

28



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DE LÍNEAS DE FUERZA DE  
CAMPOS ELÉCTRICOS EN SUPERFICIES  
FINITAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

FERNANDO GUADALUPE ACEVEDO

DIRECTOR DE TESIS:

FÍS. ANGEL ARTURO NOGUEIRA JIMÉNEZ



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

2002



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"ANÁLISIS DE LINEAS DE FUERZA DE CAMPOS ELECTRICOS EN SUPERFICIES FINITAS"

realizado por FERNANDO GUADALUPE ACEVEDO

con número de cuenta 9455757-8 , quién cubrió los créditos de la carrera de FÍSICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis FIS. ANGEL ARTURO NOGUEIRA JIMENEZ  
Propietario

Propietario FIS. JORGE ANDRADE HERRERA

Propietario DR. NEIL CHARLES BRUCE DAVISON

Suplente FIS. RAUL ESPEJEL PAZ

Suplente FIS. RENE ORTEGA ALVARADO

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Dedico este trabajo a mis padres:  
Vicente Guadalupe González† y  
Margarita Acevedo Acevedo, y a mis  
hermanos: Vicente, Margarita, Osvaldo  
Salvador y mis dos hermanas†. Ya que  
ellos formaron parte fundamental e  
imprescindible en mis estudios.

Agradezco el apoyo brindado por mis  
tíos, primos y a toda mi familia, cuya  
ayuda fue de gran importancia, en el  
transcurso de mi formación.

Agradezco el apoyo académico y su amistad de mi asesor Angel Arturo Nogueira Jiménez para la realización de esta tesis.

Agradezco a Jorge Andrade por proporcionarme su programa de cómputo de líneas de campo eléctrico y equipotenciales, y también por sus sugerencias y críticas en la revisión de este trabajo.

Agradezco a Niels Charles Bruce Davidson, Raúl Espejel Paz, René Ortega Alvarado, por sus sugerencias y críticas en la revisión de este trabajo.

# ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	4
1. ELECTROSTÁTICA	6
1.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS	7
1.2. LA CARGA ELÉCTRICA	9
1.3. LA LEY DEL INVERSO DEL CUADRADO	10
1.4. EL CAMPO ELÉCTRICO	12
2. ANÁLISIS DE LÍNEAS DE FUERZA EN SUPERFICIES FINITAS	14
2.1. LÍNEA DE FUERZA	15
2.2. EL POTENCIAL	16
2.3. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES	20
2.4. CONDICIONES DE FRONTERA	22
2.5. APLICACIONES CON FUERZAS Y VELOCIDADES	24
2.6. FLUJO POTENCIAL	31
2.7. APLICACIONES CON DETECTORES ÓPTICOS	36
2.8. SUPERFICIES CONDUCTORAS HOMOGÉNEAS	42
3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA EXPERIMENTAL	44
3.1. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL	45
3.2. TRAZO DE LÍNEAS EQUIPOTENCIALES	48
3.3. ANÁLISIS NÚMÉRICO	50
4. RESULTADOS	52
4.1. ANÁLISIS DE SUPERFICIES FINITAS	53
4.2. APLICACIONES CON DETECTORES ÓPTICOS	58
4.3. INFLUENCIA EN TECNOLOGÍAS BÁSICAS DE TELECOMUNICACIONES	72
4.4. APLICACIONES CON ELECTRODEPÓSITOS	75
5. CONCLUSIONES	80
6. APÉNDICE	81
7. REFERENCIAS	85

## INTRODUCCIÓN

El modelo teórico de las líneas de campo eléctrico y equipotenciales generalmente está descrito en volúmenes conductores infinitos e ideales, sin embargo, experimentalmente esto no es correcto, ya que lo que tenemos en realidad son superficies finitas, y la predicción del modelo teórico en el interior de la superficie es correcto en el interior de la superficie, pero al momento de acercarnos a la frontera se observa experimentalmente que las líneas equipotenciales tienen un comportamiento distinto a lo planteado por la teoría electrostática. Se observa que las líneas de campo se acumulan en el contorno de la frontera y como las equipotenciales son perpendiculares a ellas, ocasionan que éstas salgan en ángulo recto a la frontera de la superficie finita<sup>[7]</sup>, y existiendo, una deformación de las líneas equipotenciales, que no pueden ser predichas por el modelo clásico de la electrostática.

Debido a esto hacemos un replanteamiento de los instrumentos para el análisis de líneas de campo eléctrico y equipotenciales, y que mediante un dispositivo experimental especial para medir líneas equipotenciales, con ayuda de un programa<sup>[17]</sup>, proponemos un modelo que predice en muy buena aproximación (dentro de los márgenes de error) el comportamiento de líneas de campo eléctrico y equipotenciales en superficies rectangulares y circulares finitas, siendo esto un paso muy importante, pues posteriormente se puede generalizar a cualquier tipo geométrico de superficie.

Se hace un estudio de las líneas de campo eléctrico y equipotenciales en superficies conductores infinitas y finitas, desde el punto de vista de la electricidad, y se muestra la analogía que existe en otros campos de estudio, tales como las fuerzas gravitacionales donde existen líneas de fuerzas gravitacionales y superficies de igual potencial (equipotenciales) en la tierra. y también en fluidos, donde de manera un poco disfrazada, igualmente se tienen líneas de corriente o flujo y de potenciales, ya que también existen fuentes de flujo (como cargas positivas) y sumideros (en analogía a las cargas negativas).

Estudiamos las líneas de campo eléctrico y equipotenciales, en una cuba electrolítica donde se tenía un problema de depósitos electrolíticos no uniformes. Y se encuentra una solución mediante la variación de las longitudes de los electrodos, bajo el correspondiente análisis de líneas.

Además, se hace un correspondiente análisis de líneas de campo eléctrico y equipotenciales, en el área de la Óptica, específicamente en detectores ópticos de posición, donde se utilizan fotocorrientes para determinación de posiciones del sistema. Mediante el correspondiente análisis de líneas en superficies finitas, se obtienen soluciones, que mejoran la eficiencia del sistema.

Se muestra además que el correspondiente análisis de líneas de campo eléctrico y equipotenciales, tiene aplicación predominante en las telecomunicaciones, pues los modelos de dipolos eléctricos tienen analogía fundamental en una línea bifilar utilizada en telefonía. Además de que los campos eléctricos son fundamentales en las guías de onda, pues su conocimiento son fundamentales para la transmisión de información.

# **1 ELECTROSTÁTICA**

**1.0. Este capítulo es una breve reseña de la historia de la electrostática, además de los conceptos fundamentales de la electrostática tales como la ley de Coulomb (que relaciona la interacción entre cargas con el inverso del cuadrado de la distancia, también conocida como la ley del inverso del cuadrado), el concepto de carga eléctrica y el campo eléctrico, todo esto nos permitirá replantear los conceptos que se tenían en la antigüedad y los que conocemos recientemente.**

## 1.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Los griegos fueron conocedores del hecho de que el ámbar, una resina amarillenta, es frotada, adquiere la propiedad de atraer hacia sí pequeños pedazos de papel. William Gilbert (1540-1603) acuñó el término "eléctrico" de la palabra griega "ηλεκτρον" de cuyo significado es ámbar. Cuando el ámbar o cualquier otro material en condición semejante conduce al incremento de estas fuerzas de atracción, se dice que el cuerpo está electrificado.

William Gilbert (autor del primer electroscopio) en el siglo VI<sup>[1]</sup> investigó este tipo de electrificación y como resultado de sus observaciones dividió a los materiales en dos clases: sustancias tales como el vidrio, ámbar, seda, los cuales son capaces de electrificarse, los nombró "eléctricos"; y a las sustancias tales como los metales los cuales fueron incapaces de electrificarse, él los nombró "no eléctricos". Estos grupos son los que ahora conocemos como aislantes y conductores.

Otto Von Guericke descubrió la repulsión eléctrica, y probó que si una barra cargada, era acercada a un pedazo de hierro, el hierro atraía a la barra, después del contacto el hierro es rechazado.

Cerca de un siglo después, Du Fay sugirió que existen la atracción y la repulsión entre cuerpos cargados que resultan de dos tipos de electricidad, en disposición de explicar los fenómenos que han sido observados, estos dos tipos los llamó "vítrea" (porque fue asociado con la transparencia del vidrio) aquí se encuentran el vidrio, rocas de cristal y las piedras preciosas y "resinosa" (asociado con los materiales resinosos) entre ellos encontramos el ámbar, el papel). Además, Du Fay propuso que estos dos tipos de electricidad eran "fluidos" y entonces los experimentos se encausaron a "colectarlos" como si fuesen fluidos, en varios recipientes. Un "recipiente" conveniente en el cual la carga podía ser almacenada, fue realizado independientemente por Von Kleist y Musschenbroek. Esto es conocido como la botella de Leyden, población en la que dichos autores trabajaron.

Tiempo después, Benjamin Franklin sugirió la idea que la electricidad es un fluido existente en todos los cuerpos. Si todos los cuerpos contienen una cantidad equilibrada de fluido (electricidad) se dice que el cuerpo es neutro, a partir de ahí fue realmente que se definió qué cantidad de fluido en los cuerpos, sería responsable de que estuviesen descargados, cargados o neutros. Un exceso sobre la cantidad de este fluido fué llamado positivo (+) da lugar al aumento del fenómeno de electrificación vítrea y la carencia de fluido se denominó negativo (-) o electrificación resinosa.

El estudio de la electricidad fue completamente cuantitativo hasta 1753, cuando el electroscopio de bolitas fue inventado por William Gilbert, y la deflexión de pelotitas ligeras cargadas, suspendidas de una fina fibra, este dispositivo permitió medir la relación

de carga de las pelotitas. 30 años después Coulomb inventó una balanza de torsión simple que le permitió medir la fuerza ejercida por los cuerpos cargados.

El mayor problema al cual se enfrentaron los científicos de los siglos XVIII y XIX fue el de describir la forma en que las fuerzas eléctricas actúan a distancia. Lo primero que se postuló fue que alguna "sustancia" emergía a partir de los cuerpos cargados y ejercía una fuerza "misteriosa", pero repetidos experimentos probaron que una corriente eléctrica no puede transmitirse a través de un aislante. Dos métodos para la comprensión del fenómeno fueron desarrollados independientemente. Los matemáticos desarrollaron una teoría auto consistente, basada en centros de fuerza que deberían actuar a distancia. Ellos no se preocuparon de la explicación física de cómo debería ocurrir esto. La acción a distancia fue simplemente definida como "campo" en el espacio ocupado. Faraday, propuso que existen líneas de fuerza con propiedades derivadas experimentalmente y que viajan a través de todo el espacio. El concepto de línea de campo de Faraday es frecuentemente la forma más simple de visualizar y predecir el fenómeno electrostático. Por lo tanto, es importante considerar éstas ideas con detalle más adelante.

Una importante contribución de Faraday para el entendimiento de la electrostática fue la introducción del concepto de carga eléctrica inducida. Él representó un material aislante como una colección de un gran número de conductores pequeños aislados, cada uno conteniendo cantidades iguales de electricidad. Él propuso que la carga es capaz de moverse dentro del conductor, pero, no entre aislantes. La aplicación del campo eléctrico es separar la carga positiva y negativa a los extremos opuestos del conductor y entonces se dice que está polarizado (esta idea es sustancialmente verdadera a partir de átomos neutros en los cuales existen cantidades iguales de cargas positivas y negativas).

En 1873 Maxwell<sup>[2]</sup> publicó un tratado en el cual trasladaba las ideas de Faraday en una formulación matemática convencional y demostraba que las dos formas de describir que los campos eléctricos que son equivalentes (ya sea en forma de líneas o en forma de "sustancia" ó fuerza "misteriosa"). Él apuntaba que aunque las leyes de la electricidad y el magnetismo fueran completamente consistentes con las hipótesis de que hay un medio entre dos cuerpos, en el que hay una tensión a lo largo de la línea de fuerza y que la presión es igual en todas direcciones y perpendicular a los cuerpos, existen las líneas que son una técnica sencilla que permite visualizar algunas cosas las cuales no son visibles para nosotros, la analogía permite resolver muchos problemas eléctricos y magnéticos.

La formulación matemática de la teoría eléctrica y magnética desarrollada en el siglo XIX permaneció largamente invariable, aunque en el inicio del siglo XX, los mecanismos fueron excelentemente clarificados con el descubrimiento, de que la materia, está compuesta de partículas elementales cargadas. Cuando Maxwell y otros matemáticos desarrollaron sus teorías de electricidad ellos consideraron a la electricidad como un fluido, pero en ausencia del conocimiento del electrón y el protón, esto fue como cerrar una verdad que debería ser investigada, es decir ellos no aceptaban la teoría, pero tampoco podían rechazarla, y dejaban el tema abierto a la investigación.

## 1.2. LA CARGA ELÉCTRICA

A simple vista podemos ver que William Gilbert, Franklin, Du Fay, Faraday, Maxwell intuitivamente iban (casi totalmente) en el camino correcto. Con el resultado de modernos experimentos en física atómica, realizados por Rutherford, Bohr, entre otros, nosotros tenemos razón en creer que los átomos, los cuales:

- a) Corresponden a los diferentes elementos químicos,
- b) En estado de agregación forman moléculas características de componentes químicos
- c) Están compuestos de partículas elementales tales como electrones, protones y neutrones

Pero, ¿Y qué es en sí la carga eléctrica?

La carga es una propiedad fundamental y característica de partículas elementales que forman la materia. De hecho, toda la materia está compuesta fundamentalmente de protones, neutrones y electrones (si nos pusiéramos a escudriñar más en estas partículas podríamos encontrar otro conjunto de partículas subatómicas, tales como los Quarks). Bien, al electrón se le asigna convencionalmente la carga negativa, al protón la carga positiva y al neutrón es una partícula eléctricamente neutra.

Pero aún, cuando en escala microscópica la materia se componga de un gran número de partículas cargadas, las potentes fuerzas eléctricas asociadas con estas partículas quedan bastante ocultas a una observación macroscópica. Como se ha demostrado históricamente, existen dos tipos de carga: positiva y negativa, la materia contiene aproximadamente cantidades iguales de cada tipo.

Ahora bien, desde el punto de vista macroscópico, cuando nos referimos a un cuerpo cargado o con carga, decimos que, la carga se refiere a la carga neta, si ésta es cero se dice que el cuerpo es neutro (cantidades iguales de cargas positivas y cargas negativas) y si existe un exceso de carga, ya sea de electrones (se dice que está cargado negativamente) o de protones (se dice que está cargado positivamente), aunque esto último es difícil que ocurra (arrancar protones por fricción es prácticamente imposible por ejemplo), debido a que las fuerzas nucleares que mantienen unidos a los protones en el núcleo son más grandes que las fuerzas eléctricas de repulsión, por ello, y en caso de que quisiéramos lograr arrancar protones, requeriríamos energías muy grandes, por ello siempre se dice que un cuerpo tiene carga positiva, a falta de electrones, es decir, a un incremento en iones positivos, en la terminología de semiconductores se dice que existen portadores positivos o huecos.

Es un resultado experimental que la carga no puede crearse ni destruirse. La carga total de un sistema cerrado no puede cambiar. Desde el punto de vista macroscópico, las

cargas pueden reagruparse; sin embargo, podemos establecer que la carga neta se conserva en un sistema cerrado.

### 1.3. LA LEY DEL INVERSO DEL CUADRADO

En síntesis, desde la antigüedad hasta la fecha se han llegado a tres importantes principios

I- Existen dos y sólo dos tipos de carga eléctrica, conocido hasta ahora como positiva y negativa.

II.- Dos cargas puntuales ejercen entre sí fuerzas que actúan sobre la línea que las une y que la fuerza neta es inversa al cuadrado de su distancia de separación

III.- Estas fuerzas son también proporcionales al producto de las magnitudes de las cargas, y son repulsivas para cargas iguales y atractivas para cargas contrarias.

Los dos últimos principios, con el primero como preámbulo, se conocen como Ley de Coulomb, que se escribe como:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \frac{R_{21}}{R_{21}} \quad 1.3.1$$

Donde  $F_1$  es la fuerza sobre la carga  $Q_1$  que ejerce la carga  $Q_2$ ,  $R_{21}$  es el vector que va de  $Q_1$  a  $Q_2$ ,  $R_{21}$  es la magnitud del vector distancia  $R_{21}$  y  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre.

La ley de Coulomb se aplica a cargas puntuales. En el sentido macroscópico una "carga puntual" es aquella cuyas dimensiones espaciales son muy pequeñas en comparación con cualquiera otra longitud pertinente al problema en consideración, y utilizaremos el término de "carga puntual".

Si se tienen más de dos cargas puntuales, las fuerzas mutuas se determinan por la aplicación repetida de la ecuación 1.3.1. Particularmente, si se considera un sistema de  $N$  cargas, la fuerza de la  $i$ -ésima carga sobre la  $j$ -ésima está dada por:

$$F_j = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}^2} \frac{R_{ij}}{R_{ij}} \quad 1.3.2.$$

Esto es, por supuesto bajo el principio de superposición de fuerzas, que expresa que la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es la suma vectorial de las fuerzas individuales que actúan sobre él.

Una simple extensión de las ideas de  $N$  cargas puntuales interactuando, es la interacción de una carga puntual con una distribución continua de carga.

Es bien sabido ahora, que la carga eléctrica se encuentra en múltiplos de una carga básica, la del electrón. La pequeñez de la unidad básica significa que las cargas macroscópicas están compuestas invariablemente de un número muy grande de cargas electrónicas; esto a su vez significa que una distribución de carga macroscópica en cualquier elemento pequeño de volumen contiene un gran número de electrones.

Sin embargo, debe tenerse cuidado, al aplicar esta clase de descripción a problemas atómicos, puesto que, en estos casos, sólo interviene un número pequeño de electrones, y el procedimiento de tomar el límite cuando la carga tiende a cero no tiene sentido.

Dejando a un lado estos casos atómicos, podemos continuar como si un segmento de carga pudiese subdividirse indefinidamente, y describir la distribución de carga por medio de funciones puntuales:

Por tanto tenemos que la densidad superficial  $\sigma$ , y la densidad volumétrica  $\rho$  de carga son definidas como:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad 1.3.3$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad 1.3.4$$

Es claro que si introducimos estos conceptos en la definición anterior de fuerza, suponiendo que la carga se distribuye en un volumen  $V$  (con densidad  $\rho$ ), en una superficie  $S$  (con una densidad  $\sigma$ ), y una distribución de  $N$  cargas  $q_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  a las distancias  $r_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  y suponiendo que la carga  $q$  se encuentra a una distancia  $r$  del origen de coordenadas, la expresión general es:

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{r - r_i} + \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{r - r'} \sigma(r') d\alpha' + \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{r - r'} \rho(r') dV' \right] \quad 1.3.5$$

Habría que observar que la fuerza sobre  $q$  es proporcional a  $q$ . Esta observación nos conduce a introducir un campo vectorial independiente de  $q$ , es decir, la fuerza por unidad de carga. Este campo vectorial, es conocido como campo eléctrico, que tiene ciertas propiedades fundamentales en nuestro estudio, como veremos enseguida.

## 1.4. EL CAMPO ELÉCTRICO

El espacio que ocupa una serie de cargas eléctricas, consideradas con referencia al fenómeno eléctrico ocurriendo en ese espacio, es conocido como campo eléctrico (a estos tipos de espacios, los matemáticos les gusta llamarles espacios vectoriales).

Una carga eléctrica, colocada en cualquier punto  $P$  en un espacio en  $R^3$  (en el espacio tridimensional) en una vecindad de cargas, se encuentra sujeto al fenómeno eléctrico denominado campo eléctrico, es decir, a un espacio ocupado de cargas, deberá experimentar fuerzas de atracción o repulsión desde cualquier carga en el campo. La introducción de una "nueva" carga, deberá en general perturbar el arreglo de las cargas en el sistema.

Si por el contrario, la carga (llamada carga de prueba) es supuesta pequeña, los efectos sobre el sistema de cargas deberán ser mínimas, y por ello el sistema no experimentará reacomodamiento, así que las fuerzas que actúan sobre la carga de prueba no sufrirá variaciones y se mantendrá el campo eléctrico original.

Pero, veamos ahora la descripción matemática de nuestras ideas. Ya anteriormente habíamos obtenido una expresión para las fuerzas eléctricas sobre una carga  $q$ . Si dividimos la expresión 1.3.5 entre  $q$  obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' + \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \right] \quad 1.4.1$$

De la expresión 1.3.5 observamos que, la fuerza es proporcional a  $q$  (carga de prueba), sin embargo, podemos despejar  $q$  y esta observación, nos conduce a introducir un campo vectorial independiente de  $q$ , es decir la fuerza por unidad de carga.

Este campo vectorial, es conocido como campo eléctrico  $E$ .

Por lo tanto, tenemos la siguiente definición:

### Definición 1

“El campo eléctrico  $E$  en cualquier punto es la fuerza por unidad de carga que actúa sobre una partícula cargada colocada en este punto.” La carga de la partícula existente debe ser pequeña (tender a cero).

En notación vectorial, la definición de  $E$  es

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} \quad 1.4.2$$

El proceso de los límites incluye la definición de  $E$  para asegurar que la carga de prueba  $q$  no afecte una distribución de carga que produce  $E$ . Supongamos que tenemos solamente ciertas  $q_i$  con  $i=1,2,\dots,n$ , es decir, una distribución finita de cargas en un conductor, entonces al acercar la carga de prueba  $q$  con un valor pequeño a la vecindad del conductor, el sistema de cargas no se redistribuirá. Si el campo eléctrico se hubiera calculado utilizando la relación de fuerza a carga para una carga de prueba de tamaño finita, el campo obtenido sería el debido a la carga redistribuida más bien que, el debido a la distribución original de carga.

