

15 01174

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**



**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO DE  
LA FACULTAD DE INGENIERIA**

**CURVAS DE DECLINACIÓN EN  
YACIMIENTOS NATURALMENTE  
FRACTURADOS CONSIDERANDO  
FLUJO NO LAMINAR**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERIA PETROLERA**

**PRESENTA : JESUS RODRIGUEZ ROMAN**

**DIRECTOR DE TESIS : DR. RODOLFO G. CAMACHO VELÁZQUEZ.**



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

*A mi madre María Tomasa Román Casas:*

*Por sus incontables sacrificios, por sus sabios consejos, paciencia y amor, y por su invaluable apoyo a través de toda mi vida.*

*A Betty*

*Por su amor, comprensión y apoyo Por dar un nuevo sentido a mi vida.*

*A mis hermanos Maribel y Gilberto*

*Por el amor fraternal y la amistad que siempre nos ha unido.*

*Por estar conmigo en las buenas y las malas*

*A la Familia Rivera Alfaro, Martha, José, Parrish, Diana (q e p d), Alberto y Pável*

*Por haberme recibido en su casa como uno más de la familia.*

*Por su amistad incondicional*

*Por todo el apoyo que recibí durante mi estancia en México*

*Al Dr. Rodolfo Camacho Velázquez*

*Por su amistad y la dirección del presente trabajo.*

*A Dr. Fernando Samaniego Verduzco, Dr. Fernando Rodríguez de la Garza, Dr. José Luis Sánchez Bujanos y M.S. Mario Vázquez Cruz*

*Por su apoyo durante mi estancia en México y la revisión del presente trabajo.*

*y a todas las personas que hicieron que esto fuera posible*

**GRACIAS**

## RESUMEN

La mayoría de los trabajos teóricos sobre análisis de curvas de declinación con flujo no laminar en el yacimiento consideran ya sea flujo de gas seco o flujo de líquido en un yacimiento homogéneo. El propósito del presente trabajo es analizar curvas de declinación considerando efectos no laminares en el yacimiento, para flujo de líquido ligeramente compresible en sistemas de doble porosidad a condiciones de presión de fondo fluyendo constante.

Los periodos de flujo transitorio y dominado por frontera son examinados por medio de los resultados de un simulador de diferencias finitas. Se presentan por primera vez expresiones analíticas de velocidad y gasto en la cara del pozo bajo condiciones de flujo no laminar en yacimientos naturalmente fracturados. Estas ecuaciones contienen la solución para flujo laminar como un caso particular. Se propone un método para identificar la presencia de efectos inerciales por medio de la graficación de  $d(\log(q))/d(\log(t))$  contra  $\log(t)$ .

El método para el cálculo de área bajo condiciones laminares produce buenas aproximaciones para un yacimiento bajo condiciones de flujo no laminar. Aunque, la presencia de efectos inerciales distorsiona la forma de las curvas de declinación resultando en estimaciones erróneas de los parámetros de yacimiento y pozo por el análisis por curvas tipo para curvas de declinación para flujo laminar. El empleo de la metodología presentada en este trabajo se ilustra con ejemplos sintéticos.

## CONTENIDO

	AGRADECIMIENTOS.	i
	RESUMEN.	ii
	CONTENIDO	iii
I.	INTRODUCCIÓN.	1
II	ANTECEDENTES	3
	II.1. Ley De Darcy Para Flujo De Fluidos A Través De Medios Porosos	3
	II.2. Los Límites De La Ecuación De Darcy	5
	II.3. La Ecuación De Forchheimer	5
	II.4. Grupos Adimensionales	6
	II.5. Análisis De Gastos Considerando Flujo Laminar En Yacimientos Fracturados	8
	II.5.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales Para Yacimientos Fracturados.	8
	II.5.2. Método De Solución.	10
	II.5.3. Soluciones De Gasto.	11
	II.5.3.A. Yacimiento Infinito	11
	II.5.3.B. Frontera Exterior Cerrada	12
	II.5.4. Análisis De La Predicción De Producción Para Flujo Laminar.	14
	II.5.5. Análisis De Curvas De Declinación Con Flujo Laminar Empleando Curvas Tipo.	16
	II.5.6. Cálculo Del Área De Drene	17
	II.6. Análisis De Curvas De Declinación Con Flujo No Darciano, Para El Caso De Fluidos Ligeramente Compresibles En Yacimientos Homogéneos.	19
	II.7. Análisis De Pruebas De Presión En Yacimientos Naturalmente Fracturados Considerando Flujo No Darciano.	22
III	COMPORTAMIENTOS OBSERVADOS	26
	III.1. Simulador Numérico	26
	III.2. Validación Del Simulador Para El Caso Laminar	27
	III.3. Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar En Yacimientos Fracturados.	27
	III.4. Comparación del Comportamiento de Las Curvas de Declinación con Flujo No Laminar versus Flujo Laminar Al Variar El Parámetro $\lambda$ En Yacimientos Fracturados.	28
	III.5. Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar Al Variar El Parámetro $\omega$ En Yacimientos Fracturados.	29
	III.6. Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar Al Variar El Parámetro $r_{eD}$ En Yacimientos Fracturados.	30

III.7.	Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar En El Periodo De Flujo Transitorio En Yacimientos Fracturados	31
III.8.	Análisis De Datos No Laminares, Con Curvas Tipo Para Flujo Laminar.	32
III.9.	Producción Acumulada Para Flujo No Laminar.	33
III.10.	Normalización De Datos No Laminares	33
III.11.	Cálculo Del Área De Drene.	33
IV	<b>SOLUCIONES ANALÍTICAS</b>	37
IV.1.	Ecuaciones Básicas	37
IV.2.	Solución Flujo Estacionario	38
IV.3.	Método De Solución Para Flujo Transitorio y Dominado Por Frontera	39
IV.4.	Soluciones Para Flujo Laminar	42
	IV.4.1. Yacimiento Infinito	42
	IV.4.2. Yacimiento Cerrado	42
IV.5.	Soluciones De Gasto en Flujo Transitorio Considerando Flujo No Laminar	43
	IV.5.1. Yacimiento Infinito	43
	IV.5.2. Yacimiento Cerrado	45
	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	48
	<b>NOMENCLATURA</b>	50
	<b>REFERENCIAS</b>	54
	<b>APÉNDICE A. DESARROLLO DE LAS ECUACIONES BÁSICAS.</b>	59
	<b>APÉNDICE B. APLICACIÓN DE PERTURBACIÓN.</b>	64
	<b>APÉNDICE C. CONDICIONES DE FRONTERA</b>	71
	<b>APÉNDICE D. SOLUCIÓN YACIMIENTO INFINITO FLUJO LAMINAR</b>	74
	<b>APÉNDICE E. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTOS CERRADOS FLUJO LAMINAR</b>	79
	<b>APÉNDICE F. SOLUCIÓN PARA FLUJO ESTACIONARIO.</b>	87
	<b>APÉNDICE G. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO INFINITO TIEMPOS CORTOS FLUJO NO LAMINAR</b>	90
	<b>APÉNDICE H. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO INFINITO TIEMPOS LARGOS FLUJO NO LAMINAR</b>	96
	<b>APÉNDICE I. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO CERRADO TIEMPOS CORTOS FLUJO NO LAMINAR.</b>	103
	<b>APÉNDICE J. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO CERRADO TIEMPOS LARGOS FLUJO NO LAMINAR</b>	109

## **I. INTRODUCCIÓN**

La mayoría de las técnicas existentes en la literatura para el análisis de pruebas de pozo, con el fin de determinar las condiciones de productividad en el mismo y características del yacimiento, están basadas en tres hipótesis principales: ecuaciones diferenciales de continuidad y de flujo lineales, y una condición de frontera interna constante, que puede ser el gasto de producción o la presión de fondo fluyendo. Sin embargo, frecuentemente en la práctica ninguna de las hipótesis anteriores se cumple<sup>1</sup>.

Con la llegada de herramientas de producción, tales como el medidor de flujo a tiempo real, se ha hecho posible el análisis simultáneo de mediciones de presión y gasto de la formación en una prueba transitoria de pozo. La ventaja de incorporar la medición del gasto,  $q(t)$ , es que la técnica de curvas tipo es mejorada, obteniéndose mayor información con respecto a las características particulares del yacimiento a ser evaluado, por ejemplo, fracturas hidráulicas, estratificaciones, medio poroso compuesto, etc.<sup>2</sup>

En una formación fracturada se pueden tener pozos que inicialmente producen a un gasto alto donde, en algunos casos, la producción empieza a declinar después de unas cuantas horas sin una clara explicación. Por lo que, analizando el comportamiento transitorio del gasto en un pozo produciendo en una formación fracturada se adicionará información, lo que dará lugar a un análisis más completo. Desde un punto de vista ingenieril, la declinación inicial podría ser un factor clave en la decisión de continuar o abandonar la explotación del pozo. En el caso de un sistema homogéneo, esta declinación es la única observada, pero para yacimientos fracturados, la declinación inicial no siempre representa el estado final de depresionamiento.

En la actualidad la mayor parte de las investigaciones sobre pruebas a presión de fondo constante encontradas en la literatura<sup>2-10</sup>, suponen la existencia de flujo de una sola fase en el medio poroso, considerando que la ley de Darcy es válida, tanto para yacimientos homogéneos como naturalmente fracturados. En cuanto al análisis de flujo donde la ley Darcy no es válida (flujo no Darciano) se han desarrollado diversos trabajos considerando los diferentes tipos de pruebas así como diferentes tipos de yacimiento<sup>11-24</sup>. Sin embargo, en ninguno ellos se han desarrollado expresiones analíticas para representar el comportamiento de pruebas a presión de fondo constante en yacimientos naturalmente fracturados bajo efectos no Darcianos.

En base a los antecedentes anteriores, el propósito de este trabajo es presentar expresiones analíticas que representen el flujo de líquido en yacimientos de doble porosidad bajo efectos no laminares con producción a presión de fondo constante.

Para alcanzar el objetivo planteado, el presente estudio está constituido por dos partes. En la primera se resumen los trabajos presentados en la literatura sobre análisis de pruebas a presión de fondo constante, que consideran flujo monofásico Darciano en yacimientos homogéneos y naturalmente fracturados, así como algunos trabajos donde se considera flujo no Darciano bajo condiciones de gasto constante.

En la segunda parte, se presentan las derivaciones realizadas mediante la combinación de los métodos de perturbación, Transformada de Laplace y variación de parámetros, para el desarrollo de las expresiones que representan el flujo monofásico no Darciano en yacimientos de doble porosidad produciendo a presión de fondo constante.



## II. ANTECEDENTES

En esta sección, se discuten los principios básicos que permiten la comprensión del comportamiento transitorio y dominado por frontera del gasto para un pozo produciendo bajo condiciones de flujo monofásico en una formación fracturada y considerando flujo laminar. Además se revisa la teoría desarrollada hasta la fecha para el análisis de flujo no Darciano en curvas de declinación en yacimientos homogéneos, así como para pruebas de presión en yacimientos fracturados, con el fin de establecer las bases necesarias para el análisis.

### II.1. Ley De Darcy Para Flujo De Fluidos A Través De Medios Porosos.

La ley de Darcy<sup>25</sup> establece que la velocidad del fluido,  $v$ , es proporcional en magnitud al gradiente negativo del potencial de campo. La ecuación básica puede ser establecida como:

$$* v = -\frac{k\rho}{\mu} \nabla\Phi, \quad (II.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $k$  es la permeabilidad del medio,  $\mu$  es la viscosidad del fluido, y  $\Phi$  es el potencial de flujo o energía mecánica por unidad de masa. Una expresión para el potencial, se puede derivar por la consideración del trabajo que debe ser realizado para transferir a una unidad de masa de líquido, que está en reposo en el estado estándar, al estado de líquido fluyendo en el medio poroso. De las condiciones generales de energía se puede mostrar que el potencial de flujo a una elevación  $z$  es :

$$\Phi = \int_{p'}^p w dp + gz + \frac{U^2}{2} \quad (II.2)$$

Aquí  $w$  es el inverso de la densidad del fluido,  $z$  es la elevación del punto sobre el nivel de referencia ( supuesto como cero ),  $p$  es la presión en el punto  $z$ ,  $p'$  es la presión en el nivel de referencia, y  $U$  es la velocidad microscópica promedio en el punto  $z$ . El tercer término del lado derecho de la ecuación (II.2) representa la energía cinética del fluido, mientras que el segundo

---

\* Nomenclatura al final del trabajo

representa la energía potencial. Usualmente  $U$  puede ser despreciable debido a la enorme área de la matriz sólida, y así las fuerzas viscosas controlan generalmente el movimiento de los fluidos. Para fluidos incompresibles y energía cinética despreciable:

$$\Phi = w(p - p') + gz \quad (II.3)$$

En esta etapa se debe hacer notar que la ley de Darcy fue concebida para flujo de agua en una capa filtrante lineal. A través de una serie de experimentos se demostró que la relación de flujo de agua es:

- Proporcional a lo que es conocido como la diferencia de potencial entre los extremos de la capa filtrante.
- Inversamente proporcional a la longitud de la columna porosa.

Darcy supuso implícitamente que el gasto era proporcional al área de la capa filtrante. En su experimento desconocía qué dirección de flujo tendría el fluido en el medio poroso; se acepta que el flujo es a lo largo del gradiente de potencial, además de que la velocidad en la ecuación (II.1) es una velocidad hipotética y se supone que el fluido fluye a través de la sección transversal, la cual no está obstruida por granos de arena. Para propósitos prácticos, la estructura interna del medio poroso no se considera. Así normalmente se refiere a la velocidad en la ecuación (II.1) como una velocidad macroscópica. Otras suposiciones implícitas son las siguientes:

- Los potenciales en el experimento de Darcy son potenciales en superficies hipotéticas, y no se refieren a la estructura del medio poroso, aunque el flujo total y el potencial sobre una superficie están relacionados con la distribución verdadera del flujo, y el potencial sobre el espacio poroso, respectivamente.
- El elemento esencial de la ley de Darcy es que el cuerpo es suficientemente grande, en comparación con el tamaño de los poros, y puede ser considerado uniforme. Esta hipótesis permite considerar la sección transversal del cuerpo poroso como un número de elementos de sección transversal unitaria que conducirá el fluido a razones imperceptibles de otros elementos cuando son sujetos a la misma diferencia de potencial.

- El gasto en la columna porosa es inversamente proporcional a la longitud de la columna. Además se supone que el medio poroso es estable, no reacciona con el fluido y no existe variación en los granos de la formación.

Finalmente, se nota que la ley de Darcy indica que el movimiento es dependiente sólo de la distribución de potencial e independiente del tiempo. Phillip<sup>26</sup> mostró que el tiempo que toma un fluido en reposo para pasar a régimen estacionario, en valor es muy pequeño (del orden de algunos segundos), y es independiente del gradiente de potencial o de las dimensiones del medio poroso.

### II.2. Los Límites De La Ecuación De Darcy.

La ecuación de Darcy relaciona la caída de presión necesaria para mantener el flujo de un fluido a través de un medio poroso, a un gasto determinado. Se ha demostrado que para altos ritmos de flujo, el comportamiento de la presión-flujo no se satisface, por lo que, está limitada a ciertos rangos de número de Reynolds. Así la ley de Darcy se puede generalizar para valores altos con la inclusión de parámetros adicionales.

Además, es bien conocido que a medida que el número de Reynolds se incrementa, la ley de Darcy pierde gradualmente su aproximación llegando a ser completamente inválida; entonces, es muy importante considerar el flujo a alta velocidad.

### II.3. La Ecuación De Forchheimer.

Ya se ha apuntado que la aplicabilidad de la ley de Darcy está limitada por el número de Reynolds. Para números de Reynolds altos, Forchheimer<sup>11</sup> sugirió que se reemplazara la ecuación (II.1) por la siguiente fórmula, la cual ignora efectos gravitacionales :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = av + b|v|v \quad (II.4)$$

Si se considera flujo laminar entonces  $b \approx 0$ , y  $a = \frac{\mu}{k}$ .

De acuerdo con la hipótesis de Linquist<sup>27</sup>, los efectos inerciales son los responsables de las desviaciones de la ley de Darcy. Los trabajos recientes de Mei y Aurieault<sup>16</sup> indican que para

un medio poroso homogéneo e isótropo, los efectos inerciales conducen a un término de corrección que es proporcional a  $v^3$  (esta observación no viola la ecuación (II.4)). Además, el papel de la inercia parece ser mucho más importante a nivel de poro que a nivel macroscópico.

El interés en el flujo no laminar, para el desarrollo del presente trabajo, radica principalmente en el flujo de líquido en yacimientos fracturados. Diversos experimentos realizados indican que  $b = \rho\beta$ , donde  $\beta$  es una función de las propiedades del medio poroso. La correlación utilizada en este trabajo, y que además es la más comúnmente empleada para determinar  $\beta$ , es la que desarrolló Geertsma<sup>17</sup>:

$$\beta = \frac{48511}{\phi^{5.5} k^{0.5}} \quad (II.5)$$

Muchas otras correlaciones han sido dadas en la literatura, por ejemplo la de Firoozabadi y Katz<sup>18</sup>, Ávila y Evans<sup>19</sup>, Wong<sup>20</sup>, Tiss y Evans<sup>21</sup>, muestran que el coeficiente  $\beta$  también depende de la existencia de una segunda fase. Los experimentos de Wong<sup>20</sup> indican que en presencia de agua, el coeficiente  $\beta$  para un gas puede ser mayor o menor que los valores de  $\beta$  obtenidos cuando el agua no está presente. Tiss y Evans<sup>21</sup> notaron que el esfuerzo de sobrecarga y la temperatura influyen en  $\beta$ . También Fetkovich<sup>28</sup> notó que en estudios de campo el valor de  $\beta$  puede ser una o dos veces mayor en magnitud que los valores obtenidos de experimentos de laboratorio.

#### II.4. Grupos Adimensionales

La ventaja básica de estos grupos es que permiten comprender la estructura de las soluciones de interés sin considerar valores específicos de las propiedades de la formación, de los fluidos o del gasto. El objetivo aquí es obtener una solución que no contenga dimensión o parámetros reales. Comúnmente se emplean grupos adimensionales siguiendo el trabajo de van Everdingen y Hurst<sup>29</sup>.

Los grupos adimensionales empleados en el análisis de pruebas de pozo son identificados por el estudio del flujo de fluidos hacia el pozo. Para el problema en consideración, la escala más simple para la longitud que se puede emplear es el radio del pozo,  $r_w$ . De esta forma se denota el radio adimensional por el símbolo  $r_D$  el cual se define como:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (II.6)$$

Se denota al tiempo adimensional universal para yacimientos homogéneos, el cual es directamente proporcional al tiempo, y se define por la relación:

$$t_D = \frac{\theta_1 kt}{\mu c_i \phi r_w^2}, \quad (II.7)$$

donde  $\theta_1$  es una constante de conversión.

La tarea más difícil es la selección de la definición para la presión adimensional, y depende esencialmente de la condición del pozo, ya sea producción a gasto constante o a presión de fondo fluyendo constante. Para el caso de gasto constante, se define a la presión adimensional de modo que la condición inicial sea igual a cero a través del yacimiento, y que la relación de producción en el pozo sea igual a -1. Para lograr estos objetivos, se define a la presión adimensional mediante la relación:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2\pi kh}{\theta_2 q B \mu} (p_i - p(r, t)) \quad (II.8)$$

En las soluciones para un pozo que produce a presión constante, que es el caso que interesa, se emplea la presión adimensional,  $p_D(r_D, t_D)$  definida por:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{p_i - p(r, t)}{p_i - p_{wf}} \quad (II.9)$$

donde  $p_{wf}$ , es la presión de fondo fluyendo, supuesta constante. Esta definición también satisface que  $p_D(r_D, t_D)$  sea inicialmente cero para toda  $r_D$ .

Para el gasto adimensional, se emplea la relación:

$$q_D(r_D, t_D) = \frac{\theta_2 B \mu q(r, t)}{2\pi kh (p_i - p_{wf})} \quad (II.10)$$

## II.5. Análisis De Gastos Considerando Flujo Laminar En Yacimientos Naturalmente Fracturados.

En una formación fracturada se pueden tener pozos que inicialmente producen a un gasto alto donde, en algunos casos, la producción empieza a declinar después de unas cuantas horas sin una clara explicación. Por lo que, analizando el comportamiento transitorio del gasto en un pozo produciendo en una formación fracturada se adicionará información, lo que dará lugar a un análisis más completo. Desde un punto de vista ingenieril, la declinación inicial podría ser un factor clave en la decisión de continuar o abandonar la explotación del pozo. En el caso de un sistema homogéneo, esta declinación es la única observada, pero para yacimientos fracturados, la declinación inicial no siempre representa el estado final de depresionamiento.

### II.5.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales Para Yacimientos Naturalmente Fracturados.

En esta sección se presentan las ecuaciones diferenciales parciales básicas para flujo de fluidos en formaciones fracturadas. Las ecuaciones están basadas en un modelo presentado originalmente por Warren y Root<sup>30</sup>. El modelo fue ampliado por Mavor y Cinco Ley<sup>31</sup> al incluir los efectos de almacenamiento y de daño, y después por Da Prat<sup>8</sup> y por Da Prat et al.<sup>6</sup> al estudiar el comportamiento del gasto adimensional para un pozo produciendo a una presión constante, para yacimientos fracturados infinitos o finitos.

Las ecuaciones diferenciales parciales fundamentales son :

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = (1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} + \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}, \quad (II.11)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} = \lambda (p_{fD} - p_{mD}), \quad (II.12)$$

donde  $\lambda$  y  $\omega$  son parámetros asociados con las propiedades del fluido y del yacimiento.  $\omega$  relaciona el almacenamiento de la porosidad secundaria al total del almacenamiento y es dada por:

$$\omega = \frac{(\phi V_c)_f}{(\phi V_c)_f + (\phi V_c)_m}, \quad (II.13)$$

o

$$\omega = \frac{(\phi c_i)_f}{(\phi c_i)_f + (\phi c_i)_m}$$

$\lambda$  controla el flujo interporoso y es dada por:

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_e} r_w^2, \quad (II.14)$$

donde  $\alpha$  es el factor de forma de flujo interporoso con dimensiones  $L^{-2}$ .  $p_{fD}$  y  $t_D$  están definidos como:

$$p_{fD} = \frac{P_i - P}{P_i - P_{wf}} \quad (II.15)$$

y

$$t_D = \frac{2.637 \times 10^{-4} k_e t}{((\phi c_i)_f + (\phi c_i)_m) \mu r_w^2} \quad (II.16)$$

Una definición matemática completa requiere de ecuaciones adicionales, las cuales representen adecuadamente las condiciones tanto inicial como de frontera. Para un sistema fracturado, con una presión inicial uniforme, la condición inicial esta dada por:

$$p_{fD}(r_D, 0) = 0. \quad (II.17)$$

La condición de frontera interna para presión de fondo constante es:

$$\left( p_{fD} - S \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} \right)_{r_D=1} = 1, \quad (II.18)$$

donde  $S$  es el factor de daño mecánico. Dos condiciones de frontera externa son consideradas: un yacimiento con extensión lateral infinita o con fronteras cerradas. Para el primer caso, la condición es:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD}(r_D, t_D) = 0 \quad (II.19)$$

Para fronteras cerradas, la condición es:

$$\lim_{r_D \rightarrow r_{eD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = 0 \quad (II.20)$$

El gasto adimensional en el pozo es dado por :

$$q_D = - \left( \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (II.21)$$

La producción acumulada está relacionada con el gasto por:

$$Q_D = \int_0^{tD} q_D dt_D \quad (II.22)$$

Las ecuaciones presentadas en la primera parte de este capítulo definen el enunciado del problema por completo. En la siguiente sección se describirá el método de solución.

### II.5.2. Método De Solución.

Un método común para solucionar las ecuaciones ( II.11 ) y ( II.12 ) bajo las condiciones dadas por las ecuaciones ( II.17 ) a ( II.21 ), es emplear la transformación de Laplace. Las ventajas de este método fueron descritas por van Everdingen y Hurst<sup>29</sup>. Por este método, las ecuaciones son transformadas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales pueden ser solucionadas analíticamente. La solución resultante en el espacio transformado es una función de la variable de Laplace,  $u$ , y la variable espacial,  $r_D$ . Para invertir la solución a espacio y tiempo real, se emplea la transformación inversa de Laplace.



### II.5.3. Soluciones De Gasto

En esta sección se consideran dos tipos de yacimientos: yacimiento infinito y yacimiento cerrado. Las soluciones para yacimientos fracturados no limitados han aparecido en un gran número de publicaciones ( Mavor y Cinco Ley<sup>31</sup> ). Las soluciones para yacimientos limitados, sistemas cerrados, fueron presentadas por Da Prat<sup>8</sup>, y Da Prat et al<sup>6</sup>. Para cada tipo de yacimiento, las aproximaciones a tiempos cortos y largos son realizadas mediante las expresiones correspondientes para el gasto adimensional en el espacio de Laplace. La inversa de las soluciones resultantes han aparecido en tablas de transformadas de Laplace (Abramowitz y Stegun<sup>32</sup>). Los resultados proveen una verificación de la validez del algoritmo de la inversión numérica, obteniéndose resultados confiables en la interpretación de los resultados observados.

#### II.5.3.A. Yacimiento Infinito

Las soluciones de gasto transitorio para un yacimiento infinito reflejan el comportamiento antes de que los efectos de frontera lleguen a ser evidentes.

Para un valor de  $\lambda$  diferente de cero, el gasto depende inicialmente de  $t_D$  y  $\omega$ . Conforme el tiempo se incrementa, la interacción entre la matriz y las fracturas es reflejada en un periodo de flujo constante después del cual la solución llega a ser la misma que para un yacimiento homogéneo infinito. Mediante aproximaciones a tiempos largos y cortos de la ecuación que representa el problema en el espacio de Laplace, se pueden obtener expresiones simples para el gasto que pueden ser empleadas para comprender el comportamiento observado de este parámetro. Para tiempos pequeños, la expresión para el gasto,  $q_D$ , está dada por :

$$q_D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi t_D}} \quad (II.23)$$

o, en términos de la producción acumulada,  $Q_D$ ,

$$Q_D(t_D) = 2\sqrt{\frac{t_D \omega}{\pi}} \quad (II.24)$$

Para  $\omega = 1$  la ecuación ( II.24 ) es idéntica a la ecuación presentada por van Everdingen y Hurst<sup>29</sup>. La expresión obtenida para el gasto puede ser asociada con un yacimiento homogéneo con un tiempo efectivo  $t' = t_D / \omega$ .

De hecho, de la definición de  $t_D$  :

$$t'_D = \frac{t_D}{\omega} = \frac{2.637 \times 10^{-4} k_e t}{\phi_f C_f \mu r_w^2} \quad (II.25)$$

Así, para un sistema fracturado en un medio infinito, inicialmente no se detecta la presencia de la porosidad primaria; es decir, éste se comporta como un yacimiento homogéneo. Para una matriz no comunicante ( $\lambda = 0$ ), la solución depende de  $t_D/\omega$  para todo tiempo.

En la Figura II.1 se observa que a tiempos cortos la solución depende únicamente de  $\omega$  no de  $\lambda$ , y para una  $\lambda$  dada, la solución se aproxima al caso homogéneo a tiempos largos. A medida que el valor de  $\lambda$  se incrementa, la transición se lleva a cabo más rápido. La solución depende del logaritmo de  $t_D$  para tiempos largos. Esto se obtiene de la aproximación a tiempos largos de la solución en el espacio de Laplace, como fue derivado por Da Prat<sup>8</sup>. Es decir a tiempos largos :

$$q_D = \frac{2}{\ln t_D + 0.80907} \quad (II.26)$$

Para tiempos intermedios la solución es aproximadamente una constante dependiente de  $\lambda$ .

### II.5.3.B. Frontera Exterior Cerrada (Área De Drene Cerrada)

El comportamiento de un yacimiento homogéneo con fronteras cerradas ha sido estudiado por muchos autores. Van Everdingen y Hurst<sup>29</sup> presentaron una solución para el gasto acumulado en el caso de presión de fondo constante.

Da Prat et al.<sup>6</sup> estudiaron el comportamiento del gasto para un pozo con presión de producción constante en un yacimiento fracturado, durante los periodos transitorio y dominado por frontera. Sus principales resultados se presentan en esta sección.

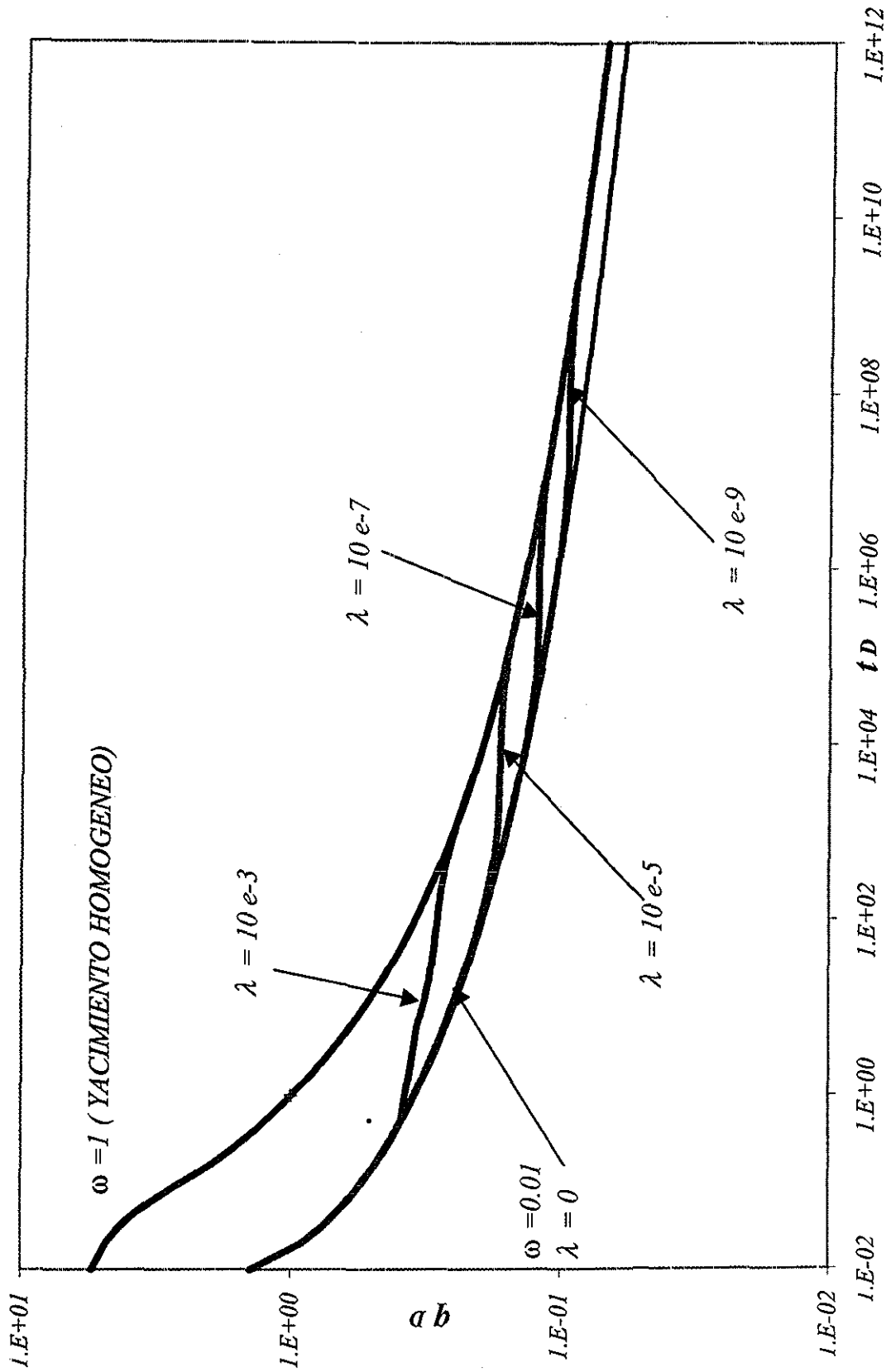


Figura II.1.  $q_D$  vs  $t_D$  Para Producción a Presión Constante Yacimiento Infinito  $Y S = 0$

Las soluciones para  $r_{eD} = 50$  y  $\omega = 0.001$ , y diversos valores de  $\lambda$  son mostrados en la Figura II.2. El gasto al principio muestra una rápida declinación y entonces llega a ser casi constante por un largo periodo, después del cual una declinación a un gasto final se lleva a cabo. Para tiempos cortos, el gasto depende de  $t_D$  y  $\omega$ , pero para tiempos largos depende de  $\lambda$ ,  $\omega$  y  $r_{eD}$ . Comparado con el caso homogéneo, ( $\omega = 1$ ), se requieren tiempos largos para depresionar a un sistema de doble porosidad. El valor del gasto durante el periodo de razón constante depende en gran medida de la razón de permeabilidades matriz-fractura,  $\lambda$ .

Fetkovich<sup>28</sup> observó que para sistemas homogéneos en el principio del depresionamiento (dentro del periodo dominado por frontera), todas las soluciones para varios valores de  $r_{eD}$ , describen una relación de declinación exponencial y convergen a una sola curva, en la Figura que dicho autor presenta, el tiempo adimensional  $t_{DA}$  está basado en el área de drene, es decir:

$$t_{DA} = \frac{t_D r_w^2}{A} \quad (II.27)$$

Esta afirmación no es válida para yacimientos fracturados ya que las soluciones no convergen a una sola curva. Con el fin de explicar el comportamiento observado, Da Prat<sup>8</sup> presentó aproximaciones a tiempos cortos y largos de la ecuación que representa la solución para el gasto adimensional para un yacimiento cerrado; lo que condujo a expresiones simples para el gasto y la producción acumulada, como se muestra a continuación.

Una aproximación a tiempos largos para el gasto adimensional esta dada por:

$$q_D = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \lambda \cdot EXP\left(-\frac{\lambda}{1-\omega} t_D\right), \quad (II.28)$$

y para la producción acumulada adimensional:

$$Q_D(t_D) = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} (\omega - 1) \cdot EXP\left(-\frac{\lambda t_D}{1-\omega} + 1\right) \quad (II.29)$$

De la ecuación ( II.28 ) para tiempos largos, se puede observar una declinación exponencial, la cual es la solución para el caso de producción a una presión constante. De esta forma un resultado conocido para sistemas homogéneos se puede extender a yacimientos fracturados. No obstante, en un yacimiento fracturado, la declinación final toma lugar en un tiempo mayor al

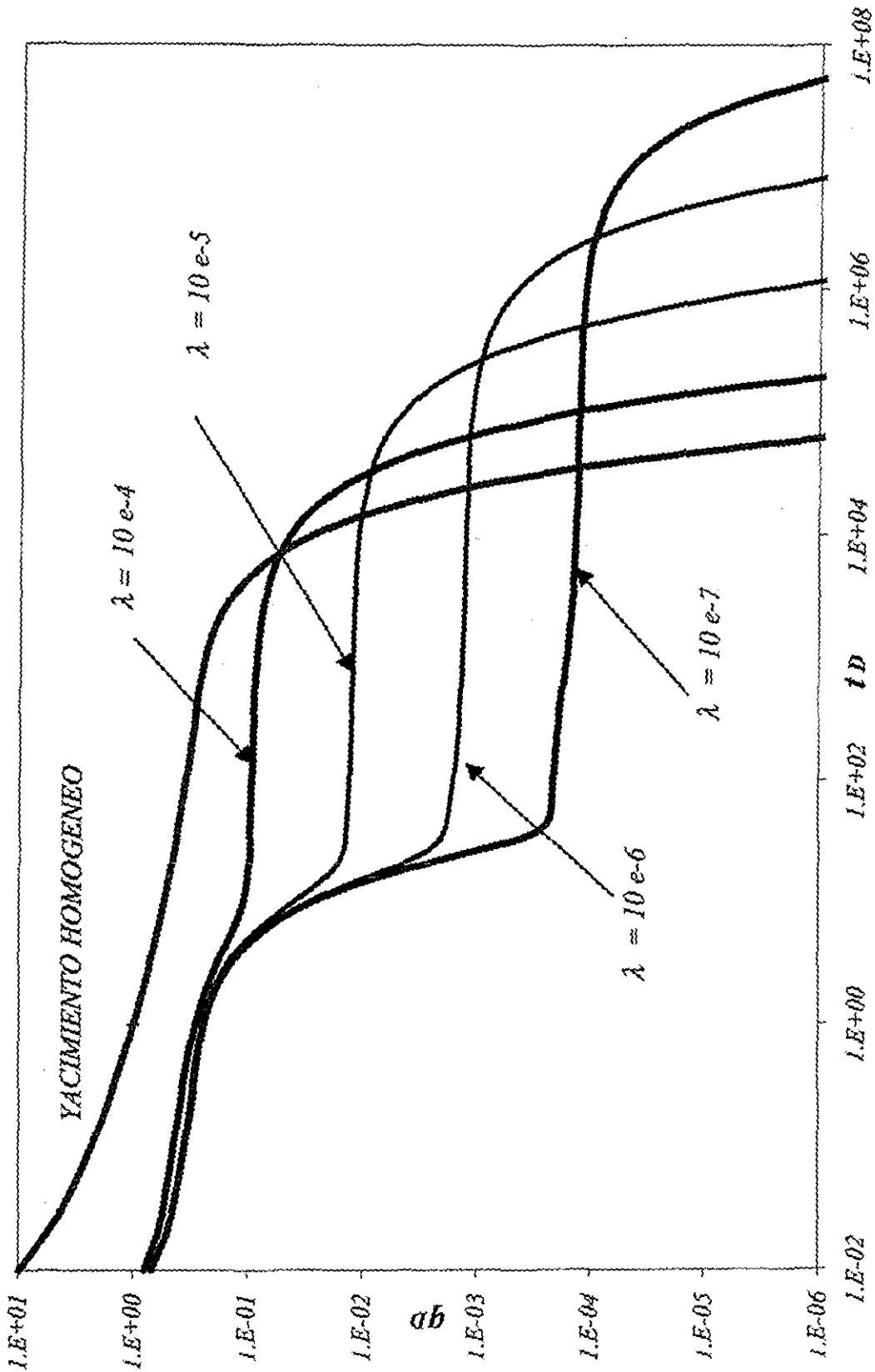


Figura II.2.  $q_D$  vs  $t_D$  Para Producción a Presión Constante Yacimiento Con Frontera Impermeable ( $S=0, r_{eD}=50, \omega=0.001$ )

compararlo con un sistema homogéneo ( $\omega = 1$ ), esto es, toma un tiempo mayor el agotamiento en un sistema fracturado.

La solución a tiempos largos (ecuación ( II.28 )) se puede emplear para explicar el periodo observado de gasto constante. La expansión en serie de Taylor para la exponencial es:

$$e^{-x} = 1 - x^1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{II.30})$$

Si  $x$  es pequeño, entonces  $e^{-x} \approx 1$ . Entonces se puede decir que para  $\frac{\lambda t_D}{1 - \omega} \ll 1$ :

$$q_D = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \lambda, \quad (\text{II.31})$$

la cual es independiente del tiempo.

#### II.5.4. Análisis De La Predicción De Producción Para Flujo Laminar.

Desde un punto de vista ingenieril, la declinación inicial podría ser el factor clave en la puesta en producción o abandono de un pozo, esta declinación se presenta tanto en sistemas homogéneos como fracturados; sin embargo, para los yacimientos fracturados esta declinación inicial no siempre corresponde a un estado final de depresionamiento como fue señalado por Da Prat et al.<sup>6</sup>, por lo que ignorar la presencia de un sistema fracturado puede producir un error muy grande en la estimación de parámetros del yacimiento.

Para una matriz no participante,  $\lambda = 0$ , el comportamiento es el mismo que para un sistema homogéneo, pero con  $t'_D = t_D / \omega$ .

Todas las curvas muestran una declinación exponencial bien definida, la cual es única. Una expresión para  $q_D$  puede derivarse en este caso. Para un sistema homogéneo, el estado de la declinación exponencial puede ser derivado de la función de presión de pozo adimensional para un gasto constante de producción después del inicio del estado pseudo estacionario. Mavor y Cinco Ley<sup>31</sup> mostraron que para un sistema cerrado de doble porosidad,  $p_{wD}$  está dada por ( para gasto constante ):

$$p_{wD} = 2\pi \frac{t_{DA}}{\omega} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2.2458A}{C_A r_w^2} \right) \quad (\text{II.32})$$

Esta expresión es válida para  $t_{DA}/\omega > 30.1$ , considerando una matriz no comunicante.

Para un yacimiento circular limitado, en este caso de matriz no comunicante, la declinación inicial es de naturaleza exponencial, y puede ser descrita por la ecuación:

$$q_D = \frac{1}{\ln r_{eD} - \frac{3}{4}} \text{EXP} \left( - \frac{2t_D}{r_{eD}^2 \left( \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \right) \omega} \right) \quad (II.33)$$

Ambas soluciones son las mismas después de  $t_D > 0.1 \omega \pi r_{eD}^2$ .

