

01199
39

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería



FUNCIONES DE GREEN APROXIMADAS PARA UN MEDIO
HETEROGÉNEO. DERIVACIÓN Y APLICACIONES.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA

LEONARDO RAMÍREZ GUZMÁN

DIRECTOR DE TESIS: FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

MÉXICO, D.F. 2002

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Dios.

A mi madre Marisa Guzmán Cedeño, que ha sido motivación, apoyo y amor incondicional en mi vida.

A mi padre Juan Ramírez Ornelas, que con paciencia ha sido guía en todo momento.

A mi abuela Felicitas Cedeño González, por la ternura que me regala día con día.

A David y Evelyn, hermanos, amigos y cómplices.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A Ara, que con su cariño llenó de regalos el otoño.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A mis amigos: Jorge Aguirre, Jorge Andaverde, Cristhian Cambresy, Moisés Contreras, Hortencia Flores, Alejandro Gil, Fernando Lázares, Juan Carlos Montalvo, Javier Morales, Teresa Morales y Gonzalo Zárate; con quienes he compartido momentos y sentimientos en diferentes etapas de mi vida.

A mis profesores Francisco J. Sánchez Sesma y Gustavo Ayala Millán, por su interés en mi desarrollo personal y profesional.

A todos mis profesores de las Facultades de Ingeniería y Ciencias de la UNAM, por mostrarme dos visiones complementarias de la vida.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice

Objetivo	
1.-Introducción	1
2.-Marco Teórico	
2.1.-Ecuación de Movimiento	4
2.2.-Ecuaciones Integrales (EI)	5
2.3.-Teoría de Rayos	9
2.4.-EI MDF Aplicado a un Medio Heterogéneo	11
2.4.-EI MEF Aplicado a la Ecuación de Onda	16
3.- Funciones de Green Aproximadas	
3.1.-Descripción del Medio	19
3.2.-Formulación	20
3.3.-Validación	26
4.-Aplicaciones	
4.1.-Topografía	35
4.2.-Cuencas sedimentarias	44
5.-Conclusiones	45
Referencias	
Apéndices	

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

OBJETIVO.

Obtención y validación de una función de Green aproximada para un medio elástico heterogéneo.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Las condiciones geológicas locales pueden inducir un incremento tanto en la amplitud como en la duración del movimiento del suelo durante los terremotos, y como consecuencia afectar gravemente las estructuras civiles, poniendo en riesgo a la población que hace uso de ellas. Conocer la magnitud de dicho aumento es deseable, pues nos permitirá mejorar los códigos de diseño y construir obras más seguras.

Durante las últimas décadas los efectos de sitio han sido objeto de una labor intensa de investigación experimental y teórica. Hay algunas regiones donde los datos disponibles permiten predecir las características dinámicas del terreno, pero cuando la cobertura instrumental no es suficientemente densa o la información que proveen los registros no cubre los posibles escenarios de generación sísmica, el único recurso es la simulación numérica de la propagación de ondas.

Hasta el momento los modelos matemáticos empleados introducen hipótesis sobre la geometría, el material y el tipo de excitación, por lo que nuestras predicciones no han sido del todo satisfactorias. Afortunadamente, con la creciente capacidad de cómputo y el desarrollo de los métodos numéricos podemos refinar los mecanismos involucrados y vislumbramos la posibilidad de contar con mejores descripciones del comportamiento del suelo y las estructuras.

En cuanto a los parámetros a considerar en el modelado de la respuesta sísmica, existe evidencia experimental de la importancia del efecto topográfico, la heterogeneidad del suelo y sus efectos combinados (Bard y Tucker, 1985). Los modelos del valle de San Bernardino de Frankel (1993) y la cuenca de Kanto de Hisada *et al.* (1993), por mencionar algunos trabajos, muestran que pueden existir grandes diferencias entre los resultados de análisis bidimensionales y tridimensionales. Las pruebas de compresión indican un incremento de la rigidez con la presión de confinamiento, que está ligada a la profundidad (Vrettos, 2000), por esta razón aún en el caso de que una porción de suelo sea del mismo material puede ser necesario considerar una variación de las constantes de Lamé y la densidad conforme la profundidad es mayor. En algunas circunstancias es suficiente suponer un conjunto de estratos homogéneos horizontales, en otras es necesario tomar en

cuenta de forma más precisa la inhomogeneidad para tener resultados que se aproximen a las observaciones. Después de realizar un análisis paramétrico usando modelos de topografías cubiertos con una capa de baja velocidad Bard y Tucker (1985) concluyeron que para tener predicciones más adecuadas se requieren modelos que incluyan tanto los efectos topográficos como el gradiente de velocidad cerca de la superficie.

Los resultados más realista se han obtenido utilizando las técnicas numéricas de dominio. Las simulaciones con Diferencias Finitas (MDF) de Olsen (2000) y Frankel y Stephenson (2000) sobre las regiones del Valle de Los Angeles y Seattle, respectivamente, nos ilustran el potencial de esta metodología (ver también Olsen *et al.*, 2000 y Frankel y Stephenson, 1993). Bao *et al.* (1996) y Bielak *et al.* (1998) han utilizado con éxito el Método de Elementos Finitos (MEF) para modelar el Valle de San Fernando; colocándolo como uno de los más viables para estudios a gran escala. Además, se ha empleado, con limitaciones en el contenido espectral de la excitación, la teoría de rayos (Benites y Aki, 1994).

El Método de Elementos de Frontera (MEFr) ha adquirido popularidad reciente, pero algunas de las posibilidades de los métodos de dominio para configuraciones complejas no están disponibles todavía en esta formulación. Sin embargo, hay una gran cantidad de problemas para los cuales la información sobre la geometría y las propiedades de los materiales tienen incertidumbres grandes, en tales circunstancias un análisis empleando métodos de dominio resulta computacionalmente más costoso que uno simple de Elementos de Frontera. La ventaja más importante del MEFr es una sustancial reducción de la discretización y por lo tanto de los errores numéricos. Así, algunas simplificaciones pueden ser adecuadas para estimar el movimiento del suelo. Esa es la motivación de este trabajo.

Una de las limitaciones del MEFr es la disponibilidad de las soluciones fundamentales o funciones de Green en estructuras heterogéneas. Existen algunos métodos para calcularlas en medios estratificados (*vgr.* Harkrider, 1964; Hisada *et al.*, 1993 y Fujiwara y Takenaka, 1994) pero son complicados de implantar. Manolis y Shaw (1997) presentan una formulación para obtener la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz inhomogénea, que resuelve aproximadamente el problema escalar de propagación de ondas. Clements (1998) da la solución para algunas ecuaciones en derivadas parciales lineales elípticas, que pueden ser útiles para resolver problemas acústicos.

En este trabajo presentamos funciones aproximadas de Green 2D y 3D para un medio elástico e isótropo con una variación lineal de las velocidades de propagación de ondas, partiendo de una generalización de la estructura de la función de Green homogénea y utilizando la teoría de rayos para establecer los tiempos de arribo y el factor de dispersión geométrica. El fin último es utilizar nuestras expresiones en el contexto de los métodos integrales.

El estudio está concebido de tal forma que se disponen de los conceptos básicos para abordar el tema. En el segundo capítulo se describen brevemente la ecuación de equilibrio, los métodos numéricos empleados y de forma implícita el concepto de función de Green.

Establecidos los elementos necesarios, se presentan en la sección siguiente la derivación y algunas pruebas de la bondad de nuestras expresiones.

Como parte final del trabajo se muestran los resultados obtenidos al emplear las fórmulas del caso SH en una topografía y algunas cuencas sedimentarias. La implantación en programas tridimensionales se deja para una investigación posterior.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

Se describen la ecuación de equilibrio para medios elásticos e isótropos, el Método de Ecuaciones Integrales, el concepto de función de Green, la teoría de rayos y las formulaciones con MDF, MEF que utilizamos para validar nuestras aproximaciones.

2.1 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.

Consideremos un paralelepípedo de dimensiones finitas dentro de un medio continuo como el de la figura 2.1, donde se indican las componentes en las caras asociadas a la primera dirección del campo de esfuerzos y su variaciones espaciales de primer orden.

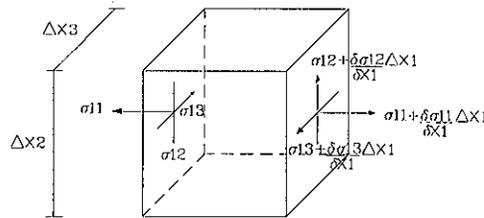


Figura 2.1 Estado de esfuerzos

Al establecer el equilibrio y tomar el límite, la ecuación correspondiente es:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.1)$$

donde se han incluido fuerzas de cuerpo y de superficie. En esta expresión ρ =densidad de masa, u_i =desplazamiento en la dirección i , f_i =fuerza de cuerpo en la dirección i y σ_{ij} =tensor de esfuerzos.

La relación lineal entre esfuerzo y deformación, conocida como ley de Hooke, para materiales isótropos tiene la forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.2)$$

Sección 2.2 ECUACIONES INTEGRALES (EI).

donde λ = constante de Lamé, μ = módulo de cortante y $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ = tensor de deformaciones. En las ecuaciones anteriores se emplea la convención de suma que establece la adición de todos los términos posibles con índices repetidos (vgr. $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$).

De 2.1, 2.2 y la definición de ε_{ij} obtenemos la ecuación de movimiento para un medio elástico, lineal e isótropo:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - f_i = \left[\rho \alpha^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \rho \beta^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] + \left[\frac{\partial \rho \alpha^2}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial \rho \beta^2}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \beta^2}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.3)$$

donde $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ y $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, las velocidades de ondas Primarias o P y Secundarias o S, respectivamente.

La primera parte del miembro a la derecha de la igualdad en 2.3 es suficiente para tratar problemas homogéneos, el otro introduce el efecto por la heterogeneidad y es cero si los productos $\rho \alpha^2$ y $\rho \beta^2$ son constantes.

2.2 ECUACIONES INTEGRALES (EI).

Muchos de los problemas de la ingeniería y las ciencias se pueden resolver utilizando Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Sin embargo, las formulaciones integrales presentan ventajas en su solución numérica, vgr. la reducción con respecto a los métodos de dominio de la discretización y las dificultades asociadas a fronteras ficticias.

Existen excelentes publicaciones donde se discuten las propiedades y métodos de solución de Ecuaciones Integrales, cuya implantación numérica recibe el nombre de Método de Elementos de Frontera. Aquí presentamos un resumen breve tomado de Courant y Hilbert (1953), Arfken y Weber (1985) y Bonnet (1998).

2.2.1 CLASIFICACIÓN.

Existen dos criterios para clasificar los entes matemáticos que nos interesan. El primero de ellos considera la definición de los límites de integración: si uno es variable se trata de una ecuación de Volterra y si ambos se conocen se

dice que es de Fredholm. Empleando el segundo criterio las EI pueden ser de primera especie cuando la incógnita aparece exclusivamente como parte del integrando o de segunda especie si está fuera de la integral.

Las EI que nos preocupan en el presente trabajo tienen la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{K}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{K}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS \end{aligned}$$

donde \mathbf{u} , \mathbf{t} , \mathbf{x} , y $\partial\Omega$ están definidas y \mathbf{K}_i es una función llamada Kernel. Aquí ϕ es la función incógnita y en cada caso la clasificación es diferente: son de Fredholm de primera y de segunda especie, respectivamente.

2.2.2 EQUIVALENCIA ENTRE EI Y EDP.

Algunos procesos físicos, generalmente asociados a problemas de difusión y transporte, sólo admiten una representación integral, pero en general es posible cambiar una ecuación en derivadas parciales a una integral. El proceso involucra dos integraciones, donde se introducen las condiciones de frontera. Una de las ventajas que se gana es la simetría que adquiere el Kernel.

Sea un problema con incógnita \mathbf{u} en un dominio $\Omega \subset R^n$ asociado a un operador en derivadas parciales de segundo orden \mathcal{L} que tenga la estructura siguiente:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0 \text{ en } \Omega \tag{2.4}$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{g}_1 \text{ en } \partial\Omega_1(\text{Dirichlet}) \text{ y} \\ T^n(\mathbf{u}) &= \mathbf{g}_2 \text{ en } \partial\Omega_2(\text{Neumann}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 y la fuente \mathbf{f} se conocen, y $\mathbf{u} \rightarrow T^n$ es un operador diferencial lineal de primer orden sobre \mathbf{u} que relaciona la normal unitaria \mathbf{n} de $\partial\Omega$ exterior a Ω . Además $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ definen una partición de la frontera $\partial\Omega$.

Figura 2.2 Dominio considerado

Se puede demostrar que es posible asociar a cada operador \mathcal{L} una fórmula de reciprocidad:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) dV = \int_{\partial\Omega} [T^n(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - T^n(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}] dS. \quad (2.6)$$

Conocida ésta podemos reemplazar \mathbf{v} por una solución particular que verifica la ecuación 2.4 localmente para una fuente $f(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ aplicada en un punto fijo $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$, denotémosla como $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, la función de Green.

Recordando la propiedad de la función delta de Dirac

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) dV_y = \kappa \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \kappa = 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ \kappa = 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}, \quad (2.7)$$

sustituimos \mathbf{v} por \mathbf{G} en 2.6. Así

$$\kappa \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (2.8)$$

$$\int_{\partial\Omega} \{ \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot T^n [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T^n [\mathbf{u}(\mathbf{y})] \} dS_y,$$

para $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$.

Esta forma da explícitamente el valor de \mathbf{u} en todo punto interior a Ω por medio de una integral de dominio que contiene a la fuente $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, solución particular de la ecuación que en general no verifica las condiciones de frontera, y de un término integral sobre $\partial\Omega$ que hace intervenir los valores \mathbf{u} , y $T^n [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$ en la frontera. La expresión realiza una cuasi-inversión de la ecuación, y el cálculo se hace con los valores sobre la frontera $\partial\Omega$ que se desconocen antes de tomar en cuenta las condiciones de contorno.

La fórmula de representación no es aplicable en $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, por lo que es necesaria una ecuación integral que sea válida para los valores de la frontera. En problemas bi y tridimensionales \mathbf{G} es tal que $T^n(\mathbf{G})$ presenta en $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ una singularidad no integrable, razón por la cual es incorrecto utilizar la ecuación para $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$. La obtención de la expresión correspondiente involucra un proceso de límite.

2.2.3 FORMULACIÓN INDIRECTA DE CAPA SIMPLE.

Consideremos simultáneamente un dominio cerrado Ω y el dominio complementario $\bar{\Omega} = R^n - \Omega$ y sean \mathbf{u} , $\bar{\mathbf{u}}$ dos soluciones 2.4 sobre Ω y $\bar{\Omega}$, respectivamente. Si \mathbf{x} es un punto interior a Ω y $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} = 0$, la fórmula de representación correspondiente es

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} [T^n [G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) - T^n [\mathbf{u}(\mathbf{y})] \cdot G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y \quad (2.9) \\ 0 &= \int_{\partial\Omega} [T^n [G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) - T^n [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y})] \cdot G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y. \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \{T^n [\mathbf{u}(\mathbf{y})] + T^n [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y})]\} \cdot G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot T^n [G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y, \quad (2.10)$$

donde se ha tomado por convención $T^n [G(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$ con la normal hacia afuera de Ω .

Si suponemos que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, es decir hay continuidad de desplazamientos y llamamos $\phi = T^n [\mathbf{u}(\mathbf{y})] + T^n [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y})]$, obtenemos la representación de \mathbf{u} por un *potencial de capa simple* de densidad ϕ , i.e.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y. \quad (2.11)$$

Las tracciones, en el contexto de la mecánica de sólidos, se obtienen derivando 2.11. Así, para $x \in \partial\Omega$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \phi(\xi) \cdot T^n [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y, \quad (2.12)$$

Sección 2.3 TEORÍA DE RAYOS.

y si $x \notin \partial\Omega$ el término $\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x})$ desaparece.

En 2.11 y 2.12 \mathbf{G} y $T^n[\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$ son el Kernel de la ecuaciones integrales que utilizamos para representar el desplazamiento y las tracciones, si el operador \mathcal{L} es tal que tenemos la ecuación de equilibrio.

La implantación numérica es simple. Se secciona la frontera y se asigna a ϕ un comportamiento, función de su valor en ciertos puntos de cada elemento (ϕ_i), con lo que obtenemos un sistema de ecuaciones. Conocida la densidad se sustituye en 2.11 y 2.12.

2.3 TEORÍA DE RAYOS.

El objetivo de esta sección es establecer algunos conceptos que nos permitirán formular las funciones de Green para medios con una heterogeneidad. Referencias clásicas sobre el temas son las de Cerveny y Ravindra (1971) y Cerveny *et al.* (1977).

Retomemos la ecuación 2.3

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + f_i = \left[\rho \alpha^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \rho \beta^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] + \left[\frac{\partial \rho \alpha^2}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial \rho \beta^2}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \beta^2}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right].$$

Una solución admisible es:

$$u_i = S(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{i_k}}{(i\omega)^k}, \quad (2.13)$$

donde u_i = desplazamiento en la dirección i , $S(\omega)$ = función de fuente ω = frecuencia angular, t = tiempo, τ = función de fase, $\tau = \sqrt{-1}$, u_{i_k} = coeficientes independientes de la frecuencia y el tiempo.

Las superficies generadas por una fase o tiempo de viaje constante, *i.e.* $t = \tau(x_i)$, se denominan frentes de onda y rayos a las trayectorias ortogonales.

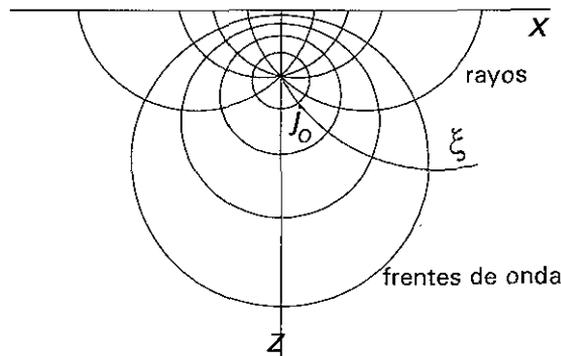


Figura 2.3 Rayos y frentes de onda para un medio con heterogeneidad vertical.

La fase y los coeficientes u_{ik} se obtienen introduciendo 2.13 en 2.3, de lo que resulta un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que se resuelve recursivamente y del cual se desprenden dos ecuaciones fundamentales en la teoría de rayos: la eikonal y la de transporte. Un requisito para que 2.13 sea válida es que la función de fase sea analítica.

La teoría de rayos está basada en la solución asintótica de alta frecuencia de la ecuación de equilibrio. No es difícil reconocer en la serie 2.13 que la solución necesita menos términos si la frecuencia es alta (en el entendido de que converge) y este es el punto de partida: considerar un término, el de orden cero.

2.3.1 La ecuación eikonal.

La función principal de la ecuación eikonal es permitirnos conocer la función de fase, es decir saber cuanto tiempo tarda en llegar la perturbación a un punto. La expresión correspondiente en coordenadas cartesianas es

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \quad (2.14)$$

o en las coordenadas propias del rayo

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{1}{c}, \quad (2.15)$$

donde s es la longitud de arco del rayo tomado en el sentido de la propagación y c es cualquiera de las dos velocidades con las que en un medio homogéneo se propagan las ondas S y P.

2.3.2 La ecuación de transporte.

Una vez establecida la función de fase en un medio, nos resta calcular la amplitud del primer término de la serie de rayos, para lograrlo disponemos de la ecuación de transporte

$$\frac{du_{i_0}}{d} + u_{i_0} \left(\frac{c}{2} \nabla^2 \tau + \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho}{d} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Un resultado muy importante que parte de resolver la ecuaciones anteriores es que u_{i_0} toma la forma

$$u_{i_0} = u_{i_0}(\mathbf{x}_r) \left(\frac{\rho(\mathbf{x}_r) c(\mathbf{x}_r)}{\rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x})} \right)^{\frac{1}{2}} \Theta(\mathbf{x}), \quad (2.17)$$

donde \mathbf{x}_r es un punto de referencia sobre el rayo, $\Theta(\mathbf{x})$ =factor de dispersión geométrica = $\left(\frac{J(\mathbf{x}_0)}{J(\mathbf{x})} \right)^{\frac{1}{2}}$ y J es el jacobiano de la transformación de coordenadas cartesianas a las del rayo (ver Cerveny et al, 1977).

2.4 EL MDF APLICADO A UN MEDIO HETEROGÉNEO.

El Método de las Diferencias Finitas es quizá la herramienta numérica que más se ha utilizado para resolver ecuaciones en derivadas parciales dada su sencillez matemática. La estrategia es muy simple: se sustituyen las expresiones de las derivadas parciales por sus equivalencias en diferencias y dependiendo del tipo de esquema, puede o no ser necesario resolver un sistema de ecuaciones.

