



03003
6
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**MODELACIÓN COMPUTACIONAL DE UNA
ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA CON
APLICACIONES EN LA TEORÍA DE RIESGOS
FINANCIEROS.**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS.**

**P R E S E N T A :
NORA CUREÑO PEZA.**

DIRECTORA DE LA TESIS: DRA. SUEMI RODRÍGUEZ ROMO.

MÉXICO, D.F.

2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIA.

A LOS HEROES OLVIDADOS.

Porque no se cansan de luchar...por sus ideales de paz, de justicia y de libertad.

A MI ABUELA IRENE SALINAS GARCÍA.

Como un reconocimiento, por todo el amor que siempre nos diste,... porque aún te extraño, porque formas parte de ese pasado glorioso de México. Porque de esta forma quiero decir: Te amo Abuela, jamás te olvidaré. Porque me duele tu ausencia, pero me alienta tu recuerdo. Porque fuiste una gran persona.

A MI ABUELA NATIVIDAD PEZA CHAVARRIA.

Por su ejemplo de firmeza y entereza.

A MIS PADRES.

Por su apoyo incondicional. Los respeto y los quiero mucho.

A MIS HERMANOS OLGA, MARTÍN, GERARDO Y LULÚ.

Porque siempre están a mi lado.

A ARMANDO DÍAZ DE LEÓN HERNÁNDEZ.

Por todas las enseñanzas de valentía y decisión que me has dado. Por los matices de las cosas, que me has permitido redescubrir.

A MI MISMA.

Porque esta tesis es un logro muy importante, ya que con su culminación he podido asumir mi Arquetipo de Impetridad,.. mi Voluntad logradora.

AGRADECIMIENTOS.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

A la Máxima Casa de Estudios, por abrir horizontes de aprendizaje a todos los que tienen sed de conocimientos.

A MI DIRECTORA DE TESIS LA DRA. SUEMI RODRÍGUEZ ROMO.

Por todo el apoyo recibido en los momentos en que la culminación de esta tesis parecía no ser posible (en verdad, Muchas Gracias) y por el tiempo tan valioso que dedico a la supervisión de mi trabajo de tesis.

AL DR. VLADIMIR E. TCHIJOV.

Por las clases tan interesantes que siempre nos brindo y por ayudarme a salir adelante en los momentos difíciles que pase con respecto a esta tesis.

A MIS SINODALES: EL DR. VLADISLAV KHARTCHENKO, EL DR. FELIPE LARA Y EL DR. GUSTAVO AYALA.

Por sus aportaciones y sugerencias, tan valiosas que hicieron a mi tesis.

A MI QUERIDO AMIGO SERGIO RAMÍREZ GARCÍA.

Por su ayuda incondicional y todos sus consejos. Creo que si no hubiera sido por tus palabras de ánimo al comienzo de la Maestría, jamás lo hubiera intentado... Gracias.

A TLACATZIN STIVALET CORRAL.

Por brindarme su Filosofía, la cual le ha dado un nuevo giro a mi estancia en el Universo, como un fractal del mismo.

A MIS COMPAÑEROS DE LA MAESTRIA.

A Gustavo, David, Lucy, Victor e Hiram, por compartir conmigo sus experiencias, su amistad y sus conocimientos.

A MIS COMPAÑEROS DEL CENTRO DE CÓMPUTO.

Por su amistad y todo su apoyo.

TABLA DE CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN.	2
OBJETIVO	4
I. MARCO DE REFERENCIA: EL MERCADO DE DERIVADOS Y LAS OPCIONES.	5
Los Derivados Financieros.	5
Derivados	5
Derivados financieros.	5
Activos subyacentes	6
Origen y desarrollo.	6
Futuros de productos agroindustriales.	6
Futuros financieros.	6
Opciones.	6
Primeros intentos en México.	7
Las opciones.	8
Introducción a las opciones.	8
Terminología.	10
Los precios de las opciones al momento de expiración.	10
Determinación de los límites para una opción de compra.	11
La valuación de opciones.	12
REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.	19
II. ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.	20
Clasificación de Ecuaciones diferenciales estocásticas.	21
Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales.	29
Fórmula de Valuación para Opciones Financieras.	37
Integración Estocástica.	42
Aproximación a Integrales Stratonovich Múltiples.	43
REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.	46
III. APROXIMACIONES NUMÉRICAS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.	47
Método de Euler.	47
Métodos de Orden Superior.	48
Aproximación Discreta de Tiempo.	50
Esquemas Explícitos Fuertes de Aproximación.	51
REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.	53
IV. SIMULACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS EN FINANZAS.	54
Un acercamiento Langevin para fluctuaciones de precios : Efectos de la retroalimentación	54
El Modelo de Black y Scholes.	55

Modelo con volatilidad estocástica y dependiente-pasada.	57
Aproximación numérica.	58
REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.	60
V. SIMULACIÓN COMPUTACIONAL PROPUESTA PARA EL ACTIVO SUBYACENTE DE LAS OPCIONES TELMEX.	61
Propiedades estadísticas de la Volatilidad de las fluctuaciones de precios.	63
Análisis de las fluctuaciones de precios y la Volatilidad.	63
Cuantificación de la Volatilidad.	64
Generador de Números Aleatorios.	75
Generador de variables aleatorias discretas.	76
Generadores para Variables Aleatorias Exponenciales.	77
Método de Box-Muller.	77
El Método Polar Marsaglia.	77
El Proceso Wiener.	81
Simulación Computacional de la Solución de la Ecuación Diferencial Estocástica, para Aplicaciones en Finanzas.	87
Simulación de la Volatilidad Estocástica, usando una Integral Múltiple Stratonovich.	88
Trayectoria Muestral de la Ecuación Diferencial Estocástica.	92
REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.	98
ANEXO: RESULTADOS DEL PROGRAMA.	99
CONCLUSIONES.	108
BIBLIOGRAFÍA.	111

INTRODUCCIÓN.

La estimación y el control de los riesgos financieros se ha convertido en unas de las principales inquietudes de las instituciones financieras de todo el mundo. Los inversionistas requieren en todo momento de herramientas que les permitan visualizar y cuantificar el riesgo que se corre al momento de invertir en los diferentes productos del mercado. Por lo que uno de los pasos importantes en este sentido, debe ser el desarrollo de modelos matemáticos y herramientas teóricas adecuadas, así como sus implementaciones prácticas, siendo aquí donde el cómputo es una herramienta fundamental, ya que se requiere la implementación de programas de computadora que corran algoritmos complicados, que permitan la obtención de resultados aplicables en esta materia.

La eficiencia de las herramientas teóricas que tienen como finalidad la de tratar los problemas de los riesgos de control, la selección adecuada de la cartera y su correspondiente valuación dependen fuertemente de la correcta elección del modelo estocástico para describir las fluctuaciones del mercado.

Uno de los puntos importantes para la modelación matemática de las fluctuaciones de los precios, es el hecho de que éstos cambios pueden ser modelados como un **Movimiento Browniano**. Esta hipótesis así como alguna de sus variantes, constituyen el punto de partida de muchos de los resultados modernos de las matemáticas financieras, tales como el análisis de cartera de Markowitz, el Modelo de precios de activo-capital, y la fórmula de Black Scholes, los cuales constituyen paradigmas en este sentido.

Es importante mencionar que el proceso físico denominado *Movimiento Browniano* es descrito matemáticamente por el *proceso Wiener*, y que su simulación computacional será uno de los puntos a tratar en esta tesis. El Proceso Wiener, requiere para su modelación computacional, retomar el concepto de *caminata al azar*, y tal modelación, sería prácticamente imposible sin la ayuda de las herramientas de cómputo.

Uno de los productos financieros más interesantes del mercado está constituido por las **opciones**, ya que involucra una serie de variables que inciden en diferentes grados de riesgo, dependiendo de la opción, del período de vencimiento y de la cobertura. Las opciones financieras han sido estudiadas ampliamente en los mercados financieros internacionales, basta mencionar por ejemplo, el modelo Black- Scholes que plantea una ecuación para su valuación; sin embargo y a pesar de que esta ecuación basa su desarrollo en el cálculo estocástico, es planteada tomando como referencia la existencia de un *mercado estable*, situación que en la realidad no se presenta.

En México, el tema de las opciones es, en general, un campo de estudio virgen, ya que se comienza la configuración del Mercado Mexicano de Productos Derivados y de hecho, la única institución mexicana que se encuentra cotizando en opciones es Telmex. Por lo cual nos parece importante comenzar a presentar estudios referentes a las opciones financieras que, en algún sentido puedan aportar elementos de juicio en la consolidación de tal Mercado de Derivados.

La derivación de la fórmula de valuación de opciones propuesta por Black y Scholes, hace uso del cálculo estocástico o de Ito. Por lo cual, se considera importante dedicar en esta tesis, un espacio para la definición de dicha ecuación y el estudio del Cálculo Estocástico.

Ahora bien, se cuenta con los datos reales de los precios del subyacente de las opciones mexicanas de Telmex, que fueron recabados de los anuarios de la Bolsa Mexicana de Valores, por lo que se decide realizar algunos análisis previos a la simulación de las trayectorias de la ecuación diferencial estocástica propuesta por Black Scholes, con la finalidad de conocer la forma en la que se comportan los datos reales de dicho subyacente. Por lo cual, se toman los mencionados datos reales de los precios de las opciones en el Mercado Mexicano, y se comparan con los estudios realizados sobre el indicador internacional S&P 500. Aquí se realizan algunos programas de cómputo que permiten, a partir de algunos algoritmos propuestos en el artículo *Statistical properties of volatility of price fluctuations*¹, simular la ruta muestral que siguen los precios del activo subyacente de las opciones mexicanas de Telmex, por los años 1998 y 1999, así como observar las fluctuaciones de tales precios y la volatilidad asociada a estas fluctuaciones de precios.

Una vez analizadas las características estadísticas de los precios del subyacente de las opciones Telmex es posible, construir una teoría de los precios de las opciones consistente con estas características estadísticas. Para esto se define la ecuación de Black Scholes, principal modelo usado para la valuación de precios de las opciones y a partir de esta definición se plantean nuevos conceptos como volatilidad estocástica, principal punto, para la modelación de la ecuación diferencial estocástica.

Así pues, se propone una teoría "microscópica" de las fluctuaciones de precios (en lugar de un modelo estadístico) que puede ser más válido para la medición del riesgo. Se propone la utilización de una ecuación estocástica o de Langevin como un paso posible en esta dirección. La ecuación diferencial estocástica o de Langevin, es una forma de resolver el proceso estocástico del Movimiento Browniano, por lo que tomando como base el que el comportamiento de las fluctuaciones de los precios se asemeja a tal proceso estocástico, la

solución y por tanto la modelación de tal ecuación diferencial estocástica, es un punto importante en la formación de una teoría de riesgos financiera.

Para ello, se diseña un programa de computadora que permite la simulación del comportamiento de las fluctuaciones de precios y su correspondiente volatilidad, tomando como base el activo subyacente de las opciones financieras, a través de una ecuación diferencial estocástica, la cual es resuelta a través de aproximaciones de tipo numérico, de ahí la necesidad de allegarse de herramientas computacionales, para la consecución de tal fin.

La parte medular de este trabajo es pues, la modelación de tal ecuación diferencial estocástica, y la comparación con los datos reales de las opciones en México, por lo que para su modelación se hace uso de la programación en el Lenguaje Pascal, el cual fue elegido debido a su sencillez, su universalidad y su modularidad. Resaltando su transparencia en la estructura y la adaptabilidad de los programas.

OBJETIVO

Partiendo de lo anterior, podemos decir que la presente tesis tiene como objetivo, modelar la ecuación diferencial estocástica que Black y Scholes propusieron al presentar su modelo, aplicando para ello algoritmos computacionales que permitan su solución a través de aproximaciones numéricas y la consecuente simulación de su trayectoria muestral; tomando en consideración, el parámetro σ que corresponde a la volatilidad, y al cual se le asignará, primero un comportamiento en forma continua y luego, de manera estocástica. Esto es con la finalidad de poder realizar observaciones sobre estos resultados y comparaciones contra los datos reales de los precios del subyacente de las opciones Telmex, correspondiente a los años de 1998 y 1999.

En esencia, se tiene la hipótesis de que los datos que serán modelados considerando una volatilidad estocástica, deben tener un comportamiento equivalente, al aquel que siguen los precios reales del subyacente de las opciones Telmex durante el periodo 1998 y 1999.

I. MARCO DE REFERENCIA: EL MERCADO DE DERIVADOS Y LAS OPCIONES.

Para desarrollar el tema que ocupa la presente tesis se partirá, primero, de una modelación matemática que describa el comportamiento de los agentes financieros en el mercado de opciones, y, segundo, una vez planteado este problema, hacer uso de las herramientas de cómputo necesarias para el desarrollo de un programa computacional que permita la simulación de la solución de una ecuación diferencial estocástica, a través de métodos numéricos y cuyos resultados permitan la formulación de una teoría de riesgos financieros.

Pues bien, ya que se emplearan conceptos financieros, en el desarrollo de este trabajo, a continuación se presentan algunas cuestiones teóricas, que permiten al lector conocer algunos términos financieros que pueden interpretarse matemáticamente y que son indispensables para una adecuada comprensión de las cuestiones computacionales y matemáticas.

Los Derivados Financieros.²

Derivados

Los productos derivados son un conjunto de instrumentos financieros, cuya principal característica es que están vinculados a un valor subyacente o de referencia. Los productos derivados surgieron como instrumentos de cobertura ante fluctuaciones de precios de los productos agroindustriales, en condiciones de elevada volatilidad.

Derivados financieros.

A partir de 1972 se inicia el proceso mediante el cual se desarrollan instrumentos derivados financieros, cuyos activos subyacentes o de referencia son títulos representativos de capital o de deuda, índices, tasas y otros instrumentos financieros. Los principales derivados financieros son:

- Futuros
- Opciones
- Opciones sobre futuros
- Warrants
- Swaps

Activos subyacentes

Los activos subyacentes más utilizados en contratos de derivados financieros son: acciones individuales, canastas de acciones, índices accionarios, tasas de interés y divisas.

Los productos derivados son instrumentos que contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros; generando condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos.

Origen y desarrollo.³

Futuros de productos agroindustriales.

- Hacia principios del siglo XIX, los contratos de futuros se pactaban entre agricultores y comerciantes de granos de Chicago. La producción de las granjas a orillas del Lago Michigan estaba expuesta a bruscas fluctuaciones de precios, por lo cual los productores y comerciantes comenzaron a celebrar acuerdos de entrega a fecha futura, a un precio determinado.
- En 1848 se estableció el *Chicago Board of Trade* (CBOT), para estandarizar la cantidad y calidad del grano de referencia.
- En 1865 se negociaron en el CBOT los primeros contratos estandarizados. Desde sus inicios, se observó la necesidad de crear una Cámara de Compensación, a fin de asegurar el cumplimiento de las contrapartes.
- En 1874 se fundó el *Chicago Produce Exchange* para la negociación a futuro de los productos perecederos y en 1898 surgió el *Chicago Butter and Egg Board*. Ambas instituciones dieron origen al *Chicago Mercantile Exchange* (CME) que se constituyó como bolsa de futuros sobre diversos productos agroindustriales.

Futuros financieros.

El mercado de futuros financieros surgió de manera formal en 1972, cuando el CME creó el *International Monetary Market* (IMM), una división encargada de la operación de los futuros sobre divisas. A partir de 1982, se comenzó a negociar contratos de futuros sobre el índice *Standard & Poor's* y otros índices bursátiles, casi de manera simultánea en Kansas City, Nueva York y Chicago.

Opciones.

El mercado de opciones tuvo sus inicios a principios del siglo XX y tomó forma en la *Put and Call Brokers and Dealers Association*, aunque no logró desarrollar un mercado secundario ni contar con mecanismos que aseguraran el cumplimiento de las contrapartes.

El mercado formal de opciones se originó en el mes de abril de 1973, cuando el CBOT creó una bolsa especializada en este tipo de operaciones, el *The Chicago Board Options Exchange* (CBOE). Dos años más tarde, se comenzaron a negociar opciones en *The American Stock Exchange* (AMEX) y en *The Philadelphia Stock Exchange* (PHLX). En 1976 se incorporó *The Pacific Stock Exchange* (PSE).

Primeros intentos en México.⁴

- A partir de 1978 se comenzaron a cotizar contratos a futuro sobre el tipo de cambio peso/dólar, los que se suspendieron a raíz del control de cambios decretado en 1982.
- En 1983 la BMV listó futuros sobre acciones individuales y petrobonos, los cuales registraron operaciones hasta 1986. Fue en 1987 que se suspendió esta negociación debido problemas de tipo facultativo.
- El Gobierno Federal ha creado diferentes instrumentos híbridos de deuda, que incorporan contratos *forward* para la valuación de los cupones y principal. Entre los principales se tiene: Petrobonos (1977 – 1991), Pagafes (1986 – 1986), Tesobonos (1989 a la fecha), en el sector privado, se han emitido obligaciones y pagarés indizados.
- A principios de 1987 se reinició la operación de contratos diferidos sobre el tipo de cambio peso/dólar, por medio de contratos de Cobertura Cambiaria de Corto Plazo, registrados ante el Banco de México.
- Los Bonos Brady, resultantes de la renegociación de la deuda externa del sector público en 1989, incorporan una cláusula de recompra, que es una opción ligada al promedio de precio del petróleo Istmo.
- En la década de los noventa se negociaron contratos *forward* OTC (*over the counter*) sobre tasas de interés de títulos gubernamentales, pactados en forma interinstitucional, sin un marco operativo formal y fueron suspendidos a mediados de 1992.
- A fines de 1994 entraron en vigor las normas del Banco de México para la operación de contratos *forward* sobre tasa de interés interbancaria promedio (TIIP) y sobre el índice nacional de precios al consumidor (INPC), sujetos a registro ante el Banco Central y cumpliendo las normas del Grupo de los Treinta, para garantizar el control administrativo y de riesgo.
- A partir de octubre de 1992, se comenzaron a operar en la Bolsa Mexicana de Valores los Títulos opcionales (*warrants*) sobre acciones individuales, canastas e índices accionarios.
- Entre 1992 y 1994 se listaron en la Bolsa de Luxemburgo y la Bolsa de Londres diversos *warrants* sobre acciones e índices accionarios mexicanos.
- A finales de 1992 se inició la negociación de opciones sobre ADR's de Telmex L en *The Chicago Board Options Exchange*.

- En 1994 se operaban diversas opciones sobre acciones mexicanas en CBOE, AMEX, *New York Options Exchange* (NYOE), NYSE y PLHX, además de las bolsas de Londres y Luxemburgo. Simultáneamente, se celebraban contratos *forward* y *swaps* sobre tipo de cambio, tasas de interés y *commodities*, entre intermediarios extranjeros y entidades nacionales, sin reconocimiento ni protección jurídica.

El contrato de Telmex L resultó uno de los más exitosos de los últimos años. En 1993, en el CBOE, se operaron más de 30 mil millones de dólares sobre opciones Telmex, importe cercano a 50% de la operación total en acciones en la BMV, durante ese año. **Y son precisamente, las Opciones Telmex los índices financieros, de los cuales se hecha mano para realizar el desarrollo de la presente tesis.**

La Bolsa Mexicana de Valores y la S.D. Indeval, han emprendido el proyecto de implementar en México un mercado de futuros y opciones estandarizadas. Este mercado cubrirá un gran vacío en el sistema financiero mexicano, además de que contribuirá a incrementar la eficiencia de los mercados financieros de contado. La importancia de que países como México cuenten con productos derivados, cotizados en una bolsa, es destacada en organismos financieros internacionales como el *International Monetary Fund* (IMF) y la *International Finance Corporation* (IFC), quienes recomiendan establecer mercados de productos derivados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas.

El reto que se enfrenta al crear este tipo de mercado en un país cuya estabilidad económica no es muy alentadora y que inclusive se ha visto afectado seriamente por las fluctuaciones en los mercados internacionales, es grande.

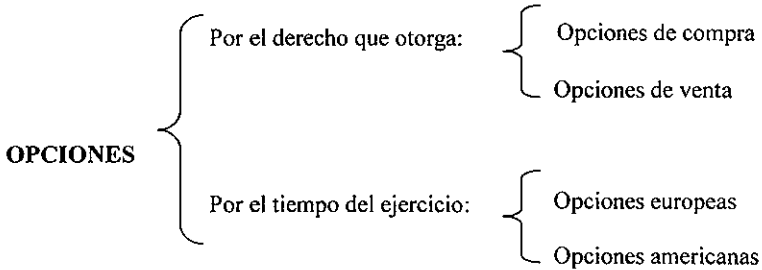
Retomando lo anterior, es importante, comentar, que en México, apenas comienza a definirse y establecerse el Mercado de Derivados, es por tanto, muy importante, el voltear la vista hacia estas situaciones y empezar a plantear, posibles soluciones matemáticas y computacionales de uno de los instrumentos financieros de mayor importancia a nivel internacional, como lo son, las **opciones financieras**.

Las opciones⁵.

Introducción a las opciones.

Una opción es un contrato que le da al tenedor o comprador, el derecho, más no la obligación, de comprar o de vender algún valor en una fecha predeterminada (o antes) y a un precio preestablecido.

Las opciones se clasifican de la siguiente manera:



Las opciones de compra le dan al tenedor de ésta, el derecho más no la obligación de comprar un valor hasta una fecha determinada y a un precio preestablecido. Generalmente este tipo de contratos, se usan con la finalidad de especular y obtener ganancias de las inversiones.

Las opciones de venta le dan al tenedor del contrato, el derecho más no la obligación de vender un valor, hasta una fecha predeterminada y a un cierto precio preestablecido. Este tipo de contratos, son usados a modo de cobertura, es decir, para asegurarse en contra de los posibles riesgos de pérdidas contra fuertes cambios en los precios de los valores sujetos del contrato.

En este tipo de instrumentos financieros, la pérdida potencial se reduce al precio del contrato de la opción, cuando el precio del subyacente baja considerablemente. Por el contrario, si el precio del subyacente sube, entonces las ganancias son ilimitadas.

Ahora bien, las **opciones europeas** sólo pueden ser ejercidas en la fecha del vencimiento del contrato, mientras que las **opciones americanas** pueden ejercerse en cualquier tiempo durante la vida de la opción, es decir, antes del vencimiento del contrato (su manejo es más complicado ya que incluye esta variable adicional de poder ejercerse en cualquier tiempo). Para cuantificar el valor de los contratos de opciones y el correspondiente riesgo asociado se deben distinguir los siguientes elementos:

Precio del ejercicio. Precio pactado que aparece en el contrato de opciones	(E)
Fecha de ejercicio. Fecha en que vence el contrato de opción, es decir, madurez de la opción o fecha de vencimiento.	(T)
Precio de la opción o prima. Importe que se deposita al momento de celebrar el contrato de opciones.	
Precio del valor subyacente. Precio del valor o acción.	(S)

Deben distinguirse los conceptos **dentro del dinero**, **exactamente en el dinero** y **fuera del dinero**.

$$\begin{array}{l}
 \text{Opción de compra (C)} \\
 \text{Opción de venta (P)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Dentro del dinero} \\
 \text{Exactamente en el dinero} \\
 \text{Fuera del dinero}
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 S > E \\
 E = S \\
 E > S, C = 0 \\
 \\
 E > S \\
 E = S \\
 S > E, P = 0
 \end{array} \right.$$

Si una opción se encuentra **dentro del dinero**, es porque tiene un valor positivo y podrá ejercerse, es decir se podrá proceder a la venta o a la compra dependiendo el tipo de opción que se trate. Si por el contrario se encuentra fuera del dinero, el contrato de opciones no se ejercerá.

Terminología.

S_T :	Precio de la acción en el período 1, fecha de expiración.
S_0 :	Precio de la acción el día de la emisión de la opción (hoy).
C_T :	Valor de la opción de compra a la fecha de expiración.
C_0 :	Valor de la opción de compra el día de la emisión del contrato (hoy).
P_T :	Valor de la opción de venta a la fecha de expiración.
P_0 :	Valor de la opción de venta el día de la emisión del contrato (hoy).
E :	Precio de ejercicio establecido en la opción.
T :	Fecha de expiración.
r :	Tasa de interés.

Los precios de las opciones al momento de expiración.

Las opciones de compra .

Las opciones de compra, generalmente se usan como instrumentos de inversión. Por lo que el precio de las opciones de compra al momento de su expiración, es la diferencia entre el valor de la acción y el precio de ejercicio pactado en el contrato de opciones. Por lo tanto, el precio de la opción al momento de la expiración del contrato, será la diferencia entre el precio de la acción al momento de expiración y el precio de ejercicio pactado en el contrato ($C_1 = (S_1 - E)$), siempre y cuando el contrato de opciones pueda ser ejercido.

$$Si S_1 > E \rightarrow C_1 = (S_1 - E).$$

Un contrato de opciones de compra no será ejercido cuando el precio de la acción al momento de expiración del contrato sea menor que el precio de ejercicio del contrato de opciones, por lo que las opciones se encuentran fuera del dinero y carecen de valor.

$$\text{Si } S_1 < E \rightarrow C_1 = 0.$$

Las opciones de venta

Las opciones de venta son instrumentos financieros que se usan, generalmente, a modo de cobertura, es decir, con el propósito de cubrirse ante posibles cambios de precios de los valores financieros.

Un contrato de opciones de venta tendrá valor siempre y cuando el precio de las acciones al momento de la expiración sea menor que el precio de ejercicio de las opciones. Esto asegura al vendedor de las opciones que tendrá el derecho de vender sus acciones a un precio por arriba de la cotización de las acciones.

$$\text{Si } S_1 < E \rightarrow P_1 = E * N^{\circ} \text{opciones}.$$

Por el contrario, un contrato de opciones de venta carecerá de valor siempre que el precio de las acciones al momento de expiración, sea mayor que el precio de ejercicio. Pero puesto que las acciones tienen un valor mayor que el precio de ejercicio, las ganancias serán considerablemente grandes.

$$\text{Si } S_1 > E \rightarrow P_1 = 0.$$

Determinación de los límites para una opción de compra.

Es posible determinar los límites para una opción de compra, con el conocimiento que se aplica en forma totalmente contraria para las opciones de venta. La determinación de estos límites, se hacen al momento en el que se realiza el contrato de opciones, es decir, al tiempo *cero* t_0 .

Límite superior.

Una opción de compra nunca puede valer más que lo que cuesta una acción. Una opción de compra siempre se venderá por debajo de la acción. Por lo que el límite superior es:

$$C_0 \leq S_0.$$

Límite inferior.

El valor de la opción de compra, tiene que ser igual o mayor que cero. Además, si el precio de la acción (S_0) es mayor que el precio de ejercicio (E), entonces el valor de la opción de compra vale al menos $S_0 - E$.

Por lo que:

$$C_0 \geq 0, \text{ si } S_0 - E < 0$$

$$C_0 \geq S_0 - E, \text{ si } S_0 - E \geq 0,$$

lo cual significa que el limite inferior sobre el valor de compra es 0 ó $S_0 - E$, cualquiera que sea mayor. El límite inferior es llamado **valor intrínseco** de la opción e indica lo que la opción valdría si fuera a expirar ahora. O sea, el día de la expiración, una opción vale su valor intrínseco.

OPCIONES CALL	
Límite superior	Límite inferior
$C_0 \leq S_0$	$0, S_0 - E$

Generalmente, la opción valdrá algo más antes de la expiración. Por lo cual, el área comprendida entre los dos límites inferior y superior, es el espacio de oportunidades dentro del cual se va a ubicar el precio de la acción.

La valuación de opciones.

La valuación de las opciones es un tema importante para los siguientes capítulos, ésta se relaciona con conceptos como neutralidad del riesgo, distribuciones *log-normales*, cálculo estocástico, funciones de probabilidad acumulada y el movimiento geométrico browniano, temas que abordaremos más adelante. En este punto, se apuntarán las dos fórmulas más usadas en la valuación de opciones: la fórmula de Black y Scholes, y el modelo Binomial, y luego se derivarán a través de una *derivación heurística*. Este punto es importante, ya que en los capítulos siguientes, especialmente en el capítulo medular que es la presentación del programa computacional se hace referencia a la fórmula de Black Scholes y a partir de ésta es que se plantea una ecuación diferencial estocástica.

Las formulas convencionales: Black y Scholes y Binomial.

La fórmula de Black y Scholes está diseñada para las opciones europeas, sea de compra o de venta. Así pues, la fórmula para la opción de compra es la siguiente:

$$(1.4.1) \quad C = S \times N \left\{ \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right\} - Ee^{-rT} \times N \left\{ \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right\},$$

mientras que el precio de la opción de venta es el siguiente:



$$(1.4.2) \quad P = Ee^{-rT} \times N\left\{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\} - S \times N\left\{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\},$$

donde σ representa la desviación estándar y σ^2 es la varianza de la serie histórica del precio de la acción subyacente (S); el resto de la simbología será definida en seguida.

Ahora bien, las formulas binomiales desarrolladas por Cox, Ross y Rubinstein, también para las opciones europeas se tiene:

$$(1.4.3) \quad C = e^{-rT} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!(k)!} p^k (1-p)^{n-k} \text{Max}[Su^k d^{n-k} - E, 0]$$

y,

$$(1.4.4) \quad P = e^{-rT} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!(k)!} p^k (1-p)^{n-k} \text{Max}[E - Su^k d^{n-k}, 0]$$

cuya simbología se definirá a continuación, a través de la *derivación heurística*.

La fórmula de Black y Scholes así como las fórmulas binomiales de Cox, Ross y Rubinstein, constituyen los modelos más usados en la valuación de opciones financieras, sin embargo, como se puede observar, sólo se enfocan a las opciones de tipo europeo y dejan de lado las opciones de tipo americano, debido a su complejidad, ya que estas pueden ejercerse en cualquier tiempo hasta antes del vencimiento del contrato. Esto es sin duda un indicador de que aún falta mucho por hacer en el campo de la modelación de estos índices financieros.

Una derivación heurística.

Partiendo de:

$$C_1 \equiv \begin{cases} S_1 - E, & \text{si } C \text{ está dentro del dinero} \\ 0, & \text{si } C \text{ está fuera del dinero} \end{cases}$$

Se puede decir, hasta el momento, que el valor de una opción de compra es la cantidad mayor entre el valor presente de la cantidad **dentro del dinero** en el vencimiento y cero. Es decir, lo que está expresado en el recuadro anterior. También puede representarse alternativamente como:

$$(1.4.5) \quad C = e^{-rT} \text{Max}[S_1 - E, 0].$$

En seguida se puede seguir un proceso que se lista en cinco pasos:

1. Definir un rango potencial que cubra los posibles precios de las acciones el día de la expiración de la opción.

2. Calcular el valor intrínseco con cada uno de los posibles precios estimados en 1.
Escoger solamente aquellos que acaben **dentro del dinero**.
3. Ponderar cada valor intrínseco positivo (encontrados en 2) por su respectiva probabilidad de ocurrencia.
4. Sumar todos los valores encontrados en 3.
5. descontar el valor total de 4 para expresarlo en valor presente.

Así pues, este proceso nos indica que el valor de una opción de compra es tan solo el valor presente de la suma de los posibles valores intrínsecos positivos ponderados cada uno por su probabilidad de ocurrencia.

Estos pasos son exactamente los que Black y Scholes y Cox, Ross y Rubinstein siguen para valuar las opciones de compra. Para apreciar mejor esta conexión se presenta la fórmula desarrollada por Cox, Ross y Rubinstein para las opciones de compra (1.4. 3), donde u es el valor de la acción en el período 1 cuando el precio de ésta sube y, d lo es cuando baja; n es el número de nodos del árbol, el que se definirá a continuación; k el subperíodo y p la probabilidad de ocurrencia.

La fórmula de Cox, Ross y Rubinstein sigue precisamente el mencionado procedimiento de cinco pasos ya que calcula, usando un diagrama de árbol, el valor presente de las posibles trayectorias que sigue el precio de una acción. Cabe señalar que puede haber un número importante de posibles precios de la acción el día de vencimiento. Por ello, es importante, describir el comportamiento del precio de las acciones de una manera razonable. En la medida en que sepamos como se comportan los precios de las acciones será más fácil obtener los parámetros u y d .

Ya que existen un número considerable de modelos que tratan de explicar la evolución de los precios de las acciones, el más popular sigue siendo el de que éstos están distribuidos de manera *log-normal*. La distribución continua con forma simétrica y de campana más común es la distribución normal. Sin embargo una función normal estandarizada tiene media de cero por lo que es muy difícil aplicarla a los precios de las acciones ya que los valores hacia la izquierda de la media serán negativos y los precios de las acciones nunca son negativos. Por esto se asume generalmente que dichos precios tienen una distribución *log-normal* (un logaritmo nunca es negativo) la cual es inclinada hacia la izquierda con media, mediana y moda diferentes.

Lo anterior significa que los logaritmos de los precios de las acciones siguen una distribución normal. Es decir, el rendimiento de las acciones sigue una distribución normal ya que los logaritmos de los precios de las acciones son aproximadamente igual al cambio porcentual de los mismos. Así pues, la distribución *log-normal* de los precios de las acciones no es otra cosa que afirmar que los cambios porcentuales de los precios de las acciones se distribuyen normalmente.

Por lo anterior, resulta entonces prudente pensar en que los precios de las acciones serán la media (o valor esperado) de una variable distribuida *log-normalmente*, más o menos (dependiendo de si sube o baja el precio) la desviación estándar de la misma. Esto significa que u es igual al valor medio del rendimiento de la acción más la desviación estándar y, por otro lado, d es igual al valor medio menos la desviación estándar. Lo que significa:

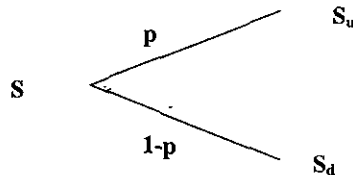
$$(1.4.6) \quad u = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma\sqrt{T} \quad \text{y} \quad d = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \sigma\sqrt{T}.$$

Por su parte, la probabilidad de alza o baja de p , se establece de acuerdo a la experiencia, la mayor parte de las veces p es pensada como 0.5. Estas definiciones de u , d y p , tienen sentido si se piensa que el precio de la acción puede cambiar, con igual probabilidad alrededor de una tasa de crecimiento promedio con una variación igual a una desviación estándar hacia arriba o hacia abajo.

Modelo Binomial.

El método que sigue este modelo es dividir el período de vigencia de la opción en un gran número de sub-períodos de tiempo Δt . En cada uno de estos sub-períodos, el precio puede tomar solamente dos valores (de aquí lo de binomial), uno a la alza (S_u) y otro a la baja (S_d) cada uno con cierta probabilidad de ocurrencia. Así pues, puede ilustrarse de la siguiente manera:

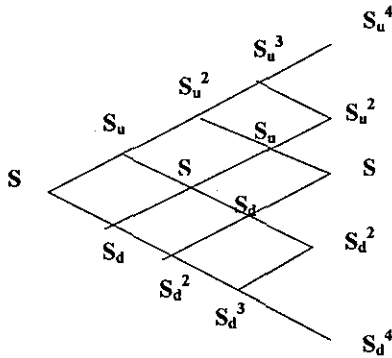
Movimientos del precio de la acción en el sub-período Δt



Donde p es la probabilidad de que el precio de la acción vaya a la alza y $(1-p)$ de que vaya a la baja. Si se asume que la tasa de descuento es la tasa libre de riesgo, y por ejemplo, existe un mundo neutral al riesgo, se impone la siguiente condición:

$$u = 1/d.$$

El método binomial consiste en adicionar el valor presente de todos los posibles resultados de los sub-periodos Δt . El árbol completo se presenta a continuación:



Se puede observar en esta gráfica que en el tiempo cero, el precio de la acción es conocido; al tiempo Δt , existen dos posibles precios, S_u y S_d , al tiempo $2\Delta t$ hay tres posibles precios S , S_u^2 y S_d^2 ; y así sucesivamente (se puede ver que los sub-periodos se miden verticalmente en las bifurcaciones de los precios). En general, al tiempo $i\Delta t$ se consideran $i+1$ precios de acciones. Estas son:

$$(1.4.7) \quad S_{u,d}^{j+1}, j = 0, 1, \dots, K, i.$$

Se puede observar que se usa la relación $1/d$ para calcular el precio de la acción en cada nodo del árbol recién graficado. Así, $S_{u,d}^2$ es igual a S_u . Aquí, se recombinan los movimientos, en el sentido de que una alza seguida por una baja conlleva al precio original de la acción, lo cual reduce el número de nodos, en forma considerable. Así las opciones se valúan comenzando por las ramas finales del árbol y hacia la rama inicial. El valor de la opción es conocido al tiempo T .

Fórmula de Black y Scholes.

La fórmula de Black y Scholes en el fondo contiene al método binomial, pero los sub-periodos de tiempo son mucho más pequeños. De hecho el método binomial fue desarrollado con consideración a la fórmula de Black y Scholes. A pesar de que ésta fórmula se desarrolla condicionada a la ocurrencia de *supuestos un poco restrictivos* es

todavía la más usada en la valuación de opciones. Esta fórmula, a diferencia del método binomial, es exclusiva de opciones tipo europeo.

Los supuestos restrictivos de que se habla en el párrafo anterior, dan la pauta, para la generación de nuevos modelos que rompan con tales consideración que propone la fórmula de Black y Scholes, ya que ellos plantean su modelo tomando como consideración, que los agentes financieros, se desenvuelven en un mercado ideal, cosa que en la realidad no se da.

Las fórmulas para los precios de las opciones europeas tanto de compra como de venta sobre acciones, sin pago de dividendos, derivadas por Black y Scholes son:

$$(1.4.8) \quad \begin{aligned} c &= SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2) \\ p &= Ee^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \end{aligned}$$

donde:

$$(1.4.9) \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(\frac{r+\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad y,$$

$$(1.4.10) \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(\frac{r-\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

La función $N(x)$ es la función de probabilidad acumulada para una variable normal estandarizada. Esto es, la probabilidad de que una variable distribuida normalmente será menor a x . El área total bajo la curva es igual a 1, por lo que si x tiende a ser muy grande (a infinito), el valor es igual a 1, como se podría apreciar en cualquier gráfica.

Retomando la ecuación:

$$(1.4.11) \quad C_0 = \frac{S_0 - E}{(1+r)},$$

se observa que la única diferencia con la C de la fórmula de Black y Scholes, la constituyen los términos $N(d_1)$ y $N(d_2)$, ya que sólo pondera el valor intrínseco de una opción con la probabilidad de ocurrencia de que la opción termine **dentro del dinero**. Así $N(d_1)$ no es otra cosa que esta probabilidad.

Aquí se pueden distinguir cosas interesantes: así pues, considerando el caso cuando S se vuelve muy grande, entonces es muy probable que la opción de compra sea ejercida (se encuentra dentro del dinero). Esto es debido a que d_1 y d_2 se hacen muy grandes con lo que

el valor de $N(d_1)$ y $N(d_2)$ se acercan a 1, por lo que la fórmula de Black Scholes se reduce a la ecuación (1.4.6), o sea, se reduce al valor intrínseco descontado.

Por otra parte, cuando el precio de la acción S se hace muy grande, el precio de la opción de venta europea, se aproxima a cero, ya que $N(-d_1)$ y $N(-d_2)$ se encontrarían muy cercanas a cero.

Por otro lado, si la volatilidad σ , se acerca a cero, entonces el valor de d_1 se aproximaría a infinito ya que cualquier división por cero, es infinito. Esto significa que $N(d_1)$ se aproxima a uno. Por su parte, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Así cuando σ se vuelve cero, d_1 y d_2 son iguales, o sea, ambas son infinitos, con lo que $N(d_1)$ y $N(d_2)$ se aproximan a uno.

Para encontrar los valores $N(d_1)$ y $N(d_2)$, primero se encuentran los valores de d_1 y d_2 y, posteriormente, se busca el área bajo la curva en las tablas desarrolladas por los mismos Black y Scholes.

Hasta aquí se han presentado los aspectos teóricos financieros, referentes al tema de las opciones, ésta parte nos sirve de referencia, ya que en el capítulo en el que se describe el programa computacional, se retoman conceptos que debían ser definidos previamente.

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.

¹ Yanhui, Liu. Parameswaran, Gopikrishnan, et al. "Statistical Properties of Volatility of Price Fluctuations". *Physical Review E*. Volumen 60, Número 2, Agosto, 1999.

² www.mexder.com.mx/mexder/antecedentes.html

³ Hull, John. Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones. 2ª. Ed. [tr. Morales, Vicente]. Prentice Hall, México, 1995. 474 pp.

⁴ www.mexder.com.mx/mexder/antecedentes.html

⁵ Diaz Tinoco, Jaime. Hernández Trillo, Fausto. Futuros y Opciones Financieras. "Una Introducción". 2ª. Ed. México, LIMUSA, 1998. 171 pp.

II. ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS⁶.

Una vez, que tenemos los conocimientos teóricos básicos necesarios de cuestiones financieras, y ya que se ha planteado el problema a resolver en esta tesis, debemos ahora conocer algunas cuestiones importantes al respecto de las ecuaciones diferenciales estocásticas, puesto que en el Capítulo **Simulación Computacional propuesta para el activo subyacente de las opciones Telmex**, (parte medular de este trabajo), se llevará a cabo la modelación computacional de una ecuación diferencial estocástica para riesgos financieros.

A pesar de que la finalidad de esta tesis es la simulación de soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas a través de aproximaciones numéricas, en este capítulo, se desarrolla el tema de las ecuaciones diferenciales estocásticas: partiendo de su definición y clasificación, siguiendo luego con la solución de algunos problemas que son resueltos de conformidad con el cálculo estocástico, para finalmente llegar a la definición de la fórmula de valuación de opciones financieras propuesta por Black y Scholes, quienes hacen uso del cálculo estocástico para la obtención de dicha fórmula.

La teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas (SDEs) ha existido por cerca de 50 años. Se han podido modelar y comprender teóricamente, la complicada dinámica estocástica dimensional finita, a través del cálculo Ito¹ y la teoría general sobre *semimartingalas*. Las ecuaciones diferenciales estocásticas tienen grandes aplicaciones en diferentes disciplinas como por ejemplo, en ingeniería mecánica y civil, economía y finanzas, ciencia del medio ambiente, procesamiento de señales, química y física, dinámica de población y psicología, farmacología y medicina, etcétera.

Algunas ecuaciones diferenciales estocásticas específicas tienen soluciones conocidas explícitamente, las cuales son principalmente reducibles de transformaciones apropiadas de la solución lineal de ecuaciones diferenciales estocásticas. El cómputo de características importantes de tales ecuaciones como momentos o rutas muestrales para ecuaciones diferenciales estocásticas es crucial para aplicaciones efectivas de estas ecuaciones.

La visualización de las rutas muestrales de las ecuaciones diferenciales estocásticas como un flujo estocástico o retrato de una fase de osciladores de ruido, pueden ser resueltas usando métodos naturales de aproximación fuerte en tiempo discreto. Esto da como

¹La derivación de la ecuación Black-Scholes para la valuación de opciones, hace uso de la fórmula Ito, de ahí la importancia de estudiar algunos aspectos básicos del cálculo estocástico.

resultado algoritmos en los cuales las ecuaciones diferenciales estocásticas son discretizadas en tiempo y aproximadas para su solución, los instantes de discretización son computados recursivamente, con valores en tiempos intermedios obtenidos a través de interpolaciones, y esto define una ruta muestral aproximada de una ecuación diferencial estocástica.

Clasificación de Ecuaciones diferenciales estocásticas⁷.

Para un conocimiento adecuado de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (SDE) es conveniente, partir de su clasificación.

Cuando se incluyen los efectos aleatorios en ecuaciones diferenciales se llegan a dos tipos distintos de ecuaciones, para las cuales el proceso de solución tiene trayectorias muestrales diferenciables o no diferenciables, respectivamente.

El primer caso y el más simple se da cuando una ecuación diferencial ordinaria tiene coeficientes aleatorios, un valor inicial aleatorio o es forzada por un proceso aleatorio regular moderado, o cuando se tiene alguna combinación de éstos. En tal caso, las ecuaciones son llamadas **ecuaciones diferenciales ordinarias** y son trayectorias muestrales resueltas como ecuaciones diferenciales ordinarias. Las trayectorias muestrales de los procesos solución son entonces al menos funciones diferenciables, como por ejemplo considérese la ecuación diferencial aleatoria lineal:

$$(2.1.1) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(w)x + b(t, w),$$

donde el proceso impulsador b es continuo en t para cada w . Para un valor inicial $x_0(w)$ al $t=0$, la solución es dada por:

$$(2.1.2) \quad x(t, w) = e^{a(w)t} (x_0(w) + \int_0^t e^{-a(w)s} b(s, w) ds),$$

estas trayectorias muestrales obviamente son funciones diferenciables de t .

El segundo tipo se da cuando la fuerza es un proceso estocástico tal como el ruido blanco Gaussiano. Las ecuaciones son entonces escritas simbólicamente como diferenciales estocásticas, pero son interpretadas como ecuaciones **integrales Ito** o **Stratonovich**. En este caso se denominan **ecuaciones diferenciales estocásticas**, las cuales suelen abreviarse como SDEs y en general su solución involucra la no diferenciability de trayectorias muestrales del **proceso Wiener** en las integrales estocásticas. En muchas aplicaciones tales ecuaciones resultan de la incorporación ya sea interna o externamente de fluctuaciones aleatorias de origen en la descripción dinámica de un sistema. Un ejemplo de lo anterior es

el bombardeo molecular de una partícula de polvo en una superficie de agua, lo que nos lleva al Movimiento Browniano. La intensidad de este bombardeo no depende de las variables de estado, por ejemplo, la posición y velocidad de las partículas. Tomando X_t como uno de los componentes de la velocidad de la partícula, Langevin escribió, para la aceleración de la partícula, la ecuación:

$$(2.1.3) \quad \frac{dX_t}{dt} = -aX_t + b\xi_t.$$

Esto es la suma de una fuerza de la función retardada dependiente de la velocidad y las fuerzas moleculares representadas por un proceso de ruido blanco ξ_t , con intensidad b que es independiente de la velocidad. Aquí la a y la b son constantes positivas.

Ahora bien, la ecuación de Langevin (2.1.3) puede interpretarse simbólicamente como una diferencial estocástica

$$(2.1.4) \quad dX_t = -aX_t dt + b dW_t,$$

que es la ecuación integral estocástica.

$$(2.1.5) \quad X_t = X_{t_0} - \int_{t_0}^t aX_s ds + \int_{t_0}^t b dW_s,$$

donde la segunda integral es una integral estocástica Ito. De esta manera, surgen ecuaciones similares de sistemas estocásticos donde X_t y ξ_t representan ruido térmico.

Con fluctuaciones externas la intensidad del ruido usualmente depende del estado del sistema. Por ejemplo, el coeficiente de crecimiento en una ecuación de crecimiento exponencial $x = \alpha x$ puede fluctuar sobre la cuenta de los efectos ambientales, tomando la forma $\alpha = a + b\xi_t$ donde a y b son constantes positivas y ξ_t es un proceso de ruido blanco. Esto resulta en la ecuación escrita heurísticamente:

$$(2.1.6) \quad \frac{dX_t}{dt} = aX_t + bX_t \xi_t,$$

para ser precisos, es una diferencial estocástica:

$$(2.1.7) \quad dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t,$$

o equivalentemente, una ecuación integral estocástica:

$$(2.1.8) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t aX_s ds + \int_{t_0}^t bX_s dW_s,$$

la segunda integral es otra vez, una integral Ito, pero ahora envuelve la solución desconocida.

En las ciencias físicas la fuerza aleatoria en (2.1.3) – (2.1.5) se denomina *ruido aditivo*, en cambio en (2.1.6) – (2.1.8) se llama *ruido multiplicativo*.

$$(2.1.9) \quad dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t,$$

o la equivalente formulación integral.

$$(2.1.10) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s)ds + \int_{t_0}^t b(X_s)dW_s,$$

para coeficientes apropiados $a(x)$ y $b(x)$, que pueden ser constantes.

Usando el cálculo Ito se puede verificar que

$$(2.1.11) \quad X_t = e^{-at} X_0 + e^{-at} \int_0^t e^{as} b dW_s,$$

es una solución de (2.1.3) – (2.1.5) y que

$$(2.1.12) \quad X_t = \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW_t\right),$$

es una solución de (2.1.6) – (2.1.8). Lo anterior es similar a (2.1.2) pero involucra una integral Ito en lugar de una integral Riemann. Se debe, sin embargo, imponer alguna restricción sobre el valor inicial X_0 , aquí, si el proceso solución X_t no es anticipativo con respecto al proceso Wiener W_t , por tanto las integrales Ito en (2.1.5) y (2.1.8), son significativas, en particular, la última. Por esto se necesita que X_0 sea independiente de W_t para toda $t > 0$, es decir, si X_0 es medible- \mathcal{A}_0 donde $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ es la familia de álgebras- σ incrementales asociadas con el proceso Wiener $\{W_t, t \geq 0\}$, X_t es entonces medible- \mathcal{A}_t para cada $t \geq 0$.

Las soluciones explícitas (2.1.11) y (2.1.12) son sólo soluciones para sus ecuaciones respectivas y vectores iniciales dados, en el sentido de que cualquier otra solución es un proceso estocástico equivalente, es decir, con las mismas distribuciones de probabilidad de dimensión finita. De hecho, una forma fuerte de unicidad lleva aquí: cualquier versión \bar{X}_t con trayectorias muestrales continuas tiene, al menos seguramente, las mismas trayectorias muestrales que X_t , es decir,

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}_t - X_t| > 0\right) = 0,$$

para cualquier $T > 0$. Entonces se dice que las soluciones son únicas en trayectoria.

En (2.1.11) y (2.1.12) se ha asumido implícitamente que se tiene un proceso Wiener prescrito $\{W_t, T \geq 0\}$. Si se cambia el proceso Wiener se obtendría de nueva cuenta una solución única, dada por la misma fórmula con el nuevo proceso dentro. Se denomina a tal solución, una **solución fuerte** de la ecuación diferencial estocástica y se usa el término **solución débil** para cuando se tiene libertad de elegir un proceso Wiener y luego se encuentra una solución correspondiente a este proceso Wiener particular. Algunas ecuaciones diferenciales estocásticas pueden tener solo soluciones débiles y no soluciones fuertes.

Como con muchas ecuaciones diferenciales ordinarias no se puede, generalmente, encontrar fórmulas explícitas como en (2.1.11) y (2.1.12) para la solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas por tanto, se necesita usar **métodos numéricos** para determinar las soluciones aproximadamente. Para esto se necesita conocer que la ecuación realmente tiene solución, una **solución única** preferentemente, para un **valor inicial** dado. Para una ecuación diferencial ordinaria

$$(2.1.13) \quad x = \frac{dx}{dt} = a(x),$$

este tipo de información es suministrada por un teorema de **existencia y unicidad**. Una condición suficiente para la existencia y unicidad de una solución $x(t, x_0)$ con valor inicial $x(0, x_0) = x_0$ es que $a = a(x)$ satisface la condición de *Lipschitz*.

$$(2.1.14) \quad |a(x) - a(y)| \leq k |x - y|,$$

para toda $x, y \in \mathfrak{R}$, donde k es una constante positiva. La usual involucra el método *Picard-Lindelöf* de **aproximaciones sucesivas** $\{x^{(n)}\}$ con

$$x^{(n+1)}(t) = x_0 + \int_0^t a(x^{(n)}(s)) ds,$$

para $n=0, 1, 2, \dots$, donde $x^{(0)}(t) = x_0$. La condición *Lipschitz* (2.1.14) provee una desigualdad crucial

$$|x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)| \leq k \int_0^t |x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s)| ds.$$

Esto es usado para establecer la convergencia uniforme de las aproximaciones sucesivas a una solución continua de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(x(s)) ds,$$

la cual es por tanto, una solución de la ecuación diferencial original (2.1.13). La unicidad de la solución obedece a una aplicación similar de la condición *Lipschitz*. Una diferencia

importante es que esta solución puede volverse no limitada después de un pequeño paso del tiempo. Por ejemplo, la solución

$$x(t) = \frac{x_0}{(1 - x_0 t)}$$

de la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2$ se dispara al tiempo $t = T(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Para asegurar que la existencia global de una solución, es decir, la existencia para todo tiempo $t > 0$, se necesita un **crecimiento limitado** sobre $a = a(x)$ tal que

$$(2.1.15) \quad x a(x) \text{ o } |a(x)|^2 \leq L(1 + |x|^2),$$

para toda $x \in \mathfrak{R}$, donde L es una constante positiva.

Se da un resultado análogo de existencia y unicidad para soluciones fuertes de una Ecuación Diferencial Estocástica (2.1.8) – (2.1.9) dados ambos coeficientes $a = a(x)$ y $b = b(x)$ satisfaciendo una condición *Lipschitz* (2.1.14) y un crecimiento limitado (2.1.15). Aquí el proceso Wiener $\{W_t, t \geq 0\}$ con familia asociada de álgebras- σ $\{A_t, t > 0\}$ es preasignada y el valor inicial X_0 debe ser medible- A_0 . La prueba además emplea aproximaciones sucesivas

$$X_t^{(n+1)} = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s^{(n)}) ds + \int_{t_0}^t b(X_s^{(n)}) dW_s,$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, donde $X_t^{(0)} \equiv X_0$. Un caso simple asume que $E(x_0^2) < \infty$ y entonces el crecimiento limitado es usado para mostrar que:

$$E(\sup_{0 \leq r \leq T} X_r^2) > \infty,$$

para cualquier $0 < T < \infty$ fijo. La condición *Lipschitz* es usada en forma similar al caso determinístico para mostrar la convergencia cuadrada-media de las aproximaciones sucesivas y la unicidad cuadrada-media de la solución límite. El Lema Borel-Cantelli es aplicado entonces, para establecer la unicidad fuerte por trayectoria de las soluciones. Son posibles variaciones, pero éstas son técnicamente más complicadas. Por ejemplo el requerimiento de que $E(x_0^2) < \infty$ puede suprimirse y la condición *Lipschitz* (2.1.14) atenuarse en la condición *Lipschitz* local:

$$|a(x) - a(y)| \leq k_N |x - y|,$$

para toda $|x|, |y| \leq N$, donde k_N es una constante positiva para cada $N > 0$. (Del teorema del valor-medio del cálculo, lo último se sostiene para cualquier función diferenciable continua $a = a(x)$). Límites de crecimiento tales como (2.1.15) no se requieren para la existencia o

unicidad, pero su ausencia puede dar como resultado que las trayectorias muestrales se disparen en un tiempo finito, es decir,

$$|X_t(\omega)| \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow T(X_0(\omega)).$$

Aquí $T(X_0(\omega))$ es denominado el tiempo de explosión. Los coeficientes de la Ecuación Diferencial Estocástica

$$(2.1.16) \quad dX_t = \frac{1}{2} \exp(-2X_t) dt + \exp(-X_t) dW_t,$$

no satisfacen un límite de crecimiento para $x < 0$. La solución única

$$X_t = \ln(W_t + \exp(X_0)),$$

de (2.1.16) existe solamente para $0 \leq t \leq T(X_0(\omega))$ donde

$$T(X_0(\omega)) = \min\{t \geq 0 : W_t(\omega) = -\exp(X_0(\omega))\}.$$

Debido a su construcción, las aproximaciones sucesivas $X_t^{(n)}$ anteriores son obviamente medibles \mathcal{A}_t y tienen, al menos seguramente, trayectorias muestrales continuas. Estas propiedades son heredadas por una solución fuerte limitada X_t de la Ecuación Diferencial Estocástica (2.1.9) - (2.1.10). Tal solución o más precisamente la familia de soluciones $X_t^{0,x}$ con valores iniciales $X_0^{0,x} = x$ w.p.1, para toda $x \in \mathcal{R}$, es un proceso Markov homogéneo, el cual frecuentemente es llamado *difusión Ito*.

Cuando los coeficientes $a = a(x)$ y $b = b(x)$ de la Ecuación Diferencial Estocástica son suficientemente suaves, las probabilidades de transición de este proceso Markov tienen una densidad $p = p(s, x; t, y)$ satisfaciendo la ecuación *Fokker-Planck*

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (ap) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma p) = 0,$$

con $\sigma = b^2$.

La pregunta de si un proceso con una densidad que satisface la ecuación *Fokker-Planck* es necesariamente una difusión Ito, subraya el interés en las soluciones débiles de ecuaciones diferenciales estocásticas. Mientras que esto no es cierto, en general, una respuesta afirmativa puede ser obtenida cuando los coeficientes satisfacen una suavidad básica certera y las propiedades de carecer de límite. Hay sin embargo, alguna ambigüedad para el término de difusión $\sigma(x) = b(x)^2$, pero no de $b(x)$ que por sí mismo es especificado. En lugar del coeficiente escalar $\sqrt{\sigma(x)}$, se podría tener una función vector

$b(x) = (b^1(x), b^2(x), \dots, b^k(x))$ con $\sum_{i=1}^k (b^i(x))^2 = \sigma(x)$ y X_t puede ser también la solución de la Ecuación Diferencial Estocástica:

$$(2.1.17) \quad dX_t = a(X_t)dt + \sum_{i=1}^k b^i(X_t)dW_t^i,$$

para algún proceso Wiener de dimensión k $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^k)$ donde $k \geq 1$. En esta forma la densidad puede ser solución de la ecuación *Fokker Planck* de diferentes Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas pueden ser formadas también con coeficientes más generales que los utilizados en (2.1.9). La generalización más aparente es permitir que los coeficientes no sean autónomos, es decir, que dependan explícitamente de t por lo que ahora $a \equiv a(t, x)$ y $b = b(t, x)$. En este caso las soluciones resultantes son procesos de Markov no homogéneos. Los coeficientes deben ser al menos medibles en t , y la condición *Lipschitz* (2.1.14) y la condición de crecimiento (2.1.15) deben basarse uniformemente sobre $0 \leq t \leq T$ para asegurar la existencia y unicidad de soluciones fuertes sobre $0 \leq t_0 \leq t \leq T$.

Otra extensión común es para los coeficientes que sean aleatorios, es decir $a = a(t, x, \omega)$ y $b = b(t, x, \omega)$. Por lo que deben implantarse restricciones de medición apropiadas tales como medición- \mathcal{A}_t , para asegurar que los integrandos no sean anticipativos. Esta situación ocurre en análisis de estabilidad cuando se lineariza una solución \bar{X}_t de (2.1.9). Con $Z_t = X_t - \bar{X}_t$ se obtiene una Ecuación Diferencial Estocástica lineal

$$(2.1.18) \quad dZ_t = a'(\bar{X}_t)Z_t dt + b'(\bar{X}_t)Z_t dW_t,$$

con coeficientes $a(t, z, \omega) = a'(X_t(\omega))z$ y $b(t, z, \omega) = b'(X_t(\omega))z$.

Ahora enfocaremos nuestra atención en las ecuaciones diferenciales estocásticas

$$(2.1.19) \quad dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t,$$

con coeficientes aleatorios. Una modificación simple de la fórmula Ito muestra que una función $Y_t = U(t, X_t)$ de una solución fuerte de (2.1.19) satisface lo siguiente:

Si se retoma la ecuación Ito:

$$(2.1.20) \quad Y_t - Y_s = \int_s^t \left\{ \frac{\partial U}{\partial t}(u, X_u) + e_u \frac{\partial U}{\partial x}(u, X_u) + \frac{1}{2} f_u^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(u, X_u) \right\} du + \int_s^t f_u \frac{\partial U}{\partial x}(u, X_u) dW_u$$

y se sabe que:

$$(2.1.21) \quad dY_t = \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\} dt + b \frac{\partial U}{\partial x} dW_t,$$

es una modificación simple de la fórmula Ito, para $U=(t, x)$ suficientemente suave, donde los coeficientes son evaluados a (t, X_t) . Esto se puede usar para resolver algunas ecuaciones diferenciales estocásticas elementales en forma explícita.

Por ejemplo, se sabe que

$$X_t = X_0 \exp(W_t - \frac{1}{2} t),$$

es una solución de la Ecuación Diferencial Estocástica $dX_t = X_t dW_t$. Entonces si $Y_t = U(X_t) = (X_t)^2$ satisface la Ecuación Diferencial Estocástica

$$dY_t = Y_t dt + 2Y_t dW_t.$$

Entonces,

$$Y_t = Y_0 \exp(2W_t - t),$$

es una solución de esta Ecuación Diferencial Estocástica. De hecho esto es un caso especial de (2.1.12)

En algunas aplicaciones es más apropiado formular ecuaciones diferenciales estocásticas en términos de integrales Stratonovich en lugar de integrales Ito. A tal ecuación se le denomina *ecuación diferencial estocástica de Stratonovich*, la cual se escribe en términos de diferenciales como:

$$(2.1.22) \quad dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) \circ dW_t,$$

o en la forma equivalente de ecuación integral

$$(2.1.23) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(t, X_t) dt + \int_{t_0}^t b(t, X_t) \circ dW_t.$$

La notación " \circ " aquí denota el uso del cálculo Stratonovich. Esto indica que las soluciones de la Ecuación Diferencial Estocástica Stratonovich (2.1.22)-(2.1.23) también satisfacen una Ecuación Diferencial Estocástica Ito con el mismo coeficiente de difusión $b(t,x)$, pero con el coeficiente de ajuste modificado

$$a(t, x) = \underline{a}(t, x) + \frac{1}{2} b(t, x) \frac{\partial b}{\partial x}(t, x).$$

Por ejemplo, la Ecuación Diferencial Estocástica Stratonovich

$$dX_t = 2X_t \circ dW_t,$$

y la Ecuación Diferencial Estocástica Ito

$$dX_t = 2X_t dt + 2X_t dW_t,$$

tienen la misma solución

$$X_t = X_{t_0} \exp(2(W_t - W_{t_0})).$$

En el caso del ruido aditivo la Ecuación Diferencial Estocástica Ito y Stratonovich correspondiente tienen los mismos coeficientes $a \equiv \underline{a}$.

Es conveniente que siempre se intercambie a la Ecuación Diferencial Estocástica correspondiente en la otra interpretación para aprovechar las ventajas de las propiedades especiales de este cálculo estocástico.

Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales.

De manera similar que las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, la solución general de una ecuación diferencial estocástica lineal puede encontrarse explícitamente. El método de solución involucra un factor de integración o equivalentemente, una *solución fundamental* de la ecuación diferencial homogénea asociada.

La forma general de una ecuación diferencial estocástica lineal escalar es:

$$(2.2.1) \quad dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t,$$

donde los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2 son funciones especificadas de tiempo t o constantes. Éstas son medidas Lebesgue y limitadas en un intervalo $0 \leq t \leq T$, aplica el teorema de existencia y unicidad, asegurando la existencia de una solución fuerte X_t sobre $t_0 \leq t \leq T$ para cada $0 \leq t_0 < T$ y cada valor infinital medible- \mathcal{A}_{t_0} X_{t_0} correspondiente a un proceso Wiener dado $\{W_t, t \geq 0\}$ y la familia asociada de álgebra- σ $\{\mathcal{A}_t, t > 0\}$. Cuando los coeficientes son todos constantes la Ecuación Diferencial Estocástica es autónoma y sus soluciones, que existen para todo $t - t_0 \geq 0$, son procesos Markov homogéneos. En este caso

basta considerar $t_0 = 0$. Cuando $a_2(t) \equiv 0$ y $b_2(t) \equiv 0$, (2.2.1) se reduce a la Ecuación Diferencial Estocástica *lineal homogénea*:

$$(2.2.2) \quad dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dW_t,$$

obviamente $X_t \equiv 0$ es una solución de (2.2.2). Es de gran importancia la *solución fundamental* Φ_{t,t_0} que satisface la condición inicial $\Phi_{t_0,t_0} = 1$ ya que todas las otras soluciones pueden ser expresadas en términos de esta. El problema es encontrar tal solución fundamental.

Cuando $b_1 \equiv 0$ en (2.2.1) la Ecuación Diferencial Estocástica tiene la forma:

$$(2.2.3) \quad dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + b_2(t)dW_t,$$

que es ruido que aparece en forma aditiva. En este caso se dice que la Ecuación Diferencial Estocástica es lineal en el sentido-limitado. La ecuación homogénea obtenida de (2.2.3) es entonces una ecuación diferencial ordinaria

$$(2.2.4) \quad \frac{dX_t}{dt} = a_1(t)X_t.$$

La condición de la Ecuación Diferencial Estocástica lineal homogénea es que $a_2(t) \equiv 0$ y $b_2(t) \equiv 0$, por lo que aplicando esto a la ecuación (2.2.3) se tiene la ecuación (2.2.4).

Y su solución fundamental es

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right).$$

En esta parte se aplica el Cálculo Estocástico, partiendo de la fórmula Ito, para la derivación de la solución explícita de esta ecuación diferencial estocástica.

Así pues, aplicando la fórmula Ito (2.1.21) a la transformación $U(t, x) = \Phi_{t,t_0}^{-1}x$ y la solución X_t de (2.2.3) se obtiene:

Se pueden calcular las diferenciales parciales, tomando en cuenta (2.2.3)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} X_t,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dx} X_t = \Phi_{t,t_0}^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{d^2\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dx^2} = 0.$$

Por lo que retomando todos los conceptos anteriores, obtendremos:

$$d(\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = \frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t)) \Phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t) \Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t.$$

Pero, debido a que:

$$\frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} = -\Phi_{t,t_0}^{-1} a_1(t).$$

Se tiene:

$$d(\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = (-\Phi_{t,t_0}^{-1} a_1(t)X_t + \Phi_{t,t_0}^{-1} a_1(t)X_t + a_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1})dt + b_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t.$$

$$d(\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = (a_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t).$$

El lado derecho de esta diferencial sólo involucra funciones conocidas de t y w , por lo que puede integrarse para obtener:

$$\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t = \Phi_{t_0,t_0}^{-1} X_{t_0} + \int_0^t a_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_0^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s,$$

$$\frac{1}{\Phi_{t,t_0}} X_t = \Phi_{t_0,t_0}^{-1} (X_{t_0} + \int_0^t a_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_0^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s),$$

y ya que $\Phi_{t,t_0} = 1$ esto lleva a la solución:

$$(2.2.5) \quad X_t = \Phi_{t_0,t_0}^{-1} (X_{t_0} + \int_0^t a_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_0^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s),$$

de la SDE (2.2.3) de sentido limitado o reducido donde:

$$(2.2.6) \quad \Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_0^t a_1(s)ds\right) = e^{\int_0^t a_1(s)ds}.$$

La ecuación Langevin (2.1.4) es lineal en el sentido-limitado o reducido con coeficientes $a_1(t) \equiv -a$, $a_2(t) \equiv 0$ y $b_2(t) = b$. Por lo que la solución fundamental $\Phi_{t,t_0} = \exp(-a(t, t_0))$ y la solución (2.2.5) se reduce a (2.1.11) para $t_0=0$. Esta solución es un proceso Ornstein-Uhlenbeck.

Otra vez, se hace uso del Cálculo Estocástico para derivar la solución:

$$(2.1.4) \quad dX_t = -aX_t dt + b dW_t \quad a_1(t) \equiv -a \text{ y } b_2(t) = b,$$

$$\begin{aligned} d(\Phi_{t,t_0}^{-1} x) &= \Phi_{t,t_0}^{-1} dX_t + X_t \frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} \\ &= X_t \frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} + -aX_t \Phi_{t,t_0}^{-1} dt + b\Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \\ &= aX_t \Phi_{t,t_0}^{-1} - aX_t \Phi_{t,t_0}^{-1} dt + b\Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \end{aligned}$$

$$d(\Phi_{t,t_0}^{-1} x) = dt + b\Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t.$$

$$\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t = \Phi_{t_0,t_0}^{-1} X_{t_0} + \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t b\Phi_{t_0,t}^{-1} dW_s.$$

y ya que $\Phi_{t,t_0} = 1$ se obtiene:

$$X_t = \Phi_{t_0,t_0}^{-1} (X_{t_0} + \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t b\Phi_{t_0,t}^{-1} dW_s).$$

La solución (2.2.5) es un proceso Gaussiano siempre que el valor inicial X_{t_0} sea una constante o una variable aleatoria Gaussiana. Su media y el momento de segundo orden satisfacen ambas ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas son indicadas más abajo en (2.2.10) y (2.2.11) para la SDE lineal general (2.2.1), pero la solución es hasta este momento generalmente no Gaussiana.

Ahora bien, para continuar con la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, haciendo uso del Cálculo Ito, se puede llevar a cabo la verificación que la solución (2.2.5) que es un proceso gaussiano cuando X_{t_0} es una constante o una variable aleatoria gaussiana.

Partiendo de que X_{t_0} es Gaussiana como la combinación lineal de variables aleatorias gaussianas y ya que $\int_0^t f(s) dW_s$ es gaussiana para una f determinística y, X_{t_0} se asume que es determinística o gaussiana.

$$(2.2.5) \quad X_t = \Phi_{t,t_0}^{-1} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s) \Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s) \Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right) \square$$

El caso lineal general es más complicado ya que la ecuación homogénea asociada (2.2.2) es una ecuación diferencial estocástica genuina. La solución fundamental (2.2.6) del caso lineal en sentido-limitado, satisface la ecuación diferencial (ordinaria) $d(\ln \Phi_{t,t_0}) = a_1(t) dt$. Usando esto como una clave, y de acuerdo con la fórmula Ito se llega a que el proceso transformado $\ln \Phi_{t,t_0}$ para la solución fundamental Φ_{t,t_0} de (2.2.2) satisface:

$$\begin{aligned} d(\ln \Phi_{t,t_0}) &= (a_1(t) \Phi_{t,t_0} \Phi_{t,t_0}^{-1} - \frac{1}{2} b_1^2(t) \Phi_{t,t_0}^2 \Phi_{t,t_0}^{-2}) dt + b_1(t) \Phi_{t,t_0} \Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \\ &= (a_1(t) - \frac{1}{2} b_1^2(t)) dt + b_1(t) dW_t. \end{aligned}$$

$$d\left(\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right) = d(\ln \Phi_{t,t_0}).$$

$$d(\ln \Phi_{t,t_0}) = a_1(t) dt.$$

$$\text{Entonces si, } y = \ln \Phi_{t,t_0} \text{ entonces } d(\ln \Phi_{t,t_0}) = \frac{1}{\Phi_{t,t_0}} d\Phi_{t,t_0} = \Phi_{t,t_0}^{-1} d\Phi_{t,t_0}.$$

Lo cual sólo consiste de funciones conocidas de t y w . Así,

$$\ln \Phi_{t,t_0} = \int_{t_0}^t (a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s)) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s$$

ya que $\Phi_{t,t_0} = 1$,

$$(2.2.7) \quad \Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t (a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s)) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s\right),$$

lo que de hecho se reduce a (2.2.6) cuando $b_1(t) \equiv 0$. Similarmente, aplicando la fórmula Ito a Φ_{t,t_0}^{-1} se obtiene:

$$(2.2.8) \quad d(\Phi_{t,t_0}^{-1}) = (-a_1(t) + b_1^2(t)) \Phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t) \Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t.$$

Entonces, como con el caso en sentido-limitado considerado arriba, el proceso $\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t$, para una solución X_t de la ecuación lineal general (2.2.1) tiene una diferencial estocástica diferenciable explícitamente. Sin embargo, aquí ambos términos Φ_{t,t_0}^{-1} y X_t tienen diferenciales estocásticas envolviendo el mismo proceso Wiener W_t , por lo que la fórmula Ito debe ser usada con los dos componentes de transformación $U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = X_t^{(1)} X_t^{(2)}$, es decir:

$$\begin{aligned} d(\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t) &= ((-a_1(t) + b_1^2(t))X_t + (a_1(t) + a_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t)(b_1(t)X_t + b_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1} dt \\ &\quad + (-b_1(t)\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t + (b_1(t)X_t + b_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1})dW_t \\ &= (a_2(t) - b_1(t)b_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t, \end{aligned}$$

Integrando y usando $\Phi_{t_0,t_0} = 1$ se obtiene:

$$\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s.$$

y por tanto,

$$(2.2.9) \quad X_t = \frac{X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s}{\Phi_{t,t_0}}$$

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right),$$

donde Φ_{t,t_0} es dado por (2.2.8). Aplicando esto a la Ecuación Diferencial Estocástica lineal (2.1.7) donde $a_1 \equiv a$, $b_1(t) \equiv b$ y $a_2(t) \equiv b_2 \equiv 0$, lleva a la solución (2.1.11). Se puede observar que (2.2.9) se reduce a la solución en sentido-limitado (2.2.5) cuando $b_1(t) \equiv 0$.

Si se toma el valor esperado de la forma integral de (2.2.1) y se usa la propiedad de expectación cero de una integral Ito, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para la media $m(t) = E(X_t)$ de su solución, es decir,

$$(2.2.10) \quad \frac{dm(t)}{dt} = a_1(t)m(t) + a_2(t),$$

además se encuentra que el momento de segundo orden $P(t) = E(X_t)^2$ satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$(2.2.11) \quad \frac{dP(t)}{dt} = (2a_1(t) + b_1^2(t))P(t) + 2m(t)(a_2(t) + b_1(t)b_2(t)) + b_2^2(t).$$

Para derivar (2.2.11) se usa la fórmula Ito, con el objetivo de obtener una Ecuación Diferencial Estocástica para X_t^2 y luego se toma la esperanza de la forma integral de esta ecuación. Ambas (2.2.10) y (2.2.11) son lineales y pueden ser resueltas usando factores de integración. En el caso especial de una Ecuación Diferencial Estocástica lineal en sentido-limitado (2.2.3) la ecuación (2.2.10) sigue siendo la misma, considerando que la ecuación (2.2.11) simplifica a

$$(2.2.12) \quad \frac{dP(t)}{dt} = 2a_1(t)P(t) + 2m(t)a_2(t) + b_2^2(t).$$

Ahora bien, a manera de una mejor comprensión del Cálculo Estocástico o de Ito, se derivará la ecuación diferencial ordinaria (2.2.11) para el momento de segundo orden $P(t)$

Se aplica la fórmula Ito para $u(x)=x^2$, en donde $U=U(X,t)= X_t^2$

Retomando:

$$(2.2.1) \quad dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t$$

$$Y_t = X_t^2 \text{ entonces, } \frac{dX_t^2}{dX_t} = 2X_t \text{ y por tanto } \frac{d^2 X_t^2}{dX_t^2} = 2$$

Por lo que se tiene:

$$dX_t^2 = \left\{ \frac{\partial X_t^2}{\partial t} + a \frac{\partial X_t^2}{\partial X_t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 X_t^2}{\partial X_t^2} \right\} dt + b \frac{\partial X_t^2}{\partial X_t} dW_t$$

Obteniéndose entonces,

$$dX_t^2 = \left((a_1 X_t + a_2) 2X_t + \frac{1}{2} (b_1 X_t + b_2)^2 \cdot 2 \right) dt + (b_1 X_t + b_2) \cdot 2X_t dW_t;$$

ahora bien, se sabe que $P(t) = E(X_t)^2$ y se quiere encontrar $\frac{dP(t)}{dt}$, se conoce dX_t^2 por

tanto, se tiene que $\frac{dP(t)}{dt} = \frac{dE(X_t^2)}{dt}$, es decir, $\frac{dP(t)}{dt} dt = \frac{dE(X_t^2)}{dt} dt$ o sea,

$$P'(t)dt = dP(t) = dE(X_t^2) = E(dX_t^2) \text{ por lo tanto, } P(t) = E(X_t^2).$$

Así pues,

$$dX_t^2 = \left((a_1 X_t + a_2) 2X_t + (b_1 X_t + b_2)^2 \right) dt + (b_1 X_t + b_2) 2X_t dW_t = \\ (2a_1 X_t^2 + 2a_2 X_t + b_1 X_t^2 + 2b_1 b_2 X_t + b_2^2) dt + (2b_1 X_t^2 + 2b_2 X_t) dW_t.$$

Ahora bien,

$$E(dX_t^2) = E \left[(2a_1 X_t^2 + 2a_2 X_t + b_1 X_t^2 + 2b_1 b_2 X_t + b_2^2) dt \right] + E \left[(2b_1 X_t^2 + 2b_2 X_t) dW_t \right] = \\ = (2a_1 E(X_t^2) + 2a_2 E(X_t) + b_1 E(X_t^2) + 2b_1 b_2 E(X_t) + b_2^2) dt + 0,$$

ya que el valor esperado de la Integral Ito (aquí en la forma diferencial) se desvanece. Por tanto,

$$\frac{dP(t)}{dt} = 2a_1 E(X_t^2) + 2a_2 E(X_t) + b_1 E(X_t^2) + 2b_1 b_2 E(X_t) + b_2^2,$$

$$\text{siendo } P^* = (2a_1 + b_1^2) E(X_t^2) + 2(a_2 + b_1 b_2) E(X_t) + b_2^2$$

y ya que $P = E(X_t^2)$ y $m = E(X_t)$ se tiene:

$$P' = (2a_1 + b_1^2)P + 2(a_2 + b_1 b_2)m + b_2^2,$$

se obtiene (2.2.11)

$$\frac{dP(t)}{dt} = (2a_1(t) + b_1^2(t))P(t) + 2m(t)(a_2(t) + b_1(t)b_2(t)) + b_2^2(t).$$

Al llegar a este punto, es importante destacar el hecho de que la solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas se está convirtiendo en una herramienta de trabajo indispensable en diferentes disciplinas, siendo punta de lanza de un vacío duradero entre la teoría avanzada de ecuaciones diferenciales estocásticas y sus aplicaciones a ejemplos específicos. Esto sin duda ha sido posible gracias al acceso, cada vez más creciente a computadoras poderosas a bajo costo, combinado con la aparición de nuevos y efectivos esquemas numéricos de alto orden para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Fórmula de Valuación para Opciones Financieras.

El desarrollo que a continuación se presenta de la fórmula de Black y Scholes es retomado del artículo original de Fisher Black y Myron Scholes llamado "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*"⁸ en ese artículo los autores desarrollaron su famoso modelo para valorar opciones europeas. Para la derivación de esta fórmula es necesario hacer uso del cálculo estocástico, de ahí la necesidad del desarrollo de los puntos anteriores.

Los supuestos que los autores plantearon son los siguientes:

- El mercado funciona sin fricciones; o sea, no existen costos de transacción, de información, requerimientos de margen, ni impuestos y los activos son perfectamente divisibles.
- Las transacciones tienen lugar de forma continua y existe plena capacidad para realizar compras y ventas sin restricciones ni costos especiales.
- Los agentes pueden prestar y endeudarse a una misma tasa r , que es la tasa de interés a corto plazo expresada en forma continua.
- Las opciones son europeas y el subyacente no paga dividendos en el horizonte de planeación.

El proceso del activo sigue un proceso continuo estocástico de evolución de Gauss-Wiener definido por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$
$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

donde:

dS representa un cambio infinitesimal en el precio del subyacente.

dt representa un cambio infinitesimal en el tiempo.

μ representa la media de los rendimientos por periodo.

σ representa la volatilidad del precio del activo².

dz es una variable aleatoria con $(0,1)$ ³.

El rendimiento instantáneo del activo subyacente, o las variaciones relativas del subyacente siguen una distribución normal con parámetros μdt que corresponde a su media, y $\sigma^2 dz$ que corresponde a la varianza. Por lo tanto, una cuestión fundamental para aplicar el modelo de Black y Scholes, es que el rendimiento instantáneo aproxime su distribución a

² Black y Scholes consideraron en su modelo una volatilidad constante.

³ Esta variable aleatoria puede entenderse, como se verá más adelante, como un proceso Wiener.

una normal. Este proceso constituye una caminata aleatoria, la cual es consistente con la teoría moderna de cómo los precios se mueven en un mercado eficiente⁹.

La derivación de la fórmula de Black y Scholes se puede obtener como la formulación de Cox-Ross –Rubinstein por una estrategia de arbitraje de la siguiente forma: bajo la hipótesis de la negociación en tiempo continuo se podría construir un portafolio o cartera formado con una posición larga en acciones y una posición corta en opciones de compra sobre acciones o viceversa. Con lo cual se realiza el arbitraje. Si R representa el portafolio a utilizar, entonces se tiene:

$$(2.3.1) \quad R = nC + hS,$$

donde C y S son los valores de la opción de compra y la acción respectivamente, n y h corresponden al número de opciones y acciones dentro del portafolio. De ahí que en un intervalo infinitesimal de tiempo, la expresión anterior, se transforma en:

$$(2.3.2) \quad dR = ndC + hdS.$$

Bajo el supuesto de volatilidad constante, y la tasa libre de riesgo, también constante, el valor de una opción de compra europea con un precio de ejercicio X será función del tiempo t y una variable estocástica y el precio del subyacente S .

$$(2.3.3) \quad C = f(t, S).$$

El Lema de Ito, también conocido como el teorema fundamental del Cálculo Estocástico, permite diferenciar una función de la forma $G(t, z)$ como la anterior, siendo z una variable aleatoria y t el tiempo mediante la siguiente expresión:¹⁰

$$(2.3.4) \quad dG = \frac{\partial G}{\partial z} dz + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} (dz)^2.$$

Entonces, al aplicar el lema de Ito se puede obtener dC :

$$(2.3.5) \quad dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2,$$

Black y Scholes suponen que el precio de la acción, sigue un proceso continuo estocástico del tipo Gauss-Wiener, definido por:

$$(2.3.6) \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz,$$

elevando al cuadrado ambos términos:



⁴ De la ecuación Ito (2.1.21)

$$(2.3.7) \quad \left[\frac{dS}{S} \right]^2 = (\mu dt)^2 + 2\mu\sigma dt dz + (\sigma dz)^2.$$

En la función de la tabla de multiplicación aplicable a las integrales estocásticas, se sabe que:

$$\begin{aligned} dz^2 &= dt \\ dz \cdot dt &= dt \cdot dz = 0 \\ dt^2 &= 0 \end{aligned}$$

de ahí se obtiene que:

$$(2.3.8) \quad \left[\frac{dS}{S} \right]^2 = \sigma^2 dt,$$

$$(2.3.9) \quad [dS]^2 = S^2 \sigma^2 dt,$$

sustituyendo (2.3.9) en (2.3.5) se obtiene:

$$(2.3.10) \quad dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + dt \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right),$$

entonces la variación dR del portafolio con el que se está arbitrando será por lo tanto:

$$(2.3.11) \quad dR = \left[n \frac{\partial C}{\partial S} + h \right] dS + n \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt,$$

dado que la variación dS es aleatoria, se puede construir un portafolio libre de riesgo, con el que se arbitre de la forma siguiente:

$$\left(n = -1, h = \frac{\partial C}{\partial S} \right) \text{ y } \left(n = 1, h = \frac{\partial C}{\partial S} \right)$$

si se elige el portafolio $\left(n = -1, h = \frac{\partial C}{\partial S} \right)$ se tiene que:

$$(2.3.12) \quad R = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S,$$

$$(2.3.13) \quad dR = - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt,$$

dado que en equilibrio, el portafolio debe tener un rendimiento igual al activo libre de riesgo entonces:

$$(2.3.14) \quad \frac{dR}{R} = r dt.$$

Sustituyendo (2.3.12) y (2.3.13) en (2.3.14) tenemos que:

$$(2.3.15) \quad \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Si T es el plazo al vencimiento de la opción, también se puede escribir:

$$(2.3.16) \quad \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \frac{\partial C}{\partial T} = 0.$$

Esta ecuación en derivadas parciales constituye la relación fundamental que sigue una opción de compra. Este tipo de ecuaciones son muy frecuentes en la física, como en las ecuaciones de transmisión de calor. Para una ecuación en derivadas parciales, se puede definir al igual que para una ecuación diferencial, la noción de integral general; Es decir, la función más general que satisface a la ecuación.

Así mismo se puede calcular la solución particular de (2.3.16) que satisface además los límites del valor de una opción de compra, que son para $t=0$:

$$(2.3.17) \quad {}^5 C(S,0, X) = S - X \quad \text{si } S \geq X.$$

$$(2.3.18) \quad {}^6 C(S,0, X) = 0 \quad \text{si } S < X.$$

la solución particular de (2.3.16) que satisface a (2.3.17) y (2.3.18), se puede obtener efectuando el siguiente cambio de variables:

$$(2.3.19) \quad , C(S,T) = e^{-rT} \bullet Y(S',T')$$

donde:

$$(2.3.20) \quad S' = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{S} \sigma^2 \right) \left[\ln \left(\frac{S}{X} \right) + \left(r - \frac{1}{S} \sigma^2 \right) T \right],$$

$$(2.3.21) \quad T' = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T.$$

En la que se asume que S sigue una distribución *log-normal*, por lo que entonces la ecuación (2.3.16) se convierte en:

$$(2.3.22) \quad Y_{T'} = Y_{S'S'},$$

⁵ El precio de una opción de compra, al momento de expiración del contrato, será la diferencia entre el precio de la acción y el precio de ejercicio, siempre que el contrato de opciones se encuentre dentro del dinero.

⁶ Un contrato de opciones de compra no será ejercido cuando el precio de la opción al momento de expiración, sea menor que el precio de ejercicio pactado en el contrato de opciones.

y los límites de (2.3.17) y (2.3.18) se convierten en:

$$(2.3.23) \quad Y(S', 0) = X \left\{ \exp \left[S' \left(\frac{-1}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) / \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right] - 1 \right\} \dots \text{si } S' \geq 0$$

$$(2.3.24) \quad Y(S', 0) = 0.$$

Al encontrar una solución de la ecuación $Y_T = Y_{S,T}$, se obtiene la fórmula que se busca, es decir:

$$(2.3.25) \quad C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2).$$

La cual es la fórmula para la valuación de una opción de compra europea propuesta por Black-Scholes, donde:

$S =$ Precio del activo subyacente

$X =$ Precio de ejercicio

$T =$ Plazo al vencimiento

$r =$ Tasa libre de riesgo anualizada

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(\frac{r}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$\sigma =$ Volatilidad del subyacente⁷

$N(\bullet) =$ Valor de un determinado punto de la función de distribución de una variable aleatoria normalizada.

⁷ Ésta es una volatilidad que Black y Scholes consideran constante.

Integración Estocástica¹¹.

Una ecuación diferencial ordinaria

$$(2.4.1) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(t, x),$$

puede pensarse como una forma degenerada de una ecuación diferencial estocástica en ausencia de la aleatoriedad. Es por consiguiente útil para revisar algunas de sus propiedades básicas. Por supuesto que la ecuación anterior se puede escribir en forma de una diferencial simbólica, en cuyo caso obtendremos:

$$(2.4.2) \quad dx = a(t, x)dt,$$

o con en forma más aproximada como una ecuación integral:

$$(2.4.3) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x(s))ds,$$

donde $x(t) = x(t; x_0, t_0)$ es una solución que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Las suposiciones de regularidad, tal como la continuidad de *Lipschitz*, son usualmente formuladas sobre a para garantizar la existencia y unicidad de la solución $x(t; x_0, t_0)$ para cada condición inicial.

Estas soluciones son relacionadas por la propiedad evolutiva:

$$(2.4.4) \quad x(t; x_0, t_0) = x(t; x(s; x_0, t_0), s),$$

para toda $t_0 \leq s \leq t$, lo cual nos indica que el futuro es determinado completamente por el presente. Esta es una versión determinística de la propiedad de Markov.

Continuando con la explicación de Einstein al movimiento Browniano observado durante la primera década de este siglo, Langevin y otros formularon la dinámica de tal movimiento en términos de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones resultantes fueron escritas como:

$$(2.4.5) \quad dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)\xi_t dt,$$

con un termino de tendencia determinística o promedio como en (2.4.1) perturbado por un ruido, el termino de difusión $b(t, X_t)\xi_t$, que contiene a ξ_t , el cual representa variables aleatorias gaussianas, y para cada t y $b(t, X_t)$ constituye un factor de intensidad dependiente de espacio-tiempo. Esta diferencial simbólica fue interpretada como una ecuación para cada ruta muestral:

$$(2.4.6) \quad X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t a(s, X_s(\omega)) ds + \int_0^t b(s, X_s(\omega)) \xi_s(\omega) ds.$$

Cuando se extrapola a un límite, las observaciones del movimiento Browniano parecen sugerir que la covarianza $C(t) = E(\xi_s \xi_{s+t})$ del proceso ξ_t , tiene una densidad espectral constante, tal como ocurre con todas las frecuencias de tiempo igualmente ponderadas en una transformada de Fourier de $C(t)$. Tal proceso se conoce como *Ruido Blanco Gaussiano*.

Para el caso específico de la ecuación anterior (2.4.6) con $a \equiv 0, b \equiv 1$ se observa que ξ_t debe ser derivado de un movimiento Browniano puro, tal es el derivado de un proceso Wiener W_t , por lo que, esta ecuación (2.4.6) puede ser escrita alternativamente como:

$$(2.4.7) \quad \int_0^t a(s, X_s(\omega)) ds + \int_0^t b(s, X_s(\omega)) dW_s(\omega).$$

El problema que se presenta con esto, es que el proceso Wiener W_t es no diferenciable, así que estrictamente hablando, el proceso de ruido blanco ξ_t no existe como una función convencional de t . Por lo que, la segunda integral en (2.4.7), no puede ser una integral ordinaria.

Aproximación a Integrales Stratonovich Múltiples¹².

Las integrales estocásticas múltiples son elementales para la representación de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas y sus funciones. Es decir, son los elementos básicos del caos Wiener. Este hecho es ampliamente usado en la construcción de esquemas numéricos de orden superior para la aproximación de la solución de ecuaciones estocásticas. Consecuentemente, se debe ser capaz de generar o por lo menos, aproximar integrales estocásticas múltiples.

Las integrales estocásticas múltiples con alto grado de multiplicidad no siempre son expresadas en términos de integrales estocásticas simples, especialmente cuando el Proceso Wiener es multi-dimensional. Sin embargo, es posible representarlas en forma razonablemente eficiente. A continuación se presenta un método para integrales Stratonovich múltiples, basado en *Kahunen-Loève* o *series de Fourier aleatorias*, expansión del Proceso Wiener. El punto de partida es el Proceso *Brownian Bridge*

$$\left\{ W_t - \frac{t}{\Delta} W_\Delta, 0 \leq t \leq \Delta \right\},$$

que se forma del proceso Wiener de dimensión m $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$ sobre el intervalo de tiempo $[0, \Delta]$. El componente de expansión *Fourier* de este proceso es:

$$(2.5.1) \quad W_t^j - \frac{t}{\Delta} W_\Delta^j = \frac{1}{2} a_{j,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{j,r} \cos\left(\frac{2r\pi t}{\Delta}\right) + b_{j,r} \text{sen}\left(\frac{2r\pi t}{\Delta}\right) \right),$$

y tiene coeficientes aleatorios

$$(2.5.2) \quad a_{j,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left(W_s^j - \frac{s}{\Delta} W_\Delta^j \right) \cos\left(\frac{2r\pi s}{\Delta}\right) ds,$$

y

$$(2.5.3) \quad b_{j,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left(W_s^j - \frac{s}{\Delta} W_\Delta^j \right) \text{sen}\left(\frac{2r\pi s}{\Delta}\right) ds,$$

los cuales son variables aleatorias gaussianas, para $j=1, \dots, m$ y $r=0, 1, 2, \dots$. Se entiende que las series en (2.5.1) convergen en sentido media-cuadrada. Se puede, entonces truncarlos para obtener una aproximación al Proceso *Brownian Bridge*.

Así pues, para cada $p=1, 2, \dots$ se obtiene el proceso

$$(2.5.4) \quad W_t^{j,p} = \frac{t}{\Delta} W_\Delta^j + \frac{1}{2} a_{j,0} + \sum_{r=1}^p \left(a_{j,r} \cos\left(\frac{2r\pi t}{\Delta}\right) + b_{j,r} \text{sen}\left(\frac{2r\pi t}{\Delta}\right) \right),$$

el cual tiene rutas muestrales diferenciables sobre $[0, \Delta]$. Y ya que las integrales Riemann-Stieltjes en tal proceso convergen a integrales estocásticas Stratonovich, es posible utilizar estas integrales para aproximar integrales Stratonovich múltiples.

Las integrales Stratonovich múltiples se denotan como

$$(2.5.5) \quad J_{(j_1, j_2, \dots, j_t)t} = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{t-1}} dW_{s_t}^{j_t} \circ \dots \circ dW_{s_{t-1}}^{j_{t-1}} \circ \dots \circ dW_{s_1}^{j_1},$$

con un índice múltiple $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_t) \in \{0, 1, \dots, m\}^t$ y un proceso Wiener de dimensión m $W = (W^1, \dots, W^m)$, tomando $W_0^t = t$ así se puede incluir la integración con respecto a t en el mismo formalismo. En adición se escribe

$$(2.5.6) \quad J^p_{(j_1, j_2, \dots, j_t)t} = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{t-1}} dW_{s_t}^{j_t, p} dW_{s_{t-1}}^{j_{t-1}, p} \dots dW_{s_1}^{j_1, p},$$

para las integrales Riemann-Stieltjes correspondientes de las funciones uniformes definidas en (2.5.4).

Para cada $j=1,\dots,m$ y $r=1,\dots,p$ con $p=1,2,\dots$ se definen variables aleatorias gaussianas estándar independientes $\xi_j, \zeta_{j,r}, \eta_{j,r}, \mu_{j,p}$ y $\phi_{j,p}$ de la forma siguiente:

(2.5.7)

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} W_{\Delta}^j, \quad \zeta_{j,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi a_{j,r}, \quad \eta_{j,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi b_{j,r}$$

$$\mu_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{\Delta} \rho_p} \sum_{r=p+1}^{\infty} a_{j,r}, \quad \phi_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{\Delta} \alpha_p} \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{r} b_{j,r},$$

y donde:

$$\rho_p = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^2}, \quad \alpha_p = \frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^4}.$$

Usando estas variables aleatorias, resulta que después de varios cálculos, se puede aproximar una integral múltiple *Stratonovich* $J_{(j_1, \dots, j_k), \Delta}$ mediante $J_{(j_1, \dots, j_k), \Delta}^p$ siendo $p=1, 2, \dots$ de la manera descrita a continuación. Por simplicidad se omite el subíndice del tiempo Δ de la J_{α}^p . Tomando $j, j_1, j_2, j_3 \in \{1, \dots, m\}$

(2.5.8)

$$J_{(0)}^p = \Delta, \quad J_{(j)}^p = \sqrt{\Delta} \xi_j, \quad J_{(0,0)}^p = \frac{1}{2} \Delta^2$$

$$J_{(j,0)}^p = \frac{1}{2} \Delta (\sqrt{\Delta} \xi_j + a_{j,0}), \quad J_{(0,j)}^p = \frac{1}{2} \Delta (\sqrt{\Delta} \xi_j - a_{j,0})$$

$$\text{donde } a_{j,0} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{2\Delta} \sum_{r=1}^p \frac{1}{2} \zeta_{j,r} - 2\sqrt{\Delta} \rho_p \mu_{j,p};$$

Y finalmente la integral Múltiple que nos interesa y que se usará para simular la Volatilidad instantánea σ ,

$$(2.5.9) \quad J_{(j_1, j_2)}^p = \frac{1}{2} \Delta \xi_{j_1} \xi_{j_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta} (a_{j_2,0} \xi_{j_1} - a_{j_1,0} \xi_{j_2}) + \Delta A_{j_1, j_2}^p,$$

$$\text{con } A_{j_1, j_2}^p = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} (\zeta_{j_1, r} \eta_{j_2, r} - \eta_{j_1, r} \zeta_{j_2, r}).$$

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.

⁶ Kloeden, Peter E. y Platen, Eckhard. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlang Berlin Heidelberg. New York, 1995. 632 pp.

⁷ Ibidem.

⁸ Black, F. Scholes, M. "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*". Journal of Political Economy. Mayo-Junio, págs. 637-654, 1973.

⁹ Marki, S. "*Derivative Financial Products*" Harper Bussines. U.S.A., 1991.

¹⁰ Figlewski, S. Et. al. (1990) págs.119-123.

¹¹ Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Springer-Verlang. Berlin Heidelberg New York. 1997. 283 pp.

¹² Ibidem.

III. APROXIMACIONES NUMÉRICAS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.

Como ya vimos en el segundo capítulo de esta tesis, existen diferentes tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas, algunas de ellas tienen su solución que se conoce explícitamente, a través de la aplicación de las reglas del cálculo Estocástico o de Ito. Sin embargo, existen otras, para las cuales es prácticamente imposible, encontrar su solución exacta, por lo cual es necesario, la utilización de métodos numéricos, para aproximar su solución.

Debido a que la simulación computacional de la ecuación diferencial estocástica, punto central de estudio de este trabajo de investigación, tiene como ingrediente principal, una integral múltiple Stratonovich, que modelará una volatilidad estocástica, se hace necesario el uso de los métodos numéricos.

Así pues, a continuación se presentan algunas cuestiones importantes, que deben conocerse acerca de los métodos numéricos, comenzando con una introducción general acerca de éstos, hasta llegar a la definición matemática del Método Fuerte que se utilizará para la modelación y simulación computacional de la trayectoria muestral descrita por una ecuación diferencial estocástica, para el caso específico de los precios del subyacente de las opciones Telmex.

Para el desarrollo de estos temas se hecha mano del contenido del libro **Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments**¹³.

Método de Euler.

Los métodos numéricos más ampliamente y comúnmente utilizados, para resolver problemas de valores iniciales, son las aproximaciones de tiempo discretas o los métodos de diferencias.

El método de diferencias más simple para un problema de valores iniciales es el Método de Euler

$$(3.1.1) \quad y_{n+1} = y_n + a(t_n, y_n) \Delta_n.$$

Este método es definido para tiempos de discretización dados $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ con incrementos $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$ donde $n=0,1,2,\dots$. Una vez que el valor inicial y_0 se especifica, usualmente $y_0 = x_0$, las aproximaciones $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ se calculan aplicando la fórmula (3.1.1) recursivamente. Éste es derivado de fijar la parte derecha de la ecuación diferencial

sobre el intervalo de tiempo $t_n \leq t < t_{n+1}$ al valor $a(t_n, y_n)$ y después integrar para obtener la tangente de la solución $x(t; t_n, y_n)$ de la ecuación diferencial con el valor inicial $x(t_n) = y_n$ la diferencia

$$(3.1.2) \quad l_{n+1} = x(t_{n+1}; t_n, y_n) - y_{n+1},$$

que generalmente no es cero, se denomina error de discretización local para el n-ésimo paso de tiempo. Usualmente este error de discretización local, no es el mismo que el error de discretización global, el cual se escribe como

$$(3.1.3) \quad e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1},$$

y se aplica para el mismo paso de tiempo y corresponde al error respecto a la solución $x(t; t_0, x_0)$ del problema original de valor inicial.

Métodos de Orden Superior.

Un método numérico converge con un orden γ si existe una constante $K < \infty$, por lo que el error absoluto de discretización global $|e_{n+1}|$ puede ser circunscrito debido a lo anterior a $K\Delta^\gamma$ para todo $\Delta \in (0, \delta_0)$ para algún $\delta_0 > 0$. Así pues, el Método de Euler tiene orden $\gamma = 1.0$. Por lo tanto, si se desea obtener aproximaciones más exactas se necesita la utilización de métodos con un error de discretización de orden más alto.

Por ejemplo, existe el método trapezoidal, que se escribe como

$$(3.2.1) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{a(t_n, y_n) + a(t_{n+1}, y_{n+1})\} \Delta,$$

donde Δ es el tamaño del paso equidistante. Éste es llamado Esquema Implícito, debido a que el valor desconocido y_{n+1} aparece en ambos lados de (3.2.1) y en general, no puede resolverse algebraicamente. Para sortear esta dificultad se puede usar el método Euler para aproximar el término y_{n+1} en el lado izquierdo de (3.2.1). Así se obtiene el método trapezoidal modificado:

$$y_{n+1} = y_n + a(t_n, y_n) \Delta$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{a(t_n, y_n) + a(t_{n+1}, y_{n+1})\} \Delta,$$

o escrito conjuntamente

$$(3.2.2) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{a(t_n, y_n) + a(t_{n+1}, y_n + a(t_n, y_n) \Delta)\} \Delta,$$

que es conocido como el Método Euler Mejorado o Método de Heun. Éste es un ejemplo muy simple de un método predictor-corrector.

Tanto el método trapezoidal como el trapezoidal modificado tienen errores de discretización local de orden tres en Δ . Se debe comentar que, se realizaron algunas simulaciones de las trayectorias muestrales solución de la ecuación $S_t = \sigma S_t dW_t$, pero debido a este error de discretización se pensó en usar algún otro método cuyo error fuera menor, y que se ajustará mejor a la trayectoria descrita por los valores reales de los precios del subyacente de las opciones Telmex. Es por esto, que a continuación se presentan algunos otros métodos de aproximación numérica, que sirven de referente a la definición del método fuerte que se usa, para la generación de las trayectorias muestrales solución de la ecuación $S_t = \sigma S_t dW_t$.

Existen pues, diferentes métodos, los cuales son llamados *métodos de multipasos*, y que proporcionan mayor exactitud si se usa información de intervalos previos de discretización. Un ejemplo es el Método Adams-Bashford de 3-pasos

$$(3.2.3) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12} \{23a(t_n, y_n) - 16a(t_{n-1}, y_{n-1}) + 5a(t_{n-2}, y_{n-2})\} \Delta$$

El cual tiene un error global de discretización de tercer orden.

Es muy sencillo obtener métodos de orden superior a través del truncamiento de expansiones de Taylor. Usualmente, existe un interés más bien teórico que práctico en estos métodos, ya que envuelven derivadas de orden superior de la función a , lo cual los vuelve complicados.

El método truncado de Taylor de primer orden es justamente el método de Euler (3.1.1). El método truncado de Taylor de segundo orden se escribe como

$$(3.2.4) \quad y_{n+1} = y_n + a\Delta + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} a + a \frac{\partial}{\partial x} a \right\} \Delta^2,$$

y el método truncado de Taylor de tercer orden

$$(3.2.5) \quad y_{n+1} = y_n + a\Delta + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} a + a \frac{\partial}{\partial x} a \right\} \Delta^2 + \frac{1}{3!} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} a + 2a \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} a + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} a + \left(\frac{\partial}{\partial t} a \right) \frac{\partial}{\partial x} a + a \left(\frac{\partial}{\partial x} a \right)^2 \right\} \Delta^3,$$

donde a y sus derivadas parciales son evaluadas en (t_n, y_n) .

El clásico método Runge-Kutta de cuarto orden es un importante método explícito que elimina el uso de derivadas y tiene la forma:

$$(3.2.6) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \{k_n^{(1)} + 2k_n^{(2)} + 2k_n^{(3)} + k_n^{(4)}\} \Delta,$$

donde

$$\begin{aligned} k_n^{(1)} &= a(t_n, y_n), \\ k_n^{(2)} &= a\left(t_n + \frac{1}{2} \Delta, y_n + \frac{1}{2} k_n^{(1)} \Delta\right), \\ k_n^{(3)} &= a\left(t_n + \frac{1}{2} \Delta, y_n + \frac{1}{2} k_n^{(2)} \Delta\right), \\ k_n^{(4)} &= a(t_{n+1}, y_n + k_n^{(3)} \Delta) \end{aligned}$$

Los métodos de paso múltiple no requieren de muchas evaluaciones de la función a , por paso de tiempo, como los métodos de un solo paso, aún cuando sean del mismo orden. Sin embargo, éstos pueden sufrir de una seria inestabilidad numérica.

Aproximación Discreta de Tiempo.

A continuación se presenta una aproximación discreta de tiempo, llamada *Aproximación Euler*. Este método permite generar una ruta muestral aproximada de una solución de una ecuación diferencial estocástica.

Se refiere éste método, ya que, fue utilizado para realizar algunas simulaciones previas, de las trayectorias muestrales solución de la ecuación ya mencionada, sin embargo, los datos arrojados por éstas simulaciones, distaban grandemente de los valores reales de los precios del subyacente de las opciones Telmex, por lo que se decidió no utilizarlo y en su lugar emplear un esquema de orden superior que se describe más adelante. Fue útil comenzar con la simulación de las trayectorias muestrales, usando éste método, debido a que se parece mucho al caso determinístico, excepto porque para el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas, se requiere generar incrementos aleatorios.

Así pues, considérese el proceso Ito $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica escalar

$$(3.3.1) \quad dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t,$$

sobre $t_0 \leq t \leq T$ con el valor inicial

$$(3.3.2) \quad X_{t_0} = X_0,$$

para una discretización dada $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$ del intervalo de tiempo $[t_0, T]$. Una aproximación Euler es un proceso estocástico continuo $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$ que satisface el esquema iterativo

$$(3.3.3) \quad Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}),$$

para $n=0,1,2,\dots,N-1$ con valor inicial

$$(3.3.4) \quad Y_0 = X_0,$$

donde

$$(3.3.5) \quad Y_n = Y_{(\tau_n)} \quad \text{para el valor de la aproximación al tiempo de discretización } \tau_n.$$

Considérense ahora tiempos de discretización equidistantes, tales como

$$(3.3.6) \quad \tau_n = t_0 + n\Delta,$$

con tamaño del paso $\Delta = (T - t_0)/N$ siendo N algún entero. Cuando el coeficiente de difusión es idéntico a cero, es decir cuando $b \equiv 0$, el esquema iterativo estocástico (3.3.3) se reduce al esquema de Euler determinístico (3.1.1)

La secuencia $\{Y_n, n=0,1,\dots,N\}$ de valores de la aproximación de Euler (3.3.3) en los instantes de tiempo $\{\tau_n, n=0,1,\dots,N\}$ de la discretización pueden ser calculados en forma similar que en el caso determinístico. La principal diferencia entre ellos, es que en este caso se requieren generar incrementos aleatorios

$$(3.3.7) \quad \Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n},$$

para $n=0,1,\dots,N-1$, del proceso Wiener $W = \{W_t, t \geq 0\}$, del cual sabemos que tales incrementos son variables aleatorias gaussianas independientes con media

$$(3.3.8) \quad E(\Delta W_n) = 0,$$

y varianza

$$(3.3.9) \quad E((\Delta W_n)^2) = \Delta,$$

Los incrementos (3.3.7) del proceso Wiener pueden ser generados por un generador de números pseudo aleatorios gaussianos independientes, tal como el Método Polar Marsaglia.

Esquemas Explícitos Fuertes de Aproximación.

Tal como se comentó al principio de este capítulo, hablando de ecuaciones determinísticas, las Aproximaciones Fuertes de Taylor, tienen una desventaja y ésta es que, las derivadas de

varios ordenes de los coeficientes de difusión y tendencia, deben determinarse y evaluarse en cada paso en adición de los mismos coeficientes.

Por lo que es más conveniente, establecer esquemas fuertes que eliminen el uso de las derivadas en la misma forma que el esquema Runge-Kutta hace lo suyo con respecto a las ecuaciones determinísticas.

A continuación se describe el método de aproximación fuerte que se usará para obtener la solución de la ecuación diferencial estocástica, que en el capítulo V se estudiará.

En vista de las diferencias entre el cálculo estocástico y determinístico, las generalizaciones heurísticas de los esquemas numéricos determinísticos ampliamente usados para ecuaciones diferenciales estocásticas, tal como los esquemas de Runge-Kutta tienen valores limitados.

Así pues, es posible escribir en el caso general de dimensión múltiple d , $m=1,2,\dots$ el esquema fuerte explícito de orden 1.0 con un componente k -ésimo

$$(3.4.1) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j + \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{j_1, j_2=1}^m \{b^{k,j_1}(\tau_n, Y_n) + b^{k,j_2}\} \Delta W_n^j,$$

con el vector de valores de apoyo

$$Y_n = Y_n + a \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta W_n^j,$$

Así pues, existen algunas versiones de los esquemas fuertes explícitos de orden 1.0 que envuelven el coeficiente de tendencia Ito a . Por ejemplo, para el ruido general, Platen¹⁴ propone el esquema que a continuación se presenta, y el que servirá para solucionar la ecuación diferencial estocástica en el Capítulo V.

$$(3.4.2) \quad Y_{n+1} = Y_n + a \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta W_n^j + \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{j_1, j_2=1}^m \{b^{j_2}(\tau_n, Y_n^{j_1}) - b^{j_2}\} Y_{(j_1, j_2)},$$

con

$$Y_n^j = Y_n + a \Delta_n + b^j \sqrt{\Delta_n}.$$

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.

¹³ Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. 2ª. Ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997. 292 pp.

¹⁴ Ibidem

IV. SIMULACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS EN FINANZAS.

Un acercamiento Langevin para fluctuaciones de precios : Efectos de la retroalimentación

El interés por simular matemática y computacionalmente una ecuación diferencial estocástica cuya trayectoria describa el comportamiento de las fluctuaciones de precios de algún índice financiero, en este caso para el subyacente de las opciones Telmex, surgió de la lectura del artículo que lleva por título: "*Elements for a Theory of Financial Risks*"¹⁵ y que habla precisamente al respecto de este tema.

Este artículo nos dice que aún no existe un modelo microscópico convincente que explique las características estadísticas distintivas de las fluctuaciones de precios. Sin embargo, se han realizado algunas propuestas interesantes en este sentido. De hecho en el espíritu de los físicos, es posible describir la dinámica del mercado, a un nivel intermedio, entre el macroeconómico, el que tiene una fuerte relación con los modelos del equilibrio, y por otro lado el nivel de los agentes individuales, el que se relaciona con la teoría de la microestructura del mercado.

Así pues, se tiene la idea de que a pesar del modelado de cada participante individual ("agentes") es imposible en términos cuantitativos, el comportamiento colectivo del mercado y su impacto en los precios en particular, puede ser representado en términos estadísticos por unos cuantos términos en una ecuación dinámica o estocástica.

La construcción de un modelo conveniente para grandes fluctuaciones es muy importante en el campo del Control de Riesgos, ya que los datos históricos o empíricos pueden ser inestables en las extremas colas de las distribuciones. Es posible entonces tener un acercamiento a lo que será la descripción de estas fluctuaciones en términos de fenómenos físicos, tales como el movimiento Browniano.

Por lo tanto, se propone la descripción de la dinámica de los mercados especulativos en términos de una ecuación Langevin simple, la cual puede leerse en límites ciertos como:

$$(4.1.1) \quad \frac{du}{dt} = -\gamma u - bu^2 + \frac{1}{\lambda} \eta(t) \equiv -\frac{\partial V}{\partial u} + \eta(t),$$



donde $u = \frac{dx}{dt}$. Esta ecuación encapsula los ingredientes esenciales: en particular, la retroalimentación de las fluctuaciones de precios, sobre el comportamiento de los participantes del mercado. Intuitivamente, el término en bu^2 corresponde a la aversión al riesgo: la retroacción de la fluctuación de precios pasada, sobre la naturaleza de los agentes, es más fuerte cuando el precio cae que cuando se eleva. Esto es debido a que la pérdida de dinero es peor que no ganar tanto como se podría. La ecuación (4.1.1) presenta la evolución de la posición u de una partícula viscosa ficticia en un "potencial" $V(u) = \frac{\lambda}{2u^2} + \frac{b}{3u^3}$, teniendo un mínimo local para $u=0$, y un máximo local para $u^* = \frac{-\gamma}{b}$. Una barrera

potencial $V^* = \frac{\gamma u^{*2}}{6}$ separa la región estable alrededor de $u=0$, de la inestable. La naturaleza del movimiento de u en semejante potencial es lo siguiente: empezando en $u=0$, la partícula tiene un movimiento aleatorio armónico en la vecindad de $u=0$ hasta que se presenta un evento activador (*el término del ruido blanco o bien, el Proceso Wiener*) que hace que la partícula sea llevada cerca de u^* . Una vez que esta barrera es cruzada, la partícula ficticia alcanza $-\infty$ en un tiempo finito. En términos financieros, el régimen donde u oscila alrededor de $u=0$ y donde b puede ser omitido, es el régimen normal de fluctuaciones. Este régimen normal puede ser, sin embargo, interrumpido por las *quiebras* donde el tiempo derivado del precio se hace muy grande y negativo, debido a la aversión del riesgo b la cual intensifica la caída en el precio.

El Modelo de Black y Scholes¹⁶

Tomando como punto de partida el apartado anterior, que propone una ecuación estocástica simple de Langevin para la descripción de la dinámica de los mercados, se hace necesario conocer algunos otros modelos que plantean, el uso de estas mismas ecuaciones, para la descripción de las grandes fluctuaciones de precios.

Tal es el caso del Modelo de Black y Scholes, quienes en 1973 introdujeron un modelo describiendo la evolución de un valor de cartera con alto riesgo $S=\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ tal como el precio de una acción, un tipo de cambio o un índice. El modelo incluye también un compromiso $B=\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ que evoluciona según una proporción de interés r . La dinámica del compromiso y de la cartera de alto riesgo es descrita por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$(4.2.1) \quad dB_t = rB_t dt,$$

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

$t \in [0, T]$, con valores iniciales dados B_0 y S_0 . $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ es un proceso Wiener bajo una medida de probabilidad P dada, llamada la medida de probabilidad del mundo de riesgo-neutral, y el parámetro σ denota la volatilidad de la cartera de riesgo.

Considérese una opción como la cartera de riesgo S . Una opción de compra europea con precio de ejercicio K que da el derecho de comprar la acción al tiempo T al precio establecido K . El portafolio resultante es por tanto:⁸

$$(4.2.2) \quad f(S_T) = (S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K & : S_T > K \\ 0 & : S_T \leq K \end{cases}$$

donde a^+ denota la parte positiva de a .

Supóngase que se aplica una estrategia de portafolio dinámica $\phi = (\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$, donde al tiempo $t \in [0, T]$ se invierte la cantidad η_t en el portafolio fuera de riesgo B_t y la cantidad ζ_t en el portafolio de riesgo S_t . Por lo que el valor V_t del portafolio al tiempo t es

$$(4.2.3) \quad V_t = \zeta_t S_t + \eta_t B_t.$$

Black y Scholes sugerían que el precio justo de la opción al tiempo $t \in [0, T]$ es la expectación condicional

$$(4.2.4) \quad V_t = u(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E(f(S_T) | \mathfrak{F}_t),$$

donde el álgebra- σ \mathfrak{F}_t expresa la información acerca de la cartera de riesgo por arriba del tiempo t . La estrategia de cobertura correspondiente $\phi = (\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ tiene la forma

$$(4.2.5) \quad \zeta_t = \frac{\partial}{\partial S} u(t, S_t),$$

con

$$(4.2.6) \quad \eta_t = \frac{V_t - \zeta_t S_t}{B_t},$$

la aplicación de esto conduce a una repetición perfecta del derecho al vencimiento T , que es

⁸ Esta relación puede apreciarse claramente en el capítulo Marco de Referencia, en el apartado Determinación del precio de una opción de compra. Aquí se presenta utilizando la letra K para denominar el precio de ejercicio de la opción de compra mientras que allá se emplea E .

$$(4.2.7) \quad V_T = f(S_T).$$

Es importante comentar que Black y Scholes fueron capaces de derivar una fórmula explícita para el cómputo de V_T y ζ_t gracias a que su modelo, tiene una estructura lineal, es decir, considera que el mercado es estable, es decir, que la volatilidad asociada, tiene un comportamiento constante.

Modelo con volatilidad estocástica y dependiente-pasada¹⁷.

La suposición impuesta del comportamiento del precio del bien o acción subyacente, en particular, aquella de una volatilidad constante, en el modelo de Black y Scholes, ha sido la causa de muchos comentarios críticos.

La disponibilidad de métodos numéricos estocásticos para solucionar modelos *Markovianos Multidimensionales*, descritos por ecuaciones diferenciales estocásticas, provee ahora la posibilidad para especificar patrones muy generales de volatilidad estocástica, así como tasas de interés estocásticas.

Considérese un proceso $X=(X^0, X^1, X^2, X^3)^T = (B, S, \sigma, \xi)^T$ satisfaciendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} dB_t &= R(t, X_t)B_t dt \\ dS_t &= r(t, X_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1 \\ d\sigma_t &= -q(\sigma_t - \xi_t)dt + p\sigma_t dW_t^2 \\ d\xi_t &= \frac{1}{\alpha}(\sigma_t - \xi_t)dt \end{aligned}$$

donde $p > 0, q > 0, \alpha > 0$, donde KW^1, W^2 son procesos Wiener independientes dentro de P .

Aquí el precio de compromiso (premio o prima) B tiene la estructura usual con una tasa de interés r Markoviana instantánea y el precio de la acción S sigue un movimiento Browniano geométrico generalizado ya que el cambio y la volatilidad no son constantes. Si se toma como el cambio a $r(t, X_t)$ esto significa que el proceso del precio descontado de la acción S/B sea una martingala bajo la medida P la cual es usada para el precio. El proceso σ y ξ se interpretan como la volatilidad instantánea y la volatilidad promedio ponderada de la acción, respectivamente. La ecuación para σ muestra que la volatilidad instantánea σ_t es distribuida por un ruido externo con un parámetro de intensidad p y al mismo tiempo es

continuamente retirada hacia la volatilidad promedio ξ_t , la cual se denomina reversión inferior. El parámetro q mide la firmeza de la fuerza de la velocidad de ajuste.

La ecuación para la volatilidad promedio ξ puede ser resuelta explícitamente dando:

$$\xi_t = \xi_0 \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\alpha}\right) \sigma_s ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

la cual muestra que ξ_t es un promedio de los valores σ_s ($0 \leq s \leq T$), ponderado con un factor exponencial. Para una α muy grande se obtiene que $\xi_t \approx \xi_0$, mientras que un valor muy pequeño de α genera que $\xi_t \approx \sigma_t$. Así, el parámetro α mide la firmeza de la *dependencia-pasada* (past-dependence) de la volatilidad promedio.

La volatilidad estocástica genera un riesgo intrínseco que no permite, en general, replicación del resultado sin un costo extra. Siguiendo el acercamiento a Föllmer y Schweizer para una opción de compra se obtiene que el precio de la opción puede expresarse como:

$$(4.3.2) \quad V_t = v(t, X_t) = E\left(\exp\left\{-\int_t^T r(s, X_s) ds\right\} f(S_T) \mid \mathfrak{F}_t\right),$$

donde \mathfrak{F}_t denota el álgebra- σ generada por X por arriba del tiempo t . Aquí la estrategia de cobertura es similar a la del caso Black y Scholes, teniendo:

$$(4.3.3) \quad \zeta_t = \frac{\partial}{\partial S} v(t, X_t)$$

y

$$(4.3.4) \quad \eta_t = \frac{V_t - \zeta_t S_t}{B_t},$$

no obstante, excepto en casos especiales, la estrategia $\phi = (\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ no será auto-financiable sobre el promedio. En general, no existe una solución explícita para el precio de la opción o la estrategia de cobertura para este modelo, por lo que debe usarse una aproximación numérica.

Aproximación numérica.

Nuestra propuesta para el caso del subyacente de las opciones Telmex, considera los modelos definidos anteriores y se presenta de la siguiente manera:

Consideramos el modelo propuesto en (4.2.1)

$$dB_t = rB_t dt,$$

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

el cual pertenece al descrito por Black y Scholes, y que entraña el uso de una volatilidad constante. Aplicamos a la misma ecuación una volatilidad estocástica. Por simplicidad, se toma la tasa de interés $r(t,x)$ idéntica a 0. Los otros parámetros son $p=10.0$, la que constituye el parámetro de intensidad del ruido externo que distribuye a σ_t , y el tiempo de expiración $T=1$.

Por lo tanto, tendremos una ecuación estocástica de la siguiente forma:

$$(4.4.1) \quad dS_t = \sigma_t S_t dW_t.$$

Para llevar a cabo la aproximación numérica se toma como valor inicial de $S_0=55.06$, (primer valor de los datos empíricos reales de las opciones Telmex), y $\sigma_0=1.0$;

La solución computacional de esta ecuación, involucra el generar una ruta de solución aproximada de la ecuación diferencial estocástica (4.4.1) usando un esquema fuerte de aproximación, primero usando una volatilidad constante (Modelo de Black Scholes) y luego simular la ruta muestral de la misma ecuación, utilizando una volatilidad estocástica.

Una vez obtenidos los resultados para ambos casos, se procede a su comparación con los datos reales o empíricos del subyacente de las opciones Telmex, lo cual conlleva a la generación de criterios de juicio, que se presentan en la parte final de esta tesis, como conclusiones.

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.

¹⁵ Bouchaud, J.-Ph. Elements for a Theory of Financial Risks. Physica A. N° 263 (1999) pags. 415-426.

¹⁶ Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Springer-Verlang. Berlin Heidelberg New York. 1997. 283 pp.

¹⁷ Ibidem.

V. SIMULACIÓN COMPUTACIONAL PROPUESTA PARA EL ACTIVO SUBYACENTE DE LAS OPCIONES TELMEX.

La solución numérica de las ecuaciones diferenciales estocásticas se ha convertido en una herramienta de trabajo indispensable en una gran cantidad de disciplinas, yendo desde la más avanzada teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas hasta su implementación en aplicaciones específicas. Esto es mucho más fácil debido a la mayor accesibilidad que se tiene a computadoras poderosas a bajos costos, aunado esto, a la disponibilidad de nuevos esquemas numéricos de alto orden para la solución aproximada de tales ecuaciones diferenciales estocásticas.

Así pues, para la modelación del tema que nos ocupa, o sea una ecuación diferencial estocástica de Langevin simple, para una Teoría de Riesgos Financieros, se toma como base el libro **Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments**¹⁸, que además de contar con la información teórica necesaria para la modelación de tales ecuaciones, cuenta con un disquete, el cual contiene algunos programas ya desarrollados y que permiten la mejor comprensión de la modelación de estas ecuaciones.

Es importante mencionar que dicho disquete, incluye el código de algunos programas, sin embargo, precisamente, el tema de esta tesis, se propone como un ejercicio a resolver a los lectores de este libro en el Capítulo 6: **Applications**; por lo que se toman los elementos necesarios de algunos programas ya diseñados por los autores del libro y se realiza una adaptación para la solución de este problema específico. En el prefacio del libro, los autores dan la autorización para que los lectores del mismo puedan tomar como base los programas que se han preparado, modificarlos y adaptarlos para sus propios problemas.

Para la modelación computacional de la ecuación diferencial estocástica, se emplea el Lenguaje Pascal en su modalidad Turbo Pascal ver. 7.0

El Lenguaje Pascal fue escogido debido a su universalidad y ya que permite resaltar la transparencia de la estructura y la adaptabilidad de los programas, lo cual tiene mayor prioridad, en relación con la eficiencia computacional de su preparación.

Otra de las razones para el empleo del Lenguaje Pascal, para la realización de este programa es su gran capacidad de descomposición en partes más pequeñas y la gran manejabilidad de éstas partes.

Debido a que el programa es bastante grande, se dificulta su manejo. Una forma de partir un programa es utilizando unidades. Una unidad es una agrupación lógica de declaraciones que se compila por separado y que es accesible por otros programas o unidades. Las unidades pueden contener tipos, constantes, variables y subprogramas.

Una unidad tiene tres ventajas principales¹⁹:

- **Modularidad.** Dado que las unidades se compilan por separado, parten un programa en trozos más manejables.
- **Reutilización.** Las declaraciones están disponibles para otro programa o unidad, por lo que las unidades constituyen bibliotecas de componentes reutilizables.
- **Ocultamiento de información.** Las unidades están estructuradas de forma que un programa que las utilice no tenga acceso a los detalles de implementación.

Las unidades que incluye el programa son las siguientes y de las cuales se hecha mano para simular las trayectorias muestrales que describen las fluctuaciones de los precios, son las siguientes:

1. AAGRAPHS
2. EXTGRAPH
3. INIT
4. RANDNUMB
5. SERVICE
6. SETSCR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Además de la unidades estándar de Pascal.

Propiedades estadísticas de la Volatilidad de las fluctuaciones de precios.

Antes de realizar la modelación de la ecuación diferencial estocástica, es interesante verificar el comportamiento de los precios de las opciones, para lo cual se realizan algunos estudios previos, que muestran la directriz que siguen los precios de las opciones Telmex que cotizan en la Bolsa. A través de un programa computacional se obtiene la ruta muestral de los precios de las opciones, para el período 1998 y 1999. Dichos datos se toman de los anuarios de la Bolsa Mexicana de Valores de cada uno de los meses de tales períodos. También se modelan la amplitud de los cambios de los precios de las opciones y se introduce el concepto de volatilidad.

Para la definición de las propiedades estadísticas de la volatilidad de las fluctuaciones de los precios, se considera el artículo **Statistical properties of volatility of price fluctuations**²⁰.

En el artículo arriba mencionado, se realiza un análisis del comportamiento de las acciones del índice S&P 500, durante un período de 13 años, desde Enero de 1984 hasta Diciembre de 1996. Obteniéndose resultados interesantes. Tal análisis se retoma y se adapta para realizar las mismas observaciones sobre los índices de las opciones Telmex, teniéndose comportamientos muy similares.

Análisis de las fluctuaciones de precios y la Volatilidad.

Algunos estudios muestran que el proceso estocástico del cambio de precios tiene pronunciadas colas en contraste con la distribución de Gauss. La función de autocorrelación de los precios decae exponencialmente con un tiempo característico de 4 minutos. Adicionalmente, estudios más recientes, muestran que la amplitud de los cambios de los precios medidos por el valor absoluto o la raíz cuadrada, muestran correlaciones tipo ley de potencias con un rango de persistencia por arriba de varios meses. Estas dependencias con un largo rango, son modeladas de una mejor forma definiendo un "proceso subsidiario", frecuentemente referido como la **volatilidad** en Economía.

La volatilidad de los cambios en los precios de los valores financieros mide la susceptibilidad del mercado a las fluctuaciones. Por lo que se debe construir un estimador para la volatilidad. En este punto, por ejemplo, se estima la volatilidad como el promedio local del valor absoluto de los cambios de los precios.

La *volatilidad* es de gran interés para los inversionistas, ya que cuantifica el riesgo y es el insumo clave de todos los **modelos de precios de opciones**, incluyendo el modelo clásico de Black y Scholes y el de Cox, Ross, y el modelo binomial de Rubinstein, los cuales se basan en las estimaciones de la volatilidad de los activos sobre la vida restante de la opción. Sin una eficiente estimación de la volatilidad, sería difícil para los inversionistas identificar las situaciones en las cuales las opciones están sobre valuadas o por debajo de su precio.

Tomando este marco de referencia, tomamos los datos correspondientes a los precios del subyacente de las opciones de Telmex, correspondientes al Mercado Mexicano de Derivados, y a través de un algoritmo se visualizan los efectos y el comportamiento de éstas para el caso mexicano. Y al comparar los resultados del caso mexicano, contra los que reporta el índice S&P 500, encontramos que ambos tienen comportamientos afines y por demás parecidos.

Para la generación de los resultados se realizaron algunos programas, en Lenguaje Pascal. Los datos se leen desde un archivo, se les aplican algunas operaciones aritméticas y los resultados son enviados a otro archivo, desde donde se pueden manipular e interpretar. Dichos programas, fueron creados en base a los algoritmos matemáticos que se presentan a continuación y para la presentación en pantalla de los resultados, se utilizan algunas Unidades incluidas en el disco del Libro **Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments**²¹.

A continuación se presentan, las propiedades estadísticas de la volatilidad, y los resultados comparados entre el caso mexicano y el mencionado índice S&P 500.

Cuantificación de la Volatilidad.

El termino *volatilidad* representa una medida genérica de la magnitud de las fluctuaciones del mercado. Una de las medidas de estimación de la volatilidad se puede tratar como el promedio local del valor absoluto de los cambios en el precio en un intervalo de tiempo T , el cual es un parámetro ajustable en esta estimación.

Se define $Z(t)$ como el índice o valor de un producto financiero, en este caso específico, el activo subyacente de las opciones Telmex, y entonces observamos que la trayectoria muestral descrita por las fluctuaciones de precios de ése índice financiero puede visualizarse de la siguiente manera:

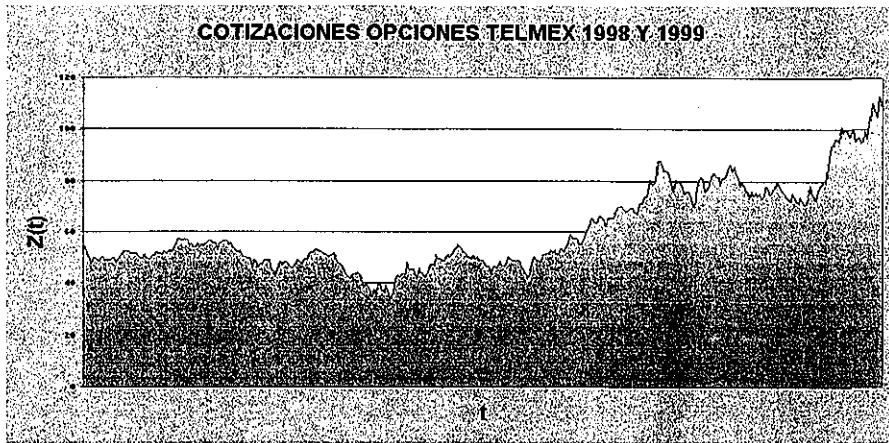


Fig. 1(a). Muestra las fluctuaciones $Z(t)$ de los precios del subyacente de las opciones de Telmex durante el periodo de 1998 y 1999. Con intervalos de tiempo $\Delta t=1$ día.

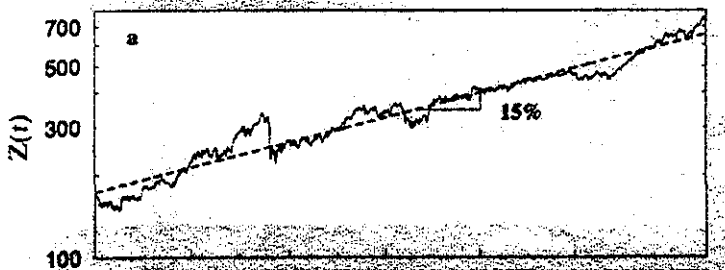


Fig. 1 (b). El índice de S&P 500 $Z(t)$, durante un periodo de 13 años: del 3 de enero de 1984 al 31 de Diciembre de 1996, con intervalos muestrales $\Delta t=1$ min.

Si se comparan los datos suministrados en ambos casos se podrá observar que mientras que para el índice S&P 500 se toman $\Delta t= 1$ min, en el caso mexicano de los precios de las opciones de Telmex, se toman $\Delta t= 1$ día, debido a que la Bolsa Mexicana de Valores, en sus anuarios, sólo pone a disposición del público, los valores al final de la jornada.

Sin embargo, a pesar de esta situación, es posible visualizar una enorme similitud entre los comportamientos de ambos índices.

El código del programa que permite la visualización de los precios de las opciones Telmex, es el siguiente:



```
{Programa que grafica los precios de las opciones telmex}
PROGRAM PRECIOS_OPCIONES;
USES CRT, DOS, INIT, SERVICE, GRAPH, SETSCR, AAGRAPH;
{DEFINICIÓN DE CONSTANTES}
CONST
N=512;
{DEFINICION DE VARIABLES}
VAR
I: INTEGER; {CONTADOR}
Z: VECTOR; {ARREGLO DONDE SE GUARDAN LOS PRECIOS LEIDOS DESDE EL
ARCHIVO}
ABSCISSA: VECTOR; {CONTIENE LOS VALORES DEL EJE DE LAS X}
E: TEXT; {SE DEFINE UNA VARIABLE DE TEXTO, PARA HACER REFERENCIA AL
ARCHIVO}
    {DESDE DONDE SE LEERAN LOS DATOS DE ENTRADA}

{EMPIEZA EL PROGRAMA PRINCIPAL}
BEGIN
INITIALIZE;
MAINWINDOW("");
ASSIGN (E, 'C:\PASCAL\ENTRADA.TXT');
RESET(E);
{INICIALIZACION DE VARIABLES}
I:=0;
{LEER DATOS DE ARCHIVO Y GUARDARLOS EN UN ARREGLO}
WHILE NOT EOF(E) DO
BEGIN
I:=I+1;
ABSCISSA[I]:=I;
READLN(E, Z[I]);
END;
GRAPH111(Z,ABSCISSA,'Z(T)', 'T', '');
STATUSLINE('PRECIOS DE OPCIONES TELMEX EN 1999 Y 1998');
WAITGOTO;
MYEXITPROC;

CLOSE (E);
END.
```

Para la realización de este programa, se retoman algunas unidades estándar de Pascal como son CRT y DOS, las unidades INIT, SERVICE, GRAPH, SETSCR y AAGRAPHs, son unidades creadas por Henri Schurz. Por tanto, el programa fue adaptado para que pudieran utilizarse dichas unidades y de esa manera obtener la graficación de los resultados.

Cuando se ejecuta el programa PRECIOS.EXE, se obtiene la siguiente salida en pantalla:

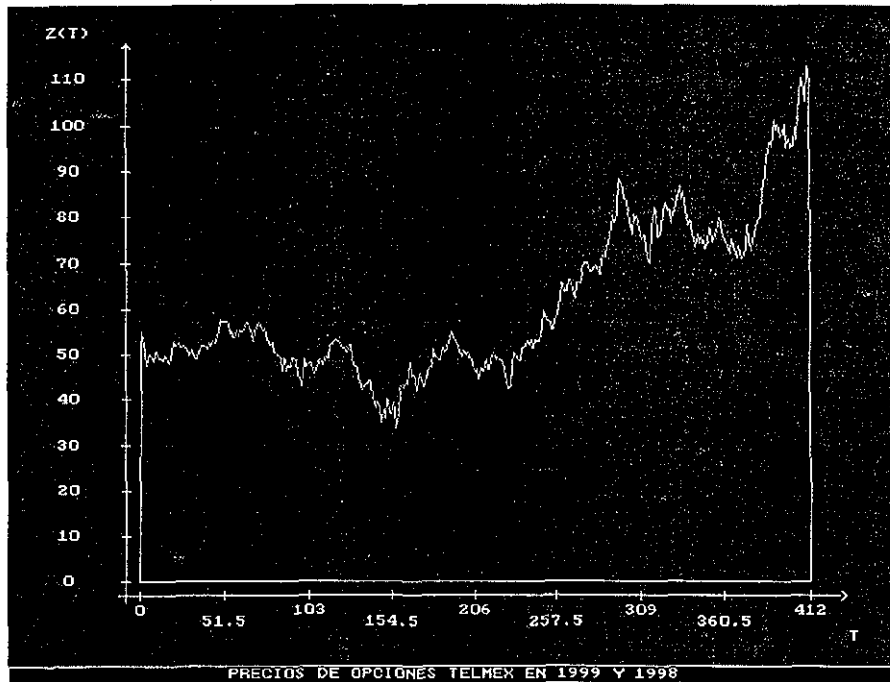


Fig. 1(c). Salida del programa PRECIOS.EXE, que muestra en pantalla la ruta muestral seguida por los valores reales de los precios del subyacente de las opciones Telmex, durante los años de 1998 y 1999.

Ahora bien, se define el cambio de precio $G(t)$ como el cambio en el logaritmo del índice $Z(t)$:

$$G(t) \equiv \ln Z(t+\Delta t) - \ln Z(t) \approx \frac{Z(t+\Delta t) - Z(t)}{Z(t)}$$

Si aplicamos este algoritmo a los precios reales del subyacente de las opciones Telmex, obtenemos una grafica que muestra la ruta muestral seguida por el cambio en los precios de tal índice financiero, tal como se puede observar en la fig. 2.

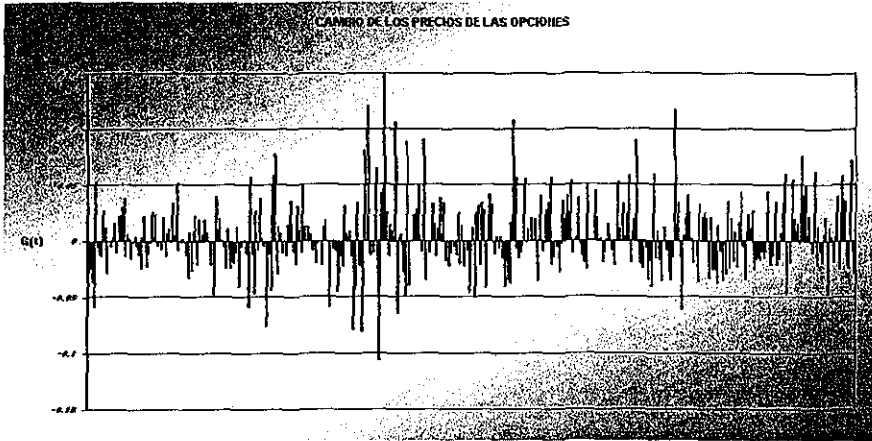


Fig. 2 Al generar un algoritmo computacional, empleando la fórmula descrita anteriormente, y suministrar los datos correspondientes a los valores reales de los precios del subyacente de las opciones de Telmex para el periodo de 1998 y 1999, se obtiene una gráfica como la anterior. Donde el $\Delta t = 1$ día.

Así pues, para obtener los resultados que muestra la gráfica anterior, bastó con suministrar los datos de los valores de las opciones Telmex, en un archivo que lee el programa y aplicar en un bucle, a cada uno de los valores la operación:

$$\frac{Z(t+\Delta t) - Z(t)}{Z(t)}$$

Se genera un arreglo $Z[N]$, donde N es igual al total de los valores de los precios del subyacente de las opciones y tomando como $Z(t)$ el valor de la opción en la posición $Z[i]$ y como $\Delta t = 1$ día, es decir el valor de $Z[i+1] - Z[i]$.

Ahora bien, se tiene que el Δt es un intervalo de tiempo muestral, por lo que el valor absoluto de $G(t)$ debe describir la amplitud de la fluctuación. Así pues, los valores grandes de $|G(t)|$ deben corresponder a quiebras y grandes recuperaciones.

Al aplicar el valor absoluto sobre $G(t)$, se obtienen los siguientes resultados:

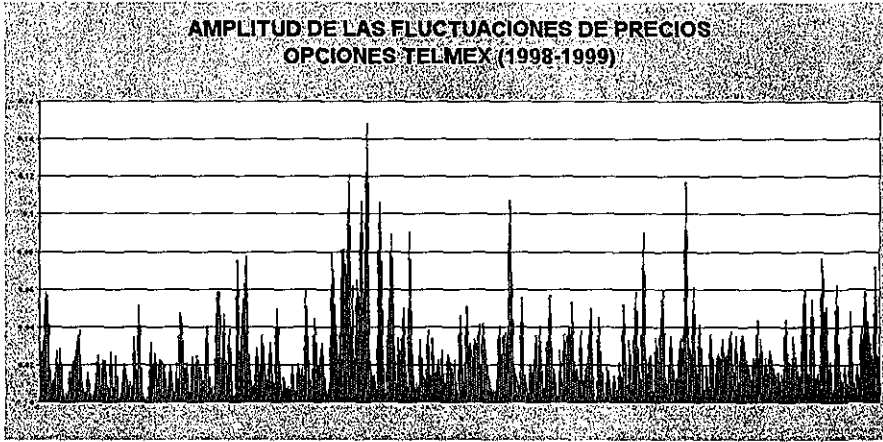


Fig. 3 Al aplicar valor absoluto sobre los cambios en los valores reales de los precios del subyacente de las opciones de Telmex para los periodos 1998 y 1999, se obtiene una gráfica como la anterior, que muestra la amplitud de las fluctuaciones de los cambios de los precios. Los grandes picos corresponden a quiebras o grandes recuperaciones.

El código del programa que calcula la Amplitud de las fluctuaciones de los precios de las opciones Telmex, es el siguiente:

*{Programa que calcula y gráfica las variaciones en los precios de }
{las opciones telmex, para el periodo 1998-1999}
{Calcula el valor absoluto de los cambios de los precios $G(t)$ }
{Obteniendose la Amplitud de los cambios en los precios $|G(t)|$ }*

```
PROGRAM CAMBIO_PRECIOS;  
USES CRT, DOS, INIT, SERVICE, GRAPH, SETSCR, AAGRAPH5;  
{DEFINICION DE CONSTANTES}
```

```
CONST  
N=512;
```

```
{DEFINICION DE VARIABLES}
```

```
VAR  
I: INTEGER; {CONTADOR};  
Z: VECTOR;  
GT: VECTOR;  
ABSCISSA: VECTOR;  
E: TEXT;
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
{EMPIEZA EL PROGRAMA PRINCIPAL}
BEGIN
INITIALIZE;
MAINWINDOW("");
ASSIGN (E, 'C:\PASCAL\ENTRADA.TXT');
RESET(E);

{INICIALIZACION DE VARIABLES}
I:=0;

{LEER DATOS DE ARCHIVO Y GUARDARLOS EN UN ARREGLO}
WHILE NOT EOF(E) DO
BEGIN
I:=I+1;
ABSCISSA[I]:=I;
READLN(E, Z[I]);
END;
I:=0;
REPEAT
I:=I+1;
GT[I]:=ABS((Z[I+1]-Z[I])/Z[I]);
UNTIL I=410;

GRAPH111(GT,ABSCISSA,'G(T)', 'T', '');
STATUSLINE('AMPLITUD DE CAMBIOS EN LOS PRECIOS DE OPCIONES TELMEX EN
1999 Y 1998');
WAITTGO;

MYEXITPROC;

CLOSE (E);
END.
```

Cuando se ejecuta, el archivo G_T.EXE, se obtiene la siguiente salida en pantalla que muestra la amplitud de las fluctuaciones de los precios de las opciones Telmex.

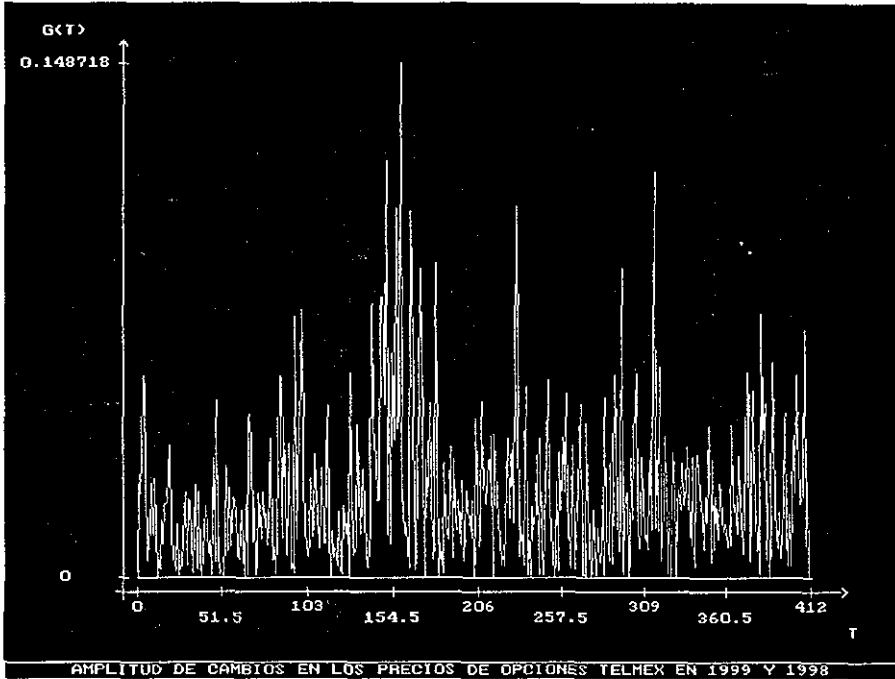


Fig. 4. Muestra la salida en pantalla que genera el programa G_T.EXE y que corresponde a la Amplitud de las fluctuaciones de los precios del subyacente de las opciones, para los valores reales correspondientes a los años de 1998 y 1999.

Ahora bien, se define la volatilidad como el promedio de $|G(t)|$ sobre la ventana de tiempo $T=n\Delta t$, $V_T(t) \equiv 1/n \sum_{i=1}^{t+n-1} |G(t')|$.

Donde n es un entero. La definición anterior puede ser generalizada remplazando $|G(t)|$ con $|G(t)|^\gamma$, donde $\gamma > 1$ da más peso a los valores grandes de $|G(t)|$ y $0 < \gamma < 1$ pesa los valores pequeños de $|G(t)|$.

Hay dos parámetros en esta definición de volatilidad, Δt y n . El parámetro Δt es el intervalo de tiempo muestral para los datos y el parámetro n es el promedio moviéndose en el tamaño de la ventana.



En el estudio del índice S&P 500, se observó que la volatilidad fluctuó fuertemente durante la quiebra de 1987. Además se observó que en periodos de alta volatilidad no hay esparcimiento pero tiende a un agrupamiento. Este agrupamiento es especialmente marcado alrededor de la quiebra de 1987. Los patrones oscilatorios antes de la quiebra pueden ser posibles precursores.

Amplitud de los cambios de los precios y su Volatilidad

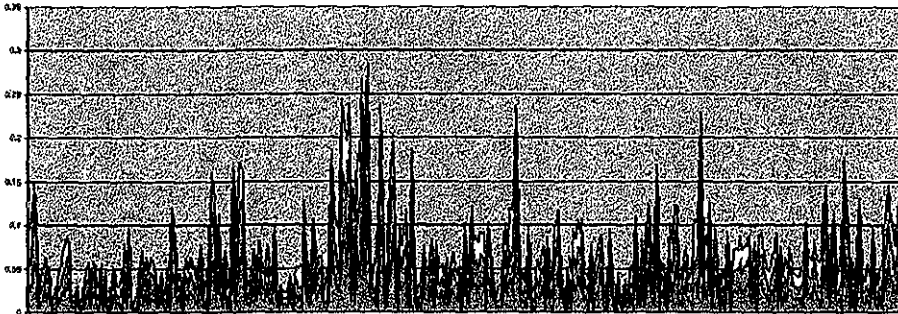


Fig. 5. Esta gráfica muestra la Amplitud de las fluctuaciones de los precios del subyacente de las Opciones Telmex, durante 1998 y 1999, así como la Volatilidad, la cual es calculada de acuerdo con la definición que en esta sección se hace de ella. Se usa $\Delta t=2$ días y $\Delta t=4$ días, como ventana de tiempo.

El código del programa que calcula e imprime en pantalla la ruta muestral de la volatilidad asociada a las fluctuaciones de precios de las opciones Telmex, para los periodos de 1998 y 1999, se presenta a continuación.

```
{Programa que calcula y gráfica las variaciones en los precios de }  
{las opciones telmex, para el periodo 1998-1999}  
{Calcula el valor absoluto de los cambios de los precios G(t)}  
{Obteniendo la Amplitud de los cambios en los precios |G(t)}  
{Realizando el promedio de la amplitud de los precios en un periodo  $\Delta t=2$  días}  
{Se obtiene la grafica de la Volatilidad}
```

```
PROGRAM CAMBIO_PRECIOS;  
USES CRT, DOS, INIT, SERVICE, GRAPH, SETSCR, AAGRAPH;
```

```
{DEFINICIÓN DE CONSTANTES}
```

```
CONST
```

```
N=512;
```

{DEFINICIÓN DE VARIABLES}

VAR

I: INTEGER; {CONTADOR}

Z: VECTOR;

GT: VECTOR;

VT: VECTOR;

ABSCISSA: VECTOR;

E: TEXT;

{EMPIEZA EL PROGRAMA PRINCIPAL}

BEGIN

INITIALIZE;

MAINWINDOW("");

ASSIGN (E, 'C:\PASCAL\ENTRADA.TXT');

RESET(E);

{INICIALIZACIÓN DE VARIABLES}

I:=0;

{LEER DATOS DE ARCHIVO Y GUARDARLOS EN UN ARREGLO}

WHILE NOT EOF(E) DO

BEGIN

I:=I+1;

ABSCISSA[I]:=I;

READLN(E, Z[I]);

END;

I:=0;

REPEAT

I:=I+1;

GT[I]:=-ABS((Z[I+1]-Z[I])/Z[I]);

VT[I]:=(GT[I+4]+GT[I+3]+GT[I+2]+GT[I+1]+GT[I])/5;

UNTIL I=410;

GRAPH321(GT,VT,ABSCISSA,'V(T)';'T','GT','');

STATUSLINE('AMPLITUD DE CAMBIOS EN PRECIOS DE OPCIONES TELMEX Y SU VOLATILIDAD');

WAITTGO;

MYEXITPROC;

CLOSE (E);

END.

Este programa, simplemente es una versión mejorada de aquel que calcula la Amplitud de los Cambios de los precios de las opciones Telmex. Se define un vector llamado VT y allí se acumulan las volatilidades, que se computan como el promedio local de la amplitud de las fluctuaciones de precios, sobre una ventana de tiempo muestral, que puede definirse libremente. Para la salida en pantalla se usa un procedimiento definido en la Unidad AAGRAPH5, que lleva por nombre GRAPH321 y que permite la impresión de dos rutas muestrales en una misma gráfica. Las rutas muestrales que se presentan, corresponden por un lado al valor absoluto de las fluctuaciones de precios ($|G(t)|$) y por el otro, la Volatilidad asociada a este valor. Para calcular la volatilidad se emplea $\Delta t=5$ días, como ventana de tiempo muestral.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Generador de Números Aleatorios²².

Ya que se modelará una ecuación diferencial estocástica, que envuelve al proceso Wiener, se hace necesario la utilización de un generador de números aleatorios, que suministre variables aleatorias con una distribución Gaussiana.

Existen diferentes métodos para la generación de números aleatorios, partiendo de los algoritmos estándar que las computadoras digitales proveen. El Método Pollar Marsaglia, se empleará para la simulación de la ruta muestral del Proceso Wiener.

Debemos comenzar diciendo que, la simulación de modelos matemáticos de sistemas probabilísticos complicados, provee información sobre el comportamiento del modelo y con cierto optimismo, del sistema original mismo, lo cual no puede ser obtenido por otros medios. Deben suministrarse valores numéricos a cada variable aleatoria para lograr pruebas del modelo y así analizar estadísticamente muchas salidas de tales pruebas. Este procedimiento requiere de la generación de grandes cantidades de números aleatorios con propiedades estadísticas específicas.

Originalmente dichos números fueron tomados directamente de variables aleatorias reales, generadas por ejemplo mecánicamente tirando un dado o electrónicamente por el ruido de salida de una válvula y frecuentemente se listaban en tablas de variables aleatorias. Esto hacia impracticable las simulaciones a gran escala y los números no siempre eran estadísticamente confiables, además, una secuencia particular de números aleatorios no siempre podía ser reproducida.

La llegada de las computadoras electrónicas llevó al desarrollo de algoritmos determinísticos simples para generar secuencias de variables aleatorias, en forma rápida y de manera que éstas pueden reproducirse fácilmente. Tales números no son, en sí, del todo aleatorios, de ahí que se les denomine pseudo números aleatorios, pero con suficiente cuidado éstos pueden parecer números aleatorios en muchas propiedades.

Actualmente las computadoras digitales incluyen un generador de pseudo números aleatorios de congruencia lineal. Éstos tienen la forma recursiva:

$$X_{n+1} = aX_n + b(\text{mod } c),$$

donde a y c son enteros positivos y b un entero no negativo. Para un valor inicial entero o una semilla X_0 , el algoritmo anterior genera una secuencia tomando un valor entero de

cero a $c-1$, el cual es el resultado de dividir $aX_n + b$ entre c . Cuando los coeficientes a , b y c se eligen apropiadamente, los números parecen distribuirse uniformemente en el intervalo unitario $[0, 1]$, de la siguiente manera:

$$U_n = \frac{X_n}{c}.$$

Ya que solo se generan números finitos muy diferentes, el modulo c debe elegirse tan grande como sea posible, y más adecuadamente, como potencias de 2, para aprovechar la aritmética binaria usada en las computadoras. Para prevenir el ciclamiento con un período menor a c el multiplicador a debe elegirse como un número primo de c . Generalmente b se elige igual a 0, el generador que resulta típicamente es llamado *generador multiplicativo*. Uno de los generadores que se utiliza con frecuencia es el *RANDU* que tiene como número multiplicador $a=65,539=2^{16}+3$ y modulo $c=2^{31}$, que es el generador de la vieja IBM. Por otro lado, el sistema IBM 360 URNG usa el multiplicador $a=16,807=7^5$ y un modulo $c=2^{31}-1$, el cual es número primo.

Tomando como base que los lenguajes de programación modernos incluyen un generador de pseudo números aleatorios estándar, distribuidos uniformemente $U(0,1)$, se puede utilizar para obtener, a partir de la aplicación de otras operaciones adicionales, pseudo números aleatorios con otras distribuciones.

Por lo tanto, a continuación se presentan algunos métodos para obtener tales pseudo números aleatorios con diferentes distribuciones.

Generador de variables aleatorias discretas.

Así pues, una variable aleatoria de dos puntos X que toma valores $x_1 < x_2$ y con probabilidad de p_1 y $p_2 = 1 - p_1$ pueden ser fácilmente generados de la forma $U(0,1)$ con:

$$X = \begin{cases} x_1 : 0 \leq U \leq p_1 \\ x_2 : p_1 < U \leq 1 \end{cases}$$

esto lleva a una variable aleatoria X de estado N con valores $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ con probabilidad diferente de cero p_1, p_2, \dots, p_N donde $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Si $s_0 = 0$ y $s_j = \sum_{i=1}^j p_i$ para $j=1, 2, \dots, N$ se establece $X = x_{j+1}$, si $s_j < U \leq s_{j+1}$ para $j=0, 1, 2, \dots, N-1$.

Generadores para Variables Aleatorias Exponenciales.

Cuando se trata de variables aleatorias continuas X el método para su generación requiere de la función de distribución de probabilidad F_X , la cual deberá ser invertida cuando esto sea posible. Para un número $0 < U < 1$ se define $x(U)$ donde $U = F_X(x(U))$, de tal manera que $x(U) = F_X^{-1}(U)$ siempre y cuando F_X^{-1} exista, o bien en general:

$$x(U) = \inf\{x : U \leq F_X(x)\}.$$

Lo anterior suele llamarse *método de transformación inversa* y es muy usado cuando la ecuación anterior es fácil de evaluar. Así por ejemplo, la variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda > 0$ y distribución $F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & : x \geq 0. \end{cases}$ tiene una función de distribución invertible con:

$$x(U) = F_X^{-1}(U) = -\ln(1-U) / \lambda \quad \text{para } 0 < U < 1.$$

Método de Box-Muller.

En principio el método de transformación inversa puede usarse para cualquier variable aleatoria continua, pero se requiere de un gran esfuerzo computacional para evaluar la condición $x(U) = \inf\{x : U \leq F_X(x)\}$. Esto ocurre con las variables aleatorias gaussianas estándar ya que las integrales para esta función de distribución deben ser evaluadas numéricamente. Por lo que el método de Box-Muller para la generación de números pseudo-aleatorios gaussianos estándar elimina este problema. Éste se basa en la observación de que si U_1 y U_2 son dos variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente $U(0,1)$, entonces G_1 y G_2 definidas por:

$$G_1 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

$$G_2 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \text{sen}(2\pi U_2)$$

son también variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente.

El Método Polar Marsaglia.

Una variación del Método de Box-Muller que elimina el tiempo que consume el cálculo de las funciones trigonométricas, es el método Polar Marsaglia. Éste se basa en el hecho de que $V=2U-1$ es uniformemente distribuida $U(-1,1)$, siempre y cuando U es distribuida $U(0,1)$, y que para dos de tales variables V_1 y V_2 con:

$$W = V_1^2 + V_2^2 \leq 1,$$

W es distribuida $U(0,1)$ y $\theta = \arctan\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ es distribuida $U(0,2\pi)$. Ya que el círculo de la unidad inscrito tiene $\pi/4$ del área del cuadrado $[-1,1]^2$, el punto (V_1, V_2) puede tomar valores dentro del círculo con probabilidad $\pi/4=0.7864816\dots$. Por lo tanto, sólo deben considerarse esos puntos y descartar todos los demás. Usando:

$$\cos\theta = \frac{V_1}{\sqrt{W}}, \quad \text{sen}\theta = \frac{V_2}{\sqrt{W}},$$

cuando $W = V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ se puede escribir lo siguiente:

$$G_1 = V_1 \sqrt{-2 \ln(W)/W}$$

$$G_2 = V_2 \sqrt{-2 \ln(W)/W}$$

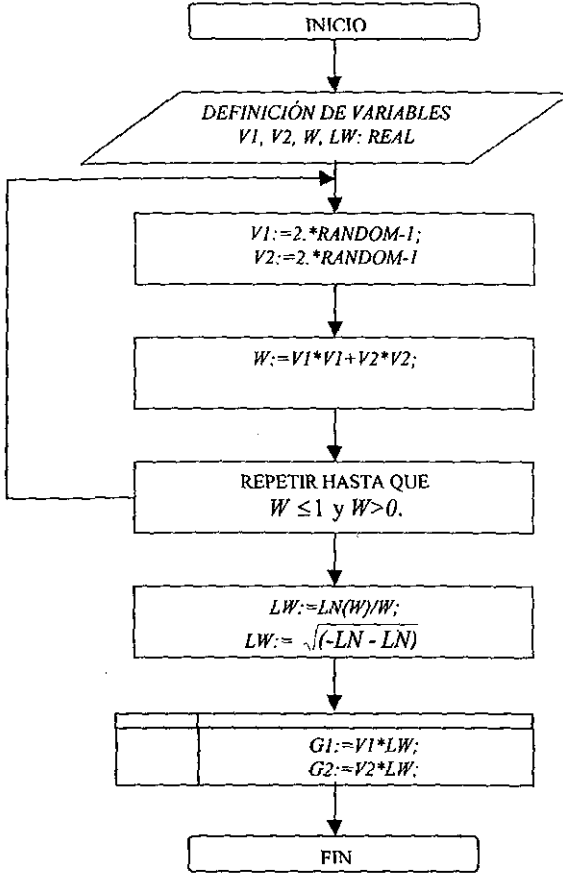
Este método es computacionalmente más eficiente que el Método de Box-Muller cuando se requiere la generación de grandes cantidades de números aleatorios. Esta es la razón por la que se decide la utilización de este método para la simulación del proceso Wiener.

Retomando la definición hecha con anterioridad, del generador de números aleatorios a través del algoritmo planteado por el Método Polar Marsaglia, se hace lo siguiente para su programación computacional:

Este programa, se define como un procedimiento que lleva el nombre GENERATE y se guarda como una unidad, a la cual se le da el nombre de RANDNUM. De esta manera, es posible hacer un llamado a este procedimiento en cualquier otro programa, con la sola inclusión del nombre de la unidad en su cabecera.

- Ahora bien, partamos de la definición de la variable $V=2U-1$, donde la U será el valor del número aleatorio generado por la computadora.
- Entonces se hace $V_1=2U-1$ y $V_2=2U-1$ de esta manera ya que U es un número aleatorio generado por la computadora, V_1 y V_2 serán diferentes. En seguida se hace $W = V_1V_1 + V_2V_2$ y esto se ingresa en un ciclo hasta que $W \leq 1$ y $W > 0$.
- En seguida y ya fuera del ciclo se calcula $LW = \ln(W)/W$ y se hace $LW = \text{SQRT}(-LW)$ y se asigna $G_1 = V_1 * LW$ y $G_2 = V_2 * LW$.

El algoritmo puede esquematizarse en el siguiente diagrama de flujo:



En general, el algoritmo para la generación de números aleatorios, producido a través del Método Polar Marsaglia, no es demasiado complicado, como aquel, usado en el generador de números aleatorios RAN3, sin embargo, sirve perfectamente para las simulaciones de trayectorias muestrales estocásticas, y es por eso que se utiliza en esta tesis.

El código de la unidad que genera los números aleatorios mediante el Método Polar Marsaglia es el siguiente:

```
{Generador de Números Aleatorios      }
{Escrito por Henri Schurz, 9.10. 1991 }
{Modificado por Nora Cureño Peza}

UNIT RANDNUMB;
INTERFACE
USES CRT,DOS,GRAPH;

PROCEDURE GENERATE(VAR G1,G2:REAL);

IMPLEMENTATION
{ Genera dos números aleatorios independientes  $N(0,1)$  }
{por el Método Polar-Marsaglia                               }

PROCEDURE GENERATE(VAR G1,G2:REAL);
VAR
V1,V2,W,LW:REAL;
BEGIN
REPEAT
V1:=2.*RANDOM-1.;V2:=2.*RANDOM-1.;W:=V1*V1+V2*V2;
UNTIL ((W<=1.0) AND (W>0.0)); { obviamente  $LN(0)$  no existe }
LW:=LN(W)/W;LW:=SQRT(-LW-LW);G1:=V1*LW;G2:=V2*LW;
END;{ GENERATE }

END.{ RANDNUMB }
```



El Proceso Wiener.

El proceso Wiener fue propuesto por Norbert Wiener como una descripción matemática del Movimiento Browniano, el cual consiste en el movimiento errático descrito por una partícula de polen en una superficie de agua, debido a que ésta es continuamente bombardeada por moléculas de agua. Es importante aclarar que algunas veces el proceso Wiener es llamado Movimiento Browniano, sin embargo, debe hacerse una separación y distinguirse entre el proceso matemático y el físico.

Los precios de los productos financieros generalmente siguen una trayectoria muy similar al denominado Movimiento Browniano, y ya que el Proceso Wiener constituye la descripción matemática, se debe estudiar la forma en la cual se define éste último. De ahí pues, que se dedique un espacio de esta tesis para su estudio.

Se define el Proceso Wiener Estándar $W = \{W(t), t \geq 0\}$ como un proceso Gaussiano con incrementos independientes tal que:

$$W(0) = 0 \text{ w.p.1, } E(W(T)) = 0, \text{ Var}(W(t) - W(s)) = t - s,$$

para todo $0 \leq s \leq t$.

Ahora bien, el proceso Wiener estándar puede aproximarse en distribución sobre cualquier intervalo de tiempo finito mediante una caminata aleatoria. Por ejemplo, se puede subdividir el intervalo unitario $[0,1]$ en N subintervalos:

$$0 = t_0^{(N)} < t_1^{(N)} < \dots < t_k^{(N)} < \dots < t_N^{(N)} = 1,$$

tales subintervalos tendrán la misma longitud $\Delta t = 1/N$. Entonces es posible construir una caminata aleatoria de pasos continuos $S_N(t)$ tomando, pasos independientes igualmente probables de longitud $\pm\sqrt{\Delta t}$, al final de cada subintervalo. Aquí debe partirse de dos variables aleatorias independientes de dos puntos X_n las cuales tomarán valores ± 1 con igual probabilidad. Así pues es posible definir:

$$S_N(t_n^N) = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)\sqrt{\Delta t},$$

con:

$$S_N(t) = S_N(t_n^N),$$

sobre $t_n^{(N)} \leq t < t_{n+1}^{(N)}$ para $n=0,1,\dots,N-1$ donde $S_N(0)=0$. Esta caminata aleatoria tiene incrementos independientes $X_1\sqrt{\Delta t}, X_2\sqrt{\Delta t}, X_3\sqrt{\Delta t}, \dots$ para los subintervalos dados, pero no es un proceso con incrementos independientes. Esto lleva a que

$$E(S_N(t)) = 0, \quad \text{Var}(S_N(t)) = \Delta t \left\lceil \frac{t}{\Delta t} \right\rceil \text{ para } 0 \leq t \leq 1,$$

Donde $\lceil \tau \rceil$ denota la parte entera de $\tau \in \mathcal{R}$, de tal manera que $\lceil \tau \rceil = k \leq \tau < k+1$ para algún entero k . Ahora bien $\text{Var}(S_N(t)) \rightarrow t$ cuando $N = 1/\Delta t \rightarrow \infty$ para cualquier $0 \leq t \leq 1$. De manera similar, se puede demostrar que para cualquier $0 \leq s \leq t \leq 1$ se tiene, $\text{Var}(S_N(t) - S_N(s)) \rightarrow t - s$ cuando $N \rightarrow \infty$. De esta manera, de acuerdo con el Teorema del Limite Central, se tiene que $S_N(t)$ converge en distribución, cuando $N \rightarrow \infty$, a un proceso con incrementos independientes, satisfaciendo las condiciones para ser un proceso Wiener estándar.

La ruta muestral del proceso Wiener, en finanzas, tiene una apariencia similar a las fluctuaciones o trayectoria descrita por los cambios en los precios de algún valor o acción financiero, en un medio completamente aleatorio.

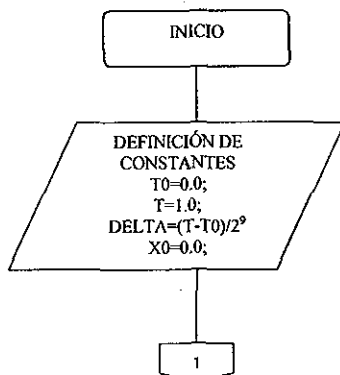
El proceso Wiener es por tanto, muy importante para la simulación y solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, con aplicaciones en Finanzas, por lo que a continuación se presenta el código y la corrida del programa que permiten visualizar su ruta muestral.

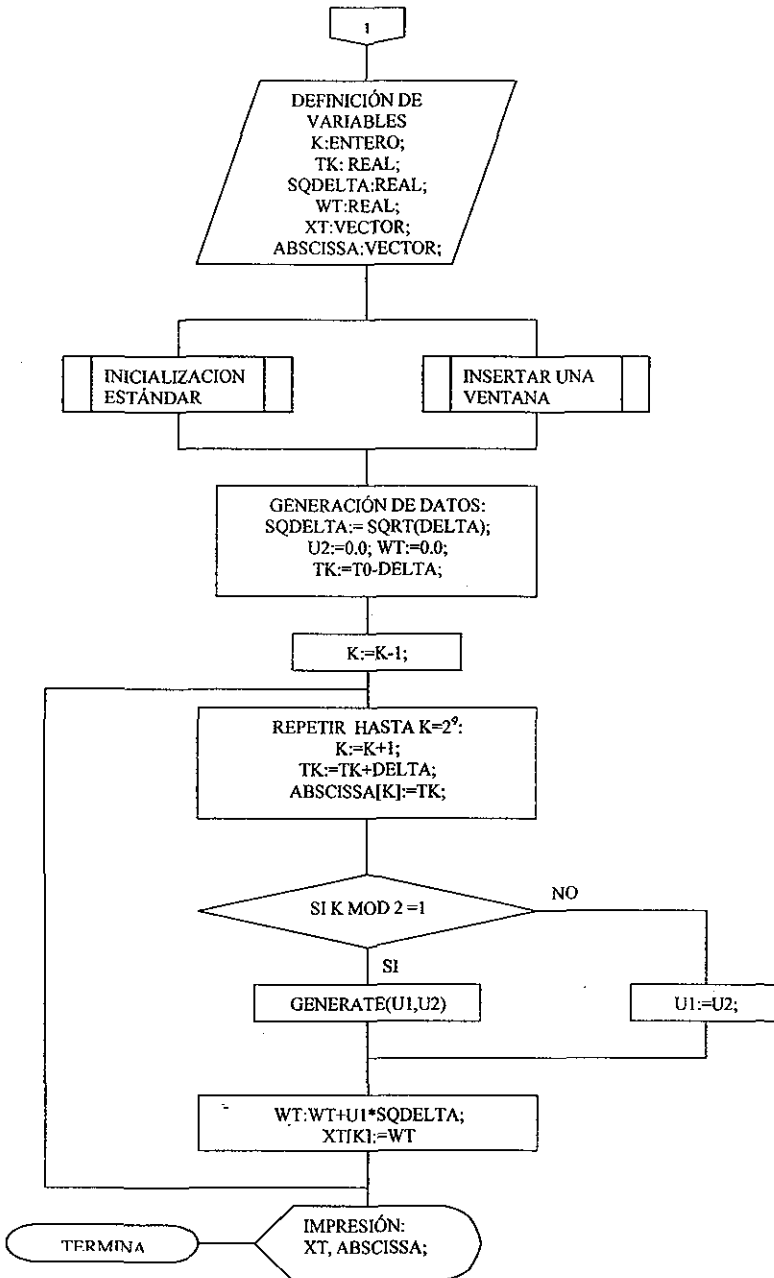
El algoritmo para simular el proceso Wiener se puede formular retomando las características de éste, anotadas con anticipación. Para generar la simulación de su trayectoria muestral se hará uso del Generador de Números Pseudo-aleatorios *GENERATE* que es un procedimiento que se encuentra en la Unidad que lleva el nombre de *RANDNUMB*; éste generador de números pseudo-aleatorios usa el Método Polar Marsaglia, el cual ya ha sido descrito con antelación.

El algoritmo puede describirse como sigue:

1. Se define el intervalo de tiempo en el cual se generará el proceso, el cual será $[0,1]$ donde el 0 es igual al tiempo cero y 1 será el tiempo T.
2. Se definen los incrementos de tiempo Δ_t , que serán igual a: el tiempo T menos el tiempo 0 divididos por 2^9 . Este valor puede cambiarse, sin embargo el 512, es el valor máximo de resolución de la pantalla, medido en píxeles.
3. Se definen las variables que se usarán para guardar los resultados de los cálculos, Tales como: un contador (K), un punto de subintervalo (TK), la raíz cuadrada del tamaño del paso (SQDELTA), se definen las variables para las variables al azar que usa el generador de números aleatorios (U1 y U2), una variable para guardar el valor actual de la trayectoria (WT) y un vector para guardar los valores de la trayectoria (XT), así como un vector que sirva para guardar los valores correspondientes al tiempo (ABSCISSA).
4. El valor inicial de la trayectoria se fija igual a cero.
5. Se calcula la raíz cuadrada de Δ_t , y se asigna a la variable SQDELTA.
6. Se inicializa un bucle desde $k=0$ hasta $k=2^9$
7. Dentro del bucle se hace uso del generador de números pseudo-aleatorios *GENERATE* y se multiplica por la variable que contiene la raíz cuadrada de Δ_t , con lo cual se cumple con la propiedad: $X_1\sqrt{\Delta t}, X_2\sqrt{\Delta t}, X_3\sqrt{\Delta t}, \dots$ que se aplica al Proceso Wiener.
8. Se guardan los resultados en un arreglo y se procede a su impresión en pantalla.

El algoritmo anterior, puede esquematizarse en un, diagrama de flujo de la siguiente manera.





El código que permite la generación de la trayectoria muestral del Proceso Wiener, es el siguiente:

```
{ Simulación de trayectorias del Proceso Estándar Wiener  $X(t) = W(t)$ 
{ con  $X(0) = 0$  usando el Método Polar Marsaglia para generar números
{aleatorios Gaussianos }
{ Escrito por Henri Schurz, 9.10. 1991 }
{Modificado por Nora Cureño Peza, 2001}
```

PROGRAM WIENER;

USES CRT,DOS,GRAPH,INIT,SETSCR,SERVICE,RANDNUMB,AAGRAPHIS; {Unidades}

CONST

```
T0=0.0; {punto inicial de la izquierda }
T=1.0; {punto final de la derecha }
DELTA=(T-T0)/NUMINV; {tamaño mínimo del paso w.r.t. resolución de la pantalla}
X0=0.0; { valor inicial valor de la trayectoria }
```

VAR

```
K:INTEGER; { contador }
TK:REAL; { punto del subintervalo }
SQDELTA:REAL; { raíz cuadrada del tamaño del paso }
U1,U2:REAL; { números aleatorios }
WT:REAL; { valor actual de la trayectoria }
XT:VECTOR; { valores de la trayectoria }
ABSCISSA:VECTOR; { valores de los puntos del subintervalo }
```

{ Programa Principal : }

BEGIN

```
INITIALIZE; { inicialización estándar }
MAINWINDOW(""); { inserta un marco o una ventana}
```

{ Generación de los datos : }

```
SQDELTA:=SQRT(DELTA);
U2:=0.0;WT:=0.0;
TK:=T0-DELTA;
K:=-1;
REPEAT
K:=K+1; { contador }
TK:=TK+DELTA; { tiempo }
ABSCISSA[K]:=TK; { valores del eje de las x }
IF K MOD 2 =1 THEN GENERATE(U1,U2) ELSE U1:=U2; {Método Polar Marsaglia, para
generar números aleatorios. }
WT:=WT+U1*SQDELTA; { valor actual de la trayectoria Wiener }
XT[K]:=WT; { valores del eje de las y }
UNTIL K=NUMINV;
```

```
{ Generar el grafico de la función de densidad usando la rutina AAGRAPHIS }
{ ! la escala del eje x esta tomado en potencia de 2 }
```

{! la escala del eje y corresponde a los extremos de los datos }

```
GRAPH111(XT,ABSCISSA,'W(t)',t,''); {Genera la trayectoria muestral del Proceso Wiener}  
STATUSLINE('Trayectoria del Proceso Wiener, W = {W(t),t>=0}');  
WAITTOGO; { Espera a que se presione <ENTER> }  
    {! <ESC> termina el programa }
```

```
MYEXITPROC; { cierra el modo grafico y se coloca en la dirección del procedimiento anterior }  
END. { Fin del Programa }
```

Debido a que se trabaja con números aleatorios, las salidas del programa, son diferentes, cada vez que se ejecuta, sin embargo, a continuación, se presenta una de las salidas a pantalla que genera el programa:

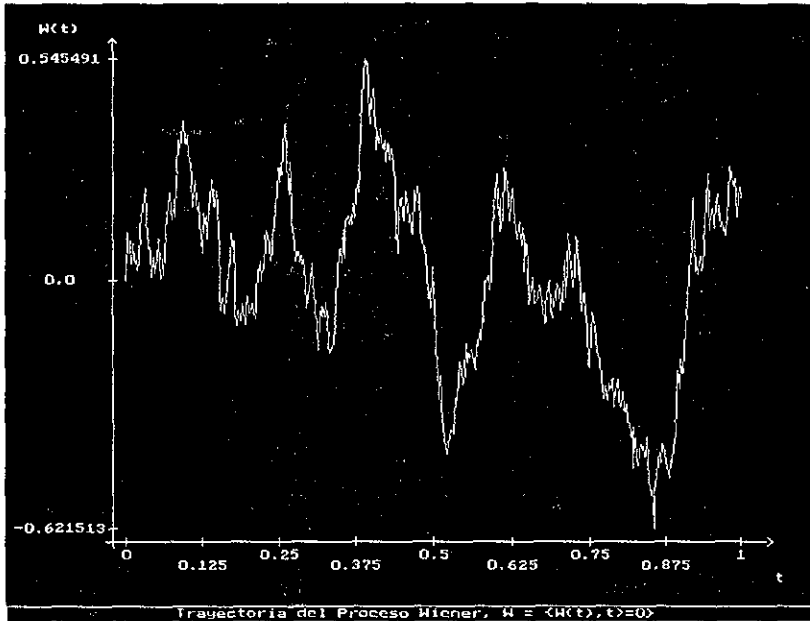


fig. 6. Salida en Pantalla del Programa que simula la Trayectoria descrita por un Proceso Estándar Wiener.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Simulación Computacional de la Solución de la Ecuación Diferencial Estocástica, para Aplicaciones en Finanzas.

Retomemos algunos conceptos expuestos en el Capítulo IV. En este capítulo se presentan algunos modelos para la valuación de Opciones Financieras, los cuales hacen uso del cálculo estocástico para la derivación de ecuaciones diferenciales dinámicas o estocásticas.

Pues bien, toca el turno de presentar el planteamiento de nuestra propia ecuación diferencial estocástica, que ha de resolverse vía métodos numéricos, para posteriormente presentar la trayectoria muestral de tal solución.

En ese capítulo Cuatro, se presento un modelo: en que se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas, a través del cual se puede obtener, el valor de las opciones en un intervalo de tiempo, la volatilidad instantánea así como la volatilidad promedio, sin embargo, el tema de esta tesis se centra, en la simulación de la solución de una ecuación diferencial estocástica que sirva para describir las fluctuaciones de precios del activo subyacente que forma parte importante en un contrato de opciones financieras, y cuya descripción a través de esta ecuación diferencial estocástica es importante, para formular una teoría en el campo de las opciones financieras.

Se considera la ecuación propuesta por Black y Scholes, que es fundamento para la derivación de su fórmula de valuación de opciones financieras:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde r representa una tasa de un valor fuera del riesgo X_t . En el lenguaje financiero, un portafolio de inversión, generalmente se compone de una inversión en una opción financiera asociada ésta con un valor fuera del riesgo. Y precisamente, la ecuación anterior es lo que representa.

El modelo de Black y Scholes, entraña el uso del parámetro σ como una volatilidad constante, situación que le ha valido serios comentarios desfavorables, así pues se retoma este planteamiento y se aplica a la misma ecuación una volatilidad estocástica. Por simplicidad, se toma la tasa de interés $r(t,x)$ idéntica a 0. Los otros parámetros son $p=10.0$, la que constituye el parámetro de intensidad del ruido externo que distribuye a σ_t , y el tiempo de expiración $T=1$.

Por lo tanto, tendremos una ecuación estocástica de la siguiente manera:

$$dS_t = \sigma_t S_t dW_t.$$

Para llevar a cabo la aproximación numérica se toma como valor inicial de $S_0=55.06$, (primer valor de los datos empíricos o reales de las opciones Telmex), y $\sigma_0=1.0$

La solución computacional de esta ecuación, involucra generar una ruta de solución aproximada de la ecuación diferencial estocástica (4.4.1) usando un esquema fuerte de aproximación, primero usando una volatilidad constante (Modelo de Black Scholes) y luego simular la ruta muestral de la misma ecuación, utilizando una volatilidad estocástica.

Simulación de la Volatilidad Estocástica, usando una Integral Múltiple Stratonovich.

A cada precio de la opción le corresponde una volatilidad instantánea σ_t , cuyo comportamiento en el modelo que aquí se presenta es estocástico, y que puede tratarse matemática y computacionalmente como una integral múltiple Stratonovich definida de la siguiente manera:²³

Para cada $j=1, \dots, m$ y $r=1, \dots, p$ con $p=1, 2, \dots$ se definen variables aleatorias gaussianas estándar independientes $\xi_j, \zeta_{j,r}, \eta_{j,r}, \mu_{j,p}$ y $\phi_{j,p}$ de la forma siguiente:

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} W_\Delta^j, \quad \zeta_{j,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r a_{j,r}, \quad \eta_{j,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r b_{j,r},$$

$$\mu_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{\Delta \rho_p}} \sum_{r=p+1}^{\infty} a_{j,r}, \quad \phi_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{\Delta \alpha_p}} \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{r} b_{j,r},$$

Y donde:

$$\rho_p = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^2}, \quad \alpha_p = \frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^4},$$

Usando estas variables aleatorias, resulta que después de varios cálculos, se puede aproximar una integral múltiple Stratonovich $J_{(j_1, \dots, j_p), \Delta}$ mediante $J^p_{(j_1, \dots, j_p), \Delta}$ siendo $p=1, 2, \dots$ de la manera descrita a continuación. Por simplicidad se omite el subíndice del tiempo Δ de la J^p_{α} . $j, j_1, j_2, j_3 \in \{1, \dots, m\}$

$$J^p_{(0)} = \Delta, \quad J^p_{(j)} = \sqrt{\Delta} \xi_j, \quad J^p_{(0,0)} = \frac{1}{2} \Delta^2,$$

$$J_{(j,0)}^p = \frac{1}{2} \Delta \left(\sqrt{\Delta} \xi_j + a_{j,0} \right) \qquad J_{(0,j)}^p = \frac{1}{2} \Delta \left(\sqrt{\Delta} \xi_j - a_{j,0} \right)$$

$$a_{j,0} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{2\Delta} \sum_{r=1}^p \frac{1}{2} \zeta_{j,r} - 2\sqrt{\Delta \rho_p} \mu_{j,p};$$

y finalmente la integral Múltiple que nos interesa y que se usará para simular la Volatilidad instantánea σ_t ,

$$J_{(h,j_2)}^p = \frac{1}{2} \Delta \xi_{h,j_2} \xi_{j_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta} (a_{j_2,0} \xi_{h,j_2} - a_{h,0} \xi_{j_2}) + \Delta A_{h,j_2}^p,$$

$$\text{con } A_{h,j_2}^p = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} (\zeta_{h,r} \eta_{j_2,r} - \eta_{h,r} \zeta_{j_2,r})$$

El programa que genera la ruta muestral de la integral múltiple Stratonovich, usada para simular la Volatilidad Estocástica, es el siguiente:

```
{ Calculo y aproximacion de Integrales Multiples Stratonovich de un }
{ proceso simple Wiener como funciones de tiempo sobre el intervalo [T0,T] }
{ Imprime la trayectoria de la Integral Multiple J12 }
```

```
PROGRAMM_INTJ12;
```

```
USES CRT,DOS,GRAPH,INIT,SETSCR,SERVICE,RANDNUMB,AAGRAPH;
```

```
CONST
```

```
N=512;      { numero de los subintervalos }
T0=0.0;     { principio del intervalo de tiempo }
T=1.0;      { final del intervalo de tiempo }
DELTA=(T-T0)/N; { tamaño del paso }
X0=55.06;   P=10;
ABSCMIN=T0; { indice de truncamiento al aproximar integrales multiples }
```

```
VAR
```

```
I,J:INTEGER;
CR:STRING;   { cadena auxiliar }
SQDELTA:REAL; { raíz cuadrada del tamaño del paso de tiempo }
TI:REAL;     { punto del intervalo }
ALPHAP,ROP:REAL; { parametros de aproximacion }
J1,J11:REAL; { integrales multiples Stratonovich exactas }
J01,J10:REAL; { integrales multiples Stratonovich aproximadas }
J12:REAL;    { integral multiple Stratonovich requerida }
DWT:VECTOR;  { numeros aleatorios gaussianos }
WT:VECTOR;   { trayectoria del proceso Wiener }
XJ01T:VECTOR; { valores de la trayectoria J01 }
```

```

XJ10T:VECTOR;   { valores de la trayectoria J10   }
XJ11T:VECTOR;   { valores de la trayectoria J11   }
XJ12T:VECTOR;   { valores de la trayectoria J12   }
ABSCISSA:VECTOR; { puntos del subintervalo       }
    
```

{ Coloca los parametros para el procedimiento MULTIINT }

```

PROCEDURE SETUPPARAMULTIINT(P:INTEGER;VAR ALPHAP,ROP:REAL);
VAR
R:INTEGER;
INCRE:REAL;
BEGIN
ALPHAP:=0.0;ROP:=0.0;
FOR R:=1 TO P DO
BEGIN
INCRE:=1/(R*R);ROP:=ROP+INCRE;ALPHAP:=ALPHAP+INCRE*INCRE;
END;
ALPHAP:=(PI*PI*PI*PI/90-ALPHAP)/(2*PI*PI);
ROP:=PI*PI/6-ROP;ROP:=ROP/(2*PI*PI);
END;{ SETUPPARAMULTIINT }
    
```

```

{ Generacion de las Integrales Multiples Stratonovich           }
{ J1, J01, J10,J12                                           }
{ Se usa el tamaño del paso DELTA; P = parametro de aproximacion }
    
```

```

PROCEDURE MULTIINT(P:INTEGER;DELTA,DWT:REAL;
VAR J1,J01,J10,J11,J12:REAL);
VAR
R,L:INTEGER;
A10,AMAYUS,C11P,FIIP,GSI,MUE1P:REAL;
ETA1,FII:VECTOR;
BEGIN
GENERATE(FIIP,MUE1P);
A10:=0.0;
FOR R:=1 TO P DO
BEGIN
GENERATE(FII[R],ETA1[R]);
A10:=A10+FII[R]/R;
AMAYUS:= AMAYUS+(FII[R]*ETA1[R])/R;
END;
A10:=- (1./PI)*A10*SQRT(2.0)*SQDELTA;
A10:=A10-2.*SQDELTA*SQRT(ROP)*MUE1P;
GSI:=DWT;
J1:=GSI*SQDELTA; { incremento de la trayectoria Wiener= J1 }
J10:=0.5*DELTA*(J1+A10); { integral multiple J10 }
J11:=00.5*J1*J1;
J12:=J11-(0.5*SQDELTA*(A10*GSI-A10*GSI))+DELTA*(0.5*PI*AMAYUS);
END;{ MULTIINT }
    
```

```

{ Programa Principal: }

BEGIN

INITIALIZE; { inicializacion }
MAINWINDOW('Integral Multiple que simula la Volatilidad Estoc stica');
STATUSLINE('Sea paciente esto puede tomar a la computadora algun tiempo. ');

SQDELTA:=SQRT(DELTA);
SETUPPARAMULTIINT(P,ALPHAP,ROP); { coloca los paramentros de aproximacion}

I:=0; { indice del paso de tiempo }
TI:=T0; { tiempo inicial }
WT[0]:=0.0; { Comienza el valor de la trayectoria Wiener }
J1:=0.0;J01:=0.0;J10:=0.0;J11:=0.0;
ABSCISSA[0]:=ABSCMIN; { valor inicial del eje de las x }
XJ01T[0]:=J01; { integral multiple J01 }
XJ10T[0]:=J10; { integral multiple J10 }
XJ11T[0]:=J11;
XJ12T[0]:=J12;

WHILE (TI < T) DO
BEGIN
I:=I+1;
TI:=TI+DELTA;

{ Generation of the Wiener process increments using Polar Marsaglia method : }

IF I MOD 2 = 1 THEN GENERATE(DWT[I-1],DWT[I]);

{ Aproximacion de las Integrales Multiples Stratonovich: }

MULTIINT(P,DELTA,DWT[I-1],J1,J01,J10,J11,J12);

{ Obtencion de los datos: }

ABSCISSA[I]:=TI; { valor del eje de las x }
WT[I]:=WT[I-1]+J1; { trayectoria Wiener }
XJ01T[I]:=XJ01T[I-1]+J01; { integral multiple J01 }
XJ10T[I]:=XJ10T[I-1]+J10; { integral multiple J10 }
XJ11T[I]:=XJ11T[I-1]+J11;
XJ12T[I]:=XJ12T[I-1]+J12;

END;{ WHILE }

IF N=NUMINV THEN { adaptacion automatica de datos para la impresion}
BEGIN
CLEARDEVICE;
GRAPH111(XJ12T,ABSCISSA,'Sigma(t)','t,');

```



```

CR:='Trajectory of the integral multiple J12 with P = ';
CR:=CR+CHCR(P)+' and DELTA = '+CHCR(DELTA);
STATUSLINE(CR);

{ Alto : }
WAITTOGO; { Espera que se presione un <ENTER> o <ESC> }
          { ! <ESC> termina la ejecucion del programa }
END;
MYEXITPROC; { cierra el modo grafico y coloca la direccion del proceso anterior }

END.{ M_INTJ12 }
  
```

La trayectoria muestral de la volatilidad estocástica, simulada a partir de una integral múltiple Stratonovich $J_{h,t}^P$ se logra ver de la siguiente manera:

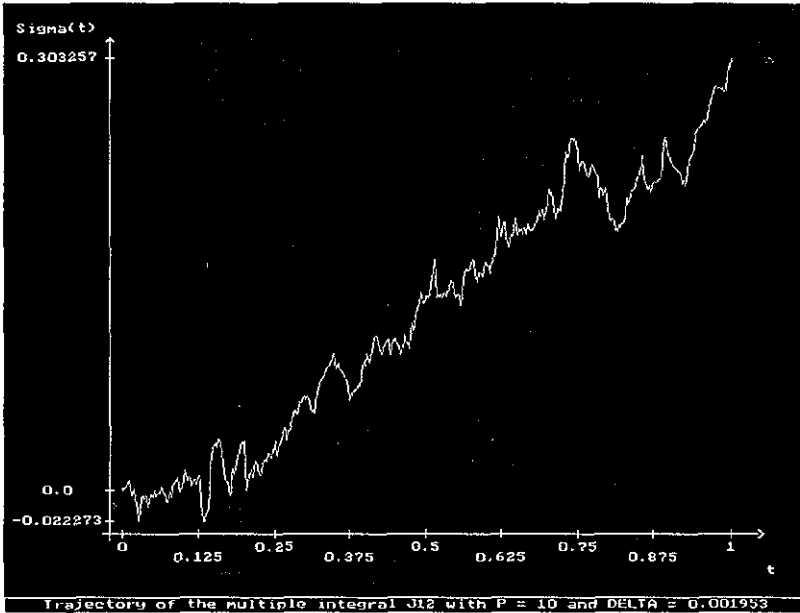


Fig. 7. Salida del programa J12.EXE, que genera la trayectoria muestral de la Integral Múltiple Stratonovich $J_{h,t}^P$, que se usa para simular la Volatilidad Estocástica.

Traectoria Muestral de la Ecuación Diferencial Estocástica.

Por tanto, una vez que se obtiene la trayectoria de la integral múltiple Stratonovich $J_{h,t}^P$, se construye un nuevo programa que genera la trayectoria muestral de la solución para la ecuación diferencial estocástica propuesta por Black y Scholes, pero asociando a ésta como

parámetro esencial, una volatilidad estocástica modelada a partir de una integral múltiple Stratonovich. Al mismo tiempo se incluye el programa que genera la solución de dicha ecuación, pero utilizando un parámetro σ_t cuyo comportamiento es continuo. Y se procede a comparar los resultados obtenidos de la corrida de tal programa.

Para generar las trayectorias muestrales de las soluciones aproximadas $Y(t)$ se usa el esquema fuerte de aproximación descrito en (3.4.2). Se eligió este método, ya que es un esquema fuerte de aproximación que elimina el uso de derivadas, en forma similar que el método Runge-Kutta hace lo propio en el campo de las ecuaciones determinísticas.

Así pues, los datos de salida del programa se visualizan en pantalla y se guardan en un archivo de texto, el cual puede recuperarse desde Microsoft Excel, para tabularse y generar la gráfica que presente las trayectorias de ambas soluciones.

A continuación se presenta la trayectoria muestral de la ecuación diferencial estocástica, $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$, generada a través de aproximaciones numéricas, para el caso de una volatilidad constante y el de una volatilidad estocástica:

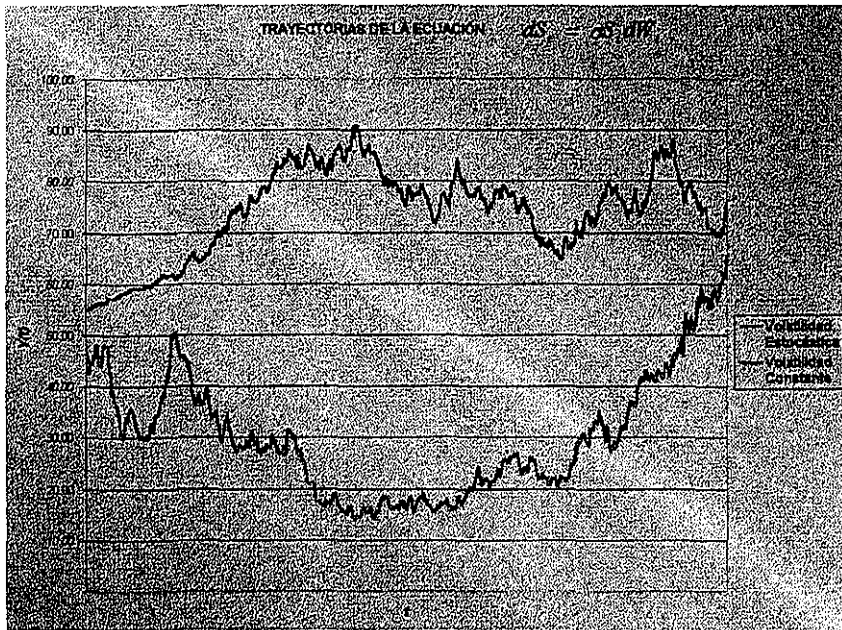


Fig. 8 (a) Datos de salida del Programa que genera la solución para la ecuación $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$, utilizando el parámetro σ_t como volatilidad constante y volatilidad estocástica.

La gráfica anterior, nos muestra los resultados del programa, para los casos en los que se usa una volatilidad continua y una volatilidad estocástica. En ambos casos se puede observar un comportamiento bastante homologa a aquel que siguen los precios reales del subyacente de las opciones Telmex durante el período 1998 y 1999. Sin embargo, podemos hacer algunas anotaciones al respecto de los promedios de dichos valores en comparación con el promedio de los datos reales, ya que éste es igual a 60.58, mientras que para el caso de los datos generados usando volatilidad continua es 37.79 y el correspondiente a la volatilidad estocástica es igual a 82.84. Por lo que es posible decir que los datos generados usando una volatilidad estocástica, son en promedio más parecidos a los precios reales del subyacente de las opciones Telmex, que aquellos generados usando una volatilidad constante. Aquí podemos observar que el promedio de los datos generados usando volatilidad continua se encuentran en promedio por debajo de los valores reales y los valores de los datos generados usando una volatilidad estocástica se encuentran en promedio por arriba de los valores reales, tal como se verá a continuación.

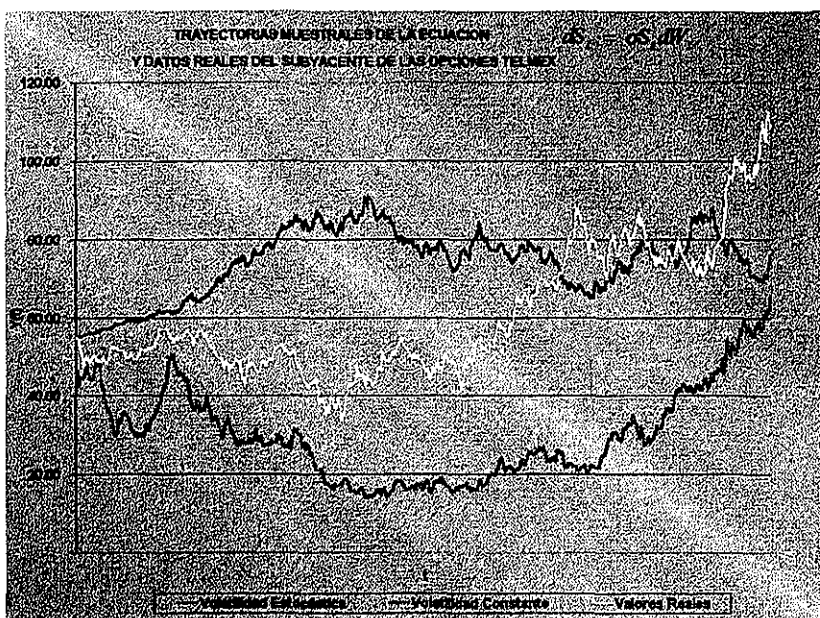


Fig. 8(b). Comportamiento que siguen las trayectorias de los Valores Reales de los precios del subyacente de las opciones Telmex para el período comprendido entre 1998 y 1999, comparado contra los resultados generados por el programa que genera la solución de la ecuación $dS_t = \sigma S_t dW_t$, a la que se le aplica una Volatilidad Continua y una Volatilidad Estocástica.

Esta gráfica es sin duda interesante, ya que coloca a la trayectoria de los datos reales de los precios de las opciones Telmex, justo en medio de las otras dos trayectorias, como ya lo comentábamos en el párrafo anterior. Además de que nos muestra gráficamente la forma en la cual se mueven los datos (precios).

La trayectoria muestral de la ecuación en la cual se usa una volatilidad constante, en casi todos los puntos se encuentra por debajo de la trayectoria de los datos reales, y muestra incrementos o disminuciones más grandes que los datos obtenidos usando volatilidad estocástica, lo cual significa que la amplitud de los cambios en los datos (precios) es mayor para el caso en que se usa volatilidad continua. Sin embargo, puede notarse que su trayectoria muestral prácticamente no se cruza con la de los datos reales, lo cual nos habla de que dichos datos generados usando volatilidad constante, distan mucho de parecerse a los valores reales.

Por otro lado, tenemos la trayectoria generada por la solución de la ecuación $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$, pero utilizando como parámetro una volatilidad estocástica, ésta trayectoria, se encuentra en casi todos los puntos por arriba de los valores reales de los precios de las opciones Telmex. Sus fluctuaciones son menos amplias, que las correspondientes a los valores reales y, puede verse que la trayectoria generada usando volatilidad estocástica, se cruza varias veces con la trayectoria de los datos reales, lo cual nos habla de que estos datos son más parecidos a los valores reales.

Sin embargo, no podemos quedarnos con simples observaciones, y por lo tanto, Tabulamos los resultados obtenidos para cada uno de los dos casos de solución de la ecuación $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$, calculamos las diferencias entre los valores reales y cada uno de los valores aproximados, tanto para el caso de volatilidad constante como para el caso de volatilidad estocástica y luego aplicamos el Valor absoluto a estas diferencias. Estos datos se encuentran tabulados en el Anexo: Resultados del Programa.

Así pues, al comparar los datos obtenidos en ambos casos con los datos reales se obtienen las siguientes diferencias, en términos de valor absoluto:

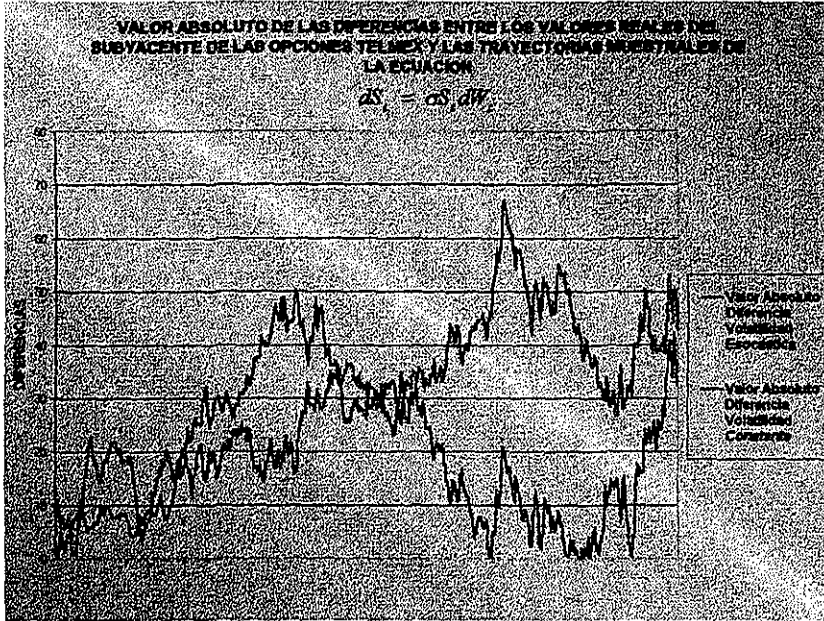


Fig. 9. Gráfica que muestra las diferencias absolutas entre los valores reales de los precios del subyacente de las opciones Telmex y las soluciones de la ecuación $dS_t = \sigma S_t dW_t$, usando Volatilidad Constante y Volatilidad Estocástica.

Ahora bien, si se hace el promedio del valor absoluto de las diferencias encontramos que para la volatilidad constante, éste es mayor, con un valor de 30.49, mientras que para el caso de la volatilidad estocástica, el valor del promedio de las diferencias es: 19.61. Esto nos lleva a verificar que el modelo que incorpora el parámetro σ con un comportamiento estocástico en general se aproxima de una mejor manera al comportamiento que siguen los índices financieros, en específico para este caso, con el subyacente de las opciones Telmex.

Además si se calcula la Amplitud de las fluctuaciones de los datos (precios), es decir, el valor absoluto de los cambios de los datos, y luego se obtiene su promedio obtenemos que: el promedio de la amplitud de los cambios de los datos (precios) para el caso con Volatilidad constante es: 1.31; y el promedio de la amplitud de los datos (precios), para el caso de la solución con Volatilidad Estocástica es: 1.24, siendo la amplitud de los cambios en los precios reales del subyacente de las opciones Telmex igual a: 1.36.

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Concepto	Promedio de los datos (precios)	Promedio de las diferencias: comparación contra los valores reales	Promedio de la Amplitud de los cambios en los datos.
Caso con Volatilidad Continúa	37.79	30.49	1.31
Caso con Volatilidad Estocástica	82.84	19.61	1.24
Valores reales de los precios del subyacente de las opciones Telmex en 1998 y 1999.	60.58		1.36

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.

- ¹⁸ Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Springer-Verlang. Berlin Heidelberg New York. 1997. 283 pp.
- ¹⁹ O' Brien, Stephen. Turbo Pascal 7. "Manual de Referencia". [tr. Cervigon Kückauer] Mac Graw Hill, México, 1993. 799 pp.
- ²⁰ Yanhui, Liu. Parameswaran, Gopikrishnan, et all. "Statistical Properties of Volatility of Price Fluctuations". Physical Review E. Volumen 60, Número 2, Agosto, 1999.
- ²¹ Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Springer-Verlang. Berlin Heidelberg New York. 1997. 283 pp.
- ²² Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlang Berlin Heidelberg. United Estates of America 1995. 632 pp.
- ²³ Ibidem.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

REFERENCIAS DEL CAPÍTULO.

- ¹⁸ Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Springer-Verlang. Berlin Heidelberg New York. 1997. 283 pp.
- ¹⁹ O' Brien, Stephen. Turbo Pascal 7. "Manual de Referencia". [tr. Cervigon Kückauer] Mac Graw Hill, México, 1993. 799 pp.
- ²⁰ Yanhui, Liu. Parameswaran, Gopikrishnan, et all. "Statistical Properties of Volatility of Price Fluctuations". Physical Review E. Volumen 60, Número 2, Agosto, 1999.
- ²¹ Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Springer-Verlang. Berlin Heidelberg New York. 1997. 283 pp.
- ²² Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlang Berlin Heidelberg. United Estates of America 1995. 632 pp.
- ²³ Ibidem.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ANEXO: RESULTADOS DEL PROGRAMA.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las Fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
55.14	46.30	55.06	0.0770659	8.76208712	0.15	3.73	1.50
55.29	42.57	53.56	1.72815305	10.996938	0.12	2.24	1.31
55.41	44.81	52.25	3.16059923	7.44425204	0.12	0.37	1.88
55.53	44.44	50.38	5.15109835	5.93491213	0.16	0.49	2.94
55.68	44.93	47.44	8.24629397	2.50446454	0.17	1.68	2.56
55.86	46.61	50.00	5.85695587	3.38732554	0.11	1.52	0.25
55.97	48.13	49.75	6.21762187	1.62203622	0.18	3.08	0.56
56.15	45.05	49.19	6.96152699	4.13738613	0.12	1.05	0.63
56.27	44.00	48.56	7.70885531	4.56290862	0.05	0.05	1.31
56.22	43.95	49.88	6.34723664	5.92267805	0.18	2.98	0.63
56.41	46.93	50.50	5.90574544	3.57066595	0.09	1.20	1.44
56.49	48.13	49.06	7.43091302	0.93006549	0.04	0.33	0.00
56.45	47.80	49.06	7.39065718	1.26132315	0.40	0.27	0.25
56.85	48.07	48.81	8.04202054	0.73792677	0.42	5.15	0.13
57.28	42.93	48.94	8.33930192	6.01190986	0.12	0.04	0.81
57.16	42.88	49.75	7.40545543	6.86535917	0.04	4.52	0.50
57.19	38.37	49.25	7.94067641	10.8841773	0.04	0.61	1.06
57.15	38.98	48.19	8.96290112	9.2119619	0.12	2.46	1.06
57.27	36.52	49.25	8.02467905	12.7322224	0.22	0.13	1.50
57.49	36.39	50.75	6.74494074	14.3583306	0.19	1.43	1.94
57.68	34.96	52.69	4.99440602	17.7244142	0.19	1.80	0.69
57.87	33.16	52.00	5.87156515	18.8395901	0.32	2.79	0.31
58.19	30.37	52.31	5.87643768	21.9407581	0.05	0.55	0.13
58.24	29.82	52.44	5.80598626	22.6196646	0.10	1.26	0.81
58.35	31.08	51.63	6.72260882	20.5444239	0.16	2.93	0.06
58.51	34.01	51.56	6.94501478	17.5493593	0.05	0.86	0.19
58.46	33.15	51.75	6.70694161	18.5963198	0.29	2.32	0.19
58.74	35.48	51.56	7.18024601	16.0852211	0.40	0.38	0.63
59.14	35.86	50.94	8.20720159	15.082421	0.14	0.62	1.25
59.28	35.24	49.69	9.59409277	14.451092	0.04	0.28	0.19
59.32	34.96	49.88	9.44444824	14.9142515	0.00	2.32	1.13
59.32	32.64	51.00	8.32025834	18.3622352	0.15	1.27	1.13
59.17	31.37	49.88	9.29957217	18.5066122	0.01	0.61	0.56
59.19	30.76	49.31	9.87567897	18.5510329	0.05	0.94	0.06
59.14	29.82	49.25	9.89208761	19.4269497	0.08	0.60	1.31
59.22	30.42	50.56	8.6587015	20.1415932	0.04	0.72	0.13
59.26	29.70	50.69	8.57601308	20.9892148	0.30	0.36	1.25
59.56	30.05	51.94	7.6215289	21.8827205	0.13	0.34	0.19
59.43	30.40	51.75	7.67522092	21.3541897	0.23	0.48	0.00
59.66	29.92	51.75	7.90650541	21.8335967	0.26	1.30	0.38
59.40	31.21	51.38	8.02261604	20.1606811	0.47	1.57	1.06
59.86	32.78	52.44	7.4274452	19.6531518	0.36	1.71	0.69
60.23	31.08	51.75	8.47737158	20.6742133	0.28	2.68	0.38
60.51	33.75	52.13	8.38254238	18.3725995	0.28	0.73	0.56

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las Fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
60.79	34.49	52.69	8.10349318	18.2018449	0.28	0.13	0.06
61.08	34.36	52.63	8.45060868	18.2693769	0.13	1.68	1.81
61.20	36.04	54.44	6.76371497	18.3983042	0.68	0.71	0.25
61.88	36.75	54.69	7.19018534	17.9404219	0.08	1.56	2.81
61.96	38.30	57.50	4.45619206	19.1956591	0.46	0.13	0.44
61.50	38.17	57.06	4.43846865	18.8899259	0.08	2.87	0.06
61.42	41.04	57.00	4.42378222	15.9574096	0.28	1.77	0.13
61.70	42.81	57.13	4.57875521	14.3122206	0.02	1.44	0.00
61.68	44.25	57.13	4.55877043	12.8752807	0.01	3.66	0.69
61.69	47.91	56.44	5.25457769	8.52369716	0.18	2.22	1.81
61.87	50.14	54.63	7.24650402	4.48737618	0.22	0.54	0.44
61.65	49.60	55.06	6.58758017	5.46458331	0.49	1.06	1.44
61.16	50.66	53.63	7.53240447	2.96844987	0.62	2.55	0.50
61.78	48.11	54.13	7.65068873	6.01562789	0.28	1.17	1.25
61.50	46.94	55.38	6.12328678	8.43097375	0.22	1.41	1.19
61.71	45.54	54.19	7.52664588	8.65167093	0.56	0.59	1.06
62.28	46.13	55.25	7.0277891	9.1193745	0.55	0.12	0.38
62.83	46.01	54.88	7.95649154	8.8652509	1.10	0.45	0.31
63.93	45.56	55.19	8.73959249	9.6283394	0.59	1.70	1.06
64.52	43.86	56.25	8.2695404	12.3887333	0.25	0.71	0.44
64.77	44.57	56.69	8.08261374	12.1199961	0.64	1.50	0.00
65.41	43.07	56.69	8.72554725	13.6176706	0.04	2.33	1.19
65.38	40.74	55.50	9.87550607	14.7637113	0.85	2.32	0.06
66.23	38.42	55.44	10.7904005	17.0198078	1.44	1.21	2.63
64.79	37.20	52.81	11.9760148	15.6082674	0.26	0.77	2.13
65.05	36.44	54.94	10.1111117	18.5008968	0.70	1.52	0.56
64.35	37.96	55.50	8.85231806	17.543458	0.20	0.56	1.13
64.15	38.51	56.63	7.52602423	18.113166	0.45	2.31	0.06
64.61	36.20	56.69	7.918352	20.4872365	0.57	0.45	0.25
65.17	36.65	56.44	8.73680632	19.7880019	0.27	0.07	1.38
64.90	36.58	55.06	9.84153736	18.4843001	0.91	1.52	0.63
65.81	38.09	55.69	10.1256434	17.5937058	0.33	1.62	1.38
65.48	39.71	54.31	11.1669257	14.5995508	0.65	2.31	0.94
66.13	37.40	53.38	12.7536481	15.9758304	0.82	0.75	1.00
66.95	36.65	52.38	14.5775978	15.7271997	0.79	3.00	0.50
67.74	33.64	51.88	15.8686829	18.23027	0.03	0.44	0.69
67.71	34.09	52.56	15.1517593	18.4765885	0.99	0.81	2.13
68.71	34.89	50.44	18.2699796	15.5462411	0.97	0.74	0.25
69.68	34.15	50.19	19.4899656	16.0383561	0.66	1.42	0.44
70.34	32.73	49.75	20.5921709	17.0218014	1.30	0.76	0.06
69.04	31.97	49.81	19.2302259	17.8406073	0.92	2.75	0.56
69.97	29.22	49.25	20.7164117	20.0299197	0.91	0.70	2.88
70.88	29.92	46.38	24.5037426	16.4509255	0.34	2.52	2.69
71.22	32.44	49.06	22.152823	16.6200445	0.78	1.08	0.56
70.44	33.52	48.50	21.9373572	14.979479	0.86	1.39	2.25
71.30	34.91	46.25	25.0518379	11.3420665	1.53	2.74	1.25
72.83	32.17	47.50	25.3298239	15.327161	0.83	1.02	0.31

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
73.66	31.15	47.19	26.4756099	16.0330113	0.45	1.74	1.81
74.11	29.41	49.00	25.1092139	19.5880769	0.40	0.66	0.13
74.50	28.75	49.13	25.3798234	20.3763639	0.48	0.96	0.19
74.03	27.79	48.94	25.0901458	21.1459236	1.13	0.44	0.06
75.15	27.35	48.88	26.2780982	21.52545	0.59	1.29	3.69
74.56	28.64	45.19	29.3773377	16.5496269	1.27	0.04	0.50
75.84	28.60	44.69	31.1476802	16.0886649	0.73	0.39	1.94
75.11	28.21	42.75	32.3577927	14.5429995	1.84	0.24	2.50
73.26	27.96	45.25	28.0134289	17.2868576	0.03	0.00	3.50
73.24	27.96	48.75	24.4850489	20.7858634	0.55	1.30	1.44
73.79	29.27	47.31	26.4734994	18.0437614	0.27	0.85	0.63
74.06	28.42	47.94	26.1193553	19.5155851	1.74	0.31	0.31
75.79	28.12	48.25	27.5418768	20.1331781	1.57	1.78	0.50
77.37	29.90	47.75	29.6156888	17.8499657	0.81	1.54	1.38
76.56	31.44	46.38	30.1834914	14.937894	0.53	2.90	0.56
76.03	28.53	45.61	30.2177055	17.279875	0.02	0.88	0.69
76.01	29.41	46.50	29.5091797	17.085054	0.70	0.18	1.67
76.71	29.59	48.17	28.5447497	18.5729459	0.38	1.72	0.77
76.33	27.87	48.94	27.3967104	21.0627881	1.65	0.56	0.44
77.99	27.31	48.50	29.4889606	21.1890889	0.58	0.16	1.00
78.57	27.47	47.50	31.0702548	20.0325301	0.38	0.39	1.50
78.95	27.86	49.00	29.9542993	21.1441953	0.05	0.56	0.50
79.00	27.29	49.50	29.5049701	22.2064275	1.29	1.12	0.50
77.71	28.41	49.00	28.7100255	20.5863288	0.20	0.17	2.44
77.91	28.25	51.44	26.4766105	23.1918064	0.91	0.09	0.69
78.83	28.16	52.13	26.7030805	23.9671332	1.69	0.09	0.00
80.52	28.25	52.13	28.3938319	23.8794304	1.20	2.09	0.69
81.72	30.34	52.81	28.9034647	22.4726384	0.05	1.44	0.31
81.76	28.50	53.13	28.6383508	24.2283081	1.98	0.54	0.44
83.75	29.43	52.69	31.0590497	23.2544945	0.52	2.31	0.19
83.23	27.12	52.50	30.72672	25.3783305	0.59	0.53	1.00
82.64	27.65	51.50	31.1406614	23.8492341	0.38	0.47	0.13
83.02	27.18	51.38	31.6498792	24.1910397	0.12	0.24	0.06
83.14	26.95	51.31	31.8302093	24.3642182	1.35	1.33	1.06
84.49	28.28	50.25	34.2407238	21.970534	0.70	1.85	0.63
83.79	26.43	50.88	32.9123042	24.4418621	0.50	2.67	0.94
84.29	29.10	51.81	32.4790825	22.709366	1.76	2.37	0.00
86.06	31.47	51.81	34.2437044	20.3398063	0.10	0.18	3.06
85.96	31.30	48.75	37.2095045	17.4541788	1.54	0.76	1.31
84.42	30.53	47.44	36.9862018	16.9060314	0.44	0.50	0.31
84.87	30.03	47.13	37.7412486	17.0951192	0.36	0.39	0.44
84.51	30.42	46.69	37.8209342	16.2700633	1.76	3.25	2.06
82.75	27.17	44.63	38.1201379	17.4571174	2.20	0.74	1.25
84.94	27.91	43.38	41.5653389	15.4688844	1.96	1.39	0.56
82.98	26.51	42.81	40.1684969	16.2998554	0.50	1.03	0.94
82.48	27.54	41.88	40.6044863	14.330726	0.51	2.20	1.31
82.99	25.34	43.19	39.8046138	17.8480605	0.21	0.07	0.31