Para una matriz participante ( $\lambda \neq 0$ ), la declinación inicial no es el estado final de depresionamiento. Esto puede ser considerado como un indicador de un sistema no homogéneo. La solución para un sistema de doble porosidad a tiempos largos es dada por la ecuación (II.28).

La solución analítica para  $\lambda = 0$ , (II.33), y la solución para tiempos largos (II.28) proveen buenas aproximaciones a la solución numérica o real. Desde un punto de vista práctico y económico, dando un valor inicial para el gasto, es importante conocer el tiempo que tomará para depresionar por completo al yacimiento fracturado.

El gasto comienza a declinar hasta que alcanza un valor aproximado de:

$$q_D \approx \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \lambda, \quad (II.34)$$

esto ocurre a un tiempo dado por<sup>2</sup>:

$$t_D = \frac{\ln \left( \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \right) \ln \left( r_{eD} - \frac{3}{4} \right)}{\lambda - \frac{1 - \omega}{r_{eD}^2 \ln \left( r_{eD} - \frac{3}{4} \right) \omega}}, \quad (II.35)$$

después de este tiempo permanecerá constante hasta que la solución a tiempos largos comience a ser la dominante.

### II.5.5. Análisis De Curvas De Declinación Con Flujo Laminar Empleando Curvas Tipo.

Fetkovich<sup>28</sup> describió un procedimiento para el empleo de ajustes por curvas tipo doble logarítmicas para analizar datos de gasto contra tiempo para un sistema homogéneo. El mismo método se puede aplicar a sistemas de doble porosidad como lo mostraron Da Prat et al.<sup>6</sup> y Sageev et al.<sup>7</sup>: la relación entre  $q_D$  y  $t_D$  es controlada por  $\omega$ ,  $\lambda$ ,  $r_{eD}$  y  $S$  por lo que más de una curva tipo puede ser necesaria. Los valores de  $\omega$  y  $\lambda$  pueden obtenerse del análisis de pruebas de presión. Las curvas correspondientes para  $\omega=0.01$ ,  $\lambda=1 \times 10^{-5}$  y diferentes valores de  $r_{eD}$  se muestran en la Figura II.3.

Es posible obtener  $\omega$  y  $\lambda$  de datos de pruebas de presión, ya sea generar o seleccionar la curva tipo apropiada, la cual puede ser empleada para determinar los gastos de un yacimiento en particular. Un ajuste por curvas tipo deberá proveer información relativa a la permeabilidad de la fractura y almacenamiento total; a partir del punto de ajuste se puede obtener la permeabilidad de la fractura mediante:

$$k_e = \frac{141.2\mu B}{h(p_i - p_{wf})} \left( \frac{q}{q_D} \right)_{AJUSTE}, \quad (II.36)$$

y de igual forma, el almacenamiento total se obtiene:

$$[(\phi c)_m + (\phi c)_f] = \frac{2.637 \times 10^{-4} k_e}{\mu r_w^2} \left( \frac{t}{t_D} \right)_{AJUSTE}, \quad (II.37)$$

con el tiempo en horas.

Como  $\omega$  y  $\lambda$  fueron determinados por la selección de la curva tipo, y además  $k_m$  se obtiene del análisis de núcleos, el factor de forma puede obtenerse por la relación:

$$\alpha = \frac{\lambda k_e}{r_w^2 k_m} \quad (II.38)$$



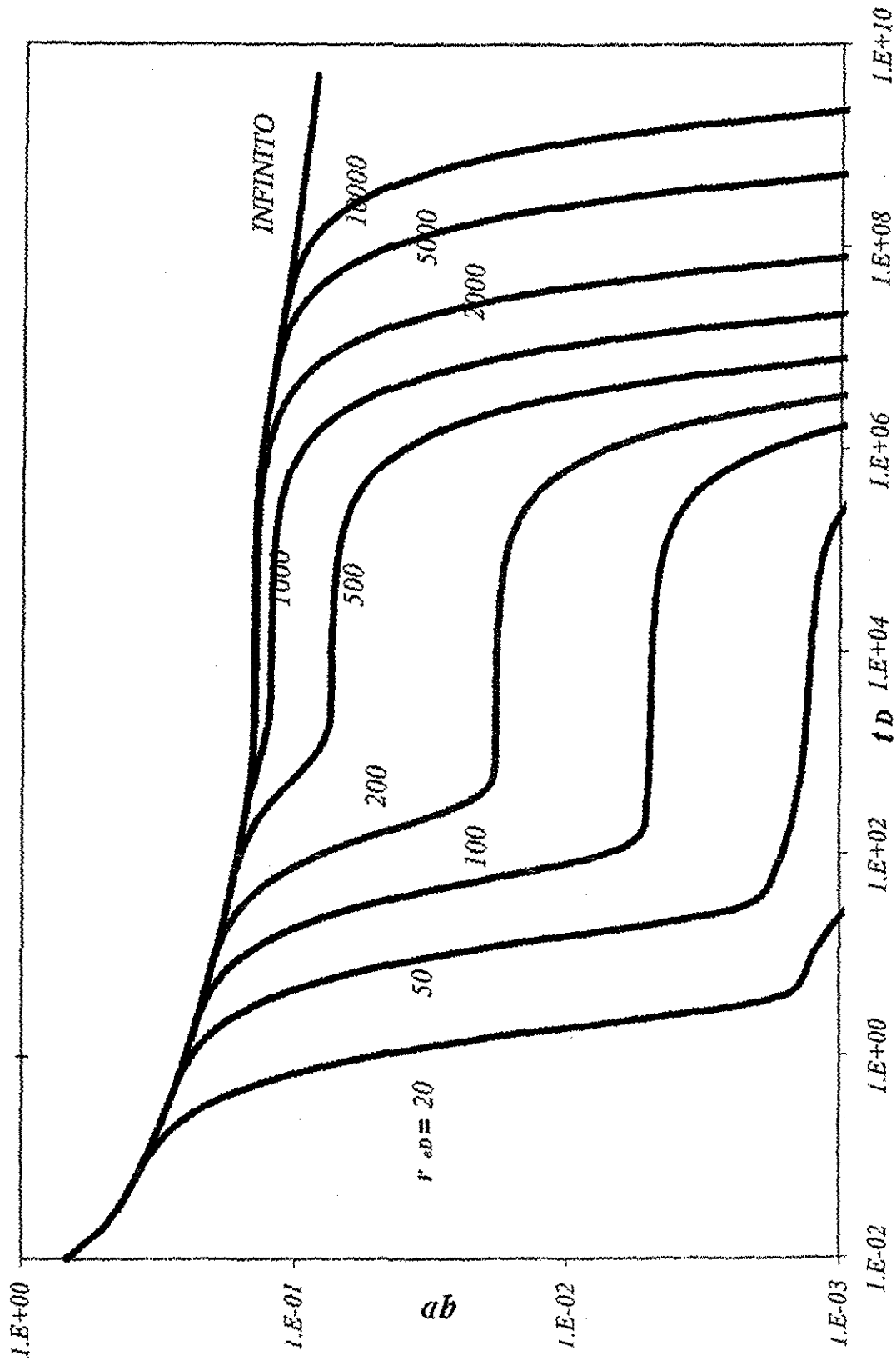


Figura II.3. Curva Tipo Para Yacimientos Naturalmente Fracturados,  $\lambda = 1 \times 10^{-6}$ ,  $\omega = 0.001$ ,  $S=0$ .

El almacenamiento de la fractura se obtiene mediante:

$$(\phi c)_f = [(\phi c)_f + (\phi c)_m] \cdot \omega \quad (II.39)$$

Desde un punto de vista práctico, este procedimiento es simple si conoce  $\omega$  y  $\lambda$ , de otra forma más de una curva tipo será necesaria para obtener el mejor ajuste. Por ejemplo para un  $r_{eD}$  dado, será necesario considerar de 3 a 4 valores de  $\omega$  y de 4 a 5 valores de  $\lambda$  para cada valor de  $\omega$ , por lo que muchos pares de  $\omega$  y  $\lambda$  serán necesarios para encontrar la curva tipo adecuada.

En el caso donde no se cuente con la información de  $\omega$ ,  $\lambda$  ni  $r_{eD}$  y solamente se tenga acceso a datos de gasto y tiempo, es posible obtener  $\omega$  y  $\lambda$  mediante el ajuste a una curva tipo, dependiendo de la duración de la prueba, además de  $r_{eD}$ . Sageev et al.<sup>7</sup> presentaron una serie de curvas tipo que permiten la estimación de  $\omega$ ,  $\lambda$ , y  $r_{eD}$ , a partir de datos de declinación de producción. En dichas curvas se emplea  $t_D / \omega$  en lugar de  $t_D$  en el eje de las abscisas. Para emplear estas curvas se grafica en coordenadas doble logarítmicas, y a la misma escala que las curvas tipo, los datos de gasto contra tiempo, se sobrepone sobre la curva tipo, (generalmente se partirá de la curva de valor  $\omega = 1$ ), los datos se separaran de esta curva y se estabilizarán en forma de una línea recta siguiendo una línea que marca el valor correspondiente a  $\lambda$ . Después, dependiendo de la duración de la prueba, los datos decaerán y se ajustarán a una nueva curva la cual indicará el valor de  $\omega$ , si esto no ocurre se considera que  $\omega$  tiene un valor límite a la curva más cercana en valor de  $\omega$  al finalizar el registro de datos. Si los datos tienen una declinación final, se podrán ajustar a la curva tipo siguiendo la curva correspondiente al valor de  $r_{eD}$ . Las ecuaciones ( II.36 ) a ( II.39 ) se pueden emplear para determinar los demás parámetros del yacimiento. Esta curva tipo también muestra diferentes valores del factor de daño mecánico,  $S$ .

### II.5.6. Cálculo Del Área De Drene<sup>10</sup>

Para un pozo produciendo a presión constante en un área de drene limitada, el efecto del límite de yacimiento causa una declinación exponencial en el gasto. La ecuación exacta para el estado de declinación exponencial del yacimiento homogéneo está dada por:

$$q_D(t_D) = \frac{2}{\ln \frac{4A}{\gamma C_A r_w^2}} \left( \frac{\text{EXP} \frac{-4\pi t_{DA}}{4A}}{\ln \frac{4A}{\gamma C_A r_w^2}} \right), \quad (II.40)$$

para  $t_{DA} > (t_{pss})_D$ , donde  $(t_{pss})_D$  es el tiempo requerido para alcanzar un estado pseudoestacionario real y depende de la forma del yacimiento. Esta ecuación es una extensión de (II.33), con  $\omega = 1$ ; para incluir el efecto del factor de daño se debe emplear el concepto de radio equivalente.

Para pozos produciendo a presión constante durante suficiente tiempo para que se presente una declinación exponencial en el gasto, existen pruebas de límite semejantes a las que se llevan a cabo en pozos produciendo a gasto constante en un estado de flujo pseudoestacionario. Las pruebas de límite pueden ser empleadas para proveer información acerca del tamaño y forma del área de drene si se conocen la permeabilidad y la porosidad del yacimiento. De la ecuación (II.40):

$$\ln q = \frac{-4\pi t_{DA}}{\ln \frac{4A}{\gamma C_A r_w^2}} + \ln \left[ \frac{4\pi kh(p_i - p_{wf})}{\mu \ln \frac{4A}{\gamma C_A r_w^2}} \right] \quad (II.41)$$

Así, una gráfica de  $\log q$  vs  $t$  tendrá su ordenada al origen  $q_{int}$  y pendiente  $m'$  ( en unidades consistentes ) dados por:

$$q_{int} = \frac{4\pi kh(p_i - p_{wf})}{\mu \ln \left( \frac{4A}{\gamma C_A r_w^2} \right)}, \quad (II.42)$$

$$m' = \frac{4\pi k}{\phi \mu c_i A \ln(10) \ln \frac{4A}{\gamma C_A r_w^2}} \quad (II.43)$$

Dividiendo la ecuación ( II.42 ) entre la ( II.43 ) y despejando  $A$ , se obtiene en unidades consistentes:

$$A = \frac{q_{int}}{\ln(10)m'\phi c_i h(p_i - p_{wf})} \quad (II.44)$$

Entonces,  $C_A$  puede ser estimado de la ecuación ( II.42 ) o ( II.43 ):

$$C_A = \frac{4A}{\gamma \cdot r_w^2} \text{EXP} \left( \frac{-4\pi k h (p_i - p_{wf})}{q_{int} \mu} \right) \quad (II.45)$$

o

$$C_A = \frac{4A}{\gamma \cdot r_w^2} \text{EXP} \left( \frac{-4\pi k h}{\ln(10) \cdot m' \phi \mu c_i A} \right) \quad (II.46)$$

### *II.6. Análisis De Curvas De Declinación Con Flujo No Darciano, Para El Caso De Fluidos Ligeramente Compresibles En Yacimientos Homogéneos.*

Los resultados en esta sección, se presentan en términos de variables adimensionales. Esta forma de presentación proporciona dos ventajas, primeramente, los resultados se pueden generalizar para otros valores de los parámetros presentados en las Tablas. En segundo lugar, los resultados se pueden comparar con soluciones analíticas existentes para flujo laminar. El gasto y tiempo adimensionales están dados en unidades de campo inglesas, respectivamente, como sigue:

$$q_D = \frac{141.2 q \mu B}{kh(p_i - p_{wf})}, \quad (II.47)$$

$$t_D = \frac{0.0002637 kt}{\phi \mu c_i r_w^2}, \quad (II.48)$$

con el tiempo en horas.

Para el caso de yacimientos productores de líquido ligeramente compresible bajo régimen laminar, Ehlig-Economides<sup>10</sup> presentó la siguiente expresión para  $q_D$  durante los periodos transitorio y dominado por frontera, respectivamente:

$$\frac{1}{q_D} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4t_D}{1.781}\right) + S, \quad (II.49)$$

y

$$q_D = \frac{1}{D} \text{EXP}\left(-\frac{2\pi t_{DA}}{D}\right), \quad (II.50)$$

con :

$$D = \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} + S, \quad (II.51)$$

donde  $t_{DA} = t_D r_w^2 / A$ , con  $A$  representando el área de drene. La ecuación (II.50) es la misma que la ecuación (II.33) con  $\omega = 1$  y es un caso especial de la ecuación (II.40). Para cualquier otro tipo de geometría del sistema pozo-yacimiento, la expresión de  $D$  es la siguiente:

$$D = \frac{1}{2} \ln \frac{4A}{1.781 C_A r_w^2}, \quad (II.52)$$

donde  $C_A$  es el factor de forma de Dietz.

Para un yacimiento cilíndrico con el pozo en el centro, el fin del periodo transitorio y el principio del dominado por frontera se denota por  $t_{DA} = 0.1$ .

Es importante señalar que para el caso de flujo laminar, no importando el nivel de presión de fondo fluyendo, siempre se genera una sola curva de  $q_D$  contra  $t_D$ , siguiendo la ecuación (II.49) ó (II.50) durante los periodos transitorio y dominado por frontera, respectivamente.

La Figura II.4 presenta el comportamiento del inverso del gasto adimensional contra el logaritmo del tiempo adimensional, el cual es un reflejo del comportamiento de las variables reales. Se puede observar en la Figura anterior que la respuesta para flujo laminar es independiente del nivel de presión de fondo fluyendo, lo cual no es así para el caso de flujo no-

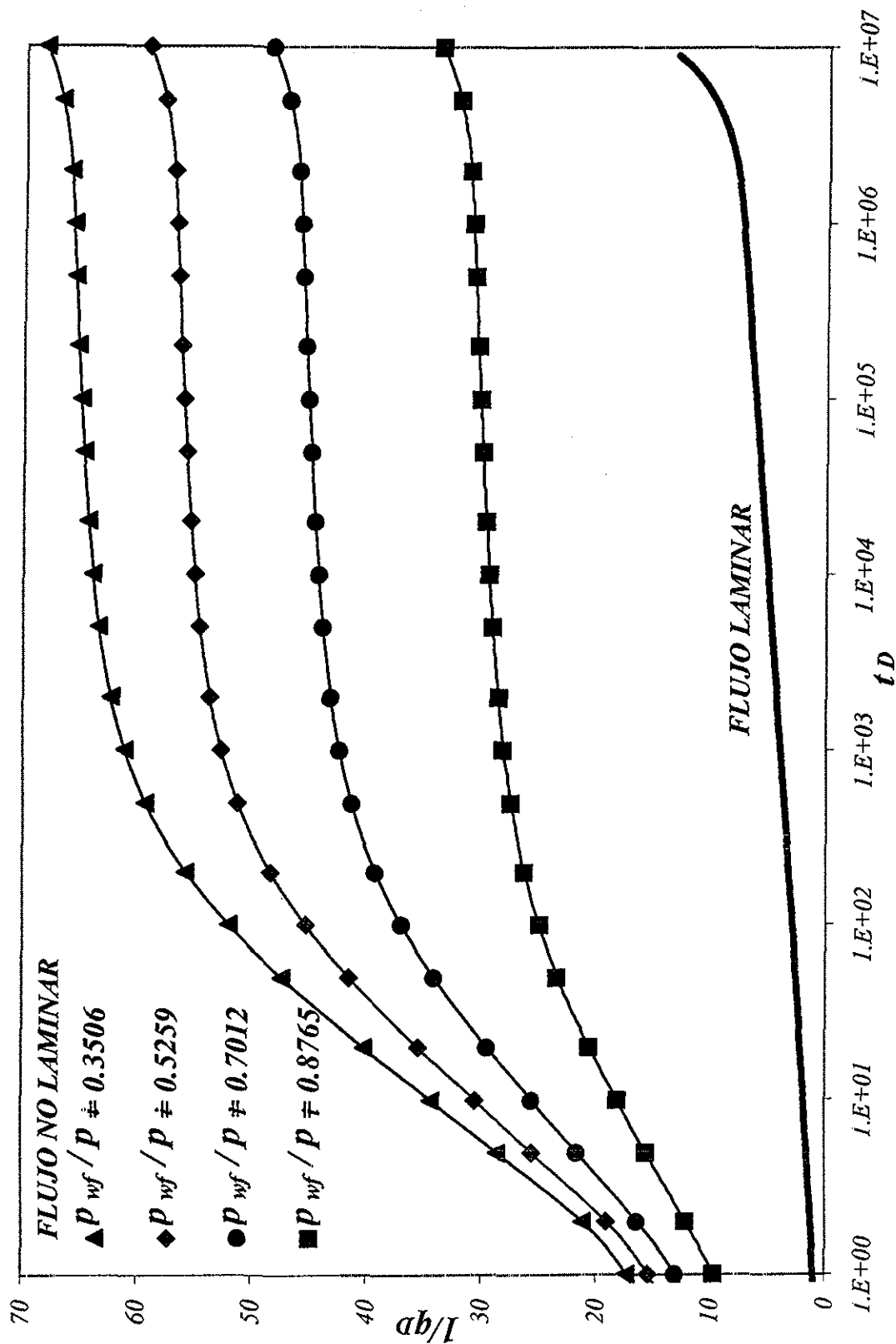


Figura II.4. Comparación de las Respuestas del Gasto Durante el Periodo de flujo Transitorio en Yacimientos Homogéneos ( $S=0$ )

laminar donde para cada presión de fondo se genera una curva distinta<sup>14</sup>. Para cualquier valor del factor de daño mecánico se tiene que conforme el valor de presión de fondo decrece, la respuesta no laminar se aleja de la respuesta laminar, lo cual tiene sentido, ya que al ser más pequeño el valor de  $p_{wf}$ , se esperan velocidades más altas de flujo en la región cercana al pozo y por lo tanto, la componente no laminar de la ecuación de Forchheimer incrementa su valor, alejándose de la respuesta de flujo laminar. Para todos los valores del factor de daño y nivel de presión, se desarrolla un periodo semilogarítmico con una pendiente menor para el caso de flujo no laminar, que para el laminar.

Camacho et al.<sup>14</sup> presentaron una expresión general para calcular el daño total, el daño mecánico más el debido a los efectos inerciales. Esta expresión, se derivó en forma analítica utilizando el concepto de que el periodo transitorio se puede visualizar como una sucesión de periodos estacionarios. Expresada en unidades de campo se tiene:

$$S_T = \frac{(9.115 \times 10^{-13} \rho \beta_s \Delta p)^{0.5}}{887.2 \frac{\mu}{k} \sqrt{r_w}}, \quad (II.53)$$

donde:  $\beta_s$  está dada por la ecuación ( II.5 ) considerando la permeabilidad en la zona de daño,  $\rho$  es la densidad,  $\Delta p = (p_i - p_{wf})$ , y  $\mu$ ,  $k$  son la viscosidad del fluido y la permeabilidad de la formación, respectivamente. Conociendo los parámetros involucrados en esta expresión, se puede predecir fácilmente la dimensión del daño, debido a los efectos inerciales sin necesidad de registrar alguna prueba de pozo. El valor del factor de daño calculado con la ecuación ( II.53 ) para diferentes condiciones de presión de fondo y daño mecánico, es muy cercano al valor de la ordenada al origen de la recta semilogarítmica, en variables adimensionales.

Al efecto de flujo no laminar, muchos autores lo denominan como efecto de daño dependiente del gasto, el cual forma parte importante del daño total. En el caso de producción a presión de fondo constante, el daño debido a efectos inerciales es dependiente del nivel de presión de fondo como se constata en la ecuación (II.53).

En la Figura II.5 se muestra el comportamiento del gasto adimensional,  $q_D$ , contra el tiempo adimensional,  $t_D$ , en esta se observa que el periodo de declinación del gasto es retrasado cuando los efectos inerciales son importantes en el yacimiento. En estos casos, el análisis por curvas tipo, existentes para flujo laminar, producirá valores erróneos de los parámetros del

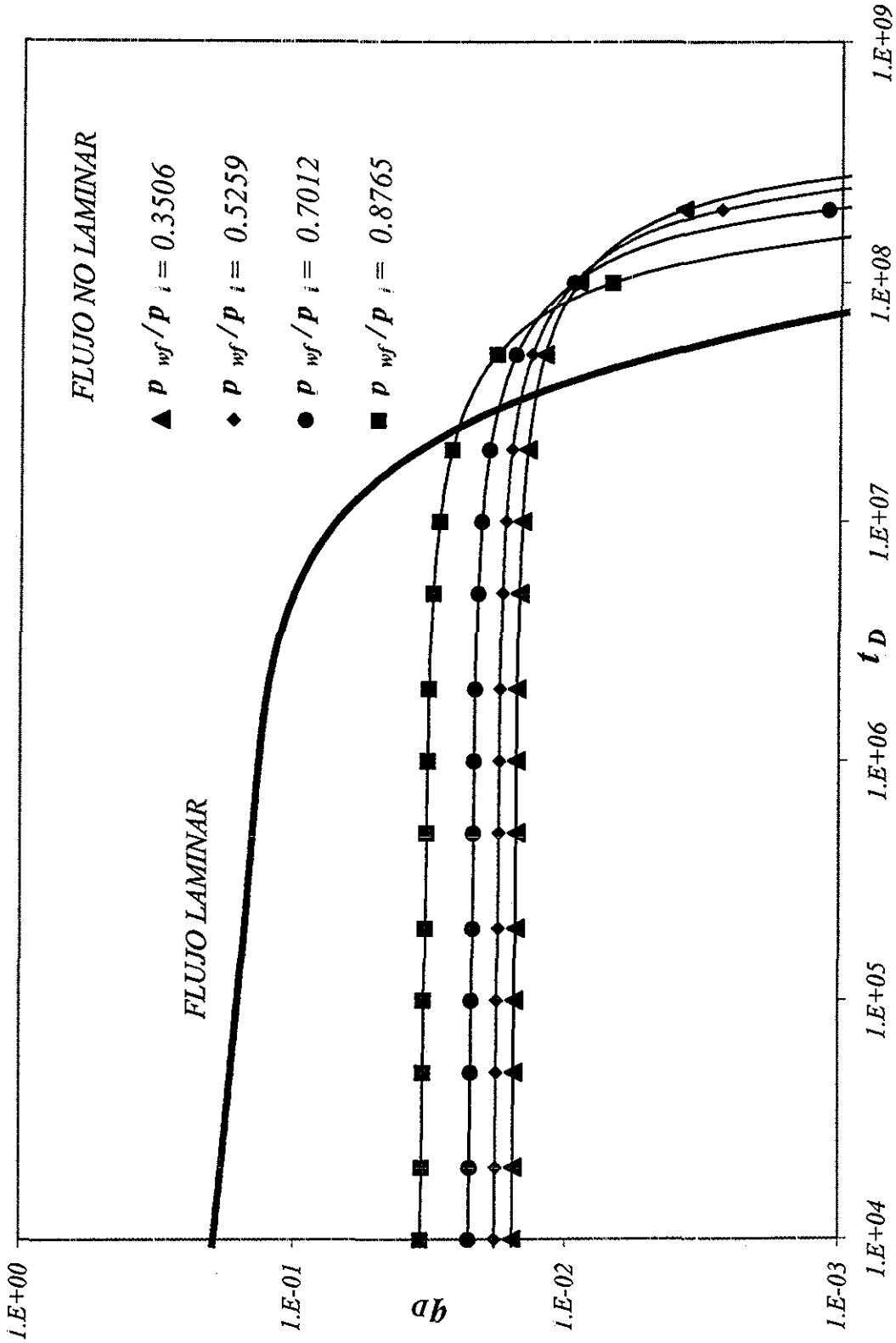


Figura II.5. Comparación de las Respuestas del Gasto Durante el Periodo de flujo Dominado Por Frontera en Yacimientos Homogeneos ( $S=0$ )



pozo y del yacimiento, tales como el factor de daño, la capacidad de flujo de la formación y el área de drene. Las respuestas no-laminares se encuentran por debajo de la laminar durante el periodo transitorio, y parte del periodo dominado por frontera, sin embargo, al final del periodo dominado por frontera se invierte la situación. Esto se debe al hecho de que una cantidad mayor de aceite se encuentra en el yacimiento para el caso no-laminar que para el caso laminar, y además por la presencia de mayores gradientes de presión en la región cercana al pozo en el caso no-laminar que en el laminar.

### II.7. Análisis De Pruebas De Presión En Yacimientos Naturalmente Fracturados Considerando Flujo No Darciano.

De acuerdo al análisis desarrollado por Villalobos<sup>13</sup>, se encontró que los efectos de flujo no-Darciano para el caso de líquido ligeramente compresible en un yacimiento fracturado, se describen adecuadamente por medio del coeficiente de alta velocidad adimensional,  $\beta_D$ , dado por:

$$\beta_D = \frac{k_{fb} \rho q \beta}{2\pi h r_w \mu} \quad (II.54)$$

La Figura II.6 presenta el efecto de alta velocidad en pruebas de decremento de presión para un yacimiento de doble porosidad, en dicha Figura se observa que para tiempos dentro del periodo de flujo homogéneo, la pendiente de las curvas para el caso de  $\beta_D = 1.0$  presentan el valor característico de 1.1513 paralelo al caso de flujo laminar, desplazada de ésta por un valor  $S_{hV}$ , dado por:

$$S_{hV} = D_t q \quad (II.55)$$

donde  $D_t$  es el coeficiente de turbulencia definido por:

$$D_t = \frac{\rho k_{fb} \beta}{2\mu\pi h r_w} \left[ k_{SD}^{-1.201} \left( 1 - \frac{1}{r_{SD}} \right) + \left( \frac{1}{r_{SD}} - \frac{1}{r_{hvD}} \right) \right] \quad (II.56)$$

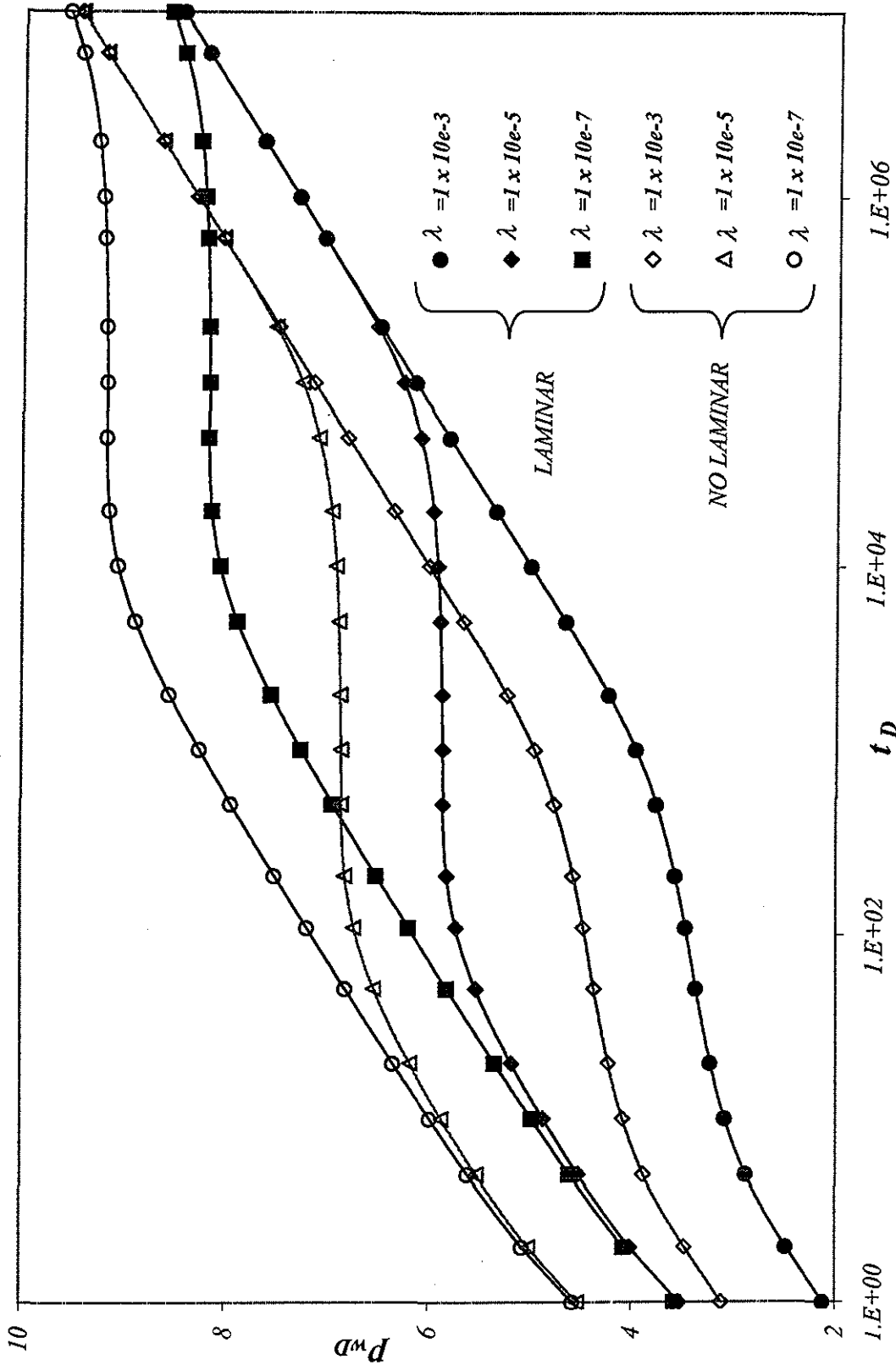


Figura II.6. Efecto de Flujo no Darciano en Pruebas de Decremento Para un Sistema de Doble Porosidad ( $\omega = 0.001$ )

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

donde  $k_{fb}$  es la permeabilidad de la formación naturalmente fracturada,  $r_{hVD}$  es la distancia radial adimensional máxima a la cual se tiene flujo a alta velocidad, y depende únicamente de  $\beta_D$  de acuerdo a la relación empírica:

$$r_{hVD} = 107 \beta_D \quad ; \beta_D \geq 0.05 \quad (II.57)$$

y  $k_{sD}$  es la permeabilidad adimensional en la zona de daño, y está definida por :

$$k_{sD} = \frac{1}{\frac{S}{\ln r_{sD}} + 1} \quad (II.58)$$

y  $r_{sD}$  es el radio adimensional de la zona dañada.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Si se considera el efecto de daño en el comportamiento de presión en un pozo, se tendría que la caída de presión extra debida al flujo a alta velocidad se incrementa gradualmente a medida que el daño aumenta.

El comportamiento de las curvas para tiempos grandes, (dentro del periodo homogéneo) presenta la línea recta con pendiente de 1.1513 característica de los métodos semilogarítmicos del análisis de pruebas de presión para condiciones de flujo Darciano, pero desplazada con respecto al caso de  $S = 0$ , por una cantidad igual a la caída de presión extra causada por un factor de daño aparente  $S'$ . Para este caso el daño total se expresa de la siguiente manera:

$$S' = S + S_{hv} = S + D_i q, \quad (II.59)$$

quedando descrito el comportamiento de la presión para este caso por:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907) + S + D_i q, \quad (II.60)$$

para calcular  $S$  y  $D_i$  se puede utilizar el método propuesto por Ramey<sup>22</sup>.

Si se considera el efecto de almacenamiento del pozo, éste afecta únicamente la respuesta de presión a tiempos cortos, concluyéndose que el efecto de alta velocidad incluyendo

almacenamiento no afecta a la pendiente en la parte final de las curvas para la solución de una prueba de decremento de presión.

Del análisis anterior se tiene que la capacidad de flujo de las fracturas  $k_{fb} h$ , puede estimarse con exactitud, aún si la prueba está bajo la influencia de alta velocidad.

La conclusión principal del trabajo presentado por Villalobos<sup>13</sup>, para pruebas de decremento de presión, es que el efecto de daño, almacenamiento y alta velocidad no afectan a la pendiente semilogarítmica de la prueba de presión. Cabe hacer notar que el máximo valor de  $\beta_D$ , que estos autores utilizan es de 1, por lo cual estos resultados sólo son válidos para valores de  $\beta_D \leq 1$ . Otra observación importante es que un análisis gráfico de presión y derivada de Bourdet et al.<sup>34</sup> para el análisis de datos que están bajo la influencia del efecto de alta velocidad, no es adecuado, debido a que las curvas se desplazan a medida que  $\beta_D$  aumenta.

El tiempo al cual termina el efecto de almacenamiento de fluidos en el pozo, puede estimarse por medio de la correlación de Ramey et al.<sup>22</sup>, sustituyendo el factor de daño  $S$  por el factor de daño aparente  $S'$  definido por la ecuación ( II.59 ). Es decir,

$$t_{Dssl} = C_D (60 + 3.5S') \quad ( II.61 )$$

Para el análisis de pruebas de incremento, se considera que el efecto de alta velocidad está presente antes del cierre, después de un periodo de tiempo de cierre corto, los efectos de alta velocidad desaparecen completamente, juntándose estas curvas con las correspondientes para flujo Darciano. La capacidad de flujo de las fracturas  $k_{fb}h$ , se puede estimar con exactitud, aunque el pozo produzca bajo condiciones de flujo no Darciano.

Si se considera el efecto combinado de flujo a alta velocidad y el daño a la formación, permanecerá activo algún efecto residual debido a la alta velocidad después del cierre, pero para tiempos posteriores los efectos desaparecen, de tal modo que la solución es la misma que para el caso de flujo Darciano.

Al considerar el efecto combinado del almacenamiento con el flujo de alta velocidad, el efecto de almacenamiento dominará el comportamiento de la presión a tiempos cortos y posteriormente desaparece conjuntamente con el flujo a alta velocidad.

Si se toman en cuenta los efectos simultáneos de daño, almacenamiento y alta velocidad, realizando un análisis se obtienen las mismas conclusiones que para el caso de daño a la formación y almacenamiento en forma separada. Concluyéndose en forma general que la conductividad de las fracturas  $k_{fb} h$  puede estimarse con precisión a partir de pruebas de incremento de presión y que el factor de daño,  $S$ , y el coeficiente de turbulencia  $D_t$ , se pueden determinar a partir del método de Ramey<sup>22</sup>.

Lo anterior solamente es aplicable para  $\beta_D \leq 1$ , bajo estas condiciones las rectas semilogarítmicas obtenidas bajo condiciones no laminares son paralelas a las laminares. Para  $\beta_D \geq 1$ . Camacho et al.<sup>15</sup> demostraron que bajo condiciones no laminares durante el periodo de flujo transitorio, la pendiente de la respuesta de presión es función del tiempo y tiende a 1.151 a medida que el tiempo se incrementa, bajo la condición de que los efectos de frontera sean despreciables. Para obtener el factor de daño total proponen la siguiente ecuación:

$$S_T \approx N_{RE} = \frac{9.115 \times 10^{-13} \rho \beta_s q_o B}{887.2 \frac{\mu}{k} 2\pi h r_w} \quad (11.62)$$

En trabajos posteriores Roldán<sup>23</sup>, considerando flujo no laminar para yacimientos homogéneos, demostró que la pendiente a tiempos largos no es de 1.1513. Es decir la pendiente cambia de valor cuando existen efectos inerciales importantes con  $\beta_D \gg 1$ .

### III . COMPORTAMIENTOS OBSERVADOS

En la sección anterior se sentaron las bases necesarias para el análisis de curvas de declinación de líquido en yacimientos naturalmente fracturados considerando flujo no laminar, esos elementos sirven de apoyo para comprender el fenómeno de flujo no Darciano. En este Capítulo se presentan las observaciones obtenidas del empleo de un simulador numérico en diferencias finitas bajo condiciones de flujo no Darciano<sup>15</sup>, empleado para modelar curvas de declinación considerando la presencia de flujo no laminar. La mayor parte de estas observaciones confirman aquellas presentadas por Rodríguez<sup>24</sup>.

#### III.1. Simulador Numérico

Para el desarrollo del presente trabajo se empleó un simulador numérico de diferencias finitas para aceite negro con una formulación completamente implícita<sup>15</sup>. Las corridas de simulación, consideran un pozo que penetra completamente un yacimiento de doble porosidad, el cual se contine líquido ligeramente compresible, considerando condiciones de producción tanto laminares como no-laminares.

El simulador básicamente trabaja bajo las siguientes consideraciones:

- La cima y la base de la formación están cerradas.
- La frontera exterior puede ser impermeable ( cerrada ) o a presión constante.
- Se da la opción de incluir cualquier número de estratos. Cada uno de ellos con una variación de porosidad y permeabilidad, o propiedades constantes de cada uno de ellos. En este trabajo sólo se considera una capa.
- Se puede incluir una zona dañada, empleando un promedio armónico para la permeabilidad radial. Se considera daño mecánico nulo para este trabajo.
- Punto de burbujeo variable. En este estudio se consideran sistemas bajo saturados, por lo que esta opción no es aplicable.
- En sistemas naturalmente fracturados emplea el modelo de Warren y Root.
- El número de celdas en la dirección radial y vertical es variable, en este trabajo se emplearon de 60 a 90 celdas para la primera opción y una en la dirección vertical
- Emplea un método directo de solución del sistema matricial ( Yale ).
- La malla radial se genera por el método de Coats.

- No se considera efectos gravitacionales.
- La permeabilidad no es susceptible al esfuerzo ( se mantiene constante ).

Para realizar el estudio del efecto no laminar se hace uso de la ecuación de flujo de Forchheimer, la cual incluye tanto efectos Darcianos como no-Darcianos para describir el flujo de fluidos. Esta ecuación se describió en el Capítulo II y corresponde a la ecuación (II.4), donde el parámetro  $\beta$  se obtiene de la relación de Geertsma<sup>17</sup>, la cual para el caso de un líquido ligeramente compresible, en unidades de campo está dada por la ecuación (II.5).

Se observa que la ecuación de Forchheimer<sup>11</sup> contiene en primer término una componente laminar, seguida de otra no-laminar. De esta forma, cuando la velocidad de flujo se incrementa, la segunda componente aumenta en forma más importante en comparación con el primer término.

Los datos de declinación se generaron considerando  $p_{wf}$ , la presión de fondo fluyendo, constante. Este modo de producción se puede presentar, ya sea en yacimientos de baja permeabilidad o en yacimientos con una presión sujeta a una contrapresión constante en las instalaciones de separación o en la tubería de producción.

### *III.2. Validación Del Simulador Para El Caso Laminar.*

Para realizar la validación del simulador para el caso laminar, se comparó la respuesta del simulador con la respuesta tanto del modelo de Warren y Root<sup>30</sup>, como el de Da Prat et al.<sup>6</sup>. En la Figura III.1 se presenta una comparación de los resultados arrojados por el simulador y por la solución de los autores antes indicados, observándose que se obtienen muy buenas aproximaciones.