Aquí presentamos las expresiones que se deben discretizar para validar nuestras aproximaciones en medios elástico lineales e isótropos con una variación de las propiedades del material dependiente exclusivamente de la profundidad.

Las ecuaciones de equilibrio en coordenadas cilíndricas para un medio están dadas por

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + f_r, \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + f_\theta \end{aligned} \quad (2.18)$$

Capítulo 2 MARCO TEÓRICO

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + f_z,$$

donde $\tau_{\alpha\beta}$ denota el tensor de esfuerzos para las direcciones $\alpha, \beta = r, \theta, z$, $t = \text{tiempo}$ y $\rho = \text{densidad}$.

Utilizando la ley de Hooke 2.2, el tensor de deformaciones

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

y considerando que la variación de las propiedades elásticas del material sólo dependen de z , podemos escribir 2.18 como

$$\begin{aligned} \alpha^2 \rho \left[-\frac{1}{r^2} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right] + \\ \beta^2 \rho \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right] + \\ \frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + f_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \alpha^2 \rho \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} \right) \right] + \\ \beta^2 \rho \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} \right) + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sección 2.4 EL MDF APLICADO A UN MEDIO HETEROGÉNEO.

$$\left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) + f_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2},$$

y

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \rho \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} \right) \right] + \\ & \beta^2 \rho \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right] + \\ & \left(\frac{\partial \alpha^2 \rho}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - \\ & 2 \left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right] + f_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Donde fácilmente se identifican los términos necesarios para tratar problemas en medios homogéneos.

Si las fuerzas de cuerpo se pueden expresar como combinaciones lineales de senos y cosenos de tal forma que $\theta = 0$ sea un eje de simetría, *i.e.* $f_r = \sum_{k=0}^m \bar{f}_r^k \cos k\theta$, $f_z = \sum_{k=0}^m \bar{f}_z^k \cos k\theta$ y $f_\theta = \sum_{k=0}^m \bar{f}_\theta^k \sin k\theta$ los desplazamientos estarán dados por:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{k=0}^m \bar{u}_r(r, z)^k \cos k\theta, & (2.21) \\ u_z &= \sum_{k=0}^m \bar{u}_z(r, z)^k \cos k\theta \text{ y} \\ u_\theta &= \sum_{k=0}^m \bar{u}_\theta(r, z)^k \sin k\theta, \end{aligned}$$

donde la dependencia azimutal está fija y los coeficientes dependen únicamente de las coordenadas r y z .

Así podemos reescribir 2.20 para cada k

$$\alpha^2 \rho \left[-\frac{1}{r^2} (\bar{u}_r^k + k \bar{u}_\theta^k) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial r} + k \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial r \partial z} \right] + \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
 & \beta^2 \rho \left[-\frac{1}{r^2} (k^2 \bar{u}_r^k + k \bar{u}_\theta^k) - \frac{k}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial r \partial z} \right] + \\
 & \quad \left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial r} \right) + \bar{f}_r^k = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial t^2}, \\
 & -\alpha^2 \rho \left[\frac{k}{r^2} (\bar{u}_r^k + k \bar{u}_\theta^k) + \frac{k}{r} \left(\frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial z} \right) \right] + \\
 & + \beta^2 \rho \left[-\frac{1}{r^2} (k \bar{u}_r^k + \bar{u}_\theta^k) + \frac{1}{r} \left(k \frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial r} + k \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial z^2} \right] \\
 & \quad \left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \right) \left(-\frac{k}{r} \bar{u}_z^k + \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial z} \right) + \bar{f}_\theta^k = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & \alpha^2 \rho \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial z} + k \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial z^2} \right] + \\
 & \beta^2 \rho \left[-\frac{k^2}{r^2} \bar{u}_z^k + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial z} - k \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial r^2} \right] + \\
 & \quad \left(\frac{\partial \alpha^2 \rho}{\partial z} \right) \left[\frac{1}{r} (\bar{u}_r^k + k \bar{u}_\theta^k) + \frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial z} \right] - \\
 & \quad 2 \left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \right) \left[\frac{1}{r} (k \bar{u}_\theta^k + \bar{u}_r^k) + \frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial r} \right] + \bar{f}_z^k = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

Los casos que nos interesan son $k = 0$ y $k = 1$, una fuerza vertical y una horizontal, respectivamente. El primer caso anula la segunda ecuación, pues es un problema puramente axisimétrico en el que los desplazamientos en θ son nulos. Tendremos para un punto los desplazamientos radiales, tangenciales y verticales debidos a una fuerza de cuerpo, es decir la función de Green si la excitación es una delta de Dirac.

Las expresiones anteriores son válidas cuando r no es nulo, por lo que necesitamos ecuaciones para $r \rightarrow 0$. Utilizando la regla de L'Hopital en estos casos, 2.22 es equivalente a

$$\alpha^2 \rho \left[\frac{3}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r^2} + \frac{1}{2} k \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial r \partial z} \right] + \beta^2 \rho \left[-\frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial z^2} - \frac{3}{2} k \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial r \partial z} \right] + \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial r} \right) + \bar{f}_r = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial t^2},$$

$$-\alpha^2 \rho \left[\frac{3}{2} k \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r^2} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial r^2} + k \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial r \partial z} \right] + \beta^2 \rho \left[\frac{1}{2} k \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial z^2} + k \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial r \partial z} \right] +$$

$$\left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial z} - k \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial r} \right) + f_\theta^k = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial t^2}$$

y

$$\alpha^2 \rho \left[2 \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r \partial z} + k \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial z^2} \right] + \beta^2 \rho \left[-2 \frac{\partial^2 \bar{u}_r^k}{\partial r \partial z} - k \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^k}{\partial r \partial z} + \left(2 - \frac{k^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial r^2} \right] +$$

$$\left(\frac{\partial \alpha^2 \rho}{\partial z} \right) \left[2 \frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial r} + k \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_z^k}{\partial z} \right] - 2 \left(\frac{\partial \beta^2 \rho}{\partial z} \right) \left[2 \frac{\partial \bar{u}_r^k}{\partial r} + k \frac{\partial \bar{u}_\theta^k}{\partial r} \right] + \bar{f}_z = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_z^k}{\partial t^2}.$$

Por otro lado las expresiones aproximadas para las derivadas de una función f en un punto $(0,0)$ considerando un esquema de cuarto orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{0,0}} &= \frac{1}{12h} (f_{-2,0} - 8f_{-1,0} + 8f_{1,0} - f_{2,0}), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_{0,0}} &= \frac{1}{12h^2} (-f_{-2,0} + 16f_{1,0} - 30f_{0,0} + 16f_{1,0} - f_{2,0}) \text{ y} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x_{0,0}} &= \frac{1}{144h^2} \begin{pmatrix} f_{-2,-2} - 8f_{-2,-1} + 8f_{-2,1} - f_{-2,2} \\ -8f_{-1,-2} + 64f_{-1,-1} - 64f_{-1,1} + 8f_{-1,2} \\ +8f_{1,-2} - 64f_{1,-1} + 64f_{1,1} - 8f_{1,2} \\ -f_{2,-2} + 8f_{2,-1} - 8f_{2,1} + f_{2,2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los subíndices se refieren al número de pasos horizontales y verticales en que se debe evaluar la función.

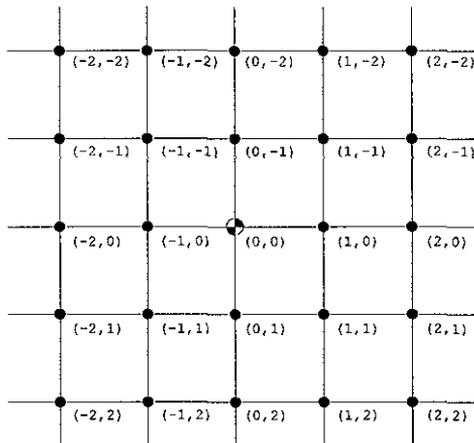


Figura 2.4 Malla necesaria para obtener la derivada en $(0,0)$ utilizando un esquema de cuarto orden.

Al discretizar las ecuaciones se cambian las derivadas parciales espaciales en 2.22 y 2.23 por sus aproximaciones y se toman como válidas en un paso de tiempo $l + 1$. Las derivadas temporales se sustituyen por su equivalencia en diferencias y se calcula la solución para un tiempo $l + 2$.

2.5 EL MEF APLICADO A LA ECUACIÓN DE ONDA.

El MEF se basa en la discretización del dominio que se busca analizar en elementos caracterizados por sus propiedades materiales y de las cuales se derivan relaciones entre las fuerzas y desplazamientos nodales. Del ensamble de los elementos y las fuerzas externas resulta un sistema de ecuaciones que describe el equilibrio del dominio, donde los desplazamientos son las incógnitas, y a partir de los cuales se pueden obtener los esfuerzos y deformaciones unitarias (Método de los desplazamientos).

Para elementos continuos el modelo constitutivo da la relación entre los tensores de esfuerzos y deformaciones. Sin embargo, queda pendiente la conexión entre las deformaciones y los desplazamientos en los nodos de la discretización, que son las incógnitas. Este problema queda resuelto al hacer una suposición sobre el comportamiento de los desplazamientos en cada elemento mediante *funciones de interpolación*, i.e. para un elemento como el de la figura 2.4 los desplazamientos en cualquier punto están dados por una

combinación lineal de funciones base

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_j)\phi_j(\mathbf{x}).$$

Donde \mathbf{x}_j =coordenada del nodo j , \mathbf{x} = vector de posición de un punto en el elemento y ϕ_j =función de interpolación o base.

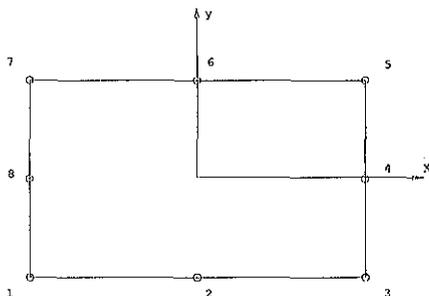


Figura 2.5 Elemento finito.

Es una práctica común para el caso de ecuaciones hiperbólicas, como la de onda, hacer el planteamiento del problema considerando las variables espaciales en una primera fase, y resolver la parte temporal con métodos de diferencias finitas, una de las ventajas es que se pueden tener esquemas explícitos, que no requieren de la solución de sistemas de ecuaciones pero son condicionalmente estables (ver Zieniewick y Taylor, 1995).

En el contexto del MEF existen varias alternativas de solución: el Método de los Mínimos Cuadrados, enfoques variacionales y el Método de los residuos pesados en formulaciones fuertes o débiles. En este trabajo se prefiere la aproximación con residuos pesados de Galerkin débil.

Retomemos la ecuación de equilibrio

$$A_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = 0 \quad (2.24)$$

en el dominio Ω .

Sea w_i una función cualquiera. Resulta evidente que se satisface

$$\int_{\Omega} w \cdot A_i dV = 0, \quad \forall w. \quad (2.25)$$

Al introducir la aproximación de u_i , la ecuación A_i se convierte en un residuo que en 2.25 se pesa en todo el dominio por una función arbitraria

w . La elección de los pesos conduce a varios métodos, que en conjunto se conocen como de residuos pesados. Si definimos las funciones de peso como combinaciones lineales de las funciones base de nuestra aproximación del desplazamiento, *i.e.* $w_i = c_{ki}\phi_k$ se dice que la formulación es de Galerkin, y así lo haremos.

Sustituyamos A_i en la expresión

$$\int_{\Omega} w_i \cdot \left(f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = 0. \quad (2.26)$$

Tras aplicar el teorema de Green al último término podemos escribir la ecuación como:

$$\int_{\Gamma} t_i \cdot w_i d\Gamma + \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \sigma_{ij} + w_i \cdot \left(f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) \right] dV = 0 \quad (2.27)$$

donde $t_i =$ vector de tracción ($t_i = \sigma_{ij}n_j$).

Al sustituir w_i :

$$\int_{\Gamma} t_i \cdot c_{ki}\phi_k d\Gamma + \int_{\Omega} c_{ki}\phi_k \cdot \left(f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) - \frac{\partial c_{ki}\phi_k}{\partial x_j} \cdot \sigma_{ij} dV = 0. \quad (2.28)$$

Factorizando c_{ki} y garantizando la igualdad, obtenemos el sistema de ecuaciones (*e.g.* para $i=1,2$ y $k=1,8$):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \cdot \sigma_{ij} dV - \int_{\Omega} \phi_k \cdot \rho u_i dV = \int_{\Gamma} t_i \phi_k d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_k \cdot \left(f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) dV \quad (2.29)$$

que resuelve 2.10 para cada elemento en que se ha discretizado el medio, conocidos t_i y f_i en la frontera y en el dominio del elemento, respectivamente. La superposición de efectos producidos (consecuencia de la linealidad) constituye la solución del problema, que está dada por un sistema de ecuaciones. La primera integral a la derecha de la igualdad representa, para los elementos que se conectan entre si, las fuerzas internas que deben equilibrarse. Atendiendo a la hipótesis del comportamiento del material se obtiene un sistema que tiene por incógnitas los desplazamientos relativos.

Esta formulación se utiliza para validar ejemplos de topografías SH.

Capítulo 3

FUNCIONES DE GREEN

APROXIMADAS

Se presentan un conjunto de soluciones fundamentales aproximadas para un medio heterogéneo. Las expresiones son consecuencia de una generalización de la estructura que presentan cuando el espacio es homogéneo. Los tiempos de viaje y las amplitudes se obtienen usando la teoría de rayos.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL MEDIO.

Las funciones de Green derivadas en este trabajo corresponden a un espacio elástico con una variación de las velocidades y la densidad de masa dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \alpha_0 \frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} = \alpha(0) \cdot (1 + \gamma z), & (3.30) \\ \beta(z) &= \beta_0 \frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} = \beta(0) \cdot (1 + \gamma z) \\ & \quad y \\ \rho(z) &= \rho_0 \left(\frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} \right)^n = \rho(0) \cdot (1 + \gamma z)^n. \end{aligned}$$

Aquí α = velocidad P, β = velocidad S, ρ = densidad de masa, $\gamma = \frac{1}{h}$, donde $\alpha(-h) = \beta(-h) = 0$ y $n \geq 0$. El subíndice cero indica que la propiedad es al nivel de la fuente.

Los frentes de onda que se generan al excitar el medio en estudio son superficies cilíndricas circulares y esferas, en los casos bidimensional y tridimensional, respectivamente. La ecuación que describe su proyección en el plano xz es la circunferencia de radio R_w (ver Beydoun y Ben-Menahem, 1985)

$$(x - x_0)^2 + \{z - [(z_0 + h) \cosh(\beta(0) \tau/h) - h]\}^2 = R_w^2, \quad (3.31)$$

y para los rayos la expresión correspondiente es

$$[(x - x_0)^2 - (z_0 + h) \cot j_0]^2 + (z + h)^2 = R^2.$$

Donde

$$R_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$R_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z + z_0 + 2h)^2},$$

y R es el radio del rayo.

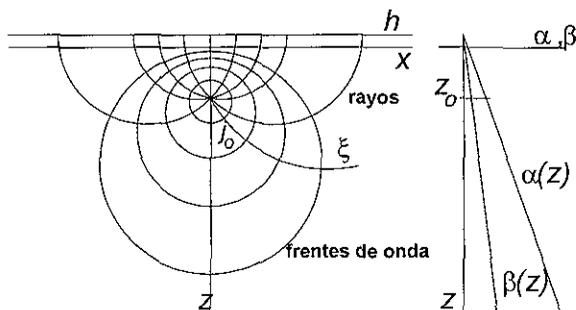


Figura 3.1 Medio considerado.

El tiempo de viaje se obtiene con la expresión:

$$\tau = \frac{h}{c(0)} \ln \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \right). \quad (3.32)$$

3.2 FORMULACIÓN.

Comencemos nuestro desarrollo con la expresión de teoría de rayos del desplazamiento en frecuencia (Cerveny y Ravindra, 1971)

$$u(\omega, \mathbf{x}) = \left(\frac{\rho(\mathbf{x}_r) c(\mathbf{x}_r)}{\rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x})} \right)^{\frac{1}{2}} \Theta(\mathbf{x}) \cdot \bar{u}(\omega, \mathbf{x}_r) e^{-i\omega(t-\tau)}, \quad (3.33)$$

donde ω = frecuencia angular, τ = tiempo de viaje, \mathbf{x}_r = posición de referencia del rayo considerado y $\Theta(\mathbf{x})$ = factor de dispersión geométrica. El desplazamiento u y la velocidad c son para ondas P o S.

De aquí en adelante suponemos que el punto de referencia está cerca de la fuente, luego entonces $R_w(\mathbf{x}_r) \approx c_0 \tau_r$ y $1 + \gamma z_0 \approx 1 + \gamma z_r$.

Sección 3.2 FORMULACIÓN.

La parte más complicada en el cómputo de las amplitudes en teoría de rayos es el cálculo del factor de dispersión geométrica. Cervený y Psencík (1979) dan una metodología para llevar a buen fin esta operación. Siguiendo las ecuaciones (5.5), (5.23), (5.25) y (6.5) de dicho trabajo $\Theta(\mathbf{x})$ es

$$\Theta = \sqrt{\frac{c_0 \tau_r}{R_w} \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right)}. \quad (3.34)$$

y

$$\Theta = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right) \frac{c_0 \tau_r}{R_w}, \quad (3.35)$$

para una fuente lineal y puntual, los casos bi y tridimensional, respectivamente.

3.2.1 CASO 2D.

Sustituyamos 3.30 y 3.34 en 3.33.

$$u(\omega, \mathbf{x}) = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right)^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\frac{c_0 \tau_r}{R_w}} \cdot \bar{u}(\omega, \mathbf{x}_r) e^{-i\omega(t-\tau)}. \quad (3.36)$$

Una de las hipótesis fuertes de nuestro desarrollo es el desacoplamiento de las componentes compresional y de cortante en los frentes de onda, en franca analogía con un medio homogéneo. Esta premisa es cierta si se cumplen un conjunto de condiciones para el gradiente y la frecuencia en la que se efectúe el análisis (ver Beydoun y Ben-Menahem, 1985). Teniendo presente lo anterior dividimos la derivación en los casos SH (antiplano, acústico o escalar) y P-SV (plano).

3.2.1.1 ONDAS SH.

La función de Green homogénea del caso acústico es:

$$G_{yy}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(\omega\tau). \quad (3.37)$$

Aquí $H_0^{(1)}$ =función de Hankel de orden cero de primera especie (ver *e.g.* Abramowitz y Stegun, 1972), τ =tiempo de viaje= β/r y r =distancia al receptor.

La forma asintótica de $H_0^{(1)}(\omega\tau)$ es $\sqrt{\frac{2}{\pi\omega\tau}}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\omega\tau}$, por lo que para alta frecuencia y campo lejano podemos escribir la solución fundamental homogénea como

$$G_{yy}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{i}{4\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\tau}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\omega(t-\tau)}. \quad (3.38)$$

Observamos que la estructura de 3.36 y 3.38 es similar. Si suponemos válidas ambas expresiones para el punto \mathbf{x}_r estamos en posibilidad de obtener $\bar{u}(\omega, \mathbf{x}_r)$. Así, para el medio heterogéneo

$$G_{yy}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{i}{4\mu_0} \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right)^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\frac{\beta_0\tau}{R_w}} \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\tau}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\omega(t-\tau)}. \quad (3.39)$$

Sin afectar el comportamiento para argumentos $(\omega\tau)$ grandes en 3.39 podemos, si recobramos la función de Hankel $H_0^{(1)}$, describirla como

$$G_{yy}(\omega, \mathbf{x}) = \Lambda \frac{i}{4\mu_0} H_0^{(1)}(\omega\tau) \quad (3.40)$$

$$\Lambda = \left[\left(\frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_r} \right)^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\frac{\beta_0\tau}{R_w}} \right].$$

Esta expresión es válida para alta frecuencia y campo lejano, pero por inspección vemos que también da la solución exacta para el campo cercano, donde el medio es prácticamente homogéneo. La ecuación 3.40 es similar a la 10 de Sánchez-Sesma et al (2001), excepto por el valor del exponente que cambia de $(n + 1)/2$ a $(n + 2)/2$.

3.2.1.2 ONDAS P-SV.

El tratamiento de este caso, propuesto en Sánchez-Sesma et al (2001), es paralelo al acústico.

Las ecuaciones para los desplazamientos en un medio homogéneo vienen dadas de forma natural en coordenadas polares. Las componentes radial y

Sección 3.2 FORMULACIÓN.

tangencial ante una fuerza vertical son:

$$u_r = \frac{iF}{8\rho} (A - B) \cos \theta \quad (3.41)$$

y

$$u_\theta = -\frac{iF}{8\rho} (A + B) \sin \theta, \quad (3.42)$$

donde

$$A = \frac{H_0^{(1)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(1)}(\omega r/\beta)}{\beta^2},$$

$$B = \frac{H_2^{(1)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(1)}(\omega r/\beta)}{\beta^2}.$$

Estas proyecciones son normales y tangentes a un frente de onda de radio R_w . La hipótesis es que las componentes longitudinal y transversal a un rayo en el medio heterogéneo tienen forma análoga a 3.41 y 3.42, moduladas por el factor Λ y donde τ_α y j_0 son las coordenadas que describen naturalmente el sistema.

Figura 3.2 Sistemas de referencia polar y del rayo.

Así

$$G_{R\omega z} = \Lambda \frac{i}{8\rho} (A_0 - B_0) \cos j_0 \quad (3.43)$$

y

$$G_{j_0 z} = -\Lambda \frac{i}{8\rho} (A_0 + B_0) \sin j_0, \quad (3.44)$$

Definiendo

$$A = \frac{H_0^{(1)}(\omega\tau_\alpha)}{\alpha_0^2} + \frac{H_0^{(1)}(\omega\tau_\beta)}{\beta_0^2}$$

$$B = \frac{H_2^{(1)}(\omega\tau_\alpha)}{\alpha_0^2} - \frac{H_2^{(1)}(\omega\tau_\beta)}{\beta_0^2}.$$

Si la fuerza es horizontal el procedimiento es similar. Las expresiones resultantes son

$$G_{R\omega x} = \Lambda \frac{i}{8\rho} (A_0 - B_0) \sin j_0 \quad (3.45)$$

y

$$G_{j_0 x} = \Lambda \frac{i}{8\rho} (A_0 + B_0) \cos j_0. \quad (3.46)$$

3.2.2 CASO 3D.

La obtención de las soluciones fundamentales aproximadas para una fuente puntual sigue los mismo lineamientos que en las subsecciones anteriores. Sabemos que al aplicar una fuerza vertical el desplazamiento radial y tangencial a lo largo de cualquier rayo en un espacio homogéneo completo es

$$u_r = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{r}\right) f_1 \cos j_0 \quad (3.47)$$

y

$$u_\theta = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{r}\right) f_2 \sin j_0,$$

Sección 3.3 VALIDACIÓN.

donde

$$f_1 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \frac{2i}{\omega\tau_\alpha} - \frac{2}{(\omega\tau_\alpha)^2}\right] e^{-i\omega\tau_\alpha} + \left[\frac{2i}{\omega\tau_\beta} + \frac{2}{(\omega\tau_\beta)^2}\right] e^{-i\omega\tau_\beta},$$

$$f_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \left[\frac{i}{\omega\tau_\alpha} + \frac{1}{(\omega\tau_\alpha)^2}\right] e^{-i\omega\tau_\alpha} + \left[1 - \frac{2i}{\omega\tau_\beta} - \frac{2}{(\omega\tau_\beta)^2}\right] e^{-i\omega\tau_\beta},$$

y r es la distancia entre el receptor y la fuente.

Por otra parte al sustituir 3.35 en 3.31 el desplazamiento toma la forma siguiente para cualquier rayo

$$u(\omega, x) = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z}\right)^{\frac{n+3}{2}} \frac{c_0 \tau_r}{R_w} u^0(x_r) \cdot e^{-i\omega\tau_\alpha}. \quad (3.48)$$

Si $\omega \gg 0$ entonces f_1 y f_2 se comportan como $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 e^{-i\omega\tau_\alpha}$ y $e^{-i\omega\tau_\beta}$, respectivamente. En ese caso 3.48 y 3.47 tiene la misma estructura en ambas componentes, que en el caso del medio heterogéneo. De igual forma que en el problema bidimensional proponemos una generalización del desplazamiento, consistente con la solución del campo cercano para cualquier frecuencia y la teoría de rayos

$$G_{R_{wz}}(\omega, x) = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z}\right)^{\frac{n+3}{2}} \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{1}{R_w(x)}\right) f_1 \cos j_0 y \quad (3.49)$$

$$G_{j_{0z}}(\omega, x) = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z}\right)^{\frac{n+3}{2}} \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{1}{R_w(x)}\right) f_2 \sin j_0. \quad (3.50)$$

Las expresiones para el caso de fuerza horizontal son

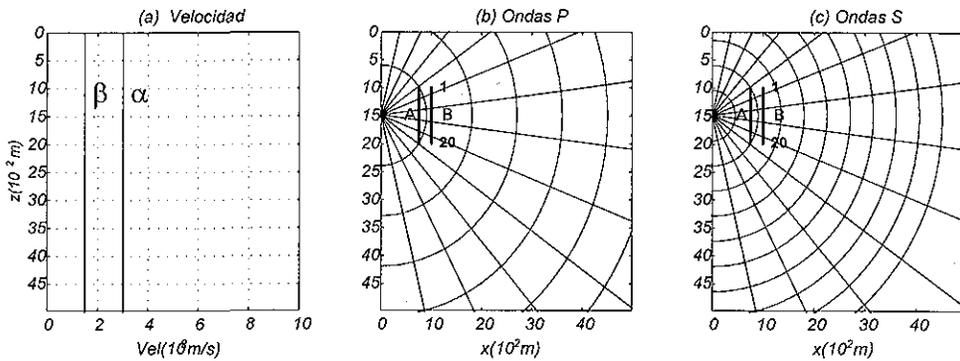
$$G_{R_{wx}}(\omega, x) = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z}\right)^{\frac{n+3}{2}} \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{1}{R_w(x)}\right) f_1 \sin j_0 \cos \theta \quad (3.51)$$

$$G_{j_{0x}}(\omega, x) = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z}\right)^{\frac{n+3}{2}} \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{1}{R_w(x)}\right) f_2 \cos j_0 \cos \theta. \quad (3.52)$$

3.3 VALIDACIÓN.

Con el fin de verificar la bondad de nuestra aproximación calculamos tres ejemplos tridimensionales, el caso 2D se estudió en Sánchez-Sesma *et al.* (2001), en los cuales se consideran propiedades de materiales que podemos considerar de interés para estudios sísmicos. En cada uno de ellos se comparan los resultados obtenidos de forma analítica (línea continua) contra los calculados empleando el esquema de diferencias finitas de cuarto orden dado en la sección 2.5 (línea punteada).

Figura 3.3 Pulso triangular.



3.4 Propiedades del medio homogéneo a) Velocidades b) y c) Rayos y frentes a cada 3 s.

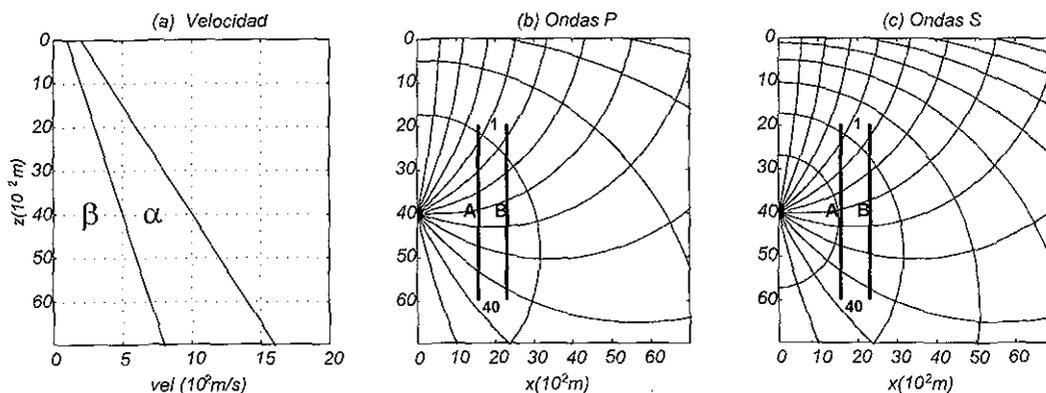
Como punto de partida estudiamos un caso homogéneo, las propiedades del medio y la posición de las estaciones se ilustran en la figura 3.4 ($\alpha = 300 \text{ m/s}$, $\beta = 150 \text{ m/s}$ y $\rho = 1 \text{ T/m}^3$). Se incluyen los rayos y frentes de onda que están dibujados a intervalos de 3 s. Se muestran los desplazamientos horizontal u y vertical w en el plano xz para $k = 0$ y 1, *i.e.* fuerza vertical y horizontal, respectivamente (figuras 3.7 y 3.8). La excitación fue un pulso triangular con $t_s = 0.51 \text{ s}$ y $t_p = 1.0 \text{ s}$ (ver figura 3.3).

Observamos que el acuerdo es excelente. La justificación para incluir el ejemplo homogéneo es probar la validez de nuestro método numérico de

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

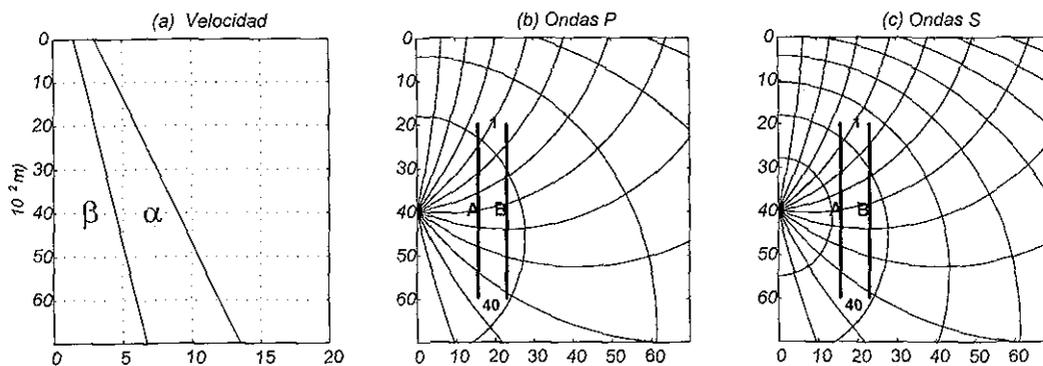
Sección 3.3 VALIDACIÓN.

referencia.



3.4 Propiedades del medio heterogéneo M1 a)Velocidades b)Rayos y frentes a cada 3 s.

Procedimos a estudiar los desplazamientos en dos materiales mas (M1 y M2). En el primero $\alpha(0) = 200 \text{ m/s}$, $\beta(0) = 100 \text{ m/s}$, $\rho(0) = 1 \text{ T/m}^3$ y $h = 1000 \text{ m}$, la heterogeneidad es grande. La fuente fue un pulso triangular con $t_p = .6$ y $t_s = .31 \text{ s}$. La solución analítica aproximada se presenta en las figuras 3.9 y 3.10. Se utilizó una malla de 350×350 a intervalos de 20 m , esta es la razón por la cual se presentan pequeñas oscilaciones en las estaciones donde la velocidad es pequeña, pues el muestreo por longitud de onda es muy bajo.



3.6 Propiedades del medio heterogéneo a)Velocidades. b) y c) Rayos y frentes a cada 3 s.

Las gráficas 3.11 y 3.12 muestran los resultados para un medio que tiene como datos $\alpha(0) = 300 \text{ m/s}$, $\beta(0) = 150 \text{ m/s}$, $\rho(0) = 1 \text{ T/m}^3$ y $h = 2000 \text{ m}$. La

Capítulo 3 FUNCIONES DE GREEN APROXIMADAS

fuelle y la malla tiene las mismas características del ejemplo anterior. En ambos casos el acuerdo es muy bueno, lo que nos da indicios de que nuestras hipótesis son correctas en un rango de interés ingenieril. Nótese que las fórmulas predicen correctamente tanto la amplitud como el tiempo de arribo de las ondas P y S.

Sección 3.3 VALIDACIÓN.

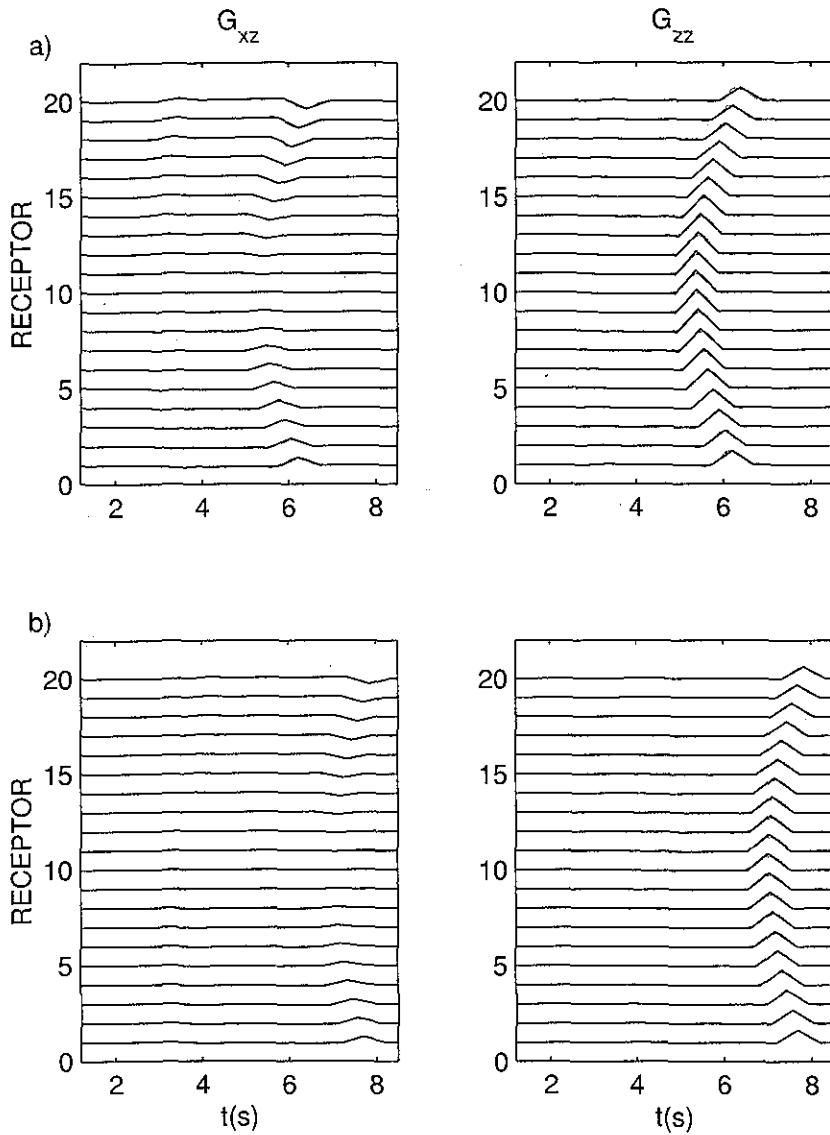


Figura 3.7 a) y b) Desplazamientos en un medio homogéneo para una fuerza vertical en los conjuntos de estaciones A y B, respectivamente. Con línea continua la solución analítica y con discontinua la calculada con el MDF.

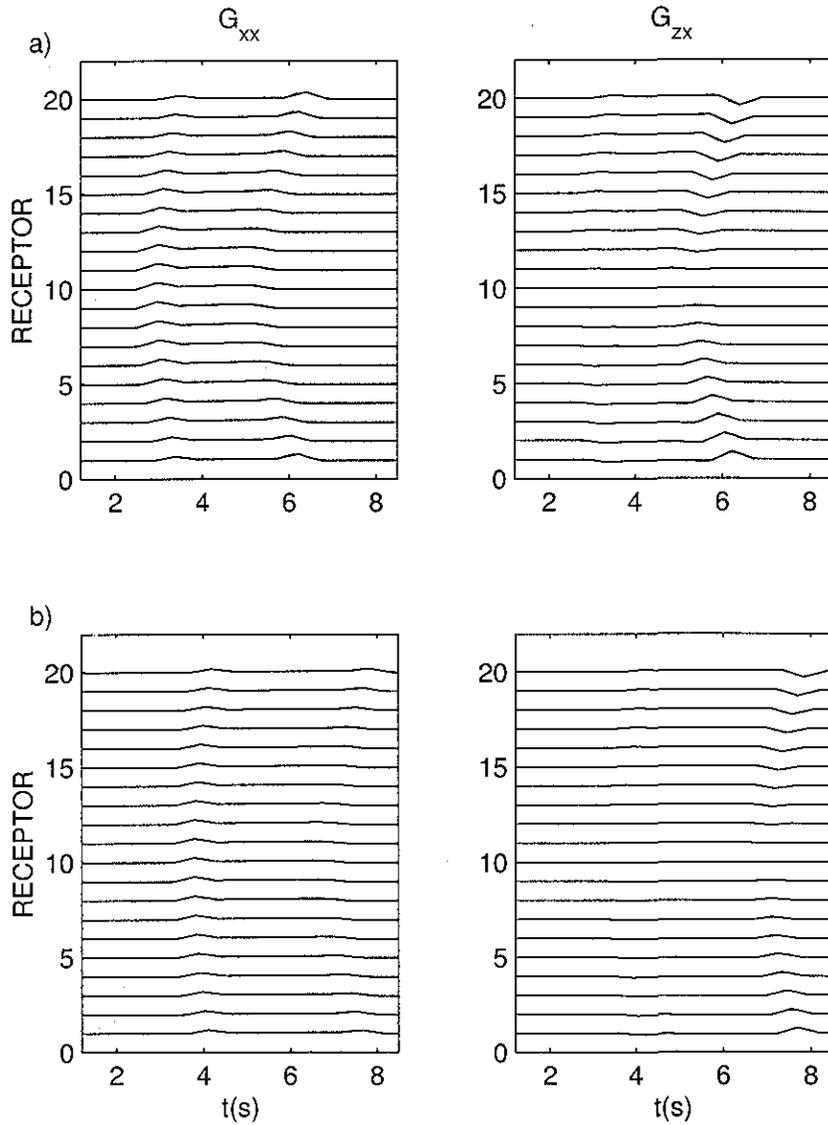


Figura 3.8 a) y b) Desplazamientos en un medio homogéneo para una fuerza horizontal en los conjuntos de estaciones A y B, respectivamente. Con línea continua la solución analítica y con discontinua la calculada con el MDE.

Sección 3.3 VALIDACIÓN.

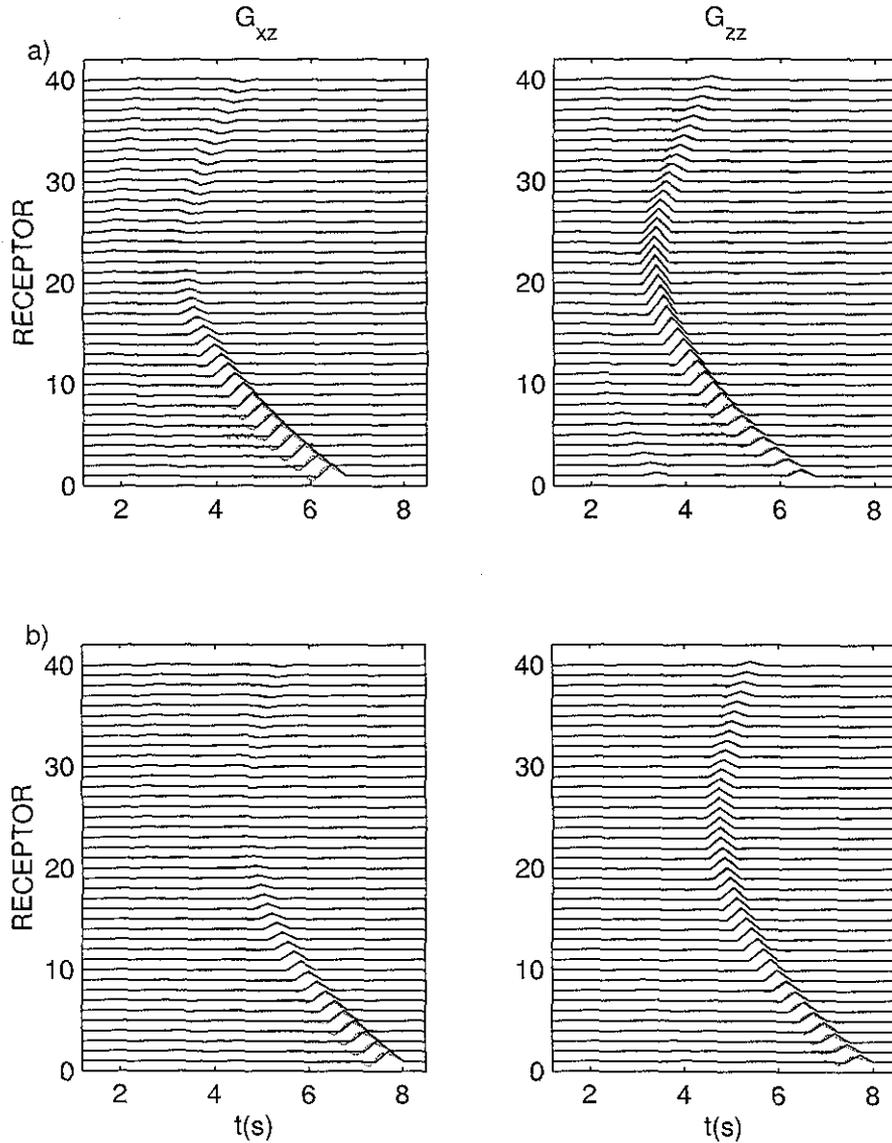


Figura 3.9 a) y b) Desplazamientos en M1 para una fuerza vertical en los conjuntos de estaciones A y B, respectivamente. Con línea continua la solución analítica y con discontinua la calculada con el MDF.

