

42

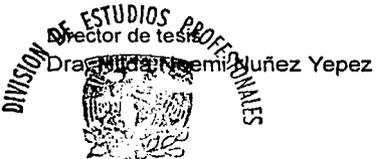
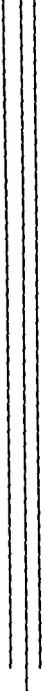


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

*"Modelo Cosmológico
Bianchi VIII en la Teoría de
Jordan- Brans-dicke"*

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
Jorge Reyes Iturbide



México D.F.

2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE MAR DEL PLATA

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Modelo cosmológico Bianchi VIII en la teoría de Jordan-Brans-Dicke"

realizado por REYES ITURBIDE JORGE

con número de cuenta 8517154-2 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DRA. HILDA NOEMI NUÑEZ YEPEZ

Propietario

DR. RODOLFO PATRICIO MARTINEZ Y ROMERO

Propietario

DR. MARCELO SALGADO RODRIGUEZ

Suplente

DRA. MARGARITA ROSADO SOLIS

Suplente

DRA. GABRIELA PICCINELLI

Consejo Departamental de Física


DRA. PATRICIA GOLUSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura en Física

Con cariño para IISE

Mi más grande gratitud para la Universidad Nacional Autónoma De México por la formación académica y humana que me ha ofrecido.

Jorge Reyes Iturbide
Ciudad Universitaria, 2002.

Indice

Indice	iii
Introducción	1
1 La Teoría de JBD	13
1.1 Principios de Relatividad General	13
1.2 Soluciones cosmológicas en la teoría de Relatividad General	23
1.2.1 El principio de Mach en la teoría Jordan-Brans-Dicke.	30
1.3 Algunas soluciones cosmológicas en la teoría de Jordan-Brans-Dicke	39
2 Modelos Cosmológicos	49
2.1 Ecuaciones de campo del modelo cosmológico Bianchi VIII en la teoría JBD. 49	
2.1.1 Nucleosíntesis	49
2.1.2 modelos cosmológicos Bianchi	54
2.1.3 Modelos Bianchi en el espacio vacío en la teoría JBD	56
2.1.4 Soluciones del modelo cosmológico Bianchi VIII	65
2.2 Resultados	68
2.3 conclusiones	76
2.4 Apéndice	78
Bibliografía	81

Introducción

Existen conceptos en la física que han ido evolucionando a lo largo de la historia humana. Entre éstos están los conceptos de espacio y tiempo. En la Edad Media, a pesar de ser una etapa más reciente que la antigua, encontramos una de las concepciones más primitivas acerca de la naturaleza del espacio y del tiempo. Esta concepción estuvo basada en el modelo cosmológico de Ptolomeo; sin duda la última de las contribuciones importantes de la cultura griega antigua, formulada en el siglo II d.c. Según éste, la Tierra es el centro del Universo y está rodeada de ocho esferas que transportaban a la Luna, al Sol, a las estrellas y a los cinco planetas conocidos en aquel tiempo; Mercurio, Venus, Marte, Jupiter y Saturno. La esfera más externa transportaba a las estrellas fijas, ver figura 1. Ptolomeo no describía con claridad que había después de la última esfera. Esta ambigüedad la iglesia cristiana no la dejó pasar por alto y propuso que ese gran espacio fuera ocupado por el paraíso e infierno [Hawking,1988].

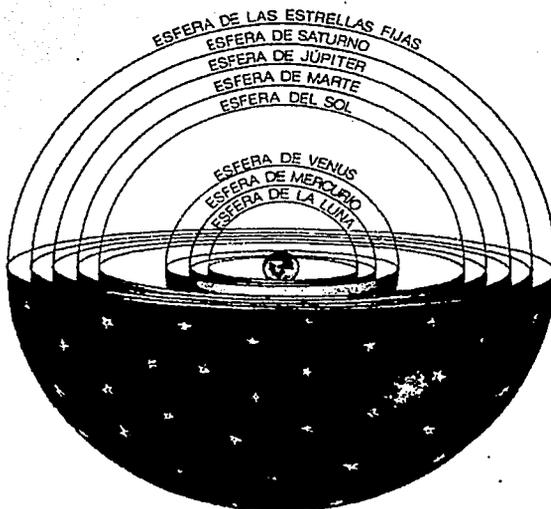


Fig. 1: Esquema cosmológico según Ptolomeo. [Hawking, 1988]

En esta concepción los cambios y evoluciones al igual que el tiempo solo tienen cabida en la Tierra. Mientras que todo lo demás es fijo, habiendo solo rotación de las esferas. Así, el espacio es infinito e inhomogéneo, pero con un toque divino para que esta concepción se adecuara a la ideología de la iglesia católica. Si se querían cambiar los conceptos de espacio y de tiempo se tenía que luchar contra esta ideología cristiana. El afrontarlo estuvo a cargo de Giordano Bruno, Copérnico, Galileo, Tycho-Brahe, Kepler, entre otros [Brody, 1992]. Ellos fueron construyendo la cosmovisión bajo la cual Newton formula la teoría de gravitación y las leyes de movimiento en su libro *Philosophie Naturalis Principia Mathematica* publicado en el año 1687 d.c.

Para desarrollar las leyes de movimiento Newton parte de una idea diferente del espacio y tiempo, rompiendo con las concepciones limitativas de la edad Media. Para Newton el espacio es homogéneo, isotrópico e infinito —estas consideraciones le traerían complicaciones en la explicación de un Universo estático en el que predominara la fuerza gravitacional [Roos, 1994]—. El espacio es independiente de todos los materiales que están en él. También el tiempo es infinito e independiente de la materia por lo que fluye de manera uniforme. Al espacio así concebido Newton le nombra "espacio absoluto". A pesar que la teoría Newtoniana, tanto la mecánica como la gravitacional, tuvo grandes logros — en su tiempo dió la explicación física y matemática de las tres leyes de Kepler y en el siglo pasado nos permitió alunizar, entre muchos otros logros físicos desde que la teoría se dió a conocer— no ha sido capaz de explicar fenómenos físicos ni a nivel cosmológico ni a nivel microfísico; ejemplo de ellos son la precesión del perihelio de Mercurio y la estabilidad del átomo respectivamente [Brody, 1992].

"La naturaleza del espacio es propia, sin relación a cualquier cosa externa, permanecerá siempre igual e inamovible". Concepción en propias palabras de Newton acerca del espacio, concepción compartida tiempo atrás por Descartes. Esta idea de espacio absoluto trae varias objeciones. Parece ser que los filósofos Leibniz y Berkeley fueron los primeros en cuestionar la idea de espacio absoluto [Berry, 1976]. Sin embargo, vayámos un poco hacia la época renacentista con Copérnico y Kepler. Ambos astrónomos dan muestra de ser muy cautos en sus declaraciones. Muestra de ello es la afirmación que hace Copérnico al definir un sistema de referencia como: " La primer y más alta de todas las esferas de las estrellas fijas, la cual está contenida en sí misma y para siempre, y es inamovible". La idea de Copérnico es que el universo es el telón de fondo en el que la posición y movimiento de todos los cuerpos son comparados. Por otra parte, Kepler dá un punto particularmente interesante acerca del sistema de referencia. Expresa esta idea de la siguiente forma : " Desde ahora los planetas siguen sus caminos a través del Universo como pájaros en el aire. Nosotros debemos filosofar acerca de este

pensamiento diferente". Esta afirmación cuestiona, con contundencia, al espacio vacío; los planetas posiblemente no podrían describir estas órbitas de manera precisa por una mera inspección del espacio vacío. deben ser guiados y manejados en su movimiento por cuerpos reales del Universo, llamémosle, el Sol y la esfera de las estrellas fijas. Esta convicción fué un factor decisivo para descubrir las leyes del movimiento planetario. Tanto Copérnico como Kepler hacen alusión a la importancia de las estrellas fijas para describir los movimientos de los cuerpos. Newton hizo pasar por desapercibida esta línea de pensamiento y optó por retomar la idea aristotélica de espacio.

llendo más adelante — con los contemporáneos de Newton—, describamos dos ejemplos en los que los filósofos Leibniz y Berkeley cuestionan el espacio absoluto de Newton. En los Principia, Newton describe el experimento de una cubeta con agua en rotación, dice: " Si enrollamos una cuerda que sostenga una cubeta con agua, y le permitimos luego desenrollarse, la cubeta empieza a rotar y finalmente el agua empieza a rotar también, aunque más lentamente que la cubeta. La superficie del agua se vuelve cóncava como resultado de la rotación. Por fin, agua y cubeta llegan a girar al mismo ritmo, por lo que no hay movimiento relativo". Entonces, uno podría preguntarse, ¿Con respecto a qué está girando el agua? Newton respondió que con respecto al espacio absoluto. Sin embargo, para Leibnitz y Berkeley el movimiento tiene un significado solamente en relación con la posición de otros objetos en el Universo, sólo el movimiento relativo tiene significado, no hay movimiento absoluto. El otro es un experimento imaginario. Consideremos dos cuerpos rotando alrededor de su centro de masas (por ejemplo, una estrella binaria). Ahora, supongamos que toda la materia del Universo que rodea a estos dos cuerpos desaparece ¿Ellos seguiran rotando alrededor de su centro de masas, o no? Newton respondió que la pregunta puede resolverse si unimos a los dos cuerpos con un resorte. entonces, si el sistema tiene una rotación absoluta debe alargarse — esto en respuesta a la fuerza centrífuga que aparece en un movimiento circular — y este alargamiento del resorte puede ser observado. Es decir, para Newton,

en este marco podemos seguir hablando de fuerzas inerciales como la centrífuga y la de Coriolis. Leibniz y Berkeley estuvieron en desacuerdo. Afirmaron que las conclusiones obtenidas por Newton se basaban en observaciones empíricas en un Universo real, donde no hay vacío sino cuerpos celestes como estrellas, galaxias, etcétera. Lo ideal sería sacar toda la materia cósmica del espacio y ver lo que sucede realmente. Sin embargo, hacer esto es imposible; por lo que debemos sacar conclusiones a partir del universo real. Así que habría que cambiar este espacio absoluto por el espacio real, donde hay materia.

Ernest Mach sale al paso de estas series de objeciones al concepto del espacio absoluto diciendo: Las leyes de la inercia surgidas de los enfoques Leibniz-Berkeley y de Newton deben expresarse de manera que den un resultado equivalente. Tal vez la motivación más grande que tuvo Mach para hacer esta afirmación fué la coincidencia numérica que ofrecen los dos enfoques Leibniz-Berkeley y el newtoniano para medir, de manera experimental, el período de rotación de la Tierra [Narlikar, 1995]. Vale la pena describirlos en detalle. Al igual que se mide la velocidad de rotación del agua con relación al espacio absoluto podemos diseñar un experimento para medir la velocidad de rotación de la Tierra — con respecto a su eje— respecto de dicho espacio, es decir, a la newtoniana. El diseño del experimento incluye un péndulo de Foucault. Lo interesante de este péndulo es que su plano de oscilación cambia gradualmente de dirección con el tiempo. De este modo si se pone a oscilar en la dirección norte-sur se encontrará unas horas más tarde oscilando en la oeste-este. La tasa exacta de su cambio de dirección está determinada por la latitud del lugar de observación. Esta rotación del plano de oscilación se produce porque la propia Tierra está rotando respecto al espacio absoluto, por lo que un sistema de referencia fijo en la Tierra no es un sistema inercial. Por lo que hay que introducir fuerzas inerciales para describir el giro del plano de oscilación del péndulo [Kittel, 1965]. De un análisis mecánico de este sistema uno llega a la conclusión de que la fuerza de Coriolis es la responsable de esta rotación.

La importancia de este experimento radica en que cualquier persona, que se encuentre en un cuarto cerrado, que ignore la rotación de la Tierra puede descubrirla y medirla con la ayuda de este experimento. Esto es, observando el tiempo que necesita el plano del péndulo para dar una vuelta, T_0 , y conociendo la latitud del lugar, λ , dicha persona puede concluir que la Tierra completa da una revolución alrededor de su eje en un día; formalmente:

$$T_0 \sin \lambda = 23^h 56^m 4^s. \quad (1)$$

Hay, sin embargo, otro camino para medir el período de rotación de la Tierra que consiste en observar una estrella lejana. Si suponemos que ésta está fija en el cielo, podemos medir la velocidad de rotación de la Tierra alrededor de su eje. Naturalmente esta velocidad de rotación no está referida al espacio absoluto de Newton, sino al marco de las estrellas fijas. El resultado notable es que el período de rotación es idéntico al medido con el método newtoniano; salvo errores observacionales. Mach se inspira en la coincidencia de este resultado para dar un principio que afirme una conexión causal entre la masa del Universo y las propiedades inerciales de un sistema local [Bondi, 1970]. Así, va más allá de la afirmación de Leibniz-Berkeley sobre la importancia de tomar en cuenta a los cuerpos celestes, afirmando que la inercia de los cuerpos deben su origen al fondo de las estrellas lejanas. " ¡ Suprimid el fondo y el cuerpo dejará de tener inercia !". Este razonamiento se conoce con el nombre del principio de Mach. Esto implica que la inercia no es una propiedad intrínseca de la materia, sino que se debe al fondo de las estrellas lejanas.

Hagamos, un breve comentario acerca de la redacción del principio de Mach. Con humor el astrofísico, Hubert F.M Goenner, se refiere a las diferentes formulaciones que se hacen acerca de él. Según él la Historia de la Ciencia dice: "Mach realmente pensó" y la Filosofía de la Ciencia dice: "realmente pensó" o "que realmente quiso decir o pensó". Sin querer entrar en discusiones epistemológicas, ontológicas y etc. nos limitaremos a decir que en su crítica a la mecánica newtoniana, Mach arribó a las siguientes dos conclusiones:

i) Solamente el movimiento relativo de un cuerpo con respecto a otros cuerpos es observable, no hay movimiento con respecto al espacio absoluto (relatividad cinemática del movimiento).

ii) El movimiento inercial de un cuerpo es influenciado por toda la masa del Universo lejano (relatividad dinámica del movimiento).

Ahora, ¿por qué se impone el énfasis en estrellas lejanas?. Bueno, es sabido, por otra parte, que la inercia de los cuerpos no es afectada — por lo menos en un grado apreciable de experimentos— por las masas locales como la Tierra o el Sol. Debe aceptarse, pues, que prepondera la influencia de los cuerpos lejanos debido a la enorme superioridad en número. De hecho, la forma achatada de nuestra galaxia implica que aún en esa escala, la rotación es respecto de la materia verdaderamente distante del Universo.

Inspirado en su principio, Mach intenta reconstruir la mecánica newtoniana [Bunge, 1983]. Su posición filosófica Neopositivista, en parte, se lo impide. Según esta filosofía, las teorías naturales deben partir de observaciones que obtengamos del mundo; llamando a éstas "observables". Así, intenta deducir la dinámica a partir de la cinemática — Newton hizo lo contrario — cosa que nunca logró. Su postura filosófica fué culpable de que muriera negando la existencia del átomo, ya que no es observable [Bunge, 1983].

Estas ideas de Mach fueron retomadas por Jordan-Brans-Dicke en el desarrollo de su teoría escalar tensorial de gravitación relativista. La inclusión del principio de Mach en esta teoría conlleva una variación de la constante de gravitación, G , en el tiempo. Esta variación es inducida por el acoplamiento no mínimo de un campo escalar a la curvatura. Un campo escalar, que según el principio de Mach, es determinado por la distribución de la materia del Universo. Es pertinente mencionar el contexto en que se desarrolla la teoría [JBD]. Esta es el de las teorías escalares-tensoriales.

Cuando se da a conocer la Teoría de Relatividad General de Einstein la confrontación de sus predicciones con los test experimentales se dan en el terreno de

campos gravitacionales débiles (weak-field) ó Sistema Solar. Un hecho sorprendente es que Einstein en la formulación de su teoría de Relatividad General no fué motivado por la explicación de los test experimentales. Einstein solo pensó en presentar una teoría estética que incorporará el Principio de Equivalencia. A pesar de ésto, sus predicciones tuvieron éxito al ser comparados con los test experimentales. Estos test clásicos son: el corrimiento del perihelio de Mercurio, la deflexión de la luz por el Sol y el corrimiento gravitacional de la luz hacia el rojo.

El 26 de septiembre de 1960, Thomas Mattheus y Allan Sandage localizaron una fuente de radio (3C48) cuyo flujo de energía es del orden de 10^{47} ergs/seg. Esto hacía pensar que la fuente era un cúmulo de galaxias, sin embargo, provenían de una región compacta. Además de ésto se presenta una variabilidad en luminosidad que se dá en escala de tiempos del orden 15 minutos. Objetos de este tipo fueron nombrados como cuasares. Subsecuentes descubrimientos de pulsares, estrellas de neutrones y posibles identificaciones de hoyos negros abrieron las puertas para entrar al régimen de campos fuertes (Strong-field). La pregunta a plantearse es: ¿es la Relatividad General la teoría correcta de gravitación para la investigación de este nuevo régimen?. La respuesta abre el campo de la confrontación de la teoría frente a nuevos test experimentales, así, como teorías nuevas, que intentan explicarlas. La tabla 1 presenta una cronología de teorías y experimentos de gran relevancia durante el período de 1960-1980.

Sin embargo, no hay que olvidar que, con el desarrollo tecnológico, el Sistema Solar se vuelve arena de test de alta precisión que reafirman las predicciones de la Relatividad General; ejemplos de experimentos de alta precisión son los realizados por Pound-Rebka(1960) los cuales verifican el principio de equivalencia y el corrimiento al rojo gravitacional.

En las nuevas teorías alternativas a la Relatividad General, la gravedad es mediada por un tensor de campo g_{ik} y n -campos escalares—teorías tensor-multi-escalares—. Estas teorías son de utilidad para elucidar diferencias y similitudes entre ellas y la Relatividad General, así como también, comparar sus predicciones con resultados experimentales. De esta manera sabremos que tests están a favor de la Relatividad General. Sin embargo, tales comparaciones entre predicciones y resultados experimentales deben hacerse de una manera sistemática. Para esto, Dicke aconseja dos pasos esenciales: el primero es el test del principio de equivalencia. Este experimento verifica con precisión que la materia se acopla con la gravedad solo a través de la métrica. g_{ik} . Esto es, si la gravitación es un fenómeno que se manifiesta a través de un espacio-tiempo curvado debe describirse con una teoría métrica de gravitación. La teoría de Relatividad General y la teoría de Brans-Dicke son ejemplos de teorías métricas de gravitación. En general las teorías escalares tensoriales de gravitación satisfacen el test del principio de equivalencia [Thibault and Gilles,1992]. El segundo paso es comparar estas teorías métricas con el experimento. Esto llega a ser particularmente simple cuando se toma el límite de campos débiles. Este límite ó aproximación, conocida Parametrización Post-Newtoniano abarca todos los test del Sistema Solar que puedan ser formulados en un futuro inmediato. Cada teoría métrica gravitatoria tiene valores particulares para los parámetros en el formalismo PPN [Eddington,1922]. [Schiff,1960], [Baierlein, 1967],[Nordtvedt,1968b]. [Will,1971]. [Will and Nordtvedt,1972], [Will,1973]. El PPN es ideal para situar y analizar experimentos gravitacionales en el Sistema Solar y de aquí medir los parámetros para delinear cuales teorías métricas son correctas. Otra aportación de este formalismo es descubrir y analizar nuevos test de teorías de gravitación [Nordtvedt,1968a]. [Will,1971]. Esto es, el formalismo PPN llega a hacer una teoría estandar para analizar experimentos del Sistema Solar, descubrir nuevos tests y estudiar teorías métricas alternativas de gravitación.

Una de las conclusiones centrales de este formalismo es que la teoría de Relatividad General ha pasado satisfactoriamente todos los tests experimentales en el

régimen del Sistema Solar.

Sin embargo, el formalismo PPN no es adecuado para la discusión de radiación gravitacional o sistemas con objetos compactos como pulsares binarios. Es decir, no es válido en regímenes de campos fuertes. Este es el tiempo de preguntarse: ¿Existen teorías alternativas a la Relatividad General las cuales cumplen satisfactoriamente los tests del Sistema Solar pero, difieran apreciablemente de la Relatividad General en el régimen de campos fuertes?. La respuesta a esta pregunta la ilustraremos con un ejemplo. Eardley— [Eardley,1975]— apuntó que la energía de radiación gravitacional perdida del sistema binario (dos estrellas de neutrones auto-gravitantes) es dominada, en la teoría Jordan-Fierz-Brans-Dicke, por un término dipolar radiativo el cual está ausente en la teoría de Einstein. Sin embargo, el contraste desaparece en regímenes de campos débiles. Esto es, la teoría de Jordan-Fierz-Brans-Dicke contiene solamente un parámetro ω , y todas sus predicciones difieren de la Relatividad General por un factor $1/\omega$. Datos del radar Vikingo a Marte [Reasenberg,1979] muestran que $\omega > 500$ — $\omega > 3000$ según datos observacionales actuales [Will (comunicación privada)]—. Así que la respuesta es afirmativa. Las teorías escalares tensoriales son teorías alternativas de gravitación que pueden coincidir con la Relatividad General en el límite de campos débiles pero, difieren en sus predicciones en el régimen de campos fuertes o variaciones de campo altas [Thibault and Gilles,1992].

Es difícil parametrizar este régimen de campos fuertes. Sin embargo, el descubrimiento de un pulsar binario [Hulse and Taylor,1975] ha dado una oportunidad de abrir un laboratorio de gravitación relativista en donde los campos fuertes entran en juego. De esta manera se abre la posibilidad de encontrar una parametrización extraída del pulsar binario. Este formalismo se le nombra PPK (Parametrización Post-Kepleriana) [Damour, 1988]. [Damour and Taylor, 1992].

Es importante señalar que el test experimental del decaimiento del período orbital del pulsar binario ha sido medido [Taylor, et. al.,1979]. El resultado es satisfactorio con la predicción de la Relatividad General. Pero existe una discre-

pancia con las predicciones de las teorías escalares tensoriales alternativas; las cuales coinciden con la Relatividad General en el régimen de campo débil.

En resumen, podemos decir que las teorías escalares tensoriales, como la de JBD, son teorías alternativas de gravitación; son de gran utilidad en la comparación y contrastes de sus predicciones con la Relatividad General en ambos campos débiles y fuertes. Además sugieren nuevos tests para la Relatividad General.

Con estas convicciones acerca de las teorías escalares tensoriales se decidió trabajar con la teoría escalar-tensorial de JBD. El modelo cosmológico propuesto para esta teoría es el de Bianchi VIII. Este modelo ha sido trabajado ya en la teoría de Relatividad General [Barrow and Gaspar,2001][Halpern,1985]. Sin embargo, este modelo no ha sido trabajado lo suficiente en la teoría JBD por lo que motiva a hacerlo.

En otra parte, el Universo hasta ahora observado por el satélite COBE [Bennett. et al,1996] es homogéneo e isótropo. Los modelos Bianchi(s), trabajados tanto en la teoría de Relatividad General como en la teoría JBD [Cervantes-Cota y Nahmad,2000] pueden explicar la isotropía del Universo aunque estos sean anisótropos. Esto es, la isotropía del Universo puede explicarse a partir de modelos teóricos anisótropos. De aquí que muchos autores han considerado a los modelos Bianchi(s) como casos generales que comprenden a los modelos de Friedmann-Robertson-Walker. De aquí la motivación para trabajar el modelo Bianchi VIII en la teoría de JBD.

Año	Experimento o evento observacional	Evento teórico
1960	Hughes-Drever. Experimentos: Masa-anisotropía	Artículo de Penrose (Spinors Gyroscope precession)
	Pound-Rebka. Experimento del corrimiento al rojo gravitacional	Teoría de Brans-Dicke
1962	Descubrimiento de fuentes de rayos-x no solares	Fórmula de la pérdida de masa por Bondi
	Experimento de <i>Eötvös</i>	
1964	Pound-Snider. Experimento: corrimiento al rojo	Dilatación del tiempo (Shapiro)
	Descubrimiento de la radiación de fondo	Teoremas particulares de la Relatividad General
1966	Reporte de la detección de la oblatancia solar	Producción de elementos en el Big-bang
	Descubrimientos de pulsares	
1968	Lanzamientos de los Mariners 6 y 7	Principios del formalismo PPN
1970	CygXI: Candidato a hoyo negro	Refinación del formalismo PPN
	Los Mariners 6 y 7 miden la dilatación del tiempo	Incremento en el área de hoyos negro en Relatividad General
1972	Experimento de <i>Eötvös</i> en Moscú	
1974	Descubrimiento del Pulsar binario	Evaporación cuántica de un hoyo negro radiación dipolar gravitacional una teoría gravitacional alternativa
1976	Medición del corrimiento al rojo en un cohete	
	Resultados de la dilatación del tiempo por los Mariners 6 y 7	
1978	Medición del decrecimiento orbital del pulsar binario SS 433	

Tabla 1: Cronología de experimentos y teorías entre 1960 y 1980.

Capítulo 1

La Teoría de JBD

1.1 Principios de Relatividad General

Para construir una teoría gravitacional que salvará las inconsistencias presentadas en la newtoniana habrá que cambiar los conceptos acerca del espacio y del tiempo. Así, Einstein fórmula la teoría de Relatividad General dada a conocer en 1915. La idea esencial en este trabajo es la correlación existente entre el espacio-tiempo — la manera correcta de describir un evento es con tres coordenadas espaciales y una temporal, de ahí el uso del nuevo concepto espacio-tiempo en la teoría de Relatividad Especial de Einstein publicada en 1905— y la materia en ella; en Relatividad General estas dos cosas se encuentran conectadas. Cada cuerpo modifica la geometría del espacio-tiempo y cada cuerpo, por otro lado, se ve afectado en su movimiento por las modificaciones del espacio-tiempo que inducen los demás cuerpos del Universo. Einstein dice: " La gravedad no es una fuerza física transmitida a través del espacio y del tiempo. Es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo" [Taylor et. al., 1992]. Entendamos esta idea. Una de las propiedades fundamentales en la geometría euclídeana es que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Suponiendo que el camino de luz es una línea recta entonces éste describe el camino más corto en un espacio euclídeano. Sin embargo, ¿seguirá siendo una línea recta en un espacio en el que esté presente

la materia, es decir, en nuestro universo? La respuesta es no. El camino de luz de las estrellas se curva o deflecta al pasar cerca del Sol, ver la Figura 1.1. Por lo que las geodésicas (término que se usa para describir el camino más corto en las geometrías euclidianas y no euclidianas) no son líneas rectas en el sentido euclideano, entonces la geometría euclideana no puede describir el espacio (ó el espacio-tiempo).

Veamos cuáles son las características, o rasgos generales, de las geometrías no-euclidianas. Por ejemplo, la superficie de una esfera, considerada como un espacio bidimensional, obedece a una geometría no-euclideana; por geodésicas (o líneas más cortas) utilizamos arcos de círculos máximos, ver la Figura 1.2.

En la esfera no pueden trazarse geodésicas paralelas, ya que cada par de arcos de círculos máximos se interceptan dos veces. En el espacio euclideano dos geodésicas paralelas nunca se interceptan, o bien, se interceptan en el infinito. Una consecuencia de los postulados de la geometría euclideana es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ; en la superficie de una esfera, la suma es mayor a 180° —notese en la Figura 1.3—; además que no se sostiene el Teorema de Pitágoras [Roos, 1994]. En esta geometría entonces no tenemos geodésicas paralelas. Esta superficie esférica se caracteriza por tener una curvatura positiva.

Otro ejemplo, es la geometría hiperbólica estudiada por Gauss, Lobachevski y Bolyai. En estas se encuentran infinitas geodésicas paralelas y la suma de los ángulos de un triángulo es menor a 180° . Piénsese en una superficie llamada comunmente silla de montar—ver Figura 1.4—. La curvatura en ésta es negativa. Recordemos que la superficie de curvatura cero es plana, es decir, euclideana.

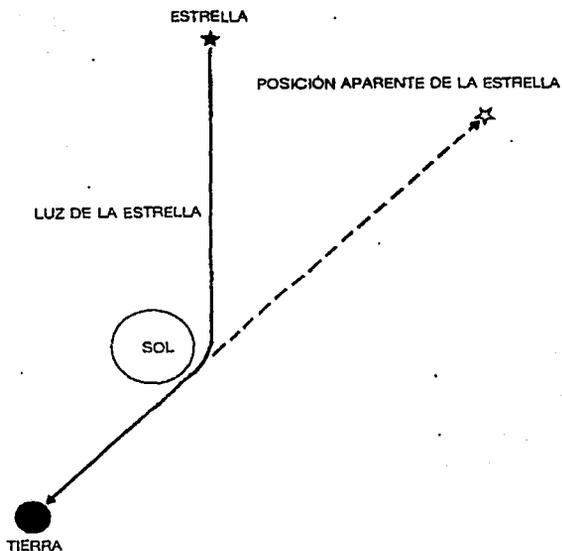


Fig. 1.1: El haz de luz es deflectado al pasar junto a un cuerpo masivo como el Sol. [Hawking, 1988].

El que la luz se curve hacia el Sol es un indicio de que la geometría del espacio-tiempo está determinada por la distribución de toda la materia del Universo. El determinar la curvatura—en R^4 , que es nuestro espacio de eventos— de nuestro Universo se presenta como uno de los problemas fundamentales de la cosmología.

Habíamos mencionado que Einstein le dá un enfoque geométrico a las fuerzas. Esto es, podemos describir el movimiento de un cuerpo sin referirnos a ellas, solo basta con conocer la geometría del espacio—la cual está determinada por la materia en ella—. Para entender esto Taylor y Wheeler ofrecen un ejemplo gráfico de dos viajeros—ver la Figura 1.5— confinados en la superficie de una esfera [Taylor et.

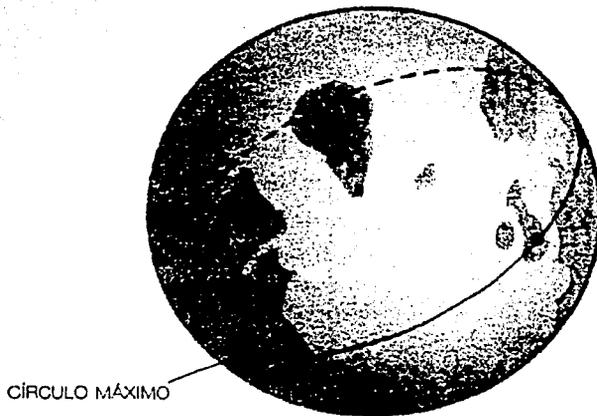


Fig. 1.2: Las geodésicas en la superficie esférica son arcos de círculo [Hawking, 1988].

al.,1992]. Un viajero, A, se encuentra en el ecuador. Lo acompaña una amiga que se encuentra a 20 km. de él—tal vez estén enojados—, a lo largo del ecuador. Ambos viajeros parten simultáneamente hacia el norte. Después de un tiempo ambos han recorrido 200 km. Pero ahora la separación entre ellos es menor que 20 km. — 19.990 km. para ser exactos—. Nosotros los espectadores sabemos perfectamente el por qué: la superficie del globo es curvada. Si ellos continúan caminando hacia el norte se encontrarán, finalmente, en el polo norte. Por el otro lado, ellos descubrirán que, después de poco tiempo de haber partido, están acercándose uno al otro. Además, se aproximan a un ritmo cada vez más acelerados. Podrían atribuir esta aceleración a alguna fuerza de atracción mutua. Si descubrieran que su espacio es no-euclideo, bien podrían decir como nosotros los espectadores, que la aceleración tiene un origen puramente geométrico. De igual modo, Einstein atribuye la gravedad a la geometría del espacio-tiempo. Así, podemos decir que la gravitación es una manifestación de la desviación de las propiedades del verdadero

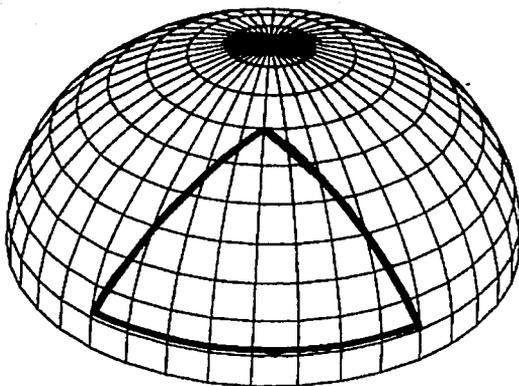


Fig. 1.3: Los ángulos interiores de un triángulo en una superficie esférica suman más de 180° . [Roos, 1994]

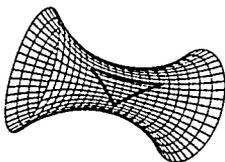


Fig. 1.4: La suma de los ángulos interiores de un triángulo, en una superficie hiperbólica, es menor a 180° . [Roos, 1994].

espacio-tiempo de las de su análogo euclidiano.

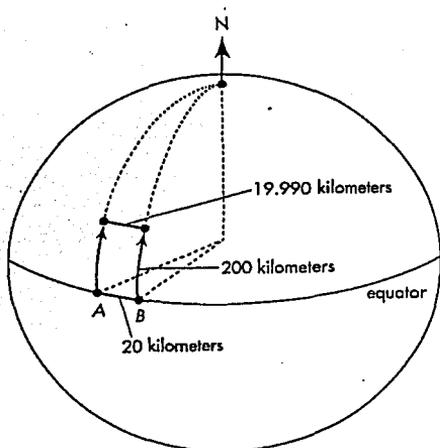


Fig. 1.5: El carácter geométrico de las fuerzas es ilustrada por los viajeros A y B. [Taylor et. al. 1992].

En lo esencial, las ecuaciones de la Relatividad General producen la geometría del espacio-tiempo en cualquier punto si damos una información de entrada acerca de la distribución de masa (tensor de energía-momento) presente por doquier. Al conocer la geometría del espacio-tiempo, es posible calcular la trayectoria de una partícula (geodésica en el espacio-tiempo curvo), predecir el camino de un rayo de luz, etc.

Sin embargo, la idea que hemos presentado entre la geometría del espacio-tiempo y la distribución de masa en ella como una interrelación del tipo acción y reacción, no basta para formular las ecuaciones de Relatividad General. - Einstein complementó esta idea con otras dos no menos importantes [Einstein, 1915]. Primero, mencionemos el Principio de Equivalencia. Supongamos que en

una región del espacio-tiempo actúa un campo gravitacional de magnitud g (es decir, la fuerza gravitatoria en una partícula de masa m es $m\vec{g}$). Tal región puede ser la vecindad de un punto en la superficie de la Tierra. Entonces, si la gravedad es la única fuerza resultante, todos los cuerpos en la región localmente caen con la misma aceleración $\vec{a} = \vec{g}$ (como $m\vec{a} = m\vec{g}$). Sin embargo, podemos cambiarnos a un sistema f' con aceleración \vec{g} de tal forma que en este nuevo sistema desaparezcan los efectos gravitatorios (exceptuando la fuerza de marea); cualquier cuerpo en este sistema puede sentir una fuerza que no tenga un origen gravitacional, llamémosle \vec{f}_{ng} . Demostremos esto formalmente. En nuestro sistema original f , la ley de Newton dice:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}_{ng} \quad (2)$$

en f' , la aceleración es $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{g}$, tomando en consideración que siguen actuando las mismas fuerzas en nuestro cuerpo de masa m , tenemos que en f' se cumple la siguiente relación :

$$m(\vec{a}' + \vec{g}) = m\vec{g} + \vec{f}_{ng} \quad (3)$$

esto es

$$m\vec{a}' = \vec{f}_{ng} \quad (4)$$

Sorprendentemente hemos eliminado la fuerza gravitacional.

Podemos pensar que f' es un elevador en caída libre en el campo gravitacional terrestre. Un observador que se encuentra dentro de este ascensor es un observador localmente inercial. Esto porque en el marco de referencia del ascensor que cae, por ejemplo, el camino de una partícula libre traza una línea recta, y una pelota soltada en tal ascensor no acelerará con respecto a él, sino que permanecerá suspendida. Así podemos inferir que localmente son equivalentes las fuerzas inerciales y las fuerzas gravitacionales. Esto implica lo siguiente : Si un laboratorio pequeño — podríamos preguntarnos qué tan pequeño, bueno, lo necesario para que el campo gravitacional sea satisfactoriamente constante dentro del laboratorio) — cae libremente en un campo gravitacional, los fenómenos mecánicos son los mismos que los observados en un sistema inercial newtoniano en ausencia de un campo gravitacional. Einstein generalizó esta conclusión , reemplazando fenómenos mecánicos por las leyes de la física; el argumento resultante se le nombra Principio de Equivalencia. Por último, en esta idea, se propone que laboratorio sea pequeño porque el campo gravitacional solamente es constante localmente. Esto es, la dirección del campo gravitacional varía de punto a punto; la magnitud lo hace también porque depende de la altura al centro de la tierra. Esta situación de inhomogeneidad del campo gravitacional se ilustra en la figura 1.6.

Un interesante ejemplo que demuestra la inhomogeneidad del campo gravitacional terrestre es dada por una gota de agua que cae libremente hacia la tierra (figura 1.7). Ya que la fuerza gravitacional se incrementa en la dirección de la caída, las partículas en el frente de la esfera caen más rápido que las de la parte trasera. Al mismo tiempo la sección lateral de la esfera se contrae debido al efecto de marea. Ésta es debida a la fuerza que actúa entre dos cuerpos que caen libremente hacia la tierra —para entender este efecto recuérdese la experiencia de los viajeros en la superficie de la esfera—.

La segunda idea interesante es la siguiente : En una revisión de la Relatividad Especial, Einstein propuso la extensión de los principios de la relatividad. Así, el principio general de covarianza es una extensión del postulado de simetría a partir

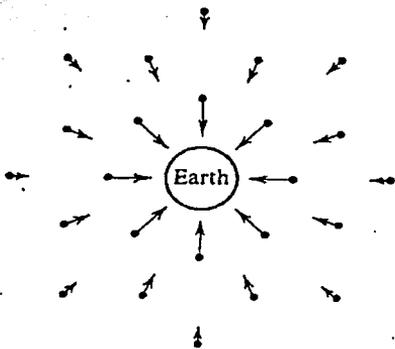


Fig. 1.6: Se muestra la inhomogeneidad del campo gravitacional. Se pueden tener varios puntos en donde la aceleración sea constante; estos forman los llamados equipotenciales. Sin embargo, la dirección de la aceleración es diferente por lo que el campo gravitacional es inhomogéneo. [Berry, 1976].

de la relatividad especial para incluir a todos los observadores cualesquiera que sean sus movimientos. Es decir, se afirma que las leyes de la física, si se las plantea de la manera adecuada, son de la misma forma matemática para todos los observadores inerciales o no. Einstein lo expresó de este modo: Las leyes de la naturaleza han de ser expresadas por ecuaciones que se sostengan para todos los sistemas de coordenadas, es decir, que sean covariantes con respecto a cualquier sustitución. Matemáticamente esto se puede describir solamente en forma tensorial.

Por último a Einstein le impresionó el Principio de Mach el cual se puede resumir: La inercia en un cuerpo es la manifestación local del Universo; si aquí hay inercia allá hay materia. Tal vez esta idea esté muy conectada con la interrelación de la geometría del espacio-tiempo y la materia contenida en ella. Podemos decir que las geodésicas son la manifestación de la materia del Universo.

Las ideas anteriormente descritas fueron las que Einstein tomó para formular las ecuaciones de la Relatividad General. Estas ideas se resumen en las ecuaciones

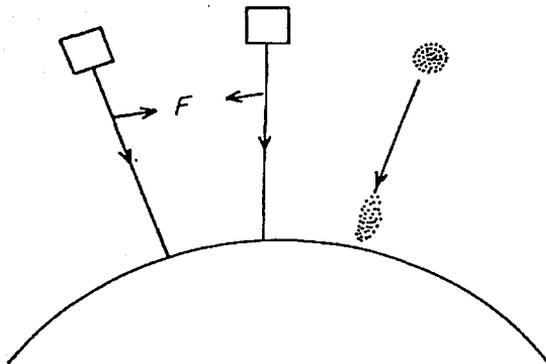


Fig. 1.7: Efecto de marea en una gota de agua en caída libre. Éste se presenta debido a la inhomogeneidad del campo gravitacional. Dos cuerpos en caída libre tienden a traerse por una fuerza F . [Roos, 1994]

de campo:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{-8\pi G}{c^4}T_{ik} \quad (5)$$

donde R_{ik} es el tensor de Einstein-Ricci, T_{ik} es el tensor de energía-momento de la materia, g_{ik} es el tensor métrico y R es la curvatura Riemanniana.

Matemáticamente estas ecuaciones se obtienen a partir del principio de mínima acción. Como es sabido, el principio de mínima acción afirma que para cada sistema mecánico existe una cierta integral S , llamada la acción, que toma su valor mínimo para el movimiento real, de forma que su variación $\delta S = 0$. En rigor, no necesariamente debe ser un mínimo sino tan sólo un valor extremo (Landau, 1981) tomando en cuenta este principio escribimos:

$$\delta(S_m + S_g) = 0 \quad (6)$$

Donde S_g y S_m son las acciones del campo gravitatorio y de la materia respectivamente. Esto es: La variación de δS_g es

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \frac{-c^2}{16\pi R} \int (R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik})\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega \quad (7)$$

Por otro lado, la variación de la acción correspondiente a la materia se escribe como

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega \quad (8)$$

El principio de mínima acción—ecuación (6)— nos conduce

$$\int (R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}) [\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega] = 0 \quad (9)$$

La arbitrariedad de la cantidad entre corchetes implica que el integrando sea cero, pero esto es la ecuación (5).

Así pues, el lenguaje de la Relatividad General es una geometría diferencial no-euclídeana y sus elementos esenciales son el Principio General de la relatividad (o de covarianza), el Principio de Equivalencia, el Principio de Mach (aún por verse más adelante), y un principio de correspondencia que especifica que la teoría ha de reducirse a la newtoniana en cierto límite.

1.2 Soluciones cosmológicas en la teoría de Realtividad General

La respuesta a la pregunta de si el espacio-tiempo es finito o infinito depende de la cantidad de materia que haya en el Universo. Si hay más materia que un cierto mínimo entonces el Universo es cerrado, si hay menos, entonces el Universo es abierto [Coles and Lucchin, 1996]. Hagamos una explicación descriptiva acerca de esto. Establezcamos que nuestro espacio — tiempo cumple el principio cosmológico (homogeneidad e isotropía) por lo que la geometría resultante es determinada por la métrica de Robertson — Walker [Bazin, 1975], ésta es:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [(1 - kr^2)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2] \quad (10)$$

con $k = 1, 0, -1$ para el espacio de curvatura positiva, nula o negativa, respectivamente.

Por otra parte, a groso modo idealizamos a la materia del Universo como un fluido perfecto; uno puede considerar a las galaxias como "moléculas de un gas" que no colisionan, es decir, las galaxias solo interaccionan entre ellas gravitacionalmente [Heidmann, 1980]. Así que consideramos el modelo de materia descrito por el tensor de energía-momento:

$$T^{ik} = (\rho + P)U^i U^k + P g^{ik} \quad (10a) \quad ;$$

Aún en la época temprana del universo, cuando era muy condensado en el que solo habría cavida para los fotones, estos últimos tienen un comportamiento análogo a un fluido perfecto. La ecuación de estado para este fluido es:

$$P = \alpha \rho \quad (11) \quad ;$$

con

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{materia bariónica;} \\ 1/3, & \text{radiación;} \\ -1. & \text{Cte. cosmológica} \end{cases} \quad (12)$$

Con estas consideraciones acerca del espacio-tiempo y la materia contenida en ella al introducirlas en las ecuaciones de campo de la Relatividad General de Einstein, ecuación (5), se obtiene el modelo cosmológico de Friedmann. El resultado que se llega en este modelo se puede resumir con las dos ecuaciones resultantes:

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{-8\pi G}{c^2} P \quad (13)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (14)$$

Estas ecuaciones se complementan con la ecuación de conservación de energía-momentum:

$$T_{;k}^{ik} = 0 \quad (14a) \quad ,$$

que para el caso del tensor descrito en la ecuación (10a) y con la métrica—ecuación 10—, se obtiene:

$$d(\rho a^3) = -3 \frac{p}{c^2} a^2 da \quad (15)$$

reescribiendo la ecuación (14) de la siguiente forma:

$$kc^2 = H_0^2 a_0^2 (\Omega - 1), \quad (16)$$

donde k es la curvatura del espacio, H_0 la constante de Hubble actual, a_0 es el factor de escala cósmica en el presente y el parámetro de densidad

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}; \quad (17)$$

donde ρ_0 es la densidad del Universo estimada en la época actual y ρ_c es la densidad crítica que es:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (18)$$

Veamos como este parámetro de densidad determina la evolución del Universo. Para esto, analicemos los casos para los diferentes valores de Ω_0 . Si $\Omega_0 = 1$ tenemos $k = 0$, un Universo "plano". Si $\Omega_0 > 1$ entonces k es positiva (universo cerrado); Si $0 < \Omega_0 < 1$ entonces k es negativa (universo abierto). Esto es, refiriéndonos a la topología de las hipersuperficies espaciales a $t = \text{constante}$.

Un caso particular de la ecuación de estado es:

$$\alpha = 0 \quad (19) \quad ;$$

Si consideramos a las galaxias como constituyentes esenciales del universo estamos pensando que éstas tienen una energía cinética despreciable por lo que $P = 0$. Las ecuaciones de Einstein's se reducen a las siguientes:

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (21)$$

$$d(\rho a^3) = 0 \quad (22)$$

La ecuación (22) indica que la cantidad de materia encerrada en cada elemento de volumen es invariante en el transcurso de la expansión.

Reescribiendo la ecuación de primer orden, tenemos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3a} \rho_0 a_0^3 - kc^2 \quad (23)$$

La solución, para el caso de $k = 0$, es la siguiente:

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (24)$$

En esta solución se encuentra que la edad del universo es:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (25)$$

1.2.0.a Solución para un Universo cerrado

Ahora veamos la solución para un universo cerrado ($k = 1$). Las ecuaciones a resolver son las siguientes:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + c^2}{a^2} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a^3} \quad (27)$$

Para resolver estas ecuaciones recordemos las definiciones de las cantidades $q(t)$ y $H(t)$, éstas son:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -q(t)[H(t)]^2. \quad H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

los valores presentes de estas cantidades se escriben q_0 y H_0 . Con estas definiciones — el parámetro $q(t)$ describe la variación de la pendiente de la línea del diagrama de Hubble — las ecuaciones toman la siguiente forma cuando son aplicadas a la presente época:

$$\frac{c^2}{a_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2 \quad (28)$$

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(H_0^2 + \frac{c^2}{a_0^2} \right) = \frac{3H_0^2 q_0}{4\pi G} \quad (29)$$

De la relación $\Omega_0 = 2q_0$ se debe cumplir, para que el lado izquierdo de la ecuación (28) sea positiva, que $q_0 > 1/2$ y $\Omega_0 > 1$. Eliminando a_0 y ρ_0 de la ecuación (27) escribimos:

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{\sigma}{a} - 1 \right) \quad (30)$$

con

$$\sigma = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \quad (31)$$

Separando variables la ecuación (30) se expresa como:

$$ct = \int \frac{a^{1/2} da}{(\sigma - a)^{1/2}} \quad (32)$$

haciendo la sustitución

$$a = \sigma \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{2} \sigma (1 - \cos \Theta) \quad (33)$$

integrando (32) obtenemos:

$$ct = \int \sigma \sin^2 \frac{\Theta}{2} d\Theta = \frac{1}{2} \sigma (\Theta - \sin \Theta) \quad (34)$$

Calculamos la integral con los límites: $a = 0$ en $t = 0 (\Theta = 0)$. Con la condición de que $t = t_0$ y $a = a_0$ se tiene cuando $\Theta = \Theta_0$ encontramos la edad del Universo con la siguiente expresión:

$$t_0 = \frac{1}{2c} \sigma (\Theta_0 - \sin \Theta_0) \quad (35)$$

De las relaciones:

$$\cos \Theta_0 = \frac{1 - q_0}{q_0}, \quad \sin \Theta_0 = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0}$$

reescribamos la ecuación (35) de la siguiente forma:

$$t_0 = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{1 - q_0}{q_0} \right) - \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \right] \frac{1}{H_0} \quad (36)$$

Considerando el caso de $q_0 = 1$ obtenemos:

$$t_0 = \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] \frac{1}{H_0} < \frac{2}{3H_0} \quad (37)$$

De la ecuación (33) notamos que el valor máximo de a es $a = \sigma$. La otra condición para que $a = 0$ es con $\Theta = 2\pi$, esto ocurre cuando

$$t = t_1 = \frac{\pi\sigma}{c} = \frac{2\pi q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \quad (38)$$

Para $q_0 = 1$ tenemos un tiempo de vida para la expansión de

$$t_1 = \frac{2\pi}{H_0} = 2\pi T_0 \quad (39)$$

El tiempo estimado para T_0 es del orden de 9 a 18 billones se años.

1.2.0.b Solución para un Universo abierto

Las ecuaciones a resolver para un universo abierto ($k=-1$) son las siguientes:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 - c^2}{a^2} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\dot{a}^2 - c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (41)$$

Aplicando las definiciones en la época presente en las ecuaciones anteriores obtenemos los siguientes resultados:

$$\frac{c^2}{a_0^2} = H_0^2(1 - 2q_0) \quad (42)$$

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2 q_0}{4\pi G} \quad (43)$$

La ecuación (42) nos recuerda las restricciones:

$$0 \leq \Omega_0 \leq 1, \quad 0 \leq q_0 \leq \frac{1}{2}$$

En lugar de la ecuación (30) obtenemos:

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{\eta}{a} - 1 \right) \quad (44)$$

con

$$\eta = \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \quad (45)$$

La solución de la ecuación (44), parametrizada por un ángulo Ψ , es la siguiente—con $t = 0$ en $a = 0$ —:

$$a = \frac{1}{2}\eta(\cosh\Psi - 1), \quad ct = \frac{1}{2}\eta(\sinh\Psi - \psi) \quad (46)$$

Los valores presentes para Ψ se encuentran por

$$\cosh\Psi_0 = \frac{1 - q_0}{q_0}, \quad \sinh\Psi_0 = \frac{(1 - 2q_0)^{1/2}}{q_0} \quad (47)$$

En este modelo la edad del Universo es:

$$t_0 = \frac{\eta}{2c}(\sinh\Psi_0 - \Psi_0) \quad (48)$$

en términos de q_0 es:

$$t_0 = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)} \left[\frac{(1 - 2q_0)^{1/2}}{q_0} - \cosh^{-1} \left(\frac{1 - q_0}{q_0} \right) \right] \frac{1}{H_0} > \frac{2}{3H_0} \quad (49)$$

Las soluciones encontradas en estos modelos se ilustran en la figura 1.8.

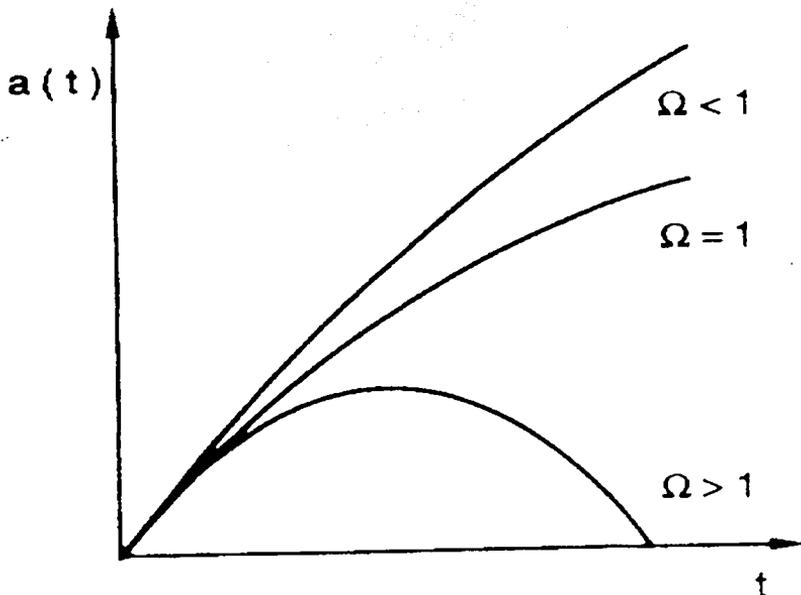


Fig. 1.8: Gráfica del parámetro de expansión como función del tiempo. Universos obtenidos del modelo cosmológico de Friedmann. $\Omega < 1$ espacio abierto, $\Omega = 1$ espacio euclidiano y $\Omega > 1$ espacio cerrado. [Coles and Lucchin, 1996].

1.2.1 El principio de Mach en la teoría Jordan-Brans-Dicke.

Al Principio de Mach Einstein lo nombró la relatividad de la inercia: las propiedades de la inercia de un cuerpo se siguen de la interacción gravitacional con todos los otros cuerpos. La inclusión del Principio de Mach en la teoría de Relatividad General de Einstein es poco clara. Einstein quedó convencido de este principio y, en

aquel entonces, se creía que el Principio de Mach estaba incorporado en la Teoría de la Relatividad General cuando Einstein postula - como ya lo hemos indicado - que la materia determina la geometría del espacio-tiempo. De manera formal esta dependencia recíproca se expresa por la ecuaciones de Einstein.

Sin embargo, al resolver estas ecuaciones, para ciertas condiciones, se encuentran soluciones que implica la existencia de fuerzas inerciales en un Universo perfectamente vacío, lo cual contradice el Principio de Mach. Otra contrariedad es que se han encontrado soluciones en el que existen universos rotantes. Describamos esta contrariedad. Un universo cerrado en rotación contradice el principio de Mach. Pero ¿qué es un universo en rotación? En el contexto de la física newtoniana, un Universo rotando es uno donde existe una rotación neta de su contenido con respecto al espacio absoluto. Por lo tanto, es claro que un modelo de universo rotando no es Machiano porque la rotación toma una referencia y ésta es el espacio absoluto en lugar de que sea con respecto a la materia. De esta manera, la conexión de un universo Machiano y no rotacional es fundamental. De aquí se desprende la idea de construir una teoría de gravitación relativista en el que se incluya el principio de Mach. Entre las teorías de gravitación relativista que intentaron lo anterior se encuentra la de Jordan-Brans-Dicke-, la cual trataremos en detalle en este trabajo. El punto de partida en la construcción de ésta teoría [JBD] es el principio de Mach: lo que conlleva la variación de la constante de gravitación, G , en el espacio-tiempo. Recordemos que Einstein considera, en la teoría de Relatividad General a ésta como una constante fundamental.

El concepto de una, G , variable en el espacio-tiempo tiene una historia interesante que vale la pena mencionar. La idea de considerar a G variable fue inspirada por Dirac [Davies, 1990]. Él desarrolló un trabajo basado en números adimensionales construidos a partir de cantidades físicas fundamentales en la microfísica y cosmología; encontrando coincidencias numéricas en éstas. Lo trascendental de este trabajo, como veremos adelante, son las implicaciones que conllevan estas coincidencias. Las expresiones naturales de estas cantidades numéricas son encon-

tradas en términos de razones adimensionales.

Supongamos que comparamos la fuerza electrostática entre un electrón y un protón con su fuerza gravitatoria: las fuerzas correspondientes son:

$$F_e = \frac{e^2}{r^2}; F_G = \frac{Gm_e m_p}{r^2} \quad (50)$$

Aquí la carga del protón es $+e$ y la del electrón $-e$, mientras que sus masas respectivas son m_p y m_e . La razón entre estas fuerzas se puede calcular con facilidad conociendo e , m_p , m_e y G . Obtenemos:

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{e^2}{Gm_p m_e} \approx 0.23 \times 10^{40}. \quad (51)$$

Consideremos ahora la relación entre el radio del universo (R) y el radio del electrón (r), aunque estrictamente hablando tengan en realidad nombres inadecuados. Esto es, R es la distancia visible del universo para la cual se perciben los cambios significativos en la estructura del universo. En lo que concierne al electrón, éste no es una esfera rígida de radio definido, pero la distancia:

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (52)$$

representa una dimensión característica de las propiedades electromagnéticas y dinámicas del electrón. por lo que se designa frecuentemente como radio de éste. Encontramos

$$\frac{R}{r_e} = \frac{m_e c^3}{H_0 e^2} \approx 3.7 \times 10^{40}; \quad (53)$$

donde H_0 es la constante de Hubble y c la velocidad de la luz en el vacío. Al comparar éstas dos razones adimensionales observamos, como lo hizo Dirac, una coincidencia numérica — esta coincidencia numérica se da también al calcular la raíz cuadrada de el número de partículas en el universo—. La pregunta obvia de hacer es cómo explicar esta coincidencia. Una posibilidad es responder "simplemente es una coincidencia": nos tocó vivir en una época en que las observaciones astronómicas hacen coincidir estos números o yendo más allá al afirmar, según el principio antrópico. que ciertas condiciones son necesarias para producir vida y

una de ellas son las relaciones entre las constantes fundamentales [Hawking, 1988]. Sin embargo a pocos les gusta una respuesta conservadora como ésta. La otra posibilidad es que esta coincidencia numérica esconda un significado físico profundo que tendremos que elucidar. Con este espíritu Dirac da una explicación a esta coincidencia. Él afirma que esta coincidencia refleja una conexión entre (51) y (53); observó que esta última depende de la época del universo, dado de que está en términos de H_0 . Si (51) y (53) son iguales, entonces (51) dependerá también de la época. Así que, aprovechando esta coincidencia numérica, hagamos el cociente entre éstas dos cantidades:

$$\frac{e^4 H_0}{G m_p m_e^2 c^3} \simeq 1 \quad (54)$$

La ecuación anterior que involucra cantidades fundamentales en la cosmología y en la microfísica es invariante en el tiempo y es del orden de la unidad. Dado que H_0 , la constante de Hubble, varía con el tiempo y la ecuación anterior es válida para cualquier época entonces algunas de las constantes $-e, G, m_e, m_p$ y c deben cambiar con el tiempo. Dirac propuso dos alternativas: la carga del electrón, $-e$, es variable o bien G la constante gravitacional lo es. Dirac decidió por G . Con esta decisión Dirac encontró, a partir de la ecuación anterior, la relación interesante

$$G \simeq \frac{e^4}{m_e^2 m_p c^3 T} \propto \frac{1}{T}; \quad (55)$$

donde T es la edad del universo. Concluyó que en el Universo del "big bang" la edad del universo aumenta por lo que implica, según la ecuación anterior, que G decrecerá con dicho aumento.

En la teoría de [JBD] de gravitación relativista se toma, como hemos señalado ya, G variable. Esta variación induce un campo escalar en el espacio-tiempo. Campo escalar que debemos acoplar, según la idea de Mach, con la densidad de masa del universo. Éste es el punto de partida que toman Brans-Dicke para desarrollar su teoría de gravitación relativista [Brans and Dicke, 1961]. Dándole así una utilidad al Principio de Mach. Describamos su formulación. Se parte de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{G} \sim \frac{M}{c^2 R} \sim \sum \frac{m}{rc^2} ; \quad (56)$$

donde c es la velocidad de la luz, M es la masa total del universo y R es el radio aparente del universo. Aquí observamos que G^{-1} es determinada de una superposición lineal de contribuciones inerciales $\frac{m}{rc^2}$ de una masa m a una distancia r del punto donde G es medido — aplicando aquí el Principio de Mach —. La forma de esta relación —ecuación(56)— sugiere que $\frac{1}{G}$ debe ser igualado con un campo escalar cuya fuente es la densidad del universo, ρ . Con esta idea escribimos la ecuación de tipo Poisson:

$$\nabla^2 \phi \sim \frac{\rho}{c^2} ; \quad (57)$$

cuya solución aproximada es de la siguiente forma:

$$\phi \sim \frac{1}{G} ; \quad (58)$$

Hemos obtenido una estimación funcional de este campo el cual es inversamente proporcional a la constante de gravitación. Brans y Dicke sugirieron que para obtener las ecuaciones de campo correctas para la gravitación habría que reemplazar a G por $\frac{1}{\phi}$ en la acción de Einstein. Así que para obtener la acción de la teoría [JBD] partimos de la acción de la [RGE]:

$$S_{RG} = \int [R + (16\pi G/c^4) L] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x ; \quad (59)$$

aquí R es el escalar de curvatura, g es el determinante del tensor métrico y L es el lagrangiano de la materia. Dividamos la acción por G y sumemos el lagrangiano para el campo escalar ϕ , recordando que éste está en función de G . De esta manera se obtiene la acción de [JBD]:

$$S_{BD} = \int \left[\phi R + (16\pi/c^4) L - \omega \left(\frac{\phi_i \phi^i}{\phi} \right) \right] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x ; \quad (60)$$

El tercer término, la densidad lagrangiana del campo escalar, ha sido introducido con un escalar en el denominador para permitir que ω sea una constante adimensional. Esta constante describe el acoplamiento de los grados de libertad tensoriales

de la teoría con el grado de libertad escalar. La ecuación (60) se puede considerar como una modificación de (59) que incluye al campo escalar ϕ acoplándolo con la geometría —el término ϕR — y un término dinámico para ϕ . Notamos además que L , la densidad lagrangiana de la materia no queda acoplada con el campo escalar de manera directa. Por lo tanto esta teoría respeta el principio de equivalencia debido $\nabla_i T_{mefj}^{ik} = 0$ [Salgado,2002].

Como en Relatividad General, el tensor energía-momento total (incluyendo al campo escalar) cumple con la condición de que su divergencia covariante es igual a cero [Chauvet,1988]—esto es la ley de la conservación de energía—, es decir:

$$T_{efj;k}^{ik} = 0 \quad (60a)$$

Sin embargo es posible mostrar que (utilizando las ecuaciones de campo escalar y las ecuaciones de Einstein) que el tensor de energía momento de la materia se conserva por separado [Salgado,2002].

Ahora veamos cuáles son las ecuaciones de campo para la teoría [JBD]. Recordemos que éstas se obtienen del principio variacional, es decir:

$$0 = \delta \int \left[\phi R + (16\pi/c^4) L - \omega \left(\frac{\phi_{,i}\phi^{,i}}{\phi} \right) \right] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x. \quad (61)$$

Haciendo la variación con respecto a las componentes del tensor métrico en la ecuación (34) obtenemos las ecuaciones de campo en [TJBD], éstas son:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = (8\pi\phi^{-1}/c^4)T_{ij} + (\omega/\phi^2)(\phi_{,i}\phi_{,j} - \frac{1}{2}g_{ij}\phi_{,k}\phi^{,k}) + \phi^{-1}(\phi_{,ij} - g_{ij}\square\phi) \quad ; \quad (62)$$

donde \square es el D'ambertiano definido como:

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (63)$$

Describamos este resultado—ecuación (62)—. El primer término del lado derecho corresponde al tensor de energía momento de la materia que aparece en [RGE], la diferencia es que éste está multiplicado por la variable gravitacional ϕ^{-1} . El segundo término es el tensor de momento-energía del campo escalar el cual esta

acoplado por la variable gravitacional ϕ^{-1} . El último término es el resultado de la presencia de la segunda derivada del tensor métrico en R en la ecuación (61). Reescribiendo la ecuación (62) de la siguiente forma:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = (8\pi\phi^{-1}/c^4)T_{ij} + O\left\{\frac{1}{\omega}\right\} \quad ; \quad (64)$$

notamos algo interesante: cuando domina el primer término, es decir, cuando $\omega \rightarrow \infty$ el lado derecho de la ecuación difiere de las ecuaciones de campo de la teoría [RGE] únicamente por la presencia del campo escalar, esto es ϕ^{-1} el cual es una constante cuando $\omega \rightarrow \infty$. Esto lo podemos ver de la siguiente manera: Haciendo la variación del lagrangiano con respecto a ϕ y combinando este resultado con la ecuación (35) obtenemos una ecuación de onda para ϕ , esta es:

$$\square\phi = \left[\frac{8\pi}{(3 + 2\omega)c^4} \right] \tau. \quad (65)$$

donde τ es la traza del tensor de la materia energía-momentum, T_{ik} . Este resultado es el que esperabamos -recuérdese la ecuación (57)-. Esto es, la materia sirve como fuente para la generación de ondas ϕ . De esta ecuación podemos sacar otra conclusión, no menos importante. Observamos que el límite $\omega \rightarrow \infty$, en la ecuación (65), implica que las soluciones regulares de ϕ , es a $\phi = \text{constante}$. Esto es el campo escalar ϕ se desacopla de la curvatura. Al tomarse este límite, el campo deja de tener efectos dinámicos en la teoría. De aquí que éste sea el límite einsteniano de la teoría [JBD].

1.2.1.a Los valores que debe tomar ω

Así que la diferencia entre la teoría [JBD] y la Relatividad General está caracterizada por el parámetro ω . Para pequeños valores de este parámetro la diferencia entre estas dos teorías es grande. mientras que para valores grandes de ω la diferencia entre estas dos tiende a desaparecer. Pero ¿Qué tan grandes tienen que ser estos valores? Veamos unos resultados concretos. La teoría [JBD] predice que el ángulo de deflexión de un rayo de luz al pasar cerca de un cuerpo masivo, digamos como el Sol, es

$$\delta\theta = \left(\frac{4GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} \right) \left[\frac{3 + 2\omega}{4 + 2\omega} \right]. \quad (66)$$

El cual difiere de la relatividad general por el factor en el corchete. Se ve claramente si $\omega \rightarrow \infty$ el resultado es:

$$\delta\theta = \left(\frac{4GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} \right) \quad (67)$$

Sin embargo, para $\omega \geq 30$ la predicción es satisfactoria; con un error del 4.3 por ciento con respecto al dato observacional.

Por otra parte, la teoría [JBD] predice que el corrimiento del perihelio de Mercurio, Δ , es

$$\Delta = \left[\frac{4 + 3\omega}{6 + 3\omega} \right] \times (\text{valor de la relatividad general}). \quad (68)$$

El dato observacional de la rotación del perihelio de Mercurio es $42.6'' \pm 0.9''/\text{siglo}$. La teoría [RGE] calcula un valor $43.03''$; mientras que la teoría [JBD] con $\omega = 6$ calcula $39.4''$. Si queremos un cálculo que se ajuste mejor a las observaciones, necesitamos que ω satisfaga la desigualdad $\omega \geq 6$. Finalmente, observaciones astronómicas —datos del radar Vikingo a Marte [Reasenberg,1979]— han estimado el valor de ω como $\omega > 500$. Sin embargo, de acuerdo con observaciones más recientes, el dato es: $\omega > 3000$ [Will, (Comunicación privada)]; por lo que experimentalmente son indistinguibles estas dos teorías.

1.2.1.b Aproximación para campos débiles

Habíamos mencionado en la introducción que la comparación de las teorías

métricas de gravitación llega a ser particularmente simple en el límite Post-Newtoniano. Es decir, cuando nos aproximamos en el régimen de campos débiles como es el caso del Sistema Solar en donde la gravitación Newtoniana es la adecuada— de aquí el nombre—. La aproximación es especificada por las siguientes afirmaciones:

- Los movimientos de las partículas no son relativistas: $v \ll c$. Es decir, regresamos a la mecánica Newtoniana.

• La métrica, g_{ik} , propuesta es una aproximación lineal a la Minkowskiano η_{ik} de la siguiente forma:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad |h_{ik}| \ll 1 \quad (69)$$

• Los cambios de los campos son despreciables con el tiempo. Esto significa que ignoramos las derivadas temporales respecto a las espaciales.

• Las presiones asociadas con la materia $\ll \rho$ (densidad de energía).

Al proponer esta aproximación lineal de la métrica en la ecuación (5) de campo de la Relatividad General se encuentra que la forma final de la métrica es:

$$g_{00} = -1 + 2U - 2U^2 + 4\zeta_1 + 4\zeta_2 + 2\zeta_3 + 6\zeta_4, \quad (70)$$

$$g_{0k} = \frac{-7}{2}V_j - \frac{1}{2}W_j, \quad (71)$$

$$g_{ik} = (1 + 2U)\delta_{ik} \quad (72)$$

Si hacemos esta misma aproximación de la métrica en la ecuación (62) de campo para la teoría de Brans-Dicke obtenemos que la métrica final es:

$$g_{00} = -1 + 2U - 2U^2 + 4\zeta_1 + 4\zeta_2 + 2\zeta_3 + 6\zeta_4 + 4 \left(\frac{3 + 2\omega}{4 + 2\omega} \right) \zeta_1 + 4 \left(\frac{1 - 2\omega}{4 + 2\omega} \right) \zeta_2 + 2\zeta_3 + 6 \left(\frac{1 + \omega}{2 + \omega} \right) \zeta_4, \quad (73)$$

$$g_{0k} = \frac{-1}{2} \left(\frac{10 + 7\omega}{2 + \omega} \right) V_k - \frac{1}{2} W_k, \quad (74)$$

$$g_{ik} = \left[1 + 2 \left(\frac{1 + \omega}{2 + \omega} \right) U \right] \delta_{ik} \quad (75)$$

donde ζ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ son potenciales métricos al igual que U, V_j, W_j

Observamos que las ecuaciones (73),(74),(75) de la teoría de Brans-Dicke se reducen a la teoría de la Relatividad General (70),(71),(72) cuando $\omega \rightarrow \infty$. Esto es las dos teorías métricas coinciden en el límite Einsteiniano.

1.3 Algunas soluciones cosmológicas en la teoría de Jordan-Brans-Dicke

Al observar las ecuaciones de campo en la teoría [JBD] -ecuaciones (62) y (65)- y las comparamos con las de la [RGE]- ecuaciones dadas en (7)- notamos que las primeras tienen una mayor dificultad. aparentemente, para resolver que las segundas. Como hemos visto, siempre es posible hacer a la teoría [JBD] experimentalmente indistinguible de la [RGE] (recuérdese $|\omega| \geq 6$). Esto nos lleva a preguntarnos ¿Para qué ocuparse de la teoría difícil? Bueno, siempre es una ventaja tener dos teorías. Las similitudes y hasta ciertas diferencias en éstas puede utilizarse, en ciertos casos al menos, como auxiliares o aclaradores de aspectos en una teoría que son más fáciles de tratar en la otra. además la teoría JBD predice otros fenómenos que pueden confrontarse con las observaciones (ondas gravitacionales, escalares) [Brunetti, et. al.1999]. [Dabusi, et. al., 2001]

Veámos algunas soluciones cosmológicas en la teoría [JBD]. Recordémos que obtener soluciones cosmológicas significa que dada una métrica hay que obtener la forma funcional del factor de escala a y en el caso de las teorías escalares-tensoriales también la función ϕ . Puesto que son éstas las dos funciones que caracterizan al universo a gran escala. Comencémos por la suposición usual; el Principio Cosmológico —además de esto suponemos que ϕ es función del tiempo únicamente—. Así que proponemos el elemento de línea de Robertson-Walker (ecuación (10)). Sustituyendo ésta métrica en las ecuaciones (62) y (65) obtenemos las siguientes ecuaciones a resolver:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{-8\pi}{\phi c^2} P - \frac{2\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a} - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \quad (76)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) \quad (77)$$

$$[\dot{\phi}R^3]' = \frac{8\pi}{(3+2\omega)\phi}(\rho - 3p)a^3 \quad (78)$$

para un fluido perfecto. Estas ecuaciones se complementan con la ecuación de conservación de la materia:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \quad (79)$$

Integrando la ecuación (78). Se obtiene:

$$a(t)^3 \dot{\phi}(t) = \frac{8\pi}{3+2\omega} \int_0^t dt a^3 \left(\rho - \frac{3p}{c^2} \right) + a^3(0) \phi(0) \quad (80)$$

Brans-Dicke propusieron las condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad ; \quad a(0) = 0 \quad ; \quad \phi(0) = 0 \quad ; \quad \dot{\phi}(0) a^3(0) = 0 \quad (81)$$

Para la era del Universo dominada por la materia, resulta:

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 = \text{constante} \quad (\text{consecuencia de ec(79)}) \quad (82)$$

obtenemos al integrar la ecuación (80) el siguiente resultado:

$$\dot{\phi} a^3 = \left[\frac{8\pi}{3+2\omega} \right] \rho_0 a_0^3 t \quad (83)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (77) obtenemos:

$$\left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \right]^2 + k a^{-2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{3}\omega \right) \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \left(1 + \frac{2}{3}\omega \right) \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \left(\frac{1}{t} \right) \quad (84)$$

Para el caso de un espacio plano, $k = 0$, la ecuación puede ser integrada con las condiciones iniciales-ecuación (81)-. La solución es la siguiente:

$$\phi = \phi_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^r \quad (85)$$

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^q \quad (86)$$

con:

$$r = \frac{2}{4+3\omega} \quad (87)$$

$$q = \frac{2+2\omega}{4+3\omega} \quad (88)$$

Notamos dos resultados importantes. Al integrar la ecuación (83) encontramos:

$$\phi_0 = 8\pi \left[\frac{4+3\omega}{2(3+2\omega)} \right] \rho_0 t_0^2$$

Considerando que M es del orden de $\rho_0 c^3 t_0^3$ y R es aproximadamente ct_0 podemos notar que esta ecuación es compatible con (56). Es decir las condiciones iniciales (81) son compatibles con el Principio de Mach.

El segundo resultado importante es la ecuación (86). Observamos que para $\omega \geq 3000$ la solución es parecida a la obtenida por la Relatividad General, ecuación (24), en donde $a \sim t^{2/3}$.

La edad del universo es encontrada por

$$t_0 = \left[\frac{2\omega + 2}{3\omega + 4} \right] \left(\frac{1}{H_0} \right) \quad (90)$$

el valor es el obtenido en Relatividad General —ecuación (25)— para $\omega \geq 3000$.

La densidad del universo es

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\frac{(3\omega + 4)(4 + 2\omega)}{6(\omega + 1)^2} \right] \quad (91)$$

El parámetro de desaceleración es:

$$q_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega + 2}{\omega + 1} \right] \quad (92)$$

Las ecuaciones anteriores llegan a ser idénticas a las ecuaciones de la Relatividad General en el límite $\omega \rightarrow \infty$. Otra expresión, no menos importante, para este modelo es la fracción de cambio de la constante de gravitación, esta se expresa como:

$$\frac{\dot{G}}{G} = - \left[\frac{H}{\omega + 1} \right] \quad (93)$$

el signo menos indica que la constante de gravitación decrece con el tiempo. De observaciones en el Sistema Solar se estima que las variaciones de la constante gravitacional es:

$$\left| \frac{\dot{G}}{(GH)} \right| \leq 0.3h^{-1} \quad (93a)$$

donde h es una constante con valores entre 0.6 y 0.7 [R.G., et al. 1992]

Experimentalmente se han encontrado evidencias de esta disminución. Datos observacionales dan cuenta de la expansión en los radios de los planetas— esto

debido al debilitamiento de la fuerza gravitacional como consecuencia de una disminución de la G -. La expresión para ello es

$$\frac{\dot{R}}{R} \quad (93a)$$

en la tabla [1.1] esta cantidad esta en unidades de 10^{-11} / año al igual que su desviación estándar

Mercurio	0.0 ± 0.012	SW	McElhinny et al. 1978
Luna	0.0 ± 0.015	SW	McElhinny et al. 1978
Marte	0.0 ± 0.03	SW	McElhinny et al. 1978

Tabla 1.1: SW es el sistema de unidades Salam-Weinberg. La unidad de tiempo se toma como la vida media del mesón. [McElhinny, 1978].

Para los casos de espacios no planos las soluciones de las ecuaciones (76) y (77) se obtienen de manera numérica. Un ejemplo de esta integración se da en la Figura 1.9 y 1.10 donde a y ϕ son graficadas como función del tiempo para los tres casos: curvatura positiva, negativa y nula; con $\omega = 8$

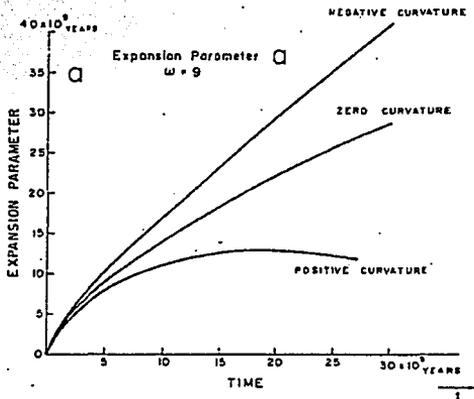


Fig. 1.9: El factor de escala a como función de t para los tres casos: Universos cerrado, abierto y plano. Con $\omega = 9$.

Para presentar algunas otras soluciones de las ecuaciones de campo—ecuaciones (76), (77) y (78)—reescribimos las ecuaciones de la siguiente forma:

$$\frac{3\ddot{R}}{R} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} = \frac{-8\pi}{(3+2\omega)\phi} [(2+\omega)\rho + 3(1+\omega)p] \quad (94)$$

$$\frac{3\ddot{R}}{R} + \frac{6\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3\dot{\phi}\dot{R}}{\phi R} = \frac{24\pi}{(3+2\omega)\omega\phi} [(1+\omega)\rho - \omega p] \quad (95)$$

$$[\dot{\phi}R^3]' = \frac{8\pi}{(3+2\omega)\phi} (\rho - 3p)R^3 \quad (96)$$

para un fluido perfecto. Estas ecuaciones se complementan con la ecuación de conservación de la masa:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + p) \quad (97)$$

La no linealidad de estas tres ecuaciones—(94), (95) y (96)—hace que las soluciones sean difíciles de encontrar. Sin embargo, la obtención de soluciones se facilita bastante si se hace un reescalamiento de las funciones que aparecen en estas

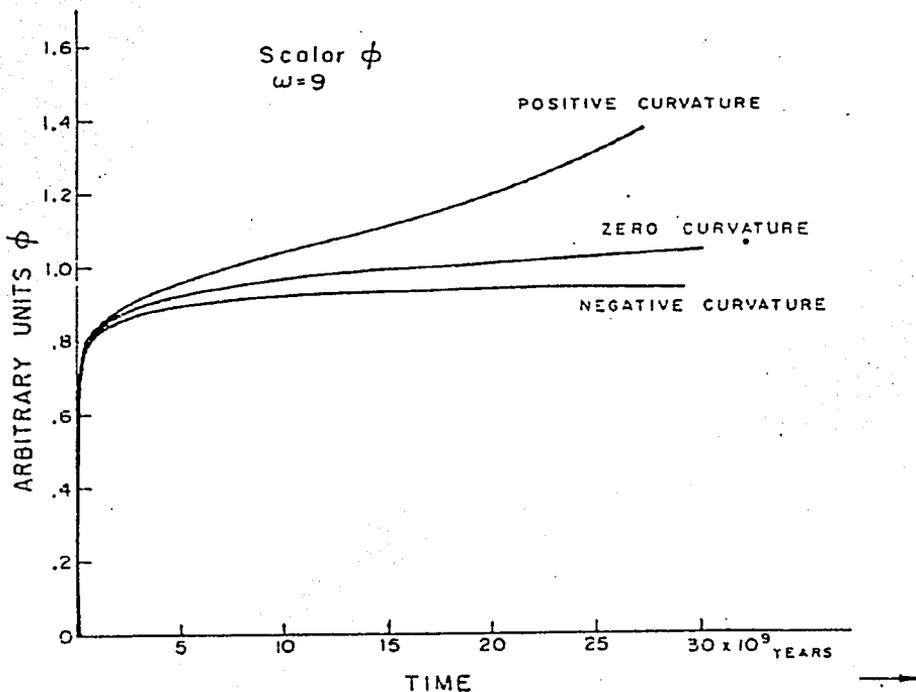


Fig. 1.10: El campo escalar ϕ , en unidades arbitrarias, como función de t para los tres casos: espacio plano, cerrado y abierto. Con $\omega = 9$.

tres ecuaciones. Así que reescalamos el campo ϕ : $\phi \rightarrow \phi R^3$ y a éste nombrémosle $\Psi \equiv \phi R^3$. De la suma de las ecuaciones (95) y (96) obtenemos la siguiente ecuación reescalada:

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = \frac{\alpha}{\phi} [(4 + 3\omega)\rho - 3(1 + \omega)p] - 6\frac{\kappa}{R^2} \quad \text{con} \quad \alpha \equiv \frac{8\pi}{(3 + 2\omega)} \quad (98)$$

La ecuación reescalada correspondiente a la (94) es

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = \frac{\alpha}{\phi} [(2 + \omega)\rho + 3(1 + \omega)p] - \frac{3(4 + 3\omega)\dot{R}^2}{R^2} + \frac{6(1 + \omega)\dot{R}\dot{\Psi}}{R\Psi} - \frac{\omega\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} \quad (99)$$

Podemos reescalar otras variables de nuestras ecuaciones. Las sugeridas son ρ y p . Por esto, utilicemos la ecuación de estado. Lo común son las llamadas ecuaciones barotrópicas en las que la presión es proporcional a la densidad:

$$P = \beta\rho \quad , |\beta| \leq 1 \quad (100)$$

El reescalamiento se da de la siguiente manera: $p \rightarrow \rho R^3 \equiv P$ y $\rho \rightarrow \rho R^3 \equiv \varepsilon$. Ahora podemos escribir las versiones finales de nuestras ecuaciones (99), (96) y (98), respectivamente:

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = \frac{-\alpha}{\Psi} [(2 + \omega) + 3(1 + \omega)\beta] \varepsilon - \frac{3(4 + 3\omega)\dot{R}^2}{R^2} + \frac{6(1 + \omega)\dot{R}\dot{\Psi}}{R\Psi} - \frac{\omega\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} \quad (101)$$

$$\left[\dot{\Psi} - 3 \frac{\Psi \dot{R}}{R} \right]' = \alpha(\varepsilon - 3P) = \alpha(1 - 3\beta)\varepsilon \quad (102)$$

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = \alpha [(4 + 3\omega) - 3(1 + \omega)\beta] \varepsilon \Psi^{-1} - \frac{6\kappa}{R^2} \quad (103)$$

Con este reescalamiento la ecuación de conservación se escribe:

$$\dot{\varepsilon} = -3P \frac{\dot{R}}{R}; \quad (104)$$

si la presión es barotrópica ésta se escribe

$$\dot{\varepsilon} = -3\beta\varepsilon \frac{\dot{R}}{R} \quad (105)$$

Podemos obtener soluciones de manera inmediata para un espacio plano y vacío ($\varepsilon = P = 0$) pues la ecuación (103) se integra con el resultado

$$\Psi = at = b \quad ; \quad a, b = \text{constante}. \quad (106)$$

Al ser sustituido este resultado en (102) obtenemos:

$$R = \Psi^{(1-c/a)}, \quad c = \text{constante} \quad (107)$$

Estas soluciones generales de vacío y para el espacio plano fueron encontradas inicialmente por O'Hanlon y Tupper en 1972.

Otra solución que se puede encontrar de manera sencilla es el caso para el espacio plano y con la ecuación de estado barotrópicas. Las ecuaciones a resolver son (101), (102) y (103) con $\kappa = 0$. Se aconseja el reescalamiento $\varepsilon dt \equiv d\eta$ (podríamos interpretarlo como un reescalamiento del tiempo). Haciendo este reescalamiento e integrando las ecuaciones (102) y (103) obtenemos:

$$\varepsilon \Psi' - 3 \frac{\Psi \varepsilon R'}{R} = \alpha(1 - 3\beta)(\eta + \eta_0) \equiv (1 - 3\beta)\eta \quad (108)$$

$$\varepsilon \Psi' = [(4 + 3\omega) + 3(1 + \omega)\beta](\eta + \eta_1) \quad (109)$$

De estas ecuaciones obtenemos otra al considerar, sin pérdida de generalidad, que las constantes de integración $\eta_0 = \eta_1$ y, recordando la ecuación (105), tenemos:

$$\beta \Psi \varepsilon' = 3[\omega\beta - (1 + \omega)]\eta \quad (110)$$

Ahora, sumemos las ecuaciones (109) y (110) obteniendo

$$(\varepsilon \Psi)' = - \left[\frac{3(1 + \omega) - (4 + 3\omega)\beta + 3\omega\beta^2}{\beta} \right] \eta \equiv a\eta \quad (111)$$

La integral de esta ecuación es:

$$\varepsilon \Psi = a\eta^2 + b\eta + c \quad a, b, c = \text{constantes} \quad (112)$$

Este resultado permite encontrar las funciones $\varepsilon(\eta)$ y $\Psi(\eta)$ al sustituir (112) en (109) y (110), respectivamente se encuentra [Chauvet, 1988]:

$$\varepsilon = \int \exp \left[\frac{3(\omega\beta - 1 - \omega)\beta^{-1}}{a\eta^2 + b\eta + c} \eta \right] d\eta \quad (113)$$

$$\Psi = \int \exp \left[\frac{(4 + 3\omega) - 3(1 + \omega)\beta}{a\eta^2 + b\eta + c} \eta \right] d\eta \quad (114)$$

Para los casos de radiación o de materia ultrarelativista, con $\beta = 1/3$, deben ser tratados aparte. Por otra parte, cuando se tiene un espacio no plano con ecuaciones de estado barotrópicas no puede emplearse el procedimiento anterior puesto que el término $\frac{\partial k}{R^2}$ impide la integración de (103). Sin embargo, haciendo la suposición de que la solución $\epsilon\Psi = a\eta^2 + b\eta + c$ para el espacio plano se vale también para otros espacios uno encuentra soluciones correspondientes [Chauvet, 1988].

por otro lado, para el espacio plano con ecuaciones de estado politrópicas— $P = \beta\rho^{1+1/n}$ con $\beta, n = \text{constantes}$ — la ecuación a resolver es la llamada ecuación de Abel [Chauvet, 1988].

Capítulo 2

Modelos Cosmológicos

2.1 Ecuaciones de campo del modelo cosmológico Bianchi VIII en la teoría JBD.

2.1.1 Nucleosíntesis

Habíamos mencionado que el Universo — el cuál está compuesto por estrellas, galaxias, rayos cósmicos, etc— presenta las características de homogeneidad (invarianza traslacional) e isotropiá (invarianza rotacional). Esto es, sabemos que las estrellas están distribuídas en el espacio de manera extraordinariamente no uniforme, de hecho, se concentran en sistemas estelares individuales —llamados galaxias—. Pero al estudiar el universo a gran escala hemos de prescindir de estas faltas de homogeneidad locales, que son el resultado de la aglomeración de la materia formando estrellas y sistemas estelares. Por densidad de masa debemos entender, por lo tanto, la densidad promediada en regiones del espacio cuyas dimensiones son grandes comparadas con las distancias que separan a las galaxias entre sí. Los datos astronómicos de que se dispone no contradicen la hipótesis de homogeneidad . Pero ya por su propia esencia, es claro que puede tener tan sólo un carácter aproximado, puesto que la homogeneidad desaparece, evidentemente,

al pasar a escalas más reducidas. Por otro lado, la evidencia importante de la isotropía del universo es la radiación de fondo.

También se había dicho que el Universo se expande, esto por lo del corrimiento hacia el rojo en las longitudes de onda emitidas por las galaxias y estrellas. Este corrimiento

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}; \quad (115)$$

se incrementa con la distancia— la hipótesis de isotropía, proporciona en modelos cosmológicos, una explicación correcta del fenómeno del corrimiento al rojo el cual ha sido un problema fundamental en la cosmología. Por lo que la isotropía es una descripción adecuada del estado actual del Universo—. Pero ¿Cuál es la causa o causas de estas características observadas en la estructura y dinámica del Universo? La respuesta más aceptada, hasta ahora, a esta pregunta es la proporcionada por la teoría del Big Bang. Esbozemos esta idea. Esta teoría se le nombra con precisión "Big Bang caliente" ó $\alpha\beta\gamma$ (nombre del artículo publicado en 1948 por Alpher, Bethe y Gamow).

Según ésta, el Universo se inicia con una gran explosión; partiendo de una singularidad, en donde la densidad y la temperatura eran extremas — $\rho = T = \infty$ en $t = 0$ —(The Royal Society of London, 1982). No sabemos nada acerca de la física que impera en esta singularidad. Durante el primer segundo los fotones y las partículas cambian de una a otra, es decir, fotones de alta energía colisionan para producir pares de partículas y antipartículas, los cuáles son aniquilados para producir fotones. Debido a las altas temperaturas ($10^{15}K < T < 10^{10}K$) no hay cabida para hablar de las fuerzas nucleares o electromagnéticas. Las partículas se mueven tan de prisa que pueden vencer cualquiera de estas fuerzas. Para tiempos entre uno y doscientos segundos después de la gran explosión se dió la nucleosíntesis. Las temperaturas y energías corresponden a $10^{10}K > T > 910^5K$ grados kelvin y a $1 > kT > 0.1$ MeV, respectivamente. Las reacciones nucleares más importantes en la nucleosíntesis, las cuáles se enumeran en cinco, que establecen la abundancia relativa de hidrógeno, deuterio, helio tres y helio cuatro son

como las muestra la tabla 2.1 [Peimbert, 1984]:

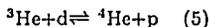
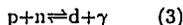
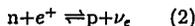
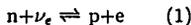


Tabla 2.1: Aquí se enumeran las cinco reacciones nucleares primigéneas.

De aquí surge un test cosmológico en el que se pueden comparar las teorías de Relatividad General y la de Brans-Dicke, esta es la abundancia primordial del helio en el universo.

Las soluciones numéricas de las ecuaciones (76), (77) y (78) pueden ser resueltas con ayuda de una computadora. Considerando modelos de universos consistentes de polvo con una densidad de masa ρ_0 , con radiación de cuerpo negro de 3° K en el presente y, además de esto, que en universo temprano los pares de partículas y antipartículas se encuentran en equilibrio térmico con la radiación—los procesos físicos se describen en Peebles (1981) y Wag (1962)—. Los resultados que se obtuvieron se ilustran en la tabla 2.2. En donde se dan las abundancias de D, He^3, He^4 producidas en el Big Bang para varios valores de ρ_0 . No olvidemos que para $\omega = \infty$ corresponde a la Relatividad General.

ρ_0 en g/cm^3	ω	D	${}^3\text{He}$	${}^4\text{He}$
10^{-31}	5	7.1×10^{-4}	6.3×10^{-5}	25%
	∞	6.6×10^{-4}	6.2×10^{-5}	25%
3×10^{-31}	5	1.3×10^{-4}	3.8×10^{-5}	29%
	∞	1.0×10^{-4}	3.8×10^{-5}	26%
10^{-30}	5	2.3×10^{-5}	2.2×10^{-5}	32%
	∞	1.3×10^{-5}	2.0×10^{-5}	27%
3×10^{-30}	5	3.0×10^{-6}	1.3×10^{-5}	36%
	∞	4.3×10^{-7}	1.0×10^{-5}	28%
10^{-29}	5	2.4×10^{-8}	6.9×10^{-6}	40%
	∞	$\approx 10^{-11}$	6.5×10^{-6}	29%
2×10^{-29}	5	$\approx 10^{-10}$	5.3×10^{-6}	42%
	∞	$\approx 10^{-18}$	5.4×10^{-6}	29%
Sistema Solar		2×10^{-4}	6×10^{-5}	27%

Tabla 2.2: Abundancias de los elementos D, ${}^3\text{He}$ y ${}^4\text{He}$ producidos en el Big Bang.

De la tabla anterior notamos que para densidades bajas las teorías de la Relatividad General y la de Brans-Dicke no hay diferencias apreciables. Ambas teorías reproducen las abundancias observadas en el Sistema Solar. Para modelos de altas densidades, sin embargo, las abundancias de ${}^4\text{He}$ y D son substancialmente más grandes en $\omega = 5$ que en $\omega = \infty$. Resumiendo, en las dos teorías se obtienen abundancias razonables con las observadas.

En otra parte. Gamow puntualizó que los fotones producidos en estas etapas tempranas, como se puede ver en la tabla [2.1], fueron absorbidos por la materia, en cambio, otros que no interaccionaron con la materia se encuentran en el universo como radiación—de aquí la radiación de fondo en el universo—.

Después, durante el siguiente millón de años, el universo, al irse expandiendo, se va enfriando hasta llegar a temperaturas de miles de kelvins. A esta temperatura los electrones y los núcleos no tienen ya la suficiente energía para vencer la atracción electromagnética entre ellos, estos habrán comenzado a combinarse para formar átomos. De esta manera el universo está constituido principalmente de H y ${}^4\text{He}$ ya que estos elementos fueron favorecidos en su formación por el resultado de la nucleosíntesis (70% H, 28% He, 2% otros). El universo se sigue expandiendo y enfriando, pero en regiones que fueron ligeramente más densas que la media la expansión habría sido retardada por la atracción gravitacional, originándose así una galaxia primigenia. Mas tarde, el gas de hidrógeno y helio en esta galaxia se disgregaría en nubes más pequeñas que comenzarían a colapsarse debido a su atracción gravitatoria. Conforme se contrayese, los átomos dentro de ella empezarían a colisionar unos con otros, la temperatura del gas aumentaría, hasta que finalmente estuviese lo suficientemente caliente como para iniciar reacciones de fusión nuclear. Estas reacciones convertirían el hidrógeno en más helio y la energía desprendida de esta reacción—recuérdese que esta energía es expresada como: $E = \Delta mc^2$ donde Δm es la diferencia en masa entre cuatro núcleos de hidrógeno y un núcleo de helio—aumentaría la presión lo que impediría a las nubes seguir contrayéndose. Así, se ha formado una estrella la cual está en equilibrio hidrostático. Si la estrella es masiva, cuando acabe su combustible. hidrógeno. empieza a contraerse y, entonces, se generan reacciones nucleares de fusión creando elementos más pesados como Carbono, Oxígeno, Fierro, entre otros. Dependiendo de la masa inicial de la estrella en consideración se contraerá, una vez terminado el proceso de fusión nuclear. hacia agujero negro, estrella de neutrones, cuasares u otras. En este proceso. de evolución de una estrella masiva, éstas expulsan Helio, Oxígeno,

Nitrógeno, Carbono, Hierro, etc. los cuales son compuestos fundamentales de nuestro planeta. Finalmente estamos aquí. Del cómo se originó la vida en nuestro planeta es una historia no menos interesante, sin embargo, sale del alcance de este trabajo.

De esta manera la teoría del Big Bang explica el porque de la expansión del universo y, de la abundancia en los elementos ligeros, entre otras predicciones. Sin embargo, esta teoría ha sido mas convincente debido a la detección de radiación de fondo (ó remanente de la gran explosión) que corresponde a la radiación de cuerpo negro a una temperatura de $2.73K$.

Por consiguiente, cualquier modelo cosmológico deberá ser compatible con las observaciones astronómicas acerca de la estructura y dinámica del Universo. Tomando en consideración la teoría del Big Bang.

2.1.2 modelos cosmológicos Bianchi

Por otra parte, para construir un modelo cosmológico se hacen consideraciones acerca de el espacio -tiempo y la materia contenida en ella. Al espacio tiempo lo podemos considerar homogéneo o bien inhomogéneo; isótropo o anisótropo. A la materia contenida en el universo podemos hacerle algunas consideraciones termodinámicas como son: considerarla como un fluido perfecto barotrópico en el que la ecuación de estado la presión es proporcional a la densidad ($P = \beta\rho$) o politrópico en el que la presión no es linealmente proporcional a la densidad ($P = \beta\rho^{1+1/n}$)—donde $\beta, n = Cte$ —. Otra posibilidad es considerar a la materia en forma de radiación o polvo. Al incluir algunas de estas consideraciones en las ecuaciones de campo de nuestra teoría formamos nuestro modelo cosmológico.

Para empezar aceptemos que el Universo se nos presenta homogéneo e isótropo, sin embargo, podemos suponer que el Universo, en su edad temprana, fuese homogéneo pero anisótropo. Es decir, que el universo homogéneo e isótropo pudo venir de una expansión homogénea pero anisótropa, pero, estas dos ultimas son características de los modelos de Bianchi(s). De hecho, estas dos características

resultan motivantes para trabajar. Veamos por qué. Los modelos Bianchi(s) son espacialmente homogéneos. Esto se presta para tratar problemas complejos los cuales son factibles de tratarse por las grandes simetrías que presentan estos modelos. Recordemos que en cosmología, el objetivo esencial, es describir la evolución del universo y para ello es necesario resolver las ecuaciones de campo—ecuaciones (62.) y (65)— en la teoría [JBD], si es el caso. Para esto se acostumbra proponer simetrías que simplifiquen esta tarea. Una simetría, en particular, es la homogeneidad espacial que, como ya lo hemos dicho, es una característica de los modelos de Bianchi(s). Esta simetría permite desacoplar la parte espacial de la temporal en la métrica y reducir las ecuaciones(65) y (62) a ecuaciones diferenciales ordinarias.

De esta manera, los modelos espacialmente homogéneos son los más fáciles de resolver exactamente—recordemos que la familia de modelos más conocida de las que se han obtenido soluciones exactas es la de (FRW)—. Si los modelos son espacialmente inhomogéneos la geometría resulta ser más complicada.

La segunda característica de los modelos de Bianchi es la anisotropía. Como lo hemos dicho, la isotropía del universo se puede explicar a partir de modelos anisótropos. De hecho muchos autores han considerado a los modelos isótropos de (FRW) como casos particulares [Chauvet, 1988]. Muestra de ello es que para algunos modelos Bianchi, tratados en Relatividad General, las soluciones — factores de escala— tienden a isotropizarse [Cervantes, 2000]. Sin embargo, se han encontrado situaciones similares cuando se ha trabajado en la teoría [JBD]. Como ejemplo particular consideremos el modelo de Bianchi VII [Nuñez,1992]. En este trabajo se encontró que los factores de escala son proporcionales entre sí. Mostrando así una expansión isótropa. En resumen puede afirmarse que el universo isótropo puede explicarse a partir de modelos anisótropos como los Bianchi(s).

Por otra parte, los modelos de Bianchi han sido de utilidad para resolver diversos problemas. Por ejemplo, se han usado para modelar posibles desviaciones, de la región de microondas, de la isotropía del universo de la radiación de fondo [Barrow, 1981]. También se han ocupado en el cálculo de la polarización de la

radiación de fondo en la región de microondas [Matener y Tolman, 1982]. Ambos ejemplos tratados en [TRGE].

2.1.3 Modelos Bianchi en el espacio vacío en la teoría JBD

Antes de presentar el modelo cosmológico de Bianchi VIII en la teoría [JBD] veamos cuales son las características generales de los modelos de Bianchi(s) en [JBD] para el vacío. Así que para iniciar proponemos la homogeneidad en el espacio-tiempo, esto es, el universo presenta el mismo aspecto desde cualquier lugar en un momento dado o dicho de otra forma: el espacio-tiempo se presenta como un conjunto de hipersuperficies invariantes $s(t)$. La homogeneidad espacial significa que la métrica en cada $s(t)$ queda especificada por medio de constantes de tal modo que ésta solamente es función del parámetro t : $h_{ij}=h_{ij}(t)$. Así que la métrica para un espacio homogéneo es de la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ij}(t)\omega^i\omega^j \quad ; \quad (116)$$

donde t es tiempo cosmológico y las ω^i y ω^j son las componentes de la uno-formas que caracterizan a los distintos tipos de Bianchi [MacCallum, 1980]. Los casos más sencillos se obtienen cuando la métrica es diagonal y son con los que se trabajan.

Usando las métricas específicas para cada modelo Bianchi, donde se supone que la única dependencia es con el tiempo cosmológico, y empleando las ecuaciones de [JBD] para el vacío:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = (\omega/\phi^2)(\phi_{,i}\phi_{,j} - \frac{1}{2}g_{ij}\phi_{,k}\phi^{,k}) + \phi^{-1}(\phi_{,i;j} - g_{ij}\square\phi) \quad ; \quad (117) \quad ;$$

se obtienen las ecuaciones de campo para cada factor de escala en todos los modelos de Bianchi(s) en [JBD], éstas son:

$$(\ln a_1)'' + (\ln a^3)' (\ln a_1)' + (\ln a_1)' \left(\frac{\phi}{\phi} \right) + \mathcal{A}_1 a_1^{-2} + \mathcal{B}_1 a_2^{-2} + \mathcal{C}_1 a_3^{-2} + \mathcal{D}_1 \beta_1 + \mathcal{E}_1 \beta_2 + \mathcal{F}_1 \beta_3 = 0$$

$$\text{con } i = 1, 2, 3 \quad (118)$$

Donde usamos las siguientes definiciones: a_i es el factor de escala i -ésimo; $\beta_i \equiv \left(\frac{a_i}{2\sigma_j \sigma_k}\right)^2$; $a^3 = a_1 a_2 a_3$ y $\partial_t \equiv (\cdot)$.

Adicionalmente, se cumple lo que se ha llamado la ecuación de constricción:

$$\begin{aligned} (\ln a_1)' (\ln a_2)' + (\ln a_1)' (\ln a_3)' + (\ln a_2)' (\ln a_3)' + (\ln a^3)' \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 \\ + \mathcal{A}_1 a_1^{-2} + \mathcal{B}_1 a_2^{-2} + \mathcal{C}_1 a_3^{-2} + \mathcal{D}_1 \beta_1 + \mathcal{E}_1 \beta_2 + \mathcal{F}_1 \beta_3 = 0 \end{aligned} \quad (119)$$

Los coeficientes constantes, que dependen de cada modelo en particular, $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i$ —con $i = 1, 2$ y 3 — están dados en la tabla 2.3. Los valores de los coeficientes que aparecen en la ecuación de constricción son la semisuma de los coeficientes que aparecen en (118) Por ejemplo,

$$\mathcal{A}_4 = \frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3}{2} \quad (120)$$

Esto se puede comprobar en Tabla 2.3.

Tipo	A	B	C	D	E	F
I	0	0	0	0	0	0
II	0	0	0	2	0	0
	0	0	0	-2	0	0
	0	0	0	-1	0	0
IV	-2	0	0	0	2	0
	-2	0	0	0	-2	0
	-3	0	0	0	-1	0
VI_h	$-(h^2 + 1)$	0	0	0	0	0
	$-(h+1)$	0	0	0	0	0
	$-(h^2+h)$	0	0	0	0	0
	$-(h^2+h+1)$	0	0	0	0	0
VII_h	$4M^2-5/2$	0	0	0	-2	-2
	$4M^2-9/2$	0	0	0	2	-2
	0	0	0	0	-2	2
	$4M^2-7/2$	0	0	0	-1	-1
$VIII$	1	0	0	2	-2	-2
	0	-1	0	-2	2	-2
	0	0	-1	-2	-2	2
	1/2	-1/2	-1/2	-1	-1	-1
IX	0	0	0	2	-2	-2
	0	1	0	-2	2	-2
	0	0	1	-2	-2	2
	1/2	1/2	1/2	-1	-1	-1

Tabla 2.3: Valores de los coeficientes para la ecuación (118) y (119)[Chauvet et. al., 1992].

Es importante señalar que algunos modelos conducen a ecuaciones que proporcionan relaciones adicionales entre los factores de escala, esto surge de las simetrías de cada modelo en particular. Los modelos que exhiben este tipo de relaciones son IV, $V I_h$ y $V II_h$ [Chauvet et. al., 1992].

Por otro lado, la obtención de soluciones se facilita bastante si hacemos un reescalamiento de la variable t . Para esto ocupamos la ecuación (65). Ésta se reduce para el vacío y con la condición de que ϕ sólo depende de t a la siguiente:

$$\frac{d}{dt} [\dot{\phi} a^3] = 0 \quad ; \quad (121)$$

Ésta nos conduce a la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} = a^{-3} \frac{d}{d\Phi} \quad ; \quad (122)$$

donde Φ es la nueva variable temporal la cual está en términos del campo escalar ϕ ; $\Phi = \frac{\phi}{\phi_0}$. Siendo Φ una función monótona de t .

Empleando la notación $\partial_\Phi \equiv ()'$ y definiendo $H_i \equiv (\ln a_i)'$, reescribimos las ecuaciones (118) y (119) de la siguiente manera, respectivamente:

$$H_i' + \frac{H_i}{\Phi} + \mathcal{G}_i a_1^4 + \mathcal{J}_i a_2^4 + \mathcal{K}_i a_3^4 + \mathcal{L}_i a_1^2 a_2^2 + \mathcal{M}_i a_1^2 a_3^2 + \mathcal{N}_i a_2^2 a_3^2 = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (123)$$

$$H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3 + \frac{(\ln a^3)'}{\Phi} - \frac{\omega}{2\phi^2} + \mathcal{G}_4 a_1^4 + \mathcal{J}_4 a_2^4 + \mathcal{K}_4 a_3^4 + \mathcal{L}_4 a_1^2 a_2^2 + \mathcal{M}_4 a_1^2 a_3^2 + \mathcal{N}_4 a_2^2 a_3^2 = 0 \quad (124)$$

Los coeficientes constantes han cambiado debido a la reparametrización. Éstos se encuentran en la Tabla 2.4. Se sigue conservando la relación entre los coeficientes de estas dos últimas ecuaciones. es decir, los coeficientes de (119) son semisuma de los de (118).

Tipo	\mathcal{G}	\mathcal{J}	\mathcal{K}	\mathcal{L}	\mathcal{M}	\mathcal{N}
I	0	0	0	0	0	0
II	1/2	0	0	0	0	0
	-1/2	0	0	0	0	0
	-1/4	0	0	-0	0	0
VI_h	0	0	0	0	0	$-(h^2+1)$
	0	0	0	0	0	$-(h+1)$
	0	0	0	0	0	$-(h^2+h)$
	0	0	0	0	0	$-(h^2+h+1)$
VIII	1/2	-1/2	-1/2	0	-0	1
	-1/2	1/2	-1/2	0	-1	0
	-1/2	-1/2	1/2	-1	0	0
	-1/4	-1/4	-1/4	-1/2	-1/2	1/2
IX	1/2	-1/2	-1/2	0	0	1
	-1/2	1/2	-1/2	0	1	0
	-1/2	-1/2	1/2	1	0	0
	-1/4	-1/4	-1/4	1/2	1/2	1/2

Tabla 2.4: Valores de los coeficientes para las ecuaciones (123) y (124). [Chauvet et. al., 1992].

Las componentes de las uno formas son propias para cada modelo Bianchi. A continuación se enlistan para cada modelo [Ryan, 1975].

$$\begin{aligned}
 \omega^1 &= dx \\
 \omega^2 &= dy \\
 \text{Tipo I} \quad \omega^3 &= dz \\
 \omega^4 &= dt
 \end{aligned}$$

	$\omega^1 = dy - xdz$ $\omega^2 = dz$ $\omega^3 = dx$ $\omega^4 = dt$
Tipo II	
	$\omega^1 = e^{-x}dy$ $\omega^2 = dz$ $\omega^3 = dx$ $\omega^4 = dt$
Tipo III	
	$\omega^1 = e^{-x}dy - xe^{-x}dz$ $\omega^2 = e^{-x}dz$ $\omega^3 = dx$ $\omega^4 = dt$
Tipo IV	
	$\omega^1 = e^{-x}dy$ $\omega^2 = e^{-x}dz$ $\omega^3 = dx$ $\omega^4 = dt$
Tipo V	
	$\omega^1 = e^{-x}dy$ $\omega^2 = e^{-x}dz$ $\omega^3 = dx$ $\omega^4 = dt$
Tipo VI	
	$\omega^1 = e^{-x}dy$ $\omega^2 = e^{-hx}dz \quad \text{con } (h \neq 0, 1)$ $\omega^3 = dx$ $\omega^4 = dt$
Tipo VII	
	$\omega^1 = (C - kD)dy - Ddz$ $\omega^2 = Ddy + (C + kD)dz$ $\omega^3 = dx$ $\omega^4 = dt$

donde $A = e^{kx} \text{Cos}(ax)$; $B = \frac{-1}{a} e^{kx} \text{Sin}(ax)$; $C = e^{-kx} \text{Cos}(ax)$;

$D = \frac{-1}{a} e^{-kx} \text{Sin}(ax)$; con $k = \frac{h}{2}$ y $a = \frac{1}{2}(1 - h^2)^{\frac{1}{2}}$

Tipo IX

$$\omega^1 = -\sin(z)dx + \sin(x)\cos(z)dy$$

$$\omega^2 = \cos(z)dx + \sin(x)\sin(z)dy$$

$$\omega^3 = \cos(x)dy + dz$$

$$\omega^4 = dt$$

2.1.3.a Modelo cosmológico Bianchi VIII para el vacío

En nuestro caso las componentes de las uno-formas que caracterizan al modelo Bianchi VIII son:

$$\omega^1 = (dx + [1 + x^2] dy + [x - y - x^2 y] dz) a(t) ; \quad (125)$$

$$\omega^2 = (2x dy + [1 - 2xy] dz) b(t) ; \quad (126)$$

$$\omega^3 = (dx + [x^2 - 1] dy + [x + y - x^2 y] dz) c(t) ; \quad (127)$$

$$\omega^4 = dt. \quad (128)$$

De esta manera queda construída la métrica del modelo cosmológico de Bianchi VIII la cual es homogénea pero anisótropa.

Las ecuaciones de campo para el modelo de Bianchi VIII—en el vacío— se obtendrán al insertar la métrica en la ecuación (117). Sin embargo, aprovechando el trabajo ya hecho, nos limitaremos a sustituir en la ecuación (118) los coeficientes, correspondientes para el Bianchi VIII, dados en la Tabla 2.3. Al hacerlo las ecuaciones de campo correspondientes para los factores de escala (a_i , $i = 1, 2, 3$) son:

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln a_1 + \frac{d}{dt} \ln a^3 \frac{d}{dt} \ln a_1 + \frac{d}{dt} \ln a_1 \frac{d}{dt} \ln \phi + a_1^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} - \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} - \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} \right\} = 0 \quad (129)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln a_2 + \frac{d}{dt} \ln a^3 \frac{d}{dt} \ln a_2 + \frac{d}{dt} \ln a_2 \frac{d}{dt} \ln \phi + a_2^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} - \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} - \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} \right\} = 0 \quad (130)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a^3 \frac{d}{dt} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a_3 \frac{d}{dt} \ln \phi + a_3^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} - \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} \right\} = 0 \quad (131)$$

La ecuación de constricción, ecuación adicional que acota el comportamiento de las variables, ya que éstas no pueden tomar un valor arbitrario, es, —tomando en consideración los valores de los coeficientes dados en la tabla 2.3 —:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \ln a_1 \frac{d}{dt} \ln a_2 + \frac{d}{dt} \ln a_1 \frac{d}{dt} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a_2 \frac{d}{dt} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a^3 \frac{d}{dt} \ln \phi \\ & - \frac{\omega}{2} \left[\frac{d}{dt} \ln \phi \right]^2 + \frac{1}{2} \{ a_1^{-2} - a_2^{-2} - a_3^{-2} \} \\ & - \frac{1}{4} \left\{ \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (132)$$

Aplicando la ecuación (122) a las ecuaciones de campo y de constricción obtenemos las ecuaciones reescaladas, respectivamente éstas son:

$$\frac{d^2}{d\Phi^2} \ln a_1 + \frac{d}{d\Phi} \ln a_1 \frac{d}{d\Phi} \ln \Phi + a_2^2 a_3^2 + \frac{1}{2} \{ a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 \} = 0, \quad (133)$$

$$\frac{d^2}{d\Phi^2} \ln a_2 + \frac{d}{d\Phi} \ln a_2 \frac{d}{d\Phi} \ln \Phi - a_1^2 a_3^2 + \frac{1}{2} \{ a_2^4 - a_1^4 - a_3^4 \} = 0, \quad (134)$$

$$\frac{d^2}{d\Phi^2} \ln a_3 + \frac{d}{d\Phi} \ln a_3 \frac{d}{d\Phi} \ln \Phi - a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{2} \{ a_3^4 - a_1^4 - a_2^4 \} = 0, \quad (135)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\Phi} \ln a_1 \frac{d}{d\Phi} \ln a_2 + \frac{d}{d\Phi} \ln a_1 \frac{d}{d\Phi} \ln a_3 + \frac{d}{d\Phi} \ln a_2 \frac{d}{d\Phi} \ln a_3 + \frac{d}{d\Phi} \ln a^3 \frac{d}{d\Phi} \ln \Phi \\ & - \frac{\omega}{2} \left(\frac{d}{d\Phi} \ln \Phi \right)^2 + \frac{1}{2} \{ a_2^2 a_3^2 - a_3 a_1^2 - a_1^2 a_2^2 \} - \frac{1}{4} \{ a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 \} = 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Nótese que estas ecuaciones reescaladas se pudieron obtener directamente de las ecuaciones (123) y (124); considerando la tabla 2.4 para los valores de los coeficientes. Aquí se prefirió hacerlo por pasos.

2.1.4 Soluciones del modelo cosmológico Bianchi VIII

Por otra parte, la única anisotropía que aceptan las ecuaciones de campo es de la forma $a_2 = a_3$. Para los casos $a_1 = a_2$ y $a_1 = a_3$ obtenemos soluciones triviales, es decir, en estos dos casos las ecuaciones (133), (134) y (135) aceptan soluciones sólo de la forma $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Definiendo $H_i \equiv \frac{d}{dt} \ln a_i$ con $i = 2, 3$ las ecuaciones quedan:

$$\Phi \frac{d}{dt} H_1 + H_1 + \frac{1}{2} \Phi a_1^4 = 0 \quad ; \quad (137)$$

$$\Phi \frac{d}{dt} H_i + H_i - a_1^2 a_i^2 \Phi - \frac{1}{2} \Phi a_1^4 = 0 \quad ; \quad (138)$$

$$2\Phi^2 H_1 H_i + \Phi^2 H_i^2 + \Phi H_1 + 2\Phi H_i - \frac{\omega}{2} - \Phi^2 a_1^2 a_i^2 - \frac{1}{4} \Phi^2 a_1^4 = 0 \quad ; \quad (139)$$

Al resolver las ecuaciones de campo obtendremos varias soluciones que las satisfagan. Sin embargo, no todas son físicamente aceptables (soluciones reales y factores de escala no negativos); para encontrarlas debemos sustituir a éstas en la ecuación (139) de restricción, discriminando las soluciones que no son físicamente aceptables hasta encontrar las que sí lo son.

Empecemos por reescribir las ecuaciones de campo definiendo $\partial_\Phi \equiv ()'$; éstas quedan como sigue :

$$[\Phi (\ln a_1)'] + \frac{1}{2} \Phi a_1^4 = 0 \quad ; \quad (140)$$

$$[\Phi (\ln a_1 a_i)'] - \Phi a_1^2 a_i^2 = 0 \quad ; \quad (141)$$

Las ecuaciones son de la ya conocida forma general:

$$[\Phi (\ln a)'] = c \Phi^n a^m \quad ; \quad (142)$$

cuyas soluciones están en términos de las constantes c , m y n [Chauvet. et. al. 1992]. Al sustituir las constantes particulares de nuestras ecuaciones de campo, encontramos las siguientes soluciones las cuales dependen de los valores de las constantes $\Delta_1 \equiv -4(B_1 + 1/2)$ y $\Delta_i \equiv -4(B_i + 1)$

$$a_1 = \begin{cases} (a) & g_1 \{\cos[\alpha_1 \ln(f_1 \Phi^2)]\}^{-\frac{1}{2}} \Phi^{-\frac{1}{2}} & \Delta_1 > 0 \\ (b) & g_1 \{\cosh[-\beta_1 \ln(f_1 \Phi^2)]\}^{-\frac{1}{2}} \Phi^{-\frac{1}{2}} & \Delta_1 < 0 \\ (c) & g_1 \{\ln(f_1 \Phi^2)\}^{-\frac{1}{2}} \Phi^{-\frac{1}{2}} & \Delta_1 = 0 \end{cases} \quad (143)$$

$$a_i = \begin{cases} (a) & a_1^{-1} g_i \{\cos[\alpha_i \ln(f_i \Phi)]\}^{-1} \Phi^{-1} & \Delta_i > 0 \\ (b) & a_1^{-1} g_i \{\cosh[-\beta_i \ln(f_i \Phi)]\}^{-1} \Phi^{-1} & \Delta_i < 0 \\ (c) & a_1^{-1} g_i \{\ln(f_i \Phi)\}^{-1} \Phi^{-1} & \Delta_i = 0 \end{cases} \quad (144)$$

Las constantes B_1 y B_i son números reales; f_1 , f_2 , g_1 , g_2 , α_1 , α_2 , β_1 y β_2 son constantes reales positivas.

Hagamos un breve paréntesis. Las ecuaciones de campo para el modelo de Bianchi VIII en general son:

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln a_1 + \frac{d}{dt} \ln a_3 \frac{d}{dt} \ln a_1 + \frac{d}{dt} \ln a_1 \frac{d}{dt} \ln \phi + a_1^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} - \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} - \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} \right\} = \alpha \left[\frac{1 + (1 - \beta)\omega}{\phi} \right] \rho ; \quad (145)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln a_2 + \frac{d}{dt} \ln a_3 \frac{d}{dt} \ln a_2 + \frac{d}{dt} \ln a_2 \frac{d}{dt} \ln \phi + a_2^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} - \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} - \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} \right\} = \alpha \left[\frac{1 + (1 - \beta)\omega}{\phi} \right] \rho ; \quad (146)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a_3 \frac{d}{dt} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a_3 \frac{d}{dt} \ln \phi + a_3^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} - \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} \right\} = \alpha \left[\frac{1 + (1 - \beta)\omega}{\phi} \right] \rho ; \quad (147)$$

Para la ecuación de constricción tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln a_1 \frac{d}{dt} \ln a_2 + \frac{d}{dt} \ln a_1 \frac{d}{dt} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a_2 \frac{d}{dt} \ln a_3 + \frac{d}{dt} \ln a^3 \frac{d}{dt} \ln \phi \\ - \frac{\omega}{2} \left[\frac{d}{dt} \ln \phi \right]^2 + \frac{1}{2} \{ a_1^{-2} - a_2^{-2} - a_3^{-2} \} \\ - \frac{1}{4} \left\{ \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (14S)$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones es complicado de encontrar. Así que abordamos el problema con una simplificación. Consideramos los términos derechos iguales a cero en nuestro sistema de ecuaciones. Es importante señalar que no se pretende encontrar soluciones correspondientes al Universo temprano donde no hay materia. La simplificación solo se hace con la intención de resolver el problema de manera analítica, como hemos visto.

2.2 Resultados

Hemos llegado a las soluciones del sistema de dos ecuaciones. Para la ecuación (140) tenemos tres soluciones y para la (141) otras tres, así que son nueve las soluciones matemáticas del sistema debido a que las a_i están acopladas a a_1 . Sin embargo, no todas son físicamente aceptables. Al sustituirlas en la ecuación de restricción se encontró que de entre estas nueve soluciones existen factores de escala complejos, así que de entrada, eliminamos estas soluciones. Quedándonos dos soluciones posiblemente aceptables físicamente. Con $i = 2, 3$ éstas son:

$$\begin{aligned} a_1 &= g_1 \left\{ \cosh \left[-\beta_1 \ln (f_1 \Phi^2) \right] \right\}^{-1/2} \Phi^{-1/2} \\ a_i &= a_1^{-1} g_i \left\{ \cos[\alpha_i \ln (f_i \Phi)] \right\}^{-1} \Phi^{-1} \end{aligned} \quad (149)$$

y

$$\begin{aligned} a_1 &= g_1 \left\{ \cosh \left[-\beta_1 \ln (f_1 \Phi^2) \right] \right\}^{-1/2} \Phi^{-1/2} \\ a_i &= a_1^{-1} g_i \left\{ \ln (f_i \Phi) \right\}^{-1} \Phi^{-1} \end{aligned} \quad (150)$$

con $i = 2, 3$

Ahora veámos cuál es el comportamiento de estas soluciones. Para esto graficamos la primera solución, ecuación (149), en función de Φ . Al graficar se tomaron las constantes reales positivas con el valor de la unidad. Esto no resta generalidad en el comportamiento de la gráfica; es similar para otros valores. Con un poco de álgebra el factor de escala a_1 se puede escribir como:

$$a_1 = \left(\frac{2\Phi}{1 + \Phi^4} \right)^{1/2} \quad (116)$$

Tomemos los casos extremos, es decir, cuando $\Phi \rightarrow 0$ implica que $a_1 \rightarrow 0$ y si $\Phi \rightarrow \infty$ implica que $a_1 \rightarrow 0$. Si calculamos la derivada de a_1 con respecto a Φ e igualamos a cero, encontramos que tiene un máximo cuando $\Phi = 0.76$ —ver la Figura 2.1—.

Por otro lado, los otros dos factores de escala a_i ($i=2,3$), expresados en términos de a_1 , contienen un término trigonométrico, la función secante. Como es sabido la

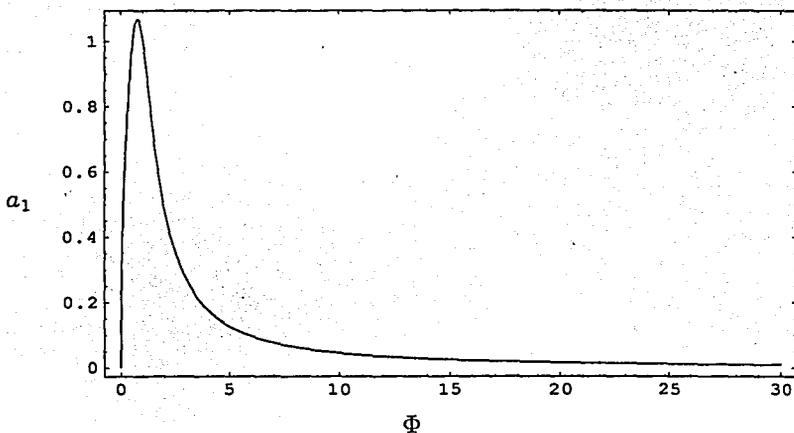


Fig. 2.1: Primera solución—ecuación (149)—. Para el factor de escala a_1 notamos que se parte de una singularidad, cuando $\Phi = 0$, hacia una expansión finita alcanzando a_1 un valor máximo; finalmente hay una contracción cuando Φ aumenta, es decir: $\lim_{\Phi \rightarrow \infty} a_1 = 0$.

función secante es discontinua. Está definida en intervalos de tamaño π para los cuales toma valores positivos o negativos. En los extremos de estos intervalos la secante toma valores $+\infty$ o $-\infty$. Este comportamiento de la secante ayuda a entender la gráfica de los factores de escala a_i —ver la Figura 2.2—.

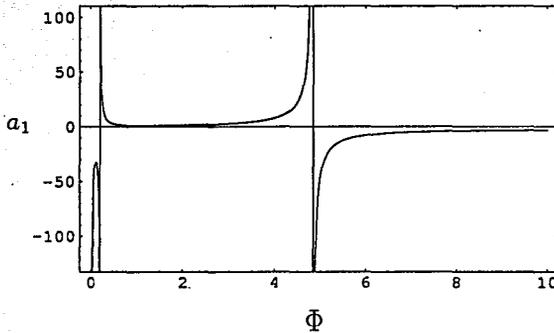


Fig. 2.2: Primera solución—ecuación 149-. En esta gráfica correspondiente a los factores de escala a_i ($a_2 = a_3$), observamos que toma valores negativos en ciertos intervalos. Físicamente esto no es aceptable..

Recordemos que habíamos descartado soluciones para las cuales los factores de escala tenían una expresión compleja, es decir, pertenecían al conjunto de los números complejos. Pero si queremos factores de escala físicamente aceptables debemos restringir aún más. Esto es, que no tomen valores negativos—*los factores de escala son parámetros de expansión del universo en las direcciones x , y y z . Este es el motivo de nuestras restricciones*-. Para nuestro caso los factores de escala a_i toman valores negativos. En vista de esta situación se decidió tomar, como alternativa, solo los intervalos para los cuales a_i toma valores positivos. Haciendo esto se gráfica el volumen en el espacio homogéneo el cual está dado por $v = a_1 a_2 a_3$. En nuestro caso es $v = a_1 a_2^2$. La gráfica de este volumen es como se muestra en la figura 2.3.

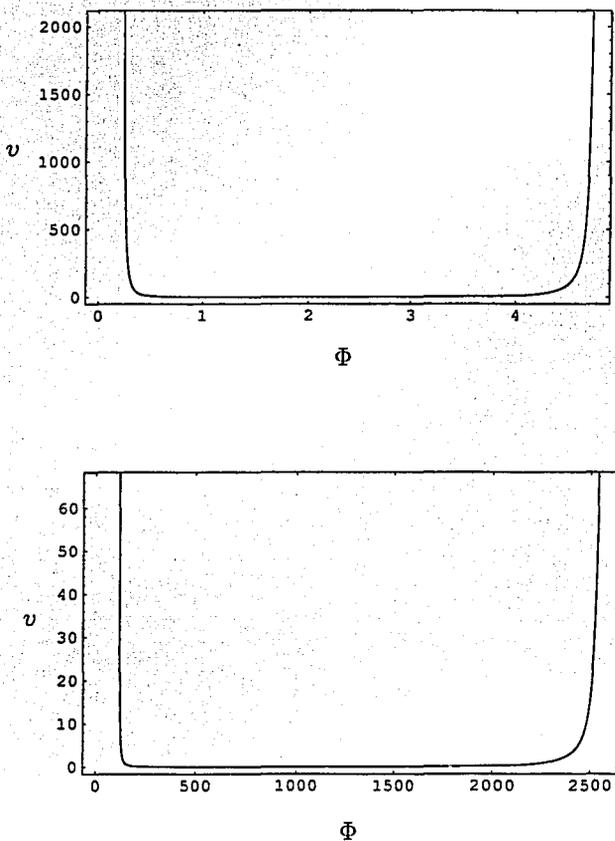


Fig. 2.3: Se observa en las dos gráficas del volumen— $V = a_1 a_2^2$ — que los intervalos de dos singularidades contiguas se van acrecentando cuando Φ va aumentando. Esto es consecuencia del comportamiento de los factores de escala a_i . En éstas gráficas el volumen inicia en el infinito hacia una contracción hasta un valor mínimo para después expandirse infinitamente.

Las dos gráficas anteriores muestran el comportamiento general del volumen v en función de Φ . Primero: El volumen sólo está definido en intervalos para los cuales a_i toma valores positivos. Segundo: Estos intervalos van creciendo. Esto puede verse en las dos gráficas. El intervalo de la primera gráfica es más pequeño que el del la segunda. Esto es debido al comportamiento de los factores de escala a_i . Según las gráficas, tenemos universos sólo para ciertos intervalos de Φ . Para otros no existe. Esto es, tenemos universos discontinuos en los que los intervalos para los cuales están definido van creciendo a medida que nos alejamos del origen del eje de las Φ .

Recordando la ecuación [122], expresemos el tiempo t como función de Φ . Esta es:

$$t = \int_a^b v d\Phi; \quad (151)$$

donde el intervalo de integración $[a,b]$ está determinado por a_i ; en donde ésta es positiva. Explícitamente esta integral, para la primera solución, es:

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}} \text{Sec}^2[\text{Log}[t]]}{\sqrt{2}t^{3/2}} \quad (152)$$

Como esta integral no es integrable se resolvió numéricamente. Al hacerlo se encontró la relación de t como función de Φ como lo muestran las gráficas de la Figura 2.4 y 2.5:

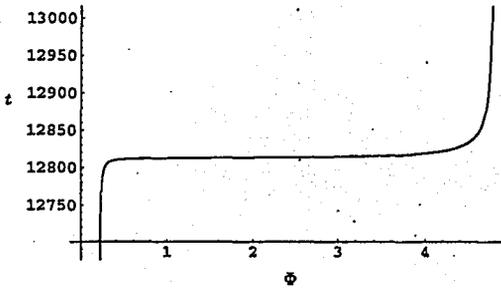


Fig. 2.4: Gráfica que muestra la relación monótona entre t y Φ correspondiente al intervalo de la primera gráfica de la figura 2.3.

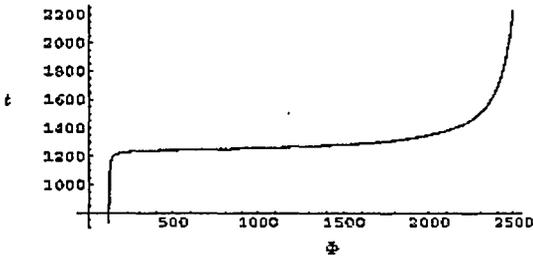


Fig. 2.5: Gráfica que muestran la relación monótona entre t y Φ correspondiente al intervalo de la segunda gráfica de la figura 2.3.

En la segunda solución, ecuación (150), tenemos la siguiente gráfica para los factores de escala a_i ($a_2 = a_3$). El factor de escala a_1 es el mismo que el caso anterior. Ver figura 2.6.

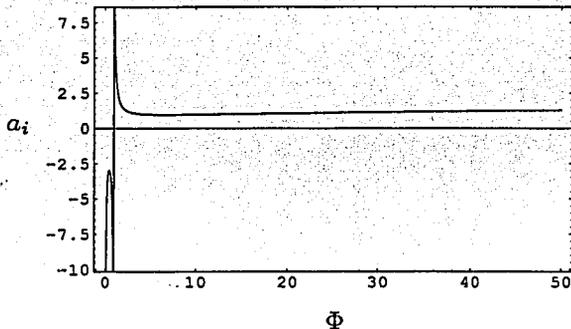


Fig. 2.6: Segunda solución—ecuación 150—. En la gráfica correspondiente a los factores de escala a_i ($a_2 = a_3$), observamos que toma valores negativos en el intervalo $(0,1)$. Físicamente esto no es aceptable.

En la gráfica anterior se observa que los factores de escala toman valores negativos en el intervalo $(0,1)$. Así que descartemos este intervalo para que los factores de escala a_i sean físicamente aceptables. Haciendo esto, el volumen en el espacio homogéneo en función de Φ , para este caso, es como lo muestra la gráfica de la Figura 2.7.

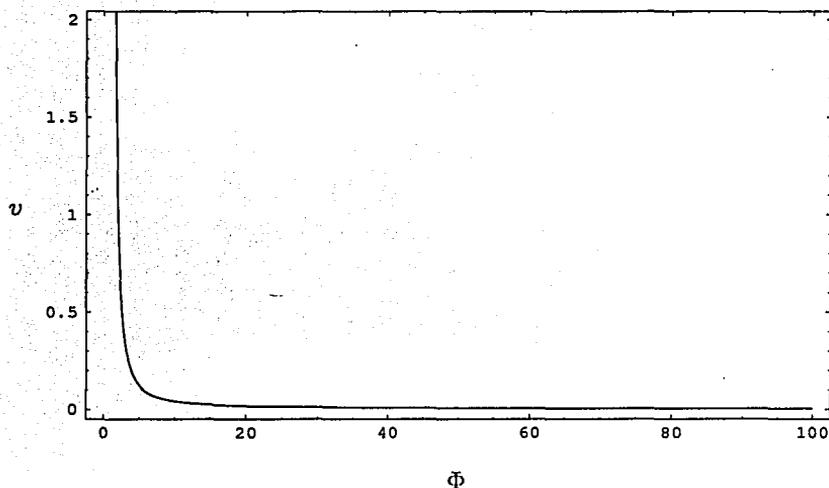


Fig. 2.7: Gráfica correspondiente al volumen en función de Φ para la segunda solución -ecuación (70)-.

En la gráfica del volumen como función de Φ se observa un comportamiento en el que el volumen inicia en ∞ para valores pequeños de Φ . Explícitamente: $\Phi \rightarrow 1$ implica que $v \rightarrow \infty$. Por otra parte, cuando $\Phi \rightarrow \infty$ implica que $v \rightarrow 0$.

Resolviendo numéricamente la integral (151), para la segunda solución, explícitamente ésta es:

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}}{\sqrt{2t^{3/2} \text{Log}^2[t]}} \quad (153)$$

se obtuvo la gráfica que muestra la relación entre t como función de ϕ . ésta se muestra en la figura 2.8.

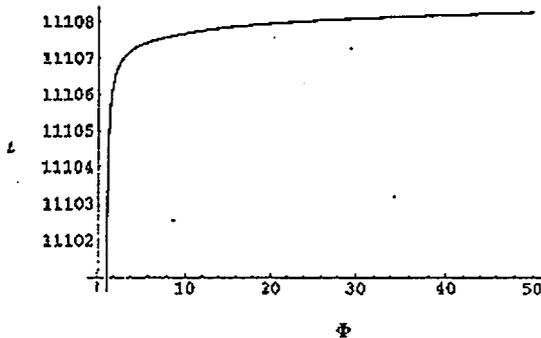


Fig. 2.8: Esta gráfica muestra la dependencia de l como función de Φ .

2.3 conclusiones

El trabajo presentado, modelo cosmológico Bianchi VIII tratado en la teoría de [JBD] se expusieron sus ecuaciones de campo en las cuales, como se recordará, solo se presentaron soluciones no triviales con la condición de anisotropía $a_2 = a_3$. De esta manera el problema se redujo a resolver dos ecuaciones -ecuaciones [109] y [110]- con dos incógnitas a_1 y a_i con $i=2,3$. De este sistema de dos ecuaciones se obtuvieron nueve soluciones, siete fueron descartadas por presentar factores de escala complejos. De las dos soluciones restantes, ambas presentaban factores de escala en el que, a intervalos de Φ , tomaban valores negativos por lo que quedan descartadas como físicamente aceptables. De esta manera se llega a la conclusión que en el modelo de Bianchi VIII en la teoría de [JBD] no tiene soluciones físicas. Recordemos que, como alternativa, se descartaron solo los intervalos para los cuales a_i tomaban valores negativos. Haciendo esto, al graficar el volumen como función de Φ se obtuvieron comportamientos que no son compatibles con las observaciones astronómicas que es el caso de la segunda solución. Es decir, se nota que el volumen inicia en el infinito; al aumentar Φ el volumen se va contrayendo. esto es, no

podemos tener un universo contrayéndose porque en vez de un corrimiento hacia el rojo notaríamos un corrimiento hacia el azul en las galaxias. Caso que no ha sido observado. El otro caso, primera solución, presenta un comportamiento "patológico" en la gráfica del volumen en función de ϕ . Tenemos Universos que aparecen en intervalos de Φ y desaparecen en otros. Por lo que finalmente no se encontraron soluciones en el que se le pueda dar una interpretación física al modelo Bianchi VIII.

En la bibliografía se han encontrado soluciones—para el vacío — del modelo cosmológico Bianchi VIII en la teoría de la Relatividad General [Halpern, 1985]. En el apéndice se muestran las gráficas de los factores de escala α , β y γ . El comportamiento de éstos es oscilatorio—ver figura 19—convergiendo a un punto singular. Comportamiento que se repite en ciclos (eras) indefinidamente. De esta manera tenemos un Universo que se expande y contrae con factores de escala oscilantes.

Las soluciones del modelo Bianchi VIII con materia en Relatividad General son presentadas con comportamientos caóticos [Halpern, 1985]. Mientras que las soluciones del modelo Bianchi VIII con materia en la teoría de [JBD] no han sido encontradas en la bibliografía.

2.4 Apéndice

Las ecuaciones de campo para el modelo de Bianchi VIII—para el caso del vacío— en la Relatividad General son las siguientes [Barrow and Gaspar, 2001]:

$$\frac{(\dot{abc})}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2} [(b^2 + c^2)^2 - a^4] \quad (154)$$

$$\frac{(\dot{abc})}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2} [(a^2 + c^2)^2 - b^4] \quad (155)$$

$$\frac{(\dot{abc})}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2} [(a^2 - b^2)^2 - c^4] \quad (156)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0 \quad (157)$$

El punto denota la diferenciación con respecto al tiempo sincrónico t . Denotando con las letras a , b y c a los factores de escala. Si nosotros reemplazamos el tiempo sincrónico t por la variable η definida por

$$dt = (abc)d\eta \quad (158)$$

las ecuaciones de campo (154)-(157) se expresan de la manera siguiente:

$$2(\ln a)'' = (b^2 + c^2)^2 - a^4 \quad (159)$$

$$2(\ln b)'' = (a^2 + c^2)^2 - b^4 \quad (160)$$

$$2(\ln c)'' = (a^2 - b^2)^2 - c^4 \quad (161)$$

$$(\ln a^2)'' + (\ln b^2)'' + (\ln c^2)'' = (\ln a^2)'(\ln b^2)' + (\ln b^2)'(\ln c^2)' + (\ln c^2)'(\ln a^2)' \quad (162)$$

donde ' denota la diferenciación con respecto a η .

Al integrar numéricamente las ecuaciones (159)-(162) se obtienen los comportamientos de los factores de escala: α , β y γ — donde $\alpha = \ln a$; $\beta = \ln b$ y $\gamma = \ln c$ — en la figura 19.

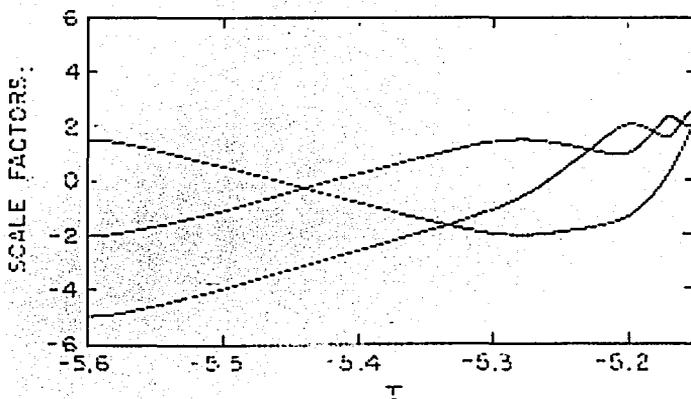


Fig. 2.9: Se muestra la evolución de los tres factores de escala α , β y γ .

El comportamiento de los factores de escala α y γ es oscilatorio, esto puede verse claramente en la figura 2.9. Las oscilaciones convergen a un punto singular. Después de esto empieza una nueva era en el que el comportamiento de los factores de escala es oscilatorio. Este comportamiento se repite indefinidamente. Del análisis del comportamiento general de estos factores de escala se llega a que éste es caótico [Halpern, 1985] [Belinskii. et al., 1970].

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Bibliografía

- [1] Anderson, J.D. Exposito, P.B., Martin, W., Thornton, C.L., and Muhleman, D.O.(1975). *experimental test of General Relativity using time-delay data from mariner 6 and mariner 7*. Astrophys.J. 200, 221-33.
- [2] Babusci, L. Baiotii, F. Fucito, and A. Nagar, Phys. Rev. D 64, 2001.
- [3] Baierlein R. (1967). Phys.Rev. 162, 1275.
- [4] Baroow J, and Gaspar Yves. *Bianchi VIII Empty Futures*.Class.Quant.Grav. 200118,1809.
- [5] Barrow J.D. 1981 Phy.Rev. Lett, 46, 963.
- [6] Bazin S.A . *Introduction to General Relativity*.(Mc Graw-Hill, USA,1975).
- [7] Bekenstein, J.D and Meisels, A.: 1980, Phy.Rev. D 22, 1313.
- [8] Berry, M.*Principles of Cosmology and Gravitation*. (Cambridge University, USA, 1976).
- [9] Belinskii, V.A., Lifshitz. E.M., and Khalatnikov, I.M. 1970. Sov.Phys.JETP lett.,11, 123.
- [10] Bondi H.*Cosmología* (Labor, Barcelona, 1970).
- [11] Braginsky, V.B. and Panov, V.I (1972). Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass. Sov. Phys. JETP. 34, 463-6.
- [12] Brans, C. and Dicke, R.H.(1961). Phys. Rev.,124, 925.

- [13] Brody, T. *Curso de filosofía de la física.* (Universidad Autónoma de Puebla, México, 1992).
- [14] Brunetti, E. Coccia, V. Fafone, and F. Fucito, *Phys. Rev. D* **49**, 1999.
- [15] Bunge, M. *Controversias en física.* (Tecnos, Madrid, 1983).
- [16] Chauvet, P. (1988). *Las teorías escalares tensoriales de la gravitación*, Tesis doctoral, (Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1988).
- [17] Chauvet, P. Cervantes-Cota, J. and Núñez-Yépez, H.N. (1992). *Class. Quantum Grav.*, **9**, 1923.
- [18] Coles P, and Lucchin, F. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure.* (John Wiley, USA, 1996).
- [19] Coles P, and Lucchin, F. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure.* (John Wiley, USA, 1996).
- [20] Damour, T. (1988) Proc. 2nd Canadian conf. on General Relativity and Relativistic Astrophysics ed A Coley, C. Dyer and T Tupper (Singapore: World Scientific) pp 315-34.
- [21] Damour, T. And Taylor, J.H (1992). *Phys. Rev. D.* **45**, 1840.
- [22] Davies P.C.W. *the accidental universe.* University press. Inglaterra, 1990.
- [23] Eddington A.S (1922). *The mathematical theory of Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [24] Eötvös, R.V., Pekár, V., and Fekete. E. (1962). *Beitrage zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität.* *Annalen der Physik.* **68**, 11-66.
- [25] Einstein Studies, Vol 6. *Mach's Principle From Newton's Bucket to Quantum Gravity.* pp. 250-261. (Birkhauser Boston, USA. 1995).

- [26] Halpern P. 1987. *Chaos in the Long-Term Behavior of Some Bianchi-Type VIII Models*. Gen. Rel. Grav. 19, 73.
- [27] Harrison, E. *Cosmology*. Cambridge University Press, New York, 2000.
- [28] Hawking, S.W. *Historia del tiempo*. Planeta, España, 1988.
- [29] Hughes, V. W., Robinson. H., and Beltran-Lopez, V. (1960). *Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments*. Phys. Rev. Lett. 4, 342-4.
- [30] Hulse, R.A., and Taylor, J.H (1975). *Discovery of a pulsar in binary system*. Astrophys.J. 195, L51-3.
- [31] Jordan, P. (1959). Z. Phys., 157, 112.
- [32] Kittel Charles, et al. *Mechanics*. McGraw-hill book company, USA, 1965.
- [33] Landau y Lifshitz. *Teoría clásica de los campos*. Reverté, 1981.
- [34] Landau y Lifshitz. *Mécanica*. Reverté, 1978.
- [35] Matthews, T.A., and Sandage, A.R. (1965). *Optical identification of 3c48, 3c196, and 3c286 with stellar objects*. Astrophys. J. 138, 30-56.
- [36] Matzner, R. A. Y Tolman, B. W., 1982 *Cosmological spatial curvature probed by microwave polarization*, (University of texas; preprint, EUA).
- [37] McElhinny, M.M, Taylor, S.R., and Stevenson, D.J. (1978). *Limits to the Expansion of Earth, Moon, Mars and Mercury and to Changes in the Gravitational Constant*. Nature 271: 316-321.
- [38] Matthews. T.A., and Sandage, A.R. (1963). *Optical identification of 3C48, 3C196, and 3C286 with stellar objects*. Astrophys. J. 138, 30-56.
- au y Lifshitz. *Mécanica*. Reverté. 1978.

- [39] Narlikar, J. V. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, Inglaterra, 1993.
- [40] Narlikar Jayant. *La estructura del Universo*. (Alianza, Madrid, 1987).
- [41] Nordtvedt, K., Jr.(1968a). *Equivalence principle for masives bodies. I. Pnenomenology*. Phys. Rev. **169**, 1014-16.
- [42] Nordtvedt, K., Jr.(1968b). *Equivalence principle for masives bodies. II*. Phys. Rev. **169**, 1017-25.
- [43] Nuñez, H.N.-Yépez. Singularities and isotropy in a Brans-Dicke Bianchi-type VII universe. *Reporte interno* Instituto de Física, Benemérita Universidad de Puebla.
- [44] O'Hanlon, J. and Tupper, B.O.J.: 1972, Nuovo Cim. B **7**, 305.
- [45] Peimbert, M. *Temas Selectos de Astrofisica*. UNAM, México, 1984.
- [46] Penzias, A.A., and Wilson, R.W.(1965). *A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s*. Astrophys.J. **142**, 419-21.
- [47] Pound, R.V., and Rebka, G.A., Jr. (1969). Apparent weight of photons. Phys. Rev. Lett. **4**, 337-41.
- [48] Pound, R.V., and Snider, J.L (1965). *effect of gravity on gamma radiation*. Phys. Rev. **140** B788-803.
- [49] Penrose, R.(1960). A spinor approach to general relativity. Ann. Phys.(N.Y.) **10**, 171-201.
- [50] Pound, R.V., and Snider, J.L.(1965). Effect of gravity on gamma radiation. Phys. Rev. **140**, B788-803.
- [51] Reasenberg, R.D et. al.(1979). Astrophys. J. **234**, L219.
- [52] R.G. Crittenden. and P₂J. Steinhardt. Astrophys. J. **395**, 360 ,(992).

- [53] Roos, M. *Introduction to Cosmology*. (Wiley, Inglaterra, 1994).
- [54] Salgado, Marcelo. preprint arXiv: gr-qc/0202082 v1.
- [55] Shiff L.I (1960). *Am.J. Phys.* 28, 340.
- [56] Sciama, D.W. *Modern cosmology*. Cambridge university press, 1971.
- [57] Taylor, E. F. and Wheeler, J.A. *SpaceTime Physics*. (W.H. Newyork, 1992).
- [58] The Royal Society of London. *The Big Bang and Element Creation*. PP. 3-17, (University Press, Cambridge, 1982).
- [59] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. (1992) *Tensor-multi-scalar theories of gravitation*. *Class. Quantum Grav.* 9, 2093-2176.
- [60] Vessot, R.F.C.. and Levine., et.al. (1980) *Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser*. *Phys.Rev. Lett.* 45, 20S1-4.
- [61] Will, C.M. (1971a). *Theoretical Frameworks for testing relativistic gravity. II. Parametrized post-Newtonian hydrodynamics and the Nordtvedt effect*. *Astrophys.J.* 163, 611-28.
- [62] Will, C.M. (1971b). *Relativistic gravity in the solar system. I. Effect of an anisotropic gravitational mass on the Eart-Moon distance* *Astrophys. J.* 165, 409-12.
- [63] Will, C.M. (1973). *Relativistic gravity in the solar system. III. Experimental disproof of a class of linear theories of gravitation*. *Astrophys. J.* 185. 31-42.
- [64] Will, C.M., and Nordtvedt. K. (1972). *Astrophys. J.* 177, 757.
- [65] Will, C.M., comunicación privada.