### *III.3. Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar En Yacimientos Fracturados.*

Se pueden considerar como las principales diferencias entre el caso laminar y el no laminar, considerando diferentes presiones de fondo fluyendo para el caso no laminar, mostradas en la Figura III.2, las siguientes:

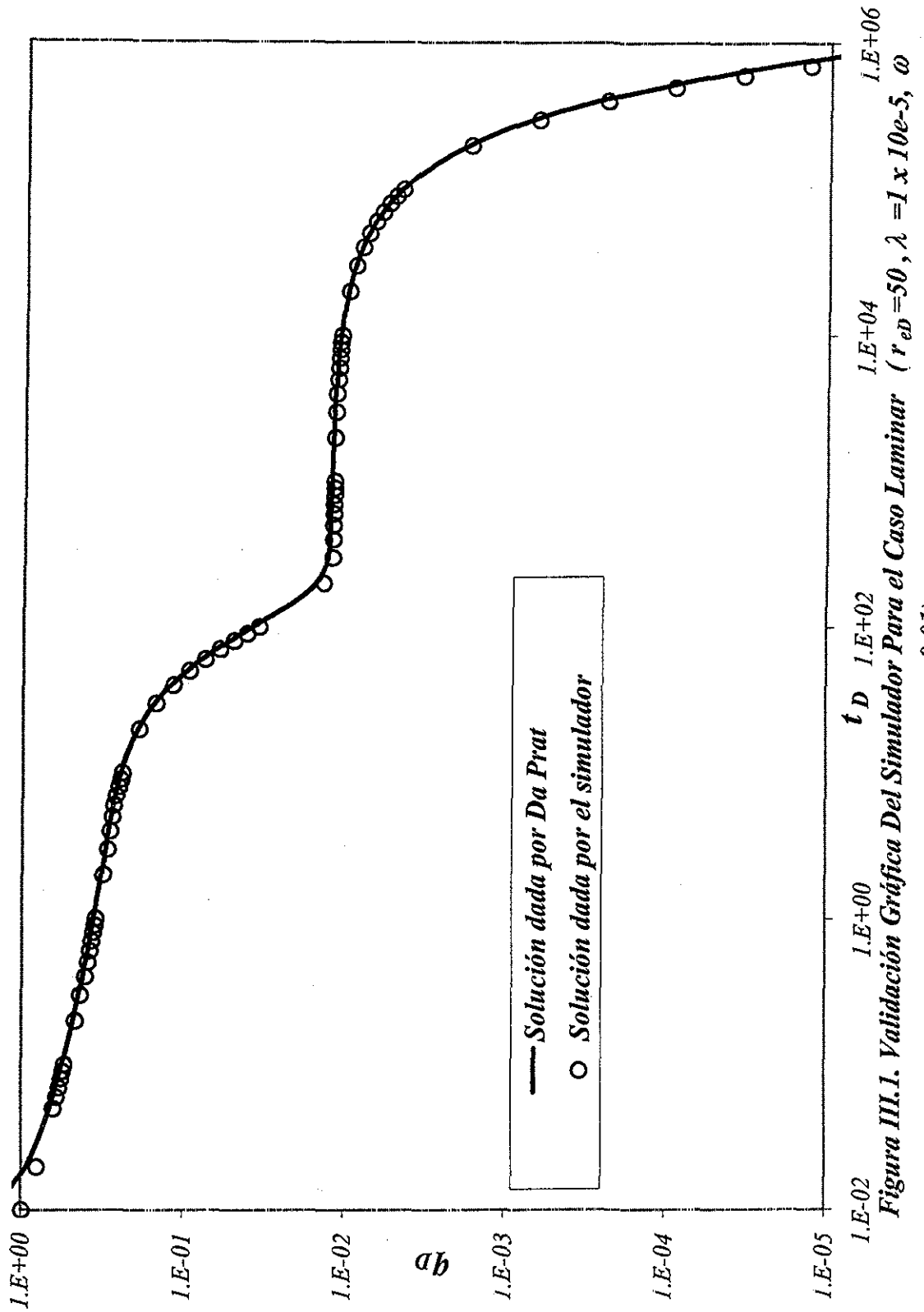


Figura III.1. Validación Gráfica Del Simulador Para el Caso Laminar ( $r_{eD} = 50$ ,  $\lambda = 1 \times 10e-5$ ,  $\omega = 0.01$ ).



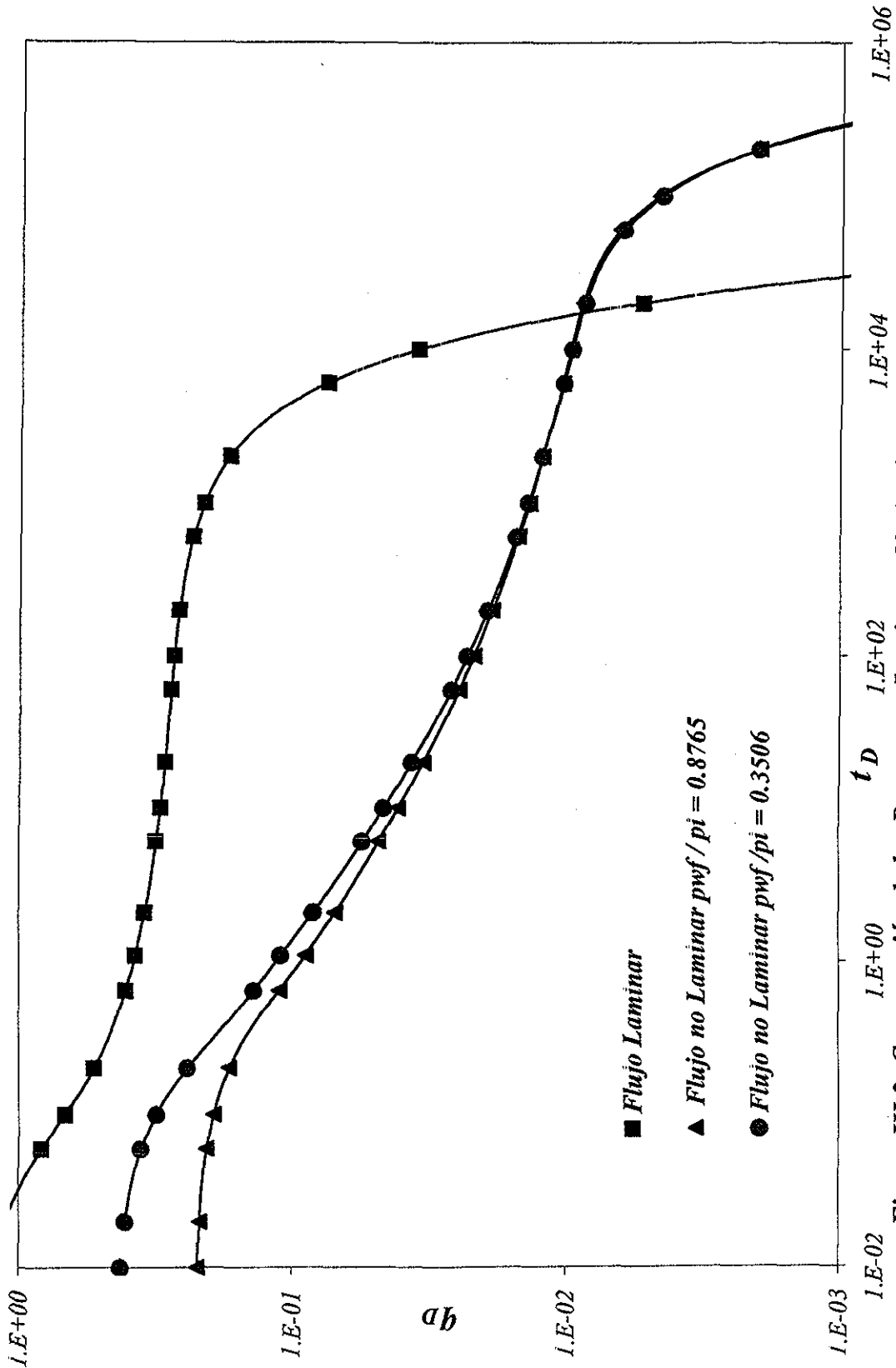


Figura III.2. Comparación de las Respuestas Laminar y No laminar a diferentes  $p_{wf}$ , ( $S=0$ ,  $r_{eD}=50$ ,  $\omega=0.001$ ,  $\lambda=1 \times 10^{-3}$ )

- En el periodo de flujo transitorio y parte del dominado por frontera los gastos en flujo laminar serán mayores que para flujo no laminar. Esta observación es similar a lo reportado por Camacho et al<sup>13</sup>, para yacimientos homogéneos.
- Al tener una presión de fondo fluyendo mayor, en el caso no laminar, se tendrán gastos mayores a tiempos cortos, haciéndose ésto más notorio para el caso en que  $\lambda$  sea mayor, pero en el periodo dominado por frontera y dependiendo de los valores de  $\lambda$  y  $\omega$ , se diferenciarán muy poco, sin embargo, se obtendrán gastos mayores para presiones de fondo fluyendo menores. Es decir la respuesta no laminar es dependiente de la presión de fondo a diferencia de la respuesta laminar.
- En un momento en el periodo de flujo dominado por frontera, los gastos no laminares serán mayores que el laminar, e incluso no se presentará la declinación final hasta un tiempo mayor que para flujo laminar.

Lo anterior se puede explicar por que a tiempos cortos si se considera flujo no laminar los gradientes de presión alrededor del pozo serán mayores, por lo que se tendrán mayores pérdidas de energía en flujo no Darciano, que en el Darciano por lo que se tendrán gastos menores en el primero que en el segundo. En el caso del periodo de flujo dominado por frontera, lo que ocurre se debe al hecho de que una cantidad mayor de aceite se encuentra en el yacimiento para el caso no-laminar que para el caso laminar, en este periodo de flujo se observa una respuesta mayormente influenciada por la cantidad de fluido presente en el yacimiento. Como los gastos iniciales fueron menores para el caso no laminar, el yacimiento tiene mayor cantidad de hidrocarburos almacenados cuando se presenta el periodo dominado por frontera por lo que los gastos en este periodo serán mayores.

#### *III.4. Comparación del Comportamiento de Las Curvas de Declinación con Flujo No Laminar versus Flujo Laminar Al Variar El Parámetro $\lambda$ En Yacimientos Fracturados.*

Las principales diferencias al comparar el comportamiento de las curvas de declinación con efectos laminares y no laminares al variar  $\lambda$  (manteniendo fijos los demás parámetros del yacimiento y de los fluidos), las cuales se observan en la Figura III.3, son las siguientes:

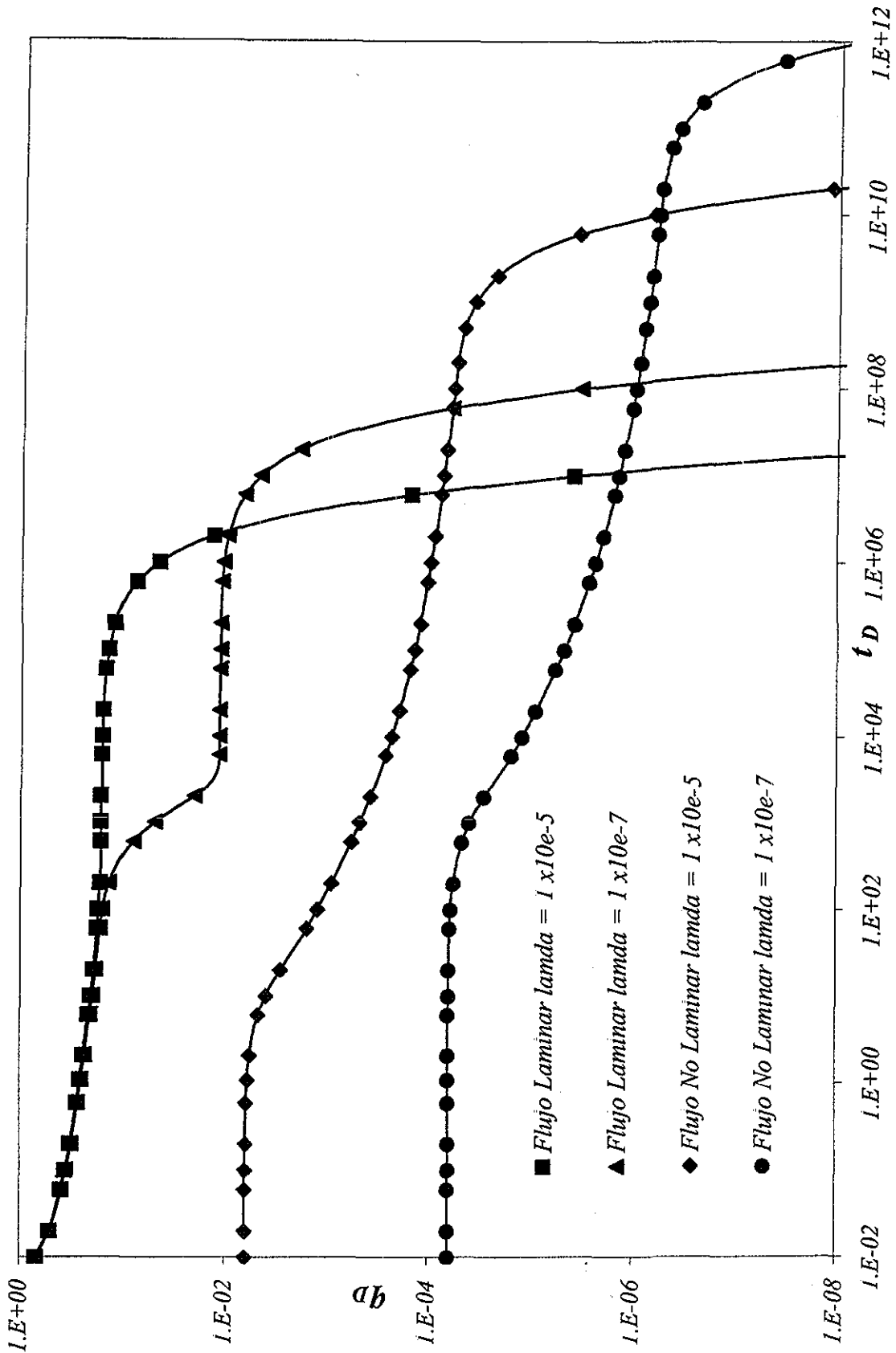


Figura III.3. Respuestas Laminares y No Laminares en un Yacimiento Naturalmente Fracturado al variar  $\lambda$ , ( $\omega = 0.001$ ,  $S = 0$ ,  $r_{eD} = 500$ ,  $p_{wf} / p_i = 0.8764$ ).

- Al inicio del periodo de flujo transitorio, a tiempos cortos, para el caso de flujo no laminar no parten de una curva común, a diferencia del caso laminar donde esto sí ocurre.
- Durante el periodo de flujo transitorio y parte del dominado por frontera los gastos serán mayores para el caso de flujo laminar que para el no laminar.
- Debido a la mayor producción inicial para el caso laminar, la producción no laminar se mantendrá por más tiempo que la laminar, y obviamente su declinación final se presentará mucho después, es decir se difiere la producción para el caso de flujo no-laminar.

El parámetro  $\lambda$  relaciona la permeabilidad de la matriz y de la fractura, y por lo tanto su valor dependerá de esta relación. Entre mayor sea el valor de  $\lambda$ , la permeabilidad de la matriz se acercará a la de la fractura, por lo que la matriz tendrá mayor facilidad de aportar hidrocarburos al sistema de fracturas, es por esto que en el periodo transitorio se tendrán gastos mayores si el valor de  $\lambda$  es mayor y viceversa. Pero como se consideró que el parámetro adimensional de almacenamiento en la fractura y  $r_{eD}$  son constantes, entonces el yacimiento bajo ambas condiciones tiene el mismo volumen de hidrocarburos original, por lo que al tener gastos mayores con  $\lambda$  mayor se tendrá una menor cantidad de hidrocarburos en el yacimiento en el periodo dominado por frontera, con lo cual la declinación final se presentará a un tiempo menor que cuando  $\lambda$  es menor.

### *III.5. Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar Al Variar El Parámetro $\omega$ En Yacimientos Fracturados.*

Las principales diferencias al comparar el comportamiento de las curvas de declinación con efectos laminares y no laminares al variar  $\omega$ , manteniendo los demás parámetros del yacimiento y del fluido constantes, las cuales pueden ser observadas en la Figura III.4, son:

- Los gastos son mayores para flujo laminar que para no laminar, durante el periodo de flujo transitorio y parte del dominado por frontera.

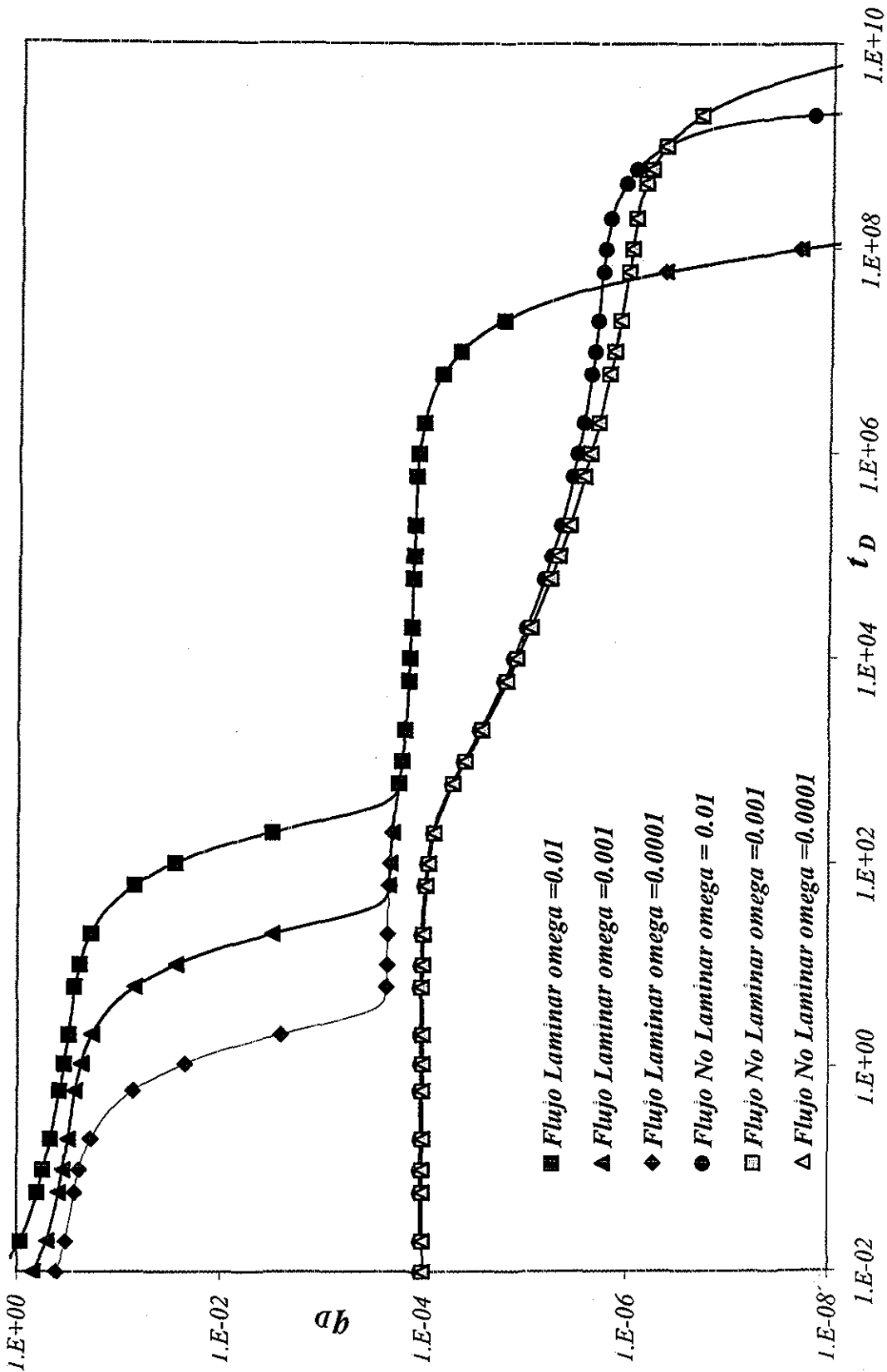


Figura III.4. Respuestas Laminares y No Laminares en un Yacimiento Naturalmente Fracturado al variar  $\omega$ , ( $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ ,  $S = 0$ ,  $r_{eD} = 500$ ,  $P_{wf}/P_i = 0.8764$ ).

- La producción no laminar se mantendrá por más tiempo que la laminar, y obviamente su declinación final se presentará mucho después.
- Las curvas laminares no tienen un origen común pero tienden a converger a una misma curva en el periodo de estabilización del gasto, cosa que no ocurre con el caso no laminar ya que parece que estas curvas, dependiendo del valor de  $\lambda$ , si tienen un origen común si el valor de  $\lambda$  es grande, o se tendrán gastos ligeramente mayores a  $\omega$  grandes para valores pequeños de  $\lambda$ . En este último caso ( $\lambda$  pequeñas), las curvas en el periodo dominado por frontera si muestran diferencias para diferentes valores de  $\omega$  para el caso no laminar.

El parámetro  $\omega$  relaciona la capacidad de almacenamiento de la fractura comparada con el sistema completo matriz-fractura, como a tiempos cortos se tiene el aporte preferencialmente de la fractura, entonces se tienen gastos ligeramente mayores si  $\omega$  es grande, lo que se mantendrá durante parte del periodo transitorio y el primer periodo de declinación. Después del primer periodo de declinación para el caso laminar no hay influencia del valor de  $\omega$ . Sin embargo, para el caso no laminar se tienen mayores gastos para valores mayores de  $\omega$  y durante el periodo final de declinación domina el fluido almacenado en la matriz, y por lo tanto el gasto se mantendrá por mayor tiempo.

### *III.6. Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar Al Variar El Parámetro $r_{eD}$ En Yacimientos Fracturados.*

Las principales diferencias al comparar el comportamiento de las curvas de declinación con efectos laminares y no laminares al variar  $r_{eD}$ , las cuales se observan en la Figura III.5, son:

- Gastos mayores para flujo laminar que para no laminar, durante el periodo de flujo transitorio y parte del dominado por frontera.
- La producción no laminar se mantendrá por más tiempo que la laminar, y obviamente su declinación final se presentará mucho después.
- Las curvas laminares tienen una curva común de origen pero dependiendo de su radio de drene se separarán al irse produciendo las declinaciones exponenciales. En el caso no

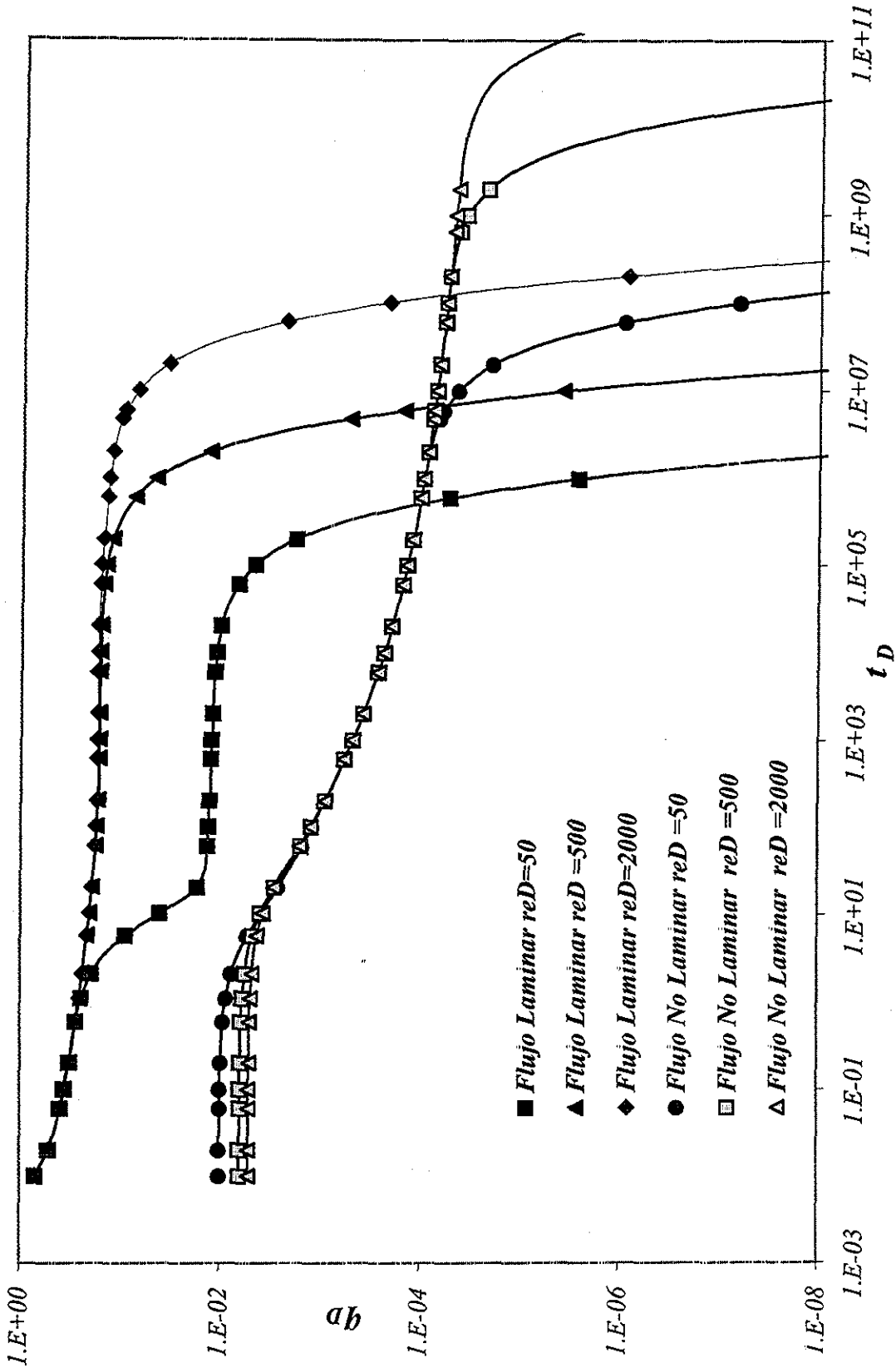


Figura III.5. Respuestas Laminares y No Laminares en un Yacimiento Naturalmente Fracturado al variar  $r_{eD}$  ( $\omega = 0.001$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ ,  $S=0$ ,  $p_{wf}/p_i = 0.8764$ ).

laminar a tiempos cortos no sucede ésto, las curvas están separadas hasta el inicio del primer periodo de declinación ( parabólico ). Durante el segundo periodo de declinación se presenta el mismo comportamiento que para flujo laminar pero a tiempos mucho mayores.

A tiempos cortos se tienen que para el comportamiento no laminar se presentan gastos mayores a menor  $r_{eD}$  , ésto se debe principalmente a que el flujo a estos tiempos es preferencialmente por las fracturas, pero aquí la matriz tiene un papel fundamental ya que si el radio de drene es pequeño, la matriz iniciará a aportar hidrocarburos más rápido que cuando el radio de drene es mayor, por lo que a estos tiempos la matriz tendrá mayor aporte en cuanto menor sea el  $r_{eD}$  . La declinación final se presenta similar a la que se observa en el caso laminar.

### *III.7. Comparación Del Comportamiento De Las Curvas De Declinación Con Flujo No Laminar Versus Flujo Laminar En El Periodo De Flujo Transitorio En Yacimientos Fracturados.*

Las principales diferencias al comparar el comportamiento de las curvas de declinación con efectos laminares y no laminares durante el periodo transitorio, algunas de las cuales se observan en la Figura III.6, son:

- La respuesta de  $1/q_D$  será mayor para flujo no-laminar que para laminar, durante el periodo de flujo transitorio y la primera parte del dominado por frontera.
- El tiempo que tarda en alcanzar el periodo dominado por frontera es mayor en el caso no-laminar.
- Se observa una sola respuesta semilogarítmica lineal para el caso laminar, mientras que dependiendo de la  $p_{wf}$ , se tendrán diversas respuestas no-laminares.
- Las respuestas no laminares tendrán una tendencia aproximadamente lineal semilogarítmica con pendientes mucho mayores que la laminar, y dependiendo de los parámetros que definen al yacimiento de doble porosidad las rectas se cruzarán antes de alcanzar el periodo dominado por frontera.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



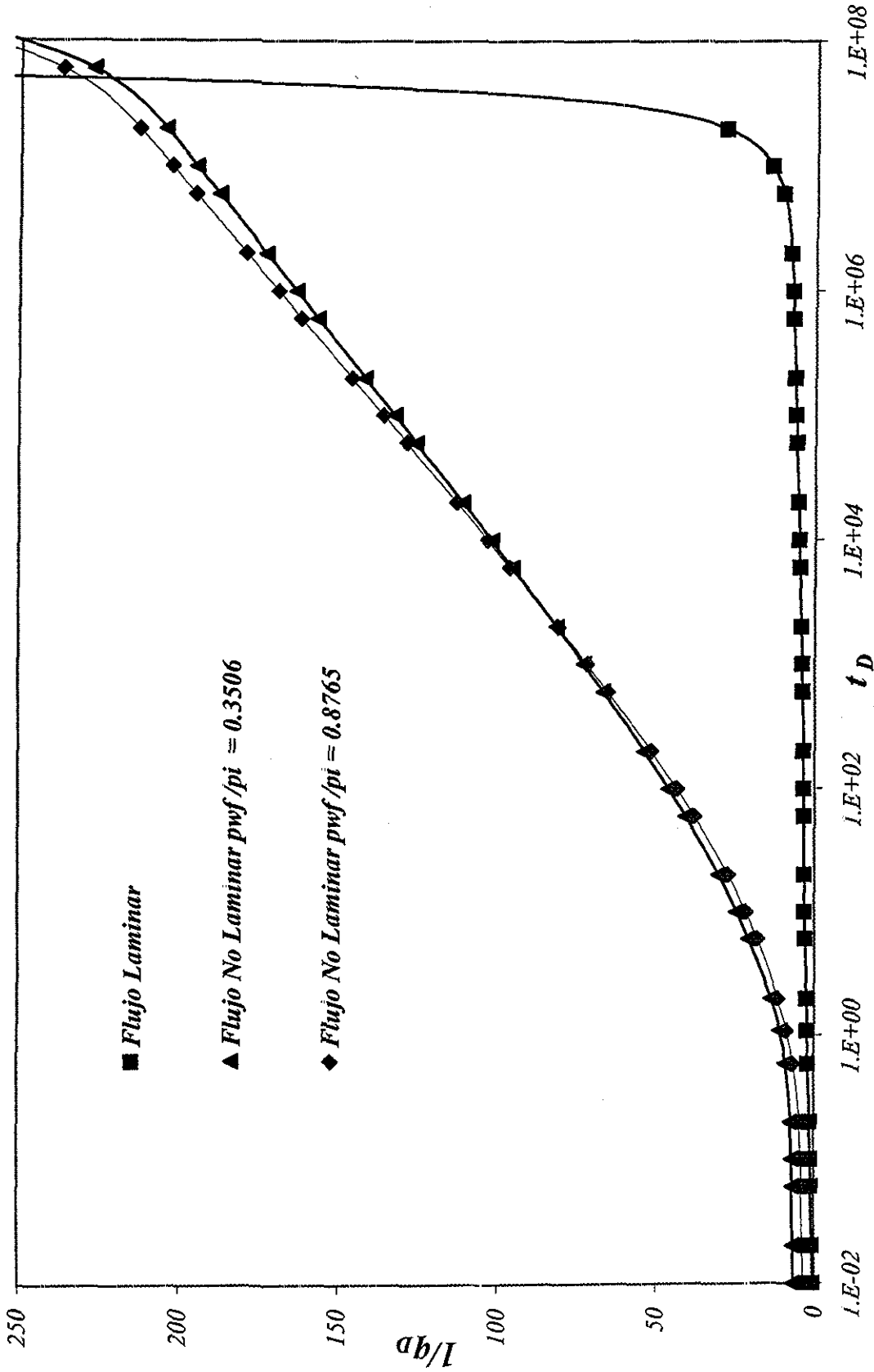


Figura III.6. Respuestas Laminares y No Laminares en un Yacimiento Naturalmente Fracturado Durante el Periodo Transitorio al variar  $p_{wf}$ , ( $\omega = 0.01$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-3}$ ,  $S=0$ , ).

Al ser más pequeña la presión de fondo fluyendo se esperan velocidades más altas de flujo en la zona cercana al pozo, por lo cual la componente no laminar de la ecuación de Forchheimer se incrementa en valor.

El parámetro que tiene mayor influencia en la respuesta no laminar durante el periodo transitorio es  $\lambda$ , ya que la respuesta depende en gran medida de su valor, lo que se observa en la Figura III.7. A mayor valor de  $\lambda$ , las respuestas a tiempos cortos tendrán menor valor de  $1/q_D$  y viceversa. Entre mayor sea el valor de  $\lambda$ , la permeabilidad de la matriz se acercará a la de la fractura, por lo que la matriz tendrá una facilidad mayor de aportar hidrocarburos al sistema de fracturas, por lo que en el periodo transitorio se tendrán gastos mayores si el valor de  $\lambda$  es mayor y por consiguiente menores valores de  $1/q_D$ .

El parámetro  $\omega$  tiene una influencia, en flujo no laminar, dependiente del valor de  $\lambda$ , a valores grandes de  $\lambda$  las curvas tienden a unirse (Figura III.8), pero a medida que este valor es más pequeño las curvas tienden a separarse, sobretodo si el valor de  $\omega$  tiende a la unidad, y el valor de  $\lambda$  es muy pequeño. El parámetro  $\omega$  relaciona la capacidad de almacenamiento de la fractura comparada con el sistema completo matriz-fractura, como a tiempos cortos se tiene el aporte preferencialmente de la fractura, entonces se tienen gastos ligeramente mayores si  $\omega$  es grande, lo que se mantendrá durante el periodo transitorio y el primer periodo de declinación, teniéndose mayores gastos para valores mayores de  $\omega$ .

Para el caso laminar se puede observar una pendiente característica de 1.151, para los periodos de respuesta radial, pero en el caso del flujo no laminar, las pendientes de las tendencias rectas, están muy alejadas del valor característico.

### III.8. Análisis De Datos No Laminares, Con Curvas Tipo Para Flujo Laminar.

Si se intenta realizar un ajuste de datos de gastos en yacimientos fracturados con flujo no laminar, empleando curvas tipo desarrolladas para flujo laminar, con datos obtenidos durante toda la vida productiva del pozo, no es posible realizar un ajuste con ninguna curva tipo laminar. Sin embargo, si se contara con datos solamente del periodo dominado por frontera, se realizaría el ajuste dependiendo del número de datos que se tengan, tal y como se muestra en la Figura III.9. Ahora bien si se considera que los ajustes realizados son correctos, y se

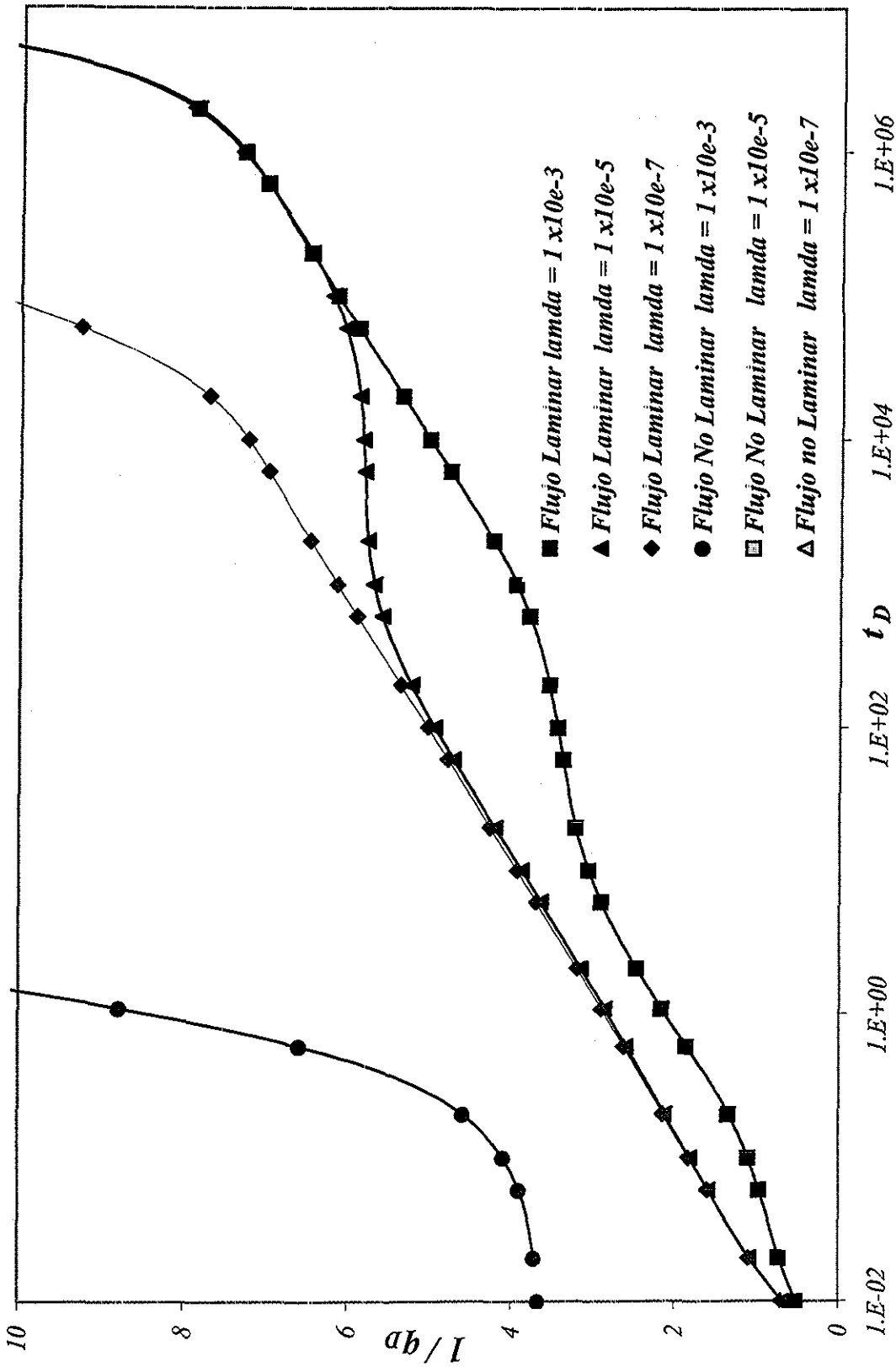


Figura III.7. Influencia de la Variación de  $\lambda$  en las Respuestas Laminares y No Laminares Durante el Periodo Transitorio en un Yacimiento Naturalmente Fracturado ( $\omega = 0.01, r_{eD} = 2000, S=0, p_{wf}/p_i = 0.8764$ ).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

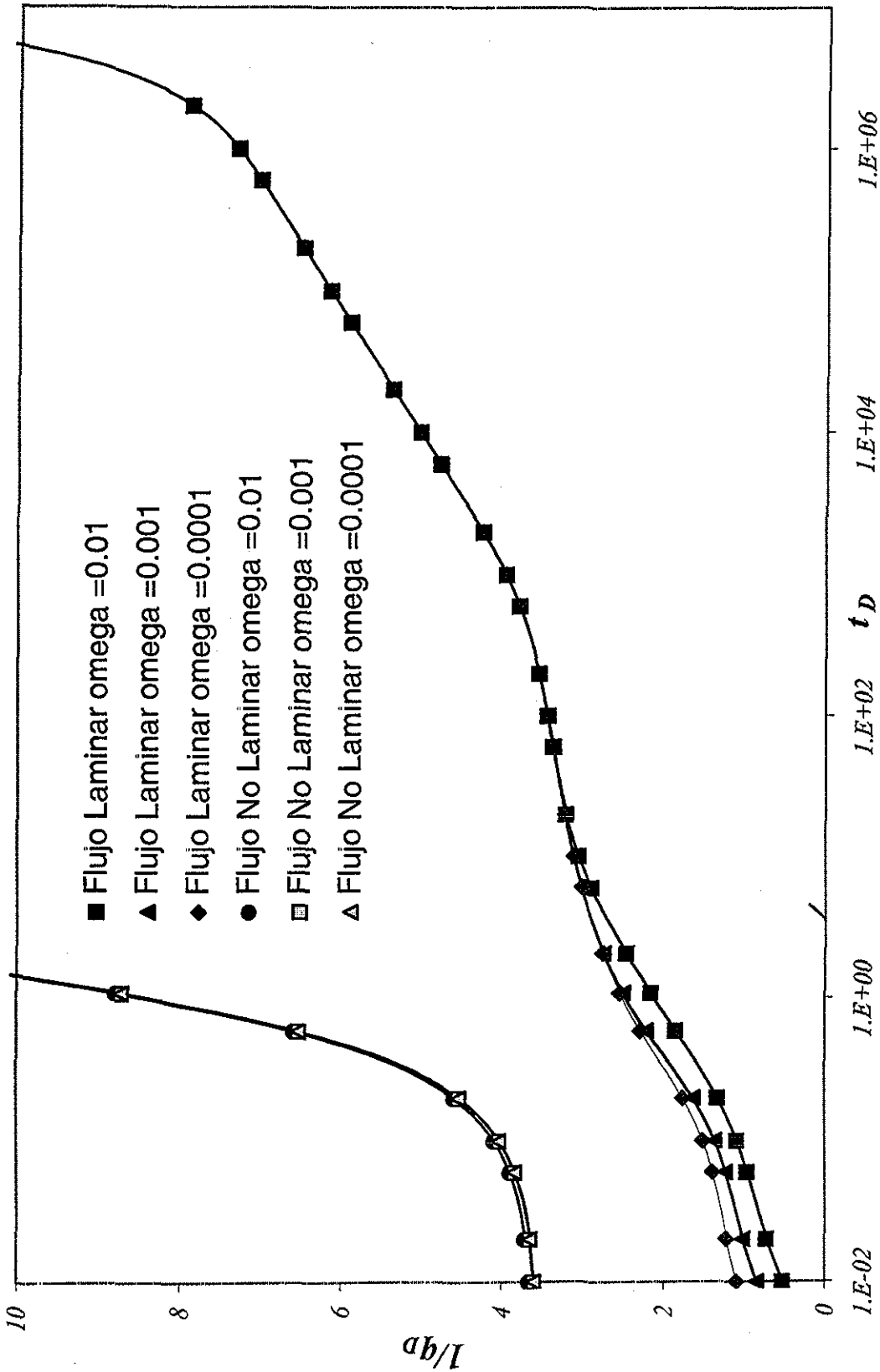


Figura III.8. Influencia de la Variación de  $w$  en las Respuestas Laminares y No Laminares Durante el Periodo Transitorio en un Yacimiento Naturalmente Fracturado ( $\lambda = 1 \times 10^{-3}$ ,  $r_{eD} = 2000$ ,  $S = 0$ ,  $p_{wf}/p_i = 0.8764$ ).

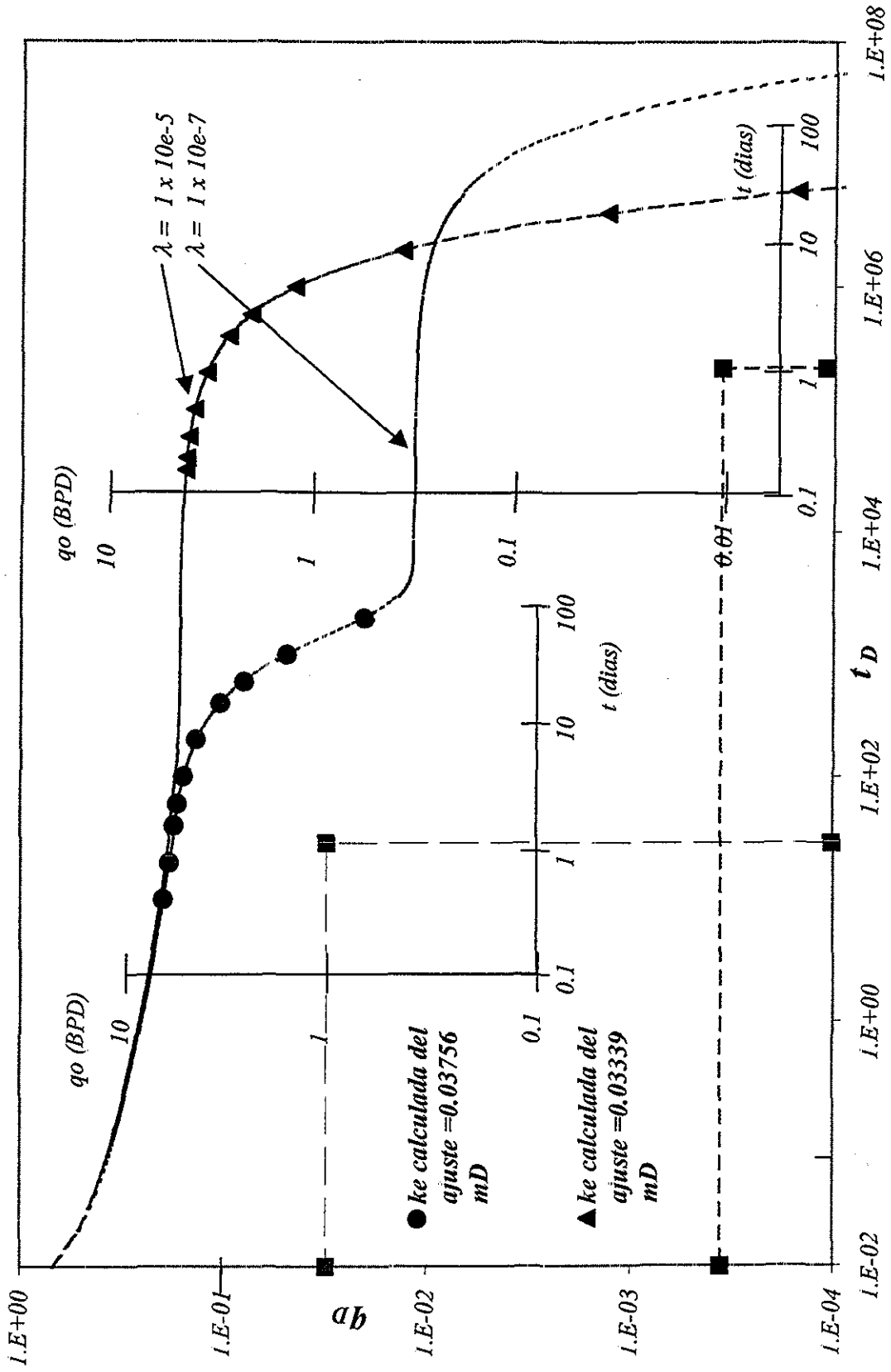


Figura III.9. Ajustes por Curva Tipo de Da Prat, Datos No Laminares en Sistemas de Doble Porosidad ( $r_{eD} = 500$ ,  $\omega = 0.001$ ,  $S=0$ ,  $p_{wf}/p_i = 0.8764$ ).

calcula la permeabilidad efectiva,  $k_e$ , se tendría que la  $k_e$  obtenida por el primer ajuste sería igual a 0.03756 mD, y para el segundo ajuste 0.03339 mD, pero de acuerdo con los datos de simulación empleados  $k_e = 100$  mD, por lo que el error asociado es muy grande, lo que obviamente se tiene que bajo estas consideraciones los ajustes no serían confiables.

### *III.9. Producción Acumulada Para Flujo No Laminar.*

El comportamiento de la producción acumulada adimensional para los casos laminar y no laminar se observan en la Figura III.10, durante un periodo de tiempo la recuperación total será mayor para el caso laminar, pero se alcanzará un tiempo, donde la producción acumulada para flujo no laminar será igual a la laminar, es decir que la recuperación total final será la misma para ambos casos pero se alcanzarán a diferentes tiempos, por lo que para estas condiciones se deben considerar las estrategias de explotación así como el punto de vista económico. Es decir cuando existe flujo no laminar en el yacimiento se difiere la producción. Nótese que la escala empleada de tiempo es logarítmica, por lo que la diferencia en tiempo para alcanzar la recuperación final puede ser muy grande (órdenes de magnitud mayores para el caso no laminar).

### *III.10. Normalización De Datos No Laminares.*

Al realizar una normalización del tiempo adimensional, dividiendo la producción acumulada sobre el gasto se puede observar en una gráfica doble logarítmica de  $q_D$  vs  $Q_D/q_D$ , lo que se muestra en la Figura III.11, que los efectos no laminares tienen gran influencia durante la mayor parte de la vida productiva del pozo, estos efectos se observan por la diferencia de las curvas laminar y no laminar en la gráfica antes señalada, pero después de determinado valor de  $Q_D/q_D$ , las curvas laminar y no laminar se unen, lo que indica que se tiene flujo laminar en ambos casos.

### *III.11. Cálculo Del Área De Drene.*

A continuación se mostrarán los cálculos realizados para obtener el área de drene por el método propuesto por Ehlig-Economides<sup>10</sup>, tanto con datos en flujo laminar como en no-laminar.

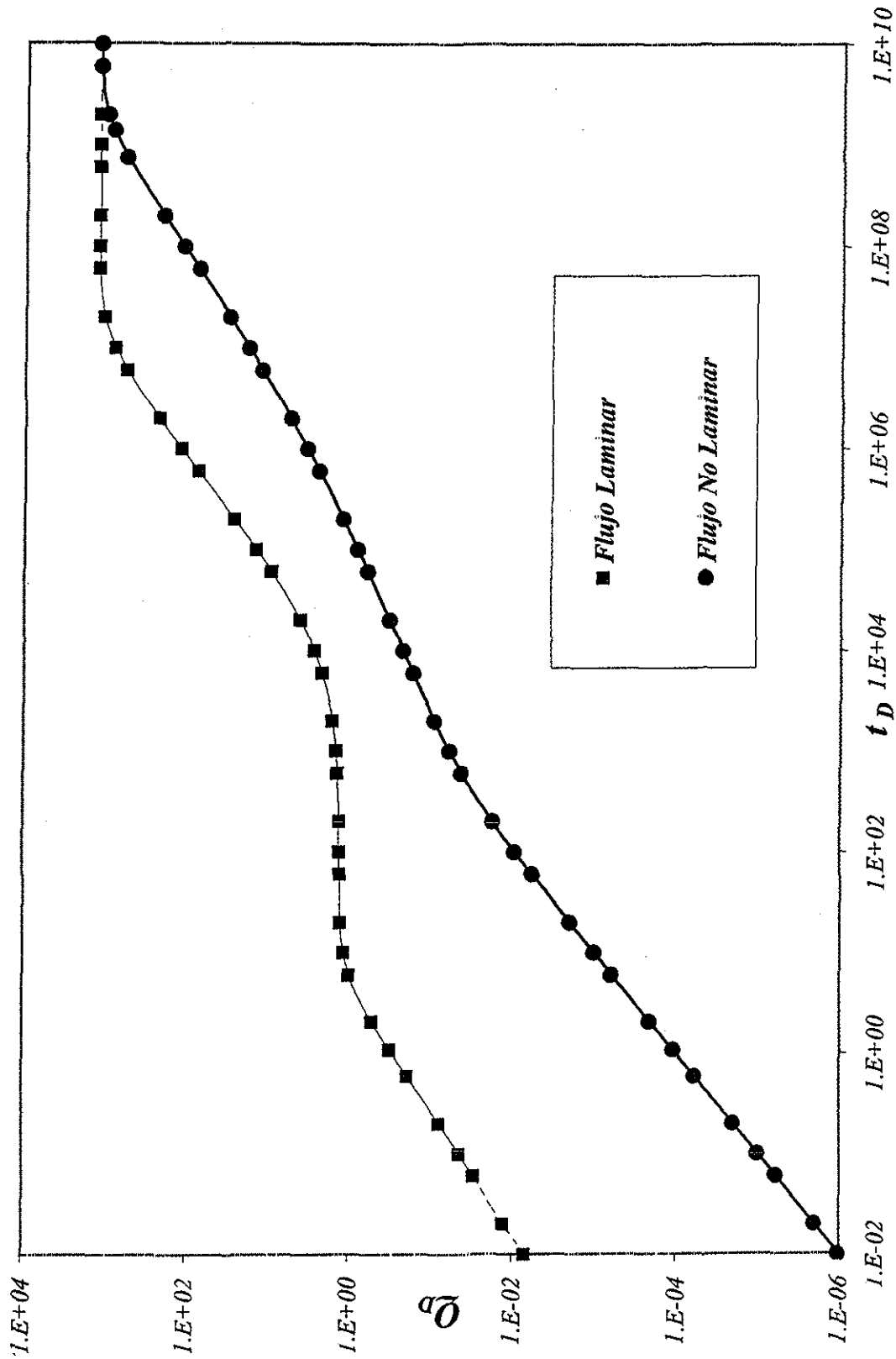


Figura III.10. Producción Acumulada para Casos Laminar Y No Laminar en un Yacimiento Naturalmente Fracturado ( $r_{eD} \approx 50$ ,  $\lambda = 1 \times 10e-7$ ,  $\omega = 0.001$ ).

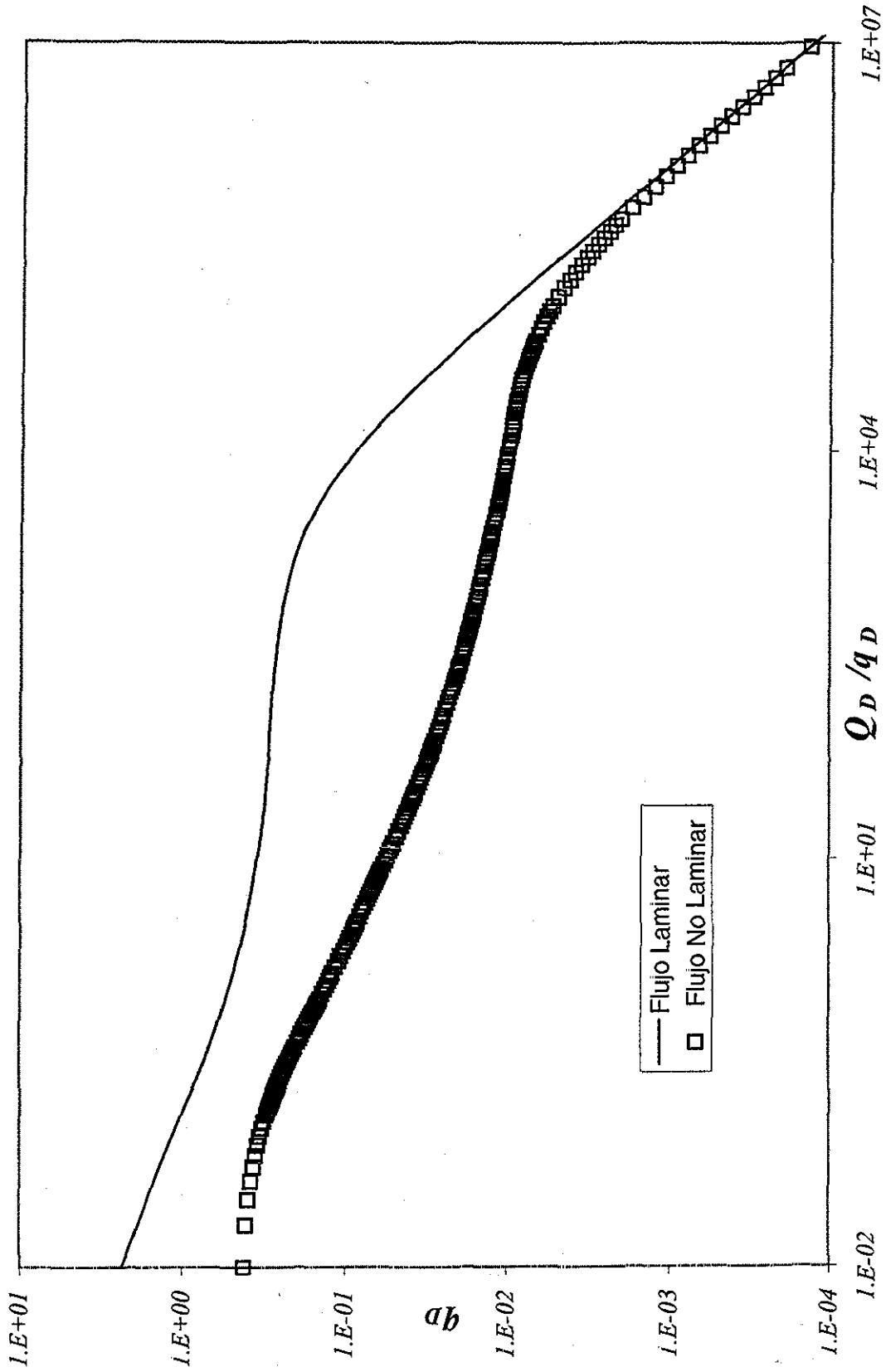


Figura III.11. Normalización de Datos Laminares y No Laminares, en un Yacimiento de Doble Porosidad, ( $S=0$ ,  $r_{eD}=50$ ,  $\omega=0.01$ ,  $\lambda=1 \times 10e-3$ )



El área real buscada es de un yacimiento limitado de radio de drene igual a 250 pies, y los datos de gastos fueron obtenidos mediante simulación tanto para el caso laminar como no laminar.

Los datos comunes para los cálculos se presentan en la tabla II.

$\phi_m + \phi_f$	0.1
$c_t$	$1 \times 10^{-6} \text{ pg}^2 / \text{lb}$
$h$	50 pies
$p_i$	$5704.8 \text{ lb} / \text{pg}^2$
$B_o$	1.0

TABLA II. PARÁMETROS COMUNES PARA LOS AJUSTES REALIZADOS POR EL MÉTODO DE EHLIG-ECONOMIDES

Para el cálculo del área real se emplea la ecuación del área de un círculo:

$$A = \pi r_e^2 \tag{III.1}$$

entonces:

$$A = \pi(250 \text{pies})^2 = 1.96349 \times 10^5 \text{pies}^2$$

Empleando el método de Ehlig-Economides<sup>10</sup>, se emplea un factor de 5.6150 en la ecuación (II.46) y se multiplica  $q_{int}$  por el factor de volumen del aceite, para emplear unidades de campo.

Se muestran a continuación dos ejemplos no laminares y uno laminar, en los cuales se calcula el área de drene por el método antes señalado así como su error asociado, para verificar la validez de estas ecuaciones bajo condiciones de flujo no laminares. En las Figuras III.12 y III.13 se muestran los ajustes de los datos para obtener los parámetros necesarios de la recta

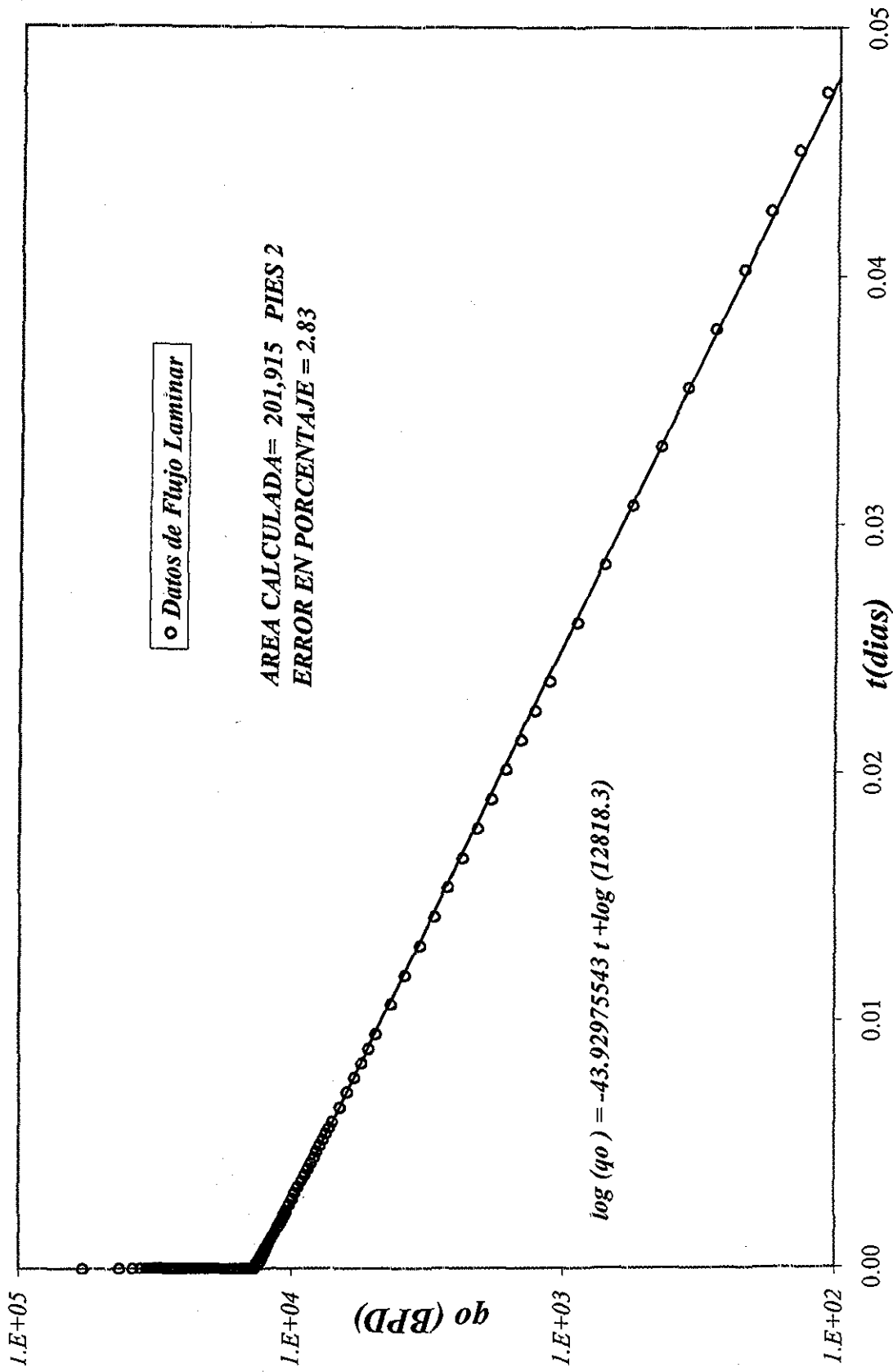


Figura III.12. Ajuste Para Calcular el Area Para un Caso Laminar en un Yacimiento Naturalmente Fracturado, ( $\omega = 0.001, S=0, r_{eD} = 500, \lambda = 1 \times 10^{-5}$ ).

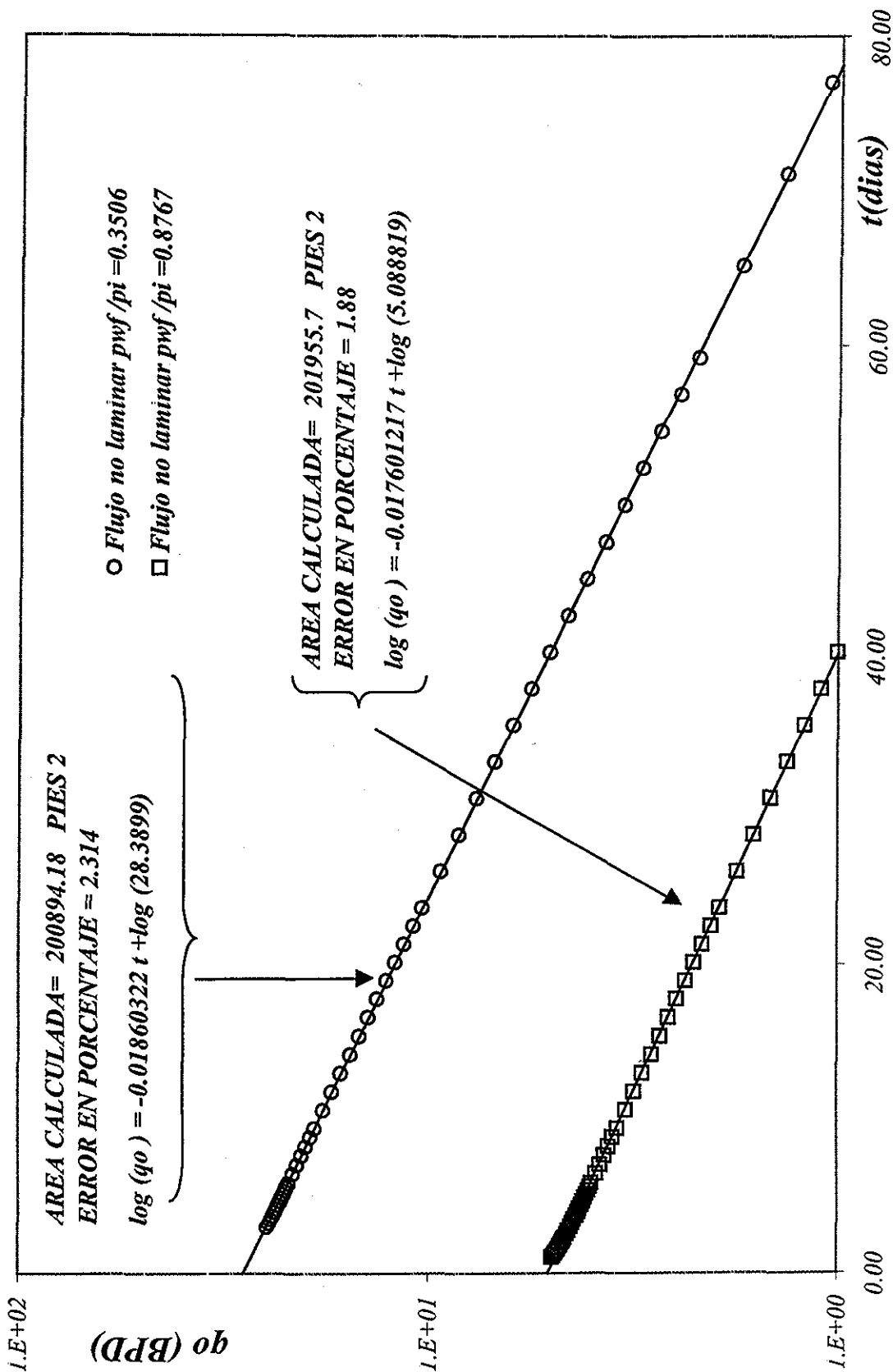


Figura III.13. Ajuste Para Calcular el Area Para Casos No Laminares en un Yacimiento Naturalmente Fracturado, ( $\omega = 0.001, S=0, r_{eD} = 500, \lambda = 1 \times 10^{-5}$ ).

en la gráfica  $\log (q_o)$  vs  $t$ , para cada caso. Es importante señalar que para realizar el ajuste se emplearon datos pertenecientes al último periodo de declinación exponencial.

• CASO LAMINAR

$$m' = 43.92975543 \text{ ciclo / día}$$

$$q_{int} = 12818.3 \text{ bl / día}$$

$$p_{wf} = 5000 \text{ lb / pg}^2$$

$$A = \frac{(12818.3 \text{ bl / día})(5.615 \text{ pies}^3 / \text{bl})(1.0)}{(43.92975 \text{ ciclo / día})(0.1)(1 \times 10^{-6} \text{ pg}^2 / \text{lb})(\ln 10)(5704.8 \text{ lb / pg}^2 - 5000 \text{ lb / pg}^2)(50 \text{ pies})} =$$

$$A = 2.01915 \times 10^5 \text{ pies}^2$$

El error asociado para este caso es 2.83 %

• CASO NO LAMINAR I.

$$m' = 0.018603221 \text{ ciclo / día}$$

$$q_{int} = 28.3894 \text{ bl / día}$$

$$p_{wf} = 2000 \text{ lb / pg}^2$$

$$A = \frac{(28.3894 \text{ bl / día})(5.615 \text{ pies}^3 / \text{bl})(1.0)}{(0.018603221 \text{ ciclo / día})(0.1)(1 \times 10^{-6} \text{ pg}^2 / \text{lb})(\ln 10)(5704.8 \text{ lb / pg}^2 - 2000 \text{ lb / pg}^2)(50 \text{ pies})} =$$

$$A = 2.00894 \times 10^5 \text{ pies}^2$$

El error asociado para este caso es 2.314 %

• CASO NO LAMINAR II

$$m' = 0.017601217 \text{ ciclo / día}$$

$$q_{int} = 5.08819 \text{ bl / día}$$

$$p_{wf} = 5000 \text{ lb / pg}^2$$

$$A = \frac{(5.08819 \text{ bl / dia})(5.615 \text{ pies}^3 / \text{bl})(1.0)}{(0.017601217 \text{ ciclo / dia})(0.1)(1 \times 10^{-6} \text{ pg}^2 / \text{lb})(\ln 10)(5704.8 \text{ lb / pg}^2 - 5000 \text{ lb / pg}^2)(50 \text{ pies})} =$$

$$A = 2.00040 \times 10^5 \text{ pies}^2$$

El error asociado para este caso es 1.88 %

Como se observa en los cálculos anteriores, aún bajo la influencia de flujo no Darciano, se obtienen valores confiables del área de drene, con lo que se comprueba que a tiempos largos en una declinación exponencial, los efectos inerciales tienden a desaparecer.

## IV . SOLUCIONES ANALÍTICAS.

En las secciones anteriores se revisaron las bases y los comportamientos al tener flujo laminar y no laminar en yacimientos naturalmente fracturados considerando flujo laminar o no laminar. En la presente sección se presentan los desarrollos realizados para obtener una aproximación a las soluciones buscadas.

### IV.1. Ecuaciones Básicas.

En el capítulo anterior se presenta el sistema de ecuaciones básicas para flujo de fluidos en formaciones fracturadas, basadas en un modelo presentado originalmente por Warren y Root<sup>30</sup> en 1953. En términos de las variables adimensionales (presión, tiempo y radio) las ecuaciones diferenciales parciales fundamentales para el caso de flujo laminar son:

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = (1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} + \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}, \quad (II.11)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} = \lambda (p_{fD} - p_{mD}), \quad (II.12)$$

donde  $\lambda$  y  $\omega$  están dadas por las ecuaciones (II.14) y (II.13), respectivamente.

Para el caso de flujo no Darciano, las ecuaciones básicas tomadas de Villalobos<sup>13</sup> son:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\beta_D \left| \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right|}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) = (1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} + \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}, \quad (IV.1)$$

Conjuntamente con (II.12) y donde :

$$\beta_D = \frac{k\rho q}{2\pi r_w h \mu}, \quad (IV.2)$$

Lo que se observa de la ecuación (IV.1) es la dificultad que involucra tratar de solucionar el problema en términos de la presión adimensional, por lo que se procedió a tratar de resolverla

involucrando variables que transformaran las ecuaciones a una forma más sencilla y manejable, lo que llevó a trabajar con las velocidades<sup>23</sup>, en el Apéndice A se presentan los desarrollos realizados para transformar el sistema de ecuaciones (IV.1) y (II.12), empleando la ecuación de Forchheimer<sup>11</sup> en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} = \lambda \left( V_f \left[ 1 + \frac{\delta V_f}{2} \right] - V_m \right) \quad (IV.3)$$

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial V_f}{\partial r_D} \right) - \frac{V_f}{r_D^2} = (1 + \delta V_f) \omega \frac{\partial V_f}{\partial t_D} + (1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} \quad (IV.4)$$

Donde:

$$\delta = \alpha k_f = \frac{2\beta\rho(k_f)^2}{\mu} \quad (IV.5)$$

$$V_m = \frac{v_m}{k_m}, y, V_f = \frac{v_f}{k_f} \quad (IV.6)$$

#### IV.2. Solución Flujo Estacionario.

El desarrollo para la solución de flujo estacionario se muestra en el Apéndice F, donde se tiene en términos de variables reales:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots \text{donde } i = f, m \quad (IV.7)$$

Por lo que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_f) = 0 \quad (IV.8)$$

Solucionando la ecuación (IV.8) por separación de variables y aplicando las siguientes condiciones de frontera:

$$p_f|_{re} = p_i \quad (IV.9)$$

$$p_f|_{rw} = p_{wf} \quad (IV.10)$$

Se obtiene:

$$q_o = \frac{\mu}{2k_f} \frac{\left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]} \left[ \sqrt{1 + 4 \frac{(p_i - p_{wf}) k_f \beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]}{\mu^2 \ln^2 \left[ \frac{r_e}{r_w} \right]} - 1} \right] 2\pi h \quad (IV.11)$$

La ecuación (IV.11) es la solución de gasto para un flujo de líquido no Darciano en un yacimiento naturalmente fracturado con flujo estacionario, en la figura IV.1 se presenta el empleo de la ecuación al compararse con el modelo de simulación en términos de variables adimensionales.

La ecuación (IV.11) se puede reorganizar, si se tiene un estimado de  $r_e$ , para obtener :

$$k_f \beta = \frac{4(p_i - p_{wf}) (\pi h)^2 \left( \frac{\pi h}{q_o} \right)^2}{\rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]} - \frac{2\pi h \mu \left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{q_o \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]} \quad (IV.12)$$

### IV.3. Método De Solución Para Flujo Transitorio Y Dominado Por Frontera.

Al observar el sistema dado por (IV.3) y (IV.4) se observa que es un sistema no lineal, por lo que los métodos tradicionales (Separación de variables, funciones de Green , Transformada de Laplace) de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no permitirán solucionarlo, por lo que antes de definir las condiciones de frontera para el problema, se procede a revisar los diferentes métodos que pueden permitir la solución del mismo, se observó que la combinación de los métodos perturbación<sup>40,49</sup>, Transformada de Laplace<sup>42,44</sup> y variación de parámetros<sup>40,41,42</sup> permiten obtener una aproximación a la solución.

El método de perturbación<sup>40</sup> es aplicable a ecuaciones diferenciales con un parámetro pequeño, su aplicación se basa en la idea de que cuando una ecuación es cambiada por una cantidad pequeña solamente, la solución cambiará sólo por una pequeña cantidad; el método produce una serie de términos de magnitud decreciente que aproximan a la solución de la ecuación diferencial original; el procedimiento de aplicación consiste en expandir la variable dependiente en una serie de potencias dependiente del parámetro pequeño en el problema. Sustituir esta serie en la ecuación original, las condiciones de frontera y las condiciones



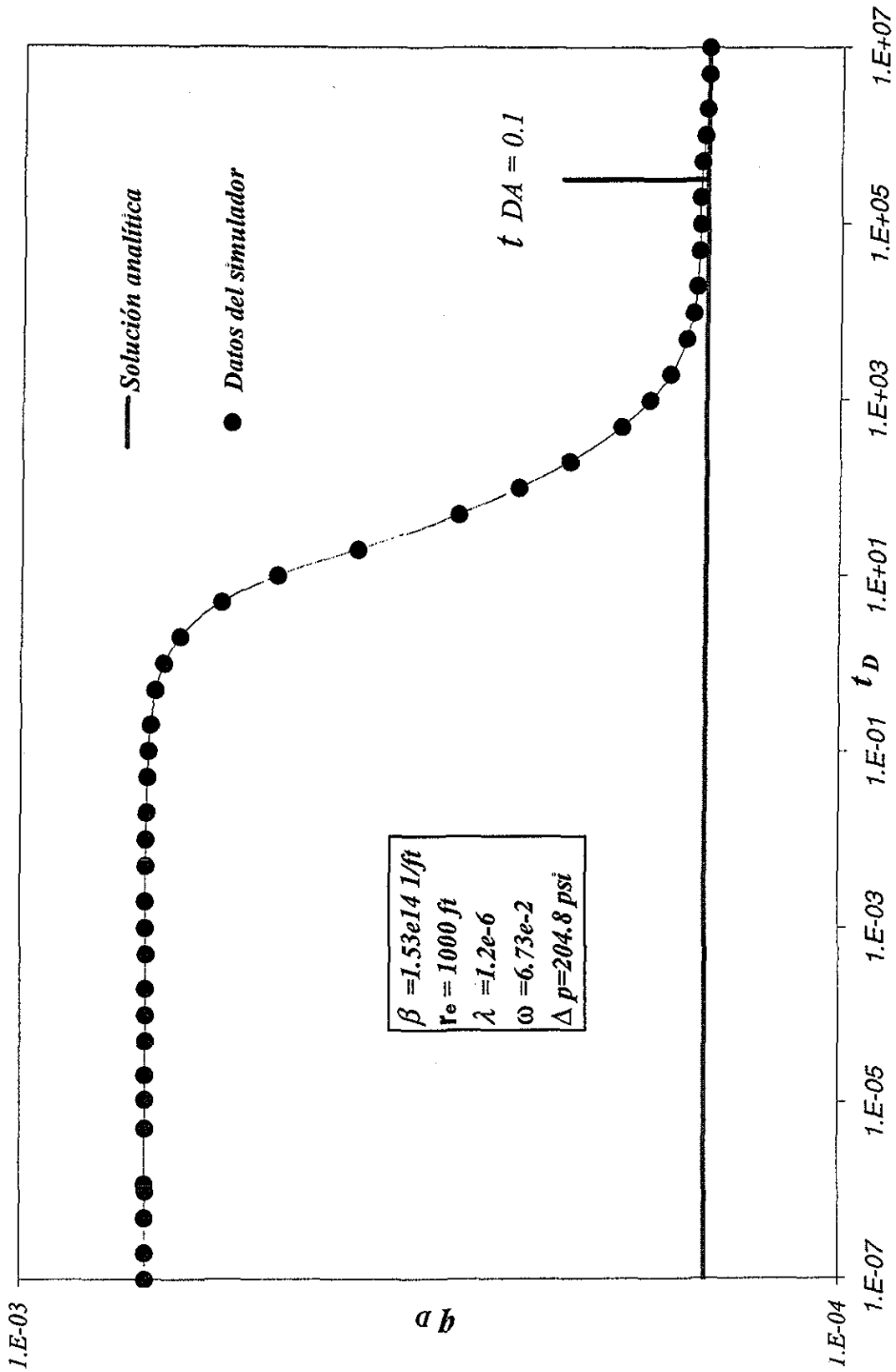


Figura IV.1. Comparación Solución Analítica con Datos del Simulador para Flujo Estacionario

iniciales. Expandir todos los términos involucrados en la ecuación, igualar los términos correspondientes a las diferentes potencias del parámetro pequeño, y solucionar las ecuaciones resultantes secuencialmente, en el proceso se pueden despreciar potencias grandes del parámetro pequeño.

La aplicación del método de perturbación se muestra en el Apéndice B, empleando el parámetro de perturbación:

$$\varepsilon = \frac{\lambda \delta}{2} \quad (\text{IV.13})$$

Y considerando que:

$$V_f = V_0 + \varepsilon V_1 \quad (\text{IV.14})$$

El proceso que se siguió fue sustituir la ecuación (IV.14) en el sistema dado por (IV.3) y (IV.4), aplicar la transformada de Laplace a ambas ecuaciones, despejar la velocidad transformada en la matriz de una ecuación y sustituirla en la otra, para posteriormente agrupar las potencias de  $\varepsilon$  en la ecuación resultante, lo que produjo:

$$\lambda \frac{d^2 \bar{V}_0}{dr_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{d\bar{V}_0}{dr_D} = \omega \lambda u \bar{V}_0 + (1 - \omega) \lambda u \frac{\lambda \bar{V}_0}{\lambda + u(1 - \omega)} + \lambda \frac{\bar{V}_0}{r_D^2} \quad (\text{IV.15})$$

, para  $\dots \varepsilon^0$

$$\lambda \frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{d\bar{V}_1}{dr_D} = \omega \lambda u \bar{V}_1 + \omega u \bar{V}_0^2 + (1 - \omega) \lambda u \frac{\lambda \bar{V}_1}{\lambda + u(1 - \omega)} + (1 - \omega) \lambda u \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda + u(1 - \omega)} + \lambda \frac{\bar{V}_1}{r_D^2} \quad (\text{IV.16})$$

para  $\dots \varepsilon^1$

Como  $\varepsilon$  es muy pequeño se despreciaron los términos elevados a las potencias 2 y 3, con lo cual se tiene un sistema de ecuaciones (IV.15) y (IV.16) con dos incógnitas  $\bar{V}_0$  y  $\bar{V}_1$ , ya que al solucionar (IV.15) obtendremos  $\bar{V}_0$  se antitransforma, se eleva al cuadrado y se vuelve a transformar para obtener  $\bar{V}_1$ .

La ecuación (IV.15) es una ecuación lineal y homogénea por lo que su solución es relativamente fácil, mientras que la ecuación (IV.16) debe solucionarse mediante variación de parámetros una vez obtenida la solución de (IV.15), las soluciones para estas ecuaciones son:

$$\bar{V}_0 = A \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + B \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (IV.17)$$

La solución  $\bar{V}_0$  corresponde a la solución para flujo laminar.

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 = & C \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + D \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \\ & + I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_1^{r_D} K_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u \lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda \lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx + \\ & - K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_1^{r_D} I_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u \lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda \lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Tanto la solución (IV.17) y (IV.18) se desarrollaron en el Apéndice B, para encontrar el valor de las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se aplicó perturbación y posteriormente transformada de Laplace a las condiciones de frontera, para el caso de un yacimiento circular cerrado:

$$\bar{V}_0 \Big|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \quad (IV.19)$$

$$\bar{V}_1 \Big|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \quad (IV.20)$$

$$\frac{P_i - P_{wf}}{u} = \int_1^{reD} r_w \mu \bar{V}_0 dr_D \quad (IV.21)$$

$$0 = \int_1^{reD} \bar{V}_1 dr_D + \int_1^{reD} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D \quad (IV.22)$$

Con lo que se tienen las condiciones de frontera interna y externa en el espacio de Laplace.

Para el caso de yacimientos infinitos, las condiciones de frontera serán las mismas que (IV.19) y (IV.20), donde :

$$r_{eD} \rightarrow \infty \quad (IV.23)$$

Los desarrollos para obtener (IV.19) a (IV.23) se muestran en el Apéndice C.