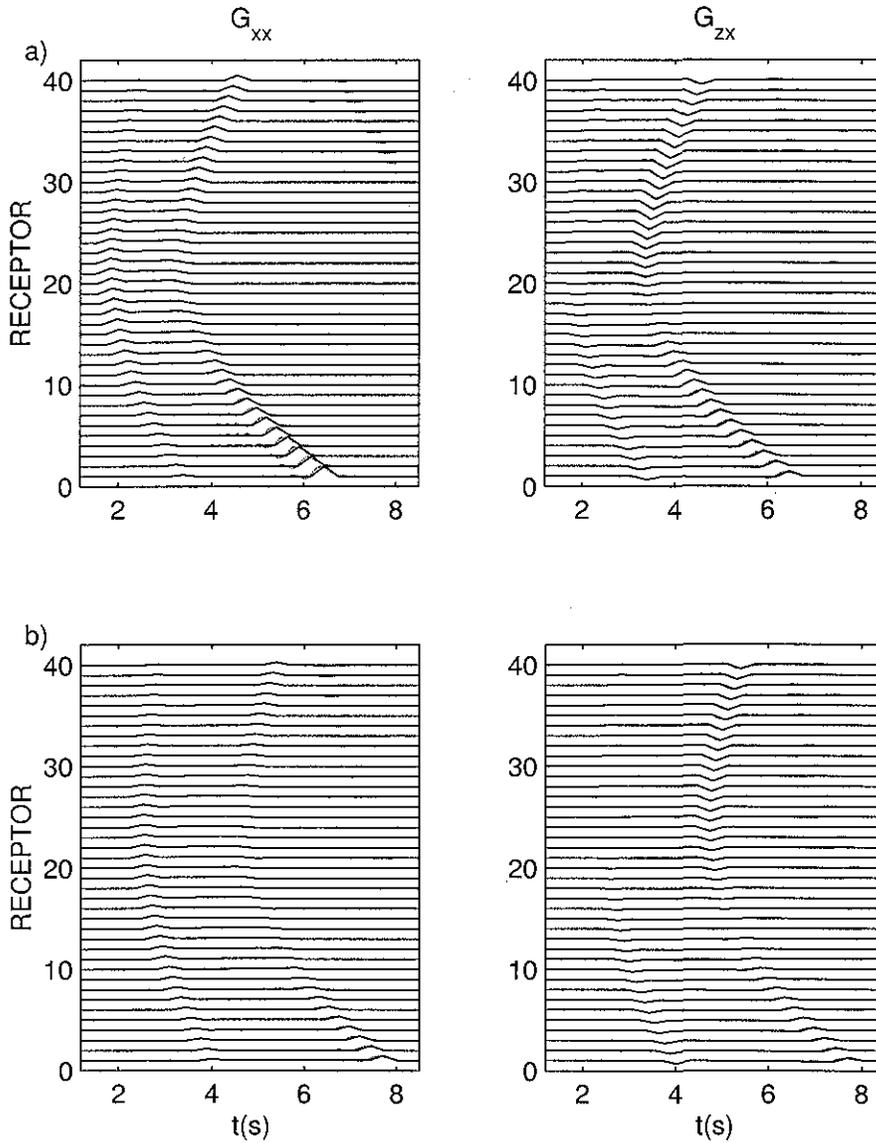


Figura 3.10 a) y b) Desplazamientos en M1 para una fuerza horizontal en los conjuntos de estaciones A y B, respectivamente. Con línea continua la solución analítica y con discontinua la calculada con el MDF.

Sección 3.3 VALIDACIÓN.

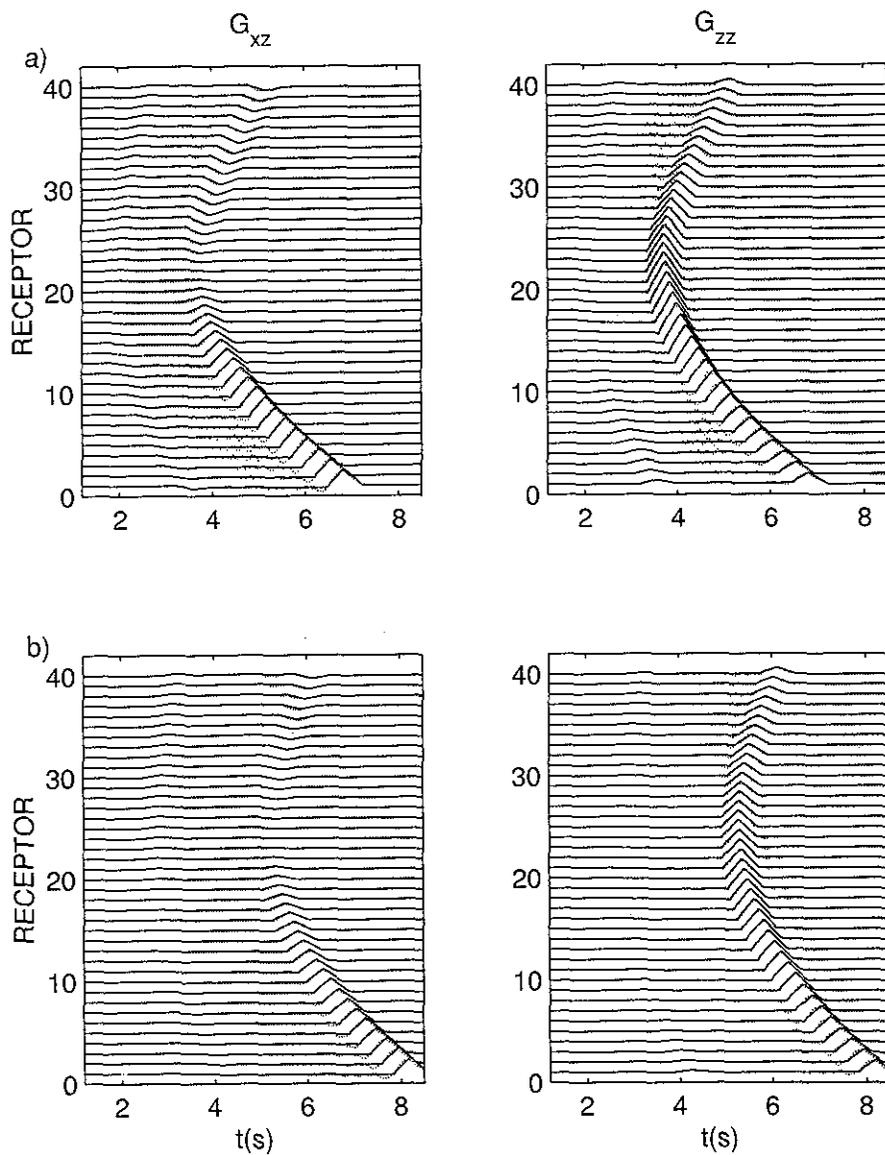


Figura 3.11 a) y b) Desplazamientos en M2 para una fuerza vertical en los conjuntos de estaciones A y B, respectivamente. Con línea continua la solución analítica y con discontinua la calculada con el MDF.

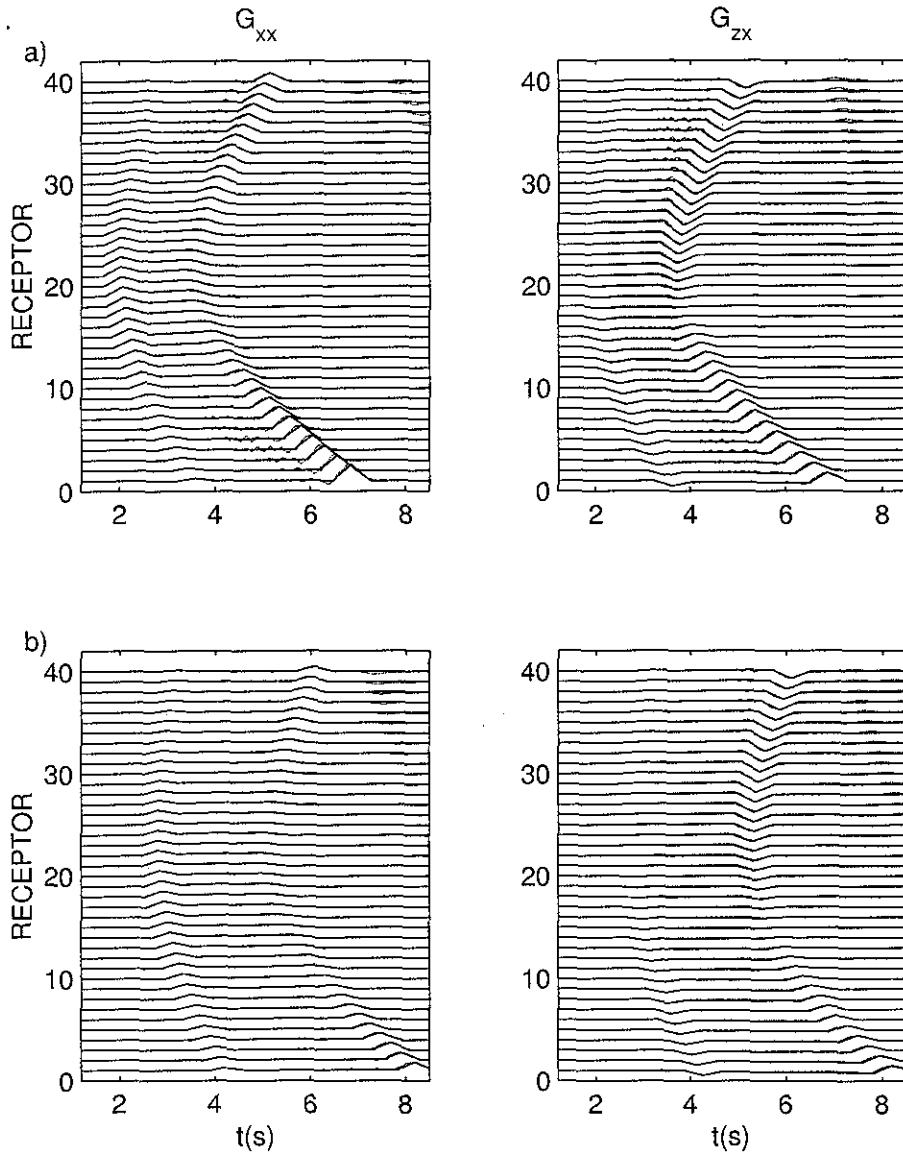


Figura 3.12 a) y b) Desplazamientos en M2 para una fuerza horizontal en los conjuntos de estaciones A y B, respectivamente. Con línea continua la solución analítica y con discontinua la calculada con el MDF.

Capítulo 4

APLICACIONES

El fin último de nuestra investigación es utilizar las expresiones de las funciones de Green en el contexto de los métodos de frontera para dar una aproximación de las respuesta sísmica en topografías y cuencas sedimentarias. En esta etapa de la investigación presentamos dos aplicaciones bidimensionales sencillas. La primera es el cómputo de los desplazamientos del caso antiplano en una topografía sujeta a la acción de una fuente puntual. Se muestran comparaciones con cálculos realizados utilizando el MEF. La segunda es el estudio de algunas cuencas aluviales heterogéneas sobre un semiespacio homogéneo, la excitación es un frente de ondas SH.

4.1 TOPOGRAFÍA.

El sistema de ecuaciones integrales que describe el comportamiento de un semiespacio con una irregularidad topográfica se plantea en términos de las condiciones de frontera. Dado que no se consideran cargas en las laderas las tracciones deben ser nulas. La ecuación donde queda plasmado lo anterior se escribe a continuación, en ella se asume que el desplazamiento está dado por la suma de un campo incidente $u^{(0)}$ (en este caso debido a una fuente puntual) y el campo atribuido a la difracción u

$$\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}) + \int_{S_e} \phi(\boldsymbol{\xi})T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})dS = t^{(0)}. \quad (4.53)$$

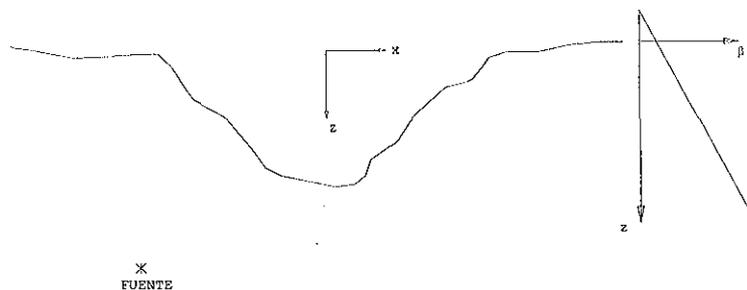


Figura 4.1 Topografía irregular heterogénea

Donde ϕ =densidad de fuerza, T = tracciones asociadas a la función de

Green, $t^{(0)}$ = tracciones debidas al campo incidente.

La expresión 4.53 se discretizó asumiendo una ϕ constante para cada elemento de frontera, con lo cual construimos un sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

El primer ejemplo que mostramos son los desplazamientos un semiespacio homogéneo cuyos resultados comparamos en el dominio del tiempo con el MEF. Utilizamos elementos lineales y el método de Newmark. Las propiedades son $\beta = 200 \text{ m/s}$ y $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y las estaciones están localizadas en la superficie del semiespacio desde -248 m a 248 m separadas por intervalos iguales. La excitación es un pulso triangular con $t_p = 0.7 \text{ s}$ y $t_s = 0.75 \text{ s}$ y está ubicada en $(0, 500) \text{ m}$.

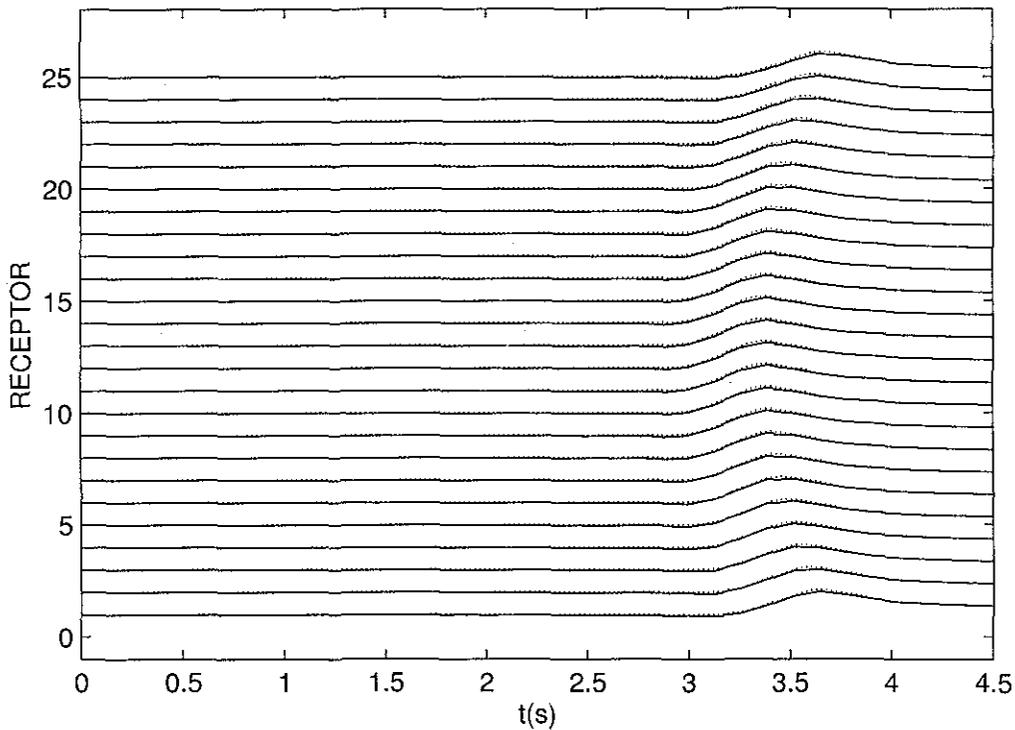


Figura 4.2 Desplazamientos para un medio homogéneo con $\beta = 200 \text{ m/s}$ y $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Sección 4.1 TOPOGRAFÍA.

El problema físico para este ejemplo carece de interés, sólo pretendemos ver la consistencia entre ambos métodos. La concordancia es excelente. La figura 4.2 muestra la amplitud del desplazamiento en los tiempos 0.99, 1.58, 2.42 y 3.26 s.

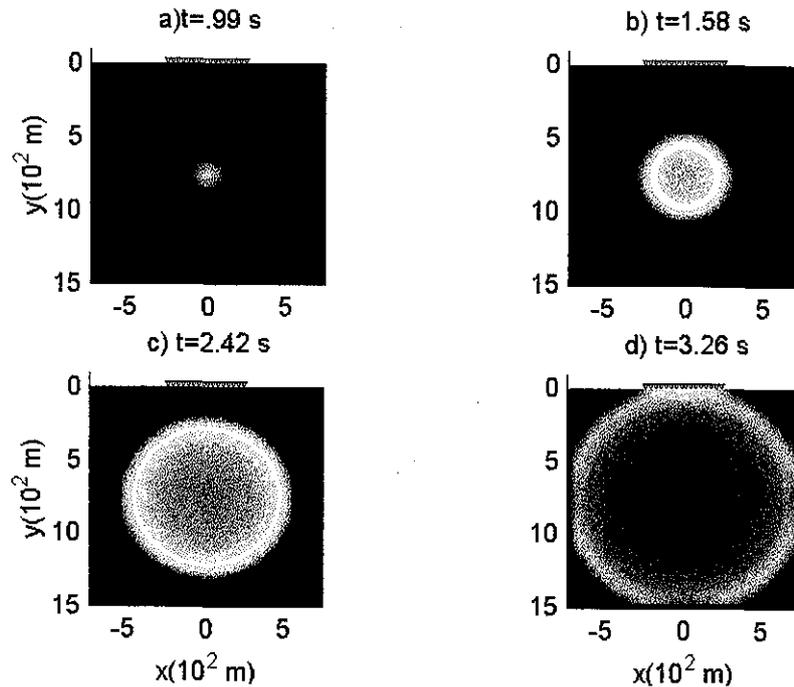


Figura 4.3 Amplitud del desplazamiento en el medio.

El segundo ejemplo es un semiespacio heterogéneo $\beta(0) = 200m/s$, $\rho(0) = 1000kg/m^3$ y $h = 500, 1000, 1500$ y 2000 m para las figuras 4.4 a) b), c) y d), respectivamente. La fuente y las estaciones están ubicadas de la misma forma que en el medio homogéneo. La solución se compara con el MEF (puntos) en el cual se ha incluido la heterogeneidad de forma "exacta", *i.e.* no se han utilizado estratos, sino que al construir las matrices de rigideces en cada punto de integración se dio el módulo de cortante. Se observan discrepancias, atribuibles a nuestra aproximación (línea continua) conforme la h es mayor, pero para valores intermedios resultan pequeñas para fines ingenieriles, pues se estima exactamente el tiempo de arribo y la amplitudes son del orden de nuestro método de referencia. Se incluye la propagación en el dominio para $h = 2000$ m.

