

7



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRUCTURA E HIDRODINAMICA DE ENANAS BLANCAS Y DE ESTRELLAS DE NEUTRONES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :

AUGUSTO BERNARDO CARBALLIDO SOMOHANO



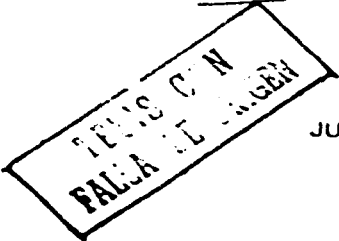
FACULTAD DE CIENCIAS
RECCION ESCOLAR

DIRECTOR DE TESIS: DR WILFRED HENRY LEE ALARDIN



MEXICO, D. F.

JUNIO DE 2002





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**  
 Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
 Facultad de Ciencias  
 Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
 "Estructura e hidrodinámica de enanas blancas y de estrellas de neutrones"

realizado por **CARBALLIDO SOMOHANO AUGUSTO BERNARDO**  
 con número de cuenta **09553380** , quién cubrió los créditos de la carrera de Física.  
 Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- Director de Tesis Propietario **DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDIN**
- Propietario **DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN**
- Propietario **DR. DANIEL SUDARSKY SAIONZ**
- Suplente **DR. JOSE ANTONIO GARCIA BARRETO**
- Suplente **DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE**

Consejo Departamental de Física

\_\_\_\_\_

**DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE**  
 Coordinadora de Licenciatura en Ciencias  
 DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**ESTRUCTURA E HIDRODINÁMICA DE  
ENANAS BLANCAS Y DE ESTRELLAS DE  
NEUTRONES**

**Augusto Bernardo Carballido Somohano**

## Dedicatoria

Este trabajo lo dedico a mis papás, a mis hermanos, a mis abuelos y a todos mis tíos, quienes de una u otra forma contribuyeron a que pudiera llegar a este punto.

Mamá y papá, sin su apoyo incondicional no hubiera podido terminar este primer paso.

Noy y Luis, su alegría contagiosa me inspiró para seguir adelante.

Mani y Papi, sus consejos me han hecho un hombre feliz y seguro de mí mismo.

## Agradecimientos

Deseo agradecer a las siguientes personas:

A William, por el gran apoyo que he recibido de su parte no solamente en la elaboración de esta tesis, sino para proseguir mis estudios de posgrado. En lo académico he aprendido mucho de él, y su disposición, su paciencia y la motivación que me ha infundido han sido factores decisivos para culminar este trabajo.

Al Dr. Manuel Peimbert, por influir en mi decisión de dedicarme a la astronomía gracias a su maravilloso curso, y por el apoyo que me ha brindado para poder realizar estudios de posgrado.

Al Prof. Andrés Porta, por ayudarme a iniciar mi trabajo de tesis y por el interés que ha tenido en apoyarme.

A los Profs. Rafael Soto y René Garduño, por haber jugado un papel fundamental en mi formación académica y por su apoyo para llevar a cabo mis estudios de posgrado.

A los Dres. Dany Page, Xavier Hernández y Jorge Cantó, por sus valiosos comentarios y su apoyo.

A Vivi, por su cariño y ternura, y a su hermosa familia.

A Ana, por todos los momentos que compartimos y por su ayuda.

A la familia León Vargas, especialmente a José Carlos y a Alejandro, por la amistad de tantos años.

A mis amigos Julio y José Antonio.

A todas las personas del Instituto de Astronomía que de alguna u otra manera me han ayudado a terminar este trabajo.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Antecedentes físicos</b>	<b>4</b>
2.1	Gas ideal clásico	4
2.1.1	Generalidades	4
2.1.2	Mezclas de gases ideales. Peso molecular medio	8
2.1.3	Gas ideal con radiación	9
2.2	Gas ideal de Fermi	12
2.2.1	Caso no relativista	12
2.2.2	Caso relativista para $T \rightarrow 0$	20
2.3	Hidrodinámica	24
<b>3</b>	<b>Resumen de estructura estelar</b>	<b>30</b>
3.1	Descripciones euleriana y lagrangiana de configuraciones gaseosas. Campo gravitacional	30
3.2	Equilibrio hidrostático	33
3.3	Ecuación de movimiento. Escala de tiempo hidrostática	36
3.4	El teorema virial	37
3.5	Pólitropos	39
<b>4</b>	<b>Enanas blancas y estrellas de neutrones</b>	<b>46</b>
4.1	Enanas blancas	47
4.1.1	Ecuación de estado. Casos límite	47
4.1.2	Correcciones electrostáticas a la ecuación de estado	50
4.2	Estrellas de neutrones	53

<b>5</b>	<b>Transferencia de masa en sistemas binarios</b>	<b>59</b>
5.1	Desbordamiento del lóbulo de Roche . . . . .	60
5.2	Evolución de la binaria . . . . .	63
5.3	Formación de discos de acrecimiento . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Simulaciones hidrodinámicas</b>	<b>68</b>
6.1	Introducción . . . . .	68
6.2	Implementación de las simulaciones . . . . .	71
6.3	Resultados . . . . .	74
	6.3.1 Sistema binario	
	6.3.2 Colapso de una enana blanca . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Comentarios y conclusiones</b>	<b>100</b>
<b>A</b>	<b>El método SPH</b>	<b>102</b>



# Capítulo 1

## Introducción

El siglo XX fue un periodo de trascendentales avances científicos. Concretamente, se hizo posible adquirir una comprensión sin precedentes de muchos de los fenómenos que ocurren al nivel atómico, por un lado, y de los que ocurren a escalas cosmológicas, por otro. En estos ámbitos la validez de las leyes conocidas de la física se ha corroborado una y otra vez.

No obstante, para llegar a este entendimiento fue preciso, en numerosas ocasiones, abandonar conceptos mantenidos por un largo tiempo y adoptar nuevos que, en algunos casos, resultaban contraintuitivos. Tal fue lo sucedido con el desarrollo de la relatividad general y de la mecánica cuántica, posiblemente las empresas intelectuales más importantes para la humanidad hasta ahora, especialmente por cuanto han permitido descubrir acerca de la naturaleza.

Estas dos ramas de la física resultaron ser indispensables en la concepción y posterior descripción de los llamados objetos compactos, sistemas astrofísicos que incluyen a las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros, y que constituyen ejemplos asombrosos de lo que sucede cuando la materia ordinaria se ve sometida a condiciones extremas de presión y densidad al término de la evolución estelar. El tema principal de esta tesis son las enanas blancas y las estrellas de neutrones.

Se requirió el ingenio de varios investigadores talentosos para resolver una buena parte de las incógnitas planteadas por estos dos tipos de objetos. Con el descubrimiento de las enanas blancas y de las enormes densidades ( $\sim 10^6$  g  $\text{cm}^{-3}$ ) imperantes en su interior se abrió la puerta para una aplicación de los postulados de la mecánica cuántica, en ese entonces recientemente formulada. Fue Subrahmanyan Chandrasekhar quien, a principios de la década de 1930, sugirió que las enanas blancas compensan su contracción gravitacional con una presión debida a la degeneración de los electrones dentro de la estrella. Chandrasekhar descubrió que al considerar electrones no relativistas, un incremento de la densidad en uno por ciento correspondía a un incremento de la presión en aproximadamente 1.667 por ciento (5/3), mientras que para electrones relativistas la presión se incrementaba en aproximadamente 1.333 por ciento (4/3).

También encontró que existe un límite superior para la masa de una enana blanca, el cual depende de la composición química de ésta, y que tiene un valor de aproximadamente 1.4 masas solares ( $1.4 M_{\odot}$ ).

El concepto de estrella de neutrones fue propuesto en 1933 por Fritz Zwicky y Walter Baade, en conexión con el origen de supernovas y rayos cósmicos [41]. Aunque estos objetos no fueron observados sino hasta 1968 al descubrirse los pulsares (estrellas de neutrones magnetizadas que giran muy rápidamente), muchas de sus características se describieron en los años previos y en los siguientes a la Segunda Guerra Mundial. Análogamente a lo que sucede en las enanas blancas, la presión interna de las estrellas de neutrones proviene de la degeneración de estas partículas, pero a densidades del orden de  $10^{12}$  g cm $^{-3}$  y mayores. A raíz de un artículo publicado por Lev Landau en 1938, en el que éste proponía a un objeto al que llamaba "núcleo de neutrones" como una fuente de energía estelar<sup>1</sup> (lo que resultó ser incorrecto a la luz del trabajo de Hans Bethe y Charles Critchfield sobre la fusión nuclear en el interior de las estrellas), Robert Oppenheimer se interesó en el problema de las estrellas de neutrones, y con la colaboración de George Volkoff y Richard Tolman concluyó que éstas tienen una masa máxima entre 1.5 y varias masas solares [41]. Posteriormente, para describir la materia estelar en la que han cesado ya las reacciones nucleares (materia "fría"), John Wheeler y Kent Harrison obtuvieron una ecuación de estado que les permitió modelar esta materia para un intervalo de densidades desde alrededor de  $10$  g cm $^{-3}$  hasta aproximadamente la densidad nuclear,  $10^{14}$  g cm $^{-3}$ . Bajo la dirección de Wheeler, Masami Wakano dedujo la estructura interna de las estrellas frías para ese intervalo de densidades.

Esta tesis presenta algunas de las herramientas necesarias para el estudio de las enanas blancas y de las estrellas de neutrones. En particular se muestra, por medio de simulaciones numéricas, la eficacia de las técnicas computacionales para resolver los complejos problemas asociados con la estructura fluida de estos objetos. Los efectos hidrodinámicos juegan un papel esencial en la evolución de los sistemas que se exponen aquí: por un lado, un sistema binario de enanas blancas muy cercanas entre sí que coalescen, cada una con una masa de  $1.39 M_{\odot}$ , y por otro, una enana blanca que se colapsa gravitacionalmente. En ambos casos se analizan las características del objeto final, desde un punto de vista newtoniano, para poder determinar si se trata o no de una estrella de neutrones. Este es el primer trabajo en el que se realiza una simulación de un sistema binario de enanas blancas en el que las estrellas componentes poseen masas tan cercanas a la masa límite de Chandrasekhar de  $1.4 M_{\odot}$ . Los colapsos que se han simulado en otros trabajos han sido en una y en dos dimensiones [16, 22], mientras que el colapso presentado aquí se ha llevado a cabo en tres dimensiones.

El estudio de este tipo de sistemas tiene una importancia fundamental en relación con varios fenómenos astrofísicos que actualmente están sometidos a un intenso escrutinio, como la emisión de ondas gravitacionales [37], las explosiones de supernovas del tipo Ia [14] y los destellos de rayos gama [42], por mencionar

<sup>1</sup> En el modelo de Landau la fuerte gravedad del "núcleo de neutrones" superdenso provocaba el choque de los átomos de la estrella contra él a altas velocidades, por lo que se desprendía así la energía calorífica responsable de evitar el colapso gravitacional de la estrella.

algunos. En particular, se piensa que la *coalescencia* de una binaria de enanas blancas puede dar origen a estos fenómenos. El colapso de enanas blancas para formar estrellas de neutrones se ha sugerido para explicar las poblaciones de estas últimas en cúmulos globulares [16].

En el Capítulo 2 se revisan algunos de los fundamentos físicos necesarios para el estudio de enanas blancas y de estrellas de neutrones: el gas ideal clásico (generalidades, mezclas de gases ideales e inclusión de radiación); el gas ideal de Fermi (caso no relativista y caso relativista a bajas temperaturas); hidrodinámica (marcos euleriano y lagrangiano, ecuación de continuidad, velocidad del sonido adiabática). Algunas generalidades de la teoría de la estructura estelar se presentan en el Capítulo 3, tales como estructura hidrostática de configuraciones gaseosas esféricas, escala de tiempo hidrostática, teorema virial y modelos politrópicos de estrellas. Este último tópico es particularmente importante, porque las ecuaciones de estado politrópicas permiten describir a diferentes tipos de estrellas (incluyendo las que son el tema principal de esta tesis) según la compresibilidad del material que las forma.

El Capítulo 4 habla sobre las enanas blancas y las estrellas de neutrones propiamente. En lo concerniente a las primeras se presenta la ecuación de estado de Chandrasekhar, que se utiliza para representar su estructura interior, y se menciona cómo se llevan a cabo correcciones electrostáticas. Para las segundas se explica de manera general cómo cambia la física al pasar a regímenes de densidad cada vez mayores, y la necesidad de incorporar nuevas ecuaciones de estado para obtener modelos cada vez más precisos.

En el Capítulo 5 se trata el tema de la transferencia de masa en sistemas binarios de estrellas, haciendo alusión a conceptos como el potencial de Roche, el desbordamiento del lóbulo de Roche y la formación de discos de acrecimiento. Los resultados de las simulaciones se presentan en el Capítulo 6, junto con una descripción de su implementación. Las conclusiones se exponen en el Capítulo 7.

# Capítulo 2

## Antecedentes físicos

En este capítulo se da una revisión general de algunos de los conceptos físicos que son relevantes para el estudio de la estructura estelar y, en particular, de las enanas blancas y de las estrellas de neutrones.

### 2.1 Gas ideal clásico

#### 2.1.1 Generalidades

En un gas a alta temperatura y baja presión la interacción entre las partículas es despreciable, y la presión  $P$ , la temperatura  $T$  y la densidad de partículas  $n$  están relacionadas por la ecuación de estado

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT \quad (2.1)$$

en donde  $N$  es el número total de partículas en el gas y  $V$  es el volumen que ocupa el gas. La constante de Boltzmann es  $k = 1.3806568 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ . Un gas (o en general, un fluido) que satisface (2.1) se llama *gas ideal* (o *fluido ideal*).

La energía interna de un gas ideal está dada por

$$U = \int_0^T c_V dT' \quad (2.2)$$

donde la *capacidad calorífica a volumen constante*, que mide la cantidad de calor requerida para producir un aumento de temperatura en una unidad para un sistema mantenido a volumen constante, se define por

$$c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V$$

La segunda igualdad se obtiene por la primera ley de la termodinámica.

$$dU = dQ + dW \quad (2.3)$$

En el caso de un gas ideal, el trabajo está asociado con un cambio de volumen:

$$dW = -P'dV \quad (2.4)$$

La capacidad calorífica a volumen constante de un gas ideal es una función de la temperatura. Para un gas ideal monoatómico no relativista,  $c_V = (3/2)Nk$  y  $U = c_V T$ .

Derivando respecto a  $T$  la primera ley escrita como  $dQ = dU + PdV$ , y dejando a  $P$  constante, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \\ &= c_V + Nk \end{aligned} \quad (2.5)$$

en donde se usó la ecuación de estado (2.1). Como el lado izquierdo de la ecuación anterior define  $c_P$ , entonces

$$c_P = c_V + Nk \quad (2.6)$$

para cualquier gas ideal.

Existe una clase de procesos, llamados politrópicos, que se definen por

$$\frac{dQ}{dT} = c = \alpha c \quad (2.7)$$

Se pueden combinar la primera ley, la relación (2.6) entre  $c_P$  y  $c_V$ , la ecuación de estado, y la Ec. (2.7) para mostrar que en estos procesos

$$\alpha dT - c_V dT = PdV = (c_P - c_V) T \frac{dV}{V} \quad (2.8)$$

Definiendo la  $\gamma$  politrópica como

$$\gamma \equiv \frac{c_P - c}{c_V - c} \quad (2.9)$$

la Ec. (2.8) se puede reescribir  $dT/T + (\gamma - 1) dV/V = 0$ . Asumiendo que  $\gamma$  es constante se pueden obtener las ecuaciones de estado politrópicas [6]:

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= \alpha e. \\ P^{1-\gamma} T^\gamma &= \alpha e. \\ TV^{\gamma-1} &= \alpha e. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Las ecuaciones de estado politrópicas son útiles para estudiar el comportamiento de configuraciones gaseosas gravitantes. Se pueden construir modelos simples

de estrellas homogéneas, enanas blancas y estrellas de neutrones suponiendo que la materia que las compone es politrópica.

Es interesante analizar dos límites de (2.9). Como  $dQ = TdS$  (ver, por ejemplo, [8]), donde  $S$  es la entropía, un cambio politrópico a  $S$  constante corresponde a  $c = 0$ , y entonces  $\gamma = c_p/c_v$  (proceso adiabático). Para cambios isotérmicos,  $c \rightarrow \infty$ , y la gama politrópica es la unidad:  $\gamma = 1$ .

Conviene utilizar una forma más general de (2.10). Las *exponentes adiabáticos* están dados por las relaciones

$$\begin{aligned} P V^{\Gamma_1} &= \text{cte.} \\ P^{1-\Gamma_2} T^{\Gamma_2} &= \text{cte.} \\ T V^{\Gamma_3-1} &= \text{cte.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

que se aplican a cualquier tipo de gases. Para un gas ideal monoatómico se tiene  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = c_p/c_v$  [6]. Para gases ideales que contienen moléculas, o para átomos a temperaturas suficientemente altas para excitar o ionizar a los electrones ligados, las  $\Gamma_i$  de (2.11) son desiguales. Por ejemplo, a temperaturas por arriba o por debajo de un intervalo angosto alrededor de la temperatura de ionización del hidrógeno, las Ecs. (2.11) son válidas con  $\Gamma_1 = 5/3$ ; en la zona de ionización son menores que  $5/3$ , y se aproximan a uno cuando el número de átomos es comparable al número de iones. En astrofísica,  $\Gamma_1$  determina la estabilidad dinámica de una estrella;  $\Gamma_2$  la inestabilidad convectiva; y  $\Gamma_3$  delimita el régimen de inestabilidad pulsátil.

La entropía  $S$  de un gas ideal puede obtenerse a partir de la ecuación de estado y de la primera ley,  $TdS = dU + PdV$ :

$$S = Nk \ln(VT^{\frac{1}{\gamma-1}}) + \text{cte.} \quad (2.12)$$

Usualmente, los procesos fundamentales de la astrofísica son irreversibles, en el sentido de que la entropía local se incrementa con el tiempo. La tasa de pérdida de calor  $Tds/dt$ , donde  $s$  es la entropía por unidad de masa, debe incluirse en modelos de evolución estelar.

El *potencial químico* de un tipo específico  $i$  de partícula en un sistema termodinámico se define como el cambio en energía interna de todo el sistema cuando se agrega otra partícula del mismo tipo, y el número  $N_j$  de todos los otros tipos de partícula se mantiene constante:

$$\mu_i = \left( \frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, V, N_j} \quad (2.13)$$

Para un gas ideal, el potencial químico está dado por [6]

$$\mu_i = -kT \ln \left[ \frac{g_i}{n_i} \left( \frac{m_i kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right] + m_i c^2 \quad (2.14)$$

El factor  $g_i$  es la multiplicidad de estados debida al espín (ver Sección 2.2). El potencial químico es útil para relacionar las abundancias de los reactivos y de los productos de reacciones de partículas, químicas o termonucleares.

En un gas a temperatura  $T$  las partículas de masa  $m$  tienen velocidades promedio del orden de  $(3kT/m)^{1/2}$ . La distribución de velocidades está dada por la función de distribución de Maxwell:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right); \quad (2.15)$$

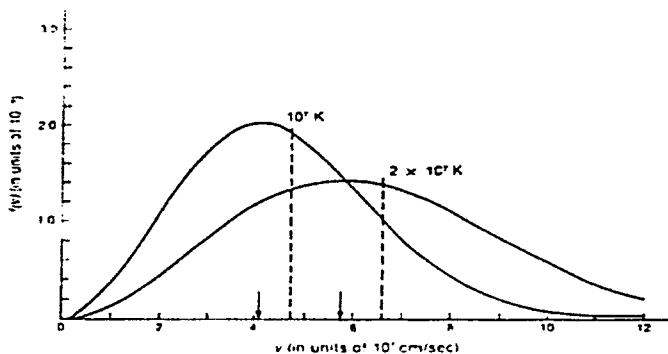


Figura 2.1: Distribución de Maxwell para átomos de hidrógeno a dos temperaturas distintas (tomada de [6]).

La cantidad  $f(v)dv$  da la probabilidad de encontrar una partícula en el intervalo de velocidades comprendido entre  $v$  y  $v + dv$  a la temperatura  $T$ . La Figura 2.1 muestra  $f(v)$  para átomos de hidrógeno a las temperaturas  $10^7$  K (que es típica en el interior del sol) y  $2 \times 10^7$  K. La velocidad más probable de una partícula es

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

y la velocidad cuadrática media es

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}$$

Para un gas de hidrógeno a las temperaturas de la Figura 1.1 se tiene

$$\begin{aligned} \langle v \rangle_{T=10^7 \text{ K}} &\approx 5.7 \times 10^8 \text{ cm s}^{-1}, & \langle v \rangle_{T=2 \times 10^7 \text{ K}} &\approx 8.1 \times 10^8 \text{ cm s}^{-1} \\ \langle v^2 \rangle_{T=10^7 \text{ K}}^{1/2} &\approx 6.5 \times 10^8 \text{ cm s}^{-1}, & \langle v^2 \rangle_{T=2 \times 10^7 \text{ K}}^{1/2} &\approx 9.2 \times 10^8 \text{ cm s}^{-1} \end{aligned}$$

La distribución (2.15) también se puede aplicar a estrellas en las regiones centrales de cúmulos globulares y de núcleos galácticos, y a galaxias en cúmulos de galaxias.

### 2.1.2 Mezclas de gases ideales. Peso molecular medio

Para un gas ideal formado por  $n$  partículas por unidad de volumen que tienen peso molecular  $\mu$ , la ecuación de estado se puede escribir

$$P = nkT = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T \quad (2.16)$$

donde  $\mathcal{R} = k/m_u = 8.31 \times 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ g}^{-1}$  es la constante universal de los gases, con  $m_u = 1 \text{ uma} = 1.66053 \times 10^{-24} \text{ g}$ . Aquí las unidades de la constante de los gases se expresan como energía por K y por unidad de masa, en lugar de expresarlas como energía por K y por mol, como usualmente se hace. Esto tiene la ventaja de que el peso molecular es adimensional (en lugar de tener dimensiones de masa por mol).

En el interior de las estrellas los gases están completamente ionizados; por cada núcleo de hidrógeno hay un electrón libre, y por cada núcleo de helio hay dos electrones libres. Se tiene por lo tanto una mezcla de dos gases, aquél compuesto por los núcleos (que a la vez puede contener más de un componente) y aquél compuesto por los electrones libres.

Considérese una mezcla de núcleos totalmente ionizados. La composición química puede describirse especificando todas las fracciones en peso  $X_i$  de los núcleos del tipo  $i$ , los cuales tienen peso molecular  $\mu_i$  y número de carga  $Z_i$ . Si se tienen  $n_i$  núcleos por unidad de volumen y una "densidad parcial"  $\rho_i$ , entonces  $X_i = \rho_i/\rho$  y

$$n_i = \frac{\rho_i}{\mu_i m_u} = \frac{\rho}{m_u} \frac{X_i}{\mu_i} \quad (2.17)$$

Designando a  $P_e$  como la presión parcial de los electrones libres, y a  $P_i$  como la presión parcial debida a los núcleos del tipo  $i$ , la presión total  $P$  es la suma

$$P = P_e + \sum_i P_i = (n_e + \sum_i n_i)kT. \quad (2.18)$$

La contribución de un átomo de la especie  $i$  completamente ionizado al número total de partículas (núcleo más  $Z_i$  electrones libres) es  $Z_i + 1$ , por lo que

$$n = n_e + \sum_i n_i = \sum_i (Z_i + 1)n_i \quad (2.19)$$

Utilizando (2.17) y (2.19), (2.18) se puede reescribir

$$P = nkT = \mathcal{R} \sum_i \frac{X_i(Z_i + 1)}{\mu_i} \rho T \quad (2.20)$$



Al comparar lo anterior con la Ec. (2.16) se puede definir el *peso molecular medio*:

$$\mu \equiv \left[ \sum_i \frac{X_i(Z_i + 1)}{\mu_i} \right]^{-1} \quad (2.21)$$

El peso molecular medio permite tratar a una mezcla de gases ideales como un solo gas ideal uniforme. Únicamente se necesita reemplazar el peso molecular en (2.16) por el peso molecular medio (2.21). Como ejemplos, tómense en cuenta los casos de hidrógeno totalmente ionizado y de helio totalmente ionizado. Para el hidrógeno,  $X_H = 1$ ,  $\mu_H = 1$ ,  $Z_H = 1$ , y  $\mu = 1/2$ . Para el helio,  $X_{He} = 1$ ,  $\mu_{He} = 4$ ,  $Z_{He} = 2$ , y  $\mu = 4/3$ .

Se puede definir el peso molecular medio por electrón. En este caso se tiene [25]

$$\mu_e = \left[ X_H + \frac{1}{2}X_{He} + \frac{1}{2}(1 - X_H - X_{He}) \right]^{-1} = \frac{2}{1 + X_H} \quad (2.22)$$

### 2.1.3 Gas ideal con radiación

La presión en una estrella no sólo está dada por el gas, sino también por los fotones en su interior. Como la radiación es prácticamente la de un cuerpo negro [25], su presión  $P_{rad}$  está dada por

$$P_{rad} = \frac{1}{3}u = \frac{a}{3}T^4 \quad (2.23)$$

donde  $u$  es la densidad de energía y  $a$  es la constante de densidad de radiación,  $a = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ . La presión total  $P$  es entonces la suma de la presión del gas  $P_{gas}$  y la presión de la radiación  $P_{rad}$ :

$$P = P_{gas} + P_{rad} = \frac{Nk}{V}T + \frac{a}{3}T^4 \quad (2.24)$$

donde se ha asumido que el gas es ideal, mientras que la energía total es la contribución de la energía del gas y la energía de la radiación [19]:

$$U = c_V T + aT^4 V \quad (2.25)$$

Se puede definir una medida de la importancia de la presión de radiación por

$$\delta \equiv \frac{P_{gas}}{P} \quad , \quad 1 - \delta = \frac{P_{rad}}{P} \quad (2.26)$$

Para  $\delta = 1$  la presión de radiación es cero, mientras que  $\delta = 0$  significa que la presión del gas es cero. Por lo anterior se tiene  $P_{\text{gas}} = NkT/V = \delta P$ , y la presión total se puede expresar como

$$P = \frac{NkT}{\delta V} = \frac{nkT}{\delta} = \frac{\rho kT}{\delta \mu m_H} \quad (2.27)$$

donde  $m_H$  es la masa del átomo de hidrógeno. Cuando  $\delta$  es constante, o el producto  $\delta\mu$  es constante, el efecto de la radiación es equivalente formalmente a modificar el peso molecular medio. Los resultados de los cálculos basados únicamente en la presión del gas pueden aplicarse a la materia y a la radiación reemplazando  $\mu$  por  $\delta\mu$ . Sin embargo, en general  $\delta$  depende de la posición en el sistema.

Considérese el comportamiento adiabático de una mezcla de gas y radiación; los procesos adiabáticos satisfacen

$$dQ = dU + PdV = 0 \quad (2.28)$$

El cambio en  $U$  se puede encontrar por (2.25), por lo que se tiene

$$dU + PdV = c_V dT + 4aT^3 V dT + \alpha T^4 dV + PdV = 0 \quad (2.29)$$

Pero

$$\begin{aligned} c_V dT &= \frac{c_V \delta PV}{Nk} \frac{dT}{T} \\ &= \frac{c_V}{c_P - c_V} \delta PV d \ln T \\ &= \frac{\delta PV}{\gamma - 1} d \ln T \end{aligned} \quad (2.30)$$

en donde se usaron (2.27), (2.6) y la definición de  $\gamma$  para un proceso adiabático. Además

$$\begin{aligned} 4aT^3 V dT &= 12 \frac{\alpha T^4 V}{3} d \ln T \\ &= 12(1 - \delta) PV d \ln T \end{aligned} \quad (2.31)$$

y

$$\alpha T^4 dV = 3(1 - \delta) PdV \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.30), (2.31) y (2.32) en (2.29) y dividiendo entre  $PV$  se obtiene

$$[\delta + 12(1 - \delta)(\gamma - 1)] d \ln T + (4 - 3\delta)(\gamma - 1) d \ln V = 0 \quad (2.33)$$

A partir de esta ecuación se pueden encontrar los exponentes adiabáticos que aparecen en (2.11), y que se muestran en la Figura 2.2 [6]:

$$\begin{aligned}\Gamma_3 - 1 &\equiv \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln V} \right)_S \\ &= \frac{(4 - 3\delta)(\gamma - 1)}{\delta + 12(1 - \delta)(\gamma - 1)}\end{aligned}\quad (2.34)$$

$$\Gamma_2 = \delta + \frac{(4 - 3\delta)^2(\gamma - 1)}{\delta + 12(1 - \delta)(\gamma - 1)}\quad (2.35)$$

$$\Gamma_2 = 1 + \frac{(4 - 3\delta)(\gamma - 1)}{\delta^2 + 3(\gamma - 1)(1 - \delta)(4 + \delta)}\quad (2.36)$$

y que cumplen la relación [25]

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}\quad (2.37)$$

Para  $\gamma = 5/3$  (gas ideal monoatómico) y  $\delta = 1$  (sin radiación), las Ecs. (2.34)-(2.36) se reducen a  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 5/3$ . Para  $\delta = 0$  (únicamente radiación),  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 4/3$ . Para valores de  $\delta$  intermedios los exponentes adiabáticos son desiguales. En tanto más radiación existe ( $\delta$  decreciente), decrecen uniformemente, como se muestra en la Figura 2.2. Nótese que los valores de las  $\Gamma_i$  se encuentran entre  $4/3$  y  $5/3$ .

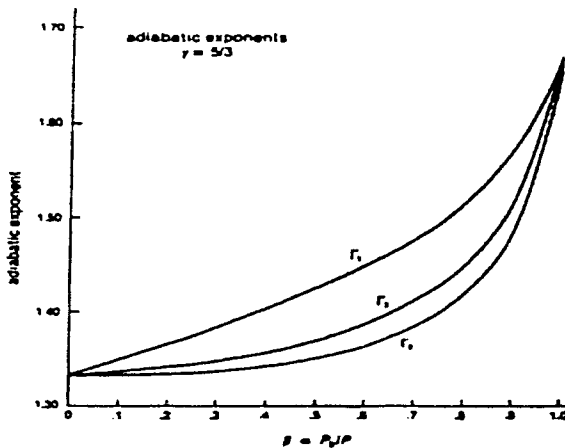


Figura 2.2: Exponentes adiabáticos como función del cociente entre la presión de gas y la presión total (tomada de [6]).

## 2.2 Gas ideal de Fermi

Como es sabido, en la naturaleza un sistema de partículas idénticas pertenece a uno de dos grupos: a un *sistema de Bose* o a un *sistema de Fermi*. En un sistema de Bose, las partículas constituyentes (llamadas *bosones*) tienen un espín entero ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ), y un conjunto completo de eigenfunciones del sistema es aquél formado por eigenfunciones del hamiltoniano  $H$  que son simétricas bajo el intercambio de cualquier par de coordenadas correspondientes a dos partículas. En un sistema de Fermi, las partículas (llamadas *fermiones*) tienen un espín semientero ( $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ), y un conjunto completo de eigenfunciones del sistema es aquél formado por eigenfunciones de  $H$  que son antisimétricas bajo el intercambio de dos pares de coordenadas. En esta sección se describe de manera general un sistema del segundo grupo, el *gas ideal de Fermi*, que es un modelo de un sistema de fermiones que no interactúan entre sí, o cuyas interacciones pueden ser despreciadas. Este sistema es un análogo cuántico del gas ideal clásico. El estudio del gas ideal de Fermi es relevante para la descripción de electrones en la banda de conducción de metales, y también de la estructura de enanas blancas. Esto último se trata más adelante.

### 2.2.1 Caso no relativista

De acuerdo a la mecánica estadística cuántica, la función de partición gran canónica de un sistema de fermiones en una caja de volumen  $V$  a una temperatura absoluta  $T$  es [19]

$$\mathcal{Z}(z, V, T) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + ze^{-\epsilon_k/kT}) \quad (2.38)$$

donde  $z = e^{\mu/kT}$  es la fugacidad, con  $\mu$  el potencial químico;  $k$  es la constante de Boltzmann; y  $\epsilon_k$  es la energía del  $k$ -ésimo estado de una partícula. El número de ocupación promedio para el estado  $k$  está dado por la *distribución de Fermi-Dirac* (Figura 2.3):

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{z^{-1}e^{\epsilon_k/kT} + 1} \quad (2.39)$$

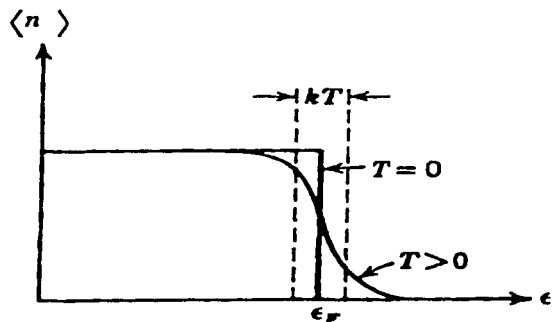


Figura 2.3: Número de ocupación promedio de un gas de Fermi para  $T > 0$  y  $T = 0$ . El intervalo de energías a lo largo del cual la distribución cambia cuando  $T \rightarrow 0$  es de orden  $kT$ .  $\epsilon_F$  es la energía de Fermi; ver Ecu. (1.62) y el texto que le sigue (tomada de [19]).

Las propiedades termodinámicas del sistema se pueden obtener a partir del logaritmo de  $Z$ :

$$q(T, V, z) \equiv \ln Z = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + ze^{-\epsilon_k/kT}) = \frac{PV}{kT} \quad (2.40)$$

La segunda igualdad resulta de la integración de la probabilidad relativa de que haya  $N$  partículas en  $V$  con coordenadas en el espacio fase  $(p, q)$ , respecto a estas coordenadas; y de la posterior suma de  $N$  desde 0 hasta  $\infty$  [19].

El potencial químico  $\mu$  no está fijo para un sistema como éste, y por lo tanto tampoco lo está la fugacidad  $z$ . Se puede determinar  $z$  para un número  $N$  dado de partículas sumando (2.39) sobre todos los estados:

$$N(T, V, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle n_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{\epsilon_k/kT} + 1} \quad (2.41)$$

De aquí se observa que  $z$  puede tomar cualquier valor positivo, y  $\mu$  cualquier valor. Como  $\mu$  es la energía promedio necesaria para añadir otra partícula al sistema, debe incrementarse al aumentar el número de partículas dentro de un volumen constante. La razón es que el principio de exclusión de Pauli requiere un nivel de energía más alto para cada nueva partícula.

Para un volumen grande, las sumas en las Ecs. (2.40) y (2.41) se pueden reescribir como integrales [18], ya que los valores posibles de la energía forman un continuo:

$$q(T, V, z) = \int_0^{\infty} g(\epsilon) \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \quad (2.42)$$

$$N(T, V, z) = \int_0^{\infty} g(\epsilon) \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} d\epsilon \quad (2.43)$$

En estas expresiones se ha introducido la abreviación  $\beta \equiv \frac{1}{kT}$ . La *densidad de estados de una partícula*  $g(\epsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2}$  se obtiene al considerar el número de estados en el espacio fase de una partícula de masa  $m$ :

$$\Sigma = \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} = \frac{V}{h^3} \int (4\pi p^2) dp = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (2.44)$$

La constante de Planck  $h$  está involucrada en el factor de normalización  $1/h^3$ . En el último paso se utilizó la relación  $\epsilon = p^2/2m$  entre la energía de la partícula y su momento. La densidad de estados es entonces

$$g(\epsilon) = \frac{d\Sigma}{d\epsilon}$$

Esto da la sustitución anterior,  $\sum_k \rightarrow \int g(\epsilon) d\epsilon$ .

En realidad las partículas de espín  $s$  poseen  $2s+1$  orientaciones distintas, las cuales son energéticamente degeneradas en el caso sin interacción. Por ello la densidad de estados debe multiplicarse por un factor de degeneración  $g = 2s+1$ :

$$g(\epsilon) = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad (2.45)$$

Al sustituir la ecuación anterior en la Ec. (2.42) e integrar por partes se obtiene

$$\begin{aligned} q(T, V, z) &= g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \\ &= g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{2}{3} \beta \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} d\epsilon \end{aligned} \quad (2.46)$$

y al sustituirla en (2.43),

$$N(T, V, z) = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} d\epsilon \quad (2.47)$$

Las dos últimas integrales se pueden resolver haciendo la sustitución  $x = \beta\epsilon$ , con lo que se transforman en la forma general

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx \equiv f_n(z), \quad 0 \leq z < \infty \quad (2.48)$$

(ver, por ejemplo, [18]). Aquí  $\Gamma(n)$  es la función gamma, definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2.49)$$

y cuyos valores para números enteros y semienteros positivos  $n$  pueden conocerse, sabiendo que  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , y con ayuda de la relación de recurrencia  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ . Las gráficas de  $f_n(z)$  para  $n = 3/2$ ,  $5/2$  y  $7/2$  se muestran en la Figura 2.4. Por lo anterior, las Ecs. (2.46) y (2.47) se pueden escribir

$$q(T, V, z) = \frac{gV}{\lambda^3} f_{5/2}(z) = \frac{P'V}{kT} \quad (2.50)$$

$$N(T, V, z) = \frac{gV}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \quad (2.51)$$

donde  $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$  es la *longitud de onda térmica*, llamada así por ser la longitud de onda de una partícula de masa  $m$  y energía  $kT$ .

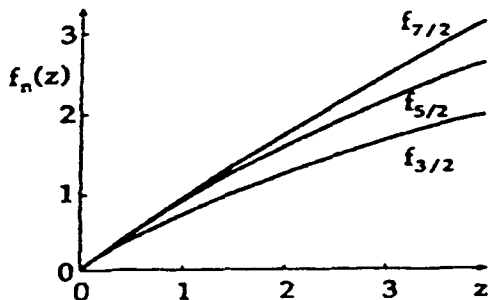


Figura 2.4: Algunas funciones  $f_n(z)$  (tomada de [18]).

Para  $z < 1$  se puede realizar la expansión en serie

$$\frac{1}{z^{-1}e^z + 1} = ze^{-z} \frac{1}{1 + ze^{-z}} = ze^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} (-ze^{-z})^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^k e^{-kz} \quad (2.52)$$

Sustituyendo en la Ec. (2.47) se tiene

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^n} \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^n} \quad (2.53)$$

donde  $y = kx$ , y en donde se usó la definición de la función  $\Gamma$  en el cálculo de la integral. De aquí se observa que es válida la fórmula recursiva

$$\frac{d}{dz} f_n(z) = \frac{1}{z} f_{n-1}(z) \quad (2.54)$$

Para  $z \ll 1$  se sigue de la ecuación anterior que

$$f_n(z) \approx z \quad (2.55)$$

La energía interna  $U$  del gas de Fermi se puede calcular de la siguiente manera:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z|_{z,V} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z|_{z,V} = \frac{3}{2} kT \frac{gV}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (2.56)$$

Usando la Ec. (2.50) se puede eliminar el término  $\frac{gV}{\lambda^3}$ , con lo que resulta

$$U = \frac{3}{2} NkT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \quad (2.57)$$

Del límite clásico  $\frac{N\lambda^3}{g} \ll 1$  (temperaturas altas y densidades bajas) se sigue que  $z \ll 1$ , y por la Ec. (2.54),  $U = \frac{3}{2} NkT$ . Comparando las Ecs. (2.55) y (2.49) se obtiene

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad (2.58)$$

Esta fórmula es válida en general para gases ideales no relativistas.

Cuando las temperaturas son bajas y las densidades altas (límite cuántico), la longitud de onda de de Broglie promedio de una partícula es mucho más grande que la separación promedio entre partículas. De este modo, los efectos cuánticos, en particular el principio de exclusión de Pauli, se vuelven importantes. Se dice que el sistema en cuestión es *degenerado*, porque las partículas tienden a ocupar los niveles de energía más bajos posibles. En este caso ( $z \gg 1$ ), se puede demostrar que las funciones  $f_n(z)$  pueden escribirse de la siguiente manera [18]:

$$f_n(\beta\mu) = \frac{(\beta\mu)^n}{\Gamma(n+1)} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{n-1}{2j-1} n (\beta\mu)^{-2j} \Gamma(2j) \zeta(2j) \left( 1 - \frac{1}{2^{2j-1}} \right) \right] \quad (2.59)$$



donde  $\zeta$  es la función zeta de Riemann [1]. Por lo tanto, para las Ecs. (2.49) y (2.50) se tiene

$$\frac{P}{kT} \approx \frac{g}{\lambda^3} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{5/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{7}{2})} \quad \text{ó} \quad P \approx g \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \quad (2.60)$$

$$\frac{N}{V} \approx \frac{g}{\lambda^3} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{3/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})} \quad \text{ó} \quad \frac{N}{V} \approx g \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} \mu^{3/2} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \quad (2.61)$$

Este límite también se puede derivar directamente. Cuando  $T \rightarrow 0$ , el número de ocupación promedio (2.39) se puede describir con buena aproximación por una función escalón  $\theta(\mu - \epsilon)$  (ver Figura 2.3):

$$\langle n_k \rangle = \begin{cases} \theta(\mu - \epsilon) = 1 & \text{si } \epsilon \leq \mu \\ \theta(\mu - \epsilon) = 0 & \text{si } \epsilon > \mu \end{cases} \quad (2.62)$$

Para  $T \rightarrow 0$ , el potencial químico  $\mu$  se debe identificar con la *energía de Fermi*  $\epsilon_F$  del sistema, que es la energía del nivel ocupado más alto. Debido al principio de Pauli, dos fermiones no pueden estar en el mismo estado. Por eso, en el estado base del sistema, las partículas ocupan los niveles más bajos posibles y llenan los niveles hasta el nivel energético finito  $\epsilon_F$ . Así,  $\epsilon_F$  puede considerarse como el nivel de energía de una sola partícula debajo del cual hay exactamente  $N$  estados. En el espacio de momentos las partículas llenan una esfera de radio  $p_F$  cuya superficie se llama *superficie de Fermi*.

A partir de (2.61) se pueden calcular directamente el número de partículas y la energía interna:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\infty} g(\epsilon) \theta(\mu - \epsilon) d\epsilon \\ &= g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\mu} \epsilon^{1/2} d\epsilon \\ &= gV \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \mu^{3/2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\infty} g(\epsilon) \theta(\mu - \epsilon) \epsilon d\epsilon \\ &= g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\mu} \epsilon^{3/2} d\epsilon \\ &= gV \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{4}{5\sqrt{\pi}} \mu^{5/2} \end{aligned} \quad (2.64)$$

que concuerdan con las Ecs. (2.59) y (2.60) debido a (2.57).

Dividiendo la Ec. (2.64) entre la Ec. (2.63) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{U}{N} &= \frac{3}{5}\mu \\ &= \frac{3}{5}\epsilon_F \quad (T \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (2.65)$$

En el límite de temperatura cero la energía promedio por partícula es 3/5 de la energía de Fermi. De la Ec.(2.61) es posible determinar ésta última:

$$\epsilon_F = \mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2 N}{g V} \right)^{2/3}$$

Se pueden calcular correcciones a (2.64) para temperaturas bajas finitas. Para esto, utilizando la expresión general para  $f_n(z)$  se escribe

$$\begin{aligned} f_{5/2}(z) &\approx \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln z)^{5/2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \\ f_{3/2}(z) &\approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

Sustituyendo esta expresión para  $f_{3/2}(z)$  en (2.50):

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi g}{3} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (kT \ln z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \quad (2.67)$$

Como el segundo término del paréntesis cuadrado es pequeño, ya que  $z \gg 1$ , la ecuación anterior se puede escribir

$$kT \ln z = \mu = \left( \frac{3N}{4\pi g V} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} = \epsilon_F \quad (2.68)$$

y se obtiene como mejor aproximación:

$$kT \ln z = \mu \approx \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \quad (2.69)$$

El potencial químico disminuye cuando la temperatura aumenta; la contribución de cada partícula nueva a la energía interna del sistema es más pequeña cuando la energía cinética de las partículas de dicho sistema se ha incrementado. Por el contrario, cuando la energía cinética es baja o ha disminuido, cada partícula que se añade aporta más energía al sistema.

En la Ec. (2.69) el parámetro de expansión es el cociente de la energía térmica de excitación y la energía de Fermi del sistema. La energía interna promedio por partícula es, usando (2.56),

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2} kT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{3}{2} kT \frac{2}{5} \ln z \frac{\left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]}{\left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]} \quad (2.70)$$

Expandiendo el denominador como  $(1 + \alpha)^{-1} \approx 1 - \alpha$ , se sigue que

$$\frac{U}{N} \approx \frac{3}{5} kT \ln z \left( 1 + \frac{\pi^2}{2} (\ln z)^{-2} + \dots \right) \quad (2.71)$$

Finalmente, al sustituir (2.68) para  $\ln z$ :

$$\frac{U}{N} \approx \frac{3}{5} \epsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.72)$$

La energía interna de un sistema de Fermi no se aproxima a cero para bajas temperaturas, como es el caso del gas ideal clásico, sino que converge a un valor finito dado por la energía total de los estados ocupados cuando  $T \rightarrow 0$  (que es finita, por el principio de Pauli).

El calor específico (la capacidad calorífica por unidad de masa) se puede calcular de (2.72):

$$\frac{c_V}{Nk} = \frac{1}{Nk} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{\pi^2 kT}{2 \epsilon_F} + \dots$$

El calor específico del gas de Fermi se muestra en la Figura 2.5. Nótese que para temperaturas altas tiende al valor  $\frac{3}{2} Nk$ , correspondiente al gas clásico.

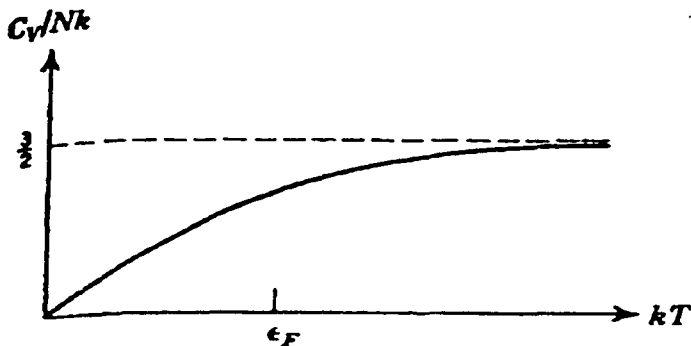


Figura 2.5: Calor específico de un gas ideal de Fermi (tomada de [19]).

De (2.71) y (2.57) se obtiene la ecuación de estado:

$$P = \frac{2U}{3V} = \frac{2}{5} \frac{\epsilon_F}{v} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.73)$$

Otras cantidades que se pueden expresar en términos de la expansión en  $kT/\epsilon_F \ll 1$  son la energía libre de Helmholtz  $F = \mu N - PV$  y la entropía  $S = \frac{1}{T}(U - F)$ :

$$\frac{F}{N} = \frac{3}{5}\epsilon_F \left[ 1 - \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\frac{S}{Nk} = \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{\epsilon_F}$$

Se observa que  $S \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow 0$ . El gas degenerado de Fermi a  $T = 0$  representa el estado del sistema con el más alto grado de orden.

## 2.2.2 Caso relativista para $T \rightarrow 0$

Para derivar las propiedades termodinámicas de un gas de Fermi relativista a bajas temperaturas ( $T \rightarrow 0$ ), se considera nuevamente la función de partición gran canónica:

$$\ln Z = \sum_k \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_k})$$

La energía  $\epsilon_k$  de una sola partícula en el estado  $k$  ahora es relativista. Se resta la masa en reposo de las partículas por simplicidad:

$$\epsilon = mc^2 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] \quad (2.74)$$

En seguida se suma sobre todos los estados integrando sobre todos los momentos (Ec. (2.44))

$$\begin{aligned} \ln Z &= g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) dp \\ &= g \frac{4\pi V}{h^3} \frac{\beta}{3} \int_0^\infty p^3 \frac{d\epsilon}{dp} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} dp \end{aligned}$$

en donde se integró por partes. La fugacidad  $z$  se determina, para un número de partículas dado, a partir de

$$N(T, V, z) = \sum_k \langle n_k \rangle = g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} dp$$

Cuando  $T \rightarrow 0$ , el número de ocupación promedio está dado por (1.25), y entonces se cumple

$$\ln Z = g \frac{4\pi V}{h^3} \frac{\beta}{3} \int_0^{p_F} p^3 \frac{dc}{dp} dp \quad (2.75)$$

$$N(T, V, z) = g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = g \frac{4\pi V}{3h^3} p_F^3 \quad (2.76)$$

El momento de Fermi se puede calcular de la ecuación anterior:

$$p_F = \left( \frac{3}{4\pi} \frac{N h^3}{V g} \right)^{1/3} \quad (2.77)$$

Se necesita ahora conocer  $dc/dp$  para la Ec. (2.75), lo cual se puede hacer a partir de (2.74):

$$\frac{dc}{dp} = c \frac{\frac{p}{mc}}{\left[ 1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

Sustituyendo en (2.75) y considerando que  $\ln Z = PV/kT$ , se sigue que

$$P = \frac{4\pi g}{3h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \frac{\left( \frac{p}{mc} \right)^2}{\left[ 1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2 \right]^{1/2}} p^2 dp \quad (2.78)$$

Por otro lado, una expresión explícita para la energía interna, cuando  $T \rightarrow 0$ , se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= \sum_k \epsilon_k \langle n_k \rangle \\ &= \frac{4\pi g V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left\{ mc^2 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] \right\} dp \quad (2.79) \end{aligned}$$

El objetivo es, pues, calcular las integrales en (2.78) y (2.79). Una forma de hacer esto es haciendo la sustitución  $p = mc \sinh x$ ; entonces se tiene  $\epsilon = mc^2 (\cosh x - 1)$  y  $dc/dp = c \tanh x$ . Con la identificación  $p_F = mc \sinh x_F$  las expresiones anteriores se convierten en

$$P = \frac{4\pi g m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} \sinh^4 x dx \quad (2.80)$$

$$U = \frac{4\pi g V m^4 c^5}{h^3} \int_0^{x_F} (\cosh x - 1) \sinh^2 x \cosh x dx \quad (2.81)$$

Estas integrales se pueden resolver con ayuda de las siguientes propiedades de las funciones hiperbólicas:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x \\ \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x \end{aligned}$$

El primer integrando se puede escribir

$$\begin{aligned} \sinh^4 x &= \sinh^2 x (\cosh^2 x - 1) \\ &= \frac{1}{4} \sinh^2 2x - \sinh^2 x \\ &= \frac{1}{8} \cosh 4x - \frac{1}{2} \cosh 2x + \frac{3}{8} \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{32} \sinh 4x - \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{3}{8} x \right) \end{aligned}$$

Análogamente, el segundo integrando es

$$\begin{aligned} \cosh^2 x \sinh^2 x - \sinh^2 x \cosh x &= \frac{1}{4} \sinh^2 2x - \sinh^2 x \cosh x \\ &= \frac{1}{8} \cosh 4x - \frac{1}{8} - \sinh^2 x \frac{d \sinh x}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{32} \sinh 4x - \frac{x}{8} - \frac{1}{3} \sinh^3 x \right) \end{aligned}$$

Las integrales son entonces

$$\int_0^{x_F} \sinh^4 x dx = \frac{1}{8} (3x_F - 3 \sinh x_F \cosh x_F + 2 \sinh^3 x_F \cosh x_F) \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{x_F} (\cosh x - 1) \sinh^2 x \cosh x dx \\ &= \frac{1}{8} \left( -x_F + \sinh x_F \cosh x_F + 2 \sinh^3 x_F \cosh x_F - \frac{8}{3} \sinh^3 x_F \right) \quad (2.83) \end{aligned}$$

Como abreviación, se pueden utilizar las funciones  $A(y)$  y  $B(y)$  (ver Figura 2.6) definidas por

$$\begin{aligned} A(y) &= \sqrt{1+y^2}(2y^3-3y) + 3 \operatorname{arcsin} hy \\ B(y) &= 8y^3(\sqrt{1+y^2}-1) - A(y) \end{aligned}$$

en donde

$$y = \sinh x = \frac{p}{mc}, \quad y_F = \sinh x_F = \frac{p_F}{mc} \quad (2.84)$$

Entonces las Ecs. (2.82) y (1.83) se pueden expresar de la forma

$$\begin{aligned} \int_0^{x_F} \sinh^4 x dx &= \frac{1}{8} A(y_F) \\ \int_0^{x_F} (\cosh x - 1) \sinh^2 x \cosh x dx &= \frac{1}{24} B(y_F) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$P = \frac{g\pi m^4 c^5}{6h^3} A(y_F) \quad (2.85)$$

$$U = \frac{g\pi V m^4 c^5}{6h^3} B(y_F) \quad (2.86)$$

La expresión para  $P$  en el caso ultrarelativista  $y_F \gg 1$  es [18]

$$P = \frac{g\pi m^4 c^5}{6h^3} 2 \left(\frac{p_F}{mc}\right)^4 = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$$

ya que

$$U = \frac{g\pi V m^4 c^5}{6h^3} 6 \left(\frac{p_F}{mc}\right)^4 = \frac{g\pi c V}{h^3} p_F^4$$

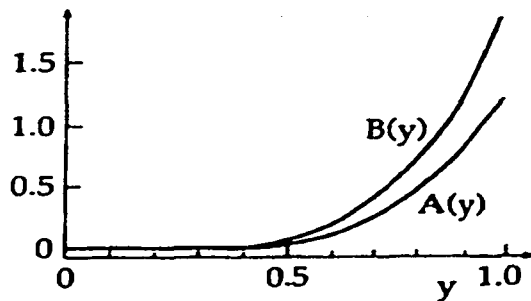


Figura 2.6: Las funciones  $A(y)$  y  $B(y)$  (tomada de [18]).

## 2.3 Hidrodinámica

En la hidrodinámica es común utilizar dos marcos de referencia para la descripción de los sistemas: el marco lagrangiano y el marco euleriano. Las coordenadas asociadas al primer marco se mantienen fijas a cada elemento de masa  $\Delta m$  del fluido, y se mueven con él. En el segundo marco, las coordenadas son puntos fijos  $r$  del espacio a través de los cuales el fluido se desplaza. A estos puntos se les asignan valores de la densidad  $\rho$  y de la velocidad  $v$ .

El marco lagrangiano es particularmente conveniente, ya que es una extensión natural de la mecánica de partículas, en la que las ecuaciones de movimiento siguen a cada partícula. No obstante, este sistema de referencia es útil sólo cuando la geometría del volumen ocupado por  $\Delta m$  permanece sencilla durante el movimiento, como en un flujo simple, pero no, por ejemplo, en un flujo turbulento.

En el tratamiento euleriano, el cambio en el tiempo de una cantidad  $A(r, t)$  es  $(\partial A / \partial t)_r$ , evaluado para  $r$  fija. Cuando se usa el método lagrangiano, tanto  $r$  como  $t$  cambian cuando un elemento de fluido se mueve. En este caso el cambio de  $A(r, t)$  es

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v \cdot \nabla A \quad (2.87)$$



donde  $v^k = dx^k/dt$  son los componentes de la velocidad de un elemento de fluido. Es común utilizar la notación  $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  en el tratamiento lagrangiano. De aquí en adelante, en este tratamiento la derivada  $\frac{D}{Dt}$  se escribirá como  $\frac{d}{dt}$ .

El primer término de la derecha en (2.87) es la derivada temporal euleriana, que da el cambio de  $A$  con  $\mathbf{r}$  fija debido a su dependencia explícita del tiempo. El segundo término es el cambio desde un punto hasta otro punto cercano que resulta de la dependencia implícita del tiempo de las coordenadas espaciales. Aquí  $k = 1, 2, 3$ , y se suma sobre índices repetidos ( $a^k b^k \equiv \sum_k a^k b^k$ ). El último término en (2.87) se puede pensar como el cambio en  $A$  debido al flujo neto de material hacia un volumen  $\Delta V$ .

Examinando la forma en que dicho elemento de volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  cambia con el tiempo, es posible probar que este cambio está dado por [7]

$$\frac{d}{dt}(\Delta V) = \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \Delta V = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Delta V \quad (2.88)$$

Esta ecuación demuestra que un fluido incompresible (aquél cuyos elementos de volumen permanecen constantes en magnitud) está definido por la relación  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Si se considera una trayectoria de longitud infinitesimal  $d\mathbf{l}$  en el fluido (Figura 2.7), se evalúa la cantidad  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ , y se integra a lo largo de un contorno cerrado  $C$ , se tiene

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.89)$$

por el teorema de Stokes.  $\Sigma$  es la superficie arbitraria cuya frontera es  $C$ , y  $d\mathbf{S}$  es un elemento infinitesimal de área en  $\Sigma$ . Si las líneas de flujo (representadas por  $\mathbf{v}$ ) no cambian de dirección, el fluido se mueve sin rotación. Si en (2.89) la contribución de  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} > 0$  a la integral es la misma que la contribución de  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} < 0$ , esta contribución será cero para el contorno  $C$ , y el lado derecho también será cero. Como  $\Sigma$  es arbitraria, la integral se anula. Se ve entonces que la condición  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  define a un fluido irrotacional.

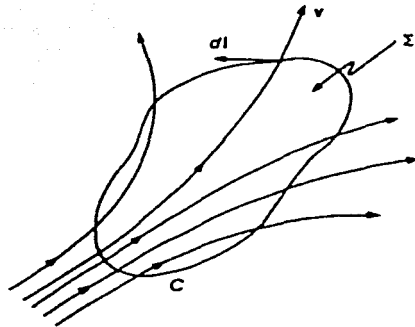


Figura 2.7: Superficie de integración  $\Sigma$  en un fluido.  $C$  es la frontera de  $\Sigma$  y  $dl$  es una trayectoria infinitesimal en el fluido, el cual tiene velocidad  $v$  (tomada de [7]).

En hidrodinámica, las ecuaciones de movimiento se obtienen al aplicar la segunda ley de Newton a los elementos de fluido. Se pueden considerar dos tipos de fuerzas: aquellas debidas a la presión  $P(\mathbf{r})$  en cada punto de la superficie  $S$  de un elemento de fluido, y las debidas a efectos gravitacionales, electromagnéticos, etc., que están dadas por la densidad de fuerza  $f$ . La ecuación de movimiento en forma lagrangiana está dada por [7]

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla P \quad (2.90)$$

En esta ecuación se asume que no hay esfuerzos cortantes (la presión  $P$  es un escalar). En equilibrio hidrostático la aceleración de los elementos de volumen es cero, por lo que  $\mathbf{f} = \nabla P$ .

La masa de un fluido clásico no relativista se conserva; esto significa que

$$\frac{d}{dt}(\rho \Delta V) = 0 \quad (2.91)$$

para cualquier elemento de volumen  $\Delta V$ . Usando (2.88) lo anterior se puede reescribir como

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.92)$$

Esta es la ecuación de conservación de masa en forma lagrangiana. Si se utilizan (2.87) además de (2.88), (2.91) también se puede escribir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\rho \Delta V) = \Delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\Delta V}{dt} \\ &= \Delta V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Delta V \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Delta V \end{aligned}$$

Como  $\Delta V$  es arbitrario,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.93)$$

Esta es la ecuación de continuidad en forma euleriana. Expresa el hecho de que la masa de un elemento de volumen cambia cuando a través de la superficie de este último cruza masa.

El momento de un elemento de fluido está dado por  $\rho \mathbf{v} \Delta V$ . De (2.90) se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} - \nabla P) \Delta V &= \rho \Delta V \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v} \Delta V) - \mathbf{v} \frac{d}{dt} (\rho \Delta V) \\ &= \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v} \Delta V) \end{aligned} \quad (2.94)$$

En el último paso se usó (2.91). Si hay equilibrio hidrostático ( $\mathbf{f} = \nabla P$ ), el momento se conserva:

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v} \Delta V) = 0 \quad (2.95)$$

Al formar el producto punto de  $\mathbf{v}$  con (2.94) se obtiene

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla P \cdot \mathbf{v}) \Delta V = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \Delta V \right) \quad (2.96)$$

El lado derecho de esta ecuación es el cambio de la energía cinética del elemento con el tiempo. El término  $(\nabla P \cdot \mathbf{v}) \Delta V = (\mathbf{v} \cdot \nabla P) \Delta V$  puede reescribirse utilizando (2.87) con  $P$  en lugar de  $A$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla P) \Delta V &= \left( \frac{dP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) \Delta V \\ &= \frac{d}{dt} (P \Delta V) - P \frac{d}{dt} (\Delta V) - \frac{\partial P}{\partial t} \Delta V \\ &= \frac{d}{dt} (P \Delta V) - P \nabla \cdot \mathbf{v} \Delta V - \frac{\partial P}{\partial t} \Delta V \end{aligned}$$

En la última igualdad se usó (2.88). Sustituyendo en (2.96) queda

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + P \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial P}{\partial t}) \Delta V = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + P \right) \Delta V \quad (2.97)$$

El término  $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \Delta V$  representa la razón a la cual todas las fuerzas  $\mathbf{f} \Delta V$  hacen trabajo sobre el elemento de fluido. Si se consideran efectos de energía potencial gravitacional, con  $\mathbf{f}$  la densidad de fuerza gravitacional dada por  $\mathbf{f} = -\rho \nabla \phi$ , donde  $\phi$  es el potencial gravitacional, entonces (2.97) se escribe

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Delta V + P (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Delta V = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho \phi \right) \Delta V \quad (2.98)$$

Para fluidos incompresibles en un campo gravitacional estático,  $\partial\phi/\partial t = 0$ , y por lo tanto

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{cte.} \quad (2.99)$$

Esta es una forma de la ley de Bernoulli, la cual expresa la conservación de la energía para fluidos.

La ecuación de movimiento (2.90) y la ecuación de continuidad (2.92) deben ser complementadas por una ecuación de estado  $P = P(U, V)$ , en donde  $U$  es la energía interna del fluido. La energía interna  $\Delta U$  del elemento de volumen  $\Delta V$  se relaciona con la entropía  $\Delta S$  por medio de la primera ley de la termodinámica:

$$\frac{dU}{dt} = T \frac{dS}{dt} - P \frac{dV}{dt} \quad (2.100)$$

Escribiendo  $\Delta V = \Delta m/\rho$ , donde  $\Delta m$  es la masa de  $\Delta V$ ; la energía específica como  $\Delta \epsilon = \Delta U/\Delta m$ ; y la entropía específica como  $\Delta s = \Delta S/\Delta m$ , se tiene una forma conveniente para (2.100):

$$\frac{d\epsilon}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.101)$$

El primer término del lado derecho, la razón de transferencia de calor, puede depender de procesos locales, tales como fusión termonuclear, o ionización y recombinación. En general, depende del estado termodinámico local del fluido, y en este caso se requiere la ecuación de estado adicional  $T = T(\epsilon, \rho)$ . El cambio en entropía puede deberse a procesos irreversibles, como el paso de ondas de choque.

Hay casos en los que algunos procesos adiabáticos (para los que  $ds/dt = 0$ ) juegan un papel importante, y en los que el cambio en  $\epsilon$  se debe a la expansión o compresión de un elemento de fluido. Es entonces cuando la Ec. (2.101) puede reemplazarse por la relación (ver Capítulo 3)

$$P = K\rho^\gamma \quad (2.102)$$

Considérese un fluido uniforme en el que la densidad  $\rho_0$  y la presión  $P_0$  son independientes de la posición, e imagínese que ocurre una perturbación pequeña, de tal manera que  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  y  $P = P_0 + P_1$ . Si  $\rho_1$  es pequeña comparada con  $\rho_0$ , el movimiento subsiguiente del fluido estará caracterizado por una velocidad  $\mathbf{v}$  también pequeña. Sustituyendo  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{A}$  en (2.87) y con ayuda de (2.90) (con  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ) se tiene

$$(\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1) \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P_1$$

donde se usó el hecho de que  $P_0$  es constante. Además, si se sustituye  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  y  $P = P_0 + P_1$  en la ecuación de continuidad euleriana (2.93) resulta

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_1 + (\rho_0 + \rho_1) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

en donde también se usó el hecho de que  $\rho_0$  es constante.

Se pueden resolver las dos ecuaciones anteriores considerando los términos de orden más bajo. Tomando en cuenta que  $\rho_1$ ,  $P_1$  y  $v$  son pequeños, se encuentra [7]

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P_1 = -\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right) \nabla \rho_1 \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.104)$$

Para perturbaciones pequeñas,  $\frac{\partial P}{\partial \rho}$  es constante. Tomando la divergencia de (2.103) y restando de (2.104):

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right) \nabla^2 \rho_1 \quad (2.105)$$

Al ser ésta una ecuación de onda para  $\rho_1$ , la velocidad de propagación está dada por

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2} \quad (2.106)$$

Esta es la velocidad del sonido adiabática. La Ec. (2.105) dice que las perturbaciones adiabáticas pequeñas se propagan con velocidad  $c_s$ .

## Capítulo 3

# Resumen de estructura estelar

### 3.1 Descripciones euleriana y lagrangiana de configuraciones gaseosas. Campo gravitacional

Al comenzar el estudio de la estructura estelar conviene simplificar el problema tanto como sea posible. Para tal efecto se puede considerar que una estrella es un sistema gaseoso en el que las únicas fuerzas que actúan provienen de la presión que tiende a expandir el gas, y de la gravedad que tiende a contrarlo. Esta situación produce una configuración con simetría esférica. Por lo tanto, una opción natural para una coordenada espacial en términos de la cual se realice la descripción del sistema es la distancia  $r$  desde el centro de la estrella. Esta distancia varía de  $r = 0$  en el centro a  $r = R$  en la superficie, donde  $R$  es el radio de la configuración. Si además se considera la evolución en el tiempo  $t$  de las funciones descriptivas, entonces éstas dependerán en general de las variables independientes  $r$  y  $t$ . Se tiene así una descripción euleriana del sistema (ver Sección 2.3).

Es conveniente definir la función  $m(r, t)$  como la masa contenida en una esfera de radio  $r$  al tiempo  $t$  (Figura 3.1). El cambio de  $m$  al cambiar  $r$  y al cambiar  $t$  se puede escribir como

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho v dt \quad (3.1)$$

en donde  $\rho = \rho(r, t)$  es la densidad del gas y  $v$  es una velocidad radial hacia afuera de la estrella.

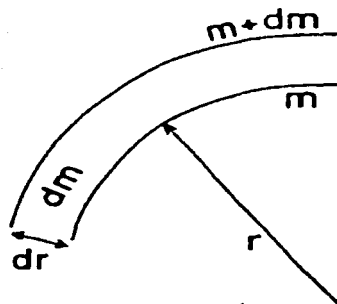


Figura 3.1: Variación de la masa  $m$  con el radio  $r$  a un tiempo fijo  $t$  (tomado de [25]).

El primer término de la derecha en la Ec. (3.1) es simplemente la masa contenida en el cascarón esférico de grosor  $dr$  a un tiempo fijo  $t$ . El segundo término da el flujo radial de masa hacia afuera de la esfera de radio  $r$ , supuesto constante, en un intervalo de tiempo  $dt$  (nótese el signo negativo). De esta manera, de acuerdo a (3.1) las variaciones espacial y temporal de  $m$  están dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v \quad (3.3)$$

Frecuentemente es más útil usar una coordenada lagrangiana en lugar de  $r$ , es decir, una coordenada fija a cada elemento de masa. Por lo tanto, tal coordenada no variará con el tiempo. Se puede escoger  $m$  como coordenada lagrangiana, y entonces las variables independientes son ahora  $m$  y  $t$ , y cualquier otra variable se considera dependiente de ellas, como por ejemplo  $\rho(m, t)$ . Esto incluye también a la distancia radial  $r$ , que en este caso es la función  $r = r(m, t)$ .

Se puede probar que este cambio de coordenadas produce un cambio en las derivadas parciales dado por

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (3.4)$$

Como ejemplo, considérese (3.4) aplicada a  $m$ . El lado izquierdo es igual a 1, y el primer factor del lado derecho es  $\partial m / \partial r = 4\pi r^2 \rho$ , por (3.2). Entonces

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (3.5)$$

Esta ecuación es el análogo lagrangiano de la ecuación euleriana (3.2).

Sustituyendo (3.5) en (3.4) se obtiene la regla general para transformar un operador en otro:

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.6)$$

Por la teoría de potenciales se sabe que el valor absoluto  $g$  de la aceleración gravitacional dentro de un cuerpo esféricamente simétrico a una distancia  $r$  del centro no depende de los elementos de masa fuera de  $r$ , sino que sólo depende del valor de  $r$  y de la masa  $m$  contenida en la esfera concéntrica de radio  $r$ :

$$g = \frac{Gm}{r^2} \quad (3.7)$$

donde  $G = 6.67259 \times 10^{-8} \text{dn cm}^2 \text{g}^{-2}$  es la constante gravitacional.

El campo gravitacional dentro de una estrella puede describirse por un potencial  $\Phi$ , el cual es solución de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (3.8)$$

En el caso de simetría esférica esta ecuación se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho \quad (3.9)$$

Como el vector campo gravitacional  $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$  está dado por

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi$$

para simetría esférica únicamente la componente radial es distinta de cero:

$$g = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (3.10)$$

Al igualar (3.7) y (3.10) se tiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Gm}{r^2} \quad (3.11)$$

lo que es una solución de (3.9), según se puede verificar por sustitución y con ayuda de (3.2). El potencial es entonces

$$\Phi = \int_0^r \frac{Gm}{r'^2} dr' + cte \quad (3.12)$$



La Figura 3.2 muestra  $\Phi(r)$ . La constante de integración se escoge de tal manera que  $\Phi \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Se puede observar que el potencial gravitacional es mínimo en el centro de la estrella.

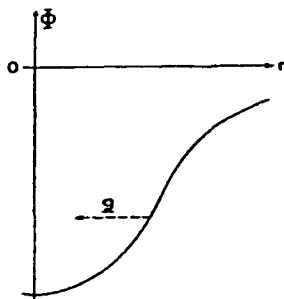


Figura 3.2: Potencial gravitacional  $\Phi(r)$  y vector campo gravitacional  $g$  de una estrella esféricamente simétrica (tomada de [25]).

### 3.2 Equilibrio hidrostático

Durante la mayor parte de su existencia, una estrella se encuentra en un estado de equilibrio frágil tanto local como globalmente. Cuando se presentan desviaciones pequeñas de este estado de equilibrio se producen estados dinámicos que pueden ser estables, como en estrellas variables, o inestables, como los que dan lugar a pérdida de masa en gigantes rojas, novae, y supernovas. Los cambios irreversibles a los que está sujeta una estrella son los responsables de su evolución.

La mayoría de las estrellas se encuentra en fases de su evolución que son muy largas (duran desde decenas de millones de años hasta miles de millones de años), por lo que no se pueden apreciar cambios. Esto significa que la materia estelar no se acelera notablemente, y por lo tanto todas las fuerzas que actúan en un elemento de masa determinado se anulan entre sí. A este estado de equilibrio mecánico se le llama *equilibrio hidrostático*, ya que la situación es análoga a la que determina la estratificación de la presión en un estanque de agua. Como se mencionó en la sección anterior, se asume que las únicas fuerzas presentes se deben a la gravedad y al gradiente de presión.

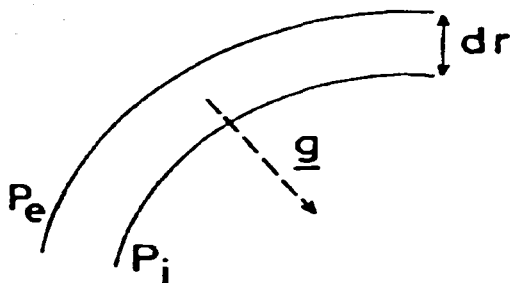


Figura 3.3: Cascarón de masa esférico de grosor  $dr$  y peso  $-g\rho dr$ . Sobre la pared interior actúa una presión  $P_i$  y sobre la pared exterior una presión  $P_e$  (tomada de [25]).

Considérese un cascarón de masa esférico de grosor infinitesimal  $dr$  y radio  $r$ , dentro de la estrella. La masa del cascarón por unidad de área es  $\rho dr$ , y su peso es  $-g\rho dr$ . Este peso es la fuerza gravitacional que actúa hacia el centro de la estrella, como lo indica el signo negativo. Pero para evitar que los elementos de masa del cascarón se aceleren en este sentido, deben experimentar una fuerza del mismo valor absoluto y de sentido opuesto. Esta otra fuerza se debe a la presión. Esto significa que la presión  $P_i$  que el cascarón siente en su pared interior es mayor que la presión  $P_e$  en su pared exterior (ver Figura 3.3). La fuerza neta sobre el cascarón debida a esta diferencia de presiones es entonces

$$P_i - P_e = -\frac{\partial P}{\partial r} dr \quad (3.13)$$

El lado derecho de esta ecuación es positivo, ya que  $P$  disminuye al aumentar  $r$ . Como la suma de la fuerza gravitacional y de la de presión debe ser cero, se tiene la condición de equilibrio hidrostático:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -g\rho \quad (3.14)$$

En ambos lados de la ecuación las fuerzas son por unidad de volumen del cascarón. Por (3.7) se tiene entonces

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \quad (3.15)$$

Esta expresión es euleriana, ya que la variable independiente es  $r$ . Para escribirla en forma lagrangiana (con  $m$  como la variable independiente) se puede utilizar

la fórmula (3.6), y queda

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (3.16)$$

Es posible usar la ecuación anterior y la ecuación de estado de un gas ideal. Ec. (2.16), para estimar valores de la presión y de la temperatura en el interior de una estrella de masa y radio dados. Si en (3.15) se reemplaza el lado izquierdo por un gradiente de presión promedio  $(P_0 - P_c)/M$ , donde  $M$  es la masa total de la estrella,  $P_0$  es la presión en la superficie (igual a cero) y  $P_c$  la presión en el centro, y en el lado derecho se sustituyen  $m$  y  $r$  por valores promedio  $M/2$  y  $R/2$ , se tiene

$$P_c \approx \frac{2GM^2}{\pi R^4} \quad (3.17)$$

Escribiendo la densidad promedio de la estrella como

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

la ecuación de estado del gas ideal da (el subíndice  $c$  denota valores centrales)

$$T_c = \frac{P_c \mu}{\rho_c \mathcal{R}} = P_c \frac{\mu}{\mathcal{R}} \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} \frac{4\pi R^3}{3M} \approx \frac{8 \mu}{3 \mathcal{R}} \frac{GM}{R} \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} \quad (3.18)$$

En el último paso se usó (3.16). Debido a que en una estrella la densidad es mayor en el centro, se tiene  $\bar{\rho}/\rho_c < 1$ . Por tanto (3.17) indica que

$$T_c \lesssim \frac{8 \mu}{3 \mathcal{R}} \frac{GM}{R} \quad (3.19)$$

Para el sol ( $M = 1.989 \times 10^{33}$  g,  $R = 6.96 \times 10^{10}$  cm), con  $\mu = 0.5$  (peso molecular medio del hidrógeno), se encuentra

$$P_c \approx 7 \times 10^{15} \text{ dn/cm}^2, \quad T_c \lesssim 3 \times 10^7 \text{ K} \quad (3.20)$$

Cabe notar que, en principio, las Ecs. (3.5) y (3.16),

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\ \frac{\partial P}{\partial m} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} \end{aligned}$$

permiten conocer  $r(m)$  y  $P(m)$ , pero sólo si se puede expresar, por ejemplo,  $\rho$  como función de  $P$ . En [25] se mencionan algunos casos en los que esto es posible.

### 3.3 Ecuación de movimiento. Escala de tiempo hidrostática

Considérese nuevamente la situación mostrada en la Figura 3.3. El cascarón esférico experimenta una fuerza por unidad de área  $f_P$  dada por (3.13), cuyo lado derecho se puede reescribir utilizando (3.6):

$$f_P = -\frac{\partial P}{\partial m} dm \quad (3.21)$$

Por otro lado, la fuerza gravitacional por unidad de área  $f_g$  está dada por

$$f_g = -\frac{g dm}{4\pi r^2} = -\frac{Gm}{r^2} \frac{dm}{4\pi r^2} \quad (3.22)$$

Si las fuerzas no se anulan entre sí, el cascarón de masa se acelerará de acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= f_P + f_g \\ \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= -\frac{\partial P}{\partial m} - \frac{Gm}{4\pi r^4} \end{aligned} \quad (3.23)$$

por (3.21) y (3.22). Nótese que los signos son tales que si sólo actuara la fuerza debida al gradiente de presión, la aceleración resultante sería hacia afuera (ya que  $\partial P/\partial m < 0$ ), y si únicamente estuviera presente la fuerza gravitacional la aceleración sería hacia adentro. Esta ecuación de movimiento da lugar a la ecuación de equilibrio hidrostático (3.16) si todos los elementos de masa están en reposo o moviéndose radialmente con velocidad constante.

Supóngase ahora que súbitamente la fuerza debida a la presión desaparece. La estrella entonces tenderá a colapsarse bajo su propio peso. Se puede definir un tiempo característico  $\tau_{cl}$ , llamado *tiempo de caída libre*, en el que este colapso ocurre. Haciendo la identificación  $|\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}| = \frac{R}{\tau_{cl}^2}$ , y con el primer término del lado derecho de (3.23) anulado, se tiene

$$\frac{R}{\tau_{cl}^2} \approx g$$

ó

$$\tau_{cl} \approx \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2} \quad (3.24)$$

Análogamente es posible determinar un *tiempo de explosión*  $\tau_{exp}$  para el caso en que la fuerza de gravedad deje de actuar de manera súbita. Por (3.6) se puede escribir

$$4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

Sustituyendo en (3.23), en donde el segundo término es cero:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

Como se hizo en el caso anterior, el lado izquierdo de esta expresión se identifica con  $R/\tau_{\text{exp}}^2$ ; en el lado derecho se reemplaza  $\partial P/\partial r$  por  $P/R$ , y se encuentra que

$$\tau_{\text{exp}} \approx R \left( \frac{\rho}{P} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

La cantidad  $\left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$  es del orden de la velocidad media del sonido en el interior estelar [véase la Ec. (2.106)]. Por ello puede interpretarse a  $\tau_{\text{exp}}$  como una escala del orden del tiempo que una onda sonora necesita para viajar del centro de la estrella hasta su superficie.

Si la estrella se encuentra en un estado cercano al equilibrio hidrostático, los dos términos del lado derecho de la Ec. (3.23) tienen aproximadamente el mismo valor absoluto, y entonces  $\tau_{cl} \approx \tau_{\text{exp}}$ . A esta escala de tiempo se le llama *escala de tiempo hidrostática*  $\tau_{\text{hidr}}$ , ya que representa el tiempo en el que una estrella reacciona a una perturbación pequeña del equilibrio hidrostático. De (3.24), y con  $g \approx GM/R^2$ , se obtiene

$$\tau_{\text{hidr}} \approx \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

Para el sol se encuentra que  $\tau_{\text{hidr}} \approx 27$  minutos; para una gigante roja de alrededor de 1 masa solar y unos cien radios solares,  $\tau_{\text{hidr}} \approx 18$  días; y para una enana blanca de aproximadamente 1 masa solar y un radio 50 veces menor que el radio solar,  $\tau_{\text{hidr}} \approx 4$  segundos. Como las fases durante las cuales las estrellas cambian duran entre millones y miles de millones de años, y por lo tanto son mucho mayores que  $\tau_{\text{hidr}}$ , la suposición de que durante las etapas intermedias de la vida de una estrella ésta se encuentra en equilibrio hidrostático es razonable.

### 3.4 El teorema virial

El teorema virial juega un papel importante en el estudio de las estrellas. Relaciona dos reservorios de energía de una estrella y permite hacer predicciones e interpretaciones acerca de algunas de sus fases evolutivas.

Una estrella está formada por muchas partículas. La energía total de este sistema está constituida por la interacción gravitacional mutua entre las partículas,  $\Omega$ , y por las energías cinéticas de las partículas mismas (incluyendo a los fotones). A este último tipo de energías se les denomina colectivamente energía

interna  $U$ . La energía total de la estrella es entonces  $E = U + \Omega$ . Análogamente a lo que sucede con un planeta alrededor del sol, para que el sistema esté ligado se requiere que la energía total sea negativa.

La Ec. (3.16) puede escribirse de la forma

$$4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{r} \quad (3.27)$$

para reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial m} (4\pi r^3 P) - 4\pi r^2 \cdot 3P \frac{\partial r}{\partial m} = -\frac{Gm}{r}$$

Al integrar sobre la masa desde  $m = 0$  hasta  $m = M$ , se tiene

$$4\pi r^3 P|_0^M - \int_0^M \frac{3P}{\rho} dm = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \quad (3.28)$$

en donde se usó la Ec. (3.5),  $\partial r / \partial m = 1/4\pi r^2 \rho$ . Como  $P$  y  $r$  son funciones de  $m$ , el primer término del lado izquierdo se anula, ya que  $P(M) = 0$  (la presión es nula en la superficie de la estrella) y  $r(0) = 0$ . Ahora bien, de la Ec. (2.73) se aprecia que, para un gas clásico no relativista, la presión es dos tercios de la densidad de energía interna:

$$P = \frac{2}{3} u^*, \quad u^* = \frac{U}{V} \quad (3.29)$$

por lo que  $\frac{3P}{\rho} = 2u$ , donde  $u$  es la energía interna por unidad de masa. Entonces

$$\int_0^M \frac{3P}{\rho} dm = 2 \int_0^M u dm = 2U \quad (3.30)$$

El lado derecho de (3.28) es la energía potencial gravitacional  $\Omega$  debida a todos los elementos de masa que conforman la estrella. Resulta entonces que

$$-2U = \Omega$$

o bien

$$2U + \Omega = 0 \quad (3.31)$$

La Ec. (3.31) es el *teorema virial para estrellas*.

Supóngase que la estrella se ve sometida a una contracción gravitacional debida a una pequeña fluctuación de la presión. En este caso su energía gravitacional disminuirá. Exactamente la mitad de esta disminución se verá compensada por un aumento en la energía interna, de acuerdo a (3.31), y este aumento causará que la estrella se caliente. La otra mitad se perderá por radiación desde la superficie.

### 3.5 Polítropos

Por sí sola, la ecuación de equilibrio hidrostático no permite obtener un modelo que describa el comportamiento de la presión, la densidad y la temperatura de una estrella. Una manera de solucionar esto es suponer que la presión y la densidad están asociadas por una relación de la forma

$$P = K\rho^\gamma, \quad \gamma \equiv 1 + \frac{1}{n} \quad (3.32)$$

en donde  $K$ ,  $\gamma$  y  $n$  son constantes. A la relación (3.32) se le llama *relación politrópica*.  $K$  es la *constante politrópica*,  $\gamma$  es el *exponente politrópico*, y  $n$  es el *índice politrópico*.

Los *polítropos* son modelos de estrellas cuya presión y densidad están relacionadas por (3.32). Considérense la ecuación de equilibrio hidrostático (3.14) y la ecuación de Poisson para simetría esférica (3.9):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho \quad (3.34)$$

Aquí las derivadas parciales se han reemplazado por derivadas ordinarias debido a que sólo se tomarán en cuenta cantidades independientes del tiempo. Por (3.32) se tiene

$$\frac{dP}{dr} = \gamma K\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \quad (3.35)$$

Sustituyendo en (3.33) queda

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= -\gamma K\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \\ &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} K \frac{d}{dr} (\rho^{\gamma-1}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Al integrar esta ecuación (con  $\gamma \neq 1$ ), y utilizando la definición de  $\gamma$  que aparece en (3.32), se obtiene

$$\rho = \left[ -\frac{\Phi}{(n+1)K} \right]^n \quad (3.37)$$

en donde la constante de integración se eligió de tal manera que  $\Phi = 0$  cuando  $\rho = 0$  (es decir, en la superficie). Al reemplazar esta expresión para  $\rho$  en la ecuación de Poisson (3.34) se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para  $\Phi$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \left[ -\frac{\Phi}{(n+1)K} \right]^n \quad (3.38)$$

Con el objeto de simplificar las expresiones posteriores, se pueden definir las variables adimensionales  $\xi$ ,  $\theta$ :

$$r = \alpha \xi \quad (3.39)$$

$$\theta = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} \quad (3.40)$$

donde el subíndice  $c$  se refiere al centro del polítopo, y en donde  $\alpha$  tiene unidades de longitud y está dada por

$$\alpha^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} = \frac{(n+1)^n K^n}{4\pi G} (-\Phi_c)^{1-n} \quad (3.41)$$

La Ec. (3.40) se obtiene de (3.37). Al sustituir (3.39) y (3.40) en (3.38), y usando (3.41) se tiene, después de realizar algunas manipulaciones algebraicas,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (3.42)$$

Esta es la ecuación de Lane-Emden de índice  $n$ . Una vez que se encuentra una solución  $\theta(\xi)$ , el parámetro  $K$  permite obtener posteriormente una familia de soluciones para  $\Phi$ .

Las condiciones de frontera son

$$\theta(0) = 1, \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (3.43)$$

ya que en el centro de la estrella ( $r = 0$ ),  $\xi = 0$ . La primera condición se obtiene entonces de (3.40). Por otro lado, como  $d\theta/d\xi$  es proporcional a  $d\Phi/dr$  y éste a su vez es proporcional a  $dP/dr$ , y se espera que la presión no cambie con la distancia en el centro, se sigue la segunda condición.

Las soluciones a la ecuación de Lane-Emden se pueden desarrollar en una serie de potencias:

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= 1 + \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} \xi^2 + \dots \\ &\equiv 1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots \end{aligned}$$

Por la segunda condición inicial en (3.43) el segundo término en esta expansión es cero. Al sustituirla en (3.42) y comparar los coeficientes  $a_i$ , se tiene

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6} \xi^2 + \frac{n}{120} \xi^4 + \dots \quad (3.44)$$

Se pueden encontrar soluciones analíticas de la ecuación de Lane-Emden únicamente para tres valores de  $n$ : 0, 1 y 5. Cuando  $n = 0$ , la Ec. (3.42) es

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -1 \quad (3.45)$$



que se puede integrar una vez para dar

$$\xi^2 \frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{3}\xi^3 - A$$

en donde  $-A$  es una constante de integración. Al integrar de nuevo se obtiene

$$\theta = B + \frac{A}{\xi} - \frac{1}{6}\xi^2 \quad (3.46)$$

donde  $B$  es una segunda constante de integración. Se puede ver que la Ec. (3.46) tiene una singularidad en el origen, y que  $\theta \sim \frac{A}{\xi}$  cuando  $\xi \rightarrow 0$ . Sin embargo, si sólo se consideran soluciones que son finitas en el origen, entonces  $A = 0$  y

$$\theta = B - \frac{1}{6}\xi^2$$

Entonces, por la primera condición inicial en (3.43) la función de Lane-Emden  $\theta_0$  está dada por

$$\theta_0 = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 \quad (3.47)$$

Para  $n = 1$  se puede escribir

$$\theta = \frac{\chi}{\xi} \quad (3.48)$$

y entonces la Ec. (3.42) se reduce a

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = -\chi \quad (3.49)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\chi = C \sin(\xi - \delta)$$

donde  $C$  y  $\delta$  son constantes de integración. Por (3.48),

$$\theta = \frac{C \sin(\xi - \delta)}{\xi}$$

Si  $\delta \neq 0$ , la solución general tiene una singularidad en el origen:

$$\theta \sim \frac{C\delta}{\xi}, \quad \xi \rightarrow 0$$

De nuevo, al considerar solamente soluciones que sean finitas en el origen, se requiere que  $\delta = 0$ , y

$$\theta = \frac{C \sin \xi}{\xi}$$

La función de Lane-Emden  $\theta_1$  está dada por

$$\theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (3.50)$$

Una descripción detallada de la obtención de  $\theta_5$  se puede encontrar en [9]. El resultado es

$$\theta_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{3}}} \quad (3.51)$$

La solución para  $n = 0$  corresponde a una estrella de densidad constante, como se puede ver de (3.40):  $\rho = \rho_c \theta^n$ . La superficie del politropo de índice  $n$  está definida por el valor  $\xi = \xi_1$ , que es el primer valor para el cual  $\theta = 0$  (ya que  $\rho = 0$ ), y se considera que es el valor que tiene significado físico.  $\xi_1$  indica el radio de la estrella en cuestión. Obsérvese que para  $n = 0$  y  $n = 1$  la función  $\theta$  efectivamente se hace cero para un valor finito  $\xi_1$  ( $\sqrt{6}$  y  $\pi$ , respectivamente), mientras que para  $n = 5$ ,  $\theta$  no se anula, y el radio del politropo es infinito. Se puede demostrar que los radios para  $n \geq 5$  son infinitos, mientras que para  $n < 5$  no lo son.

La Tabla 3.1 muestra algunos valores de  $\xi_1$  y del cociente  $\rho_c/\bar{\rho}$  para distintas  $n$ .

$n$	$\xi_1$	$\rho_c/\bar{\rho}$
0	2.4494	1.0000
0.5	2.7528	1.8361
1.0	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	5.99071
2.0	4.35287	11.40254
2.5	5.35528	23.40646
3.0	6.89685	54.1825
3.5	9.53581	152.884
4.0	14.97155	622.408
4.5	31.83646	6189.47
4.9	169.47	934800
5.0	$\infty$	$\infty$

Tabla 3.1 (Tomada de [6])

Para valores de  $n$  distintos de 0, 1 ó 5 la ecuación de Lane-Emden debe resolverse numéricamente, empezando con la expansión (3.44) en la vecindad del centro de la estrella. La Figura 3.4 muestra las soluciones numéricas para algunos valores de  $n$ .

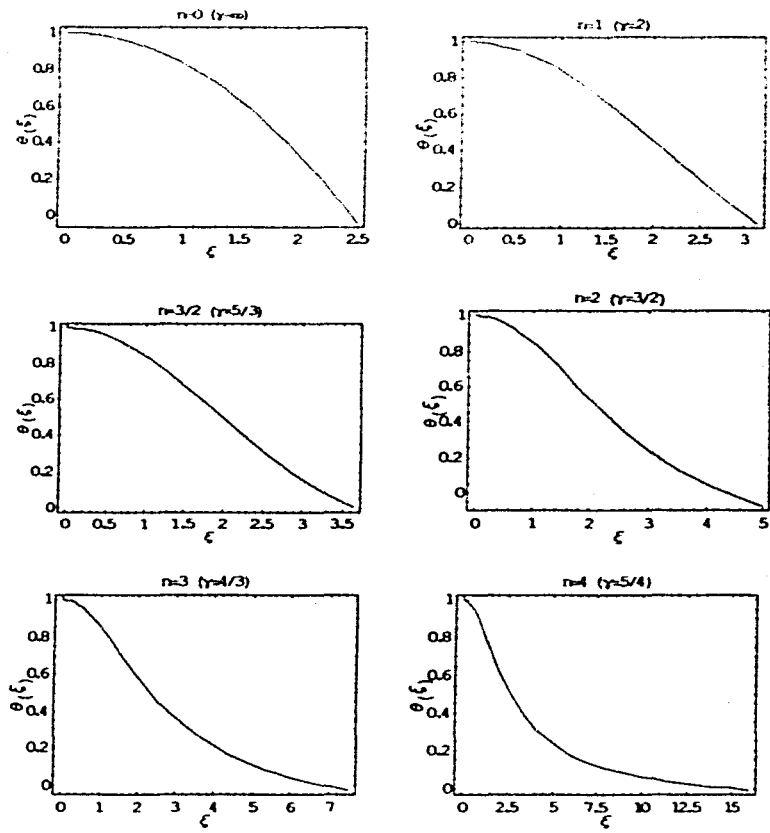


Figura 3.4: Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden para los valores de  $n$  mostrados.

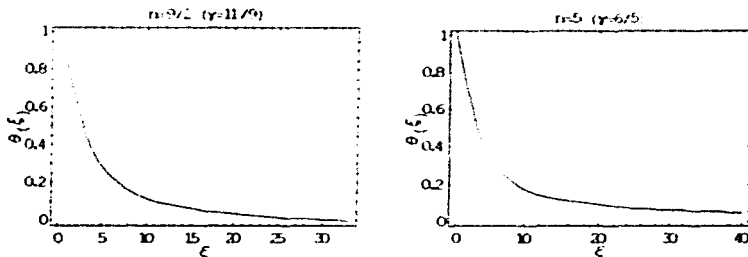


Figura 3.4 (continuación)

Las propiedades macroscópicas de la estrella, como  $M$ ,  $R$ ,  $\bar{\rho}$ , etc., pueden obtenerse a partir de  $\theta(\xi)$ . En [9] es posible encontrar valores numéricos de  $\xi_1$  y de otras funciones que involucren a  $\xi$  y a  $\frac{d\theta}{d\xi}$  evaluadas en  $\xi_1$ , y las cuales permiten calcular tales cantidades macroscópicas. La expresión para el radio es, usando (3.39),

$$\begin{aligned} R &= \alpha \xi_1 \\ &= \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n} \xi_1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

La masa  $M(\xi)$  dentro del radio dado por  $\xi$  está dada por

$$M(\xi) = \int_0^{\alpha\xi} 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi} \xi^2 \theta^n d\xi$$

o, utilizando la Ec. de Lane-Emden,

$$\begin{aligned} M(\xi) &= -4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi \\ &= -4\pi\alpha^3\rho_c \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sustituyendo el valor de  $\alpha$  dado por (3.41) se tiene

$$M(\xi) = -4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)$$

Finalmente, la masa total  $M$  de la configuración está dada por

$$M = -4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} \quad (3.54)$$

Es interesante notar que cuando  $n = 3$ ,

$$M = -4\pi \left( \frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$$

es decir, la masa del politropo es independiente de la densidad central  $\rho_c$ . Por otro lado, si  $n = 5$  la masa es finita, aunque el radio de la configuración es infinito, como se mencionó anteriormente.

La densidad central  $\rho_c$  en términos de la densidad promedio  $\bar{\rho}$  se puede conocer escribiendo

$$\bar{\rho} = \frac{M(\xi)}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3\xi^3}$$

Entonces, por (3.53),

$$\bar{\rho} = -\frac{3}{\xi} \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right) \rho_c$$

6

$$\rho_c = - \left( \frac{\xi}{3} \frac{1}{\frac{d\theta}{d\xi}} \right)_{\xi=\xi_1} \bar{\rho} \quad (3.55)$$

Esta relación muestra que para un politropo de índice  $n$  dado, la densidad central es un múltiplo de la densidad promedio. El número por el cual hay que multiplicar a  $\bar{\rho}$  está dado en [9].

Una característica importante de los politropos es que el intervalo relativamente pequeño de  $n$  ( $0 \leq n \leq 5$ ) para el cual las soluciones de la ecuación de Lane-Emden tienen significado físico incluye una variedad de distribuciones de densidad que va desde una distribución uniforme hasta una concentración infinita en el centro.

De (3.46) y (3.47) se obtiene la relación masa-radio:

$$R = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1-n}{2}}} \left[ \frac{4\pi G}{(n+1)K} \right]^{-\frac{n}{2(n-1)}} \left( -\frac{1}{\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}} \right)_{\xi=\xi_1}^{\frac{1-n}{2}} \xi_1 M^{\frac{1-n}{2}} \quad (3.56)$$

En particular, cuando  $n = 3/2$  el radio disminuye al aumentar la masa: esto sucede en el caso de las enanas blancas, según se discutirá en el siguiente capítulo.

## Capítulo 4

# Enanas blancas y estrellas de neutrones

Como consecuencia de la evolución estelar, las etapas finales de la vida de una estrella pueden ser de una naturaleza extrema. Un resultado de los procesos evolutivos es que las regiones centrales alcanzan densidades muy altas. En estos casos, cuando las capas exteriores de la estrella son expulsadas, lo que queda es un núcleo condensado al que se le da el nombre de *objeto compacto*. Estos objetos se caracterizan por tener radios pequeños, altas densidades y una gravedad superficial muy fuerte.

Por lo general se considera que existen tres tipos de objetos compactos: enanas blancas (EB), estrellas de neutrones (EN) y agujeros negros. En este capítulo se discutirán algunas de las características más importantes de los dos primeros tipos. Cabe mencionar que los agujeros negros son estrellas completamente colapsadas (es decir, estrellas a las que no les fue posible contrarrestar a la fuerza de gravedad y que por ello se colapsaron a una singularidad). Estos objetos poseen una velocidad de escape igual a la velocidad de la luz, lo que significa que ni siquiera la luz puede escapar de su enorme atracción gravitacional. Algunos proyectos de búsqueda de agujeros negros se centran en el estudio de binarias de rayos x, en particular de los flujos de acrecimiento en tales sistemas [23].

Algunos valores típicos de ciertas cantidades para EB son  $R \approx 10^{-2} R_{\odot}$ ,  $\rho \approx 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ , velocidad de escape  $v_E \approx 0.02c$ . Su configuración soporta la fuerza de gravedad por medio de la presión de electrones altamente degenerados, en lugar de la presión térmica de las estrellas normales. Para EN se tienen valores como  $R \approx 10 \text{ km}$ ,  $\rho \approx 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ,  $v_E \approx c/3$ . Aproximadamente la mitad de la presión que las soporta proviene de neutrones y protones degenerados, y la otra mitad de la interacción fuerte, que es repulsiva a densidades mayores que tres veces la densidad nuclear  $\rho_{\text{nuc}} = 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  [2].

Debido a que el trabajo que se analiza en los capítulos posteriores involucra a enanas blancas cuya estructura interna se ha simplificado considerablemente,

en este capítulo no se discutirán los procesos nucleares que tienen lugar en tales estrellas. Asimismo, como en dicho trabajo se toma en cuenta solamente la dinámica newtoniana del sistema, tampoco se examinarán aquí los efectos debidos a la relatividad general.

## 4.1 Enanas blancas

Se piensa que las enanas blancas se originan a partir de estrellas con masas  $M \lesssim 8 M_{\odot}$ . Estas estrellas probablemente eyectan masa gradualmente al final de su vida evolutiva (formando "nebulosas planetarias"), para después convertirse en enanas blancas.

En las EB se pueden distinguir dos componentes de la materia: por un lado, los electrones degenerados proveen prácticamente toda la presión, y su alta conductividad térmica representa el modo más eficiente de transporte de energía en el interior. Por otro lado, los iones proporcionan la masa, y son los que contienen casi toda la energía térmica almacenada que eventualmente se pierde por radiación al enfriarse la estrella.

La materia dentro de una enana blanca consiste en una gran cantidad de carbono y oxígeno completamente ionizados (se cree que también puede haber presencia de helio y de elementos más pesados, como neón y magnesio [34]). La fuente de la ionización es la presión extrema, que comprime a los átomos en un volumen más pequeño que el volumen atómico bajo condiciones terrestres. En las capas exteriores de la estrella la materia es menos degenerada, y la transferencia de energía térmica se lleva a cabo por radiación o convección, que son menos efectivas que la conducción. La temperatura en estas capas puede entonces decaer apreciablemente, y así el interior isotérmico y degenerado está aislado del espacio exterior.

### 4.1.1 Ecuación de estado. Casos límite

La estructura interior de una EB puede describirse por una ecuación de estado. La manera más sencilla de hacer esto es ignorando las interacciones electrostáticas entre los electrones degenerados. Éstos pueden estar sujetos a los efectos de la relatividad especial; una forma de medir estos efectos es a través del parámetro relativista

$$x \equiv \frac{p_F}{m_e c} \quad (4.1)$$

en donde  $p_F$  es el momento de Fermi y  $m_e$  es la masa del electrón. A partir de la expresión (2.78) para la presión de un gas de Fermi degenerado relativista,

$$P = \frac{4\pi g}{3h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \frac{\left(\frac{p}{mc}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2\right]^{1/2}} p^2 dp \quad (4.2)$$

se tiene, sustituyendo (4.1) con  $p = p_F$  y  $m = m_e$  ( $g = 2$  para electrones),

$$P = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^x \frac{x^4}{(1+x^2)^{1/2}} dx$$

$$= \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \varphi(x) \quad (4.3)$$

donde

$$\varphi(x) = x(1+x^2)^{1/2} (2x^2/3 - 1) + \ln [x + (1+x^2)^{1/2}] \quad (4.4)$$

La Ec. (4.3) fue utilizada por Chandrasekhar en su análisis de EB en equilibrio.

Considérense los siguientes casos límite [25]:

$$1. \text{ Electrones no relativistas, } x \ll 1, \quad \varphi(x) \rightarrow \frac{8}{5}x^5 \quad (4.5)$$

$$2. \text{ Electrones relativistas, } x \gg 1, \quad \varphi(x) \rightarrow 2x^4 \quad (4.6)$$

Ahora bien, si se toma en cuenta que la densidad de electrones  $n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_u}$ , según la fórmula (2.54), y además que  $n_e = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$  (véase [40]), se tiene, al sustituir por (4.1),

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_u} = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} x^3 \quad (4.7)$$

En el caso 1, la ecuación de estado (4.3) se convierte en

$$P = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{15h^3} x^5 \quad (4.8)$$

y en el caso 2,

$$P = \frac{2\pi m_e^4 c^5}{3h^3} x^4 \quad (4.9)$$

Al sustituir la expresión (4.7) para  $x$  en (4.8) y (4.9) se obtienen las ecuaciones de estado politrópicas correspondientes a ambos casos:

$$1. P = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{hc^2}{m_e (m_u \mu_e)^{5/3}} \rho^{5/3} \text{ (electrones no relativistas, } \rho \ll 10^6 \text{ g cm}^{-3}\text{)} \quad (4.10)$$

$$2. P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8 (m_u \mu_e)^{4/3}} \rho^{4/3} \text{ (electrones relativistas, } \rho \gg 10^6 \text{ g cm}^{-3}\text{)} \quad (4.11)$$



Para el caso no relativista,  $K = \frac{1.0036 \times 10^{13}}{\mu_e^{5/3}}$ ,  $\gamma = 5/3$ ; para el caso relativista,  $K = \frac{1.2435 \times 10^{16}}{\mu_e^{4/3}}$ ,  $\gamma = 4/3$  [ver Ec. (3.32)].

Por la Ec. (3.55), la masa de la estrella está dada en función del radio como

$$M = 4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_1^{\frac{3-n}{n-1}} \left( -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} R^{\frac{3-n}{1-n}} \quad (4.12)$$

Como el caso 1 corresponde a  $n = 3/2$  y el caso 2 a  $n = 3$ , se tiene, después de sustituir valores numéricos,

$$1. M = (0.7011 \times 10^{27} \text{ cm}^3) \left( \frac{2}{\mu_e} \right)^5 R^{-3} M_\odot \quad (4.13)$$

$$2. M_{\text{Ch}} = 1.457 \left( \frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_\odot \quad (4.14)$$

Nótese la dependencia inversa de la masa y el radio en (4.13). Esto significa que una enana blanca que obedece (4.10) disminuirá de tamaño al aumentar su masa, y viceversa, contrariamente a lo que dicta la intuición. A la masa (4.14) se le llama *límite de Chandrasekhar*, y representa el valor máximo posible de la masa que una enana blanca puede alcanzar. Este límite depende únicamente de la composición de la estrella. En particular, para átomos ionizados de carbono y oxígeno, el peso molecular medio por electrón libre se puede aproximar por  $\mu_e \approx 2$ , y entonces

$$M_{\text{Ch}} \approx 1.46 M_\odot \quad (4.15)$$

Considérense valores promedio en la ecuación de equilibrio hidrostático (3.16). Reemplazando el valor absoluto de  $\partial P/\partial m$  por  $P/M$  y  $m/r^4$  por  $M/R^4$ :

$$\frac{P}{M} \approx \frac{GM}{4\pi R^4} \quad (4.16)$$

Si se escribe la densidad promedio como  $\rho \sim M/R^3$ , al utilizar una ecuación de estado de la forma  $P \sim \rho^\gamma$  se obtiene

$$P \sim \left( \frac{M}{R^3} \right)^\gamma \quad (4.17)$$

Los lados izquierdo y derecho de (4.16), que corresponden a los términos de presión y gravitacional, respectivamente, son entonces

$$f_p \sim \frac{M^{\gamma-1}}{R^{3\gamma}} \quad ; \quad f_g \sim \frac{M}{R^4} \quad (4.18)$$

Para que exista equilibrio hidrostático, el cociente  $f_g/f_p$  debe ser igual a uno:

$$f \equiv \frac{f_g}{f_p} \sim M^{2-\gamma} R^{3\gamma-4} = \begin{cases} M^{1/3} R, & \text{para } \gamma = 5/3 \\ M^{2/3}, & \text{para } \gamma = 4/3 \end{cases} \quad (4.19)$$

Supóngase que se tiene una masa estelar dada  $M < M_{Ch}$  y electrones no relativistas, con  $\gamma = 5/3$ . La estrella puede llegar al equilibrio ajustando  $R$  de tal manera que  $f = 1$ . Si se incrementa  $M$  ligeramente, entonces  $f > 1$  (la gravedad excede a la fuerza de presión), y  $R$  debe disminuir para recuperar el equilibrio, según se sigue de (4.19).

Si los electrones son relativistas ( $\gamma = 4/3$ ), entonces  $f$  es independiente de  $R$ . El equilibrio sólo se puede alcanzar ajustando  $M$  a algún valor  $M_{Ch}$ . Si  $M < M_{Ch}$ , entonces  $f < 1$ , i.e., la presión dominante hace que la estrella se expanda. Esto hace a los electrones menos relativistas e incrementa  $\gamma$  por encima del valor crítico  $4/3$ . Cuando  $M > M_{Ch}$ ,  $f > 1$ , y el término gravitacional dominante hace que la estrella se contraiga; pero esto finalmente conduce al colapso de la estrella, sin que se llegue al equilibrio.

En la Figura 4.1 se muestra la relación masa-radio para EB de distintas composiciones químicas.

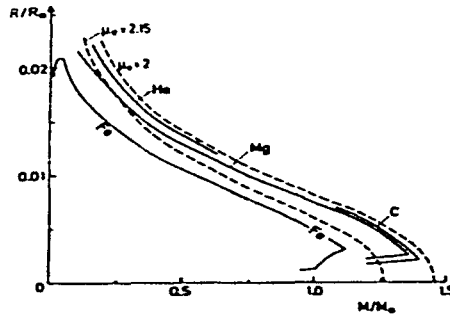


Figura 4.1: Relación masa-radio para enanas blancas con la composición química mostrada. La curva con  $\mu_e = 2$  corresponde a  $He^4$ ,  $C^{12}$ ,  $O^{16}$ , y la curva con  $\mu_e = 2.15$  corresponde a  $Fe^{56}$  (tomada de [25]).

#### 4.1.2 Correcciones electrostáticas a la ecuación de estado

Es necesaria una corrección electrostática a la ecuación de estado (4.3), ya que en realidad la energía y la presión de los electrones disminuyen debido a que las cargas positivas no están distribuidas uniformemente en el gas, sino que se encuentran concentradas en núcleos de carga eléctrica  $Ze$  (iones). La distancia promedio entre electrones es mayor que aquella entre los electrones y los núcleos, de modo que la atracción electrostática es más fuerte que la repulsión.

En un gas degenerado, el cociente entre la energía electrostática coulombiana y la energía de Fermi es

$$\frac{E_C}{E_F} = \frac{Ze^2 / \langle r \rangle}{p_F^2 / 2m_e} \quad (4.20)$$

en donde  $\langle r \rangle \sim n_e^{-1/3}$  es la separación electrón-ion característica. Usando  $n_e = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$  en la relación anterior, se tiene

$$\frac{E_C}{E_F} = 2 \left( \frac{1}{3\pi^2} \right)^{2/3} \frac{Z}{a_0} \frac{1}{n_e^{1/3}} = \left[ \frac{n_e}{(6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}) Z^3} \right]^{-1/3} \quad (4.21)$$

donde  $a_0 = \hbar^2 / m_e e^2$  es el radio de Bohr.

Para derivar una expresión aproximada de la corrección a la ecuación de estado degenerada, se puede emplear la llamada *aproximación de Wigner-Seitz*. Cuando  $T \rightarrow 0$ , los iones se localizan en una red que maximiza la separación entre ellos. Esta aproximación considera que el gas está dividido en esferas neutras de radio  $r_0$  centradas en cada ion, y las cuales contienen  $Z$  electrones.

La energía electrostática total de una esfera es la suma de las energías potenciales debidas a las interacciones electrón-electrón ( $e-e$ ) y electrón-ion ( $e-i$ ). En el primer caso, la energía  $E_{e-e}$  necesaria para construir una esfera uniforme de  $Z$  electrones es

$$E_{e-e} = \int_0^{r_0} \frac{q}{r} dq \quad (4.22)$$

donde

$$q = -Ze \frac{r^3}{r_0^3} \quad (4.23)$$

es la carga dentro del radio  $r < r_0$ . Sustituyendo (4.23) en (4.22) y realizando la integración se tiene

$$E_{e-e} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \quad (4.24)$$

En el caso de la interacción electrón-ion, para construir la esfera de electrones alrededor de un ion de carga  $Ze$  requiere una energía

$$\begin{aligned} E_{e-i} &= Ze \int_0^{r_0} \frac{dq}{r} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \end{aligned} \quad (4.25)$$

De este modo, la energía electrostática total de la celda es

$$\begin{aligned} E_C &= E_{e-e} + E_{e-i} \\ &= -\frac{9}{10} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \end{aligned} \quad (4.26)$$

La energía electrostática por electrón es

$$\frac{E_C}{Z} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{1/3} \quad (4.27)$$

donde se ha utilizado para  $n_e$  la expresión

$$n_e = \frac{Z}{4\pi r_0^3/3} \quad (4.28)$$

Por medio de

$$P \equiv -\frac{\partial(\epsilon/n)}{\partial(1/n)} = n^2 \frac{\partial(\epsilon/n)}{\partial n} \quad (4.29)$$

(ver [40]) donde  $\epsilon$  es la densidad de energía y  $n$  la densidad de número de partículas, se puede calcular la presión para la esfera de electrones a partir de (4.27):

$$\begin{aligned} P_C &= n_e^2 \frac{d(E_C/Z)}{dn_e} \\ &= -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3} \end{aligned} \quad (4.30)$$

En el límite no relativista, cuando la presión del gas  $P$  está dada por (3.10), la presión total es

$$P_T = P + P_C \quad (4.31)$$

Al utilizar (4.7), se puede escribir  $P$  como

$$P = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m_e} n_e^{5/3} \quad (4.32)$$

Para apreciar el efecto de la corrección electrostática, considérese el cociente

$$\left| \frac{P_C}{P} \right| = \frac{Z^{2/3}}{2^{1/3} \pi a_0 n_e^{1/3}} \quad (4.33)$$

En el límite relativista, la presión del gas (4.11) en términos de la densidad de número  $n_e$  es

$$P = \frac{\hbar c (3\pi^2)^{1/3}}{4} n_e^{4/3} \quad (4.34)$$

por lo que

$$\left| \frac{P_C}{P} \right| = \frac{2^{5/3}}{5} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \alpha Z^{2/3} \quad (4.35)$$

en donde  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$  es la constante de estructura fina.

## 4.2 Estrellas de neutrones

Las estrellas de neutrones constituyen uno de los mejores ejemplos en el universo de materia sometida a condiciones extremas. No es exagerado decir que existe aún incertidumbre acerca de muchos aspectos estructurales de tales objetos compactos, principalmente porque no se sabe qué ecuación de estado puede describir con exactitud las características de la materia a tan altas densidades (del orden o mayores que la densidad nuclear,  $\rho_{\text{nuc}} = 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ). A esta densidad los núcleos atómicos se empiezan a disolver y a fundir entre sí, ya que su energía de amarre disminuye debido al principio de exclusión). A pesar de los avances realizados, el entendimiento que se tiene sobre la materia condensada está lejos de ser completo, particularmente para densidades entre  $\rho_{\text{nuc}}$  y  $\sim 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ . Surgen dos complicaciones: (1) la forma que se debe utilizar para el potencial nuclear en las interacciones nucleón-nucleón es todavía incierta. Debido a que no se dispone de una teoría rigurosa ni de experimentos a densidades tan altas, se tienen que utilizar modelos para la interacción entre las partículas que concuerden con los resultados de dispersión a bajas energías, con las propiedades de saturación de fuerzas nucleares, etc., para después extrapolarlos y aplicarlos a las densidades propias de EN. No obstante, tales modelos producen incertidumbres grandes; (2) se necesita encontrar una técnica apropiada para resolver el problema cuántico de muchos cuerpos. Varios métodos usan suposiciones distintas y dan lugar a resultados diferentes. Sin embargo, el entendimiento actual que se tiene sobre la materia condensada es adecuado para determinar límites de las masas de EN estables.

La materia dentro de una estrella de neutrones, a densidades menores que  $\rho_{\text{nuc}}$  consiste principalmente de núcleos (que por lo general forman una red) y de suficientes electrones para tener neutralidad de carga, además de neutrones libres. Al aumentar la densidad, los electrones pueden adquirir suficiente energía para combinarse con los protones y formar así neutrones. Si el gas de electrones y protones se comprime más allá de una cierta densidad límite, sufre una transición hacia un gas de neutrones. A este proceso se le llama "neutronización". En el interior de la estrella, el aumento de la energía de Fermi de los electrones al incrementarse la densidad conduce a una neutronización creciente. No obstante, si los núcleos se vuelven demasiado ricos en neutrones comienzan a deshacerse, liberando neutrones. Este "goteo de neutrones" se inicia a una densidad  $\rho_{\text{got}} \approx 4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ .

Al aumentar el número de neutrones por unidad de volumen,  $n_n$ , también aumenta su presión  $P_n$ . Aún cuando la presión total (debida casi en su totalidad a los electrones) es más grande que la debida a los neutrones,  $P \approx P_e \gg P_n$  para  $\rho = \rho_{\text{got}}$ , cuando se alcanza  $\rho \approx 4 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$  se tiene  $P_n = P/2$ , y para  $\rho \gtrsim 1.5 \times 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$  resulta que  $P_n > 0.8P$ . Finalmente,  $P_n \approx P$  [25]. Estas densidades dependen del modelo adoptado para la interacción entre las partículas. Entre más grandes sean los valores de  $\rho$ , más incertidumbre se tiene en los detalles.

Conforme se incrementa el goteo de neutrones el número de núcleos disminuye. Cuando se alcanza la densidad nuclear  $\rho_{\text{nuc}}$  el resultado es un sistema líquido de neutrones degenerados más una mezcla de electrones y protones. Cuando  $\rho \gtrsim 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ , la energía de Fermi excederá gradualmente las masas en reposo de los hiperones de menor masa (los hiperones son bariones aparte de los protones y de los neutrones), como  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Delta$ . Entonces aparecerán estas partículas ("hiperonización"), y algunos autores piensan que se podría dar una transición hacia materia de quarks [25].

La ecuación de estado es la de un gas relativista de electrones degenerados hasta una densidad  $\rho_{\text{got}}$ :  $P \sim \rho^{4/3}$ . Pero al llegar a  $\rho = \rho_{\text{got}}$ , un incremento  $d\rho$  eleva  $n_n$  a expensas de  $n_e$  (que da la presión), por lo que el incremento  $dP$  es pequeño. El gas se vuelve más compresible, lo que se describe como una "suavización" de la ecuación de estado; en otras palabras, el índice adiabático  $\gamma$  cae por debajo del valor crítico  $4/3$ . Cuando  $P_n$  contribuye suficientemente a  $P$  entonces  $\gamma$  aumenta de nuevo más allá de  $4/3$ , a  $\rho \approx 7 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ .

En el intervalo de densidades que va de  $\rho_{\text{got}}$  a  $\rho_{\text{nuc}}$  ( $4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3} - 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) se puede utilizar la ecuación de estado debida a Baym, Bethe y Pethick (BBP). Este tratamiento toma en cuenta que, debido a que los núcleos son ricos en neutrones, la materia dentro de estos núcleos es similar al gas de neutrones libres afuera de ellos, y que este gas reduce la energía superficial de los núcleos considerablemente. La dependencia de  $P$  con  $\rho$  se muestra en la Figura 4.2, junto con la ecuación de estado de Harrison-Wheeler (HW). Algunas características de los resultados de BBP son las siguientes: (1) a la densidad de goteo de neutrones la presión se debe casi por completo a los electrones, pero a  $\rho = 1.5 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$  la presión de los neutrones aumenta a un 20% de la presión total, y para  $\rho = 1.5 \times 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$  llega a 80%; (2) conforme la densidad se acerca a la densidad de goteo de neutrones, el índice adiabático  $\gamma \simeq \frac{4}{3}$ . Un poco después de  $\rho_{\text{got}}$   $\gamma$  decae abruptamente, como se muestra en la Figura 4.3. La razón de esta caída es que el gas de neutrones de baja densidad contribuye a  $\rho$  pero no a  $P$ . Nótese que el índice adiabático se eleva de nuevo por encima de  $4/3$  cuando  $\rho \gtrsim 7 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ , como se mencionó anteriormente; (3) se encuentra que los núcleos pueden sobrevivir a densidades hasta de  $2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . A densidades mayores se obtiene un "líquido" nuclear.

La Figura 4.4 muestra diferentes ecuaciones de estado para materia degenerada por encima de  $\rho_{\text{nuc}}$ . Detalles sobre estas ecuaciones se pueden encontrar en [40].

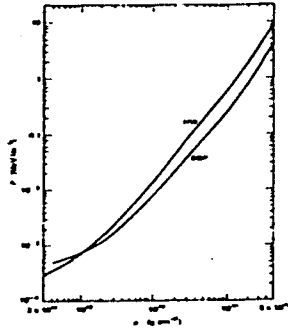


Figura 4.2: Ecuaciones de estado de Baym-Bethe-Pethick y de Harrison-Wheeler (tomada de [40]).

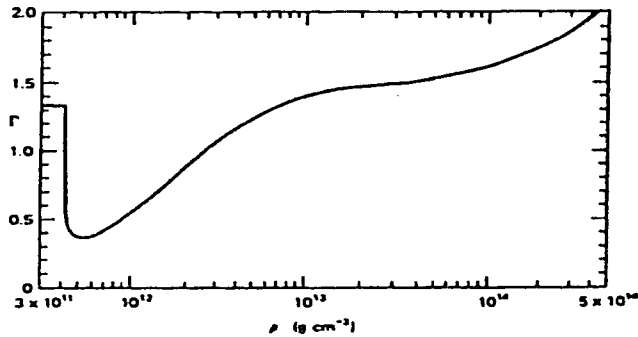


Figura 4.3: Índice adiabático como función de  $\rho$ , para la ecuación de estado de BBP (tomada de [40]).

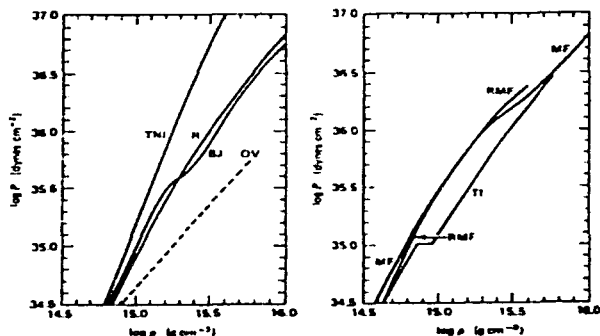


Figura 4.4: Ecuaciones de estado para materia degenerada con densidades por encima de  $\rho_{\text{nucl}}$ : TNI (*three-nucleon interaction*; Friedman y Pandharipande 1981); R (Reid; Pandharipande 1971); BJ (Bethe-Johnson; 1974); OV (Oppenheimer-Volkoff; 1939); RMF (*relativistic mean field*; Walecka 1974); MF (*mean field*; Pandharipande y Smith 1975); TI (*tensor-interaction*; Pandharipande y Smith 1975) (tomada de [40]).

Utilizando una ecuación de estado determinada se pueden obtener relaciones entre la masa de la estrella y su densidad central, y entre la masa y el radio. Para esto es necesario integrar una ecuación relativista de equilibrio hidrostático conocida como *ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* [25] a partir de  $r = 0$  y con una densidad central  $\rho_c$  que se elige.

Las relaciones  $M = M(\rho_c)$  y  $M = M(R)$  obtenidas cambian considerablemente si se reemplaza una ecuación de estado por otra, como se muestra en la Figura 4.5. Una característica común a estas relaciones es que todas presentan un máximo y un mínimo de  $M$ . La masa *mínima* de una estrella de neutrones estable se determina igualando el valor *medio* del índice adiabático  $\gamma$  al valor crítico  $4/3$  para que haya estabilidad radial contra el colapso gravitacional. El resultado de que  $\gamma(\rho)$  caiga debajo de  $4/3$  abruptamente en  $\rho \approx \rho_{\text{rot}}$  es que la masa mínima calculada usando la ecuación de estado de BBP es

$$M_{\text{min}} = 0.092 M_{\odot} \quad (4.36)$$

Este valor está razonablemente bien establecido, ya que se obtiene para densidades menores que la densidad nuclear.



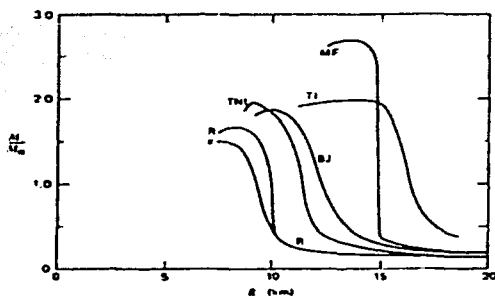


Figura 4.5: Relaciones masa-radio para distintas ecuaciones de estado (tomada de

[40]).

No se puede decir lo mismo para la masa *máxima* de EN en equilibrio, debido a las incertidumbres en la ecuación de estado por arriba de  $\rho_{\text{nucl}}$ . Sin embargo, como se mencionó al principio de esta sección, se pueden establecer límites superiores para la masa de una estrella de neutrones que no dependen de los detalles de la ecuación de estado en el régimen desconocido de altas densidades. Estos límites para  $M_{\text{max}}$  se encuentran en el intervalo  $\sim 1.5 - 2.9 M_{\odot}$  [40, 24]. El poder determinar la masa máxima de una estrella de neutrones es muy importante para decidir si un objeto compacto con una masa mayor que  $M_{\text{max}}$  es un agujero negro.

En la Figura 4.6 se muestra la *estratificación* de una estrella de neutrones de  $1.4 M_{\odot}$  descrita por la ecuación de estado de TNI (ver Figura 4.4). La *superficie* ( $\rho \lesssim 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ ) es una región en donde las temperaturas y los campos magnéticos pueden afectar significativamente a la ecuación de estado.

En la *corteza exterior* ( $10^6 \text{ g cm}^{-3} \lesssim \rho \lesssim 4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ ) una red de núcleos pesados coexiste con un gas relativista de electrones degenerados.

La *corteza interior* ( $4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3} \lesssim \rho \lesssim 2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) consiste de una red de núcleos ricos en neutrones junto con un superfluido de neutrones y un gas de electrones.

El *líquido de neutrones* ( $2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3} \lesssim \rho \lesssim 10^{15}$ ) contiene principalmente neutrones superfluidos y una concentración menor de protones superconductores y electrones normales.

Finalmente, no está del todo claro si existe un *núcleo* en el que los neutrones formen un sólido debido a las fuerzas repulsivas que se presentan a distancias muy pequeñas entre ellos.

Cabe mencionar que el líquido de neutrones se vuelve superfluido cuando aquéllos se aparean, formando bosones de espín cero. Mientras que la superfluidez del helio ocurre únicamente a temperaturas de unos cuantos K, la del líquido de neutrones tiene lugar a  $T < 10^{10} \text{ K}$ . La superfluidez afecta a la ca-

pacidad calorífica del material (es decir, al enfriamiento). El apareamiento de protones produce superconductividad, lo que influye en los campos magnéticos.

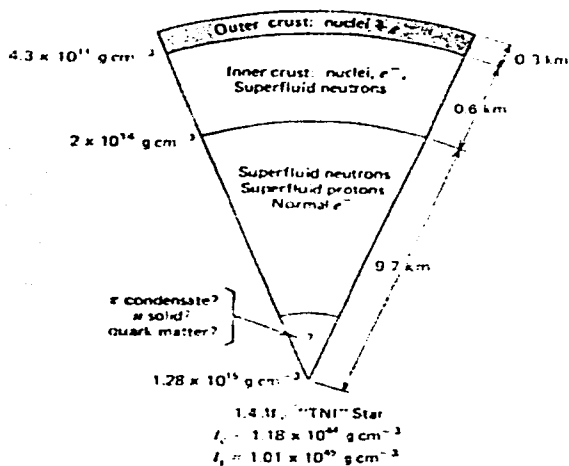


Figura 4.6: Estratificación de una estrella de neutrones descrita por la ecuación de estado de TNI mostrada en la Figura 4.4 (tomada de [40]).

## Capítulo 5

# Transferencia de masa en sistemas binarios

La mayor parte de las estrellas que se observan pertenece a sistemas de dos o más miembros. En muchos casos las estrellas que componen estos sistemas están muy separadas entre sí (las distancias entre ellas son mucho mayores que los radios estelares), y el efecto sobre la estructura y evolución de una estrella debido a otra es pequeño o nulo. No obstante, algunos fenómenos astrofísicos son consecuencia de la proximidad de dos estrellas (la distancia  $a$  entre ambas es del orden de cualquiera de los radios estelares  $R$ ). Algunos ejemplos son los mecanismos que se cree son responsables de la emisión de rayos  $x$  en fuentes compactas, algunas novae, y el calentamiento y la distorsión de marea de estrellas ordinarias por sus compañeras.

En un sistema binario se puede llevar a cabo un intercambio de masa entre los dos componentes, lo que altera dramáticamente la estructura y evolución de uno de ellos, o de ambos. En algunos casos, un efecto de este intercambio de masa es la formación de un *disco de acrecimiento* alrededor de una de las estrellas del sistema, debido a que el material transferido necesita deshacerse de casi todo su momento angular antes de "caer" en ella. Los discos de acrecimiento son mecanismos eficientes para extraer energía potencial gravitacional y convertirla en radiación.

La razón mejor entendida por la que muchas binarias transfieren materia en alguna etapa de su evolución es que el radio de una de las estrellas puede aumentar, o la separación entre ambas disminuir, con lo que la atracción gravitacional de la compañera puede desprender las capas exteriores de la primera.

## 5.1 Desbordamiento del lóbulo de Roche

En el siglo XIX el matemático francés Edouard Roche estudió el problema de la sobrevivencia estructural de satélites planetarios, el cual se relaciona con la ruptura de una estrella debida a una compañera cercana. En el enfoque de Roche se considera la órbita de una partícula de prueba sujeta al potencial gravitacional de dos cuerpos masivos que giran uno alrededor del otro, bajo la influencia de sus atracciones gravitacionales. Se asume que estos dos cuerpos son tan masivos que la partícula de prueba no afecta sus órbitas. De este modo, cada uno de los cuerpos (que pueden ser las estrellas de un sistema binario) sigue una órbita kepleriana alrededor del otro, en un plano. El problema de Roche supone que estas órbitas son circulares. Generalmente esta es una buena aproximación para sistemas binarios, ya que los efectos de marea tienden a transformar órbitas ecéntricas en circulares en escalas de tiempo cortas comparadas con el tiempo que tarda en llevarse a cabo la transferencia de masa. Otra suposición del problema de Roche es que las dos estrellas son masas puntuales para fines dinámicos. La configuración general se muestra en la Figura 5.1.

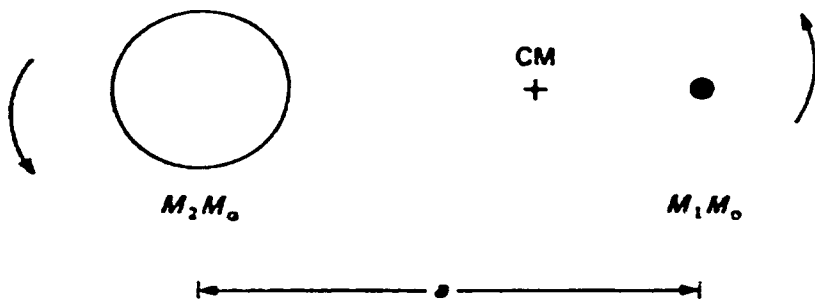


Figura 5.1: Configuración general del problema de Roche (tomada de [15]).

Es conveniente escribir las masas de las dos estrellas como  $M_1 M_\odot$  y  $M_2 M_\odot$ , ya que así  $M_1$  y  $M_2$  se encuentran en el rango 0.1-100 para cualquier tipo de estrella. En este análisis se considera que  $M_2 \leq M_1$ . La tercera ley de Kepler da entonces la relación entre la separación de la binaria,  $a$ , y su periodo,  $T$  (no confundir con temperatura), de la siguiente manera:

$$4\pi^2 a^3 = G(M_1 + M_2) M_\odot T^2 \quad (5.1)$$

Un flujo de gas entre las dos estrellas está descrito por la ecuación de Euler [15] [véase Ec. (2.90)]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (5.2)$$

El segundo término del lado izquierdo de esta ecuación representa la convección de momento a través del fluido por gradientes de velocidad. La presencia de este término significa que son posibles movimientos estacionarios en los que las derivadas temporales de las variables del fluido se anulen sin que  $\mathbf{v}$  sea cero.

Resulta deseable escribir la Ec. (5.2) en un marco de referencia que rote junto con el sistema binario, con velocidad angular  $\omega$  relativa a un marco inercial, porque en tal sistema rotatorio las dos estrellas están fijas. Esto implica que en la ecuación de Euler habrá que añadir un término para la fuerza centrífuga y otro para la fuerza de Coriolis. De esta manera la Ec. (5.2) se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \Phi_R - 2\omega \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (5.3)$$

donde  $\omega$  está dada por (5.1) en términos de un vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  perpendicular al plano orbital:

$$\omega = \left[ \frac{G(M_1 + M_2) M_\odot}{a^3} \right]^{1/2} \hat{\mathbf{n}}$$

El término  $-2\omega \times \mathbf{v}$  es la fuerza de Coriolis por unidad de masa. El potencial de Roche  $\Phi_R$  está dado por

$$\Phi_R(\mathbf{r}) = -\frac{GM_1 M_\odot}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{GM_2 M_\odot}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2} (\omega \times \mathbf{r})^2 \quad (5.4)$$

en donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son los vectores de posición de los centros de cada estrella. El último término da la fuerza centrífuga.

Para problemas de acrecimiento, es útil visualizar las superficies equipotenciales de (5.4). En la Figura 5.2 aparecen las secciones en el plano orbital. La forma de las líneas equipotenciales depende del cociente de masas  $q \equiv M_2/M_1$ , y la escala general está dada por la separación  $a$ . La Figura 5.2 corresponde a  $q = 0.25$ . Cuando un cuerpo se encuentra en una órbita muy alejada de la binaria ( $r \gg a$ ), ésta aparece como una masa puntual concentrada en el centro de masa (CM). En este caso, la línea equipotencial (circunferencia exterior marcada como 2 en la Figura 5.2) corresponde a la de una masa puntual vista en un marco rotatorio. Análogamente, hay una circunferencia equipotencial (marcada como 1) alrededor de cada estrella. El movimiento de un cuerpo aquí está determinado por la atracción gravitacional de la estrella más cercana. Así, el potencial  $\Phi_R$  tiene dos valles centrados en  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ .

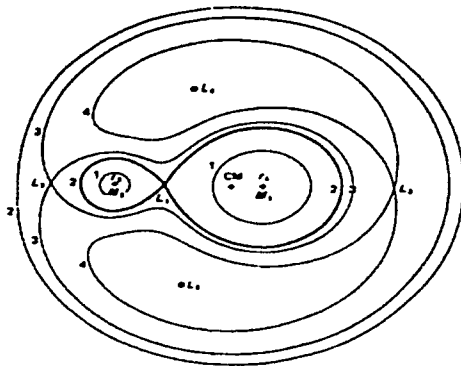


Figura 5.2: Secciones en el plano orbital de equipotenciales de Roche para  $q = 0.25$  (tomada de [15]).

El aspecto más importante de la Figura 5.2 es la superficie equipotencial indicada con una línea gruesa. En tres dimensiones, a la región dentro de cada una de estas superficies críticas se le llama *lóbulo de Roche*. Los dos lóbulos se unen en el *punto interior de Lagrange*  $L_1$ , que es un punto silla de  $\Phi_R$ . Es más fácil para el material dentro de uno de los lóbulos pasar a través de  $L_1$  que escapar de la superficie entera.

Supóngase que inicialmente ambas estrellas son más pequeñas que sus respectivos lóbulos de Roche, y que la rotación de cada estrella alrededor de su eje (ortogonal al plano) está sincronizada con el movimiento orbital (esta sincronía se alcanza normalmente en una escala de tiempo similar a la de la transformación de la órbita en circular, como consecuencia de las fuerzas de marea). La superficie de las estrellas se conformará aproximadamente a las secciones equipotenciales marcadas 1 en la Figura 5.2 (o la correspondiente versión para una  $q$  apropiada), según se infiere de (5.3), ya que  $v = 0$  y  $P$  es constante en la superficie. En este caso el material no tiende a desprenderse de cualquiera de las estrellas por la atracción gravitacional de la otra. Se dice entonces que la binaria está *separada*.

Si por alguna razón una de las estrellas aumenta de tamaño (como consecuencia de su evolución, por ejemplo), su superficie, que debe estar sobre una equipotencial de  $\Phi_R$ , llenará su lóbulo de Roche. Usualmente se hace referencia a esta estrella (estrella 2) como *secundaria*, y a la otra (estrella 1) como *primaria*. Esta situación se representa en la Figura 5.3. El hecho de que parte de la cubierta de la secundaria permanezca muy cerca del punto de Lagrange  $L_1$  significa que cualquier perturbación de este material lo canalizará a través de  $L_1$  hacia el lóbulo de Roche de la primaria, en donde será capturado por esa

estrella. Tales perturbaciones se dan, por ejemplo, por gradientes de presión. A un sistema como este se le denomina *semiseparado*, y en él se llevará a cabo transferencia de masa de la estrella 2 a la estrella 1 durante el tiempo que la secundaria esté en contacto con su lóbulo de Roche. Este tipo de transferencia de masa se llama *desbordamiento del lóbulo de Roche*. Cuando ambas estrellas llenan su lóbulo de Roche el sistema es una *binaria de contacto*.

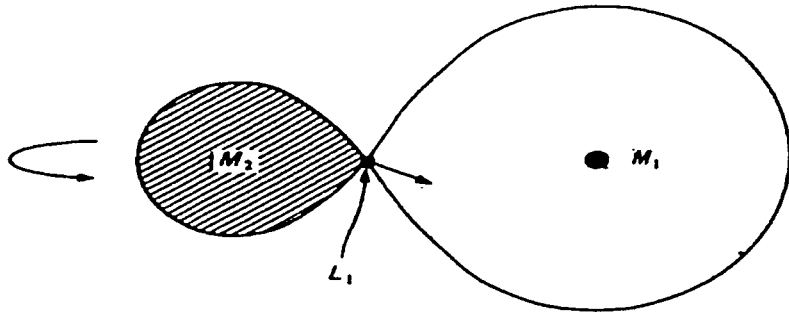


Figura 4.3: Desbordamiento del lóbulo de Roche de la secundaria en un sistema binario semiseparado (tomada de [15]).

## 5.2 Evolución de la binaria

El proceso de transferencia de masa en una binaria cambia el cociente de masas  $q$ . De igual forma, el periodo  $T$  y la separación  $a$  se ven alterados por la redistribución de momento angular dentro del sistema. Como se mencionó antes, la geometría de las superficies equipotenciales está determinada por  $q$  y  $a$ , y esto se aplica en particular a los lóbulos de Roche. Es válido entonces preguntarse cómo cambiará la forma de los lóbulos al modificarse los valores de estas cantidades. Si el lóbulo disminuye de tamaño, el desbordamiento proseguirá durante un tiempo. Si aumenta, la transferencia de masa cesará, a menos que algún proceso evolutivo de la estrella en cuestión incremente su radio a un ritmo suficiente. En cualquier caso, la cantidad determinante es el momento angular orbital  $J$ . Escribiendo  $\omega = 2\pi/T$  para la velocidad angular de la binaria, se tiene

$$J = (M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2) M_\odot \omega \quad (5.5)$$

donde

$$a_1 = \left(\frac{M_2}{M}\right) a, \quad a_2 = \left(\frac{M_1}{M}\right) a \quad (5.6)$$

son las distancias de cada una de las estrellas al centro de masa, y  $M = M_1 + M_2$ . Sustituyendo (5.6) en (5.5) y utilizando (5.1) da

$$J = M_1 M_2 \left( \frac{Ca}{M} \right)^{1/2} M_{\odot}^{3/2} \quad (5.7)$$

Como aproximación se puede suponer que toda la masa perdida por la secundaria es acretaada por la primaria, de tal modo que  $dM/dt = 0$ , con  $dM_2/dt < 0$ . Al derivar logarítmicamente (5.7) respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{J} \frac{dJ}{dt} + \frac{2}{M_2} \left( -\frac{dM_2}{dt} \right) \left( 1 - \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (5.8)$$

La transferencia conservativa de masa se caracteriza por la constancia del momento angular, además de la de la masa total. Esto significa que el primer término de la derecha en la ecuación anterior es cero:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{M_2} \left( -\frac{dM_2}{dt} \right) \left( 1 - \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (5.9)$$

Al recordar que  $\frac{dM_2}{dt} < 0$ , se ve que, si la transferencia conservativa se da de la estrella menos masiva hacia la estrella con más masa ( $q$  disminuye), entonces la binaria se expandirá ( $\frac{da}{dt} > 0$ ). Esto es consecuencia de que la materia se acumula cerca del centro de masa del sistema, por lo que la masa  $M_2$  restante tiene que situarse en una órbita más alejada para conservar el momento angular. Si por el contrario, la transferencia se lleva a cabo de la estrella 1 a la estrella 2 ( $q$  aumenta), entonces  $\frac{dM_2}{dt} > 0$ , y la binaria se contraerá.

Debido a que los lóbulos de Roche no son esféricos se requiere un radio promedio para caracterizarlos. Una opción adecuada es el radio de una esfera que tenga el mismo volumen que el lóbulo. El radio  $R_2$  del lóbulo de la secundaria está dado por la fórmula analítica aproximada [13]

$$\frac{R_2}{a} = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})} \quad (5.10)$$

Para  $0.1 \lesssim q \lesssim 0.8$  es conveniente utilizar la siguiente fórmula [15]:

$$\frac{R_2}{a} = \frac{2}{3^{4/3}} \left( \frac{q}{1+q} \right)^{1/3} = 0.462 \left( \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^{1/3} \quad (5.11)$$

(el radio  $R_1$  del lóbulo de la primaria se obtiene al reemplazar  $q$  por  $q^{-1}$ ). Por otro lado, la distancia  $b_1$  del punto  $L_1$  al centro de la primaria está dada por una fórmula ajustada [15]:

$$\frac{b_1}{a} = 0.500 - 0.227 \log q \quad (5.12)$$

La derivada logarítmica de (5.11) da

$$\frac{1}{R_2} \frac{dR_2}{dt} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} + \frac{1}{3M_2} \frac{dM_2}{dt}$$



Combinando esta ecuación con (5.8) se obtiene:

$$\frac{1}{R_2} \frac{dR_2}{dt} = \frac{2}{J} \frac{dJ}{dt} + \frac{2}{M_2} \left( -\frac{dM_2}{dt} \right) \left( \frac{5}{6} - \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (5.13)$$

Surgen dos casos, dependiendo de si  $q$  es menor o mayor que  $\frac{5}{6}$ . Si  $q > \frac{5}{6}$  la transferencia conservativa de masa hace que el lóbulo de Roche de la estrella que pierde masa se contraiga. Si además se pierde momento angular ( $\frac{dJ}{dt} < 0$ ) esta contracción se ve acentuada. El proceso de desbordamiento se tornará violento a menos que la estrella mantenga su radio menor que  $R_2$ . Si  $q < \frac{5}{6}$  el lóbulo se expande si la transferencia es conservativa. La transferencia de masa (no necesariamente conservativa) continúa sólo si la estrella también se expande o si el sistema pierde momento angular (por medio de radiación gravitacional, por ejemplo).

### 5.3 Formación de discos de acrecimiento

Una consecuencia del desbordamiento del lóbulo de Roche es que el material transferido posee un momento angular alto, por lo que no puede depositarse directamente en la primaria (véase la Figura 5.4). Como la materia desprendida de la estrella 2 debe pasar por el punto  $L_1$ , en el marco de referencia de la estrella 1 parece que esta materia está siendo rociada hacia ella desde una tobera que gira muy rápido en el plano del sistema binario, de tal forma que para la primaria el chorro de gas aparentemente se mueve de manera casi ortogonal a la línea que une los centros de las estrellas.

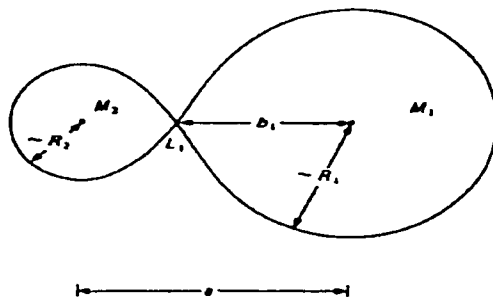


Figura 5.4: Geometría en la formación de discos de acrecimiento en un sistema binario (tomada de [15]).

Es posible demostrar que en el cálculo de la trayectoria del chorro las fuerzas debidas a la presión pueden despreciarse, por lo que el fluido seguirá una trayectoria balística determinada por el potencial de Roche, tal como si estuviera formado por partículas de prueba. Como aproximación se puede suponer que dicha trayectoria corresponde a la órbita de una partícula que parte del reposo desde  $L_1$  y que cae en el campo gravitacional de la primaria. Esto da una órbita elíptica en el plano de la binaria, y la presencia de la secundaria induce un movimiento de precesión de la órbita. Por ello, un chorro continuo que siga esta órbita se intersectará consigo mismo y habrá disipación de energía debido a choques. Ahora bien, para el gas no es fácil liberar el momento angular que poseía al salir de  $L_1$ , y tiende a seguir la órbita de menor energía para un momento angular dado, que es una órbita circular. Entonces se puede esperar que esta órbita tenga un radio  $R_{\text{circ}}$ , con la velocidad del gas dada por

$$v = \left( \frac{GM_1 M_\odot}{R_{\text{circ}}} \right)^{1/2} \quad (5.14)$$

donde

$$R_{\text{circ}} v = b_1^2 \omega \quad (5.15)$$

con  $b_1$  la distancia de la primaria a  $L_1$ . Utilizando  $\omega = 2\pi/T$  y combinando las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\frac{R_{\text{circ}}}{a} = \frac{4\pi^2}{GM_1 M_\odot T^2} a^3 \left( \frac{b_1}{a} \right)^4$$

que, utilizando la ley de Kepler se convierte en

$$\frac{R_{\text{circ}}}{a} = (1+q) \left( \frac{b_1}{a} \right)^4$$

Finalmente, con la Ec. (5.12) se puede escribir

$$\frac{R_{\text{circ}}}{a} = (1+q) (0.500 - 0.227 \ln q)^4 \quad (5.16)$$

El radio  $R_{\text{circ}}$  es típicamente de 2 a 3 veces menor que el radio  $R_1$  del lóbulo de la primaria, excepto para  $q$  muy pequeña. Por ejemplo, para  $q = 1$ ,  $R_{\text{circ}} = 0.125a$ ,  $R_1 = 0.38a$ . Se ve entonces que el material capturado gravitacionalmente describirá una órbita interior al lóbulo de Roche alrededor de la primaria.

El gas emitido desde la secundaria adquiere una configuración anular de radio  $R_{\text{circ}}$ . Dentro de este anillo ocurren procesos disipativos (colisiones de los elementos de gas, choques, disipación por viscosidad, etc.) que convierten parte de la energía del movimiento orbital en energía interna (calorífica). Como consecuencia de esta pérdida de energía, el gas se sume en el potencial gravitacional de la primaria, y esto a su vez requiere que el gas pierda momento angular. Ya que una órbita circular tiene la mínima energía para un momento angular dado,

se puede esperar que el gas describa una trayectoria espiral hacia la estrella a través de órbitas aproximadamente circulares en el plano de la binaria. A esta disposición de la materia se le llama *disco de acrecimiento* (Figura 5.5). Este proceso involucra pérdida de momento angular hacia las partes externas del disco por medio de torcas internas. Por tanto, estas regiones adquieren momento angular y se desplazan hacia afuera trazando una espiral. El anillo de materia original de radio  $R_{\text{circ}}$  será dispersado hacia radios tanto mayores como menores.

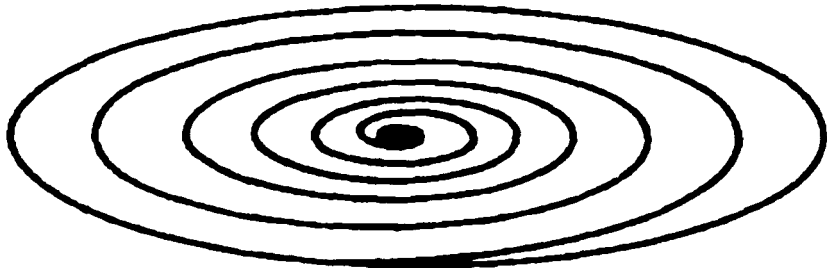


Figura 5.5: Disco de acrecimiento (tomada de [15]).

La disminución del momento angular conforme el gas del disco se acerca a la estrella se puede comprobar de la manera siguiente: en la mayoría de los casos la masa total del disco es muy pequeña, y su densidad media menor que la de la primaria, por lo que se puede despreciar la autogravedad del gas. Entonces las órbitas circulares son keplerianas, con velocidad angular

$$\Omega(R) = \left( \frac{GM_1 M_\odot}{R^3} \right)^{1/2} \quad (5.17)$$

donde  $R$  es la distancia a la primaria. El momento angular por unidad de masa es  $R^2 \Omega(R) \propto R^{1/2}$ , según se ve de (5.17). Consecuentemente, al disminuir la distancia  $R$  disminuye también el momento angular.

Una consecuencia importante del transporte de momento angular por las torcas disipativas es que el borde exterior del disco estará en general a un radio  $R_{\text{ext}}$  que excede a  $R_{\text{circ}}$  dado por (5.16); por tal motivo  $R_{\text{circ}}$  es frecuentemente considerado el radio mínimo del disco.

## Capítulo 6

# Simulaciones hidrodinámicas

Existe una gran variedad de fenómenos físicos cuya complejidad hace necesario el uso de programas computacionales para poder realizar un estudio detallado sobre ellos. Las soluciones analíticas generales tienen que reemplazarse entonces por soluciones numéricas específicas para cada problema. Esto es también cierto en la astrofísica.

Este capítulo describe algunos aspectos de las simulaciones de dos sistemas astrofísicos: por un lado, un sistema binario de enanas blancas cuya coalescencia da lugar a un solo objeto central rodeado por una envoltura de material disperso; por otro lado, una enana blanca que se colapsa y genera un objeto más denso, también rodeado por una envoltura. En ambos casos, la incorporación en los programas correspondientes de los procesos macroscópicos involucrados toma en cuenta la naturaleza fluida de la materia que compone a estas estrellas.

### 6.1 Introducción

Durante los últimos años se han llevado a cabo varios trabajos teóricos en los que se ha estudiado el comportamiento de objetos compactos en situaciones extremas, particularmente de enanas blancas y de estrellas de neutrones. Estos trabajos consisten en simulaciones numéricas de sistemas binarios cuyas estrellas componentes se encuentran inicialmente muy cerca una de la otra (las separaciones son del orden de los radios estelares, que abarcan órdenes de magnitud desde  $10$  hasta  $10^3$  km). Para realizar la mayoría de estas simulaciones (además de las que dieron lugar a esta tesis) se ha utilizado un método numérico conocido como *smoothed particle hydrodynamics* (SPH), el cual fue inventado específicamente para tratar con problemas astrofísicos que involucraran el movimiento de

fluidos en tres dimensiones [29]. En SPH, un fluido se modela con partículas de masa que interactúan gravitacional e hidrodinámicamente entre sí. Para simular sistemas como enanas blancas o estrellas de neutrones se utilizan por lo general varios miles de partículas SPH. En el Apéndice se presenta una descripción más detallada de este método.

Benz *et al.* [3] han encontrado que en un sistema binario de enanas blancas separadas 14,000 km, en el que la primaria tiene una masa de  $1.2 M_{\odot}$ , y un radio de 3,500 km, y la secundaria una masa de  $0.9 M_{\odot}$  y un radio de 5,400 km, esta última se destruye por completo, por efecto de la transferencia de masa, después de aproximadamente dos periodos orbitales, y se transforma en un disco que gira alrededor de la primaria. El objeto resultante tiene un radio  $R = 14,000$  km, y en él se pueden distinguir cuatro regiones: el núcleo interior degenerado (radio  $r_1 \lesssim 2,100$  km, masa  $m_1 \lesssim 0.9 M_{\odot}$ ), que contiene únicamente material de la primaria original; material semidegenerado ( $2,100 \text{ km} \lesssim r_2 \lesssim 2,940 \text{ km}$ ,  $0.9 M_{\odot} \lesssim m_2 \lesssim 1.2 M_{\odot}$ ) proveniente de las porciones exteriores de la primaria; material no degenerado ( $2,940 \text{ km} \lesssim r_3 \lesssim 7,000 \text{ km}$ ,  $1.2 M_{\odot} \lesssim m_3 \lesssim 1.7 M_{\odot}$ ) originado en la porción exterior de la secundaria original, y que está soportado (es decir, se evita su colapso) en sus capas internas a través de la presión de la región semidegenerada, y en sus capas externas por rotación; y materia no degenerada ( $7,000 \text{ km} \lesssim r_4 \lesssim 14,000 \text{ km}$ ,  $1.7 M_{\odot} \lesssim m_4 \lesssim 2.1 M_{\odot}$ ) surgida del núcleo de la secundaria, soportada por rotación. Las estrellas se modelaron con la ecuación de estado de Chandrasekhar, Ec. (4.3), utilizando 3,000 partículas SPH en una estrella y 4,000 en la otra.

Por otro lado, al simular la coalescencia de dos estrellas de neutrones de masas iguales ( $\approx 1.4 M_{\odot}$ ), radios iguales ( $\approx 10$  km) y separación inicial de 28 km, Rasio y Shapiro [35] muestran que ambas se unen en menos de un periodo orbital. Después de una revolución completa se inicia un "derrame" de masa, y la materia en la periferia del sistema forma dos brazos espirales que se extienden hacia afuera. Al final de la evolución, estos brazos se ensanchan y se unen formando un disco de densidad baja alrededor del núcleo. Los autores modelaron las estrellas como politropos con exponente  $\gamma = 2$  [ver Ec. (3.32)], y representaron cada una con 8,000 partículas SPH.

Se han hecho simulaciones de sistemas binarios cuyos componentes son una estrella de neutrones y un agujero negro. Lee y Kluzniak [27] elaboraron un trabajo en el que analizan los resultados de variar algunos parámetros, como el cociente de masas  $q$  y la separación inicial  $r$ . La estrella de neutrones se modeló con una ecuación de estado politrópica con  $\gamma = 3$ , utilizando dos resoluciones distintas, 16,944 y 8,121 partículas. El agujero negro se modeló como una masa puntual con un potencial gravitacional newtoniano; cuando una partícula de la estrella de neutrones cruza la superficie del agujero (el *horizonte de Schwarzschild*, el cual a su vez fue modelado colocando una frontera absorbente a una distancia  $r_S = 2GM_{AN}/c^2$ , donde  $M_{AN}$  es la masa del agujero negro<sup>1</sup>) significa que ha sido absorbida por él, y tal partícula se descarta de la simu-

<sup>1</sup> La expresión escrita corresponde al radio del horizonte de Schwarzschild de un agujero negro esféricamente simétrico. Véase por ejemplo [6.3].

lación. Un hecho notable de estas corridas es que la estrella de neutrones no se destruye completamente bajo la fuerte atracción del agujero negro, sino que queda un núcleo del politropo original en órbita alrededor de aquél. Únicamente para una corrida con  $q = 1$  se observó la formación de un toroide de acrecimiento alrededor del agujero negro, mientras que para  $q = 0.8$  y  $q = 0.31$  toda la materia despojada de la estrella de neutrones fue engullida por él.

Existen varias motivaciones detrás de estos y otros trabajos similares. La coalescencia de sistemas binarios de objetos compactos se reconoce como una fuente importante de radiación gravitacional [40]. Se han encontrado sistemas binarios de este tipo [13, 29]. En el caso de la unión hidrodinámica de dos estrellas de neutrones se produce un destello de ondas gravitacionales cuyas características constituyen un sondeo del interior de tales cuerpos, y la medición de cantidades como la amplitud máxima o la frecuencia de las señales detectadas puede contribuir a restringir las ecuaciones de estado nucleares [36]. Asimismo, se ha sugerido que estos sistemas son posibles progenitores de destellos de rayos gama [33].

Se piensa que la coalescencia de binarias de enanas blancas masivas da origen a supernovas del Tipo Ia, las cuales se caracterizan por la presencia de O, Mg, Si, Fe y Co en sus espectros [14, 28]. Para producir una supernova, la masa total del sistema debe estar por encima de la masa de Chandrasekhar. Por otra parte, estos sistemas binarios también pueden ser fuentes de ondas gravitacionales de baja frecuencia [37]. La unión de dos enanas blancas altamente magnetizadas puede conducir a la formación de una estrella de neutrones con un campo magnético extremadamente alto, y esto ha sido propuesto como otra causa de destellos de rayos gama [42].

La presencia de tres enanas blancas masivas que no pertenecen a ningún cúmulo o a alguna otra asociación de estrellas [5] ha hecho que se considere la posibilidad de que cada miembro del sistema se haya formado a partir de la coalescencia de dos enanas blancas. Para este efecto se han llevado a cabo simulaciones [39] cuyos resultados indican que, si se supone que ése ha sido el caso, entonces el objeto formado por la coalescencia ha debido perder alrededor del 90% de su momento angular original para volverse suficientemente compacto y alcanzar las gravedades superficiales observadas.

El colapso de una enana blanca conducente a la formación de un objeto muy denso (posiblemente una estrella de neutrones), es un fenómeno que también ha sido señalado como un posible precursor de supernovas del Tipo Ia [10] y destellos de rayos gama [11]. Tal colapso puede originarse a partir de un proceso de acrecimiento de material proveniente de una estrella compañera, en el caso de un sistema binario, o del medio interestelar, en el caso de una enana blanca solitaria. Este *colapso inducido por acrecimiento* (CIA) ha sido simulado para el caso de una enana blanca masiva en una y dos dimensiones [16] y, curiosamente, los autores concluyen que los CIA difícilmente pueden explicar las supernovas de Tipo Ia y los destellos de rayos gama, basándose en los resultados que obtuvieron sobre el material eyectado por los colapsos. No obstante, afirman que los CIA pueden ser candidatos para explicar las poblaciones observadas de estrellas de neutrones en cúmulos globulares.

En lo que resta de este capítulo se hablará de las simulaciones de un sistema binario de enanas blancas coalescentes y del colapso gravitacional de una enana blanca. En ambos casos las simulaciones son tridimensionales. El objetivo de estas simulaciones es determinar las características del objeto final que surge como consecuencia de los procesos hidrodinámicos en cada corrida; en particular, se quiere precisar si se trata o no de una estrella de neutrones. El tratamiento es newtoniano, y no se consideran procesos nucleares ni radiativos, ni tampoco efectos como radiación gravitacional, emisión de neutrinos o destellos de rayos gamma, a diferencia de los trabajos mencionados anteriormente. Se pretende mostrar los aspectos más generales de las simulaciones que utilizan el método SPH para el caso específico de los sistemas astrofísicos señalados, cuyas propiedades particulares se describen más adelante.

## 6.2 Implementación de las simulaciones

Los programas utilizados en las simulaciones presentadas en esta tesis fueron desarrollados originalmente por Lee [26]. En las Tabla 6.1 y 6.2 se muestran las propiedades iniciales de los sistemas simulados. Se designa por primaria a la estrella que inicialmente se encuentra en el lado derecho del plano orbital. El radio del lóbulo de Roche se calculó usando la Ec.(5.10).

Propiedad	Primaria	Secundaria
Masa ( $M_{\odot}$ )	1.39	1.39
Radio ( $10^6$ m)	1.6	1.6
Radio del lóbulo ( $10^6$ m)	2.425	2.425
Densidad máxima ( $10^{11}$ kg/m <sup>3</sup> )	9.8	9.7
Periodo orbital (s)	5.7	
Separación ( $10^6$ m)	6.4	

Tabla 6.1: Propiedades iniciales del sistema binario de enanas blancas

Cantidad	Corrida		
	1	2	3
$\rho_1$ (kg m <sup>-3</sup> )	$2 \times 10^{11}$		
$\rho_2$ (kg m <sup>-3</sup> )	$1 \times 10^{13}$	$1 \times 10^{14}$	$1 \times 10^{15}$
$\gamma_2$	1.3		
$\gamma_3$	$\frac{5}{3}$		
$K_2$	$1.12 \times 10^{10}$		
$K_3$	191,706.11	82,407.98	35,424.41
Masa ( $M_{\odot}$ )	1.39		
Radio inicial ( $10^6$ m)	1.7		

Tabla 6.2: Características de la enana blanca que se colapsa (ver texto).

Para llevar a cabo una corrida dinámica se construye primeramente una enana blanca. Para tal fin se utiliza un programa que coloca cierto número de partículas en una red cúbica tridimensional centrada en el origen, y que se extiende hasta una distancia igual al radio de la estrella. Posteriormente, con otro programa se obtiene una esfera al cortar las esquinas del cubo del programa anterior, y se resuelve numéricamente la ecuación de Lane-Emden [Ec. (3.42)] con un índice adiabático  $\gamma = 5/3$  (índice politrópico  $n = 3/2$ ), se calcula la densidad  $\rho$  a partir de esta solución, y se asigna una masa  $m = \rho/n$  a cada partícula, donde  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen. A la estrella esférica así construida se le permite relajarse, para lo cual un tercer programa, que incorpora la ecuación de estado de Chandrasekhar, hace posible que las partículas SPH interactúen entre sí de tal manera que la enana blanca llegue a un estado de equilibrio hidrostático.

Una vez que se llega a este punto se procede de dos maneras distintas, dependiendo del sistema que se va a modelar. Para formar el sistema binario se hace una "copia" de la estrella, y ambas se colocan a una distancia de 4 radios estelares (véase Tabla 6.1). La razón para elegir esta separación inicial tiene que ver con el hecho de que el momento angular total del sistema, como función de la separación  $r$ , presenta un mínimo para un valor determinado  $r_0$  (Figura 6.1). Si la separación inicial es mayor que  $r_0$ , cualquier pequeño incremento o decremento  $\Delta r$  en la separación causará oscilaciones epicíclicas del sistema, como consecuencia de la conservación del momento angular. Sin embargo, cuando  $r = r_0$  el sistema es inestable y el resultado de una variación  $\Delta r$ , como la que se induce en esta simulación debido a la interacción gravitacional, es un decaimiento orbital: las estrellas se funden en un solo objeto. El valor  $r_0 = 6,400$  km proporciona la inestabilidad requerida en este sistema particular para que las enanas blancas se fusionen.

TRIS CON  
PILLA DE ORIGEN



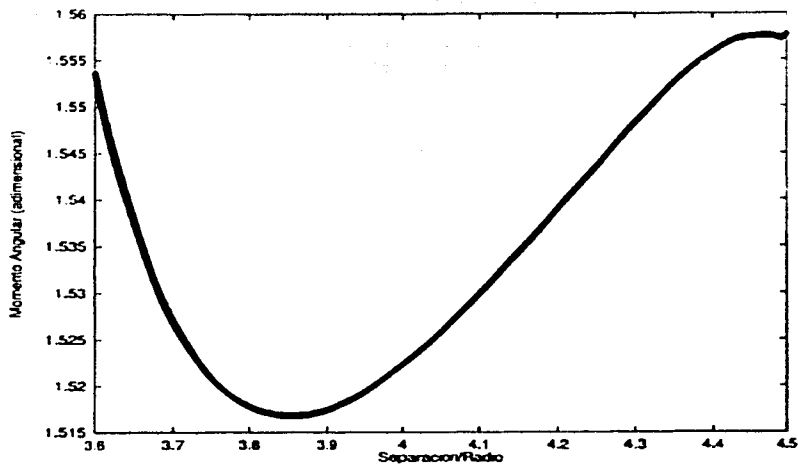


Figura 6.1: Momento angular total normalizado como función de la separación medida en radios estelares.

Cuando se tiene la configuración inicial de la binaria, nuevamente se permite que el sistema alcance un estado de equilibrio dejando que las dos estrellas interactúen gravitacionalmente, y después se inicia la corrida dinámica. La simulación comprende los primeros 60 segundos de la evolución de la binaria, y las posiciones de las partículas SPH se registran en 40 instantes distintos de ese periodo. Se utilizó una resolución de 4,224 partículas por estrella. La presión total del fluido, incorporada en el programa de la corrida dinámica, consistió de una presión  $P_{deg}$  debida a electrones degenerados y de una presión  $P_{term}$  debida a gas no degenerado:

$$P_{tot} = P_{deg} + P_{term} \quad (6.1)$$

La presión de degeneración  $P_{deg}$  está dada por la ecuación de Chandrasekhar, Ec. (4.3), y la energía interna  $U_{deg}$  correspondiente es [40, 3]

$$U_{deg} = \frac{A g(x)}{\rho}, \quad g(x) = 8x^3 \left[ (x^2 + 1)^{1/2} - 1 \right] - \varphi(x) \quad (6.2)$$

donde  $A = 6.01 \times 10^{22}$ ,  $\rho$  es la densidad,  $x$  es el parámetro relativista (4.1) y  $\varphi$  está dada por (4.4).

La presión térmica  $P_{term}$  está dada por la ecuación de estado de un gas ideal clásico escrita en la forma [3]

$$P_{term} = (\gamma - 1)\rho U_{term} \quad (6.3)$$

con  $\gamma = 5/3$ . La energía interna del gas no degenerado  $U_{\text{term}}$  se calcula por

$$U_{\text{term}} = U_{\text{tot}} - U_{\text{deg}} \quad (6.4)$$

donde  $U_{\text{tot}}$ , la energía interna total, evoluciona en el tiempo de acuerdo a la primera ley de la termodinámica:

$$\frac{dU_{\text{tot}}}{dt} = -P_{\text{tot}} \frac{dV}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (6.5)$$

y en donde  $V$  es el volumen y  $dQ$  es el calor generado por la disipación de energía cinética en choques. Las ecuaciones (6.1)-(6.5) se resuelven para la evolución temporal del sistema una vez que se han especificado condiciones iniciales.

La simulación del colapso de una enana blanca requirió el uso de una ecuación de estado compuesta, cuya forma se muestra a continuación:

$$P = \begin{cases} P_{\text{deg}}(\rho), & \rho < \rho_1 \\ K_2 \rho^{\gamma_2}, & \rho_1 < \rho < \rho_2 \\ K_3 \rho^{\gamma_3}, & \rho > \rho_2 \end{cases} \quad (6.6)$$

Se han empleado ecuaciones de este estilo en la modelación de explosiones de supernovas del tipo II [22]. Las cantidades en esta ecuación aparecen en la Tabla 6.2. Nuevamente,  $P_{\text{deg}}(\rho)$  es la presión dada por la ecuación de Chandrasekhar. Como se puede apreciar, la ecuación de estado (6.6) modela a la enana blanca como un politropo en dos regímenes de densidad distintos. La idea es que la estructura inicial esté representada por  $P = P_{\text{deg}}$ . El colapso se origina al cambiar la ecuación de estado a la de un politropo de exponente  $\gamma_2 = 1.3$ , cuando la densidad en el centro de la estrella es  $\rho_1$ , y prosigue hasta que se alcanza una "densidad de rebote"  $\rho_2$ . El valor de esta última provoca que se detenga la caída de material hacia el centro, y tiene como efecto el que cuando las capas internas llegan al núcleo, que se ha compactado súbitamente, éstas cambian el sentido de su movimiento, provocando choques con las capas externas que aún se están precipitando. La ecuación de estado utilizada en el régimen de densidad  $\rho > \rho_2$  corresponde a un politropo de exponente 5/3. Se hicieron tres corridas para tres valores distintos de  $\rho_2$ , según se muestra en la Tabla 6.2. Como en el caso de la binaria las posiciones de las partículas SPH se registran en 40 cuadros distintos. La resolución utilizada fue de 17,256 partículas.

## 6.3 Resultados

### 6.3.1 Sistema binario

En las Figuras 6.2a y 6.2b se muestra la evolución del sistema en distintos instantes. Los ejes coordenados corresponden al plano orbital de la binaria. La

Figura 6.2a muestra las posiciones de las partículas SPH, y la Figura 6.2b los contornos de densidad constante correspondientes. Las enanas blancas inician el proceso de fusión en  $t \approx 3$  s, ó 0.5 periodos orbitales.

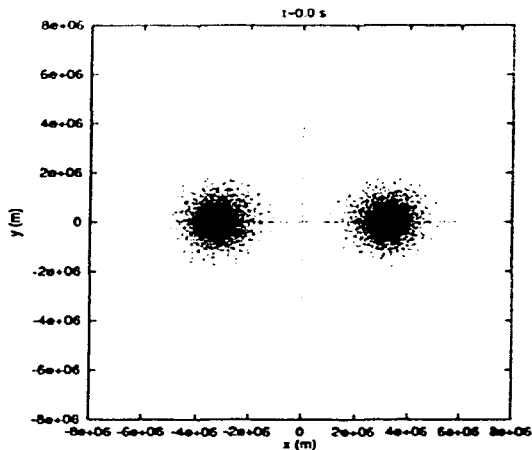


Figura 6.2a: Evolución del sistema binario de enanas blancas descrito en la Tabla 6.1. Se muestra la evolución hasta un tiempo  $t = 13.44$  s (ver páginas siguientes).

TESIS CON  
FALLA DE O

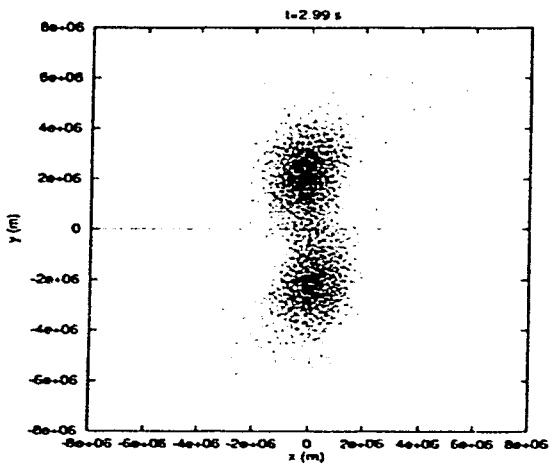
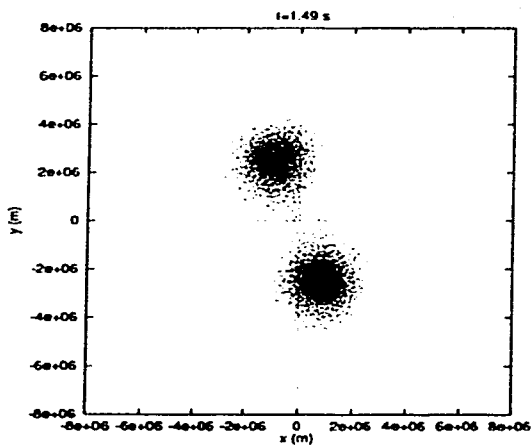


Figura 6.2a (continuación).

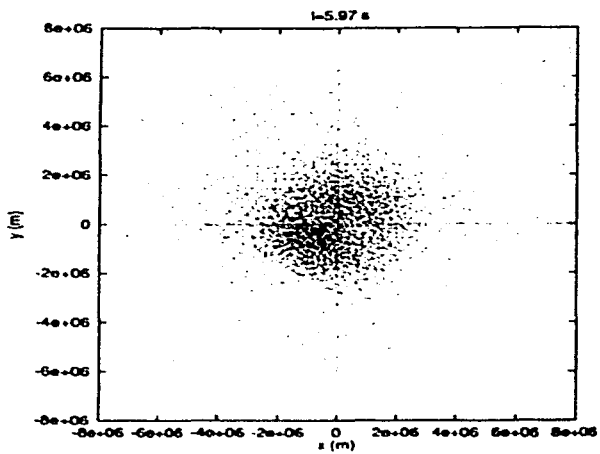
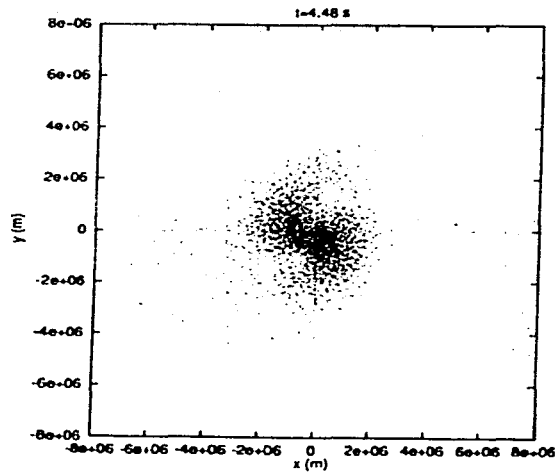


Figura 6.2a (continuación).

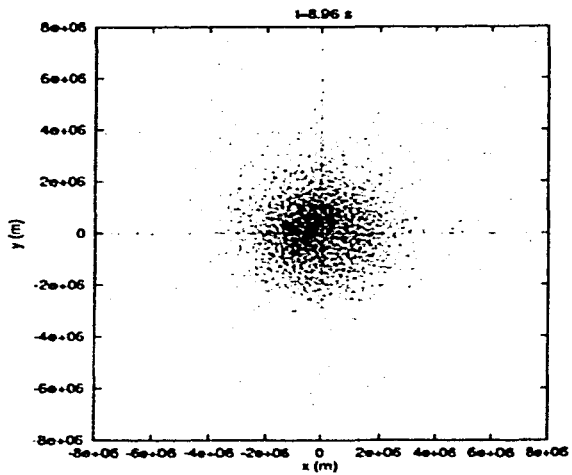
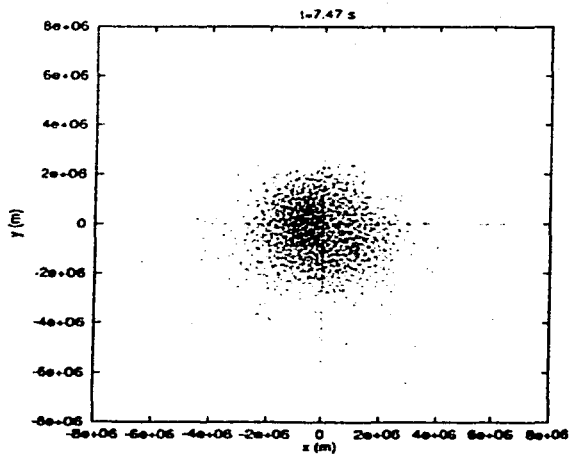


Figura 6.2a (continuación).

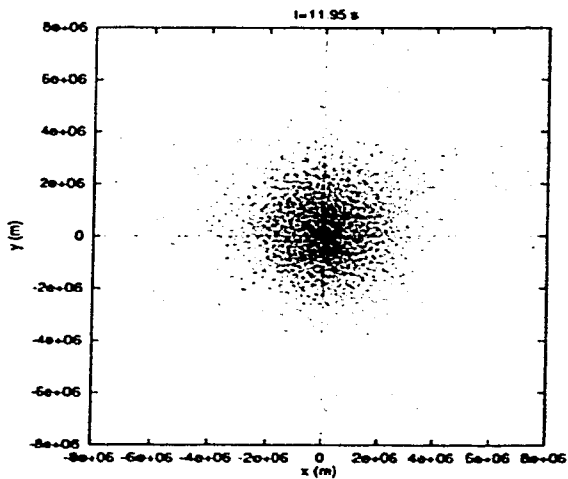
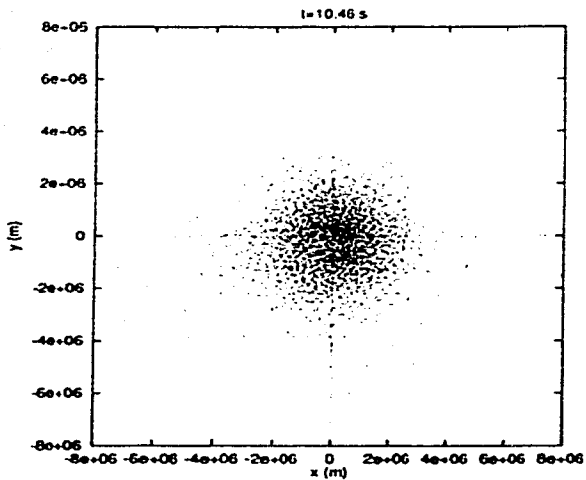


Figura 6.2a (continuación).

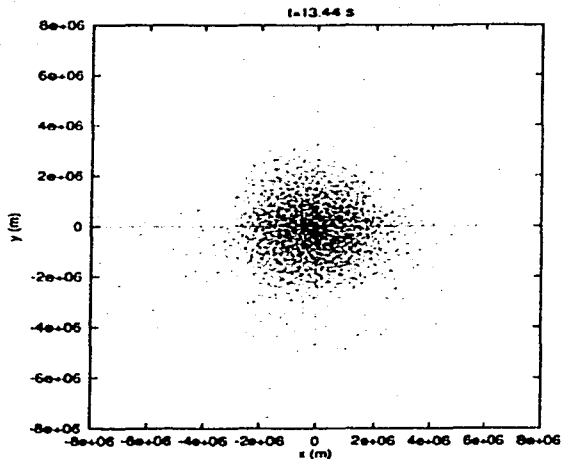


Figura 6.2a (continuación).

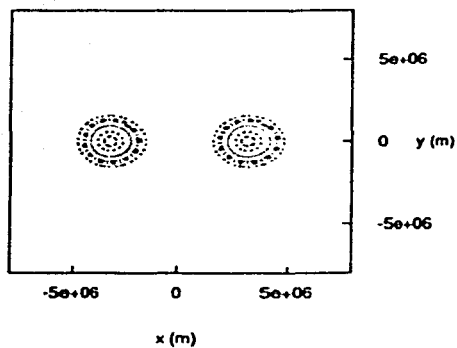
En la Figura 6.2a se observa que la unión de los núcleos de ambas estrellas ha dado origen a un objeto central denso rodeado de material disperso. Estas figuras muestran la evolución del sistema hasta un valor del tiempo físico  $t = 13.44$  s, instante a partir del cual ya no se distinguen cambios significativos en el objeto resultante, toda vez que la distribución de la envolvente que rodea al núcleo posee simetría azimutal, y sólo algunas partículas exteriores se desplazan a distancias paulatinamente mayores. La Tabla 6.3 muestra algunas de las características del núcleo formado en el objeto final. Más adelante se describe cómo se obtuvieron.

Propiedad	Valor aproximado
Densidad final ( $\text{kg m}^{-3}$ )	$8.3 \times 10^{11}$
Masa ( $M_{\odot}$ )	0.73
Radio (km)	500

Tabla 6.3: Características del núcleo formado al término de la coalescencia de las dos enanas blancas descritas en la Tabla 6.1.



$t=0.0$  s



$t=1.49$  s

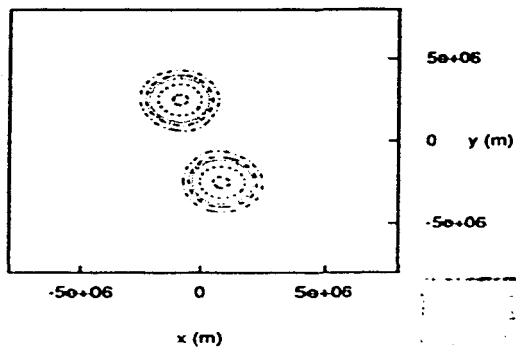
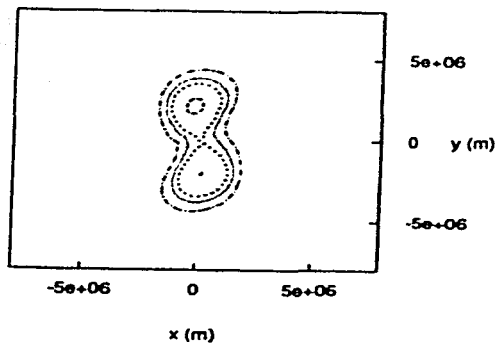


Figura 6.2b: Contornos de densidad constante correspondientes a la evolución mostrada en la Figura 6.2a. Los valores de la densidad para cada contorno, empezando por el exterior, son (en  $\text{kg m}^{-3}$ ):  $3 \times 10^{10}$ ,  $6 \times 10^{10}$ ,  $9 \times 10^{10}$ ,  $2 \times 10^{11}$ ,  $5 \times 10^{11}$ ,  $8 \times 10^{11}$ .

$t=2.99$  s



$t=4.48$  s

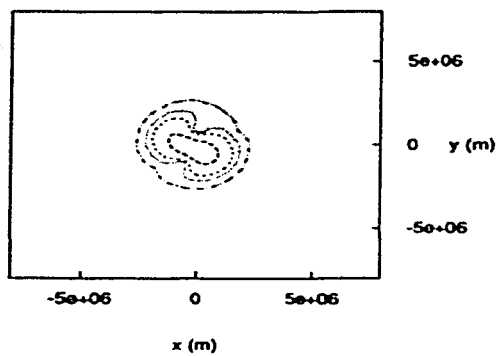
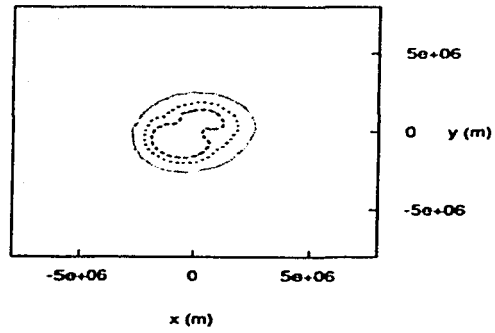


Figura 6.2b (continuación).

$t=5.97$  s



$t=7.47$  s

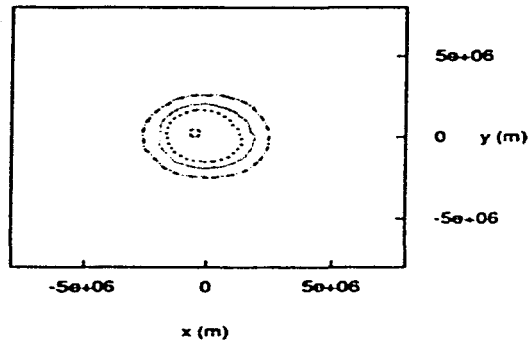
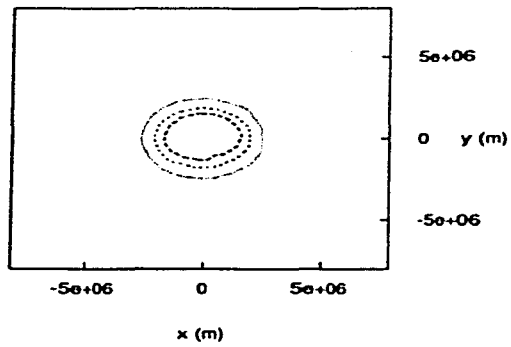


Figura 6.2b (continuación).

$t=8.96 \text{ s}$



$t=10.46 \text{ s}$

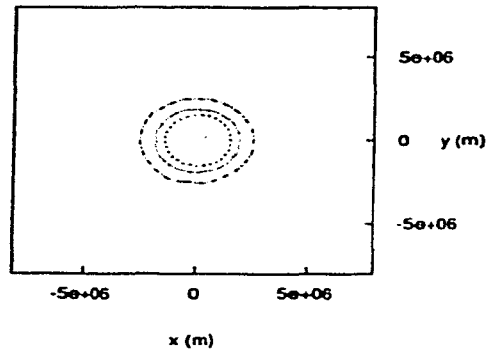
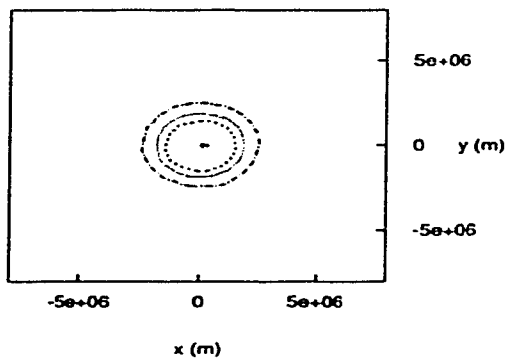


Figura 6.2b (continuación).

$t=11.95$  s



$t=13.44$  s

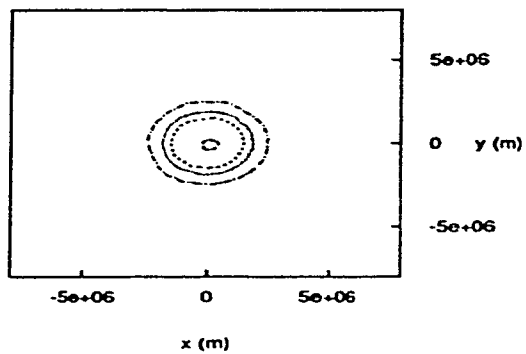


Figura 6.2b (continuación).

La Figura 6.3 presenta la separación entre los centros de masa de cada estrella como función del tiempo. Es evidente que el significado de tal separación deja de tener utilidad cuando las estrellas han comenzado a fusionarse, por lo que en la gráfica los valores de esta variable después de aproximadamente 5 s se pueden ignorar (aunque carecen de significado físico, estos valores aparecen graficados hasta 60 segundos porque el programa los incluyó en el archivo de salida correspondiente).

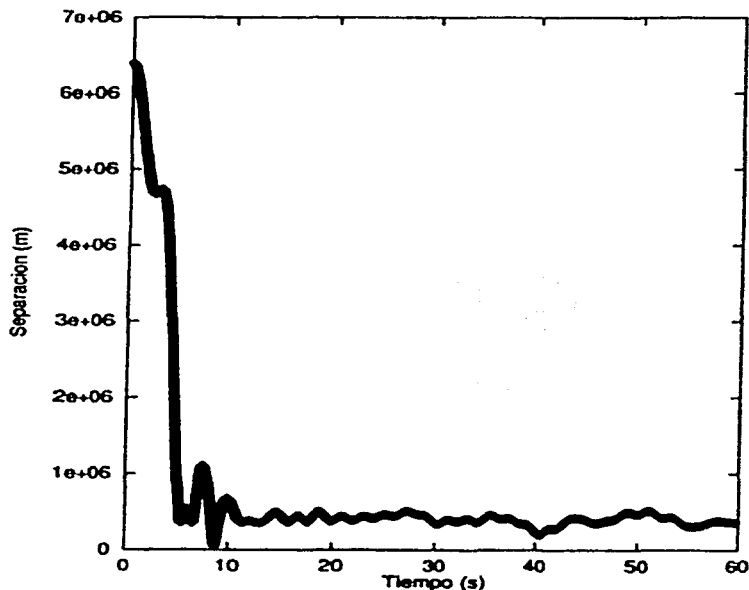


Figura 6.3: Separación entre los centros de masa de las enanas blancas del sistema binario, como función del tiempo.

En la Figura 6.4 se grafica la densidad máxima del sistema como función del tiempo. Al iniciar la simulación la densidad máxima disminuye hasta un valor mínimo, por efecto de la deformación sufrida por cada estrella como consecuencia de la atracción gravitacional de la otra. Posteriormente, hasta el final de la simulación, la densidad máxima aumenta cada vez más rápidamente, lo que significa que el núcleo se está compactando. El valor de la densidad máxima al

término de la corrida es aproximadamente  $8.3 \times 10^{11} \text{ kg m}^{-3}$ . El perfil de densidad del objeto final se presenta en la Figura 6.5. La masa del núcleo de este objeto es de alrededor de  $0.73 M_{\odot}$ , según se calculó por medio de un programa que permite sumar las masas de las partículas SPH contenidas dentro de un cierto radio. Este radio se tomó como el radio del núcleo, determinado según se describe al final de esta sección.

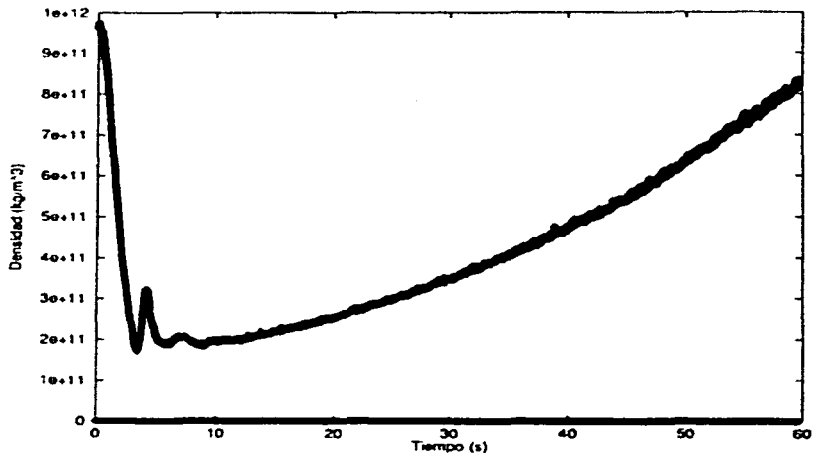


Figura 6.4: Densidad máxima del sistema como función del tiempo.

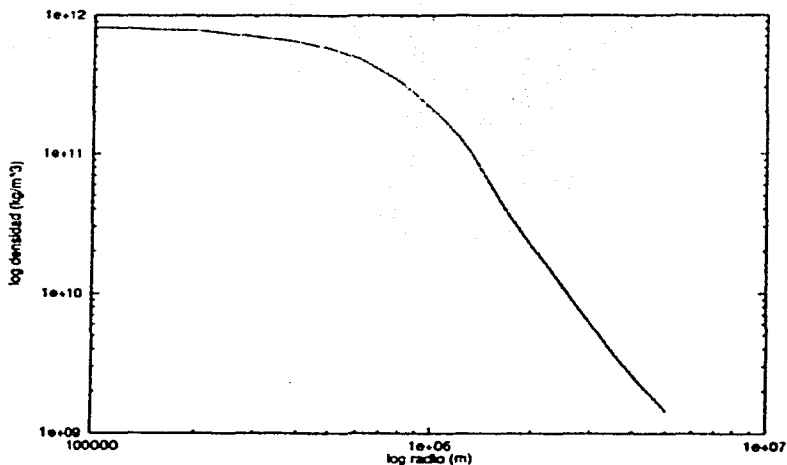


Figura 6.5: Perfil de densidad del objeto final, al término de la coalescencia del sistema binario.

La energía total del sistema consiste en energía interna total (energía de degeneración y energía de gas), energía cinética de elementos de masa macroscópicos y energía potencial. La conservación de esta energía total durante la simulación es apreciable, según se ve en la Figura 6.6, donde también se grafica la energía cinética. Sólo en los primeros segundos de la corrida hay una variación de 1.5% en la energía total. También se puede verificar que en este lapso la energía cinética experimenta un aumento y algunas oscilaciones, como consecuencia del reacomodo de las partículas al fusionarse las estrellas. Después, las velocidades de aquéllas disminuyen a un ritmo prácticamente constante.



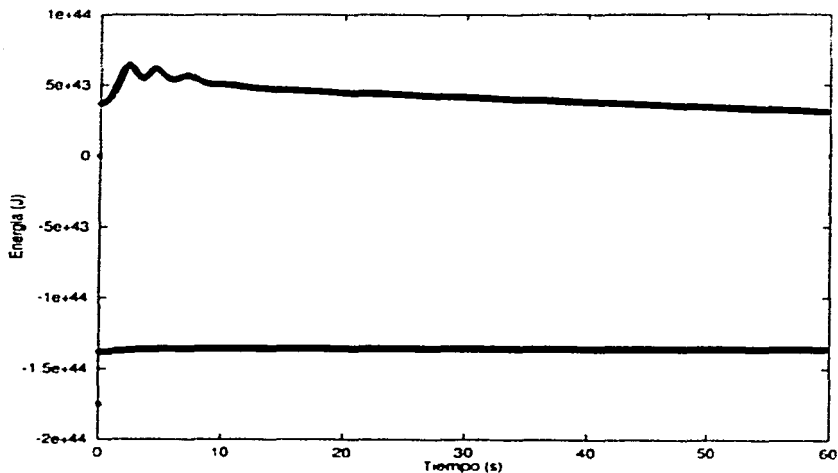


Figura 6.6: Energía cinética (curva superior) y energía total (curva inferior) del sistema binario como funciones del tiempo.

Una muestra clara de cómo al inicio de la simulación cada enana blanca se disgrega gravitacionalmente, y enseguida el objeto resultante tiende a ligarse cada vez más, se advierte en la Figura 6.7: la energía potencial del sistema aumenta casi 1.7 veces durante la coalescencia, y luego decrece monótonamente. La figura exhibe asimismo el comportamiento de la energía interna total, que inicialmente disminuye unas 2.6 veces debido a la reducción de la densidad y, por tanto, de la energía de degeneración, para posteriormente aumentar también monótonamente. La línea recta horizontal que aparece es el momento angular total del sistema, que como se ve es constante en la escala utilizada; varía a lo más en 0.14% a lo largo de la corrida. El momento angular orbital inicial se transfiere a la rotación del objeto fusionado. El cociente  $K/|W|$  entre la energía cinética y el valor absoluto de la energía potencial gravitacional se muestra en la Figura 6.8; el incremento de este cociente se debe al ligero aumento de  $K$  y la disminución de  $|W|$ . Al concluir el proceso inicial de coalescencia el comportamiento de ambas cantidades se invierte, y también el de su cociente.

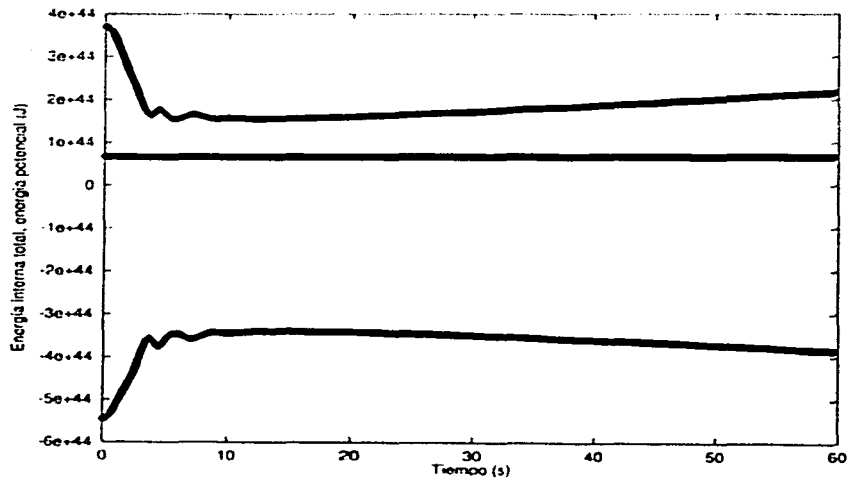


Figura 6.7: Energía interna total (curva superior), momento angular total (línea recta) y energía potencial (curva inferior) del sistema binario como funciones del tiempo.

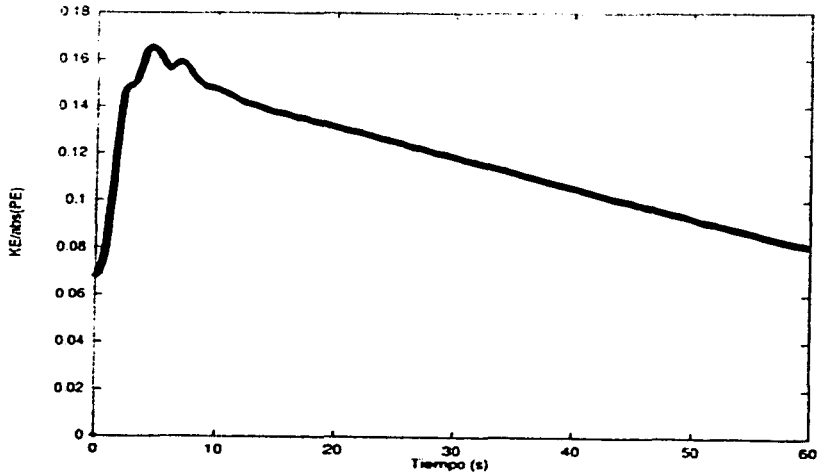


Figura 6.8: Cociente  $K/|W|$  del sistema binario como función del tiempo.

En la Figura 6.9 aparecen graficadas la energía interna térmica  $U_{term}$  (línea punteada), la energía interna de degeneración  $U_{deg}$  (línea rayada) y la suma de ambas (línea continua) como funciones de la coordenada  $x$  del plano orbital, al finalizar la simulación. Nótese que  $U_{deg}$  domina a  $U_{term}$  en el centro casi por completo, y que de ahí hacia afuera la primera disminuye a un ritmo considerable. Por otro lado,  $U_{term}$  aumenta levemente al aumentar la distancia al centro, y sobrepasa a  $U_{deg}$  a una distancia a la cual el material está más disperso, reflejando que la contribución de los efectos cuánticos se hace más pequeña.

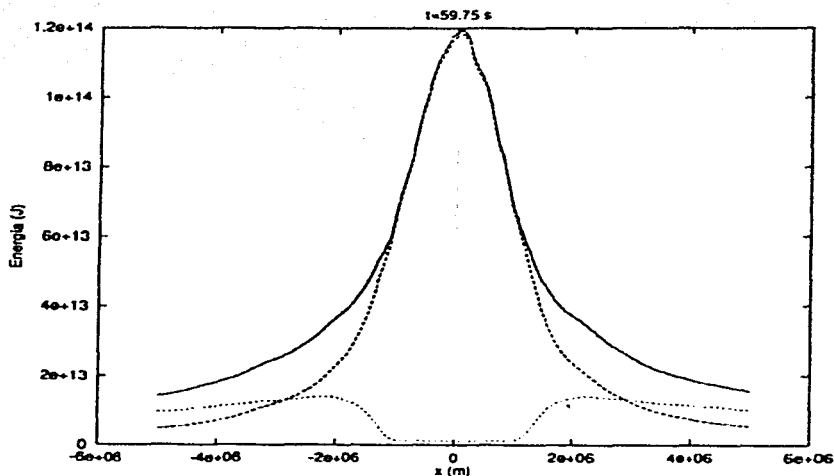


Figura 6.9: Energía interna térmica (línea punteada), energía interna de degeneración (línea rayada) y la suma de ambas (línea continua) a lo largo de la coordenada  $x$ , para el objeto final al término de la coalescencia del sistema binario.

Finalmente, la Figura 6.10 muestra cómo varían con el radio del objeto final la presión de degeneración  $P_{deg}$  (línea rayada), dada por 4.3, y la presión térmica  $P_{term}$  (línea punteada), dada por la ecuación de estado del gas ideal no degenerado. Esta gráfica permitió determinar que el radio del núcleo es aproximadamente 500 km, ya que tal es la distancia medida desde el centro a la cual la presión de gas aumenta abruptamente debido a la presencia de material no degenerado (la envoltura de baja densidad). Nótese que en el núcleo la presión total se debe prácticamente a la de degeneración, que es casi diez órdenes de magnitud mayor que térmica. Sin embargo, a un radio de 1,000 km ésta última ha aumentado tanto que ambas difieren en cuatro órdenes de magnitud, y a 2,000 km las dos presiones tienen el mismo orden de magnitud,  $10^{23} \text{ N m}^{-2}$ .

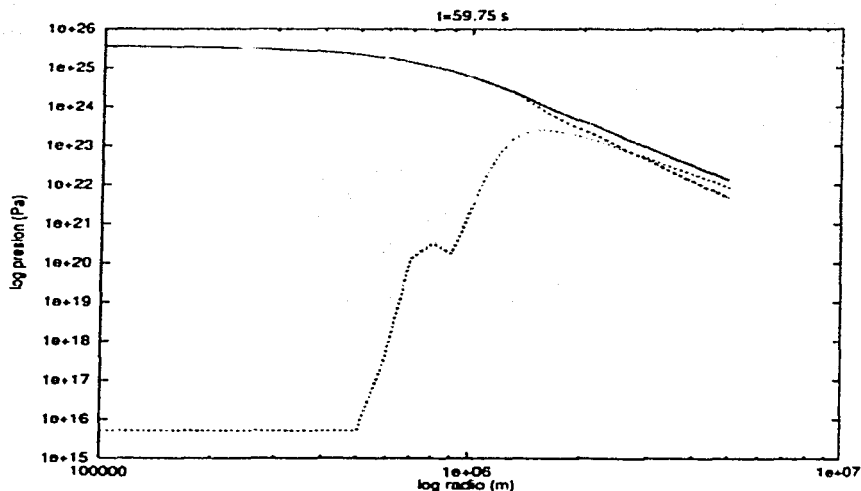


Figura 6.10: Perfil de presiones del objeto final. Se muestran la presión de degeneración (línea rayada), la presión térmica (línea punteada) y su suma (línea continua). Esta gráfica permitió estimar el radio del núcleo en aproximadamente 500 km.

### 6.3.2 Colapso de una enana blanca

La Figura 6.11 muestra algunos instantes durante el colapso de la enana blanca descrita en la sección anterior, con  $\rho_2 = 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$ . Se exhiben aquí los cuadros más significativos de la evolución. En  $t=0.377 \text{ s}$  la estrella aún se está contrayendo, y 29 ms después, en  $t=0.406 \text{ s}$ , se ha iniciado ya el rebote del material interno, como consecuencia del "endurecimiento" de la ecuación de estado (ver sección anterior). La expulsión de material de las capas externas prosigue hasta el final de la simulación, en  $t=1.391 \text{ s}$ , momento en el cual se pueden distinguir tres componentes del objeto final: un núcleo denso, una envolvente menos densa, y material disperso alrededor de los dos primeros. La evolución del sistema para los otros dos valores de  $\rho_2$  es esencialmente la misma, con la diferencia de que la simulación abarca un tiempo  $t=0.664 \text{ s}$  para la corrida 2 y  $t=0.449 \text{ s}$  para la corrida 3 (Tabla 6.4), debido a que en el código este tiempo está determinado por el tiempo de caída libre  $\tau_{cl} = (R^3/GM)^{1/2}$  del núcleo [ver Ec. (3.24)], que a su vez depende del radio  $R$  de éste, el cual varía en cada corrida. Los resultados de cada corrida aparecen en la Tabla 6.4.

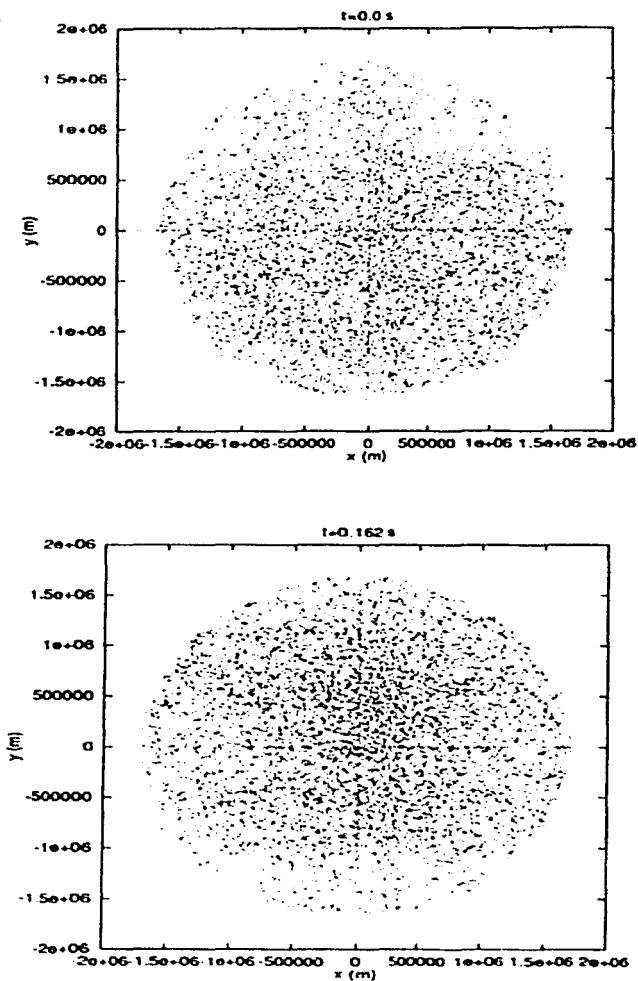


Figura 6.11: Colapso de la enana blanca descrita en la Tabla 6.2. Los cuadros mostrados corresponden a la corrida 1. El último cuadro ( $t = 1.391\text{ s}$ ) muestra el objeto final al término de la simulación.

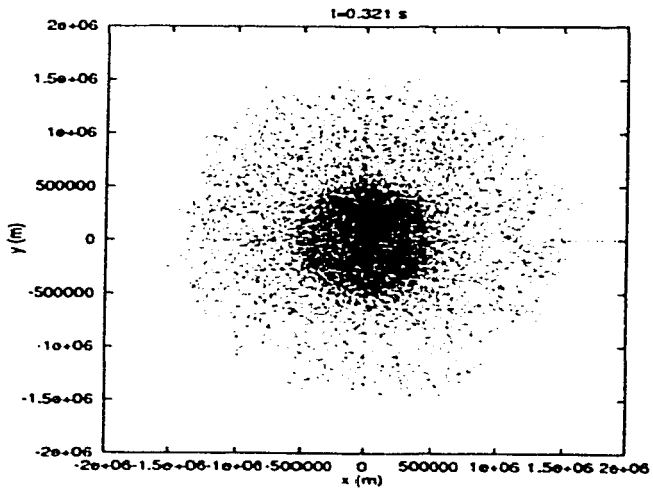
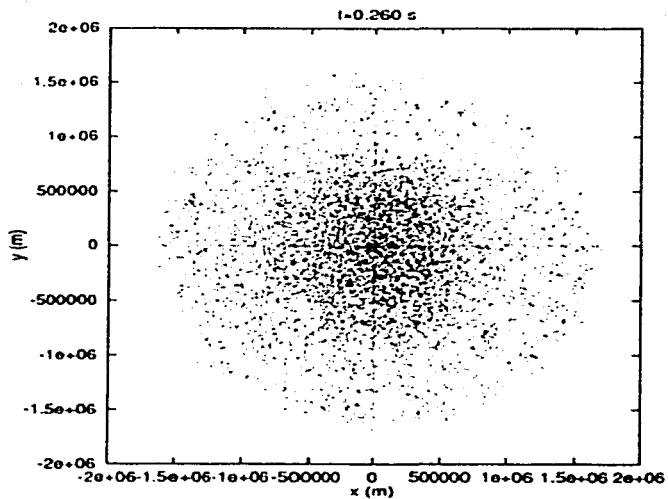


Figura 6.11 (continuación).

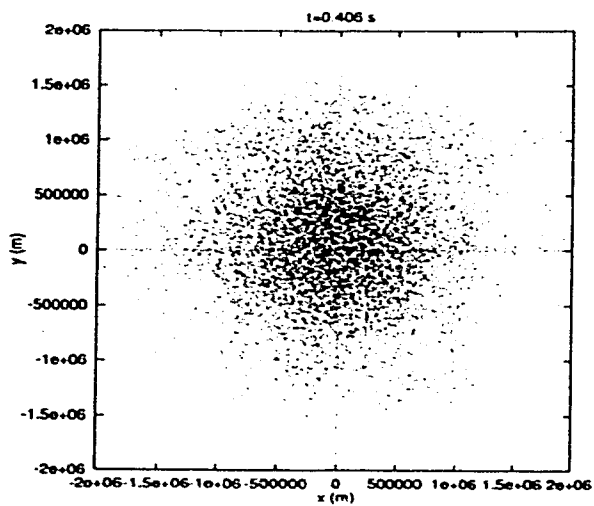
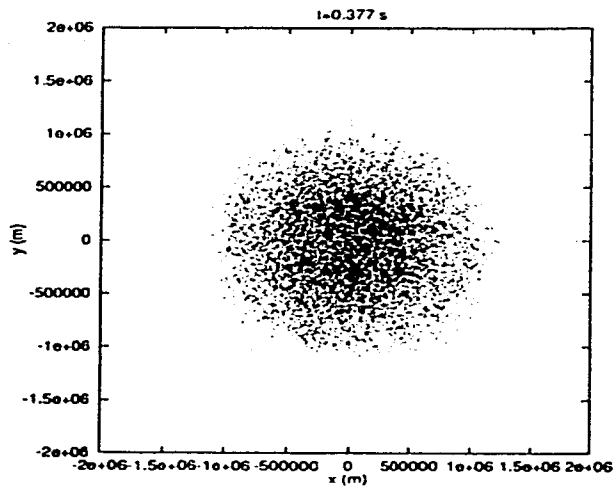


Figura 6.11 (continuación).



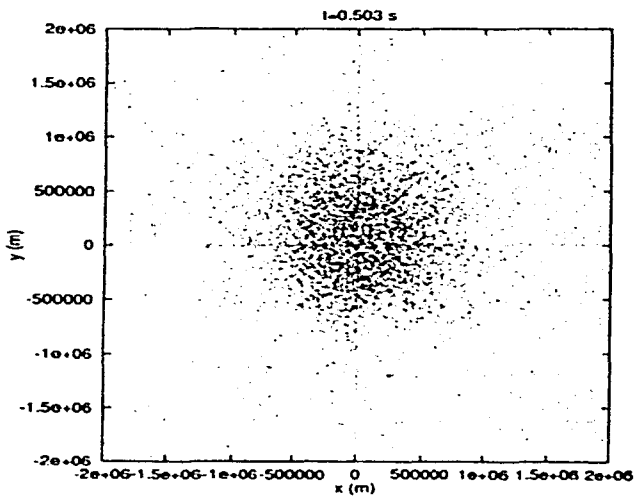
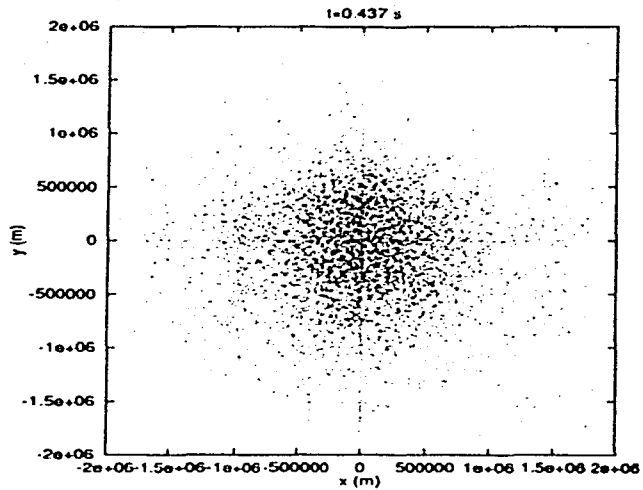


Figura 6.11 (continuación).

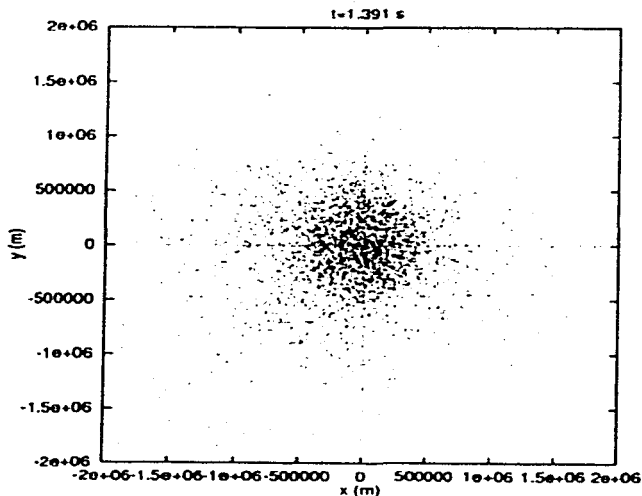


Figura 6.11 (continuación).

Cantidad	Corrida		
	1	2	3
Tiempo físico simulado (s)	1.391	0.664	0.449
Densidad final ( $\text{kg m}^3$ )	$2.2 \times 10^{13}$	$2.2\text{-}2.7 \times 10^{14}$	$2.2 \times 10^{15}$
Masa ( $M_{\odot}$ )	0.65	0.65	0.1
Radio (km)	300	100	30

Tabla 6.4: Características del núcleo formado en el objeto final al término del colapso de la enana blanca descrita en la Tabla 6.2.

Una manera de inferir el radio del núcleo degenerado al término de cada corrida es con ayuda de la Figura 6.12, en la que se grafican la energía interna de degeneración (curva continua) y la energía interna térmica (curva rayada) del objeto final como funciones de la coordenada  $x$ . Análogamente a lo que se hizo para el sistema binario, en el que se utilizó la presión térmica para estimar el radio del núcleo, la energía térmica de la enana blanca colapsada inicia un aumento de forma apreciable a una distancia de aproximadamente 300 km del centro en la corrida 1, a 100 km en la corrida 2 y a 30 km en la corrida 3. Como en el caso de la presión térmica en la binaria, este aumento en la energía térmica cada vez más lejos del centro se debe a la presencia de material gradualmente menos degenerado.

La masa  $M$  del núcleo se puede estimar usando la Figura 6.13, en donde se muestra la masa contenida dentro de un radio determinado en la enana blanca inicial (curva derecha, considerando distancias al centro menores que  $1.5 \times 10^6$  m) y en el objeto final (curva izquierda). Dados los radios del núcleo obtenidos a partir de la Figura 6.12 para cada corrida, la curva izquierda en la Figura 6.13 para la corrida correspondiente permite calcular la masa del núcleo en cuestión (sobre esta curva, a cada radio  $r$  determinado le corresponde una masa  $M$ ). Estas gráficas arrojan valores  $M \approx 0.65 M_{\odot}$  en las corridas 1 y 2, y  $M \approx 0.1 M_{\odot}$  en la corrida 3. Obsérvese que en esta última el objeto final contiene más masa dentro de radios pequeños en comparación con las otras dos corridas.

La densidad de la estrella como función del tiempo se exhibe en la Figura 6.14. Durante el colapso en la corrida 1 esta variable física aumenta en dos órdenes de magnitud y alcanza un valor máximo  $\approx 3.2 \times 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$  en  $t \approx 0.35$  s. El rebote se puede apreciar en la disminución de la densidad a casi la mitad de este valor máximo. Al final de la simulación la densidad se ha estabilizado en aproximadamente  $2.2 \times 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$ . En la corrida 2 el valor máximo es mayor, aproximadamente  $2.8 \times 10^{14} \text{ kg m}^{-3}$ , y aunque al terminar la simulación no se puede distinguir un valor estable, la densidad en las últimas décimas de segundo fluctúa entre  $2.2$  y  $2.7 \times 10^{14} \text{ kg m}^{-3}$ . En la corrida 3 el valor máximo de la densidad se da al finalizar la simulación, y es de alrededor de  $2.2 \times 10^{15} \text{ kg m}^{-3}$ . La densidad final aumenta en 1 orden de magnitud en cada corrida. Los valores máximos alcanzados de la densidad son ligeramente mayores que las correspondientes densidades de rebote  $\rho_2$  debido a que, aunque estas últimas sirven para detener al material que se está colapsando, algunas capas prosiguen su "caída" hacia el centro y compactan más al núcleo.

La Figura 6.15 presenta el comportamiento en el tiempo de los radios de distintas cáscaras de masa dentro de la estrella. Cada curva corresponde a una cáscara cuya masa se encuentra dentro de cierto intervalo (los intervalos se indican al pie de la figura). La curva superior representa una cáscara cuya masa está entre  $1.38$  y  $1.388 M_{\odot}$ , es decir, representa una cáscara que contiene casi toda la masa de la enana blanca. El colapso y el posterior rebote del material interior se aprecian claramente. Algunas cáscaras presentan oscilaciones decrecientes, y algunas otras (las exteriores), además, aumentan paulatinamente de tamaño. Estas oscilaciones se deben probablemente a que el material de estas cáscaras se ha calentado lo suficiente como para poder escapar de la fuerte atracción gravitacional del núcleo denso, pero en las cáscaras interiores esta atracción termina dominando, mientras que en las exteriores el material eventualmente escapará.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

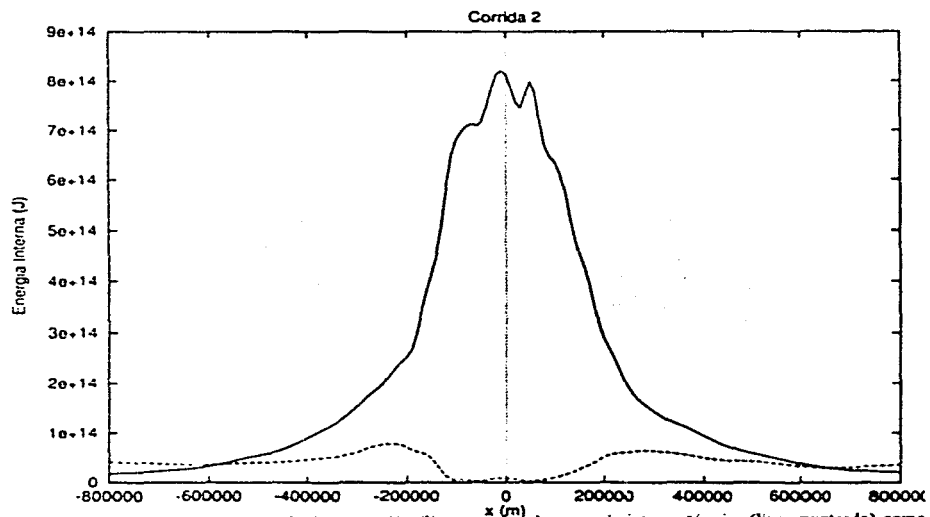
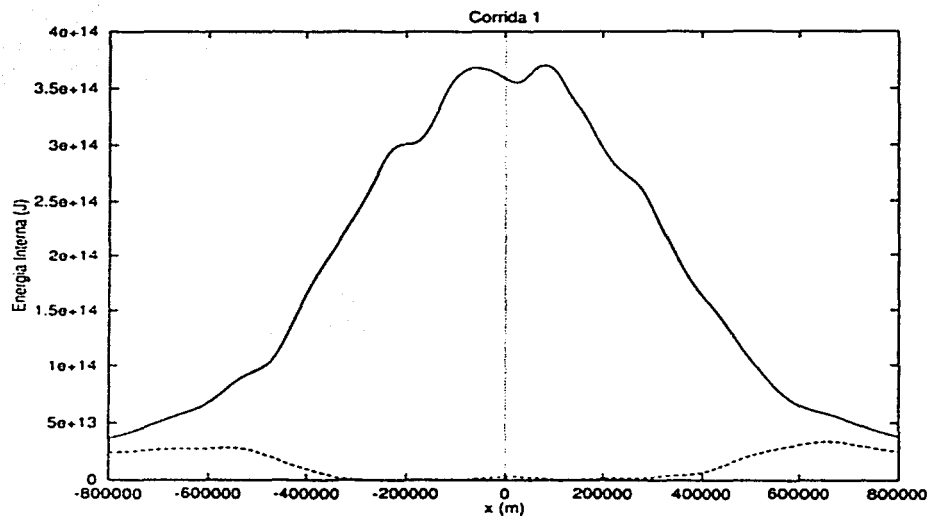


Figura 6.12 Energía interna de degeneración (línea continua) y energía interna térmica (línea punteada) como funciones de la coordenada  $x$ . Estas gráficas permitieron estimar el radio del núcleo del objeto final en cada corrida (ver texto). La energía térmica aumenta apreciablemente en presencia de material no degenerado que no pertenece al núcleo.

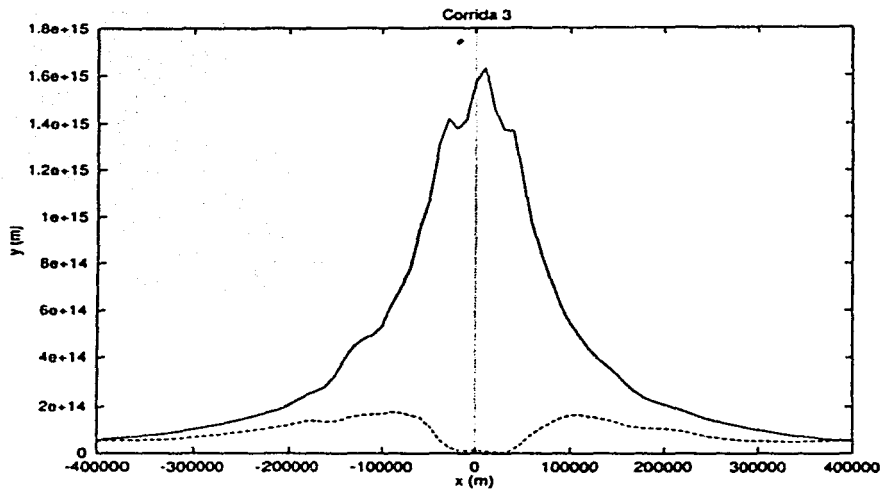


Figura 6.12 (continuación)

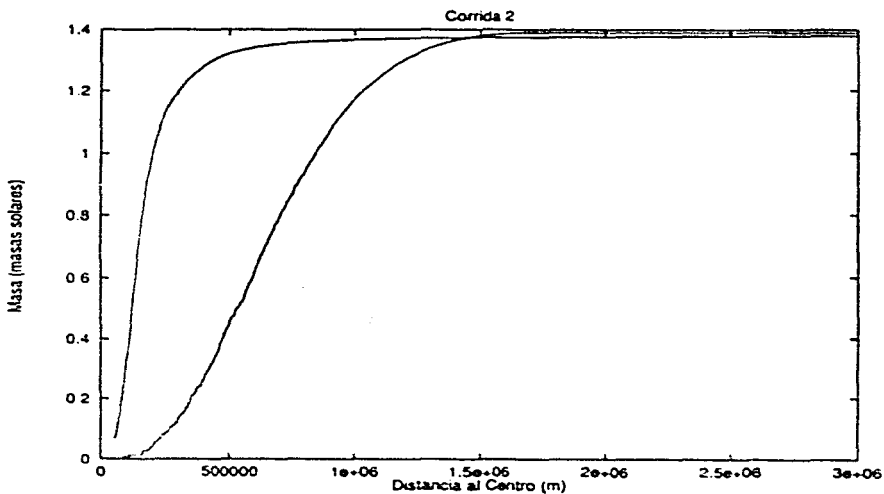
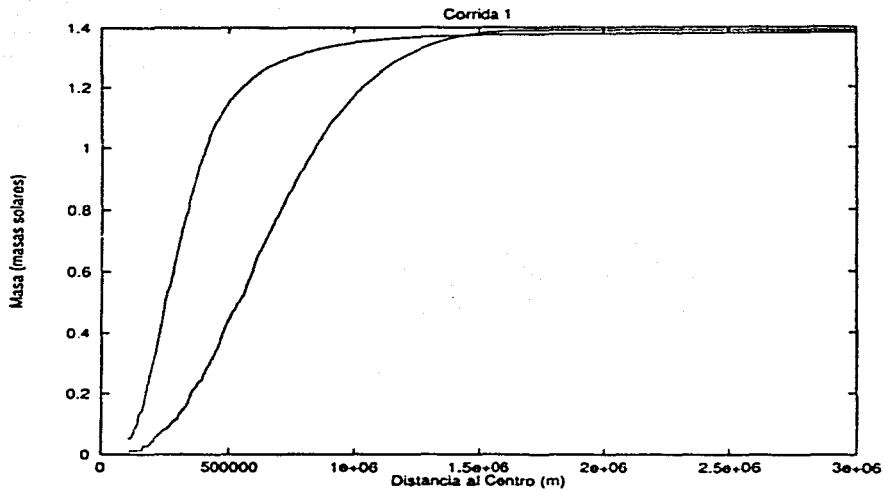


Figura 6.13 Masa como función de la distancia al centro para la enana blanca tricial (curva derecha) y para el objeto final (curva izquierda). Una vez estimado el radio del núcleo en cada corrida con ayuda de la Figura 6.12 se puede calcular su masa utilizando la curva izquierda en cada una de estas gráficas.

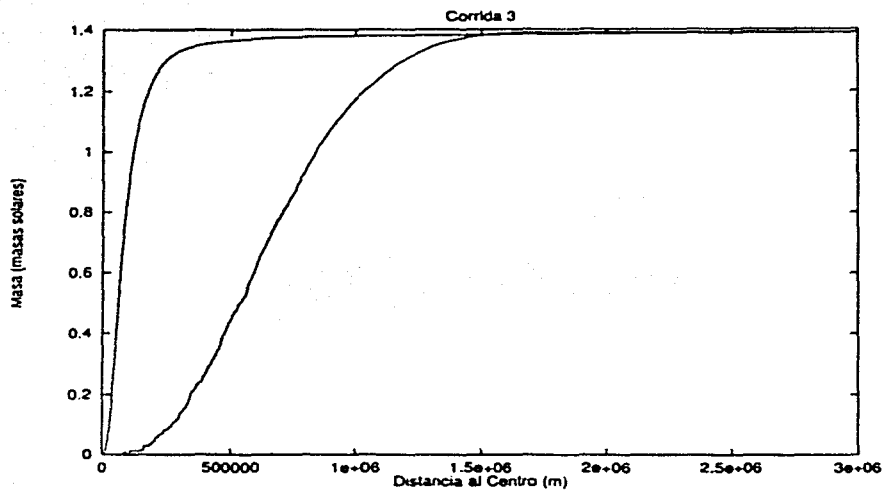


Figura 6.13 (continuación).

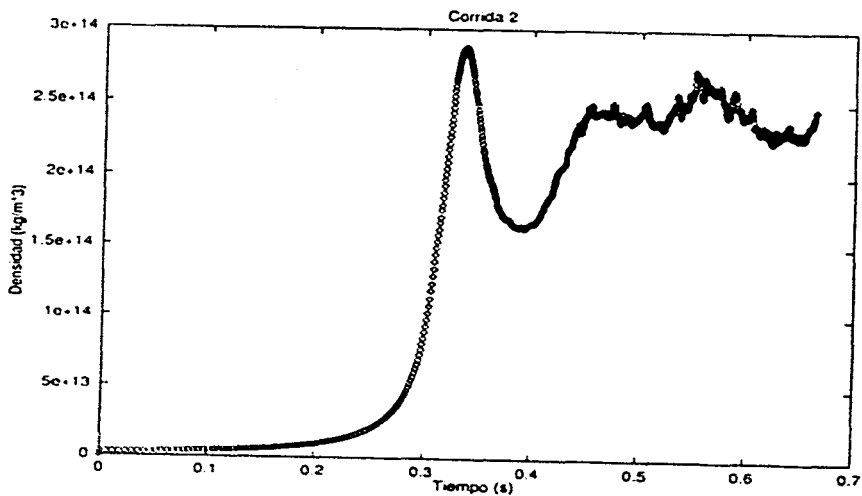
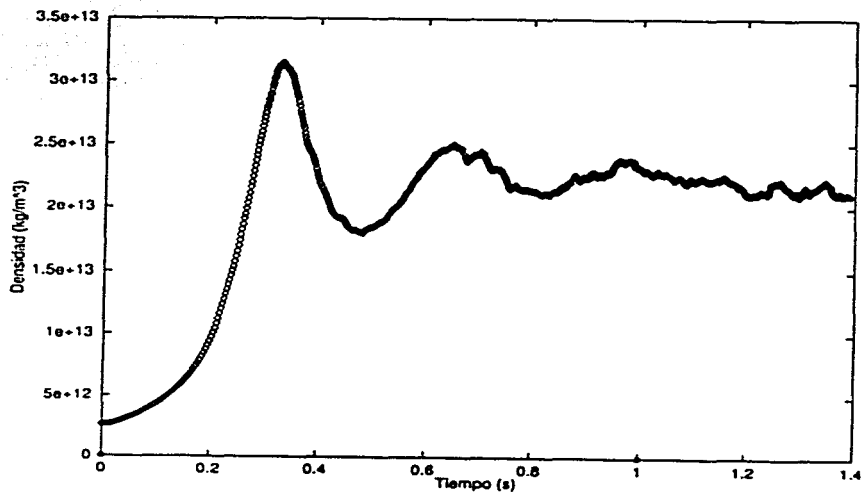


Figura 6.14 Densidad como función del tiempo. El tiempo físico es diferente para cada corrida porque, en el código, está determinado por el tiempo de caída libre de cada núcleo (ver texto).



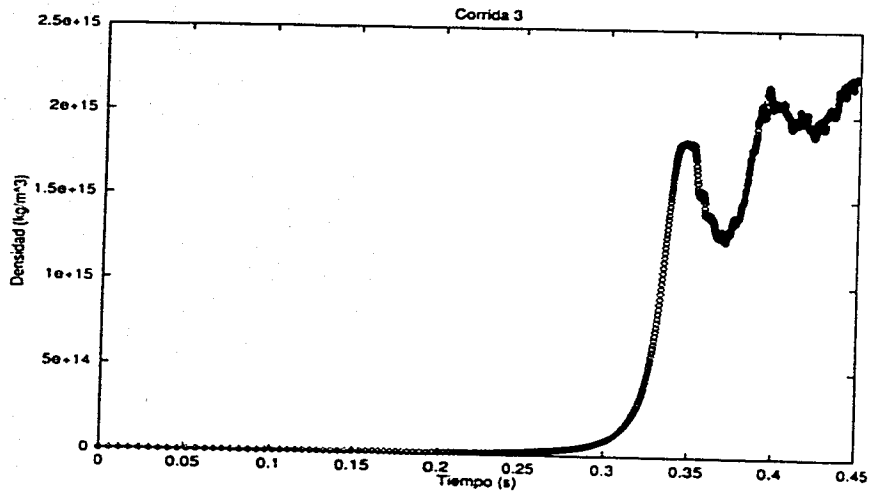


Figura 6.14 (continuación).

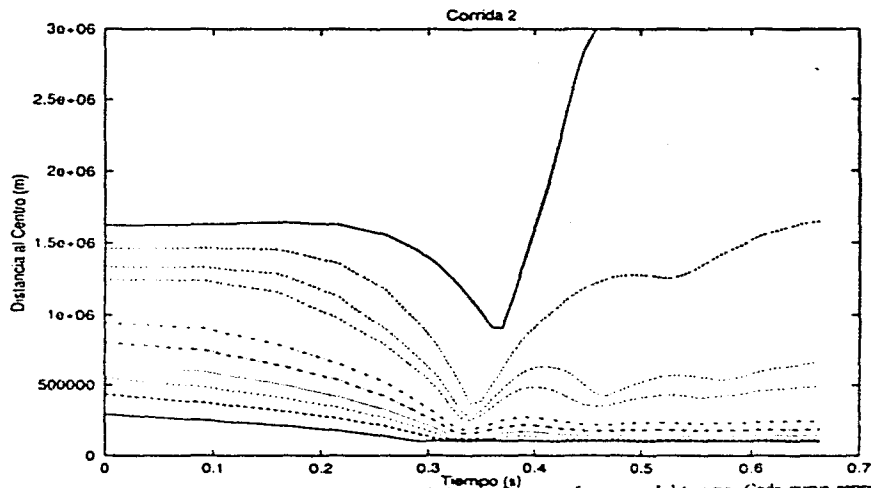
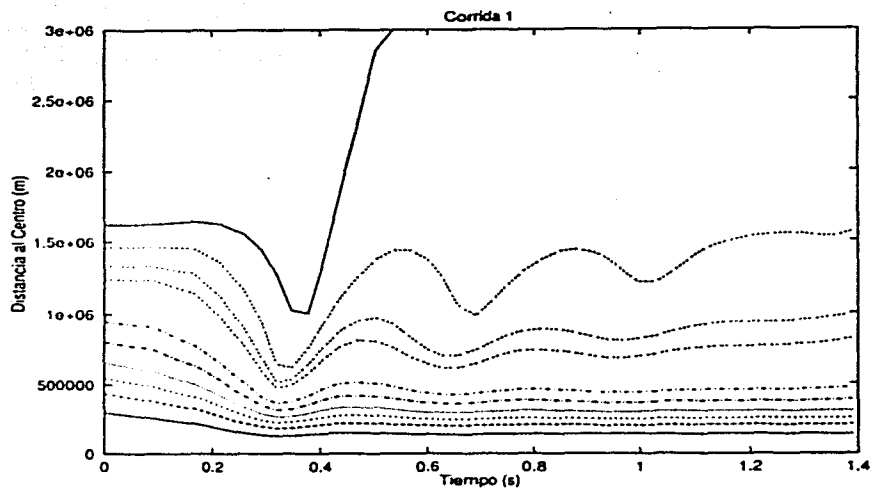


Figura 6.15 Radios de cáscaras de masa dentro de la estrella como funciones del tiempo. Cada curva representa a una cáscara cuya masa (en masas solares) se encuentra dentro de cierto intervalo de valores. Los intervalos son, comenzando por la curva inferior: 0.1-0.12, 0.3-0.32, 0.5-0.52, 0.7-0.72, 0.9-0.95, 1.1-1.12, 1.3-1.32, 1.33-1.35, 1.36-1.375, 1.38-1.388.

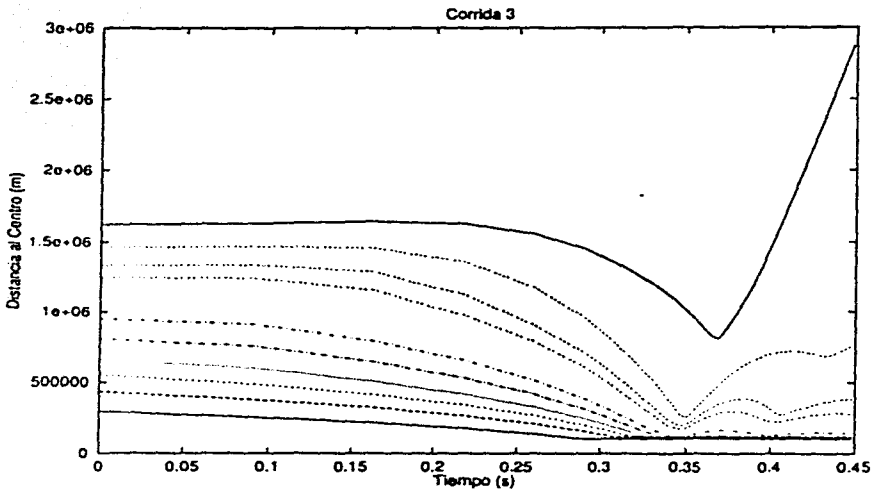


Figura 6.15 (continuación).

## Capítulo 7

# Comentarios y conclusiones

Se han presentado los elementos necesarios para comprender de una manera general la estructura de las enanas blancas y de las estrellas de neutrones. De especial importancia resulta entender la estadística de Fermi-Dirac, ya que la principal contribución a la presión en el interior de estos objetos compactos proviene de la degeneración de fermiones (electrones en el primer caso y neutrones en el segundo). Se conoce mejor la estructura de las enanas blancas que la de las estrellas de neutrones debido a que, a pesar de que en ambos tipos de objetos imperan condiciones extremas que son inalcanzables en los laboratorios, las densidades y las presiones a las que está sometida la materia dentro de las segundas son tan altas que todo el conocimiento que se tiene está sustentado en modelos teóricos, algunos de cuyos aspectos se ven confirmados observacionalmente en ocasiones.

Las simulaciones presentadas en esta tesis dan una muestra de la gran cantidad de información que es posible obtener cuando se recurre a métodos numéricos para resolver problemas en astrofísica. En particular, el uso de técnicas computacionales para modelar fluidos resulta indispensable si se considera que estos sistemas pueden poseer una complejidad considerable. Este es el primer trabajo en el que se simula un sistema binario de enanas blancas cuya masa ( $1.39 M_{\odot}$ ) está tan cercana al límite de Chandrasekhar ( $\approx 1.4 M_{\odot}$ ). Asimismo, este es el primer trabajo en el que se simula el colapso de una enana blanca tan masiva en tres dimensiones.

Para modelar la estructura de las enanas blancas en este trabajo se tomaron en cuenta diversos aspectos de la física subyacente. La hidrodinámica, incorporada en el código a través de la técnica SPH junto con las fuerzas gravitacionales, incluyó los resultados de una viscosidad introducida artificialmente para simular efectos de corte y de choques con números de Mach altos (ver Apéndice). Asimismo, las ecuaciones de estado utilizadas para describir la constitución interna de las enanas blancas y de los objetos resultantes de la evolución de cada sistema incorporaron tanto los efectos de la degeneración del material debida a las altas densidades como aquéllos originados en la ausencia

de degeneración.

Los objetos finales que se generaron al terminar cada simulación contienen un núcleo central denso. En ninguno de los casos se puede asegurar con certeza que el núcleo haya formado una estrella de neutrones, aunque en todos ellos el objeto es más parecido a una estrella de este tipo que a una enana blanca. El resultado de la coalescencia de las dos enanas blancas es un núcleo con una densidad aproximada de  $8 \times 10^{11} \text{ kg m}^{-3}$  y un radio de unos 500 km, características que lo sitúan aún lejos de las estrellas de neutrones, que como se mencionó al inicio del Capítulo 4 poseen densidades típicas de  $10^{17}$ - $10^{18} \text{ kg m}^{-3}$  y radios del orden de decenas de kilómetros. No obstante, al momento de terminar la simulación se aprecia que la densidad aumenta monótonamente, por lo que cabría esperar que si la simulación prosiguiera el objeto podría colapsarse en una estrella de neutrones; sin embargo, habría que modificar la ecuación de estado original (la ecuación de estado de Chandrasekhar) incorporada en el programa, e incluir una que permitiera obtener resultados físicamente significativos (ver Sección 4.2).

El colapso gravitacional de la enana blanca produce núcleos con densidades que van desde aproximadamente  $2 \times 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$  hasta  $2 \times 10^{15} \text{ kg m}^{-3}$  y radios desde 30 km hasta unos 300 km. De estos objetos el que más se acerca a una estrella de neutrones es el de la corrida 3 ( $\rho \sim 10^{15} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $R \approx 30 \text{ km}$ ).

Los trabajos futuros deberán incrementar la resolución de los códigos e incorporar modificaciones en las ecuaciones de estado. Específicamente, en la ecuación de estado compuesta (6.6) utilizada para el colapso sería pertinente aumentar la densidad de rebote  $\rho_2$  a valores del orden de la densidad nuclear, e incluso mayores. También sería útil explorar el efecto de variar el valor del exponente politrópico  $\gamma_3$ , que controla la "rigidez" del rebote.

Es necesario recalcar que los modelos de enanas blancas presentados aquí no son completamente realistas, ya que se han hecho un gran número de simplificaciones en su estructura para mostrar la utilidad de un código numérico específico. Por lo tanto, los resultados obtenidos no deben considerarse definitivos, y es menester realizar trabajos que incluyan aspectos físicos de complejidad creciente, tales como rotación de las enanas blancas y aquéllos derivados de la física nuclear, de procesos radiativos y de la relatividad general, por mencionar algunos.

## Apéndice A

# El método SPH

El método numérico conocido como SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) es un método lagrangiano en el que las fuerzas entre las partículas se evalúan directamente a partir de sus posiciones por interpolación. Inventado por Lucy [28] y por Gingold y Monaghan [17] para resolver problemas astrofísicos en los que estuvieran involucrados fluidos tridimensionales, SPH ha sido aplicado a diversos problemas, entre los que se incluyen la formación de la Luna [4], formación de galaxias [14], formación de estrellas [30, 31] y explosiones de supernovas [32]. El método es particularmente adecuado para simular flujos altamente distorsionados como los que ocurren en impactos o durante transferencia de masa, ya que tiene la ventaja sobre otros esquemas eulerianos de que cuando se quiere modelar vacíos grandes no es necesario mantener celdas disponibles en caso de que un poco de material se desplace hacia ellas. Por lo tanto, no se desperdicia memoria o tiempo de computación.

Las ecuaciones de movimiento que se utilizan en SPH corresponden básicamente a las de un problema de  $N$  cuerpos. Cada partícula se puede considerar como un elemento de fluido esférico con un perfil de densidad radial gaussiano. Las interacciones hidrodinámicas entre elementos de fluido dependen entonces de qué tanto se traslapan las partículas adyacentes. Las ecuaciones para la partícula  $i$  se pueden escribir:

$$\begin{aligned}\frac{dr_i}{dt} &= v_i \\ m_i \frac{dv_i}{dt} &= F_i^{\text{Grav}} + F_i^{\text{Hidro}}\end{aligned}\tag{A.1}$$

en donde  $r_i$ ,  $v_i$  y  $m_i$  son la posición, la velocidad y la masa de la partícula  $i$ , respectivamente, y  $F_i^{\text{Grav}}$  y  $F_i^{\text{Hidro}}$  denotan a la fuerza gravitacional y a la fuerza hidrodinámica.

La densidad del fluido en la posición  $r_i$  de la partícula  $i$  se calcula a partir de las masas y de las posiciones de partículas vecinas como un promedio local

pesado:

$$\rho(\mathbf{r}_i) \equiv \rho_i = \sum_{j \neq i} m_j W_{ij} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$W_{ij} = \frac{1}{2} [W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_i) + W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_j)], \quad r_k \equiv |\mathbf{r}_k| \quad (\text{A.3})$$

es el peso (o kernel) simetrizado que describe el perfil gaussiano de cada partícula. La *longitud alisadora*  $h_i$  es el diámetro de la partícula  $i$ , y el kernel de interpolación  $W$  está dado por [30]

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{h}\right)^3, & 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{r}{h}\right)^3, & 1 \leq \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0, & \frac{r}{h} \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

En general, el valor interpolado de cualquier función  $A(\mathbf{r})$  en la posición de la partícula  $i$  es

$$A_i = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W_{ij} \quad (\text{A.5})$$

El cálculo de la función  $A$  toma en cuenta qué tanto se traslapan los kernels de las partículas individuales y los suma en un punto determinado. El valor de la presión para cualquier partícula se obtiene a través de la ecuación de estado correspondiente.

La fuerza hidrodinámica  $\mathbf{F}_i^{\text{hidro}}$  está dada por

$$\mathbf{F}_i^{\text{hidro}} = - \sum_j m_i m_j \left( 2 \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij} \quad (\text{A.6})$$

El primer término incluye al gradiente de presión, y el segundo es una viscosidad artificial; se tiene

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \rho_{ij}, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\mu_{ij} = \frac{h_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2 + \eta^2 h_{ij}^2}$$

En este caso  $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ,  $c_i$  es la velocidad del sonido en la posición de la partícula  $i$ ,  $c_{ij} = \frac{1}{2} (c_i + c_j)$ ,  $\rho_{ij} = \frac{1}{2} (\rho_i + \rho_j)$ ,  $h_{ij} = \frac{1}{2} (h_i + h_j)$ , y  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\eta$  son constantes. Como se puede apreciar de la Ec. (A.7), la viscosidad contiene un término lineal en la diferencia de velocidades, lo que produce una viscosidad de corte, y un término cuadrático, para el caso de números de Mach grandes en choques.

Las longitudes alisadoras individuales  $h_i$  se ajustan durante una simulación de tal manera que cada partícula tenga un número aproximadamente constante  $\nu$  de vecinos. Esto tiene la finalidad de mantener una resolución espacial adecuada y de lograr que el nivel de precisión de las interpolaciones permanezca uniforme en todo el fluido.

El cálculo de la fuerza gravitacional  $F_i^{Grav}$  es la parte que consume más tiempo en un código de  $N$  cuerpos. Un cálculo directo requeriría un número de operaciones de  $O(N^2)$ ; esto es claramente ineficiente cuando el número de partículas llega a varios cientos. Además, el cálculo de las fuerzas hidrodinámicas para una partícula específica requiere de la determinación de todos los vecinos de esa partícula, es decir, se necesita identificar un mínimo de  $\nu$  partículas de un total de  $N$ . Una manera de solucionar este problema consiste en incorporar en el código lo que se conoce como una estructura de árbol binario, lo que reduce el número de operaciones a  $O(N \ln N)$ , y simultáneamente proporciona una lista de los vecinos hidrodinámicos para cada partícula. En la Figura A se muestran las curvas para  $N^2$  y  $N \ln N$ .

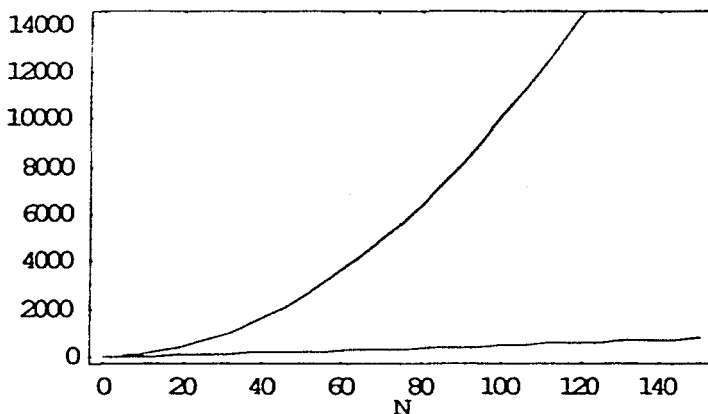


Figura A: Gráfica que muestra el número de operaciones que tienen que realizarse cuando las fuerzas gravitacionales entre partículas se calculan directamente (curva superior), y cuando se calculan utilizando un árbol binario (curva inferior; ver texto). En el primer caso, el orden del número de operaciones a realizar es  $N^2$ , y en el segundo caso es  $N \ln N$ . Las curvas mostradas corresponden a  $N = 150$ .

Primeramente, es necesario encontrar el vecino más cercano para cada partícula. El volumen en el cual están inmersas las partículas se divide en aproximadamente el mismo número de celdas tridimensionales. Para hallar el vecino más



próximo a la partícula  $i$ , se busca entre las partículas que están en la misma celda que  $i$ , y la partícula que se encuentre más cerca de ella se denomina por  $j$ . Después se compara la distancia  $r_{ij}$  con la mínima distancia desde  $i$  hasta las paredes de la celda,  $r_{i \text{ pared}}$ . Si  $r_{ij} \leq r_{i \text{ pared}}$  significa que se ha encontrado el vecino más cercano a la partícula  $i$ , y se hace la asignación  $\text{Vecino}(i)=j$ . Si esta condición no se cumple, entonces se identifica la pared más cercana a  $i$  y se toma en cuenta la celda adyacente. Nuevamente se compara la distancia  $r_{ij}$  de la partícula  $i$  a cada partícula  $j$  de la celda contigua con la mínima distancia de  $i$  a las paredes de la celda aumentada. Si se identifica al vecino de  $i$  entonces la búsqueda termina, y si no se repite el procedimiento.

Una vez que se ha encontrado al vecino más cercano de cada partícula se inicia la construcción del árbol binario. Se pretende formar pares de partículas en una nueva, llamada nodo. El criterio para hacer esto es que ambas sean vecinos más cercanos mutuos, i.e.  $\text{Vecino}(\text{Vecino}(i))=i$ . Si se satisface esta condición entonces se crea un nodo, el cual reemplaza al par de partículas y al que se le asignan las siguientes variables:

$$\begin{aligned} m_{\text{nodo}} &= m_i + m_j \\ r_{\text{nodo}} &= \frac{m_i r_i + m_j r_j}{m_i + m_j} \\ Q_{\text{nodo}} &= Q_i + Q_j + \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} r_i \otimes r_j \\ R_{\text{nodo}} &= \max \left( m_i \frac{r_{ij}}{m_{\text{nodo}}} + R_j, m_j \frac{r_{ij}}{m_{\text{nodo}}} + R_i \right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde  $Q_{\text{nodo}}$  es el tensor de momento cuadrupolar para el nodo. Cabe señalar que un nodo puede consistir de dos partículas, de una partícula y un nodo, o de dos nodos.  $R_{\text{nodo}}$  es el radio de una esfera que contiene todos los elementos (partículas y nodos) del nodo en cuestión.

Cuando se han considerado las  $N$  partículas, se forma una lista de todas las partículas que quedaron sin aparear y de todos los nodos nuevos. Entonces se lleva a cabo otra búsqueda de vecinos más cercanos usando esta lista y se repite el apareamiento hasta que sólo queda un nodo en el centro de masa de todas las partículas, con una masa igual a la masa total del sistema. Se ha creado así una estructura jerárquica en la que las partículas iniciales están en el nivel más bajo, y el nodo final se encuentra en el nivel más alto.

Para calcular las fuerzas gravitacionales sobre la partícula  $i$  se suman las contribuciones de: a) las partículas que están lo suficientemente cercanas a ella para considerarlas individualmente, y b) los agregados de partículas que se encuentran más alejados, los cuales se pueden describir en términos de su expansión multipolar hasta el término cuadrupolar. Para decidir si un agregado debe resolverse en sus partículas constituyentes se considera el cociente  $R/d$  entre el tamaño del agregado y su distancia a  $i$ . Si  $R/d \geq \delta$ , donde  $\delta$  es un parámetro que proporciona una precisión aceptable en el cálculo de las fuerzas, entonces el agregado se resuelve. Si la condición no se cumple, se calcula la contribución a la fuerza a partir de la expansión cuadrupolar. Otra condición para "abrir"

un nodo es que éste contenga partículas que son vecinos hidrodinámicos de  $i$ . En este caso, además de calcularse la contribución correspondiente de la fuerza  $F_i^{Grav}$ , también se obtiene una lista de los vecinos hidrodinámicos.

Con la lista de vecinos y la de nodos que no fueron abiertos se calcula la fuerza gravitacional total sobre la partícula  $i$  como

$$F_i^{Grav} = F_i^{particulas} + F_i^{nodos} \quad (A.9)$$

donde  $F_i^{particulas}$  es la contribución de las partículas consideradas individualmente y  $F_i^{nodos}$  es la contribución de los nodos no abiertos. La expresión para el primer término es

$$F_i^{particulas} = - \sum_{j=1}^N \frac{Gm_i m_j^{cont}}{r_{ij}^3} r_{ij} \quad (A.10)$$

donde

$$m_j^{cont} = \int_0^{r_{ij}} W(r, h) d^3r$$

es la fracción de  $m_j$  contenida en una esfera de radio  $r_{ij}$ . Si las partículas  $i$  y  $j$  no se traslapan (es decir, si  $r_{ij} > h_{ij}$ ) entonces  $m_j^{cont} = m_j$ , y la contribución de la fuerza a la partícula  $i$  es la de una masa puntual.

Para escribir el segundo término en (A.9) se realiza una expansión cuadrupolar del potencial gravitacional utilizando el tensor de momento cuadrupolar calculado para cada nodo en (A.8). Se tiene

$$F_i^{nodos} = \sum_{j=1}^{N_{nodos}} F_{ij}^{mon} + F_{ij}^{cuad} \quad (A.11)$$

donde el término monopolar es (se ha escrito  $r_{ij} = r$  y  $Q_j = Q$  por conveniencia)

$$F_{ij}^{mon} = -m_i m_j f(r) r \quad (A.12)$$

y el término cuadrupolar se expresa por

$$F_{ij}^{cuad} = -m_i \frac{f(r)}{r} Q \cdot r - \frac{m_i}{2} \left[ \frac{f(r)}{r^2} r \cdot Q \cdot r + \frac{f(r)}{r} \left( \text{tr } Q - \frac{r \cdot Q \cdot r}{r^2} \right) \right] r \quad (A.13)$$

En estas expresiones

$$f(r) = \frac{G}{r^3}$$

Una excelente exposición del método, junto con ejemplos descriptivos, se puede encontrar en [26] (referencia en la cual está basado este Apéndice).

# Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. y Stegun, I.A., eds., *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1964
- [2] Akmal, A., Pandharipande, V. R., y Ravenhall, D. G. 1998, *Physical Review C*, **58**, 1804.
- [3] Benz, W., Bowers, R. L., Cameron, A. G. W., y Press, W. H. 1990, *The Astrophysical Journal*, **348**, 647
- [4] Benz, W., Slattery, W. L., y Cameron, A. G. W. 1986, *Icarus*, **66**, 515
- [5] Bergeron, P., Kidder, K. M., Holberg, J. B., Liebert, J., Wesemael, F., y Saffer, R. A. 1991, *The Astrophysical Journal*, **372**, 267
- [6] Bowers, R. y Doeming, T., *Astrophysics I: Stars*, Jones and Bartlett Publishers, Inc., Boston, 1984
- [7] Bowers, R. y Doeming, T., *Astrophysics II: Interstellar Matter and Galaxies*, Jones and Bartlett Publishers, Inc., Boston, 1984
- [8] Callen, H.B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, segunda edición, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1985
- [9] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1967
- [10] Colgate, S. A., Petschek, A. G., y Kriese, J. T. 1980, *The Astrophysical Journal*, **237**, L81
- [11] Dar, A., Kozlovsky, B., Nussinov, S., y Ramaty, R. 1992, *The Astrophysical Journal*, **388**, 164
- [12] Davies, M. B., Benz, W., Piran, T., y Thielemann, F. K. 1994, *The Astrophysical Journal*, **431**, 742
- [13] Eggleton, P. P. 1983, *The Astrophysical Journal*, **268**, 368
- [14] Evrard, A. E. 1988, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **235**, 911

- [15] Frank, J. et al., *Accretion Power in Astrophysics*, segunda edición, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [16] Fryer, C., Benz, W., Herant, M., y Colgate, S. 1999, *The Astrophysical Journal*, **516**, 892
- [17] Gingold, R. A., y Monaghan, J. J. 1977, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **181**, 375
- [18] Greiner, W. et al., *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Inc., New York, 1995
- [19] Huang, K., *Statistical Mechanics*, segunda edición, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987
- [20] Hulse, R. A., y Taylor, J. H. 1975, *The Astrophysical Journal*, **195**, L51
- [21] Iben, I., y Tutukov, A. V. 1984, *ApJS*, **54**, 335
- [22] Janka, H.-Th., Zwerger, Th., y Mönchmeyer, R. 1993, *Astronomy and Astrophysics*, **268**, 360
- [23] Kaaret, P., y Ford, E.C. 1997, *Science*, **276**, 1386
- [24] Kalogera, V., y Baym, G. 1996, *The Astrophysical Journal*, **470**, L61
- [25] Kippenhahn, R. y Weigert, A., *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- [26] Lee, W. H. 1998, tesis doctoral, Universidad de Wisconsin, Madison
- [27] Lee, W. H., y Kluzniak, W. 1999, *The Astrophysical Journal*, **526**, 178
- [28] Lucy, L. B. 1977, *Astronomical Journal*, **82**, 1013
- [29] Monaghan, J. J. 1992, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **30**, 543
- [30] Monaghan, J. J., y Lattanzio, J. C. 1985, *Astronomy and Astrophysics*, **149**, 135
- [31] ——. 1991, *The Astrophysical Journal*, **375**, 177
- [32] Nagasawa, M., Nakamura, T., y Miyama, S. M. 1988, *PASJ*, **40**, 691
- [33] Narayan, R., Paczynski, B., y Piran, T. 1992, *The Astrophysical Journal*, **395**, L83
- [34] Page, D. P. 2002, comunicación privada.
- [35] Rasio, F. A., y Shapiro, S. L. 1992, *The Astrophysical Journal*, **401**, 226

- [36] Rasio, F. A., y Shapiro, S. L. 1994. *The Astrophysical Journal*, **432**, 242
- [37] Rasio, F. A., y Shapiro, S. L. 1995. *The Astrophysical Journal*, **438**, 887
- [38] Schwarzschild, M., *Structure and Evolution of the Stars*. Dover Publications, Inc., Nueva York, 1965
- [39] Segretain, L., Chabrier, G., y Moehkovitch, R. 1997. *The Astrophysical Journal*, **481**, 355
- [40] Shapiro, S. L. y Teukolsky, S. A., *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, John Wiley & Sons, Inc., 1983
- [41] Thorne, Kip S., *Black Holes and Time Warps, Einstein's Outrageous Legacy*, W.W. Norton & Company, 1994.
- [42] Usov, V. V. 1992, *Nature*, **357**, 472
- [43] Yungelson, L. R., Livio, M., Tutukov, A. V., y Saffer, R. A. 1994, *The Astrophysical Journal*, **420**, 336
- [44] Wolszczan, A. 1991, *Nature*, **350**, 688