#### IV.4. Soluciones Para Flujo Laminar.

Como se mencionó anteriormente, parte de la solución para flujo no Darciano es la solución laminar, la cual se considera para yacimientos infinitos y cerrados, intentando verificar y mejorar las soluciones propuestas por Da Prat<sup>6</sup>. En los Apéndices D y E se presentan los desarrollos correspondientes.

##### IV.4.1 Yacimiento Infinito.

En el caso de yacimientos infinitos, se obtuvieron las siguientes soluciones, los desarrollos se presentan en el Apéndice D.

$$q_D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi t_D}} \quad (IV.24)$$

$$q_D = -2 \int_0^{\infty} \left[ \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)^{t_D}} \right]^x \frac{dx}{\Gamma(x+1)} \quad (IV.25)$$

Correspondiendo (IV.24) a tiempos cortos y (IV.25) a tiempos largos, se observa que (IV.24) es la misma solución presentada por Da Prat<sup>6</sup>; sin embargo, (IV.25) es una solución que tiene un mayor rango de aplicabilidad que la presentada por él mismo autor<sup>6</sup>. En la Figura IV.2 se observan los comportamientos de las soluciones a tiempos cortos y tiempos largos, ecuaciones (IV.24) y (IV.25), con respecto a los de Da Prat<sup>6</sup>, ecuaciones (II.26) y (IV.24).

##### IV.4.2 Yacimiento Cerrado.

En el caso de yacimientos cerrado, se obtuvo la siguiente solución, los desarrollos se presentan en el Apéndice E.

$$q_D = \frac{\frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \left[ \frac{(a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{r_2 - r_1} \right]}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \quad (IV.26)$$

Donde:

$$-r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

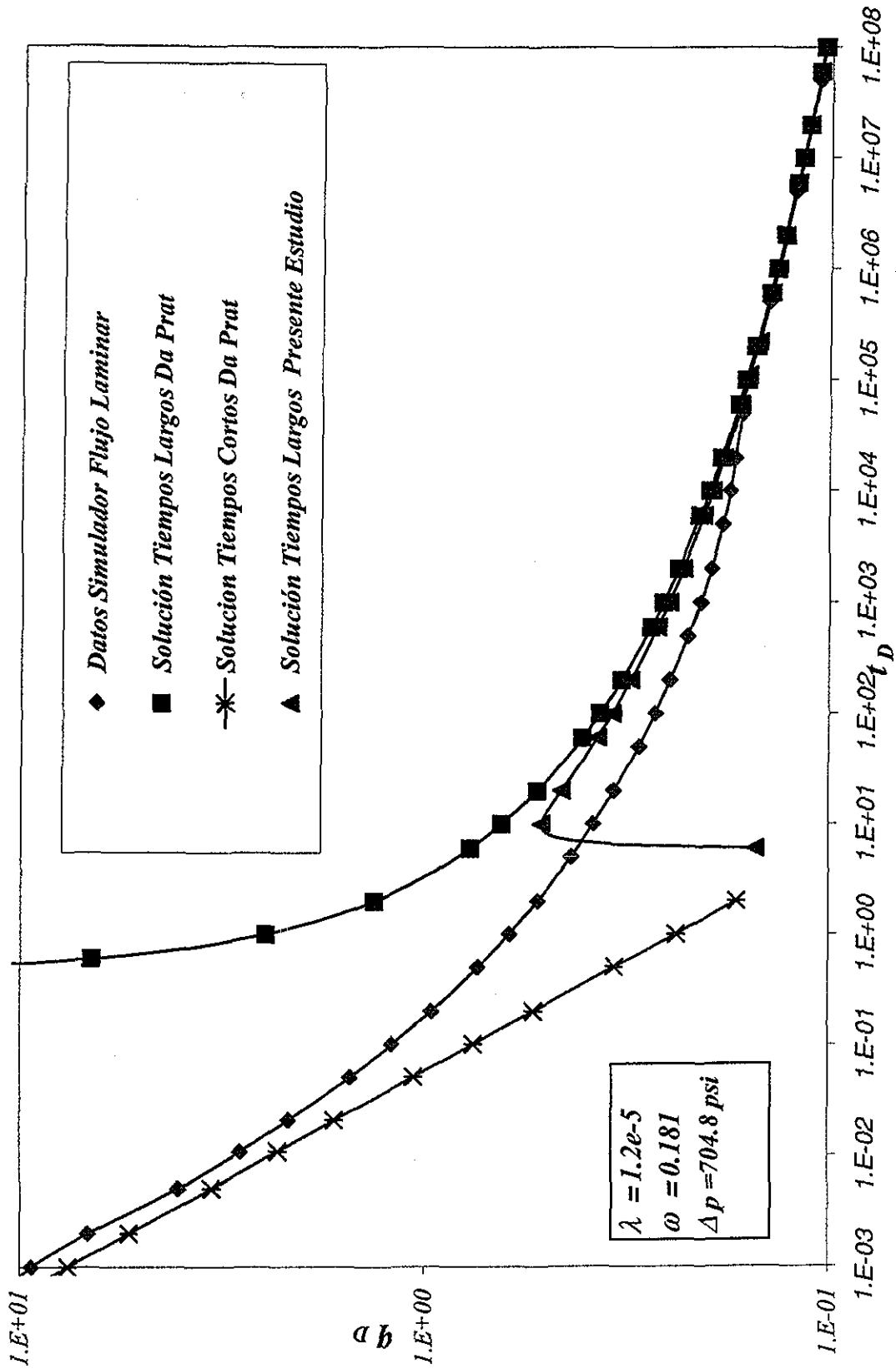


Figura IV.2. Comparación Soluciones de Da Prat con las Soluciones del presente Estudio, Yacimiento Infinito

$$-r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$a = \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)}$$

$$b = a + \frac{1}{\omega \left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]}$$

$$c = \frac{a}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]}$$

Correspondiente a tiempos largos, sin embargo (IV.26) es una solución mejorada a la que presenta el mismo Da Prat<sup>6</sup>. En la Figura IV.3 se observan los comportamientos de la solución a tiempos largos con respecto a los de Da Prat<sup>6</sup>.

#### IV.5 Soluciones De Gasto En Flujo Transitorio Considerando Flujo No Laminar.

Se consideraron dos tipos de yacimientos naturalmente fracturados: los yacimientos infinitos y los cerrados. Para cada tipo de yacimiento, se obtuvieron aproximaciones a tiempos cortos y tiempos largos sobre las expresiones correspondientes para el gasto adimensional en el espacio de Laplace.

##### IV.5.1 Yacimiento Infinito

Las soluciones de gasto transitorio para un yacimiento infinito reflejan el comportamiento antes de que los efectos de frontera lleguen a ser evidentes. Se realiza un desarrollo semejante al propuesto por Da Prat<sup>6</sup>, el cual es presentado en los Apéndices D, G y H. Primeramente se encuentra la función de  $V_0$ , para posteriormente obtener  $V_I$ , y poder relacionarlos a la velocidad en el medio, y obtener el gasto correspondiente a nivel de pozo, la solución propuesta se puede dividir en dos: un término laminar y otro no laminar. Debido a la dificultad de antitransformar las funciones obtenidas en el espacio de Laplace, se trabajó con aproximaciones a tiempos cortos y a tiempos largos, esto provee expresiones simples para el

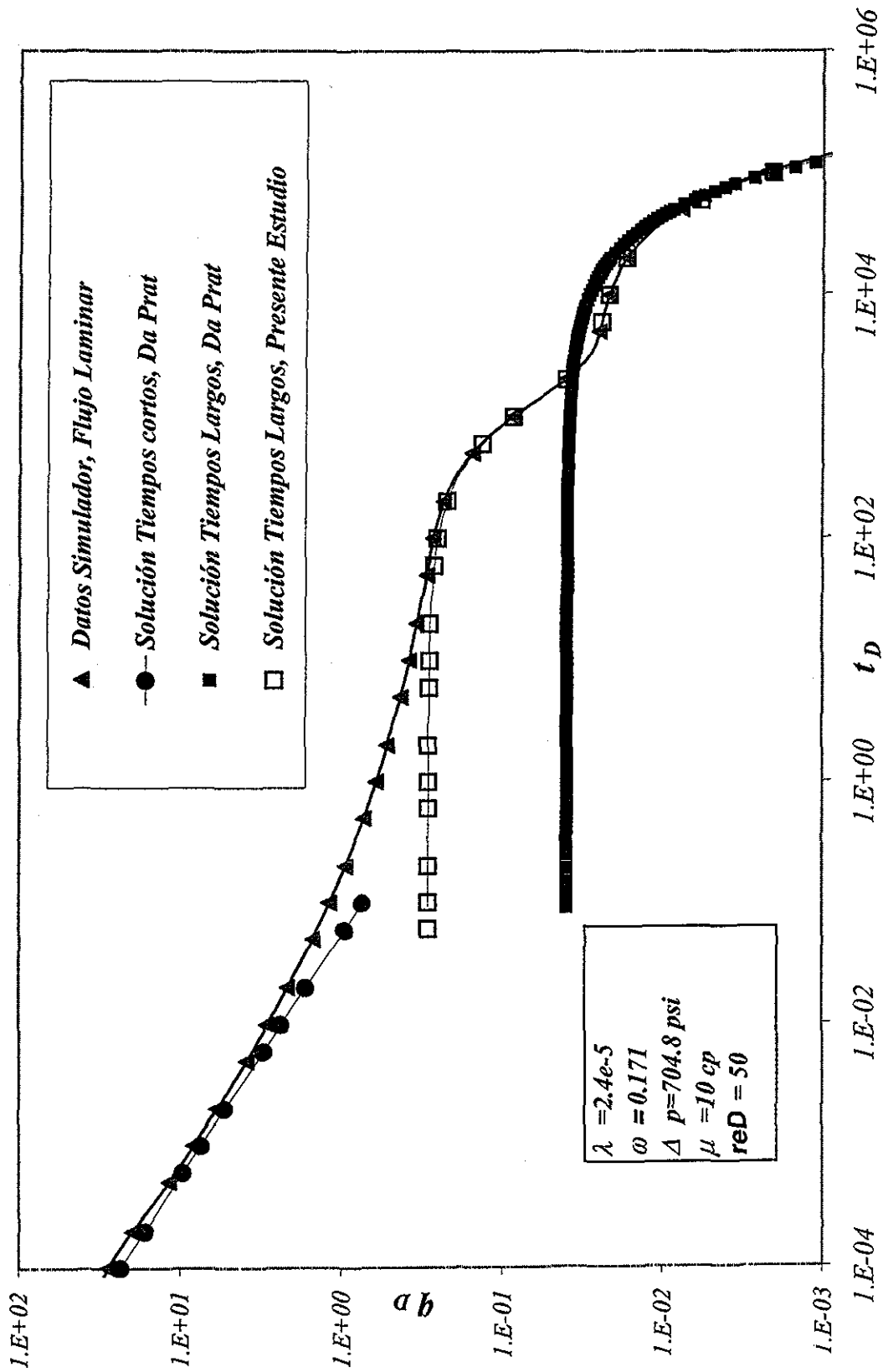


Figura IV.3. Comparación Soluciones de Da Prat con las Soluciones del Presente Estudio Yacimiento Cerrado

gasto que pueden ser empleadas para comprender el comportamiento observado. Para tiempos cortos, la expresión para el gasto adimensional está dada por :

$$q_D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi t_D}} - \frac{\beta \rho k_f^2}{\mu} \left( \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right) \frac{\omega}{\pi \sqrt{\pi t_D} \sqrt{2 \tau_D}} \quad (IV.27)$$

Donde  $2 \geq 1/\sqrt{\tau_D} \geq 0.5$ . Los desarrollos para obtener esta solución se muestran en los Apéndices D y G. Se observa que cuando los efectos de alta velocidad son despreciables, la solución es la propuesta por Da Prat<sup>6</sup> para el caso de flujo laminar, en la Figura IV.4 se observa el comportamiento de la solución .

Si obtenemos la derivada del gasto con respecto al tiempo bajo efectos no laminares, Figura IV.5, se observa que se tiene una etapa inicial donde el gasto no varía con respecto al tiempo, por lo que se puede aproximar esta etapa con la solución de flujo estacionario dado por:

$$q_o = \frac{\mu}{2k_f} \frac{\left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]} \left[ \sqrt{1 + 4 \frac{(p_i - p_{wf}) k_f \beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]}{\mu^2 \ln^2 \left[ \frac{r_e}{r_w} \right]} - 1} \right] 2\pi h \quad (IV.11)$$

Con  $1.03 = r_e/r_w = 1.1$ , en la Figura IV.6 se muestra la aplicación de esta solución.

El sistema fracturado en un medio infinito inicialmente no detecta la presencia de porosidad primaria, el medio se comporta como en un yacimiento homogéneo.

Adicionalmente en la Figura IV.5, se observa que una forma de detectar la presencia de efectos de Flujo No-Laminar durante el periodo de flujo transitorio es por el comportamiento de la derivada logarítmica. Cuando los efectos No-Laminares son importantes, la derivada logarítmica tiene un valor mínimo mayor de  $-0.5$  a tiempos cortos, mientras que para el caso de flujo Laminar el valor mínimo es menor de  $-0.5$ .

Para el caso de tiempos largos se obtuvo la siguiente solución :



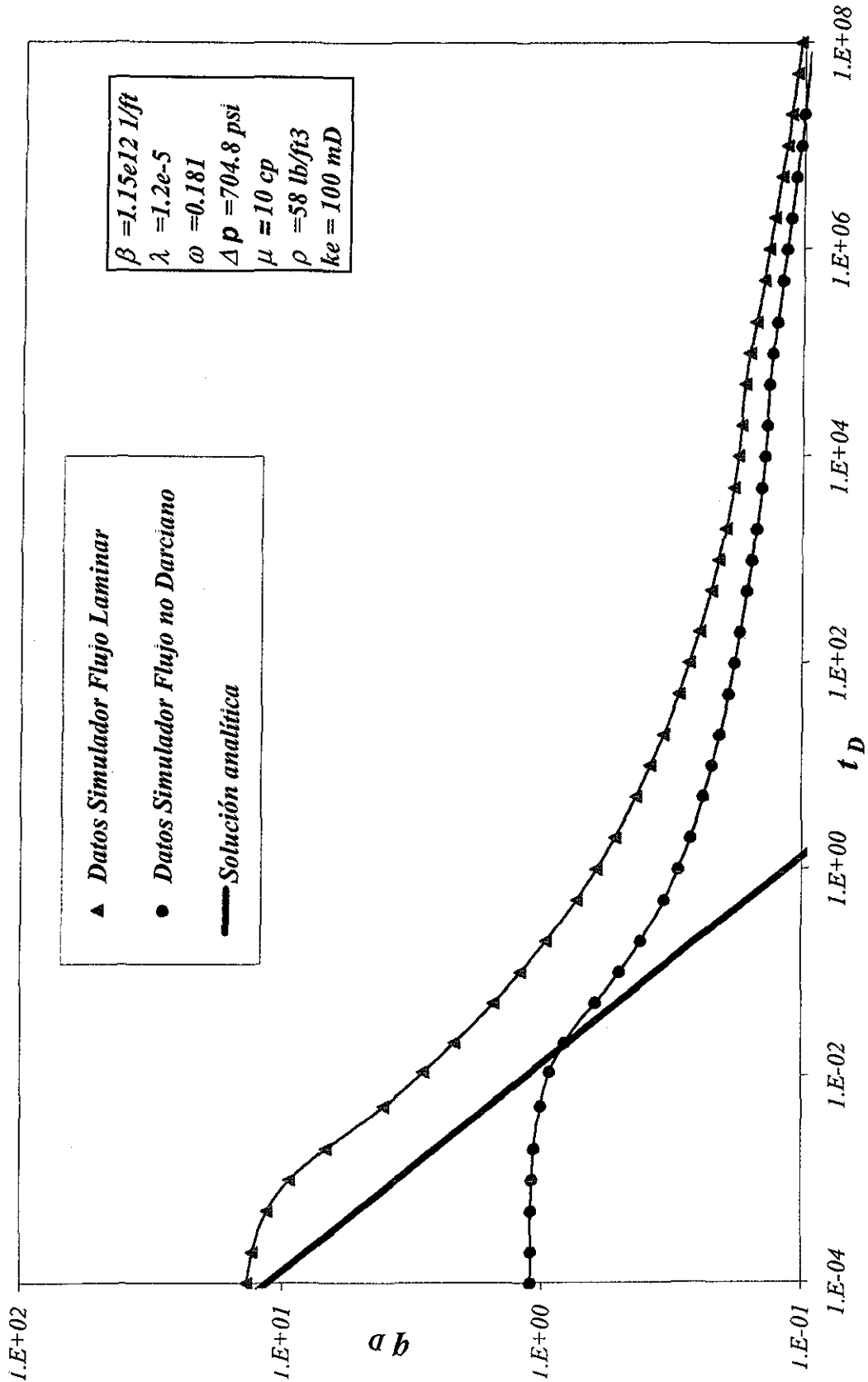


Figura IV.4. Comparación Solución Analítica con Datos del Simulador para Flujo Transitorio a Tiempos Cortos

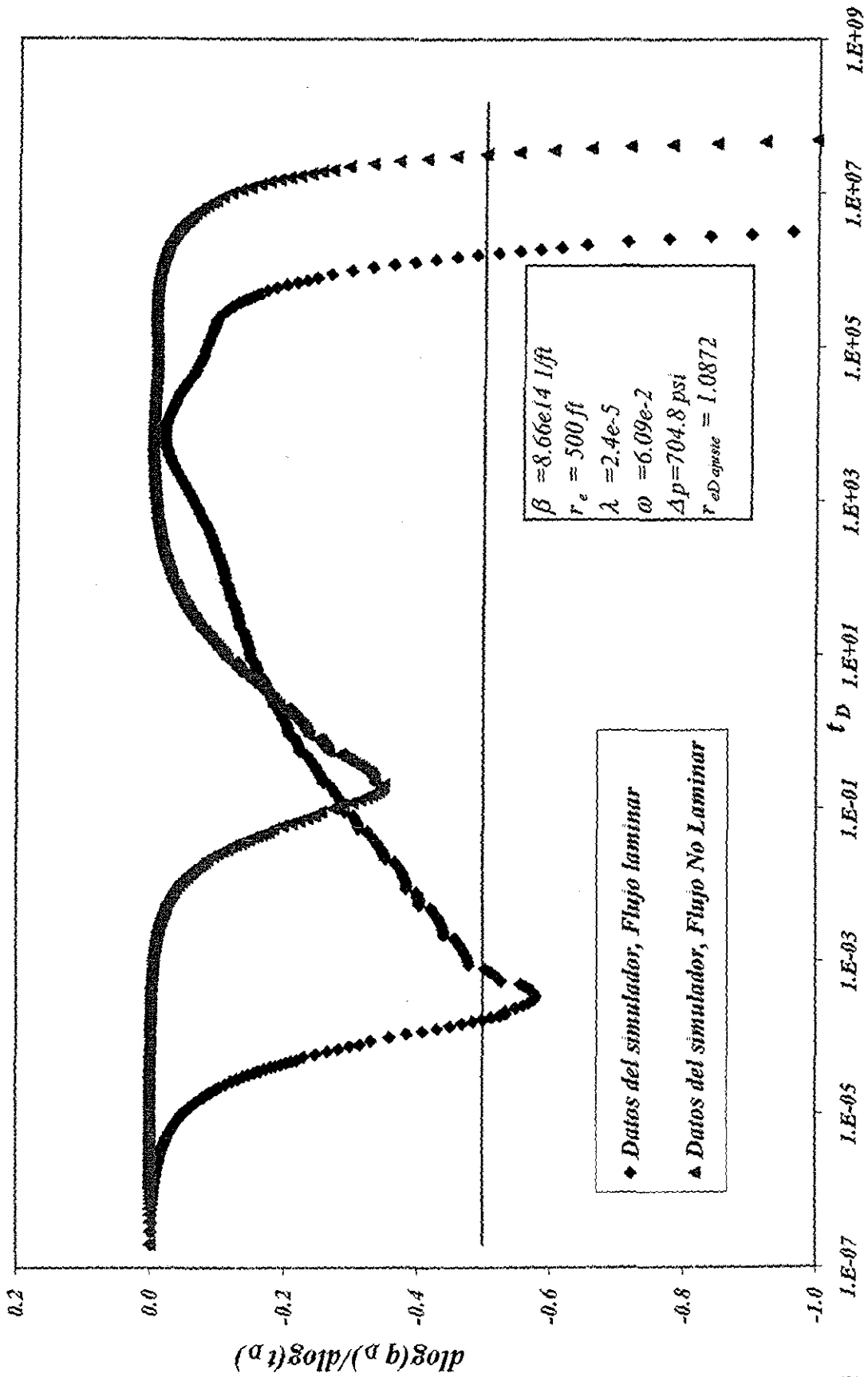


Figura IV.5.  $d\text{Log}(q_D)/d\text{Log}(t_D)$  en un Yacimiento Cerrado, Flujo Laminar y No Laminar

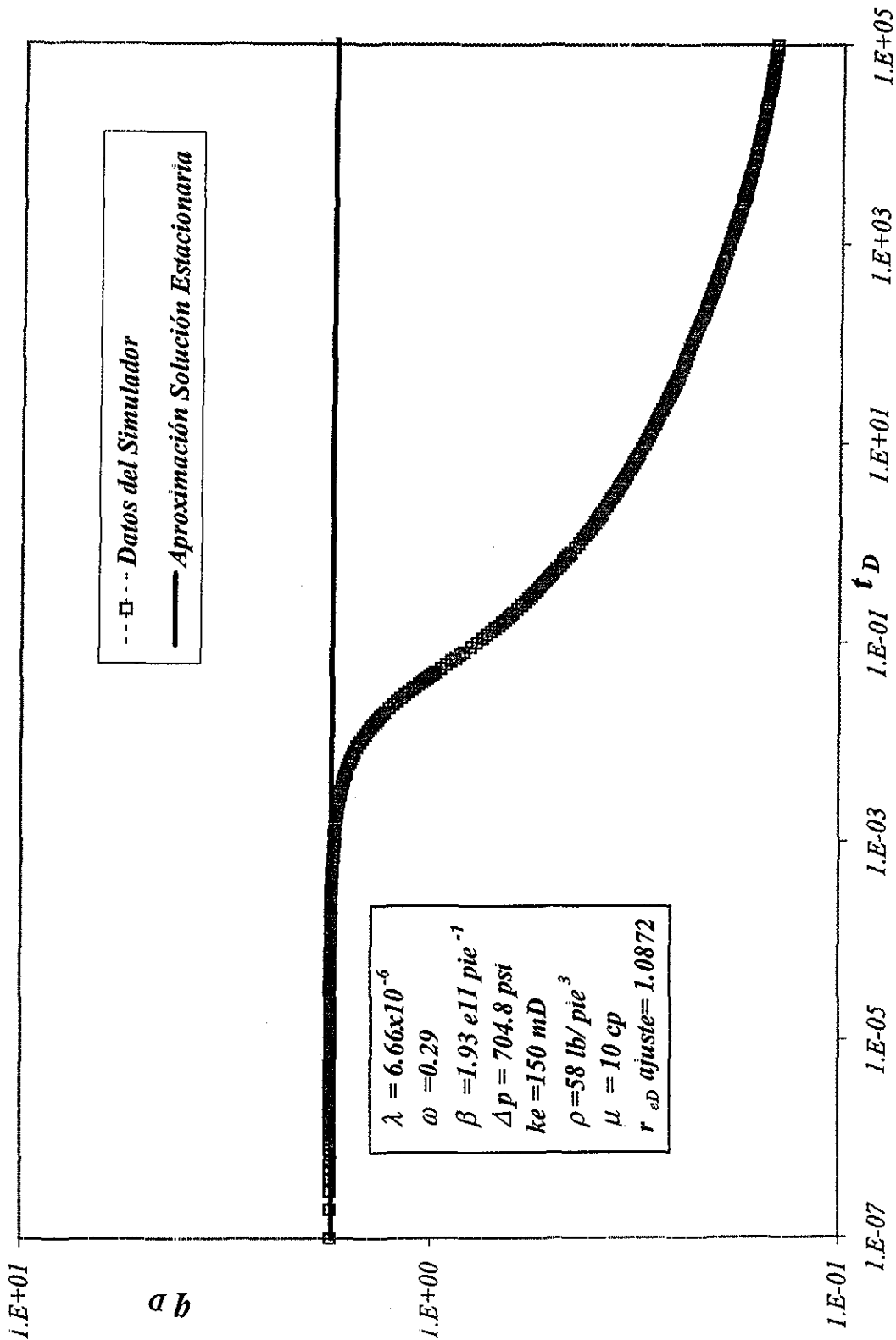


Figura IV.6. Empleo de la Solución Estacionaria Para Aproximar el Comportamiento a Tiempos Cortos en un Yacimiento Infinito

$$q_D = - \left[ 2 \int_0^{\infty} \frac{\left[ \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)^{t_D}} \right]^x}{\Gamma(x+1)} dx \right] \bullet \tag{IV.28}$$

$$\left[ 1 - \frac{4\beta\rho k_f^2}{\mu} \left[ \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right] \int_0^{\infty} \frac{\left( \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)^t} \right)^x}{\Gamma(x+1)} dx \right]$$

De igual forma que a tiempos cortos, la solución (IV.28) al despreciarse los efectos no laminares se obtiene una aproximación a la solución laminar, en la Figura IV.7 se observa el comportamiento de la solución.

#### IV.5.2 Yacimiento Cerrado

El comportamiento de un yacimiento homogéneo cerrado ha sido estudiado por diversos autores. Da Prat<sup>6</sup> presenta aproximaciones bajo condiciones laminares, un desarrollo semejante es presentado en el Apéndice E, y posteriormente se aplica el método de solución propuesto anteriormente. Primeramente se encuentra la función de  $V_0$ , para posteriormente obtener  $V_I$ , y relacionarlos a la velocidad en el medio, y obtener el gasto correspondiente a nivel de pozo, Para tiempos cortos, la expresión para el gasto adimensional está dada por :

$$q_D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi_D}} - \frac{\beta\rho k_f^2}{\mu} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right) \frac{\omega}{\pi\sqrt{\pi_D}\sqrt{2\tilde{t}_D}} \tag{IV.29}$$

La ecuación (IV.29) es idéntica a la (IV.27), lo cual hace sentido ya que a tiempos cortos los efectos de la frontera no se han detectado.

Los desarrollos para obtener esta solución se muestran en los Apéndices E y H. Se observa que cuando los efectos de alta velocidad son despreciables, la solución es la propuesta por Da Prat<sup>6</sup> para el caso de flujo laminar , en la Figura IV.8 se muestra el comportamiento de (IV.29).

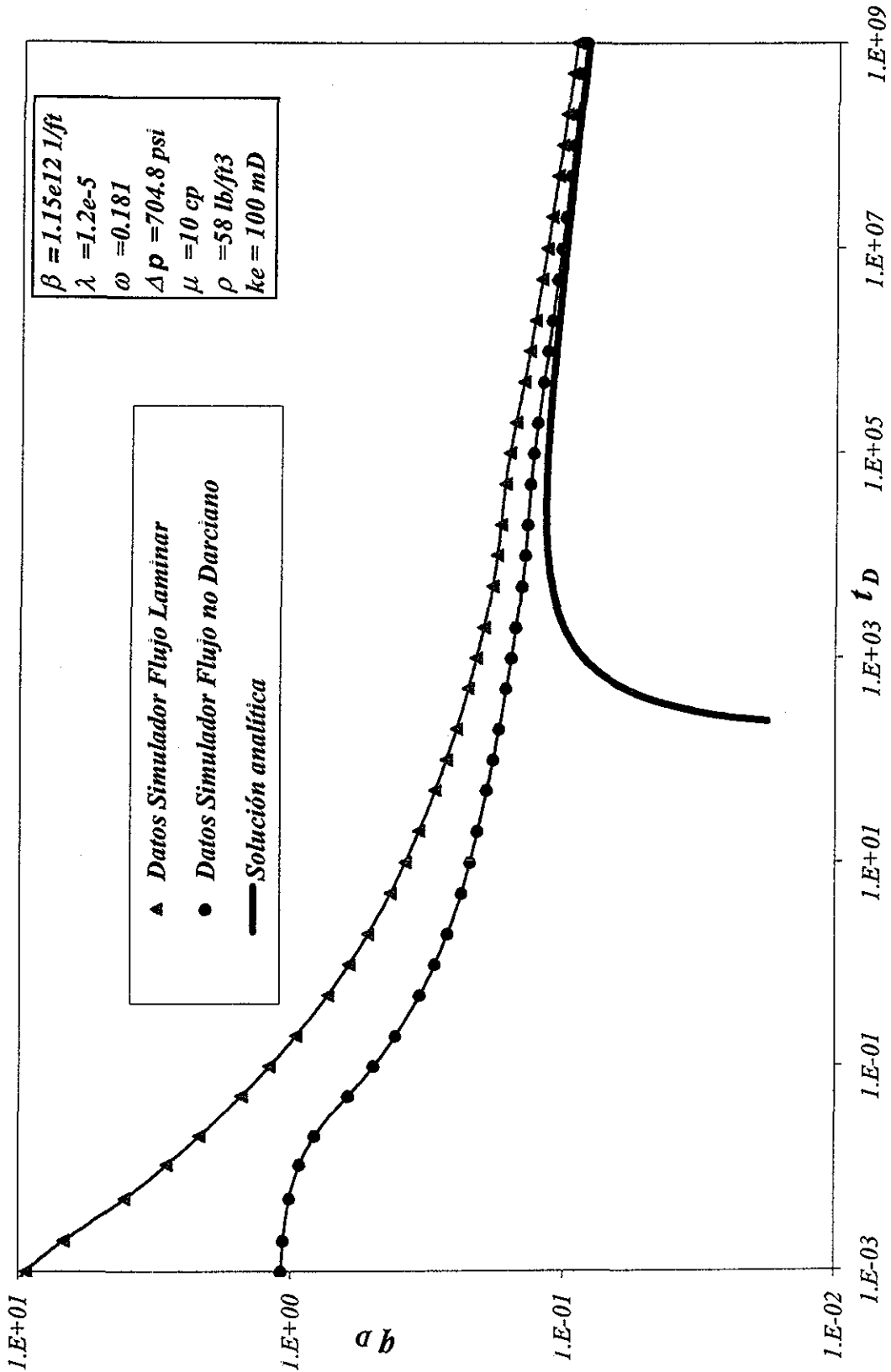


Figura IV.7. Comparación Solución Analítica con Datos del Simulador para Flujo Transitorio a Tiempos Largos

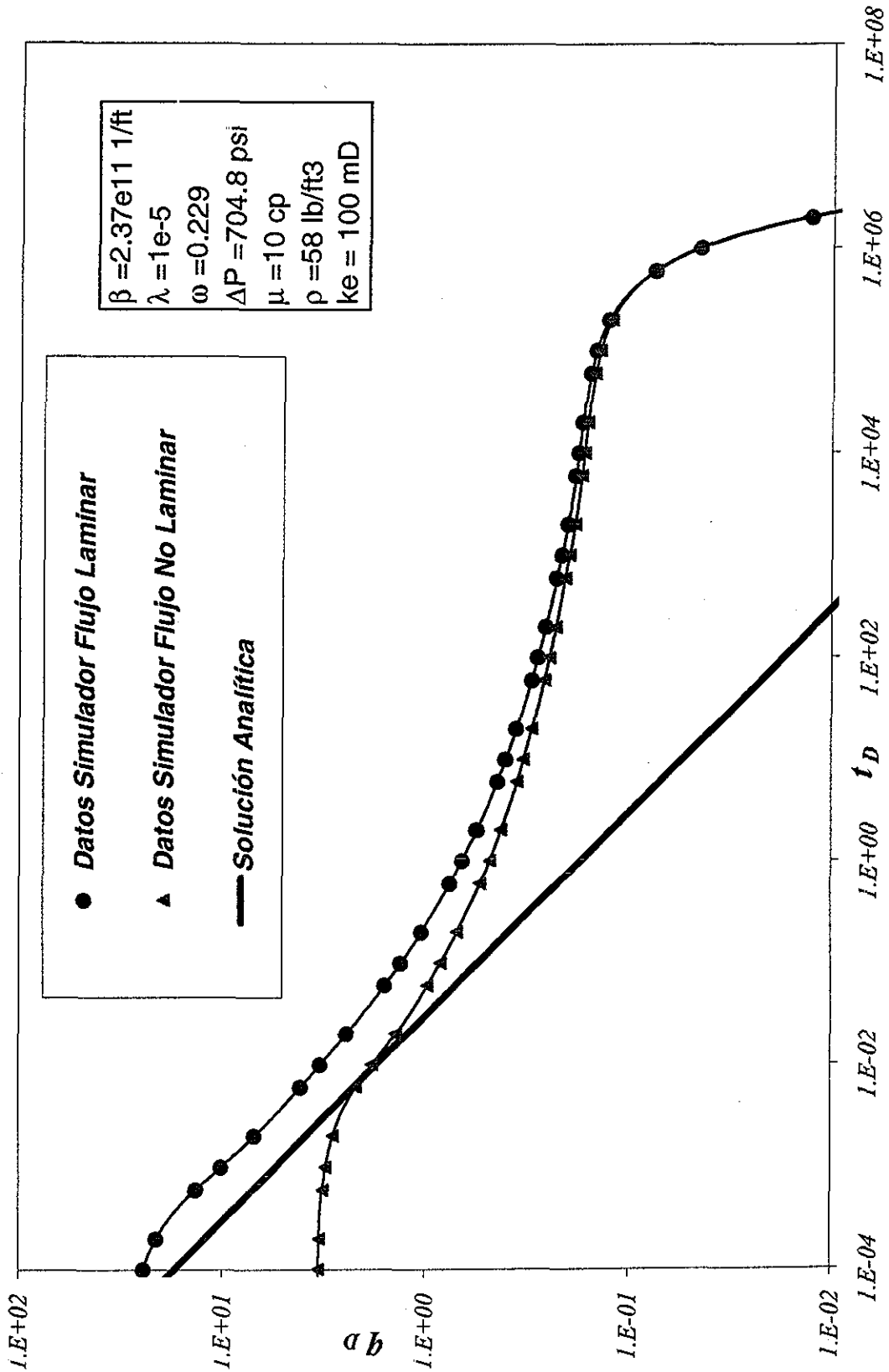


Figura IV.8. Comparación Solución Analítica con Datos del Simulador para un Yacimiento Cerrado a Tiempos Cortos

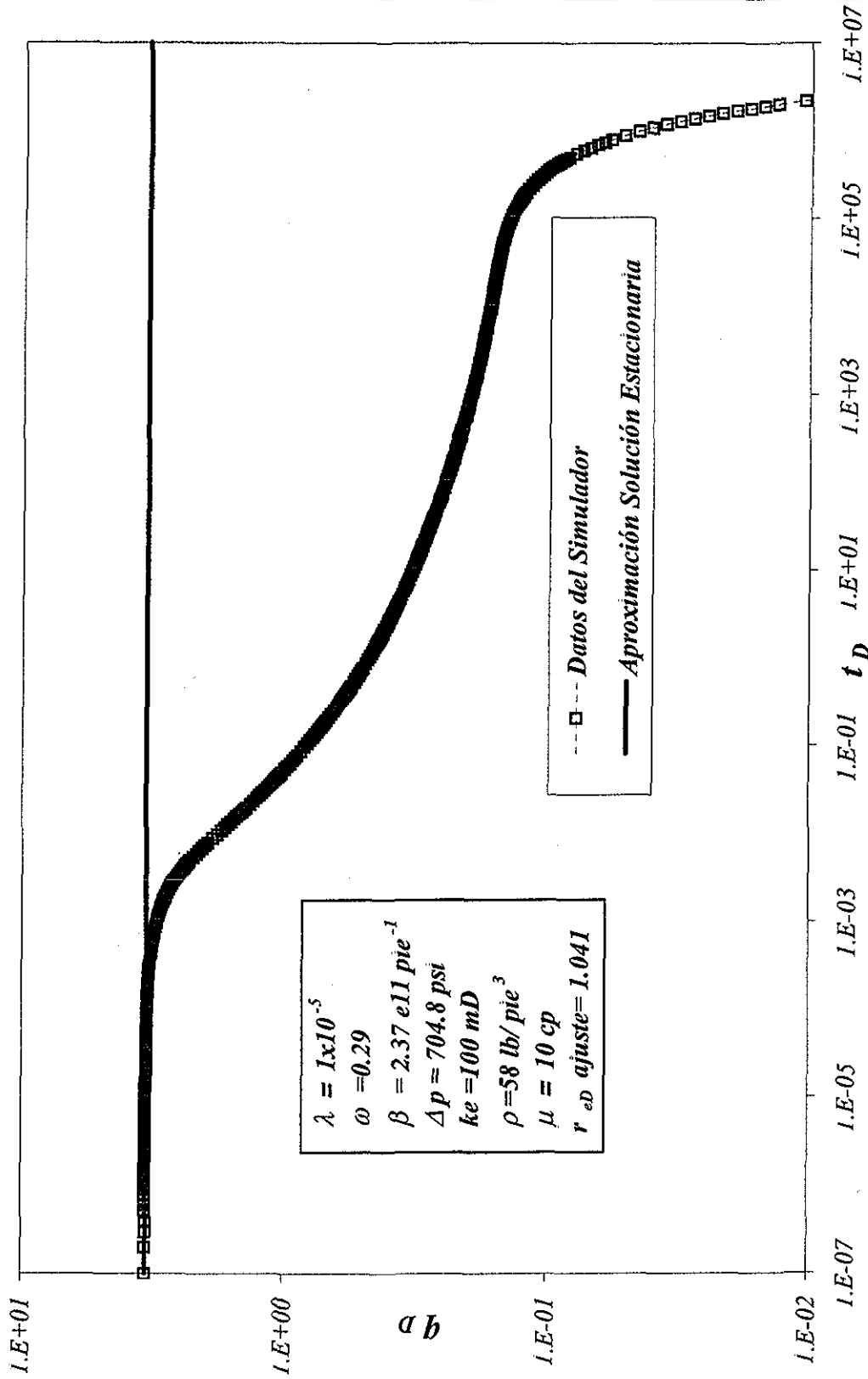


Figura IV.9. Empleo de la Solución Estacionaria Para Aproximar el Comportamiento a Tiempos Cortos en un Yacimiento Cerrado

De igual forma que un yacimiento infinito, se puede aproximar a tiempos cortos con la solución estacionaria dada por (IV.11) y considerando  $1.03 \leq r_e / r_w \leq 1.1$ . En la Figura IV.9 se presenta la aplicación de la solución estacionaria.

Nuevamente el sistema fracturado inicialmente no detecta la presencia de porosidad primaria, el medio se comporta como en un yacimiento homogéneo.

Para el caso de tiempos largos se obtuvo la siguiente solución :

$$q_D = \frac{\frac{r_{eD}^2 - 1}{2} (a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right] (r_2 - r_1)} +$$

$$+ \frac{\left[ \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right] \frac{\beta \rho k_f}{\mu}}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]^2 [r_2 - r_1]^2} \left\{ \left[ -\frac{G}{4 \left\{ \frac{r_{eD}}{2} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4 r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right] \right\}} + \frac{Gr_{eD}}{2 \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4 r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} \right] M + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{2}{5} r_{eD}^3 + \frac{1}{2} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} - \frac{r_{eD}^2}{3} + \frac{1}{30} \right] \right] N \right\} \quad (IV.30)$$

Donde:

$$-r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$-r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$a = \frac{\lambda}{\omega(1 - \omega)}$$

$$G = \left[ -\frac{2r_{eD}^3}{3} + \frac{r_{eD}^4}{4} + \frac{r_{eD}^2}{2} - \frac{1}{12} \right]$$

$$M = \left( \frac{\lambda}{\omega(1 - \omega)} - r_1 \right)^2 \text{Exp}(-2r_1 t_D) +$$

$$-2 \left[ \left( \frac{\lambda}{\omega(1 - \omega)} \right)^2 - (r_1 + r_2) \frac{\lambda}{\omega(1 - \omega)} + r_1 r_2 \right] \text{Exp}(-(r_1 + r_2) t_D) + \left( \frac{\lambda}{\omega(1 - \omega)} - r_2 \right)^2 \text{Exp}(-2r_2 t_D)$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



$$\begin{aligned}
N = & \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_1 \right)^2 \frac{\lambda}{(1-\omega)} \left[ -\frac{2r_1 \text{Exp}(-2r_1 t_D)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_1} + \frac{\frac{\lambda}{(1-\omega)} \text{Exp}\left(-\frac{\lambda}{(1-\omega)} t_D\right)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_1} \right] + \\
& - 2 \left[ \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} \right)^2 - (r_1 + r_2) \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} + r_1 r_2 \right] \frac{\lambda}{(1-\omega)} \left[ -\frac{(r_1 + r_2) \text{Exp}(-(r_1 + r_2) t_D)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - (r_1 + r_2)} + \frac{\frac{\lambda}{(1-\omega)} \text{Exp}\left(-\frac{\lambda}{(1-\omega)} t_D\right)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - (r_1 + r_2)} \right] + \\
& + \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_2 \right)^2 \frac{\lambda}{(1-\omega)} \left[ -\frac{2r_2 \text{Exp}(-2r_2 t_D)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_2} + \frac{\frac{\lambda}{(1-\omega)} \text{Exp}\left(-\frac{\lambda}{(1-\omega)} t_D\right)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_2} \right]
\end{aligned}$$

De igual forma que a tiempos cortos, la solución (IV.30) al despreciarse los efectos no laminares se obtiene la solución para flujo laminar, generalmente bajo las condiciones de este estudio, los términos con efectos no Darcianos son muy pequeños comparados con los laminares en el periodo dominado por frontera, por lo que se recomienda emplear la solución laminar como una buena aproximación, en la Figura IV.10 se muestra el comportamiento de la solución.

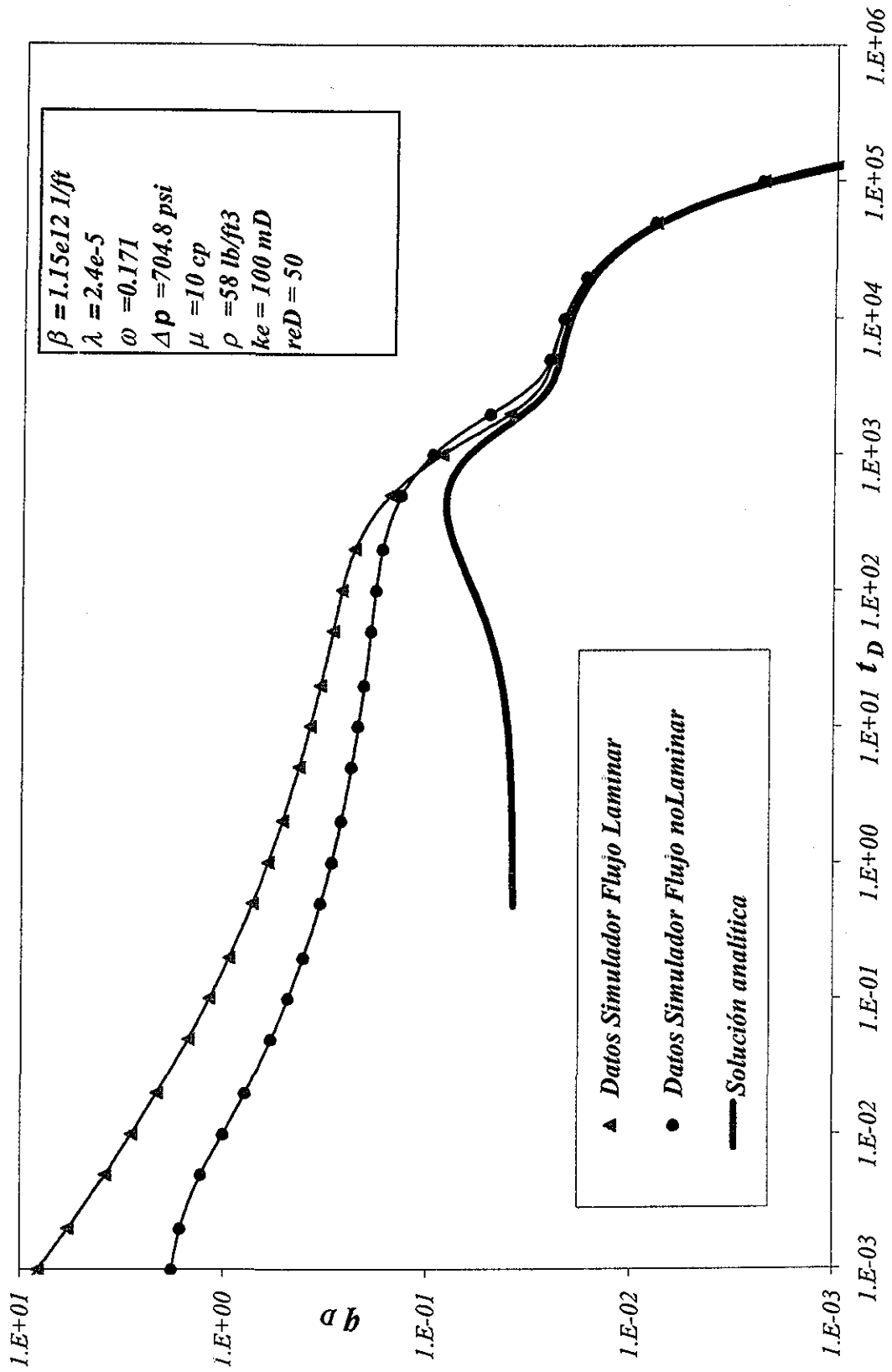


Figura IV.10. Comparación Solución Analítica con Datos del Simulador para Flujo Dominado Por Frontera a Tiempos Largos

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base en los resultados presentados en este trabajo, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- i. Se presenta el modelo de Warren y Root en términos de velocidad.
- ii. Se presenta una nueva aproximación para tiempos largos en yacimientos infinitos de doble porosidad considerando flujo Laminar.
- iii. Se obtuvieron soluciones para flujo Laminar a tiempos largos durante el periodo dominado por frontera que reproducen en caso de que se observen las dos declinaciones exponenciales que se pueden presentar en un yacimiento naturalmente fracturado mejorando la solución presentada por Da Prat.
- iv. Se obtuvo la solución para flujo estacionario en yacimientos naturalmente fracturados considerando efectos no Darcianos.
- v. Se presentan aproximaciones a las soluciones a tiempos cortos para yacimientos infinitos y cerrados. La solución analítica no reproduce con exactitud el comportamiento observado debido a la forma de solucionar el problema, sin embargo una buena aproximación es emplear la aproximación basada en flujo estacionario.
- vi. Se presenta una aproximación a tiempos largos, a la solución para flujo no Darciano en yacimientos naturalmente fracturados considerando flujo no Laminar, para yacimientos infinitos.
- vii. Se propone el cálculo de  $d\log(q_D)/d\log(t_D)$  para definir la existencia de flujo no Darciano en yacimientos de doble porosidad, en pruebas a presión de fondo constante, si a tiempos cortos su valor es menor de -0.5 se presenta flujo no Darciano.
- viii. Los efectos de flujo no laminar se presentan durante la mayor parte del tiempo de explotación, pero se alcanzará flujo laminar a tiempos grandes.

- ix. Si se tiene la presencia de flujo no laminar y se intentara calcular el área de drene por el método de Ehlig Economides, considerando una declinación exponencial a tiempos largos ( durante el periodo dominado por frontera ) este proceso dará resultados muy cercanos a la realidad con lo cual se verifica que a tiempos grandes los efectos inerciales tienden a desaparecer.
  
- x. Las soluciones presentadas en este trabajo (a excepción de la de flujo estacionario), son válidas cuando el parámetro de perturbación es mucho menor que 1, por lo que su aplicabilidad se restringe a estos límites.
  
- xi. Durante el periodo dominado por frontera, y bajo las condiciones del presente estudio, los efectos no laminares prácticamente desaparecen por lo que se puede aproximar el comportamiento mediante la solución para flujo laminar.
  
- xii. Se deben intentar, en trabajos futuros, otros métodos de solución para las ecuaciones que definen el problema, ya que en este estudio no se probaron todas las opciones descritas en la literatura.

**NOMENCLATURA**

$A$	Área	$[L^2]$ , pies <sup>2</sup>
$B$	Factor de volumen	$[L^3/L^3]$ , adim
$B_o$	Factor de volumen del aceite	$[L^3/L^3]$ , adim
$C_A$	Factor de forma de Dietz	
$C_D$	Constante de almacenamiento adimensional	adim
$c_f$	Compresibilidad de la fractura	$[Lt^2/m]$ , pg <sup>2</sup> /libras
$c_t$	Compresibilidad total	$[Lt^2/m]$ , pg <sup>2</sup> /libras
$D_t$	Coefficiente de turbulencia.	
$h$	Espesor	$[L]$ , pies
$I_n(x)$	Función Bessel I de orden n	
$k$	Permeabilidad.	$[L^2]$ , mD
$k_e$	Permeabilidad efectiva	$[L^2]$ , mD
$k_{fb}$	Permeabilidad de la formación naturalmente fracturada.	$[L^2]$ , mD
$k_m$	Permeabilidad de la matriz	$[L^2]$ , mD
$k_{sD}$	Permeabilidad adimensional	adim
$K_n(x)$	Función Bessel K de orden n	
$m'$	Pendiente de la recta en una gráfica log ( q ) vs t	$[ciclo/t]$ , ciclo / día
$N_{RE}$	Número de Reynolds	adim
$p$	Presión en el punto z.	$[m/Lt^2]$ , libras / pg <sup>2</sup>
$p'$	Presión en el nivel de referencia	$[m/Lt^2]$ , libras / pg <sup>2</sup>
$p$	Presión	$[m/Lt^2]$ , libras / pg <sup>2</sup>
$p_D$	Presión adimensional	adim
$p_{fD}$	Presión de fractura adimensional	adim

$p_{mD}$	Presión en la matriz adimensional	adim
$p_i$	Presión inicial	[ m / Lt <sup>2</sup> ], libras / pg <sup>2</sup>
$p_{wf}$	Presión de fondo fluyendo	[ m / Lt <sup>2</sup> ], libras / pg <sup>2</sup>
$q$	Gasto	[ L <sup>3</sup> / t ], bl / día
$q_D$	Gasto adimensional	adim
$q_{int}$	Ordenada al origen de la recta en una gráfica log ( q ) vs t	[ L <sup>3</sup> / t ], bl / día
$q_o$	Gasto de aceite	[ L <sup>3</sup> / t ], bl / día
$Q_D$	Producción acumulada adimensional	adim
$r$	Radio	[ L ], pies
$r_{1,2}$	Negativo de la solución de la ecuación $x+bx+c=0$	
$r_D$	Radio adimensional	adim
$r_e$	Radio de drene	[ L ], pies
$r_{eD}$	Radio de drene adimensional	adim
$r_{hvD}$	Distancia radial máxima a la cual se tiene flujo a alta velocidad.	adim
$r_{sD}$	Radio de daño adimensional	adim
$r_w$	Radio del pozo.	[ L ], pies
$S$	Daño	
$S'$	Factor de daño aparente	
$S_{hv}$	Daño por alta velocidad	
$S_T$	Daño total.	
$t$	Tiempo	[ t ], días, horas.
$t_D$	Tiempo adimensional	adim
$t_{DA}$	Tiempo adimensional basado en el área	adim
$(t_{pss})_D$	Tiempo adimensional requerido para alcanzar un estado pseudoestacionario real	adim

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

$u$	Variable de Laplace	
$U$	Velocidad microscópica en el punto $z$ .	[ L / t ]
$v$	Velocidad del Fluido.	[ L / t ]
$V_C$	Razón del volumen medio al volumen total	[ L <sup>3</sup> / L <sup>3</sup> ], adim
$V_{m.f}$	Velocidad en el medio sobre su permeabilidad	[ L <sup>3</sup> / t ]
$V_{0,1}$	Componentes de la solución en términos de velocidad	
$w$	Inverso de la densidad del fluido.	[ L <sup>3</sup> / m ]
$W(x,y)$	Wronskiano	
$x$	Variable	
$z$	Elevación	[ L ]
$\alpha$	Factor de forma	[ L <sup>-2</sup> ], pies <sup>-2</sup>
$\beta$	Coefficiente inercial.	[ L <sup>-1</sup> ], pies <sup>-1</sup>
$\beta_D$	Coefficiente inercial adimensional	adim
$\gamma$	Constante exponencial de Euler = 0.57721	
$\Gamma(x)$	Función gamma de $x$	
$\delta$	Constante dada por (IV.5)	
$\Delta p$	Caída de presión	[ m / Lt <sup>2</sup> ], lb / pg <sup>2</sup>
$\varepsilon$	Parámetro de perturbación	
$\phi$	Porosidad.	[ L <sup>3</sup> / L <sup>3</sup> ], adim.
$\phi_f$	Porosidad de la fractura	[ L <sup>3</sup> / L <sup>3</sup> ], adim.
$\phi_m$	Porosidad de la matriz	[ L <sup>3</sup> / L <sup>3</sup> ], adim.
$\Phi$	Potencial de flujo o energía mecánica por unidad de masa	[ L <sup>2</sup> / t <sup>2</sup> ]
$\lambda$	Coefficiente de flujo interporoso	adim
$\mu$	Viscosidad	[ m / Lt ], cpoise

---

$\mu_o$	Viscosidad del aceite	[ m / Lt ], cpoise
$\theta_i$	Constante de conversión	
$\rho$	Densidad del fluido	[ m / L <sup>3</sup> ], libras / pies <sup>3</sup>
$\omega$	Almacenabilidad adimensional en las fracturas	adim
$\pi$	Constante = 3.141592	



---

**REFERENCIAS**

1. Vásquez C., M.A. : *Análisis Transitorio de Pruebas a Gasto Variable en Yacimientos Saturados*. Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, 1995.
2. Da Prat, G. : *Well Test Analysis for Fractured Reservoir Evaluation* , New York, Elsevier Science Publishing Company Co., 1990.
3. Kuchuk, F. : " *The Pressure Distribution caused by a vertically Fracture Well Produced at Constant Pressure,*" A MASTER OF SCIENCE REPORT, Abr. 1975.
4. Prats, M. : " *Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior -Compressible- Fluid Case,*" SPEJ , Jun. 1962, 87-94.
5. Fetkovich, M. J. : " *Decline Curve Analysis Using Type Curves,*" JPT , Jun. 1980, 1065-1077.
6. Da Prat, G., Cinco-Ley, H., y Ramey, H. : " *Decline Curve Analysis Using Type Curves for Two Porosity Systems,*" SPEJ , Jun. 1981, 354-362.
7. Sageev, A. , Da Prat, G., y Ramey, H. J. : " *Decline Curve Analysis for a Double-Porosity System,*" SPE PAPER 13630 , Cal. Reg. Met., Bakersfield California, Mar. 27-29, 1985 ..
8. Da Prat, G. : *Well Test Analysis for a Naturally Fractured Reservoir*, Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford California. 1980.
9. Jacob, C. E., y Lohman, S. W. : " *Nonsteady Flow to a Well of Constant Drawdown in an Extensive Aquifer,*" Trans. Am. Geophys. Union, Vol. 33, No. 4, Ago. 1952, 559-569.
10. Ehlig-Economides, C. A. y Ramey, H. J. Jr. : " *Transient Rate Decline Analysis for Wells Produced at Constant Pressure,*" SPEJ , Feb. 1981, 98-104.

11. Forchheimer, P.H. : " *Wasserbewegung Durch Boden,* " *Zeitz ver Deutsh Ing.* 45, 1901, 1782.
12. Guppy, K. H., Cinco-L., H. y Ramey, H. J. : " *Effect of Non-Darcy Flow on the Constant Pressure Production of Fractured Wells,* " *SPEJ* , Jun. 1981, 390-400.
13. Villalobos L., H. : *Análisis de Pruebas de Presión en Yacimientos Naturalmente Fracturados Considerando el Efecto de Flujo de Alta Velocidad,* Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, 1990.
14. Camacho-V, R. , Vázquez-C., M., y Padilla-S, R. : " *New Results on Decline Curves Considering Non-Darcy Flow Effects,* " *SPE Reservoir Evaluation & Engineering,* Octubre 1998.
15. Camacho-V, R., Vázquez-C., M., Roldan-C, J., Samaniego-V, F. y Macías-C, L.: " *New Results on Transient Well Test Analysis Considering Nonlaminar Flow in the Reservoir,* " *SPE Formation Evaluation,* Diciembre de 1996.
16. Mei, C. C. , y Auriault, J. L. : " *The Effect of Weak Inertia on Flow Through a Porous Medium,* " *Jour. Fluid. Mech.,* Vol. 222, 1991, 647-663.
17. Geertsma, J. : " *Estimating the Coefficient of Inertial Resistance in Fluid Flow Through Porous Media,* " *SPEJ* , Oct. 1974, 445-450.
18. Firoozabadi, A., y Katz, D. L. : " *An Analysis of High Velocity Flow Through Porous Media,* " *JPT* , Feb. 1979 , 211-216.
19. Avila, C. E., y Evans, R. D. : " *The Effect of Temperature and Overburden Pressure Upon the Non-Darcy Flow Coefficient in Porous Media,* " Proc. 27th U.S. Symposium on Rock Mechanics, University de Alabama , 1986, 623-634
20. Wong, S. W. : " *Effect of Liquid Saturation on Turbulence Factors for Gas Liquid Systems,* " *Jour. Can. Pet. Tech.* , Oct.-Dic. 1970, 274-278.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

21. Tiss, N., y Evans, R. D. : " Measurement and Correlation of Non-Darcy Flow Coefficient in Consolidated Porous Media," Journal of Petroleum Science and Engineering 3 , 1989, 19-33.
22. Ramey, H. J., Jr. : " Non-Darcy Flow and Wellbore Storage Effects in Pressure Buildup and Drawdown of Gas Wells," JPT , Feb. 1965, 223-233.
23. Roldán C., J. L. : *Análisis de Datos de Presión con Efectos no Laminares en Yacimientos Homogéneos* . Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM., 1996.
24. Rodríguez R., J. : *Análisis de Curvas de Declinación de Producción en Yacimientos Naturalmente Fracturados Considerando Flujo no Laminar*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería de la UNAM., 1996.
25. Darcy, H. : *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, París, Victor Dalmont, 1856.
26. Phillip, J. R. : " Transient Fluid Motions in Saturated Porous Media," Aust. J. of Physics, Vol. 10, 1957, 43-53.
27. Lindquist, E. : " On the Flow of Water Through Porous Soil," 1st Congress des Grands Barrerges, Stockholm, Vol. 5, 1933, 91-101.
28. Fettkovich, M. J. : " Multipoint Testing of Gas Wells," SPE MID-CONTINENT SECTION, CONTINUING EDUCATION, Mar. 1975.
29. van Everdingen, A. F., y Hurst, W. : " The application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs," Trans. AIME vol. 186, p. 305-324B, 1949.
30. Warren, J. E., y Root, P. J. : " The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs," SPEJ No. 3, 1963, 245-255.
31. Mavor, M. J., y Cinco, H. : " Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs," SPE PAPER 7977. SPE Cal. Reg. Meet., Ventura Calif., Abr. 18-20 1979.

- 
32. Abramowitz, M., y Stegun, I. A. : *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, New York, 1964.
  33. Tsarevich, K. A., y Kuranov, I. F. : *Problems of Reservoir Hydrodynamics. 1. Calculation of the Flow Rates for the Center Well in a Circular Reservoir under Elastic Conditions*, Leningrad, 1956, 9-34.
  34. Bourdet, D., Whittle, T. M., Douglas, A. A. y Pirat, V. M. : " A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis , " *World Oil* , May. 1983, 95-106.
  35. Ramey, H. J., Jr ; Kumar, A. and Gulati, M.S. : " Gas Well Test Analysis Under Water-Drive Conditions, " *American Gas Association Monography*, 1973.
  36. Reiss, L. H. : *The Reservoir Engineering Aspects of Fractured Formations*, Houston, Gulf Publishing Co., 1980.
  37. van Golf-Racht, T. D. : *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering*, Amsterdam, Elsevier, 1982 .
  38. Baker, W. J. : " Flow on Fissured Formations, " Proceedings Fourth World Petroleum Congress, Section II / E, paper 7, 379-393.
  39. Jones, T. A., Wooten, S. O. y Kaluza, T. J. : " Single-Phase Flow Through Natural Fractures, " Paper SPE 18175 presented at SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Houston, Oct. 2-5 1988.
  40. Zwillinger, D. : *Handbook of Differential Equations* , Boston, Academic Press, Inc, 1992.
  41. Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. : *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* , México, Editorial Limusa, 1976.

- 
42. Zill, D. G. : *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* , México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1986.
  43. Roberts, G. E. y Kaufman, H. : *Table of Laplace Transforms*, Filadelfia, W. B. Saunders Company, 1966.
  44. Spiegel, M. E.: *Transformadas de Laplace*, México, McGraw-Hill de México, 1982.
  45. Spiegel, M. E.: *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*, México, McGraw-Hill de México, 1985.
  46. Andrews, L. C.: *Special Functions of Mathematics for Engineers*, Oxford University Press, 1998.
  47. Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. M. : *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press Inc., 1980.
  48. MATHEMATICA 3.0 , Wolfram Research, 1996.
  49. Nayfeh, A. H. : *Perturbation Methods* , New York, John Wiley & Sons Inc., 1973.
  50. Aziz, A. y Na, T. Y. : *Perturbation Methods in Heat Transfer* , New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
  51. Watson, G. N. : *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Londres, Cambridge at the University Press, 1966.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## APÉNDICE A. DESARROLLO DE LAS ECUACIONES BÁSICAS.

Para el desarrollo de la ecuación básica, a solucionar emplearemos la ecuación de :  
de Forchheimer.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{k} v + \beta \rho v^2 \quad (\text{A.1})$$

Tomando la ecuación (1) y despejando v se tiene:

$$v = \frac{\frac{\partial p}{\partial r}}{\frac{\mu}{k} + \beta \rho v} = \frac{k}{\mu} \frac{\frac{\partial p}{\partial r}}{\left(1 + \frac{k}{\mu} \beta \rho v\right)} \quad (\text{A.2})$$

Si:

$$c = \frac{k}{\mu} \beta \rho \quad (\text{A.3})$$

Entonces se tiene:

$$v = \frac{k}{\mu} \left[ \frac{\frac{\partial p}{\partial r}}{1 + cv} \right] \quad (\text{A.4})$$

Considerando flujo no laminar en la fractura se tiene:

$$v_f = \frac{k_f}{\mu} \left[ \frac{\frac{\partial p_f}{\partial r}}{1 + cv_f} \right] \quad (\text{A.5})$$

Y en la matriz se considera flujo laminar:

$$v_m = \frac{k_m}{\mu} \frac{\partial p_m}{\partial r} \quad (\text{A.6})$$

De la ecuación de difusividad se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_f) = (\phi VC)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + (\phi VC)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (A.7)$$

Si se deriva (A.7) con respecto a  $r$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_f) \right] &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (\phi VC)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + (\phi VC)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \right] \\ &= (\phi VC)_f \frac{\partial^2 p_f}{\partial r \partial t} + (\phi VC)_m \frac{\partial^2 p_m}{\partial r \partial t} \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_f) \right] &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial v_f}{\partial r} + v_f \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial v_f}{\partial r} + \frac{v_f}{r} \right] \\ &= \frac{\partial^2 v_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_f}{\partial r} - \frac{v_f}{r^2} \end{aligned} \quad (A.9)$$

$$\frac{\partial^2 v_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_f}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) \quad (A.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_f) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) - \frac{v_f}{r^2} \quad (A.11)$$

Para la segunda derivada de  $p$  con respecto a  $r$  y  $t$  se tiene para la fractura:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r \partial t} = \left( \frac{\mu}{k_f} + \beta \rho v_f \right) \frac{\partial v_f}{\partial t} + \beta \rho v_f \frac{\partial v_f}{\partial t} = \frac{\mu}{k_f} \frac{\partial v_f}{\partial t} + 2\beta \rho v_f \frac{\partial v_f}{\partial t} \quad (A.12)$$

Y para la matriz:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial r \partial t} = \frac{\mu}{k_m} \frac{\partial v_m}{\partial t} \quad (A.13)$$

Sustituyendo (A.11) a (A.13) en (A.8) se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) - \frac{v_f}{r^2} = \left( \frac{\mu}{k_f} + 2\beta \rho v_f \right) \frac{\partial v_f}{\partial t} (\phi VC)_f + \frac{\mu}{k_m} \frac{\partial v_m}{\partial t} (\phi VC)_m \quad (A.14)$$

Si  $r_D = \frac{r}{r_w}$  entonces se tiene:

$$\partial r = r_w \partial r_D \quad (\text{A.15})$$

Si  $t_D = \frac{k_f t}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2}$  entonces se tiene:

$$\partial t = \frac{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2}{k_f} \partial t_D \quad (\text{A.16})$$

, definiendo  $\alpha$  y  $\omega$  como:

$$\alpha = \frac{2\beta\rho k_f}{\mu} \quad (\text{A.17})$$

$$\omega = \frac{(\phi VC)_f}{(\phi VC)_f + (\phi VC)_m}, \quad (\text{A.18})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.15) a (A.18) en (A.14) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_w r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_w r_D \frac{\partial v_f}{\partial r_D} \right) - \frac{v_f}{(r_w r_D)^2} = \\ & = \frac{\mu}{k_f} \left( 1 + \frac{2\beta\rho k_f v_f}{\mu} \right) \frac{(\phi VC)_f k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} \frac{\partial v_f}{\partial t_D} + \\ & + \frac{\mu}{k_m} \frac{(\phi VC)_m k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} \frac{\partial v_m}{\partial t_D} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Simplificando (A.19).

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial v_f}{\partial r_D} \right) - \frac{v_f}{r_D^2} = (1 + \alpha v_f) \omega \frac{\partial v_f}{\partial t_D} + \frac{k_f}{k_m} (1 - \omega) \frac{\partial v_m}{\partial t_D} \quad (\text{A.20})$$

Ahora si tomamos la ecuación (I.26) del libro de Da Prat:

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\lambda k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} (p_f - p_m) \quad (\text{A.21})$$



Derivando (A.21) con respecto a  $r$ .

$$(1-\omega) \frac{\partial p_m}{\partial r \partial t} = \frac{\lambda k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} \left( \frac{\partial p_f}{\partial r} - \frac{\partial p_m}{\partial r} \right) \quad (A.22)$$

Sustituyendo (A.5), (A.6) y (A.13) en (A.22).

$$(1-\omega) \frac{\mu}{k_m} \frac{\partial v_m}{\partial t} = \frac{\lambda k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} \left( v_f \left[ \frac{\mu}{k_f} + \beta \rho v_f \right] - \frac{\mu}{k_m} v_m \right)$$

$$(1-\omega) \frac{\mu}{k_m} \frac{\partial v_m}{\partial t} = \frac{\lambda k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} \left( v_f \frac{\mu}{k_f} \left[ 1 + \frac{\alpha v_f}{2} \right] - \frac{\mu}{k_m} v_m \right) \quad (A.22)$$

Sustituyendo (A.16) en (A.22) se tiene:

$$(1-\omega) \frac{k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} \frac{\mu}{k_m} \frac{\partial v_m}{\partial t_D} =$$

$$= \frac{\lambda k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \cdot \mu r_w^2} \left( v_f \frac{\mu}{k_f} \left[ 1 + \frac{\alpha v_f}{2} \right] - \frac{\mu}{k_m} v_m \right)$$

$$\frac{(1-\omega) \partial v_m}{k_m \partial t_D} = \lambda \left( \frac{v_f}{k_f} \left[ 1 + \frac{\alpha v_f}{2} \right] - \frac{v_m}{k_m} \right) \quad (A.23)$$

Si definimos

$$V_m = \frac{v_m}{k_m}, y, V_f = \frac{v_f}{k_f} \quad (A.24)$$

Sustituyendo (A.24) en (A.23) y en (A.20) se tiene:

$$(1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} = \lambda \left( V_f \left[ 1 + \frac{\alpha k_f V_f}{2} \right] - V_m \right) \quad (A.25)$$

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial V_f}{\partial r_D} \right) - \frac{V_f}{r_D^2} = (1 + \alpha k_f V_f) \omega \frac{\partial V_f}{\partial t_D} + (1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} \quad (A.26)$$

Si definimos  $\delta$  como :

$$\delta = \alpha k_f = \frac{2\beta\rho(k_f)^2}{\mu} \quad (\text{A.27})$$

Entonces se tiene:

$$(1-\omega)\frac{\partial V_m}{\partial t_D} = \lambda \left( V_f \left[ 1 + \frac{\delta V_f}{2} \right] - V_m \right) \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial V_f}{\partial r_D} \right) - \frac{V_f}{r_D^2} = (1 + \delta V_f) \omega \frac{\partial V_f}{\partial t_D} + (1 - \omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} \quad (\text{A.29})$$

Las cuales son las ecuaciones básicas para resolver el problema en términos de velocidad.

**APÉNDICE B. APLICACIÓN DE PERTURBACIÓN.**

Desarrollando las ecuaciones (A.28) y (A.29) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 V_f}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial V_f}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial V_f}{\partial t_D} + \frac{\omega \delta}{2} \frac{\partial V_f^2}{\partial t_D} + (1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} + \frac{V_f}{r_D^2} \quad (B.1)$$

$$(1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} = \lambda V_f + \frac{\lambda \delta}{2} V_f^2 - \lambda V_m \quad (B.2)$$

Si se define el parámetro de perturbación,  $\varepsilon$  el cual es muy pequeño, como:

$$\varepsilon = \frac{\lambda \delta}{2} \quad (B.3)$$

Sustituyendo (B.3) en (B.1) y (B.2)

$$\lambda \frac{\partial^2 V_f}{\partial r_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{\partial V_f}{\partial r_D} = \omega \lambda \frac{\partial V_f}{\partial t_D} + \omega \varepsilon \frac{\partial V_f^2}{\partial t_D} + (1-\omega) \lambda \frac{\partial V_m}{\partial t_D} + \lambda \frac{V_f}{r_D^2} \quad (B.4)$$

$$(1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} = \lambda V_f + \varepsilon V_f^2 - \lambda V_m \quad (B.5)$$

Si se define a  $V_f$  como:

$$V_f = V_0 + \varepsilon V_1 \quad (B.6)$$

Entonces se tiene que:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2\varepsilon V_0 V_1 + \varepsilon^2 V_1^2 \quad (B.7)$$

Sustituyendo (B.6) y (B.7) en (B.4) se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \lambda \frac{\partial^2 V_0}{\partial r_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{\partial V_0}{\partial r_D} + \lambda \varepsilon \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_D^2} + \frac{\lambda \varepsilon}{r_D} \frac{\partial V_1}{\partial r_D} = \\
 & = \omega \lambda \frac{\partial V_0}{\partial t_D} + \omega \lambda \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial t_D} + \omega \varepsilon \frac{\partial V_0^2}{\partial t_D} + 2\omega \varepsilon^2 \frac{\partial V_0 V_1}{\partial t_D} + \omega \varepsilon^3 \frac{\partial V_1^2}{\partial t_D} + \\
 & + (1-\omega) \lambda \frac{\partial V_m}{\partial t_D} + \lambda \frac{V_0}{r_D^2} + \lambda \varepsilon \frac{V_1}{r_D^2}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$(1-\omega) \frac{\partial V_m}{\partial t_D} = \lambda V_0 + \varepsilon \lambda V_1 + \varepsilon V_0^2 + 2\varepsilon^2 V_0 V_1 + \varepsilon^3 V_1^2 - \lambda V_m \tag{B.9}$$

Aplicando transformada de Laplace a (B.9), considerando que todas las velocidades a tiempo igual a 0 son cero, se tiene

$$(1-\omega) u \bar{V}_m = \lambda \bar{V}_0 + \varepsilon \lambda \bar{V}_1 + \varepsilon \bar{V}_0^2 + 2\varepsilon^2 \bar{V}_0 \bar{V}_1 + \varepsilon^3 \bar{V}_1^2 - \lambda \bar{V}_m \tag{B.10}$$

Despejando  $\bar{V}_m$ , se tiene:

$$\bar{V}_m = \frac{\lambda \bar{V}_0 + \varepsilon \lambda \bar{V}_1 + \varepsilon \bar{V}_0^2 + 2\varepsilon^2 \bar{V}_0 \bar{V}_1 + \varepsilon^3 \bar{V}_1^2}{\lambda + u(1-\omega)} \tag{B.10}$$

Aplicando transformada de Laplace a (B.8) se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \lambda \frac{d^2 \bar{V}_0}{dr_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{d \bar{V}_0}{dr_D} + \lambda \varepsilon \frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{\lambda \varepsilon}{r_D} \frac{d \bar{V}_1}{dr_D} = \\
 & = \omega \lambda u \bar{V}_0 + \omega \lambda \varepsilon u \bar{V}_1 + \omega \varepsilon u \bar{V}_0^2 + 2\omega \varepsilon^2 u \bar{V}_0 \bar{V}_1 + \omega \varepsilon^3 u \bar{V}_1^2 + \\
 & + (1-\omega) \lambda u \bar{V}_m + \lambda \frac{\bar{V}_0}{r_D^2} + \lambda \varepsilon \frac{\bar{V}_1}{r_D^2}
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Sustituyendo (B.10) en (B.11)

$$\begin{aligned}
 & \lambda \frac{d^2 \bar{V}_0}{dr_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{d\bar{V}_0}{dr_D} + \lambda \varepsilon \frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{\lambda \varepsilon}{r_D} \frac{d\bar{V}_1}{dr_D} = \\
 & = \omega \lambda u \bar{V}_0 + \omega \lambda \varepsilon u \bar{V}_1 + \omega \varepsilon u \bar{V}_0^2 + 2\omega \varepsilon^2 u \bar{V}_0 \bar{V}_1 + \omega \varepsilon^3 u \bar{V}_1^2 + \\
 & + (1 - \omega) \lambda u \frac{\lambda \bar{V}_0}{\lambda + u(1 - \omega)} + (1 - \omega) \lambda u \frac{\varepsilon \lambda \bar{V}_1}{\lambda + u(1 - \omega)} + \\
 & + (1 - \omega) \lambda u \frac{\varepsilon \bar{V}_0^2}{\lambda + u(1 - \omega)} + (1 - \omega) \lambda u \frac{2\varepsilon^2 \bar{V}_0 \bar{V}_1}{\lambda + u(1 - \omega)} + \\
 & (1 - \omega) \lambda u \frac{\varepsilon^3 \bar{V}_1^2}{\lambda + u(1 - \omega)} + \lambda \frac{\bar{V}_0}{r_D^2} + \lambda \varepsilon \frac{\bar{V}_1}{r_D^2}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Agrupando por potencias de  $\varepsilon$  obtenemos:

$$\lambda \frac{d^2 \bar{V}_0}{dr_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{d\bar{V}_0}{dr_D} = \omega \lambda u \bar{V}_0 + (1 - \omega) \lambda u \frac{\lambda \bar{V}_0}{\lambda + u(1 - \omega)} + \lambda \frac{\bar{V}_0}{r_D^2} \tag{B.13}$$

, para  $\dots \varepsilon^0$

$$\begin{aligned}
 & \lambda \frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{\lambda}{r_D} \frac{d\bar{V}_1}{dr_D} = \omega \lambda u \bar{V}_1 + \omega u \bar{V}_0^2 + (1 - \omega) \lambda u \frac{\lambda \bar{V}_1}{\lambda + u(1 - \omega)} + \\
 & + (1 - \omega) \lambda u \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda + u(1 - \omega)} + \lambda \frac{\bar{V}_1}{r_D^2}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

para  $\dots \varepsilon^1$

$$0 = 2\omega u \bar{V}_0 \bar{V}_1 + (1 - \omega) \lambda u \frac{2\bar{V}_0 \bar{V}_1}{\lambda + u(1 - \omega)} \tag{B.15}$$

para  $\dots \varepsilon^2$

$$0 = \omega u \bar{V}_1^2 + (1 - \omega) \lambda u \frac{\bar{V}_1^2}{\lambda + u(1 - \omega)} \tag{B.16}$$

para  $\dots \varepsilon^3$

Como  $\varepsilon$  es muy pequeño se pueden despreciar los términos elevados a las potencias 2 y 3, con lo cual tenemos un sistema de ecuaciones (B.13) y (B.14) con dos incógnitas  $\bar{V}_0$  y  $\bar{V}_1$ , ya que al solucionar (B.13) obtendremos  $\bar{V}_0$  se antitransforma, se eleva al cuadrado y se vuelve a transformar para obtener  $\bar{V}_1$ .

Solucionando (B.13) se obtiene:

$$\frac{d^2 \bar{V}_0}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{V}_0}{dr_D} = \omega u \bar{V}_0 + (1-\omega)\lambda u \frac{\bar{V}_0}{\lambda + u(1-\omega)} + \frac{\bar{V}_0}{r_D^2}$$

$$\frac{d^2 \bar{V}_0}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{V}_0}{dr_D} = \left[ \frac{\omega u \lambda + \omega u^2 (1-\omega) + (1-\omega)\lambda u}{\lambda + u(1-\omega)} + \frac{1}{r_D^2} \right] \bar{V}_0$$

$$\frac{d^2 \bar{V}_0}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{V}_0}{dr_D} - \left[ u \frac{\omega u (1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)} + \frac{1}{r_D^2} \right] \bar{V}_0 = 0 \quad (B.17)$$

La ecuación (B.17) es una ecuación paramétrica de Bessel de orden 1.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left[ a^2 + \frac{v^2}{x^2} \right] y = 0$$

Cuya solución es:

$$y = A \cdot I_v(a \cdot x) + B \cdot K_v(a \cdot x)$$

Por lo que la solución de (B.13) es:

$$\bar{V}_0 = A \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u (1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + B \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u (1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (B.18)$$

La solución  $V_0$  corresponde a la solución para flujo laminar y en los siguientes apéndices se definirán a las constantes A y B.

Para la solución de (B.14) se sigue un proceso similar, simplificando :

$$\frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{V}_1}{dr_D} = \omega u \bar{V}_1 + \frac{\bar{V}_1}{r_D^2} + (1-\omega)u \frac{\lambda \bar{V}_1}{\lambda + u(1-\omega)} +$$

$$+ (1-\omega)u \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda + u(1-\omega)} + \frac{\omega u \bar{V}_0^2}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{V}_1}{dr_D} &= \left( \frac{\omega u \lambda + \omega u^2 (1 - \omega) + (1 - \omega) u \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)} + \frac{1}{r_D^2} \right) \bar{V}_1 \\ &+ \frac{(1 - \omega) u \lambda + \lambda \omega u + \omega u^2 (1 - \omega)}{\lambda(\lambda + u(1 - \omega))} \bar{V}_0^2 \\ \frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{V}_1}{dr_D} &= \left( u \frac{\omega u (1 - \omega) + \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)} + \frac{1}{r_D^2} \right) \bar{V}_1 \\ &+ \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u (1 - \omega)}{\lambda + u(1 - \omega)} \bar{V}_0^2 \end{aligned} \quad (B.19)$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria que se puede resolver mediante variación de parámetros ( método de Lagrange ).

Solucionando la ecuación homogénea correspondiente, se observa que es una ecuación Bessel de orden 1.

$$\frac{d^2 \bar{V}_1}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{V}_1}{dr_D} - \left( u \frac{\omega u (1 - \omega) + \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)} + \frac{1}{r_D^2} \right) \bar{V}_1 = 0$$

Por lo que su solución será:

$$\bar{V}_{1g} = C \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u (1 - \omega) + \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)}} \right) + D \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u (1 - \omega) + \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)}} \right) \quad (B.20)$$

Si  $g(r_D)$  se define como:

$$g(r_D) = \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u (1 - \omega)}{\lambda + u(1 - \omega)} \bar{V}_0^2 \quad (B.21)$$

Si se define:

$$\begin{aligned} y_1 &= I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u (1 - \omega) + \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)}} \right) \\ y_2 &= K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u (1 - \omega) + \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)}} \right) \end{aligned} \quad (B.22)$$

Por lo que la solución particular de esta ecuación será:

$$y_p = -y_1(r_D) \int^{r_D} \frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx + y_2(r_D) \int^{r_D} \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx \quad (B.23)$$

Si definimos una variable de trabajo  $a$  como:

$$a = \sqrt{u \frac{\omega u(1 - \omega) + \lambda}{\lambda + u(1 - \omega)}} \quad (B.24)$$

Para encontrar la solución particular se determina el Wronskiano:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = I_1(a \cdot x) \cdot K_1'(a \cdot x) - I_1'(a \cdot x) \cdot K_1(a \cdot x) \quad (B.25)$$

De Abramowitz<sup>30</sup> se tienen las siguientes relaciones:

$$K_1'(a \cdot x) = -\frac{a \cdot K_0(a \cdot x) + a \cdot K_2(a \cdot x)}{2};$$

$$I_1'(a \cdot x) = \frac{a \cdot I_0(a \cdot x) + a \cdot I_2(a \cdot x)}{2} \quad (B.26)$$

Sustituyendo (B.26) en (B.25) se tiene:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = -\frac{a \cdot K_0(a \cdot x) + a \cdot K_2(a \cdot x)}{2} I_1(a \cdot x)$$

$$- \frac{a \cdot I_0(a \cdot x) + a \cdot I_2(a \cdot x)}{2} \cdot K_1(a \cdot x)$$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = -\frac{a}{2} \left[ K_0(a \cdot x)I_1(a \cdot x) + K_2(a \cdot x)I_1(a \cdot x) + \right. \quad (B.27)$$

$$\left. + I_0(a \cdot x)K_1(a \cdot x) + I_2(a \cdot x)K_1(a \cdot x) \right]$$

De Abramowitz<sup>30</sup> se tiene la siguiente relación:

$$K_{\nu+1}(z)I_{\nu}(z) + K_{\nu}(z)I_{\nu+1}(z) = \frac{1}{z} \quad (B.28)$$

Sustituyendo (B.28) en (B.27)

$$W[y_1(x), y_2(x)] = -\frac{a}{2} \left[ \frac{1}{ax} + \frac{1}{ax} \right] = -\frac{a}{2} \frac{2}{ax} = -\frac{1}{x} \quad (B.29)$$



Por lo que la solución de (B.19) será:

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_{1g} = & C \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + D \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \\
 & + I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_0^D K_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx + \\
 & - K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_0^D I_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

En los siguientes apéndices se desarrollan las condiciones de frontera para encontrar los valores de A, B, C y D.

**APÉNDICE C. CONDICIONES DE FRONTERA.**

Para un yacimiento cilindrico se tienen las siguientes condiciones de frontera espaciales. Considerando pruebas a presión de fondo constante se tiene:

$$v_f \Big|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \tag{C.1}$$

$$p_i - p_{wf} = \int_1^{reD} \frac{r_w \mu}{k_f} v_f dr_D + \int_1^{reD} r_w \beta \rho v_f^2 dr_D \tag{C.2}$$

Como la función a definir de acuerdo a las ecuaciones propuestas en el Apéndice B está dada por (A.24).

$$V_f = \frac{v_f}{k_f} \tag{A.24}$$

Las ecuaciones (C.1) y (C.2) se escriben como:

$$V_f \Big|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \tag{C.3}$$

$$p_i - p_{wf} = \int_1^{reD} r_w \mu V_f dr_D + \int_1^{reD} r_w \beta \rho k_f^2 V_f^2 dr_D \tag{C.4}$$

Además de los Apéndices A y B se tienen las siguientes relaciones

$$\varepsilon = \frac{\beta \rho \lambda k_f^2}{\mu} \tag{B.3}$$

$$V_f = V_0 + \varepsilon V_1 \tag{B.6}$$

De (B.3) se puede expresar:

$$\beta \rho k_f^2 = \frac{\mu \varepsilon}{\lambda} \tag{C.5}$$

Sustituyendo (C.5) en (C.4) se tiene:

$$p_i - p_{wf} = \int_1^{reD} r_w \mu V_f dr_D + \int_1^{reD} \frac{r_w \mu}{\lambda} \varepsilon V_f^2 dr_D$$

Sustituyendo (B.6) en la ecuación anterior se tiene:

$$p_i - p_{wf} = \int_1^{reD} r_w \mu (V_0 + \varepsilon V_1) dr_D + \int_1^{reD} \frac{r_w \mu}{\lambda} \varepsilon (V_0^2 + 2\varepsilon V_0 V_1 + \varepsilon^2 V_1^2) dr_D \quad (C.6)$$

Separando (C.6) en función a las potencias de  $\varepsilon$  se tiene:

$$p_i - p_{wf} = \int_1^{reD} r_w \mu V_0 dr_D \dots \dots \dots \text{para } \varepsilon^0 \quad (C.7)$$

$$\int_1^{reD} \frac{r_w \mu}{\lambda} V_0^2 dr_D = - \int_1^{reD} r_w \mu V_1 dr_D \dots \dots \dots \text{para } \varepsilon^1 \quad (C.8)$$

$$0 = \int_1^{reD} \frac{2r_w \mu}{\lambda} V_0 V_1 dr_D \dots \dots \dots \text{para } \varepsilon^2 \quad (C.9)$$

$$0 = \int_1^{reD} V_1^2 dr_D \dots \dots \dots \text{para } \varepsilon^3 \quad (C.10)$$

Por lo que las condiciones de frontera espacial quedan :

$$V_0|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \quad (C.11)$$

$$V_1|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \quad (C.12)$$

Conjuntamente con las ecuaciones (C.7) y (C.8), las ecuaciones (C.9) y (C.10) se encuentran multiplicadas por los coeficientes  $\varepsilon^2$  y  $\varepsilon^3$  respectivamente, y al ser  $\varepsilon$  un valor muy pequeño sus potencias serán más pequeñas por lo que se consideran despreciables.

Aplicando transformada de Laplace a (C.7), (C.8), (C.11) y (C.12) se tiene:

$$\overline{V_0}|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \quad (C.13)$$

$$\overline{V_1}|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \quad (C.14)$$

$$\frac{p_i - p_{wf}}{u} = \int_1^{reD} r_w \mu \overline{V_0} dr_D \quad (C.15)$$

$$0 = \int_1^{reD} \overline{V_1} dr_D + \int_1^{reD} \frac{\overline{V_0}^2}{\lambda} dr_D \quad (C.16)$$

Con lo que se tienen las condiciones de frontera interna y externa en el espacio de Laplace.

Para el caso de yacimientos infinitos, las condiciones de frontera serán las mismas, donde :

$$r_{eD} \rightarrow \infty \quad (C.17)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**APÉNDICE D. SOLUCIÓN YACIMIENTO INFINITO FLUJO LAMINAR**

La solución de (B.13) está dada por:

$$\bar{V}_0 = A \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + B \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (B.18)$$

A presión de fondo constante las condiciones de frontera están dadas por:

$$\bar{V}_0 \Big|_{r_D \rightarrow \infty} = 0 \quad (C.13)$$

$$\frac{P_i - P_{wf}}{u} = \int_1^{\infty} r_w \mu \bar{V}_0 dr_D \quad (C.15)$$

Empleando (C.13) y (C.15) como las condiciones de frontera para la solución (B.18) se tiene:

$$\bar{V}_0 \Big|_{r_D \rightarrow \infty} = A \cdot I_1 \left( \infty \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + B \cdot K_1 \left( \infty \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right)$$

$$\rightarrow A = 0 \quad (D.1)$$

$$\frac{P_i - P_{wf}}{u} = \int_1^{\infty} r_w \mu B \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) dr_D$$

$$\frac{P_i - P_{wf}}{u r_w \mu} = \frac{B}{\sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}}} \int_1^{\infty} K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} dr_D$$

$$\frac{P_i - P_{wf}}{u r_w \mu} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} = -B \left[ K_0 \left( \infty \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) - K_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \right]$$

$$B = \frac{P_i - P_{wf}}{u r_w \mu} \frac{\sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}}}{K_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right)} \quad (D.2)$$

Sustituyendo (D.1) y (D.2) en (B.18) se tiene:

$$\bar{V}_0 = \frac{p_i - p_{wf}}{ur_w \mu} \frac{\sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}}}{K_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right)} K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (D.3)$$

Donde (D.3) es la solución en el espacio de Laplace para un yacimiento de doble porosidad infinito considerando flujo laminar.

Para obtener la solución en espacio real se emplean las aproximaciones que presenta Da Prat:

Para argumentos muy grandes:

$$I_1(z) \approx I_0(z) \approx \frac{Exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \quad (D.4)$$

$$K_1(z) \approx K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Exp(-z) \quad (D.5)$$

Para argumentos pequeños:

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{1}{4} z^2 \quad (D.6)$$

$$I_1(z) \approx \frac{1}{2} z + \frac{1}{16} z^3 \quad (D.7)$$

$$K_0(z) \approx - \left[ \ln \frac{z}{2} + \gamma \right] \quad (D.8)$$

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z} \quad (D.9)$$

Para tiempos pequeños se tienen u muy grandes por lo que empleando (D.5) en (D.3) queda:

$$\bar{V}_0 = \frac{p_i - p_{wf}}{ur_w \mu} \frac{\sqrt{u \omega} \sqrt{\frac{\pi}{2r_D \sqrt{u \omega}} Exp[-r_D \sqrt{u \omega}]} }{\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{u \omega}} Exp[-\sqrt{u \omega}]}}$$

$$\bar{V}_0 = \frac{(p_i - p_{wf})\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D r_w \mu}} \frac{\text{Exp}[-\sqrt{u\omega}(r_D - 1)]}{\sqrt{u}} \quad (\text{D.10})$$

De Spiegel<sup>44</sup> se tiene la siguiente transformación:

$$F(u) = \frac{\text{Exp}[-a\sqrt{u}]}{\sqrt{u}} \rightarrow f(t) = \frac{\text{Exp}\left[-\frac{a^2}{4t}\right]}{\sqrt{\pi t}} \quad (\text{D.11})$$

Por lo que antitransformando (D.10) se tiene:

$$V_0(r_D, t_D) = \frac{(p_i - p_{wf})\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D r_w \mu}} \frac{\text{Exp}\left[-\frac{\omega(r_D - 1)^2}{4t_D}\right]}{\sqrt{\pi t_D}} \quad (\text{D.12})$$

Por lo que (D.12) es la solución para un yacimiento de doble porosidad considerando presión de fondo fluyendo constante y flujo laminar a tiempos cortos.

Verificando (D.12) con la solución dada por Da Prat a  $r_D = 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} V_0(1, t_D) &= \frac{(p_i - p_{wf})\sqrt{\omega}}{r_w \mu \sqrt{\pi t_D}} \\ \frac{2\pi v_0 r_w h \mu}{2\pi h k_f (p_i - p_{wf})} &= \frac{q \mu}{2\pi h k_f (p_i - p_{wf})} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\pi t_D}} \\ q_D &= \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\pi t_D}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\frac{t_D}{\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Donde (D.13) es la solución dada por Da Prat a tiempos cortos a nivel de pozo.

Para tiempos largos se sustituye (D.8) y (D.9) en (D.3):

$$\bar{V}_0 = \frac{p_i - p_{wf}}{u r_w \mu} \frac{\sqrt{u}}{\left(\ln \frac{\sqrt{u}}{2} + \gamma\right)} \frac{1}{r_D \sqrt{u}} \quad (\text{D.14})$$

$$\bar{V}_0 = -\frac{p_i - p_{wf}}{r_D r_w \mu} \frac{1}{u \ln\left(\frac{\sqrt{u}}{2} e^\gamma\right)}$$

$$\bar{V}_0 = -\frac{(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \frac{1}{u \ln\left(\sqrt{\frac{u}{4}} e^{2\gamma}\right)} = -\frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \frac{1}{u \ln\left(\frac{u}{4} e^{2\gamma}\right)} \quad (D.15)$$

De Roberts<sup>43</sup> se tiene la siguiente transformación:

$$F(u) = \frac{1}{u \ln \frac{u}{a}} \rightarrow f(t) = \int_0^\infty \frac{(at)^x}{\Gamma(x+1)} dx \quad (D.16)$$

Antitransformando (D.15) mediante (D.16) se tiene:

$$V_0 = -\frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \int_0^\infty \frac{\left[\frac{4}{e^{2\gamma}} t_D\right]^x}{\Gamma(x+1)} dx \quad (D.17)$$

Considerando la aproximación propuesta por Davis, tomada de Abramowitz<sup>32</sup>, y considerando los tres primeros términos:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} \approx (x+1) + 0.57721(x+1)^2 - 0.65587(x+1)^3 \quad (D.18)$$

Calculando la integral en (D.17) y sustituyendo (D.18) se tiene:

$$\int_0^\infty y^x \left( (x+1) + 0.57721(x+1)^2 - 0.65587(x+1)^3 \right) dx =$$

$$= -\frac{3.93523}{\ln^4 y} + \frac{2.78079}{\ln^3 y} + \frac{0.18681}{\ln^2 y} - \frac{0.92134}{\ln y}$$

Como  $y \gg \gg \gg 1$ , se tiene:

$$\frac{1}{\ln^4 y} \approx \frac{1}{\ln^3 y} \approx \frac{1}{\ln^2 y} \approx 0$$

Entonces:



$$\int_0^{\infty} \frac{y^x}{\Gamma(x+1)} dx \approx -\frac{0.92134}{\ln y} \quad (D.19)$$

Sustituyendo (D.19) en (D.17) se tiene:

$$V_0 = \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \frac{0.92134}{\ln t_D + 0.2318} \quad (D.20)$$

Verificando (D.20) con la solución dada por Da Prat a  $r_D=1$  se tiene:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \frac{0.92134}{\ln t_D + 0.2318} \\ \frac{2\pi\nu_0 r_w h \mu}{2\pi k_f h (p_i - p_{wf})} &= \frac{q\mu}{2\pi k_f (p_i - p_{wf})} = \frac{2(0.92134)}{\ln t_D + 0.2318} \\ q_D &= \frac{1.84268}{\ln t_D + 0.2318} \end{aligned} \quad (D.21)$$

Lo que es una aproximación a la solución dada por Da Prat.

$$q_D = \frac{2}{\ln t_D + 0.80907} \quad (D.22)$$

Si se emplea (D.17) para la obtención de  $q_D$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\nu_0 r_w h \mu}{2\pi k_f h (p_i - p_{wf})} &= \frac{q\mu}{2\pi k_f h (p_i - p_{wf})} = -2 \int_0^{\infty} \frac{\left[ \frac{4}{e^{2\gamma} t_D} \right]^x}{\Gamma(x+1)} dx \\ q_D &= -2 \int_0^{\infty} \frac{\left[ \frac{4}{e^{2\gamma} t_D} \right]^x}{\Gamma(x+1)} dx \end{aligned} \quad (D.23)$$

Al realizar una comparación entre las soluciones dadas por (D.21), (D.22) y (D.23) se observa que la mejor aproximación la produce (D.23)

**APÉNDICE E. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTOS CERRADOS FLUJO LAMINAR.**

Debido a la dificultad que implica una de las condiciones de frontera, debido a que es necesario conocer el valor de la presión en la frontera externa, se emplea el sistema de ecuaciones diferenciales equivalente en función de la presión adimensional para solucionar el problema.

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + (1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} \quad (\text{E.1})$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} = \lambda (p_{fD} - p_{mD}) \quad (\text{E.2})$$

Donde:

$$p_{fD} = \frac{p_i - p_f}{p_i - p_{wf}} \quad (\text{E.3})$$

$$t_D = \frac{k_f t}{[(\phi C)_m + (\phi C)_f] \mu r_w^2} \quad (\text{E.4})$$

Para un yacimiento circular cerrado se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$p_{fD} \Big|_{r_D \rightarrow 0} = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$p_{fD} \Big|_{r_D=1, t_D > 0} = 1 \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_eD, t_D > 0} = 0 \quad (\text{E.7})$$

Aplicando la transformada de Laplace a (E.1) y a (E.2) se obtiene:

$$\frac{d^2 \overline{p_{fD}}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \overline{p_{fD}}}{dr_D} = \omega u \overline{p_{fD}} + (1 - \omega) u \overline{p_{mD}} \quad (\text{E.8})$$

$$(1 - \omega) u \overline{p_{mD}} = \lambda (\overline{p_{fD}} - \overline{p_{mD}}) \quad (\text{E.9})$$

Despejando la transformada de  $p_{mD}$  de (E.9) y sustituyéndola en (E.8) se tiene:

$$\frac{d^2 \overline{p_D}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \overline{p_D}}{dr_D} = \omega u \overline{p_D} + \frac{(1-\omega)u\lambda}{\lambda + u(1-\omega)} \overline{p_D} \quad (E.10)$$

Rearreglando (E.10) se tiene:

$$r_D^2 \frac{d^2 \overline{p_D}}{dr_D^2} + r_D \frac{d \overline{p_D}}{dr_D} - r_D^2 u \frac{\omega(1-\omega)u + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)} \overline{p_D} = 0 \quad (E.11)$$

La ecuación (E.10) es una ecuación paramétrica de Bessel de orden cero, cuya solución es:

$$\overline{p_D} = A \cdot I_0 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) + B \cdot K_0 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) \quad (E.12)$$

Aplicando transformada de Laplace a (E.6) y a (E.7) se tiene:

$$\overline{p_D} \Big|_{r_D=1} = \frac{1}{u} \quad (E.13)$$

$$\frac{d \overline{p_D}}{dr_D} \Big|_{r_D=r_{eD}} = 0 \quad (E.14)$$

Aplicando las condiciones de frontera a (E.12) se tiene:

$$\frac{1}{u} = A \cdot I_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) + B \cdot K_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) = \quad (E.15)$$

$$= A \cdot c + B \cdot d$$

$$0 = A \cdot I_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} + \quad (E.16)$$

$$- B \cdot K_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} = A \cdot a - B \cdot b$$

Rearreglando (E.15) y (E.16) se tiene:

$$A \cdot a - B \cdot b = 0 \rightarrow B = \frac{a \cdot A}{b}$$

$$A \cdot c + B \cdot d = \frac{1}{u} \rightarrow A \cdot c + \frac{a \cdot d}{b} \cdot A = \frac{1}{u} \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{u \left( c + \frac{a \cdot d}{b} \right)} \rightarrow B = \frac{a}{b} \frac{1}{u \left( c + \frac{a \cdot d}{b} \right)}$$

Por lo que la transformada de  $p_{fD}$  se puede escribir como:

$$\overline{p_{fD}} = \frac{1}{u \left[ I_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) + \frac{K_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) I_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)}{K_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)} \right]} \quad (E.17)$$

$$\left\{ I_0 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) + \frac{I_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)}{K_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)} \cdot K_0 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) \right\}$$

Para encontrar la variable  $V_f^l$  se emplea la ley de Darcy:

$$\frac{v_f}{k_f} = \frac{-(p_i - p_{wf})}{\mu r_w} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \rightarrow \overline{V_0} = \frac{-(p_i - p_{wf})}{\mu r_w} \frac{d \overline{p_{fD}}}{dr_D} \quad (E.18)$$

Obteniendo la derivada de (E.17) :

$$\frac{d \overline{p_{fD}}}{dr_D} = \frac{\sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}}}{u \left[ I_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) + \frac{K_0 \left( \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) I_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)}{K_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)} \right]} \quad (E.19)$$

$$\left\{ I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) - \frac{I_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)}{K_1 \left( r_{eD} \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right)} \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega)+\lambda}{u(1-\omega)+\lambda}} \right) \right\}$$

Para tiempos pequeños ( $u$  grandes) se tienen las aproximaciones:

$$I_1(z) \approx I_0(z) \approx \frac{\text{Exp}(z)}{\sqrt{2\pi z}} \quad (\text{D.4})$$

$$K_1(z) \approx K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \text{Exp}(-z) \quad (\text{D.5})$$

Considerando además:

$$\sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} = \sqrt{u\omega} \quad (\text{E.20})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{p_{fD}}}{dr_D} &= \frac{\sqrt{u\omega} \{K_1(r_{eD}\sqrt{u\omega}) \cdot I_1(r_D\sqrt{u\omega}) - I_1(r_{eD}\sqrt{u\omega}) \cdot K_1(r_D\sqrt{u\omega})\}}{u[K_1(r_{eD}\sqrt{u\omega}) \cdot I_0(\sqrt{u\omega}) + K_0(\sqrt{u\omega})I_1(r_{eD}\sqrt{u\omega})]} \\ \frac{d\overline{p_{fD}}}{dr_D} &= \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{u}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2r_{eD}\sqrt{u\omega}} \frac{e^{-r_{eD}\sqrt{u\omega}} e^{r_D\sqrt{u\omega}}}{\sqrt{2\pi r_D\sqrt{u\omega}}}} - \sqrt{\frac{\pi}{2r_D\sqrt{u\omega}} \frac{e^{-r_D\sqrt{u\omega}} e^{r_{eD}\sqrt{u\omega}}}{\sqrt{2\pi r_{eD}\sqrt{u\omega}}}} \right\} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2r_{eD}\sqrt{u\omega}} \sqrt{2\pi r_D\sqrt{u\omega}} + \sqrt{2\sqrt{u\omega}} \sqrt{2\pi r_{eD}\sqrt{u\omega}}} \\ \frac{d\overline{p_{fD}}}{dr_D} &= \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D u}} \frac{\text{Exp}(-\{r_{eD} - r_D\}\sqrt{u\omega}) - \text{Exp}(\{r_{eD} - r_D\}\sqrt{u\omega})}{\text{Exp}(-\{r_{eD} - 1\}\sqrt{u\omega}) + \text{Exp}(\{r_{eD} - 1\}\sqrt{u\omega})} \end{aligned}$$

Realizando un rearrreglo y considerando las definiciones de las funciones hiperbólicas se tiene:

$$\frac{d\overline{p_{fD}}}{dr_D} = -\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D u}} \text{Senh}(\{r_{eD} - r_D\}\sqrt{u\omega}) \text{Sech}(\{r_{eD} - 1\}\sqrt{u\omega}) \quad (\text{E.21})$$

Aplicando la transformada inversa de la Laplace se tiene:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \text{Senh}(b\sqrt{u}) \text{Sech}(a\sqrt{u}) \rightarrow F(t) = \frac{1}{a} \theta_1 \left( \frac{b}{2a} \middle| \frac{t}{a^2} \right) \quad (\text{E.22})$$

Donde :

$$\theta_1(c|x) = \frac{1}{(\pi x)^{0.5}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n \text{Exp} \left[ -\frac{1}{x} \left( c - \frac{1}{2} + n \right)^2 \right] \quad (\text{E.23})$$

Entonces :

$$\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = -\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D}} \frac{1}{\sqrt{\pi t_D}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n \text{Exp} \left[ -\frac{\omega}{4t_D} (-r_D + 1 + 2n(r_{eD} - 1))^2 \right]$$

$$\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = -\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D}} \frac{1}{\sqrt{\pi t_D}} \text{Exp} \left[ -\frac{\omega}{4t_D} (r_D - 1)^2 \right] \quad (\text{E.24})$$

Empleando (E.24) en (E.18) se tiene:

$$V_0 = \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D}} \frac{1}{\sqrt{\pi t_D}} \text{Exp} \left[ -\frac{\omega}{4t_D} (r_D - 1)^2 \right] \quad (\text{E.25})$$

La ecuación (E.25) corresponde a la misma solución dada por (D.12) para un yacimiento infinito a tiempos cortos, lo que corresponde por no detectarse efectos de frontera a estos tiempos.

Para tiempos largos (  $u$  pequeñas) se tienen las siguientes aproximaciones:

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{1}{4} z^2 \quad (\text{E.26})$$

$$I_1(z) \approx \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^3 \quad (\text{E.27})$$

$$K_0(z) \approx -\left[ \ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{1}{4} z^2 \left[ \ln \frac{z}{2} + \gamma \right] + \frac{1}{4} z^2 \quad (\text{E.28})$$

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \ln \left( \frac{z}{2} \right) + \frac{z^2}{16} \ln \left( \frac{z}{2} \right) - \frac{z}{2} (-2\gamma + 1) - \frac{z^3}{16} \left( -2\gamma + \frac{5}{2} \right) \quad (\text{E.29})$$

Considerando la siguiente definición:

$$x = u \frac{\omega u (1 - \omega) + \lambda}{u (1 - \omega) + \lambda} \quad (\text{E.30})$$

Rearreglando (E.19) se obtiene:

$$\frac{d\overline{p}_{fD}}{dr_D} = \frac{\sqrt{x} I_1(r_{eD}\sqrt{x})K_1(r_D\sqrt{x}) - I_1(r_{eD}\sqrt{x})K_1(r_D\sqrt{x})}{u \left[ K_1(r_{eD}\sqrt{x})I_0(\sqrt{x}) + K_0(\sqrt{x})I_1(r_{eD}\sqrt{x}) \right]} \quad (E.31)$$

Se desarrollan los productos para encontrar la aproximación a (E.31) para tiempos grandes, una vez hecho esto, se desprecian los términos que contengan  $\gamma^v$ , donde  $v >= 3/2$ .

$$K_1(r_{eD}\sqrt{x})I_0(\sqrt{x}) = \frac{1}{r_{eD}\sqrt{x}} \left[ 1 + \frac{r_{eD}^2 x}{2} \ln\left(\frac{r_{eD}\sqrt{x}}{2}\right) - \frac{r_{eD}^2 x}{2} (-2\gamma + 1) + \frac{x}{4} \right] \quad (E.32)$$

$$I_1(r_{eD}\sqrt{x})K_0(\sqrt{x}) = \frac{1}{r_{eD}\sqrt{x}} \left[ -\frac{r_{eD}^2 x}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \frac{\gamma r_{eD}^2 x}{2} \right] \quad (E.33)$$

La suma de (E.32) y (E.33) produce:

$$\begin{aligned} & K_1(r_{eD}\sqrt{x})I_0(\sqrt{x}) + I_1(r_{eD}\sqrt{x})K_0(\sqrt{x}) = \\ & = \frac{1}{r_{eD}\sqrt{x}} \left[ 1 + \left( \frac{r_{eD}^2}{2} \ln(r_{eD}) - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right) x \right] \end{aligned} \quad (E.34)$$

De igual forma se procede con los productos del numerador:

$$K_1(r_{eD}\sqrt{x})I_1(r_D\sqrt{x}) = \frac{r_D}{2r_{eD}} + \frac{r_D r_{eD} x}{4} \ln\left(\frac{r_{eD}\sqrt{x}}{2}\right) - \frac{r_D r_{eD} x (-2\gamma + 1)}{4} + \frac{x r_D^3}{16r_{eD}} \quad (E.35)$$

$$I_1(r_{eD}\sqrt{x})K_1(r_D\sqrt{x}) = \frac{r_{eD}}{2r_D} + \frac{r_D r_{eD} x}{4} \ln\left(\frac{r_D\sqrt{x}}{2}\right) - \frac{r_D r_{eD} x (-2\gamma + 1)}{4} + \frac{x r_{eD}^3}{16r_D} \quad (E.36)$$

Sustituyendo (E.34) en (E.31) se tiene:

$$\frac{d\overline{p}_{fD}}{dr_D} = \frac{r_{eD} x I_1(r_{eD}\sqrt{x})K_1(r_D\sqrt{x}) - I_1(r_{eD}\sqrt{x})K_1(r_D\sqrt{x})}{u \left[ 1 + \left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right] x \right]} \quad (E.37)$$

Restando a (E.35) (E.36), y multiplicando por  $r_D x$ , se tiene:

$$r_{eD}x \left[ K_1(r_{eD}\sqrt{x}) I_1(r_D\sqrt{x}) - I_1(r_{eD}\sqrt{x}) K_1(r_D\sqrt{x}) \right] = \frac{r_D}{2} x - \frac{r_{eD}^2 x}{2r_D} \quad (E.38)$$

Sustituyendo (E.38) en (E.37) se tiene:

$$\frac{d \overline{p_{fD}}}{dr_D} = \frac{x}{u} \frac{\frac{r_D}{2} - \frac{r_{eD}^2}{2}}{1 + \left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right] x} \quad (E.39)$$

Sustituyendo (E.30) en (E.39) y reorganizando, se tiene:

$$\frac{d \overline{p_{fD}}}{dr_D} = \frac{\frac{r_D^2 - r_{eD}^2}{2r_D}}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \frac{u + a}{u^2 + bu + c} \quad (E.40)$$

Donde:

$$a = \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} \quad (E.41)$$

$$b = a + \frac{1}{\omega \left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \quad (E.42)$$

$$c = \frac{a}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \quad (E.43)$$

De Roberts<sup>43</sup>, se obtiene la transformada inversa de (E.40):

$$F(u) = \frac{u + a}{u^2 + bu + c} \rightarrow f(t) = \frac{(a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t)}{r_2 - r_1} \quad (E.44)$$



Donde  $-r_1$  y  $-r_2$  son las raíces de la ecuación  $u^2 + bu + c = 0$ , por lo cual:

$$\frac{\partial p_{fd}}{\partial r_D} = \frac{\frac{r_D^2 - r_{eD}^2}{2r_D} (a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right] (r_2 - r_1)} \quad (\text{E.45})$$

Donde :

$$-r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (\text{E.46})$$

$$-r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (\text{E.47})$$

y  $a$ ,  $b$  y  $c$  están dados por las ecuaciones (E.41) a (E.43). Por lo que  $q_D$  y  $V_0$ , se pueden escribir como:

$$q_D = \frac{\frac{r_{eD}^2 - r_D^2}{2r_D} (a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right] (r_2 - r_1)} \quad (\text{E.48})$$

$$V_0 = \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \frac{\frac{r_{eD}^2 - r_D^2}{2r_D} (a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right] (r_2 - r_1)} \quad (\text{E.49})$$

Cabe hacer mención que (E.48) es más precisa que la presentada por Da Prat<sup>6</sup>.

**APÉNDICE F. SOLUCIÓN PARA FLUJO ESTACIONARIO.**

De la ecuación de difusividad se tienen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_f) = (\phi VC)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + (\phi VC)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \tag{A.7}$$

$$(1-\omega) \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\lambda k_f}{((\phi VC)_f + (\phi VC)_m) \mu w^2} (p_f - p_m) \tag{A.21}$$

Para flujo estacionario se tiene que:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = 0, \dots \text{donde } i = f, m \tag{F.1}$$

Sustituyendo (F.1) en (A.7) y (A.21) se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_f) = 0 \tag{F.2}$$

$$p_f = p_m \tag{F.3}$$

Si se despeja  $v_f$  de (F.2) se tiene:

$$\begin{aligned} d(rv_f) &= 0 \\ rv_f &= A \\ v_f &= \frac{A}{r} \end{aligned} \tag{F.4}$$

Sustituyendo (F.4) en la ecuación de Forchheimer (A.1), se tiene:

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\mu}{k_f} \frac{A}{r} + \beta \rho \frac{A^2}{r^2} \tag{F.5}$$

Integrando (F.5) se tiene:

$$p_f = \frac{\mu}{k_f} A \ln(r) - \beta \rho \frac{A^2}{r} + C \tag{F.5}$$

Como se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$p_f|_{r_e} = p_i \quad (F.6)$$

$$p_f|_{r_w} = p_{wf} \quad (F.7)$$

Sustituyendo (F.6) y (F.7) en (F.5) se tiene:

$$p_i = \frac{\mu}{k_f} A \ln(r_e) - \beta \rho \frac{A^2}{r_e} + C \quad (F.8)$$

$$p_{wf} = \frac{\mu}{k_f} A \ln(r_w) - \beta \rho \frac{A^2}{r_w} + C \quad (F.9)$$

Restando de (F.8) a (F.9) se tiene:

$$p_i - p_{wf} = \frac{\mu}{k_f} A [\ln(r_e) - \ln(r_w)] - \beta \rho A^2 \left[ \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right] \quad (F.10)$$

Rearreglando (F.10) se tiene:

$$A^2 - \frac{\mu}{k_f} \frac{A \left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right]} + \frac{(p_i - p_{wf})}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right]} = 0 \quad (F.11)$$

Solucionando (F.11) en términos de A, se tiene:

$$A = \frac{\mu}{2k_f} \frac{\left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right]} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \frac{\mu}{k_f} \frac{\left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right]} \right]^2 + 4 \frac{(p_i - p_{wf})}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]}}$$

$$A = \frac{\mu}{2k_f} \frac{\left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]} \left[ \sqrt{1 + 4 \frac{(p_i - p_{wf}) k_f \beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]}{\mu^2 \ln^2 \left[ \frac{r_e}{r_w} \right]}} - 1 \right] \quad (F.12)$$

Por lo que el gasto se define como:

$$q_o = \frac{\mu}{2k_f} \frac{\left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right]}{\beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]} \left[ \sqrt{1 + 4 \frac{(p_i - p_{wf}) k_f \beta \rho \left[ \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right]}{\mu^2 \ln^2 \left[ \frac{r_e}{r_w} \right]}} - 1 \right] 2\pi h \quad (\text{F.13})$$

Y el gasto adimensional como:

$$q_D = \frac{q_o \mu}{2\pi k_f (p_i - p_{wf}) h} \quad (\text{F.13})$$

**APÉNDICE G. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO INFINITO TIEMPOS CORTOS  
FLUJO NO LAMINAR.**

Del Apéndice D se tiene que:

$$V_0(r_D, t_D) = \frac{(p_i - p_{wf})\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D r_w \mu}} \frac{\text{Exp} \left[ -\frac{\omega(r_D - 1)^2}{4t_D} \right]}{\sqrt{\pi t_D}} \quad (\text{D.12})$$

Por lo que :

$$V_0^2 = \left[ \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right]^2 \frac{\omega}{\pi r_D} \frac{\text{Exp} \left[ -\frac{\omega(r_D - 1)^2}{2t_D} \right]}{t_D} \quad (\text{G.1})$$

Para encontrar  $\bar{V}_1$  se evalúa la solución dada por:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 = & C \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + D \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \\ & + I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) E - K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) F \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Donde:

$$E = \int_0^{r_D} K_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx + \quad (\text{G.2})$$

$$F = \int_0^{r_D} I_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx \quad (\text{G.3})$$

Por lo que se observa de (B.30) se necesita  $\bar{V}_0^2$ ; sin embargo, el empleo de la transformada directa presenta ciertos problemas dentro de los desarrollos, por lo que se procede a emplear el teorema del valor medio definido en Spiegel<sup>44</sup>, dado por:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \dots \dots a < c < b \tag{H.1}$$

Por lo que por la definición de Transformada de Laplace, se tiene:

$$\int_0^\infty e^{-ut} V_0 \overline{V_0} dt = V_0(\tilde{t}) \overline{V_0} \tag{H.2}$$

Por lo que la transformada de  $V_0^2$  se puede escribir como:

$$\overline{V_0^2} = \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\pi r_D} \frac{1}{\sqrt{\tilde{t}_D}} \int_0^\infty \frac{Exp[-ut_D]}{\sqrt{t_D}} Exp\left[-\frac{\omega(r_D - 1)^2}{2t_D}\right] dt_D \tag{G.4}$$

De Spiegel<sup>41</sup> se tiene la siguiente transformación:

$$f(t) = \frac{Exp\left[-\frac{a}{4t}\right]}{\sqrt{t}} \rightarrow F(u) = \frac{\sqrt{\pi} Exp[-2\sqrt{au}]}{\sqrt{u}} \tag{G.5}$$

Entonces:

$$\overline{V_0^2} = \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\sqrt{\pi} r_D} \frac{1}{\sqrt{\tilde{t}_D}} \frac{1}{\sqrt{u}} Exp[-\sqrt{2\omega u}(r_D - 1)] \tag{G.6}$$

Sustituyendo (G.6) en (G.2) y empleando:

$$K_1(r_D \sqrt{u\omega}) = \frac{\sqrt{\pi} Exp[-r_D \sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2r_D} \sqrt{u\omega}}$$

$$E = \int_0^{r_D} \frac{\sqrt{\pi} Exp[-x\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2r_D} \sqrt{u\omega}} \frac{u\omega}{\lambda} x \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\sqrt{\pi} x} \frac{1}{\sqrt{\tilde{t}_D}} \frac{1}{\sqrt{u}} Exp[-\sqrt{2\omega u}(x-1)] dx$$

$$E = \frac{u\omega^2}{\lambda \sqrt{2\sqrt{u\omega}} \sqrt{\tilde{t}_D} \sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 Exp[\sqrt{2u\omega}] \int_0^{r_D} \frac{Exp[-(\sqrt{2} + 1)\sqrt{\omega u} x]}{\sqrt{x}} dx \tag{G.7}$$

De Mathematica<sup>48</sup> se tiene:

$$\int \frac{Exp[-ax]}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi} Erf[\sqrt{ax}]}{\sqrt{a}} \quad (G.8)$$

Sustituyendo (G.8) en (G.7), se tiene:

$$E = \frac{u\omega^2}{\lambda\sqrt{2\sqrt{u\omega}}\sqrt{\tilde{r}_D}\sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 Exp[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi} Erf\left[\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}r_D}\right]}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}}} \quad (G.9)$$

Como  $u \gg 1$  y  $r_D \gg 1$  entonces:

$$Erf\left[\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}r_D}\right] \approx 1$$

$$E = \frac{u\omega^2}{\lambda\sqrt{2\sqrt{u\omega}}\sqrt{\tilde{r}_D}\sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 Exp[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}}} \quad (G.10)$$

Sustituyendo (G.6) en (G.3) y empleando:

$$I_1(r_D \sqrt{u\omega}) = \frac{Exp[r_D \sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2\pi r_D \sqrt{u\omega}}}$$

$$F = \int \frac{Exp[x\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2\pi r_D \sqrt{u\omega}}} \frac{u\omega}{\lambda} x \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \frac{\omega}{\sqrt{\pi x}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_D}} \frac{1}{\sqrt{u}} Exp[-\sqrt{2\omega u}(x-1)] dx$$

$$F = \frac{\sqrt{u\omega^2}}{\lambda\pi\sqrt{2\sqrt{u\omega}}\sqrt{\tilde{r}_D}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 Exp[\sqrt{2u\omega}] \int \frac{Exp[-(\sqrt{2}-1)\sqrt{\omega u}x]}{\sqrt{x}} dx$$

Empleando (G.8) se tiene:

$$F = \frac{\sqrt{u\omega^2}}{\lambda\sqrt{2\sqrt{u\omega}}\sqrt{\tilde{r}_D}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 Exp[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi} Erf\left[\sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}r_D}\right]}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}}}$$

Como  $u \gg 1$  y  $r_D \gg 1$  entonces:

$$Erf\left[\sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}r_D}\right] \approx 1$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$F = \frac{u\omega^2}{\lambda\sqrt{2\sqrt{u\omega}}\sqrt{\tilde{t}_D}\sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \text{Exp}[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}}} \quad (\text{G.11})$$

Tanto (G.10) como (G.11) no dependen de  $r_D$ , entonces la transformada de  $V_I$  se puede escribir como:

$$\bar{V}_1 = (C+E) \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + (D-F) \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (\text{G.12})$$

Aplicando las condiciones de frontera, dadas por:

$$\bar{V}_1 \Big|_{r_D \rightarrow \infty} = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$0 = \int_1^{\infty} \bar{V}_1 dr_D + \int_1^{\infty} \frac{V_0^2}{\lambda} dr_D \quad (\text{C.16})$$

Aplicando (C.14) a (G.12) se tiene que:

$$(C+E) = 0$$

Por lo que :

$$\bar{V}_1 = (D-F) \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (\text{G.13})$$

Aplicando (C.16) se tiene:

$$\int_1^{\infty} \frac{V_0^2}{\lambda} dr_D = \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \frac{\omega \text{Exp}[\sqrt{2\omega u}]}{\lambda\sqrt{\pi\tilde{t}_D}u} \int_1^{\infty} \frac{\text{Exp}[-r_D\sqrt{2\omega u}]}{r_D} dr_D$$

$$\int_1^{\infty} \frac{V_0^2}{\lambda} dr_D = \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \frac{\omega \text{Exp}[\sqrt{2\omega u}]}{\lambda\sqrt{\pi\tilde{t}_D}u} E_1[\sqrt{2\omega u}]$$

Como  $u \gg 1$ , entonces se puede aproximar:

$$E_1[\sqrt{2\omega u}] \approx \frac{\text{Exp}[-\sqrt{2\omega u}]}{\sqrt{2\omega u}}$$



Entonces:

$$\int_1^{\infty} \frac{\overline{V}_0^2}{\lambda} dr_D = \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\sqrt{\omega}}{\lambda u \sqrt{2\pi \tilde{t}_D}} \quad (G.14)$$

Y se tiene que:

$$\int_1^{\infty} K_1[r_D \sqrt{u\omega}] dr_D = \frac{K_0[\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{u\omega}} \quad (G.15)$$

Sustituyendo (G.15) y (G.14) en (C.16), y despejando  $D$  se tiene:

$$D = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\sqrt{\omega} \sqrt{u\omega}}{\lambda u \sqrt{2\pi \tilde{t}_D} K_0[\sqrt{u\omega}]} - F = -Z + F \quad (G.16)$$

Sustituyendo (G.16) en (G.13):

$$\overline{V}_1 = (-Z + F - F) \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) = -Z K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (G.17)$$

Por lo que la transformada de  $V_1$  esta dada por:

$$\overline{V}_1 = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\sqrt{\omega} \sqrt{u\omega}}{\lambda u \sqrt{2\pi \tilde{t}_D} K_0[\sqrt{u\omega}]} K_1(r_D \sqrt{u\omega}) \quad (G.17)$$

Y empleando:

$$K_0(x) \approx K_1(x) = \frac{\sqrt{\pi} \text{Exp}[-x]}{\sqrt{2x}}$$

$$\overline{V}_1 = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega \sqrt{2\sqrt{u\omega}} \text{Exp}[\sqrt{u\omega}]}{\lambda \pi \sqrt{u} \sqrt{2\tilde{t}_D} \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi} \text{Exp}[-r_D \sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2r_D \sqrt{u\omega}}}$$

$$\overline{V}_1 = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\lambda \pi \sqrt{u} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \frac{\text{Exp}[-(r_D - 1)\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{r_D}}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$F(u) = \frac{\text{Exp}[-a\sqrt{u}]}{\sqrt{u}} \rightarrow f(t) = \frac{\text{Exp}\left[-\frac{a^2}{4t}\right]}{\sqrt{\pi t}}$$

$$V_1 = \left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right)^2 \frac{\omega}{\lambda \pi \sqrt{r_D} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \frac{\text{Exp}\left[-\frac{(r_D - 1)^2 \omega}{4t_D}\right]}{\sqrt{\pi t_D}} \quad (\text{G.18})$$

Por lo que  $V_f$  está dado por:

$$V_f|_{r_D=1} = \left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right) \sqrt{\frac{\omega}{\pi t_D}} - \frac{\beta \rho k_f^2}{\mu} \left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right)^2 \frac{\omega}{\pi \sqrt{\pi t_D} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \quad (\text{G.19})$$

Y el gasto adimensional por:

$$q_D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi t_D}} - \frac{\beta \rho k_f^2}{\mu} \left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right) \frac{\omega}{\pi \sqrt{\pi t_D} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \quad (\text{G.20})$$

**APÉNDICE H. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO INFINITO TIEMPOS LARGOS  
FLUJO NO LAMINAR.**

Del Apéndice D se tiene que:

$$\bar{V}_0 = - \frac{(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \frac{1}{u \ln \left( \sqrt{\frac{u}{4}} e^{2\gamma} \right)} = - \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \frac{1}{u \ln \left( \frac{u}{4} e^{2\gamma} \right)} \quad (D.15)$$

$$V_0 = - \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \int_0^\infty \frac{\left[ \frac{4}{e^{2\gamma} t_D} \right]^x}{\Gamma(x+1)} dx \quad (D.17)$$

Para encontrar  $V_I$  se evalúa la solución dada por:

$$\begin{aligned} \bar{V}_I = & C \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + D \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \\ & + I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_0^D K_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx + \\ & - K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_0^D I_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx \end{aligned} \quad (B.30)$$

Por lo que se observa de (B.30) es que se necesita  $\bar{V}_0^2$ ; sin embargo, no es posible obtenerla directamente, por lo que se procede a emplear la aproximación a tiempos largos de la solución dada por (D.17), y el teorema del valor medio definido en Spiegel<sup>44</sup>, dado por:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx \dots\dots\dots a < c < b \quad (H.1)$$

Por lo que por la definición de Transformada de Laplace, se tiene:

$$\int_0^\infty e^{-ut} V_0 V_0 dt = V_0(\tilde{r}) \bar{V}_0 \quad (H.2)$$

Por lo que la transformada de  $V_0^2$ , empleando (D.15), (D.17) y (H.2), se puede escribir como:

$$\overline{V_0^2} = \frac{4}{r_D^2} \left( \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right)^2 \left[ \int_0^\infty \frac{\left( \frac{4}{Exp(2\gamma)} \tilde{t}_D \right)^x}{\Gamma(x+1)} dx \right] \frac{1}{u \ln \left( \frac{u}{4} Exp(2\gamma) \right)} \quad (H.3)$$

Si se define :

$$F(a\tilde{t}_D) = \int_0^\infty \frac{\left( \frac{4}{Exp(2\gamma)} \tilde{t}_D \right)^x}{\Gamma(x+1)} dx \quad (H.4)$$

Entonces (H.3) se escribe:

$$\overline{V_0^2} = \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{t}_D) \frac{1}{u \ln \left( \frac{u}{4} Exp(2\gamma) \right)} \quad (H.5)$$

Si de (B.30) se considera:

$$E = \int^{r_D} K_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \overline{V_0^2} dx \quad (H.6)$$

$$F = \int^{r_D} I_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \overline{V_0^2} dx \quad (H.7)$$

Y se emplean las aproximaciones tomadas de Abramowitz<sup>30</sup>, para argumentos pequeños:

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x} \quad (H.8)$$

$$I_1(x) \approx \frac{1}{4} x \quad (H.9)$$

$$\sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \approx \sqrt{u} \quad (H.10)$$

Sustituyendo (H.8) a (H.10) y (H.5) en (H.6) y (H.7), se tiene:

$$E = \int_0^{r_D} \frac{1}{x^2 \sqrt{u}} \frac{u}{\lambda} \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{r}_D) \frac{1}{u \ln\left(\frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma)\right)} dx$$

$$E = -\frac{1}{\lambda \sqrt{u}} \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{r}_D) \frac{1}{\ln\left(\frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma)\right)} \frac{1}{r_D} \quad (\text{H.11})$$

$$F = \int_0^{r_D} \frac{\sqrt{u}}{4} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{r}_D) \frac{1}{\ln\left(\frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma)\right)} dx$$

$$F = \frac{\sqrt{u}}{4} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{r}_D) \frac{1}{\ln\left(\frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma)\right)} r_D \quad (\text{H.12})$$

Multiplicando  $E$  y  $F$  por sus respectivos coeficientes en (B.30), se tiene:

$$I_1(r_D \sqrt{u})E = -\frac{1}{4\lambda} \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{r}_D) \frac{1}{\ln\left(\frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma)\right)} \quad (\text{H.13})$$

$$-K_1(r_D \sqrt{u})F = -\frac{1}{4\lambda} \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{r}_D) \frac{1}{\ln\left(\frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma)\right)} \quad (\text{H.14})$$

Sumando (H.13) y (H.14) se obtiene:

$$I_1(r_D \sqrt{u})E - K_1(r_D \sqrt{u})F = -\frac{1}{2\lambda} \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 F(a\tilde{r}_D) \frac{1}{\ln\left(\frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma)\right)} \quad (\text{H.15})$$

Como se observa (H.15) es independiente de  $r_D$ , y sólo aparece  $u$  dentro de un logaritmo, como  $u \ll 1$ , entonces :

$$\ln(u)_{u \rightarrow 0} \approx -\infty \quad (\text{H.16})$$

$$I_1(r_D \sqrt{u})E - K_1(r_D \sqrt{u})F \approx 0 \quad (\text{H.17})$$

Entonces (B.30) se puede aproximar como:

$$\bar{V}_1 = CI_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) + DK_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) \quad (\text{H.18})$$

Aplicando las condiciones de frontera, dadas por:

$$\bar{V}_1|_{r_D \rightarrow \infty} = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\int_1^{\infty} \bar{V}_1 dr_D = - \int_1^{\infty} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D \quad (\text{C.16})$$

Aplicando (C.14) a (H.18) se tiene:

$$0 = CI_1 \left( \infty \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}} \right) \rightarrow C = 0$$

Calculando las integrales de (C.16) por separado:

$$- \int_1^{\infty} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D = - \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{F(a\tilde{r}_D)}{\lambda} \frac{1}{u \ln \left( \frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma) \right)} \int_1^{\infty} \frac{1}{r_D^2} dr_D$$

$$- \int_1^{\infty} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D = - \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{F(a\tilde{r}_D)}{\lambda} \frac{1}{u \ln \left( \frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma) \right)} \quad (\text{H.19})$$

$$\int_1^{\infty} \bar{V}_1 dr_D = D \int_1^{\infty} K_1(r_D \sqrt{u}) dr_D = - \frac{D}{\sqrt{u}} [K_0(r_D \sqrt{u})]_1^{\infty}$$

$$\int_1^{\infty} \bar{V}_1 dr_D = \frac{D}{\sqrt{u}} [K_0(\sqrt{u})] \quad (\text{H.20})$$

Igualando (H.20) y (H.19), y despejando  $D$ , se tiene.

$$D = - \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{F(a\tilde{r}_D)}{\lambda} \frac{\sqrt{u}}{u \ln \left( \frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma) \right) K_0(\sqrt{u})} \quad (\text{H.21})$$

Sustituyendo C y D en (H.18) se tiene:

$$\bar{V}_1 = - \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{F(a\tilde{t}_D)}{\lambda} \frac{K_1(r_D \sqrt{u})}{\sqrt{u} \ln \left( \frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma) \right) K_0(\sqrt{u})} \quad (\text{H.22})$$

Empleando las aproximaciones dadas por:

$$K_1(r_D \sqrt{u}) \approx \frac{1}{r_D \sqrt{u}}, K_0(\sqrt{u}) \approx - \left[ \ln \frac{\sqrt{u}}{2} + \gamma \right] \quad (\text{H.23})$$

Sustituyendo (H.23) en (H.22), se tiene:

$$\bar{V}_1 = \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{F(a\tilde{t}_D)}{\lambda} \frac{1}{r_D u \ln \left( \frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma) \right) \left( \ln \frac{\sqrt{u}}{2} + \gamma \right)}$$

$$\bar{V}_1 = \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{F(a\tilde{t}_D)}{\lambda} \frac{1}{r_D u \ln^2 \left( \frac{u}{4} \text{Exp}(2\gamma) \right)} \quad (\text{H.24})$$

De Kaufman<sup>42</sup> se tiene:

$$f(u) = \frac{1}{u \ln^b \left( \frac{u}{a} \right)} \rightarrow F(t) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \frac{(at)^x x}{\Gamma(x+1)} dx \quad (\text{H.25})$$

Sustituyendo (H.25) en (H.24) se tiene:

$$V_1 = \left( \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{F(a\tilde{t}_D)}{\lambda} \frac{1}{r_D \Gamma(2)} \int_0^\infty \frac{\left( \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)} t \right)^x}{\Gamma(x+1)} dx \quad (\text{H.26})$$

De la ecuación (B.6) se tiene:

$$V_f = V_0 + \varepsilon V_1$$

Entonces:

$$V_f = -\frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \int_0^\infty \frac{\left[ \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)} t_D \right]^x}{\Gamma(x+1)} dx +$$

$$+ \frac{\beta \rho k_f^2}{\mu} \frac{F(a\tilde{t}_D)}{r_D} \frac{2}{\Gamma(2)} \left[ \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right]^2 \int_0^\infty \frac{\left( \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)} t \right)^x}{\Gamma(x+1)} dx$$

(H.27)

Aplicando la aproximación de Davis, tomada de Abramowitz<sup>32</sup>,  $F(a\tilde{t}_D)$  se puede expresar:

$$F(a\tilde{t}_D) = \int_0^\infty \frac{[a\tilde{t}_D]^x}{\Gamma(x+1)} dx = \sum_{i=1}^{23} \frac{b_i}{\ln^i(a\tilde{t}_D)} \rightarrow F(a\tilde{t}_D) \approx F(at_D)$$

(H.28)

Si además se sugiere que:

$$F(a\tilde{t}_D) \approx F(at_D)$$

(H.29)

Entonces (H.27) se puede escribir:

$$V_f = - \left[ \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_D r_w \mu} \int_0^\infty \frac{\left[ \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)} t_D \right]^x}{\Gamma(x+1)} dx \right] \cdot$$

$$\left[ 1 - \frac{\beta \rho k_f^2}{\mu} \frac{2}{\Gamma(2)} \left[ \frac{2(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right]^2 \int_0^\infty \frac{\left( \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)} t \right)^x}{\Gamma(x+1)} dx \right]$$

(H.30)

Definiendo  $q_D$  en función de la velocidad, se tiene:

$$q_D = \frac{\frac{v_f}{k_f} \Big|_{r_w=1} 2\pi r_w h \mu}{2\pi h (p_i - p_{wf})} = \frac{q_o \mu}{2\pi h (p_i - p_{wf}) k_f}$$

(H.31)



Entonces  $q_D$  se escribe:

$$q_D = - \left[ 2 \int_0^{\infty} \frac{\left[ \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)^{t_D}} \right]^x}{\Gamma(x+1)} dx \right] \cdot$$

$$\left[ 1 - \frac{4\beta\rho k_f^2}{\mu} \left[ \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right] \int_0^{\infty} \frac{\left( \frac{4}{\text{Exp}(2\gamma)^t} \right)^x}{\Gamma(x+1)} dx \right]$$

(H.32)

**APÉNDICE I. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO CERRADO TIEMPOS CORTOS  
FLUJO NO LAMINAR.**

Del Apéndice D se tiene que:

$$V_0(r_D, t_D) = \frac{(p_i - p_{wf})\sqrt{\omega}}{\sqrt{r_D r_w \mu}} \frac{\text{Exp} \left[ -\frac{\omega(r_D - 1)^2}{4t_D} \right]}{\sqrt{\pi t_D}} \quad (\text{D.12})$$

Por lo que :

$$V_0^2 = \left[ \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right]^2 \frac{\omega}{\pi r_D} \frac{\text{Exp} \left[ -\frac{\omega(r_D - 1)^2}{2t_D} \right]}{t_D} \quad (\text{I.1})$$

Para encontrar  $V_1$  se evalúa la solución dada por:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 = & C \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + D \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \\ & + I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) E - K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) F \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Donde:

$$E = \int^{r_D} K_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx + \quad (\text{I.2})$$

$$F = \int^{r_D} I_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx \quad (\text{I.3})$$

Por lo que se observa de (B.30) se necesita  $\bar{V}_0^2$ ; sin embargo, el empleo de la transformada directa presenta ciertos problemas dentro de los desarrollos, por lo que se procede a emplear el teorema del valor medio definido en Spiegel<sup>44</sup>, dado por:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \dots \dots a < c < b \tag{H.1}$$

Por lo que por la definición de Transformada de Laplace, se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-ut} V_0 V_0 dt = V_0(\tilde{r}) \overline{V_0} \tag{H.2}$$

Por lo que la transformada de  $V_0^2$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \overline{V_0^2} &= \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\pi r_D} \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_D}} \int_0^{\infty} \frac{Exp[-ut_D]}{\sqrt{t_D}} Exp\left[-\frac{\omega(r_D - 1)^2}{2t_D}\right] \\ \overline{V_0^2} &= \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\pi r_D} \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_D}} \int_0^{\infty} \frac{Exp[-ut_D]}{\sqrt{t_D}} Exp\left[-\frac{\omega(r_D - 1)^2}{2t_D}\right] \end{aligned} \tag{I.4}$$

De Spiegel<sup>41</sup> se tiene la siguiente transformación:

$$f(t) = \frac{Exp\left[-\frac{a}{4t}\right]}{\sqrt{t}} \rightarrow F(u) = \frac{\sqrt{\pi} Exp[-2\sqrt{au}]}{\sqrt{u}} \tag{I.5}$$

Entonces:

$$\overline{V_0^2} = \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\sqrt{\pi} r_D} \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_D}} \frac{1}{\sqrt{u}} Exp[-\sqrt{2\omega u}(r_D - 1)] \tag{I.6}$$

Sustituyendo (I.6) en (I.2) y empleando:

$$K_1(r_D \sqrt{u\omega}) = \frac{\sqrt{\pi} Exp[-r_D \sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2r_D \sqrt{u\omega}}}$$

$$E = \int_0^{r_D} \frac{\sqrt{\pi} Exp[-x\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2r_D \sqrt{u\omega}}} \frac{u\omega}{\lambda} x \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\sqrt{\pi} x} \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_D}} \frac{1}{\sqrt{u}} Exp[-\sqrt{2\omega u}(x-1)] dx$$

$$E = \frac{u\omega^2}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{u\omega}\sqrt{\tilde{r}_D}\sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \text{Exp}[\sqrt{2u\omega}] \int_0^{r_D} \frac{\text{Exp}[-(\sqrt{2}+1)\sqrt{\omega u}x]}{\sqrt{x}} dx \quad (1.7)$$

De Mathematica<sup>48</sup> se tiene:

$$\int_0^{r_D} \frac{\text{Exp}[-ax]}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi} \text{Erf}[\sqrt{ax}]}{\sqrt{a}} \quad (1.8)$$

Sustituyendo (1.8) en (1.7), se tiene:

$$E = \frac{u\omega^2}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{u\omega}\sqrt{\tilde{r}_D}\sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \text{Exp}[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi} \text{Erf}[\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}r_D}]}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}}} \quad (1.9)$$

Como  $u \gg 1$  y  $r_D \gg 1$  entonces:

$$\text{Erf}[\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}r_D}] \approx 1$$

$$E = \frac{u\omega^2}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{u\omega}\sqrt{\tilde{r}_D}\sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \text{Exp}[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{u\omega}}} \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.6) en (1.3) y empleando:

$$I_1(r_D \sqrt{u\omega}) = \frac{\text{Exp}[r_D \sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2\pi r_D \sqrt{u\omega}}}$$

$$F = \int_0^{r_D} \frac{\text{Exp}[x\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2\pi r_D \sqrt{u\omega}}} \frac{u\omega}{\lambda} x \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \frac{\omega}{\sqrt{\pi x}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_D}} \frac{1}{\sqrt{u}} \text{Exp}[-\sqrt{2\omega u}(x-1)] dx$$

$$F = \frac{\sqrt{u\omega^2}}{\lambda\pi\sqrt{2}\sqrt{u\omega}\sqrt{\tilde{r}_D}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \text{Exp}[\sqrt{2u\omega}] \int_0^{r_D} \frac{\text{Exp}[-(\sqrt{2}-1)\sqrt{\omega u}x]}{\sqrt{x}} dx$$

Empleando (1.8) se tiene:

$$F = \frac{\sqrt{u\omega^2}}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{u\omega}\sqrt{\tilde{r}_D}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \text{Exp}[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi} \text{Erf}[\sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}r_D}]}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}}}$$

Como  $u \gg 1$  y  $r_D \gg 1$  entonces:

$$\begin{aligned} & \text{Erf} \left[ \sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}r_D} \right] \approx 1 \\ F = & \frac{u\omega^2}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{u\omega}\sqrt{\tilde{t}_D}\sqrt{u}} \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \text{Exp}[\sqrt{2u\omega}] \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)\sqrt{u\omega}}} \end{aligned} \quad (I.11)$$

Tanto (I.10) como (I.11) no dependen de  $r_D$ , entonces la transformada de  $V_I$  se puede escribir como:

$$\bar{V}_1 = (C+E) \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + (D-F) \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (I.12)$$

Aplicando las condiciones de frontera, dadas por:

$$\bar{V}_1 \Big|_{r_D \rightarrow reD} = 0 \quad (C.14)$$

$$0 = \int_1^{reD} \bar{V}_1 dr_D + \int_1^{reD} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D \quad (C.16)$$

Aplicando (C.14) a (I.12) se tiene que:

$$(C+E) = 0$$

Por lo que :

$$\bar{V}_1 = (D-F) K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (I.13)$$

Aplicando (C.16) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_1^{reD} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D &= \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \frac{\omega \text{Exp}[\sqrt{2\omega u}]}{\lambda\sqrt{\pi\tilde{t}_D}u} \int_1^{reD} \frac{\text{Exp}[-r_D\sqrt{2\omega u}]}{r_D} dr_D \\ \int_1^{reD} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D &\approx \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w\mu} \right)^2 \frac{\omega \text{Exp}[\sqrt{2\omega u}]}{\lambda\sqrt{\pi\tilde{t}_D}u} E_1[\sqrt{2\omega u}] \end{aligned}$$

Como  $u \gg 1$ , entonces se puede aproximar:

$$E_1[\sqrt{2\omega u}] \approx \frac{\text{Exp}[-\sqrt{2\omega u}]}{\sqrt{2\omega u}}$$

Entonces:

$$\int_1^{reD} \frac{\overline{V}_0^2}{\lambda} dr_D \approx \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\sqrt{\omega}}{\lambda u \sqrt{2\pi \tilde{t}_D}} \quad (I.14)$$

Y se tiene que:

$$\int_1^{reD} K_1[r_D \sqrt{u\omega}] dr_D \approx \frac{K_0[\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{u\omega}} \quad (I.15)$$

Sustituyendo (I.15) y (I.14) en (C.16), y despejando  $D$  se tiene:

$$D = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\sqrt{\omega} \sqrt{u\omega}}{\lambda u \sqrt{2\pi \tilde{t}_D} K_0[\sqrt{u\omega}]} - F = -Z + F \quad (I.16)$$

Sustituyendo (I.16) en (I.13):

$$\overline{V}_1 = (-Z + F - F) \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) = -Z K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \quad (I.17)$$

Por lo que la transformada de  $V_1$  esta dada por:

$$\overline{V}_1 = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\sqrt{\omega} \sqrt{u\omega}}{\lambda u \sqrt{2\pi \tilde{t}_D} K_0[\sqrt{u\omega}]} K_1(r_D \sqrt{u\omega}) \quad (I.17)$$

Y empleando:

$$K_0(x) \approx K_1(x) = \frac{\sqrt{\pi} \text{Exp}[-x]}{\sqrt{2x}}$$

$$\overline{V}_1 = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega \sqrt{2\sqrt{u\omega}} \text{Exp}[\sqrt{u\omega}]}{\lambda \pi \sqrt{u} \sqrt{2\tilde{t}_D} \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi} \text{Exp}[-r_D \sqrt{u\omega}]}{\sqrt{2r_D \sqrt{u\omega}}}$$

$$\overline{V}_1 = - \left( \frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu} \right)^2 \frac{\omega}{\lambda \pi \sqrt{u} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \frac{\text{Exp}[-(r_D - 1)\sqrt{u\omega}]}{\sqrt{r_D}}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$F(u) = \frac{\text{Exp}[-a\sqrt{u}]}{\sqrt{u}} \rightarrow f(t) = \frac{\text{Exp}\left[-\frac{a^2}{4t}\right]}{\sqrt{\pi t}}$$

$$V_1 = -\left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right)^2 \frac{\omega}{\lambda \pi \sqrt{r_D} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \frac{\text{Exp}\left[-\frac{(r_D - 1)^2 \omega}{4t_D}\right]}{\sqrt{\pi t_D}} \quad (1.18)$$

Por lo que  $V_f$  está dado por:

$$V_f|_{r_D=1} = \left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right) \sqrt{\frac{\omega}{\pi t_D}} - \frac{\beta \rho k_f^2}{\mu} \left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right)^2 \frac{\omega}{\pi \sqrt{\pi t_D} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \quad (1.19)$$

Y el gasto adimensional por:

$$q_D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi t_D}} - \frac{\beta \rho k_f^2}{\mu} \left(\frac{(p_i - p_{wf})}{r_w \mu}\right) \frac{\omega}{\pi \sqrt{\pi t_D} \sqrt{2\tilde{t}_D}} \quad (1.20)$$

**APÉNDICE J. SOLUCIÓN PARA YACIMIENTO CERRADO TIEMPOS LARGOS  
FLUJO NO LAMINAR.**

Del Apéndice E se tiene que:

$$V_0 = \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \frac{\frac{r_{eD}^2 - r_D^2}{2r_D}}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \frac{(a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{r_2 - r_1} \quad (\text{E.49})$$

Donde:

$$a = \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} \quad (\text{E.41})$$

$$b = a + \frac{1}{\omega \left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \quad (\text{E.42})$$

$$c = \frac{a}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \quad (\text{E.43})$$

$$-r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (\text{E.46})$$

$$-r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (\text{E.47})$$

Para encontrar  $V_I$  se evalúa la solución dada por:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 = & C \cdot I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) + D \cdot K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \\ & + I_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_0^D K_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx + \\ & - K_1 \left( r_D \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \int_0^D I_1 \left( x \sqrt{u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)}} \right) \frac{u}{\lambda} \frac{\lambda + \omega u(1-\omega)}{\lambda + u(1-\omega)} x \bar{V}_0^2 dx \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$



Calculando  $V_0^2$  se tiene:

$$V_0^2 = \left[ \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right]^2 \frac{\frac{r_{eD}^4 - 2r_D^2 r_{eD}^2 + r_D^4}{4r_D^2}}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]^2 [r_2 - r_1]^2} \left\{ \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_1 \right)^2 \text{Exp}(-2r_1 t_D) - 2 \left[ \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} \right)^2 - (r_1 + r_2) \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} + r_1 r_2 \right] \text{Exp}(-(r_1 + r_2) t_D) + \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_2 \right)^2 \text{Exp}(-2r_2 t_D) \right\} \quad (J.1)$$

Si se define:

$$A = \frac{\left[ \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right]^2}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]^2 [r_2 - r_1]^2} \quad (J.2)$$

$$B = \left\{ \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_1 \right)^2 \frac{1}{u + 2r_1} - 2 \left[ \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} \right)^2 - (r_1 + r_2) \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} + r_1 r_2 \right] \frac{1}{u + (r_1 + r_2)} + \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_2 \right)^2 \frac{1}{u + 2r_2} \right\} \quad (J.3)$$

Entonces la transformada de  $V_0^2$  queda:

$$\overline{V_0^2} = A \cdot B \left[ \frac{r_{eD}^4}{4r_D^2} - \frac{r_{eD}^2}{2} + \frac{r_D^2}{4} \right] \quad (J.4)$$

Si  $x$  se define como:

$$x = u \frac{\omega u(1-\omega) + \lambda}{\lambda + u(1-\omega)} \quad (J.5)$$

Si se define  $E$  como:

$$E = \int_0^D K_1(y\sqrt{x}) \frac{x}{\lambda} y \overline{V_0^2} dy \quad (J.6)$$

Aplicando las aproximaciones de las funciones Bessel , en (J.6), dadas por:

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{1}{4} z^2 \quad (\text{E.26})$$

$$I_1(z) \approx \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^3 \quad (\text{E.27})$$

$$K_0(z) \approx -\left[ \ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{1}{4} z^2 \left[ \ln \frac{z}{2} + \gamma \right] + \frac{1}{4} z^2 \quad (\text{E.28})$$

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \ln \left( \frac{z}{2} \right) + \frac{z^2}{16} \ln \left( \frac{z}{2} \right) - \frac{z}{2} (-2\gamma + 1) - \frac{z^3}{16} \left( -2\gamma + \frac{5}{2} \right) \quad (\text{E.29})$$

Sustituyendo (J.4) en (J.6), realizando la integral y despreciando los términos que contengan  $y^\nu$ , donde  $\nu \geq 3/2$ , entonces  $E$  se expresa como:

$$E = \frac{A \cdot B \cdot \sqrt{x}}{\lambda} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{4r_D} - \frac{r_{eD}^2}{2} r_D + \frac{r_D^3}{12} \right] \quad (\text{J.7})$$

Multiplicando  $E$  por  $I_1(r_D y^{0.5})$  se tiene:

$$I_1[r_D \sqrt{y}] E = \frac{A \cdot B \cdot x}{2\lambda} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{4} - \frac{r_{eD}^2}{2} r_D^2 + \frac{r_D^4}{12} \right] \quad (\text{J.8})$$

Si se define  $F$  como:

$$F = \int_0^{r_D} I_1(y\sqrt{x}) \frac{x}{\lambda} y \overline{V_0^2} dy \quad (\text{J.9})$$

Sustituyendo (J.4) en (J.9), y empleando las aproximaciones de las funciones Bessel, realizando la integral y despreciando los términos que contengan  $y^\nu$ , donde  $\nu \geq 5/2$ , debido a que la aproximación de  $K_1(z)$  tiene un sumando con  $y^{-0.5}$ , entonces  $F$  se expresa como:

$$F = \frac{A \cdot B \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\lambda} \left[ \frac{r_{eD}^4 r_D}{8} - \frac{r_{eD}^2 r_D^3}{12} + \frac{r_D^5}{40} \right] \quad (\text{J.10})$$

Multiplicando  $F$  por  $K_1(r_D y^{0.5})$  se tiene:

$$F \cdot K_1[r_D \sqrt{x}] = \frac{A \cdot B \cdot x}{2\lambda} \left[ \frac{r_{eD}^4}{4} - \frac{r_{eD}^2 r_D^2}{6} + \frac{r_D^4}{20} \right] \quad (J.11)$$

Restando (J.11) a (J.8), se tiene:

$$I_1[r_D \sqrt{x}]E - K_1[r_D \sqrt{x}]F = \frac{A \cdot B \cdot x}{2\lambda} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} - \frac{r_{eD}^2 r_D^2}{3} + \frac{r_D^4}{30} \right] \quad (J.12)$$

Por lo que la transformada de  $V_I$ , se escribe :

$$\bar{V}_1 = C \cdot I_1(r_D \sqrt{x}) + D \cdot K_1(r_D \sqrt{x}) + \frac{A \cdot B \cdot x}{2\lambda} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} - \frac{r_{eD}^2 r_D^2}{3} + \frac{r_D^4}{30} \right] \quad (J.13)$$

Empleando las condiciones de frontera, dadas por:

$$\bar{V}_1 \Big|_{r_D \rightarrow r_{eD}} = 0 \quad (C.14)$$

$$0 = \int_1^{reD} \bar{V}_1 dr_D + \int_1^{reD} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D \quad (C.16)$$

Aplicando (C.14) a (J.13) se tiene:

$$0 = C \cdot I_1(r_{eD} \sqrt{x}) + D \cdot K_1(r_{eD} \sqrt{x}) - \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5\lambda} \quad (J.14)$$

Despejando  $C$  de (J.14), se tiene:

$$C = -\frac{D \cdot K_1(r_{eD} \sqrt{x})}{I_1(r_{eD} \sqrt{x})} + \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5\lambda I_1(r_{eD} \sqrt{x})} \quad (J.15)$$

Aplicando por partes (C.16) a (J.13) se tiene:

$$-\int_1^{reD} \frac{\bar{V}_0^2}{\lambda} dr_D = -\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ -\frac{2r_{eD}^3}{3} + \frac{r_{eD}^4}{4} + \frac{r_{eD}^2}{2} - \frac{1}{12} \right] \quad (J.16)$$

$$\int_1^{reD} \bar{V}_1 dr_D = \frac{C [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] - D [K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})]}{\sqrt{x}} + \frac{A \cdot B \cdot x}{\lambda} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} (r_{eD} - 1) - \frac{r_{eD}^2}{9} (r_{eD}^3 - 1) + \frac{r_{eD}^5 - 1}{150} \right] \quad (J.17)$$

Definiendo:

$$G = \left[ -\frac{2r_{eD}^3}{3} + \frac{r_{eD}^4}{4} + \frac{r_{eD}^2}{2} - \frac{1}{12} \right] \quad (J.18)$$

$$H = \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2}(r_{eD} - 1) - \frac{r_{eD}^2}{9}(r_{eD}^3 - 1) + \frac{r_{eD}^5 - 1}{150} \right] \quad (J.19)$$

Igualando (J.16) y (J.17), empleando (J.18) y (J.19):

$$\begin{aligned} -\frac{A \cdot B}{\lambda} G &= \frac{C \left[ I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x}) \right] - D \left[ K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x}) \right]}{\sqrt{x}} + \\ &+ \frac{A \cdot B \cdot x}{\lambda \cdot 2} H \end{aligned} \quad (J.20)$$

Sustituyendo (J.15) en (J.20) y reorganizando:

$$\begin{aligned} -\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ G + \frac{x}{2} H \right] \sqrt{x} &= -\frac{D \cdot K_1(r_{eD} \sqrt{x})}{I_1(r_{eD} \sqrt{x})} \left[ I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x}) \right] - D \left[ K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x}) \right] + \\ &+ \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5 \lambda I_1(r_{eD} \sqrt{x})} \left[ I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x}) \right] \end{aligned} \quad (J.21)$$

Despejando  $D$  de (J.21), se tiene:

$$D = \frac{\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ G + \frac{x}{2} H \right] \sqrt{x} I_1(r_{eD} \sqrt{x}) + \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5 \lambda} \left[ I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x}) \right]}{K_1(r_{eD} \sqrt{x}) \left[ I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x}) \right] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) \left[ K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x}) \right]} \quad (J.22)$$

Sustituyendo (J.22) en (J.15), se tiene:

$$\begin{aligned} C &= -\frac{\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ G + \frac{x}{2} H \right] \sqrt{x} K_1(r_{eD} \sqrt{x}) + \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5 \lambda} \frac{K_1(r_{eD} \sqrt{x})}{I_1(r_{eD} \sqrt{x})} \left[ I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x}) \right]}{K_1(r_{eD} \sqrt{x}) \left[ I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x}) \right] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) \left[ K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x}) \right]} + \\ &+ \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5 \lambda I_1(r_{eD} \sqrt{x})} \end{aligned} \quad (J.23)$$

Si se multiplica  $D$  por  $K_I(r_D x^{0.5})$ , se tiene:

$$D \cdot K_1(r_D \sqrt{x}) = \frac{\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ G + \frac{x}{2} H \right] \sqrt{x} I_1(r_{eD} \sqrt{x}) K_1(r_D \sqrt{x})}{K_1(r_{eD} \sqrt{x}) [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) [K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})]} + \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5\lambda} [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] K_1(r_D \sqrt{x}) \quad (J.24)$$

$$+ \frac{K_1(r_{eD} \sqrt{x}) [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) [K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})]}{K_1(r_{eD} \sqrt{x}) [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) [K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})]}$$

En (J.24) se observa que se requieren diversos productos de funciones Bessel, por lo que empleando las aproximaciones dadas por (E.26) a (E.29), y despreciando los términos resultantes que contengan  $x^\nu$  donde  $\nu \geq 3/2$ , se tiene:

$$K_1(r_{eD} \sqrt{x}) [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) [K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})] \approx \sqrt{x} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right] \quad (J.25)$$

$$\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ G + \frac{x}{2} H \right] \sqrt{x} I_1(r_{eD} \sqrt{x}) K_1(r_D \sqrt{x}) = \frac{A \cdot B}{\lambda} G \sqrt{x} \frac{r_{eD}}{2r_D} \quad (J.26)$$

$$\frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5\lambda} [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] K_1(r_D \sqrt{x}) \approx 0 \quad (J.27)$$

Sustituyendo (J.25), (J.26) y (J.27) en (J.24), se tiene:

$$D \cdot K_1(r_D \sqrt{x}) = \frac{\frac{A \cdot B}{\lambda} G \frac{r_{eD}}{2r_D}}{\left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} \quad (J.28)$$

Si se multiplica  $C$  por  $I_1(r_D x^{0.5})$ , se tiene:

$$C \cdot I_1(r_D \sqrt{x}) = - \frac{\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ G + \frac{x}{2} H \right] \sqrt{x} K_1(r_{eD} \sqrt{x}) I_1(r_{eD} \sqrt{x}) I_1(r_D \sqrt{x})}{\{K_1(r_{eD} \sqrt{x}) [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) [K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})]\} I_1(r_{eD} \sqrt{x})} - \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5\lambda} [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] K_1(r_{eD} \sqrt{x}) I_1(r_D \sqrt{x})}{\{K_1(r_{eD} \sqrt{x}) [I_0(r_{eD} \sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] + I_1(r_{eD} \sqrt{x}) [K_0(r_{eD} \sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})]\} I_1(r_{eD} \sqrt{x})} + \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4 I_1(r_D \sqrt{x})}{5 \lambda I_1(r_{eD} \sqrt{x})} \quad (J.29)$$

En (J.29) se requieren diversos productos de funciones Bessel, por lo que empleando las aproximaciones dadas por (E.26) a (E.29), y despreciando los términos resultantes que contengan  $x^\nu$  donde  $\nu \geq 3/2$ , se tiene:

$$I_1(r_{eD}\sqrt{x})\{K_1(r_{eD}\sqrt{x})[I_0(r_{eD}\sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] + I_1(r_{eD}\sqrt{x})[K_0(r_{eD}\sqrt{x}) - K_0(\sqrt{x})]\} \approx \frac{r_{eD}x}{2} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right] \quad (J.30)$$

$$-\frac{A \cdot B}{\lambda} \left[ G + \frac{x}{2} H \right] \sqrt{x} K_1(r_{eD}\sqrt{x}) I_1(r_{eD}\sqrt{x}) I_1(r_D\sqrt{x}) = -\frac{A \cdot B \cdot G \cdot r_D \cdot x}{\lambda \cdot 4} \quad (J.31)$$

$$-\frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4}{5\lambda} [I_0(r_{eD}\sqrt{x}) - I_0(\sqrt{x})] K_1(r_{eD}\sqrt{x}) I_1(r_D\sqrt{x}) \approx 0 \quad (J.32)$$

$$\frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_{eD}^4 I_1(r_D\sqrt{x})}{5 \lambda I_1(r_{eD}\sqrt{x})} \approx \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_D \cdot r_{eD}^3}{\lambda} \quad (J.33)$$

Sustituyendo en (J.29) de (J.30) a (J.33), se tiene;

$$C \cdot I_1(r_D\sqrt{x}) = -\frac{\frac{A \cdot B \cdot G \cdot r_D}{\lambda \cdot 4}}{\frac{r_{eD}}{2} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} + \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_D \cdot r_{eD}^3}{5 \lambda} \quad (J.34)$$

Sustituyendo (J.34) y (J.28) en (J.13), se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 = & -\frac{\frac{A \cdot B \cdot G \cdot r_D}{\lambda \cdot 4}}{\frac{r_{eD}}{2} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} + \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot r_D \cdot r_{eD}^3}{5 \lambda} + \\ & + \frac{\frac{A \cdot B \cdot G \cdot r_{eD}}{\lambda \cdot 2r_D}}{\left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} + \frac{A \cdot B \cdot x}{2\lambda} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} - \frac{r_{eD}^2 r_D^2}{3} + \frac{r_D^4}{30} \right] \end{aligned} \quad (J.35)$$

Se necesita la transformada inversa de  $B$  y de  $Bx$ , para encontrar la solución en espacio real.

$$\begin{aligned} M = L^{-1}\{B\} = & \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_1 \right)^2 \text{Exp}(-2r_1 t_D) + \\ & -2 \left[ \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} \right)^2 - (r_1 + r_2) \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} + r_1 r_2 \right] \text{Exp}(-(r_1 + r_2) \cdot t_D) + \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_2 \right)^2 \text{Exp}(-2r_2 t_D) \end{aligned} \quad (J.36)$$

$$\begin{aligned}
 N = L^{-1}\{Bx\} = & \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_1 \right)^2 \frac{\lambda}{(1-\omega)} \left[ -\frac{2r_1 \text{Exp}(-2r_1 t_D)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_1} + \frac{\frac{\lambda}{(1-\omega)} \text{Exp}\left(-\frac{\lambda}{(1-\omega)} t_D\right)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_1} \right] + \\
 & -2 \left[ \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} \right)^2 - (r_1 + r_2) \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} + r_1 r_2 \right] \frac{\lambda}{(1-\omega)} \left[ -\frac{(r_1 + r_2) \text{Exp}(-(r_1 + r_2) t_D)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - (r_1 + r_2)} + \frac{\frac{\lambda}{(1-\omega)} \text{Exp}\left(-\frac{\lambda}{(1-\omega)} t_D\right)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - (r_1 + r_2)} \right] + \quad (J.37) \\
 & + \left( \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} - r_2 \right)^2 \frac{\lambda}{(1-\omega)} \left[ -\frac{2r_2 \text{Exp}(-2r_2 t_D)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_2} + \frac{\frac{\lambda}{(1-\omega)} \text{Exp}\left(-\frac{\lambda}{(1-\omega)} t_D\right)}{\frac{\lambda}{(1-\omega)} - 2r_2} \right]
 \end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned}
 V_1 = & \left[ -\frac{\frac{A \cdot G \cdot r_D}{\lambda} \frac{1}{4}}{\frac{r_{eD}}{2} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} + \frac{\frac{A \cdot B}{\lambda} G \frac{r_{eD}}{2r_D}}{\frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2}} \right] M + \quad (J.38) \\
 & + \left\{ \frac{2}{5} \frac{A \cdot r_D \cdot r_{eD}^3}{\lambda} + \frac{A}{2\lambda} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} - \frac{r_{eD}^2 r_D^2}{3} + \frac{r_D^4}{30} \right] \right\} N
 \end{aligned}$$

$V_f$  se escribe:

$$\begin{aligned}
 V_f \Big|_{r_D=1} = & \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \frac{\frac{r_{eD}^2 - 1}{2}}{\left[ \frac{r_{eD}^2}{2} \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]} \frac{(a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{r_2 - r_1} + \\
 & + \left\{ \left[ -\frac{\frac{G \cdot A}{4}}{\frac{r_{eD}}{2} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} + \frac{\frac{A \cdot G \cdot r_{eD}}{2}}{\frac{r_{eD}^2 - 1}{4r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2}} \right] M + \frac{\beta \rho k_f}{\mu} \right. \quad (E.39) \\
 & \left. + \left\{ \frac{2}{5} A \cdot r_{eD}^3 + \frac{A}{2} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} - \frac{r_{eD}^2}{3} + \frac{1}{30} \right] \right\} N \right.
 \end{aligned}$$

Y  $q_D$  se escribe:

$$q_D = \frac{\frac{r_{eD}^2 - 1}{2} (a - r_1) \text{Exp}(-r_1 t_D) - (a - r_2) \text{Exp}(-r_2 t_D)}{\left[ \frac{r_{eD}^2 \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right] (r_2 - r_1)} + \frac{\left[ \frac{p_i - p_{wf}}{r_w \mu} \right] \frac{\beta \rho k_f}{\mu}}{\left[ \frac{r_{eD}^2 \ln r_{eD} - \frac{r_{eD}^2 (1 - \gamma)}{2} + \frac{1}{4} \right]^2 [r_2 - r_1]^2} \left\{ \left[ -\frac{G}{4 \left\{ \frac{r_{eD}}{2} \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4 r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right] \right\}} + \frac{Gr_{eD}}{2 \left[ \frac{r_{eD}^2 - 1}{4 r_{eD}} - \frac{r_{eD} \ln r_{eD}}{2} \right]} \right] M + \left[ \frac{2}{5} r_{eD}^3 + \frac{1}{2} \left[ -\frac{r_{eD}^4}{2} - \frac{r_{eD}^2}{3} + \frac{1}{30} \right] \right] N \right\} \quad (E.39)$$

Donde  $a$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $G$ ,  $M$  y  $N$  están dadas por (E.41), (E.46), (E.47), (J.18), (J.36) y (J.37) respectivamente.