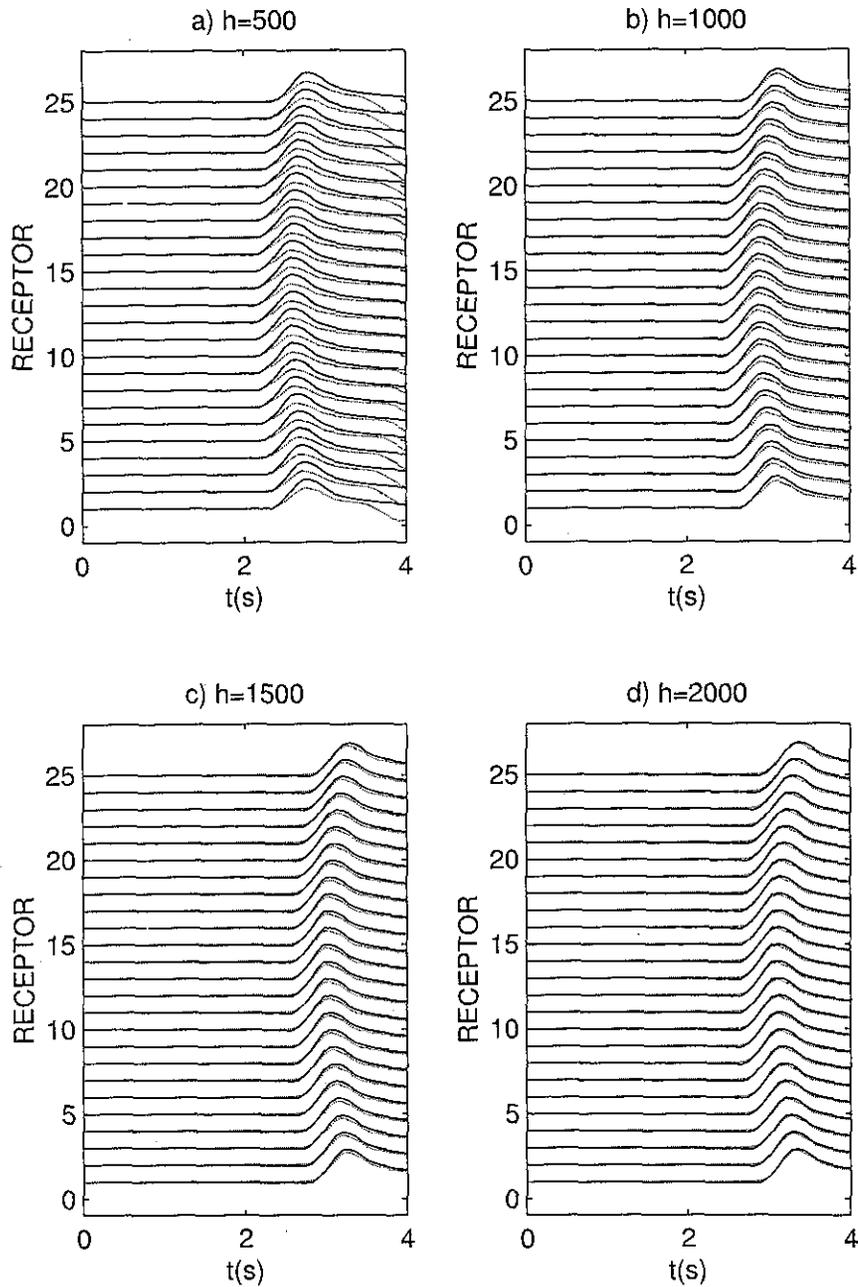


Figura 4.4 Comparación con el MEF (línea punteada) para un medio con $\beta(0) = 200m/s$ y $\rho(0) = 1000kg/m^3$ y a) $h = 500$ b) $h = 1000$ c) $h = 1500$ y d) $h = 2000.m$

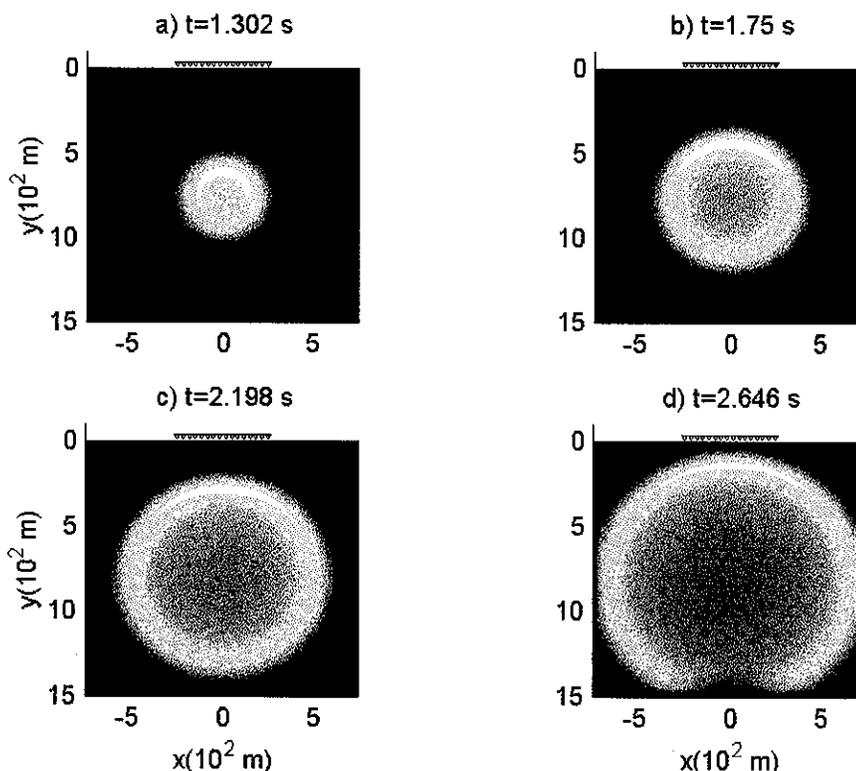


Figura 4.5 Amplitud del desplazamiento en el medio heterogéneo ($h = 2000$ m).

Una vez que hemos visto que nuestra formulación integral es consistente con el MEF calculamos los desplazamientos en un medio heterogéneo con $h = 1500$ m pero incluimos una irregularidad en la topografía, un montículo senoidal.

Variamos la fuente en 4 posiciones (0,100), (0,200), (0,300) y (0,500). La excitación fue un pulso de Ricker con $tp = 0.5$ y $ts = 0.5$ s. Las estaciones están localizadas de -400 a 400 m. Los resultados se muestran en las figuras 4.7 a), b), c) y d). Además se incluye un cálculo homogéneo para $h \rightarrow \infty$ (figura 4.6) con el fin de tener un parámetro de comparación.

Los resultados indican que existe una amplificación con el Ricker utilizado debido a la combinación del efecto topográfico y la heterogeneidad. Obviamente con la señal empleada no podemos hacer aseveraciones generales sobre el ejemplo, por lo que nos auxiliamos de gráficas espacio-frecuencia (figura 4.8) donde vemos que para periodos grandes el efecto en la parte

Capítulo 4 APLICACIONES

central es mucho más acusado y en alta frecuencia no hay diferencias sustanciales en las funciones de transferencia. Obviamente no podemos hacer afirmaciones sobre el comportamiento del suelo con unos cuantos ejemplos, ni siquiera con muchos más, pero si podemos recalcar la importancia que tiene el efecto combinado en el comportamiento. Un estudio más detallado del problema será objeto de investigación futura.

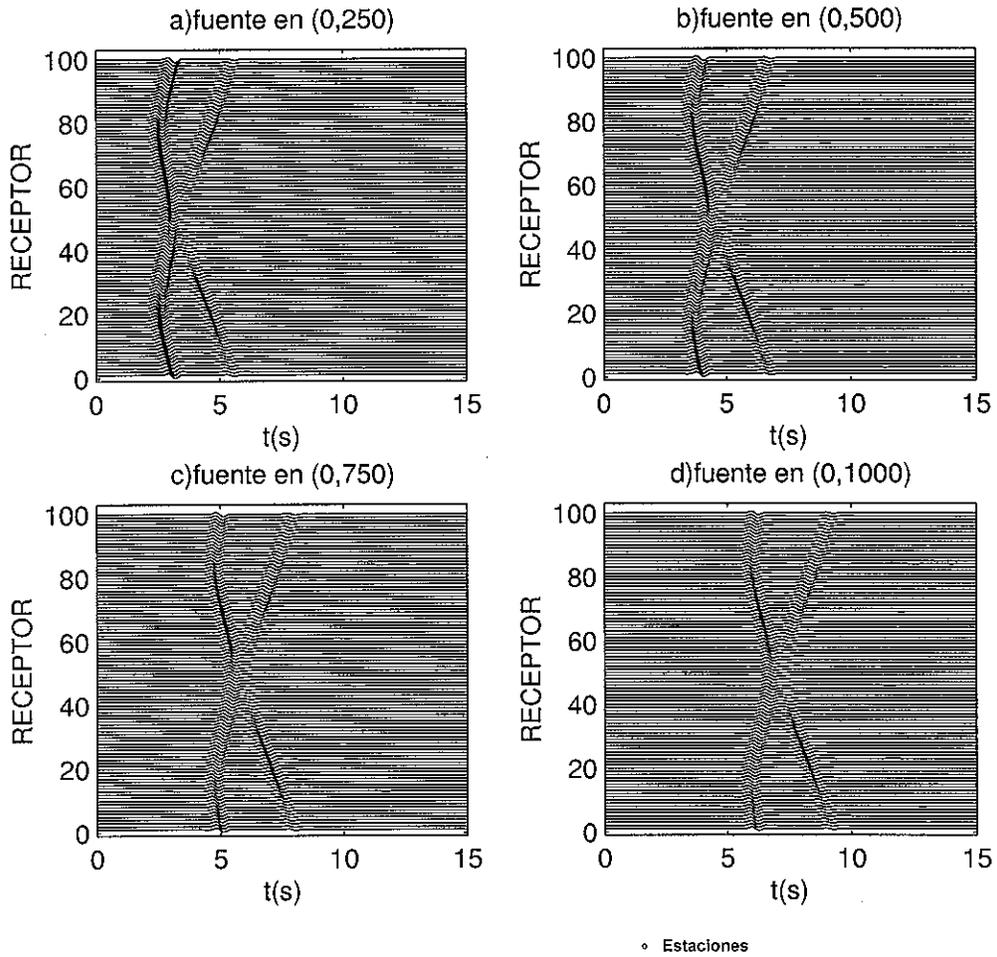


Figura 4.6 Sismogramas sintéticos en la superficie. Las propiedades del medio son $\beta(0) = 200m/s$ y $\rho(0) = 1000kg/m^3$. La fuente está localizada en (0,500).

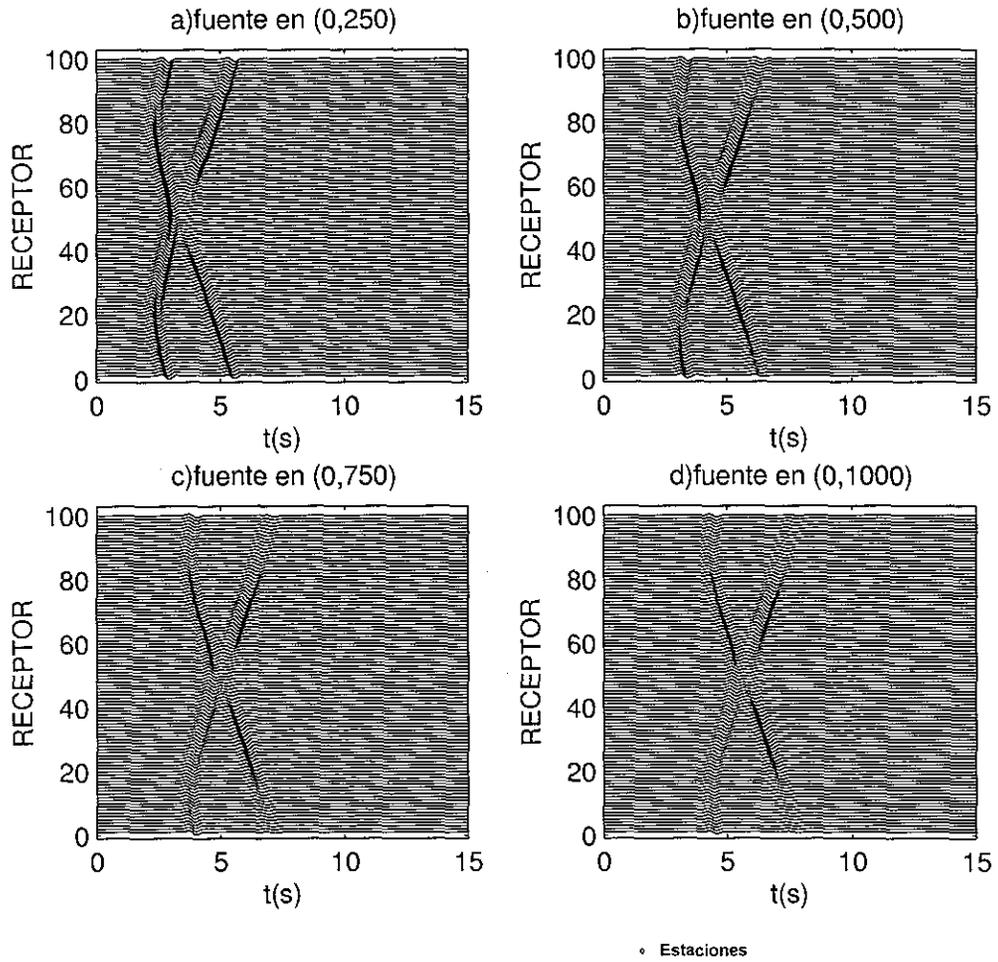


Figura 4.7 Sismogramas sintéticos en la superficie. Las propiedades del medio son $\beta(0) = 200m/s$ y $\rho(0) = 1000kg/m^3$ y $h = 2000$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sección 4.1 TOPOGRAFÍA.

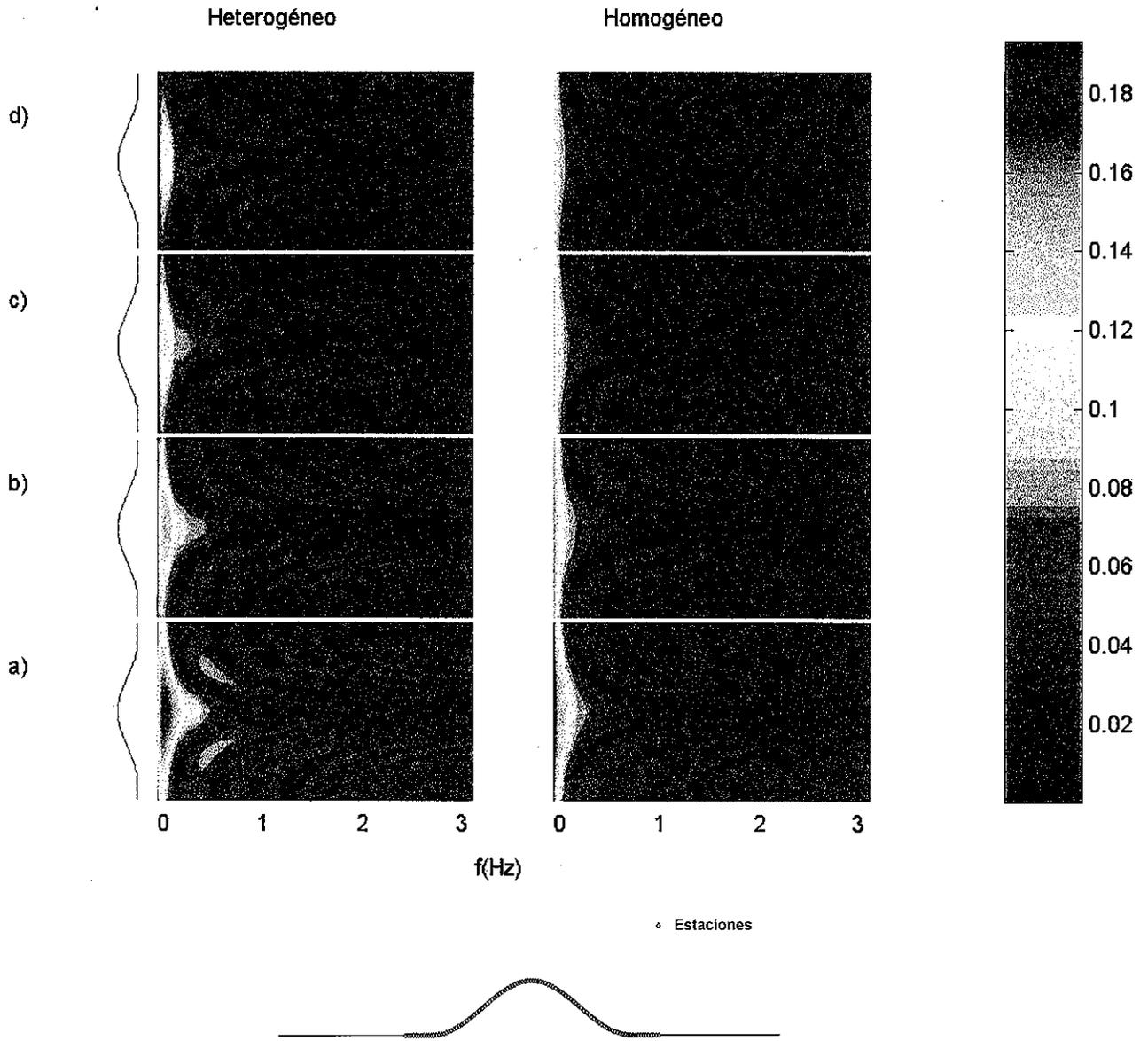


Figura 4.8 Gráficas espacio-frecuencia. Las ordenadas van de -400 a 400 m. La fuente está localizada en (0,1000), (0,750), (0,500) y (0,250) m en a), b), c) y d), respectivamente

4.2 CUENCAS SEDIMENTARIAS.

Con el fin de analizar las principales características del comportamiento en una cuenca sedimentaria inhomogénea ante la incidencia de un frente de ondas SH y puntualizar las diferencias con el caso homogéneo, se calcularon cuatro ejemplos: dos inclusiones semicilíndricas heterogéneas y dos homogéneas. En los primeros dos modelos las reflexiones laterales de las ondas superficiales tienen una gran influencia en el desplazamiento total en la superficie libre en comparación con los modelos homogéneos en los que el desplazamiento tiene influencia tanto de las reflexiones verticales como de las laterales, lo que produce grandes diferencias en el movimiento dependiendo de la ubicación de las estaciones en superficie. Debido a su importancia este efecto se tiene que considerar en estudios de cuencas no homogéneas, ya que puede haber una significativa subestimación de la amplificación sobre todo en los límites de la cuenca.

El detalle de los modelos, la formulación y los resultados se presenta en el apéndice A.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Se presentaron un conjunto de funciones de Green analíticas aproximadas para un medio elástico, isótropo y heterogéneo.

Las expresiones se verifican comparándolas con los Métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos, en los casos 3D y 2D, respectivamente. El acuerdo es muy bueno y alentador. Se observa en los ejemplos una correlación mejor con los resultados numéricos de referencia al incrementarse el gradiente. En esa circunstancia, el medio tiende a ser homogéneo y la hipótesis del desacoplamiento de las componentes compresional y de cortante se cumple.

Queda pendiente hacer un análisis sobre el rango de validez de nuestras expresiones, definiendo y evaluando una medida del error. Las pruebas hasta ahora mostradas no son contundentes, pero si permiten ver que para problemas de la ingeniería nuestras fórmulas son adecuadas.

La ventaja de nuestras funciones es su sencillez y fácil cálculo. Las fórmulas son regulares en todo el dominio y el tratamiento de las singularidades en el punto de aplicación de las fuerzas es convencional. Además, si se conocen los frentes de onda, los rayos, el tiempos de viaje y el factor de dispersión geométrica, pueden extenderse a otras reologías en las que las velocidades y densidades varíen suavemente.

Al emplear nuestras aproximaciones en el Método de Elementos de Frontera extendemos su dominio de aplicación. Prácticamente con el mismo costo computacional necesario para resolver un problema homogéneo podemos calcular la respuesta en un medio heterogéneo.

Aún cuando el fin último es explicar los fenómenos físicos generados en medios heterogéneos, en esta etapa de la investigación la atención no se centró en ese objetivo. Sin embargo, con los resultados obtenidos en topografías y cuencas sedimentarias concluimos que el efecto topográfico y la heterogeneidad pueden inducir un incremento en la amplificación y duración del movimiento.

Referencias

- Abramowitz, M. y Stegun, I.A (1972). Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York.
- Arfken, G. B. y H. J. Weber (1995), *Mathematical Methods for physicists*, 4ª Edición, Academic Press, Inglaterra.
- Bard, P y B. Tucker (1985), Ridge and tunnel effects: comparing observations with theory, Bull. seism. Soc. Am, 75, 905-922
- Ben-Menahem, A. y W. B. Beydoun (1985). Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - I. General theory, Geophys. J. R. astr. Soc. 82, 207-234.
- Beydoun, W. B. y A. Ben-Menahem (1985). Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - II. A canonical problem, Geophys. J. R. astr. Soc. 82, 235-262.
- Bielak, J., O. Ghattas y H. Bao (1998). Ground motions using 3D finite element methods, The Effects of Surface Geology on Seismic Motion Vol. I, K. Irikura, K. Kudo, H. Okada and T. Sasatani (Eds.), Balkema, Rotterdam, 121-133.
- Bonnet, M. (1995), Équations intégrales et éléments de frontiere. Applications en Mécanique des Solides et des Fluides, 1ª Edición, CNRS Éditions y Éditions Eyrolles, Francia.
- Benites, R y K. Aki (1994), Ground motion at mountains and sedimentary basins with vertical seismic velocity gradient, Geophys. J. Int., 116, 95-118.
- Cerveny V y Ravindra R.(1971), Theory of seismic head waves, University Toronto Press, Toronto.
- Cerveny V, I. A. Molotkov y I. Psencik, (1977), Ray Method in Seismology, Universita Karlova, Praha.
- Cerveny V y I. Psencik, (1979), Ray Amplitudes of Seismic Body Waves in Laterally Inhomogeneous Media, Geophys. J. R. Astr. Soc., 57, 91-106.
- Clements, D., (1998), Fundamental solutions for second order linear elliptic partial differential equations, Computational Mechanics, 22, 26-31
- Courant, R. y D. Hilbert (1953), Methods of Mathematical Physics, 1º edición, Vol. 1,

Wiley, EEUU

Frankel, A. (1993). Three-dimensional simulations of ground motion in the San Bernardino Valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas fault, *Bull. Seism. Soc. Am.* 83, 1020-1041.