En el caso especial, en que una de las cargas de la distribución de carga pueda usarse como carga de prueba, el procedimiento del límite no es necesario. En este caso el campo eléctrico en la posición de la carga de prueba será el producido por el resto de la distribución de carga; no habrá, por supuesto, redistribución de carga, puesto que la distribución de carga propia se obtiene bajo la influencia de toda la distribución de carga, incluyendo la que se está utilizando como carga de prueba.

En otros casos, notablemente en aquellos en que la distribución de la carga se específica, la fuerza será proporcional a la magnitud de la carga de prueba. En estos casos, también es innecesario el límite, sin embargo, si existe alguna duda, es mejor emplear el límite.

## **2. ANÁLISIS DE LÍNEAS DE FUERZA EN SUPERFICIES FINITAS**

**2.0 Existen diversos problemas de campos eléctricos en superficies finitas que solamente se pueden resolver con el planteamiento de las ecuaciones de Laplace ó Poisson, las cuales involucran métodos matemáticos avanzados y que, generalmente la solución se complica enormemente, una manera de resolver estos problemas y entendiendo mejor la Física del problema, es que mediante un análisis de líneas de campo eléctrico y equipotenciales en superficies conductoras finitas, puede obtenerse una solución visual del problema y que posteriormente obtenerse la solución matemáticamente; que en consecuencia lo que nos lleva a estudiar en este capítulo son las líneas de fuerzas en campos eléctricos y las líneas equipotenciales generadas por las cargas eléctricas en superficies en un plano conductor infinito para poder diferenciar los resultados posteriormente con superficies finitas y además veremos sus posibles aplicaciones de las líneas equipotenciales a otros campos distintos de la electrostática.**

## 2.1. LÍNEA DE FUERZA

¿Qué se entiende por Línea de Fuerza?

### Definición 2

“Son líneas que ayudan a visualizar o describir un campo eléctrico”<sup>[4]</sup>.

El campo eléctrico en un punto, es tangente a la línea de fuerza y su magnitud es proporcional a la densidad de líneas en un área perpendicular a las mismas. Las cargas positivas son fuentes de líneas de fuerza, las negativas son sumideros. Como veremos posteriormente también se puede hacer un análisis con la teoría de fluidos, y de manera análoga con las fuerzas gravitacionales.

Permitámonos iniciar en cualquier punto  $O$  en el campo eléctrico, y nos movemos una distancia corta  $OP$  en la dirección del campo eléctrico a partir de  $O$ . Iniciando a partir de  $P$  permitámonos movernos una corta distancia  $PQ$  en la dirección del campo eléctrico en  $P$ , y así sucesivamente. De esta forma nosotros obtenemos una trayectoria quebrada  $OPQR\dots$ , formada de un número pequeño de elementos rectilíneos, como se muestra en la figura 2.1.



Figura 2.1 Trayectoria quebrada de los segmentos  $OP, PQ, QR, \dots$

Estas trayectorias quebradas (si hacemos los desplazamientos más pequeños ó más infinitesimales) se convierten en una curva continua, que tiene la propiedad que para todo punto sobre la línea, el campo eléctrico es tangente a la línea. Cada curva es llamada línea de fuerza. Nosotros podemos por lo tanto definir la línea de fuerza como sigue:

### Definición 3

“La línea de fuerza es una curva del campo eléctrico, tal que la tangente en cada punto es paralela a la dirección del campo eléctrico en este punto.”

El campo eléctrico  $E$  puede verse como la composición de tres componentes  $E_x, E_y$  y  $E_z$  paralelos a los ejes rectangulares  $i, j, k$ .

La norma del campo eléctrico está dada por:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \quad 2.1.1.$$

Y los cosenos directores en esta dirección son:

$$\frac{E_x}{E}, \frac{E_y}{E}, \frac{E_z}{E} \quad 2.1.2$$

Por lo tanto, es también la dirección de los cosenos de la tangente en  $x, y, z$ , en la línea de fuerza a través del punto. Sabemos que la pendiente a la curva en el plano  $x-y$  está dada por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{E_y}{E_x} \quad 2.1.3$$

Haciendo los desplazamientos infinitesimales tenemos que

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} \quad 2.1.4$$

La ecuación diferencial del sistema de líneas de fuerza, en 3 dimensiones es de acuerdo a:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad 2.1.3$$

## 2.2. EL POTENCIAL

Supóngase que se tiene una carga pequeña infinitesimal  $q$ , en el campo eléctrico  $E$ , nosotros al mover la carga hacemos trabajo en contra de las fuerzas eléctricas, estas fuerzas hacen trabajo sobre la carga. En la carga de prueba infinitesimal al colocarla en un punto  $P$  puede observarse que almacena energía, esta energía es igual al trabajo (positivo o negativo) el cual ha sido hecho para colocarla en el punto  $P$  tomando la carga hacia  $P$  en oposición de la repulsión y atracción del campo eléctrico  $E$ . La energía puede ser obtenida al dejar que la partícula trace su trayectoria hacia el punto  $P$ .

Asumimos que la carga sobre la partícula moviéndose debe ser pequeña tal que la distribución de la electricidad sobre los conductores en el campo no sea afectada por él.

Especificando tenemos que, el trabajo realizado por una fuerza para mover una carga  $q$  al punto  $P$  es proporcional a  $q$ , el trabajo hecho y la energía potencial también son proporcionales a  $q^{[4]}$ , por ello podemos tomar el trabajo como  $Vq$ . La cantidad de trabajo depende por supuesto de la posición a partir de la cual la partícula haya iniciado. Es conveniente en la medición de  $Vq$ , suponer que la partícula inicio su movimiento en un punto  $Q$  fuera del campo total, es decir en un punto lejano de las cargas generadoras del campo y que todo su efecto en el punto en  $Q$  sea despreciable – para mayor brevedad podemos decir que el punto  $Q$  esta en el infinito-.

Nosotros definimos  $V$  como el potencial en el punto  $O$ . Por lo tanto tenemos la siguiente definición:

#### Definición 4

El potencial  $V$  en cualquier punto en el campo eléctrico, es el trabajo por unidad de carga en una partícula cargada para moverla hacia ese punto.

Supongamos que denotamos por  $T$  al trabajo hecho por mover una carga  $q$  desde  $P$  hasta  $Q$  en presencia de un campo  $E$ . En el movimiento de la carga desde el infinito hasta  $P$ , nosotros calculamos la cantidad de trabajo que por definición es igual a  $V_P q$  donde  $V_P$  denota el valor del potencial en el punto  $P$ . Análogamente tomando desde el infinito hasta  $Q$ , nosotros calculamos la cantidad de trabajo como  $V_Q q + T$ . Esto, sin embargo, es igual a  $V_Q q$ .

Por lo tanto tenemos:

$$V_P q + T = V_Q q \quad 2.2.1.$$

$$T = (V_Q - V_P) q \quad 2.2.2.$$

Vemos la diferencia de potencial entre dos puntos es el trabajo por unidad de carga para mover la carga entre los puntos.

El análisis para obtener la ecuación de la energía de la partícula con carga  $q$ , es de la manera siguiente:

Supongamos que hacemos un trabajo sobre la carga pequeña  $q$ , en presencia de un campo eléctrico  $E$  a partir de  $x, y, z$ , hacia  $x + dx, y + dy, z + dz$ , observamos que la cantidad de trabajo realizada es:

$$dT = q(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad 2.2.3.$$

De tal manera que si movemos la carga  $q$  hacia la posición  $x, y, z$ , desde el infinito, nosotros podemos calcular el trabajo total como:

$$T = q \int_{\infty}^{(x,y,z)} (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad 2.2.4.$$

Donde la integral es tomada a lo largo de la trayectoria trazada por  $q$ ,

Denotando el trabajo realizado por la carga  $q$  en moverse hacia cualquier punto  $(x, y, z)$  en el campo eléctrico, se escribe como  $Vq$ . Nosotros claramente tenemos.

$$V = \int_{\infty}^{(x,y,z)} (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad 2.2.5.$$

Dada esta expresión matemática podemos calcular el potencial en el punto  $x, y, z$ ,

El mismo resultado puede ser visto de otra forma diferente. Si  $ds$  es cualquier elemento de trayectoria, y si la intensidad  $E$  en el extremo de este elemento hace un ángulo  $\theta$  con  $ds$ , entonces la componente de esta fuerza que actúa sobre  $q$  cuando nos movemos a lo largo de  $ds$ , es  $Eq \cos \theta$ . El trabajo hecho al moverse  $q$  a lo largo del elemento  $ds$  es de acuerdo a:

$$dT = E \cos \theta ds \quad 2.2.6.$$

Tal que todo trabajo en mover a  $q$  desde el infinito hasta  $x, y, z$ , es:

$$T = q \int_{\infty}^{(x,y,z)} E \cos \theta ds \quad 2.2.7.$$

Y ya que por definición esto es igual a  $Vq$ , nosotros tenemos

$$V = \int_{\infty}^{(x,y,z)} E \cos \theta ds \quad 2.2.8.$$

Como podemos ver ambas expresiones 2.2.5 y 2.2.8 son idénticas, notando que  $\theta$  es el ángulo entre las dos líneas de la cual la dirección de los cosenos son respectivamente:

$$\frac{E_x}{E}, \frac{E_y}{E}, \frac{E_z}{E} \quad 2.2.9$$

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \quad 2.2.10$$

Tenemos por lo tanto que igualando la ecuación 2.2.3 y la ecuación 2.2.6 se obtiene:

$$\cos \theta = \frac{E_x}{E} \frac{dx}{ds} + \frac{E_y}{E} \frac{dy}{ds} + \frac{E_z}{E} \frac{dz}{ds} \quad 2.2.11$$

Tal que

$$E \cos \theta ds = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad 2.2.12.$$

Y la identidad en las dos expresiones es por tanto obvia.

Si el principio de conservación de la energía es verdadero en el campo electrostático, el trabajo para mover una carga pequeña  $q$  desde el infinito a cualquier punto  $P$  debe ser el mismo, independientemente de la trayectoria hacia  $P$ .

Pero, si las cantidades de trabajo fueran diferentes para dos trayectorias diferentes, supongamos que estos potenciales son  $V_p$  y  $V_p'$  y que el potencial  $V_p$  es más grande. Entonces tomando la carga desde el infinito hasta  $P$  por la primer trayectoria y posteriormente llega por otra trayectoria diferente al punto  $P$ , debemos obtener la cantidad de trabajo

$$(V_p - V_p') = T \quad 2.2.13$$

La cual será contraria a la conservación de la energía, pues el trabajo debe ser el mismo independientemente de la trayectoria. Por lo tanto,  $V_p$  deberán ser iguales y el potencial en  $P$  es el mismo, no importa por que trayectoria se haya llegado a  $P$ .

El Potencial en  $P$  depende únicamente de la posición  $P=(x,y,z)$ .

## 2.3. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

### Definición 4

Una superficie equipotencial en un campo eléctrico es tal que, todo punto que se encuentre en ella tiene el mismo valor de potencial.

### Teorema 1

Las superficies equipotenciales cortan líneas de fuerza en ángulos rectos.

Supongamos que  $P$  es cualquier punto en el campo eléctrico, y también que  $Q$  es un punto adyacente sobre la misma equipotencial en  $P$  como se muestra en la figura 2.2. entonces por definición,  $V_P = V_Q$  así que por la ecuación 2.2.2. se tiene que  $T = 0$ , donde  $T$  es la cantidad de trabajo realizado en mover una carga  $q$  a partir de  $P$  a  $Q$ .

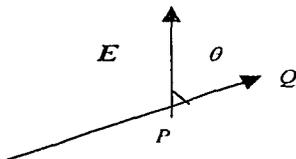


Figura 2.2 Muestra la trayectoria que sigue una carga  $q$  del punto  $P$  a  $Q$ .

Si  $E$  es el campo eléctrico en  $P$ , y  $\theta$  es el ángulo entre  $E$  y con, el trabajo esta dado como:

$$(E \cos \theta)(q)(\overline{PQ}) = T \quad 2.3.1$$

Ya que  $\overline{PQ}$ ,  $E$  y  $q$  son distintos de cero, la cantidad de trabajo debe ser tal que:

$$\cos \theta = 0 \quad 2.3.2$$

Por lo tanto  $\theta = (n\pi/2)$  con  $n \neq 0$  y  $n \in \mathbb{Z}_{\text{impares}}$ , se concluye finalmente que la línea de fuerza es perpendicular con la equipotencial.

En lugar de que  $P$  y  $Q$  existan en la misma equipotencial, supongamos a ellos pertenezcan ahora a una línea paralela en el eje  $x$ , cuyas coordenadas sean  $x, y, z$ , a  $x + dx, y, z$ , respectivamente. Moviéndose la carga  $q$  desde  $P$  a  $Q$  el trabajo realizado es  $-F_x dx$  y por la ecuación 2.2.2 y 2.2.3 en incrementos tenemos que:

$$-E_x \Delta x = V_Q - V_P \quad 2.3.3$$

Ya que  $Q$  y  $P$  son adyacentes, se tiene, a partir de la definición de coeficiente diferencial:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V_Q - V_P}{\Delta x} = -E_x \quad 2.3.4$$

Por tanto tenemos las relaciones:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = E_x, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = E_y, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = E_z \quad 2.3.5$$

Los resultados que son por supuesto obvios de la ecuación de diferenciación 2.2.5. con respecto a  $x$  respectivamente.

Similarmente, si imaginamos que  $Q$  y  $P$ , son dos puntos sobre la misma línea de fuerza, se tiene:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial s} \quad 2.3.6.$$

Donde  $\partial/\partial s$  denota diferenciación a lo largo de la línea de fuerza. Ya que  $E$  es positivo, esto permite que  $\partial V/\partial s$  sea negativo, es decir  $V$  decrece cuando  $s$  se incrementa, o la intensidad en el sentido que  $V$  decrece. Por lo tanto las líneas de fuerza corren a partir de altos valores a bajos valores de  $V$ , y además como hemos visto, cortan todas las equipotenciales en ángulos rectos.

En una región que es ocupado por un material conductor, las cargas eléctricas, como hemos visto, deberán estar en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas a partir de todas las cargas que están en el campo. La fuerza  $F$  resultante producida por estas cargas sobre cualquier elemento de carga  $q$  es cero, pero como  $F = qE$ , y con  $q$  no cero, entonces  $E$  debe ser cero.

Por lo tanto  $E_x = E_y = E_z = 0$ , y:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad 2.3.7$$

En otras palabras,  $V$  debe ser constante a través del conductor para que el equilibrio electrostático sea posible. Y en particular la superficie de un conductor deberá ser una superficie equipotencial, o parte de una.

Si no es constante el potencial en cualquier conductor, la intensidad en dirección de  $V$  decrece. Por lo tanto, la electricidad positiva tiende a fluir en dirección de  $V$  decrementándose y la electricidad negativa en dirección de  $V$  incrementándose.

La tierra es un conductor, y por lo tanto tiene superficies equipotenciales. En todas las aplicaciones prácticas de la electrostática, puede considerarse el potencial de la tierra como cero, a una distancia sobre la superficie de la tierra, eliminando la consideración del potencial medido desde el infinito. Así, de esta manera cualquier conductor puede ser reducido a potencial cero por unión de un alambre metálico a la tierra.

## 2.4. CONDICIONES DE FRONTERA

El campo eléctrico experimenta una variación al pasar por una zona intermedia entre dos medios. Los medios pueden ser dos dieléctricos con diferentes propiedades o un dieléctrico y un conductor.

Consideremos un plano intermedio entre dos medios como se muestra en la figura 2.3. Supóngase que hay una densidad superficial de carga  $\sigma$  que puede variar de un punto a otro en la zona intermedia.

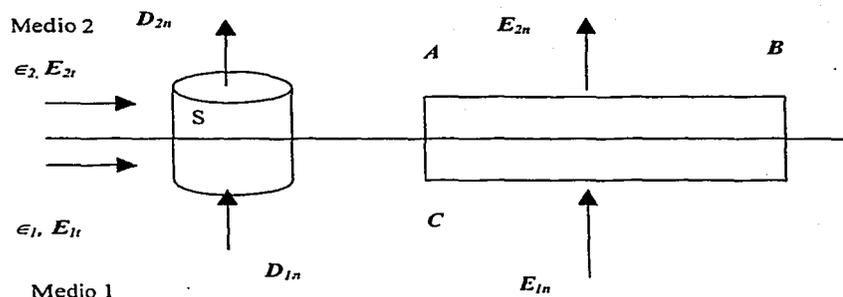


Figura 2.3 Representación de los vectores de campo en la frontera sobre en la zona intermedia entre los medios 1 y 2

Tomando la ecuación de Maxwell<sup>[3]</sup> para fuentes y tomando la figura del cilindro, la ecuación puede ser escrita como

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int \rho dv \quad 2.4.1$$

En el límite cuando la altura del cilindro tiende a cero la contribución de  $D_{1t}$ ,  $D_{2t}$  través de las paredes tiende a cero, la ecuación anterior se reduce en:

$$\Delta S D_{2n} - \Delta S D_{1n} = \Delta S \rho_S \quad 2.4.2$$

Donde

$$\rho_S = D_{2n} - D_{1n} \quad 2.4.3$$

Observemos que si la densidad de carga superficial es cero

$$D_{2n} = D_{1n} \quad 2.4.4$$

Tenemos que las componentes de campo eléctrico normales son continuas, es decir permanecen invariables, solo están relacionadas inversamente con la permitividad del medio.

Esto es, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar la superficie de separación, según se muestra en la ecuación 2.4.4.

Debido a que el campo electrostático puede obtenerse como el gradiente de un potencial, la integral de línea de  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada se anula. Al aplicar este resultado a la trayectoria rectangular, las longitudes  $AB$  y  $CD$  se

consideraran iguales a  $\Delta l$  y los segmentos  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  se supondrán muy pequeños. Por consiguiente las ecuaciones son:

$$E_{2t} \cdot \Delta l + E_{1t} \cdot (-\Delta l) = 0 \quad 2.4.5.$$

$$(E_{2t} - E_{1t}) \cdot \Delta l = 0 \quad 2.4.6.$$

En consecuencia el resultado deseado es:

$$E_{2t} = E_{1t} \quad 2.4.7$$

Esto es, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar la superficie de separación.

Se hace evidente, con bases físicas, que el potencial  $V$  deber ser continuo al atravesar una superficie de separación. Esto se sigue debido a la diferencia en el potencial,  $\Delta V$ , entre dos puntos muy próximos es  $E \cdot \Delta l$  donde  $\Delta l$  es la separación de los dos puntos, de cual se ha dicho ya que no hay motivo para que  $E$  sea infinito en una superficie de separación. Realmente, la continuidad del potencial es una condición de frontera, pero no independiente de las ya deducidas. También y lo más importante que el campo eléctrico como podemos observar es perpendicular a la superficie, por tanto se puede decir que es una condición de frontera. Como veremos en la sección 3.

## 2.5 APLICACIONES CON FUERZAS Y VELOCIDADES

Estas aplicaciones son una generalización de las líneas de fuerza y equipotenciales, en un ámbito más general. En las aplicaciones de esta sección se estudian fuerzas que están confinadas en un plano y las velocidades de partículas que se mueven en un plano.

Una fuerza se puede representar por un vector, que es un segmento al que se asigna un sentido. Así, el vector  $F$ , en la figura 2.4, representa una fuerza de magnitud  $F$  unidades de fuerza, una dirección de la recta del segmento, y el sentido de la fuerza sentido de  $O$  a  $P$ . Si  $\overline{OP}$  forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , las cantidades

$$F_x = F \cos \theta \quad 2.5.1.$$

$$F_y = F \sin \theta \quad 2.5.2.$$

Donde  $\theta$  es el ángulo de  $F$  con respecto al eje de  $x$ .

Se denominan, respectivamente, componente  $F_x$  y componente  $F_y$ , de la fuerza.

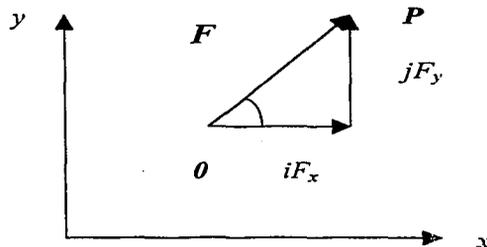


Figura 2.4. Componentes de la fuerza  $F=(F_x, F_y)$ .

$F_x$  se puede considerar como una fuerza que tiene sentido asignado al eje de las  $x$ , o el sentido opuesto según que  $F_x$  sea positiva o negativa; y lo mismo se puede decir respecto a la magnitud  $F_y$ . Obsérvese que tanto la magnitud, como el sentido y la dirección de una fuerza quedan perfectamente definidos por sus dos componentes escalares  $F_x$ ,  $F_y$ , referidas a un sistema de ejes coordenados. Designaremos por  $(F_x, F_y)$  a una fuerza  $F$  de componentes escalares  $F_x$ ,  $F_y$ , y definiremos, de acuerdo a la teoría, la suma de fuerzas por:

$$(F_{x1}, F_{y1}) + (F_{x2}, F_{y2}) = (F_{x1} + F_{x2}, F_{y1} + F_{y2}) \quad 2.5.3$$

Si fuese  $cF$  la magnitud de la fuerza de la figura 2.4, sus componentes serían  $F_x = cF \cos \theta$ ,  $F_y = cF \sin \theta$ , pudiéndose escribir:

$$c(F_x, F_y) = (cF_x, cF_y) \quad 2.5.4.$$

Teniendo en cuenta 2.5.3 y 2.5.4 se deduce fácilmente:

$$a(F_{x1}, F_{y1}) + b(F_{x2}, F_{y2}) = (aF_{x1} + bF_{x2}, aF_{y1} + bF_{y2}) \quad 2.5.5.$$

$F_x(x, y)$  y  $F_y(x, y)$  representan funciones de  $x$ ,  $y$ , y  $(F_x(x, y), F_y(x, y))$  representa una fuerza que actúa en el punto  $(x, y)$ , el conjunto correspondiente de fuerzas, una para cada uno de los puntos  $(x, y)$  en una región, se denomina campo de fuerza, que es, un campo vectorial. La figura 2.5 representa el campo de la fuerza  $(0, -w)$ , que aproximadamente, es el campo de fuerza, o peso, en una pequeña zona de un plano vertical próximo a la superficie de la tierra.

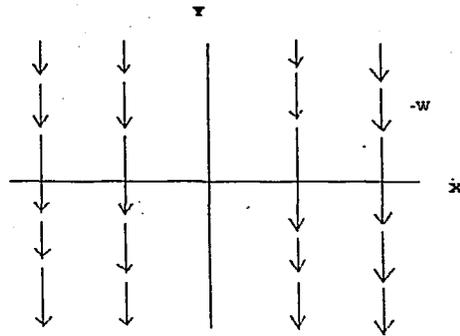


Figura 2.5. Representación del campo vectorial gravitacional en una zona pequeña de la superficie de la tierra

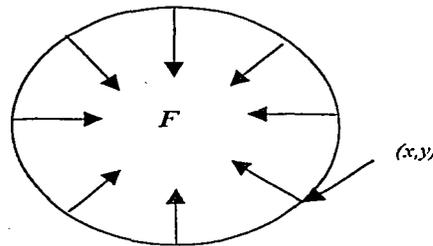


Figura 2.6. Representación vectorial de un campo vectorial gravitacional hacia el centro de la tierra.

En la figura 2.6 se indica la representación de una fuerza que actúa en un plano transversal en el punto  $(x,y)$  y que tiene la magnitud  $F = -GMmr/r^3$ , donde  $G$  es la constante gravitacional,  $M$  la masa de la tierra y  $m$  es la masa del objeto y  $r$  es la distancia al centro de la tierra, cuya magnitud es  $(x^2+y^2)^{1/2}$ . Como  $\cos\theta = -x/r$ ,  $\sin\theta = -y/r$ , el campo esta representado por:

$$\mathbf{F} = \left[ \frac{-GMmx}{r^3}, \frac{-GMmy}{r^3} \right] \quad 2.5.6.$$

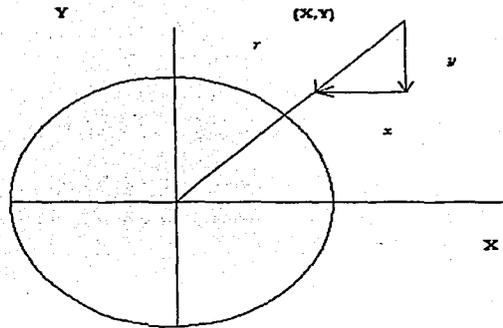


Figura 2.7 Representación de la fuerza que actúa sobre una masa cercana a la tierra.

La figura 2.7 se refiere al campo de una fuerza definida por  $(-F_x, -F_y)$ , cuya magnitud es de  $(F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$  unidades.

Análogamente se tendría en un campo de fuerza gravitacional, la siguiente definición

“Una línea de fuerza es una línea cuya tangente en cada uno de sus puntos tiene la misma pendiente que el vector que representa la fuerza que pasa por el mismo punto”.

De la figura 2.7. se deduce que las líneas de fuerza del campo  $(-F_x, -F_y)$  satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \quad 2.5.7.$$

Y por lo tanto tenemos

$$F_y dx - F_x dy = \left[ \frac{GMm}{r^3} \right] (y dx - x dy) = 0 \quad 2.5.8.$$

Sustituyendo tenemos que la solución son del tipo:

$$y = cx \quad 2.5.9.$$

Las líneas de fuerza para el campo correspondiente a la figura 2.9. que representa un haz de rectas de vértice en el origen.

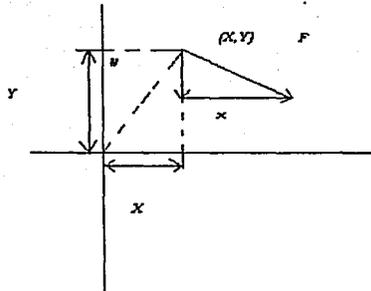


Figura 2.8. Componentes de fuerzas asociadas en un potencial

Las superficies de potencial gravitacional, son puntos donde el objeto tiene un mismo potencial, en este caso es gravitacional, pero es análogo al caso eléctrico y podemos decir que las superficies equipotenciales correspondientes por ejemplo al campo  $(F_x, -F_y)$  como se muestra en uno de los casos de la figura 2.8 satisfacen la relación.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad 2.5.10$$

El potencial que posee un cuerpo es de acuerdo a su posición en un campo de fuerza conservativo como es el campo de fuerza gravitacional. Así, un peso situado en una plataforma posee energía potencial ya que se ha gastado energía en elevarlo a la plataforma.

De la ecuación 2.5.9 tenemos que:

$$F_x dx + F_y dy = 0 \quad 2.5.11$$

Comparando la ecuación  $dy/dx = -F_x/F_y$  de 2.5.10 para las superficies equipotenciales con la ecuación  $dy/dx = F_y/F_x$  para las líneas de fuerza, se ve que las superficies equipotenciales (como vimos anteriormente) son las trayectorias ortogonales de las líneas de fuerza.

Para obtener las superficies equipotenciales del campo, habrá que resolver la ecuación 2.5.11 que están expresadas por:

$$\left(-\frac{GMm}{r^3}\right)(x dx + y dy) = 0 \quad 2.5.12$$

Y resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene que

$$x^2 + y^2 = c \quad 2.5.13$$

En la figura 2.9 se representan las circunferencias equipotenciales  $x^2 + y^2 = c$  cortando ortogonalmente a las líneas de fuerza  $y = cx$ .

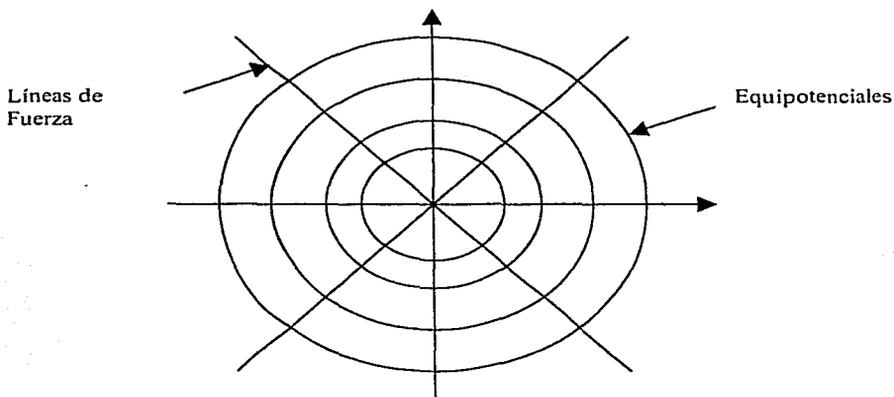


Figura 2.9. Circunferencias equipotenciales y líneas de fuerza

Por analogía podemos tener un campo de velocidades. Una velocidad tiene magnitud, dirección y sentido, por lo que, se puede representar por un vector  $(u, v)$ . A cada punto de una región le corresponde una velocidad  $(u(x, y), v(x, y))$ , definiendo así un campo de velocidad. Las trayectorias, o líneas de corriente, que son equivalentes a las líneas de fuerza, están definidas por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad 2.5.14$$

De donde

$$v dx - u dy = 0 \quad 2.5.15$$

Las curvas equipotenciales de velocidad quedan definidas por:

$$u dx + v dy = 0$$

2.5.16

Ahora veamos la figura 2.10. representa un campo de fuerza debido a cargas eléctricas, una carga positiva en el punto  $(a, 0)$  y una carga negativa en  $(-a, 0)$ , que actúan sobre la punta de prueba en el punto  $P$ . Dada la ley del inverso cuadrado, tenemos que el campo de fuerza es:

$$\left[ \frac{k(x+a)}{r_B^3} - \frac{k(x-a)}{r_A^3}, \frac{ky}{r_B^3} - \frac{ky}{r_A^3} \right] \quad 2.5.17$$

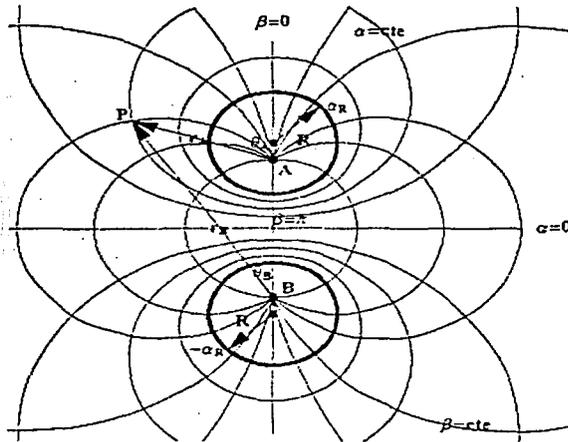


Figura 2.10. Configuración del campo eléctrico y equipotenciales de un dipolo eléctrico

En el Apéndice se deducen las coordenadas bipolares de un dipolo eléctrico.

La figura 2.10 muestra dos cargas de signo opuesto, separadas por una distancia  $d$ . En coordenadas cilíndricas bipolares un punto  $P$  sobre el plano es representado por dos vectores  $r_A$  y  $r_B$ , más dos ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$  respectivamente, dibujados a partir de dos puntos fijos  $A$  y  $B$  los cuales están localizados simétricamente a partir del origen a una distancia  $d$ . De esta manera las coordenadas bipolares  $(\alpha, \beta, z)$  son:

$$\alpha = \log \left( \frac{r_A}{r_B} \right) \quad 2.5.18$$

$$\beta = \theta_A - \theta_B \quad 2.5.19$$

Las coordenadas bipolares están dadas por las siguientes ecuaciones<sup>[5]</sup>:

$$y^2 + (x - d \coth V')^2 = (2 \csc h V')^2 d^2 \quad 2.5.20$$

$$x^2 + (y - d \cot V')^2 = d^2 \csc^2 V' \quad 2.5.21$$

$$z = z \quad 2.5.22$$

Donde 
$$V' = \frac{2\pi k_0}{q} V$$

O bien

$$x = \left( \begin{array}{c} d \sinh V' \\ \cosh V' - \cos V' \end{array} \right) \quad 2.5.23$$

$$y = \left( \begin{array}{c} d \sin V' \\ \cosh V' - \cos V' \end{array} \right) \quad 2.5.24$$

$$z = z \quad 2.5.25$$

Siendo  $0 < V' < 2\pi$ . En la figura 2.11 se muestra las proyecciones de las superficies coordenadas sobre el plano  $xy$ .

## 2.6. FLUJO POTENCIAL

En fluidos, tenemos que una línea de corriente es una línea imaginaria que conecta una serie de puntos en el espacio en un instante dado, de tal forma que todas las partículas que están sobre la curva en ese instante tienen velocidades cuyos vectores son tangentes a la misma. De aquí las líneas de corriente, indican la dirección del movimiento de las partículas que se encuentran a lo largo de ellas, en un instante dado. Un tubo de corriente o filamento de flujo es un tubo pequeño imaginario o conducto, cuya frontera está formada por líneas de corriente. Las líneas de corriente son fronteras en el mismo sentido que las paredes son fronteras de los conductores reales.

Para una línea de corriente  $\psi$  en un espacio bidimensional  $xy$  por ejemplo la ecuación diferencial simple de la línea de corriente  $\psi$  se obtiene de las siguientes componentes:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad 2.6.1$$

$$v = \frac{dy}{dt} \quad 2.6.2$$

De donde se concluye que:

$$vdx - udy = 0 \quad 2.6.3$$

### Función potencial de la velocidad

Si  $\phi(x, y, z, t)$  es cualquier función escalar con primera y segunda derivadas continuas, entonces, por identidad vectorial fundamental:

$$\nabla X(\nabla \phi) = 0 \quad 2.6.4$$

Por la tanto en un flujo irrotacional, donde

$$\nabla X \mathbf{F} = 0 \quad 2.6.5$$

Existirá una función escalar  $\phi$  cuyo gradiente es igual al vector velocidad  $\mathbf{F}$ . Es conveniente definir la dirección positiva del flujo en la dirección en la cual la función escalar decrece, entonces:

$$\mathbf{F} = -\nabla \phi(x, y, z, t) \quad 2.6.6$$

Ya que el gradiente negativo de  $\phi$  es igual al vector velocidad  $\mathbf{F}$ , es conocida como la función potencial de la velocidad, y el flujo irrotacional es frecuentemente llamado flujo potencial.

En un fluido irrotacional dada la ecuación de continuidad para un régimen permanente:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad 2.6.7$$

Por lo tanto

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi) = 0 \quad 2.6.8$$

Que da como resultado la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad 2.6.9$$

Ya que tanto para  $\phi$  y  $\psi$  ( para  $\psi$  se hace una demostración completa en <sup>[18]</sup>) satisfacen la ecuación de Laplace, la función de corriente  $\psi$  y el potencial de velocidad  $\phi$  pueden intercambiarse.

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad 2.6.10$$

Además la ecuación de Laplace es lineal y los flujos pueden construirse mediante una superposición de varias funciones de corriente. Finalmente, se puede mostrar que las líneas  $\phi$  constante y  $\psi$  constante pueden formar una malla ortogonal, conocida como una red de flujo. De la ecuación 2.6.3 que es la ecuación diferencial ordinaria de las líneas de corriente, obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=cte} = \frac{v}{u} \quad 2.6.11$$

Donde

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 2.6.12$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad 2.6.13$$

A lo largo de las líneas de potencial de velocidad constante  $d\phi=0$ , y de aquí que:

$$-u dx - v dy = 0 \quad 2.6.14$$

Donde

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad 2.6.15$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 2.6.16$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\phi=cte} = -\frac{u}{v} \quad 2.6.17$$

y

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\phi=cte} = -\frac{dx}{dy} \Big|_{\psi=cte} \quad 2.6.18$$

Por lo tanto, las pendientes son recíprocas y de signo contrario. Una línea de corriente puede representar una frontera sólida, ya que no hay flujo a través de ella. La solución analítica de la ecuación de Laplace es difícil de obtener para fronteras complejas, y en estos casos se puede obtener una solución gráfica dibujando una red o malla con celdas de 3 ó 4 lados para flujos bidimensionales.

La teoría hidrodinámica bidimensional<sup>[18]</sup> nos da las bases para encontrar soluciones útiles gráficas para flujos de fluidos incompresibles descritos por medio de un potencial de velocidad, como el que hemos empleado aquí. Como hemos visto, está en la naturaleza de tales flujos, que las velocidades calculadas a partir del gradiente de la función

potencial de como resultado líneas de corriente que son perpendiculares a las líneas de potencial constante.

Por ejemplo, nosotros podemos superponer el flujo creado por una fuente, sumidero o un vórtice potencial sobre un flujo uniforme.

### Fuentes y sumideros.

Un punto fuente o un sumidero, es una singularidad en la cual las líneas  $\psi$  son radiales y alrededor de éstas las líneas  $\phi$  forman círculos concéntricos. El patrón de flujo se ilustra en la figura 2.11. En ésta se muestran superpuestos, aunque generalmente esto no ocurre así, están separados uno de otro.

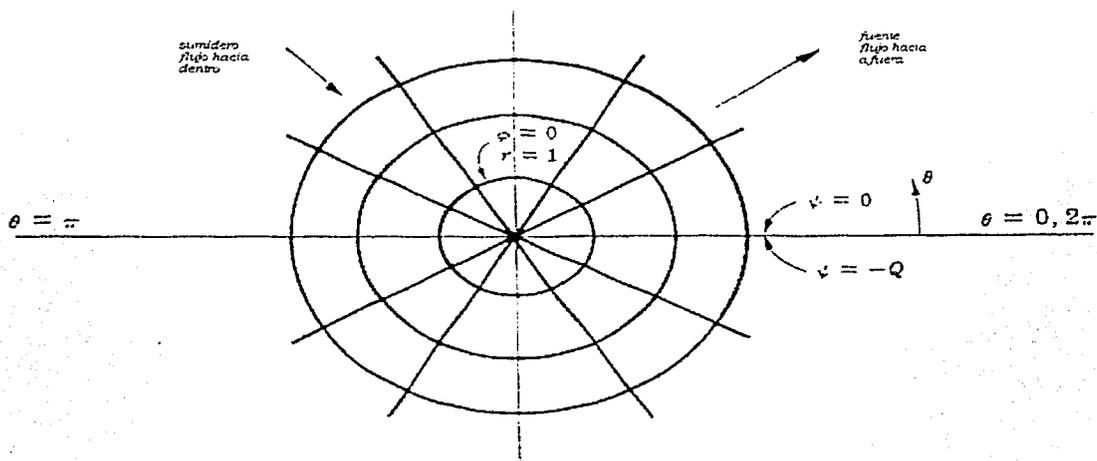


Figura 2.11. Una fuente y un sumidero.

### Dipolo

Consideremos una fuente de cierta intensidad en un punto  $A$  y un sumidero de igual intensidad en un punto  $B$ . Si el punto  $A$  está localizado en  $z = a e^{i\alpha}$  y el  $B$  en  $z = -a e^{i\alpha}$ , como se ilustra en la figura 2.12. Las líneas de corriente son líneas que pasan por  $A$  y  $B$ . La trayectoria del flujo se muestra en la figura 2.12 donde se tiene una fuente y un sumidero.

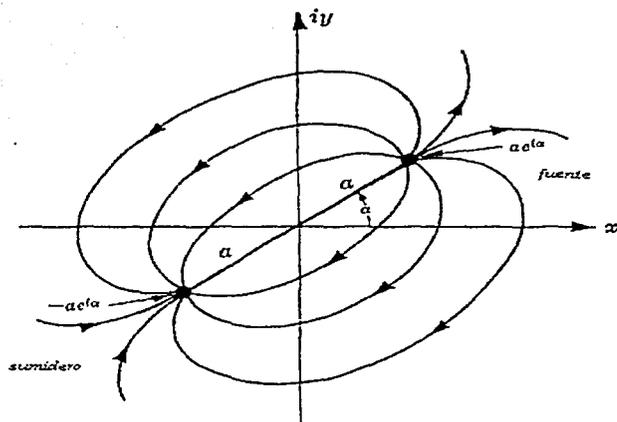


Figura. 2.12. Fuente y sumidero

La representación que se muestra en la figura 2.12, es similar a la del campo del dipolo electrostático de una carga positiva y una negativa y al patrón de un dipolo de radio antena. Enseguida se muestra el patrón cuando la distancia entre las cargas tiende a cero y las fuentes crecen, como se observa en la figura 2.13

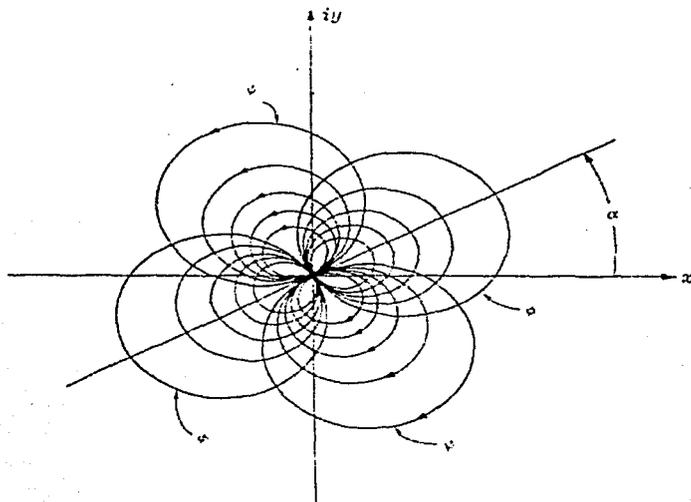


Figura. 2.13. El flujo del dipolo

Partiendo de las líneas de corriente conocidas en la frontera y de equipotenciales conocidas, puede construirse en forma sistemática una red de flujo consistente en una red de líneas de velocidad y de potencial que se intersectan ortogonalmente.

Un teorema básico en la hidrodinámica de flujo potencial dice que cada conjunto de condiciones de frontera tiene su propia y única red de flujo<sup>[10]</sup>.

## 2.7 APLICACIONES CON DETECTORES ÓPTICOS

### Definición

Un detector óptico de posición es un sensor optoelectrónico que provee datos de posición continuos de un punto de luz viajando sobre la superficie sensible.

### Estructura

Como se muestra en la figura 2.14 una vista estructural de la sección, un detector<sup>[23]</sup> consiste de 3 capas: Una capa tipo P, una capa tipo N abajo y una capa tipo I entre las capas P y N y en la superficie superior un sustrato de silicio. La luz incidente en la superficie del detector es convertida fotoelectricamente y detectada por dos electrodos en la capa P como fotocorriente.

