) \cap T = \emptyset,$$

es decir,

$$(t_0, s) \cap T = \emptyset. \tag{6.36}$$

En otras palabras,

$$\{\alpha(t) \in C(A', Y) : \alpha(t_0) \subsetneq \alpha(t) \subsetneq \alpha(s)\} \cap \mathbb{D}_{(Y,a)} = \emptyset. \tag{6.37}$$

Ahora bien, supongamos que $s \in T$.

Por hipótesis tenemos que Y es irreducible entre a y b, y del paso anterior se desprende que $t_0 \in T$. Gracias a esto y a (6.37) podemos aplicar la Propiedad 4.1.16 a $\alpha(t_0)$ y $\alpha(s)$ para obtener que

$$\overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \text{ es un subcontinuo indescomponible de } Y. \tag{6.38}$$

Finalmente, dado que X es estrambótico, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 5.3.10, obteniendo de esta manera que los subcontinuos propios y no degenerados de X son descomponibles. Sin embargo, esta afirmación contradice (6.38).

Por tanto $s \notin T$. En particular $s \neq 1$.

Paso 5 Sea $K' = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)}$, entonces $K' \in C(y, Y)$ y $\{y\} \subsetneq K' \subsetneq Y$.

En el Teorema 6.2.3 vimos que $C(A', Y)$ es un arco. Así pues podemos aplicar el Lema 5.3.7 a $\alpha(s)$ y $\alpha(t_0)$, para obtener que $\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)$ es conexo. De aquí que

$$K' = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \in C(Y).$$

Además tenemos que

$$y \in \alpha(s) \setminus \bigcup\{\alpha(t) : 0 < t < s\} \subset \alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \subset K'.$$

En consecuencia $K' \in C(y, Y)$.

Por otra parte, en el paso 1 vimos que $t_0 < s$, así que $\alpha(t_0) \subsetneq \alpha(s)$, y por tanto $K' \setminus \{y\} \neq \emptyset$.

Finalmente, en el paso 3 vimos que $s < 1$, de donde se sigue que $K' \subset \alpha(s) \subsetneq Y$.

El objetivo de los siguientes pasos es ver que K' es terminal en el punto y, en el subcontinuo Y.

Paso 6 Sea $K \in C(y, Y)$. Si $\alpha(s) \setminus \left(\alpha(t_0) \cup K\right) \neq \emptyset$, entonces existe $r' \in (t_0, s)$ tal que $\alpha(r') \setminus \left(\alpha(t_0) \cup K\right) \neq \emptyset$.

Supongamos que $\alpha(r') \subset \left(\alpha(t_0) \cup K\right)$ para cada $r' \in (t_0, s)$, entonces por continuidad de α se sigue que $\alpha(s) \subset \left(\alpha(t_0) \cup K\right)$, lo cual contradice nuestras hipótesis.

Por tanto $\alpha(r') \setminus \left(\alpha(t_0) \cup K\right) \neq \emptyset$ para alguna $r' \in (t_0, s)$.

Paso 7 Sea K' como en el paso 5 y sea $K \in C(y, Y)$ tal que

$$(K \setminus K') \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset.$$

Entonces $K' \subset K$.

Haremos la prueba viendo que $\alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \subset K$.

Supongamos que existe un punto w tal que

$$w \in \Big(\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)\Big) \setminus K \;=\; \alpha(s) \setminus \Big(\alpha(t_0) \cup K\Big) \tag{6.39}$$

De acuerdo al paso 6 podemos suponer que

$$w \in \alpha(r'), \quad \text{para alguna } r' \in (t_0, s). \tag{6.40}$$

En particular, como $r' < s$ tenemos que

$$y \notin \alpha(r') \tag{6.41}$$

Consideremos ahora $\alpha(t_0) \cup K$ y $\alpha(r')$.

Por hipótesis tenemos que

$$\emptyset \;\neq\; (K \setminus K') \cap \alpha(t_0) \;\subset\; K \cap \alpha(t_0),$$

de modo que $\alpha(t_0) \cup K \in C(A', X)$.

También sabíamos ya que $\alpha(r') \in C(A', X)$.

Sin embargo, tomando en cuenta (6.39), (6.40), (6.41) y la hipótesis de que $K \in C(y, Y)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} y &\in \Big(\alpha(t_0) \cup K\Big) \setminus \alpha(r') \;\text{ y} \\ w &\in \alpha(r') \setminus \Big(\alpha(t_0) \cup K\Big), \end{aligned}$$

de donde podemos concluir que $\alpha(t_0) \cup K$ y $\alpha(r')$ son dos elementos no comparables de $C(A', Y)$. Sin embargo, de acuerdo a lo anterior la Observación 5.3.5 nos dice que $C(A', Y)$ no es un arco, lo cual nos lleva a una contradicción con el Teorema 6.2.3.

Por tanto $\alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \subset K$ y en consecuencia

$$K' = \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \subset K.$$

Paso 8 Sean K' como en el paso 5 y $K \in C(Y)$, entonces

$$(K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \subset K \setminus \alpha(s)$$

$$
\begin{aligned}
(K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) &= \left(K \setminus \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)}\right) \cap \left(Y \setminus \alpha(t_0)\right) \\
&\subset \left(K \setminus \left(\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)\right)\right) \cap \left(Y \setminus \alpha(t_0)\right) \\
&= \left(K \setminus \left(\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)\right)\right) \cap \left(K \setminus \alpha(t_0)\right) \\
&= K \setminus \left(\left(\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)\right) \cup \alpha(t_0)\right) \\
&= K \setminus \alpha(s).
\end{aligned}
$$

Paso 9 Sean K' como en el paso 5 y $K \in C(y, Y)$ tales que

i) $(K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset$ y

ii) $\alpha(s) \not\subset \alpha(t_0) \cup K$.

Entonces $\alpha(t_0) \cap K = \emptyset$.

Supongamos que $\alpha(t_0) \cap K \neq \emptyset$, entonces

$$\alpha(t_0) \cup K \in C(A', X). \tag{6.42}$$

Ahora bien, por hipótesis y por el paso 8 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\emptyset &\neq (K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \\
&\subset K \setminus \alpha(s) \subset (\alpha(t_0) \cup K) \setminus \alpha(s).
\end{aligned} \tag{6.43}
$$

Por hipótesis tenemos también que

$$\alpha(s) \setminus \left(\alpha(t_0) \cup K\right) \neq \emptyset, \tag{6.44}$$

entonces de (6 42), (6.43) y (6.44) se sigue que $\alpha(s)$ y $\alpha(t_0) \cup K$ son dos elementos no comparables de $C(A', Y)$. Una vez más, la Observación 5.3.5 nos dice que en este caso $C(A', Y)$ no es un arco, lo cual nos lleva a una contradicción con el Teorema 6.2.3.

Por tanto $\alpha(t_0) \cap K = \emptyset$

Paso 10 Sean K' como en el paso 5 y $K \in C(y, Y)$ tales que

i) $(K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset$ y

ii) $\alpha(s) \not\subseteq \alpha(t_0) \cup K$.

Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(t_0 + \delta) \cap K = \emptyset$.

Si suponemos que $\alpha(t_0+\delta) \cap K \neq \emptyset$ para cada $\delta > 0$, entonces tomando límite cuando δ tiende a 0 tendríamos que $\alpha(t_0) \cap K \neq \emptyset$, lo cual contradice el paso anterior.

Por tanto existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(t_0 + \delta) \cap K = \emptyset$.

Paso 11 Sea $s' \in [s, 1]$, entonces $int_Y\big(\alpha(s')\big) \subset int_Y\big(\alpha(s)\big) \cup \overline{\alpha(s') \setminus \alpha(s)}$.

Dado que $s \leq s'$, tenemos que $\alpha(s) \subset \alpha(s')$, así que

$$\alpha(s') = \alpha(s) \cup \Big(\alpha(s') \setminus \alpha(s)\Big) \subset \alpha(s) \cup \big(\overline{\alpha(s') \setminus \alpha(s)}\big) \tag{6.45}$$

Si aplicamos ahora el Lema 2.4.6 obtenemos que

$$int_Y\Big(\alpha(s) \cup \big(\overline{\alpha(s') \setminus \alpha(s)}\big)\Big) \subset int_Y\big(\alpha(s)\big) \cup \big(\overline{\alpha(s') \setminus \alpha(s)}\big) \tag{6.46}$$

Finalmente, de (6.45) y (6.46) concluimos que

$$int_Y\big(\alpha(s')\big) \subset int_Y\big(\alpha(s)\big) \cup \overline{\alpha(s') \setminus \alpha(s)}.$$

Paso 12 Sean K' como en el paso 5 y $K \in C(y, Y)$ tales que

$$(K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset.$$

Entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t_0) \cup K$.

Por construcción $y \in \alpha(s) \cap K$, de modo que $\alpha(s) \cup K \in C(A', Y)$.

En el Teorema 6.2.3 vimos que $C(A', Y)$ es un arco, así pues, la Observación 5.3.5 nos dice que α es el único arco ordenado de A' a Y. De esta manera

$$\alpha(s) \cup K = \alpha(s_1) \quad \text{para alguna } s_1 \in [s, 1].$$

Además, por hipótesis de este paso y por el paso 8 se tiene que

$$\emptyset \neq (K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \subset K \setminus \alpha(s) \tag{6.47}$$

de modo que

$$s_1 > s. \tag{6.48}$$

De acuerdo a lo anterior y a la definición de s podemos tomar

$$s_2 \in [s, s_1) \cap T. \tag{6.49}$$

Supongamos que $\alpha(s) \not\subseteq \alpha(t_0) \cup K$, entonces de acuerdo al paso 10 existe $\delta > 0$ tal que

$$\alpha(t_0 + \delta) \cap K = \emptyset. \tag{6.50}$$

En particular, dado que $y \in \alpha(s) \cap K$, se tiene que

$$t_0 + \delta < s. \tag{6.51}$$

Tomemos ahora un punto z tal que

$$z \in \alpha(t_0 + \delta) \setminus \alpha(t_0). \tag{6.52}$$

En el paso 4 vimos que $\overline{int_Y(\alpha(s))} = \overline{int_Y(\alpha(t_0))} = \alpha(t_0)$, de modo que

$$z \notin \overline{int_Y(\alpha(s))}. \tag{6.53}$$

Por otra parte, tomando en cuenta (6.50) y (6.52) se sigue que

$$z \notin K. \tag{6.54}$$

Ahora bien, como $s_2 < s_1$ tenemos que

$$\alpha(s_2) \subset \alpha(s_1) = \alpha(s) \cup K,$$

de donde es fácil ver que

$$\alpha(s_2) \setminus \alpha(s) \subset K \setminus \alpha(s) \subset K.$$

Como $K \in C(Y)$ se sigue que

$$\overline{\alpha(s_2) \setminus \alpha(s)} \subset K \tag{6.55}$$

Usando ahora (6.53), (6.54), (6.55), el paso 11, (6.49) y (6.51) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
z &\in X \setminus \left[\overline{int_Y(\alpha(s))} \cup K\right] \\
&\subset X \setminus \left[\overline{int_Y(\alpha(s))} \cup \overline{\alpha(s_2) \setminus \alpha(s)}\right] \\
&= X \setminus \left[\overline{int_Y\Big(\alpha(s_2)\Big)}\right] \;=\; X \setminus \alpha(s_2) \\
&\subset X \setminus \alpha(s) \;\subset\; X \setminus \alpha(t_0 + \delta).
\end{aligned}
\tag{6.56}
$$

Sin embargo esto contradice (6.52).

Esta contradicción vino de suponer que $\alpha(s) \not\subset \alpha(t_0) \cup K$, por tanto

$$\alpha(s) \subset \alpha(t_0) \cup K.$$

Paso 13 Si K' es como en el paso 5, entonces $A' \cap K' = \emptyset$ y $B' \cap K' = \emptyset$. En particular, $\{a, b\} \cap K' = \emptyset$ y $y \notin A' \cup B'$.

Por una parte, como $s < 1$ tenemos que

$$K' \;=\; \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \;\subset\; \alpha(s) \;\subset\; Y \setminus B'.$$

En particular, $b \notin K'$.

Por otra parte, claramente

$$int_Y(\alpha(t_0)) \;\cap\; \Big(\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)\Big) = \emptyset,$$

así que

$$int_Y(\alpha(t_0)) \cap \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \;=\; \emptyset.$$

Además, por el Lema 4.2.2 sabemos que $A' \subset int_Y(\alpha(t_0))$, de manera que

$$A' \cap K' \;=\; A' \cap \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \;=\; \emptyset.$$

En particular, $a \notin K'$.

Finalmente, en el paso 5 vimos que $K' \in C(y, Y)$ y por tanto

$$y \notin A' \cup B'.$$

Paso 14 Si K' es como en el paso 5, entonces K' es un subcontinuo de Y terminal en y.

Sea $K \in C(y, Y)$ tal que $K \setminus K' \neq \emptyset$. Analizaremos dos casos para ver que entonces $K' \subset K$.

Caso 1 $(K \setminus K') \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset$

En el paso 7 vimos que, con estas hipótesis, se tiene que $K' \subset K$.

Caso 2 $(K \setminus K') \cap (Y \setminus \alpha(t_0)) \neq \emptyset$.

En el paso 12 vimos que en este caso, $\alpha(s) \subset \alpha(t_0) \cup K$, de aquí que

$$\alpha(s) \setminus \alpha(t_0) \ \subset \ K \setminus \alpha(t_0) \ \subset \ K$$

y por tanto

$$K' \ = \ \overline{\alpha(s) \setminus \alpha(t_0)} \ \subset \ K.$$

En cualquier caso concluimos que $K' \subset K$. Por tanto K' es un subcontinuo de Y terminal en y.

Ahora bien, en el Teorema 6.2.3 vimos que

$$\{p \in Y : C(p, Y) \text{ tiene puntos de corte}\} \subset A' \cup B'.$$

Además, en el paso 13 vimos que $y \notin A' \cup B'$, en consecuencia $C(y, Y)$ no tiene puntos de corte.

Por otra parte, en el paso 5 vimos que $\{y\} \subsetneq K' \subsetneq Y$.

Sin embargo, el Lema 5.3.4 y las afirmaciones anteriores contradicen la terminalidad de K' en y que vimos en el paso 14.

Esta contradicción vino de suponer que T no es denso en I, así que podemos concluir la prueba del teorema.

□

Proposición 6.2.5 *Sean X un continuo estrambótico y Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Supongamos que Y es irreducible entre A' y B' para algunos $A', B' \in C(Y)$.*

Tomemos $a \in A'$. Entonces $C(A', Y) \setminus \{A'\} \subset \mathbb{D}_{(Y,a)}$.

Demostración:
En el Teorema 6.2.3 vimos que $C(A', Y)$ es un arco. Así pues, gracias a la Observación 5.3.5 existe un único arco ordenado que une a A' con Y. Parametricemos por $\alpha : I \to C(A', Y)$ a tal arco ordenado.

Tomemos $D \in C(A', Y) \setminus \{A'\}$. De acuerdo a lo anterior, se tiene que $D = \alpha(s)$ para alguna $s > 0$.

Ahora bien, por el Teorema 6.2.4 sabemos que el conjunto

$$T = \{t \in I : \alpha(t) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}\}$$

es denso en I. De modo que podemos tomar una sucesión creciente $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ tal que $s_n \to s$ y

$$\{\alpha(s_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}_{(Y,a)}.$$

Usando ahora la Propiedad 4.1.15 obtenemos que

$$D = \alpha(s) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}.$$

Por tanto $C(A', Y) \setminus \{A'\} \subset \mathbb{D}_{(Y,a)}$ y podemos concluir la prueba de la proposición.

□

Proposición 6.2.6 *Sean X un continuo estrambótico y Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Supongamos que Y es irreducible entre A' y B' para algunos $A', B' \in C(Y)$.*

Entonces $Fr_Y(D)$ es unipuntual para cada $D \in C(A', Y) \setminus \{A', Y\}$.

Demostración:
En el Teorema 6.2.3 vimos que $C(A', Y)$ es un arco. De esta manera, gracias a la Observación 5.3.5, existe un único arco ordenado que une a A' con Y. Sea $\alpha : I \to C(A', Y)$ una parametrización de tal arco ordenado.

Tomemos $a \in A'$ y $D \in C(A', Y) \setminus \{A', Y\}$.

De acuerdo a lo anterior, existe $t \in (0, 1)$ tal que $D = \alpha(t)$. Supongamos que la frontera de $\alpha(t)$ en Y tiene más de un punto y tomemos $x \in Fr_Y(\alpha(t))$.

Dado que $D \neq A'$, si aplicamos el Lema 4.2.2, podemos concluir que $A' \subset int_Y(\alpha(t))$, en particular

$$x \notin A'. \tag{6.57}$$

Por otra parte, dado que Y es irreducible entre A' y B' se sigue que

$$B' \cap \alpha(t) = \emptyset,$$

y en particular

$$x \notin B'. \tag{6.58}$$

Por otra parte, en el Teorema 6.2.3 vimos que si $C(x,Y)$ tiene puntos de corte, entonces $x \in A' \cup B'$. Así pues, de acuerdo a (6.57) y a (6.58) se sigue que $C(x,Y)$ no tiene puntos de corte.

Si usamos ahora el Lema 5.3.8, obtenemos que $Fr_Y(\alpha(t)) \in C(x,Y)$, así que podemos aplicar el Lema 5.3.4 para obtener que $Fr_Y(\alpha(t))$ no es terminal en x.

Así pues, podemos tomar $K \in C(x,Y)$ tal que

$$K \setminus Fr_Y(\alpha(t)) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad Fr_Y(\alpha(t)) \setminus K \neq \emptyset. \tag{6.59}$$

Continuaremos la prueba analizando dos casos.

Caso 1 $K \setminus \alpha(t) \neq \emptyset$.

Sea $w \in Fr_Y(\alpha(t)) \setminus K$.

Dado que $x \in K \cap \alpha(t)$, se tiene que $K \cup \alpha(t) \in C(Y)$ y en este caso

$$w \in \alpha(t) \subsetneq K \cup \alpha(t) \in C(A',Y).$$

En particular tenemos que

$$\alpha(t) \cup K \text{ no es irreducible entre } a \text{ y } w. \tag{6.60}$$

Además, como $t > 0$ tenemos que $A' \subsetneq \alpha(t) \cup K$, así que podemos aplicar la Proposición 6.2.5 para obtener que

$$\alpha(t) \cup K \in \mathbb{D}_{(Y,a)} \tag{6.61}$$

Ahora bien, de acuerdo al Lema 2.4.7 y la elección de w tenemos que $w \in Fr_Y(\alpha(t) \cup K)$.

Sin embargo, gracias a la afirmación anterior, a (6.60) y a (6.61) llegamos a una contradicción con la Propiedad 4.1.5.

Esto termina el análisis de este caso.

Caso 2 $K \subset \alpha(t)$.

Sea $b \in B'$.

Gracias a (6.59), sabemos que

$$K \setminus Fr_Y\big(Y \setminus \alpha(t)\big) \neq \emptyset.$$

Así pues, en este caso tenemos que

$$K \setminus \overline{Y \setminus \alpha(t)} \neq \emptyset. \tag{6.62}$$

Además, del Lema 5.3.7 se desprende que $\overline{Y \setminus \alpha(t)}$ es conexo.

Por otra parte, usando la irreducibilidad de Y, y que $t \in (0,1)$, obtenemos que

$$B' \subset Y \setminus \alpha(t). \tag{6.63}$$

Así pues, como $x \in K \cap Fr_Y\big(Y \setminus \alpha(t)\big)$ se sigue que

$$K \cup \overline{Y \setminus \alpha(t)} \in C(B', Y) \setminus \{B'\}.$$

Por tanto estamos en condiciones de aplicar la Proposición 6.2.5 para obtener que

$$K \cup \overline{Y \setminus \alpha(t)} \in \mathbb{D}_{(Y,b)}. \tag{6.64}$$

Por cierto, como $t > 0$ tenemos que $A' \subsetneq \alpha(t)$, así que podemos aplicar la Proposición 6.2.5 para obtener que $\alpha(t) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$. De aquí no es difícil ver que

$$Fr_Y\big(\alpha(t)\big) = Fr_Y\big(\overline{Y \setminus \alpha(t)}\big).$$

Ahora bien, de acuerdo a (6.59) podemos tomar un punto w tal que

$$w \in Fr_Y\big(\alpha(t)\big) \setminus K = Fr_Y\big(\overline{Y \setminus \alpha(t)}\big) \setminus K.$$

Entonces por el Lema 2.4.7 tenemos que

$$w \in Fr_Y\big(\overline{Y \setminus \alpha(t)} \cup K\big). \tag{6.65}$$

Finalmente, de (6.63) y (6 62) se sigue que

$$b, w \in \overline{Y \setminus \alpha(t)} \subsetneq K \cup \overline{Y \setminus \alpha(t)},$$

de donde es fácil ver que $K \cup \overline{Y \setminus \alpha(t)}$ no es irreducible entre b y w.

Sin embargo, de acuerdo a la afirmación anterior, a (6.64) y a (6.65) llegamos a una contradicción con la Propiedad 4.1.5.

Esto muestra que este caso también es imposible.

Por tanto $Fr_Y(\alpha(t))$ es unipuntual para cada $t \in (0,1)$, así que finalizamos la prueba de la proposición.

□

Proposición 6.2.7 *Sean X un continuo estrambótico y Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Supongamos que Y es irreducible entre A' y B' para algunos $A', B' \in C(Y)$.*

Sea $\alpha : I \to C(A', Y)$ un arco ordenado de A' a Y. Entonces, para cada $x \in Y \setminus (A' \cup B')$, existe $t \in (0,1)$ tal que $x \in Fr_Y(\alpha(t))$.

Demostración:
Sean $x \in Y \setminus (A' \cup B')$, $a \in A'$ y $b \in B'$.
Definimos

$$t = min\{s \in I : x \in \alpha(s)\}$$

Veremos en tres pasos que t satisface las condiciones requeridas.

Paso 1 t está bien definido y $0 < t < 1$.

Claramente $x \in Y = \alpha(1)$, así que el conjunto $\{s \in I : x \in \alpha(s)\}$ es no vacío.

Consideremos $t' = inf\{s \in I : x \in \alpha(s)\}$.

Si $t' = 1$, entonces $t = t'$. Si $t' < 1$, tenemos que $x \in \alpha(t' + \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande), y gracias a la continuidad de α obtenemos que $x \in \alpha(t')$. Por tanto t' de hecho es un mínimo y t está bien definido.

Por otra parte sabemos que $x \notin B'$, así que Y no es irreducible entre a y x y por tanto podemos hallar $K \in C(a, Y) \setminus \{Y\}$ tal que $x \in K$.

Sin embargo, por el Lema 4.2.2 sabemos que entonces

$$A' \subset int_Y(K) \subset K.$$

Como consecuencia del Teorema 6.2.3 y la Observación 5.3.5, tenemos que

$$\alpha \text{ es una parametrización del único arco ordenado de } A' \text{ a } Y. \quad (6.66)$$

De aquí que $K = \alpha(s)$ para alguna $s \in [0,1)$. En consecuencia

$$t \leq s < 1.$$

Finalmente, estamos suponiendo que $x \notin A'$, así que $t > 0$.

Paso 2 $x \in \alpha(t)$.

Es consecuencia de la construcción de t.

Paso 3 $x \in \overline{Y \setminus \alpha(t)}$

Por el Lema 5.3.7 sabemos que $Y \setminus \alpha(t)$ es conexo. Además, como en el paso 1 vimos que $t < 1$ y Y es irreducible entre A' y B', tenemos que $B' \subset Y \setminus \alpha(t)$. En consecuencia,

$$\overline{Y \setminus \alpha(t)} \in C(B', Y).$$

Sea $\beta : I \to C(B', Y)$ un arco ordenado de B' a Y. Como consecuencia del Teorema 6.2.3 y la Observación 5.3.5, se tiene que β es una parametrización del único arco ordenado de B' a Y. De aquí que

$$\overline{Y \setminus \alpha(t)} = \beta(s) \quad \text{para alguna } s \in [0,1).$$

Supongamos que $x \notin \overline{Y \setminus \alpha(t)} = \beta(s)$.

Sabemos que β es continua, así que existe $s' \in (s, 1)$ tal que

$$x \notin \beta(s'), \quad (6.67)$$

en particular, como $B' \subset \beta(s')$ y Y es irreducible entre A' y B' se tiene que $A' \subset \overline{Y \setminus \beta(s')}$. Aplicando ahora el Lema 5.3.7 obtenemos que

$$\overline{Y \setminus \beta(s')} \in C(A', Y).$$

Así pues, de aquí y de (6.66) se desprende que $\overline{Y \setminus \beta(s')} = \alpha(r)$ para alguna $r \in I$. Además, gracias a (6.67) se sigue que

$$x \in \overline{Y \setminus \beta(s')} = \alpha(r) \qquad (6.68)$$

Ahora bien, sabemos que $B' \subset \beta(s) \subsetneq \beta(s')$, así que podemos aplicar la Proposición 6.2.5 para obtener que

$$\beta(s') \in \mathbb{D}_{(Y,b)}.$$

Si ahora aplicamos la Propiedad 4.1.6 podemos deducir que

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \overline{Y \setminus \beta(s')} \subsetneq \overline{Y \setminus \beta(s)} = \overline{Y \setminus \overline{Y \setminus \alpha(t)}} \\ &= \overline{Y \setminus \overline{ext_Y(\alpha(t))}} = \overline{int_Y(\alpha(t))} \subset \alpha(t). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$r < t \qquad (6.69)$$

Finalmente, de acuerdo a (6.68) y a (6.69) llegamos a una contradicción con la definición de t.

Por tanto $x \in \overline{Y \setminus \alpha(t)}$.

Como consecuencia de los pasos 2 y 3 obtenemos que $x \in Fr_Y(\alpha(t))$ y concluimos la prueba de la proposición.

□

Teorema 6.2.8 *Sean X un continuo estrambótico y $Y \in C(X) \setminus \{X\}$. Si Y tiene más de un punto, entonces Y es irreducible entre A' y B' para algunos $A', B' \in C(Y)$.*

Demostración:
De acuerdo al Teorema 6.1.12 y al Teorema 6.1.9, Y es unicoherente y no contiene triodos. De esta manera, aplicando [Nad92, Teorema 11.34] obtenemos que Y es irreducible. Por otra parte, el Teorema 5.3.10 nos dice que Y es hereditariamente descomponible. Finalmente, aplicando [Mil50, Lema A, (1)] obtenemos el resultado buscado.

□

Teorema 6.2.9 *Sean X un continuo estrambótico y Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Si Y es irreducible entre los subcontinuos A' y B', entonces $|A'| = 1 = |B'|$.*

Demostración:
Veremos en 4 pasos que $|A'| = 1$. De manera similar se puede probar que $|B'| = 1$.

Supongamos que $|A'| > 1$.

Paso 1 Existe $K \in C(a, X)$, para alguna $a \in A'$, tal que satisface las siguientes condiciones:

i) $K \setminus A' \neq \emptyset$,
ii) $A' \setminus K \neq \emptyset$,
iii) $K \cap Y$ es conexo,
iv) $K \cap Y \subset A'$ (en particular, $K \cap Y = K \cap A'$),
v) $Y \subsetneq Y \cup K \subsetneq X$ y
vi) $K \setminus Y$ es conexo.

Como X es un continuo estrambótico, el conjunto

$$\{p \in X : C(p, X) \text{ tiene puntos de corte}\}$$

es a lo más numerable. Como estamos suponiendo que el subcontinuo A' tiene más de un punto, podemos elegir $a \in A'$ de manera que $C(a, X)$ no tenga puntos de corte. Notemos que $\{a\} \subsetneq A' \subset Y \subsetneq X$. Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Lema 5.3.4 para obtener que A' no es un subcontinuo de X terminal en a.

En otras palabras, podemos tomar $K' \in C(a, X)$ tal que

$$K' \setminus A' \neq \emptyset \neq A' \setminus K'.$$

Sin embargo, por el Lema 4.2.2 sabemos que A' es un subcontinuo terminal de Y, así que

$$K' \setminus Y \neq \emptyset. \tag{6.70}$$

Ahora bien, sea L la componente de $A' \cap K'$ que contiene a a, y sea $\alpha : I \to C(K')$ un arco ordenado que empiece en L y termine en K'. Gracias al Corolario 6.1.4 tenemos que $A' \cap K'$ tiene a lo más dos componentes, así que podemos tomar $\delta \in (0, 1)$ tal que

1. $\alpha(\delta) \cap Y = L \subset A'$ (en particular, $a \in \alpha(\delta)$),
2. $Y \cup \alpha(\delta) \neq X$ y
3. $\alpha(\delta) \setminus Y$ es conexo (notemos que $\alpha(\delta) \setminus Y \neq \emptyset$).

Sea $K = \alpha(\delta)$ Entonces $K \in C(a, X)$ y

$$K \setminus A' \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \emptyset \neq A' \setminus K' \subset A' \setminus K.$$

De acuerdo a la condición 2 y a (6.70) se sigue que

$$Y \subsetneq Y \cup K \subsetneq X.$$

Terminamos la prueba de este paso.

Paso 2 Sea $Y' = Y \cup K$, donde K es como en el paso 1. Entonces $Y' \subsetneq X$ y Y' es irreducible entre dos subcontinuos C' y D', donde $C' \subset K \setminus Y$ y $D' \subset B'$.

En el paso 1 vimos que $Y' \in C(X) \setminus \{X\}$, así que por el Teorema 6.2.8 sabemos que Y' es irreducible entre dos subcontinuos $C', D' \in C(Y')$.

Es fácil ver que si $C' \cap Y \neq \emptyset \neq D' \cap Y$, entonces Y' no es irreducible entre C' y D'. De la misma manera, no es posible que $C' \cap K \neq \emptyset$ y $D' \cap K \neq \emptyset$.

Así pues, podemos suponer que $C' \subset K \setminus Y$ y $D' \subset Y \setminus K$.

Supongamos ahora que existe un punto $e \in D' \setminus B'$. En este caso existe un subcontinuo propio M de Y tal que $e \in M$ y $M \cap A' \neq \emptyset$. Nótese que en este caso $M \cup A'$ también es un subcontinuo propio de Y, gracias a la irreducibilidad de éste.

De aquí que $M \cup A' \cup K$ es un subcontinuo propio de Y' que contiene a e y a C', de donde se sigue que Y' no es irreducible entre D' y C'. Por tanto $D' \subset B'$.

Paso 3 Sean a, K como en el paso 1, y sean Y', C', D' como en el paso 2. Consideremos un arco ordenado $\gamma : I \to C(C', Y')$ que empiece en C' y termine en Y', y $s_1, s_2 \in I$ tales que

$$\gamma(s_1) = \overline{K \setminus Y} \quad \text{y} \quad \gamma(s_2) = K \cup A'.$$

Veremos que s_1 y s_2 están bien definidos y $s_1 < s_2$.

En el paso 2 vimos que $C' \subset K \setminus Y$. Además, en el paso 1 vimos que $K \setminus Y$ es conexo y que $a \in K \cap A'$. De aquí que

$$\overline{K \setminus Y},\ K \cup A' \ \in \ C(C', Y').$$

Por otra parte, por el Teorema 6.2.3 sabemos que $C(C', Y')$ es un arco, así que, por la Observación 5.3.5, $\gamma(I)$ es el único arco ordenado de C' a Y'.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, podemos tomar $s_1, s_2 \in I$ tales que

$$\gamma(s_1) = \overline{K \setminus Y} \quad \text{y} \quad \gamma(s_2) = K \cup A'.$$

Por tanto, s_1 y s_2 están bien definidos.

Finalmente, gracias al paso 1 es fácil ver que

$$\gamma(s_1) \ \subset \ K \ \subsetneq \ K \cup A' \ = \ \gamma(s_2),$$

de donde se desprende que $s_1 < s_2$.

Paso 4 Sean K, Y', γ, s_1 y s_2 como se definieron en los pasos anteriores. Entonces $Fr_{Y'}(\gamma(s_1)) \subset Fr_{Y'}(\gamma(s_2))$.

Sea $z \in Fr_{Y'}(\gamma(s_1))$.

Claramente tenemos que $z \in \gamma(s_1) \subset \gamma(s_2)$. Tomemos ahora cualquier subconjunto abierto U de Y' tal que $z \in U$. Veremos que $U \setminus \gamma(s_2) \neq \emptyset$.

En el paso 1 vimos que

$$K \cap Y \ = \ K \cap A'. \tag{6.71}$$

Y por el paso 2, tenemos que

$$Y' \ = \ K \cup Y \ = \ (K \setminus Y) \cup (K \cap Y) \cup (Y \setminus K). \tag{6.72}$$

Por otra parte, como $z \in Fr_{Y'}(\gamma(s_1))$ se sabe que

$$\emptyset \ \neq \ U \setminus \gamma(s_1) \ = \ U \setminus \overline{K \setminus Y} \ \subset \ U \setminus (K \setminus Y),$$

De aquí, de (6.72) y de (6.71) se desprende que

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq U \cap \big[(K \cap Y) \cup (Y \setminus K)\big] \\ &\subset U \cap \big[A' \cup (Y \setminus K)\big] \\ &= U \cap \big[A' \cup (Y \setminus A')\big] \;=\; U \cap Y. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Por otro lado, gracias al Lema 4.2.3 sabemos que

$$int_{Y'}(A') \;\subset\; int_Y(A') \;=\; \emptyset.$$

De aquí que

$$U \cap Y \not\subseteq A'. \tag{6.74}$$

Finalmente, de (6.74) y (6.71) se sigue que

$$(U \cap Y) \setminus K \;\supset\; (U \cap Y) \setminus A' \;\neq\; \emptyset.$$

En particular,

$$\emptyset \;\neq\; (U \cap Y) \setminus (K \cup A') \;\subset\; U \setminus (K \cup A') \;=\; U \setminus \gamma(s_2).$$

Por tanto

$$z \in Fr_{Y'}\big(\gamma(s_2)\big). \tag{6.75}$$

Ahora bien, como consecuencia del paso 4 tenemos que

$$Fr_{Y'}\big(\gamma(s_1)\big) \cap Fr_{Y'}\big(\gamma(s_2)\big) \;\neq\; \emptyset. \tag{6.76}$$

Finalmente, en el paso 2 vimos que el continuo Y' es irreducible entre sus subcontinuos C' y D' y que $Y' \subsetneq X$. Sea $c \in C'$. Así pues, estamos en condiciones de aplicar la Proposición 6.2.5 a los continuos X y Y' para obtener que

$$C(C', Y') \setminus \{C'\} \;\subset\; \mathbb{D}_{(Y',c)}.$$

En particular

$$\gamma(s_1), \gamma(s_2) \;\in\; \mathbb{D}_{(Y',c)}.$$

Sin embargo, (6.76) y la afirmación anterior nos llevan a una contradicción con la Propiedad 4.1.9.

Esta contradicción vino de suponer que $|A'| > 1$. Por tanto $|A'| = 1$ y podemos concluir la prueba del teorema.

□

Finalmente, como consecuencia de la teoría que hemos desarrollado, presentamos el teorema culminante de esta sección.

Teorema 6.2.10 *Sean X un continuo estrambótico y Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Entonces Y es un arco*

Demostración:
En el Teorema 6.2.8 vimos que, en este caso, Y es irreducible entre dos de sus subcontinuos A' y B'. Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 6.2.9 para obtener que $A' = \{a\}$ y $B' = \{b\}$ para algunos $a, b \in Y$. Veremos ahora que, si $x \in Y \setminus \{a, b\}$, entonces x es punto de corte de Y.

Sea $\alpha : I \to C(a, Y)$ un arco ordenado de $\{a\}$ a Y.

De acuerdo a la Proposición 6.2.7 existe $t \in (0, 1)$ tal que $x \in Fr_Y(\alpha(t))$, en particular

$$\{a\} \;=\; \alpha(0) \subsetneq \alpha(t) \qquad \text{y} \tag{6.77}$$
$$\alpha(t) \;\subsetneq\; \alpha(1) \;=\; Y. \tag{6.78}$$

Gracias a la Proposición 6.2.5 y a (6.77) tenemos que $\alpha(t) \in \mathbb{D}_{(Y,a)}$, y usando la Propiedad 4.1.8 obtenemos que

$$int_Y(\alpha(t)) \neq \emptyset. \tag{6.79}$$

Por otra parte, de (6.78) se sigue que

$$ext_Y(\alpha(t)) \;=\; Y \setminus \alpha(t) \;\neq\; \emptyset. \tag{6.80}$$

Ahora bien, en la Proposición 6.2.6 vimos que la frontera de $\alpha(t)$ en Y es unipuntual, es decir

$$Fr_Y(\alpha(t)) = \{x\}.$$

De aquí que

$$Y \setminus \{x\} \;=\; int_Y(\alpha(t)) \cup ext_Y(\alpha(t)),$$

es decir, podemos expresar al complemento de $\{x\}$ en Y como la unión de dos subconjuntos abiertos y ajenos de Y, que además son no vacíos gracias a (6.79) y a (6.80).

En consecuencia, x es punto de corte de Y.

Finalmente, los siguientes resultados son conocidos:

1. Si un continuo W es irreducible entre dos puntos a y b, entonces ni a ni b son puntos de corte de W (véase [Nad92, Teorema 11.6]).

2. Si en un continuo W todos los puntos son de corte excepto dos de ellos, entonces W es un arco (véase [Nad92, Corolario 9.29]).

Por tanto podemos concluir que Y es un arco y concluimos la prueba del teorema.

□

6.3 Ejemplos

En el Teorema 6.2.10 vimos que si un continuo X es tal que

i) los hiperespacios $C(p, X)$ son arcos o 2-celdas y

ii) X tiene a lo más una cantidad numerable de puntos p, para los cuales $C(p, X)$ tiene puntos de corte,

entonces los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos. Una pregunta que aparece de manera natural es si se pueden debilitar las hipótesis de este teorema. Por ejemplo, uno podría preguntar ¿qué pasa si en lugar de pedir la condición *i*), pedimos únicamente que $\dim(C(p, X)) < 3$ para cada $p \in X$? O bien ¿qué pasa si tenemos una cantidad no numerable de puntos $p \in X$ para los cuales $C(p, X)$ tiene puntos de corte? ¿se podrá llegar a la misma conclusión?

Veamos un ejemplo que da una respuesta negativa a la primera pregunta.

Ejemplo 6.3.1 Un continuo X tal que

a) $\dim(C(p, X)) < 3$ para cada $p \in X$,

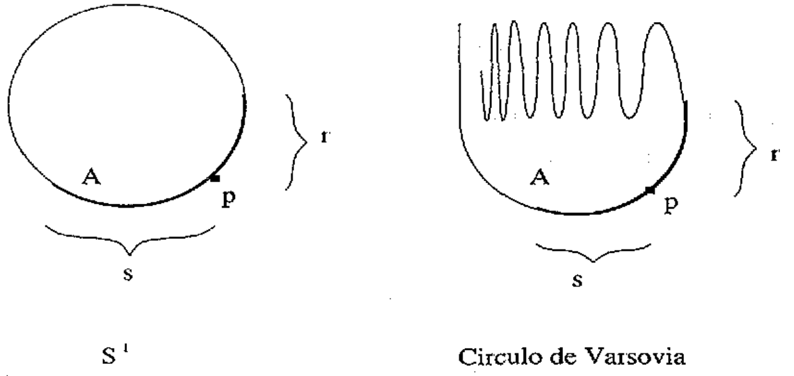


Figura 6.1: Parámetros para determinar $C(p, X)$

b) X tiene a lo más una cantidad numerable de puntos p, para los cuales $C(p, X)$ tiene puntos de corte,

c) X tiene un subcontinuo propio y no degenerado que no es un arco.

Sea X el *Círculo de Varsovia* (véase [Nad92, 1.6]):

Es fácil ver que X contiene un subcontinuo propio, que es homeomorfo a la cerradura de la gráfica de la función $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. Por tanto, X cumple la condición c).

Veremos ahora que X satisface la condición a).

Antes de calcular los hiperespacios $C(p, X)$, donde X es el Círculo de Varsovia (figura 6.1), recordemos cómo calculamos los hiperespacios $C(p, S^1)$.

Cuando buscábamos determinar cómo eran los hiperespacios $C(p, S^1)$, lo que hacíamos era determinar cada $A \in C(p, S^1)$ por dos parámetros r y s, los cuales nos indicaban qué tanto medía A a la "derecha" del punto p, y qué tanto medía a la "izquierda". De esta manera, cada $A \in C(p, S^1)$ estaba completamente determinado por los parámetros r y s, quienes se comportan de manera relativamente independiente. De aquí deducíamos que $C(p, S^1)$ es una 2-celda para cada $p \in S^1$ (véanse Lema 5.4.4 y figura 6.1).

Así pues, si procedemos de manera análoga a como lo hicimos para S^1, tendríamos lo siguiente. Si tomamos un punto $p \in X$, como en la figura 6.1,

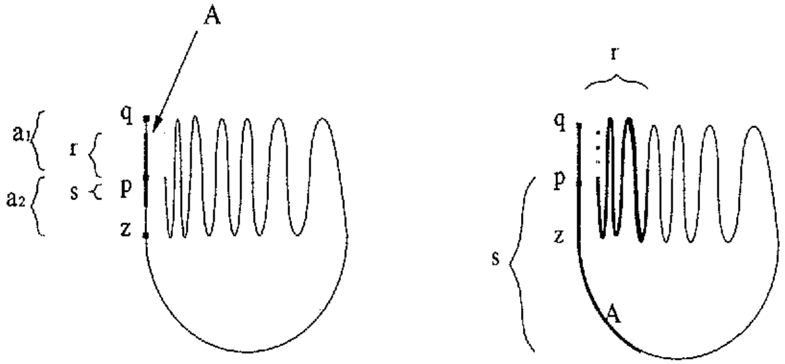


Figura 6.2: Elementos típicos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

y consideramos un subcontinuo $A \in C(p, X)$, entonces A está completamente determinado por dos parámetros, r y s, los cuales nos indican qué tanto mide A hacia la "derecha" de p, y qué tanto mide hacia su "izquierda", respectivamente. Una vez establecido esto, probablemente no es muy difícil convencerse de que $C(p, X)$ es una 2-celda. Este argumento no suena mal, sin embargo hay algunos puntos particulares con los cuales hay que tener cuidado. Consideremos a los puntos q y z de la figura 6.2 y a un punto $p \in X \setminus \{q, z\}$ que no sea de conexidad local.

En este caso podemos escribir a $C(p, X)$ como $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, donde

$$\mathcal{A} = \{A \in C(p, X) : z \notin A\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{B \in C(p, X) : z \in B\}.$$

En la figura 6.2 están representados dos elementos típicos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Es fácil ver que A está determinado por dos parámetros r y s, quienes representan, respectivamente, qué tanto mide A hacia "arriba" de p y qué tanto mide hacia "abajo" de p. Supongamos que los segmentos pq y pz miden a_1 y a_2, respectivamente. Así pues, podemos observar que $r \leq a_1$ y $s < a_2$. De esta manera, es fácil ver que podemos representar a $\mathcal{A}$ como el espacio $[0, a_1] \times [0, a_2)$.

De manera similar, el subcontinuo B está determinado por dos parámetros r y s, que nos indican cuánto mide B hacia "arriba/derecha" de p, y cuánto hacia "abajo" de p, respectivamente. Notemos que, en este caso, r puede tomar valores a partir de 0, mientras que s lo hace a partir de a_2. Así pues,

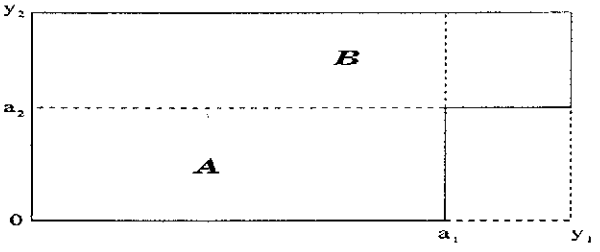


Figura 6.3: $C(p, X)$

podemos representar a B como una 2-celda de la forma $[0, y_1] \times [a_2, y_2]$, para algunas $y_1 > a_1$ y $y_2 > a_2$.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, no es difícil convencerse de que $C(p, X)$ se ve como en la figura 6.3

Por tanto, en este caso obtenemos que $C(p, X)$ es una 2-celda.

Analicemos ahora el caso en que $p = q$. Veamos la figura 6.4

En este caso tenemos que proceder de una manera muy particular. Notemos que hay dos clases de subcontinuos de X, que contienen a q: aquéllos contenidos en el arco K, y aquéllos que contienen a K. En la figura 6.4 se muestra un ejemplo de cada caso. Así pues, si queremos calcular $C(q, X)$ será conveniente dividir dicho hiperespacio en dos subespacios:

$$C(q, X) = \{A \in C(q, X) : A \subset K\} \cup \{A \in C(q, X) : K \subset A\}. \qquad (6.81)$$

Veamos qué pasa con cada uno de estos subespacios.

1. $\{A \in C(q, X) : A \subset K\}$ es un arco.

   En este caso tenemos que A es un subcontinuo del arco K que contiene a q, el cual es un punto extremo de K. Así pues, es fácil ver que A está completamente determinado por un único parámetro, que es su longitud. De esta manera, no es difícil ver que $\{A \in C(q, X) : A \subset K\}$ es un arco.

2. $\{A \in C(q, X) : K \subset A\}$ es una 2-celda

   Sea $B \in \{A \in C(q, X) : K \subset A\}$. Entonces B se ve como en la figura 6.4, es decir, B está completamente determinado por dos parámetros

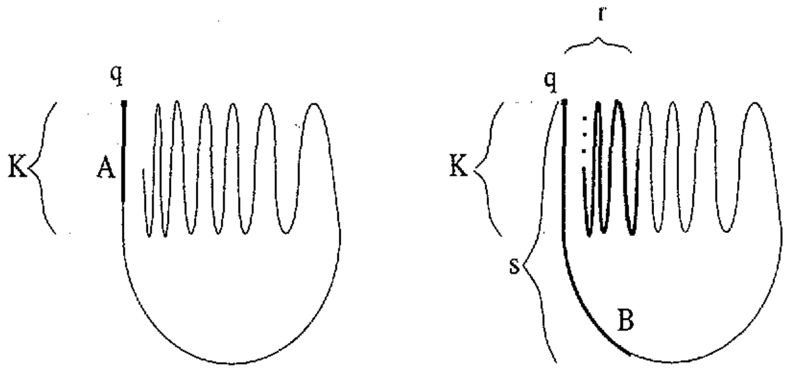


Figura 6.4: Elementos típicos de $C(q, X)$

independientes, r y s, los cuales nos indican qué tanto mide B a la "derecha" de q y qué tanto mide B hacia "abajo" de q. Por tanto, similarmente a como lo hemos venido haciendo, en este caso podemos concluir que el conjunto $\{A \in C(q, X) : K \subset A\}$ es una 2-celda.

3. $\{A \in C(q, X) : A \subset K\} \cap \{A \in C(q, X) : K \subset A\} = \{K\}$.

Finalmente, de acuerdo a las consideraciones anteriores, y a (6.81), obtenemos que $C(q, X)$ es la unión unipultual de un arco y una 2-celda. Por tanto, $C(q, X)$ se ve así:

Así pues, hemos visto que

$$C(p, X) = \begin{cases} \text{una 2-celda} & \text{si } p \neq q \\ \text{el continuo de la figura 6.5} & \text{si } p = q \end{cases}$$

En particular tenemos que X satisface las condiciones a) y b), y terminamos la exposición de este ejemplo.

Ahora, ¿qué pasa con la segunda pregunta? ¿se podrá debilitar la condición ii)?

El siguiente lema nos ayudará a contestar esta pregunta.

Lema 6.3.2 *Sea Y una compactación del rayo con residuo X. Si un punto $p \in X$ es tal que $C(p, X)$ es un arco, entonces $C(p, Y)$ es un arco.*

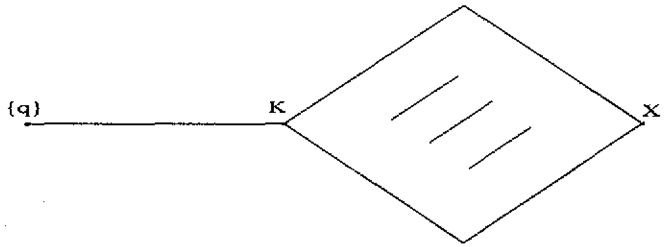


Figura 6.5: C(q, X)

Demostración:
Sean $A, B \in C(p, Y)$. Es un resultado conocido el que X es terminal en Y, así que podemos analizar tres casos.

Caso 1 $A \cup B \subset X$.

Por hipótesis y por la Observación 5.3.5 obtenemos que A y B son comparables.

Caso 2 $A \subset X \subset B$.

Aquí tenemos directamente que $A \subset B$.

Caso 3 $X \subset A \cap B$.

Es un hecho conocido el que dos subcontinuos con estas condiciones son comparables.

Como en cualquier caso tenemos que A y B son comparables, gracias al Lema 5.3.6 podemos concluir que $C(p, Y)$ es un arco. Terminamos la prueba del lema.

□

A continuación presentamos un ejemplo mostrando que la hipótesis del Teorema 6.2.10, que concierne a los puntos de corte en los hiperespacios $C(p, X)$ no se puede debilitar.

Ejemplo 6.3.3 Sea Y una compactación del rayo con un pseudoarco como residuo (véanse [Bin51, p. 44] y [Lew91]).

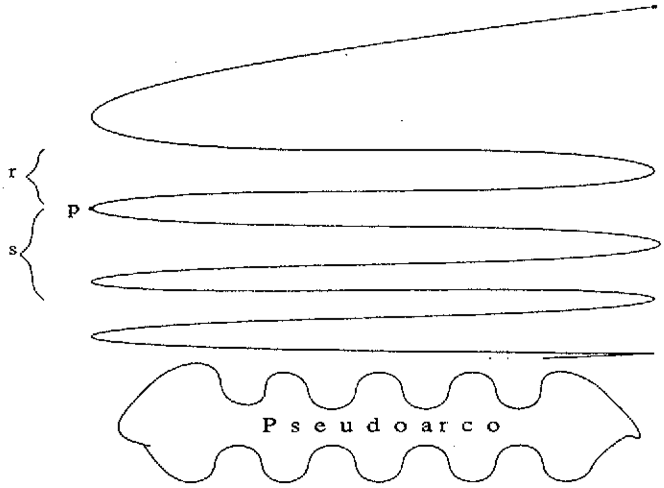


Figura 6.6: Compactación del rayo con un pseudoarco como residuo

Veremos que el continuo Y satisface las siguientes condiciones:

a) $C(p, Y)$ es un arco o una 2-celda para cada $p \in Y$,

b) el conjunto $\{p \in Y : C(p, Y) \text{ es una 2-celda}\}$ es denso en Y y

c) Y *contiene un subcontinuo propio y no degenerado que no es un arco.*

Sea X el residuo de la compactación Y. Entonces X es un pseudoarco y, en particular, X es hereditariamente indescomponible (véase [Bin51, p. 44]). Por tanto, Y satisface la condición c).

De acuerdo a lo anterior, por el Lema 5.4.6 sabemos que $C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$. Aplicando ahora el Lema 6 3 2 obtenemos que

$$C(p, Y) \text{ es un arco para cada } p \in X. \tag{6.82}$$

Así pues, para ver que Y cumple la condición i), basta ver que $C(p, Y)$ es una 2-celda, para cada $p \in Y \setminus X$.

En continuo Y se ve de la siguiente manera:

Sea $p \in Y \setminus X$ y $A \in C(p, Y)$. Entonces A está completamente determinado por los dos parámetros r y s, quienes nos indican, respectivamente, cuánto "sube"y cuánto "baja" A. Como estos dos parámetros son independientes, si argumentamos de manera similar a como lo hemos venido haciendo en los ejemplos anteriores, no es difícl convencerse de que $C(p, Y)$ es una 2-celda.

De acuerdo a esto y a (6.82), podemos concluir que Y satisface las condiciones a) y b).

6.4 Una caracterización

En la Sección 4.3 vimos un ejemplo de un continuo arco-similar que no es un arco, pero que resultó ser un tanto complicado, ya que era indescomponible. Recordemos que entonces se preguntó si se podría encontrar ejemplos de continuos arco-similares, pero que fueran descomponibles. El propósito de esta sección es contestar esta pregunta, que ahora resulta más fácil de responder, gracias a la teoría sobre continuos estrambóticos que hemos desarrollado.

Teorema 6.4.1 *Si X es un continuo estrambótico descomponible, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración:
Como X es un continuo descomponible, podemos tomar $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$ tales que $X = A \cup B$.

Entonces, el Teorema 6.2.10 nos dice que A y B son arcos.

Por otra parte, por el Teorema 6.1.9 sabemos que X no contiene triodos. De esta manera tenemos que X es la unión atriódica de dos arcos y, por tanto, X es un arco o una curva cerrada simple.

Terminamos la prueba del teorema.

□

Teorema 6.4.2 *X es un arco si y sólo si X es un continuo descomponible tal que (X, a, b) es arco-similar.*

Demostración:
Es fácil ver que si (X, a, b) es arco-similar, entonces X es un continuo estrambótico.

Así pues, por el Teorema 6.4.1 tenemos que X es un arco o una curva cerrada simple.

Ahora bien, en el Corolario 5.4.2 vimos que un arco es arco-similar, y en el Corolario 5.4.5 vimos que una curva cerrada simple no lo es. Por tanto, X es un arco.

Finalmente, es claro que un arco es descomponible, así que podemos concluir la prueba del teorema.

□

6.5 Continuos círculo-similares

En la Sección 4.3 nos hicimos varias preguntas, una de ellas era la siguiente: si X es una curva cerrada simple, ¿hasta qué punto los hiperespacios $C(p, X)$ pueden caracterizar a X? Claro, para responder esta pregunta sería mejor formularla de una manera más precisa. Para ello introducimos el concepto de *continuo círculo-similar*.

Definición 6.5.1 Sea X un continuo. Diremos que X es *círculo-similar* si $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$.

La motivación de esta noción es el Corolario 5.4.5. Así pues, nuestra pregunta puede quedar formulada de la siguiente manera: si X es un continuo círculo-similar, entonces ¿X es una curva cerrada simple? Por lo pronto, ahora que ya hemos desarrollado una buena porción de teoría sobre los continuo estrambóticos, podemos decir lo siguiente:

Teorema 6.5.2 *Sea X un continuo descomponible y círculo-similar. Entonces X es una curva cerrada simple.*

Demostración:
Si X es círculo-similar, entonces X es un continuo estrambótico. Así pues, por el Teorema 6.4.1 tenemos que X es un arco o una curva cerrada simple.

Finalmente, en el Corolario 5.4.5 vimos que una curva cerrada simple es círculo-similar, pero en el Corolario 5.4.2 vimos que un arco no lo es.

En consecuencia, X es una curva cerrada simple.

□

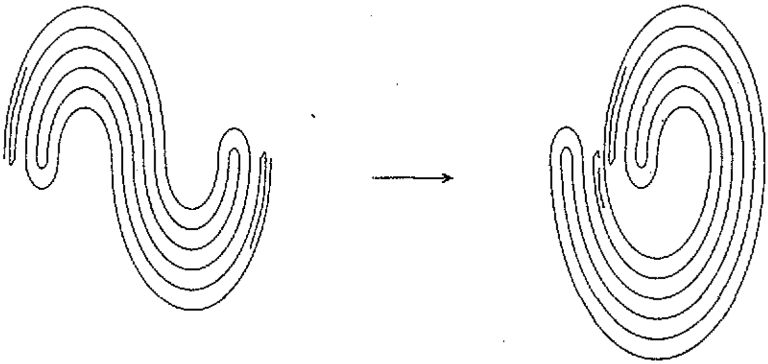


Figura 6.7: Un continuo círculo-similar que no es una curva cerrada simple ni un solenoide

Retomemos nuestra pregunta sobre si un continuo círculo-similar necesariamente es una curva cerrada simple. A estas alturas, probablemente ya se sospechará que éste no es el caso. En efecto, veamos unos ejemplos, que tendrán que ser indescomponibles, en virtud del Teorema 6.5.2.

Ejemplo 6.5.3 Un ejemplo de un continuo círculo-similar que no es una curva cerrada simple.

Sea X un solenoide (véase [Nad92, 2.8]). Se sabe que los subcontinuos propios y no degenerados de los solenoides son arcos (véase [Nad92, 2.16]), y que cada punto del solenoide está contenido en el interior relativo de algún arco. Así pues, a estas alturas, al menos geométricamente, tal vez no será muy difícil convencerse de que $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$. Si resultó difícil creer la afirmación anterior, no hay que preocuparse, de cualquier manera se probará en el Teorema 7.2.1.

Ejemplo 6.5.4 Un ejemplo de un continuo círculo-similar que no es una curva cerrada simple ni un solenoide.

Sea Y es espacio representado en el ejemplo 5.5.2. Definimos $X = Y/_{\sim}$, donde la relación $\sim$ identifica los puntos a y b.

Los subcontinuos propios de X son arcos y, además, para cada $p \in X$ se tiene que p está en el interior relativo de algún arco. Una vez más, al menos geométricamente, uno podría convencerse de que, en estas condiciones, $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$.

6.6 Relación con la clase $\mathcal{K}_1$

Hasta ahora hemos buscado determinar propiedades de los continuos arco-similares, sin embargo, nos gustaría encontrar condiciones que los caractericen. En este sentido se pueden hacer varias propuestas, una de ellas tiene que ver con el concepto de *continuo encadenable* y con la *propiedad de Kelley*, que definimos a continuación.

Definición 6.6.1 Sean X un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ una colección de subconjunto abiertos de X y $\varepsilon > 0$. Decimos que $\mathcal{U}$ es una *ε-cadena* si:

i) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ y

ii) $\operatorname{diam}(U_i) < \varepsilon$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición 6.6.2 Diremos que un continuo X es *encadenable,* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena $\mathcal{U}$ tal que $X \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.

Definición 6.6.3 Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X tiene la *propiedad de Kelley en p,* si para cada $A \in C(p, X)$ y cada sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p, se tiene una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Decimos también que X tiene la *propiedad de Kelley* si X tiene la propiedad de Kelley en todos sus puntos

Definición 6.6.4 Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un *punto extremo* de X si $C(p, X)$ es un arco.

En el artículo [Kru84], P. Krupski introduce una clase $\mathcal{K}$ de continuos X que satisfacen:

i) X es encadenable,

ii) X tiene la Propiedad de Kelley,

iii) X tiene uno o dos puntos extremos y

iv) los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos.

Consideremos la clase $\mathcal{K}_1 = \{X \in \mathcal{K} : X$ tiene dos puntos extremos$\}$. Hasta el momento, los únicos ejemplos de continuos arco-similares que hemos mostrado pertenecen a la clase $\mathcal{K}_1$. Así pues, una pregunta que aparece de manera natural es si la clase de continuos arco-similares coincide con $\mathcal{K}_1$. En esta sección buscaremos dar respuesta a esta pregunta.

A fin de atacar adecuadamente esta cuestión, es conveniente recordar algunos conceptos relacionados con continuos encadenables. A continuación recordaremos algunas definiciones y resultados en este sentido, con las cuales estableceremos relaciones entre los continuos encadenables y los *levantamientos.*

Definición 6.6.5 Sean X un espacio topológico y $f : X \to S^1$ una función continua. Consideremos también la función $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi i t}$. Decimos que una función continua $f' : X \to \mathbb{R}$ es un *levantamiento* de f si $p \circ f' = f$.

Teorema 6.6.6 *Sea X un continuo encadenable. Si $f : X \to S^1$ es una función continua, $a \in X$ y $w \in p^{-1}(f(a))$, entonces existe un levantamiento f' de f tal que $f'(a) = w$.*

Demostración:
Como consecuencia de [Nad92, 12.47] y de [Nad92, Proposición 12.38], existe un levantamiento $\widehat{f}$ de f. Consideremos la función $f' : X \to \mathbb{R}$ dada por $f'(x) = \widehat{f}(x) + w - \widehat{f}(a)$, entonces f' es continua. Por otra parte, como $p(w) = f(a) = p(\widehat{f}(a))$, es fácil ver que $w - \widehat{f}(a) \in \mathbb{Z}$. De aquí que

$$(p \circ f')(x) = p(\widehat{f}(x) + w - \widehat{f}(a)) = p(\widehat{f}(x))p(w - \widehat{f}(a)) = p(\widehat{f}(x)) = f(x).$$

Por tanto, f' es un levantamiento de f, que claramente satisface $f'(a) = w$.
$\square$

Recordemos ahora la noción de abierto cubierto uniformemente. Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y U un subconjunto abierto de Y. Decimos que U está *uniformemente cubierto* por f si $p^{-1}(U)$ se puede escribir como la unión disjunta de subconjuntos abiertos V_i, de X, tales que $p|_{V_i} : V_i \to U$ es un homeomorfismo para cada i. Decimos también que f es una *función cubriente,* si para cada $y \in Y$ existe un subconjunto abierto U, de Y, uniformemente cubierto por f y que contiene a y.

Una herramienta importante, que usaremos más adelante, está dada en el siguiente lema.

Lema 6.6.7 *(del número de Lebesgue) [Mun75, §3, Lema 7.2]. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $A \subset X$ y $\operatorname{diam}(A) < \varepsilon$, entonces $A \subset U$ para alguna $U \in \mathcal{U}$.*

En esta situación, diremos que ε es un *número de Lebesgue* para la cubierta $\mathcal{U}$.

En el Teorema 6.6.6 establecimos un criterio que relaciona encadenabilidad con existencia de levantamientos de funciones. A continuación veremos un resultado más fuerte: veremos que para los continuos encadenables, los levantamientos de funciones a S^1 son únicos en cierto sentido.

Teorema 6.6.8 *Sean X un continuo encadenable y $f : X \to S^1$ una función continua. Si $a \in X$ y $w \in p^{-1}(f(a))$, entonces existe un único levantamiento f' de f tal que $f'(a) = w$.*

Demostración:
En la prueba de este teorema, d y d_1 representarán la métrica de X y la de S^1, respectivamente.

Por el Teorema 6.6.6, existe un levantamiento f' de f, que satisface $f'(a) = w$. Sea g un levantamiento de f tal que $g(a) = w$; veremos que $g = f'$

Se sabe que p es una función cubriente (véase [Mun75, §8, Teorema 3.1]), así pues, para cada $y \in S^1$ podemos considerar un abierto $U(y)$ uniformemente cubierto por p. Podemos suponer que el diámetro de los abiertos ajenos que constituyen a $p^{-1}(U(y))$ es menor que $\frac{1}{4}$.

Sea ε un número de Lebesgue para la cubierta $\mathcal{U} = \{U(y) : y \in S^1\}$.

Ahora bien, como f, f' y g son uniformemente continuas, podemos tomar $\delta > 0$ tal que si $x, z \in X$ y $d(x,z) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} d_1\big(f(x), f(z)\big) &< \varepsilon, \\ \big|f'(x) - f'(z)\big| &< \tfrac{1}{4} \quad \text{y} \\ \big|g(x) - g(z)\big| &< \tfrac{1}{4}. \end{aligned} \tag{6.83}$$

Por otra parte, dado que X es encadenable, podemos tomar una δ-cadena $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ que cubra a X. Probaremos por inducción que f' y g coinciden en C_i para cada i.

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a \in C_k$. Dado que $\mathrm{diam}(C_k) < \delta$, se tiene que $\mathrm{diam} f(C_k) < \varepsilon$, de modo que $f(C_k) \subset U_k$ para alguna $U_k \in \mathcal{U}$. Ahora bien, por hipótesis $p^{-1}(U_k)$ se puede escribir como la unión disjunta de subconjuntos abiertos V_i, de $\mathbb{R}$, tales que $p|_{V_i} : V_i \to U_k$ es un homeomorfismo para cada i. Llamemos V_k al elemento de dicha unión que contiene a w. De acuerdo a (6.83), $\mathrm{diam}\big(f'(C_k)\big) < \frac{1}{4}$ y $\mathrm{diam}\big(g(C_k)\big) < \frac{1}{4}$, de manera que $f'(C_k) \subset V_k$ y $g(C_k) \subset V_k$. Por tanto, para cada $x \in C_k$ se tiene que

$$(p|_{V_k} \circ f')(x) = f(x) = (p|_{V_k} \circ g)(x).$$

En otras palabras,

$$f'(x) = \big((p|_{V_k})^{-1} \circ f\big)(x) = g(x).$$

De aquí que $f'|_{C_k} = g|_{C_k}$.

Supongamos ahora que f' y g coinciden en C_{j-1}, donde $j \in \{k+1, \ldots, n\}$. Como $\mathcal{C}$ es una δ-cadena, podemos elegir $b \in C_{j-1} \cap C_j$. Además, como $\mathrm{diam}(C_j) < \delta$, tenemos que $f(C_j) \subset U_j$ para alguna $U_j \in \mathcal{U}$. Ahora bien, por hipótesis $p^{-1}(U_j)$ se puede escribir como la unión disjunta de subconjuntos abiertos V_i, de $\mathbb{R}$, tales que $p|_{V_i} : V_i \to U_j$ es un homeomorfismo para cada i. Sea V_j el elemento de dicha unión que contiene a $f'(b)$. Notemos que, por hipótesis de inducción, $f'(b) = g(b)$.

Por otra parte, como consecuencia de (6.83), tenemos que $\mathrm{diam}\big(f'(C_j)\big) < \frac{1}{4}$ y $\mathrm{diam}\big(g(C_j)\big) < \frac{1}{4}$, así que $f'(C_j) \subset V_j$ y $g(C_j) \subset V_j$. De acuerdo a esto, para cada $x \in C_j$ obtenemos que

$$(p|_{V_j} \circ f')(x) = f(x) = (p|_{V_j} \circ g)(x),$$

es decir,

$$f'(x) = \big((p|_{V_j})^{-1} \circ f\big)(x) = g(x).$$

De esta manera hemos probado que f' y g coinciden en $C_k, \ldots, C_n$.

De manera similar puede probarse que f' y g coinciden en $C_1, \ldots, C_{k-1}$. Terminamos la prueba del teorema.

$\square$

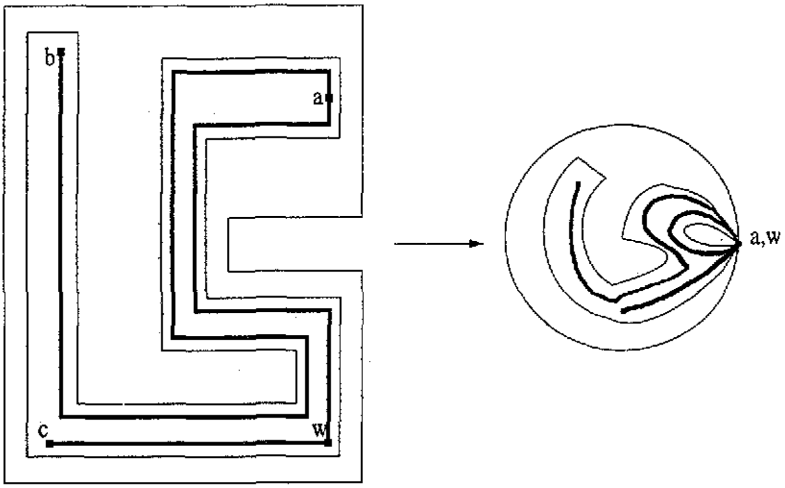


Figura 6.8: Un continuo arco-similar que no es encadenable

Una vez que hemos establecido la existencia y unicidad de levantamientos para los continuos encadenables, estamos en condiciones de atacar la pregunta de si la clase de continuos arco-similares coincide con la clase $\mathcal{K}_1$. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.6.9 *Un continuo arco-similar que no es encadenable.*

En [Dou94] se construye un continuo encadenable Y, con cuatro puntos extremos, y tal que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.

Si el conjunto de puntos extremos de Y es $\{a, b, c, w\}$, entonces definimos una relación de equivalencia en Y de la siguiente manera. Diremos que

$$x \sim y \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} x = y & \text{o} \\ \{x, y\} = \{a, w\}. \end{cases}$$

Definimos $X = Y/_\sim$ y le damos la topología cociente. Sea $\eta : Y \to X$ la función cociente.

Así pues, obtenemos que X tiene dos puntos extremos y que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. De esta manera, de acuerdo al

Corolario 7.2.2 -que probaremos en el capítulo 6- tenemos que X es arco-similar.

Veremos que X no es encadenable.

Por construcción tenemos que Y es un continuo, así que podemos dar una función continua $g : Y \to I$, de tal manera que

$$g(a) = 0 \qquad \text{y} \qquad g(w) = 1. \tag{6.84}$$

De esta manera, $p \circ g$ es una función continua de Y a S^1, que satisface

$$(p \circ g)(a) = e^0 = (p \circ g)(w).$$

En otras palabras, $p \circ g$ es constante en las fibras de η.

De esta manera, aplicando el Teorema de la Transgresión ([Dug66, VI, Teorema 3.2]) obtenemos una función continua $f : X \to S^1$ tal que

$$f \circ \eta = p \circ g.$$

Veremos que no existe un levantamiento f' de f. Para ello, empecemos notando que

$$f\big(\eta(a)\big) = (p \circ g)(a) = e^0,$$

así que $0 \in p^{-1}\big(f\big(\eta(a)\big)\big)$.

De esta manera, si suponemos que X es encadenable, el Teorema 6.6.8 nos garantiza que existe un único levantamiento $f' : X \to \mathbb{R}$, de f, que satisface:

$$f'\big(\eta(a)\big) = 0 \qquad \text{y} \qquad p \circ f' = f.$$

Gracias a esto y a la definición de f, se tiene que

$$p \circ f' \circ \eta = f \circ \eta = p \circ g,$$

y además teníamos que

$$g(a) = 0 = f'\big(\eta(a)\big).$$

Como consecuencia de las afirmaciones anteriores se tiene que g y $f' \circ \eta$ son dos levantamientos de $f \circ \eta$, que mandan al punto a al cero. De esta manera, gracias al Teorema 6.6.8 sabemos que $g = f' \circ \eta$.

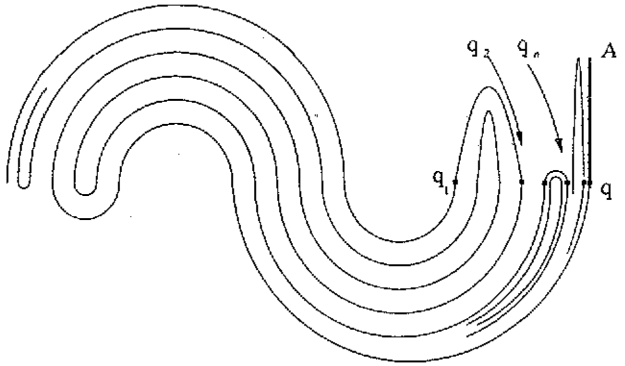


Figura 6.9: Continuo arco-similar sin la Propiedad de Kelley

Finalmente, de acuerdo a lo anterior y a (6.84) tenemos que

$$0 = g(a) = f'(\eta(a)) = f'(\eta(w)) = g(w) = 1,$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto, no existe tal levantamiento f' de f.

De esta manera, en virtud del Teorema 6.6.8, obtenemos que X no es encadenable.

El ejemplo anterior nos muestra que la clase de continuos arco-similares no coincide con la clase $\mathcal{K}_1$. Sin embargo, aún cabría la pregunta de si los continuos arco-similares tienen la Propiedad de Kelley

El ejemplo que presentamos a continuación, nos muestra que éste no es el caso

Ejemplo 6.6.10 *Un continuo arco-similar X que no tiene la Propiedad de Kelley.*

De manera similar a como procedimos en el Ejemplo 5.5.2, podemos ver que X es arco-similar Sin embargo, también es fácil ver que X no tiene la Propiedad de Kelley en el punto q: sean $A \in C(q, X)$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ como en la figura 6.9, de manera que $q_n \to q$. Es fácil ver que, en estas condiciones, no es posible hallar una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tal manera que $A_n \in C(q_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \to A$. En consecuencia, X no tiene la Propiedad de Kelley en el punto q.

Así pues, hemos visto que la clase de continuos arco-similares no se parece tanto a la clase $\mathcal{K}_1$ como uno podría pensar. Sin embargo, más adelante veremos una caracterización bastante precisa de la clase de continuos arco-similares. En particular, veremos que las clases de continuos arco-similares y $\mathcal{K}_1$ son comparables, lo cual resulta muy agradable.

Capítulo 7

Continuos cuyos subcontinuos propios son arcos

Una clase interesante -y no muy estudiada- de continuos es aquélla de los continuos tales que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Como nosotros estamos interesados en el estudio de los continuos estrambóticos, en virtud del Teorema 6.2.10 es natural que dirijamos nuestra atención a esta clase de continuos. Así pues, hemos decidido dedicar este capítulo al estudio de algunas propiedades generales de la clase en cuestión.

7.1 Propiedades generales

Lema 7.1.1 *Sean X un continuo y A, B dos arcos en X. Supongamos que $p \in X$ es un punto extremo tanto de A como de B y que $A \cup B$ es un arco. Entonces $A \cap B = \{p\}$ o A y B son comparables.*

Demostración:
Analizaremos dos casos.

Si p es punto extremo de $A \cup B$, por definición obtenemos que A y B son comparables.

Por otra parte, como p es punto extremo de A y de B, se tiene que $A \setminus \{p\}$ y $B \setminus \{p\}$ son conexos. Si suponemos que p no es punto extremo de $A \cup B$, entonces $(A \cup B) \setminus \{p\}$ tiene dos componentes, una de las cuales necesariamente es $A \setminus \{p\}$ y la otra es $B \setminus \{p\}$. En particular obtenemos que

$$(A \setminus \{p\}) \cap (B \setminus \{p\}) = \emptyset$$

y, por tanto, $A \cap B = \{p\}$.

Terminamos la prueba del lema.

$\square$

Lema 7.1.2 *Sean X un continuo indescomponible tal que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Consideremos $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $A_1, \dots, A_n \in C(p, X) \setminus \{X\}$, entonces $\cup_{i=1}^{n} A_i$ es un arco que contiene a p.*

Demostración:
Dado que $p \in A_i$ para cada i, se tiene que $\cup_{i=1}^{n} A_i \in C(p, X)$. Además, como X es indescomponible, X tiene una cantidad no numerable de composantes ajenas, en particular

$$\cup_{i=1}^{n} A_1 \subset \Sigma_p \subsetneq X.$$

Por tanto, $\cup_{i=1}^{n} A_i$ es un arco que contiene a p.

$\square$

Lema 7.1.3 *Sean X un continuo, $p \in X$ y $K \in C(p, X)$. Consideremos una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(p, X)$ que converge a K y $W = K \cup \bigcup\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $W \in C(p, X)$.*

Demostración:
Por una parte es fácil ver que W es conexo, ya que $p \in K \cap \bigcap\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $L_n = \bigcup\{K_i : 1 \leq i \leq n\}$ y consideremos una sucesión $S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W$ que converge a $x \in X$. Si $S \subset K \cup L_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, dado que $K \cup L_n$ es cerrado, directamente obtenemos que $x \in K \cup L_n \subset W$. Ahora bien, si S intersecta a K_n para una cantidad infinita de índices n, entonces $x \in \limsup K_n = K$. En consecuencia, W es cerrado y, por tanto, $W \in C(p, X)$.

$\square$

7.2 Caracterizaciones

En esta sección analizaremos los hiperespacios $C(p, X)$ de los continuos cuyos subcontinuos propios y no degenerados son arcos. El teorema principal nos dice que, si p no es un punto extremo del continuo X, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda. Como veremos más adelante, esto tiene mucha relación con los continuos estrambóticos, y nos permitirá presentar algunas caracterizaciones

En adelante denotaremos la imagen de una función f como $\mathrm{im}(f)$.

Teorema 7.2.1 *Sea X un continuo indescomponible tal que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Sea $p \in X$. Si p no es un punto extremo de X, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.*

Demostración:
Como p no es un punto extremo de X, en virtud del Lema 5.3.6 podemos tomar dos elementos no comparables, B y C, de $C(p, X)$. Sea $A = B \cup C$. De acuerdo al Lema 7.1.2, A es un arco que contiene a p, y además, como consecuencia del Lema 7.1.1 obtenemos que p no es un punto extremo de A. Sean a y b los puntos extremos de dicho arco y demos un orden $<$ al arco A, de manera que $a < b$. Claramente el orden en cuestión es único.

Tomemos ahora $K \in C(p, X) \setminus \{X\}$. Usando una vez más el Lema 7.1.2, se tiene que $K \cup A$ es un arco que contiene a a y a b, de modo que podemos darle un único orden $<_K$ que satisface $a <_K b$. Notemos que el orden $<_K$ restringido a A, coincide con el orden $<$.

Por otra parte, definimos $l_K = \min K$ y $r_K = \max K$, entonces podemos considerar al arco K como un intervalo $[l_K, r_K]$.

Sea μ una función de Whitney para $C(p, X)$ y consideremos una función $f : C(p, X) \setminus \{X\} \to I \times I$ dada por

$$f(K) = \Big(\mu([l_K, p]), \mu([p, r_K])\Big).$$

Haremos el resto de la prueba en una serie de pasos.

Paso 1 f es inyectiva.

Sean $K, K' \in C(p, X) \setminus \{X\}$, entonces aplicando el Lema 7.1.2 se tiene que $A \cup K \cup K'$ es un arco que contiene a a y a b. Así pues, podemos considerar el orden $<_{K \cup K'}$, el cual, por construcción, satisface $a <_{K \cup K'} b$. Notemos que $<_{K \cup K'}$ coincide con $<_K$ en $A \cup K$, y con $<_{K'}$ en $A \cup K'$. De esta manera, no es difícil ver que

$$l_K \leq_{K \cup K'} p \qquad \text{y} \qquad l_{K'} \leq_{K \cup K'} p.$$

Como consecuencia de lo anterior y del Lema 7.1.1, obtenemos que los subarcos $[l_K, p]$ y $[l_{K'}, p]$, del arco $A \cup K \cup K'$, son comparables. Similarmente, $[p, r_K]$ y $[p, r_{K'}]$ son comparables. Así pues, si suponemos que $f(K) = f(K')$, obtenemos que

$$\mu([l_K, p]) = \mu([l_{K'}, p]) \qquad \text{y} \qquad \mu([p, r_K]) = \mu([p, r_{K'}]).$$

De acuerdo a la monotonía de μ podemos concluir que $[l_K, p] = [l_{K'}, p]$ y $[p, r_K] = [p, r_{K'}]$. Por tanto

$$K = [l_K, r_K] = [l_{K'}, r_{K'}] = K'.$$

En consecuencia, f es inyectiva.

Paso 2 f es continua.

Consideremos una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(p, X) \setminus \{X\}$ que converge a $K \in C(p, X) \setminus \{X\}$ y consideremos el conjunto $W = K \cup \bigcup\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$. Así pues, aplicando el Lema 7.1.3 obtenemos que $W \in C(p, X)$.

Por otra parte, consideremos $M' \in \mathbb{N}$ de manera que $\overline{N(\frac{1}{M'}, K)} \subsetneq X$. Tomemos también $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_n \subset \overline{N(\tfrac{1}{M'}, K)}$$

cada vez que $n > M$. Dado que X es indescomponible se tiene que $int(K_n) = \emptyset$ para cada n; de acuerdo a esto es fácil ver que

$$W \subset \overline{N(\tfrac{1}{M'}, K)} \cup \textstyle\bigcup_{n=1}^{M} K_n \subsetneq X.$$

Por tanto, $W \in C(p, X) \setminus \{X\}$, y en consecuencia podemos considerar el arco $[l_W, r_W]$. Ahora bien, como $K_n \to K$ y estamos trabajando únicamente en el arco W, necesariamente se tiene que $l_{K_n} \to l_K$ y $r_{K_n} \to r_K$. De acuerdo a lo anterior y a la continuidad de μ, podemos concluir que

$$f(K_n) = \Big(\mu([l_{K_n}, p]), \mu([p, r_{K_n}])\Big) \to \Big(\mu([l_K, p]), \mu([p, r_K])\Big) = f(K).$$

En consecuencia, f es continua.

Paso 3 f es abierta en su imagen.

Por el paso 1 sabemos que f es una biyección sobre $\text{im}(f)$, así que basta con probar que la función $f^{-1} : \text{im}(f) \to C(p, X) \setminus \{X\}$ es continua. Así pues, sea $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \text{im}(f)$ una sucesión que converge a $(x, y) \in \text{im}(f)$. Entonces $(x_n, y_n) = f(K_n)$ y $(x, y) = f(K)$, para algunos $K, K_n \in C(p, X) \setminus \{X\}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a K, entonces gracias a la compacidad de X, existe una subsucesión $\{K_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ que converge a alguna $J \in C(p, X) \setminus \{K\}$. Si $J \neq X$, de acuerdo al paso 2 obtenemos que $\lim f(K_{n_i}) = f(J)$, sin embargo, por construction tenemos que $\lim f(K_n) = f(K)$. Como consecuencia del paso 1, podemos concluir que $J = K$. Dado que esto nos lleva a una contradicción con la definición de J, podemos suponer que $J = X$. Así pues, tenemos que

$$\lim \left([l_{K_{n_i}}, p] \cup [p, r_{K_{n_i}}]\right) = \lim K_{n_i} = J = X.$$

Como X es indescomponible, podemos suponer que $\lim[l_{K_{n_i}}, p] = X$. De acuerdo a esto, y a la continuidad de μ, obtenemos que

$$\lim x_{n_i} = \lim \mu\big([l_{K_{n_i}}, p]\big) = \mu(X).$$

Por tanto $\mu\big([l_K, p]\big) = x = \mu(X)$, lo cual nos lleva a una contradicción con la monotonía de μ. En consecuencia $\lim K_n = K$ y f^{-1} es continua.