Frankel, A. y J. Vidale (1992). A three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa Clara Valley, California, from a Loma Prieta aftershock, *Bull. Seism. Soc. Am.* 82, 2045-2074.

Fujiwara, H. y H. Takenaka (1994). Calculation of surface waves for a thin basin structure using a direct boundary element method with normal modes, *Geophys. J. Int.*, 117, 69-91.

Harkrider D. (1964). Surface waves in multilayered elastic media Part 1, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72, 627-679

Hisada, Y., K. Aki y T. Teng (1993). 3-D Simulations of Surface Wave Propagation in the Kanto Sedimentary Basin, Japan, Part 2: Application of the Surface Wave BEM, *Bull. Seism. Soc. Am.* 83, 1700-1720.

Hughes, T. J. R. (1987), *The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, EEUU.

Manolis, G y R. Shaw (1997), Fundamental solutions to Helmholtz's equation for inhomogeneous media by a first-order differential equation system, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 16,81-94

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery (1992), *Numerical recipes in fortran 77: the art of scientific computing*, 2^o edición, Cambridge University Press, Inglaterra.

Sánchez-Sesma, F. J. y M. Campillo (1991). Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bull. Seism. Soc. Am.* 81, 2234-2253.

Sánchez-Sesma, F. J. y F. Luzón (1995). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 85, 269-284.

Sánchez-Sesma F. J., R. Madariaga y K. Irikura (2001), An Approximate Elastic 2D Green's Function for a Constant-Gradient Medium, *Geophys. J. Int.*, 146, 237-248.

Vrettos, C (2000), Waves in vertically inhomogeneous soils, *Wave Motion in Earthquake Engineering*, WIT, Editores E. Kausel y G. Manolis, 247-282.

Zienkiewicz O.C. y R.L. Taylor (1995), The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems, 4^o edición, Vol 1, McGraw Hill, Inglaterra.

Zienkiewicz O.C. y R.L. Taylor (1995), The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non linearity, 4^o edición, Vol 2, McGraw Hill, Inglaterra.

APÉNDICE A.
SIMULATION OF THE SEISMIC RESPONSE OF
SEDIMENTARY BASINS WITH CONSTANT-GRADIENT OF
VELOCITY.

Simulation of the Seismic Response of Sedimentary Basins with constant-gradient of velocity

By:

Francisco Luzón, Leonardo Ramírez-Guzmán, Francisco J. Sánchez-Sesma and Antonio
Posadas.

To be Submitted to: Pure and Applied Geophysics

7-11-01

Postal address:

Dr. Francisco Luzón Martínez
Departamento de Física Aplicada
Universidad de Almería
Cañada de San Urbano s/n
04120-Almería
SPAIN

e-mail address: *fluzon@ual.es*

Simulation of the Seismic Response of Sedimentary Basins with constant-gradient of velocity

F. Luzón^(1,2), L. Ramírez-Guzmán⁽³⁾, F. J. Sánchez-Sesma⁽³⁾ and A. Posadas^(1,2)

(1) *Departamento de Física Aplicada. Universidad de Almería. Cañada de San Urbano s/n. 04120, Almería, Spain.*

(2) *Instituto Andaluz de Geofísica y Prevención de Desastres Sísmicos.*

(3) *Instituto de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. Cd. Universitaria, Coyoacán 04510, México D.F., México.*

Abbreviated Title: Seismic Response of Basins with Gradient-Velocity

ABSTRACT

The simulation of the seismic response of heterogeneous sedimentary basins under incident plane waves has been computed using the Indirect Boundary Element Method (IBEM). To deal with this kind of basins we used approximate analytical expressions of the two-dimensional Green's functions for a medium with constant-gradient of wave propagation velocity. On the other hand, for the homogeneous half-space underlying the sedimentary basin the full space Green's functions were used. The response of semi-cylindrical heterogeneous basins under incident SH waves was explored by means of the displacements in the frequency-space diagrams and synthetic seismograms. Moreover, we compared these results with those obtained for other homogeneous semicircular ones. The principal differences among them are pointed out. This simulation provided interesting results that displayed a complex amplification pattern in a rich spectrum of frequencies and locations. The maximum amplitudes levels were found for the corners of the heterogeneous sedimentary basins. In time domain some features characterize the seismic response of the basin which include enhanced generation and trapping of surface waves inside the sediments, and the reduced emission of seismic energy to the hard rock. In the heterogeneous models the lateral reflections of surface waves have great influence on the total displacements at the free surface in comparison with the homogeneous models where the displacements have a shared influence among both, vertical and lateral reflections.

Keywords: Boundary element method, Green's function, vertical heterogeneity, sedimentary basins, strong ground motion, seismology.

INTRODUCTION

Local effects due to sedimentary basins can lead to significant spatial and temporal variations of seismic ground motion which can induce to large structural damage when strong and moderate earthquakes occur. Local site response has received significant attention in the past two decades and its characterization has been dealt with using both experimental and numerical analysis (see *e.g.* Aki, 1988 and Sánchez-Sesma, 1996, respectively). A great number of theoretical works on site effects has been focused to study the seismic response of different configurations subjected to specified incoming wavefields. Usually plane waves are assumed and homogeneous sedimentary basins have been considered (*e.g.* Luco *et al.*, 1990; Papageorgiou and Kim, 1991; Sánchez-Sesma *et al.*, 1993; Luzón *et al.*, 1995). The numerical methods that have been widely used to calculate the propagation of elastic waves inside of sedimentary inclusions can be classified in domain, boundary and asymptotic methods. In the first group, where the discretization of the media is required, are included techniques as the finite difference (see *e.g.* Alterman and Karal, 1968) or the finite element method (*e.g.* Lysmer and Drake, 1972). On the other hand, in the boundary methods, where only the discretization of the boundaries is required, there are two main approaches; one is based on the use of complete systems of solutions (Herrera, 1980), and the other, on the use of boundary integral equations (Brebbia, 1978). When the problem of propagation of waves has interest in the high frequency band and the diffraction can be ignored, the asymptotic methods can be useful. Ray theories are based on the asymptotic behavior of the wave equation for the lengthwave $\lambda \approx 0$, and have been used to study the ground motion in sedimentary inclusions (Rial, 1984) or dipping layers (Ziegler and Pao, 1984). On the other hand, in their pioneering work, Aki and Larner (1970) introduced a method based on a discrete superposition of plane waves, which was used to deal with 2D (*e.g.* Bard and Bouchon, 1980) and 3D sedimentary basins (Horike *et al.*, 1990).

The most realistic simulations on elastic wave propagation have been done by using the finite difference method. The recent work of Olsen (2000) where the 3D response of the Los Angeles basin was calculated illustrates well this fact. However, this kind of methods require of much time computation and of large memory supercomputers. Boundary element methods have gained increasing popularity due to its numerical advantages. They reduce by one the dimensionality of the problem, avoid the introduction of fictitious boundaries, and provide high accurate results. In recent years numerical codes using these techniques have been developed to deal with the wave propagation in 3D alluvial basins (Sánchez-Sesma and Luzón, 1995) and 3D topographies (Luzón *et al.*, 1997, 1999). For these methods it is of interest the Green's function of the problem, which represents the solution for a unit force applied in a point into the domain. The availability of these functions is a severe limitation to the boundary element methods, and in fact only for homogeneous unbounded medium can be easily obtained. This reason has limited in some cases, the analysis of sedimentary basins to those with homogeneous properties. However, there is a wide class of problems for which it is reasonable to assume an increase of wave propagation velocities with depth (see *e.g.* Bard and Gariel, 1986; Vrettos, 1990).

In this paper we analyze the ground motion in semi-cylindrical sedimentary inclusions with velocity varying linearly with depth by using an approximate analytic Green's function calculated recently (Sánchez-Sesma *et al.*, 2001; Janod *et al.*, 2001). We illustrate the effects of these type of sedimentary basins by means of frequency-space plots, synthetic seismograms on the free surface, and snapshots at different times of the motion in depth under incident *SH* plane waves.

THE METHOD AND THE GREEN'S FUNCTION

To compute the seismic response of alluvial valleys with velocity varying linearly with depth the Indirect Boundary Element Method is used. In such configuration the refracted displacement inside the basin can be expressed as which can be obtained from the Somigliana's identity (see Sánchez-Sesma and Campillo, 1991). In this equation $G_{ij}(x, \xi)$ is the Green's function of the basin region, that is, the

$$u_i^r(x) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(x, \xi) dS_\xi \quad 1$$

displacement produced in the direction i at x due to the application of a force with value unity at the point ξ in the direction j , and $\phi_j(\xi)$ is the force density in the direction j at ξ . On the other hand the total wavefield in the halfspace is the sum of the so-called *diffracted* and *free-field* waves, where $u_i^{(d)}$ is the displacement of the diffracted waves, $u_i^{(0)}$ is the free-field, and $G_{ij}^*(x, \xi)$ is the Green function of the halfspace region. Traction can be obtained by direct

$$u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(d)} = u_i^{(0)} + \int_{S^*} \phi_j^*(\xi) G_{ij}^*(x, \xi) dS_\xi \quad 2$$

application of Hooke's law and by equilibrium considerations around an internal neighborhood of the boundary. When the boundary conditions are imposed, that is zero tractions on the free surface of the basin and of the halfspace, and continuity of displacements and tractions at the common interface of both medium, the discretized versions of tractions and displacements give a system of linear equations where $\phi(\xi)$ are the unknown that can be used to compute the diffracted and the refracted displacements. For further details on the method and in the discretization process of the surfaces involved we refer to Sánchez-Sesma *et al.* (1993).

Considering an elastic isotropic sedimentary basin with velocity varying linearly, the S velocity and mass density vary with depth inside the basin as

$$\beta(z) = \beta_0 \frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} = \beta(0) \cdot (1 + \gamma z). \quad (3)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} \right)^n = \rho(0) \cdot (1 + \gamma z)^n, \quad (4)$$

where $\beta = S$ wave velocity, $\beta_0 = S$ wave velocity at source depth, $\gamma = 1/h$, where $\alpha(-h) = \beta(-h) = 0$, $\rho =$ mass density, $\rho_0 =$ mass density at source depth and $n \geq 0$. The approximate analytic 2D Green's function for SH waves in this case is (Sánchez-Sesma *et al.*, 2001; Janod *et al.*, 2001):

$$G_{yy}(\omega, x) = \Lambda \frac{i}{4\mu_0} H_0^{(1)}(\omega\tau), \quad (5)$$

where

$$\Lambda = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right)^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\frac{\beta_0 \tau}{R_w}}$$

$i = \sqrt{-1}$, μ_0 = shear modulus, $H_0^{(1)}$ is the Hankel's function of the first kind and zero order, ω = circular frequency, τ = travel time, and $R_w = (1 + \gamma z_0) \sinh(\gamma \beta(0) \tau)$ is the radius of the wavefront. In equation (5) and hereafter the explicit time dependence $e^{-i\omega t}$ is omitted. Note that in the homogeneous case, that is, when the velocity is constant as occurs on the halfspace, the Green's function is

$$G_{yy}^*(\omega, x) = \frac{i}{4\mu_0} H_0^{(1)}(\omega \tau), \quad (6)$$

Therefore equation (6) can be observed as the limit case in which the homogeneous medium is considered, in which case the factor Λ is equal to 1.

RESULTS FOR INHOMOGENEOUS BASINS

Testing the numerical approach

In order to test this numerical approach using the Green's functions for an inclusion with velocity varying linearly under incident *SH* waves, we deal with two cases. First is the limit case where $\gamma = 0$ in equation (6), which corresponds with the that of a homogeneous basin, and second is the case where an inhomogeneous inclusion is considered. Our results are compared with the presented by previous authors using incident *SH* waves in a semi-cylindrical basin. It has been computed the response for the normalized frequency $\eta = 1$, being $\eta = a\omega / \pi \beta_E$ with a = radius of the sedimentary inclusion, and β_E = velocity of S waves in the halfspace. The physical properties of the basin in the homogeneous case studied here are (see figure 1): S wave velocity $\beta_b = \beta_E / 2$, and a mass density of $\rho_b = 2\rho_E / 3$. The discretization has been extended horizontally up to a radius of $2a$. Figure 2 displays the surface amplitudes for incident *SH* plane waves with 30° respect to the vertical. These displacement amplitudes are plotted along the x -axis from $x = -2a$ to $x = +2a$. In the same plot are reproduced by symbols the results of Sánchez-Sesma *et al.* (1993) using the indirect boundary element method, and the exact solution provided by Trifunac (1971). The agreement among the three results is excellent.

In the heterogeneous case the material properties considered are (see figure 1): $\beta_b(0) = \beta_E / 3$, $\beta_b(a) = 2\beta_E / 3$, and a mass density of $\rho_b = 2\rho_E / 3$ ($n = 0$ of equation 4). In the figure 3 are presented the surface amplitudes of the transfer function, for $\eta = 1$, caused by vertical incident *SH* plane waves calculated in this work, and by symbols those computed by Benites and Aki (1994) using a boundary integral-gaussian beam method, and the computed by same authors with the finite element method. The results of the three techniques used independently have some small discrepancies, but the overall agreement is quite good for all the cases.

Examples

In order to analyze the principal characteristics of the displacements produced inside a sedimentary inhomogeneous basin and to stick out the differences with the homogeneous problem, we deal with four models of physical properties in sedimentary basins with semi-cylindrical geometry and with radius equal to 1 km. Two of these inclusions are homogeneous and the other two are heterogeneous, in such a way that different velocity contrasts are considered. In all of the models the same S velocity for the halfspace has been considered $\beta_E = 3$ km/s, and the density inside the sediments is $\rho_b = 2\rho_E / 3$ in the four cases. In the figure 4 are presented the velocity profiles for the four cases. The velocities inside the basins are valid for the range $0 \leq z \leq 1$ km. Therefore these profiles corresponds to the vertical models in $x = 0$.

The models homogeneous A and homogeneous B (HO-A and HO-B) can be observed as sedimentary basins with high and low contrast-velocity, respectively. The heterogeneous A (HE-A) is a model in which the basin has the same S wave velocity in the free surface as the model HO-A, and the same velocity of HO-B in $z = 1$ km. In this way the contrast-velocity between the basin and the halfspace is $2/3$ at this depth. On the other hand the sedimentary inclusion of model heterogeneous B (HE-B) does not have contrast in $z = 1$ km with respect to the bedrock, whereas its velocity at the free surface is equal that in the HE-A at the same position. Note that in the case of HE-B the velocity difference between $z = 0$ and $z = 1$ km is greater that the difference in HE-A between the same depths.

We computed the displacement amplitudes under vertical incident SH waves, in the frequency domain, for 128 frequencies from 0 to 2 Hz on 51 receivers located at the free surface from $x = -2$ km up to $x = 2$ km (the separation between each station is of 80 m). The zero frequency corresponds with the case where no inclusion exists, that is, the solution in the free surface of the halfspace. In the figure 5 are presented these results by means of $f-x$ plots for the four models. In this way one can analyze the transfer function (relative to the amplitude of incident waves) along the x axis and also as a function of the frequency. This provides patterns of amplification which can be related with the position in the basin. The global resonances observed in these plots are characteristics of the behavior of these 2D structures and cannot be predicted using 1D models of the site. On the other hand, it is noticed that the response is completely different in each example, in the frequencies where resonances are produced and in the amplitude levels, even in the case, as the presented here, where all models have the same geometry and the same properties of the halfspace. For example, if the results of models HO-A and HO-B are compared, the fundamental resonances for almost all positions are around 0.7 Hz and 0.35 Hz, respectively. The differences in the amplitude levels are important too, whereas the maximum in HO-A is around 5 times next to the center of the basin, the HO-B model has amplitudes that reach 16 times the incident one. In the higher resonant modes of both basins the divergence of the results are notable as well. These effects are well known and defined. As have been pointed out by previous authors (see for example Bard and Bouchon, 1980; Sánchez-Sesma *et al.*, 1993), when a high-impedance contrast exists, as in HO-B, surface waves are very efficiently generated and reflected at the edges of the basin, and cause a great part of the differences observed among HO-A and HO-B. But let us observe the $f-x$ plot in figure 5 of the heterogeneous HE-A model. Again, these results are different in the frequencies where appear the vibration modes and their amplitude levels, when these are compared with the results of models HO-A and HO-B. But if we fix our attention to the fundamental mode of resonance of HE-A, we can observe that it is located around 0.5 Hz, which is approximately the average value of the fundamental

modes produced in the models HO-A and HO-B. Moreover, the displacement's amplitude levels, about 10 in the centered positions of the basin, are approximately the average value of the amplitudes of the homogeneous models. This behavior is consistent with the fact that HE-A is like an *average* model of HO-A and HO-B, in the sense that it has the same S wave velocity in the free surface as the model HO-A, and the same velocity of HO-B in its maximum depth $z = 1$ km. Anyway, these results are only observed for the fundamental resonance. For the higher modes this compartment is not present at all, and the heterogeneous basin has its own characteristics. In fact, whereas the homogeneous models have approximately the same amplitude level at all the positions over the surface of the basin in each of these resonant modes, the HE-A one has substantial differences depending on the surface location. This is well observed, for example, at the frequency 1.5 Hz, where the amplitude reach the value of 24 on the corners of the basin at the positions $x \approx \pm 1$ km, whereas in other positions more centered on the basin the displacements arrives in some cases to 12. This phenomena was observed too by Bard and Gariel (1986), who studied the case of sedimentary basins in which the shear wave velocity of the sediments increases linearly with depth. This effect which characterize the behavior of the HE-A is present too in the HE-B basin. In the case of HE-B this difference between the amplitudes on the edges of the basin and the locations near of the center it is not as important as in case HE-A. This is possibly due to the fact that there is not contrast velocity in the deep part of this model in $z = 1$ km where the basin has the same S velocity that the halfspace $\beta_E = 3$ km/s.

In order to analyze the effects of these inhomogeneous basins we simulate the displacements in the time domain inside and outside the sedimentary inclusions by means of the synthetic seismograms. Using the transfer functions in the frequency domain and the Fast Fourier Transform algorithm we compute the simulated motion produced in each station with a Ricker wavelet. These calculations are performed considering a characteristic period of $t_p = 1.6$ s, and a time-lag of $t_s = 5$ s. For the sake of comparison of the different results in each of the four sedimentary basins presented in this work, in figure 6 the displacements in time are displayed. The principal variations shown in these pictures belong to the motion at the stations located inside the basins. The propagation of SH energy along the halfspace coming from the various reflections inside the basins is well observed, and has almost the same amplitude levels in models HO-B, HE-A and HE-B. In the inclusion HO-A this kind of waves are practically negligible. This is due to the frequency contents of the pulse considered and to the low velocity contrast of the model which not produces efficiently Love waves inside the basin (Bard and Bouchon, 1980). On the contrary, at these models in which exists higher impedance contrast these surface waves are more efficiently generated and their reflections at the edges of the sedimentary inclusion contributing to produce the longer duration of the signals registered on the receivers of the basin. The pattern of displacements on the surface of the sediments is very complex and is composed principally by the interferences between the different travelling waves that rebound up and down, and the Love waves that propagate laterally. In the homogeneous basin HO-A, due to the low contrast at the interface, great part of the energy is refracted from the basin and is lost outside to the interior of the halfspace. On the contrary, in the model HO-B the energy that goes to the halfspace is less and great part remains inside producing multiple reflections in all the basin-halfspace interface. However, in the heterogeneous models the impedance contrast at their interfaces, and therefore the refraction coefficients, depends on its depth. In this way, for zones next to the free surface the contrast is bigger that in these locations more deeps of the inclusion, providing this situation more lateral reflections than vertical ones. This is well observed in the figures 7

and 8, where snapshots of the displacement for the same 30 different times are shown for the models HO-B and HE-A, respectively. The increment of time of each correlative snapshot is of 0.25 s. In the heterogeneous model the lateral reflections of surface waves have great influence on the total displacements at the free surface in comparison with the homogeneous one where the displacements have a shared influence among both, vertical and lateral reflections. This fact influences on the time duration of the signals inside the basin HE-A and HE-B, which is less than the duration produced in HO-B, where the refraction coefficients are the same along all the interface. This difference over the duration of the displacements, inside of basins with the same velocity on the free surface, is observed too when the inclusions HE-A and HE-B are compared independently in figure 6. This is because for a specific depth $z \neq 0$, the velocity contrast between basin-halfspace in HE-B is smaller than in HE-A, in such a way that when we consider $z = 1$ km there is no contrast in the former model. This causes that vertical reflections be more effective in the model HE-A than in the HE-B.

CONCLUSIONS

We have computed the seismic response of the different homogeneous and heterogeneous models of sedimentary basins using the indirect boundary element method (IBEM) for vertical incidence of *SH* plane waves. We have analysed the results in both frequency and time domains, which show very interesting aspects from the point of view of both the physical phenomena that occur, and their implications to the earthquake engineering and microzonation studies.

The fundamental mode of resonance of a heterogeneous model (HE-A) is approximately the average value of the fundamental modes produced by homogeneous inclusions HO-A and HO-B, which have the same wave velocity in the free surface as the model HE-A and the same velocity in the maximum depth $z = 1$ km of HE-A, respectively. For the higher modes of vibration this average comportment is not present at all, and the heterogeneous basin has its own characteristics. Anyway, these effects have to be known on those microzonation studies where only the fundamental frequency of the site is required. On the other hand, it has been observed that in the heterogeneous models the lateral reflections of surface waves have great influence on the total displacements at the free surface in comparison with the homogeneous models where the displacements have a shared influence among both, vertical and lateral reflections. This behavior produce large differential motions depending on the location in the free surface as has been shown too by means of the amplitude of displacements in frequency-space diagrams. This effect has to be considered in the earthquake engineering studies in heterogeneous sedimentary basins as the analysed here, because on the contrary a significant underestimation of surface amplification, particularly at the edges of the basin, can be considered.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CICYT, Spain, under Grants AMB99-1015-CO2-02, by DGAPA-UNAM, Mexico, under Project IN104998, and by the research team RNM-194 of Junta de Andalucía, Spain.

REFERENCES

- Aki, K., *Local site effects on strong ground motion*, in *Earthquake Engineering and Soil Dynamics II-Recent Advances in Ground Motion Evaluation* (ed. J. Lawrence Von Thun) (American Society of Civil Engineering, 1988) pp. 103-155.
- Aki, K. and K. L. Larner (1970), *Surface Motion of a layered Medium having an irregular interface due to incident plane SH waves*, Journ. of Geoph. Res. 75, 933-954.
- Alterman, Z. and F. C. Karal (1968), *Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods*, Bull. Seism. Soc. Am. 58, 367-398.
- Bard, P.-Y., and M. Bouchon (1980), *The seismic response of sediment-filled valleys. Part I. The case of incident SH waves*, Bull. Seism. Soc. Am. 70, 4, 1263-1286.
- Bard, P.-Y., and J.-C. Gariel (1986), *The seismic response of two-dimensional sedimentary deposits with large vertical velocity gradients*, Bull. Seism. Soc. Am. 76, 343-366.
- Benites, R. and K. Aki (1994), *Ground motion at mountains and sedimentary basins with vertical seismic velocity gradient*. Geophys. J. Int. 116, 95-118.
- Brebbia, C. A., *The boundary element method for engineers*, (Pentech Press, London 1978).
- Herrera, I. (1980), *Variational principles for problems with linear constraints, prescribed jumps and continuation type restrictions*, J. Inst. Maths. and Applics. 25, 67-96.
- Horike, M., H. Uebayashi and Y. Takeuchi (1990), *Seismic Response in three-dimensional sedimentary basin due to plane S wave incidence*, Journ. Phys. Earth 38, 261-284.
- Janod, F., L. Ramírez-Guzmán, F. Luzón, and F. J. Sánchez-Sesma (2001), *An improvement for the 2D Green's functions given in Sánchez-Sesma et al. (2001)*, Geophys. J. Int., Submitted.
- Luco, J.E., H.L. Wong, and F.C.P. de Barros (1990), *Three-dimensional response of a cylindrical canyon in a layered half-space*, Earthq. Engrg. Structl. Dyn. 419, 799-817.
- Luzón, F., S. Aoi, D. Fäh, and F. J. Sánchez-Sesma (1995), *Simulation of the seismic response of a 2D sedimentary basin: A comparison between the indirect boundary element method and a hybrid technique*, Bull. Seism. Soc. Am. 85, 1501-1506.
- Luzón, F., F. J. Sánchez-Sesma, J. L. Rodríguez-Zúñiga, A. M. Posadas, J. M. García, J. Martín, M. D. Romacho, and M. Navarro, (1997), *Diffraction of P, S and Rayleigh waves by three-dimensional topographies*, Geophys. J. Int. 129, 571-578.
- Luzón, F., F.J. Sánchez-Sesma, A. Gil, A. Posadas and M. Navarro (1999). *Seismic response of 3D topographical irregularities under incoming elastic waves from point sources*, Phys. Chem. Earth (A), 24, 3, 231-234.
- Lysmer, J. and L.A. Drake, *A finite element method for seismology*, In *Methods in computational Physics, Vol. 11 Seismology* (ed. Bolt B.A.) (Academic Press, New York 1972).
- Olsen, K. B. (2000). *Site amplification in the Los Angeles basin from three-dimensional modeling of ground motion*, Bull. Seism. Soc. Am. 90, 6B, S77-S94.
- Papageorgiou, A.S. and J. Kim (1991), *Study of the propagation and amplification of seismic waves in Caracas valley with reference to the 29 July 1967 earthquake: SH waves*, Bull. Seism. Soc. Am. 481, 2214-2233.
- Rial, J.A. 1984, *Caustics and focusing produced by sedimentary basins. Application of catastrophe theory to earthquake seismology*, Geophys. J. R. Astr. Soc., 79, 923-938.
- Sánchez-Sesma, F. J., *Strong ground motion and site effects*, in *Computer Analysis of earthquake resistant structures*, (eds. D. E. Beskos and S.A. Anagnostopoulos) (Comp. Mech. Publications, Southampton 1996) pp. 200-229.

- Sánchez-Sesma F.J. and M. Campillo (1991), *Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation*, Bull. Seism. Soc. Am. 481, 2234-2253.
- Sánchez-Sesma, F. J. and F. Luzón (1995), *Seismic response of three dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves*, Bull. Seism. Soc. Am. 85, 269-284.
- Sánchez-Sesma F. J., R. Madariaga and K. Irikura (2001), *An Approximate Elastic 2D Green's Function for a Constant-Gradient Medium*, Geophys. J. Int., 146, 237-248.
- Sánchez-Sesma F.J., J. Ramos-Martínez and M. Campillo (1993), *An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh Waves*, Earthq. Engrg. Structl. Dyn. 422, 279-295.
- Trifunac, M.D. (1971), *Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves*, Bull. Seism. Soc. Am. 61, 1755-1770.
- Vrettos, Ch. (1990), *In-plane vibrations of soil deposits with variable shear modulus: II. Line load*, Intl. J. Numer. Anal. Meth. In Geomech. 14, 649-662.
- Ziegler, F. and Pao, Y.-H., (1984), *Transient elastic waves in a wedge-shaped layer*, Acta Mechanica 52, 133-163.

Affiliations and addresses of authors

- *Francisco Luzón and Antonio Posadas*
Departamento de Física Aplicada. Universidad de Almería
Cañada de San Urbano s/n. 04120-Almería
Spain

e-mail: fluzon@ual.es; aposadas@ual.es

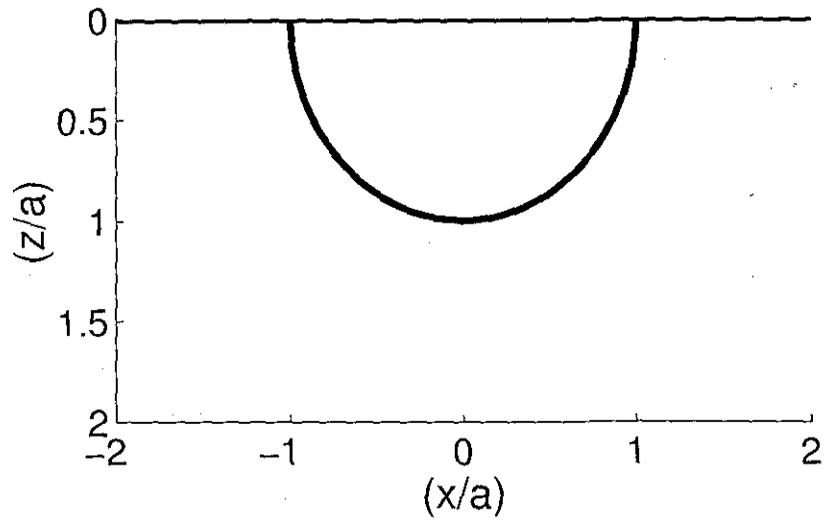
- *Francisco José Sánchez Sesma and Leonardo Ramírez-Guzmán*
Instituto de Ingeniería. UNAM.
Cd. Universitaria
Coyoacán 04510, México D.F.
México

e-mail: sesma@servidor.unam.mx; lrags@pumas.iingen.unam.mx

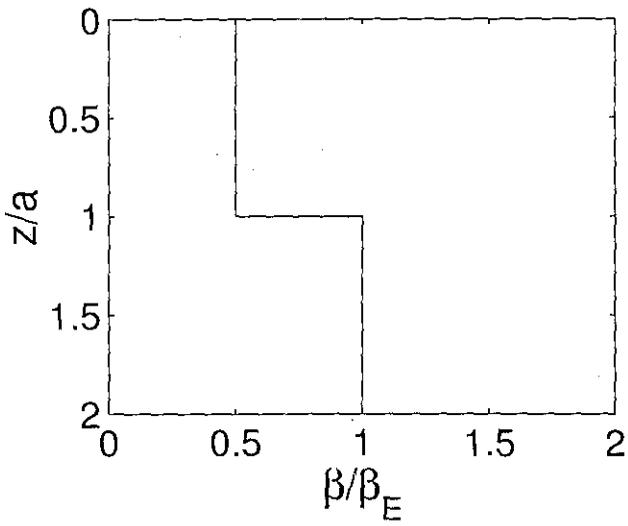
FIGURE CAPTIONS

- Figure 1.- Up) Semi-cylindrical sedimentary basin of radius a . Down) Velocity profiles in depth for $x = 0$ for both, the homogeneous model (S wave velocity $\beta_b = \beta_E / 2$), and the heterogeneous one ($\beta_b(0) = \beta_E / 3$, $\beta_b(a) = 2 \beta_E / 3$). The mass density for both models is $\rho_b = 2\rho_E / 3$ ($n = 0$ of equation 4).
- Figure 2.- Amplitudes of horizontal antiplane displacement for incident SH plane waves with 30° respect to the vertical upon a homogeneous semi-cylindrical sedimentary inclusion. Normalized frequency $\eta = 1$. Solid line corresponds to results obtained in the present study, while solid triangles and circles correspond to the solution of Sánchez-Sesma *et al.* (1993) and Trifunac (1971), respectively.
- Figure 3.- Amplitudes of horizontal antiplane displacement for vertical incident SH plane waves upon a heterogeneous semi-cylindrical sedimentary inclusion. Normalized frequency $\eta = 1$. Solid line corresponds to results obtained in the present study, while solid triangles and circles correspond to the solution provided by Benites and Aki (1994) using a boundary integral-gaussian beam method and the finite element method, respectively.
- Figure 4.- Velocity profiles in depth at $x = 0$ for four semi-cylindrical sedimentary basins of radius $a = 1$ km. The models presented up correspond to homogeneous basins (HO-A and HO-B), whereas the models shown down correspond to heterogeneous ones (HE-A and HE-B). Note that all of the models have the same geometry and the same S velocity for the halfspace $\beta_E = 3$ km/s.
- Figure 5.- Contour maps of transfer function for the displacement in the frequency-space domain ($f-x$) for the vertical incidence of SH waves upon each of the four sedimentary inclusions (see figure 4) considered in the present study.
- Figure 6.- Synthetic seismograms for the horizontal antiplane displacement produced at the free surface of the four models (see figure 4) considered in the present study, under vertical incidence of SH waves. The incident time signal is a Ricker pulse with a characteristic period of $t_p = 1.6 \hat{s}$.
- Figure 7.- Snapshots at different times showing the horizontal antiplane displacement produced by the vertical incidence of a Ricker pulse (SH wave) with a characteristic period of $t_p = 1.6 \hat{s}$ in the homogeneous model HO-B.
- Figure 8.- Snapshots at different times showing the horizontal antiplane displacement produced by the vertical incidence of a Ricker pulse (SH wave) with a characteristic period of $t_p = 1.6 \hat{s}$ in the heterogeneous model HE-A.

FIGURA 1



Homogeneous



Heterogeneous

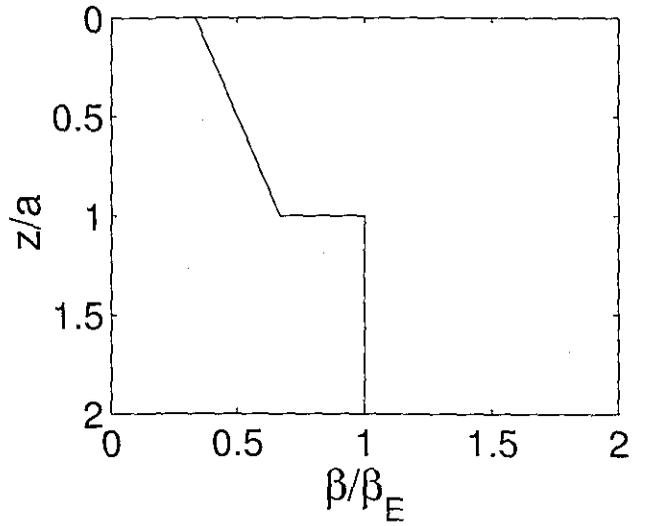


FIGURA 2

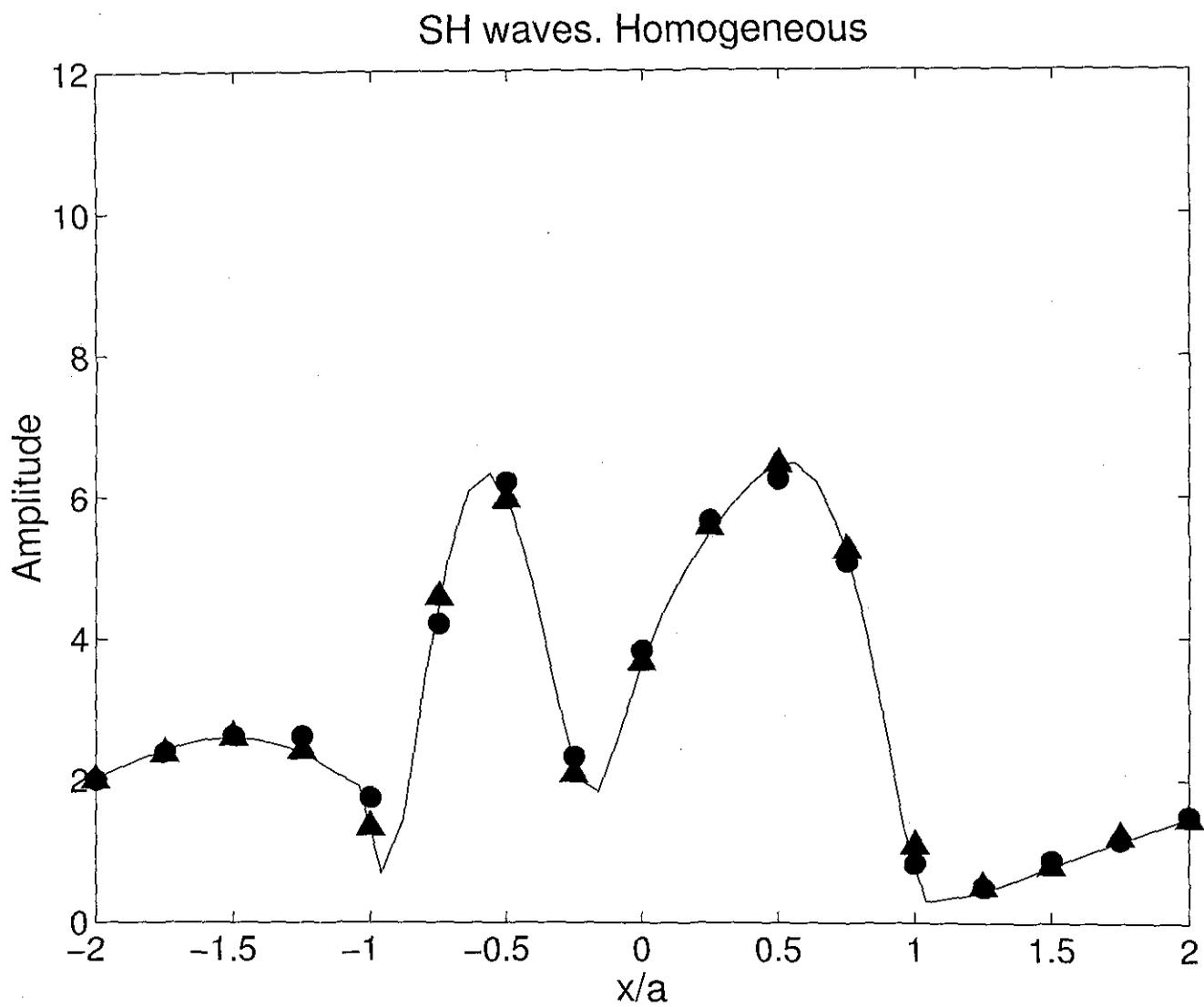


FIGURA 3

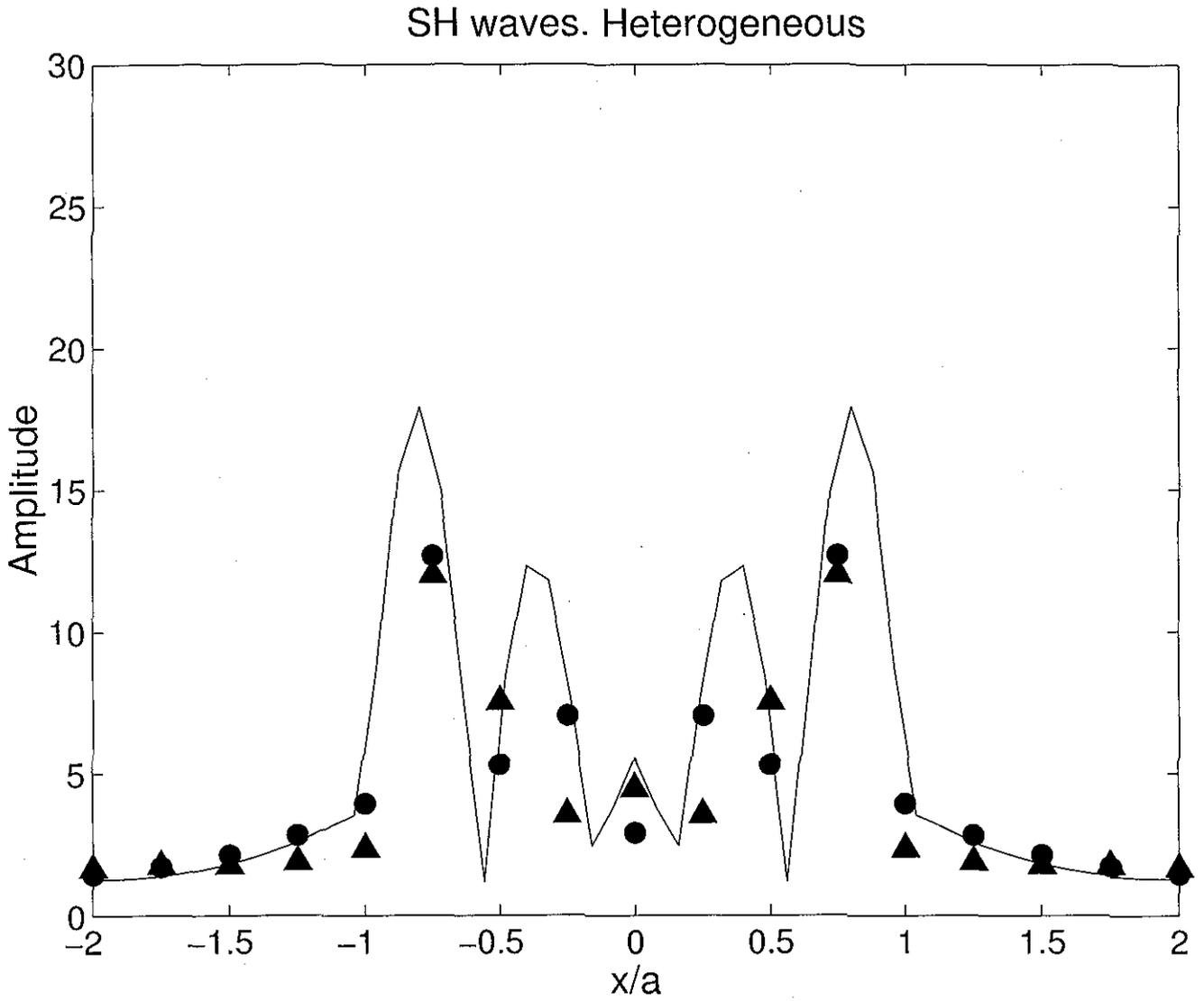
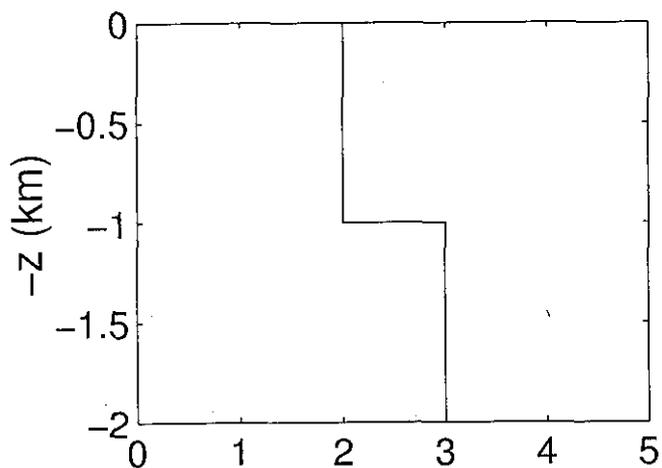
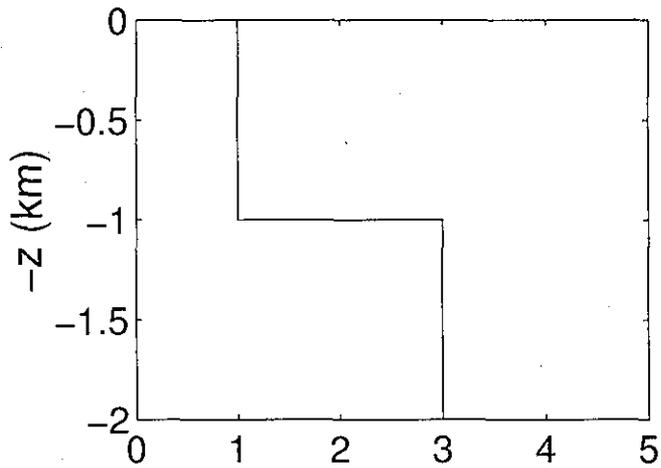


FIGURA 4

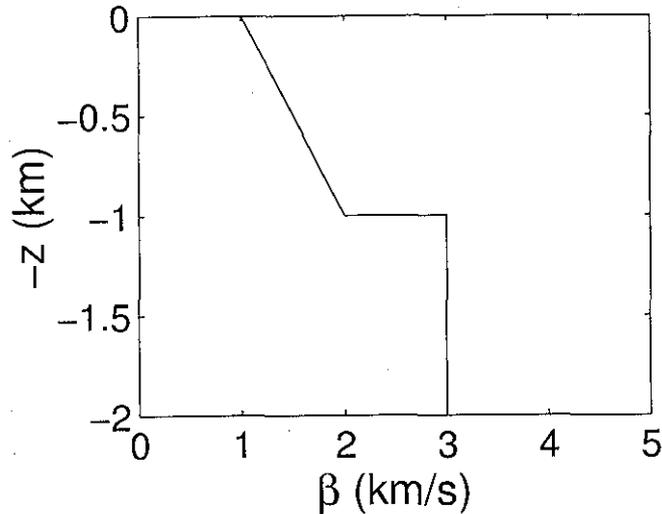
HO-A



HO-B



HE-A



HE-B

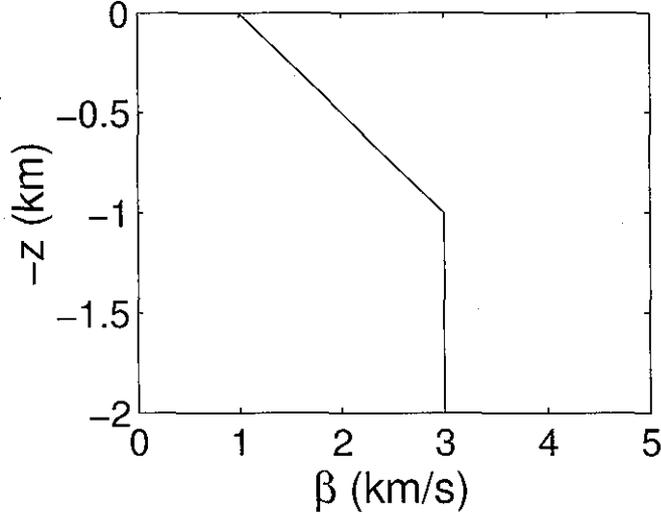
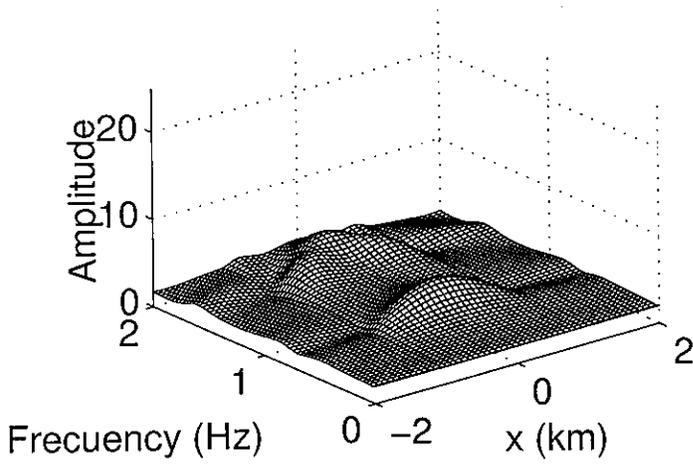
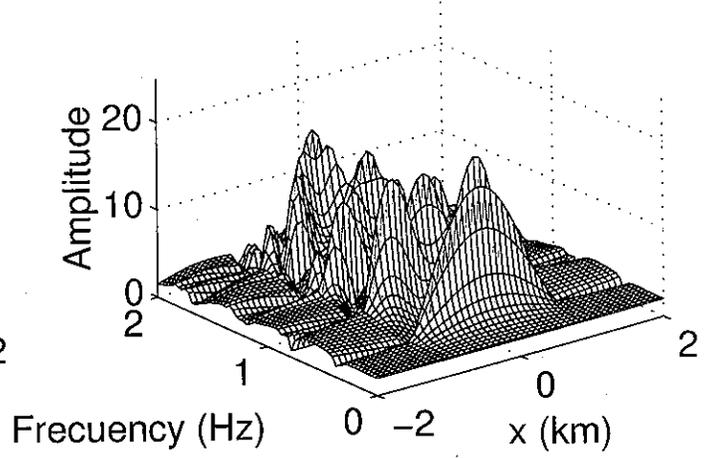


FIGURA 5

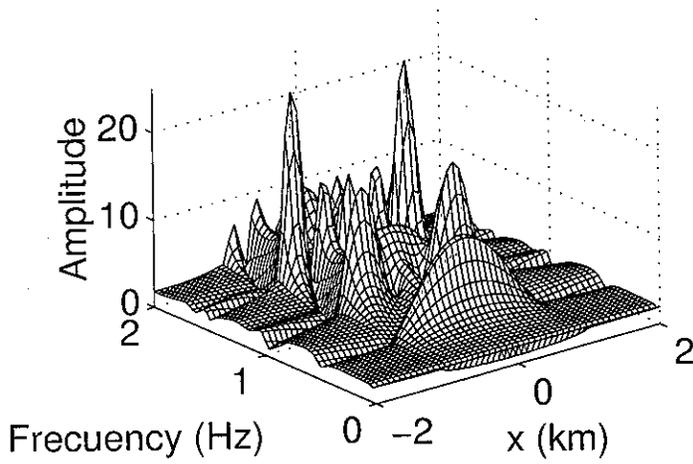
HO-A



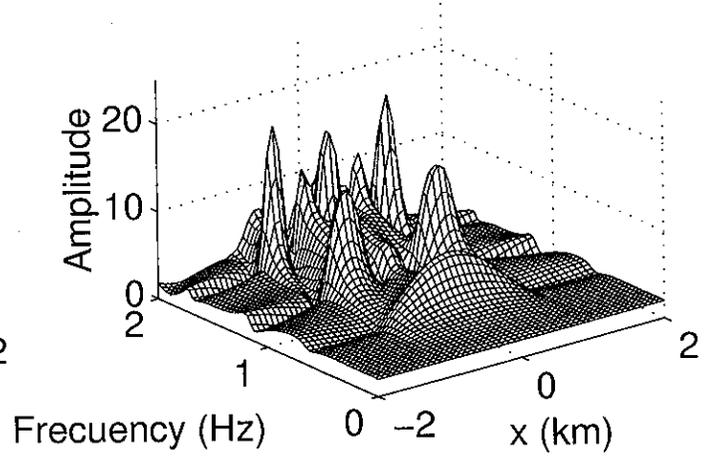
HO-B



HE-A



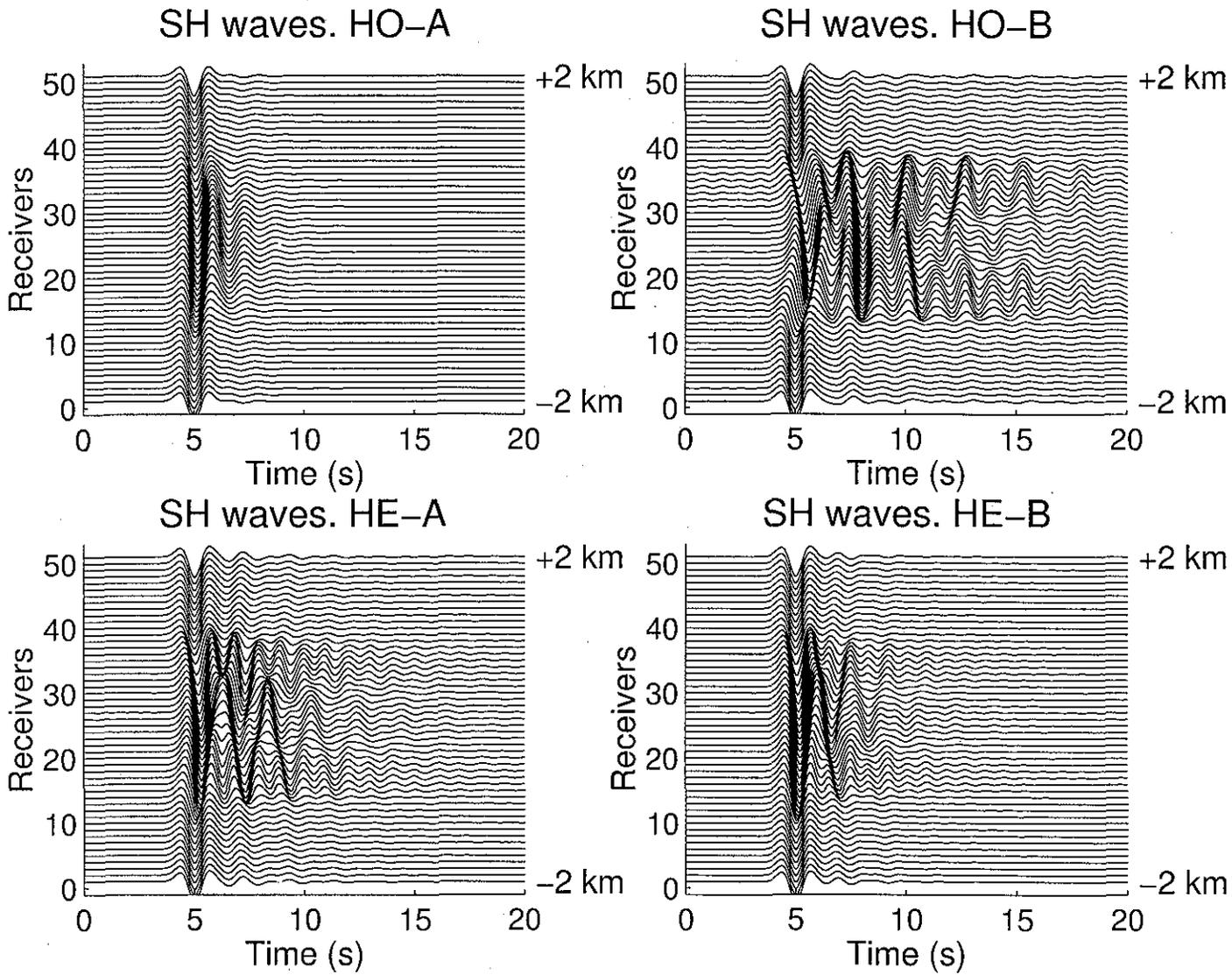
HE-B



66

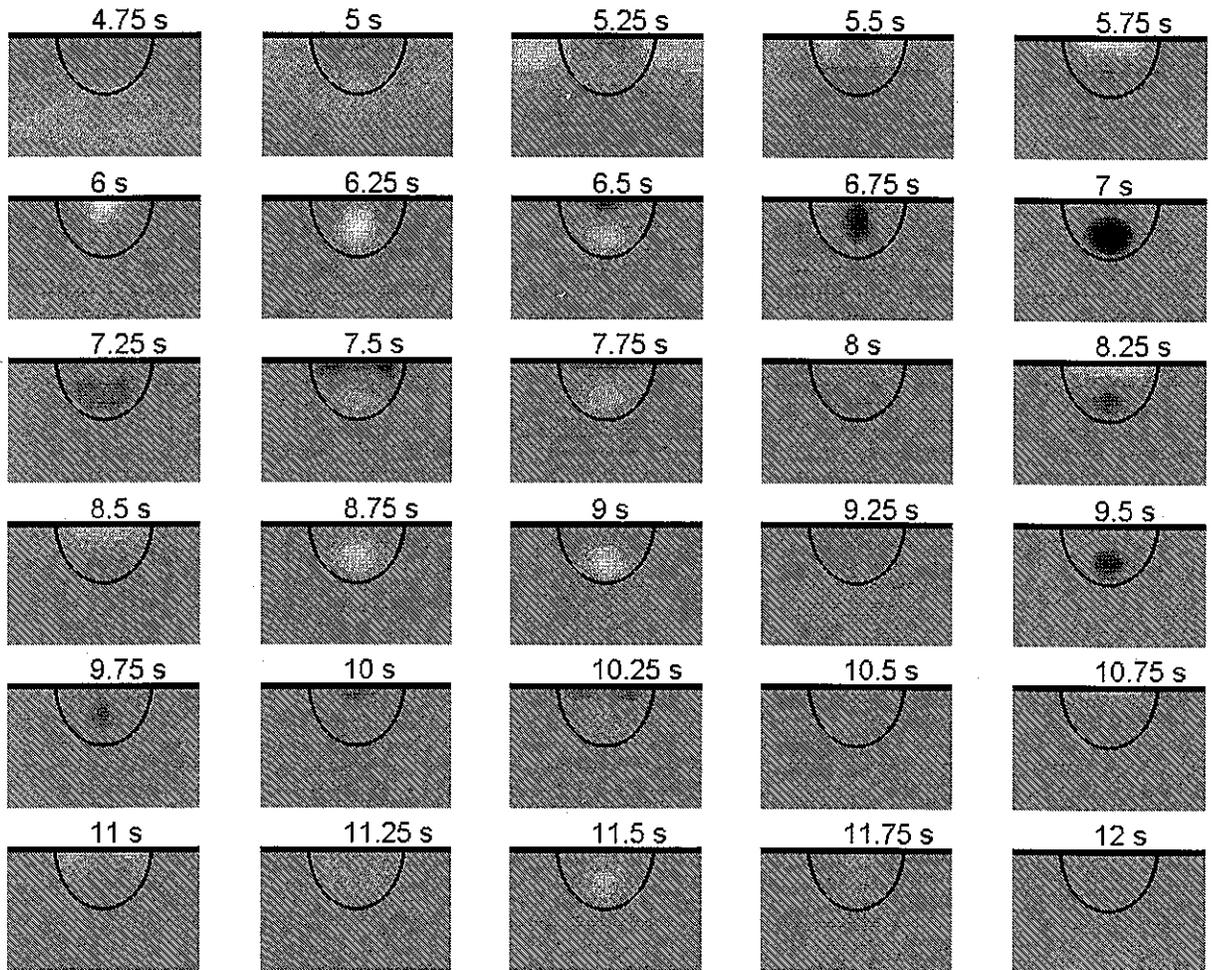
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURA 6



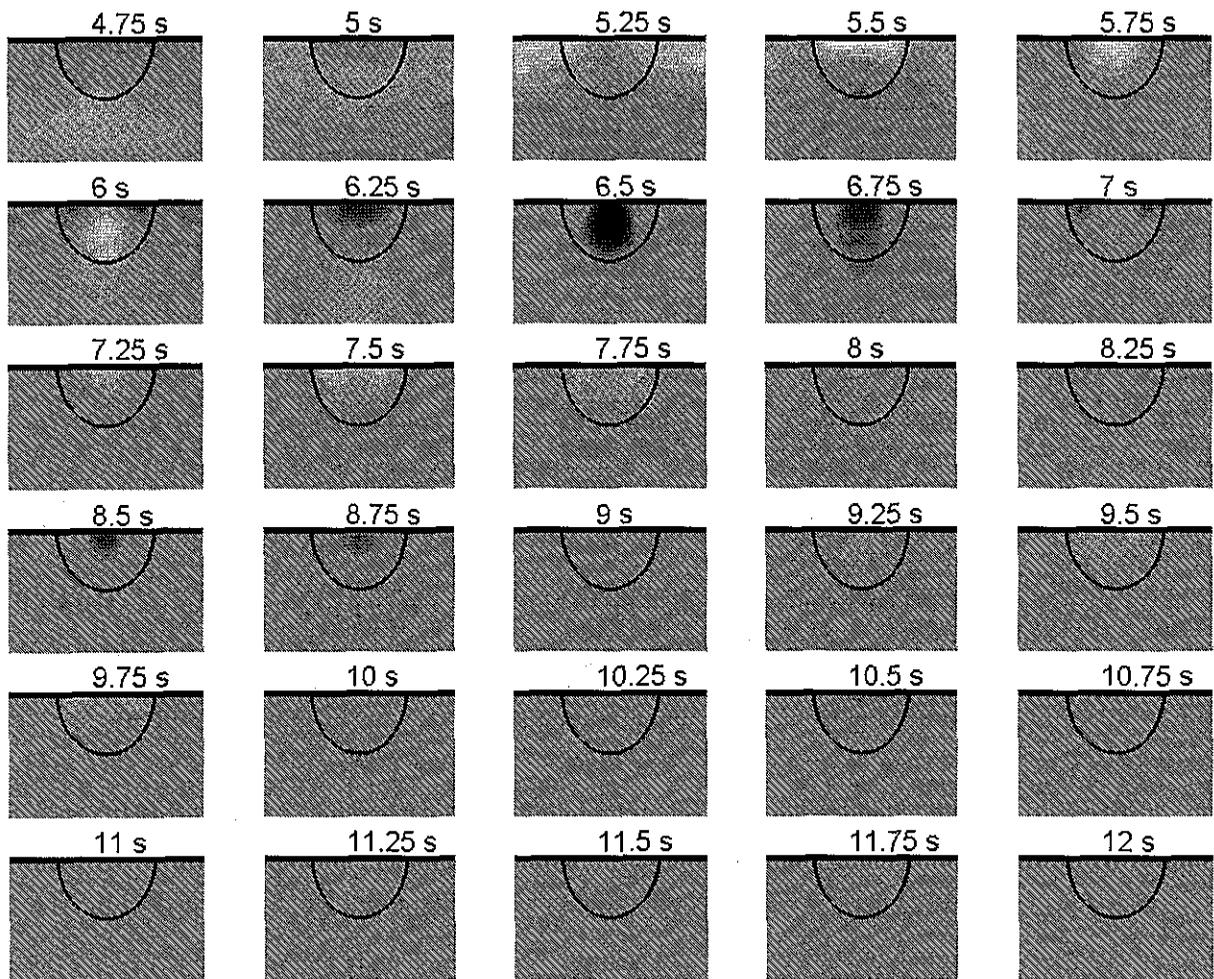
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURA 7



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURA 8



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN