



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS
CON SPIN EN MECÁNICA
CUÁNTICA RELATIVISTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

VERÓNICA IVETTE RIQUER RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARCOS MOSHINSKY

MÉXICO, D.F.

MAYO DE 2002

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

UNIVERSITY
WASHINGTON STATE

Dedico este trabajo con todo mi amor

a mis muy queridos papás,

a mis hermanos Lorena, Dánae, Daniel y Fernando,

a mis abuelos,

y por supuesto a Martí.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MEMORANDUM
FOR THE RECORD

Agradezco infinitamente el apoyo y el cariño del Dr. Moshinsky y su guía, sin la cual, este trabajo no existiría. Gracias al Dr. Martí Ruiz Altaba por su gran amor, su paciencia y su ánimo que han sido vitales para mí. Mi gratitud también va para el Dr. Yuri Smirnov, que ha sido pieza clave en la realización de esta tesis. A los miembros del Jurado, en riguroso orden alfabético, Dres. Alejandro Ayala, Alejandro Frank, Augusto García, Eugenio Ley Koo y Alvaro Salas Brito mil gracias por la amorosa dedicación con que revisaron mi trabajo, tienen por siempre mi afecto. Al Dr. Guillermo Monsiváis por estar cerca. Al Dr. Víctor Romero porque ha sido el "guía espiritual" sin el cual no hubiera sobrevivido. Al Dr. Arnulfo Zepeda por su apoyo incondicional, decidido y eterno. Al Dr. Gastón García Calderón por sus sabios consejos. Al Dr. Jorge Flores por los buenos momentos en los que hablamos de física. Al Dr. Mauricio Fortes por el inamovible afecto que nos une.

A mis papás Rebeca y Emir, a mis hermanas Dánae y Lorena, a Fernando y Daniel, porque jamás dudaron que lo lograría. Su fe en mí ha significado la diferencia. A mis abuelos que, aunque no están ya aquí, siempre creyeron en mí. Los quiero mucho y siempre.

A mis amigas Paty, Bety y Gaby, porque me han soportado y me han querido. Sepan que yo también las quiero.

Al personal del Instituto de Física que me ha facilitado el uso de sus instalaciones y me ha alegrado la vida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología que me ha otorgado una beca para la realización del doctorado, mediante el proyecto 32421E.

A mis amigos en todo el mundo, y a uno en particular, porque tiene sangre azul y porque sí.

Índice General

1	Formulación del problema	7
1.1	Introducción	7
1.2	Invariancia del problema de muchos cuerpos ante el grupo de Poincaré y eliminación del movimiento del centro de masa . . .	8
1.3	Discusión del potencial que se va a emplear	11
1.4	Derivación del hamiltoniano	12
2	El problema de dos cuerpos	15
2.1	La forma radial del problema de dos cuerpos	15
2.2	La ecuación de segundo orden para el problema de dos cuerpos	17
3	Positronio	19
3.1	Correcciones relativistas a la energía del parapositronio y el paraquarkonio hasta orden $(1/c^2)$	20
3.2	Correcciones relativistas del <i>orto</i> (positronio o quarkonio) hasta orden $(1/c^2)$	23
3.3	Evaluación de las correcciones relativistas de la energía en el positronio hasta orden $(1/c^2)$	26
4	Sistema <i>quark-antiquark</i>	29
4.1	Energías de amarre no relativistas para el sistema de un quark y un antiquark	30
4.2	Botomonio	33
4.3	Los eigenvectores asociados con los eigenvalores de la energía .	36
4.4	Correcciones relativistas a orden $(1/c^2)$ para el sistema quark-antiquark	39
4.4.1	El caso de paridad $(-1)^j$	40
4.4.2	El caso de paridad $-(-1)^j$	42

4.4.3	Las correcciones relativistas a orden $(1/c^2)$ de los estados (Υ) del botomonio	45
5	El problema relativista de dos cuerpos con <i>spin</i> y masas diferentes	49
6	Conclusiones	57
A	Cálculo de los elementos de matriz relevantes para ϵ_{pnl} y ϵ_{onl}	59
B	Cálculo de los coeficientes $b(n'l', nl, k)$ para el caso $k \leq 0$	63
C	Cálculo del operador \hat{Q}_{--}^1	65
C.1	Caso $l = l' = j$; paridad $(-1)^j$	65
C.2	Caso $l = j \pm 1$; paridad $-(-1)^j$	65
C.2.1	$\tau' = \tau = 1$	67
C.2.2	$\tau' = \tau = -1$	68
C.2.3	$\tau' = 1, \tau = -1$	69
C.2.4	$\tau' = -1, \tau = 1$	69
D	Cálculo del operador \hat{O}_{--}^1	71
D.1	$-\alpha' + k < 0$ $-\alpha + k < 0$ $-k - 1 < 0$	73
D.2	$-\alpha' + k > 0$ $-\alpha + k < 0$ $-k - 1 < 0$	73
D.3	$-\alpha' + k < 0$ $-\alpha + k > 0$ $-k - 1 < 0$	73
D.4	$-\alpha' + k > 0$ $-\alpha + k > 0$ $-k - 1 < 0$	74

Resumen

La ecuación de Dirac para una sola partícula en un campo electromagnético ha tenido gran éxito en sus predicciones. Para más de una partícula, el tratamiento se hace usualmente mediante la teoría cuántica de campo. En este trabajo seguí el enfoque original de Dirac, mostrando que las energías cinética y potencial de un problema de muchos cuerpos se pueden expresar en una forma invariante de Lorentz, lo que permite también la eliminación del movimiento del centro de masa. Posteriormente, calculé el hamiltoniano para un sistema de dos cuerpos con *spin* usando una interacción que, en casos especiales, se reduce a la del positronio. Del conjunto de ecuaciones de primer orden derivé las ecuaciones de segundo orden, que incluyen el límite no relativista así como la expansión en potencias de $(1/c^2)$. La solución no relativista en el caso del positronio es bien conocida, en tanto que, para el quarkonio, resolví el problema numéricamente. Finalmente, evalué las correcciones relativistas a orden $(1/c^2)$ para ambos sistemas, calculando los respectivos elementos de matriz en la representación de los eigenestados no relativistas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

SECRET

The following information is being furnished to you for your information and use. It is classified "Secret" because its disclosure could result in the identification of sources and methods of the Central Intelligence Agency and thus be injurious to the national defense.

This information is being furnished to you on a "need-to-know" basis. It is not to be disseminated outside your agency or office without the express approval of the Central Intelligence Agency.

The information is being furnished to you for your information and use. It is classified "Secret" because its disclosure could result in the identification of sources and methods of the Central Intelligence Agency and thus be injurious to the national defense.

This information is being furnished to you on a "need-to-know" basis. It is not to be disseminated outside your agency or office without the express approval of the Central Intelligence Agency.

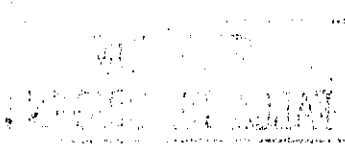
SECRET
UNCLASSIFIED

Abstract

The single particle Dirac equation in an electromagnetic field had many successful predictions. For more than one particle, the approach is usually done through quantum field theory. In this work, we follow the original Dirac approach by showing that the kinetic and potential energies of a many body problem can be expressed in a Lorentz invariant way, which allows also the elimination of the center of mass motion. We then proceed to the derivation of the Hamiltonian for a two body system with spin using an interaction that, for special cases, reduces to the one of positronium or quarkonium. We derive from the first order set of equations the ones of second order, that include the non-relativistic limit as well as the expansion in powers of $(1/c^2)$. The solution of the non-relativistic case for positronium is well known and for quarkonium we solve it numerically. Then we evaluate the relativistic corrections to order $(1/c^2)$ for both systems by calculating their matrix elements with respect to the non-relativistic eigenstates.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

The first part of the paper discusses the general theory of the firm, which is based on the neoclassical model of production. The second part of the paper discusses the empirical evidence on the theory of the firm. The third part of the paper discusses the implications of the theory of the firm for public policy. The fourth part of the paper discusses the implications of the theory of the firm for the theory of the market. The fifth part of the paper discusses the implications of the theory of the firm for the theory of the economy. The sixth part of the paper discusses the implications of the theory of the firm for the theory of the world.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 1

Formulación del problema

1.1 Introducción

La ecuación de Dirac para una sola partícula en un campo electromagnético tuvo un gran éxito al explicar muchos aspectos de fenómenos relativistas en Mecánica Cuántica. Para más de una partícula cargada, las interacciones se discuten usualmente en una teoría relativista y cuántica de campo. Sin embargo, es de interés una descripción a lo largo de las líneas seguidas por Dirac para el caso de una sola partícula [1], como hicieron para el problema de muchos cuerpos Barut [2, 3] y Moshinsky [4, 5, 6, 7]. Los análisis mencionados permiten escribir una sola ecuación para el sistema de muchos cuerpos, que es invariante ante el grupo de Poincaré y, además, dan la posibilidad de eliminar el movimiento del centro de masa, también en forma invariante, ante el grupo señalado. Se puede, pues, discutir el problema relativista de muchos cuerpos con interacción en el sistema del centro de masa en donde toma una forma simple, dando lugar a un hamiltoniano independiente de los tiempos presentes en el formalismo.

El sistema más sencillo al que se puede aplicar el método anterior es el de dos cuerpos con *spin* $\frac{1}{2}$ interactuando a través de un potencial dependiente sólo de la distancia relativa entre ellos. El hamiltoniano del problema será analizado en el caso del positronio y del quarkonio (sistemas *quark-antiquark*).

1.2 Invariancia del problema de muchos cuerpos ante el grupo de Poincaré y eliminación del movimiento del centro de masa

Para problemas no relativistas el paso de la ecuación de Schrödinger de un cuerpo a muchos cuerpos es inmediato. El caso de partículas relativistas es más complejo porque aun sin interacción y con un sistema de partículas idénticas de *spin* $\frac{1}{2}$ la ecuación invariante de Poincaré

$$\sum_{s=1}^n (\gamma_s^\mu p_{\mu s} + 1) \psi = 0 \quad (1.1)$$

introduce el tiempo asociado con cada partícula ya que $p_{0s} = -i\partial/\partial x_{0s}$. En (1.1) utilizamos unidades en que $\hbar = m_s = c = 1$, $p_{\mu s}$ es el vector covariante de energía y cantidad de movimiento y γ_s^μ es un cuadrivector con las matrices γ de Dirac asociadas con cada partícula $s = 1, \dots, n$.

¿Cómo podemos formular un problema invariante de Poincaré pero que en el sistema centro de masa dependa de un solo tiempo? Barut *et al.* [2, 3] mostraron un procedimiento y Moshinsky dio una formulación diferente [4] que ahora presentaremos.

Para este propósito, denotaremos por (u_μ) a un cuadrivector temporaloide y unitario, lo que implica que es posible encontrar un sistema de referencia en el cual

$$(u_\mu) = (1, 0, 0, 0). \quad (1.2)$$

Además, introduciremos n cuadrivectores matriciales γ_s^μ , en donde $\mu = 0, 1, 2, 3$; $s = 1, 2, \dots, n$, con la definición

$$\gamma_s^0 = \beta_s, \quad \gamma_s^i = \beta_s \alpha_{is}, \quad i = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

donde β y α tienen la definición usual [8], y la métrica $g_{\mu\nu}$ considerada es

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1 \quad (1.4)$$

Con la ayuda de los cuadrivectores (1.2), (1.3) definimos los siguientes escalares de Lorentz

$$\Gamma = \prod_{r=1}^n \left(\gamma_r^\mu u_\mu \right), \quad \Gamma_s = \left(\gamma_s^\mu u_\mu \right)^{-1} \Gamma, \quad (1.5)$$

donde los índices griegos repetidos se suman sobre $\mu = 0, 1, 2, 3$. Nótese que $(\gamma_s^\mu u_\mu)^{-1}$ en (1.5) elimina el correspondiente término en Γ , por lo que Γ_s tiene todavía forma de producto.

Moshinsky propone la ecuación invariante de Poincaré de la forma

$$\sum_{s=1}^n \Gamma_s (\gamma_s^\mu p_{\mu s} + 1) \psi = 0 \quad (1.6)$$

para el sistema de n partículas libres de *spin* $\frac{1}{2}$.

Procederemos ahora a mostrar que la ecuación (1.6) en el sistema de referencia donde la (u_μ) toma la forma (1.2), se reduce a una donde sólo aparece un tiempo relacionado con la energía total P_0 , el cual es parte del vector de energía-momento

$$P_\mu = \sum_{s=1}^n p_{\mu s}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

Para $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ la ecuación (1.6) toma la forma

$$\left[\Gamma^0 \sum_{s=1}^n p_{0s} + \sum_{s=1}^n \Gamma_s^0 (\boldsymbol{\gamma}_s \cdot \mathbf{p}_s + 1) \right] \psi = 0, \quad (1.8)$$

$$\Gamma^0 \equiv \prod_{r=1}^n \gamma_r^0, \quad \Gamma_s^0 \equiv (\gamma_s^0)^{-1} \Gamma^0, \quad (1.9)$$

en donde las letras **negritas** significan vectores tridimensionales.

Multiplicando (1.8) por Γ^0 y haciendo uso de (1.3), (1.9) y de que $(\gamma_s^0)^{-1}$ es β_s , obtenemos

$$\left[-P^0 + \sum_{s=1}^n (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + \beta_s) \right] \psi = 0 \quad (1.10)$$

donde por nuestra métrica $P_0 = -P^0$. Ya que P^0 es la energía total E del sistema, la ecuación (1.10) toma la forma usual para partículas libres, es decir

$$\sum_{s=1}^n (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + \beta_s) \psi = E \psi \quad (1.11)$$

El siguiente punto es eliminar el movimiento del centro de masa de la ecuación (1.6), y con este fin introducimos el cuadrivector de energía-momento (1.7) el cual se reduce a P_i para la parte espacialoide, $i = 1, 2, 3$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Nos gustaría estudiar nuestro problema en el sistema de referencia en donde el centro de masa se encuentre en reposo, y esto nos sugiere inmediatamente que el cuadvivector temporaloide unitario debe definirse como

$$u_\mu = P_\mu (-P_\tau P^\tau)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

y así $P_i = 0, i = 1, 2, 3; u_\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Procedamos ahora a poner la interacción de una forma que sea invariante de Poincaré. Observamos que este término depende de la distancia relativa entre los cuadvivectores correspondientes a los dos eventos, es decir,

$$x_\mu \equiv x_{\mu 1} - x_{\mu 2}, \quad (1.13)$$

y nos interesa que x_μ se reduzca a su parte espacial en el sistema centro de masa.

Esto puede lograrse si definimos

$$x_{\perp\mu} \equiv x_\mu - (x_\tau u^\tau) u_\mu \quad (1.14)$$

con u_μ dado por (1.12), ya que cuando $P_i = 0, i = 1, 2, 3, u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ y $x_{\perp 0} = 0, x_{\perp i} = x_i$.

La magnitud al cuadrado de $x_{\perp\mu}$ se llamará r^2 y se define como,

$$r^2 = (x_{\perp\mu} x_{\perp}^\mu) \quad (1.15)$$

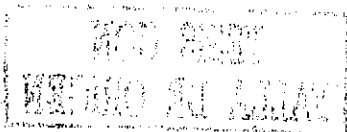
y por consiguiente cualquier función de r^2 es invariante de Poincaré, y en particular éste es el caso de r^{-1} en el potencial del positronio, y de r en el potencial del quarkonio. Por tanto, hemos establecido la invariancia de Poincaré del hamiltoniano con el que trabajaremos, y que para $n = 2$ es el siguiente

$$H' = (c' \alpha_1 \cdot \mathbf{p}'_1 + m'_1 c'^2 \beta_1) + (c' \alpha_2 \cdot \mathbf{p}'_2 + m'_2 c'^2 \beta_2) + V(r') \quad (1.16)$$

en donde $r' = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|, m'_1, m'_2$ y $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ son respectivamente las masas y momentos de las dos partículas y $V(r')$ el potencial central. En adelante, las variables en el sistema *c.g.s.* se denotarán como primadas, ya que deseamos reservar las letras sin primas para otros sistemas más adecuados de unidades.

Podemos pasar al sistema de referencia del centro de masa haciendo uso de las definiciones de cantidad de movimiento total y relativo

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{\mathbf{P}'}{2} + \mathbf{p}', \quad \mathbf{p}'_2 = \frac{\mathbf{P}'}{2} - \mathbf{p}' \quad (1.17)$$



o, de manera equivalente

$$\mathbf{P}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad \mathbf{p}' = \frac{1}{2}(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \quad (1.18)$$

Ya que no nos interesa el movimiento del sistema como un todo, tomamos $\mathbf{P}' = 0$ y de aquí que la ecuación de Schrödinger resultante sea

$$\left\{ \left[c'(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{p}' + c'^2(m'_1\beta_1 + m'_2\beta_2) \right] + V(r') \right\} \Psi = E'\Psi \quad (1.19)$$

1.3 Discusión del potencial que se va a emplear

Uno de los potenciales más usados para la interacción entre *quarks* es el llamado "Coulomb más lineal".

Su derivación está basada en el hecho de que la interacción entre *quarks* o un *quark* y un *antiquark* contiene una parte relacionada con el intercambio de un gluón.

Como el problema es similar al de dos electrones interaccionando mediante el intercambio de un fotón, la contribución al potencial será del tipo coulombiano, esto es $-b'^2/r$. Por otro lado, el hecho de que los *quarks* estén siempre confinados requiere de un potencial que vaya a infinito cuando $r \rightarrow \infty$. El potencial que se emplea con más frecuencia es el lineal, o sea $q'r'$. Tanto b' como q' son valores numéricos que dependen del problema. Vamos pues a considerar un potencial de la forma [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]

$$V(r') = q'r' - \frac{b'^2}{r'} \quad (1.20)$$

Esto incluye el caso del positronio en donde $q' = 0$, $b' = e$ (la carga del electrón); usamos el coeficiente b'^2 para enfatizar el hecho de que es positivo y tiene las mismas unidades que e^2 .

1.4 Derivación del hamiltoniano

En la ecuación (1.16) mostramos la forma que adopta el hamiltoniano en unidades *c.g.s.* para un sistema de dos cuerpos, y consideraremos un potencial de la forma dada en la ecuación (1.20). Es conveniente emplear unidades para las cuales tanto H' como las variables \mathbf{r}' , \mathbf{p}' son adimensionales.

Éstas pueden escogerse de varias maneras, pero la más adecuada es tomar un conjunto de unidades atómicas modificadas, a saber,

$$\hbar = \mu' = b' = 1 \quad (1.21)$$

con b'^2 siendo la intensidad de la parte coulombiana del potencial de la ecuación (1.20), μ es la masa reducida y empezaremos a tratar el sistema de masas iguales para el cual $\mu = (m/2)$. El problema de masas diferentes se discutirá en una sección posterior.

Las unidades de energía, longitud y momento son, respectivamente,

$$\frac{\mu' b'^4}{\hbar^2}, \quad \frac{\hbar^2}{\mu' b'^2}, \quad \frac{\mu' b'^2}{\hbar} \quad (1.22)$$

La ecuación de onda en el sistema de referencia del centro de masa se escribe como

$$\left\{ \left[c(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \mathbf{p} + 2c^2(\beta_1 + \beta_2) \right] + V(r) \right\} \Psi = E\Psi \quad (1.23)$$

en donde ahora c corresponde a la velocidad de la luz en nuestras unidades, es decir

$$c = \frac{\hbar c'}{b'^2} \quad (1.24)$$

y el potencial queda de la forma

$$V(r) = qr - \frac{1}{r} \quad (1.25)$$

con el parámetro adimensional q dado por

$$q = \frac{q' \hbar^4}{\mu'^2 b'^6} \quad (1.26)$$

Siendo éste un problema de dos cuerpos, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ están expresados por los siguientes productos directos [8]

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ \alpha_2 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta_1 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ \beta_2 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.27)$$

Introduciendo estos productos directos explícitamente en la ecuación (1.23), podemos escribirla como

$$\begin{aligned}\mathcal{O} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} &\equiv \left\{ 2c \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & 0 \\ \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & 0 & 0 & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & 0 & 0 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \\ 0 & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &+ 4c^2 \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \\ &\left. - [E - V(r)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0\end{aligned}\quad (1.28)$$

habiendo reemplazado las matrices de Pauli $\sigma_t, t = 1 \text{ o } 2$ por las matrices de *spin*

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 \quad (1.29)$$

Hacemos notar que las matrices en (1.28) son 16×16 , ya que $\mathbf{s}_t \rightarrow \mathbf{s}_t \otimes I, I \rightarrow I \otimes I$ y cada una de las $\psi_\lambda, \lambda = 1, 2, 3, 4$ tiene, de hecho, cuatro componentes como mostraremos más tarde.

Avoquémonos ahora a reducir la ecuación (1.28) a una expresión estrictamente radial y veamos si en esta forma es posible encontrar una solución exacta.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MOO BIENT
MENDO EN ALIAN

Capítulo 2

El problema de dos cuerpos

2.1 La forma radial del problema de dos cuerpos

El problema relativista de dos cuerpos con *spin* está dado en la ecuación (1.28) y para transformarlo en un conjunto de ecuaciones que sólo contengan a la variable radial r , requerimos la parte angular y espinorial del ket, que obviamente es

$$|(l, s)jm\rangle = \sum_{\mu, \sigma} \langle l\mu, s\sigma | jm\rangle Y_{l\mu}(\theta, \varphi) \chi_{s\sigma} \quad (2.1)$$

y por la suma de dos *spines* $\frac{1}{2}$, el *spin* total s solamente puede tomar los valores $s = 0$ o 1 , cuyas proyecciones son respectivamente $\sigma = 0$ o $\sigma = 1, 0, -1$. El momento angular total j y su proyección son integrales de movimiento, ya que el problema completo es invariante ante rotaciones, y el momento angular orbital está restringido a los valores $l = j$ si $s = 0$ o a $l = j + 1, j, j - 1$ si $s = 1$. Obsérvese que los estados con $l = j \pm 1$ y $l = j$ poseen paridad opuesta (la paridad es $(-1)^l$). Asimismo, $\chi_{s\sigma}$ representa la función de onda espinorial $\chi_{s\sigma} = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}s\sigma\rangle$.

La función de onda ψ_λ , $\lambda = 1, 2, 3, 4$ de la ecuación (1.28), puede representarse como

$$\psi_\lambda = \sum_{l,s} f_{ls}^{\lambda j}(r) |(l, s)jm\rangle \quad (2.2)$$

Para obtener las ecuaciones radiales que involucran a las $f_{ls}^{\lambda j}(r)$, necesitamos únicamente la representación matricial del operador \mathcal{O} en la ecuación

(1.28), con respecto al ket angular y espinorial de la ecuación (2.1). Dado que \mathcal{O} puede ponerse en la forma matricial $\mathcal{O} = \|\mathcal{O}_{\lambda\lambda}\|$ tenemos de la ecuación (1.28) que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\lambda\lambda} = 2c \left\{ (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) [\delta_{\lambda'=1, \lambda=2} + \delta_{\lambda'=2, \lambda=1} + \delta_{\lambda'=3, \lambda=4} + \delta_{\lambda'=4, \lambda=3}] \right. \\ \left. - (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) [\delta_{\lambda'=1, \lambda=3} + \delta_{\lambda'=3, \lambda=1} + \delta_{\lambda'=4, \lambda=2} + \delta_{\lambda'=2, \lambda=4}] \right\} + \\ 4c^2 (\delta_{\lambda'=1, \lambda=1} - \delta_{\lambda'=4, \lambda=4}) - [E - V(r)] \delta_{\lambda\lambda} \end{aligned} \quad (2.3)$$

y la única parte que no es trivial de calcular en la matriz

$$\langle (l', s') jm | \mathcal{O}_{\lambda\lambda} | (l, s) jm \rangle$$

es $(\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p})$, $t = 1, 2$ [16]:

$$\begin{aligned} \langle (l' s') jm | \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p} | (l, s) jm \rangle = (-1)^{l'+s-j} \times \\ [(2l' + 1)(2s' + 1)]^{1/2} W(l l' s s'; 1j) \langle l' \| p \| l \rangle \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} s' \| \mathbf{s}_t \| \frac{1}{2} \frac{1}{2} s \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

En la fórmula (2.4), W es un coeficiente de Racah y los elementos de matriz reducidos están expresados por [17]

$$\langle l' \| p \| l \rangle = i \delta_{l', l-1} \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r} \right) - i \delta_{l', l+1} \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r} \right) \quad (2.5)$$

y [16]

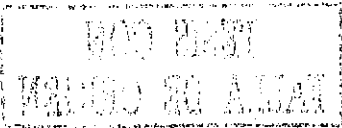
$$\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} s' \| \mathbf{s}_t \| \frac{1}{2} \frac{1}{2} s \rangle = (-1)^{1-s} W(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 s'; s \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{3}{4}} \quad (2.6)$$

y el elemento de matriz reducido de \mathbf{s}_t muestra que cuando $s' = 1$, $s = 0$, el término no desaparece. En efecto

$$W(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 1; 0 \frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad (2.7)$$

En consecuencia, los estados *spin-órbita* $|(j, 0) jm \rangle$ y $|(j, 1) jm \rangle$ que tienen la misma paridad, y satisfacen la regla de selección en el *spin*, estarán conectados. También estarán conectados con los estados $|(j \pm 1, 1) jm \rangle$ por el elemento de matriz de la ecuación (2.4), ya que \mathbf{p} es un vector polar.

Podemos entonces escribir explícitamente el conjunto de ecuaciones radiales de primer orden para $f_{l's}^{\lambda j}(r)$, pero no lo haremos debido a que no es



posible hallar una relación de recurrencia que nos permita encontrar la solución exacta del problema, como ocurrió con la discusión de Dirac para el átomo de hidrógeno [1]. Lo que haremos entonces es analizar la ecuación de segundo orden para el operador \mathcal{O} y hacer una expansión en potencias de $1/c^2$.

2.2 La ecuación de segundo orden para el problema de dos cuerpos

La ecuación de onda matricial (1.28) puede expresarse en términos de las siguientes submatrices,

$$2c \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [E - V(r)] - 4c^2 & 0 \\ 0 & [E - V(r)] + 4c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$2c \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = [E - V(r)] \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Dividiendo la ecuación (2.9) entre $[E - V(r)]$ y sustituyendo en la ecuación (2.8), tenemos

$$4c^2 \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \frac{1}{[E - V(r)]} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [E - V(r)] - 4c^2 & 0 \\ 0 & [E - V(r)] + 4c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

El conmutador que requerimos está dado por,

$$[(\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p}), (E - V(r))^{-1}] = \frac{1}{i} [E - V(r)]^{-2} (\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (2.11)$$

por tanto, podemos escribir la expresión (2.10) como

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
& \frac{4c^2}{i} [E - V(r)]^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\
& + \frac{4c^2}{[E - V(r)]} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} [E - V(r)] - 4c^2 & 0 \\ 0 & [E - V(r)] + 4c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Esta última ecuación todavía involucra a los *spines* de las dos partículas $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, pero puede transformarse de tal manera que sólo incluya al *spin* total. Usando la siguiente relación entre las matrices de *spin* de Pauli

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (2.13)$$

obtenemos de forma directa que la ecuación (2.12) puede expresarse del modo siguiente,

$$\begin{aligned}
& \frac{4c^2}{i} [E - V(r)]^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \\
& \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) & \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) & \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \end{bmatrix} \right. \\
& \left. + \frac{4c^2}{[E - V(r)]} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}p^2 & \frac{1}{2}p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \\ \frac{1}{2}p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 & \frac{1}{2}p^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} [E - V(r)] - 4c^2 & 0 \\ 0 & [E - V(r)] + 4c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

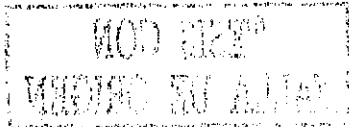
donde \mathbf{S} es el *spin* total y \mathbf{L} el momento angular orbital cuando denotan operadores, mientras que las letras minúsculas s, l representan los eigenvalores, i.e.

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2.15)$$

Podemos observar que en la ecuación (2.14) únicamente aparecen las componentes del vector de *spin* total \mathbf{S} , las cuales conmutan con el operador S^2 . Por consiguiente, S^2 es una integral de movimiento cuyo eigenvalor $s(s+1)$ es 0 o 2. De aquí que podamos separar a la ecuación (2.14) en dos partes; una para el caso $s = 0$ que es llamado *para* (positronio o quarkonio), la otra para $s = 1$ que se conoce como *orto* (positronio o quarkonio).

Además, en el caso *orto* encontramos que la paridad es un buen número cuántico y, por tanto, podemos distinguir entre dos casos: $l = j$ y $l = j \pm 1$.

Consideraremos de manera independiente los casos *para* y *orto*.



Capítulo 3

Positronio

La predicción y el subsecuente descubrimiento del positrón constituyen uno de los más grandes logros de la mecánica cuántica relativista. Cuando Dirac [18] desarrolló su teoría del electrón en 1930, se percató de que las soluciones de energía negativa para la ecuación de onda invariante relativista, en la cual la energía total E' de una partícula y su masa en reposo m' se relacionan con su momento lineal p' por

$$E'^2 = m'^2 c'^4 + p'^2 c'^2 \quad (\text{unidades c.g.s.}) \quad (3.1)$$

tenían sentido físico. De aquí que postulara que el "mar" de estados electrónicos con energías entre $-m'c'^2$ y $-\infty$ estaba completamente ocupado de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, y no debería ser observable. Una vacante en este ensamble, sin embargo, se manifestaría como una partícula cargada positivamente con una masa en reposo positiva, razón por la cual sobre la base de las correcciones a la energía de Coulomb que todavía no habían sido calculadas y según las partículas conocidas en la época, Dirac asumió que se trataba del protón. Pronto se vio que no era éste el caso y que lo que la teoría realmente predecía, sin ninguna duda, era la existencia de una nueva partícula con la masa en reposo del electrón y una carga igual pero de signo contrario: el positrón.

El positrón fue descubierto por Anderson en 1933 [19] en una cámara de niebla que servía para estudiar los rayos cósmicos. Este hallazgo fue confirmado por Blackett y Occhialini en el mismo año [20].

En 1934 Mohorovičić propuso la existencia de un estado ligado de un positrón y un electrón al cual llamo "electrum" y sugirió (de manera incorrecta) que podía ser el responsable de algunos hechos inexplicables en el

espectro de emisión de algunas estrellas [21]. El actual nombre de "positronio" fue dado por Ruark en 1945 [22].

El positronio es un estado ligado neutro cuasi-estable de un electrón y un positrón. Es de tipo hidrogenoide, pero debido a que su masa reducida es $m'/2$, los valores de los niveles de energía se reducen, a *grosso modo*, a la mitad del valor de aquellos que se presentan en el átomo de hidrógeno. De aquí que la energía de amarre del estado fundamental del positronio es de aproximadamente 6.8 eV.

El positronio puede existir en dos estados de *spin*, $S = 0, 1$. El estado singlete ($S = 0$), en el cual los *spines* del electrón y el positrón son antiparalelos, se denomina parapositronio. El estado triplete ($S = 1$) se llama ortopositronio. El estado de *spin* tiene una importante influencia en la estructura de los niveles de energía en el positronio.

3.1 Correcciones relativistas a la energía del parapositronio y el paraquarkonio hasta orden $(1/c^2)$

Antes de proceder a nuestra discusión vemos que en unidades *c.g.s.* la energía en reposo del positronio es $2m'c^2 = 4\mu'c^2$, donde μ' es la masa reducida.

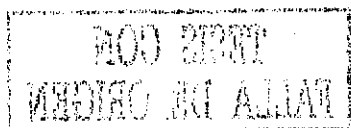
En las unidades de la ecuación (1.21), la energía en reposo es $4c^2$. Por tanto, podemos denotar a la energía total E como

$$E = 4c^2 + \epsilon \quad (3.2)$$

donde ϵ representa la energía de amarre del sistema de dos partículas, la cual deseamos determinar.

En el caso *para*, ya que $s = 0$, los términos que contienen al vector \mathbf{S} en la ecuación (2.14) desaparecen, y usando (3.2) nuestra ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} & -i2c^2[4c^2 + \epsilon - V(r)]^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ & + 2c^2[4c^2 + \epsilon - V(r)]^{-1} p^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \epsilon - V(r) & 0 \\ 0 & \epsilon - V(r) + 8c^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$



La parte izquierda de (3.3) puede diagonalizarse con ayuda de la matriz,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ya que

$$U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Escribiendo entonces

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

y multiplicando a la ecuación (3.3) por U^{-1} en la parte izquierda, tenemos

$$\begin{aligned} & -4ic^2 \left[4c^2 + \epsilon - V(r) \right]^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \psi_+ \\ & + 4c^2 \left[4c^2 + \epsilon - V(r) \right]^{-1} p^2 \psi_+ = \left[4c^2 + \epsilon - V(r) \right] \psi_+ - 4c^2 \psi_-, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$0 = \left[4c^2 + \epsilon - V(r) \right] \psi_- - 4c^2 \psi_+ \quad (3.8)$$

Haciendo uso de (3.8) para expresar ψ_- en términos de ψ_+ y sustituyendo en la ecuación (3.7), obtenemos una relación que solamente involucra a ψ_+ , i.e.

$$\begin{aligned} & -4ic^2 \left[4c^2 + \epsilon - V(r) \right]^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \psi_+ \\ & + 4c^2 \left[4c^2 + \epsilon - V(r) \right]^{-1} p^2 \psi_+ \\ & = 4c^2 \left[(\epsilon - V(r))(4c^2)^{-1} + 1 \right] \psi_+ \\ & - 4c^2 \left[1 + (\epsilon - V(r))(4c^2)^{-1} \right]^{-1} \psi_+ \end{aligned} \quad (3.9)$$

Queremos ahora expresar la ecuación (3.9) en términos de potencias inversas de c^2 , usando la bien conocida expansión [23]

$$(1+x)^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} x^m, \quad |x| < 1 \quad (3.10)$$

Si definimos ahora w como

$$w \equiv \left[4c^2 + \epsilon - V(r) \right] = 4c^2 \left[1 + \frac{(\epsilon - V(r))}{4c^2} \right] \quad (3.11)$$

tenemos de la ecuación (3.10), los siguientes desarrollos

$$4c^2 w^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[\frac{\epsilon - V(r)}{4c^2} \right]^m \quad (3.12)$$

$$4c^2 w^{-2} = - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m[\epsilon - V(r)]^{m-1}}{(4c^2)^m} \quad (3.13)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned} & i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m[\epsilon - V(r)]^{m-1}}{(4c^2)^m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \psi_+ \\ & + \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[\frac{\epsilon - V(r)}{4c^2} \right]^m \right\} p^2 \psi_+ \\ & = 2[\epsilon - V(r)] \psi_+ - \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{[\epsilon - V(r)]^m}{(4c^2)^{m-1}} \psi_+ \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si despreciamos en la ecuación (3.14) a todos los términos que contienen $(1/c^2)$ (o equivalentemente consideramos que $c \rightarrow \infty$), tenemos que

$$\left[\frac{1}{2} p^2 + V(r) \right] \psi_+ = \epsilon \psi_+ \quad (3.15)$$

la cual es precisamente la fórmula no relativista para el caso *para* en unidades de la ecuación (1.21).

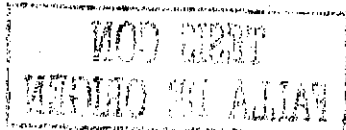
En el caso específico del parapositronio, $V(r)$ se convierte en $-(1/r)$ y la ecuación (3.14) es idéntica a la del átomo de hidrógeno en unidades atómicas. Por consiguiente la energía de amarre se escribe como

$$\epsilon_\nu = -\frac{1}{2\nu^2}, \quad \nu = n + l + 1 \quad (3.16)$$

con ν, n número cuántico total y radial, respectivamente, y l es el momento angular orbital.

Tratándose del paraquarkonio, tenemos que $V(r)$ está dado en la ecuación (1.25) y de aquí que la expresión no relativista correspondiente se enuncia de la forma que a continuación se muestra,

$$\left[\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{r} + qr \right] \psi_+ = \epsilon \psi_+ \quad (3.17)$$



la cual sólo puede resolverse numéricamente, cuestión que discutiremos más adelante.

Si incluimos en (3.9) todos los términos hasta orden $(1/c^2)$ y dividimos entre 2, llegamos a la siguiente expresión

$$H_p \psi_+ = \left\{ \left[\frac{p^2}{2} + V(r) \right] - \frac{1}{8c^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{p^4}{32c^2} \right\} \psi_+ = \epsilon \psi_+ \quad (3.18)$$

en donde para los términos de orden $(1/c^2)$ hemos reemplazado, como es habitual [24], $[\epsilon - V(r)]$ por $(p^2/2)$, y recurrimos al hecho de que

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = -ir \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.19)$$

Un resultado similar ha sido obtenido, mediante un proceso diferente, por W. Królikowski [25].

La fórmula correspondiente para el átomo de hidrógeno, en unidades atómicas $\hbar = m = c = 1$, es

$$H_h \Psi \equiv \left\{ \left[\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{p^4}{8} - \frac{1}{4r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r^3} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \right] \right\} \Psi = \epsilon \Psi \quad (3.20)$$

Encontramos que en el caso *para* no existen términos de acoplamiento *spin*-órbita, como era de esperarse, ya que el *spin* total es $s = 0$. Por otra parte, para el caso del positronio donde $V(r) = -(1/r)$, los coeficientes de los otros términos en (3.18) y (3.20) son semejantes.

3.2 Correcciones relativistas del *orto* (positronio o quarkonio) hasta orden $(1/c^2)$

Consideremos ahora la ecuación completa (2.14), pero con el valor del *spin* 1, lo que implica que \mathbf{S}^2 es una integral de movimiento, cuyo eigenvalor es $s(s+1) = 2$. Descomponemos la parte derecha de la ecuación (2.14) en la forma que ahora se cita

$$[E - V(r)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Y escribimos

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

en donde U está dado en la ecuación (3.4). Procedemos asimismo a multiplicar la ecuación (2.14) por U^{-1} en la parte izquierda.

Antes de escribir las expresiones que resultan, calculamos

$$\begin{aligned} U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U &= - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ U^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} U &= \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Con el objeto de hacer la fórmula más compacta, definimos

$$a \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}), \quad b \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) \quad (3.24)$$

$$u \equiv \frac{1}{2}p^2, \quad v \equiv \frac{1}{2}p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \quad (3.25)$$

$$w \equiv [E - V(r)] \quad (3.26)$$

en donde hemos usado la expresión (3.2) para E ; por tanto, w es la misma que en la ecuación (3.11).

Sustituyendo los resultados (3.21-3.26) en la ecuación (2.14), encontramos para ψ_+ , ψ_- las ecuaciones

$$\left\{ -4ic^2w^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (a+b) + 4c^2w^{-1}(u+v) - w \right\} \psi_+ = 4c^2\psi_- \quad (3.27)$$

$$\left\{ -4ic^2w^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (a-b) + 4c^2w^{-1}(u-v) - w \right\} \psi_- = 4c^2\psi_+ \quad (3.28)$$

Usando la ecuación (3.27) para expresar ψ_- en términos de ψ_+ y sustituyendo en la expresión (3.28) obtenemos

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[-4ic^2w^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (a-b) + 4c^2w^{-1}(u-v) - w \right] \times \right. \\ &\left. \left[-4ic^2w^{-2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (a+b) + 4c^2w^{-1}(u+v) - w \right] \right\} \psi_+ = 16c^4\psi_+ \quad (3.29) \end{aligned}$$

Acudiendo a las expansiones (3.12) y (3.13) para $(4c^2w^{-1})$ y $(4c^2w^{-2})$, tenemos que la ecuación (3.29) se transforma en

$$\begin{aligned}
& \left\{ i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m [\epsilon - V(r)]^{m-1}}{(4c^2)^m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (a - b) \right. \\
& + \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\epsilon - V(r)}{4c^2} \right)^m \right] (u - v) - (4c^2 + \epsilon - V(r)) \Big\} \\
& \times \left\{ i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m [\epsilon - V(r)]^{m-1}}{(4c^2)^m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (a + b) \right. \\
& + \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\epsilon - V(r)}{4c^2} \right)^m \right] (u + v) - (4c^2 + \epsilon - V(r)) \Big\} \psi_+ \\
& = 16c^4 \psi_+ \tag{3.30}
\end{aligned}$$

En la expresión (3.30) mantenemos los términos hasta orden $(1/c^2)$ y reemplazamos a, b, u, v en (3.24), (3.25) por sus valores. Vemos que existe un término $16c^4$ en la parte izquierda, que cancela al $16c^4$ del lado derecho. Si además dividimos la expresión que resulta entre $(-8c^2)$ obtenemos para el caso *orto*, hasta orden $(1/c^2)$, la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
H_o \psi_+ \equiv & \left\{ \left[\frac{p^2}{2} + V(r) \right] - \frac{1}{8c^2} \left[-\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \right. \right. \\
& \left. \left. + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] - \frac{p^4}{32c^2} \right] \right\} \psi_+ = \epsilon \psi_+ \tag{3.31}
\end{aligned}$$

De forma similar al caso *para*, reemplazamos $[\epsilon - V(r)]$ por $(p^2/2)$ en los términos de orden $(1/c^2)$, y $(1/r)(dV/dr)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$ por $-(i/r)(dV/dr)r\partial/\partial r$.

Tenemos entonces que a orden $(1/c^2)$ el hamiltoniano en el caso *para* (3.18) y el *orto* (3.31), difieren en sus correcciones a orden $(1/c^2)$.

Hasta este momento, nuestra discusión se aplica tanto al positronio cuando $V(r) = -1/r$, como al quarkonio donde $V(r) = qr - r^{-1}$; en este caso $q = (q'\hbar^4/\mu^2 b^6)$. De aquí en adelante discutiremos el problema de manera separada empezando con el positronio.

<p>TESIS CON FALLA DE ORIGEN</p>

3.3 Evaluación de las correcciones relativistas de la energía en el positronio hasta orden $(1/c^2)$

Es fácil notar el hecho de que para el positronio, en donde $(dV/dr) = 1/r^2$, las correcciones relativistas hasta orden $(1/c^2)$ tienen los mismos términos que los presentes en el átomo de hidrógeno (3.20), pero con coeficientes distintos. Es claro que el valor del *spin* $s = \frac{1}{2}$ para el átomo de hidrógeno y de $s = 0$ ó $s = 1$ para el caso *para* y *orto*, tienen una marcada influencia en la parte $(1/c^2)$ en sus respectivos hamiltonianos.

Observamos asimismo que, en comparación con la energía no relativista $-1/2\nu^2$ de la ecuación (3.16), la corrección relativista a la energía hasta orden $(1/c^2)$ es muy pequeña, ya que $c = (\hbar c'/e'^2)$, donde c' es la velocidad de la luz en el sistema *c.g.s.*, i.e. 3×10^{10} cm/s, y e' es la carga del electrón, esto es

$$\frac{1}{c^2} \simeq \frac{1}{(137)^2} = 5.328 \times 10^{-5} \quad (3.32)$$

por tanto, podemos limitarnos a la teoría de perturbaciones a primer orden, usando los eigenestados de la ecuación (41.32) p. 197 referencia [26] del problema de Coulomb con una parte de *spin*, de la manera siguiente

$$|n(l, s)jm \rangle \equiv R_{nl}(r)|(l, s)jm \rangle \quad (3.33)$$

aquí el ket representa la parte angular y espinorial y está dado en la ecuación (2.1), mientras que la parte radial $R_{nl}(r)$ es de la forma (41.32) p. 197 de la referencia [26]

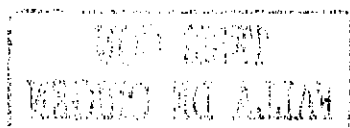
$$R_{nl}(r) = \frac{2}{\nu^2} R_{nl}(\rho); \quad \nu = n + l + 1 \quad (3.34)$$

La función en la parte derecha corresponde a la eigenfunción del problema de Sturm-Coulomb de la ecuación (41.17) p. 195 referencia [26] i.e.

$$R_{nl}(\rho) = \sqrt{\frac{n!}{(n+2l+1)!}} \rho^l L_n^{2l+1}(\rho) e^{-\rho/2}, \quad \rho \equiv (2r/\nu) \quad (3.35)$$

Los hamiltonianos del *para* y ortopositronio están dados por los términos dentro de las llaves, en las expresiones (3.18) y (3.31) y han sido designados respectivamente por

$$H_p, \quad H_o \quad (3.36)$$



Los eigenvalores de estos hamiltonianos (que se han escrito hasta orden $1/c^2$) estarán expresados por los elementos de matriz de sus valores de expectación, esto es

$$\langle n(l, s)jm | H_q | n(l, s)jm \rangle \quad \text{donde } q = p, o \quad (3.37)$$

El cálculo de dichos elementos de matriz se hace de forma directa usando los resultados de la Tabla 2⁵ p. 117 en la referencia [24]. Nos limitaremos a dar sus valores, mientras que los cálculos explícitos se encuentran en el Apéndice A. Denotaremos a las energías por ϵ_{pnl} o ϵ_{onl} según correspondan al *para* o al ortopositronio. Para este último, el ket en la expresión (3.33) se reduce a

$$|n(j, 1)jm \rangle \quad \text{y} \quad |n(j \pm 1, 1)jm \rangle \quad (3.38)$$

los cuales tienen paridad opuesta y por tanto dan origen a resultados independientes. En este trabajo solamente trataremos el primer caso, *i.e.* $l = j$.

De la ecuación (3.37) obtenemos para el parapositronio, con $l = j$, lo que sigue [27]

$$\epsilon_{pnl} = -\frac{1}{2\nu^2} + \frac{\delta_{j0}}{4c^2\nu^3} - \frac{1}{32c^2} \frac{1}{\nu^4(j + \frac{1}{2})} \left[4\nu - 3\left(j + \frac{1}{2}\right) \right] \quad (3.39)$$

donde $\nu = (n + l + 1)$; para el estado fundamental $n = l = 0$ o $\nu = 1$ y se tiene

$$\epsilon_{p00} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{32c^2} \quad (3.40)$$

con el factor $(1/c^2)$ expresado en la fórmula (3.32).

En el caso del ortopositronio, con $l = j$, obtenemos mediante el uso de la ecuación (3.37) que [27]

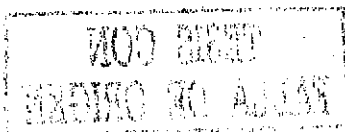
$$\epsilon_{onl} = -\frac{1}{2\nu^2} + \frac{\delta_{j0}}{4c^2\nu^3} - \frac{1}{8c^2} \left[\frac{1}{\nu^3(j + \frac{1}{2})(j + 1)j} \right] - \frac{1}{32c^2} \frac{1}{\nu^4(j + \frac{1}{2})} \left[4\nu - 3\left(j + \frac{1}{2}\right) \right] \quad (3.41)$$

Enfaticemos el hecho de que nuestro análisis se lleva solamente hasta orden $(1/c^2)$ en las unidades de la ecuación (1.21), que en *c.g.s.* equivale a $(e^2/\hbar c)^2 \equiv \alpha^2$ la constante de estructura fina. Por tanto, nuestros resultados nos dan términos sólo hasta α^2 . Para órdenes mayores, tendríamos que usar las expansiones en las fórmulas (3.14) o (3.30) hasta desarrollos superiores en $(1/c^2)$, reemplazando ϵ cada vez por la dada en la aproximación previa. No

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

llevaremos a cabo estos cálculos en la presente tesis, ya que nuestro objetivo es ilustrar el problema de dos cuerpos del cual el positronio es sólo un ejemplo. Sin embargo, existen muchos trabajos que llevan la aproximación a órdenes mayores, y de los cuales citamos algunos [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

Pasemos ahora al problema *quark-antiquark*.



Capítulo 4

Sistema *quark-antiquark*

El término “quarkonio” designa a cualquier estado ligado de un *quark* y un *antiquark*. Sin embargo, solamente para los *quarks* pesados se justifica un tratamiento no relativista [36].

Los potenciales no relativistas han demostrado ser los más exitosos para calcular y predecir los niveles de energía y decaimientos. Existen otros métodos más sofisticados para hacer estos cálculos, como serían los modelos de “bolsa”, las reglas de suma de cromodinámica cuántica (QCD) [37], [38], y de latiz [39], [40]. Entre más pesado sea el sistema quarkonio, menos importantes serán los efectos relativistas.

Generalmente, se trata al botomonio (botom-antibotom) con un potencial no relativista, con las siguientes suposiciones:

- 1) El *quark* b es pesado, por lo cual se puede usar la dinámica no relativista al orden más bajo y las correcciones relativistas serán mínimas.
- 2) El intercambio de un gluón debería dominar a distancias cortas y el correspondiente potencial tendría que comportarse como Coulombiano, *i.e.* como $1/r$ para r pequeña.
- 3) A grandes distancias el potencial debería ser de confinamiento, para justificar el hecho de que los *quarks* no pueden aparecer como partículas libres.

El potencial seleccionado se usa en una ecuación de onda y se obtienen soluciones numéricas bajo ciertas suposiciones. Sin embargo, el mero concepto de un potencial local es una aproximación, por lo que resulta realmente sorprendente que esta idea funcione adecuadamente para el quarkonio pesado.

Como ya hemos señalado previamente, en este trabajo se usará el potencial “Coulomb más lineal”.

4.1 Energías de amarre no relativistas para el sistema *quark-antiquark*

En el caso del positronio no relativista, hemos visto que el problema puede resolverse completamente ya que, en las unidades que usamos, es idéntico al caso del hidrógeno en unidades atómicas. Para el sistema *quark-antiquark* con partículas de la misma masa, encontramos a partir de las expresiones (3.31), (1.24), (1.25) y (1.26) que la ecuación de Schrödinger se puede escribir como

$$H^{ql}\psi \equiv \left[\frac{p^2}{2} + qr - \frac{1}{r} \right] \psi = \epsilon\psi \quad (4.1)$$

en donde hemos agregado los índices ql al operador hamiltoniano H .

Podemos observar fácilmente que la ecuación (4.1) no tiene una solución analítica explícita salvo en el caso trivial $q = 0$, que es el problema correspondiente al positronio.

Nuestro primer objetivo será obtener soluciones a la ecuación (4.1), y en particular los valores de las energías de amarre ϵ , usando un método variacional de Ritz. Para realizarlo, requerimos de un conjunto completo de soluciones de un problema de mecánica cuántica que puedan servir como base variacional. Una elección que parece obvia es la correspondiente al problema de Coulomb. Sin embargo, si sólo usamos los niveles discretos, la base no es completa; tenemos una contribución que proviene de los estados en el continuo. Podríamos considerar asimismo la base de estados de oscilador armónico, pero su convergencia para el hamiltoniano en la ecuación (4.1) es sumamente lenta. Decidimos entonces acudir a la base de estados de Sturm-Coulomb $R_{nl}(r)$ de la expresión (3.35), en donde reemplazamos ρ por r y los cuales cumplen con la ecuación [26],

$$p^2 R_{nl}(r) = \left(\frac{\nu}{r} - \frac{1}{4} \right) R_{nl}(r) \quad (4.2)$$

con

$$\nu = n + l + 1, \quad p^2 = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (4.3)$$

Estos estados son ortonormales respecto del elemento radial diferencial de volumen rdr , pero no lo son en relación al elemento físico $r^2 dr$, por tanto tenemos

$$\int_0^\infty R_{nl}(r) R_{n'l}(r) r^2 dr \equiv \langle n'l | nl \rangle = b(n'l, nl, 2) \quad (4.4)$$

con los coeficientes $b(n'l', nl, k)$ definidos en la referencia [41].

En la ecuación (4.2) hemos hecho una elección definida de parámetros para las $R_{nl}(r)$ y, si deseamos continuar usándolos, podemos introducir parámetros en el hamiltoniano H^{ql} de la ecuación (4.1) mediante la sustitución [26]

$$\mathbf{p} \rightarrow \lambda \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} \rightarrow \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \quad (4.5)$$

así que nuestro hamiltoniano resulta ser

$$H^{ql} = \frac{1}{2} \lambda^2 p^2 + \frac{qr}{\lambda} - \frac{\lambda}{r} \quad (4.6)$$

Para el método variacional de Ritz necesitamos matrices hamiltonianas (que serán designadas por letras mayúsculas negritas) cuyos elementos se calculan respecto a los estados $R_{nl}(r)$, *i.e.*

$$\mathbf{H}^{ql} = \left\| \int_0^\infty R_{n'l}(r) \left[\left(\frac{1}{2} \lambda^2 p^2 + \frac{qr}{\lambda} - \frac{\lambda}{r} \right) R_{nl}(r) \right] r^2 dr \right\| \quad (4.7)$$

con p^2 dada en la ecuación (4.3). Haciendo uso de la expresión (4.2), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{ql} &= \left\| \int_0^\infty R_{n'l}(r) \left\{ \left[\frac{1}{2} \lambda^2 \left(\frac{\nu}{r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{qr}{\lambda} - \frac{\lambda}{r} \right] R_{nl}(r) \right\} r^2 dr \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{1}{2} \lambda^2 \nu - \lambda \right) b(n'l, nl, 1) - \frac{1}{8} \lambda^2 b(n'l, nl, 2) + \frac{q}{\lambda} b(n'l, nl, 3) \right\| \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$b(n'l, nl, k) \equiv \int_0^\infty R_{n'l}(r) R_{nl}(r) r^k dr \quad (4.9)$$

han sido calculados explícitamente en la referencia [41].

Procederemos ahora a determinar el valor del parámetro λ que nos da la mejor aproximación a las energías reales de amarre ϵ en la ecuación (4.1).

Con este propósito, determinamos los elementos de matriz de la ecuación (4.8) para el caso $n = n' = 0$ y obtenemos

$$F(\lambda, q) \equiv \left[\frac{1}{2} \lambda^2 (l+1) - \lambda \right] - \frac{1}{8} \lambda^2 (2l+2) + \frac{q}{\lambda} (2l+3)(2l+2) \quad (4.10)$$

debido a que [41]

$$b(0l, 0l, 1) = 1, \quad b(0l, 0l, 2) = (2l+2), \quad b(0l, 0l, 3) = (2l+3)(2l+2) \quad (4.11)$$

La mejor opción para λ es aquella que minimiza $F(\lambda, q)$ y cuyo valor está dado por

$$\frac{dF(\lambda, q)}{d\lambda} = \lambda(l+1) - 1 - \frac{1}{4}\lambda(2l+2) - \frac{q}{\lambda^2}(2l+3)(2l+2) = 0 \quad (4.12)$$

e implica la ecuación cúbica siguiente

$$\frac{1}{2}\lambda^3(l+1) - \lambda^2 - q(2l+3)(2l+2) = 0 \quad (4.13)$$

Para cualquier valor numérico de q tenemos un valor real correspondiente $\bar{\lambda} \equiv \lambda(q)$. Posteriormente consideraremos casos numéricos particulares. En la matriz de la expresión (4.8) es menester reemplazar λ por $\bar{\lambda}$ y la llamaremos \bar{H}^{ql} . Del mismo modo, denotaremos por N^l a la matriz

$$N^l = \|b(n^l, nl, 2)\| \quad (4.14)$$

Nuestro proceso variacional para determinar las energías es mediante la matriz

$$\bar{H}^{ql} - \epsilon N^l \quad (4.15)$$

donde ϵ es el valor que aparece en la ecuación de Schrödinger (4.1). De aquí que las energías de amarre ϵ puedan determinarse a través de la ecuación secular siguiente

$$\det[\bar{H}^{ql} - \epsilon N^l] = 0 \quad (4.16)$$

en donde \det significa el determinante de la matriz que se indica.

La ecuación (4.16) tiene ciertas dificultades numéricas, debido a que la capacidad de cómputo para resolver ecuaciones algebraicas de orden muy alto es limitada. Por consiguiente, hemos de recurrir a un procedimiento equivalente que sea más simple de calcular numéricamente y en donde ϵ no aparezca explícitamente. Con este objetivo en mente, observamos que N^l es una matriz simétrica real, y por lo tanto puede diagonalizarse, de aquí que es factible escribir

$$N^l = \tilde{O}^l D O^l \quad (4.17)$$

donde O^l es una matriz ortogonal y \tilde{O}^l es su transpuesta, en tanto que D es una matriz diagonal cuyos elementos son todos positivos y diferentes de cero.

De aquí se deduce que la expresión (4.15) puede reemplazarse por

$$Q^{ql} - \epsilon I \quad \text{con} \quad Q^{ql} \equiv D^{-1/2} O^l \bar{H}^{ql} \tilde{O}^l D^{-1/2} \quad (4.18)$$

y donde \mathbf{I} es la matriz unitaria con la dimensión correspondiente a las otras. Los eigenvalores ϵ pueden obtenerse tomando el determinante y resolviendo la ecuación secular, lo cual es equivalente al paso (4.16). Pero desde el punto de vista del cómputo es mucho más sencillo diagonalizar la matriz \mathbf{Q}^{ql} , a través de una matriz ortogonal que llamaremos \mathbf{R} . Entonces,

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{Q}^{ql}\mathbf{R} = \Delta^{ql} \quad (4.19)$$

donde Δ^{ql} es diagonal. El determinante $(\mathbf{Q}^{ql} - \epsilon\mathbf{I})$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{R}\Delta^{ql}\tilde{\mathbf{R}} - \epsilon\mathbf{R}\mathbf{I}\tilde{\mathbf{R}}] &= \det[\mathbf{R}]\det[\Delta^{ql} - \epsilon\mathbf{I}]\det[\tilde{\mathbf{R}}] \\ &= \det[\Delta^{ql} - \epsilon\mathbf{I}] = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

ya que $\det[\mathbf{R}]$ es 1. Obviamente, el último término se hace cero para cuando ϵ toma cualquiera de los valores de los elementos de la matriz diagonal Δ^{ql} . Por lo tanto, podemos obtener los valores de ϵ diagonalizando la matriz \mathbf{Q}^{ql} en la ecuación (4.18) para valores dados de l y q . Esta ϵ resulta adimensional por construcción, pero para tenerla en unidades GeV basta multiplicar por el factor dado en la expresión (1.22) *i.e.*

$$\epsilon' = \left(\frac{\mu' b'^4}{\hbar^2} \right) \epsilon \quad (4.21)$$

Habiendo delineado el procedimiento para obtener los valores de ϵ , procederemos a dar un ejemplo numérico aplicado al botomonio.

4.2 Botomonio

En la ecuación (1.20) para $V(r')$, es necesario especificar los valores para q' , b'^2 que aparecen allí. Usando la referencia [42], encontramos una propuesta de potencial para el sistema *quark-antiquark* de la forma de la expresión (1.20) con

$$q' = \frac{\sigma}{\hbar c'}, \quad \sigma = 0.182(GeV)^2 \quad (4.22)$$

mientras que b'^2 está dada por

$$b'^2 = \frac{4}{3}\alpha_s \hbar c' \quad \text{con } \alpha_s = 0.39 \quad \text{por tanto, } b'^2 = (0.52)\hbar c' \quad (4.23)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En nuestro caso tenemos que $\mu' = (m'/2)$, donde m' corresponde a la masa del *quark*, y para el botom está comprendida en el rango de 4 a 4.4 GeV [43]. Tomamos el valor medio en el rango, *i.e.* 4.2 GeV por lo que

$$\mu' = 2.1 \text{ GeV} \quad (4.24)$$

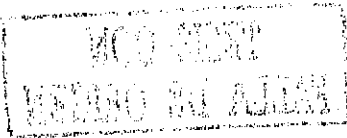
El único parámetro que nos resta determinar para calcular la matriz de la expresión (4.18) es q , que es adimensional y está dado en la ecuación (1.26), de aquí que

$$q = \frac{q' \hbar^4}{\mu' b^6} = 0.2935 \quad (4.25)$$

Con este valor definido para q y una l dada, (que estará limitada a los valores $l = 0$ o 1 que son los únicos niveles observados experimentalmente), podemos obtener los correspondientes valores adimensionales ϵ_l , que al ser multiplicados por el factor $(\mu' b^4 / \hbar^2)$ nos darán los ϵ'_l en unidades GeV.

En la Tabla I hacemos la comparación para $l = 0$ o $l = 1$ de la diferencia entre niveles contiguos predichos por nuestra teoría y aquellos medidos experimentalmente. El acuerdo entre nuestros niveles teóricos y los experimentales es bueno, aun cuando estamos en la aproximación no relativista. En la Figura 1 se muestran los niveles de energía experimentales para el sistema botomonio, y los niveles dados por la teoría [44].

Para calcular las correcciones relativistas a orden $(1/c^2)$, como se discutieron en la expresión (3.31), necesitamos los eigenvectores asociados con los eigenvalores de la matriz en (4.18). Ya que las $R_{nl}(r)$ forman una base no ortonormal, requerimos primero un análisis del procedimiento correspondiente para esta clase de sistemas completos de funciones.



$l = 0, j = 1$	GeV	ϵ'_0
Notación	Experimental	Teórico
$\Upsilon(2S) - \Upsilon(1S)$	0.56296	0.573621
$\Upsilon(3S) - \Upsilon(1S)$	0.8949	0.928582
$\Upsilon(4S) - \Upsilon(1S)$	1.1197	1.2177
$\Upsilon(10860) - \Upsilon(1S)$	1.4047	1.47197
$\Upsilon(11020) - \Upsilon(1S)$	1.5587	1.70366
$l = 1, j = 0$	GeV	ϵ'_1
Notación	Experimental	Teórico
$\chi_{b0}(1P) - \Upsilon(1S)$	0.3996	0.4679509
$\chi_{b0}(2P) - \Upsilon(1S)$	0.7718	0.8337729
$l = 1, j = 1$	GeV	ϵ'_1
Notación	Experimental	Teórico
$\chi_{b1}(1P) - \Upsilon(1S)$	0.4324	0.4679509
$\chi_{b1}(2P) - \Upsilon(1S)$	0.7949	0.8337729
$l = 1, j = 2$	GeV	ϵ'_1
Notación	Experimental	Teórico
$\chi_{b2}(1P) - \Upsilon(1S)$	0.4523	0.4679509
$\chi_{b2}(2P) - \Upsilon(1S)$	0.8082	0.8337729

Tabla I: Espectro experimental del botomonio y los resultados teóricos no relativistas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.3 Los eigenvectores asociados con los eigenvalores de la energía

Como ya hemos señalado, los eigenvalores de la energía ϵ se obtienen al diagonalizar la matriz simétrica real Q^{ql} dada en la expresión (4.18). En el proceso de derivación de Q^{ql} también obtenemos las matrices ortogonales O^l y la matriz diagonal D a la cual se reduce. Por tanto, podemos calcular la matriz [45]

$$C \equiv \tilde{O}D^{-1/2}Q^{ql} \quad (4.26)$$

Dado un eigenvalor de la energía, que denotaremos por ϵ_A , existe en Q^{ql} un eigenvector columna correspondiente que designaremos por letras negritas minúsculas como \mathbf{q}_A . A la ecuación (4.26), vemos que le corresponde un vector columna \mathbf{c}_A dado por

$$\mathbf{c}_A = \tilde{O}D^{-1/2}\mathbf{q}_A \quad (4.27)$$

De aquí en adelante usaremos una notación de kets para designar a nuestras funciones radiales

$$|n \rangle = R_{n+l}(r) \quad (4.28)$$

en donde hemos suprimido el índice l que es fijo. Consideremos ahora un vector columna formado por estos kets, *i.e.*

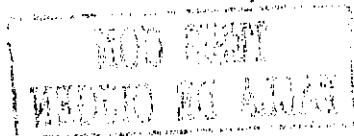
$$\alpha \equiv \begin{bmatrix} |1 \rangle \\ |2 \rangle \\ \vdots \\ |n \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

del mismo tamaño que \mathbf{c}_A .

Consideremos ahora la siguiente función

$$\tilde{\mathbf{c}}_A \alpha = \sum_n c_{An} |n \rangle \quad (4.30)$$

donde $\tilde{\mathbf{c}}_A$ es el vector transpuesto de \mathbf{c}_A , por lo que se trata de un vector renglón, y es por esto que tomamos la sumatoria que aparece en el lado derecho, con tantos términos como las dimensiones de la matriz Q^{ql} .



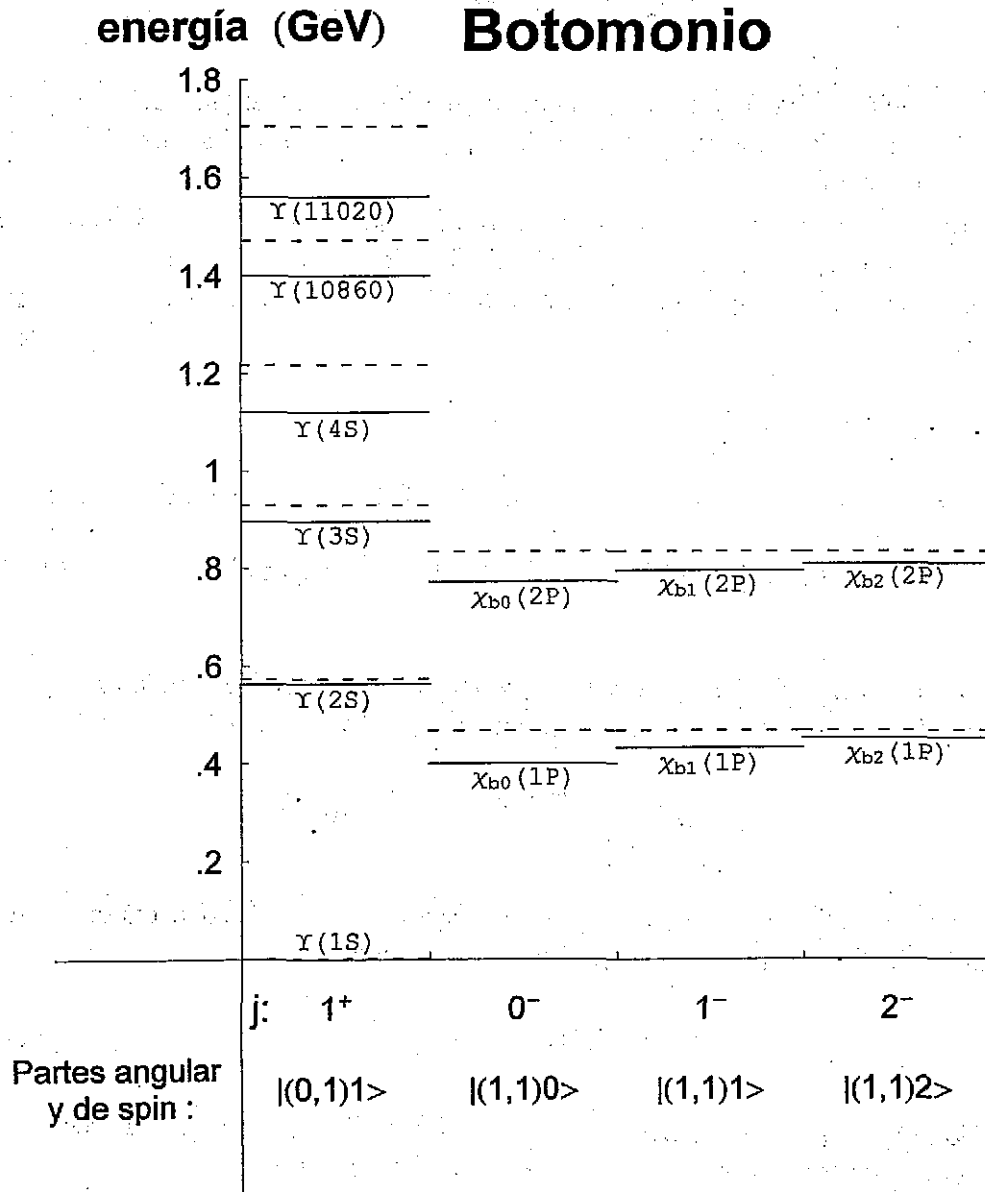


Figura 1: Espectro experimental del botomonio (líneas sólidas) [43] y resultados teóricos no relativistas (líneas punteadas).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Los elementos c_{An} son reales y el transpuesto de la ecuación (4.30) se escribe

$$(\widetilde{\bar{c}}_A \alpha) = \bar{\alpha} c_A = \sum_n c_{An} \langle n | \quad (4.31)$$

La función $\widetilde{\bar{c}}_A \alpha$ definida en la ecuación (4.31) es la eigenfunción correspondiente a la eigenenergía ϵ_A ya que la q_A que allí aparece tiene precisamente esta característica.

Procedamos ahora a mostrar que estas funciones poseen la propiedad de ortonormalidad, considerando otro eigenvalor de la energía que designaremos por ϵ_B y su correspondiente eigenestado $\bar{c}_B \alpha$. Si calculamos el producto escalar

$$\begin{aligned} (\widetilde{\bar{c}}_A \alpha)(\bar{c}_B \alpha) &= \sum_{n,m} \langle n | c_{An} c_{Bm} | m \rangle \\ &= \sum_{n,m} c_{An} \langle n | m \rangle c_{Bm} = \sum_{n,m} (\tilde{q}_A D^{-1/2} O)_n \langle n | m \rangle (\tilde{O} D^{-1/2} q_B)_m \\ &= \sum_{r,s} \sum_{n,m} (\tilde{q}_A)_s (D^{-1/2} O)_{sn} \langle n | m \rangle (\tilde{O} D^{-1/2})_{mr} (q_B)_r \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ya que la matriz $\| \langle n | m \rangle \|$ es justamente N^l tenemos que en notación de matrices, cuando realizamos la primera sumatoria sobre n, m resulta

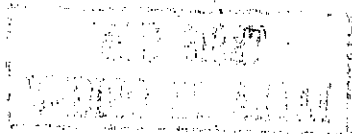
$$\sum_{r,s} (\tilde{q}_A)_s (D^{-1/2} O N^l \tilde{O} D^{-1/2})_{sr} (q_B)_r \quad (4.33)$$

y el paréntesis intermedio es, de las expresiones (4.17)-(4.18), exactamente la matriz unitaria, por lo que finalmente tenemos

$$(\widetilde{\bar{c}}_A \alpha)(\bar{c}_B \alpha) = \bar{q}_A q_B \quad (4.34)$$

Como q_A, q_B son eigenvectores asociados a diferentes eigenvalores, ϵ_A y ϵ_B son ortonormales, y por consiguiente se obtiene que

$$(\widetilde{\bar{c}}_A \alpha)(\bar{c}_B \alpha) = \delta_{AB} \quad (4.35)$$



4.4 Correcciones relativistas a orden $(1/c^2)$ para el sistema *quark-antiquark*

Para el sistema particular $b\bar{b}$ hemos obtenido ya, en la aproximación no relativista, las energías de amarre y sus eigenvectores asociados.

En la expresión (3.31), con el potencial de la ecuación (1.25), tenemos que la parte del hamiltoniano de orden $(1/c^2)$ que denotaremos por H_R se escribe como

$$H_R = - \frac{1}{8c^2} \left\{ \left(q + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(q + \frac{1}{r^2} \right) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] \right\} - \frac{p^4}{32c^2} \quad (4.36)$$

Como en el caso del positronio, evaluaremos esta corrección en el marco de la teoría de perturbaciones de primer orden partiendo del resultado no relativista. Dado este objetivo, requerimos primero tener los estados no relativistas asociados a una energía dada ϵ_A la cual, de las discusiones en las secciones inmediatamente anteriores, toma la siguiente forma

$$|A(l, s)jm \rangle = \sum_n c_{An} |n(l, s)jm \rangle \quad (4.37)$$

con c_{An} dada en la expresión (4.30) y

$$|n(l, s)jm \rangle = R_{nl}(r) |(l, s)jm \rangle \quad (4.38)$$

con $R_{nl}(r)$ expresada en (3.35), reemplazando ρ por r , en tanto que el último ket está dado en (2.1).

Estamos particularmente interesados en el caso triplete, *i.e.* $s = 1$, ya que es el único observado experimentalmente en el sistema $b\bar{b}$. Notamos que H_R es invariante bajo la operación de paridad

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}, \quad \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \quad \text{por tanto} \quad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} \quad (4.39)$$

de aquí que el valor de paridad $(-1)^l$ sea una integral de movimiento.

Dado que el momento angular total \mathbf{J} es también una integral de movimiento, el valor de j en (4.37) permanece fijo, y por lo tanto, ya que $s = 1$, l está restringida a $l = j \pm 1$ y $l = j$, los cuales tienen paridad opuesta. De aquí que los elementos de matriz de H_R que nos interesan son

$$\langle A(j, 1)jm | H_R | A(j, 1)jm \rangle \quad \text{de paridad } (-1)^j \quad (4.40)$$

o

$$\langle A(j + \tau', 1)jm | H_R | A(j + \tau, 1)jm \rangle, \tau, \tau' = \pm 1 \text{ de paridad } - (-1)^j \quad (4.41)$$

En el primer caso, si tenemos un estado no relativista dado denotado por el índice A , el elemento de matriz de (4.40) nos proporciona la corrección relativista a la energía, hasta la aproximación $(1/c^2)$, en perturbaciones de primer orden. En el segundo caso, *i.e.* la ecuación (4.41), tenemos realmente una matriz 2×2 para los valores $\tau, \tau' = \pm 1$, y es necesario diagonalizarla para obtener las correcciones a la energía.

Debido a que en la definición de los estados $|A(l, s)jm \rangle$ los coeficientes c_{An} fueron determinados numéricamente, solamente hemos de preocuparnos de los elementos de matriz de las ecuaciones (4.40), (4.41), en las cuales la A se sustituye por n en el ket y por n' en el bra, y podemos escribir, de la expresión (4.38)

$$\begin{aligned} & \langle n'(l', 1)jm | H_R | n(l, 1)jm \rangle \\ &= \int_0^\infty R_{n'n}(r) \left[\langle (l', 1)jm | H_R | (l, 1)jm \rangle \right] R_{nl}(r) r^2 dr \quad (4.42) \end{aligned}$$

en donde el elemento de matriz encerrado en el paréntesis cuadrado, con bras y kets expresados en la ecuación (2.1), corresponde a una integración sobre las partes angular y espinorial de la función de onda, y que se ha calculado usando álgebra de Racah estándar, resultando operadores que dependen solamente de r y (d/dr) . A continuación damos estos operadores de forma explícita.

4.4.1 El caso de paridad $(-1)^j$

Si la paridad de bra y ket es $(-1)^j$ tenemos

$$\begin{aligned} & \langle (j, 1)jm | H_R | (j, 1)jm \rangle \\ &= -\frac{1}{32c^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \\ & - \frac{1}{8c^2} \left(q + \frac{1}{r^2} \right) \frac{d}{dr} - \frac{1}{8c^2} \left[\frac{1}{r} \left(q + \frac{1}{r^2} \right) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \right] \quad (4.43) \end{aligned}$$

Si queremos determinar los elementos de matriz correspondientes de la ecuación (4.43), simplemente requerimos usar la expresión (4.2) y la definición de los coeficientes $b(n'l, nl, k)$ dados en la ecuación (4.9). Si k resulta

ser un entero positivo se ha evaluado en la referencia [41]; si $k \leq 0$ se discute en el Apéndice B. Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \langle n'(j, 1)jm | H_R | n(j, 1)jm \rangle \\
&= -\frac{1}{32c^2} \left[(n' + j + 1)(n + j + 1)b(n'j, nj, 0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}(n + n' + 2j + 2)b(n'j, nj, 1) + \left(\frac{1}{16}\right)b(n'j, nj, 2) \right] \\
&\quad - \frac{1}{8c^2} \left[qb(n'j, nj, 2) - \frac{1}{2}\delta_{j0}\sqrt{(n+1)(n'+1)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{8c^2} \left[qb(n'j, nj, 1) + b(n'j, nj, -1)(1 - \delta_{j0}) \right] \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora los dos únicos estados del botomonio que tienen $l = l' = j = 1$, a saber: $\chi_{b1}(1P)$ y $\chi_{b1}(2P)$. Deseamos evaluar las correcciones relativistas a la energía hasta orden $(1/c^2)$ para estos niveles. Notamos que $c = (\hbar c'/b^2)$ así que, de la ecuación (4.23) $c = (1/0.52)$, y de (4.25) el parámetro adimensional es $q = 0.2935$. Con estos valores la corrección relativista a la energía de amarre no relativista ϵ_A asociada al estado A se expresa por

$$\Delta\epsilon_A \equiv \sum_{n, n'} c_{An'} \langle n'(1, 1)1m | H_R | n(1, 1)1m \rangle c_{An} \tag{4.45}$$

donde las c_{An} han sido discutidas en la sección previa y el elemento de matriz está dado en (4.44) con $j = 1$, considerando en nuestros cálculos $n, n' = 1, 2, \dots, 100$. Si designamos por A y B los estados que corresponden a las energías más bajas en el botomonio con $l = j = 1$, i.e. $\chi_{b1}(1P)$ y $\chi_{b1}(2P)$, obtenemos los valores adimensionales siguientes

$$\Delta\epsilon_A = -.00444, \quad \Delta\epsilon_B = -.002995; \quad (\Delta\epsilon_B - \Delta\epsilon_A) = .001445 \tag{4.46}$$

Para obtener estos valores en unidades GeV es imprescindible multiplicar por $(\mu'b^4/\hbar^2)$ con b'^2 dada en (4.23) y μ' en (4.24). Se tiene entonces

$$\Delta\epsilon'_B - \Delta\epsilon'_A = .00082 \text{ GeV} = .82 \text{ MeV} \tag{4.47}$$

en tanto que la diferencia de energías no relativistas obtenida teóricamente se lee

$$\epsilon'_A - \epsilon'_B = 0.365822 \text{ GeV} \tag{4.48}$$

Por consiguiente, la corrección hasta orden $(1/c^2)$ solamente afecta los últimos tres dígitos del resultado no relativista. Podemos concluir que la modificación resulta irrelevante, lo que significa que el cálculo no relativista para el botomonio es suficientemente bueno.

4.4.2 El caso de paridad $-(-1)^j$

Como se indica en la ecuación (4.43), tenemos que tratar con la matriz cuyos elementos se expresan allí. Como primer punto, observamos que nuestros estados están dados por

$$\begin{aligned} |A(j + \tau, s)jm \rangle &= \sum_n c_{An} |n(j + \tau, s)jm \rangle \\ &= \sum_n c_{An} R_{nj+\tau}(r) |(j + \tau, s)jm \rangle \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde τ se restringe a los valores

$$\tau = \pm 1 \quad (4.50)$$

y el último ket está definido en la ecuación (2.1), donde s toma los valores 0 o 1.

Tenemos que $c_{An}, n = 1, \dots, N$, con N siendo su valor máximo, ha sido dado en la discusión del problema no relativista en la sección 4.3, mientras que $R_{nl}(r)$ tiene la forma de la expresión (3.35) con ρ reemplazada por r . Nuestro primer paso será obtener como funciones de r y d/dr , los elementos de matriz de H_R a orden $(1/c^2)$ con respecto a la parte de *spin* orbital $|(j + \tau, s)jm \rangle$ i.e.

$$\langle (j + \tau', s)jm | H_R | (j + \tau, s)jm \rangle \quad (4.51)$$

con $\tau, \tau' = \pm 1$ y H_R dado por los términos hasta orden $1/c^2$ en la ecuación (3.31).

Si $s = 0$ este elemento de matriz se obtiene de forma trivial,

$$-\frac{1}{8c^2} \left(\frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} p^4 \right) \quad (4.52)$$

El caso $s = 1$ es más complejo. Para el término (S · L) en (3.31) podemos reemplazarlo en (4.51) por

$$\frac{1}{2} [j(j+1) - (j+\tau)(j+\tau+1) - 2] \delta_{\tau'\tau} \quad (4.53)$$

El término más complicado es, sin duda,

$$\langle (j + \tau', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j + \tau, 1)jm \rangle \equiv \hat{Q}_{\tau'\tau}^j \quad (4.54)$$

el cual se discute en el Apéndice C. Reemplazando los subíndices $\tau' = \pm 1$ y $\tau = \pm 1$ solamente por \pm en la posición correspondiente, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{++}^j &= \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \\ &+ \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{--}^j &= \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \\ &+ \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{+-}^j &= \frac{j\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \\ &- \frac{j\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{-+}^j &= \frac{(j+1)\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \\ &- \frac{(j+1)\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Aunque no parezca obvio, al desarrollar los términos en \hat{Q}_{+-}^j y \hat{Q}_{-+}^j , obtenemos que son idénticamente cero. En ese caso, resulta que al realizar los cálculos el momento angular orbital es un buen número cuántico, y el hecho de indicarlo así en las tablas [43] se fundamenta plenamente. En este trabajo nos interesan solamente los operadores \hat{Q}_{++}^j y \hat{Q}_{--}^j . Para evaluar las correcciones relativistas a los estados Υ , que se discuten en la siguiente sección, los números cuánticos $l = 0$ y $j = 1$ están justificados, por lo que usamos el operador \hat{Q}_{--}^j .

Denotemos ahora al resto de los elementos de matriz respecto a los estados *spin*-órbita en H_R como

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\tau'\tau}^j &= \langle (j + \tau', 1)jm | \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) | (j + \tau, 1)jm \rangle \\ &= \left\{ \frac{dV}{dr} \frac{d}{dr} - \frac{1}{2r} \frac{dV}{dr} \left[j(j+1) - (j+\tau)(j+\tau+1) - 2 \right] \right\} \delta_{\tau'\tau} \end{aligned} \quad (4.59)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

y

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{\tau'\tau}^j &= \langle (j + \tau', 1)jm | p^4 | (j + \tau, 1)jm \rangle \\
&= \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j + \tau)(j + \tau + 1)}{r^2} \right] \\
&\times \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j + \tau)(j + \tau + 1)}{r^2} \right] \delta_{\tau\tau'} \quad (4.60)
\end{aligned}$$

por tanto, tenemos los elementos de matriz de H_R en la forma

$$\begin{aligned}
&\langle (j + \tau', 1)jm | H_R | (j + \tau, 1)jm \rangle \\
&= -\frac{1}{8c^2} \hat{Q}_{\tau'\tau}^j - \frac{1}{8c^2} \hat{T}_{\tau'\tau}^j - \frac{1}{32c^2} \hat{G}_{\tau'\tau}^j \equiv \hat{O}_{\tau'\tau}^j \quad (4.61)
\end{aligned}$$

Lo que nos resta por el momento es calcular el elemento de matriz de $\hat{O}_{\tau'\tau}^j$ con respecto a las funciones de onda radiales, *i.e.*

$$\int_0^\infty R_{n'j+\tau'}(r) \hat{O}_{\tau'\tau}^j R_{nj+\tau}(r) r^2 dr \quad (4.62)$$

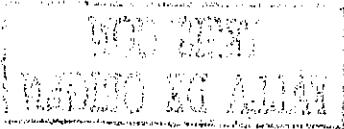
el cual requiere únicamente del conocimiento de las integrales en las cuales el operador es función de alguna potencia de r de d/dr o de ambos. Tenemos que [46]

$$\frac{d}{dr} L_n^{2l+1}(r) = \frac{1}{r} \left[r \frac{d}{dr} L_n^{2l+1}(r) \right] = \frac{1}{r} \left[n L_n^{2l+1}(r) - (n + 2l + 1) L_{n-1}^{2l+1}(r) \right] \quad (4.63)$$

lo cual implica que las integrales (4.62) adoptan la forma de la ecuación (4.9) con k tomando algunos valores negativos. Por tanto, los elementos de matriz de (4.61) pueden ser expresados en términos de $b(n/l, nl, k)$ y coeficientes que dependen de j .

No daremos los elementos de matriz de H_R específicamente en función de números, ya que son triviales de determinar y nos llevarían a expresiones aún más extensas.

Nos concentraremos en cambio en un problema físico concreto: las correcciones relativistas a orden $(1/c^2)$ de los estados Υ en el botomonio, los cuales serán discutidos en la siguiente sección.



4.4.3 Las correcciones relativistas a orden $(1/c^2)$ de los estados (Υ) del botomonio

En la Fig. 1 observamos que los estados Υ corresponden a momento angular orbital $l = 0$ (i.e. estados S) y momento angular total $j = 1$. La corrección relativista a estos estados a orden $1/c^2$ está dada, en teoría de perturbaciones a primer orden, por

$$\begin{aligned} & \langle A(0,1)1m | H_R | A(0,1)1m \rangle \\ &= \sum_{n,n'} c_{An'} \left[\int_0^\infty R_{n'0}(r) \hat{O}_{--}^1 R_{n0}(r) r^2 dr \right] c_{An} \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde A tomará valores apropiados para cada uno de los estados Υ en la primera columna de la Fig. 1.

Los coeficientes c_{An} han sido ya discutidos en la sección 4.3, por lo que nos ocuparemos de la integral encerrada en los paréntesis cuadrados de la expresión (4.64).

De la ecuación (4.61) se tiene

$$\hat{O}_{--}^1 = -\frac{1}{8c^2} \hat{Q}_{--}^1 - \frac{1}{8c^2} \hat{T}_{--}^1 - \frac{1}{32c^2} \hat{G}_{--}^1 \quad (4.65)$$

y empezaremos por discutir la integral en la ecuación (4.62) para el término \hat{Q}_{--}^1 el cual, de la ecuación (4.56), es

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty R_{n'0}(r) [\hat{Q}_{--}^1 R_{n0}(r)] r^2 dr \\ &= -\frac{2}{9} \int_0^\infty \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{d}{dr} R_{n'0}(r) \right] \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{d}{dr} R_{n0}(r) \right] r^2 dr \\ & \quad + \frac{2}{9} \int_0^\infty \left[\left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \right) R_{n'0}(r) \right] \left[\left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \right) R_{n0}(r) \right] r^2 dr \end{aligned} \quad (4.66)$$

en donde hemos hecho uso de la propiedad de hermiticidad

$$\int_0^\infty \varphi^* \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \psi \right] r^2 dr = - \int_0^\infty \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{l+2}{r} \right) \varphi \right]^* \psi r^2 dr \quad (4.67)$$

De la expresión (4.2) tenemos que la última integral de la ecuación (4.66) se convierte en

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{9} \int_0^\infty \left[\left(\frac{n+1}{r} - \frac{1}{4} \right) R_{n'0}(r) \right] \left[\left(\frac{n'+1}{r} - \frac{1}{4} \right) R_{n'0}(r) \right] r^2 dr \\
&= \frac{2}{9} (n'+1)(n+1)b(n'0, n0, 0) \\
&\quad - \frac{2}{36} (n'+1)b(n'0, n0, 1) - \frac{2}{36} (n+1)b(n'0, n0, 1) \\
&\quad + \frac{2}{144} b(n'0, n0, 2) \tag{4.68}
\end{aligned}$$

habiendo empleado los coeficientes $b(n'l, nl, k)$ definidos explícitamente en la ecuación (4.9) y que han sido calculados en [41].

Para la primera integral en la parte derecha de la expresión (4.66) hemos hecho uso de la ecuación [46]

$$\frac{d}{dr} L_n^\alpha(r) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(r) \tag{4.69}$$

para obtener

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{d}{dr} R_{n0}(r) = \\
& \frac{e^{-r/2}}{\sqrt{n+1}} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2r} \right) L_n^1(r) + \left(1 + \frac{1}{r} \right) L_{n-1}^2(r) + L_{n-2}^3(r) \right] \tag{4.70}
\end{aligned}$$

Por tanto, la integral a la que aludimos, que será denotada por \mathcal{I} , toma la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n'+1)}} \\
& \int_0^\infty e^{-r} \left\{ \left[\left(\frac{r}{4} + \frac{1}{2} \right) L_{n'}^1(r) + (r+1)L_{n'-1}^2(r) + L_{n'-2}^3(r) \right] \right. \\
& \times \left. \left[\left(\frac{r}{4} + \frac{1}{2} \right) L_n^1(r) + (r+1)L_{n-1}^2(r) + L_{n-2}^3(r) \right] \right\} dr \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Para evaluar la integral \mathcal{I} requerimos calcular integrales del tipo

$$\int_0^\infty e^{-r} r^k L_{m'}^\alpha(r) L_m^\alpha(r) dr, \quad k = 0, 1, 2 \tag{4.72}$$

las cuales se discuten en el Apéndice D, usando la función generadora de los polinomios asociados de Laguerre

$$(1-z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{rz}{z-1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^\alpha(r) z^m \tag{4.73}$$

Las integrales que involucran \hat{T}_{--}^1 y \hat{G}_{--}^1 pueden evaluarse en una forma similar y podemos obtener, por tanto, el valor numérico de los elementos de matriz de la ecuación (4.64) para un valor dado del parámetro q y usando los coeficientes c_{An} que han sido calculados previamente al resolver el problema no relativista. En la Tabla II, multiplicamos los valores obtenidos por el factor $(\mu' b^4 / \hbar^2)$ y tenemos la corrección relativista a orden $(1/c^2)$ en GeV , comparándola con la aproximación no relativista que se calculó previamente.

$l = 0, \quad j = 1$	GeV	ϵ'_0	$\Delta\epsilon'_B - \Delta\epsilon'_A$
Notación	Experimental	Teórico	Corrección relativista
$\Upsilon(2S) - \Upsilon(1S)$	0.56296	0.573621	-0.001567230
$\Upsilon(3S) - \Upsilon(1S)$	0.8949	0.928582	-0.000747538
$\Upsilon(4S) - \Upsilon(1S)$	1.1197	1.2177	-0.000523218
$\Upsilon(10860) - \Upsilon(1S)$	1.4047	1.47197	-0.000447207
$\Upsilon(11020) - \Upsilon(1S)$	1.5587	1.70366	-0.000423974

Tabla II: Espectro experimental de los estados (Υ) del botomonio y correcciones teóricas relativistas.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

Additionally, it is noted that regular audits are essential to identify any discrepancies or errors early on. This proactive approach helps in maintaining the integrity of the financial statements and prevents any potential issues from escalating.

The second section focuses on the role of technology in modern accounting. It highlights how software solutions have streamlined various processes, from data entry to report generation. This not only saves time but also reduces the risk of human error.

However, it also points out that while technology is a powerful tool, it cannot replace the expertise of a professional accountant. The human element is still crucial for interpreting the data, making informed decisions, and ensuring compliance with the latest regulations.

In conclusion, the document stresses that a combination of accurate record-keeping, regular audits, and the effective use of technology is the key to successful financial management.

Capítulo 5

El problema relativista de dos cuerpos con *spin* y masas diferentes

Hasta ahora hemos discutido los problemas del positronio y el botomonio, para los cuales la partícula y la antipartícula tienen la misma masa. Existen otros ejemplos de quarkonio en los cuales las masas son diferentes, y nos gustaría extender nuestros resultados de tal forma que estos casos pudieran ser analizados.

Tomaremos como potencial a $V'(r')$, el mismo de la expresión (1.20), pero ahora las masas de las partículas en unidades *c.g.s.* se denotarán por m'_1, m'_2 . Las masas reducida y total, en las mismas unidades, son

$$\mu' = \frac{m'_1 m'_2}{m'_1 + m'_2} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\mu'} = \frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2}, \quad M'_\pm = m'_1 \pm m'_2 \quad (5.1)$$

donde también hemos incluido M_- como la diferencia de las masas.

La ecuación equivalente a la expresión (1.23) para masas iguales, se escribe ahora como

$$\{[c'(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot p'] + m'_1 c'^2 \beta_1 + m'_2 c'^2 \beta_2 + V'(r')\} \Psi = E' \Psi \quad (5.2)$$

Para hacer esta ecuación adimensional, procedemos como en la ecuación (1.22), tomando $\mu' = \hbar' = b'^2 = 1$, lo cual nos da las unidades de energía, longitud y momentum, respectivamente

$$\frac{\mu' b'^4}{\hbar^2}, \quad \frac{\hbar^2}{\mu' b'^2}, \quad \frac{\mu' b'^2}{\hbar} \quad (5.3)$$

Definimos las variables adimensionales $E, \mathbf{r}, \mathbf{p}, m_1, m_2$ mediante las siguientes relaciones

$$E' = E \left(\frac{\mu' b'^4}{\hbar^2} \right), \mathbf{r}' = \mathbf{r} \left(\frac{\hbar^2}{\mu' b'^2} \right), \mathbf{p}' = \mathbf{p} \left(\frac{\mu' b'^2}{\hbar} \right), m_1 = \frac{m'_1}{\mu'}, m_2 = \frac{m'_2}{\mu'} \quad (5.4)$$

de aquí que la ecuación (5.2) se transforma en

$$\{[c(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \mathbf{p}] + m_1 c^2 \beta_1 + m_2 c^2 \beta_2 + V(r)\} \Psi = E \Psi \quad (5.5)$$

donde

$$c = \frac{\hbar c'}{b'^2} \quad (5.6)$$

siendo c la velocidad de la luz adimensional en las unidades dadas, mientras que $c' = 3 \times 10^{10}$ (cm/s).

Las matrices $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ están dadas en la ecuación (1.27) y, por tanto, la expresión correspondiente a la fórmula (1.28) se convierte en

$$\begin{aligned} & \left\{ 2c \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & 0 \\ \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & 0 & 0 & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & 0 & 0 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \\ 0 & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & + c^2 \begin{pmatrix} M_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_+ \end{pmatrix} \\ & \left. - [E - V(r)] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.7) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ están definidos en términos de las matrices de *spin* de Pauli mediante la ecuación (1.29) y $M_{\pm} = m_1 \pm m_2$.

La matriz de la ecuación (5.7) puede ser escrita en términos de submatrices, *i.e.*

$$2c \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E - V(r) - M_+ c^2 & 0 \\ 0 & E - V(r) + M_+ c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.8)$$

$$2c \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E - V(r) + M_- c^2 & 0 \\ 0 & E - V(r) - M_- c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.9)$$

Ya que E es la energía total, podemos escribirla como

$$E = 2M_+ c^2 + \epsilon \quad (5.10)$$

con ϵ como la energía de amarre que queremos determinar. Empleamos la notación abreviada

$$w_{\pm} = E - V(r) \pm M_{\pm} c^2, \quad w_{\pm} = E - V(r) \pm M_{\pm} c^2 \quad (5.11)$$

la cual, por medio de las ecuaciones (5.1), (5.10) se lee como

$$w_+ = 2m_1 c^2 \left(1 + \frac{\epsilon - V(r)}{2m_1 c^2} \right), \quad w_- = 2m_2 c^2 \left(1 + \frac{\epsilon - V(r)}{2m_2 c^2} \right) \quad (5.12)$$

$$w_+ = 2M_+ c^2 + \epsilon - V(r), \quad w_- = \epsilon - V(r) \quad (5.13)$$

Dado que el inverso de una matriz diagonal es el inverso de sus elementos, podemos escribir a la ecuación (5.9) de la siguiente forma

$$2c \begin{bmatrix} \omega_+^{-1} & 0 \\ 0 & \omega_-^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Sustituyendo este valor en la expresión (5.8), llegamos a la ecuación

$$\left\{ 4c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_+^{-1} & 0 \\ 0 & \omega_-^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_- & 0 \\ 0 & w_+ \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.15)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p}) \omega_{\pm}^{-1} &= \omega_{\pm}^{-1} (\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p}) + [(\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p}), \omega_{\pm}^{-1}] \\ &= \omega_{\pm}^{-1} (\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p}) + \frac{1}{i r} \left(\omega_{\pm}^{-2} \frac{dV}{dr} \right) (\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde $t = 1, 2$. Haciendo este reemplazo en la primera matriz de la ecuación (5.15), obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\{ 4c^2 \begin{bmatrix} \omega_+^{-1}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) & -\omega_-^{-1}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) \\ -\omega_+^{-1}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) & \omega_-^{-1}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \right. \\ & + \frac{4c^2}{ir} \frac{dV}{dr} \begin{bmatrix} \omega_+^{-2}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}) & -\omega_-^{-2}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) \\ -\omega_+^{-2}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) & \omega_-^{-2}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} & -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \\ & \left. - \begin{bmatrix} w_- & 0 \\ 0 & w_+ \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Realizando las multiplicaciones de matrices que se indican en la ecuación (5.17) finalmente tenemos

$$\begin{aligned} & \left\{ 4c^2 \begin{bmatrix} \omega_+^{-1}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) + \omega_-^{-1}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) & -\omega_+^{-1}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) - \omega_-^{-1}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \\ -\omega_+^{-1}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) - \omega_-^{-1}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) & \omega_+^{-1}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) + \omega_-^{-1}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \end{bmatrix} \right. \\ & + \frac{4c^2}{ir} \frac{dV}{dr} \begin{bmatrix} \omega_+^{-2}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) + \omega_-^{-2}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) & -\omega_+^{-2}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) - \omega_-^{-2}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \\ -\omega_+^{-2}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) - \omega_-^{-2}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) & \omega_+^{-2}(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) + \omega_-^{-2}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \end{bmatrix} \\ & \left. - \begin{bmatrix} w_- & 0 \\ 0 & w_+ \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Podemos simplificar algunos de los términos usando la bien conocida fórmula del producto de matrices de *spin* de Pauli, *i.e.*

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (5.19)$$

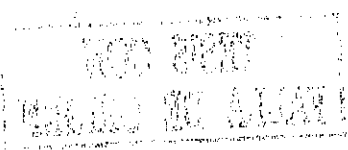
la cual, según las definiciones de la ecuación (1.29), implica

$$s_i s_j = \frac{1}{4} \delta_{ij} + \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} s_k \quad (5.20)$$

De (5.20) obtenemos inmediatamente que

$$(\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{p}) = \frac{1}{4} p^2, \quad t = 1 \text{ o } 2. \quad (5.21)$$

Para los términos $(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})$ notamos que, ya que $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ se refieren a partículas diferentes, luego entonces conmutan y también las \mathbf{p} 's conmutan, por lo que podemos escribir



$$\begin{aligned}
(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) &= (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) \right] \\
&- \frac{1}{2} \left[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - \frac{1}{2} p^2 \right] \tag{5.22}
\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \tag{5.23}$$

es el *spin* total.

Volviendo ahora a la segunda matriz en la expresión (5.18), tenemos los siguientes términos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) &= (s_{1i} x_i)(s_{2j} p_j) = \left[\frac{1}{4} \delta_{ij} + \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} s_{ik} \right] x_i p_j \\
&= \frac{1}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L}) \equiv a_1 \tag{5.24}
\end{aligned}$$

donde, como antes, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ y designamos el término completo por a_1 . Además,

$$(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) = \frac{1}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2} (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L}) \equiv a_2 \tag{5.25}$$

Sustituimos ahora estos resultados en la ecuación (5.18), y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left\{ 4c^2 (\omega_+^{-1} + \omega_-^{-1}) \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \right] \quad \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \right] \right] \right. \\
&+ \frac{4c^2}{i\hbar} \frac{dV}{dr} \left[\begin{array}{cc} \omega_+^{-2} a_1 + \omega_-^{-2} a_2 & -\omega_+^{-2} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) - \omega_-^{-2} (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \\ -\omega_+^{-2} (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) - \omega_-^{-2} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}) & \omega_+^{-2} a_2 + \omega_-^{-2} a_1 \end{array} \right] \\
&\left. - \left[\begin{array}{cc} w_- & 0 \\ 0 & w_+ \end{array} \right] \right\} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Si en la expresión (5.26) hacemos $m_1 = m_2 = m$, tenemos que $M_- = 0$, $M_+ = 2m$, $\mu = m/2$ y recuperamos el caso de masas iguales expresado en la ecuación (2.14).

Limitemos ahora nuestro hamiltoniano hasta términos de orden $(1/c^2)$. Para llevar a cabo nuestro objetivo, hagamos notar que de la ecuación (5.12) se tiene

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
4c^2\omega_+^{-1} &= \frac{2}{m_1} \left[1 - \frac{(\epsilon - V)}{2m_1c^2} + \dots \right], \\
4c^2\omega_+^{-2} &= \frac{1}{m_1^2c^2} \left[1 - \frac{(\epsilon - V)}{m_1c^2} + \dots \right], \\
4c^2\omega_-^{-1} &= \frac{2}{m_2} \left[1 - \frac{(\epsilon - V)}{2m_2c^2} + \dots \right], \\
4c^2\omega_-^{-2} &= \frac{1}{m_2^2c^2} \left[1 - \frac{(\epsilon - V)}{m_2c^2} + \dots \right] \quad (5.27)
\end{aligned}$$

De aquí que en la expresión (5.26) podamos reemplazar, hasta orden $(1/c^2)$

$$\begin{aligned}
4c^2\omega_+^{-2} &= \frac{1}{m_1^2c^2}, & 4c^2\omega_+^{-1} &= \frac{2}{m_1} - \frac{(\epsilon - V)}{m_1^2c^2} \\
4c^2\omega_-^{-2} &= \frac{1}{m_2^2c^2}, & 4c^2\omega_-^{-1} &= \frac{2}{m_2} - \frac{(\epsilon - V)}{m_2^2c^2} \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Antes de hacer esto, notemos que la ecuación (5.26) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.29)$$

lo cual implica que ψ_1, ψ_4 , denotando ambas por ψ , satisfacen también la ecuación dada por el determinante

$$(\hat{A}\hat{D} - \hat{B}\hat{C})\psi = 0 \quad (5.30)$$

y donde $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ están dados por los operadores correspondientes en la matriz (5.26). Podemos dividir a la ecuación (5.30) por cualquier constante numérica, la cual será para nuestros propósitos $-2M_+c^2$, por lo que tenemos

$$[-A(D/2M_+c^2) + B(C/2M_+c^2)]\psi = 0 \quad (5.31)$$

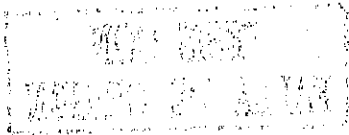
Ahora usaremos la notación compacta dada en la ecuación (3.25) *i.e.*

$$u \equiv \frac{1}{2}p^2, \quad v \equiv \frac{1}{2}p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \quad (5.32)$$

y además hacemos las siguientes definiciones

$$d \equiv \frac{1}{ir} \frac{dV}{dr}, \quad b_1 \equiv (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p}), \quad b_2 \equiv (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p}) \quad (5.33)$$

Acudiendo a las ecuaciones (5.27), la expresión (5.31) toma la forma



$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[u \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + V - \epsilon \right] - \left[\frac{(\epsilon - V)u - 2da_1}{2m_1^2 c^2} \right] - \left[\frac{(\epsilon - V)u - 2da_2}{2m_2^2 c^2} \right] \right\} \\
& \times \left\{ 1 - \frac{u}{2M_+ c^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \frac{(\epsilon - V)}{2M_+ c^2} \right\} \\
& + \left\{ v \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \left[\frac{(\epsilon - V)v + 2db_1}{2m_1^2 c^2} \right] - \left[\frac{(\epsilon - V)v + 2db_2}{2m_2^2 c^2} \right] \right\} \\
& \times \left\{ \frac{v}{2M_+ c^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right\} \psi = 0 \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Eliminando de esta ecuación todos los términos de orden mayor que $1/c^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) u + V - \epsilon \right] - \left[\frac{(\epsilon - V)u - 2da_1}{2m_1^2 c^2} \right] - \left[\frac{(\epsilon - V)u - 2da_2}{2m_2^2 c^2} \right] \right. \\
& - \left[u \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + V - \epsilon \right] \frac{1}{2M_+ c^2} \left[u \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \epsilon - V \right] \\
& \left. + \frac{1}{2M_+ c^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) v^2 \right\} \psi = 0 \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Para el caso en que $m_1 = m_2 = m$, que en nuestras unidades significa $m = 2, M_+ = 4$, la ecuación se reduce a aquella en la cual las masas son iguales, i.e. la expresión (3.31).

Cuando $c \rightarrow \infty$ recuperamos la ecuación no relativista,

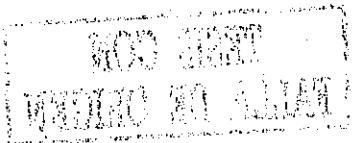
$$\left[\frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + V(r) - \epsilon \right] \psi = 0 \tag{5.36}$$

por lo tanto, ϵ será la energía no relativista calculada en la sección 4.1. Entonces requerimos que todos los términos en $[\epsilon - V(r)]$ de orden $(1/c^2)$ sean reemplazados por $(p^2/2\mu)$, con $\mu = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$, y de esta forma llegamos a la siguiente expresión para nuestro hamiltoniano, cuando las masas son diferentes

$$\begin{aligned}
H &= \left(\frac{p^2}{2\mu} + V \right) - \frac{1}{2m_1^2 c^2} \left[\frac{p^4}{4\mu} + \frac{1}{2} \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L}) \right] \\
&- \frac{1}{2m_2^2 c^2} \left[\frac{p^4}{4\mu} + \frac{1}{2} \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L}) \right] \\
&+ \frac{1}{2M_+ c^2} \frac{[\frac{1}{2} p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})]^2}{\mu^2} \tag{5.37}
\end{aligned}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para llevar a cabo los cálculos de los eigenvalores de este hamiltoniano debemos considerar primero los eigenvalores de la parte no relativista $[(p^2/2\mu) - V(r)]$, al igual que hicimos en la sección 4.1, después obtener los correspondientes eigenvectores de la sección 4.3, y con ellos calcular el valor de expectación de la parte $(1/c^2)$ del hamiltoniano. No discutiremos ejemplos numéricos de este tipo en la presente tesis.



Capítulo 6

Conclusiones

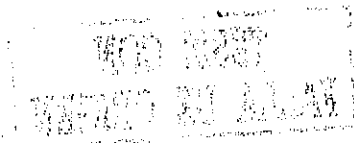
El propósito de este trabajo ha sido desarrollar un formalismo que describa el problema de dos cuerpos con *spin* en el marco de la mecánica cuántica relativista. En particular, hemos analizado los casos del positronio y el quarkonio (botomonio). No hemos intentado, sin embargo, hacer comparaciones con todos los resultados de otros análisis dedicados a los problemas aquí considerados, pero sí con algunos datos experimentales.

Respecto al caso del positronio, puede decirse que el problema radial exacto con *spines* 1 o 0, (*orto* o parapositronio respectivamente), es similar a la ecuación de Dirac para una sola partícula, con un potencial del tipo r^{-1} y con *spin* 1/2. Contrario a lo que ocurre con el problema de un solo cuerpo, las ecuaciones radiales para el positronio no parecen tener una solución mediante una relación de recurrencia, sin embargo, ha sido posible obtener las correcciones relativistas al sistema, hasta orden $(1/c^2)$. Dichas correcciones son muy diferentes para el *orto* y el parapositronio, como ocurre también para el átomo de hidrógeno. Asimismo, podemos concluir que, en nuestro formalismo, las correcciones relativistas al positronio resultan ser muy pequeñas comparadas con la energía no relativista del sistema, *i.e.* $(1/2v^2)$. El término $(1/c^2)$, en nuestras unidades, es de aproximadamente 10^{-5} , por lo que es perfectamente válido el habernos limitado a la teoría de perturbaciones a primer orden. Existen muchos trabajos acerca del positronio que van a potencias mayores en $(1/c^2)$, y que ya hemos referido anteriormente. En particular, llama la atención el artículo de Kniehl *et al.* [47] en el cual se hacen cálculos, en el formalismo de la electrodinámica cuántica, a órdenes muy altos en $(e^2/\hbar c)$.

En lo que respecta al quarkonio, hemos formulado el caso no relativista y las correcciones relativistas hasta orden $(1/c^2)$, en los casos de masas iguales

y masas diferentes, tratando con un potencial central general. Nos hemos ocupado, específicamente, del caso del botomonio y el llamado potencial "Coulomb más lineal", el cual posee dos parámetros que han sido tomados de ajustes a los datos experimentales. Debemos hacer notar que ni el problema relativista ni el no relativista se pueden resolver analíticamente, por lo que es preciso recurrir a métodos numéricos. Para hacer los cálculos, se ha usado la base no ortonormal de funciones de Sturm-Coulomb. Los resultados se han obtenido utilizando matrices de dimensión 100×100 ; es posible ir a matrices de mayores dimensiones, pero habiendo probado el método en matrices cuadradas de órdenes 10, 20 y 50, podemos concluir que la base utilizada converge rápidamente para el hamiltoniano que tenemos. Es así que una matriz de 100×100 da resultados confiables para los primeros estados. Dado que el botom es un *quark* pesado, hemos obtenido que la aproximación no relativista (con el potencial de *quarks* elegido) tiene un acuerdo satisfactorio con los datos experimentales. Respecto a las correcciones relativistas, éstas han resultado ser aproximadamente tres órdenes de magnitud más pequeñas que la diferencia de energías entre las partículas $\chi_{b1}(1P)$ y $\chi_{b1}(2P)$. Para los estados Υ , la corrección relativista a la diferencia energética entre $\Upsilon(2S)$ y $\Upsilon(1S)$ aproxima un poco más el resultado teórico, de tal forma que nuestro cálculo difiere en 1.6% del dato experimental. Para las otras partículas Υ consideradas, la corrección relativista mejora ligeramente los resultados de la teoría. Cabe señalar que, aunque no aparece en el presente trabajo, también se calculó el sistema charmonio [48, 49, 50]. Debido a que el *quark* charm es más ligero que el botom, el resultado obtenido con un potencial de *quarks* del tipo "Coulomb más lineal" es menos satisfactorio que para el caso del botomonio, siendo las correcciones relativistas de mayor magnitud. Sin embargo, los resultados para el charmonio tienen un acuerdo razonable con los datos experimentales.

Finalmente, es preciso indicar que esta formulación del problema de dos cuerpos con *spin* puede hacerse para otras clases de potencial, como sería el caso del potencial de *quarks* sugerido por Isgur [51], que es de tipo tensorial. Para este caso, ya han sido calculados los elementos de matriz del hamiltoniano correspondiente, en la base de estados de oscilador armónico [52], utilizando el concepto de "*spin* de signo" formulado por Moshinsky *et al.* [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59].



Apéndice A

Cálculo de los elementos de matriz relevantes para ϵ_{pnl} y ϵ_{onl}

Empezaremos con el caso del parapositronio, y ya que no hay parte de *spin*, i.e. $s = 0$, el estado de la expresión (3.33) se reduce únicamente a la parte orbital

$$|njm\rangle = R_{nj}(r)|jm\rangle = R_{nj}(r)Y_{jm}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.1})$$

y, por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \langle njm|H_p|njm\rangle &= -\frac{1}{2\nu^2} - \frac{1}{8c^2} \int_0^\infty R_{nj}(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} R_{nj}(r) \right] r^2 dr \\ &\quad - \frac{1}{32c^2} \langle njm|p^4|njm\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Usando las ecuaciones (3.34), (3.35) el segundo término en la parte derecha de la expresión (A.2) se convierte en

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8c^2} \left(\frac{2}{\nu^2}\right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \frac{d}{d\rho} [R_{n0}(\rho)]^2 \right\} d\rho &= \frac{1}{16c^2} \frac{2}{\nu^4} [R_{n0}(0)]^2 \delta_{l0} \\ &= \frac{1}{8c^2} \left(\frac{2}{\nu^3}\right) \delta_{l0} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

El último término en el lado derecho de la ecuación (A.2) se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{32c^2} \langle njm|p^4|njm \rangle \\
& = -\frac{1}{32c^2} \int_0^\infty R_{nj}(r) \left\{ \langle jm|p^4|jm \rangle R_{nj}(r) \right\} r^2 dr \quad (A.4)
\end{aligned}$$

donde, obviamente, se tiene

$$\langle jm|p^4|jm \rangle = \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{j(j+1)}{r^2} \right]^2 \quad (A.5)$$

de aquí que nuestra integral resulta ser

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{32c^2} \int_0^\infty R_{nj}(r) \left[\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\nu^2} \right)^2 R_{nj}(r) \right] r^2 dr \\
& = -\frac{1}{32c^2} \int_0^\infty R(nj) \left[\left(\frac{4}{r^2} - \frac{4}{r\nu^2} + \frac{1}{\nu^4} \right) R(nj) \right] dr \quad (A.6)
\end{aligned}$$

habiendo reemplazado $rR_{nj}(r)$ por $R(nj)$ en la notación de la referencia [24]. Usando la Tabla 2⁵ de [24] obtenemos de la expresión (A.6) la relación que ponemos a continuación

$$-\frac{1}{32c^2} \frac{1}{\nu^4 \left(j + \frac{1}{2} \right)} \left[4\nu - 3 \left(j + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (A.7)$$

En la ecuación (3.39) obtenemos finalmente la energía del parapositronio hasta la aproximación $(1/c^2)$.

En el caso del ortopositronio discutiremos primero $p^2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2$ y $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^4$ pero se ha mostrado en la referencia [26] p. 346, fórmula. (64.7d), que

$$\langle (j, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j, 1)jm \rangle = \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \quad (A.8)$$

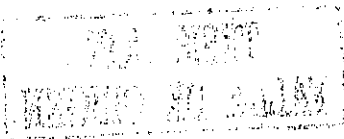
Por consiguiente $p^2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2$ y $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^4$ se reducen a p^4 que ha sido evaluada en (A.7).

Permanece entonces el término $r^{-3}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})$ cuyo elemento de matriz es

$$\begin{aligned}
& \langle n(j, 1)jm | r^{-3}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) | n(j, 1)jm \rangle = \\
& \left[\int_0^\infty R_{nj}(r) \frac{1}{r^3} R_{nj}(r) r^2 dr \right] \langle (j, 1)jm | \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | (j, 1)jm \rangle \quad (A.9)
\end{aligned}$$

El último elemento de matriz es evidentemente -1 , y la integral radial puede expresarse como

$$\int_0^\infty R(nj) \frac{1}{r^3} R(nj) dr \quad (A.10)$$



donde hemos usado nuevamente la notación de la referencia [24], de aquí que empleando la Tabla 2⁵ p. 117 [24], tenemos que (A.10) se expresa como

$$\frac{1}{\nu^3(j+1)(j+\frac{1}{2})j} \quad (\text{A.11})$$

Nótese que $j > 0$, porque para $j = 0$ el ket de la ecuación (2.1) si $s = 1$ se convierte en $|(0,1)00\rangle$, el cual no existe.

Combinando todos los términos en $\langle n(j,1)jm|H_0|n(j,1)jm\rangle$ se llega al valor de ϵ_{nl} expresado en la ecuación (3.41).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ACCO BIENT
MAYROG 20 1917

Apéndice B

Cálculo de los coeficientes $b(n'l', nl, k)$ para el caso $k \leq 0$

Usando la función generadora de los polinomios asociados de Laguerre (4.73) y la fórmula de desarrollo en serie (3.10) tenemos, análogamente a los cálculos realizados en [41], que

$$(1 - z')^{-(1+l'-l-k)} = \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(l' - l - k + m')!}{(l' - l - k)!m'!} z'^{m'} \quad (\text{B.1})$$

$$(1 - z)^{-(1+l-l'-k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(l - l' - k + m)!}{(l - l' - k)!m!} z^m \quad (\text{B.2})$$

$$(1 - zz')^{-(l+l'+k+1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(l + l' + k + s)!}{(l + l' + k)!s!} (zz')^s \quad (\text{B.3})$$

Haciendo $m' + s = n'$ y $m + s = n$, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} r^k R_{n'l'}(r) R_{nl}(r) dr \\ &= B_{n'l'} B_{nl} \\ & \times \sum_{s=0}^{\min(n', n)} \frac{(l' - l - k + n' - s)!(l - l' - k + n - s)!(l + l' + k + s)!}{(l' - l - k)!(n' - s)!(l - l' - k)!(n - s)!s!} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

para $k \leq 0$.

Con

$$R_{nl}(r) = B_{nl} r^l e^{-r/2} L_n^{2l+1}(r) \quad (\text{B.5})$$

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author outlines the various methods used to collect and analyze the data. This includes both primary and secondary data collection techniques. The analysis focuses on identifying trends and patterns over time, which is crucial for making informed decisions.

The third part of the document provides a detailed breakdown of the results. It shows that there has been a significant increase in sales volume, particularly in the middle and lower income brackets. This suggests that the current marketing strategy is effective in reaching a wider audience.

Finally, the document concludes with several key recommendations. It suggests that the company should continue to invest in research and development to stay ahead of the competition. Additionally, it recommends a more targeted marketing approach to further optimize resource allocation.

Apéndice C

Cálculo del operador $\hat{Q}_{\tau, \tau}^1$

Hemos definido

$$\langle (j + \tau', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j + \tau, 1)jm \rangle \equiv \hat{Q}_{\tau, \tau}^j \quad (\text{C.1})$$

Se presentan dos casos, según la paridad.

C.1 Caso $l = l' = j$; paridad $(-1)^j$

Sabemos que [26]

$$\begin{aligned} \langle (j, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j, 1)jm \rangle &= \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \\ &= \langle (j, 1)jm | p^2 | (j, 1)jm \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

por tanto,

$$\langle (j, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j, 1)jm \rangle = 0 \quad (\text{C.3})$$

C.2 Caso $l = j \pm 1$; paridad $-(-1)^j$

Empecemos por escribir

$$\begin{aligned} &\langle (j + \tau', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + \tau, 1)jm \rangle = \\ &\langle (j + \tau', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) | (j, 1)jm \rangle \\ &\times \langle (j, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) | (j + \tau, 1)jm \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Calculemos los dos distintos elementos de matriz de $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})$ [45]:

$$\begin{aligned} & \langle (j + \tau', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) | (j, 1)jm \rangle = \\ & (-1)^{\tau'+1} W(j, j + \tau, 11; 1j) \{3[2(j + \tau) + 1]\}^{\frac{1}{2}} \\ & \times \langle j + \tau' || p || j \rangle \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

y

$$\begin{aligned} & \langle (j, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) | (j + \tau, 1)jm \rangle = \\ & (-1) W(j + \tau, j, 11; 1j) [3(2j + 1)]^{\frac{1}{2}} \langle j || p || j + \tau \rangle \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

ya que

$$\langle 1 || s || 1 \rangle = \sqrt{2} \quad (\text{C.7})$$

por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} & \langle (j + \tau', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + \tau, 1)jm \rangle = \\ & (-1)^{\tau'} W(j + \tau', j, 11; 1j) W(j + \tau, j, 11; 1j) [2(j + \tau) + 1]^{\frac{1}{2}} \\ & (2j + 1)^{\frac{1}{2}} \langle j + \tau' || p || j \rangle \langle j || p || j + \tau \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Los coeficientes de Racah que se requieren [16] son

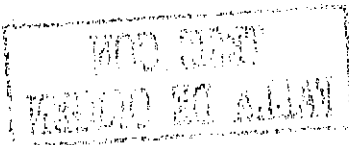
$$W(j + 1, j, 11; 1j) = (-1) \left[\frac{j}{6(2j + 1)(j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.9})$$

$$W(j - 1, j, 11; 1j) = (-1) \left[\frac{j + 1}{6j(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.10})$$

Mientras que el elemento de matriz correspondiente a p^2 es

$$\langle (j + \tau', 1)jm | p^2 | (j + \tau, 1)jm \rangle = \delta_{\tau'\tau} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j + \tau')(j + \tau + 1)}{r^2} \right] \quad (\text{C.11})$$

Por otra parte, podemos escribir



$$\begin{aligned}
& \langle (j + \tau'', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j + \tau, 1)jm \rangle = \\
& \sum_{\tau'=-1}^1 \langle (j + \tau'', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + \tau', 1)jm \rangle \\
& \times \langle (j + \tau', 1)jm | p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + \tau, 1)jm \rangle \\
& = \langle (j + \tau'', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + 1, 1)jm \rangle \\
& \times \langle (j + 1, 1)jm | p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + \tau, 1)jm \rangle \\
& + \langle (j + \tau'', 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j - 1, 1)jm \rangle \\
& \times \langle (j - 1, 1)jm | p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + \tau, 1)jm \rangle
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Además

$$\begin{aligned}
\langle j + \tau' || p || j \rangle & = \delta_{j+\tau', j+1} \sqrt{\frac{j+1}{2j+3}} (-i) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \\
& - \delta_{j+\tau', j-1} \sqrt{\frac{j}{2j-1}} (-i) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Tenemos cuatro casos diferentes:

C.2.1 $\tau' = \tau = 1$

$$\begin{aligned}
& \langle (j + 1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + 1, 1)jm \rangle \\
& = (-1) [W(j + 1j, 11; 1j)]^2 (6) (2j + 3)^{\frac{1}{2}} \\
& \times (2j + 1)^{\frac{1}{2}} \langle j + 1 || p || j \rangle \langle j || p || j + 1 \rangle \\
& = - \left(\frac{j}{2j + 1} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j + 2}{r} \right) \\
& = \left(\frac{j}{2j + 1} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j + 1)(j + 2)}{r^2} \right]
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Calculemos ahora el elemento correspondiente a $p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2$,

$$\begin{aligned}
& \langle (j + 1, 1)jm | p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j + 1, 1)jm \rangle \\
& = \left(\frac{j + 1}{2j + 1} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j + 1)(j + 2)}{r^2} \right]
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Y con estos elementos, finalmente tenemos,

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{++}^j &\equiv \langle (j+1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j+1, 1)jm \rangle \\
&= \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \\
&\times \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \\
&+ \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \\
&\times \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \tag{C.16}
\end{aligned}$$

C.2.2 $\tau' = \tau = -1$

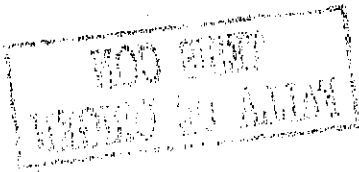
$$\begin{aligned}
&\langle (j-1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j-1, 1)jm \rangle \\
&= (-1) [W(j-1j, 11; 1j)]^2 (6) (2j-3)^{\frac{1}{2}} \times (2j+1)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \langle j-1 || p || j \rangle \langle j || p || j-1 \rangle \\
&= - \left(-\frac{j+1}{2j+1} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \\
&= \left(\frac{j+1}{2j+1} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{j(j-1)}{r^2} \right] \tag{C.17}
\end{aligned}$$

También podemos escribir,

$$\begin{aligned}
&\langle (j-1, 1)jm | p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j-1, 1)jm \rangle \\
&= \left(\frac{j}{2j+1} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{j(j-1)}{r^2} \right] \tag{C.18}
\end{aligned}$$

Y obtenemos,

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{--}^j &\equiv \langle (j-1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j-1, 1)jm \rangle \\
&= \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \\
&+ \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \\
&\times \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \tag{C.19}
\end{aligned}$$



C.2.3 $\tau' = 1, \tau = -1$

$$\begin{aligned}
 & \langle (j+1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j-1, 1)jm \rangle \\
 &= (-1)[W(j-1j, 11; 1j)]^2 W(j+1j, 11; 1j) (6)(2j+3)^{\frac{1}{2}} \\
 & \times (2j+1)^{\frac{1}{2}} \langle j+1 || p || j \rangle \langle j || p || j-1 \rangle \\
 &= - \left[-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \right] \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \quad (C.20)
 \end{aligned}$$

Mientras que $p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2$ está dado como,

$$\langle (j+1, 1)jm | p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j-1, 1)jm \rangle = \sqrt{\frac{j(j+1)}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \quad (C.21)$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}_{+-}^j &\equiv \langle (j+1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j-1, 1)jm \rangle \\
 &= \frac{j\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \\
 &- \frac{j\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \quad (C.22)
 \end{aligned}$$

C.2.4 $\tau' = -1, \tau = 1$

$$\begin{aligned}
 & \langle (j-1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j+1, 1)jm \rangle \\
 &= (-1)[W(j-1j, 11; 1j)]^2 W(j+1j, 11; 1j) (6)(2j-1)^{\frac{1}{2}} \\
 & \times (2j+1)^{\frac{1}{2}} \langle j-1 || p || j \rangle \langle j || p || j+1 \rangle \\
 &= -\sqrt{\frac{j(j+1)}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \quad (C.23)
 \end{aligned}$$

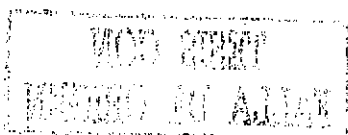
En tanto que $p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2$ se expresa por,

$$\begin{aligned}
 \langle (j-1, 1)jm | p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 | (j+1, 1)jm \rangle &= -\sqrt{\frac{j(j+1)}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \\
 & \times \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \quad (C.24)
 \end{aligned}$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Obteniéndose finalmente,

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}_{-+}^j &\equiv \langle (j-1, 1)jm | (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 [p^2 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] | (j+1, 1)jm \rangle \\
 &= \frac{j\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \\
 &\quad - \frac{j\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \\
 &= \frac{(j+1)\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \\
 &\quad \times \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \\
 &\quad - \frac{(j+1)\sqrt{j(j+1)}}{(2j+1)^2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \tag{C.25}
 \end{aligned}$$



Apéndice D

Cálculo del operador \hat{O}_{---}^1

Sabemos que,

$$\hat{O}_{---}^1 = -\frac{1}{8c^2}\hat{Q}_{---}^1 - \frac{1}{8c^2}\hat{T}_{---}^1 - \frac{1}{32c^2}\hat{G}_{---}^1 \quad (D.1)$$

En el caso particular del operador \hat{Q}_{---}^1 , nos falta calcular la integral designada por \mathcal{I} , y que está definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n'+1)}} \\ &\times \int_0^\infty e^{-r} \left\{ \left[\left(\frac{r}{4} + \frac{1}{2} \right) L_{n'}^1(r) + (r+1)L_{n'-1}^2(r) + L_{n'-2}^3(r) \right] \right. \\ &\times \left. \left[\left(\frac{r}{4} + \frac{1}{2} \right) L_n^1(r) + (r+1)L_{n-1}^2(r) + L_{n-2}^3(r) \right] \right\} dr \quad (D.2) \end{aligned}$$

Así que es menester calcular integrales del tipo siguiente, que denotaremos por \mathcal{A}

$$\mathcal{A} \equiv \int_0^\infty e^{-r} r^k L_{m'}^{\alpha'}(r) L_m^\alpha(r) dr, \quad k = 0, 1, 2 \quad (D.3)$$

Usando la función generadora de los polinomios asociados de Laguerre

$$(1-z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{rz}{z-1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^\alpha(r) z^m \quad (D.4)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^\infty e^{-r} r^k (1-z')^{-\alpha'-1} \exp\left(\frac{rz'}{z'-1}\right) (1-z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{rz}{z-1}\right) dr \\ &= (1-z')^{-\alpha'-1} (1-z)^{-\alpha-1} \int_0^\infty r^k \exp\left[-r \left(\frac{1-z'z}{(1-z')(1-z)}\right)\right] dr \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Definimos ahora

$$u \equiv r \left[\frac{1-z'z}{(1-z')(1-z)} \right] \quad (\text{D.6})$$

por tanto

$$r = u \left[\frac{(1-z')(1-z)}{1-z'z} \right] \quad (\text{D.7})$$

Sustituyendo en la ecuación para \mathcal{A} , tenemos

$$\begin{aligned} &(1-z')^{-\alpha'-1} (1-z)^{-\alpha-1} \left[\frac{(1-z')(1-z)}{1-z'z} \right]^{k+1} \int_0^\infty u^k e^{-u} du \\ &= \frac{(1-z')^{-\alpha'+k} (1-z)^{-\alpha+k}}{(1-z'z)^{k+1}} k! \\ &= \sum_{m', m=0}^\infty z^{m+m'} \int_0^\infty e^{-r} r^k L_{m'}^{\alpha'}(r) L_m^\alpha(r) dr \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

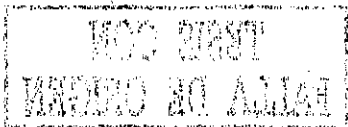
Por consiguiente

$$\mathcal{A} = \frac{(1-z')^{-\alpha'+k} (1-z)^{-\alpha+k}}{(1-z'z)^{k+1}} k! \quad (\text{D.9})$$

A partir de este momento hacemos los desarrollos en serie de los factores que conforman a \mathcal{A} , usando las siguientes fórmulas, según si los exponentes son mayores o menores que cero [23]

$$\begin{aligned} (1-x)^{-p} &= \sum_{i=0}^\infty \frac{(p-1+i)!}{(p-1)!i!} x^i, \quad p > 0 \\ (1-x)^p &= \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{p!}{(p-j)!j!} x^j, \quad p > 0 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Observamos que se presentan cuatro casos, que a continuación calculamos.



$$\begin{aligned}
 \text{D.1} \quad & -\alpha' + k < 0 \\
 & -\alpha + k < 0 \\
 & -k - 1 < 0
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$A = \sum_{s=0}^{\min(n',n)} \frac{(\alpha' - k + n' - s - 1)! (\alpha - k + n - s - 1)! (k + s)!}{(\alpha' - k - 1)! (n' - s)! (\alpha - k - 1)! (n - s)! s!} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned}
 \text{D.2} \quad & -\alpha' + k > 0 \\
 & -\alpha + k < 0 \\
 & -k - 1 < 0
 \end{aligned}$$

Obtenemos

$$A = \sum_{s=0}^{\min(n',n)} (-1)^{(n'-s)} \frac{(-\alpha' + k)! (\alpha - k + n - s - 1)! (k + s)!}{(\alpha' + k - n' + s)! (n' - s)! (\alpha - k - 1)! (n - s)! s!} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned}
 \text{D.3} \quad & -\alpha' + k < 0 \\
 & -\alpha + k > 0 \\
 & -k - 1 < 0
 \end{aligned}$$

Para este caso,

$$A = \sum_{s=0}^{\min(n',n)} (-1)^{(n-s)} \frac{(\alpha' - k + n' - s - 1)! (-\alpha + k)! (k + s)!}{(\alpha' - k - 1)! (n' - s)! (-\alpha + k - n + s)! (n - s)! s!} \quad (\text{D.13})$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
 \text{D.4} \quad & -\alpha' + k > 0 \\
 & -\alpha + k > 0 \\
 & -k - 1 < 0
 \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$A = \sum_{s=0}^{\min(n',n)} (-1)^{(n'+n)} \frac{(-\alpha' + k)!(-\alpha + k)!(k+s)!}{(-\alpha' + k - n' + s)!(n' - s)!(-\alpha + k - n + s)!(n - s)!s!} \quad (\text{D.14})$$

Con ayuda de estas ecuaciones, calculamos el operador \hat{Q}_{--}^1 .

Por otra parte,

$$\hat{T}_{--}^1 = \left(\frac{dV}{dr} \frac{d}{dr} \right) \quad (\text{D.15})$$

pero,

$$V = qr - \frac{1}{r}; \quad \frac{dV}{dr} = q + \frac{1}{r^2} \quad (\text{D.16})$$

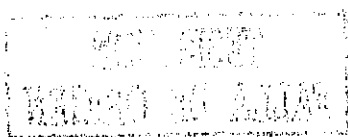
entonces,

$$\hat{T}_{--}^1 = \left(q + \frac{1}{r^2} \right) \frac{d}{dr} \quad (\text{D.17})$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty R_{n'0}(r) \hat{T}_{--}^1 R_{n0}(r) r^2 dr = \\
 & \frac{1}{\sqrt{(n'+1)(n+1)}} \left[\frac{q}{2} \int_0^\infty e^{-r} L_{n'}^1(r) L_n^1(r) r^2 dr \right. \\
 & + q \int_0^\infty e^{-r} L_{n'}^1(r) L_{n-1}^2(r) r^2 dr \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-r} L_{n'}^1(r) L_n^1(r) dr + \int_0^\infty e^{-r} L_{n'}^1(r) L_{n-1}^2(r) dr \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{(n'+1)(n+1)}} \left[\frac{q}{2} b(n'0, n0, 2) + q \sum_{s=0}^{\min(n',n)} \frac{(s+2)(s+1)}{(-n'+s+1)(n'-s)!} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} b(n'0, n0, 0) + \sum_{s=0}^{\min(n',n)} (n-s) \right] \quad (\text{D.18})
 \end{aligned}$$

Mientras que el operador \hat{G}_{--}^1 se puede escribir como



$$\begin{aligned} \int_0^\infty R_{n'0}(r) \hat{G}_{--}^1 R_{n0}(r) r^2 dr &= \int_0^\infty R_{n'0}(r) p^4 R_{n0}(r) r^2 dr \\ &= \int_0^\infty p^2 R_{n'0}(r) p^2 R_{n0}(r) r^2 dr \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

debido a que p^2 es un operador hermitiano.

Pero, además, sabemos que la ecuación que cumplen las funciones de Sturm-Coulomb es,

$$p^2 R_{n0}(r) = \left(\frac{n+1}{r} - \frac{1}{4} \right) R_{n0}(r) \quad (\text{D.20})$$

Finalmente tenemos,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R_{n'0}(r) \hat{G}_{--}^1 R_{n0}(r) r^2 dr &= (n'+1)(n+1)b(n'0, n0, 0) \\ &\quad - \frac{1}{4}(n'+1)b(n'0, n0, 1) \\ &\quad - \frac{1}{4}(n+1)b(n'0, n0, 1) \\ &\quad + \frac{1}{16}b(n'0, n0, 2) \quad (\text{D.21}) \end{aligned}$$

Usando las expresiones para los operadores \hat{Q}_{--}^1 , \hat{T}_{--}^1 y \hat{G}_{--}^1 podemos calcular el operador \hat{O}_{--}^1 .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

REC'D
MAY 21 1976
FBI - ALBANY

Bibliografía

- [1] P.A.M. Dirac, "*The Principles of Quantum Mechanics*" (Oxford at the Clarendon Press, Third Edition, 1947) pp. 252-274 y en particular pp. 268-271.
- [2] A.O. Barut, G.L. Strobel, *Few-Body Systems* **1**, 167 (1986).
- [3] A. O. Barut, S. Komy, *Fortsch. Phys.* **33**, 6 (1985).
- [4] M. Moshinsky, G. Loyola, *Found. Phys.* **23**, 197 (1993).
- [5] M. Moshinsky, A. del Sol, Yu. F. Smirnov, "Aspects of the relativistic two body problem", Proceedings of the III Wigner Symposium (World Scientific, 1993).
- [6] M. Moshinsky, A. del Sol, *J. Phys. A: Math. Gen* **27**, 4685 (1994).
- [7] M. Moshinsky, "Barut procedure for the relativistic many body problem versus other approaches", Proceedings of the IV Wigner Symposium (World Scientific, 1995).
- [8] L.I. Schiff, "*Quantum Mechanics*" (Mc-Graw Hill, New York, 1968).
- [9] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K.D. Lane, T.M. Yan, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 369 (1975).
- [10] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K.D. Lane, T.M. Yan, *Phys. Rev. D* **17**, 3090 (1978).
- [11] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K.D. Lane, T.M. Yan, *Phys. Rev. D* **21**, 203 (1980).
- [12] W. Lucha, F.F. Strobel, D. Gromes, *Phys. Rep.* **200**, 127 (1991).

- [13] J.M. Richard, *Phys. Rep.* **212**, 1 (1992).
- [14] N. Brambilla, A. Vairo, "Strong Interactions at Low and Intermediate Energies" (World Scientific, Singapore 2000).
- [15] G. Bali, *Phys. Rep.* **343**, 1 (2001).
- [16] M.E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum" (John Wiley & Sons, New York and London, 1957).
- [17] O. Castaños, A. Frank, M. Moshinsky, *J. Math. Phys.* **19**, 1781 (1978).
- [18] P.A.M. Dirac, "A theory of electrons and protons", *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **126**, 360 (1930).
- [19] C.D. Anderson, "The positive electron", *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933).
- [20] P.M.S. Blackett y G.P.S. Occhialini, "Some photographs of the tracks of penetrating radiation", *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **139**, 699 (1933).
- [21] H. Kragh, "From electron to positronium", *J. Chem. Ed.* **67**, 196 (1990).
- [22] A.E. Ruark, "Positronium", *Phys. Rev.* **68**, 278 (1945).
- [23] M. Abramowitz, I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical functions" (Dover, New York, 1972).
- [24] E.U. Condon, G.H. Shortley, "The theory of atomic spectra" (Cambridge at the University Press, 1953).
- [25] W. Królikowski, *Acta Physica Polonica B* **12**, 891 (1981).
- [26] M. Moshinsky, Yu. F. Smirnov, "The Harmonic Oscillator in Modern Physics" (Hardwood Academic Publishers, The Netherlands, 1996).
- [27] M. Moshinsky, V. Riquer, "The two body problem with *spin* in relativistic quantum mechanics: The case of positronium", aceptado para su publicación en *J. Phys. A: Math. Gen.*, (junio, 2002).
- [28] R.N. Fell, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 311 (1992).

- [29] P. Labelle, S.M. Zebarjad, C.P. Burgess, *Phys. Rev. D* **56**, 8053 (1997).
- [30] A.H. Hoang, P. Labelle, S.M. Zebarjad, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3390 (1997).
- [31] K. Pachucki, S.G. Karsheinboim, *hep-ph/9709387* (1997).
- [32] A. Pineda, J. Soto, *Phys. Rev. D* **59** (1999).
- [33] R.N. Faustov, A.P. Martynenko, *Phys. Atom. Nucl.* **60**, 1272 (1997).
- [34] K. Melnikov, A. Yelkhovsky, *Phys. Lett. B* **458**, 143 (1999).
- [35] A. Czarnecki, K. Melnikov, A. Yelkhovsky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 311 (1999).
- [36] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, A.I. Zakharov, *Nucl. Phys. B* **17**, 448 (1978).
- [37] L.J. Reinders, H. Rubinstein, S.Y. Azachi, *Phys. Rep.* **127**, 1 (1985).
- [38] C. Rebbi, "Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulation" (World Scientific, Singapore, 1983).
- [39] M. Creutz, "Quarks, gluons and lattices" (Cambridge University Press, 1983).
- [40] M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, *Phys. Rep.* **95**, 201 (1983).
- [41] M. Moshinsky, H. Hernández Saldaña, *Rev. Mex. Fís.* **46**, 1 (2000).
- [42] N. Brambilla y A. Vairo, "Quark Confinement and the Hadron Spectrum", Lectures given by N. Brambilla at HUGS at CEBAF, 13th Annual Hampton University Graduate Studies, (1998).
- [43] J. Bartels, D. Haidt, A. Zichichi, (Editors-in-Chief), "Review of Particle Physics", *Eur. Phys. J. C* **15**, 1-878 (2000).
- [44] M. Moshinsky, V. Riquer, "The non-relativistic energy spectra of *quark-antiquark* systems", aceptado para su publicación en *Rev. Mex. Fís.* (2002).

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

- [45] A. Szabo, N.S. Ostlund, "Modern Quantum Chemistry" (Mc-Graw Hill, New York, 1989).
- [46] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, "Table of Integrals Series and Products" (Academic Press, New York and London, 1973).
- [47] B.A. Kniehl, A. Penin, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5094 (2000).
- [48] A. de Rújula, S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 46 (1975).
- [49] T. Appelquist, A. de Rújula, H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 365 (1975).
- [50] A. de Rújula, H. Georgi, S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 398 (1976).
- [51] N. Isgur, *Phys. Rev. D* **57**, 4041 (1998).
- [52] M. Moshinsky, V. Riquer, "Matrix Representation of the Two Body Relativistic Problem", Proceedings of the Symposium Quantum Theory and Symmetries (World Scientific, 2000).
- [53] M. Moshinsky, Yu. F. Smirnov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 6027 (1996).
- [54] M. Moshinsky, A. del Sol, V. Riquer, *Found. Phys.* **27**, 1139 (1997).
- [55] M. Moshinsky, A.G. Nikitin, A. Sharma, Yu. F. Smirnov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 6045 (1998).
- [56] M. Moshinsky, "Supermultiplets and relativistic problems", Proceedings of the International Group Theory Conference (World Scientific, 1998).
- [57] V. Riquer, M. Ruiz-Altaba, "Variational spectrum of the relativistic Coulomb problem in a non-orthogonal basis", *Rev. Mex. Fis.* **46**, 24 (2000).
- [58] V. Riquer, A. Sharma, "Variational spectra of the relativistic Coulomb problems", Proceedings of the V Wigner Symposium (World Scientific, 1998).
- [59] A. Sharma, V. Riquer, "Variational spectra of the relativistic oscillator of arbitrary spin", Proceedings of the V Wigner Symposium (World Scientific 1998).