Paso 4 Si $(x, y), (x', y') \in \text{im}(f)$, entonces

$$\big[0, \max\{x, x'\}\big] \times \big[0, \max\{y, y'\}\big] \subset \text{im}(f).$$

Sean $(z, w) \in [0, \max\{x, x'\}] \times [0, \max\{y, y'\}]$ y $K, K' \in C(p, X) \setminus \{X\}$ tales que $f(K) = (x, y)$ y $f(K') = (x', y')$. Tomemos dos arcos ordenados α y β, que empiecen en $\{p\}$ y terminen en $[l_{K\cup K'}, p]$ y $[p, r_{K\cup K'}]$, respectivamente. Como μ, α y β son continuas, existen $s, t \in I$ tales que $\mu(\alpha(s)) = z$ y $\mu(\beta(t)) = w$. Notemos que $\alpha(s) \subset [l_{K\cup K'}, p]$ y $\beta(t) \subset [p, r_{K\cup K'}]$; de esta manera, no es difícil ver que

$$\begin{aligned} f\big(\alpha(s) \cup \beta(t)\big) &= \Big(\mu\big([l_{\alpha(s)\cup\beta(t)}, p]\big), \mu\big([p, r_{\alpha(s)\cup\beta(t)}]\big)\Big) \\ &= \Big(\mu\big(\alpha(s)\big), \mu\big(\beta(t)\big)\Big) = (z, w). \end{aligned}$$

Finalmente, $\alpha(s) \cup \beta(t) \subset K \cup K' \subsetneq X$, de donde concluimos que $(z, w) \in \text{im}(f)$.

Paso 5 $\mathrm{im}(f) \approx I \times [0,1)$.

Sean

$$\begin{aligned} \Phi &= \{x \in I : (\{x\} \times I) \cap \mathrm{im}(f) \neq \emptyset\} \quad \text{y} \\ \psi &= \{y \in I : (I \times \{y\}) \cap \mathrm{im}(f) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

y consideremos $\hat{x} = \sup \Phi$, $\hat{y} = \sup \psi$ y $\varepsilon > 0$.

Sean $x' \in (\hat{x} - \varepsilon, \hat{x}]$ y $y' \in (\hat{y} - \varepsilon, \hat{y}]$ tales que $x' \in \Phi$ y $y' \in \psi$. Así pues, como consecuencia del paso 4 tenemos que $[0,x'] \times [0,y'] \subset \mathrm{im}(f)$. Como esto pasa para toda ε, podemos concluir que

$$[0,\hat{x}) \times [0,\hat{y}) \subset \mathrm{im}(f) \subset [0,\hat{x}] \times [0,\hat{y}]$$

En virtud de lo anterior, y usando una vez más el paso 4, no es difícil ver que las posibles imágenes de f son de la forma:

$$[0,\hat{x}] \times [0,\hat{y}], \quad [0,\hat{x}) \times [0,\hat{y}], \quad [0,\hat{x}] \times [0,\hat{y}) \quad \text{ó} \quad [0,\hat{x}) \times [0,\hat{y}).$$

Sin embargo, por los pasos 1,2 y 3 sabemos que f es un homeomorfismo en su imagen. De esta manera, dado que el dominio de f no es compacto, $\mathrm{im}(f)$ no es homeomorfo a $[0,\hat{x}] \times [0,\hat{y}]$.

Notemos que el resto de los posibles imágenes de f son homeomorfas a $I \times [0,1)$.

Finalmente, dado que f es un homeomorfismo en su imagen, en particular se tiene que $C(p,X)$ es homeomorfo a la compactación unipuntual de $\mathrm{im}(f)$. Por tanto, en virtud del paso 5 podemos concluir que $C(p,X)$ es una 2-celda. Terminamos la prueba del teorema.

□

Como consecuencia del Teorema 7.2.1, y del Teorema 6.2.10, obtenemos varias caracterizaciones interesantes, las cuales, por cierto, dan respuesta a algunas de las preguntas que se hicieron en capítulos anteriores.

Corolario 7.2.2 *Un continuo X es arco-similar si y sólo si sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, y X tiene exactamente dos puntos extremos.*

Demostración:
Si X es un continuo arco-similar, entonces X tiene exactamente dos puntos extremos y es un continuo estrambótico. Así pues, por el Teorema 6.2.10 tenemos que los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos.

Para ver la implicación contraria analizaremos dos casos.

Caso 1 X es descomponible.

Supongamos que los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos. Entonces, en este caso tenemos que X es un arco o una curva cerrada simple. Las curvas cerradas simples no tiene puntos extremos, de modo que X es un arco. De esta manera, gracias al Corolario 5.4.2 obtenemos que X es arco-similar.

Caso 2 X es indescomponible.

Si X tiene exactamente dos puntos extremos a y b, entonces $C(a, X)$ y $C(b, X)$ son arcos. Además, para cada $p \in X \setminus \{a, b\}$, el Teorema 7.2.1 nos dice que $C(p, X)$ es una 2-celda. En consecuencia, X es arco-similar.

Terminamos la prueba del corolario.

□

Corolario 7.2.3 *Si X es un continuo de la clase $\mathcal{K}_1$, entonces X es arco-similar.*

Corolario 7.2.4 *Un continuo X es círculo-similar si y sólo si sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, y X no tiene puntos extremos.*

Demostración:
Si X es un continuo círculo-similar, entonces X no tiene puntos extremos y es un continuo estrambótico. Así pues, por el Teorema 6.2.10 tenemos que los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos.

Supongamos ahora que X no tiene puntos extremos y que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Analizaremos dos casos.

Caso 1 X es descomponible.

En este caso tenemos que X es un arco o una curva cerrada simple. Como los arcos tienen dos puntos extremos, X no tiene más remedio que ser una curva cerrada simple. Así pues, el Corolario 5.4.5 nos asegura que X es círculo-similar

Caso 2 X es indescomponible.

Como X no tiene puntos extremos, por el Teorema 7.2.1 tenemos que $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$. En consecuencia, X es círculo-similar.

Concluimos la prueba del Corolario.

□

En realidad nos gustaría tener un teorema más general: nos gustaría caracterizar a los continuos estrambóticos. Para ello introducimos el siguiente concepto.

Definición 7.2.5 Sean X un continuo estrambótico y $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \omega\}$. Decimos que X es de *tamaño n,* si la cardinalidad del conjunto

$$\{p \in X : C(p, X) \text{ es un arco } \}$$

es exactamente n.

Teorema 7.2.6 *Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \omega\}$. Entonces X es un continuo estrambótico de tamaño n si y sólo si sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, y X tiene exactamente n puntos extremos.*

Demostración:
Si X es un continuo estrambótico de tamaño n, entonces X tiene n puntos extremos. Además, por el Teorema 6.2.10 tenemos que los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos.

Supongamos ahora que X tiene n puntos extremos y que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Analizaremos cuatro casos.

Caso 1 $n = 2$.

Si $n = 2$, por el Corolario 7.2.2 tenemos que X es arco-similar, es decir, X es un continuo estrambótico de tamaño 2.

Caso 2 $n = 0$.

En este caso, el Corolario 7.2.4 nos dice que entonces X es círculo-similar. En otras palabras, X es un continuo estrambótico de tamaño 0.

Caso 3 X es descomponible y $0 \neq n \neq 2$.

Aquí tenemos que X es un arco o una curva cerrada simple, los cuales tienen 2 o ningún punto extremo. Por tanto, este caso es imposible.

Caso 4 X es indescomponible

Sea P el conjunto de puntos extremos de X. Entonces $C(p, X)$ es un arco, para cada $p \in P$. Además, para cada $p \in X \setminus P$, el Teorema 7.2.1 nos dice que $C(p, X)$ es una 2-celda. En consecuencia, X es un continuo estrambótico de tamaño n

Concluimos la prueba del Corolario.

□

7.3 Ejemplos

Para finalizar este capítulo, nos gustaría presentar continuos estrambóticos de varios tamaños.

Así pues, el arco y el continuo del Ejemplo 5.5.2 son arco-similares, así que son ejemplos de continuos estrambóticos de tamaño 2.

Por otra parte, la circunferencia y los Ejemplos 6.5.3 y 6.5.4 nos muestran ejemplos de continuos círculo-similares, que resultaron ser continuos estrambóticos de tamaño 0

Tomemos ahora $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \omega\}$. En [Dou94], J. Doucet construye ejemplos de continuos indescomponibles, con n puntos extremos, y de manera que sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Así pues, gracias al Teorema 7.2.6 tenemos que dichos continuos de Doucet, en realidad son continuos estrambóticos de tamaño n.

En la figura se presentan los primeros pasos para construir el continuo estrambótico de Doucet, de tamaño 3.

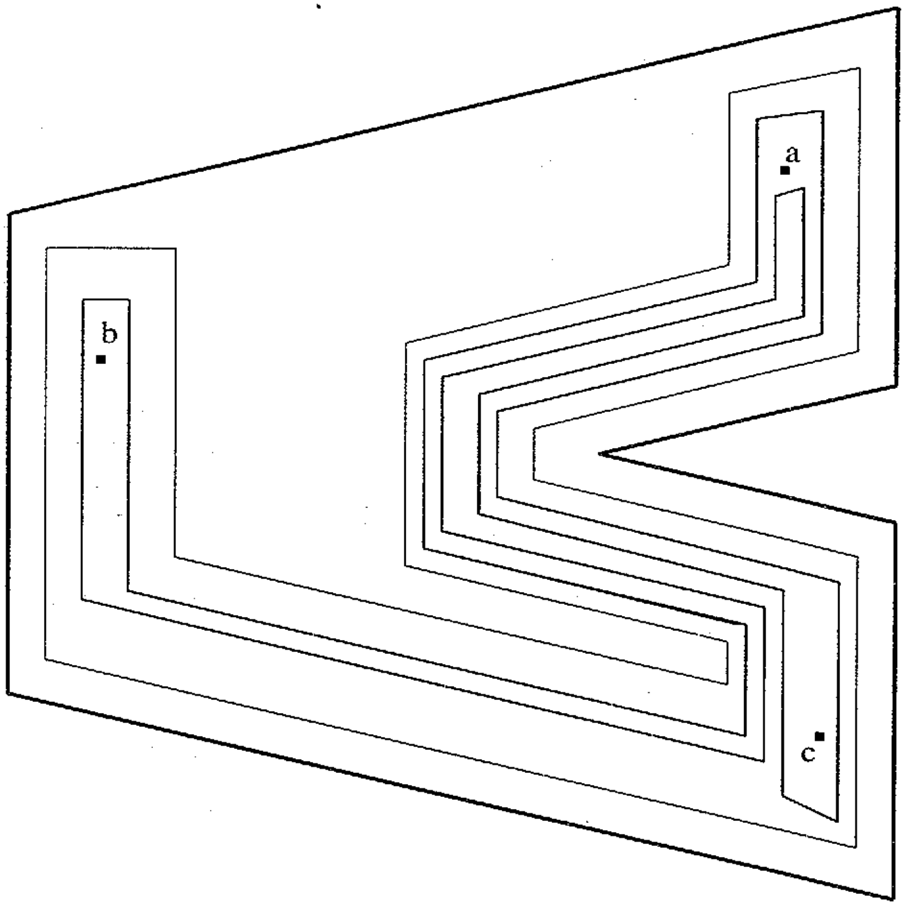


Figura 7.1: Continuo de Doucet, de tamaño 3

Capítulo 8

Retracciones

8.1 Herramienta general

De la misma manera que hemos considerado los hiperespacios $C(p,X)$ en capítulos anteriores, podemos ahora considerar los siguientes hiperespacios:

$$\begin{aligned} C_2(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más dos componentes}\}, \\ C_2(p,X) &= \{A \in C_2(X) : p \in A\} \quad \text{y} \\ 2^X_p &= \{A \in 2^X : p \in A\}. \end{aligned}$$

La idea de considerar 2^X_p nació de preguntarnos cuándo 2^X_p es un retracto, retracto por deformación o retracto fuerte por deformación de 2^X. Una manera de atacar esta pregunta es estudiando la siguiente función.

Definición 8.1.1 . *Sean X un continuo y $p \in X$. Definimos la función $\psi_p : 2^X \to 2^X_p$ como $\psi_p(A) = A \cup \{p\}$.*

Quisiéramos analizar una situación similar en $C(X)$ y comparar los resultados con aquéllos de 2^X. Así pues introducimos la función:

Definición 8.1.2 *Sean X un continuo y $p \in X$. Definimos la función $\phi_p : C(X) \to C_2(p,X)$ dada por $\phi_p(A) = A \cup \{p\}$.*

En este caso no podemos preguntarnos si ϕ_p es una retracción o no, ya que $C_2(p,X) \nsubseteq C(X)$ Sin embargo, esta función resultó tener propiedades interesantes, así que, para tratarlas más adecuadamente, establecemos la siguiente convención. Diremos que ϕ_p es una *retracción en* $C_2(X)$ si $\phi_p|_{C(p,X)}$ es la identidad en $C(p, X)$. Similarmente, diremos que ϕ_p es una *retracción por deformación en* $C_2(X)$ si existe una homotopía $G : C(X) \times I \to C_2(X)$ entre ϕ_p y la identidad en $C(X)$. Finalmente, diremos que ϕ_p es una *retracción fuerte por deformación en* $C_2(X)$ si la homotopía G es tal que $G(A, t) = A$, cada vez que $A \in C(p, X)$ y $t \in I$.

Así pues, dedicaremos este capítulo a estudiar propiedades de la función ψ_p (ϕ_p). En particular, nos centraremos en ver cuándo esta función es una retracción (en $C_2(X)$, respectivamente), retracción por deformación (en $C_2(X)$, respectivamente) y/o retracción fuerte por deformación (en $C_2(X)$, respectivamente). A fin de atacar convenientemente estas cuestiones, empecemos recordando que si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, entonces se tiene $A_n \cup B_n \to A \cup B$ (Lema 3.2.5). Como consecuencia de esto introducimos la siguiente observación.

Observación 8.1.3 *ϕ_p y ψ_p son continuas.*

De acuerdo a la observación anterior notemos también lo siguiente:

Observación 8.1.4 *ψ_p es una retracción y ϕ_p es una retracción en $C_2(X)$.*

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de las funciones ϕ_p y ψ_p. La mayoría de los resultados serán probados para ϕ_p y mencionaremos resultados *duales* para ψ_p. En estos casos no incluiremos la prueba, ya que ésta se puede hacer de manera muy similar a aquélla hecha para ϕ_p.

Necesitaremos algunos resultados auxiliares de Teoría de Hiperespacios que recordamos a continuación. Las pruebas pueden hallarse en [Nad78].

Lema 8.1.5 *[Nad78, Lema 1.48] La función unión $U : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $U(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ está bien definida y es continua.*

Lema 8.1.6 *[Nad78, Lema 1.49] Sean X un continuo y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de 2^X. Si $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un subcontinuo de X.*

A fin de atacar convenientemente las preguntas que nos hemos hecho, necesitamos recordar el concepto de contractibilidad.

Definición 8.1.7 Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X es *contraíble en Y* si cualquier función continua $f : X \to Y$ es homotópica a una constante. Si X es contraíble en sí mismo decimos simplemente que X es *contraíble*. A la función f se le llama *contracción*.

Este concepto nos ayudará mucho a estudiar las propiedades de ϕ_p y ψ_p, así que nos convendrá desarrollar primero algunos resultados relacionados con contractibilidad.

Lema 8.1.8 *Sean X un continuo y Y un subcontinuo de X. Si $C(Y)$ es contraíble en $C_2(X)$, entonces existe una función continua $G : C(Y) \times I \to C(X)$ tal que para cada $A \in C(Y)$, se tiene que $G(A,0) = A$, $G(A,1) = X$ y $G(A,s) \subset G(A,t)$ cada vez que $s \leq t$.*

Demostración:
Como $C(Y)$ es contraíble en $C_2(X)$, podemos suponer que existe una función continua $h : C(Y) \times I \to C_2(X)$ tal que $h(A,0) = A$ y $h(A,1) = X$, cada vez que $A \in C(Y)$.

Consideremos la función $G : C(Y) \times I \to 2^X$ dada por

$$G(A,t) = \bigcup\{h(A,s) : 0 \leq s \leq t\}.$$

Dado que $h(\{A\} \times [0,t]) \in C(2^X)$ para cada $A \in C(Y)$ y $t \in I$, aplicando el Lema 8.1.5 obtenemos que G está bien definida y es continua. Más aún, como $h(A,0) = A \in C(X)$, de acuerdo al Lema 8.1.6 se tiene que

$$G(A,t) \in C(X), \tag{8.1}$$

para cada $(A,t) \in C(Y) \times I$.

Por otra parte, como consecuencia de la definición de G, es fácil ver que $G(A,s) \subset G(A,t)$ cada vez que $0 \leq s \leq t \leq 1$. Además, claramente

$$\begin{aligned} G(A,0) &= h(A,0) = A \quad \text{y} \\ X &= h(A,1) \subset G(A,1). \end{aligned}$$

para cada $A \in C(Y)$.

Terminamos la prueba del lema.

□

El siguiente es un lema *dual* del lema anterior, es decir, este lema es la versión para 2^X del lema anterior. Como se puede probar de manera muy similar, no incluimos la prueba.

Lema (*dual*) 8.1.9 *Sean X un continuo y Y un subcontinuo de X. Si 2^Y es contraíble en 2^X, entonces existe una función continua $G : 2^Y \times I \to 2^X$ tal que para cada $A \in 2^Y$, se tiene que $G(A,0) = A$, $G(A,1) = X$ y $G(A,s) \subset G(A,t)$ cada vez que $s \leq t$.*

La siguiente es una herramienta que nos será muy útil a lo largo de este capítulo. Omitimos la prueba, ya que es una consecuencia directa del Corolario 3.2.6.

Lema 8.1.10 *Sean X, Y continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $f_i : X \to Y$ es una función continua para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces se tiene que la función $h : X \to 2^Y$ dada por $h(x) = \bigcup\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ es continua.*

Una última herramienta que queremos mencionar aquí es la siguiente.

Lema 8.1.11 *[Nad78, Teorema 1.93] Si X es un continuo localmente conexo, entonces $C(X)$ y 2^X son contraíbles.*

8.2 Caracterizaciones

Como mencionamos en la sección anterior, ϕ_p es una retracción en $C_2(X)$ y ψ_p es una retracción (Observacion 8.1.4). Nuestra intención ahora es encontrar condiciones necesarias y/o suficientes bajo las cuales ϕ_p es una retracción (fuerte) por deformación en $C_2(X)$. Similarmente, buscaremos condiciones bajo las cuales ψ_p es una retracción (fuerte) por deformación.

En este sentido, hallamos varias caracterizaciones interesantes. Una primera caracterización es la siguiente.

Teorema 8.2.1 *Sea X un continuo. Entonces ϕ_p es una retracción por deformación en $C_2(X)$ para cada $p \in X$ si y sólo si $C(X)$ es contraíble*

Demostración:
Sea $p \in X$ y supongamos que ϕ_p es una retracción por deformación en $C_2(X)$. Entonces existe una homotopía $\Phi : C(X) \times I \to C_2(X)$ tal que $\Phi(A,0) = A$ y $\Phi(A,1) = \phi_p(A)$, para cada $A \in C(X)$.

Tomemos un arco ordenado α, de $\{p\}$ a X, y consideremos una función $\widehat{H} : C(X) \times I \to C(X)$ dada por

$$\widehat{H}(A,t) = \begin{cases} \bigcup\{\Phi(A,2s) : 0 \le s \le t\}, & \text{si} \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \quad \text{y} \\ \bigcup\{\Phi(\{A\} \times I)\} \cup \alpha(2t-1), & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Dado que $\Phi(\{A\} \times [0,r]) \in C(2^X)$ para cada $A \in C(X)$ y $r \in I$, aplicando el Lema 8.1.5 obtenemos que

$$\widehat{H}|_{C(X)\times[0,\frac{1}{2}]}(A,t) \in 2^X \quad \text{y} \quad \widehat{H}|_{C(X)\times[0,\frac{1}{2}]} \text{ es continua} \tag{8.2}$$

Más aún, como $\Phi(A,0) = A \in C(X)$, de acuerdo al Lema 8.1.6 se tiene que

$$\widehat{H}(A,t) \in C(X), \tag{8.3}$$

para cada $(A,t) \in C(Y) \times [0,\frac{1}{2}]$. Notemos ahora que

$$p \in \Phi(A,1) \cap \alpha(0) \subset \bigcup\{\Phi(\{A\} \times I)\} \cap \alpha(2t-1), \tag{8.4}$$

para cada $(A,t) \in C(X) \times [\frac{1}{2},1]$.

De acuerdo a lo anterior se tiene que $\widehat{H}(A,t) \in C(X)$, cada vez que $(A,t) \in C(Y) \times [\frac{1}{2},1]$. Además, como consecuencia de (8.2), (8.3), (8.4), y el Lema 3.2.5 obtenemos que $\widehat{H}$ está bien definida y es continua.

Por otra parte tenemos que

$$\widehat{H}(A,0) = \Phi(A,0) = A \quad \text{y} \quad X = \alpha(1) \subset \widehat{H}(A,1)$$

para cada $A \in C(X)$; en consecuencia, $\widehat{H}$ es una contracción en $C(X)$.

Supongamos ahora que $C(X)$ es contraíble, es decir, existe una homotopía $G : C(X) \times I \to C(X)$ tal que $G(A,0) = A$ y $G(A,1) = B$ para alguna $B \in C(X)$ y para cada $A \in C(X)$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $B = \{p\}$. Consideremos ahora la función $g : C(X) \times I \to C_2(X)$ dada por

$$g(A,t) = \begin{cases} G(A,2t), & \text{si} \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \quad \text{y} \\ \{p\} \cup G(A,2-2t), & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

De acuerdo a esto se tiene que $G(A,2(\frac{1}{2})) = \{p\} = \{p\} \cup G(A,2-2(\frac{1}{2}))$, con lo cual es fácil concluir que g está bien definida y que es continua. Además tenemos que

$$\begin{aligned} g(A,0) &= G(A,0) = A \quad \text{y} \\ g(A,1) &= \{p\} \cup G(A,0) = A \cup \{p\} = \phi_p(A), \end{aligned}$$

para cada $A \in C(X)$. En consecuencia, ϕ_p es una retracción por deformación en $C_2(X)$. Terminamos la prueba del teorema.

□

Teorema (*dual*) 8.2.2 *Sea X un continuo. Entonces ψ_p es una retracción por deformación para cada $p \in X$ si y sólo si 2^X es contraíble.*

Ahora que hemos visto las condiciones para que ψ_p (ϕ_p) sea retracción por deformación (en $C_2(X)$), trataremos de hallar condiciones que determinen que ψ_p (ϕ_p) es una retracción *fuerte* por deformación (en $C_2(X)$). Como veremos más adelante, estas condiciones resultan ser bastante más complicada que las que hemos visto hasta el momento.

Teorema 8.2.3 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si ϕ_p es una retracción fuerte por deformación en $C_2(X)$, entonces $C(X)$ es contraíble y existe una base de vecindades anidadas $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$, de p, tales que $C(K_{n+1})$ es contraíble en $C_2(K_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:
Por hipótesis existe una homotopía $\Phi : C(X) \times I \to C_2(X)$ tal que

$$\Phi(A,0) = A, \quad \Phi(A,1) = \phi_p(A) \quad \text{y} \quad \Phi(\{p\},t) = \{p\}$$

para cada $t \in I$. Así pues, del Teorema 8.2.1, obtenemos directamente que $C(X)$ es contraíble.

Construiremos inductivamente la base de vecindades buscada. Definimos $K_2 = K_1 = X$; entonces $C(K_2)$ es contraíble en $C(K_1) \subset C_2(K_1)$. Supongamos que hemos construido dos vecindades de p, $K_{n-1}, K_n \in C(X)$ tales que $K_n \subset K_{n-1}$ y $C(K_n)$ es contraíble en $C_2(K_{n-1})$.

Construiremos una vecindad compacta y conexa K_{n+1} de p, de tal manera que $K_{n+1} \subset B(\frac{1}{n},p) \cap K_n$ y $C(K_{n+1})$ es contraíble en $C_2(K_n)$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon \in (0,\tfrac{1}{n}) \quad \text{y} \quad B(\varepsilon,p) \subset int(K_n).$$

Como Φ es uniformemente continua podemos tomar $\delta \in (0,\varepsilon)$ tal que, para cada $A \in C(X)$ y $t,t' \in I$, se tiene que si $H(A,\{p\}) \leq \delta$, entonces

$$H\big(\Phi(A,t),\{p\}\big) = H\big(\Phi(A,t),\Phi(\{p\},t')\big) < \varepsilon. \tag{8.5}$$

De la misma manera, podemos considerar $\delta_1 \in (0, \delta)$ de tal manera que si $H(A, \{p\}) \leq \delta_1$, entonces

$$H(\Phi(A,t), \{p\}) = H(\Phi(A,t), \Phi(\{p\}, t')) < \delta. \qquad (8.6)$$

Definimos

$$K_{n+1} = \bigcup \{ \bigcup \Phi(\{a\} \times I) : a \in \overline{B(\delta_1, p)} \}.$$

Probaremos en una serie de pasos que K_{n+1} satisface las condiciones requeridas.

Paso 1 K_{n+1} es una vecindad de p.

Sea $a \in B(\delta_1, p)$. Sabemos que $\Phi(\{a\}, 0) = \{a\}$, de manera que $a \in \Phi(\{a\} \times I) \subset K_{n+1}$. De aquí que $B(\delta_1, p) \subset K_{n+1}$ y, por tanto, K_{n+1} es una vecindad de p.

Paso 2 $K_{n+1} \in C(X)$

Observemos que $K_{n+1} = \bigcup \Phi(F_1(\overline{B(\delta_1, p)}) \times I)$.

Como $F_1(\overline{B(\delta_1, p)})$ es compacto, y Φ es una función continua, se tiene que $\Phi(F_1(\overline{B(\delta_1, p)}) \times I)$ es un subconjunto compacto de $C_2(X) \subset 2^X$. Así pues, como consecuencia del Lema 8.1.5 obtenemos que K_{n+1} es compacto. Además, si $a \in \overline{B(\delta_1, p)}$, es fácil ver que $\Phi(\{a\} \times I)$ es una trayectoria en 2^X que contiene a $\{a\}$; así pues, gracias al Lema 8.1.6 obtenemos que

$$p, a \in \bigcup \Phi(\{a\} \times I) \in C(X),$$

En consecuencia, K_{n+1} es conexo y, por tanto,

$$K_{n+1} \in C(X).$$

Paso 3 $K_{n+1} \subset B(\frac{1}{n}, p) \cap K_n$.

Sea $y \in K_{n+1}$, entonces $y \in \Phi(\{a\}, t)$, para alguna $(a, t) \in \overline{B(\delta_1, p)}) \times I$. De acuerdo a esto y a (8.6) obtenemos que

$$H(\Phi(\{a\}, t), \{p\}) < \delta$$

De aquí que $y \in B(\delta, p)$ y, por tanto,

$$K_{n+1} \subset B(\delta, p) \subset B(\varepsilon, p) \subset B(\tfrac{1}{n}, p) \cap K_n. \qquad (8.7)$$

Paso 4 $C(K_{n+1})$ es contraíble en $C_2(K_n)$.

Tomemos un arco ordenado α, de $\{p\}$ a K_{n+1}, y consideremos la función $G : C(K_{n+1}) \times I \to C_2(K_n)$ dada por

$$G(A,t) = \begin{cases} \Phi(A,2t), & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \quad \text{y} \\ A \cup \alpha(2t-1), & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Veamos que G está bien definida.

En primer lugar,

$$\Phi\big(A, 2(\tfrac{1}{2})\big) = \phi_p(A) = A \cup \{p\} = A \cup \alpha\big(2(\tfrac{1}{2}) - 1\big). \tag{8.8}$$

Además, para cada $A \in C(K_{n+1})$ notemos que $\Phi(A, 2t) \in C_2(X)$, cada vez que $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $A \cup \alpha(2t-1) \in C_2(X)$ para cada $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Así pues, basta ver que $G(A,t) \subset K_n$ para cada $(A,t) \in C(K_{n+1}) \times I$.

Sea $(A,t) \in C(K_{n+1}) \times I$. Si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces, gracias a (8.7) se tiene que

$$G(A,t) = A \cup \alpha(2t-1) \subset K_{n+1} \subset K_n.$$

Por otro lado, si $t \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $G(A,t) = \Phi(A, 2t)$. Por (8.7) tenemos que

$$A \subset K_{n+1} \subset B(\delta, p),$$

así que de acuerdo a (8.5) se tiene que

$$G(A,t) = \Phi(A,2t) \subset B(\varepsilon, p) \subset K_n.$$

En consecuencia, G está bien definida.

Ahora bien, por hipótesis se tiene que $G|_{C(K_{n+1}) \times [0,\frac{1}{2}]}$ es continua. Además, del Lema 3.2.5 se desprende que $G|_{C(K_{n+1}) \times [\frac{1}{2},1]}$ también es continua. De acuerdo a lo anterior y a (8.8) obtenemos que G es continua.

Finalmente,

$$G(A,0) = \Phi(A,0) = A \quad \text{y} \quad G(A,1) = K_{n+1},$$

para cada $A \in C(X)$. Por tanto, $C(K_{n+1})$ es contraíble en $C_2(K_n)$.

Terminamos la prueba del teorema.

□

Teorema (*dual*) 8.2.4 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si ψ_p es una retracción fuerte por deformación, entonces 2^X es contraíble y existe una base de vecindades anidadas $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$, de p, tales que $2^{K_{n+1}}$ es contraíble en 2^{K_n} para cada $n \in \mathbb{N}$.*

En lo sucesivo usaremos la siguiente notación: si A es un subcontinuo del continuo X, con métrica d y $p \in X$, entonces escribiremos

$$d(p, A) = \min\{d(p, a) : a \in A\}.$$

Lema 8.2.5 *Sean X un continuo, $p \in X$ y $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ una base de vecindades de p tales que $K_{i+1} \subset int(K_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $K_1 = X$. Para cada $A \in 2^X$, con $A \neq \{p\}$, definimos*

$$w(A) = \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} : A \subset K_i\}, & si \quad A \subset K_2 \\ 2, & si \quad A \setminus K_2 \neq \emptyset. \end{cases}$$

Si $A \in 2^X$, $A \neq \{p\}$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ es una sucesión que converge a A, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $w(A_n) \in \{w(A), w(A)-1\}$.

Demostración:
Si $A \setminus K_2 \neq \emptyset$, es fácil ver que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \setminus K_2 \neq \emptyset$ para cada $n > N$. Por tanto, $w(A) = 2 = w(A_n)$ cada vez que $n > N$.

Supongamos ahora que $A \subset K_2$. En este caso, por hipótesis tenemos que $A \subset K_{w(A)} \subset int(K_{w(a)-1})$, en otras palabras, $A \in \langle int(K_{w(A)-1})\rangle$ (véase Definición 3.1.4). Así pues, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \langle int(K_{w(A)-1})\rangle$ cada vez que $n > N$. Por tanto,

$$w(A_n) \geq w(A) - 1$$

si $n > N$.

Ahora bien, si suponemos que $w(A_{n_k}) \geq w(A) + 1$ para una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces se tiene que

$$A = \lim A_{n_k} \subset K_{w(A)+1},$$

lo cual es una contradicción.

De esta manera, podemos concluir que $w(A_n) \in \{w(A), w(A)-1\}$ para cada $n > N$ y terminamos la prueba del lema.

$\square$

Proposición 8.2.6 *Sea X un continuo tal que $C(X)$ es contraíble y sea $p \in X$. Si existe una base de vecindades anidadas $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ de p, de tal manera que $C(K_{i+1})$ es contraíble en $C_2(K_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces existe una función continua $G : C(X) \times I \to C(X)$ tal que*

i) $G(A,0) = A$, $p \in G(A,1)$ para cada $A \in C(X)$ y

ii) $G(\{p\},t) = \{p\}$, para cada $t \in I$.

Demostración:
Podemos suponer que $K_1 = X$, ya que, por hipótesis, $C(K_2)$ de todos modos es contraíble en $C(X)$. Supondremos también que $K_{i+1} \subset int(K_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

La prueba de la proposición resulta un tanto complicada, así que la dividiremos en cuatro pasos principales.

Paso 1 *Definiciones.*

Dado que $C(X)$ es contraíble, por el Lema 8.1.8, existe una función continua $G_1 : C(X) \times I \to C(X)$ tal que

$$G_1(A,0) = A, \quad G_1(A,1) = X = K_1 \quad \text{y} \quad G_1(A,s) \subset G_1(A,t), \tag{8.9}$$

cada vez que $0 \leq s \leq t \leq 1$ y $A \in C(X)$.

Además, usando otra vez el Lema 8.1.8, para cada $i \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ podemos tomar una función continua $G_i : C(K_{i+1}) \times I \to C(K_i)$ tal que

$$G_i(A,0) = A, \quad G_i(A,1) = K_i \quad \text{y} \quad G_i(A,s) \subset G_i(A,t), \tag{8.10}$$

cada vez que $0 \leq s \leq t \leq 1$ y $A \in C(K_{i+1})$.

Tomemos también una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$, que converja a 1, de manera que $0 = x_1 < x_n < x_{n+1} < 1$ para cada $n > 1$.

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ necesitaremos considerar una función continua $f_n : [x_n, x_{n+1}] \to I$ tal que

$$f_n(x_n) = 0 \quad \text{y} \quad f_n(x_{n+1}) = 1 \tag{8.11}$$

Definimos por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \{A \in C(X) : A \setminus int(K_{n+2}) \neq \emptyset\} \quad \text{y} \\ m_n &= \inf\{H(A, C(K_{n+3})) : A \in \mathcal{A}_n\} \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\mathcal{A}_n = C(X) \setminus \langle int(K_{n+2}) \rangle$, de manera que $\mathcal{A}_n$ es cerrado en $C(X)$ (véase Definición 3.1.4). En particular, $\mathcal{A}_n$ es compacto. Así pues, dado que A toma valores en $\mathcal{A}_n$, H es continua y $C(K_{n+2})$ también es compacto, obtenemos que

$$m_n = \min\{H(A, C(K_{n+3})) : A \in \mathcal{A}_n\}. \tag{8.12}$$

Ahora bien, si $H(A, C(K_{n+3})) = 0$ para alguna $A \in C(X)$, entonces se tiene que $A \subset K_{n+3} \subset int(K_{n+2})$ De aquí se desprende fácilmente que

$$m_n > 0 \tag{8.13}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Paso 2 *Las funciones $\widehat{G}_i$. Construcción y propiedades.*

Definiremos una familia de funciones $\widehat{G}_i : C(K_{i+1}) \times [x_i, x_{i+1}] \to C(X)$, con $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y, además, una función $\widehat{G}_1 : C(X) \times [x_1, x_2] \to C(X)$. Dichas funciones nos ayudarán a encontrar la función que buscamos.

Así pues, definimos $\widehat{G}_1 : C(K_1) \times [x_1, x_2] \to C(X)$ como

$$\widehat{G}_1(A, t) = G_1\Big(A, \min\{1, \tfrac{f_1(t)}{m_1} \cdot H(A, C(K_4))\}\Big).$$

Para $i \geq 2$ definimos:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_i(A, t) &= \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j\Big(A, \min\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H(A, C(K_{j+3}))\}\Big) \\ &\quad \cup G_i\Big(A, \min\{1, \tfrac{f_i(t)}{m_i} \cdot H(A, C(K_{i+3}))\}\Big). \end{aligned}$$

En este paso presentaremos las propiedades de las funciones $\widehat{G}_i$ que necesitaremos más adelante.

Propiedad 1 $\widehat{G}_i$ está bien definida para cada $i \in \mathbb{N}$.

Empecemos notando que

$$0 \leq \min\left\{1, \tfrac{f_i(t)}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big)\right\} \leq 1.$$

De acuerdo a esto, es fácil ver que $\widehat{G}_1$ está bien definida. Tomemos ahora $i \geq 2$ y $(A,t) \in C(K_{i+1}) \times [x_i, x_{i+1}]$. De (8.10) se desprende que

$$A \subset G_j(A,t) \in C(X)$$

cada vez que $j \leq i$ y $t \in I$. De acuerdo a esto es fácil ver que $\widehat{G}_i(A,t) \in C(X)$. Como consecuencia de lo anterior y de (8.13), podemos concluir que $\widehat{G}_i$ está bien definida.

Propiedad 2 $\widehat{G}_i$ es continua para cada $i \in \mathbb{N}$.

Sabemos que f_i, H y G_i son continuas. También se sabe que el mínimo de dos funciones continuas es continuo. Gracias a esto y al Lema 8.1.10 obtenemos la continuidad de $\widehat{G}_i$.

Propiedad 3 Si $A \subset K_{i+1}$ y $A \setminus int(K_{i+2}) \neq \emptyset$, entonces

$$G_i\Big(A, \min\{1, \tfrac{1}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big)\}\Big) = K_i.$$

Como $A \in \mathcal{A}_i$, de (8.12) se sigue que $\frac{1}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big) \geq 1$, así que

$$G_i\Big(A, \min\{1, \tfrac{1}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big)\}\Big) = G_i(A,1) = K_i.$$

Propiedad 4 $\widehat{G}_i(A, x_{i+1}) = \widehat{G}_{i+1}(A, x_{i+1})$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $A \in C(K_{i+2})$.

Gracias a (8.11) y (8.10), para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_i(A, x_{i+1}) &= \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j\Big(A, \min\left\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\right\}\Big) \\
&\quad \cup G_i\Big(A, \min\left\{1, \tfrac{f_i(x_{i+1})}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big)\right\}\Big) \\
&= \bigcup_{j=1}^{i} G_j\Big(A, \min\left\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\right\}\Big) \\
&= \bigcup_{j=1}^{i} G_j\Big(A, \min\left\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\right\}\Big) \cup A
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{j=1}^{i} G_j\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\big\}\Big) \cup G_{i+1}(A,0) \\
&= \bigcup_{j=1}^{i} G_j\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\big\}\Big) \\
&\quad \cup G_{i+1}\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{f_{i+1}(x_{i+1})}{m_{i+1}} \cdot H\big(A, C(K_{i+4})\big)\big\}\Big) \\
&= \widehat{G}_{i+1}(A, x_{i+1})
\end{aligned}
$$

Propiedad 5 Sea $i \geq 4$. Si $A \in C(K_i)$, entonces $\widehat{G}_k(A,t) = A$ cada vez que $t \in [x_k, x_{k+1}]$ y $k \leq i-3$.

Por hipótesis tenemos que $A \in C(K_i) \subset C(K_{k+3}) \subset C(K_{j+3})$ para cada $j \leq k$. De acuerdo a esto y a (8.10) no es difícil ver que

$$
\begin{aligned}
\widehat{G}_k(A,t) &= \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\big\}\Big) \\
&\quad \cup G_k\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{f_k(t)}{m_k} \cdot H\big(A, C(K_{k+3})\big)\big\}\Big) \\
&= \bigcup_{j=1}^{k} G_j\big(A, \min\{1, 0\}\big) = A
\end{aligned}
$$

Propiedad 6 Sea $i \in \mathbb{N}$. Si $A \in C(K_{i+2})$, entonces $\widehat{G}_i(A,t) \subset K_i$ cada vez que $t \in [x_i, x_{i+1}]$.

Es claro que $\widehat{G}_1(A,t) \subset K_1 = X$ cada vez que $t \in [x_1, x_2]$ y $A \in C(K_3)$.

Supongamos ahora que $i \geq 2$ y $A \in C(K_{i+2})$. Como $i+2 \geq 4$, de la Propiedad 5 se deduce que

$$
\begin{aligned}
\widehat{G}_i(A,t) &= \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j\Big(A, \min\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\}\Big) \\
&\quad \cup G_i\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{f_i(t)}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big)\big\}\Big) \\
&= A \cup G_i\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{f_i(t)}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big)\big\}\Big) \\
&\subset A \cup K_i \subset K_i
\end{aligned}
$$

Propiedad 7 Si $A \setminus K_2 \neq \emptyset$, entonces $\widehat{G}_1(A, x_2) = X$. Además, Si $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ es tal que $A \in C(K_{i+1})$ y $A \setminus int(K_{i+2}) \neq \emptyset$, entonces se tiene que $\widehat{G}_i(A, x_{i+1}) = K_i \cup \widehat{G}_{i-1}(A, x_i)$.

Si $A \setminus K_2 \neq \emptyset$, se sigue que

$$\widehat{G}_1(A, x_2) = G_1\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{f_1(x_2)}{m_1} \cdot H\big(A, C(K_4)\big)\big\}\Big) = G_1(A, 1) = X.$$

Por otra parte, de acuerdo a (8.11) y a (8.12) sabemos que

$$\tfrac{f_i(x_{i+1})}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big) = \tfrac{1}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big) \geq 1.$$

Como consecuencia de lo anterior y de (8.10) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_i(A, x_{i+1}) &= \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j\Big(A, \min\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\}\Big) \\
&\quad \cup G_i\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{f_i(x_{i+1})}{m_i} \cdot H\big(A, C(K_{i+3})\big)\big\}\Big) \\
&= \widehat{G}_{i-1}(A, x_i) \cup G_i(A, 1) \\
&= \widehat{G}_{i-1}(A, x_i) \cup K_i.
\end{aligned}$$

Paso 3 *Una función G'. Construcción y propiedades.*

Por hipótesis, la familia $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades anidadas de p. Así pues, para cada $A \in C(X)$, $A \neq \{p\}$, podemos considerar un número

$$w(A) = \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} : A \subset K_i\}, & \text{si} \quad A \subset K_2 \quad \text{y} \\ 2, & \text{si} \quad A \setminus K_2 \neq \emptyset. \end{cases}$$

Una vez establecido esto, estamos en condiciones de definir una función $G' : \big(C(X) \setminus \{\{p\}\}\big) \times I \to C(X)$ dada por

$$G'(A, t) = \begin{cases} \widehat{G}_i(A, t), & \text{si} \quad x_i \leq t \leq x_{i+1} \leq x_{w(A)} \quad \text{y} \\ \widehat{G}_{w(A)-1}(A, x_{w(A)}), & \text{si} \quad t \geq x_{w(A)} \end{cases}$$

Si $x_{i+1} \leq x_{w(A)}$, entonces $i \leq w(A) - 1$, así que tomar $\widehat{G}_i(A, t)$ tiene sentido. De acuerdo a esto y a la Propiedad 4, tenemos que G' está bien definida. Veamos ahora que G' es continua.

Sea $\{(A_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Big(C(X) \setminus \{\{p\}\}\Big) \times I$ una sucesión que converge a $(A, t_0) \in \Big(C(X) \setminus \{\{p\}\}\Big) \times I$. Analizaremos dos casos.

Caso 1 $t_0, t_n \leq x_{w(A)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $t_0 \in (x_i, x_{i+1})$ para alguna $i \leq w(A)-1$, entonces $t_n \in (x_i, x_{i+1})$ para n suficientemente grande. Así pues, gracias a la Propiedad 2, para n suficientemente grande se tiene que

$$G'(A_n, t_n) = \widehat{G}_i(A_n, t_n) \to \widehat{G}_i(A, t_0) = G'(A, t_0).$$

Ahora bien, supongamos que $t_0 = x_i$ para alguna $i \leq x_{w(A)}$, y que $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces

$$G'(A_{n_k}, t_{n_k}) = \widehat{G}_{i-1}(A_{n_k}, t_{n_k}) \to \widehat{G}_{i-1}(A, t_0) = G'(A, t_0).$$

De manera similar, si la subsucesión está contenida en $[x_i, x_{i+1}]$, obtenemos que

$$G'(A_{n_k}, t_{n_k}) = \widehat{G}_i(A_{n_k}, t_{n_k}) \to \widehat{G}_i(A, t_0) = G'(A, t_0).$$

De esta manera, podemos concluir que $G'(A_n, t_n) \to G'(A, t_0)$ y terminamos el análisis de este caso.

Caso 2 $t_0 \geq x_{w(A)}$.

Por el Lema 8.2.5 podemos suponer que

$$w(A_n) = w(A) \qquad \text{o} \qquad w(A_n) = w(A) - 1. \tag{8.14}$$

Además, en este caso podemos suponer que $t_n \geq x_{w(A)} \geq x_{w(A_n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así pues, basta analizar dos subcasos.

Subcaso 1 $w(A_n) = w(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Aquí es claro que

$$\begin{aligned} G'(A_n, t_n) &= \widehat{G}_{w(A_n)-1}(A_n, x_{w(A_n)}) \\ &= \widehat{G}_{w(A)-1}(A_n, x_{w(A)}) \to \widehat{G}_{w(A)-1}(A, x_{w(A)}) \\ &= G'(A, t_0). \end{aligned}$$

Subcaso 2 $w(A_n) = w(A) - 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $w(A) = 2$, entonces por el Lema 8.2.5 se tiene que $w(A_n) = 2$ y caemos en el subcaso anterior. Así pues, podemos suponer que $w(A) \geq 3$.

Como $A_n \to A$, en este subcaso es fácil ver que $A \nsubseteq int(K_{w(A)})$. De esta manera, usando la Propiedad 3 y (8.11) obtenemos que

$$\begin{aligned}
G'(A,t_0) &= \widehat{G}_{w(A)-1}(A, x_{w(A)}) \\
&= \bigcup_{j=1}^{w(A)-2} G_j\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{1}{m_j}\cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\big\}\Big) \\
&\quad \cup G_{w(A)-1}\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{1}{m_{w(A)-1}}\cdot H\big(A, C(K_{w(A)+2})\big)\big\}\Big) \\
&= \bigcup_{j=1}^{w(A)-3} G_j\Big(A, \min\big\{1, \tfrac{1}{m_j}\cdot H\big(A, C(K_{j+3})\big)\big\}\Big) \\
&\quad \cup K_{w(A)-2} \cup K_{w(A)-1}. \\
&= \widehat{G}_{w(A)-3}(A, x_{w(A)-2}) \cup K_{w(A)-2} \qquad (8.15)
\end{aligned}$$

Por otra parte, en este caso es fácil ver que

$$A_n \subset K_{w(A)-1} \quad \text{y} \quad A \setminus int(K_{w(A)}) \neq \emptyset.$$

Si tomamos $i = w(A) - 2$, la Propiedad 7 y (8.15) nos dicen que

$$\begin{aligned}
G'(A_n,t_n) &= \widehat{G}_{w(A_n)-1}(A_n, x_{w(A_n)}) \\
&= \widehat{G}_{w(A)-2}(A_n, x_{w(A)-1}) \\
&= \widehat{G}_{w(A)-3}(A_n, x_{w(A)-2}) \cup K_{w(A)-2} \\
&\to \widehat{G}_{w(A)-3}(A, x_{w(A)-2}) \cup K_{w(A)-2} \\
&= G'(A,t_0).
\end{aligned}$$

En consecuencia, G' es continua en (A, t_0).

En cualquier caso obtenemos que G' es continua.

Paso 4 *La función G.*

Definimos finalmente $G : C(X) \times I \to C(X)$ dada por

$$G(A,t) = \begin{cases} G'(A,t), & \text{si } A \neq \{p\} \text{ y} \\ \{p\}, & \text{si } A = \{p\}. \end{cases}$$

Veremos a continuación las propiedades que nos interesan de la función G.

i) G es una función continua.

Es claro que G está bien definida. Como G' es continua, basta tomar una sucesión $\{(A_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Big(C(X) \setminus \{\{p\}\}\Big) \times I$ que converja a $(\{p\}, t_0)$, y ver que $G(A_n, t_n) \to \{p\}$.

Así pues, es fácil ver que

$$w(A_n) \;\to\; \infty. \tag{8.16}$$

Analizaremos dos casos.

Caso 1 $t_0 < 1$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \leq t_0 \leq x_{k+1}$ y definimos $x_0 = x_1 = 0$ y $\widehat{G}_0 = \widehat{G}_1$.

En este caso, cuando n es suficientemente grande, se tiene que

$$t_n \;\in\; [x_{k-1}, x_k] \;\cup\; [x_k, x_{k+1}] \;\cup\; [x_{k+1}, x_{k+2}] \tag{8.17}$$

y además, usando (8.16),

$$t_n \;\leq\; x_{w(A_n)+1}, \qquad \text{y} \qquad k \;\leq\; w(A_n) - 4. \tag{8.18}$$

De (8.17) obtenemos que

$$G(A_n, t_n) \;=\; G'(A_n, t_n) \;\in\; \Big\{\widehat{G}_{k-1}(A_n, t_n),\; \widehat{G}_k(A_n, t_n),\; \widehat{G}_{k+1}(A_n, t_n)\Big\}.$$

Aplicando ahora la Propiedad 5 y (8.18) podemos deducir que $\widehat{G}_r(A_n, t_n) = A_n$ cada vez que $r \in \{k-1, k, k+1\}$. En consecuencia,

$$G(A_n, t_n) \;=\; A_n \;\to\; \{p\}.$$

Caso 2 $t_0 = 1$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N$, entonces $\operatorname{diam}(K_n) < \varepsilon$.

Por (8.16), podemos tomar $n > N$ de manera que

$$x_{N+1} \;<\; t_n \leq 1 \qquad \text{y} \qquad N + 1 \;<\; w(A_n) - 1.$$

Entonces, para $n > N$ se tiene que

$$G(A_n, t_n) \;=\; G'(A_n, t_n) \;=\; \widehat{G}_r(A_n, z_n),$$

para alguna $r \in [N+1, w(A_n)-1]$, y $z_n \in \{t_n, x_{w(A_n)}\}$.

Notemos que $A_n \subset K_{r+1}$. Así pues, de acuerdo a la Propiedad 6 tenemos que $\widehat{G}_{r-1}(A_n, x_r) \subset K_{r-1}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_r(A_n, z_n) &= \bigcup_{j=1}^{r-1} G_j\Big(A_n, \min\big\{1, \tfrac{1}{m_j} \cdot H\big(A_n, C(K_{j+3})\big)\big\}\Big) \\
&\quad \cup G_r\Big(A_n, \min\big\{1, \tfrac{f_r(z_n)}{m_r} \cdot H\big(A_n, C(K_{r+3})\big)\big\}\Big) \\
&= \widehat{G}_{r-1}(A_n, x_r) \\
&\quad \cup G_r\Big(A_n, \min\big\{1, \tfrac{f_r(z_n)}{m_r} \cdot H\big(A_n, C(K_{r+3})\big)\big\}\Big) \\
&\subset K_{r-1} \cup K_r \;=\; K_{r-1} \;\subset\; K_N.
\end{aligned}$$

De acuerdo a las consideraciones anteriores obtenemos que $\operatorname{diam}\big(G(A_n, t_n)\big) < \varepsilon$ para toda $n > N$. Por tanto,

$$\operatorname{diam}\big(G(A_n, t_n)\big) \to 0.$$

En otras palabras, $G(A_n, t_n) \to \{p\}$.

ii) $G(A, 0) = A$, para cada $A \in C(X)$ y $G\big(\{p\}, t\big) = \{p\}$, para cada $t \in I$.

Podemos suponer que $A \neq \{p\}$. Así pues, de acuerdo a (8.9) tenemos que

$$G(A, 0) \;=\; G'(A, 0) \;=\; G_1(A, 0) \;=\; A.$$

Por construcción sabemos que $G\big(\{p\}, t\big) = \{p\}$, para cada $t \in I$.

iii) $p \in G(A, 1)$ para cada $A \in C(X)$.

Si $A \setminus K_2 \neq \emptyset$, entonces de la Propiedad 7 se sigue que

$$G(A, 1) \;=\; G'(A, 1) \;=\; \widehat{G}_1(A, x_2) \;=\; X.$$

Por tanto, $p \in G(A, 1)$.

Supongamos ahora que $A \in C(K_2)$. Por el inciso anterior podemos suponer que $A \neq \{p\}$. Así pues, como $A \subset K_{w(A)}$ y $A \setminus K_{w(A)+1} \neq \emptyset$, usando la Propiedad 7 obtenemos que

$$\begin{aligned}
p &\in K_{w(A)-1} \cup \widehat{G}_{w(A)-2}(A, x_{w(A)-1}) \\
&= \widehat{G}_{w(A)-1}\big(A, x_{w(A)}\big) \\
&= G'(A, 1) \;=\; G(A, 1)
\end{aligned}$$

Terminamos la prueba de la proposición.

□

Proposición (*dual*) 8.2.7 *Sean X un continuo tal que 2^X es contraíble y $p \in X$. Si existe una base de vecindades anidadas $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ de p, de manera que $2^{K_{i+1}}$ es contraíble en 2^{K_i} para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces existe una función continua $G : 2^X \times I \to 2^X$ tal que*

i) $G(A,0) = A$, $p \in G(A,1)$ para cada $A \in 2^X$ y

ii) $G(\{p\},t) = \{p\}$, para cada $t \in I$.

Finalmente, veremos que el recíproco de los Teoremas 8.2.3 y 8.2.4 es cierto, para así introducir las caracterizaciones buscadas.

Teorema 8.2.8 *Sean X un continuo tal que $C(X)$ es contraíble y $p \in X$. Si existe una base de vecindades anidadas $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ de p, de manera que $C(K_{i+1})$ es contraíble en $C_2(K_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces ϕ_p es una retracción fuerte por deformación en $C_2(X)$.*

Demostración:
Gracias a la Proposición 8.2.6 existe una función continua $G : C(X) \times I \to C(X)$ tal que

$$\begin{array}{ll} i) & G(A,0) = A \text{ y } p \in G(A,1) \text{ para cada } A \in C(X) \text{ y} \\ ii) & G(\{p\},t) = \{p\}, \text{ para cada } t \in I. \end{array} \tag{8.19}$$

Definimos una función $\widehat{G} : C(X) \times I \to C(X)$ dada por

$$\widehat{G}(A,t) = \begin{cases} \bigcup\left\{G(\{a\}, t \cdot \frac{d(p,A)}{d(p,a)}) : a \in A\right\}, & \text{si } p \notin A \\ A, & \text{si } p \in A. \end{cases}$$

Continuaremos con la prueba del teorema en una serie de pasos.

Paso 1 $\widehat{G}$ está bien definida.

Sean $A \in C(X) \setminus C(p,X)$ y $a \in A$. Entonces tenemos que

$$0 < d(A,p) \leq d(a,p) \quad \text{y} \quad 0 \leq t \cdot \frac{d(p,A)}{d(p,a)} \leq 1,$$

cada vez que $t \in I$. Así pues, $G\big(\{a\}, t \cdot \frac{d(p,A)}{d(p,a)}\big) \in C(X)$.

Consideremos la función $\eta_A : \big(X \setminus \{p\}\big) \times I \to C(X)$ dada por

$$\eta_A(a,t) \ = \ G\Big(\{a\}, t \cdot \tfrac{d(p,A)}{d(p,a)}\Big)$$

y notemos que es continua. De aquí se deduce que

$$\Big\{G\big(\{a\}, t \cdot \tfrac{d(p,A)}{d(p,a)}\big) : a \in A\Big\} \ = \ \eta_A\big(A \times \{t\}\big) \ \in \ C(C(X)) \qquad (8.20)$$

para cada $(A,t) \in C(X) \times I$. Así pues, aplicando el Lema 8.1.6 obtenemos que

$$\bigcup \Big\{G\big(\{a\}, t \cdot \tfrac{d(p,A)}{d(p,a)}\big) : a \in A\Big\} \ \in \ C(X).$$

Por tanto, $\widehat{G}$ está bien definida.

Paso 2 $\widehat{G}$ es continua.

Sea $\big\{(A_n, t_n)\big\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X) \times I$ una sucesión que converge a algún $(A,t) \in C(X) \times I$. Analizaremos dos casos.

Caso 1 $p \notin A$.

En este caso tenemos que $d(p,a) > 0$ para toda $a \in A$.

Como consecuencia de (8.20) y del Lema 8.1.5 obtenemos que $\widehat{G}$ es continua.

Caso 2 $p \in A$.

Podemos suponer que $p \notin A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para probar la continuidad en este caso mostraremos que

$$\limsup \widehat{G}(A_n, t_n) \ \subset A \ \subset \ \liminf \widehat{G}(A_n, t_n).$$

Así pues, sea $x \in \limsup \widehat{G}(A_n, t_n)$, entonces existen una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión original y $x_{n_k} \in \widehat{G}\big(A_{n_k}, t_{n_k}\big)$ para cada k, de manera que $x_{n_k} \to x$. De aquí que

$$x_{n_k} \ \in \ G\Big(\big\{a_{n_k}\big\}, t_{n_k} \cdot \tfrac{d(p,A_{n_k})}{d(p,a_{n_k})}\Big)$$

para alguna $a_{n_k} \in A_{n_k}$.

Como A es compacto, podemos suponer que $a_{n_k} \to b$ para alguna $b \in A$. Ahora bien, si $x = p$ obtenemos directamente que $x \in A$. En caso en que $x \neq p$, por la condición *ii*) en (8.19), podemos suponer que $d(p, a_{n_k}) \nrightarrow 0$. Sin embargo $d(p, A_{n_k}) \to 0$, así que

$$x_{n_k} \in G\Big(\{a_{n_k}\}, t_{n_k} \cdot \tfrac{d(p,A_{n_k})}{d(p,a_{n_k})}\Big) \to G\big(\{b\}, 0\big) \subset A.$$

Por tanto $x \in A$ y $\limsup \widehat{G}(A_n, t_n) \subset A$.

Tomemos ahora $a \in A$. Veremos que $a \in \liminf \widehat{G}(A_n, t_n)$.

Subcaso 1 $a \neq p$.
Por hipótesis existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a a, y tal que $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En este subcaso tenemos que $d(p, a_n) \to d(p, a) \neq 0$, de aquí que

$$G\Big(\{a_n\}, t_n \cdot \tfrac{d(p,A_n)}{d(p,a_n)}\Big) \to G\Big(\{a\}, t \cdot \tfrac{d(p,A)}{d(p,a)}\Big) = G\big(\{a\}, 0\big) = \{a\}.$$

Por tanto, $a \in \liminf \widehat{G}(A_n, t_n)$.

Subcaso 2 $a = p$.
Como cada A_n es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $b_n \in A_n$ de manera que $d(p, A_n) = d(p, b_n)$. Entonces es fácil ver que $b_n \to p$ y que

$$G\big(\{b_n\}, t_n \cdot \tfrac{d(p,A_n)}{d(p,b_n)}\big) = G\big(\{b_n\}, t_n\big) \to G\big(\{p\}, t\big) = \{p\}.$$

En otras palabras, $a = p \in \liminf \widehat{G}(A_n, t_n)$.

Por tanto, $\widehat{G}(A_n, t_n) \to A$ y $\widehat{G}$ es continua.

Paso 3 $\widehat{G}(A, t) = A$ para cada $A \in C(p, X)$ y $t \in I$.

Esto es consecuencia directa de la definición de $\widehat{G}$.

Paso 4 $\widehat{G}(A, 0) = A$ para cada $A \in C(X)$.

Por el paso anterior, podemos suponer que $A \notin C(p, X)$. Gracias a (8.19) tenemos que

$$\widehat{G}(A, 0) = \bigcup \Big\{ G\big(\{a\}, 0\big) : a \in A \Big\} = \bigcup \big\{ \{a\} : a \in A \big\} = A.$$

Paso 5 $p \in \widehat{G}(A,1)$ para cada $A \in C(X)$.

Por el paso 3 podemos suponer que $A \notin C(p,X)$. Sea $q \in A$ tal que $d(p,A) = d(p,q)$, entonces, de (8.19) se sigue que

$$p \;\in\; G(\{q\},1) \;=\; G\Big(\{q\}, \tfrac{d(p,A)}{d(p,q)}\Big) \;\subset\; \widehat{G}(A,1).$$

Finalmente, definimos una función $g : C(X) \times I \to C_2(X)$ dada por

$$g(A,t) \;=\; \begin{cases} \widehat{G}(A,2t), & \text{si} \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \quad \text{y} \\ \widehat{G}\big(A,2(1-t)\big) \cup \{p\}, & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Gracias al paso 5 tenemos que $\widehat{G}\big(A,2(\frac{1}{2})\big) = \widehat{G}\big(A,2(\frac{1}{2})\big) \cup \{p\}$, de donde se desprende que g está bien definida y es continua. Además, si $A \in C(X)$, el paso 4 nos dice que $g(A,0) = \widehat{G}(A,0) = A$ y

$$g(A,1) \;=\; \widehat{G}(A,0) \cup \{p\} \;=\; A \cup \{p\} \;=\; \phi_p(A).$$

Notemos también que si $A \in C(p,X)$, como consecuencia del paso 3 se tiene que $g(A,t) = A$ para cada t.

Así pues, hemos obtenido que g es una homotopía entre la función identidad y ϕ_p, que no mueve a los elementos de $C(p,X)$. En consecuencia, ϕ_p es una retracción fuerte por deformación en $C_2(X)$. Terminamos la prueba del teorema.

□

Teorema (*dual*) 8.2.9 *Sean X un continuo tal que 2^X es contraíble y $p \in X$. Si existe una base de vecindades anidadas $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ de p, de manera que $2^{K_{i+1}}$ es contraíble en 2^{K_i} para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces ψ_p es una retracción fuerte por deformación.*

Como corolario de los Teoremas 8.2.3 y 8.2.8 obtenemos la siguiente caracterización.

Corolario 8.2.10 *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces ϕ_p es una retracción fuerte por deformación en $C_2(X)$ si y sólo si $C(X)$ es contraíble y existe una base de vecindades anidadas $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ de p, de manera que $C(K_{i+1})$ es contraíble en $C_2(K_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Similarmente, de los Teoremas 8.2.4 y 8.2.9, podemos concluir el siguiente

Corolario 8.2.11 *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces ψ_p es una retracción fuerte por deformación si y sólo si 2^X es contraíble y existe una base de vecindades anidadas $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ de p, de manera que $2^{K_{i+1}}$ es contraíble en 2^{K_i} para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Otra caracterización interesante es la siguiente:

Corolario 8.2.12 *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si*

i) ψ_p es una retracción fuerte por deformación para toda $p \in X$ o

ii) ϕ_p es una retracción fuerte por deformación en $C_2(X)$ para toda $p \in X$

Demostración:
Supongamos que se satisface la condición $i)$ (o $ii)$). Entonces, como consecuencia del Corolario 8.2.11 (o el Corolario 8.2.10), obtenemos que X es conexo en pequeño en p, para toda $p \in X$. Por tanto, X es localmente conexo (véase Lema 2.4.10).

Supongamos ahora que X es localmente conexo y sea $p \in X$. Gracias a la conexidad local podemos tomar una base de vecindades conexas, compactas y anidadas $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ de p, quienes a su vez son localmente conexas. Ahora bien, gracias al Lema 8.1.11 se tiene que $C(X)$ y $C(K_i)$ son contraíbles para cada $i \in \mathbb{N}$, en particular, $C(K_{i+1})$ es contraíble en $C_2(K_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De esta manera, aplicando el Corolario 8.2.10 obtenemos que ϕ_p es una retracción fuerte por deformación en $C_2(X)$.

De manera similar, el Lema 8.1.11 nos dice que 2^X y 2^{K_i} son contraíbles para cada $i \in \mathbb{N}$. De aquí que $2^{K_{i+1}}$ es contraíble en 2^{K_i} para cada $i \in \mathbb{N}$. Así pues, gracias al Corolario 8.2.11 obtenemos que ψ_p es una retracción fuerte por deformación.

Concluimos la prueba del corolario.

$\square$

8.3 Una curiosidad

Ya vimos algo de lo que pasa en $C(X)$ y 2^X con las funciones ϕ_p y ψ_p. Una pregunta que aparece de manera natural es qué pasa en los espacios $F_n(X)$.

Esta pregunta resultó ser muy complicada y escapó a los objetivos de este trabajo. Sin embargo, se obtuvo un resultado para un caso particular que nos pareció bonito. Dedicamos esta sección a presentarlo.

Empezaremos con algunos resultados auxiliares que tienen que ver con el comportamiento de las homotopías. Consideramos que el lector familiarizado con el tema podrá saltárselos.

Lema 8.3.1 *Sean X, Y, W y Z espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas tales que $f \approx g$. Si $h : Y \to Z$ es una función continua, entonces $h \circ f \approx h \circ g$. Similarmente, si $h' : W \to X$ es una función continua, entonces $f \circ h' \approx g \circ h'$.*

Demostración:
Por hipótesis existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, para cada $x \in X$.

Definimos $F' : X \times I \to Z$ como sigue: $F'(x,t) = (h \circ F)(x,t)$. Claramente F' es continua, y además satisface que $F'(x,0) = (h \circ f)(x)$ y $F'(x,1) = (h \circ g)(x)$, para cada $x \in X$. De aquí que $h \circ f \approx h \circ g$.

De manera similar definimos $G : W \times I \to Y$ dada por $G(w,t) = F(h'(w), t)$. Una vez más, es fácil ver que G es continua. Más aún: $G(w, 0) = F(h'(w), 0) = (f \circ h')(w)$ y $G(w, 1) = F(h'(w), 1) = (g \circ h')(w)$. Por tanto, $f \circ h' \approx g \circ h'$ y terminamos la prueba del lema.

□

Lema 8.3.2 *Sean X un espacio topológico y $f, g, h : X \to S^1$ tres funciones continuas. Si f y gh son homotópicas, entonces $\frac{f}{g} : X \to S^1$ es homotópica a h.*

Demostración:
Supongamos que $f \approx gh$, es decir, existe una función continua $F : X \times I \to S^1$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = (gh)(x)$, para cada $x \in X$. Consideremos una función $F' : X \to S^1$ dada por

$$F'(x,t) = \frac{F(x,t)}{g(x)}.$$

Es fácil ver que F' está bien definida y es continua. Además, $F'(x, 0) = \frac{f}{g}(x)$ y $F'(x, 1) = h(x)$. Por tanto, F' es una homotopía entre $\frac{f}{g}$ y h.

Terminamos la prueba del lema. □

En [Nad78] se prueba el siguiente resultado.

Proposición 8.3.3 *[Nad78, Proposición 12.38] Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to S^1$ una función continua. Entonces f es homotópica a una constante si y sólo si existe un levantamiento $f' : X \to \mathbb{R}$ de f.*

Recordemos que la función exponencial $p : \mathbb{R} \to S^1$ está dada por $p(t) = e^{2\pi i t}$ (ver Definición 6.6.5).

Lema 8.3.4 *Sea X un continuo no unicoherente. Entonces existe una función continua $f : X \to S^1$ que no es homotópica a una constante.*

Demostración:
Como X no es unicoherente, existen $A, B \in C(X)$ tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B$ no es conexo. Así pues, tenemos que $A \cap B$ es la unión ajena de dos subconjuntos cerrados y no vacíos P y Q.

Como X es métrico, X es T_4. Así pues, podemos tomar una función continua $g : X \to I$ tal que $g(P) = \{0\}$ y $g(Q) = \{1\}$. Podemos observar que $0, 1 \in g(A) \cap g(B)$. Así pues, dado que A y B son conexos obtenemos que

$$g(A) = I = g(B) \tag{8.21}$$

Definimos $f : X \to S^1$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\pi g(x)}, & \text{si} \quad x \in A \quad \text{y} \\ e^{-i\pi g(x)}, & \text{si} \quad x \in B. \end{cases} \tag{8.22}$$

Sea $x \in A \cap B$. Si $x \in P$, entonces

$$e^{i\pi g(x)} = e^0 = e^{-i\pi g(x)}.$$

Si $x \in Q$, entonces se tiene que

$$e^{i\pi g(x)} = e^{i\pi} = e^{-i\pi} = e^{-i\pi g(x)}.$$

Por tanto, f está bien definida y es una función continua. Más aún, de (8 21) podemos deducir que

$$\begin{aligned} f(A) &= e^{i\pi g(A)} = \{e^{i\pi t} : t \in I\} \quad \text{y} \\ f(B) &= e^{-i\pi g(B)} = \{e^{-i\pi t} : t \in I\}. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Veremos que f no es homotópica a una constante. Por la Proposición 8.3.3 basta probar que f no admite levantamientos.

Supongamos que $f' : X \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de f y sea $x \in P$. Entonces $p \circ f' = f$. De aquí que

$$f'(x) \in p^{-1}(f(x)) = p^{-1}(e^0) = \mathbb{Z}.$$

Supondremos que $f'(x) = k \in \mathbb{Z}$.

Ahora bien, de acuerdo a (8.23) deducimos que si W es una componente de $p^{-1}(f(A))$ o de de $p^{-1}(f(B))$, entonces $p|_W$ es un homeomorfismo.

Así pues, sea V_1 la componente de $p^{-1}(f(A))$ que contiene a k. De (8 23) es fácil ver que

$$V_1 = [k, k + \tfrac{1}{2}].$$

Similarmente, si V_2 la componente de $p^{-1}(f(B))$ que contiene a k, entonces

$$V_2 = [k - \tfrac{1}{2}, k].$$

Finalmente consideremos $y \in Q$. Como f' es continua, y A y B son conexos, tenemos que

$$f'(y) \subset V_1 \cap V_2 = \{k\}.$$

Sin embargo, esto significaría que $f'(y) = f'(x)$, de donde

$$e^{i\pi} = f(y) = (p \circ f')(y) = (p \circ f')(x) = f(x) = e^0,$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto no existe tal levantamiento f' de f y podemos concluir la prueba del lema.

$\square$

El siguiente es un resultado importante, que fue probado por D. Curtis y N. To Nhu.

Teorema 8.3.5 *[CN85, Lema 2 2] Sea $\mathcal{M} \subset F(X)$ compacto y localmente conexo. Entonces $\bigcup \mathcal{M}$ también es compacto y localmente conexo.*

Otro resultado importante se prueba en [Nad92]:

Teorema 8.3.6 *[Nad92, Teorema 8.23] Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es conexo por trayectorias.*

Por último presentamos el teorema de esta sección, que muestra una relación entre el comportamiento de la función $\phi_p|_{F_1(X)}$ y la estructura topológica de X.

Teorema 8.3.7 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si $\phi_p|_{F_1(X)}$ es retracción por deformación en $F_2(X)$, entonces X es unicoherente y conexo por trayectorias.*

Demostración:
Haremos la prueba del teorema en dos partes.

i) X es unicoherente.

Sea $h : F_2(X) \to F_2(X)$ la función identidad en $F_2(X)$. Como $\phi_p|_{F_1(X)}$ es retracción por deformación en $F_2(X)$, entonces $\phi_p|_{F_1(X)} \approx h$.

Si suponemos que X no es unicoherente, por el Lema 8.3.4 existe una función continua $f : X \to S^1$ que no es homotópica a una constante.

Consideremos también las siguientes funciones:

i) $\lambda : F_2(X) \to F_2(S^1)$ dada por $\lambda(\{x, y\}) = \{f(x), f(y)\}$,

ii) $g, : X \to F_1(X)$ dada por $g(x) = \{x\}$ y

iii) $\pi : F_2(S^1) \to S^1$ dada por $\pi(\{z, w\}) = zw$.

Es fácil ver que todas ellas son continuas.

Así pues, de acuerdo al Lema 8.3.1 se tiene que

$$\pi \circ \lambda \circ h \circ g \approx \pi \circ \lambda \circ \phi_p|_{F_1(X)} \circ g. \tag{8.24}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (\pi \circ \lambda \circ h \circ g)(x) &= (\pi \circ \lambda \circ h)(\{x\}) = (\pi \circ \lambda)(\{x\}) \\ &= \pi(\{f(x)\}) = f^2(x). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}(\pi \circ \lambda \circ \phi_p|_{F_1(X)} \circ g)(x) &= (\pi \circ \lambda \circ \phi_p|_{F_1(X)})(\{x\}) = (\pi \circ \lambda)(\{x, p\}) \\ &= \pi(\{f(x), f(p)\}) = f(x)f(p).\end{aligned}$$

Por otra parte, el Lema 8.3.2 nos dice que si $f^2 \approx f \cdot f(p)$, entonces $f \approx f(p)$. Sin embargo esto contradice la elección de f. Por tanto, podemos concluir que X es unicoherente.

ii) X es conexo por trayectorias.

Sean $x, y \in X$. Si suponemos que $\phi_p|_{F_1(X)}$ es retracción por deformación en $F_2(X)$, existe una función continua $F : F_1(X) \times I \to F_2(X)$ tal que $F(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $F(\{x\}, 1) = \{x, p\}$. Notemos que, para cada $z \in X$, la función $\alpha_z : I \to F_2(X)$ dada por $\alpha_z(t) = F(\{z\}, t)$ es una trayectoria en $F_2(X)$, que empieza en $\{z\}$ y termina en $\{z, p\}$. En particular, obtenemos que $\alpha_x(I)$ y $\alpha_y(I)$ son subcontinuos localmente conexos de $F_2(X)$. Así pues, aplicando el Teorema 8.3.5 se sigue que los conjuntos

$$\bigcup \alpha_x(I) \quad \text{y} \quad \bigcup \alpha_y(I)$$

son subconjuntos compactos y localmente conexos de X. Observemos también que

$$\{x\} \in \alpha_x(I) \quad \text{y} \quad \{y\} \in \alpha_y(I),$$

así que del Lema 8.1.6 se sigue que $\bigcup \alpha_x(I) \in C(X)$ y $\bigcup \alpha_y(I) \in C(X)$.

Por otra parte, notemos que $p \in \bigcup \alpha_x(I) \cap \bigcup \alpha_y(I)$, de donde se tiene que $M = \bigcup \alpha_x(I) \cup \bigcup \alpha_y(I)$ es un subcontinuo localmente conexo de X.

Finalmente, gracias al Teorema 8.3.6 obtenemos que M es un subcontinuo de X, -que contiene a x y y- y que es conexo por trayectorias

Por tanto, X es conexo por trayectorias.

Terminamos la prueba del teorema.

$\square$

Capítulo 9

Los Hiperespacios $K(X)$

Para un continuo X, definiremos en este capítulo el hiperespacio $K(X)$. La idea general es estudiar propiedades topológicas del hiperespacio $K(X)$ con relación a aquéllas que posee X. En otras palabras, nos interesa saber qué podemos decir de $K(X)$ cuando conocemos a X, y viceversa, qué propiedades tiene X dadas ciertas propiedades topológicas de $K(X)$.

Definición 9.0.8 Sean X un continuo y $A \subset X$. Definimos

$$K(A,X) = \{C(p,X) : p \in A\}.$$

Denotaremos a $K(X,X)$ simplemente como $K(X)$.

Sean X un continuo y $A \subset X$. Una primera pregunta que uno podría plantearse es si $K(A,X)$ también es un continuo, es decir, si $K(A,X)$ es un espacio métrico, compacto y conexo.

En este sentido, en el Lema 5.1.2 vimos que $C(p,X) \in C(C(X))$ para cada $p \in X$. De manera que

$$K(A,X) = \{C(p,X) : p \in A\} \subset C(C(X)).$$

Por otra parte, por el Teorema 3.1.3 sabemos que $C(X)$ es un continuo, así que aplicando de nuevo ese teorema obtenemos que $C(C(X))$ ¡también es un continuo! En particular, $C(C(X))$ es un espacio métrico y, por tanto, $K(X)$ también resulta ser un espacio métrico. De hecho, la métrica que estamos considerando es la restricción de la métrica de Hausdorff que tiene $C(C(X))$.

El análisis de propiedades como la compacidad y la conexidad de $K(X)$ es un poco más complicado, así que dedicaremos las siguientes secciones al estudio de estas propiedades.

9.1 Compacidad

En la sección anterior nos preguntábamos si, dado un continuo X, entonces $K(X)$ resultaría también ser un continuo. En esta sección veremos que éste no es el caso, en particular, porque $K(X)$ no siempre resulta ser un espacio compacto. Aquí se buscarán también condiciones necesarias y suficientes sobre el continuo X, para que el hiperespacio $K(X)$ sea un espacio compacto.

Empezaremos definiendo una función que será muy importante a lo largo de este trabajo.

Definición 9.1.1 Para un continuo X y $A \subset X$, definimos la función $\tau_A : A \to K(A,X)$ dada por $\tau_A(p) = C(p,X)$. Por conveniencia, denotaremos a τ_X simplemente como τ.

En [Cha86], W. J. Charatonik considera una función $F : 2^X \to C(C(X))$ -más general que τ- dada por $F(A) = \{K \in C(X) : A \in K\}$. En ese artículo se estudian relaciones entre la continuidad de F y ciertas propiedades topológicas del continuo X, tales como suavidad y conexidad en pequeño. Recordemos que un continuo X es *suave en un punto* $p \in X$ si para cada punto $x \in X$, cada $K \in C(p,X) \cap C(x,X)$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, que converge a K, de tal manera que $K_n \in C(p,X) \cap C(x_n,X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

En esta tesis trabajaremos únicamente con la función τ, ya que nuestro interés se centra en los hiperespacios $K(X)$, y esta función nos permitirá obtener propiedades muy interesantes sobre ellos.

Observación 9.1.2 Sean X un continuo y $A \subset X$. Notemos que la función $\tau_A : A \to K(A,X)$ es inyectiva, ya que si $C(p,X) = C(q,X)$, entonces $\{p\} \in C(q,X)$, es decir, $q \in \{p\}$ y por tanto $q = p$. Por otra parte, es inmediato ver que τ_A es suprayectiva, de modo que la función $\tau_A : A \to K(A,X)$ es una biyección.

Lema 9.1.3 *Si X es un continuo, entonces la función $\tau_A^{-1} : K(A,X) \to A$ es continua para cada $A \subset X$.*

Demostración:
Sean $C(p,X) \in K(A,X)$ y una sucesión $\{C(p_n,X)\}_{n=1}^{\infty} \subset K(A,X)$ que

converge a $C(p, X)$. Veremos que

$$\tau_A^{-1}(C(p_n, X)) = p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p = \tau_A^{-1}(C(p, X)).$$

Podemos suponer que existe $B \in C(p, X)$ tal que la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B. De acuerdo a esto, B no puede tener más de un punto, de manera que $B = \{p\}$ y por tanto $p_n \to p$.

En consecuencia τ_A^{-1} es continua y terminamos la prueba del lema.

□

El siguiente es un resultado muy sencillo, pero que nos será de gran utilidad.

Lema 9.1.4 *Sean X un continuo, $x \in X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x. Entonces*

$$\limsup\ C(x_n, X) \subset C(x, X).$$

Demostración:
Sea $A \in \limsup\ C(x_n, X)$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $n_k \in \mathbb{N}$ y $A_{n_k} \in C(x_{n_k}, X)$ tales que $H(A, A_{n_k}) < \frac{1}{k}$. En particular, la sucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a A. De esta manera, como $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada k, se sigue que $x \in A$, de modo que $A \in C(x, X)$. Así pues,

$$\limsup C(x_n, X) \subset C(x, X).$$

□

El lema que presentamos a continuación establece una relación entre la Propiedad de Kelley en un continuo X, y la continuidad de la función τ.

Lema 9.1.5 *Sea X un continuo, entonces la función τ es continua si y sólo si X tiene la Propiedad de Kelley.*

Demostración:
Supongamos que X tiene la Propiedad de Kelley. Para ver que τ es continua

tomemos $x \in X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x. Veremos que

$$C(x_n, X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C(x, X).$$

Como X tiene la Propiedad de Kelley, para cada $B \in C(x, X)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in C(x_n, X)$ tal que la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B. De aquí que

$$C(x, X) \subset \liminf C(x_n, X).$$

Como consecuencia de esto, y del Lema 9.1.4 obtenemos que

$$C(x_n, X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C(x, X),$$

de donde podemos concluir que τ es continua.

Ahora bien, supongamos que τ es continua y tomemos $x \in X$, $A \in C(x, X)$ y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x. Así pues, tenemos que

$$C(x_n, X) = \tau(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau(x) = C(x, X).$$

De aquí se sigue que, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in C(x_n, X)$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A. En otras palabras, X tiene la Propiedad de Kelley en x.

Concluimos la prueba del lema.

□

El siguiente lema nos proporciona condiciones necesarias y suficientes, sobre un continuo X, para que el hiperespacio $K(X)$ resulte ser un espacio compacto.

Lema 9.1.6 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo X.*

i) $K(X)$ es compacto,

ii) $\tau : X \to K(X)$ *es continua,*

iii) X *tiene la Propiedad de Kelley y*

iv) $X \approx K(X)$.

Demostración:
Es fácil ver que si τ es continua, entonces $K(X)$ es compacto, ya que X por hipótesis lo es. Por tanto $ii) \Rightarrow i)$.

De acuerdo al Lema 9.1.3 y a la Observación 9.1.2, tenemos que la función $\tau^{-1} : K(X) \to X$ es continua y biyectiva. Por tanto, si suponemos que $K(X)$ es compacto obtenemos que τ^{-1} es un homeomorfismo. En particular, τ es continua. De aquí que $i) \Rightarrow ii)$ y $i) \Rightarrow iv)$.

Por otra parte, es fácil ver que $iv) \Rightarrow i)$. Así pues, hemos obtenido que las condiciones $i)$, $ii)$ y $iv)$ son equivalentes.

Finalmente, gracias al Lema 9.1.5 tenemos que las condiciones $ii)$ y $iii)$ son equivalentes, así que podemos concluir la prueba del lema.

□

9.2 Conexidad local y por trayectorias

Una vez que hemos analizado la compacidad del hiperespacio $K(X)$, estamos en condiciones de estudiar la conexidad del mismo. En esta sección, la intención es buscar relaciones entre algunas propiedades de conexidad de X y aquéllas de $K(X)$. En particular, nos concentraremos en la conexidad local y en la conexidad por trayectorias.

Empezaremos con la conexidad local.

Lema 9.2.1 *Sean X un continuo y B un subespacio de X localmente conexo, entonces la función $\tau_B : B \to K(B, X)$ es continua.*

Demostración:
Sean $p \in B$ y $\varepsilon > 0$. Como B es localmente conexo, podemos encontrar un abierto conexo U, de B, que contenga a p, tal que $diam(U) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $q \in U$. Veremos que

$$H^2(C(p, X), C(q, X)) < \varepsilon.$$

Tomemos $K \in C(p, X)$ y consideremos $D = K \cup \overline{U}$. Por construcción de U tenemos que $D \subset N(\varepsilon, K)$, además claramente $K \subset N(\varepsilon, D)$, de manera que

$$H(K, D) < \varepsilon.$$

Ahora bien, es fácil ver que $D \in C(q, X)$. De aquí que $C(p, X) \subset N_H(\varepsilon, C(q, X))$. De manera completamente análoga se puede ver que $C(q, X) \subset N_H(\varepsilon, C(p, X))$. Por tanto,

$$H^2(\tau_B(p), \tau_B(q)) = H^2(C(p, X), C(q, X)) < \varepsilon.$$

En consecuencia, τ_B es continua y terminamos la prueba del lema.

□

Corolario 9.2.2 *Sean X un continuo y B un subespacio de X localmente conexo, entonces $B \approx K(B, X)$. En particular, $K(B, X)$ es localmente conexo.*

Demostración:
De acuerdo con la Observación 9.1.2 tenemos que $\tau_B : B \to K(B, X)$ es una función biyectiva. Además, el Lema 9.1.3 nos dice que τ_B^{-1} es continua. Finalmente, gracias al Lema 9.2.1 tenemos que τ_B es continua. Por tanto, τ_B es un homeomorfismo y, en particular, obtenemos que $K(B, X)$ es localmente conexo.

□

Con respecto a la conexidad por trayectorias, se tiene la siguiente equivalencia.

Lema 9.2.3 *Sea X un continuo, entonces $B \subset X$ es conexo por trayectorias si y sólo si $K(B, X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración:
Supongamos que $K(B, X)$ es conexo por trayectorias. En el Lema 9.1.3 vimos que la función τ_B^{-1} es continua, de manera que $\tau_B^{-1}(K(B, X)) = B$ es conexo por trayectorias.

Supongamos ahora que B es conexo por trayectorias. Consideremos $\{C(p, X), C(q, X)\} \subset K(B, X)$ y tomemos un arco A en B que contenga

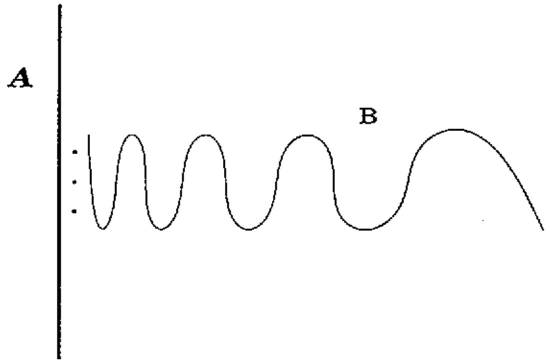


Figura 9.1: X

a p y q. Como A es un subespacio localmente conexo de X, podemos aplicar el Lema 9.2.1 para obtener que τ_A es una función continua. En particular, se sigue que $\tau_A(A)$ es un subcontinuo conexo por trayectorias, de $K(B,X)$, que contiene a $C(p,X)$ y $C(q,X)$. En consecuencia $K(B,X)$ es conexo por trayectorias y concluimos la prueba del lema.

□

Una pregunta que aparece de manera natural es si se satisface el recíproco del Corolario 9.2.2. Podríamos preguntar, por ejemplo: si $K(X)$ es localmente conexo entonces ¿X también es localmente conexo? La respuesta a esta pregunta es negativa, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.2.4 Existe un continuo no localmente conexo X, tal que $K(X)$ es localmente conexo.

Consideremos el siguiente continuo X:

Claramente X es un continuo no localmente conexo. Veamos cómo es $K(X)$.

Consideremos los subconjuntos A y B del continuo X. Dado que uno es un arco y el otro es un rayo, es fácil ver que ambos son localmente conexos, de manera que aplicando el Corolario 9.2.2 obtenemos que $K(A,X)$ es un arco y $K(B,X)$ es un rayo. Claramente $K(A,X)$ es cerrado en $K(X)$, veremos que lo mismo pasa con $K(B,X)$

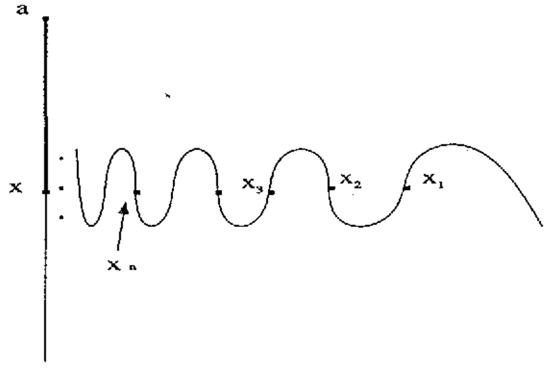


Figura 9.2: X

Si $K(B,X)$ no fuera cerrado, existiría una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ que convergería a x, para alguna $x \in A$, de manera que la sucesión $\{C(x_n,X)\}_{n=1}^{\infty}$ convergería a $C(x,X)$.

Sin embargo, si consideramos el arco ax de la figura, es fácil ver que $ax \in C(x,X)$ pero que ax no es punto límite de los $C(x_n,X)$. Como esto nos lleva a una contradicción, podemos concluir que $K(B,X)$ es cerrado en $K(X)$. Finalmente, por definición tenemos que $K(X) = K(A,X) \cup K(B,X)$ y que ésta es una unión ajena de subconjuntos cerrados, por tanto $K(X)$ se ve así:

En particular, $K(X)$ es localmente conexo.

Como hemos visto, en este ejemplo $K(X)$ es localmente conexo pero no es conexo, así que uno podría preguntarse si para $K(X)$ conexo y localmente conexo se cumple que X es localmente conexo. Una vez más la respuesta es negativa, como se muestra a continuación.

Ejemplo 9.2.5 Existe un continuo no localmente conexo X, tal que $K(X)$ es conexo y localmente conexo.

Consideremos el siguiente continuo X:

Es fácil ver que X no es localmente conexo. A continuación analizaremos $K(X)$.

Figura 9.3: $K(X)$

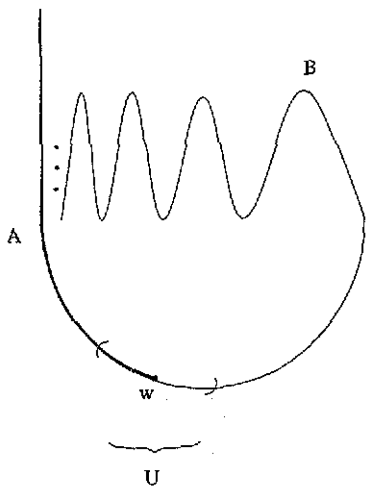


Figura 9.4: X

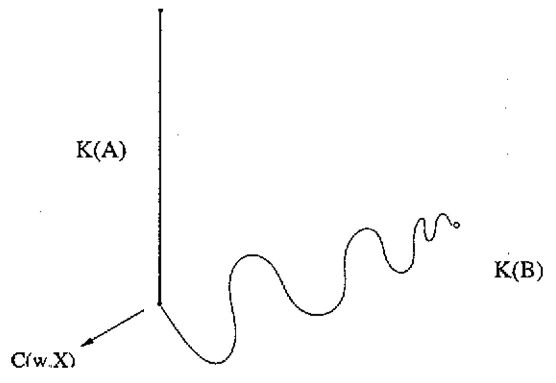


Figura 9.5: $K(X)$

Consideremos los subconjuntos A y B del continuo X. Una vez más, como ambos son localmente conexos, del Corolario 9.2.2 resulta que $K(A,X)$ es un arco y que $K(B,X)$ es un rayo.

Consideremos el punto $w = A \cap B$ y un arco abierto, pequeño, U que lo contenga. En el ejemplo anterior vimos que $K(X \setminus U)$ es disconexo, de donde se sigue que

$$K(A,X) \cap \overline{K(B,X)} = C(w,X).$$

En otras palabras, como $K(X) = K(A,X) \cup K(B,X)$ obtenemos que $K(X)$ es la unión de un arco y un rayo, unidos de la siguiente manera:

Por tanto, $K(X)$ es un rayo; en particular $K(X)$ es conexo y localmente conexo, a pesar de que X no sea localmente conexo.

Así pues, ni siquiera cuando $K(X)$ es conexo y localmente conexo podemos obtener siempre que X es localmente conexo. Uno podría pensar que tal vez pidiendo compacidad de $K(X)$ -además de conexidad local- se podría obtener la conexidad local de X. En este caso sí obtenemos la conexidad local de X, pero en realidad esto ya lo sabíamos: como consecuencia del Lema 9.1.6 se tiene que si $K(X)$ es compacto, entonces $X \approx K(X)$.

9.3 Compactaciones y conexidad

En esta sección analizaremos propiedades de los espacios $K(Y)$ cuando Y es una compactación del rayo, en particular buscaremos relaciones entre $K(Y)$ y el residuo de Y.

Una de las propiedades que nos interesa estudiar es la conexidad de $K(Y)$. En particular si Y es una compactación del rayo, nos gustaría encontrar criterios para determinar cuándo $K(Y)$ es conexo, o cúando no lo es. En las siguientes secciones desarrollaremos elementos que nos permitirán hallar criterios interesantes en este sentido.

9.3.1 Cuando el residuo es un arco

En esta sección veremos qué podemos decir de $K(Y)$ cuando Y es una compactación del rayo, cuyo residuo es un arco.

Empecemos con un lema.

Lema 9.3.1 *Si se satisface una de las siguientes condiciones:*

i) Y es una compactación del rayo con residuo X y X tiene un punto p tal que $C(p, X)$ es un arco,

ii) Y es un continuo y $p \in Y$ es tal que $C(p, Y)$ es un arco,

y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ es una sucesión que converge a p, entonces

$$\lim_{n\to\infty} C(p_n, Y) = C(p, Y).$$

Demostración:
De acuerdo con el Lema 6.3.2, i) implica ii), de manera que sólo tenemos que probar que ii) implica la conclusión.

Por el Lema 9.1.4 sabemos que

$$\limsup C(p_n, Y) \subset C(p, Y). \tag{9.1}$$

Sean $A \in C(p, Y)$ y $\mu : C(X) \to I$ una función de Whitney.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos un continuo A_n de manera que $p_n \in A_n$ y $\mu(A_n) = \mu(A)$. Veremos que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A.

Supongamos que existe $B \in C(Y)$ tal que una subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B. Por construcción y por hipótesis tenemos que $p_{n_i} \in A_{n_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y que $p_{n_i} \to p$, de manera que

$$p \in B.$$

Ahora bien, de acuerdo al Lema 6.3.2 tenemos que $C(p, Y)$ es un arco; como consecuencia de esto y de la Observación 5.3.5 se tiene que A y B son comparables.

Por otra parte, sabemos que las funciones de Whitney son continuas, de donde se desprende que

$$\mu(A) = \mu(A_{n_i}) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \mu(B),$$

es decir, $\mu(A) = \mu(B)$. Sin embargo, gracias a esto, al hecho de que A y B son comparables y a la monotonía de las funciones de Whitney, obtenemos que $A = B$.

Así pues, hemos obtenido que cualquier subsucesión convergente de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A, de manera que la sucesión misma no tiene otra alternativa que converger a A.

Por tanto $A \in \liminf C(p_n, Y)$.

En consecuencia, $C(p, Y) \subset \liminf C(p_n, Y)$. De aquí y de (9.1) obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} C(p_n, Y) = C(p, Y).$$

Concluimos la prueba del lema.

□

Algunas de las compactaciones del rayo se portan muy bien con respecto a la conexidad. Por ejemplo, en el siguiente Corolario probaremos que si Y es una de las compactaciones más sencillas del rayo: aquélla cuyo residuo es un arco, entonces $K(Y)$ es conexo.

Corolario 9.3.2 *Sea Y una compactación del rayo cuyo residuo es un arco X, entonces $K(Y)$ es conexo.*

Demostración:
Dado que X y $Y \setminus X$ son localmente conexos, usando el Corolario 9.2.2 se tiene que $X \approx K(X,Y)$ y $Y \approx K(Y \setminus X, Y)$. En particular, $K(X,Y)$ y $K(Y \setminus X, Y)$ son conexos.

Por otra parte, sean p un punto extremo de X y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus X$ una sucesión que converge a p. Por el Corolario 5.4.2 sabemos que $C(p,X)$ es un arco, así que podemos aplicar el Lema 9.3.1 para obtener que

$$\lim_{n \to \infty} C(p_n, Y) = C(p, Y).$$

En particular, $C(p,Y) \in \overline{K(Y \setminus X)} \cap K(X,Y)$.

En consecuencia $K(Y) = K(X,Y) \cup K(Y \setminus X, Y)$ es conexo.

□

9.3.2 Cuando el residuo es una curva cerrada simple o un 4-odo

Así pues, hemos visto que para cualquier compactación Y del rayo, que tenga un arco como residuo, se tiene que $K(Y)$ es conexo. Pero, ¿qué pasa con las compactaciones del rayo cuyo residuo es una curva cerrada simple?, ¿o un 4-odo? Veamos.

Ejemplo 9.3.3 Una compactación Y del rayo, tal que su residuo es una circunferencia y $K(Y)$ es conexo.

Es fácil ver que Y tiene la Propiedad de Kelley. Así pues, gracias al Lema 9.1.6 tenemos que $Y \approx K(Y)$. En particular, $K(Y)$ es conexo.

Sin embargo, también tenemos ejemplos que muestran que las compactaciones Y del rayo, cuyo residuo es un 4-odo -o una curva cerrada simple-, no siempre satisfacen que $K(Y)$ es conexo. A fin de mostrar estos ejemplos, introducimos primero ciertos resultados que facilitarán la exposición de los mismos

Proposición 9.3.4 *Sea Y una compactación del rayo con residuo X. Entonces $K(X,Y)$ es cerrado en $K(Y)$.*

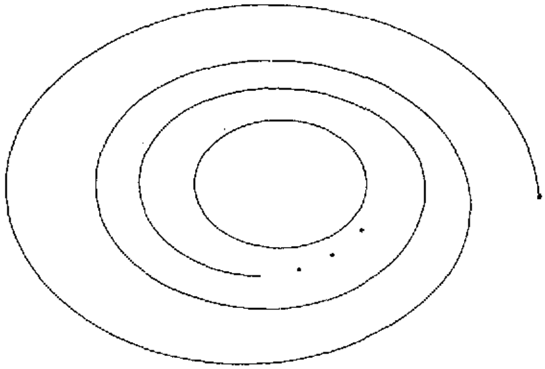


Figura 9.6: Compactación Y del rayo, tal que su residuo es una circunferencia y $K(Y)$ es conexo

Demostración:
Consideremos una sucesión $\{C(x_n, Y)\}_{n=1}^{\infty} \subset K(X, Y)$ que converge a $C(x, Y)$ para alguna $x \in Y$. Gracias al Lema 9.1.3 tenemos que

$$x_n = \tau^{-1}\big(C(x_n, Y)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau^{-1}\big(C(x, Y)\big) = x,$$

de manera que $x \in X$, ya que X es compacto. En consecuencia $K(X, Y)$ es cerrado.

□

Lema 9.3.5 *Sea Y una compactación del rayo R con residuo X. Si para cada punto $x \in X$ existe $A \in C(x, X)$ tal que $A \notin \overline{C(R)}$, entonces $K(R, Y)$ es cerrado en $K(Y)$. En particular, $K(Y)$ no es conexo.*

Demostración:
Por definición tenemos que $K(Y) = K(X, Y) \cup K(R, Y)$. Así pues, si suponemos que $K(R, Y)$ no es cerrado en $K(Y)$, entonces existe una sucesión $\{C(y_n, Y)\}_{n=1}^{\infty} \subset K(R, Y)$ que converge a $C(x, Y)$ para alguna $x \in X$.

Sin embargo, por hipótesis existe $A \in C(x, X)$ tal que

$$A \in C(Y) \setminus \overline{C(R)} \subset C(Y) \setminus \limsup C(y_n, Y).$$

En otras palabras,

$$A \in C(x, Y) \setminus \lim C(y_n, Y),$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto podemos concluir que $K(R, Y)$ es cerrado en $K(Y)$.

Por otra parte, por la Proposición 9.3.4 sabemos que $K(X, Y)$ es cerrado en $K(Y)$. De esta manera, hemos visto que podemos expresar a $K(Y)$ como la unión ajena de los subconjuntos cerrados $K(X, Y)$ y $K(R, Y)$, de donde concluimos que $K(Y)$ no es conexo.

Terminamos la prueba del lema.

□

Ejemplo 9.3.6 Una compactación Y del rayo, tal que su residuo es una circunferencia y $K(Y)$ no es conexo.

Consideremos el siguiente espacio Y:

De acuerdo al Lema 9.3.5, para ver que $K(Y)$ no es conexo basta ver que para cada punto x del residuo S existe un continuo $A \in C(x, S)$ que no se puede aproximar por subcontinuos del rayo R. Así pues, dado $x \in S$, consideremos un subarco A de S tal que contenga al punto a de la figura en su interior en S y que contenga también a x. Es fácil ver que tal subarco puede ser construido para cualquier $x \in X$, y que no puede ser aproximado por subcontinuos de R. En consecuencia, $K(Y)$ no es conexo.

Ejemplo 9.3.7 Una compactación Y del rayo, tal que su residuo es un 4-odo y $K(Y)$ no es conexo.

Consideremos el siguiente espacio Y:

Para ver que $K(Y)$ no es conexo, empecemos notando que para cada punto x del residuo X, existe un subtriodo propio T, de X, tal que x está en el corazón de T. Es fácil ver que T no se puede aproximar por subcontinuos del rayo R, así que podemos aplicar el Lema 9.3.5 a Y para obtener que $K(Y)$ no es conexo.

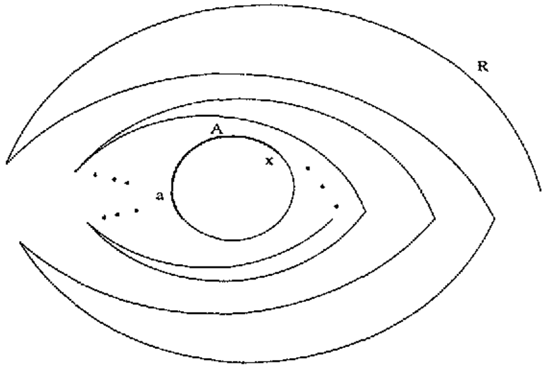


Figura 9.7: Compactación Y del rayo tal que su residuo es una circunferencia y $K(Y)$ no es conexo

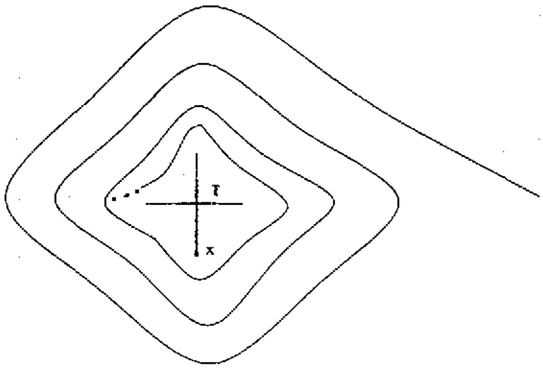


Figura 9.8: Compactación del rayo con un 4-odo como residuo

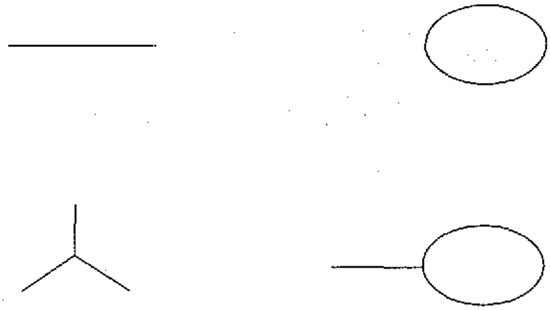


Figura 9.9: arco, circunferencia, triodo simple y paleta

9.3.3 Cuando el residuo es una gráfica finita

Así pues, aunque para todas las compactaciones Y del rayo, que tengan por residuo a un arco, $K(Y)$ resulta conexo, hemos visto que esto no siempre es el caso para las gráficas finitas. Más adelante veremos que, de hecho, si uno toma una compactación Y con casi cualquier gráfica finita como residuo, se obtiene que ¡$K(Y)$ no es conexo!

Para ver esto, empecemos familiarizándonos un poco con la estructura de las gráficas finitas.

Definición 9.3.8 Sean G una gráfica finita, $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. Un punto x de G es un *punto de ramificación* de G, si x es el corazón de un n-odo simple, para alguna $n \geq 3$. En este caso decimos que el orden de x en G es n y escribiremos $ord(x, G) = n$.

Proposición 9.3.9 *Sea G una gráfica finita, distinta de las siguientes:*
entonces todos los puntos de G están contenidos en el corazón de un triodo.

Demostración:
Sea $x \in G$. Analizaremos dos casos.

Caso 1 G sólo tiene un punto de ramificación r.

Es fácil ver que si $ord(r, G) = 3$, entonces G es una de las gráficas de la figura 9.9. Así pues, podemos suponer que $ord(r, G) = n \geq 4$. De aquí que $\{r\}$ es el corazón de un n-odo simple W para alguna $n \geq 4$. En otras palabras, tenemos

$$W = \bigcup \{A_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\},$$

donde cada A_i es un arco, r es un extremo de cada A_i y

$$A_i \cap A_j = \{r\} \quad \text{cada vez que } i \neq j. \tag{9.2}$$

Como G es conexa por trayectorias, podemos tomar un arco A en G de manera que $x \in A$ y $A \cap W = \{a_i\}$, donde $a_i \in A_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (Nótese que A puede ser degenerado).

Definimos $K = A \cup A_i$. Veremos que $W \cup A$ es un triodo, con corazón K, y x está contenido en el corazón de $W \cup A$.

Así pues, por construcción,

$$\begin{aligned} (W \cup A) \setminus K &= (W \cup A) \setminus (A \cup A_i) = W \setminus A_i \\ &= \left(\bigcup \{\{A_j : j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}\}\right) \setminus \{r\}. \end{aligned}$$

Dado que $n \geq 4$, de (9.2), obtenemos que $(W \cup A) \setminus K$ tiene al menos tres componentes, en consecuencia $W \cup A$ es un triodo con corazón K. Finalmente, por construcción $x \in A \subset K$, es decir, x está en el corazón del triodo.

Concluimos la prueba de este caso.

Caso 2 G tiene al menos dos puntos de ramificación.

En este caso podemos considerar un arco L, en G, de manera que contenga exactamente dos puntos de ramificación, r, s de G, y éstos sean los extremos de L. De acuerdo a esto, r y s son el corazón de un m-odo simple M y de un n-odo simple N, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $M \cap N = \emptyset$. Así pues,

$$\begin{aligned} M &= \bigcup \{M_i : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\} \qquad \text{y} \\ N &= \bigcup \{N_j : j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}, \end{aligned}$$

donde cada M_i y N_j es un arco. Además

$$M_k \cap M_l = \{r\}, \quad N_k \cap N_l = \{s\} \quad \text{y} \quad M_v \cap N_w = \emptyset, \tag{9.3}$$

cada vez que $k \neq l$, $v \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $w \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ahora bien, es fácil ver que L intersecta a M y a N en algún $M_\alpha \setminus \{r\}$ y en algún $N_\beta \setminus \{s\}$, y sólo en uno para cada uno, ya que L únicamente contiene puntos de ramificación en sus extremos.

Por otra parte, G es conexa por trayectorias, de manera que podemos tomar un arco A en G (posiblemente degenerado) tal que

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad A \cap (M \cup N \cup L) = \{a\},$$

donde $a \in M_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ o $a \in N_j$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Supondremos sin pérdida de generalidad que se da el primer caso.

Ahora bien, sean $K = A \cup M_i \cup L$ y $T = M \cup N \cup L \cup A$. Veremos que T es un triodo, con corazón K, y $x \in K$.

Así pues, por construcción,

$$\begin{aligned} T \setminus K &= (M \cup N \cup L \cup A) \setminus (A \cup M_i \cup L) \\ &= (M \cup N) \setminus (M_i \cup L) \\ &= \left(\bigcup \left\{ \{M_j \cup N_k : j \notin \{i, \alpha\}, k \neq \beta\} \right) \setminus \{r, s\}. \end{aligned}$$

Como r y s son puntos de ramificación, se sigue que $m \geq 3$ y $n \geq 3$. De acuerdo a esto y a (9.3), obtenemos que $T \setminus K$ tiene al menos tres componentes, en consecuencia T es un triodo con corazón K. Finalmente, por construcción $x \in A \subset K$, es decir, x está en el corazón del triodo, con lo que finalizamos la prueba de este caso.

Hemos terminado la prueba de la proposición.

□

Ahora que ya conocemos un poco mejor a las gráficas finitas, pensaremos un poco más en general y buscaremos desarrollar criterios que nos permitirán decidir que $K(Y)$ no es conexo, donde Y es una compactación del rayo.

Teorema 9.3.10 *Sean Y una compactación del rayo con residuo X, $x \in X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus X$ que converge a x. Si x está en el corazón de un triodo de X, entonces* $\liminf C(x_n, Y) \subsetneq C(x, Y)$.

Demostración:
Usando el Lema 9.1.4 obtenemos que

$$\liminf C(x_n, Y) \subset \limsup C(x_n, Y) \subset C(x, Y).$$

Si suponemos que la conclusión del Teorema no se cumple, tendríamos que

$$\liminf C(x_n, Y) = C(x, Y). \tag{9.4}$$

Veremos que en este caso el rayo $Y \setminus X$ contiene un triodo, con lo que llegaremos a una contradicción.

Por hipótesis x está en el corazón de un triodo T de X, de modo que existe $K \in C(x, T)$ tal que

$$T \setminus K = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

donde cada A_i es una componente de $T \setminus K$, así que $A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ cada vez que $i \neq j$. Por cierto, aplicando el Lema 2.4.3 obtenemos que

$$A_i \cup K \in C(x, Y) \qquad \text{para cada } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{9.5}$$

Ahora bien, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ tomamos $a_i \in A_i$ y elegimos $\delta > 0$ de manera que

$$\delta < d(a_i, K \cup A_j \cup A_k) \tag{9.6}$$

cada vez que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Así pues, de acuerdo a (9.5) y a (9.4) existen $n \in \mathbb{N}$ y $C_i \in C(x_n, Y)$ de manera que

$$H(A_i \cup K, C_i) < \tfrac{\delta}{2} \qquad \text{para cada } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{9.7}$$

Sea $T' = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Veremos en tres pasos que T' es un triodo débil en $Y \setminus X$.

Paso 1 Sea $B \in C(Y)$ tal que $B \cap X \neq \emptyset$. Si $H(B, K \cup A_j) < \delta$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$, entonces $B \subset X$.

Supongamos que $B \not\subset X$. Es un resultado conocido el que X es terminal en Y, de modo que $X \subset B$. En particular, si $i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$, entonces $a_i \in B$.

Ahora bien, por hipótesis $H(B, K \cup A_j) < \delta$, así que existe

$$z \in K \cup A_j \subset K \cup A_j \cup A_k$$

tal que $d(z, a_i) < \delta$. Sin embargo, esto nos lleva a una contradicción con (9.6).

Por tanto, $B \subset X$.

Paso 2 $T' \subset Y \setminus X$.

Sea $i \in \{1, 2, 3\}$. Por (9.7) tenemos que $H(A_i \cup K, C_i) < \delta$. Si $C_i \cap X \neq \emptyset$, entonces por el paso 1 obtenemos que $C_i \subset X$, lo cual contradice el hecho de que $x_n \in C_i \cap (Y \setminus X)$. Por tanto $C_i \subset Y \setminus X$ para cada i. En consecuencia $T' \subset Y \setminus X$.

Paso 3 T' es un triodo débil.

Por construcción tenemos que

$$x_n \in C_1 \cap C_2 \cap C_3.$$

Supongamos que T' no es un triodo débil, entonces existen tres elementos distintos i, j, k de $\{1, 2, 3\}$, tales que

$$C_i \subset C_j \cup C_k \subset N(\tfrac{\delta}{2}, K \cup A_j \cup A_k), \tag{9.8}$$

de acuerdo a (9.7).

Ahora bien, como $a_i \in A_i$, una vez más gracias a (9.7) existe $b_i \in C_i$ tal que $d(a_i, b_i) < \frac{\delta}{2}$. En particular, en vista de (9.8) se tiene que

$$b_i \in N(\tfrac{\delta}{2}, K \cup A_j \cup A_k).$$

Así pues,

$$d(a_i, K \cup A_j \cup A_k) \leq d(a_i, b_i) + d(b_i, K \cup A_j \cup A_k) < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

Sin embargo, esto nos lleva a una contradicción con la elección de δ. Esta contradicción vino de suponer que $C_i \subset C_j \cup C_k$, de manera que para cada tres elementos distintos i, j, k de $\{1, 2, 3\}$ se tiene que $C_i \setminus (C_j \cup C_k) \neq \emptyset$.

Por tanto T' es un triodo débil.

En los pasos 2 y 3 hemos mostrado que existe un triodo débil en el rayo $Y \setminus X$, sin embargo, por el Teorema 6.1.8 sabemos que entonces existe un triodo contenido en el rayo, lo cual es absurdo. Como esta contradicción vino de suponer que la conclusión del teorema no se cumple, podemos terminar la prueba del mismo.

□

El teorema anterior tiene varias consecuencias interesantes, veamos algunas de ellas.

Corolario 9.3.11 *Sea X un continuo tal que todos sus puntos están contenidos en el corazón de un triodo. Si Y es una compactación del rayo R con residuo X, entonces $K(Y)$ no es conexo.*

Demostración:
Empezaremos viendo que $K(R, Y)$ es cerrado en $K(Y)$.

Así pues, sea $\{C(y_n, Y)\}_{n=1}^{\infty} \subset K(R, Y)$ una sucesión que converge a $C(y, Y)$, para alguna $y \in Y$. Por el Teorema 9.3.10 sabemos que para cada $x \in X$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus X$, que converge a x, se tiene que $\liminf C(x_n, Y) \subsetneq C(x, Y)$.

De aquí que y no puede estar en X y por tanto $C(y, Y) \in K(R, Y)$. En consecuencia, $K(R, Y)$ es cerrado en $K(Y)$.

Por otra parte, por la Proposición 9.3.4 sabemos que $K(X, Y)$ es cerrado en $K(Y)$.

Finalmente, hemos obtenido que podemos expresar a $K(Y)$ como la unión ajena de los subconjuntos cerrados $K(X, Y)$ y $K(R, Y)$, con lo que podemos concluir que $K(Y)$ es disconexo y terminamos la prueba del corolario.

□

Corolario 9.3.12 *Sea G una gráfica finita distinta de las de la figura 9.9. Si Y es una compactación del rayo R con residuo G, entonces $K(Y)$ no es conexo.*

Demostración:
Por la proposición 9.3.9 sabemos que todos los puntos de G están en el corazón de un triodo, así que podemos aplicar el Corolario 9.3.11 para obtener que $K(Y)$ no es conexo.

□

Corolario 9.3.13 *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y X una n-celda. Si Y es una compactación del rayo R con residuo X, entonces $K(Y)$ no es conexo.*

Demostración:
Es fácil ver que todo punto de X se puede ver como el corazón de un triodo simple contenido en X. En consecuencia podemos aplicar el Corolario 9.3.11, y obtenemos que $K(Y)$ no es conexo.

□

9.3.4 Criterios de conexidad

A pesar de los resultados anteriores, también tenemos ciertos criterios que nos aseguran que, si Y es una compactación del rayo, entonces $K(Y)$ es conexo. Un ejemplo de esto lo vimos en el Corolario 9.3.2. A continuación presentaremos resultados que nos permitirán desarrollar estos criterios.

Lema 9.3.14 *Sea Y una compactación del rayo con residuo X. Supongamos que $K(X,Y)$ es conexo y que X tiene un punto p tal que Y tiene la Propiedad de Kelley en p. Entonces $K(Y)$ es conexo.*

Demostración:
Por hipótesis $Y \setminus X$ es localmente conexo, así que gracias al Corolario 9.2.2 se tiene que $Y \setminus X \approx K(Y \setminus X, Y)$. En particular, $K(Y \setminus X, Y)$ es conexo.

Por otra parte, como $p \in X$, podemos tomar una sucesión

$$\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus X \tag{9.9}$$

que converge a p. En el Lema 9.1.4 vimos que

$$\limsup\ C(p_n, Y) \subset C(p, Y).$$

Además, como Y tiene la Propiedad de Kelley en p, obtenemos que

$$C(p, Y) \subset \liminf C(p_n, Y).$$

Por tanto

$$\lim_{n \to \infty} C(p_n, Y) = C(p, Y).$$

De lo anterior y de (9.9) obtenemos que $C(p,Y) \in \overline{K(Y \setminus X)} \cap K(X,Y)$.

En consecuencia $K(Y) = K(X,Y) \cup K(Y \setminus X, Y)$ es conexo y podemos concluir la prueba del lema.

□

Lema 9.3.15 *Sea Y una compactación del rayo con residuo X. Si X tiene la Propiedad de Kelley, entonces $X \approx K(X,Y)$.*

Demostración:

De acuerdo con la Observación 9.1.2 y el Lema 9.1.3, $\tau_X^{-1} : K(X,Y) \to X$ es una función continua y biyectiva, así que basta ver que τ_X es continua.

Así pues, sean $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión que converge a x. Veremos que

$$\tau_X(x_n) = C(x_n, Y) \to C(x,Y) = \tau_X(x).$$

Gracias al Lema 9.1.4, tenemos que

$$\limsup C(x_n, Y) \subset C(x,Y).$$

Por otra parte, tomemos $A \in C(x,Y)$ y veamos que $A \in \liminf C(x_n,Y)$. Sabemos que X es terminal en Y, de manera que basta analizar dos casos.

Caso 1 $A \subset X$.

Como X tiene la Propiedad de Kelley, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $A_n \in C(x_n, X)$ de manera que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A. En otras palabras, $A \in \liminf C(x_n, Y)$.

Caso 2 $X \subset A$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $A_n = A$. De esta manera obtenemos que $A_n \to A$ y $A_n \in C(x_n, Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $A \in \liminf C(x_n, Y)$.

Como consecuencia de lo anterior, obtenemos que

$$C(x,Y) \subset \liminf C(x_n, Y),$$

con lo que conluimos la continuidad de τ_X y la prueba del lema.

□

Corolario 9.3.16 *Sea Y una compactación del rayo con residuo X. Supongamos que X tiene la Propiedad de Kelley y X tiene un punto x tal que para $A, B \in C(x, X)$ se tiene que A y B son comparables. Entonces $K(Y)$ es conexo.*

Demostración:
Por el Lema 9.3.15, sabemos que $X \approx K(X, Y)$, en particular $K(X, Y)$ es conexo.

Por otra parte, gracias al Lema 5.3.6 sabemos que $C(x, X)$ es un arco. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus X$ una sucesión que converge a x. Como consecuencia del Lema 9.3.1 se tiene que

$$C(x, Y) \in \overline{K(Y \setminus X, Y)} \cap K(X, Y).$$

Por tanto, $K(Y) = K(X, Y) \cup K(Y \setminus X, Y)$ es conexo.

□

Como aplicaciones del corolario anterior presentamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 9.3.17 Si Y es alguna de las compactación del rayo de la figura 9.10, entonces $K(Y)$ es conexo.

Es fácil ver que en el residuo X de cada compactación Y, existe un punto w tal que cualesquiera dos subcontinuos de X que lo contengan son comparables. Por otra parte, todos los residuos tienen la Propiedad de Kelley. Así pues, de acuerdo al Corolario 9.3.16 tenemos que $K(Y)$ es conexo en todos estos casos.

Teorema 9.3.18 *Sea Y una compactación del rayo con residuo X. Si X es hereditariamente indescomponible, entonces Y tiene la Propiedad de Kelley.*

Demostración:
Para probar que Y tiene la Propiedad de Kelley, necesitamos tomar un punto cualquiera $y \in Y$ y ver que Y tiene la Propiedad de Kelley en y. Ahora bien, Por hipótesis $Y \setminus X$ es un rayo, así que Y tiene la Propiedad de Kelley en y, para cada $y \in Y \setminus X$.

Consideremos ahora $x \in X$. Por el Lema 5.4.6 sabemos que $C(x, X)$ es un arco.

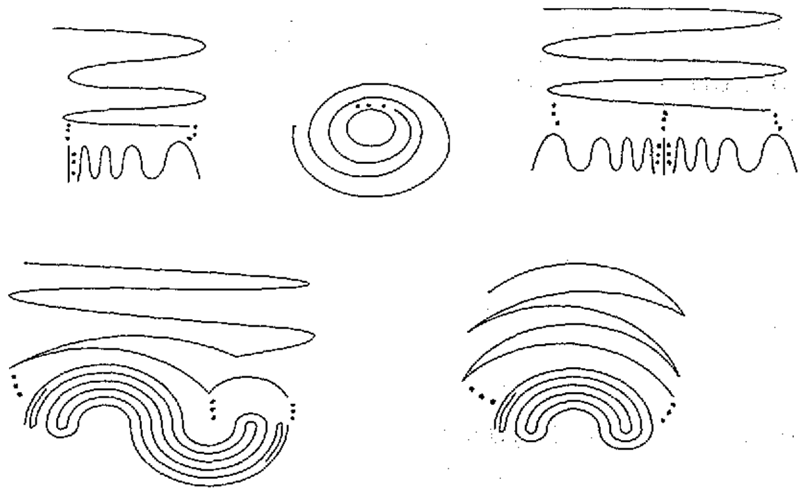


Figura 9.10: Ejemplos de compactaciones Y tales que $K(Y)$ es conexo

Ahora bien, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ es una sucesión que converge a x, usando el Lema 9.3.1 obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} C(x_n, Y) = C(x, Y).$$

En otras palabras, para cada $A \in C(x, Y)$ existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a A y de manera que $A_n \in C(x_n, Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De esta manera, hemos probado que Y tiene la Propiedad de Kelley en x y podemos concluir la prueba del teorema.

□

Teorema 9.3.19 *Si Y es una compactación del rayo con residuo X, y X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $K(Y)$ es conexo.*

Demostración:
Sea $x \in X$.

Por el Lema 5.4.6 sabemos que $C(x, X)$ es un arco. Ahora bien, aplicando el Lema 9.3.1 obtenemos que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ es una sucesión que converge a x, entonces

$$\lim_{n\to\infty} C(x_n, X) = C(x, X),$$

de donde se desprende que X tiene la Propiedad de Kelley en x. En consecuencia, X tiene la Propiedad de Kelley.

Así pues, podemos aplicar el Lema 9.1.6 para obtener que $X \approx K(X, Y)$, en particular $K(X, Y)$ es conexo.

Finalmente, de acuerdo al Teorema 9.3.18 tenemos que Y tiene la Propiedad de Kelley, de manera que estamos en condiciones de aplicar el Lema 9.3.14 para obtener que $K(Y)$ es conexo.

Concluimos la prueba del lema.

□

9.3.5 Una caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles

Finalmente, como una aplicación de la teoría que hemos desarrollado, en este apartado probaremos un teorema muy importante, porque nos permitirá dar una caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles, claro, en términos de los hiperespacios $K(Y)$.

Teorema 9.3.20 *Sea X un continuo. Si para toda compactación Y del rayo, con residuo X, se tiene que Y tiene la Propiedad de Kelley, entonces X es hereditariamente indescomponible.*

Demostración:
Supongamos que X no es hereditariamente indescomponible, entonces existen $A, B \in C(X)$ tales que $A \setminus B \neq \emptyset \neq B \setminus A$ y $A \cap B \neq \emptyset$. Construiremos una compactación Y del rayo, con residuo X, que no tenga la Propiedad de Kelley en algún punto $y \in Y$.

Como X es un continuo, X se puede encajar en el cubo de Hilbert (ver [Nad92, 1.4]). Así pues podemos suponer que $X \subset I^{\infty}$. Tomemos también un punto

$$a \in A \setminus B. \tag{9.10}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos dos conjuntos finitos $K_n \subset A$ y $F_n \subset X$, de manera que

$$A \subset N_{d_1}(\tfrac{1}{n}, K_n) \qquad \text{y} \qquad X \subset N_{d_1}(\tfrac{1}{n}, F_n), \tag{9.11}$$

donde d_1 representa a la métrica del Cubo de Hilbert. Dado que $N_{d_1}(\frac{1}{n}, K_n)$ y $N_{d_1}(\frac{1}{n}, F_n)$ son subconjuntos arco conexos de I^∞, podemos tomar dos funciones continuas

$$\begin{aligned} \alpha_n &: [\tfrac{1}{2n+1}, \tfrac{1}{2n}] \to N_{d_1}(\tfrac{1}{n}, K_n) \quad \text{y} \\ \beta_n &: [\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{2n-1}] \to N_{d_1}(\tfrac{1}{n}, F_n) \end{aligned} \tag{9.12}$$

tales que

$$i) \quad \alpha_n(\tfrac{1}{2n+1}) = a = \alpha_n(\tfrac{1}{2n}), \tag{9.13}$$

$$ii) \quad \beta_n(\tfrac{1}{2n}) = a = \beta_n(\tfrac{1}{2n-1}), \tag{9.14}$$

$$iii) \quad K_n \subset Im(\alpha_n) \ \text{y} \tag{9.15}$$

$$iv) \quad F_n \subset Im(\beta_n). \tag{9.16}$$

Definimos ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \bigcup \{(\alpha_n(t), t) \in I^\infty \times I \ : \ t \in [\tfrac{1}{2n+1}, \tfrac{1}{2n}],\ n \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{Q} &= \bigcup \{(\beta_n(t), t) \in I^\infty \times I \ : \ t \in [\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{2n-1}],\ n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

y

$$Y = (X \times \{0\}) \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}.$$

Veremos en 10 pasos que Y es una compactación del rayo con residuo X, y que no tiene la Propiedad de Kelley.

Paso 1 Sea $f : (0,1] \to \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} (\alpha_n(t), t) & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}] \\ (\beta_n(t), t) & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}] \end{cases}$$

Veremos que f está bien definida.

En primer lugar, si $t \in (0,1]$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. De esta manera tenemos que t está en el dominio de α_m o de β_m para alguna $m \in \mathbb{N}$ y en consecuencia f está definida en t.

Por otra parte, supongamos que $t = \frac{1}{2m}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ (si $t = \frac{1}{2m-1}$ la prueba es análoga). Entonces tanto α como β están definidas en t y

$$f(t) = (\alpha_m(t), t) \qquad \text{y} \qquad f(t) = (\beta_m(t), t).$$

Sin embargo, por construcción tenemos que

$$\alpha_m(\tfrac{1}{2m}) \;=\; a \;=\; \beta_m(\tfrac{1}{2m}),$$

de manera que

$$f(t) = (\alpha_m(t), t) = (a, t) = (\beta_m(t), t).$$

Por tanto, f está bien definida.

Paso 2 Sea f como en el paso 1, entonces f es inyectiva.

Sean $t_1, t_2 \in (0,1]$ con $t_1 \neq t_2$. Como $f(t_1)$ y $f(t_2)$ son de la forma

$$f(t_1) = (x_1, t_1) \;\; \text{y} \;\; f(t_2) = (x_2, t_2),$$

para algunos $x_1, x_2 \in I^\infty$, tenemos que $f(t_1) \neq f(t_2)$. En consecuencia, f es inyectiva.

Paso 3 Sea f como en el paso 1, entonces f es suprayectiva.

Sea $(x,t) \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Entonces $t \in [\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Así pues, si $m = 2k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$(x,t) = (\alpha_k(t), t) = f(t).$$

Si $m = 2k-1$, para alguna $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $t \in [\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}]$, de donde

$$(x,t) = (\beta_k(t), t) = f(t).$$

En consecuencia, f es suprayectiva.

Paso 4 Sea f como en el paso 1, entonces f es continua.

Por construcción tenemos que $f|_{[\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]}$ es continua para cada $m \in \mathbb{N}$. Por otra parte, cuando vimos que f está bien definida vimos que si $t = \frac{1}{m}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$f(t) = (\alpha_m(t), t) = (a, t) = (\beta_m(t), t).$$

Por tanto, f es continua

Paso 5 Sea f como en el paso 1, entonces f^{-1} es continua.

Sea $\{(x_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ una sucesión que converge a $(x, t) \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. De aquí que

$$f^{-1}(x_n, t_n) \;=\; t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \;=\; f^{-1}(x, t),$$

de donde podemos concluir que f^{-1} es continua.

Paso 6 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ es un rayo.

De los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 se sigue que $f : (0, 1] \to \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ es un homeomorfismo. Por tanto, $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ es un rayo.

Paso 7 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ es denso en Y.

De acuerdo a la construcción de Y, basta ver que $X \times \{0\} \subset \overline{\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}}$.

Así pues, sea $(x, 0) \in X \times \{0\}$. Gracias a (9.11), para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in F_n$ tal que $d_1(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Además, de (9.16) tenemos que

$$x_n \in F_n \subset Im(\beta_n),$$

por lo que existe $t_n \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$ tal que $x_n = \beta(t_n)$. En particular se tiene que

$$(x_n, t_n) \in \mathcal{Q}. \tag{9.17}$$

Notemos que $t_n \to 0$. Así pues, por construcción

$$(x_n, t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, 0).$$

De acuerdo a esto y a (9.17) obtenemos que $(x,0) \in \overline{\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}}$.

Terminamos la prueba de este paso.

Paso 8 Y es compacto.

Por construcción tenemos que $Y \subset I^\infty$, y sabemos que I^∞ es compacto, de modo que basta ver que Y es cerrado en I^∞.

Así pues, sea $\{(x_n,t_n)\}_{n=1}^\infty \subset Y$ una sucesión que converge al punto $(x,t) \in I^\infty \times I$. Analizaremos tres casos para ver que $(x,t) \in Y$.

Caso 1 $t_n = 0$ para una cantidad infinita de números n.

En este caso tenemos que una subsucesión de $\{(x_n,t_n)\}_{n=1}^\infty$ está contenida en $X \times \{0\}$. Como X es compacto, el límite de dicha subsucesión está contenido en $X \times \{0\}$. En otras palabras,

$$(x,t) \in X \times \{0\} \subset Y.$$

Caso 2 existe $\varepsilon > 0$, tal que $t_n > \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este caso $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset [\varepsilon, 1]$, de donde se sigue que

$$\{(x_n,t_n)\}_{n=1}^\infty \subset f\big([\varepsilon,1]\big),$$

donde f es como en el paso 1.

Sin embargo, $f\big([\varepsilon,1]\big)$ es compacto, de donde se obtiene que

$$(x,t) \in f\big([\varepsilon,1]\big) \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \subset Y.$$

Caso 3 La sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,1]$ tiene una subsucesión $\{t_{n_i}\}_{n=1}^\infty$ que converge a cero.

Sea $n \in \mathbb{N}$. En este caso tenemos que

$$x_n = \alpha_{r_n}(t_n) \quad \text{o} \quad x_n = \beta_{r_n}(t_n),$$

para alguna $r_n \in \mathbb{N}$.

De aquí que $t_n \in [\frac{1}{2r_n+1}, \frac{1}{2r_n}]$ o $t_n \in [\frac{1}{2r_n}, \frac{1}{2r_n-1}]$. Así pues, como $t_n \to 0$, entonces $r_n \to \infty$.

Por otra parte, gracias a (9.12) se tiene que

$$x_n \in N_{d_1}\big(\tfrac{1}{r_n}, F_{r_n} \cup K_{r_n}\big) \subset N_{d_1}\big(\tfrac{1}{r_n}, X\big)$$

De manera que

$$x = \lim x_n \in X.$$

Por tanto, $x \in X$. Así pues, hemos obtenido que

$$(x,t) \in X \times \{0\} \subset Y.$$

En cualquier caso obtuvimos que $(x,t) \in Y$, de modo que Y es cerrado y concluimos la prueba de este paso.

Paso 9 Si $\{(x_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ es una sucesión que converge a $(x,0)$, entonces $x \in A$.

Sea $n \in \mathbb{N}$.

Como $(x_n,t_n) \in \mathcal{P}$, existe $r_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n \in [\tfrac{1}{2r_n+1}, \tfrac{1}{2r_n}] \qquad \text{y} \qquad x_n = \alpha_{r_n}(t_n).$$

Antes de continuar notemos lo siguiente: por hipótesis $t_n \to 0$, así que

$$r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ahora bien, gracias a (9.12) sabemos que

$$\alpha_{r_n}(t_n) \in N_{d_1}(\tfrac{1}{r_n}, K_{r_n}) \subset N_{d_1}(\tfrac{1}{r_n}, A).$$

Así pues, como $\alpha_{r_n}(t_n) = x_n \to x$, concluimos que $x \in A$.

Paso 10 Si $y \in A \cap B$ entonces Y no tiene la Propiedad de Kelley en $(y,0)$.

De acuerdo a (9.11), para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $y_n \in K_n$ tal que $d_1(y_n,y) < \frac{1}{n}$. Además, (9.15) dice que $K_n \subset Im(\alpha_n)$, así que

$$y_n = \alpha_n(t_n) \quad \text{para alguna} \quad t_n \in [\tfrac{1}{2n+1}, \tfrac{1}{2n}]. \tag{9.18}$$

De acuerdo a esto es fácil ver que

$$t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Así pues, la sucesión

$$\{(y_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{(\alpha_n(t_n), t_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$$

y además

$$(y_n, t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (y, 0).$$

Consideremos ahora el elemento B de $C((y,0), Y)$. Supongamos que una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(Y)$ es tal que converge a B y que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $B_n \in C((y_n, t_n), Y)$. Analizaremos dos casos para ver que esto no es posible.

Caso 1: existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $B_n \subset \mathcal{P}$.

Como consecuencia del paso 9, en este caso podemos ver que $\limsup B_n \subset A$, de donde se sigue que $B \subset A$. Sin embargo esto nos lleva a una contradicción, ya que por construcción teníamos que $B \setminus A \neq \emptyset$.

Por tanto, este caso es imposible.

Caso 2 existe una subsucesión $\{B_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $B_{n_i} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$.

Sea $i \in \mathbb{N}$.

Por (9.18) sabemos que

$$y_{n_i} = \alpha_{n_i}(t_{n_i}) \quad \text{para alguna} \quad t_{n_i} \in [\tfrac{1}{2n_i+1}, \tfrac{1}{2n_i}], \tag{9.19}$$

y por construcción tenemos que $(y_{n_i}, t_{n_i}) \in B_{n_i}$. Además, en este caso podemos tomar un punto $(x_i, t_i) \in B_{n_i} \cap \mathcal{Q}$. En particular tenemos que

$$t_i \in [\tfrac{1}{2i}, \tfrac{1}{2i-1}] \quad \text{para alguna} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{9.20}$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $t_{n_i} \leq t_i$. De aquí que $n_i \geq i$.

Como B_{n_i} es conexo, y contiene a (x_i, t_i) y a (y_{n_i}, t_{n_i}), se sigue que B_{n_i} contiene a $(z_i, \frac{1}{2i})$, para algún $z_i \in I^{\infty}$.

Sin embargo, por construcción de $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ se tiene que $z_i = \alpha_i(\frac{1}{2i})$, y de (9.13) se sigue que $z_i = a$. Así pues, hemos obtenido que

$$(a, \tfrac{1}{2i}) \subset B_{n_i} \qquad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{9.21}$$

De acuerdo a lo anterior, $(a, 0) \in \liminf B_{n_i}$, es decir,

$$(a, 0) \in B \times \{0\}.$$

Pero esto nos lleva a una contradicción con (9.10). En consecuencia, este caso también es imposible.

Como en ambos casos obtuvimos una contradicción, podemos concluir que Y no tiene la Propiedad de Kelley en $(y, 0)$.

Finalmente, de los pasos 6, 7 y 8 obtenemos que Y es una compactación del rayo, la cual, de acuerdo con el paso 10, no tiene la Propiedad de Kelley.

Concluimos la prueba del teorema. □

Como consecuencia de los Teoremas 9.3.18 y 9.3.20, obtenemos la siguiente caracterización:

Corolario 9.3.21 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo X:*

i) X es hereditariamente indescomponible.

ii) Para toda compactación Y del rayo, con residuo X, se tiene que Y tiene la Propiedad de Kelley.

Capítulo 10

Continuos atriódicos

10.1 Propiedades generales

Definición 10.1.1 Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para toda $y \in Y$.

Una propiedad interesante de esta clase de funciones es la siguiente.

Lema 10.1.2 *[Nad92, Proposición 8.22] Sean X un arco, Y un continuo no degenerado y $f : X \to Y$ una función monótona y suprayectiva. Entonces Y es un arco.*

Lema 10.1.3 *Sean X un arco con puntos extremos a y b, Y un continuo no degenerado y $f : X \to Y$ una función monótona y suprayectiva. Entonces Y es un arco con puntos extremos $f(a)$ y $f(b)$.*

Demostración:
Por el lema anterior sabemos que Y es un arco. Ahora bien, dado que f es monótona, se tiene que $f^{-1}(f(a))$ es un subarco A, de X, que contiene a a. De aquí que $X \setminus A$ es conexo. Así pues, como $f(X \setminus A) = Y \setminus \{f(a)\}$ y f es continua, se tiene que $Y \setminus \{f(a)\}$ es conexo. Por tanto, $f(a)$ es un punto extremo de Y. Similarmente, $f(b)$ es un punto extremo de Y y concluimos la prueba del lema.

□

Como aplicación de estos resultados, mostraremos un lema que será piedra angular en el estudio de los continuos atriódicos.

Lema 10.1.4 *Sean X un continuo, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Sean $t \in (0,1)$ y $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $A \neq B$. Consideremos la componente C de $A \cap B$ que contiene a p y tomemos además dos arcos ordenados α y β, de C a A y a B, respectivamente. Entonces, para cada $r \in I$ existe $s_r \in I$ de manera que $\alpha(s_r) \cup \beta(r) \in \mu^{-1}(t)$ y podemos definir una función $\eta : I \to \mu^{-1}(t)$ dada por $\eta(r) = \alpha(s_r) \cup \beta(r)$. Más aún, la función η está bien definida, es continua y además satisface las siguientes condiciones: $C \subset \eta(r) \subset A \cup B$ para cada $r \in I$ y $\eta(I)$ es un arco en $\mu^{-1}(t)$, cuyos puntos extremos son A y B.*

Demostración:
Haremos la prueba del lema en 4 pasos.

Paso 1 η está bien definida.

En primer lugar, para cada $r, s \in I$ se tiene que $p \in C \subset \alpha(s) \cap \beta(r)$, de donde se deduce que $\alpha(s) \cup \beta(r) \in C(p,X)$.

Veremos a continuación que, para cada $r \in I$, existe $s_r \in I$ con las propiedades requeridas. Si $r = 1$, podemos tomar $s_r = 0$ para obtener que

$$\alpha(0) \cup \beta(1) = C \cup B = B \in \mu^{-1}(t). \tag{10.1}$$

Si $r = 0$, tomando $s_r = 1$ se tiene que

$$\alpha(1) \cup \beta(0) = A \cup C = A \in \mu^{-1}(t). \tag{10.2}$$

Por otra parte, si $0 < r < 1$ entonces

$$A \subset A \cup \beta(r) = \alpha(1) \cup \beta(r) \quad \text{y}$$

$$\alpha(0) \cup \beta(r) = C \cup \beta(r) = \beta(r) \subset B.$$

De aquí que

$$\mu\big(\alpha(1) \cup \beta(r)\big) \geq \mu(A) = t = \mu(B) \geq \mu\big(\alpha(0) \cup \beta(r)\big).$$

Como consecuencia de lo anterior y de la continuidad de α y de μ, no es difícil ver que existe $s_r \in I$ tal que $\alpha(s_r) \cup \beta(r) \in \mu^{-1}(t)$.

Finalmente, veremos que $\eta(r)$ no depende de la elección de s_r. Sean $s_r, y \in I$ tales que $\alpha(s_r) \cup \beta(r) \in \mu^{-1}(t)$ y $\alpha(y) \cup \beta(r) \in \mu^{-1}(t)$. Como α es un arco ordenado, sabemos que $\alpha(y)$ y $\alpha(s_r)$ son comparables, de donde se sigue que $\alpha(y) \cup \beta(r)$ y $\alpha(s_r) \cup \beta(r)$ también lo son. Sin embargo, como ambos pertenecen a $\mu^{-1}(t)$, y μ es una función de Whitney, necesariamente se tiene que

$$\alpha(y) \cup \beta(r) = \alpha(s_r) \cup \beta(r).$$

Por tanto, concluimos que η está bien definida.

Paso 2 η es continua.

Sean $r \in I$ y $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ una sucesión que converge a r. Supongamos que L es un punto de acumulación de la sucesión $\{\eta(r_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces existe una subsucesión $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$L = \lim \eta(r_{n_k}) = \lim \left(\alpha(s_{r_{n_k}}) \cup \beta(r_{n_k})\right).$$

Dado que I es compacto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $s_{r_{n_k}} \to s'$ para alguna $s' \in I$. De aquí y del Lema 3.2.5 se desprende que

$$L = \lim \alpha(s_{r_{n_k}}) \cup \lim \beta(r_{n_k}) = \alpha(s') \cup \beta(r).$$

Sin embargo, dado que $\eta(r_{n_k}) \in \mu^{-1}(t)$ para cada k, y μ es continua, obtenemos que $L \in \mu^{-1}(t)$. Por tanto $L = \eta(r)$.

En consecuencia, $\eta(r_n) \to \eta(r)$ y η es continua.

Paso 3 $C \subset \eta(r) \subset A \cup B$ para cada $r \in I$.

Esto es una consecuencia directa de la definición de η.

Paso 4 $\eta(I)$ es un arco en $\mu^{-1}(t)$ cuyos puntos extremos son A y B.

Empezaremos viendo que η es una función monótona. Sea $K \in \mu^{-1}(t)$. Basta ver que si $r, r' \in \eta^{-1}(K)$ y $r < r'$, entonces $[r, r'] \subset \eta^{-1}(K)$. Así pues, tenemos que

$$\alpha(s_r) \cup \beta(r) = \eta(r) = \eta(r') = \alpha(s_{r'}) \cup \beta(r'),$$

de donde se desprende que $\beta(r') \setminus \beta(r) \subset \alpha(s_r)$. Tomemos ahora $w \in [r, r']$. De acuerdo a la contención anterior y a la monotonía de β se tiene que

$$\begin{aligned}\beta(r) \cup \alpha(s_r) &\subset \beta(w) \cup \alpha(s_r) = \big(\beta(w) \setminus \beta(r)\big) \cup \beta(r) \cup \alpha(s_r) \\ &\subset \big(\beta(r') \setminus \beta(r)\big) \cup \beta(r) \cup \alpha(s_r) \subset \beta(r) \cup \alpha(s_r).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\alpha(s_r) \cup \beta(w) = \alpha(s_r) \cup \beta(r) = \eta(r) = K.$$

En particular, $\alpha(s_r) \cup \beta(w) \in \mu^{-1}(t)$, así que $\eta(w) = \alpha(s_r) \cup \beta(w) = K$. De esta manera hemos probado que $[r, r'] \subset \eta^{-1}(K)$. Por tanto, η es monótona.

Como consecuencia de (10.1) y (10.2) se tiene que $\eta(0) = A$ y $\eta(1) = B$. Usando el Lema 10.1.3 concluimos que $\eta(I)$ es un arco cuyos puntos extremos son A y B.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.5 *Sean X un continuo atriódico y $A, B \in C(X)$. Si $W \in C(A)$ y C es una componente de $A \cap B$, entonces $W \cap C \in C(X)$.*

Demostración:
Claramente $W \cap C$ es cerrado.

Supongamos que H_1 y H_2 son dos componentes distintas de $W \cap C$. Para $i \in \{1, 2\}$ tomemos un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(W)$ que empiece en H_i y termine en W. Consideremos también un arco ordenado $\alpha_3 : I \to C(B)$ que empiece en C y termine en B.

Por el Lema 3.4.3 podemos elegir $\delta > 0$ tal que $\alpha_1(\delta) \cap \alpha_2(\delta) = \emptyset$. Además, gracias al Lema 6.1.3 sabemos que $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes, así que podemos suponer que $\alpha_3(\delta) \cap A = C$.

Así pues, tenemos que

$$\big(\alpha_i(\delta) \cup C\big) \setminus \big(\alpha_j(\delta) \cup C \cup \alpha_3(\delta)\big) \supset \alpha_i(\delta) \setminus \big(\alpha_j(\delta) \cup C\big) \neq \emptyset,$$

cada vez que $\{i, j\} = \{1, 2\}$ y

$$\alpha_3(\delta) \setminus \big(\alpha_1(\delta) \cup C \cup \alpha_2(\delta)\big) \supset \alpha_3(\delta) \setminus A \neq \emptyset.$$

Más aún:

$$C \subset \left(C \cup \alpha_1(\delta)\right) \cap \left(C \cup \alpha_2(\delta)\right) \cap \alpha_3(\delta).$$

De acuerdo a las consideraciones anteriores se tiene que $C \cup \alpha_1(\delta), C \cup \alpha_2(\delta)$ y $\alpha_3(\delta)$ forman un triodo débil en X. Sin embargo, esto nos lleva a una contradicción con el Teorema 6.1.8. Por tanto $W \cap C$ es conexo.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.6 *Sean X un continuo atriódico, $A, B \in C(X)$ y $K \in C(A \cup B)$. Supongamos que $H \in C(K \cap B)$ y $L \in C(K \cap A)$ son tales que*

$$H \cap L \cap C \neq \emptyset, \qquad H \setminus A \neq \emptyset \qquad y \qquad L \setminus B \neq \emptyset,$$

donde C es una componente de $A \cap B$, entonces $C \subset K$.

Demostración:
Tenemos que $\emptyset \neq H \setminus A \subset H \setminus (L \cup C)$ y que $\emptyset \neq L \setminus B \subset L \setminus (H \cup C)$. Si suponemos que $C \setminus K \neq \emptyset$, entonces se tiene que $C \setminus (H \cup L) \neq \emptyset$. De acuerdo a las consideraciones anteriores obtenemos que C, H y L forman un triodo débil, lo cual contradice el Teorema 6.1.8. Por tanto, $C \subset K$ y terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.7 *Sean X un continuo atriódico y $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B$ tiene dos componentes C_1 y C_2. Supongamos que $K \in C(A \cup B)$ y que $K \cap A$ tiene dos componentes W_1 y W_2. Entonces*

i) *existe una componente K_B, de $K \cap B$, tal que $K_B \cap W_1 \neq \emptyset \neq K_B \cap W_2$,*

ii) $\overline{B \setminus A} \subset K_B$,

iii) *se pueden renumerar W_1 y W_2 para que se cumpla que $\emptyset \neq W_i \cap C_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$ y*

iv) *si $W_i \cap C_1 \neq \emptyset \neq W_i \cap C_2$ para alguna i, entonces $A \setminus B \subset W_i$.*

Demostración:
Tenemos que $K = W_1 \cup W_2 \cup (K \cap B)$. Así pues, como consecuencia del Teorema del Cable Cortado (Teorema 2.4.2) existe una componente K_B de $K \cap B$ tal que

$$K_B \cap W_1 \neq \emptyset \neq K_B \cap W_2.$$

Ahora bien, para cada $i \in \{1, 2\}$ tenemos que

$$\emptyset \neq K_B \cap W_i \subset K_B \cap A \subset K_B \cap (C_1 \cup C_2).$$

Además, el Lema 10.1.5 nos dice que $K_B \cap W_i$ y $K_B \cap C_i$ son conexos para cada $i \in \{1, 2\}$.

Ahora bien, claramente $K_B \cap W_1$ y $K_B \cap W_2$ no pueden intersectar ambos a $K_B \cap C_i$ para alguna $i \in \{1, 2\}$, ya que, de ser así, $K_B \cap C_i$ sería un subcontinuo de $K \cap A$ que intersecta a W_1 y a W_2, contradiciendo la definición de W_1 y W_2.

Por tanto, podemos suponer que $K_B \cap W_i \subset C_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$. De aquí se desprende que

$$K_B \cap C_i \neq \emptyset \neq W_i \cap C_i. \tag{10.3}$$

Supongamos ahora que $i \in \{1, 2\}$ es tal que $W_i \cap C_j \neq \emptyset$, con $i \neq j$, entonces tenemos que $W_i \cup C_1 \cup C_2 \in C(A)$. Si $W_i \cup C_1 \cup C_2 \subsetneq A$, gracias al Lema 6.1.10 se sigue que X contiene un triodo, contradiciendo nuestras hipótesis. Por tanto, $W_i \cup C_1 \cup C_2 = A$. De aquí que

$$A \setminus B = A \setminus (C_1 \cup C_2) \subset W_i.$$

Por otra parte, de (10.3) obtenemos que

$$K_B \cup C_1 \cup C_2 \in C(B).$$

Si suponemos ahora que $K_B \cup C_1 \cup C_2 \subsetneq B$, aplicando el Lema 6.1.10 obtenemos que X contiene un triodo, con lo que llegamos a una contradicción. En consecuencia, $K_B \cup C_1 \cup C_2 = B$. En otras palabras,

$$B \setminus A = B \setminus (C_1 \cup C_2) \subset K_B.$$

Por tanto, $\overline{B \setminus A} \subset K_B$ y concluimos la prueba del lema.

□

A fin de facilitar el desarrollo de resultados posteriores, introducimos la siguiente notación.

Notación 10.1.8 Sean X un continuo, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in (0,1)$. Para cada $A, B \in \mu^{-1}(t)$ denotaremos como $C_{A,B}$ a la componente de $A \cap B$ que contiene a p, y como $\eta_{A,B} : I \to \mu^{-1}(t)$ a la función definida en el Lema 10.1.4, considerando como la C del lema a $C_{A,B}$.

Adoptando esta nueva notación, introducimos una versión particular, simplificada, del Lema 10.1.4, que nos será de mucha utilidad.

Lema 10.1.9 *Sean X un continuo, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in (0,1)$. Si $A, B, K \in \mu^{-1}(t)$ y $K \in \eta_{A,B}(I)$, entonces se tiene que $C_{A,B} \subset K \subset A \cup B$. Además, $\eta_{A,B}(I)$ es un arco en $\mu^{-1}(t)$ cuyos puntos extremos son A y B.*

Observación 10.1.10 Supongamos que X es un continuo atriódico, $p \in X$, μ es una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in (0,1)$. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ y α y β dos arcos ordenados de $C_{A,B}$ a A y a B, respectivamente. Aplicando el Lema 6.1.13, obtenemos que α es el único arco ordenado de $C_{A,B}$ a A. En particular, si $H \in C(p,A)$, entonces $C_{A,B} \cup H = \alpha(s)$ para alguna $s \in I$. De manera similar, β es el único arco ordenado de $C_{A,B}$ a B, así que si $L \in C(p,B)$, entonces $C_{A,B} \cup L = \beta(r)$, para alguna $r \in I$.

Como consecuencia de esta observación y el Lema 10.1.4 tenemos:

Lema 10.1.11 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in (0,1)$. Supongamos que $A, B, K \in \mu^{-1}(t)$ y $K \in \eta_{A,B}(I)$. Si α y β son arcos ordenados de $C_{A,B}$ a A y B, respectivamente, entonces $K = \alpha(s) \cup \beta(r)$ para algunas $s, r \in I$.*

Lema 10.1.12 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Sean $t \in (0,1)$ y $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $A \cap B$ no es conexo. Si $K \in \mu^{-1}(t)$ es tal que $C_{A,B} \subset K$, entonces $K = C_{A,K} \cup C_{B,K}$.*

Demostración:
Podemos suponer que $A \neq K \neq B$. Usando el Teorema 6.1.11 se tiene que $A \cup B$ es terminal. De esta manera, como $p \in A \cap B \cap K$ y $\mu(K) = t < \mu(A \cup B)$, necesariamente tenemos que

$$K \subset A \cup B. \tag{10.4}$$

Basta analizar tres casos.

Caso 1 $K \cap A$ y $K \cap B$ son conexos.

En este caso es inmediato que $K = C_{A,K} \cup C_{B,K}$.

Caso 2 $K \cap A$ no es conexo y $B \cap K$ es conexo.

Por el Lema 6.1.3 sabemos que $A \cap B$ tiene dos componentes $C_{A,B}$ y C'. Similarmente, $A \cap K$ tiene dos componentes $C_{A,K}$ y W. Como K es conexo, es fácil ver que

$$\emptyset \neq W \cap C_{B,K} \subset A \cap B = C_{A,B} \cup C'. \tag{10.5}$$

Ahora bien, si suponemos que $W \cap C_{B,K} \cap C' = \emptyset$, entonces obtenemos que $C_{A,B}$ es un subcontinuo de $A \cap K$ que intersecta a $C_{A,K}$ (en p) y a W, lo cual es una contradicción con la definición de W. Por tanto,

$$W \cap C_{B,K} \cap C' \neq \emptyset. \tag{10.6}$$

Veremos que $W \subset C'$. Supongamos que $W \setminus C' \neq \emptyset$. Por el Lema 10.1.7 sabemos que $B \setminus A \subset C_{B,K}$. De acuerdo a esto, a (10.6) y al Lema 10.1.6 se sigue que $C' \subset K$. De aquí que

$$B = C_{A,B} \cup (B \setminus A) \cup C' \subset K.$$

Como esto nos lleva a una contradicción con el hecho de que μ es de Whitney, deducimos que $W \subset C'$. Por tanto,

$$W \subset C' \cap K \subset B \cap K = C_{B,K}.$$

De aquí y de (10.4) concluimos que

$$K = (K \cap A) \cup (K \cap B) = C_{A,K} \cup W \cup C_{B,K} = C_{A,K} \cup C_{B,K}.$$

Caso 3 $K \cap A$ y $B \cap K$ son disconexos.

Por el Lema 6.1.3 sabemos que $A \cap B$ tiene dos componentes $C_{A,B}$ y C'. Similarmente, $A \cap K$ tiene dos componentes $C_{A,K}$ y W, y $B \cap K$ tiene dos componentes $C_{B,K}$ y L.

Usando el Lema 6.1.5 y la conexidad de A y B, es fácil ver que los conjuntos $C_{A,B} \cup \overline{A \setminus B}$ y $C_{A,B} \cup \overline{B \setminus A}$ son conexos. Gracias a esto y al Lema 10.1.7 (ii) obtenemos que

$$\overline{A \setminus B} \subset C_{A,K} \quad \text{y} \quad \overline{B \setminus A} \subset C_{B,K}. \tag{10.7}$$

Por otra parte, dado que K es conexo y $K \subset A \cup B$, obtenemos que $W \cap C_{B,K} \neq \emptyset$ o $L \cap C_{A,K} \neq \emptyset$. Supondremos sin pérdida de generalidad que

$$\emptyset \neq W \cap C_{B,K} \subset A \cap B = C_{A,B} \cup C' \tag{10.8}$$

Si suponemos que $W \cap C_{B,K} \cap C' = \emptyset$, entonces $C_{A,B}$ es un subcontinuo de $A \cap K$ que intersecta a $C_{A,K}$ (en p) y a W, lo cual es una contradicción. Por tanto,

$$W \cap C_{B,K} \cap C' \neq \emptyset. \tag{10.9}$$

Veremos que $W \subset C'$.

Si suponemos que $W \setminus C' \neq \emptyset$, entonces de (10.7), (10.9) y el Lema 10.1.6 se sigue que $C' \subset K$. Por tanto

$$B = C_{A,B} \cup (B \setminus A) \cup C' \subset K.$$

Sin embargo, como $B \neq K$, esto nos lleva a una contradicción con el hecho de que μ es de Whitney. Por tanto, $W \subset C' \subset B$. De acuerdo a esto y a (10.8) se tiene que

$$W \subset C_{B,K}. \tag{10.10}$$

Como consecuencia de esto y de la conexidad de K, no es difícil ver que $L \cap C_{A,K} \neq \emptyset$. Siguiendo un razonamiento similar al hecho para W, desde el momento en que supusimos que $W \cap C_{B,K} \neq \emptyset$, podemos deducir que $L \subset C_{A,K}$. De aquí, de (10.4) y de (10.10) concluimos que

$$K = (K \cap A) \cup (K \cap B) = C_{A,K} \cup W \cup L \cup C_{B,K} = C_{A,K} \cup C_{B,K}.$$

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.13 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Sean $t \in (0,1)$ y $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $A \cap B$ es conexo. Si $K \in C(p,X)$ es tal que $K \subset A \cup B$, entonces $K \cap A$ y $K \cap B$ son conexos.*

Demostración:
Supongamos que $A \cap K$ no es conexo (si $B \cap K$ no es conexo puede procederse de manera similar). Gracias al Lema 6.1.3, $A \cap K$ tiene dos componentes W_1 y W_2. Así pues, por el Teorema del Cable Cortado (Teorema 2.4.2) existe una componente V de $K \setminus A$ tal que

$$\emptyset \neq V \cap W_i \subset V \cap B \cap A.$$

para cada $i \in \{1,2\}$.

Aplicando ahora el Lema 10.1.5, obtenemos que $V \cap (A \cap B) \in C(X)$. Más aún, $V \cap A \cap B$ es un subcontinuo de $A \cap K$ que contiene a $V \cap W_i$ para cada $i \in \{1,2\}$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $A \cap K$ es conexo y terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.14 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Sean $t \in (0,1)$ y $A, B \in \mu^{-1}(t)$. Si $K \in \mu^{-1}(t)$ es tal que $C_{A,B} \subset K$, entonces $K \in \eta_{A,B}(I)$.*

Demostración:
Consideremos dos arcos ordenados, α y β, de $C_{A,B}$ a A y a B, respectivamente. Analizaremos tres casos.

Caso 1 $A \cap B$ es conexo y $K \subset A \cup B$.

En el Lema 10.1.13 vimos que, en este caso, $A \cap K$ y $K \cap B$ son conexos. De acuerdo a la Observación 10.1.10 tenemos que α y β son únicos y que

$$A \cap K = C_{A,B} \cup C_{A,K} = \alpha(s) \quad \text{y} \quad B \cap K = C_{A,B} \cup C_{B,K} = \beta(r),$$

para algunas $r, s \in I$. De aquí que

$$K = \alpha(s) \cup \beta(r) = \eta_{A,B}(r).$$

Caso 2 $A \cap B$ es conexo y $K \not\subset A \cup B$.

Por el Teorema 6.1.8 sabemos que X no contiene triodos débiles, así que podemos suponer que $B \subset A \cup K$. De aquí que $B \setminus A \subset K$. Sin embargo, de acuerdo a esto y a nuestra hipótesis tenemos que

$$B = C_{A,B} \cup (B \setminus A) \subset K,$$

Como μ es de Whitney, se tiene que $B = K$, con lo cual tenemos una contradicción. Por tanto, este caso es imposible.

Caso 3 $A \cap B$ no es conexo.

Por la Observación 10.1.10 se tiene que $C_{A,K} = \alpha(s)$ y $C_{B,K} = \beta(r)$, para algunas $r, s \in I$. Más aún, la Observación 10.1.10 nos dice que los arcos α y β son únicos. De acuerdo a esto y al Lema 10.1.12 concluimos que $K = C_{A,K} \cup C_{K,B} = \alpha(s) \cup \beta(r) = \eta_{A,B}(r)$.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.15 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Sean $t \in (0, 1)$ y $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $A \cap B$ no es conexo. Si $K \in \mu^{-1}(t)$ es tal que $C_{A,B} \not\subseteq K$, entonces $A \setminus C_{A,B} \subset C_{A,K}$ o $B \setminus C_{A,B} \subset C_{B,K}$.*

Demostración:
Por el Lema 6.1.3 sabemos que $A \cap B$ tiene dos componentes $C_{A,B}$ y C'. Además, el Teorema 6.1.11 nos dice que $A \cup B$ es terminal. Así pues, dado que $\mu(K) = t < \mu(A \cup B)$ y $p \in A \cap K \cap B$, necesariamente tenemos que

$$K \subset A \cup B. \tag{10.11}$$

Notemos que $p \in C_{A,K} \cap C_{A,B} \cap C_{B,K}$. Si suponemos que $C_{A,K} \setminus C_{A,B} \neq \emptyset$ y $C_{B,K} \setminus C_{A,B} \neq \emptyset$, entonces por el Lema 10.1.6 obtenemos que $C_{A,B} \subset K$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Por tanto, podemos suponer que

$$C_{B,K} \subset C_{A,B} \tag{10.12}$$

Como $\mu(C_{A,B}) < t = \mu(K)$, es fácil ver que $C_{A,K} \setminus C_{A,B} \neq \emptyset$. De aquí que

$$C_{A,K} \cap (A \setminus B) \neq \emptyset \tag{10.13}$$

Ahora bien, dado que $C_{A,B} \not\subseteq K$, se tiene que $A \neq K \neq B$. En particular, como $A, K \in \mu^{-1}(t)$, se sigue que $K \setminus A \neq \emptyset$. De aquí y de (10.12) obtenemos que $K \cap B$ tiene una componente $L \neq C_{K,B}$ tal que $L \setminus A \neq \emptyset$. Así pues, del Lema 6.1.3 se sigue que $C_{K,B}$ y L son las dos componentes de $K \cap B$. Más aún, usando una vez más el Lema 10.1.7 tenemos que $A \setminus B \subset W$ para alguna componente W de $A \cap K$. Ahora bien, de (10.13) y del Lema 6.1.5 se sigue que $C_{A,K} \cup (A \setminus B)$ es un subconjunto conexo de $A \cap K$ que contiene a p, así que

$$A \setminus B \subset C_{K,A}. \tag{10.14}$$

Por otra parte, gracias a la conexidad de K, a (10.11) y a (10.12) es fácil ver que

$$\emptyset \neq L \cap C_{A,K} \subset B \cap A = C_{A,B} \cup C'.$$

Sin embargo, si suponemos que $L \cap C_{A,K} \cap C' = \emptyset$, entonces $L \cap C_{A,K} \subset C_{A,B}$. Así pues, aplicando el Lema 10.1.6 obtenemos que $C_{A,B} \subset K$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Por tanto, $L \cap C_{A,K} \cap C' \neq \emptyset$. Finalmente, de acuerdo a esto, a (10.14), a la definición de L y al Lema 10.1.6 obtenemos que $C' \subset K$. Sin embargo, no es difícil ver que $C' \cap \overline{A \setminus B} \neq \emptyset$; de aquí y de (10.14) se sigue que $C' \subset C_{A,K}$. Como consecuencia de esto y de (10.14) obtenemos que

$$A \setminus C_{A,B} = (A \setminus B) \cup C' \subset C_{A,K}.$$

Terminamos la prueba del lema.

$\square$

Lema 10.1.16 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Supongamos que $t \in (0,1)$ y $A, B \in \mu^{-1}(t)$ son tales que $A \cap B$ es conexo. Si $K \in \mu^{-1}(t)$ es tal que $C_{A,B} \not\subset K$, entonces $A \setminus C_{A,B} \subset C_{A,K}$ o $B \setminus C_{A,B} \subset C_{B,K}$.*

Demostración.
Como $C_{A,B} \not\subset K$, se tiene que $A \neq K \neq B$. De esta manera, gracias a que μ es de Whitney obtenemos que $K \setminus A \neq \emptyset \neq K \setminus B$. Si suponemos que $K \subset A \cup B$, entonces por el Lema 10.1.13 tenemos que $K \cap A$ y $K \cap B$ son conexos y

$$(K \cap B) \setminus A \neq \emptyset \neq (K \cap A) \setminus B.$$

Como $p \in K \cap A \cap B = K \cap C_{A,B}$, usando el Lema 10.1.6 obtenemos que $C_{A,B} \subset K$ y llegamos a una contradicción con nuestras hipótesis. Por tanto,

$$K \not\subset A \cup B. \tag{10.15}$$

Consideremos un arco ordenado γ de $C_{A\cup B,K}$ a K. Por el Lema 6.1.3 sabemos que $(A \cup B) \cap K$ tiene a lo más dos componentes, así que podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\gamma(\delta) \cap (A \cup B) \;=\; C_{A\cup B,K}.$$

Además, de (10.15) sabemos que $\gamma(\delta) \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$. Gracias al Teorema 6.1.8 tenemos que X no contiene triodos débiles, así que podemos suponer que $B \subset A \cup \gamma(\delta)$. Ahora bien, de acuerdo al Lema 10.1.5 obtenemos que

$$\gamma(\delta) \cap B = \gamma(\delta) \cap (A \cup B) \cap B \;=\; C_{A\cup B,K} \cap B \;\in\; C(X) \qquad (10.16)$$

De aquí que

$$B \setminus C_{A,B} \;=\; B \setminus A \;\subset\; B \cap \gamma(\delta) \;=\; C_{B,\gamma(\delta)} \;\subset C_{B,K}.$$

Terminamos la prueba del lema.

□

Para probar que los niveles de continuos atriódicos son arcos (o puntos) usaremos el siguiente resultado.

Teorema 10.1.17 *[Nad92, Teorema 6.6] Sean X un continuo y c un punto de corte de X. Digamos que $X \setminus \{c\}$ es la unión ajena de dos subconjuntos U y V. Entonces U y V contienen -cada uno- un punto que no es de corte de X. En particular, X tiene al menos dos puntos que no son de corte.*

Teorema 10.1.18 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es un arco o un punto para cada $t \in I$.*

Demostración:
Sea $t \in I$ tal que $\mu^{-1}(t)$ tiene más de un punto.

Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ con $A \neq B$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A,B} &= \left\{K \in \mu^{-1}(t) : A \setminus C_{A,B} \subset C_{A,K}\right\} \quad \text{y} \\ \mathcal{R}_{A,B} &= \left\{K \in \mu^{-1}(t) : B \setminus C_{A,B} \subset C_{B,K}\right\}. \end{aligned}$$

Haremos el resto de la prueba en una serie de pasos.

Paso 1 $\mathcal{L}_{A,B}$ y $\mathcal{R}_{A,B}$ son cerrados en $\mu^{-1}(t)$.

Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_{A,B}$ una sucesión que converge a alguna $K \in \mu^{-1}(t)$. Entonces

$$A \setminus C_{A,B} \subset C_{A,K_n} \subset A \cap K_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{C_{A,K_{n_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{C_{A,K_n}\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a R para alguna $R \in C(p, X)$. Entonces se tiene que

$$A \setminus C_{A,B} \subset R \subset A \cap K.$$

Como $R \in C(A \cap K)$ y $p \in R$, necesariamente $R \subset C_{A,K}$. De acuerdo a lo anterior se tiene que $K \in \mathcal{L}_{A,B}$. Por tanto, $\mathcal{L}_{A,B}$ es cerrado.

Similarmente, $\mathcal{R}_{A,B}$ es cerrado.

Paso 2 $\mathcal{L}_{A,B} \cap \eta_{A,B}(I) = \{A\}$ y $\mathcal{R}_{A,B} \cap \eta_{A,B}(I) = \{B\}$.

Sea $K \in \mathcal{L}_{A,B} \cap \eta_{A,B}(I)$, entonces por definición de $\mathcal{L}_{A,B}$ y el Lema 10.1.9 se tiene que

$$A = (A \setminus C_{A,B}) \cup C_{A,B} \subset K.$$

Dado que μ es de Whitney, concluimos que $K = A$. Análogamente, $\mathcal{R}_{A,B} \cap \eta_{A,B}(I) = \{B\}$.

Paso 3 $\mathcal{L}_{A,B} \cap \mathcal{R}_{A,B} = \emptyset$.

Sea $K \in \mathcal{L}_{A,B} \cap \mathcal{R}_{A,B}$, entonces

$$\begin{aligned} A \setminus B &\subset A \setminus C_{A,B} \subset C_{A,K} \quad \text{y} \\ B \setminus A &\subset B \setminus C_{A,B} \subset C_{B,K}. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Dado que $p \in C_{A,B} \cap C_{A,K} \cap C_{B,K}$, usando el Lema 10.1.6 obtenemos que $C_{A,B} \subset K$. Sin embargo, si esto sucede, de (10.17) deducimos que

$$A \cup B = (A \cup B) \setminus C_{A,B}) \cup C_{A,B} \subset K.$$

Así pues, como μ es de Whitney deducimos que $\mu(A \cup B) \leq \mu(K) = t$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathcal{L}_{A,B} \cap \mathcal{R}_{A,B} = \emptyset$.

Paso 4 $\mu^{-1}(t) = \eta_{A,B}(I) \cup \mathcal{L}_{A,B} \cup \mathcal{R}_{A,B}$.

Esto es una consecuencia directa de los Lemas 10.1.14, 10.1.15 y 10.1.16.

Paso 5 Si $\mathcal{L}_{A,B} \setminus \{A\} \neq \emptyset$, entonces A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$.

Como consecuencia de los pasos 4, 2 y 3 tenemos que

$$\mu^{-1}(t) \setminus \big(\eta_{A,B}(I) \cup \mathcal{R}_{A,B}\big) = \mathcal{L}_{A,B} \setminus \big(\eta_{A,B}(I) \cup \mathcal{R}_{A,B}\big) = \mathcal{L}_{A,B} \setminus \{A\}$$

Así pues, aplicando el paso 1 se sigue que $\mathcal{L}_{A,B} \setminus \{A\}$ es abierto en $\mu^{-1}(t)$. De manera similar,

$$\mu^{-1}(t) \setminus \mathcal{L}_{A,B} = \big(\eta_{A,B}(I) \cup \mathcal{R}_{A,B}\big) \setminus \{A\},$$

así que, usando el paso 1 otra vez se tiene que $\big(\eta_{A,B}(I) \cup \mathcal{R}_{A,B}\big) \setminus \{A\}$ es abierto en $\mu^{-1}(t)$. De esta manera, usando una vez más el paso 4, y el hecho de que $B \in \mathcal{R}_{A,B}$, obtenemos que $\mu^{-1}(t) \setminus \{A\}$ se puede escribir como la unión ajena de dos de sus subconjuntos abiertos y no vacíos, a saber: $\big(\eta_{A,B}(I) \cup \mathcal{R}_{A,B}\big) \setminus \{A\}$ y $\mathcal{L}_{A,B} \setminus \{A\}$. Por tanto, A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$.

Paso 6 Si $\mathcal{R}_{A,B} \setminus \{B\} \neq \emptyset$, entonces B es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$.

La prueba es análoga a la del paso 5.

Paso 7 $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

Por el Teorema 10.1.17 podemos tomar dos puntos distintos L y K en $\mu^{-1}(t)$ que no son de corte. Así pues, el paso 4 nos dice que

$$\mu^{-1}(t) = \eta_{L,K}(I) \cup \mathcal{L}_{L,K} \cup \mathcal{R}_{L,K}.$$

Si $\mathcal{L}_{L,K} \setminus \{L\} \neq \emptyset$, entonces por el paso 5 tenemos que L es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$, lo cual es absurdo. Por tanto $\mathcal{L}_{L,K} = \{L\}$. Similarmente, $\mathcal{R}_{L,K} = \{K\}$. Como consecuencia de esto y del paso 4 se tiene que $\mu^{-1}(t) = \eta_{L,K}(I)$, es decir, $\mu^{-1}(t)$ es un arco (Lema 10.1.9).

Terminamos la prueba del teorema.

□

En virtud del Teorema 10.1.18, podemos establecer la siguiente notación.

Notación 10.1.19 Sean X un continuo atriódico, p un punto de X y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Para cada $t \in I$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco, denotaremos como $\mathcal{E}_t$ al conjunto de puntos extremos de $\mu^{-1}(t)$. Si $\mu^{-1}(t)$ es un punto definimos $\mathcal{E}_t = \mu^{-1}(t)$. Definimos también $\mathcal{E} = \{E : E \in \mathcal{E}_t, t \in I\}$.

Lema 10.1.20 *Sean X un continuo, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in I$. Entonces $\mu^{-1}(t) = \{A\}$ si y sólo si A es terminal en p.*

Demostración:
Supongamos que A es terminal en p y sea $B \in \mu^{-1}(t)$. Como A es terminal en p se tiene que A y B son comparables. Así pues, dado que μ es de Whitney, deducimos que $A = B$.

Supongamos ahora que $\mu^{-1}(t) = \{A\}$ y tomemos $B \in C(p,X)$. Analizaremos dos casos para ver que A y B son comparables.

Caso 1 $\mu(B) \leq t$.

Sea γ un arco ordenado de B a X. Como μ es continua podemos tomar $r \in I$ tal que $\gamma(r) \in \mu^{-1}(t)$. Entonces la hipótesis nos dice que $\gamma(r) = A$, de donde deducimos que $B = \gamma(0) \subset A$.

Caso 2 $\mu(B) > t$.

Sea β un arco ordenado de p a B. Dada la continuidad de μ consideremos $s \in I$ tal que $\beta(s) \in \mu^{-1}(t)$. Entonces $\beta(s) = A$, de donde se sigue que $A \subset \beta(1) = B$.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.21 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Supongamos que $t \in I$ es tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco y $\mathcal{E}_t = \{A, B\}$. Si $\mu(C_{A,B}) < t' < t$ y $K \in \mathcal{E}_{t'}$, entonces $K \subset A$ o $K \subset B$.*

Demostración:
Sea $K \in \mu^{-1}(t')$ tal que

$$K \setminus A \neq \emptyset \neq K \setminus B. \qquad (10.18)$$

Analizaremos cuatro casos para ver que $K \notin \mathcal{E}_{t'}$.

Caso 1 $K \cap A$ y $K \cap B$ son conexos y $K \subset A \cup B$.

Notemos que

$$p \in (A \cap K) \cap (B \cap K) \cap C_{A,B}.$$

Como consecuencia de (10.18) y el Lema 10.1.6 obtenemos que

$$C_{A,B} \subset K.$$

Tomemos dos arcos ordenados α y β, que empiecen en $C_{A,B}$ y terminen en A y B, respectivamente.

Así pues, podemos tomar $r, s \in I$ tales que

$$\alpha(r), \beta(s) \in \mu^{-1}(t').$$

Como consecuencia de esto y de la Observación 10.1.10 obtenemos que

$$C_{\alpha(r),K} = \alpha(s') \quad \text{y} \quad C_{\beta(s),K} = \beta(r'),$$

para algunas $r', s' \in (0,1)$.

De hecho, dado que μ es de Whitney sabemos que $\alpha(r) \setminus K \neq \emptyset \neq \beta(s) \setminus K$, así que

$$r, s > 0. \tag{10.19}$$

Consideremos ahora los arcos $\eta_{\alpha(r),K}(I)$ y $\eta_{K,\beta(s)}(I)$ (Lema 10.1.9). Claramente de (10.19) se sigue que

$$C_{\alpha(r),K} = \alpha(s') \not\subset \beta(s) \quad \text{y} \quad C_{\beta(s),K} = \beta(r') \not\subset \alpha(r).$$

Así pues, aplicando el Lema 10.1.9 obtenemos que $\beta(s) \notin \eta_{\alpha(r),K}$ y que $\alpha(r) \notin \eta_{\beta(s),K}$. Por tanto, $\eta_{\alpha(r),K}$ y $\eta_{\beta(s),K}$ son dos arcos no comparables en $\mu^{-1}(t')$ (el cual es un arco) que contienen a K. En consecuencia, $K \notin \mathcal{E}_{t'}$.

Concluimos el análisis de este caso.

Caso 2 $A \cap B$ es conexo y $K \not\subset A \cup B$.

Gracias al Teorema 6.1.8 X no contiene triodos débiles, así que podemos suponer que $B \subset A \cup K$. En particular, $B \setminus K \subset A \cap B = C_{A,B}$.

Sea γ un arco ordenado de K a $K \cup B$. Como $\mu(K) = t' < t$, podemos tomar $r \in I$ tal que $\gamma(r) \in \mu^{-1}(t)$. Veremos que $C_{A,B} \not\subset \gamma(r)$.

Si suponemos que $C_{A,B} \subset \gamma(r)$, tenemos que

$$B \setminus K \subset C_{A,B} \subset \gamma(r),$$

de donde

$$B \subsetneq B \cup K = (B \setminus K) \cup K \subset \gamma(r).$$

Sin embargo, esta afirmación contradice que μ es de Whitney.

Por tanto $C_{A,B} \not\subseteq \gamma(r)$. Así pues, de acuerdo al Lema 10.1.9 obtenemos que $\gamma(r) \in \mu^{-1}(t) \setminus \eta_{A,B}(I)$, lo cual contradice la definición de A y B.

En consecuencia, este caso es imposible.

Caso 3 $A \cap B$ es conexo y $K \subset A \cup B$.

En este caso, gracias al Lema 10.1.13 tenemos que $A \cap K$ y $K \cap B$ son conexos. Por tanto, caemos en el caso 1.

Caso 4 $A \cap B$ no es conexo.

Usando el Teorema 6.1.11 se tiene que $A \cup B$ es terminal. De esta manera, como $\mu(K) = t' < t \leq \mu(A \cup B)$, necesariamente obtenemos que

$$K \subset A \cup B. \tag{10.20}$$

Ahora bien, si $K \cap A$ y $K \cap B$ son conexos caemos en el caso 1. Así pues, supondremos que $K \cap A$ no es conexo. Usando el Lema 6.1.1 obtenemos que $K \cap A$ tiene dos componentes W_1 y W_2. De la misma manera, $A \cap B$ tiene dos componentes $C_{A,B}$ y C'.

De acuerdo al Lema 10.1.7 existe una componente K_B de $K \cap B$ tal que

$$K_B \cap W_1 \neq \emptyset \neq K_B \cap W_2 \tag{10.21}$$

y además

$$\emptyset \neq B \setminus A \subset K_B \setminus A \subset K. \tag{10.22}$$

Analizaremos dos subcasos.

Subcaso 1 $C' \subset K$.

Sea γ un arco ordenado de C' a A, entonces $K \cup \gamma(0) \in \mu^{-1}(t')$ y $K \cup \gamma(1) = K \cup A \in \mu^{-1}(s)$ para alguna $s \geq t$. Por tanto, dado que μ es continua, podemos tomar $r \in I$ tal que $K \cup \gamma(r) \in \mu^{-1}(t)$. Veremos que $C_{A,B} \not\subset K \cup \gamma(r)$.

Supongamos que $C_{A,B} \subset K \cup \gamma(r)$, entonces de (10.22) obtendríamos que

$$B = C_{A,B} \cup (B \setminus A) \cup C' \subset K \cup \gamma(r).$$

Dado que μ es de Whitney, la afirmación anterior nos lleva a que $B = K \cup \gamma(r)$, lo cual contradice (10.18).

Por tanto, $C_{A,B} \not\subset K \cup \gamma(r)$. Sin embargo, de acuerdo al Lema 10.1.9 esto nos lleva a que

$$K \cup \gamma(r) \in \mu^{-1}(t) \setminus \eta_{A,B}(I).$$

Esto contradice la definición de A y B. Por tanto, este subcaso es imposible.

Subcaso 2 $C' \setminus K \neq \emptyset$.

Gracias a (10.18) podemos suponer que

$$W_1 \setminus B \neq \emptyset. \qquad (10.23)$$

Además, de (10.21) obtenemos que

$$\emptyset \neq K_B \cap W_1 \subset B \cap A = C_{A,B} \cup C'.$$

Si suponemos que $K_B \cap W_1 \cap C' \neq \emptyset$, de (10.22) y el Lema 10.1.6 deducimos que $C' \subset K$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $K_B \cap W_1 \subset C_{A,B}$. Así pues, usando una vez más el Lema 10.1.6 obtenemos que $C_{A,B} \subset K$. Más aún: $C_{A,B} \subset K \cap A \cap B$. De acuerdo a esto no es difícil ver que

$$p \in C_{A,B} \subset W_1 \cap K_B. \qquad (10.24)$$

Sean γ y ζ arcos ordenados de $C_{A,B}$ a A y a B, respectivamente. Consideremos $r, s \in I$ tales que $\gamma(r), \zeta(s) \in \mu^{-1}(t')$.

La Observación 10.1.10 nos dice que γ y ζ son únicos, y que $W_1 = \gamma(z_1)$ y $K_B = \zeta(z_2)$ para algunas $z_1 \in (0, r]$ y $z_2 \in (0, s]$. De aquí que

$$W_1 \subset \gamma(r) \cap K \quad \text{y} \quad K_B \subset \zeta(s) \cap K.$$

Usando esto y (10.24) obtenemos que

$$W_1 \subset C_{\gamma(r),K} \quad \text{y} \quad K_B \subset C_{\zeta(s),K}. \tag{10.25}$$

Sin embargo, de (10.23) y (10.22) tenemos que

$$\emptyset \neq W_1 \setminus B \subset W_1 \setminus \zeta(s) \quad \text{y} \quad \emptyset \neq K_B \setminus A \subset K_B \setminus \gamma(r).$$

De acuerdo a esto, a (10.25) y al Lema 10.1.9 obtenemos que

$$\zeta(s) \notin \eta_{\gamma(r),K} \quad \text{y} \quad \gamma(r) \notin \eta_{\zeta(s),K}. \tag{10.26}$$

Por tanto, usando una vez más el Lema 10.1.9 deducimos que $\eta_{\gamma(r),K}$ y $\eta_{\zeta(s),K}$ son dos arcos no comparables en $\mu^{-1}(t')$ (el cual es un arco) que contienen a K. En consecuencia, $K \notin \mathcal{E}_{t'}$ y concluimos el análisis de este caso.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.22 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Supongamos que $t, t' \in I$ son tales que $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}(t')$ son arcos. Si $\mathcal{E}_t = \{A, B\}$, $\mathcal{E}_{t'} = \{A', B'\}$ y $\mu(C_{A,B}) < t' < t$, entonces $A' \subset A$ y $B' \subset B$, o $A' \subset B$ y $B' \subset A$.*

Demostración:
Por el Lema 10.1.21 podemos suponer que $A' \subset A$.

Usando una vez más el Lema 10.1.21 tenemos que $B' \subset B$ o $B' \subset A$. Gracias al Lema 10.1.9 sabemos que $\eta_{A'B'}(I)$ es un arco en $\mu^{-1}(t')$ que contiene a A' y a B' y cuya imagen está contenida en $A' \cup B'$. Así pues, si suponemos que $B' \subset A$ obtenemos que

$$\bigcup \mu^{-1}(t') = \bigcup \eta_{A',B'}(I) \subset A' \cup B' \subset A \tag{10.27}$$

Por otra parte, si γ es un arco ordenado de $C_{A,B}$ a B, podemos elegir $r \in I$ tal que $\gamma(r) \in \mu^{-1}(t')$. Más aún, por hipótesis $\gamma(r) \not\subseteq C_{A,B}$. De aquí que $\gamma(r) \setminus A \neq \emptyset$. Sin embargo esto contradice (10.27). Por tanto, $B' \subset B$.

Concluimos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.23 *Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$ es una sucesión tal que $\mu(A_n) \to \mu(A)$, $\mathcal{A} = \{A_n \in C(p,X) : n \in \mathbb{N}\}$ y*

i) $\mathcal{A} \subset C(A)$, o

ii) $A \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

entonces $A_n \to A$.

Demostración:
Supongamos que existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathcal{A}$ que converge a B, para alguna $B \neq A$. Entonces, gracias a la continuidad de μ obtenemos que

$$\mu(A) = \lim \mu(A_{n_k}) = \mu(B).$$

En el caso en que $\mathcal{A} \subset C(A)$ se tiene que $B \subset A$. Así pues, del hecho que μ es de Whitney se desprende que $A = B$ y llegamos a una contradicción.

Ahora bien, si $A \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces es fácil ver que $A \subset B$. Usando una vez más que μ es de Whitney obtenemos que $A = B$.

Concluimos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.24 *Sean X un continuo, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ es una sucesión que converge a $t \in I$, entonces $\mu^{-1}(t_n) \to \mu^{-1}(t)$.*

Demostración:
Tomemos $A \in \limsup \mu^{-1}(t_n)$, entonces existe una subsucesión $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, y $A_{n_k} \in \mu^{-1}(t_{n_k})$ tales que $A = \lim A_{n_k}$. De aquí que $p \in A$. Además, dado que μ es continua, obtenemos que $\mu(A) = \lim \mu(A_{n_k}) = t$. Por tanto, podemos concluir que

$$\limsup \mu^{-1}(t_n) \subset \mu^{-1}(t).$$

Consideremos ahora $B \in \mu^{-1}(t)$ y tomemos un arco ordenado β de p a X tal que $B \in \beta(I)$ (esto puede hacerse tomando un arco ordenado de p a B y luego otro de B a X). Gracias a la continuidad de β y de μ, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in I$ tal que $\beta(r_n) \in \mu^{-1}(t_n)$. Veremos que $\beta(r_n) \to B$.

Sea K un punto límite de la sucesión $\{\beta(r_n)\}_{n=1}^{\infty}$, entonces es fácil ver que $K \in \beta(I) \cap \mu^{-1}(t)$. En otras palabras, $K = B$. Por tanto $B \in \liminf \mu^{-1}(t_n)$. En consecuencia

$$\mu^{-1}(t) \subset \liminf \mu^{-1}(t_n)$$

y terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.1.25 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Si $t \in I$ es tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco y $\mathcal{E}_r = \{A_r, B_r\}$ para cada $r \in I$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $r, s \in B(\delta, t)$, con $r \leq s$, se tiene que*

i) $A_r \in C(A_s) \setminus C(B_s)$ o $A_r \in C(B_s) \setminus C(A_s)$ y

ii) si $A_r \subset A_s$, entonces $B_r \subset B_s$.

Demostración:
Como consecuencia del Teorema 10.1.18 y del Lema 10.1.24 podemos tomar $\delta' > 0$ tal que $\mu^{-1}(r)$ es un arco para cada $r \in B(\delta', t)$. Haremos el resto de la prueba en cuatro pasos.

Paso 1 existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $A_r \in C(A_s) \setminus C(B_s)$ o $A_r \in C(B_s) \setminus C(A_s)$ para cada $r, s \in [t, t + \varepsilon_1]$.

Sea $\varepsilon_1 \in \big(0, \mu(A_t \cup B_t) - t\big)$, entonces es fácil ver que

$$t \leq r \leq s < \mu(A_t \cup B_t) \leq \mu(A_r \cup B_r). \tag{10.28}$$

Por el Lema 10.1.21 sabemos que $A_r \subset A_s$ o $A_r \subset B_s$. Supondremos que $A_r \subset A_s$. Si suponemos que $A_r \subset A_s \cap B_s$, entonces aplicando el Lema 10.1.21 a B_r obtenemos que $A_r \cup B_r \subset K$ para alguna $K \in \mathcal{E}_s$. Sin embargo, esta afirmación y (10.28) contradicen el hecho de que μ es de Whitney. Por tanto, $A_r \setminus B_s \neq \emptyset$. De aquí que $A_r \in C(A_s) \setminus C(B_s)$

Paso 2 existe $\delta > 0$ tal que $A_r \in C(A_s) \setminus C(B_s)$ o $A_r \in C(B_s) \setminus C(A_s)$, cada vez que $r, s \in B(\delta, t)$ y $r \leq s$.

Tomemos ε_1 como en el paso 1 y $w \in (t, t+\varepsilon_1]$ tal que $\mu(C_{A_w,B_w}) < t$. Sean $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\{\delta', t - \mu(C_{A_w,B_w}), w - t\}$ y $r, s \in B(\delta, t)$. Entonces es fácil ver que

$$\mu(C_{A_t,B_t}) \leq \mu(C_{A_w,B_w}) \leq t - \delta < r \leq s < w. \tag{10.29}$$

Basta analizar dos casos.

Caso 1 $s \leq t$

De (10.29) tenemos que $A_s \setminus C_{A_t,B_t} \neq \emptyset$. Además, de acuerdo al Lema 10.1.21 podemos suponer que $A_r \subset A_s \subset A_t$. De aquí que $A_s \in C(A_t) \setminus C(B_t)$. Por tanto, del Lema 10.1.22 obtenemos que $B_s \in C(B_t)$.

Por otro lado, de (10.29) se tiene que $A_r \setminus C_{A_t,B_t} \neq \emptyset$; de aquí que $A_r \in C(A_t) \setminus C(B_t) \subset C(A_t) \setminus C(B_s)$. Por tanto, podemos concluir que $A_r \in C(A_s) \setminus C(B_s)$.

Caso 2 $r \leq t \leq s$.

Por definición de δ es fácil ver que $s < t + \delta < w$. Así pues, por el Lema 10.1.21 y el paso 1 podemos suponer que

$$A_r \subset A_t \in C(A_s) \setminus C(B_s).$$

Como consecuencia de esto, del Lema 10.1.21 y (10.29) se tiene que

$$\emptyset \neq A_r \setminus C_{A_w,B_w} \subset A_r \setminus C_{A_s,B_s}.$$

Por tanto, $A_r \in C(A_s) \setminus C(B_s)$.

Paso 3 si $A_r \subset A_s$, entonces $B_r \subset B_s$.

Supongamos que $A_r \subset A_s \subset A_t$, con $r, s \in B(\delta, t)$. Por el Lema 10.1.21 tenemos que $B_r \subset A_s$ o $B_r \subset B_s$. Si $B_r \subset A_s$ se tiene que $A_r \cup B_r \subset A_s$.

Caso 1 $t \leq r \leq s$.

En este caso, como μ es de Whitney, llegamos a una contradicción con (10.28). En consecuencia, $B_r \subset B_s$.

Caso 2 $r \leq t \leq s$.

Por el Lema 10.1.22 podemos suponer que $A_r \subset A_t \subset A_s$ y $B_r \subset B_t$. Usando el caso 1 obtenemos que $B_r \subset B_t \subset B_s$

Caso 3 $r \leq s \leq t$.

Por el Lema 10.1.22, podemos suponer que $A_s \subset A_t$ y $B_s \subset B_t$. Entonces $A_r \subset A_t$ y, usando el mismo lema, $B_r \subset B_t$.

De aquí que $A_r \cup B_r \subset A_s \subset A_t$. Sin embargo, de (10.29) sabemos que $\emptyset \neq B_r \setminus C_{A_t,B_t} \subset B_t \setminus C_{A_t,B_t}$; en otras palabras, $B_r \setminus A_t \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $B_r \subset B_s$.

Concluimos la prueba del lema

□

Lema 10.1.26 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ es una sucesión que converge a $t \in I$, entonces $\mathcal{E}_{t_n} \to \mathcal{E}_t$.*

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{E}_t = \{A, B\}$ y que $\mathcal{E}_{t_n} = \{A_n, B_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Basta analizar cuatro casos.

Caso 1 $\mu^{-1}(t)$ es un arco y la sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente.

Por el Lema 10.1.25 podemos suponer que existe $\delta > 0$ de tal manera que si $0 \leq t - t_n < \delta$, entonces $A_n \subset A$ y $B_n \subset B$. Aplicando ahora el Lema 10.1.23 obtenemos que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. En otras palabras, $\mathcal{E}_{t_n} \to \mathcal{E}_t$.

Caso 2 $\mu^{-1}(t)$ es un arco y la sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.

Usando de nuevo el Lema 10.1.25 podemos suponer que existe $\delta > 0$ tal que si $0 \leq t_n - t < \delta$, entonces $A \subset A_n$ y $B \subset B_n$. De esta manera, del Lema 10.1.23 se sigue que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Es decir, $\mathcal{E}_{t_n} \to \mathcal{E}_t$.

Caso 3 $\mu^{-1}(t)$ es un punto y la sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente.

Por el Lema 10.1.20 sabemos que $A = B$ es terminal en p. De acuerdo a esto, como $\mu(A_n) = t_n \leq t$, necesariamente tenemos que $A_n \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si aplicamos ahora el Lema 10.1.23 obtenemos que $A_n \to A$. Similarmente, $B_n \to A = B$. En consecuencia, $\mathcal{E}_{t_n} \to \mathcal{E}$.

Caso 4 $\mu^{-1}(t)$ es un punto y la sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.

En este caso tenemos que $\mu(A_n) = t_n \geq t$. Además, del Lema 10.1.20 se sigue que $A = B$ es terminal en p. Por tanto $A \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así pues, usando el Lema 10.1.23 obtenemos que $A_n \to A$. Similarmente, $B_n \to A = B$ y podemos concluir que $\mathcal{E}_{t_n} \to \mathcal{E}$.

Terminamos la prueba del lema.

□

10.2 La caracterización

Observación 10.2.1 Sean X un continuo y $p \in X$. Notemos que si A y B son dos subcontinuos de X terminales en p, entonces A y B son comparables. Definimos el conjunto

$$\mathcal{T}_p = \{A \in C(p, X) : A \text{ es terminal en } p\}.$$

Lema 10.2.2 *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces $\mathcal{T}_p$ es cerrado en $C(p, X)$.*

Demostración.
Sean $K \in C(p, X)$, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}_p$ una sucesión que converge a K y un elemento $A \in C(p, X)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $K_n \in \mathcal{T}_p$, se tiene que $K_n \subset A$ o $A \subset K_n$. Si $K_{n_i} \subset A$ para alguna subsucesión de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces tenemos que $K \subset A$. Si, por el contrario, $A \subset K_{n_i}$ para cada i, entonces se sigue que $A \subset K$. En consecuencia, $K \in \mathcal{T}_p$ y terminamos la prueba del lema.

□

Definición 10.2.3 Sean X un continuo, $p \in X$ y $A, B \in \mathcal{T}_p$. Diremos que A y B son *consecutivos* si $A \subsetneq B$ y

$$\{K \in \mathcal{T}_p : A \subsetneq K \subsetneq B\} = \emptyset.$$

Como corolario del Lema 10.2.2 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 10.2.4 *Sean X un continuo, $p \in X$ y $K \in C(p, X) \setminus \mathcal{T}_p$. Entonces existen $A, B \in \mathcal{T}_p$ consecutivos tales que $A \subset K \subset B$.*

Lema 10.2.5 *Sean X un continuo, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p, X)$ y $f : I \to I$ una función continua y estrictamente creciente. Si una familia $\{A_{f(s)} : s \in I\}$ es tal que $A_r \in \mu^{-1}(r)$ para cada r, y $A_r \subset A_{r'}$ cada vez que $r \leq r'$, entonces la función $\alpha : I \to C(p, X)$ dada por $\alpha(s) = A_{f(s)}$ es un arco ordenado de $\alpha(0)$ a $\alpha(1)$.*

Demostración:
Como f es monótona y μ es de Whitney, podemos observar que si $s < s'$, entonces

$$\alpha(s) = A_{f(s)} \subsetneq A_{f(s')} = \alpha(s').$$

Tomemos ahora $s \in I$ y una sucesión $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subset I$ que converge a s. Si la sucesión es creciente, por hipótesis se tiene que la sucesión $\{A_{f(s_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ también lo es. De hecho

$$\lim \alpha(s_k) = \lim A_{f(s_k)} = A_{\lim f(s_k)} = A_{f(s)} = \alpha(s).$$

De manera similar, si la sucesión $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente obtenemos que $\alpha(s_k) \to \alpha(s)$. Por tanto, α es continua.

En consecuencia, α es un arco ordenado de $\alpha(0)$ a $\alpha(1)$ y terminamos la prueba del lema.

□

Proposición 10.2.6 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Sean A y B dos subcontinuos de X, terminales en p y consecutivos tales que $A \subset B$. Tomemos $t_0 \in \big(\mu(A), \mu(B)\big)$ y supongamos que $\mathcal{E}_{t_0} = \{A_{t_0}, B_{t_0}\}$. Entonces para cada $t \in (\mu(A), t_0]$ existe un arco ordenado γ_t de A_t a A_{t_0}, para alguna $A_t \in \mathcal{E}_t$ y $\gamma_t(I) \subset \mathcal{E}$. Similarmente, para cada $t \in [t_0, \mu(B)\big)$ existe un arco ordenado ζ_t de A_{t_0} a A_t para alguna $A_t \in \mathcal{E}_t$ y tal que $\zeta_t(I) \subset \mathcal{E}$. Más aún, si $\mu(A) < t \leq y < t_0$, entonces $\gamma_y(I) \subset \gamma_t(I)$, y si $t_0 < s \leq s' < \mu(B)$, entonces $\zeta_s(I) \subset \zeta_{s'}(I)$.*

Demostración:
Por hipótesis A y B son terminales en p y consecutivos, así que aplicando el Lema 10.1.20 se tiene que $\mu^{-1}(t)$ es un arco para cada $t \in \big(\mu(A), \mu(B)\big)$.

Para cada $t \in (\mu(A), \mu(B)$ supondremos que

$$\mathcal{E}_t = \{A_t, B_t\}.$$

Sea $t' \in (\mu(A), t_0)$. Para cada $t \in [t', t_0]$ consideremos un número δ_t como en el Lema 10.1.25 y un número de Lebesgue $\varepsilon > 0$ para la cubierta abierta $\{B(\delta_t, t) : t \in [t', t_0]\}$ del intervalo $[t', t_0]$ (ver Lema 6.6.7). Tomemos ahora una partición

$$\{t' = t_n < t_{n-1} < \ldots < t_1 < t_0\}$$

del intervalo $[t', t_0]$ de tal manera que $t_i - t_{i+1} < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Haremos la prueba de la proposición por inducción.

Base: $i = 1$.

Como $t_0 - t_1 < \varepsilon$, se tiene que $[t_1, t_0] \subset B(\delta_w, w)$ para alguna $w \in [t', t_0]$. Aplicando el Lema 10.1.25 podemos suponer que si $t_1 \leq r \leq r' \leq t_0$, entonces

$$A_r \in C(A_{r'}) \setminus C(B_{r'}) \quad \text{y} \quad B_r \in C(B_{r'}) \setminus C(A_{r'}).$$

Definimos una función $f_1 : I \to [t_1, t_0]$ dada por $f_1(s) = t_1 + s(t_0 - t_1)$. Es claro que f_1 es estrictamente creciente y continua. Así pues, aplicando el Lema 10.2.5 obtenemos que la función $\gamma_{t_1} : I \to C(p, X)$ dada por

$$\gamma_{t_1}(s) = A_{f_1(s)}$$

es un arco ordenado de $\gamma_{t_1}(0)$ a $\gamma_{t_1}(1)$. Es decir, γ_{t_1} es un arco ordenado de A_{t_1} a A_{t_0}. Notemos que de la construcción de γ_{t_1} se sigue que

$$\gamma_{t_1}(I) \subset \mathcal{E}. \tag{10.30}$$

Para cada $t \in (t_1, t_0)$ definimos ahora una función $\gamma_t : I \to C(p, X)$ de la siguiente manera. Como μ es continua, podemos tomar $r \in I$ tal que $\gamma_{t_1}(r) \in \mu^{-1}(t)$. Por tanto,

$$\gamma_{t_1}(r) = A_t \in \mathcal{E}_t$$

Definimos ahora $\gamma_t : I \to C(p, X)$ dada por $\gamma_t(s) = \gamma_{t_1}\big(r + s(1-r)\big)$. Notemos que γ_t está bien definida y es continua.

Por otra parte, si $s < s'$ entonces

$$\gamma_t(s) = \gamma_{t_1}\big(r + s(1-r)\big) \subsetneq \gamma_{t_1}\big(r + s'(1-r)\big) = \gamma_t(s').$$

Finalmente,

$$\gamma_t(0) = \gamma_{t_1}(r) = A_t \quad \text{y} \quad \gamma_t(1) = \gamma_{t_1}(1) = A_{t_0}$$

Por tanto, γ_t es un arco ordenado de A_t a A_{t_0} y, además, satisface la condición $\gamma_t(I) \subset \gamma_{t_1}(I) \subset \mathcal{E}$. De acuerdo a lo anterior es fácil ver que si $t_1 \leq t \leq\ y < t_0$, entonces

$$\gamma_y(I) \ \subset\ \gamma_t(I) \ \subset\ \gamma_{t_1}(I) \ \subset\ \mathcal{E}.$$

Paso inductivo.

Sea $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ y supongamos que para cada $t \in [t_{i-1}, t_0)$ existe un arco ordenado γ_t de A_t a A_{t_0}, con $\gamma_t(I) \subset \mathcal{E}$. Supongamos además que si $t_{i-1} \leq t \leq y < t_0$, entonces $\gamma_y(I) \subset \gamma_t(I)$.

Como $t_{i-1} - t_i < \varepsilon$, se tiene que $[t_i, t_{i-1}] \subset B(\delta_w, w)$ para alguna $w \in [t', t_0]$. Aplicando el Lema 10.1.25 podemos suponer que, si $t_i \leq r \leq r' \leq t_{i-1}$, entonces

$$A_r \ \in\ C(A_{r'}) \setminus C(B_{r'}) \quad y \quad B_r \ \in\ C(B_{r'}) \setminus C(A_{r'}). \tag{10.31}$$

Definimos ahora una función $f_i : I \to [t_i, t_{i-1}]$ dada por

$$f_i(s) \ =\ t_i + s(t_{i-1} - t_i).$$

Claramente, f_i es continua y estrictamente creciente. Así pues, de (10.31) y el Lema 10.2.5 se tiene que la función $\alpha_{t_i} : I \to C(p, X)$ dada por

$$\alpha_{t_i}(s) \ =\ A_{f_i(s)} \ =\ A_{t_i + s(t_{i-1} - t_i)} \tag{10.32}$$

es un arco ordenado de $\alpha_{t_i}(0)$ a $\alpha_{t_i}(1)$. Es decir, α_{t_i} es un arco ordenado de A_{t_i} a $A_{t_{i-1}}$. Notemos que de la construcción de α_{t_i} se tiene que

$$\alpha_{t_i}(I) \ \subset\ \mathcal{E}.$$

Ahora bien, para cada $t \in (t_i, t_{i-1})$ definimos una función $\alpha_t : I \to C(p, X)$ como sigue. Dado que μ es continua, podemos tomar $r \in I$ de tal manera que $\alpha_{t_i}(r) \in \mu^{-1}(t)$. De aquí y de (10.32) se tiene que

$$\alpha_{t_i}(r) \ =\ A_t \ \in\ \mathcal{E}_t.$$

Definimos ahora $\alpha_t : I \to C(p, X)$ como

$$\alpha_t(s) \ =\ \alpha_{t_i}\big(r + s(1 - r)\big).$$

Podemos observar que α_t está bien definida y es continua

Por otra parte, si $s < s'$ entonces

$$\alpha_t(s) = \alpha_{t_i}\big(r + s(1-r)\big) \subsetneq \alpha_{t_i}\big(r + s'(1-r)\big) = \alpha_t(s').$$

Además,

$$\alpha_t(0) = \alpha_{t_i}(r) = A_t \quad \text{y} \quad \alpha_t(1) = \alpha_{t_i}(1) = A_{t_{i-1}}. \tag{10.33}$$

Por tanto, α_t es un arco ordenado de A_t a $A_{t_{i-1}}$ y, además, es fácil ver que si $t_i \leq t \leq y \leq t_{i-1}$, entonces

$$\alpha_y(I) \subset \alpha_t(I) \subset \alpha_{t_i}(I) \subset \mathcal{E}. \tag{10.34}$$

Ahora bien, para cada $t \in (t_i, t_{i-1})$ definimos una función $\gamma_t : I \to C(p, X)$ como

$$\gamma_t(s) = \begin{cases} \alpha_t(2s), & \text{si} \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_{t_{i-1}}(2s-1), & \text{si} \quad s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{10.35}$$

Por hipótesis de inducción y (10.33) se tiene que

$$\alpha_t\big(2(\tfrac{1}{2})\big) = A_{t_{i-1}} = \gamma_{t_{i-1}}(0) = \gamma_{t_{i-1}}\big(2(\tfrac{1}{2}) - 1\big).$$

De esta manera, es fácil ver que γ_t está bien definida.

Por otra parte, como α_t es un arco ordenado de A_t a $A_{t_{i-1}}$, y $\gamma_{t_{i-1}}$ es un arco ordenado de $A_{t_{i-1}}$ a A_{t_0}, obtenemos que γ_t es un arco ordenado de A_t a A_{t_0}.

Probaremos por último que si $t_i \leq t \leq y < t_0$, entonces $\gamma_y(I) \subset \gamma_t(I) \subset \mathcal{E}$. Veamos tres casos.

Caso 1 $t_{i-1} \leq t \leq y$.

Por hipótesis de inducción, en este caso automáticamente tenemos que $\gamma_y(I) \subset \gamma_t(I) \subset \gamma_{t_{i-1}}(I) \subset \mathcal{E}$.

Caso 2 $t < t_{i-1} \leq y$.

De la hipótesis de inducción, de (10.35) y de (10.34) se sigue que

$$\gamma_y(I) \subset \gamma_{t_{i-1}}(I) \subset \gamma_t(I) = \alpha_t(I) \cup \gamma_{t_{i-1}}(I) \subset \mathcal{E}.$$

Caso 3 $t \leq y \leq t_{i-1}$.

De (10.35) y (10.34) y de la hipótesis de inducción se desprende que

$$\gamma_y(I) = \alpha_y(I) \cup \gamma_{t_{i-1}}(I) \subset \alpha_t(I) \cup \gamma_{t_{i-1}}(I) = \gamma_t(I) \subset \mathcal{E}.$$

De esta manera terminamos el paso inductivo y obtenemos que, para cada $t' \in (\mu(A), t_0)$, existe un arco ordenado $\gamma_{t'}$ de $A_{t'}$ a A_{t_0}, tal que: $A_{t'} \in \mathcal{E}_{t'}$, $\gamma_{t'}(I) \subset \mathcal{E}$ y si $\mu(A) < t \leq y < t_0$, entonces $\gamma_y(I) \subset \gamma_t(I)$.

De manera similar puede probarse que para cada $t \in (t_0, \mu(B))$ existe un arco ordenado ζ_t de A_{t_0} a A_t para alguna $A_t \in \mathcal{E}_t$ con las siguientes propiedades: $\zeta_t(I) \subset \mathcal{E}$ y si $t_0 < s \leq s' < \mu(B)$, entonces $\zeta_s(I) \subset \zeta_{s'}(I)$

Terminamos la prueba de la proposición.

□

Lema 10.2.7 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Sean A y B son dos subcontinuos de X, terminales en p y consecutivos tales que $A \subset B$. Entonces existe un arco ordenado α, de A a B, tal que $\alpha(I) \subset \mathcal{E}$.*

Demostración:
Sea $t_0 \in \big(\mu(A), \mu(B)\big)$ y supongamos que $\mathcal{E}_t = \big\{A_t, B_t\big\}$ cada vez que $t \in [\mu(A), t_0]$. De acuerdo al Lema 10.2.6, para cada $t \in (\mu(A), t_0)$ podemos tomar un arco ordenado γ_t de A_t a A_{t_0}, con $A_t \in \mathcal{E}_t$ y tal que si $\mu(A) < t \leq y < t_0$, entonces $\gamma_y(I) \subset \gamma_t(I) \subset \mathcal{E}$. En particular, $A_y \in \gamma_t(I)$. En otras palabras,

$$A_t \subset A_y.$$

Ahora bien, como A es terminal en p y μ es de Whitney, es claro que $A \subset A_t$ cada vez que $t \in (\mu(A), t_0]$. Por otra parte, definimos una función $f : I \to I$ dada por

$$f(r) = \mu(A) + r\big(t_0 - \mu(A)\big).$$

Es claro que f es continua y estrictamente creciente, y que

$$f(0) = \mu(A) \qquad \text{y} \qquad f(1) = t_0.$$

Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Lema 10.2.5, para obtener que la función $\alpha' : I \to C(p, X)$ dada por $\alpha'(r) = A_{f(r)}$ es un arco ordenado de $\alpha'(0)$ a $\alpha'(1)$. Es decir, α' es un arco ordenado de $A_{\mu(A)} = A$ a A_{t_0}. Más aún, por construcción obtenemos que $\alpha'(I) \subset \mathcal{E}$.

De manera similar podemos construir un arco ordenado β de A_{t_0} a B de manera que $\beta(I) \subset \mathcal{E}$. Como consecuencia de esto, es fácil ver que la "unión" de α' y β es un arco ordenado de A a B cuya imagen está contenida en $\mathcal{E}$.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.2.8 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in I$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco. Supongamos que $\mathcal{E}_t = \{A,B\}$ y que $A \cap B$ tiene dos componentes $C_{A,B}$ y C'. Si α y β son arcos ordenados de $C_{A,B}$ a A y a B, respectivamente, y $K \in \mu^{-1}(t)$ es tal que $K = \alpha(s) \cup \beta(r)$ para algunas $r, s \in I$, entonces $\alpha(s) \cap \beta(r) = C_{A,B}$*

Demostración:
Claramente $C_{A,B} \subset \alpha(s) \cap \beta(r)$. Si suponemos que $\alpha(s) \cap \beta(r) \cap C' \neq \emptyset$, entonces usando el Lema 10.1.7 (*iv*) se tiene que

$$A \setminus B \subset \alpha(s) \quad \text{y} \quad B \setminus A \subset \beta(r).$$

De esta manera, estamos en condiciones de aplicar el Lema 10.1.6 para obtener que $C' \subset K$. Sin embargo, esto nos lleva a que

$$A \cup B = C_{A,B} \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup C' \subset K,$$

lo cual contradice que μ es de Whitney. Por tanto, $\alpha(s) \cap \beta(r) \cap C' = \emptyset$.
Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.2.9 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in I$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco. Supongamos que $\mathcal{E}_t = \{A,B\}$, con $A \cap B$ no conexo y que α es un arco ordenado de $C_{A,B}$ a A. Si $K \in \mu^{-1}(t) \setminus \{A,B\}$ y $Z \in \eta_{K,B}(I) \setminus \{K\}$, entonces existen $W \in \eta_{K,Z}(I) \setminus \{K\}$ y $s \in [0,1)$ tales que $\alpha(s) \cap W \in C(p,X)$ y $\alpha(s) \setminus K \neq \emptyset$.*

Demostración:
Empecemos notando que $C_{A,B} \subset K \cap Z$ (Lema 10.1.9). Sea β un arco ordenado de $C_{A,B}$ a B. Gracias al Lema 10.1.11 existen $x, x', y, y' \in I$ tales que

$$K = \alpha(x') \cup \beta(x) \quad \text{y} \quad Z = \alpha(y') \cup \beta(y).$$

Como $Z \in \eta_{K,B}(I)$ y $\mu^{-1}(t) = \eta_{A,B}(I)$, no es difícil ver que $K \in \eta_{A,Z}(I)$. Usando el Lema 10.1.4 obtenemos que $\alpha(y') = C_{A,Z} \subset K$. En particular,

$$\alpha(y') \subset \alpha(x'). \tag{10.36}$$

Si suponemos que $\beta(y) \subset \beta(x)$, entonces tendríamos que $Z \subset K$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\beta(x) \subsetneq \beta(y)$. De aquí que

$$x < y. \tag{10.37}$$

Por otra parte, el Lema 6.1.3 nos dice que $A \cap B$ tiene dos componentes $C_{A,B}$ y C'.

Ahora bien, por el Lema 10.2.8 sabemos que $\alpha(x') \cap \beta(x) \cap C' = \emptyset$. Así pues, como β es continua, gracias a (10.37) podemos elegir $r \in (x, y)$ tal que

$$\big(\alpha(x') \cap \beta(r)\big) \cap C' = \emptyset.$$

Similarmente, tomemos $s \in (x', 1)$ tal que

$$\alpha(s) \cap \beta(x) \cap C' \subset \alpha(s) \cap \beta(r) \cap C' = \emptyset. \tag{10.38}$$

Consideremos también $s_r \in I$ tal que $\alpha(s_r) \cup \beta(r) \in \mu^{-1}(t)$ (Lema 10.1.4) y $W = \alpha(s_r) \cup \beta(r)$. Por definicion de r tenemos que $\beta(x) \subsetneq \beta(r) \subsetneq \beta(y)$. De acuerdo a esto, es fácil ver que

$$\alpha(y') \subsetneq \alpha(s_r) \subsetneq \alpha(x') \subsetneq \alpha(s). \tag{10.39}$$

En particular, $W \neq K$. Veremos que W y s satisfacen las condiciones requeridas.

De (10.38) se desprende que

$$\begin{aligned} \alpha(s) \setminus K &= \alpha(s) \setminus \big(\alpha(x') \cup \beta(x)\big) = \big(\alpha(s) \setminus \alpha(x')\big) \cap \big(\alpha(s) \setminus \beta(x)\big) \\ &= \big(\alpha(s) \setminus \alpha(x')\big) \cap \big(\alpha(s) \setminus C_{A,B}\big) = \alpha(s) \setminus \alpha(x') \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Por otro lado, gracias a (10.39) y (10.38) se tiene que

$$\alpha(s) \cap W = \alpha(s) \cap \big(\alpha(s_r) \cup \beta(r)\big) = \alpha(s_r) \cup C_{A,B} = \alpha(s_r) \in C(p, X).$$

Finalmente, usando (10.39) no es difícil ver que

$$C_{K,Z} = \alpha(y') \cup \beta(x) \subset \alpha(s_r) \cup \beta(r) = W.$$

Así pues, del Lema 10.1.14 concluimos que $W \in \eta_{K,Z}(I)$.

Concluimos la prueba del lema.

□

Lema 10.2.10 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p,X)$ y $t \in I$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco. Supongamos que $\mathcal{E}_t = \{A, B\}$, donde $A \cap B$ no es conexo, y sean $L, W \in \mu^{-1}(t)$ tales que $L \neq W$ y $L \cap W \in C(X)$. Si $\{t_i\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ es una sucesión que converge a t y para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos elementos $L_i, W_i \in \mu^{-1}(t_i)$ tales que $W_i \to W$ y $L_i \to L$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L_i \cap W_i \in C(X)$ cada vez que $i > N$.*

Demostración:
Por el Teorema 6.1.11 sabemos que $A \cup B$ es terminal, así que si $t_i < \mu(A \cup B)$, entonces existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $L_i, W_i \subset A \cup B$ cada vez que $i > N'$. Por otra parte, gracias al Lema 6.1.3 tenemos que $A \cap B$ tiene dos componentes $C_{A,B}$ y C'.

Sean α y β dos arcos ordenados, de $C_{A,B}$ a A y a B, respectivamente. Entonces, el Lema 10.1.11 nos dice que existen $x, x', y, y' \in I$ tales que

$$L = \alpha(x') \cup \beta(x) \quad \text{y} \quad W = \alpha(y') \cup \beta(y).$$

Supondremos que $x < y$. Entonces no es difícil ver que

$$\beta(x) \subsetneq \beta(y) \quad \text{y} \quad \alpha(y') \subsetneq \alpha(x'). \tag{10.40}$$

Además, como $L \cap W$ es conexo, se desprende que

$$\alpha(x') \cap \beta(y) \cap C' = \emptyset = \alpha(y') \cap \beta(x) \cap C'. \tag{10.41}$$

Analizaremos dos casos.

Caso 1 $\{L, W\} \cap \{A, B\} = \emptyset$. En este caso tenemos que

$$L \cap (B \setminus A) \neq \emptyset \neq L \cap (A \setminus B).$$

Entonces existe $M > N'$ tal que

$$L_i \cap (B \setminus A) \neq \emptyset \neq L_i \cap (A \setminus B)$$

para cada $i > M$.

Sea $i > M$. Como consecuencia del Lema 10.1.6 se tiene que $C_{A,B} \subset L_i$; usando la Observación 10.1.10 obtenemos que $L_i = \alpha(r_i') \cup \beta(r_i)$ para algunas $r_i, r_i' \in I$. De manera similar, existen $s_i, s_i' \in I$ tales que

$W_i = \alpha(s_i') \cup \beta(s_i)$. De esta manera, dado que $W_i \to W$ y $L_i \to L$, necesariamente tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha(s_i') &\to \alpha(y') & \beta(s_i) &\to \beta(y) \\ \alpha(r_i') &\to \alpha(x') \quad \text{y} & \beta(r_i) &\to \beta(x) \end{aligned} \tag{10.42}$$

Una vez establecido lo anterior, usando (10.40) y (10.41) no es difícil ver que existe $N > M$ tal que

$$\alpha(r_i') \cap \beta(s_i) \cap C' \;=\; \emptyset \;=\; \alpha(s_i') \cap \beta(r_i) \cap C'$$

cada vez que $i > N$. Además, podemos suponer que

$$\beta(r_i) \subset \beta(s_i) \quad \text{y} \quad \alpha(s_i') \subset \alpha(r_i').$$

De aquí que

$$\alpha(r_i') \cap \beta(s_i) \;=\; C_{A,B} \;=\; \alpha(s_i') \cap \beta(r_i).$$

Entonces

$$\begin{aligned} L_i \cap W_i &= \big(\alpha(r_i') \cup \beta(r_i)\big) \cap \big(\alpha(s_i') \cup \beta(s_i)\big) \\ &= \big[\alpha(r_i') \cap \big(\alpha(s_i') \cup \beta(s_i)\big)\big] \cup \big[\beta(r_i) \cap \big(\alpha(s_i') \cup \beta(s_i)\big)\big] \\ &= \alpha(s_i') \cup \big(\alpha(r_i') \cap \beta(s_i)\big) \cup \big(\beta(r_i) \cap \alpha(s_i')\big) \cup \beta(r_i) \\ &= \alpha(s_i') \cup \beta(r_i) \;\in\; C(X). \end{aligned}$$

Caso 2 $A \in \{L, W\}$ o $B \in \{L, W\}$.

Supongamos que $L = A$. Como $L \cap W \in C(X)$ y $L \neq W$, claramente tenemos que $A \neq W \neq B$. En otras palabras,

$$W \cap (A \setminus B) \;\neq\; \emptyset \quad \text{y} \quad W \cap (B \setminus A) \;\neq\; \emptyset.$$

Entonces podemos tomar $M > N'$ tal que

$$W_i \cap (B \setminus A) \;\neq\; \emptyset \;\neq\; W_i \cap (A \setminus B) \tag{10.43}$$

para cada $i > M$. Como consecuencia de (10.43) y del Lema 10.1.6 se tiene que $C_{A,B} \subset W_i$; usando una vez más la Observación 10.1.10

obtenemos que $W_i = \alpha(s_i') \cup \beta(s_i)$ para algunas $s_i, s_i' \in I$. Por otra parte, como $W \cap A \in C(p, X)$, existe $N \in \mathbb{N}$, $N > M$, tal que

$$\beta(s_i) \cap A \cap C' = \emptyset \tag{10.44}$$

cada vez que $i > N$.

Si suponemos que

$$L_{i_k} \cap (B \setminus A) \ \neq \ \emptyset \ \neq \ L_{i_k} \cap (A \setminus B)$$

para alguna subsucesión $\{L_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces usando un argumento similar al del caso anterior podemos concluir el resultado deseado para dicha subsucesión. Así pues, podemos suponer que $L_i \subset A$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Finalmente,

$$W_i \cap L_i \ = \ \big(\alpha(s_i') \cup \beta(s_i)\big) \cap L_i \ = \ \big(\alpha(s_i') \cap L_i\big) \cup \big(\beta(s_i) \cap L_i\big).$$

Sin embargo, usando (10.44) se tiene que $\beta(s_i) \cap L_i \subset C_{A,B} \subset \alpha(s_i')$, así que

$$W_i \cap L_i \ = \ \alpha(s_i) \cap L_i$$

cada vez que $i > N$. Por tanto, $W_i \cap L_i \in C(p, X)$ para cada $i > N$.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.2.11 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p, X)$. Consideremos $t \in I$, $\mathcal{E}_t = \{A, B\}$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ que converge a t. Si $A_n \in \mathcal{E}_{t_n}$ y $K_n \in \mu^{-1}(t_n)$ son tales que $A_n \to A$, $K_n \to K$ y $A \cap B \in C(p, X)$, entonces* $\limsup \eta_{A_n,K_n}(I) \subset \eta_{A,K}(I)$.

Demostración:
Sea $W \in \limsup \eta_{A_n,K_n}(I)$, entonces podemos considerar una subsucesión $\{t_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $W_i \in \eta_{A_{n_i},K_{n_i}}$ tales que $W_i \to W$. El Lema 10.1.9 nos dice que $W_i \subset A_{n_i} \cup K_{n_i}$, de modo que, del Lema 3.2.5, deducimos que $W \subset A \cup K$. Veremos que $C_{A,K} \subset W$.

Podemos suponer que $A \neq W \neq K$ y, en este caso, tenemos que

$$W \setminus A \neq \emptyset \neq W \setminus K.$$

Por otra parte, en virtud del Lema 10.1.13 se tiene que $W \cap A = C_{A,W}$ y $W \cap K = C_{W,K}$. Así pues, aplicando el Lema 10.1.6 obtenemos que $C_{A,K} \subset W$. Finalmente, del Lema 10.1.14 se desprende que $W \in \eta_{A,K}(I)$. Por tanto, $\limsup \eta_{A_n,K_n}(I) \subset \eta_{A,K}(I)$.

Terminamos la prueba del lema.

□

Lema 10.2.12 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(p,X)$. Consideremos $t \in I$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ que converge a t. Si $A_n \in \mathcal{E}_{t_n}$ y $K_n \in \mu^{-1}(t_n)$ son tales que $A_n \to A$ y $K_n \to K$, entonces se tiene que $\eta_{A_n,K_n}(I) \to \eta_{A,K}(I)$.*

Demostración:
Por el Teorema 10.1.18 sabemos que $\mu^{-1}(t)$ es un arco o un punto para cada $t \in I$, y por el Lema 10.1.26 se tiene que $\mathcal{E}_t = \{A, B\}$ para alguna $B \in \mu^{-1}(t)$. Supongamos que $\eta_{A_n,K_n}(I)$ no converge a $\eta_{A,K}(I)$, entonces existe una subsucesión $\eta_{A_{n_i},K_{n_i}}(I)$ que converge a $\mathcal{J}$ para alguna $\mathcal{J} \in C(C(X)) \setminus \{\eta_{A,K}(I)\}$. Como μ es continua obtenemos que $\mathcal{J} \subset \mu^{-1}(t)$. Notemos además que $A, K \in \mathcal{J}$ y que $\mathcal{J}$ es conexo, así que $\eta_{A,K}(I) \subsetneq \mathcal{J}$.

Haremos el resto de la prueba analizando dos casos.

Caso 1 $K \in \{A, B\}$ o $A \cap B \in C(p,X)$.

Si $K = B$, entonces $\mu^{-1}(t) = \eta_{A,K}(I) \subsetneq \mathcal{J}$, lo cual es una contradicción. Si $A \cap B \in C(p,X)$, entonces del Lema 10.2.11 deducimos que $\mathcal{J} \subset \eta_{A,K}(I)$, y llegamos a una contradicción. Supongamos ahora que $A = K$ y tomemos $W \in \mathcal{J}$. Entonces existen una subsucesión $\{t_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $W_i \in \eta_{A_{n_i},K_{n_i}}$ tales que $W_i \to W$. El Lema 10.1.9 nos dice que $W_i \subset A_{n_i} \cup K_{n_i}$, de modo que, del Lema 3.2.5, deducimos que $W \subset A$. Por tanto, dado que μ es de Whitney, obtenemos que $W = A$. Como esto es una contradicción, podemos concluir que este caso es imposible.

Caso 2 $A \cap B$ no es conexo y $A \neq K \neq B$.

Sea $Z \in \mathcal{J} \setminus \eta_{A,K}(I)$. Como A es un punto extremo del nivel $\mu^{-1}(t)$ obtenemos que $Z \in \eta_{K,B}(I)$.

Consideremos dos arcos ordenados, α y β, de $C_{A,B}$ a A y a B respectivamente. Gracias al Lema 10.2.9 podemos tomar $W \in \eta_{K,Z}(I)\setminus\{K\} \subset \mathcal{J}$ y $s \in [0,1)$ tales que

$$\alpha(s) \cap W \ \in \ C(p, X) \quad \text{y} \quad \alpha(s) \setminus K \neq \emptyset.$$

Como $s < 1$, podemos notar que $A \setminus \alpha(s) \neq \emptyset$.

Por otro lado, es fácil ver que $K \in \eta_{A,W}(I)$, así que usando el Lema 10.1.9 se tiene que

$$C_{A,W} \ \subset \ K. \tag{10.45}$$

Además, como $W \in \lim \eta_{A_{n_i},K_{n_i}}(I)$, podemos tomar $W_i \in \eta_{A_{n_i},K_{n_i}}(I)$ tal que $W_i \to W$.

Elegimos $r \in I$ tal que $\alpha(s) \cup \beta(r) \in \mu^{-1}(t)$ (Lema 10.1.4) y definimos

$$L \ = \ \alpha(s) \cup \beta(r) \ \in \ \mu^{-1}(t).$$

Como $\alpha(s) \setminus K \neq \emptyset$, es fácil ver que $L \in \eta_{A,K}(I)$. De acuerdo a esto, $K \in \eta_{L,W}(I)$, sin embargo $L \neq K \neq W$. De aquí no es difícil ver que

$$K \ \subset \ L \cup W, \quad L \setminus (K \cup W) \ \neq \ \emptyset \quad \text{y} \quad W \setminus (K \cup L) \ \neq \ \emptyset \tag{10.46}$$

Denotaremos a K_{n_i} simplemente como K_i y haremos el resto de la prueba en una serie de pasos.

Paso 1 $K_i \subset L \cup W$, para i suficientemente grande.

Supongamos que existe una subsucesión $\{K_{i_m}\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que $K_{i_m} \setminus (L \cup W) \neq \emptyset$. Como consecuencia del Teorema 6.1.8, X no contiene triodos débiles. Así pues, podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que $L \subset K_{i_m} \cup W$ o $W \subset K_{i_m} \cup L$. En el primer caso obtenemos que $L \subset K \cup W$ y, en el segundo, que $W \subset K \cup L$. De esta manera, en ambos casos llegamos a una contradicción con (10.46). Por tanto, podemos concluir que $K_i \subset L \cup W$, para i suficientemente grande.

Paso 2 Para $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe $r_i \in I$ tal que $\alpha(s) \cup \beta(r_i) \in \mu^{-1}(t_{n_i})$. Definimos $L_i = \alpha(s) \cup \beta(r_i)$.

Dado que $A \setminus \alpha(s) \neq \emptyset$, se tiene que $\mu(\alpha(s)) < t_{n_i}$ para i suficientemente grande, así que podemos considerar $r_i \in I$ de tal manera que $\alpha(s) \cup \beta(r_i) \in \mu^{-1}(t_{n_i})$.

Paso 3 $K_i \subset L_i \cup W_i$, para i suficientemente grande.

Por (10.46) sabemos que $L \setminus (K \cup W) \neq \emptyset$. De esta manera, para i suficientemente grande se tiene que $L_i \setminus (K_i \cup W_i) \neq \emptyset$. De manera similar, $W_i \setminus (K_i \cup L_i) \neq \emptyset$. Así pues, en virtud del Teorema 6.1.8, obtenemos que $K_i \subset L_i \cup W_i$, si i es suficientemente grande.

Paso 4 $K_i = W_i$.

No es difícil ver que $L \cap W = (\alpha(s) \cap W) \cup \beta(r) \in C(X)$. Como consecuencia de esto y del Lema 10.2.10, para i suficientemente grande podemos suponer que $L_i \cap W_i \in C(X)$, así que podemos tomar dos arcos ordenados, α_i y β_i, de $L_i \cap W_i$ a L_i y W_i, respectivamente. En el Lema 10.1.13 vimos que, en este caso, $L_i \cap K_i$ y $K_i \cap W_i$ son conexos. De acuerdo a la Observación 10.1.10 tenemos que α_i y β_i son únicos y que

$$L_i \cap K_i = C_{L_i,K_i} = \alpha_i(z) \quad \text{y} \quad W_i \cap K_i = C_{W_i,K_i} = \beta_i(x),$$

para algunas $z, x \in I$. De aquí y el paso anterior se sigue que

$$K_i = \alpha_i(z) \cup \beta_i(x) \in \eta_{L_i,W_i}(I)$$

Sin embargo, de acuerdo a la elección de W_i es fácil ver que $\eta_{A_{n_i},L_i}(I) \subset \eta_{A_{n_i},W_i}(I) \subset \eta_{A_{n_i},K_i}(I)$ para i suficientemente grande. De aquí se desprende que $K_i = W_i$.

Como consecuencia del paso 4 se tiene que $K = W$. Esta contradicción vino de suponer que $\eta_{A_n,K_n}(I)$ no converge a $\eta_{A,K}(I)$, así que podemos concluir la prueba del lema.

□

Teorema 10.2.13 *Sean X un continuo atriódico, $p \in X$, μ una función de Whitney para $C(p, X)$ y ν una función de Whitney para $C(C(X))$. Supongamos que A y B son dos subcontinuos de X, terminales en p, consecutivos* *y que $A \subset B$. Entonces existe un homeomorfismo*

$$h : \mu^{-1}\big[\mu(A), \mu(B)\big] \to \big\{(t,r) \in [\mu(A), \mu(B)] \times I \ : \ 0 \leq r \leq \nu(\mu^{-1}(t))\big\},$$

tal que $h(A) = \big(\mu(A), 0\big)$ y $h(B) = \big(\mu(B), 0\big)$.

Demostración:
Consideremos un arco ordenado α como en el Lema 10.2.7. Entonces para cada $t \in \big[\mu(A), \mu(B)\big]$ podemos tomar $s_t \in I$ tal que $\alpha(s_t) \in \mu^{-1}(t)$. Definimos

$$\alpha_t \ = \ \alpha(s_t).$$

De hecho, el Lema 10.2.7 nos dice que

$$\alpha_t \ \in \ \mathcal{E}_t. \tag{10.47}$$

Definimos ahora una función $h : \mu^{-1}\big[\mu(A), \mu(B)\big] \to \big[\mu(A), \mu(B)\big] \times I$ dada por

$$h(K) \ = \ \Big(\mu(K), \nu\big(\eta_{\alpha_{\mu(K)},K}(I)\big)\Big)$$

Haremos el resto de la prueba en una serie de pasos.

Paso 1 h está bien definida y es continua.

Claramente h está bien definida.

Tomemos ahora una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mu^{-1}\big[\mu(A), \mu(B)\big]$ que converja a K. Como μ es continua se tiene que $\mu(K_n) \to \mu(K)$. Además, como α también es continua es fácil ver que

$$\alpha_{\mu(K_n)} \ \to \ \alpha_{\mu(K)}.$$

Si aplicamos ahora el Lema 10.2.12 se sigue que

$$\eta_{\alpha_{\mu(K_n)},K_n}(I) \to \eta_{\alpha_{\mu(K)},K}(I).$$

Finalmente, dado que ν es continua obtenemos que

$$h(K_n) \ = \ \Big(\mu(K_n), \nu\big(\eta_{\alpha_{\mu(K_n)},K_n}(I)\big)\Big) \ \to \ \Big(\mu(K), \nu\big(\eta_{\alpha_{\mu(K)},K}(I)\big)\Big) \ = \ h(K).$$

Por tanto, h es una función continua.

Paso 2 h es inyectiva.

Sean $K, K' \in \mu^{-1}\big[\mu(A), \mu(B)\big]$ tales que $h(K) = h(K')$. Entonces claramente

$$\mu(K) = \mu(K') \quad \text{y} \quad \nu\big(\eta_{\alpha_{\mu(K)},K}(I)\big) = \nu\big(\eta_{\alpha_{\mu(K')},K'}(I)\big) \qquad (10.48)$$

En particular, $\alpha_{\mu(K)} = \alpha_{\mu(K')}$. Así pues, tenemos que los arcos $\eta_{\alpha_{\mu(K)},K}(I)$ y $\eta_{\alpha_{\mu(K')},K'}(I)$ tienen el punto extremo $\alpha_{\mu(K)}$ en común, el cual, por (10.47), también es un punto extremo de $\mu^{-1}\big(\mu(K)\big)$. Como consecuencia de esto obtenemos que los arcos $\eta_{\alpha_{\mu(K)},K}(I)$ y $\eta_{\alpha_{\mu(K')},K'}(I)$ son comparables. Sin embargo, de acuerdo a esto, a (10.48) y al hecho de que ν es de Whitney deducimos que

$$\eta_{\alpha_{\mu(K)},K}(I)) = \eta_{\alpha_{\mu(K')},K'}(I).$$

De aquí que $K = K'$ y podemos concluir que h es inyectiva.

Paso 3 $h(A) = \big(\mu(A), 0\big)$ y $h(B) = \big(\mu(B), 0\big)$.

Como A es terminal en p, por el Lema 10.1.20 tenemos que $A = \alpha_{\mu(A)}$, así que

$$h(A) = \Big(\mu(A), \nu\big(\eta_{\alpha_{\mu(A)},A}(I)\big)\Big) = \Big(\mu(A), \nu\big(\{A\}\big)\Big) = \big(\mu(A), 0\big).$$

Similarmente, $B = \alpha_{\mu(B)}$. De aquí que

$$h(B) = \Big(\mu(B), \nu\big(\eta_{\alpha_{\mu(B)},B}(I)\big)\Big) = \Big(\mu(B), \nu\big(\{B\}\big)\Big) = \big(\mu(B), 0\big).$$

Paso 4 $im(h) = \big\{(t, r) \in [\mu(A), \mu(B)] \times I \ : \ 0 \leq r \leq \nu(\mu^{-1}(t))\big\}$.

Notemos que si $t \in \big[\mu(A), \mu(B)\big]$ y $\mathcal{E}_t = \{\alpha_t, \beta_t\}$, entonces

$$\begin{aligned} h(\beta_t) &= \Big(t, \nu\big(\eta_{\alpha_t,\beta_t}(I)\big)\Big) = \Big(t, \nu\big(\mu^{-1}(t)\big)\Big) \quad \text{y} \\ h(\alpha_t) &= \Big(t, \nu\big(\eta_{\alpha_t,\alpha_t}(I)\big)\Big) = \Big(t, \nu\big(\{\alpha_t\}\big)\Big) = (t, 0). \end{aligned}$$

De esta manera, usando la conexidad del nivel $\mu^{-1}(t)$ (Lema 5.2.3) y la continuidad de h es fácil ver que

$$h\big(\mu^{-1}(t)\big) = \{t\} \times \Big[0, \nu\big(\mu^{-1}(t)\big)\Big].$$

Por tanto, la imagen de h se puede ver como el conjunto

$$\big\{(t, r) \in [\mu(A), \mu(B)] \times I \ : \ 0 \leq r \leq \nu(\mu^{-1}(t))\big\}.$$

Como el dominio de h es compacto, de acuerdo a los pasos 1 y 2 tenemos que h es un homeomorfismo en su imagen. Terminamos así la prueba del Teorema.

$\square$

Teorema 10.2.14 *Sean X un continuo atriódico y $p \in X$. Entonces existe una función continua $g : I \to I$ tal que*

$$C(p, X) \approx \{(t, r) \in I \times I \ : \ 0 \leq r \leq g(t)\}$$

Demostración:
Sean μ y ν funciones de Whitney para $C(p, X)$ y $C(C(X))$, respectivamente.

Si A y B son terminales en p y consecutivos, con $A \subset B$, gracias al Teorema 10.2.13 existe un homeomorfismo

$$h_A : \mu^{-1}[\mu(A), \mu(B)] \to \{(t, r) \in [\mu(A), \mu(B)] \times I \ : \ 0 \leq r \leq \nu(\mu^{-1}(t))\},$$

tal que

$$h_A(A) = (\mu(A), 0) \quad \text{y} \quad h_A(B) = (\mu(B), 0). \tag{10.49}$$

Consideremos la función $g : I \to I$ dada por

$$g(t) = \nu(\mu^{-1}(t)).$$

Como consecuencia del Lema 10.1.24 y la continuidad de ν, se tiene que g es una función continua.

Definimos también $h : C(p, X) \to \{(t, r) \in I \times I \ : \ 0 \leq r \leq g(t)\}$ como

$$h(K) = \begin{cases} (\mu(K), 0), & \text{si} \quad K \text{ es terminal en } p \\ h_A(K), & \text{si} \quad \mu(K) \in [\mu(A), \mu(B)], \end{cases}$$

donde A y B son terminales en p y consecutivos. Haremos el resto de la prueba en una serie de pasos.

Paso 1 h está bien definida y es continua.

Del Lema 10.1.20, el Corolario 10.2.4 y de (10.49), es fácil ver que h está bien definida.

Por otra parte, si A y B son terminales en p y consecutivos, entonces $h|_{\mu^{-1}[\mu(A),\mu(B)]} = h_A$ es una función continua. Por tanto, para probar que h es continua basta tomar una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(p,X)$ que converja a K, para alguna K terminal en p, y ver que $h(K_n) \to h(K)$.

Supongamos que $\mu(K_n) = t_n$ y $\mu(K) = t$, para algunas $t, t_n \in I$. Así pues, si K es terminal en p, el Lema 10.1.20 nos dice que $\mu^{-1}(t) = \{K\}$. En otras palabras, $\nu\big(\mu^{-1}(t)\big) = 0$. Como g es continua, entonces

$$\nu\big(\mu^{-1}(t_n)\big) \;=\; g(t_n) \;\to\; g(t) \;=\; \nu\big(\mu^{-1}(t)\big) = 0.$$

De aquí no es difícil ver que $h(K_n) \to (\mu(K), 0)$. Por tanto, h es continua.

Paso 2 h es inyectiva.

Sean $K, K' \in C(p,X)$ tales que $h(K) = h(K')$, entonces es fácil ver que: o bien K y K' son terminales en p, o $\mu(K), \mu(K') \in \big[\mu(A), \mu(B)\big]$, para algunos A y B terminales en p y consecutivos. En el primer caso tenemos que $\mu(K) = \mu(K')$. De acuerdo a esto y al hecho que de μ es de Whitney, deducimos que $K = K'$. En el segundo caso se tiene que $\mu(K)$ y $\mu(K')$ están en la imagen de h_A, la cual es un homeomorfismo. De aquí concluimos que $K = K'$ y que h es inyectiva

Paso 3 h es un homeomorfismo.

De acuerdo a los pasos anteriores, como el dominio de h es compacto (Teorema 5.1.7), basta ver que h es suprayectiva. Dado que h_A es suprayectiva para cada A, basta tomar $(t,0) \in I$ tal que $t \notin \big[\mu(A), \mu(B)\big]$ para algunos A y B terminales en p y consecutivos. Así pues, si $K \in \mu^{-1}(t)$, del Corolario 10.2.4 se sigue que K es terminal en p. Por tanto, $h(K) = (t, 0)$. En consecuencia h es un homeomorfismo.

Concluimos la prueba del teorema.

$\square$

Corolario 10.2.15 *Un continuo X es atriódico si y sólo si para cada $p \in X$ se tiene que*

$$C(p,X) \;\approx\; \big\{(t,r) \in I \times I \;:\; 0 \le r \le g_p(t)\big\},$$

donde $g_p : I \to I$ es una función continua para cada $p \in X$.

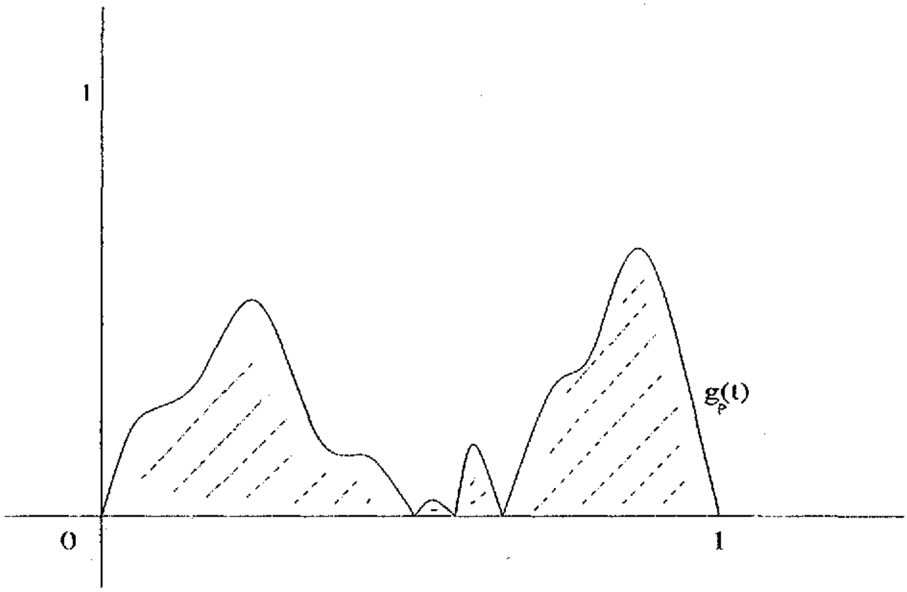


Figura 10.1: $C(p, X)$

Demostración:
Si $C(p, X)$ es de la forma en cuestión, entonces $C(p, X)$ no contiene 3-celdas. Así pues, de acuerdo al Lema 5.3.9, se tiene que X es atriódico. El resultado se sigue del Teorema 10.2.14.

□

Capítulo 11

Preguntas

El objetivo de este trabajo fue determinar propiedades topológicas de los hiperespacios $C(p,X)$, en términos de las propiedades del continuo X, y viceversa. En este sentido, hicimos lo posible por resolver todas las preguntas que se nos ocurrían. A pesar de esto, hubo varias cuestiones que no pudimos resolver, así que dedicamos esta parte a presentar las preguntas que quedaron abiertas.

Sean X,Y continuos. Diremos que $K(X)$ *coincide* con $K(Y)$ si existe una biyección $g: K(X) \to K(Y)$ tal que $C(p,X) \approx g(C(p,X))$.

En el capítulo 6 vimos que si X es un continuo tal que $K(X)$ coincide con $K(I)$ (i.e. X es arco-similar), entonces X no necesariamente es un arco. Sin embargo, si X es descomponible, entonces sí podemos afirmar que X es un arco. Similarmente, en el mismo capítulo vimos que si S es una curva cerrada simple, X es un continuo descomponible y $K(X)$ coincide con $K(S)$, entonces X es una curva cerrada simple. De acuerdo a esto aparecen un par de preguntas naturales.

1. Sea T un triodo simple. ¿Existe un continuo X, $X \neq T$, tal que $K(X)$ coincide con $K(T)$? En ese caso, ¿X es ser indescomponible?

2. Mas generalmente: sea G es una gráfica finita. ¿Existe un continuo X, $X \neq G$, tal que $K(X)$ coincide con $K(G)$? En ese caso, ¿X es indescomponible?

Más adelante, en el capítulo 8 probamos que unas funciones particulares son retracciones (fuertes) por deformación de 2^X en 2^X_p, y analizamos propiedades similares para ciertas funciones de $C(X)$ en $C(p,X)$. Estos resultados responden parcialmente la siguiente pregunta.

3. Dar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales 2_p^X es un retracto (fuerte) por deformación de 2^X

Naturalmente, uno también puede preguntarse qué pasa con los hiperespacios $C(X)$ y $F_n(X)$ en este sentido.

4. Dar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales $C(p,X)$ es un retracto (fuerte) por deformación de $C(X)$.

5. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n(p,X) = \{A \in F_n(X) : p \in A\}$. Dar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales $F_n(p,X)$ es un retracto (fuerte) por deformación de $F_n(X)$

Por otra parte, en el capítulo 9 introducimos los hiperespacios $K(X)$ y analizamos algunas de sus propiedades topológicas. Algo que nos llamó la atención es que estos hiperespacios no siempre son conexos, así que intentamos hallar condiciones de las cuales se pudiera obtener la conexidad. Las preguntas generales son las siguientes.

6. Sea X un continuo. Dar condiciones necesarias y suficientes (sobre X), bajo las cuales $K(Y)$ es conexo, cuando Y es una compactación del rayo con residuo X.

7. Sea X un continuo. Dar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales $K(X)$ es conexo

Finalmente, dedicamos el capítulo 10 a caracterizar los hiperespacios $C(p,X)$ para los continuos atriódicos. Algo que nos gustaría mucho es hallar una caracterización de estos hiperespacios para una gráfica finita:

8. Caracterizar los hiperspacios $C(p,X)$, cuando X es una gráfica finita.

Con esto concluimos este trabajo.

junio 2002

Bibliografía

[Bin51] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. **1** (1951), 43–51.

[Cha86] W. J. Charatonik, *Some functions on hyperspaces of continua*, Topology Appl. **22** (1986), 211–221.

[CN85] D. Curtis and N. To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. **19** (1985), 251–260.

[CS78] D. W. Curtis and R. M. Schori, *Hyperspaces of peano continua are hilbert cubes*, Fund. Math. **101** (1978), 19–38.

[Dou94] J. Doucet, *Cardinality, completeness and decomposability of sets of end points of chainable continua*, Topology Appl. **60** (1994), 41–59.

[Dug66] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, EUA, 1966.

[Ebe78] C. Eberhart, *Intervals of continua which are hilbert cubes*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 220–224

[Her98] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[Hos97] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 239–250.

[IN99] A. Illanes and S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.

[Kru84] P. Krupski, *Solenoids and inverse limits of sequences of arcs with open bonding maps*, Fund. Math. **120** (1984), 41–52.

[Kur68] K. Kuratowski, *Topology*, vol. II, Acad. Press, New York, 1968.

[Lew91] W. Lewis, *The pseudo-arc*, Contemp. Math. **117** (1991), 103–123.

[Mac] S. Macías, *On arcwise accessibility in hyperspaces*, to appear in Topology Proceedings.

[Mil50] H. C. Miller, *On unicoherent continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 179–194.

[Mun75] J. R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., 1975.

[Nad78] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, Inc., New York and Bassel, 1978.

[Nad92] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1992.

[Sor44] R. H. Sorgenfrey, *Concerning triodic continua*, Amer. J. Math **66** (1944), 439–460.

Índice de Materias

2^X, 8
2^X_p, 128
AR, 32
$B(\varepsilon, w)$, 7
$C(D, A)$, 31
$C(X)$, 8
$C(f)$, 35
$C_2(X)$, 128
$C_2(p, X)$, 128
$C_{A,B}$, 196
$F(X)$, 8
$F_n(X)$, 8
$Fr_B(A)$, 7
$H(A, B)$, 16
$K(A, X)$, 156
$N(\varepsilon, A)$, 16
S^1, 7
Σ^A_p, 10
$\dim(X)$, 7
$\eta_{A,B}$, 196
$\langle U_1, \ldots U_n \rangle$, 17
$\liminf$, 18
$\limsup$, 18
$\mathbb{D}_{(X,a)}$, 24
$\mathcal{E}$, 204
$\mathcal{E}_{t_0}$, 204
$\mathcal{K}_1$, 111
$\mathcal{T}_p$, 214
$\overline{A}^B$, 7
ϕ_p, 128
$\prec$, 214
ψ_p, 128
τ_A, 157
diam(X), 7
im(f), 120
ε-cadena, 110
$d(p, A)$, 136
$ext_B(A)$, 7
$int_B(A)$, 7
$ord(x, G)$, 172

AR, 32
arco, 9
arco ordenado, 20
arco ordenado único, 21

cik, 10
composante, 10
continuo, 8
  arco-similar, 53
  atriódico, 9
  círculo-similar, 108
  conexo en pequeno, 10
  descomponible, 10
  encadenable, 110
  estrambótico, 76
    de tamano n, 125
  hereditariamente descomponible, 10

hereditariamente indescomponible, 10
indescomponible, 10
irreducible
entre dos puntos, 14
entre dos subconjuntos, 29
terminal en un punto, 39
unicoherente, 9
contraíble, 130
contracción, 130
cubo de Hilbert, 9
curva cerrada simple, 9

función
confluente, 36
cubriente, 112
de Whitney, 21
inducida, 35
monótona, 190

gráfica finita, 9

límite inferior, 18
límite superior, 18
levantamiento, 111

Métrica de Hausdorff, 16

n-celda, 9
n-odo, 9
n-odo simple, 9
número de Lebesgue, 112
nivel de Whitney en $C(p, X)$, 37

orden de un punto, 172

Propiedad de Kelley, 110
punto
de corte, 38
de ramificación, 172
extremo, 110

retracción, 32
fuerte por deformación, 32
por deformación, 32
retracto, 32
retracto absoluto, 32

subcontinuo, 8
subcontinuos consecutivos, 214

Teorema
de la Transgresión, 49
de los Golpes en la Frontera, 11
del Cable Cortado, 11
Topología de Vietoris, 17
triodo, 9
triodo débil, 65

uniformemente cubierto, 112