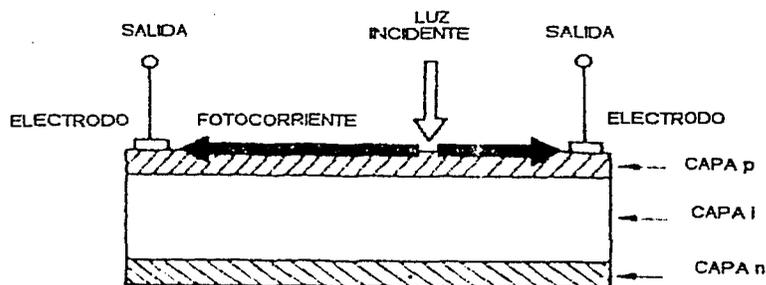


Figura 2.14. Vista seccional de un detector óptico de posición.

## Principio

Cuando un haz de luz incide sobre el detector óptico de posición la carga eléctrica es proporcional a la energía de la luz que es generado en la posición incidente. La carga eléctrica es conducida a través de la capa resistiva P y colectada por los electrodos. Ya que la resistividad de la capa P es uniforme, la fotocorriente colectada por el electrodo es proporcional al inverso de la distancia entre la posición incidente y el electrodo como se muestra en la figura 2.15. Esto es utilizado para obtener las siguientes fórmulas para las fotocorrientes  $I_1$  e  $I_2$  colectadas por los electrodos, donde  $2L$  e  $I_0$  son respectivamente la distancia entre electrodos y la fotocorriente total <sup>[13]</sup>.

Cuando el punto central del detector es puesto como punto de origen, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = I_0 \frac{L - x_A}{2L} \quad 2.7.1$$

$$I_2 = I_0 \frac{L + x_A}{2L} \quad 2.7.2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L - x_A}{L + x_A} \quad 2.7.3$$

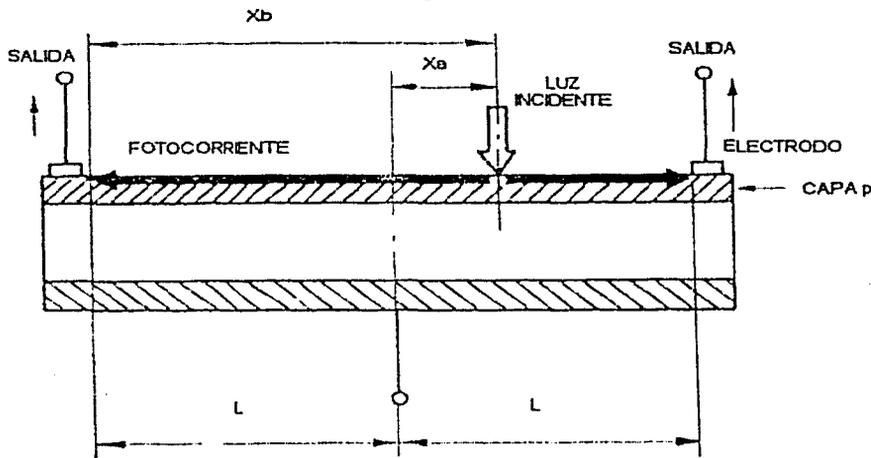


Figura 2.15. Parámetros del detector óptico de posición.

$$\frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} = x_d$$

2.7.4

### Detector unidimensional

Un detector óptico de posición puede ser clasificado en dos tipos: detector óptico de posición unidimensional y detector óptico de posición bidimensional. La figura 2.16 muestra la estructura de un detector unidimensional.

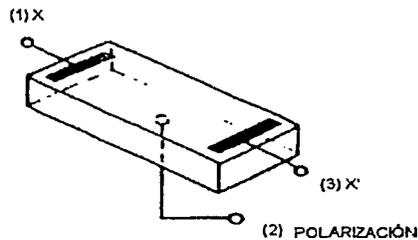


Figura 2.16. Estructura de un detector óptico de posición unidimensional.

La figura 2.17 es un circuito equivalente de la relación entre la corriente distribuida uniformemente dividiéndose en la capa resistiva y los correspondientes electrodos del detector unidimensional. Ya que el detector óptico de posición tiene distribución de circuitos  $C_j$  y  $R_p$ , esta constante de tiempo actúa como un elemento decisivo para la respuesta de la onda<sup>[23]</sup>. A través de un circuito de integración de señal de posición, sin embargo, el detector unidimensional puede ser usado para detección de un haz láser de un ancho de pulso de 100 ps.

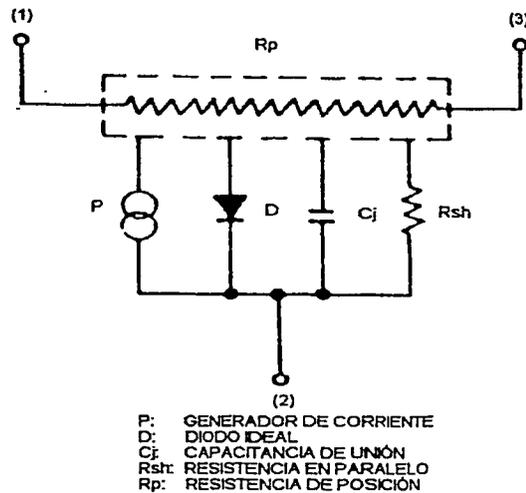


Figura 2.17. Circuito equivalente de detector óptico de posición unidimensional.

### Detector bidimensional.

Los detectores ópticos de posición bidimensionales pueden ser clasificados por su estructura en dos tipos: tipo doble lateral y tipo tetra lateral.

#### - Tipo doble lateral

Como se muestra en la figura 2.18 el tipo doble lateral tiene electrodos en ambas superficies (en la superficie superior y en la superficie inferior) de un fotodiodo. Como se muestra en el circuito equivalente<sup>[23]</sup> en la figura 2.19, cada señal de posición (fotocorriente) es únicamente dividida en dos partes por dos capas resistivas y por lo tanto, este tipo tiene una capacidad de detección de posición alta (el error de detección de posición es pequeño y una resolución alta).

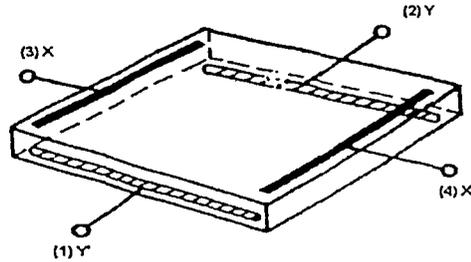


Figura 2.18. Estructura de un detector óptico de posición duo-lateral.

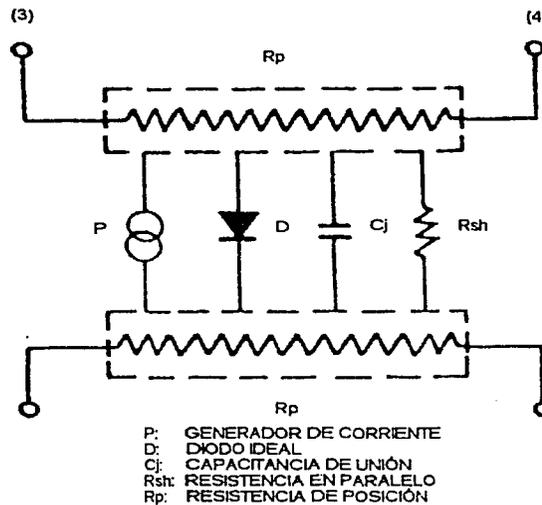


Figura 2.19. Circuito equivalente de un detector óptico de posición duo-lateral.

#### - Tipo tetra lateral

Como se muestra en la figura 2.20 este tipo tiene 4 electrodos en la superficie superior del fotodiodo<sup>[23]</sup>. La fotocorriente es dividida en 4 partes por la misma capa resistiva y la salida es una señal de posición (véase figura 2.21). Al compararlo con el tipo doble lateral, este tipo tiene una distorsión más grande en la circunferencia. Sin embargo, esto caracteriza la polarización que puede aplicarse fácilmente, una corriente de oscuridad que es pequeña y la respuesta en el tiempo es rápida.

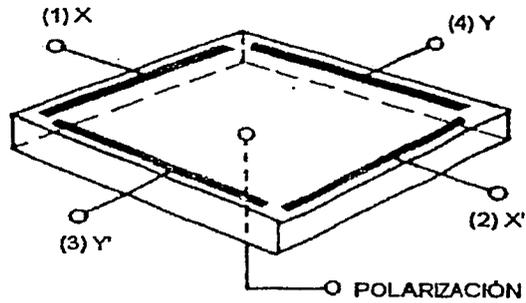


Figura 2.20. Estructura de detector óptico de posición tetra lateral.

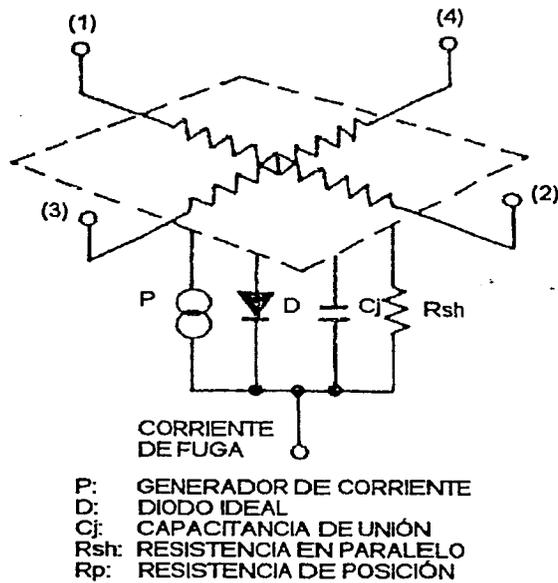


Figura 2.21. Circuito equivalente de un detector óptico de posición tetra lateral.

## 2.8. SUPERFICIES CONDUCTORAS HOMOGÉNEAS

En el estudio de los fenómenos eléctricos asociados al comportamiento de las líneas equipotenciales en las superficies resistivas homogéneas, resulta importante la representación gráfica de estas líneas, en este trabajo utilizamos un dispositivo que permite al estudiante y al investigador observar de manera sencilla su comportamiento, contribuyendo a la comprensión de estos fenómenos a través de su visualización, así como al desarrollo de modelos.

En el desarrollo de dispositivos de laboratorio de electricidad para la observación y estudio del comportamiento de líneas de campo y equipotenciales, se han propuesto gran cantidad de soluciones, básicamente están centradas en el uso de películas resistivas delgadas y sustancias electrolíticas<sup>[7]</sup>.

En este trabajo el dispositivo usado no utiliza película resistiva, la película es sustituida por un gel, fabricado con grenetina natural y sal común, elementos de fácil adquisición, bajo costo y no tóxicos.

Dado que el gel tiene que ser disuelto en agua en gran proporción, habrá que ver como se comporta esencialmente la solución en el agua. El agua, bajo la acción de un campo eléctrico, se polariza, dando origen a una constante dieléctrica alta. Bajo este punto de vista, es un material aislante que podría usarse en la fabricación de condensadores; pero por efectos térmicos, una pequeña fracción del total de moléculas se ioniza<sup>[4]</sup>:



Dejando iones positivos  $H^+$  libres e iones negativos  $OH^-$ . Estos iones, cuando se introducen electrodos cargados, se mueven de tal manera que intentan cancelar el campo eléctrico externo y se comportan como las cargas libres en un metal. Bajo la acción de un campo eléctrico constante, el agua se comporta como un conductor. Si las fluctuaciones del campo eléctrico son muy rápidas, las cargas no tienen tiempo de desplazarse distancias grandes, pero si de orientarse. En estas condiciones el agua se comporta como un dieléctrico.

Los materiales con enlace iónico tienden a separarse al disolverse en agua. La energía de los iones disueltos es menor que la energía de la molécula de agua completa disuelta, dado que la molécula del agua tiene un momento dipolar permanente, se acomoda rodeando a cada ion, reduciendo la energía del sistema. Debido a las fuerzas coulombianas entre los iones, éstos se dispersan de modo que las densidades de los iones positivos y negativos sean iguales, sin que se observe carga neta en el volumen de la solución.

Existen fluctuaciones en la densidad por la agitación. Las moléculas tienen una energía cinética promedio proporcional a la temperatura absoluta.

Si se aplica un campo eléctrico mediante dos electrodos sumergidos, cada ion será atraído hacia el electrodo correspondiente. El movimiento de iones de diferente signo ocurre en sentidos opuestos; pero como las densidades son iguales, la densidad neta de carga sigue siendo cero. Debido a las diferencias en las masas, y su grado de hidratación, los iones se mueven con diferente velocidad terminal y contribuyen de diferente manera a la corriente total, la cual es la suma de la conducida por los iones positivos más la de los iones negativos.

### **3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA EXPERIMENTAL**

**3.0 En este capítulo se presenta el dispositivo experimental para análisis de líneas equipotenciales en superficies finitas, así como el mapeo experimental y el análisis de los datos mediante un modelaje numérico, apoyado en un software diseñado para el análisis de líneas de campo eléctrico y equipotenciales.**

### 3.1. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

El dispositivo está formado por tres elementos fundamentales:

- 1.- Una película resistiva homogénea (gel).
- 2.- La fuente de polarización.
- 3.- Un voltímetro digital de corriente alterna.

Una película resistiva homogénea (gel) la cual se fabrica con una mezcla de grenetina natural y sal común, en proporciones 4:1 en masa, 100 grs de esta mezcla se disuelve en 1 litro de agua caliente, la cual se vierte en recipientes aislantes eléctricos de geometría diversas, como ejemplos tenemos una superficie circular o una cuadrada. Se pueden utilizar elementos tales como refractarios o charolas plásticas, procurando que la profundidad de la solución no exceda los 5 mm, a continuación se colocan los electrodos metálicos, que pueden ser tornillos de latón o acero inoxidable y se colocan de acuerdo con la geometría de la superficie a estudiar, y con una altura tal que sobresalga del nivel del líquido. Es necesario que el recipiente se coloque sobre una superficie nivelada, con el fin de obtener un espesor uniforme<sup>[6]</sup>.

Esta solución en el recipiente se coloca sobre una base metálica para que al enfriarse de forma natural (y que se disipe el calor uniformemente) se forme el gel resistivo. Para que los electrodos puedan ser reutilizados se recomienda que sean de acero inoxidable o latón. Además se recomienda que sobre la base exista una superficie metálica que disipe el calor uniformemente.

La fuente de polarización<sup>[7]</sup> en su versión simple está formada por un voltaje alterno de alimentación de  $100 \text{ mV}_{CA}$  máximo entre los electrodos, para disminuir los efectos electrolíticos. Puede utilizarse como fuente un generador de funciones comercial operando con señal senoidal, a frecuencia fija entre 60 Hz y 1 kHz como se muestra en la figura 3.1

Sin embargo, con base en esta experiencia se diseñó una segunda versión que simplifica la operación como se muestra en la figura 3.2. La señal que alimenta al gel, debe ser de corriente alterna, para evitar en lo posible efectos de polarización y electrólisis; la frecuencia no es un factor que afecte las mediciones, en este caso se fija a 500 Hz, pero la estabilidad en la amplitud si es un factor determinante en el resultado, por lo que se integro un generador senoidal de alta estabilidad con una variación máxima en la amplitud de 0.1% y con una distorsión armónica menor al 0.3 % estabilizada en 2.000 V. Para alimentar la superficie de trabajo, es recomendable atenuar la señal a 100.0 mV y aislarla con un amplificador operacional que integra al gel dentro del sistema de retroalimentación, logrando con esto que la señal no se modifique con los cambios en la resistencia del gel, debidos a evaporación, temperaturas, concentraciones.

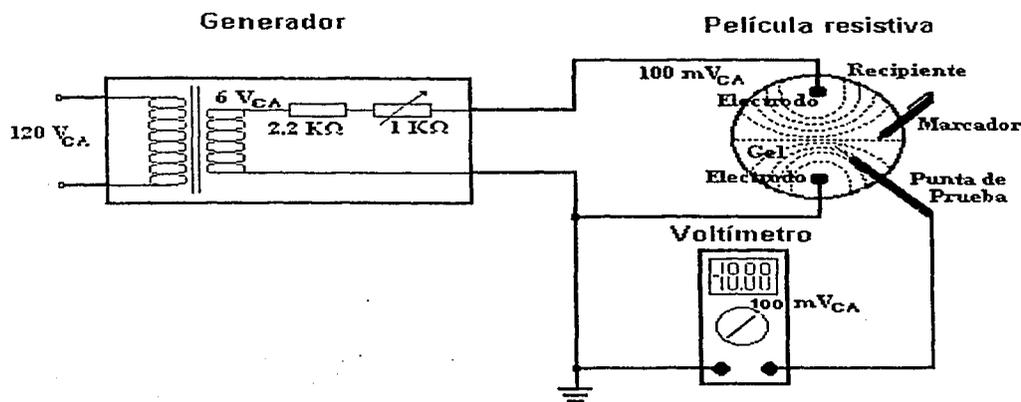


Figura 3.1 Equipo para detectar líneas equipotenciales

Un voltímetro digital de corriente alterna de tres o más cifras, para localizar las líneas equipotenciales con un conjunto de electrodos, un marcador y cables necesarios para las interconexiones, esto es en su primera versión. Como se muestra el dispositivo en la figura 3.1.

En su segunda versión la lectura del potencial en la superficie se realiza con una pluma conectada a un convertidor comercial *RMS-DC*, que elimina las componentes por potenciales de contacto. La señal de 0 a 100 mV es amplificada por un factor de 10 para medir de 0 a 1.00 V directamente a un voltímetro digital. Esto se muestra en la figura 3.2

Respecto a detalles de la experimentación, se modifican los elementos tales como la fuente de alimentación, el marcador y la punta de prueba, el nivel de la superficie de trabajo. la base del recipiente se cambio por una metálica, con el fin de minimizar los problemas y obtener una mejor imagen, tales como el espesor más uniforme en la elaboración de la superficie conductora, integrando un nivel de burbuja en la mesa de trabajo, las irregularidades en la resistividad debido a esfuerzos en la transición de sol a gel, se modificaron colocando una base metálica para la disipación uniforme del calor, así se buscó un adecuado contacto entre los electrodos y el gel, además se unió el marcador y la punta de prueba, para hacer las mediciones simultáneamente y así disminuir el error introducido al determinar eléctricamente la posición del potencial y el marcado de esta posición.

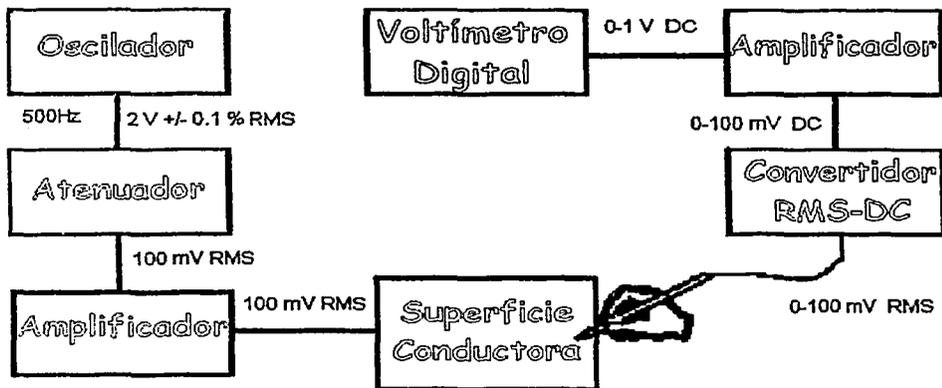


Figura 3.2 Diagrama esquemático del dispositivo experimental.

En la figura 3.3. se muestra una fotografía del dispositivo experimental para trazar líneas de campo eléctrico y equipotenciales en superficies finitas

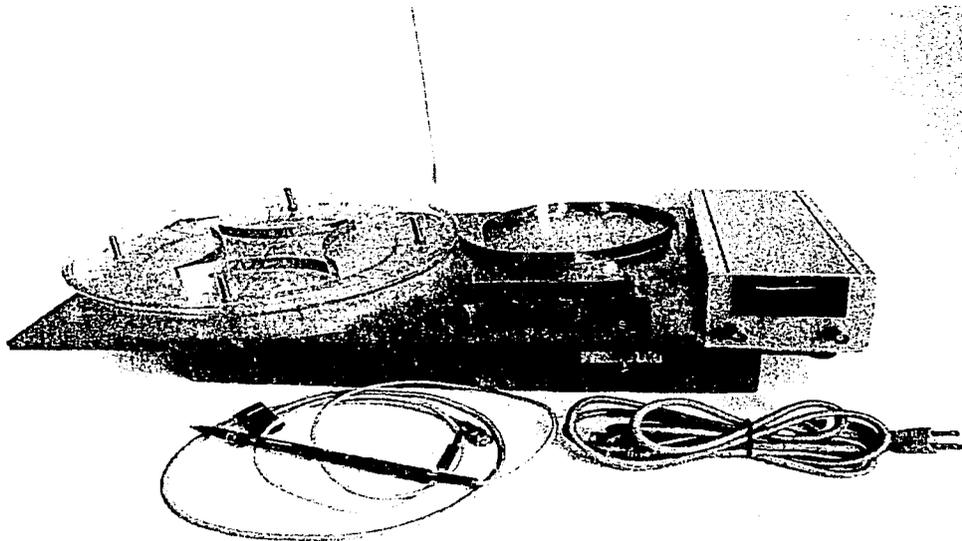


Figura 3.3. Fotografía del dispositivo experimental

En la parte central podemos observar la mesa de trabajo y el nivel de burbuja, sobre la mesa encontramos la fuente de voltaje en su versión compacta, electrodos con diversas geometrías, los recipientes del gel, en la parte inferior podemos encontrar la punta de medición y el cableado de alimentación de la fuente.

Así mismo tenemos que considerar que aunque la gelatina es un volumen, solamente las mediciones se hacen sobre la superficie de la gelatina, es decir a suponer que la punta de prueba para hacer las mediciones es de espesor infinitamente pequeño y entonces la contribución del campo eléctrico en la dirección  $z$  es muy pequeña, por tanto es despreciable y solamente vamos a considerar el campo eléctrico en un plano (con componentes  $E_x$  y  $E_y$ ).

Ahora bien, en la superficie vamos a colocar los electrodos en los extremos con una fuente de voltaje  $V$  (aplicando un voltaje a.c. del orden de  $mV$  y regulado para que no encontremos fenómenos electrolíticos), de tal manera que coloquemos electrodos y podamos simular un sistema de cargas (desde un dipolo eléctrico por ejemplo) en el que podremos observar las líneas equipotenciales existentes a través del material dado por una superficie de un gel resistivo y podamos tener la idea del comportamiento de los campos eléctricos y por ende, de las líneas de fuerza correspondientes, puesto que éstas no se pueden medir directamente, y ello nos va a dar una representación real de las líneas de fuerza de un sistema de cargas real acotado por superficies finitas y compararlos con el sistema dipolar en un plano infinito.

## 3.2 TRAZO DE LÍNEAS EQUIPOTENCIALES

La geometría de los electrodos no influye de manera fundamental en el experimento, puesto que solamente la frontera de la superficie influye de manera determinante en los datos experimentales.

Enseguida veremos el proceso para la generación de líneas equipotenciales.

Las líneas equipotenciales se obtienen conectando la diferencia de potencial a los electrodos, previamente ubicados en el gel, ajustándola a  $100 mV_{CA}$  a continuación se localizan con la punta de prueba del voltímetro digital, los puntos en la superficie resistiva de igual potencial, colocando una marca de tinta en cada uno de estos puntos, trazando de manera discreta estas líneas.

Una impresión de los resultados pueden obtenerse, en el caso más simple, copiando los resultados con una hoja de papel húmeda que se adhiere a la superficie del gel por 3 o 4

minutos y desprenderla se obtiene la imagen invertida impresa en la hoja. Este método puede repetirse varias veces.

Otro método simple es el de utilizar recipientes transparentes, de tal forma que al terminar el trazo, se voltea el recipiente y se copia en la hoja transparente de acetato, esto introduce un pequeño error por paralaje, pero se obtienen imágenes adecuadas para su análisis al superponerle una matriz de coordenadas.

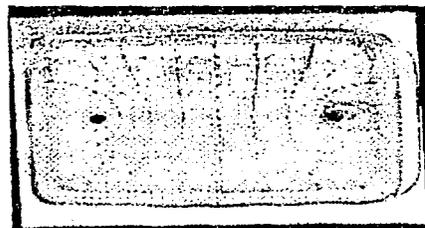
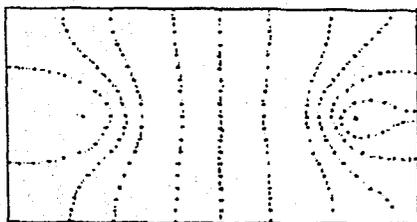
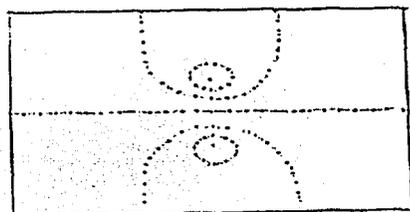


Figura 3.5. Graficación experimental mediante el equipo para graficar equipotenciales.

Habría que mencionar que en la segunda versión del dispositivo la punta de prueba y el marcador de tinta, se integraron en un sólo elemento de manera que el marcador es bifuncional, es decir, es punta de prueba y a la vez es marcador de puntos.

Finalmente, si se deja deshidratar la gelatina en el recipiente, se obtiene un registro permanente, pudiéndose utilizar como ejemplo del modelo gráfico impreso, como se muestra en la figura 3.5. De las gráficas obtenidas, es posible obtener una imagen fotográfica de la superficie o utilizar una cámara de vídeo acoplada a una PC para capturar y procesar una imagen.

### 3.3. ANÁLISIS NÚMÉRICO

Después del trazado experimental y observar las líneas equipotenciales y la influencia que tiene la frontera del recipiente (independientemente de la forma), el paso siguiente fue realizar un modelaje por PC de los datos experimentales para hacer un estudio de ellas se recurrió a un programa diseñado en el lenguaje de programación basic<sup>[17]</sup>, para graficar líneas de campo eléctrico y equipotenciales, las cuales fueron obtenidas del primer término de la ecuación 1.4.1. y de la ecuación 2.3.4 ambas no dependientes en el eje perpendicular (eje  $z$ ) al plano donde existen las cargas, el cual está diseñado de tal manera que al ponerse cualquier arreglo de cargas puede hacer diversos modelos gráficos de líneas de campo eléctrico y equipotenciales, ya sea mediante el usuario o un programa previamente escrito en una hoja de cálculo o en un editor de textos en ASCII.

Para calcular las líneas se puede usar el siguiente procedimiento<sup>[4]</sup>:

1.- Se escogen  $N$  puntos equidistantes sobre un círculo de  $R$  (en mm) radio alrededor de una carga positiva, que nos servirán como puntos iniciales para las  $N$  líneas de fuerza.

2.- Se calculan las componentes  $E_x$ , y  $E_y$  del campo eléctrico para uno de estos puntos, usando la ley de Coulomb para cada carga.

3.- Se obtienen los desplazamientos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  necesarios para llegar a un punto cercano en la dirección del campo eléctrico. Para esto se debe de cumplir que

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta \quad 3.3.1$$

Podemos escoger un avance de  $\delta$  (puede ser en cm), como separación entre puntos, lo que requiere que:

$$\delta^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad 3.3.2.$$

Despejando obtenemos:

$$\Delta x = \frac{\delta}{\left(1 + \frac{E_y^2}{E_x^2}\right)^{1/2}} \quad 3.3.3$$

$$\Delta y = \frac{\delta}{\left(1 + \frac{E_x^2}{E_y^2}\right)^{1/2}} \quad 3.3.4$$

4.- Se dibuja una línea recta entre el punto original y el punto al que se llega mediante los desplazamientos calculados.

5.- Se calculan las componentes  $E_x$  y  $E_y$  del campo eléctrico en el nuevo punto, reiniciando el proceso hasta llegar a las cercanías de la carga negativa.

6.- Se calcula otra línea de fuerza, eligiendo otro de los  $N$  puntos originales.

7.- Para líneas equipotenciales se hace primero el cálculo de  $E_x$  y  $E_y$  de la carga positiva

Así como de  $\Delta x$  y de  $\Delta y$  pero como las líneas son perpendiculares, ahora los desplazamientos son:

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{\Delta x}{\Delta y} \quad 3.3.5$$

8.- Se sigue el mismo procedimiento hasta llegar al mismo punto donde se parte de la equipotencial.

## **4. RESULTADOS**

**4.0** En este capítulo mostramos los resultados obtenidos del trazo experimental de los datos, así como el modelaje gráfico obtenido mediante un programa de PC y la comparación de las gráficas experimentales con las gráficas de la teoría clásica de la electrostática, así como las gráficas propuestas en este trabajo, bajo un modelo de cargas distribuidas en la frontera que predice la situación real y precisa de los experimentos en superficies finitas reales.

## 4.1. ANÁLISIS DE SUPERFICIES FINITAS

Las siguientes figuras se realizaron con el dispositivo experimental basado con el gel resistivo y del modelo gráfico con computadora.

En la figura 4.1 se muestra la gráfica obtenida con un recipiente de fronteras rectangulares (36 cm x 30 cm) la distancia de los electrodos puntuales es de 20 cm.

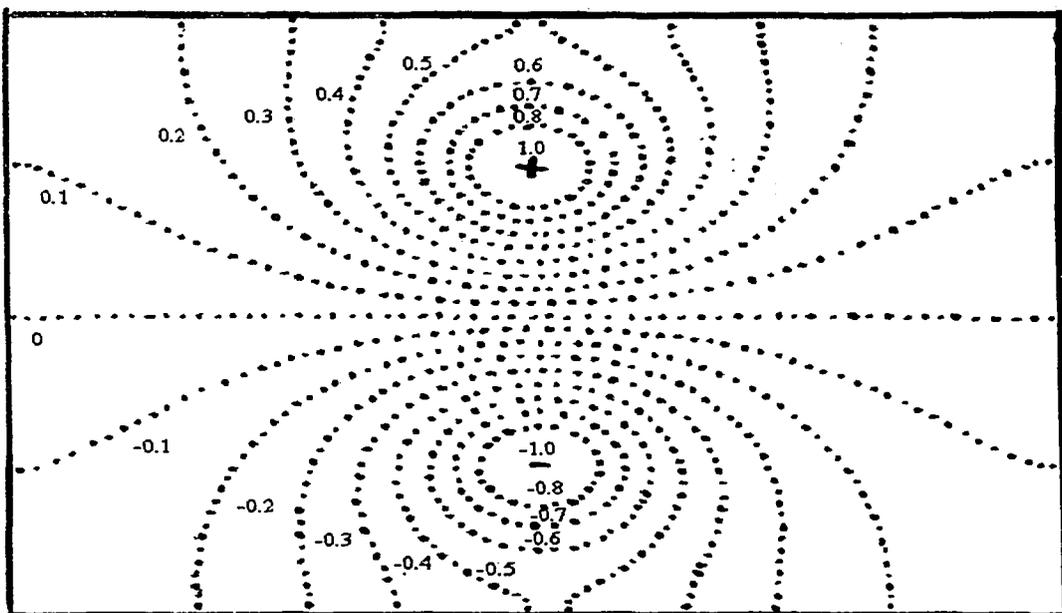


Figura 4.1. Gráfica de líneas equipotenciales de dos electrodos en un recipiente de paredes rectangulares.

Se observa que las líneas equipotenciales adquieren la forma aproximada de un dipolo con fronteras finitas, que al aproximarse a éstas, se desvían hacia fuera siguiendo una dirección perpendicular.

Enseguida se muestra un dipolo que mediante un programa se hace una simulación en un plano infinito, que es lo que se predice teóricamente.

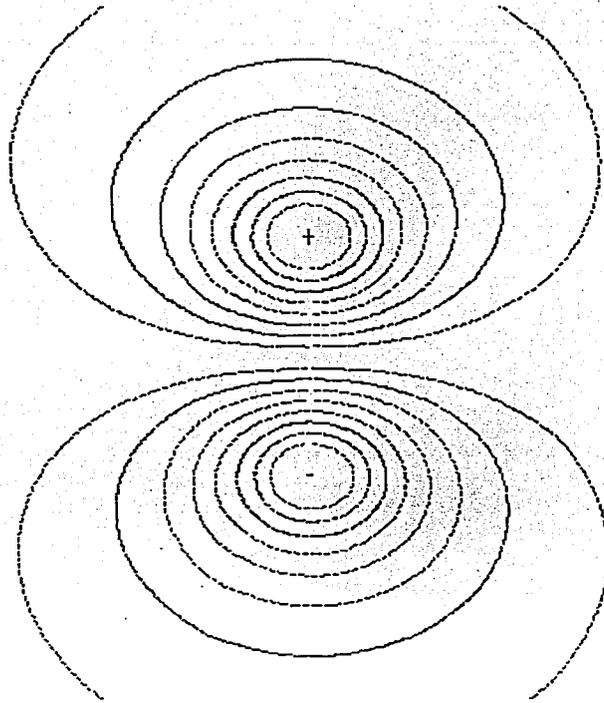


Figura 4.2. Gráfico teórico de las líneas equipotenciales de un dipolo eléctrico en un plano infinito, mediante un modelo de cargas en la frontera del sistema.

Podemos darnos cuenta que no coincide con el trazo experimental obtenido de la figura 4.1 con la simulación numérica en un plano infinito de la figura 4.2, ya que en las cercanías de la frontera, del recipiente, las líneas equipotenciales se desvían a la frontera, mientras que en plano infinito las líneas siguen las trayectorias circulares.

En la figura 4.1. las líneas equipotenciales dejan de parecerse a las de un dipolo eléctrico en un plano infinito como el que se muestra en la figura 4.2 y que por la influencia de las fronteras dieléctricas que ejercen una acción sobre las líneas de fuerza, es decir, se forma un acumulamiento en la frontera y hacen que las equipotenciales sean perpendiculares a ellas.

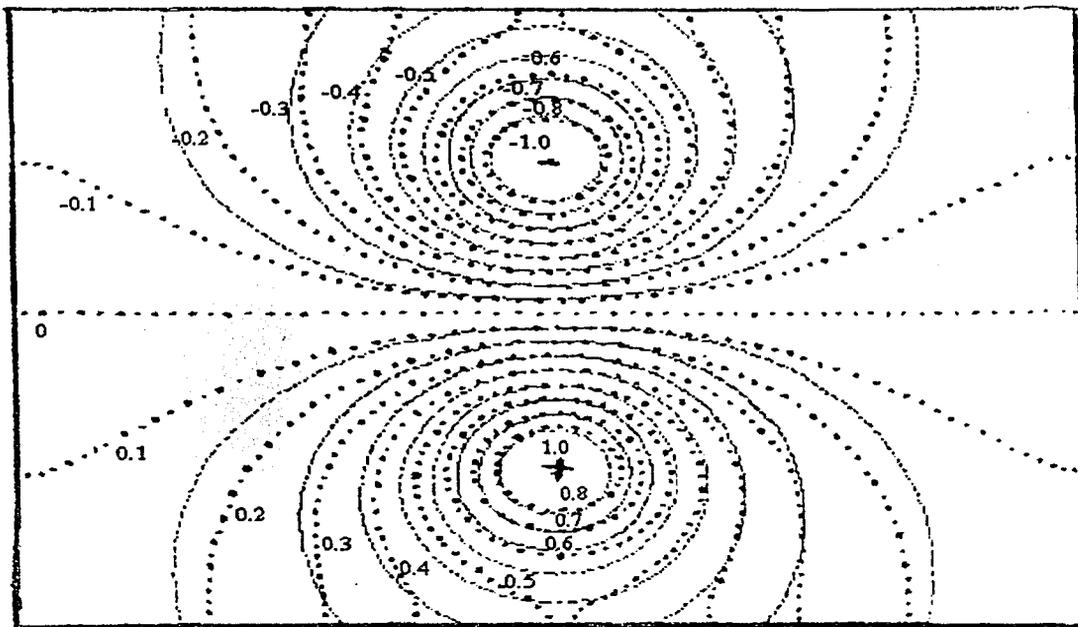


Figura 4.3. Superposición del modelo experimental y el análisis numérico en un plano infinito.

En la figura 4.3 se muestra las diferencias del modelo experimental y el análisis numérico en un plano infinito, donde podemos observar que las líneas equipotenciales en ambos modelos, se comportan exactamente iguales entre los electrodos (alejados por supuesto de la frontera de la superficie del gel) sin embargo, al aproximarse a las fronteras, las equipotenciales del modelo experimental se empiezan a desviar a las fronteras del gel, y por tanto, no siguen el análisis numérico de las líneas equipotenciales en un plano infinito, es decir, lo predicho por la teoría electrostática clásica.

Posteriormente se hace el análisis para superficies circulares, para ver que pasa con las superficies curvilíneas, para ello se trabajó en un recipiente dieléctrico circular con un diámetro de 30 cm, con los electrodos a una distancia de 15 cm. El trazo experimental se muestra en la figura 4.4.

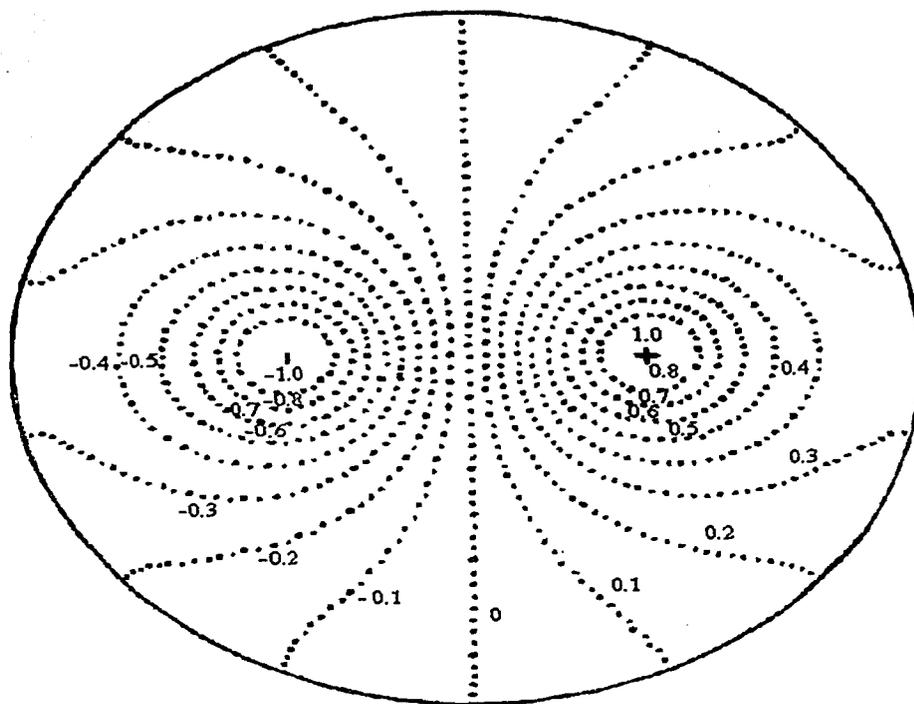


Figura 4.4. Representación experimental de las líneas equipotenciales de un dipolo eléctrico para un recipiente con frontera circular

En la figura 4.5 podemos observar que las líneas equipotenciales a medida que se van acercando a la frontera se desvían hasta que salen en ángulo recto con la frontera de la superficie de gel, es decir, las líneas son atraídas a los extremos de las fronteras, lo que indica que las líneas de campo eléctrico, se acumulan a lo largo de la superficie del gel, es decir, en esta parte se mantienen contenidas y en esa parte ocurre un acumulamiento de líneas de campo eléctrico y por tanto las líneas equipotenciales deben salir normales a la frontera del gel.

Ahora veremos la simulación numérica de un dipolo eléctrico en un plano infinito, que se hace en un programa y se muestra en la figura 4.5, para poder compararlo con el trazo experimental, obtenido en la figura 4.6.

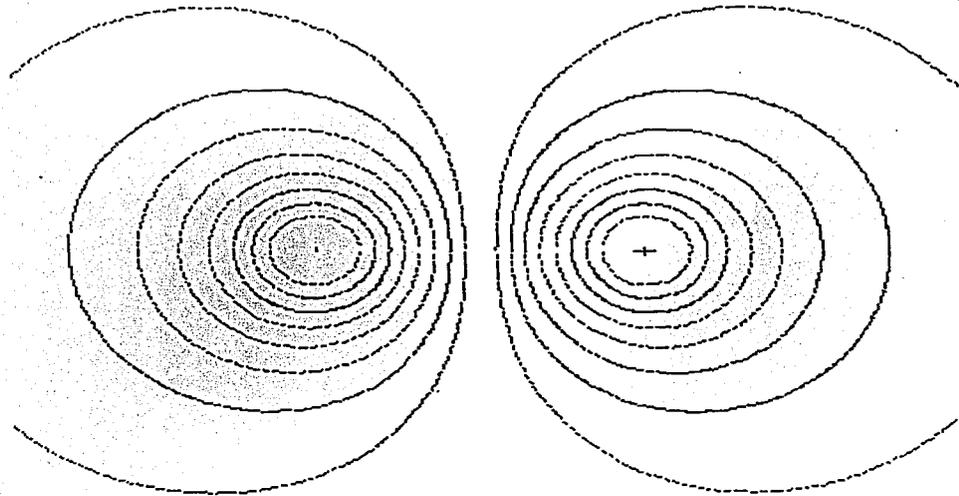


Figura 4.5. Representación teórica de las líneas equipotenciales en un plano infinito

Se puede observar que el modelo teórico predice que las líneas equipotenciales siguen trayectorias curvilíneas como círculos, esto quiere decir, que las líneas de campo eléctrico permanecen inalteradas, a menos de que exista un medio finito y las líneas equipotenciales se desvían en la orilla, ocasionando que no sigan el modelo propuesto por las ecuaciones, que predicen geometrías circulares en todo el modelo

En la figura 4.6 tenemos la superposición del modelo experimental y el análisis numérico en un plano infinito. Donde podemos observar que las líneas equipotenciales que se encuentran entre las cargas cumplen con el análisis numérico en un plano infinito, sin embargo, cuando en el modelo experimental las líneas se aproximan a las fronteras las líneas equipotenciales, se desvían hacia las fronteras.

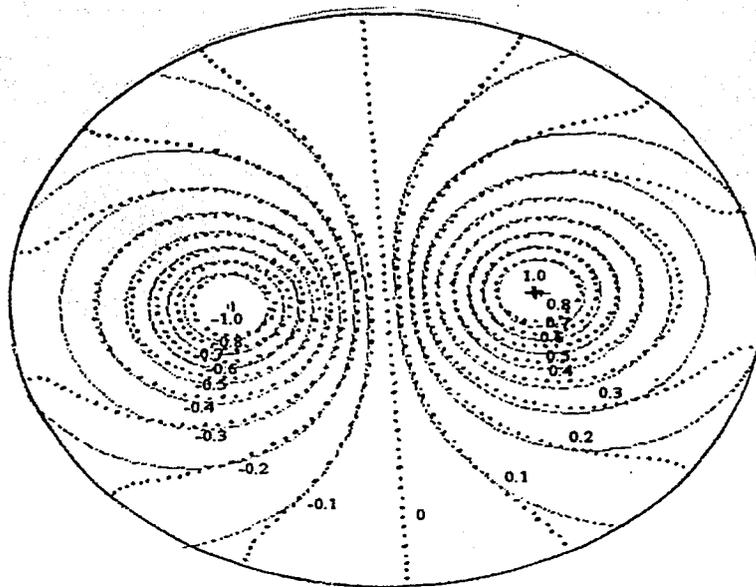


Figura 4.6. Superposición del modelo experimental y el análisis numérico en un plano infinito.

Enseguida veremos varias aplicaciones que podemos hacer mediante el dispositivo y el modelo propuesto en este trabajo.

## 4.2. APLICACIONES CON DETECTORES ÓPTICOS

En el desarrollo de un queratopógrafo láser (es un instrumento para medir la curvatura de la superficie corneal basado en técnicas de deflectometría láser), uno de los problemas que se presenta, es determinar con exactitud la posición de un haz láser y para ello se utiliza un detector SC50 marca UDT (United Detector Technology)<sup>[20]</sup>. Este detector es un fotodiodo de efecto lateral con dos amplificadores que proporcionan la

posición en dos ejes en forma continua; esta unidad sensa el centroide de una haz de láser y provee una salida analógica.

El fotodiodo caracterizado tiene una forma circular con un diámetro de 45 mm de área activa, acoplado a un acondicionador analógico marca UDT modelo 301-DIV en cada eje del detector. Según las especificaciones del fabricante<sup>[19],[20]</sup>, la señal es proporcional a la posición del haz en el detector en ambos ejes  $X$  y  $Y$ .

En la caracterización se usó un láser de He-Ne de 1.5 mW marca Spectra-Physics modelo 117A estabilizado en intensidad y dos posicionadores marca Newport de la serie 850, controlados por un sistema PMC300; para medir la señal de salida de los acondicionadores, se utilizó un osciloscopio marca Tektronics modelo TDS744A. El arreglo experimental se detalla en la figura 4.7

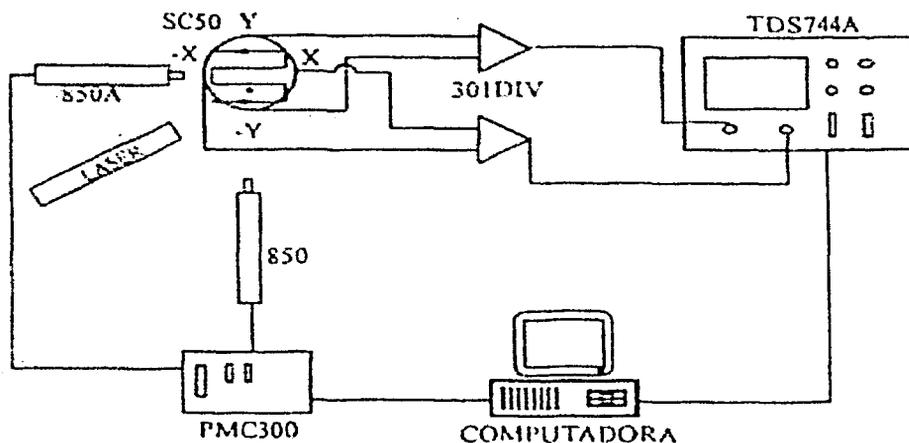


Figura 4.7 Arreglo experimental usado para caracterizar al detector SC50.

Se midió el voltaje a la salida de los amplificadores 301DIV a intervalos regulares de 2 mm en toda la superficie.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.8, en ella se observa que la salida  $V_x$ ,  $V_y$  de los 301DIV no es proporcional a la posición del haz en el detector, pues los datos deberían aparecer en una malla cuadrada con espaciamiento uniforme

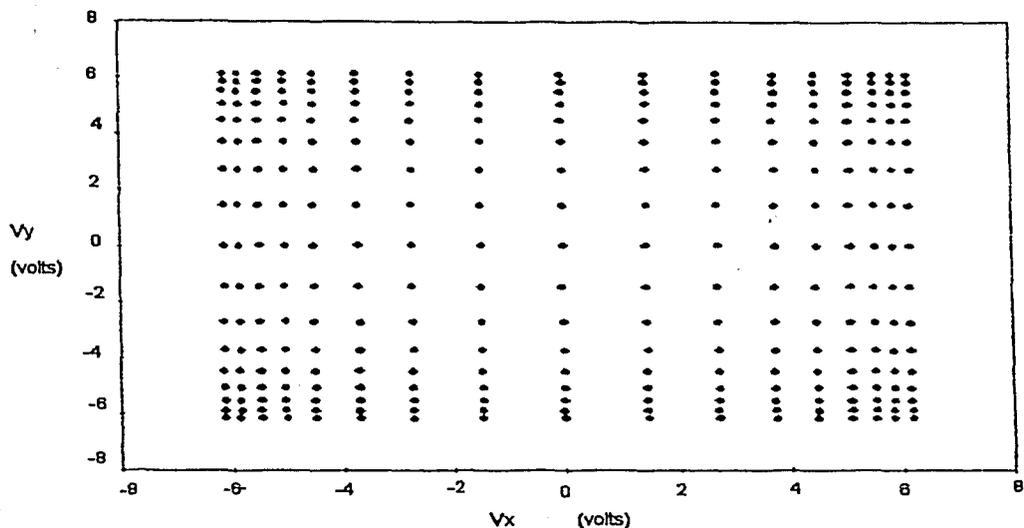


Figura 4.8. Respuesta del detector circular de posición de efecto lateral (se muestran los voltajes en ambos ejes del detector).

Si graficamos el comportamiento de un solo eje (cualquier eje paralelo a los tomados como  $V_x$  y  $X$ ), se observa que, la posición del haz se comporta como la tangente de la salida  $V_x$  del 301DIV como se muestra en la figura 4.9.

La determinación de los parámetros nos da una función:

$$X = A \tan\left(\frac{V_x}{B}\right) \quad 4.2.1$$

Donde A y B son parámetros que se obtienen al llevar a cabo una regresión lineal y todos los datos siguen el mismo comportamiento como se muestra en la figura 4.10.

Al aplicar el modelo para obtener las posiciones a partir de los voltajes medidos se obtienen los puntos que se muestran en la figura 4.10. En ella se puede apreciar como se corrige el espaciado de la malla de datos que se tiene en la figura 4.8.

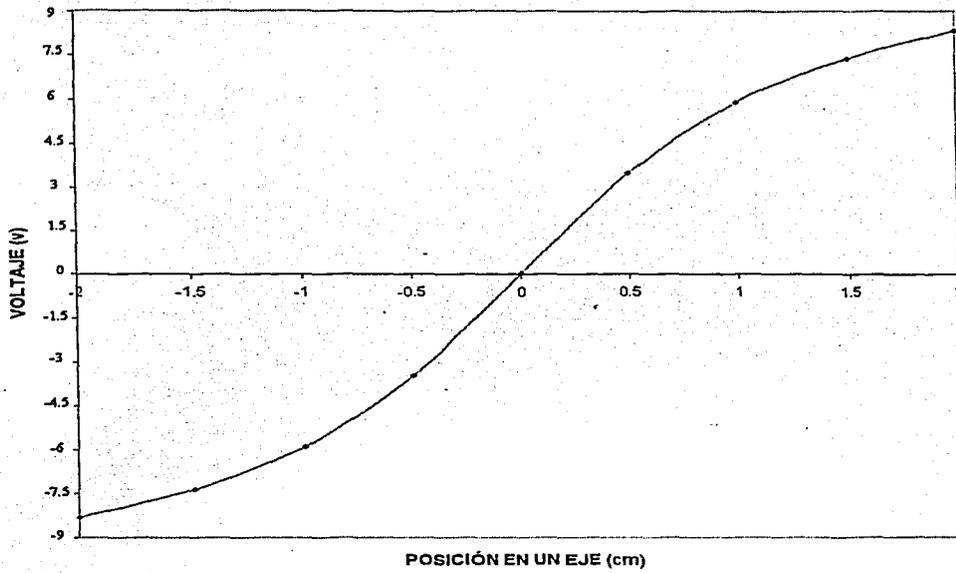


Figura 4.9. Comportamiento tangencial de  $X/V_x$ .

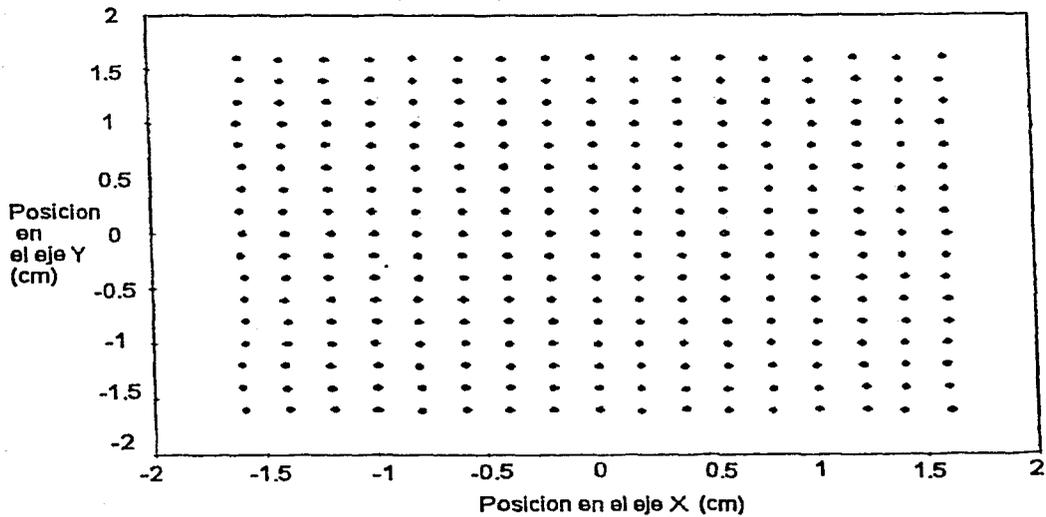


Figura 4.10. Coordenadas de la posición, obtenidas a través de la transformación matemática  $Atan(V_x/B)$ .

Si comparamos este resultado con las equipotenciales del modelaje gráfico experimental del gel, con la misma geometría del detector, como se muestra en la figura 4.11, se observa que el comportamiento de la distancia entre las líneas equipotenciales sobre las líneas de campo eléctrico, es el mismo que sigue la respuesta del detector; esto es, la respuesta no es lineal en toda la superficie, sin embargo la no linealidad en el centro es pequeña. La región donde la no linealidad es menor al 1% es aproximadamente el 10% de la superficie sensible total del fotodetector.

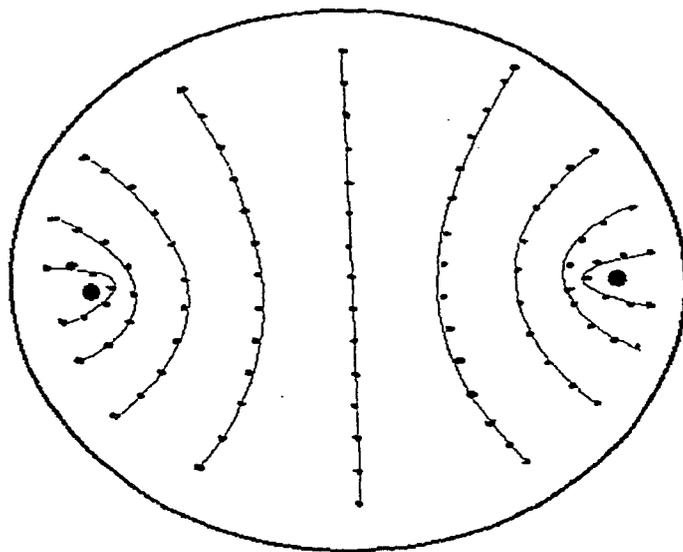


Figura 4.11. Equipotenciales de dos electrodos puntuales con frontera dieléctrica circular.

En el caso del detector de adquisición de imágenes por conteo de fotones, existe el mismo problema de no linealidad<sup>[14]</sup>, para aumentar la superficie donde la no linealidad es menor al 15%, se sugieren geometrías de frontera limitadas por arcos de círculo, mostradas en la figura 4.11, donde se mejora la no linealidad en el 14% de la superficie total.

Esta misma solución se puede aplicar a los DOPEL (Detector Óptico de Efecto Lateral)<sup>[24]</sup>; sin embargo ocasiona un incremento excesivo en el diámetro. El análisis experimental de la superficie fotosensible se realiza por medio de un dispositivo de laboratorio (que vimos en la sección 3.1); éste permite generar modelos de los comportamientos de las líneas equipotenciales en los detectores, permitiendo modificar la curvatura de estas líneas por medio del cambio de la geometría en la distribución de los electrodos y en las fronteras del modelo.

Veamos ahora el análisis de líneas de campo eléctrico y equipotenciales mediante el dispositivo para medir equipotenciales.

Recapitulando tenemos que el detector óptico de posición de ejes duales como está formado por un disco de silicio barnizado, con 4 electrodos conectados en forma equidistante alrededor de su perímetro. En ambos casos 4 electrodos están ligados al detector y las 4 corrientes generadas mediante fotoabsorción, son procesadas con el algoritmo adecuado para dar la posición XY. Los electrodos están conectados de forma tal que pares opuestos generan fotocorrientes que pueden ser procesada mediante un algoritmo para generar valores de desplazamiento en las direcciones X y Y, pero estas corrientes están sujetas a un campo eléctrico de conducción, los campos eléctricos por supuesto que no se pueden medir, aunque sabemos que perpendicularmente existen las líneas equipotenciales, que representan voltajes y éstos sí los podemos medir con el dispositivo para medir equipotenciales que hemos presentado en este trabajo. Con el muestreo experimental se obtuvo la figura 4.12 que representa las líneas equipotenciales para una superficie detectora de silicio (acerca de la polaridad de los electrodos, dos son positivos y dos son negativos).

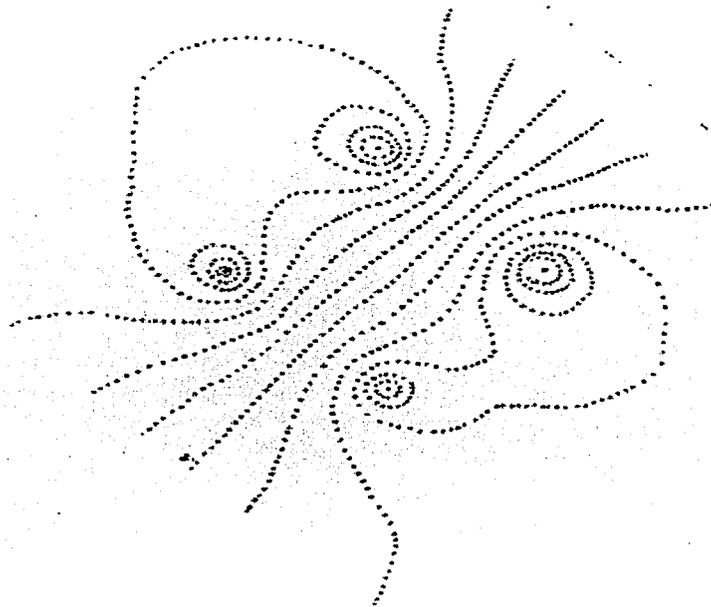


Figura 4.12 Gráfica experimental de un cuadrupolo en un detector

Tradicionalmente, el algoritmo se programa mediante el uso de circuitos electrónicos y la posición tiene algún porcentaje de error en la determinación de la posición. Algunas compañías <sup>[12]</sup>, utilizan algoritmos controlados por software y utilizan correcciones de

calibración almacenadas en memoria, a fin de linealizar la respuesta del detector y obtener una calibración precisa sobre toda la superficie detectora de silicio. Esta característica de linealización implica que a diferencia del detector de cuadrante, en el detector óptico de posición de ejes duales las mediciones son más precisas sobre toda la superficie.

En el detector óptico de posición se tiene 4 electrodos (prácticamente son dos dipolos) donde podemos, hacer una simulación teórica de las líneas equipotenciales y campo eléctrico como se muestra en la figura 4.13.

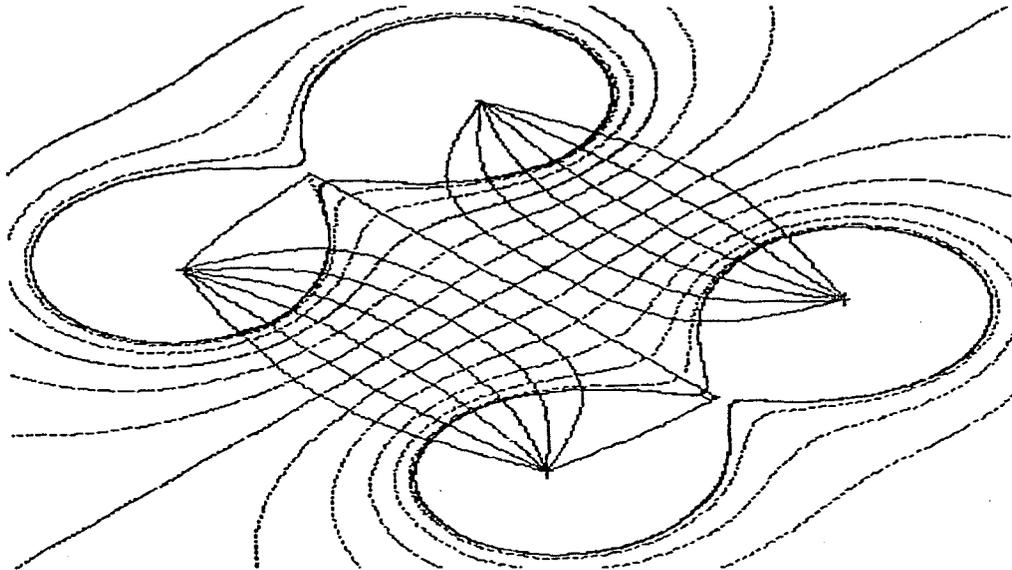


Figura 4.13 Representación de un cuadrupolo en un plano infinito

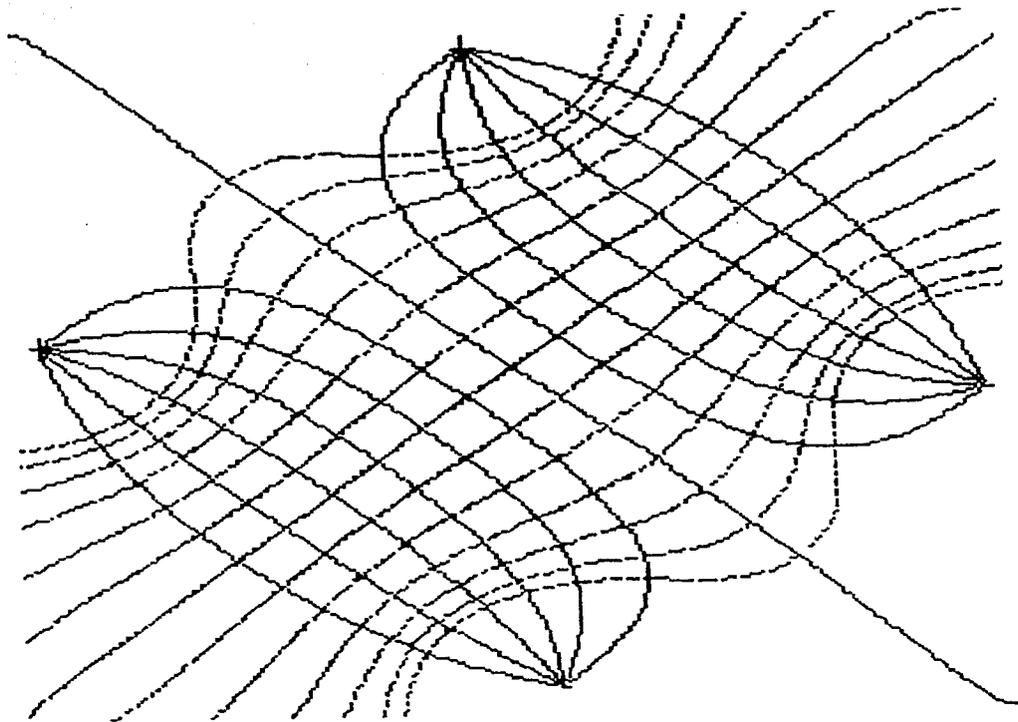
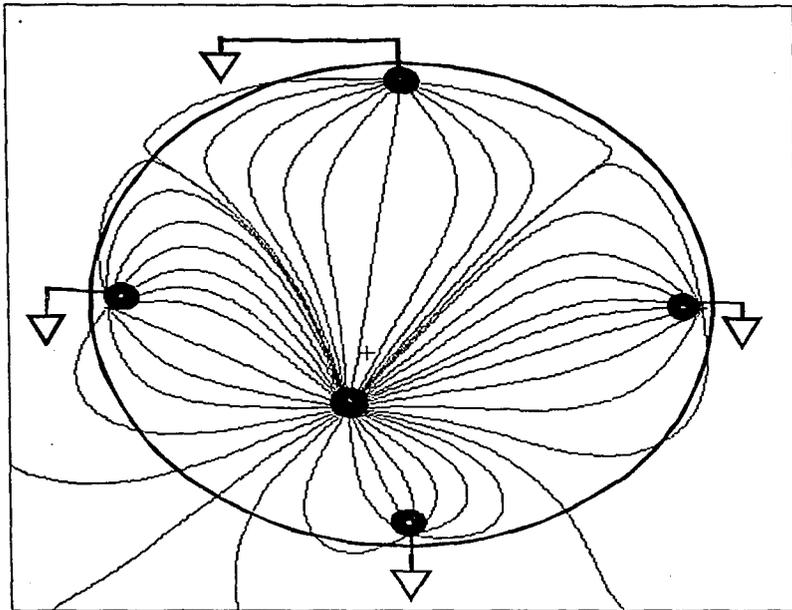


Figura 4.14. Representación de un cuadrupolo en un plano finito mediante el equipo para medir equipotenciales

(-100,100)

Deseas graficar más  
líneas ( S/N ) ?



(100,-100)

Figura 4.15 Modelo teórico de líneas de campo eléctrico de un cuadrupolo puntual, en el que hace incidir un haz de luz.

Ahora veamos el caso en que hacemos incidir un haz de luz, ya que en el detector tenemos un fotodiodo, que genera corrientes (como una fuente), es decir movimiento de cargas que siguen la trayectoria del campo eléctrico, por tanto al conocer las líneas de campo eléctrico, podemos conocer el desplazamiento de las cargas hacia tierra. Como se muestra en la figura 4.15. para el cuadrupolo puntual.

Observemos que en la figura 4.15. donde las líneas de campo eléctrico salen radiales en las proximidades de la carga incidente, sin embargo, al alejarse se curvan por acción de los electrodos y la superficie misma del detector, tenemos por tanto que las corrientes generadas se complicarían para determinar la posición del haz, en un sistema cuadrupolar. Ahora bien, podemos asegurar que las cargas siguen las trayectorias marcadas, esto se debe a que las corrientes conductoras en la superficie detectora se deben al campo eléctrico inducido por la fuente inducida por el haz de luz (puede verse como una carga positiva o fuente) y los electrodos receptores conectados a tierra (se podría ver como cuatro cargas negativas). Las cargas se sienten atraídas por el campo eléctrico inducido y conforme a la ley de Coulomb o la ley del inverso al cuadrado y por tanto podemos asegurar que las cargas siguen el camino marcado por las líneas de fuerza de los campos eléctricos en la superficie finita.

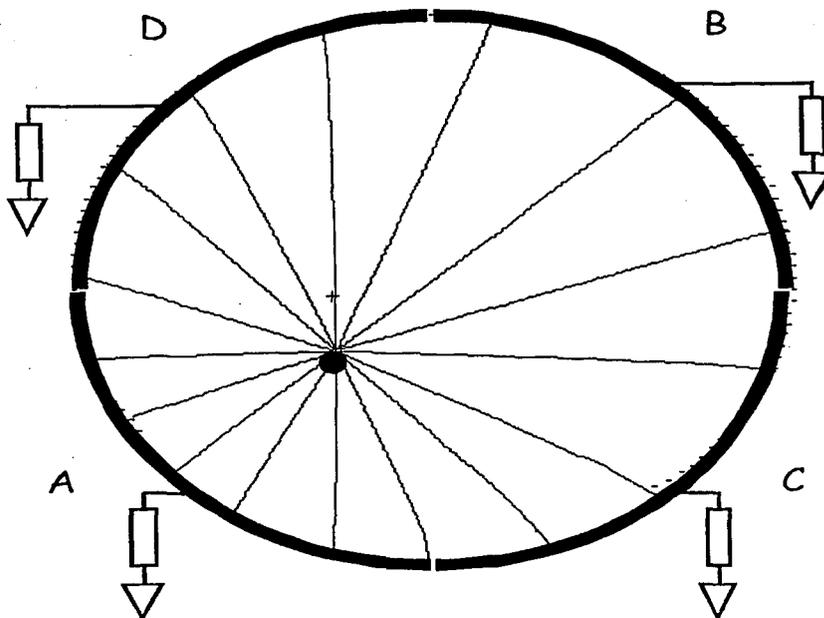


Figura 4.16. Líneas de campo eléctrico de un electrodo radial, incidiendo un haz de luz.

Para resolver este problema se colocaron 4 elementos radiales (semiarcos de círculo), de manera tal que los 4 electrodos (aislados entre sí), simulan una curva continua, con un electrodo circular y en la figura 4.16 se puede ver que las líneas salen radialmente, es decir, existe una corrección a los problemas de los detectores ópticos de posición, ya que los voltajes se comportan no linealmente con respecto a la posición (observar la figura 4.8 y la figura 4.15), y por tanto hay que hacer una transformación matemática del tipo tangente para linealizar (como se observa en la figura 4.10), sin embargo, como vemos en el modelo numérico y experimental (la superficie puede ser finita o infinita) en los 4 electrodos continuos aislados entre sí, donde las líneas de campo eléctrico salen radialmente hacia los electrodos ya que el electrodo acota las líneas de campo y equipotenciales como se muestra en la figura 4.16, es decir, mediante un electrodo circular podemos linealizar el sistema.

Cuando la luz incide sobre la superficie, la carga eléctrica es proporcional a la energía de la luz ocurre que, la carga eléctrica se desplaza a través del gel (el cual tiene una resistividad  $\rho$  constante) y sale a través por dos electrodos A y B (supongamos primero por dos electrodos). La fotocorriente colectada por un electrodo es proporcional al inverso de la distancia entre la posición incidente  $r_i$  y el electrodo  $i$ . Es posible obtener una fórmula de la posición de incidencia  $x$  en función de las fotocorrientes  $I_A$  y  $I_B$ , colectadas por los electrodos.

Veamos la siguiente deducción

Supongamos que tenemos una superficie circular unitaria dada por la expresión clásica:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad 4.2.2$$

Ahora supongamos que el haz de luz incide en cualquier punto de la superficie  $P_1 = (x_1, y_1)$ , que tiene por pendiente:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad 4.2.3$$

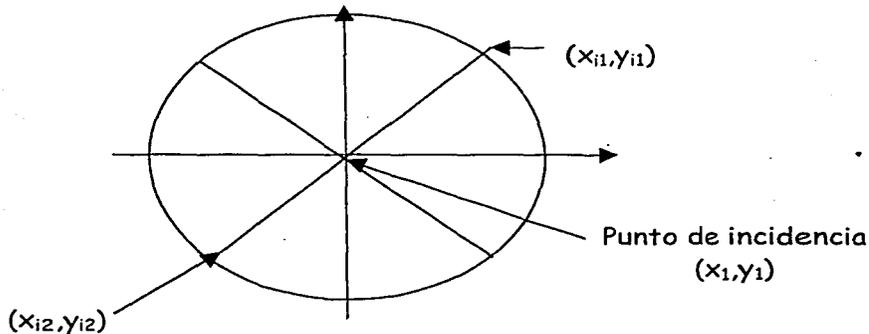


Figura 4.17 Esquema de la superficie de un fotodetector, haz de incidencia  $(x_1, y_1)$ , puntos de colección de corriente con intersección con la frontera  $(x_{i1}, y_{i1})$  y  $(x_{i2}, y_{i2})$ .

Las soluciones a las coordenadas  $x$  están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$x_{i1, i2} = \frac{(m^2 x_1 + m y_1) \pm \sqrt{(m^2 x_1 + m y_1)^2 - (-m^2 - 1)(-2 m y_1 x_1 - y_1^2 + m^2 x_1^2)}}{(-m^2 - 1)} \quad 4.2.4$$

$$y_{i1, i2} = \sqrt{1 - x_{i1, i2}^2} \quad 4.2.5$$

Donde  $x_{i1}, y_{i1}, x_{i2}, y_{i2}$ , son soluciones a las intersecciones del círculo de radio 1 y las rectas que cruzan el punto  $x_i, y_i$  (es decir, son los puntos donde ambos electrodos colectan ambas corrientes). Esto los podemos observar en la figura 4.17

Consideremos el conjunto de todos los puntos sobre los electrodos colectores  $A$  y  $B$  (observemos para los dos electrodos a lo largo del eje de las abscisas). Como se muestra en la figura 4.18

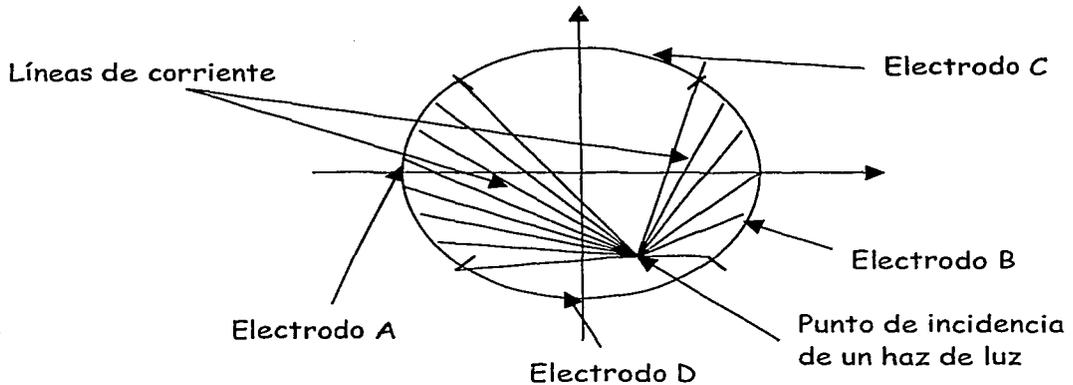


Figura 4.18. Electrodos colectores A, B, C y D de la superficie de un fotodetector, haz de incidencia y líneas de corriente hacia dichos electrodos colectores en la frontera, aislados entre si y puestos a tierra.

Ahora al trazar los radios a partir de  $x_i$  y  $y_i$ , y calcular las distancias de cada radio tomando en cuenta que la superficie es resistiva y homogénea, entonces las resistencias de las trayectorias radiales son de la forma:

$$R_i = k_1 l_i \quad 4.2.6$$

Donde  $k_1$  es la constante de la resistividad del gel.

La corriente será:

$$I_i = \frac{k_2}{l_i} \quad 4.2.7$$

Donde  $k_2$  es la constante de conductividad del gel.

Calculamos los radios  $l_{1i}$  y  $l_{2i}$  de las correspondientes regiones  $A$  y  $B$ , dadas por las distancias siguientes:

$$l_{1i} = \sqrt{(x_1 - x_{1i})^2 + (y_1 - y_{1i})^2} \quad 4.2.8$$

$$l_{2i} = \sqrt{(x_1 - x_{i2})^2 + (y_1 - y_{i2})^2} \quad 4.2.9$$

Al usar la ecuación 2.7.4. y haciendo la suma sobre los electrodos  $A$  y  $B$  tenemos que:

$$x = \frac{\sum_{1i=1}^n \frac{k_2}{l_{1i}} - \sum_{2i=1}^n \frac{k_2}{l_{2i}}}{\sum_{1i=1}^n \frac{k_2}{l_{1i}} + \sum_{2i=1}^n \frac{k_2}{l_{2i}}} \quad 4.2.10$$

Donde las contribuciones de las corrientes sobre los electrodos  $A$  y  $B$ , darían la correspondiente  $x$ :

$$x = \frac{\sum_{1i=1}^n I_{1i} - \sum_{2i=1}^n I_{2i}}{\sum_{1i=1}^n I_{1i} + \sum_{2i=1}^n I_{2i}} \quad 4.2.11$$

Que finalmente serían las diferencias de las corrientes totales en los electrodos  $A$  y  $B$  entre la suma de las corrientes es decir:

$$x = \frac{I_A - I_B}{I_A + I_B} \quad 4.2.12$$

Análogamente se haría para  $y$  pero, sobre en los electrodos  $C$  y  $D$

$$y = \frac{I_C - I_D}{I_C + I_D} \quad 4.2.13$$

Mediante el modelo anterior se obtiene una grafica que muestra la relación de posición del haz incidente real y la posición del modelo matemático, que se muestra en la figura 4.18.

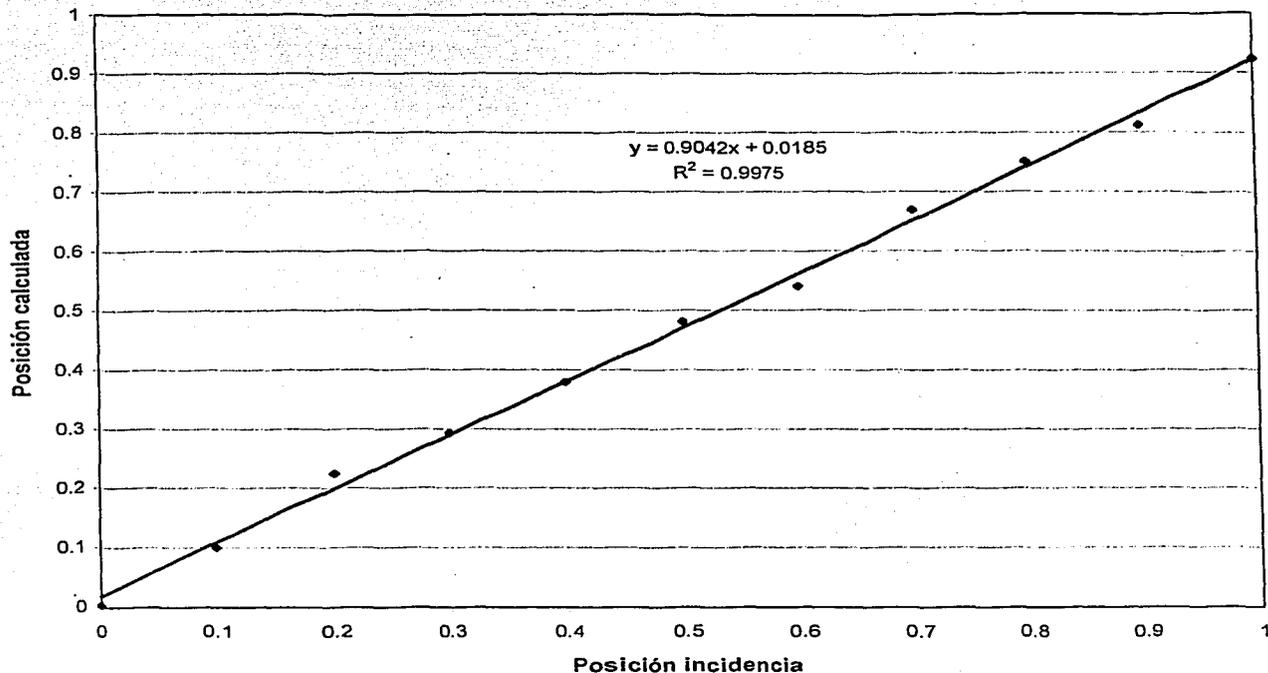


Figura 4.18. Valores de la posición real de incidencia de un detector óptico de posición y la posición del modelo matemático predicho mediante el análisis de líneas de campo eléctrico y equipotenciales

Donde podemos observar que existe una relación proporcional entre la posición real del haz de luz y la posición calculada. Por tanto, nuestro cálculo de posición del haz con respecto a las corrientes no depende de la intensidad de la corriente, sino de un cociente de diferencia de corrientes y suma de corrientes, es decir es independiente de la intensidad. Pero, que dicha relación sólo podemos utilizar si tenemos líneas de campo eléctrico radiales y ello solo lo logramos hacer mediante un análisis de líneas de campo de eléctrico y equipotenciales como el que proponemos en este trabajo. El margen de error puede disminuir si nosotros integramos los radios de las corrientes sobre las respectivas áreas, es decir si pasamos de un cálculo finito a un cálculo infinito.

### 4.3. INFLUENCIA EN TECNOLOGÍAS BÁSICAS DE TELECOMUNICACIONES

Siempre que se estudia la transmisión de energía, puede adoptarse dos puntos de vista aparentemente divergentes, los cuales están íntimamente ligados con las manifestaciones del mismo fenómeno. Un punto de vista es considerar la energía transportada por los voltajes y corrientes en el circuito. A altas frecuencias, este punto de vista encuentra algunas dificultades y no es tan satisfactorio como el punto de vista de campo, el cual considera la energía como contenida y transportada por los campos eléctrico y magnético.

Fundamentalmente, las cargas, que constituyen el flujo de corriente, son responsables de los campos eléctricos en el circuito, puesto que estos comienzan y terminan en cargas positivas y negativas, respectivamente. Además, el movimiento de las cargas da lugar al campo magnético que es perpendicular a la dirección del movimiento de la carga y al campo eléctrico.

Estas dos últimas consideraciones sirven para establecer una relación no matemática entre voltajes y corrientes en un circuito y los campos eléctricos y magnéticos resultantes, lo cual es suficiente para un examen de la transmisión de energía.

Estas relaciones son válidas no sólo para líneas de dos conductores, estas líneas generalmente son usadas en telefonía, y se les conoce actualmente como cables UTP que es un cable multipar trenzado sin protección y STP que es con protección, véase la figura. 4.20

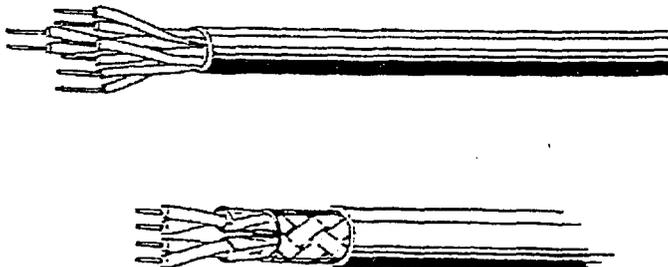


Figura 4.20. Cables de dos conductores conocidos como UTP y STP

También encontramos guías de onda, cable coaxial, microcinta, como se muestran en la figura 4.21 que son usadas comúnmente como líneas transmisión en microondas. Así pues, los voltajes y corrientes quedan relegados a un papel de importancia secundaria.

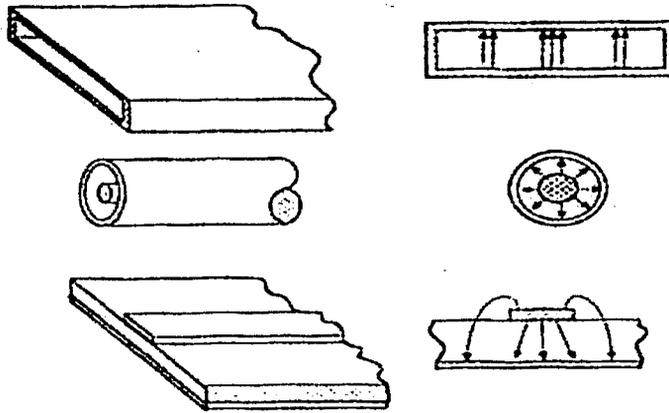


Figura 4.21 Tipos de líneas de transmisión en microondas (en orden descendente): guía de onda, cable coaxial, microcinta.

En la figura 4.22 se muestran los campos eléctricos y magnéticos para las líneas paralelas de dos conductores.

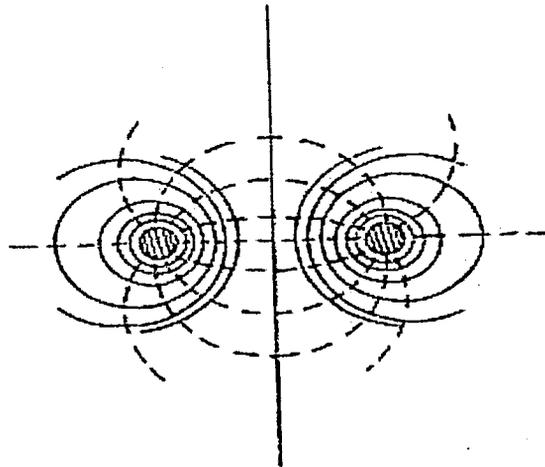


Figura 4.22 Gráfica de las líneas de campo eléctrico y magnético que aparecen en una línea de dos conductores

En la figura 4.23 se muestran los campos eléctricos y magnéticos para una guía de onda circular y en la figura 4.24 para un cable coaxial.

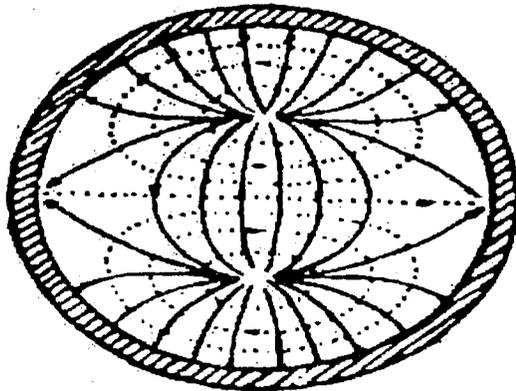


Figura 4.23. Configuraciones de campo en una guía de onda circular modo  $TM_{11}$ .

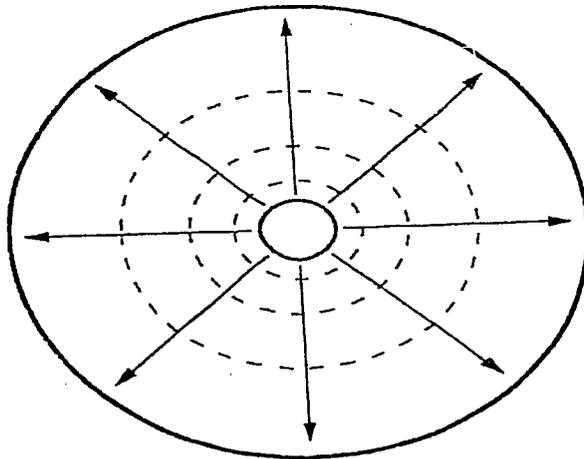


Figura 4.24. Configuraciones de campo en un cable coaxial modo  $TM_{01}$ .

Enseguida se muestra configuración de campo para una guía de onda rectangular en la figura 4.25

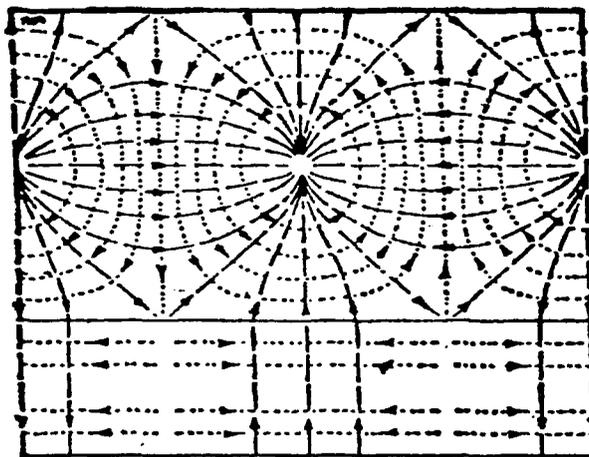


Figura 4.25. Configuración de campos de una guía de onda rectangular modo  $TE_{10}$ .

Donde podemos observar que las líneas de campo eléctrico salen perpendiculares por la acción de la superficie conductora en una guía de onda circular y para una guía de onda rectangular. Por lo tanto, mediante un análisis de líneas de campo eléctrico podemos describir procesos que son fáciles de ver visualmente y posteriormente se puede realizar el proceso matemático complejo.

#### 4.4 APLICACIONES CON ELECTRODEPÓSITOS

Veamos ahora el siguiente problema:

Los depósitos electrolíticos que se realizan dentro de una cuba electrolítica para uniformar los depósitos en el electrodo central.

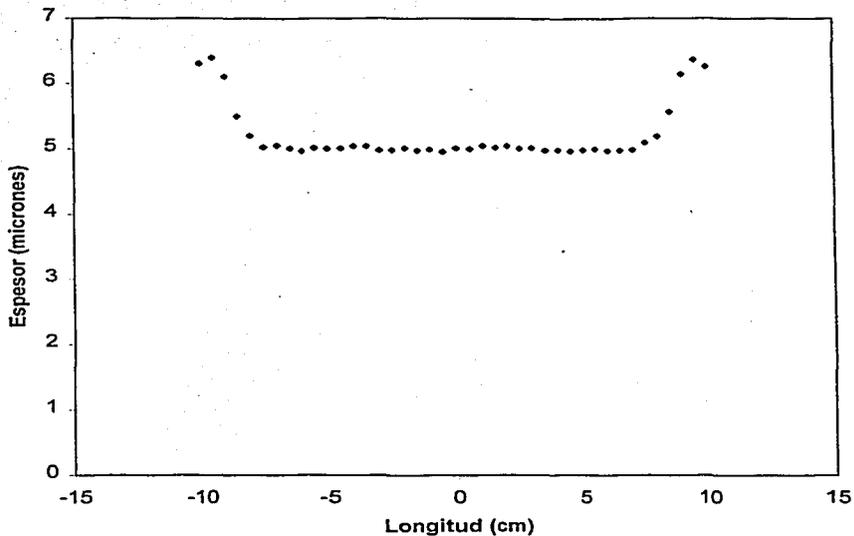


Figura 4.26. Gráfica del espesor del electrodepósito central en función de la longitud del electrodo.

El problema de no uniformidad de los depósitos en las cercanías de las puntas del electrodo central, se debe a que aumenta la concentración de las líneas de campo eléctrico, en la vecindad de los extremos de los electrodos exteriores hacia el electrodo central, gráficamente como se muestra en los datos experimentales<sup>[22]</sup> de la figura 4.26.

Este problema tiene dos soluciones una de ellas es que matemáticamente se pueden plantear las ecuaciones de la teoría electrostática, con condiciones a la frontera, que complica la situación matemática, la otra opción es la simulación numérica de las líneas de campo eléctrico de donde se obtuvo la figura 4.27. Se puede observar que las líneas de campo se acumulan en las cercanías de las puntas del electrodo central, ya que los iones se mueven en dirección de las líneas de campo, y como en este punto existe una mayor densidad de líneas de campo eléctrico, entonces existe un acumulamiento de iones en las cercanías de las puntas, conduciendo a la no uniformidad de los depósitos.

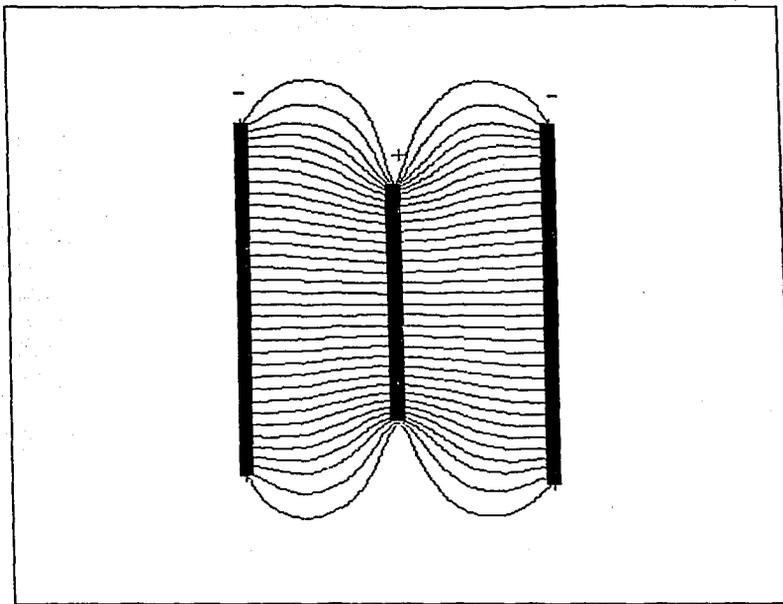
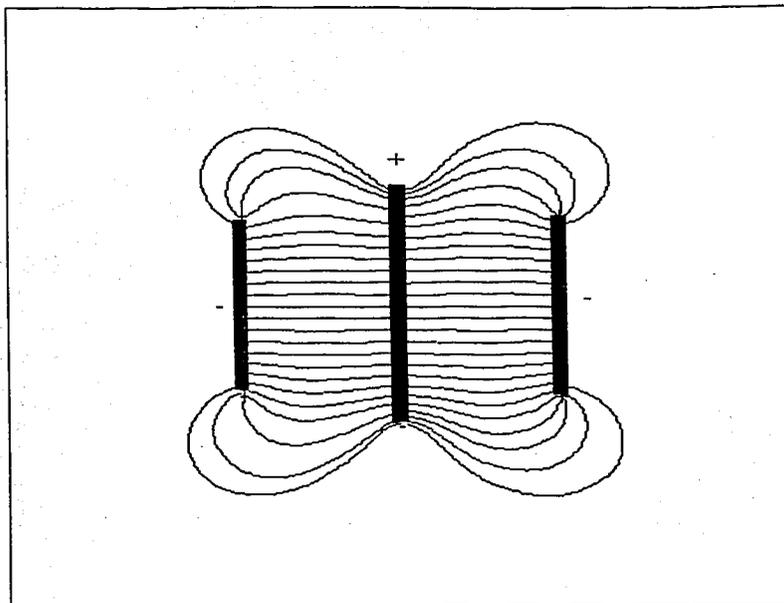


Figura 4.27. Líneas de campo eléctrico en un sistema de 3 electrodos lineales, en el que el electrodo central es más pequeño que los otros 2.

Se realiza una simulación numérica de los campos eléctricos en la celda electrolítica, donde sabemos que se retira material de los electrodos externos a través de las líneas de campo eléctrico para depositarlos en el electrodo interno de 20 cm de largo, como se muestra en la figura 4.27.



(100,-100)

Figura 4.28. Líneas de campo eléctrico en un sistema de 3 electrodos lineales, en el que el electrodo central es más grande que los otros 2.

Para solucionar esto, se modifica la longitud de los electrodos externos en una relación 4:5 al electrodo central, entonces las líneas en la vecindad de la punta aumenta el número de líneas, sin embargo, la intensidad de la corriente disminuye con la distancia, pues la longitud de la trayectoria aumenta y por consiguiente el número de iones disminuye, aunque el número de líneas sea mayor y la distribución se uniformiza, ya que la densidad de las líneas de campo eléctrico disminuye en las cercanías de las puntas del electrodo central como se muestra en la figura 4.28, ocasionando que los depósitos se uniformicen.

En la figura 4.29. se muestra los datos experimentales<sup>[22]</sup>, como es el espesor de los depósitos en el sistema modificado, donde se uniforman los depósitos sobre el electrodo central.

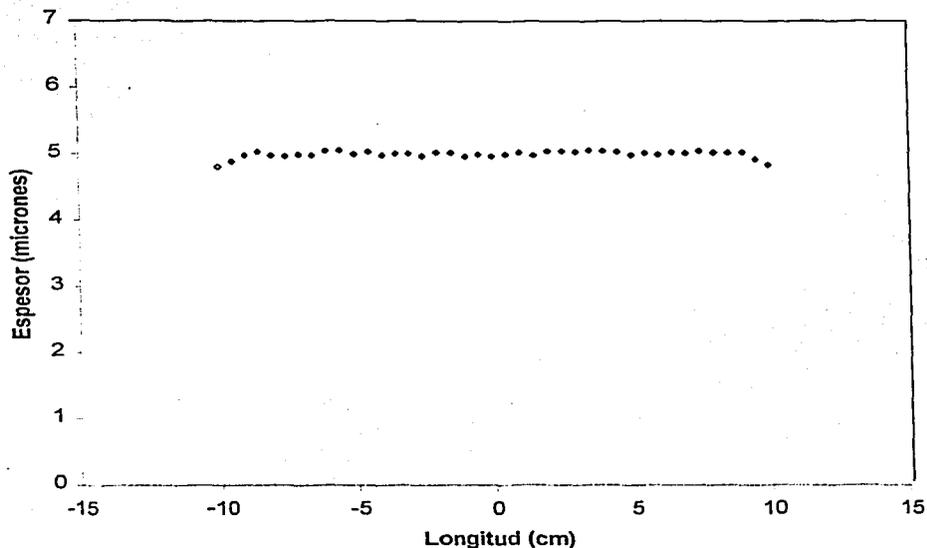


Figura 4.29. Uniformización del electrodepósito central, disminuyendo los electrodos externos

Donde podemos observar que existe una uniformidad de los depósitos en el electrodo central, resolviendo satisfactoriamente el problema.

Podemos observar que con el análisis numérico de líneas de campo eléctrico, es más fácil de ver que ocurre con el problema y resolverlo, y que es una opción más de solución, cuando el desarrollo matemático se complica. Esto es una aplicación del sistema propuesto en este trabajo.

**ESTA TESIS NO SALIR  
DE LA BIBLIOTECA**

## 5. CONCLUSIONES

Para el análisis de líneas de fuerza de campos eléctricos en superficies finitas que representan a los dispositivos reales, es decir, con fronteras, se requiere de métodos teóricos, experimentales y simulación numérica. Las aplicaciones en dispositivos tales como detectores ópticos de posición, (linealización), depósitos electrolíticos (uniformización), donde los métodos matemáticos pueden complicarse, se presentan soluciones de modelos numéricos y experimentales que permiten visualizar la configuración de las líneas de fuerza y equipotenciales.

Se presentan soluciones numéricas que simulan modelos reales en planos finitos y se comparan con los modelos en planos infinitos, y se diseña un dispositivo que permite realizar la observación de líneas equipotenciales en superficies conductoras homogéneas, que cualquier laboratorio de enseñanza de media superior y superior puede tener; en la versión final, del sistema se consideran las variaciones en la resistencia del gel y se mejora la medición de los voltajes en las líneas equipotenciales, ya que en la punta de medición permite la localización de los puntos equipotenciales y la marcación de éstos y permite obtener mayor exactitud en los resultados experimentales, para el correspondiente análisis de líneas de campo eléctrico en superficies finitas.

Las líneas equipotenciales en los modelos finitos son normales en la frontera de la superficie experimental, atribuyéndose esto a que las líneas del campo eléctrico siguen el contorno de la frontera, porque no se salen. Este efecto es observado en el dispositivo experimental.

## 6. APÉNDICE

Enseguida se muestra la geometría y ecuaciones que gobiernan las coordenadas cilíndricas bipolares<sup>[1]</sup>.

Las líneas de fuerza producidas por dos cargas de signo opuesto, pueden ser descritas usando coordenadas cilíndricas bipolares.

El potencial producido por dos líneas de carga de densidad  $q_l$  y  $-q_l$  situado a una distancia  $d$  hacia la derecha y a la izquierda del origen, respectivamente puede ser escrito

$$V = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \log_e r_B + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \log_e r_A = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \log_e \frac{r_A}{r_B} \quad 6.1$$

Donde  $r_A$  y  $r_B$  son distancias a partir de las cargas positivas y negativas, respectivamente, hacia el punto en cuestión.

A partir de esta ecuación es que la función compleja apropiada es:

$$\log_e \frac{r_A e^{j\theta_A}}{r_B e^{j\theta_B}} \quad 6.2$$

Y por lo tanto las líneas de fuerza están dadas por la parte imaginaria lo mismo que las curvas:

$$\theta_A - \theta_B = \beta \quad 6.3$$

Estos son círculos que pasan a través de dos puntos  $x=d$  y  $x=-d$  mostrados en la figura 6.1. Consideremos a  $V$  como un parámetro que puede tomar una serie de valores, la ecuación 6.1 también representa una familia de círculos. Estos son los círculos sólidos de la figura 6.1. Puesto que las ecuaciones de los círculos están dadas por:

$$r_A^2 = (x+d)^2 + y^2 \quad 6.4$$

$$r_B^2 = (x-d)^2 + y^2 \quad 6.5$$

La ecuación 6.2 puede ser escrita como:

$$V' = \log \frac{r_A}{r_B} \quad 6.6$$

Donde

$$V' = \frac{2\pi\kappa_0}{q_l} V \quad 6.7$$

Tenemos que

$$e^{V'} = \frac{[(x+d)^2 + y^2]^{1/2}}{[(x-d)^2 + y^2]^{1/2}} \quad 6.8$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$e^{2V'} = \frac{[(x+d)^2 + y^2]}{[(x-d)^2 + y^2]} \quad 6.9$$

Simplificando la ecuación se obtiene:

$$y^2 + \left( x - \frac{e^{V'} + e^{-V'}}{e^{V'} - e^{-V'}} d \right)^2 = \left( \frac{2}{e^{V'} - e^{-V'}} \right)^2 d^2 \quad 6.10$$

El coeficiente de  $d$  del lado izquierdo es la cotangente hiperbólica de  $V'$  ( $\coth V'$ ) y el coeficiente de  $d^2$  del lado derecho es el cuadrado de la cosecante hiperbólica de  $V'$  ( $\operatorname{csch} V'$ ).

Por lo tanto esto puede ser escrito brevemente como:

$$y^2 + (x - d \coth V')^2 = (2 \operatorname{csch} V')^2 d^2 \quad 6.11$$

Análogamente se obtienen las otras ecuaciones, que están dadas por las siguientes ecuaciones:

Y finalmente se obtiene que las ecuaciones que describen las coordenadas bipolares son:

$$x^2 + (y - d \cot V')^2 = d^2 \csc^2 V' \quad 6.12$$

$$z = z \quad 6.13$$

o bien

$$x = \left( \frac{d \operatorname{senh} V'}{\cosh V' - \cos V'} \right) \quad 6.14$$

$$y = \left( \frac{d \operatorname{sen} V'}{\cosh V' - \cos V'} \right) \quad 6.15$$

$$z = z \quad 6.16$$

Siendo  $0 < V' < 2\pi$ . En la figura al anterior muestra las proyecciones de las superficies coordenadas sobre el plano  $xy$ . Girando las curvas alrededor del eje  $y$ , y lo llamamos eje  $z$ , se obtiene un sistema de coordenadas toroidales.

La figura 6.1 muestra dos cargas de signo opuesto, separadas por una distancia  $d$ . En coordenadas cilíndricas bipolares en un punto  $P$  sobre el plano es representada por dos vectores  $r_A$  y  $r_B$ , más dos ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$  respectivamente, dibujados a partir de dos puntos fijos  $A$  y  $B$  los cuales están localizados simétricamente a partir del origen a una distancia  $d$ . En la figura podemos observar los figuras circulares de las líneas equipotenciales y de las líneas de campo eléctrico.

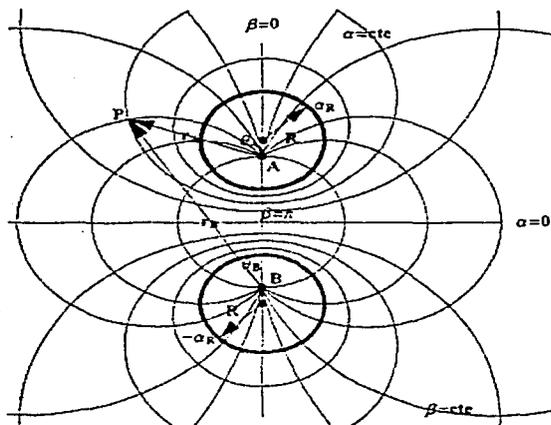


Figura 6.1. Configuración de un dipolo en coordenadas cilíndricas

## 7.- REFERENCIAS

- [1].- Harnwell G P., *Principles of electricity and electromagnetism*, (Mc. Graw Hill, 1949)
- [2].- Jeans S.J., *The Mathematical theory of electricity and magnetism*, (Cambridge at the University Press, 1963)
- [3].- Reitz R. J, *Fundamentos de la teoría electromagnética*, 3ª. Edición (Fondo Educativo Interamericano)
- [4].- Riveros H. G., *Electricidad y magnetismo*, 1ª. Edición (Trillas, 1988)
- [5].- Spiegel M. S., *Análisis vectorial e introducción al análisis tensorial* (Mc. Graw-Hill, 1988)
- [6].- Nogueira A.A., M. González, *Equipo para observar líneas de campo y equipotenciales con aplicaciones de investigación y didácticas*, Memorias SOMI XII Congreso de Instrumentación, San Luis Potosí, 1997
- [7].- Nogueira A.A, M. González, *Dispositivo para observar líneas de campo y equipotenciales*, Rev. Mex. Fís. **45** (1999) 78-81
- [8].- Reyes M.A., E. Geffroy, *Study of low reynolds number hydrodynamics generated by simmetric corotating two-roll mills*, Rev. Méx. Fís. **46** (2) (2000) 135-147
- [9].- Coombs C. F., C. A. Coombs, *Communications network test and measurement handbook*, (Addison Wesley 1997)
- [10].- Spiegel M.S., *Teoría de fluidos*, (Mc Graw-Hill, 1971).
- [11].- Lyman, M Kells, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Book Co. Inc. 1965.
- [12].- Lampton, F. Parece, Rev. Sci. Instr, **50**, (1979).
- [13].- Hamamatsu Photonic, PIAS-TI, *Photon counting image acquisition system*, Catalogo, 1990.
- [14].- Nogueira, A., González, M., *Influencia de la geometría de los electrodos en la respuesta de la superficie de detectores ópticos*, Memorias SOMI XII Congreso de Instrumentación, San Luis Potosí, 1997.
- [15].- Richard O. Brooks, *Manual de laboratorio para mediciones en microondas*, Ed. Marcombo, 1976

- [16].-Rodolfo Neri Vela, *Líneas de transmisión* McGraw-Hill/Interamericana editores S.A. de C.V.
- [17].-Andrade, Jorge, *Programa para graficar líneas equipotenciales y líneas de campo eléctrico en lenguaje basic*, Facultad de Ciencias UNAM, 2002.
- [18].-James W. Daily, Ronald R. F. Harleman, *Fluids dynamics*, Ed. Addison Wesley Publishing Co., Reading Mass, USA. 1966.
- [19].- UDT *Model 301DIV Signal Conditioning Amplifier*, Manual del usuario.
- [20].- UDT *The Guide to Position Sensing*, Manual del usuario.
- [21].- Pozard, David. *Microwave Engineering*, Addison Wesley. 1980.
- [22].- Torres, Julieta. *Electrodepósitos*, SMS-Laboratoire Traitements de Surface, EMSE. Saint-Etienne FR. 2001.
- [23].- Hamamatsu. *Position-Sensitive Detectors*. Hamamatsu Photonics K.K., Solid State Division. Japan.
- [24].- Montaña Espinosa, Carlos R. *Efectos no lineales en detectores ópticos de posición*. Tesis Facultad de Ciencias. 2001.