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
83.20	25.27	43.50	39.6997494	18.2348959	2.00	1.69	0.13
85.20	23.58	43.63	41.5760992	20.0498447	0.66	0.99	0.38
85.86	22.59	44.00	41.8627335	21.4139259	1.40	1.61	0.56
87.27	20.98	43.44	43.8278853	22.4607027	0.87	0.29	3.44
86.39	21.27	40.00	46.3926069	18.7304394	0.48	0.10	1.75
85.91	21.17	38.25	47.6611981	17.0774976	0.72	0.11	1.31
85.19	21.28	39.56	45.6320608	18.2800958	1.14	1.89	0.88
84.06	19.39	38.69	45.3692826	19.2975819	1.45	1.70	0.88
82.60	17.69	37.81	44.789488	20.11927	0.98	0.05	3.06
83.58	17.84	34.75	48.8314257	17.1069633	1.21	0.01	2.81
82.37	17.63	37.56	44.8076824	19.9324561	2.21	0.45	1.88
84.58	17.18	35.69	48.8928983	18.5033155	0.42	0.15	4.31
84.16	17.03	40.00	44.1633931	22.9679056	2.15	0.49	0.50
82.01	16.54	39.50	42.5118881	22.9602254	0.44	0.89	2.44
81.57	17.43	37.06	44.5081535	19.6343997	0.53	0.24	0.38
81.04	17.19	36.69	44.3585587	19.5024989	2.23	0.14	2.38
83.27	17.04	39.06	44.2093181	22.0212967	0.99	0.09	1.56
84.27	17.13	37.50	46.7654081	20.3705682	2.18	0.57	4.00
82.09	17.70	33.50	48.5871039	15.7995959	3.14	1.15	1.44
85.22	18.85	34.94	50.2857085	16.0827626	0.56	0.20	1.63
85.78	19.06	36.56	49.2179706	17.505832	0.42	0.88	5.44
86.20	18.18	42.00	44.2039762	23.8248248	0.14	0.68	1.06
86.34	17.50	43.06	43.276723	25.5645882	0.94	1.03	0.56
87.28	16.46	42.50	44.7764951	26.0352896	1.05	0.60	0.63
86.23	15.86	43.13	43.1008115	27.2629322	1.72	0.02	0.38
84.50	15.84	43.50	41.0021208	27.6612653	0.45	0.09	0.13
84.05	15.74	43.63	40.4253778	27.8811206	0.51	0.57	4.63
84.56	15.17	48.25	36.3136852	33.0792018	1.86	0.22	3.13
86.42	15.39	45.13	41.2958915	29.7372727	0.04	1.02	0.13
86.39	16.41	45.25	41.135506	28.8443198	0.14	0.20	0.25
86.25	16.61	45.50	40.7477514	28.8910311	2.90	1.25	1.25
89.15	15.36	44.25	44.8957115	28.8893368	1.75	1.17	2.19
90.90	14.19	42.06	48.8338262	27.8746552	2.31	0.12	3.75
88.58	14.07	45.81	42.7699588	31.7465901	2.36	0.61	1.81
90.95	14.68	44.00	46.9462537	29.3227782	0.41	0.16	0.00
90.54	14.52	44.00	46.5359183	29.4815165	0.83	0.21	1.50
89.71	14.31	42.50	47.2095891	28.1876074	2.94	0.80	1.00
86.77	15.11	43.50	43.2656071	28.3850123	1.34	0.85	1.25
85.43	15.96	44.75	40.6750604	28.7886253	0.50	0.33	2.25
84.93	16.29	47.00	37.9298966	30.7116338	1.05	0.54	0.25
85.98	15.75	47.25	38.7302078	31.5034608	0.27	0.45	0.44
86.25	15.29	46.81	39.4383405	31.5175045	1.06	0.65	4.25
87.31	15.94	51.06	36.24447	35.1180341	1.74	0.58	1.75
85.57	16.52	49.31	36.2543604	32.790871	0.13	1.74	0.00
85.44	14.79	49.31	36.1286165	34.5262553	0.41	0.42	0.50
85.85	14.36	48.81	37.0351005	34.4501233	0.15	0.67	0.06
85.70	15.03	48.75	36.9471703	33.7224458	1.28	0.63	1.63

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
84.41	15.66	50.38	34.0395	34.7129502	0.53	0.10	0.75
83.89	15.57	51.13	32.7606269	35.5581993	1.01	1.99	0.69
82.88	17.56	50.44	32.4382944	32.8788191	1.88	0.45	0.56
81.00	18.01	51.00	29.9971666	32.9935355	0.18	0.54	1.94
80.82	18.55	52.94	27.8787149	34.3863076	1.57	0.36	0.31
79.25	18.19	53.25	25.9953944	35.0556938	1.44	0.20	1.81
80.69	18.39	55.06	25.6257912	36.667847	0.29	0.46	0.94
80.40	17.93	54.13	26.2778673	36.1944872	1.42	1.09	0.75
78.99	16.84	53.38	25.6111554	36.532207	1.01	0.73	1.19
80.00	16.11	52.19	27.8122788	36.0745595	0.27	0.11	0.50
79.73	16.00	51.69	28.0432439	35.6889992	0.87	0.39	1.44
78.86	16.38	50.25	28.6099793	33.8653579	1.04	0.06	0.25
79.90	16.44	50.00	29.9014126	33.5596631	0.34	0.38	0.63
79.56	16.82	49.38	30.184794	32.5544411	1.22	0.73	1.25
78.34	16.09	50.63	27.7192398	34.5307478	0.35	1.38	1.00
77.99	17.47	49.63	28.3694619	32.1550049	0.41	0.12	0.69
78.40	17.59	50.31	28.0898395	32.718121	1.21	0.84	1.13
77.20	16.76	49.19	28.0081393	32.4322707	1.12	0.78	0.00
76.07	17.53	49.19	26.8865172	31.6534371	0.94	1.58	0.38
75.13	15.95	48.81	26.3172871	32.8602886	2.04	1.04	2.25
77.17	17.00	46.56	30.611966	29.566932	1.90	1.07	0.44
79.08	18.06	46.13	32.9507943	28.0628847	0.47	0.37	0.56
78.61	18.43	46.69	31.9190081	28.2540781	2.24	2.40	2.38
76.36	16.03	44.31	32.0507144	28.2809852	0.85	0.74	1.13
77.21	15.30	45.44	31.7735806	30.1410515	0.38	1.22	1.44
77.59	16.51	46.88	30.7130731	30.3621628	0.17	1.21	1.00
77.42	17.72	45.88	31.5429164	28.1534643	0.44	0.31	1.56
77.86	18.04	47.44	30.4231861	29.402089	0.64	0.40	1.31
77.22	18.44	48.75	28.4713838	30.3115162	2.22	0.42	2.00
79.44	18.02	46.75	32.6882062	28.7288099	0.01	1.23	0.00
79.43	19.25	46.75	32.6782648	27.496422	1.34	1.03	1.94
78.08	18.23	48.69	29.3970346	30.4605642	0.97	0.77	1.56
77.12	17.45	50.25	26.8678275	32.7956024	0.16	0.44	0.81
76.96	17.01	49.44	27.5220148	32.4264456	1.60	0.20	0.56
75.36	16.81	48.88	26.4837017	32.0674554	1.00	0.52	0.19
74.36	16.29	49.06	25.2956384	32.7742965	0.86	0.49	0.31
73.49	15.80	48.75	24.7446692	32.9539472	1.34	0.20	0.19
72.15	15.60	48.94	23.2150926	33.3386948	0.23	0.43	0.75
71.93	16.03	48.19	23.7396161	32.1542752	0.73	0.69	1.94
72.66	16.73	46.25	26.4051309	29.5232661	0.85	0.43	0.81
73.50	16.29	45.44	28.0651691	29.1427602	0.50	0.89	1.56
74.00	17.19	43.88	30.1272156	26.6880107	3.05	0.22	1.63
77.06	16.97	42.25	34.8063946	25.2836455	0.23	0.32	0.69
77.28	17.29	42.94	34.3445358	25.6497287	0.44	0.09	4.63
77.72	17.20	47.56	30.162238	30.3655754	1.27	0.82	2.69
76.46	18.01	50.25	26.2062697	32.2367978	0.17	1.44	0.31
76.29	16.57	49.94	26.3476955	33.36775	1.39	0.15	0.75

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las Fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
74.89	16.72	49.19	25.7037617	32.4642911	3.40	0.77	0.50
78.29	15.95	48.69	29.6071919	32.7380683	1.24	0.50	0.19
79.53	16.45	48.50	31.0319548	32.0506062	0.61	0.40	2.69
80.14	16.05	51.19	28.952285	35.1342972	1.40	0.51	0.06
81.54	16.57	51.13	30.414003	34.5597615	2.84	1.24	0.56
84.38	17.81	51.69	32.6928356	33.8823222	2.38	0.79	0.00
82.00	18.60	51.69	30.3135291	33.0873739	1.40	1.51	1.06
80.60	17.09	52.75	27.8471465	35.6613835	0.22	0.04	0.75
80.38	17.05	52.00	28.3753246	34.9469008	0.84	0.72	1.00
79.53	17.78	53.00	26.5308444	35.224006	0.89	0.28	1.88
80.43	18.06	51.13	29.3003086	33.0688901	2.21	1.35	0.06
78.22	19.41	51.19	27.0280388	31.7782046	0.45	0.13	2.06
77.76	19.54	53.25	24.5144622	33.7146666	0.60	0.83	0.50
77.17	20.36	52.75	24.4190955	32.3883508	0.25	0.07	0.06
77.42	20.29	52.69	24.7343566	32.3962417	0.08	0.46	1.48
77.50	19.83	54.17	23.331685	34.3318321	0.41	1.31	1.83
77.08	21.14	56.00	21.084067	34.8568221	0.68	0.73	3.19
77.76	21.88	59.19	18.5748741	37.3105924	0.82	1.98	1.19
78.58	23.85	58.00	20.5791594	34.1475705	0.40	0.28	0.81
78.98	24.13	57.19	21.7943568	33.0561371	0.22	1.60	0.00
78.76	22.53	57.19	21.5704896	34.6579644	1.67	1.73	0.31
77.09	20.80	56.88	20.2115962	36.078611	0.63	1.16	1.56
76.45	21.96	55.31	21.1416443	33.3541826	0.11	0.25	0.13
76.57	21.71	55.19	21.3810919	33.4777474	1.10	0.35	2.00
75.47	22.06	57.19	18.2839331	35.1275226	1.69	0.47	1.13
73.78	21.59	58.31	15.4666787	36.7213516	1.01	1.25	2.38
74.79	20.34	60.69	14.1018469	40.3482759	0.34	0.91	1.50
75.13	21.25	62.19	12.9462856	40.9345799	0.88	0.30	3.31
76.01	21.55	65.50	10.5117614	43.9517707	0.13	0.12	0.75
76.14	21.67	64.75	11.3922826	43.0799548	2.07	0.64	1.19
78.21	22.31	63.56	14.6508202	41.2551818	0.11	1.55	0.19
78.11	23.86	63.75	14.3566013	39.8941315	0.36	1.24	2.44
78.47	22.61	66.19	12.2824107	43.5745	1.72	0.04	0.19
76.75	22.57	66.00	10.7456378	43.429079	0.15	1.80	0.88
76.89	24.37	65.13	11.7691197	40.756955	2.32	1.37	1.25
79.21	25.74	63.88	15.3369712	38.1336541	0.08	0.03	1.63
79.13	25.71	62.25	16.8794081	36.5401223	0.89	0.01	3.13
78.24	25.72	65.38	12.8639697	39.6506392	0.26	0.57	0.06
77.98	25.16	65.44	12.5375065	40.2822704	0.89	0.09	0.06
77.08	25.25	65.50	11.5812002	40.2546465	0.03	1.08	0.00
77.12	26.33	65.50	11.6150665	39.1704651	0.84	0.25	2.94
77.96	26.08	68.44	9.51837503	42.3808434	0.13	0.86	1.44
77.82	26.94	69.88	7.94593056	42.9391053	2.30	0.55	0.00
75.52	26.38	69.88	5.64832567	43.493383	1.69	0.55	0.13
73.84	26.93	70.00	3.8381684	43.0721904	0.30	1.83	1.38
74.14	25.10	68.63	5.51582496	43.5291363	0.83	1.85	0.69
74.97	23.25	67.94	7.03420625	44.6887199	0.88	0.15	0.06

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las Fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
75.86	23.10	68.00	7.85638917	44.9047359	1.00	1.09	1.00
76.86	24.18	69.00	7.85930281	44.8184867	0.86	0.72	0.31
76.00	23.46	69.31	6.68797357	45.8481511	1.44	1.17	0.56
74.56	24.63	68.75	5.80756956	44.1156137	0.93	1.43	1.44
73.63	23.20	67.31	6.31821403	44.1129185	0.96	2.95	0.06
74.59	26.15	67.25	7.34138046	41.0995624	1.07	0.01	3.50
73.53	26.16	70.75	2.77589208	44.5865092	1.91	0.64	0.81
71.62	25.52	71.56	0.05717	46.0437309	1.19	0.20	0.38
70.43	25.72	71.19	0.75833121	45.4657261	1.62	2.65	2.38
68.81	23.07	73.56	4.74986243	50.4882234	0.46	1.14	0.31
69.27	21.93	73.88	4.60095739	51.940077	0.67	0.12	1.88
68.61	22.05	75.75	7.14478148	53.6956515	1.36	0.23	4.44
67.25	22.29	80.19	12.9415942	57.9003485	1.71	0.74	1.56
68.96	23.02	78.63	9.6695023	55.6017323	1.23	0.80	0.63
67.73	22.22	79.25	11.5231542	57.02865	0.04	0.16	1.50
67.77	22.07	80.75	12.9800704	58.6847384	0.82	0.02	7.25
66.95	22.05	88.00	21.0484347	65.9535536	0.29	1.23	0.13
67.24	20.82	87.88	20.6344156	67.0578834	1.23	0.27	1.81
68.47	21.08	86.06	17.5940377	64.9799826	0.71	0.74	2.13
67.76	21.82	83.94	16.1817907	62.1134574	0.86	0.08	0.00
66.89	21.91	83.94	17.0425081	62.0316201	0.47	0.33	0.50
66.43	22.23	83.44	17.0123768	61.2042269	0.49	1.65	2.88
65.93	20.58	80.56	14.6316679	59.9826089	0.53	0.16	1.38
66.46	20.74	79.19	12.7226258	58.4455304	1.17	0.95	3.19
65.30	21.69	76.00	10.7017257	54.3112638	0.40	0.63	4.50
64.90	22.32	80.50	15.5983531	58.1790608	0.32	0.31	1.25
65.22	22.01	79.25	14.0321981	57.2435842	2.70	0.01	0.69
67.92	22.00	79.94	12.0221399	57.9423395	1.27	0.38	1.25
69.18	21.61	78.69	9.50676542	57.0735399	0.39	0.37	2.75
68.79	21.98	75.94	7.14829642	53.9543452	1.98	0.40	0.88
66.81	22.39	75.06	8.25305344	52.6748744	0.04	1.89	0.94
66.77	24.28	76.00	9.22563328	51.7211896	1.01	0.56	0.63
67.79	24.84	75.38	7.58639572	50.5398154	0.54	0.08	2.06
67.24	24.91	73.31	6.06762689	48.4003584	1.22	1.44	2.50
68.46	26.35	70.81	2.34831667	44.4579879	3.70	1.42	1.00
72.16	27.78	69.81	2.35061434	42.0338289	2.23	1.47	8.19
69.94	29.25	78.00	8.06458449	48.7503502	0.08	0.21	1.13
69.85	29.04	79.13	9.27090491	50.0819572	0.69	0.96	2.69
69.16	30.00	81.81	12.6493347	51.8087371	1.51	0.79	1.13
70.67	30.79	80.69	10.0140463	49.8927111	1.91	0.01	4.94
72.58	30.78	75.75	3.17008506	44.958275	1.64	1.72	0.38
74.22	29.06	76.13	1.90531923	47.0627943	0.00	0.06	1.50
74.22	29.12	77.63	3.40203392	48.5029011	0.83	0.75	3.19
73.39	28.37	80.81	7.42206687	52.4423251	1.90	3.30	2.06
71.49	31.67	82.88	11.386255	51.2009911	1.77	0.19	0.13
73.25	31.49	83.00	9.74518357	51.5111052	0.58	0.66	1.56
72.67	32.14	81.44	8.7630988	49.2931299	1.27	1.14	0.00

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las Fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
71.40	33.28	81.44	10.0355321	48.1540775	1.90	0.56	2.94
73.30	32.72	78.50	5.19874218	45.780719	0.29	0.11	2.50
73.01	32.83	81.00	7.98844424	48.1666706	2.91	2.25	0.06
75.92	35.08	81.06	5.1409971	45.9797529	0.12	1.39	1.69
76.04	33.70	82.75	6.70624884	49.0536964	1.22	0.99	2.13
77.26	32.71	84.88	7.61215762	52.1698012	0.50	1.27	1.69
77.77	31.44	86.56	8.79603634	55.1271439	0.73	2.01	2.88
77.04	29.42	83.69	6.65119641	54.2659548	2.33	2.96	1.75
79.36	32.38	85.44	6.07491276	53.0526593	0.44	2.39	2.13
79.80	29.99	83.31	3.5116284	53.3175411	0.49	2.53	2.06
79.31	27.46	81.25	1.94355591	53.7885479	1.68	0.43	3.06
77.62	27.89	78.19	0.56486193	50.3000614	0.96	1.59	1.06
78.59	29.47	79.25	0.66343045	49.7751004	0.08	1.50	0.75
78.66	27.97	78.50	0.16246081	50.5274849	0.51	0.99	2.75
79.17	28.96	75.75	3.42212648	46.7867773	2.20	0.55	0.25
76.97	29.52	75.50	1.47344069	45.9840009	0.34	1.15	2.19
76.64	30.66	73.31	3.3251076	42.6507357	0.04	1.76	2.63
76.68	32.42	75.94	0.74266307	43.5148653	0.97	0.58	1.88
75.71	31.84	74.06	1.6487963	42.2219643	0.15	0.08	1.50
75.57	31.76	75.56	0.00366466	43.8045636	1.25	0.60	1.38
74.32	32.36	74.19	0.12809872	41.8290475	1.51	2.30	0.63
72.81	34.65	74.81	2.00609221	40.1584756	1.67	1.12	1.75
74.47	35.78	73.06	1.4109819	37.2864957	0.54	1.18	1.19
73.94	36.96	74.25	0.31451485	37.2936665	1.34	0.62	3.25
75.28	36.34	77.50	2.22442114	41.1621524	2.30	0.65	0.38
77.58	36.98	77.13	0.45229071	40.1419144	1.09	0.85	2.63
78.66	36.14	74.50	4.16332845	38.3647623	3.15	0.81	0.63
75.51	36.94	75.13	0.38627588	38.1819631	0.94	3.93	1.75
74.57	40.87	76.88	2.30556172	36.0041359	1.43	0.57	0.88
73.14	41.44	77.75	4.61149548	36.3111999	1.06	0.37	2.13
74.20	41.81	79.88	5.67939908	38.0650534	1.75	0.57	2.00
75.95	41.24	77.88	1.92983495	36.6367811	0.86	1.58	1.25
75.08	42.81	76.63	1.54391929	33.8108257	1.25	0.39	1.06
76.33	43.20	75.56	0.76378114	32.3630634	0.96	1.85	1.19
77.29	41.35	74.38	2.91334844	33.0267798	1.12	0.42	0.69
78.41	41.76	73.69	4.71779811	31.9235901	2.40	0.60	1.13
80.80	42.36	72.56	8.23835418	30.1977612	4.81	0.35	0.69
85.61	42.01	71.88	13.7320971	29.8605865	0.70	1.01	3.19
84.91	41.00	75.06	9.84700811	34.0603819	1.04	0.26	1.56
85.95	41.26	73.50	12.4543507	32.2420031	1.84	1.81	1.56
84.11	43.07	71.94	12.1743813	28.8649825	1.46	0.47	0.94
85.57	42.60	71.00	14.5717415	28.3983912	1.41	0.30	2.50
86.98	42.30	73.50	13.477535	31.1970648	0.90	0.74	1.56
86.08	41.56	71.94	14.1378352	30.3793709	1.84	1.49	1.19
84.23	43.05	70.75	13.4833438	27.700083	1.87	1.36	0.50
86.10	44.41	71.25	14.8548496	26.8405583	-	-	2.44
86.10	44.41	73.69	12.4173496	29.2780583	1.43	2.48	4.38

Modelación Computacional de una Ecuación Diferencial Estocástica con Aplicaciones en la Teoría de Riesgos Financieros.

Volatilidad Estocástica	Volatilidad Constante	Valores Reales	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Estocástica	Valor Absoluto Diferencia Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Estocástica	Amplitud de las fluctuaciones Volatilidad Constante	Amplitud de las fluctuaciones Valores Reales
84.68	41.93	78.06	6.61470314	36.1331923	0.06	1.27	3.69
84.74	43.20	74.38	10.3641377	31.1791083	3.12	2.54	0.38
87.85	45.74	74.00	13.8542639	28.2629229	0.16	1.72	1.44
88.01	44.02	72.56	15.4497171	28.5455854	3.99	2.37	3.94
84.03	46.39	76.50	7.52643837	30.1089762	1.18	0.70	1.44
82.85	45.69	77.94	4.90954841	32.2473091	2.03	1.45	0.63
80.81	47.14	78.56	2.24977116	31.420071	0.86	0.63	1.19
79.96	46.51	79.75	0.20515574	33.2397143	0.88	2.76	0.13
79.08	49.27	79.63	0.5480997	30.3536862	0.88	3.38	6.06
79.96	45.89	85.69	5.73006362	39.7935203	3.55	3.00	3.44
76.41	48.89	89.13	12.7181678	40.2322581	0.42	5.12	4.50
75.99	54.01	93.63	17.6366601	39.6163604	2.83	1.58	0.50
78.82	52.43	94.13	15.306468	41.695097	0.66	2.04	2.06
79.48	50.39	96.19	16.7091014	45.7932051	0.59	3.01	0.06
80.07	53.40	96.13	16.0560018	42.7251155	1.41	1.08	1.00
78.66	52.32	95.13	16.4648897	42.8025383	1.63	1.64	5.94
77.03	50.69	101.06	24.0363344	50.3759579	0.71	1.04	2.13
77.73	51.73	98.94	21.2039475	47.2118177	1.04	1.83	1.25
76.70	53.55	100.19	23.4903769	46.6333161	1.96	3.57	0.88
74.73	57.12	99.31	24.5791841	42.1922146	1.03	1.46	1.88
75.76	55.66	97.44	21.6759976	41.7773089	2.05	3.69	0.56
73.71	59.35	98.00	24.289592	38.6482473	0.63	1.04	2.06
74.34	58.31	100.06	25.7227667	41.752717	0.51	1.82	4.75
74.85	56.49	95.31	20.4591243	38.8274141	0.22	1.10	1.19
75.07	57.59	96.50	21.4285552	38.9146339	4.11	0.15	0.38
70.96	57.43	96.88	25.9162496	39.4411609	0.11	1.44	1.81
70.85	56.00	95.06	24.2120846	39.0648219	0.08	0.76	0.38
70.93	55.24	95.44	24.511884	40.2007003	0.42	2.52	3.81
70.51	57.76	99.25	28.7422846	41.4940785	0.42	0.60	2.44
70.09	58.36	96.81	26.7219499	38.4555166	0.58	0.75	5.69
69.51	59.10	102.50	32.9882343	43.3958832	0.56	2.06	3.88
70.07	57.05	106.38	36.3050468	49.3282584	0.80	0.38	3.75
69.27	56.67	110.13	40.8565441	53.4585669	0.74	3.52	2.38
70.01	60.19	107.75	37.7442455	47.5605085	1.10	0.74	2.56
71.11	60.93	105.19	34.0799287	44.2584837	0.76	1.29	7.56
70.35	62.22	112.75	42.4026479	50.5345785	3.16	0.92	1.06
73.51	61.30	111.69	38.1784598	50.3891558	2.36	4.23	
75.87	65.53	108.50	32.6320643	42.9740041	0.42	0.88	

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

CONCLUSIONES.

Existe el paradigma de que los precios de los índices financieros, tienen un comportamiento similar al desarrollado por una partícula de polvo en una superficie de agua, y que en Física se conoce como Movimiento Browniano. Y a través del desarrollo de esta tesis, pudimos darnos cuenta, que en efecto esto es cierto, ya que los precios reales del subyacente de las opciones Telmex del período 1998-1999, tienen ese comportamiento. Por lo tanto, si se parte de éste hecho, entonces es posible afirmar que, al aplicar métodos numéricos de aproximación a la ecuación diferencial estocástica que Langevin escribió, y que es solución del mencionado Movimiento Browniano, su simulación computacional, provee soluciones con aplicaciones en Finanzas, tal como se vio en esta tesis.

Debemos por tanto, reconocer la importancia que tienen las ecuaciones diferenciales estocásticas, en diferentes ámbitos del conocimiento, por ejemplo, tienen grandes aplicaciones en diferentes disciplinas tales como: ingeniería mecánica y civil, economía y finanzas (como se pudo ver a través del desarrollo de esta tesis), ciencia del medio ambiente, procesamiento de señales, química y física, dinámica de la población y psicología, farmacología y medicina, etc.

Por lo que fue preciso, antes de realizar las simulaciones de las trayectorias muestrales que son solución a la ecuación propuesta en el modelo de Black y Scholes, estudiar la teoría del Cálculo Estocástico o de Ito, para posteriormente entender la forma en la cual Black y Scholes, derivaron su fórmula de valuación de opciones.

Es importante señalar, que la herramienta de cómputo, es fundamental para la generación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, principalmente si se habla de sus aproximaciones numéricas, puesto que se requiere de ejecutar cálculos que serían prácticamente imposibles de obtener en forma manual.

Otro punto, que debe resaltarse es el hecho de que los índices financieros, que constituyen el activo subyacente de las opciones Telmex, tienen propiedades estadísticas muy semejantes a aquellas, correspondientes a índices internacionales como el S&P 500, tal como se pudo observar en el apartado correspondiente.

Debe, también, resaltarse que para la obtención de las trayectorias muestrales que son solución de la ecuación diferencial estocástica aquí propuesta, se hicieron uso de métodos de aproximación numérica, que son derivaciones de los usados con las ecuaciones



determinísticas. En específico, el método usado para simular las trayectorias solución, debido a que se trataba de un método no muy complicado, ya que no hace uso de derivadas de orden superior, pero que provee una mayor estabilidad y ajuste a los datos reales, que algunos otros métodos que se estudiaron.

Ahora bien, al analizar los resultados obtenidos de la simulación de la ecuación diferencial estocástica propuesta por el modelo de Black y Scholes, $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$, podemos observar las siguientes cuestiones:

El modelo propuesto por Black y Scholes, tiene, como se ha podido observar, un punto desfavorable en su contra, ya que considera que las operaciones financieras se desarrollan en un mercado estable, es decir, que la volatilidad asociada a los cambios en los precios del subyacente es constante, cuestión que en la realidad no se cumple, ya que los diferentes agentes del mercado inciden en él y provocan que éste tenga un comportamiento aleatorio. Sin embargo, el que Black y Scholes, hayan hecho esta consideración al plantear su modelo, puede entenderse ya que en 1973, cuando publican su famoso artículo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* no se conocían las técnicas modernas de aproximación numérica para el caso de ecuaciones diferenciales estocásticas y por su puesto, la tecnología computacional no se encontraba tan avanzada como en la actualidad.

Así pues, a través del desarrollo de la presente tesis, hemos podido verificar que al retomar la ecuación propuesta por Black y Scholes y considerar una volatilidad estocástica, la cual se simula a través de una Integral Múltiple Stratonovich, podemos obtener trayectorias con un comportamiento, en general, más cercano al que siguen los índices financieros en la realidad.

En el caso específico del subyacente de las opciones Telmex, pudimos observar que si se comparan los resultados de las soluciones, tanto para el caso de volatilidad constante como el de volatilidad estocástica, se tiene que el promedio del valor absoluto de estas diferencias es menor para el caso que maneja volatilidad estocástica, que aquel en el que la volatilidad es constante. Esto nos habla de que a pesar, de que los resultados obtenidos con la simulación de la ecuación diferencial estocástica, no son exactamente iguales a la trayectoria de los valores reales del subyacente de las opciones Telmex, la diferencia entre éstos y la solución con volatilidad estocástica, en promedio es menor que la diferencia con los datos generados por la solución que usa la volatilidad continua.

De hecho pudimos advertir que la trayectoria de los valores reales se encuentra justo en medio de las otras dos trayectorias generadas por la solución de la ecuación diferencial estocástica. Encontrándose por arriba de ésta la trayectoria generada con volatilidad estocástica y por debajo de la misma, la trayectoria simulada con volatilidad constante. Esto puede además verificarse a través de la comparación de la media de los valores reales que es 60.58 y la de las otras dos trayectorias, puesto que para los datos que usan volatilidad constante, su media es igual a 37.79 y para los que emplean volatilidad estocástica es igual a 82.84.

Por lo tanto, de acuerdo con los datos presentados, podemos concluir que la ecuación diferencial estocástica $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$, propuesta por Black y Scholes en su modelo, describe con mucho más claridad el comportamiento del subyacente de las opciones Telmex, si se incorpora como parámetro, una integral múltiple Stratonovich, la cual simula el comportamiento de la Volatilidad Estocástica. Cuestión que comprueba la hipótesis planteada en la Introducción de esta tesis.

Lo anterior nos permite sostener, que es posible la formulación de una Teoría de Riesgos Financieros, usando como punto de partida, el hecho de que el comportamiento de los subyacentes financieros, tienen un comportamiento que puede ser descrito en términos de una ecuación diferencial estocástica.

Por último, es posible apuntar, que el trabajo de investigación en este campo, es virgen aún, y que los resultados que aquí se presentan, por lo menos en México, son, por decirlo así, de nueva avanzada. Y que constituyen aún, sólo la base para la realización de estudios posteriores.

BIBLIOGRAFÍA.

- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Enero de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Febrero de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Marzo de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Abril de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Mayo de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Junio de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Julio de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Agosto de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Septiembre de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Octubre de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Noviembre de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Diciembre de 1998.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Enero de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Febrero de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Marzo de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Abril de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Mayo de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Junio de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Julio de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Agosto de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Septiembre de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Octubre de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Noviembre de 1999.
- Anuario de la Bolsa Mexicana de Valores. Diciembre de 1999.
- **Black, Fisher. Scholes, Myron.** "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" Journal of Political Economy. Vol. 81, No.3, 1973. pags. 637-564.
- **Bouchaud, J.-Ph.** "Elements for a Theory of Financial Risks". Phisica A. No. 263 (1999) pags. 415-426.

- **Díaz Tinoco, Jaime. Hernández Trillo, Fausto.** Futuros y Opciones Financieras. "Una Introducción". 2ª. Ed. LIMUSA, México, 1998. 171 pp.
- **Figlewski, S.** Et. All (1990) pags. 119-123.
- **Hull, John.** Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones. 2ª. Ed. [tr. Morales, Vivente]. Prentice Hall, México, 1995. 474 pp.
- **Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlang, Berlin, Heidelberg. United States of America, 1995. 632 pp.
- **Kloeden, Peter E. Platen, Eckhard. Schurz, Henri.** Numerical Solution of SDE Trough Computer Experiments. Springer-Verlang, Berlin. Heidelberg, New York, 1997. 283 pp.
- **Marki, S.** "*Derivative Financial Products*" Harper Bussines. USA, 1991.
- **O' Brien, Stephen.** Turbo Pascal 7. "Manual de Referencia". [tr. Cervigon Kütckauer] Mac Graw Hill, México, 1993. 799 pp.
- www.mexder.com.mx/mexder/antecedes.html
- **Yanhui, Liu. Parameswaran, Gopikrishnan, Et al.** "*Statistical Properties of Volatility of Price Fluctuations*". Physical Review E. Volumen 60, Número 2, Agosto, 1999.
- **Welsh, Jim. Elder, John. Pascal.** "Introducción". [tr. Valencia, Fernando]. 2ª. Ed. Prentice-Hall, México, 1983. 268 pp.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN