

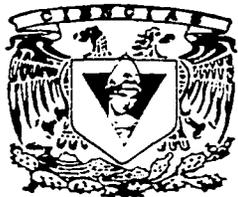


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"NEUTRINOS MASIVOS: OSCILACIONES EN EL VACIO"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
ANGEL MANZUR MARTINEZ



DIRECTOR DE TESIS: DR. MANUEL TORRES LABANSAT





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"NEUTRINOS MASIVOS: OSCILACIONES EN EL VACIO"

realizado por Angel Manzur Martínez

con número de cuenta 9756963-9 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. Manuel Torres Lahansat

Propietario

Dr. Axel de la Macorra Pettersson

Propietario

Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero

Suplente

Dra. Myriam Mondragón Ceballos

Suplente

Dr. Luis Gustavo Cahral Rosetti

**Consejo Departamental de Física**

Dra. Patricia Goldstein Menache



FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# Agradecimientos

Quiero dedicar esta tesis a mis padres, Angel y María de la Luz y a mi abuelito por todo su apoyo y sus consejos que me han dado durante todo este tiempo, a mi hermana por aguantarme todos estos años y toda mi familia por su apoyo y cariño.

Quiero agradecer al Dr. Manuel Torres por su asesoría para realizar este trabajo.

A los sinodales por sus valiosos comentarios y sugerencias.

A todos mis profesores que tuve en la carrera por todos los conocimientos que compartieron y por todas sus enseñanzas.

A todos mis amigos y compañeros por toda la diversión que hemos tenido: Diana, Nadia, Nacho, Rodrigo, Daniel, Montse, Abraham, Enrique, Alejandro H y H, Carlos A., Pech, Marel, Rosas, Ana, Myriam, León, Gris, y todos los que se me están olvidando

# THE HISTORY OF THE UNITED STATES

The history of the United States is a story of growth and change. From the first European settlers to the present day, the nation has evolved through various stages of development. The early years were marked by exploration and the establishment of colonies. The American Revolution led to the birth of a new nation, and the subsequent years saw the expansion of territory and the growth of industry. The Civil War was a pivotal moment in the nation's history, leading to the abolition of slavery and the strengthening of the federal government. The 20th century brought significant social and economic changes, including the rise of the industrial revolution and the emergence of the United States as a world superpower. Today, the United States continues to face new challenges and opportunities, and its history remains a source of inspiration and guidance for the future.



# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	¿Queremos neutrinos con masa?	2
1.2	¿Qué implican los neutrinos masivos?	3
1.3	Resumen de la tesis.	5
<b>2</b>	<b>Interacciones Electrodébiles</b>	<b>6</b>
2.1	Interacciones Débiles	6
2.2	$SU(2) \otimes U(1)$	8
2.2.1	Construcción de $SU(2) \otimes U(1)$	8
2.2.2	Números cuánticos de $SU(2) \otimes U(1)$	8
2.3	Lagrangiano "débil."	9
2.3.1	Rompimiento espontáneo de la simetría.	10
2.3.2	Espectro de masas.	10
2.3.3	Corrientes cargadas y neutras.	12
2.4	¿Cuántas familias de neutrinos hay?	13
2.5	¿Qué sigue?	13
<b>3</b>	<b>Propiedades de los Neutrinos.</b>	<b>15</b>
3.1	Partículas de Dirac vs. Partículas de Majorana	15
3.2	Ecuación de Dirac y campos de Majorana.	16
3.3	Representaciones de las matrices de $\gamma^\mu$ y $C$	18
3.3.1	Representación de Dirac.	18
3.3.2	Representación de Majorana	19
3.3.3	Representación quirál.	19
3.3.4	Otras representaciones.	20
3.4	Simetrías discretas y los neutrinos de Majorana.	20
3.4.1	Conjugación de carga $C$ .	20
3.4.2	Transformaciones bajo $P$ .	21
3.4.3	Transformaciones bajo $T$ .	21
3.4.4	Transformaciones bajo $CP$ .	22
3.4.5	Transformaciones bajo $CPT$ .	22
3.5	Decaimiento doble $\beta$ .	22
<b>4</b>	<b>Masas y oscilaciones de Neutrinos.</b>	<b>24</b>
4.1	Diagonalización de Matrices.	24
4.2	El Lagrangiano de los neutrinos.	25
4.2.1	Término $L_{masa}$	25
4.2.2	Lagrangiano $L_{cin}$	28

4.2.3	Caso general. . . . .	28
4.3	Mecanismo de "see-saw." . . . .	29
4.4	Oscilaciones de Neutrinos en el vacío . . . . .	32
4.4.1	Oscilaciones con cambio de quiralidad o C (una sola familia). . . . .	32
4.4.2	Oscilaciones de sabor (2 familias). . . . .	36
4.4.3	Caso ultrarrelativista. . . . .	38
4.4.4	Aproximación para N familias. . . . .	41
4.4.5	Matriz de mezcla $U^{MKS}$ . . . . .	43
4.4.6	Aplicación de la probabilidad de oscilación. . . . .	44
<b>5</b>	<b>Oscilaciones de neutrinos solares. . . . .</b>	<b>46</b>
5.1	Producción de neutrinos solares. . . . .	46
5.2	Flujo de neutrinos solares en la Tierra. . . . .	48
5.2.1	Modelo A, modelo mínimo. . . . .	48
5.2.2	Modelo B, modelo extendido. . . . .	49
5.3	Experimentos para la detección de neutrinos solares. . . . .	50
5.3.1	Experimentos basados en absorción de neutrinos. . . . .	50
5.3.2	Experimentos basados en dispersión de neutrinos. . . . .	50
5.4	Efecto de promediar sobre la energía. . . . .	52
5.4.1	Promedio para el modelo A. . . . .	52
5.4.2	Promedio para el modelo B. . . . .	53
5.5	Experimentos para detección de neutrinos solares. . . . .	53
5.6	Ajuste a los experimentos. . . . .	59
5.6.1	Distintas Soluciones . . . . .	60
5.7	Resultados de optimizar $\chi^2$ . . . . .	61
5.7.1	Resultados para el modelo A (2 parámetros). . . . .	61
5.7.2	Resultados para el modelo B (4 parámetros). . . . .	72
5.8	Otros modelos. . . . .	84
<b>6</b>	<b>Conclusiones . . . . .</b>	<b>86</b>
6.1	Recomendaciones a trabajos futuros. . . . .	88
<b>A</b>	<b>Propiedades de la matrices <math>\gamma</math> . . . . .</b>	<b>89</b>
A.1	Transformación de Lorentz . . . . .	90
<b>B</b>	<b>Programas. . . . .</b>	<b>92</b>
B.1	Resolución de integrales definidas. . . . .	92
B.2	Minimización de funciones utilizando MINUIT . . . . .	92
B.3	Programas . . . . .	93

# Índice de Figuras

2.1	Interacción mediante un bosón intermedio. . . . .	7
3.1	Transformación <i>CPT</i> de un neutrino. . . . .	15
3.2	Neutrinos de Dirac . . . . .	16
3.3	Neutrinos de Majorana . . . . .	16
3.4	Diagrama del decaimiento doble beta. . . . .	23
4.1	Matriz de mezcla para los neutrinos. . . . .	44
5.1	Espectro de energía de los neutrinos producidos en el Sol. . . . .	48
5.2	Efecto de promediar el flujo sobre la energía cuando hay 2 parámetros. . . . .	53
5.3	Efecto de promediar el flujo sobre la energía con 4 parámetros. . . . .	54
5.4	Efecto de promediar el flujo sobre la energía con 4 parámetros. . . . .	55
5.5	Ajuste de los datos experimentales del modelo A. . . . .	63
5.6	Espectro reportado por Super-K comparado con los espectros, modelo A. . . . .	66
5.7	Espectro reportado por SNO comparado con los espectros, modelo A. . . . .	67
5.8	Variación temporal del flujo de neutrinos calculada en el modelo A, comparada con Super-K . . . . .	68
5.9	Modelo A. Probabilidad de oscilación $\nu_e \rightarrow \nu_e$ y $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . . . . .	69
5.10	Modelo A. Probabilidad de oscilación $\nu_e \rightarrow \nu_e$ y $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . . . . .	70
5.11	Ajuste de los datos experimentales del modelo B. Sol. I . . . . .	73
5.12	Ajuste de los datos experimentales del modelo B. Sol. II . . . . .	74
5.13	Ajuste de los datos experimentales del modelo B. Sol. III . . . . .	75
5.14	Ajuste de los datos experimentales del modelo B. Sol. IV . . . . .	75
5.15	Ajuste de los datos experimentales del modelo B. Sol. V . . . . .	76
5.16	Espectro reportado por Super-K comparado con los espectros para el modelo B. . . . .	77
5.17	Espectro reportado por SNO comparado con los espectros para el modelo B. . . . .	78
5.18	Variación temporal del flujo de neutrinos para el modelo B, comparada con Super-K . . . . .	80
5.19	Probabilidad de oscilación $\nu_e \rightarrow \nu_e$ y $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ para el modelo B. . . . .	81
5.20	Modelo B. Probabilidad de oscilación $\nu_e \rightarrow \nu_e$ y $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . . . . .	82
B.1	Curva que ajusta al espectro <i>pp</i> . . . . .	98
B.2	Curva que ajusta al espectro del ${}^8B$ . . . . .	98
B.3	Curva que ajusta al espectro del <i>hep</i> . . . . .	98
B.4	Curva que ajusta al espectro del ${}^{17}F$ . . . . .	98
B.5	Curva que ajusta al espectro del ${}^{13}N$ . . . . .	99
B.6	Curva que ajusta al espectro del ${}^{15}O$ . . . . .	99
B.7	Curvas que ajustan la sección eficaz del Cloro . . . . .	100
B.8	Curvas que ajustan la sección eficaz del Galio . . . . .	101

# Índice de Tablas

1.1	Masa de los leptones . . . . .	2
4.1	Cocientes de las masas en el caso de "see-saw". . . . .	40
5.1	Cadena pp de producción de neutrinos solares. . . . .	47
5.2	Ciclo CNO de producción de neutrinos solares. . . . .	47
5.3	Resultados experimentales comparados con los resultados teóricos. . . . .	57
5.4	Resultados teóricos para los flujos predichos por el modelo estándar solar. . . . .	58
5.5	Secciones eficaces para el cloro y el galio. . . . .	58
5.6	Valores de los parámetros en las distintas soluciones del modelo A. I . . . . .	61
5.7	Valores de los parámetros en las distintas soluciones del modelo A. II. . . . .	62
5.8	Probabilidad de encontrar $\chi^2 \geq \chi^2$ para las distintas soluciones del modelo A. . . . .	62
5.9	Contribuciones de los distintos flujos para el experimento de Homestake, modelo A. . . . .	64
5.10	Contribuciones de los distintos flujos para los experimentos de galio, modelo A. . . . .	65
5.11	Valores para los distintos experimentos predichos por las distintas soluciones, modelo A. . . . .	71
5.12	Valores de los parámetros para las distintas soluciones en el modelo B. I . . . . .	72
5.13	Valores de los parámetros para las distintas soluciones del modelo B. II . . . . .	72
5.14	Probabilidad de encontrar $\chi^2 \geq \chi^2$ para las distintas soluciones del modelo B. . . . .	73
5.15	Contribuciones de los distintos flujos para el experimento de Homestake para el modelo B. . . . .	76
5.16	Contribuciones a los flujos parciales para los experimentos de galio para el modelo B . . . . .	79
5.17	Valores para los distintos experimentos predichos por las distintas soluciones para el modelo B. . . . .	83
5.18	Distintas soluciones para modelos con 2 parámetros, incluyendo el resultado total de cada experimento. . . . .	84
5.19	Distintas soluciones para modelos con 2 parámetros incluyendo todos los datos para neutrinos solares. . . . .	85

## Capítulo 1

# Introducción

Los neutrinos fueron propuestos por Pauli en 1929, para explicar la aparente energía faltante en ciertas reacciones nucleares, tales como



La propuesta original era que existía un nuevo tipo de partícula elemental, hasta entonces desconocida. Esta "nueva" partícula tenía características muy especiales: una masa muy pequeña (que originalmente se pensó era cero), carga eléctrica cero y sólo interactuaría por medio de las interacciones débiles. A estas partículas se les nombró neutrinos (para distinguirlas de los neutrones), denotadas por  $\nu$ , por lo que la reacción anterior se vuelve<sup>1</sup>



El neutrino fue descubierto experimentalmente en 1956 por Reines y Cowan. Durante varios años se creyó que sólo existía un sólo tipo de neutrino que aparecía en algunas reacciones donde se involucraban leptones, hasta que los experimentos realizados por el grupo de Lederman, Schwarz y Steinberger en 1962, demostraron la existencia de un segundo tipo de neutrino. Los dos neutrinos hasta entonces eran:  $\nu_e$  asociado a reacciones donde aparece el electrón como la reacción (1.2), y  $\nu_\mu$ , asociado al muón como el que aparece en el decaimiento del pión:



Posteriormente, a mediados de los 70s, el grupo de Perl encontró un tercer leptón, el tau. En base a los descubrimientos anteriores se propuso la existencia de un tercer neutrino,  $\nu_\tau$ , aunque no fue sino hasta el año 2000 en que se encontró evidencia experimental directa de este [60].

Con estos resultados, los leptones son muy parecidos a los quarks, ambos forman 3 familias, con dos miembros cada una. Todos los leptones y los quarks tienen espín semientero, por lo que cumplen la estadística de Fermi-Dirac. Sin embargo, los neutrinos tienen varias características que no tienen las demás partículas. En las interacciones débiles sólo se producen neutrinos con helicidad negativa y antineutrinos con helicidad positiva, mientras que el resto de partículas y antipartículas se pueden encontrar con ambas helicidades. Este hecho se incorpora en el modelo estándar considerando que los neutrinos no tienen masa, lo cual no contradice los experimentos. Las masas de los leptones se presentan en la tabla 1.1.

Durante muchos años se pensó que los neutrinos no tenían masa, sin embargo, los resultados de los últimos años [13, 55, 57, 67] dan fuertes evidencias que sugieren que los neutrinos tienen masa. Pero ¿por qué queremos neutrinos masivos y cuales sus consecuencias?

<sup>1</sup>En este trabajo el superíndice  $c$  se refiere a la antipartícula, así  $\nu_e^c$  es un antineutrino. En la literatura es usual denotar a un antineutrino como  $\bar{\nu}$ , pero aquí esa notación será para denotar a un vector transpuesto.

	$e$	$\mu$	$\tau$
Masa	0.511 MeV	105.658 MeV	1777.03 MeV
	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
Masa	<2.2 - 3 eV	<0.17 - 0.19 MeV	<15.5 - 18.2 MeV

Tabla 1.1: Masa de los leptones. [48, 73] Los valores reportados para las masas de los leptones cargados son valores medidos, mientras que para los neutrinos sólo se conocen las cotas superiores.

## 1.1 ¿Queremos neutrinos con masa?

Existen varios motivos que nos llevan a considerar la cuestión de la masa de los neutrinos. En esta sección sólo se mencionan algunos de ellos.

El primer motivo proviene de la física teórica. La historia de las interacciones débiles, es en gran medida la historia de nuestro entendimiento de las propiedades de los neutrinos. El hecho de que sólo se encontraran neutrinos con helicidad negativa fue un punto clave para el éxito de la teoría V-A sugerida por Feynman, Gell-Mann, Marshak y Sudarshan [29, 49]. La evidencia de las corrientes neutras dió una fuerte confirmación de la exitosa unificación de las interacciones débiles y electromagnéticas propuesta por Glashow, Salam y Weinberg. Con los resultados de los últimos años, es factible que los neutrinos tengan masa y que mezclen entre ellos. Esto requiere conciliarse con la teoría V-A, la cual supone neutrinos sin masa, ver sección 2.2. Por lo tanto, si se desea avanzar hacia una teoría que involucre a todas las interacciones, debemos seguir estudiando a los neutrinos para comprender mejor las interacciones débiles y poder incorporar a los neutrinos masivos y quizás poder explicar su masa tan pequeña.

El resto de los motivos mencionados provienen de la astrofísica y la cosmología. La importancia en la astrofísica fue notada desde 1939 por Bethe. Él determinó las cadenas de reacciones responsables de convertir el hidrógeno en helio en las estrellas, de las cuales algunas producen neutrinos  $\nu_e$ . Dado que los neutrinos sólo interactúan vía la fuerza débil, tienen una sección eficaz muy pequeña por lo que después de ser producidos, salen de la estrella casi intactos. Estos neutrinos podrían proveer una valiosa información acerca de procesos que ocurren en el interior de las estrellas.

A lo largo de los años se han desarrollado detallados modelos de la evolución estelar que permiten predecir el flujo de  $\nu_e$  producidos en el Sol. Sin embargo, los experimentos realizados a la fecha sólo detectan una fracción del flujo calculado [12]. Lo anterior se conoce como el problema o enigma de los neutrinos solares. Se cree que este problema en particular puede ser resuelto si los neutrinos tienen masa. Como se verá en 4.4, los neutrinos no necesariamente son eigenestados de masa, sino una combinación de éstos. Con estas suposiciones, se puede dar el fenómeno de oscilaciones de neutrinos, en el cual un  $\nu$  puede oscilar de un sabor a otro. Esta posibilidad fue propuesta en 1957 por Pontecorvo [76], en analogía a las oscilaciones del kaón neutro. Para que esto sea viable, se requiere que los neutrinos tengan masa distinta de cero y distinta entre ellos. De acuerdo a este escenario, los neutrinos  $\nu_e$ , en su viaje del Sol a la Tierra, oscilan a otro tipo de neutrino, lo cual explicaría el problema de los neutrinos solares. Adicionalmente a esta posibilidad, conocida como oscilaciones en el vacío, existe una propuesta presentada por Mikheyev y Smirnov en 1986, en la cual la parte más importante de las oscilaciones se producen por medio de un efecto resonante en el interior del Sol. Aun cuando lo último es una alternativa muy atractiva, vale la pena explorar a fondo el caso de las oscilaciones en el vacío, lo cual es la opción que se seguirá en esta tesis.

Otra posible forma de explicar la oscilación de los neutrinos solares es suponer que tienen momento magnético. Si este momento es suficientemente grande, los neutrinos producidos en el Sol pueden cambiar su helicidad en el campo magnético solar. Estos últimos neutrinos van a tener una sección eficaz mucho menor a los primeros, haciéndolos más difíciles de detectar, lo cual podría explicar el flujo

observado. Sin embargo, un neutrino sin masa no puede tener momento magnético, por lo que para que esta explicación funcione de cualquier manera se necesitan neutrinos con masa.

Además de las oscilaciones solares, también hay ciertas discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales en el flujo de neutrinos atmosféricos. También en este caso, las oscilaciones de neutrinos parecen ser la clave para resolver este problema.

Otra motivación para tener neutrinos masivos, es que la cosmología predice la existencia de una radiación de fondo de neutrinos residuos del big bang en todo el universo. El número de neutrinos de fondo por unidad de área es alrededor de 8 órdenes de magnitud mayor al número promedio de bariones presentes en el universo. Así, si los neutrinos tienen masa, su contribución a la densidad del universo puede afectar la evolución del universo [69].

Las fuentes de masa, aparte de los bariones, nos pueden ayudar a resolver varios problemas. Con un universo dominado por bariones, es difícil entender cómo la distribución uniforme inicial de materia evolucionó para formar galaxias del orden de  $10^{11} M_{\text{sol}}$ . Los modelos inflacionarios predicen la densidad de energía del universo en función de su razón de expansión. Esta razón no es conocida muy bien, pero si está dentro del rango actualmente aceptado, predice una densidad de energía que es de 10 a 100 veces la densidad de energía de los bariones. Esto nos obliga a buscar nuevas fuentes de energía, y los neutrinos son un excelente candidato. Existen otras posibles fuentes de energía, pero suponen partículas desconocidas.

Además de estos problemas, los neutrinos son candidatos importantes para la materia oscura. El cociente de masa total a masa luminosa de sistemas como estrellas, galaxias, cúmulos de galaxias, etc. aumenta conforme uno analiza sistemas más grandes. Este problema es explicado por la presencia de materia oscura. Se cree que la materia oscura está ligada gravitacionalmente a estos sistemas, proveyéndolos de un halo no luminoso. Mientras más grande es el sistema, más grande es el halo, y mayor la razón masa-luz. Para que los neutrinos sean candidatos a la materia oscura es necesario que tengan una masa  $m_\nu \sim 1$  keV pues de otra manera existen problemas con la formación de estructura galáctica. Para más información acerca de estos temas ver [59, 69] y las referencias que ahí se mencionan.

Aun estamos muy lejos de poder construir un modelo que explique satisfactoriamente las masas de los neutrinos y sus oscilaciones, sin embargo, existe bastante información como para poner límites sobre las masas, las oscilaciones y otros parámetros que nos permiten descartar ciertas teorías. Por lo tanto, el estudio de neutrinos masivos debe de tomarse en serio.

## 1.2 ¿Qué implican los neutrinos masivos?

En la sección anterior vimos algunas de las motivaciones para estudiar a los neutrinos masivos y ahora nos surgen varias preguntas acerca de ellos:

- ¿Cuántos neutrinos hay? El modelo estándar permite la existencia de  $N$  familias de neutrinos, sin embargo los resultados experimentales dice que existen sólo 3 familias de neutrinos ligeros que interactúan por medio de la fuerza débil, ver sección 2.4. Sin embargo, varios intentos por tratar de explicar los experimentos de neutrinos solares, atmosféricos y del LSND<sup>2</sup> con sólo 3 familias de neutrinos, encuentran problemas [46, 50, 66, 77]. Por lo que para poder explicar los experimentos simultáneamente hay que introducir uno o varios neutrinos estériles que no interactúen con la fuerza débil. Esto se debe a que las oscilaciones dependen de la diferencia del cuadrado de las masas de los eigenestados de masa, y esta diferencia tiene una magnitud muy distinta para cada experimento. Por lo que si los resultados de los neutrinos solares, atmosféricos y del LSND son correctos, y las oscilaciones de neutrinos son la explicación adecuada, entonces en la naturaleza deben existir uno o varios neutrinos estériles.

<sup>2</sup>Este experimento es "Liquid Scintillating Neutrino Detector" basado en Los Alamos [2]

- ¿Cuántos neutrinos con masa definida hay? Como se verá en la sección 4.4, por cada familia de leptones se espera que exista un estado con masa bien definida, sin embargo, cuando tenemos masa de Dirac y de Majorana simultáneamente, este número se duplica.
- ¿Cuál es la masa de estos neutrinos? Durante los últimos años los resultados experimentales de neutrinos solares llevan a la conclusión de que la masa de los neutrinos es distinta de cero [6, 40, 41, 42]. Sin embargo el valor de la masa es todavía una pregunta abierta, pero de los resultados experimentales y de algunas aproximaciones teóricas podemos encontrar algunos límites y restricciones [11]. Por ejemplo, ver capítulo 5, para que las oscilaciones de neutrinos ocurran, es necesario que los eigenestados tengan valores de masa distintos de cero, y distintos entre ellos. Experimentalmente, con las oscilaciones de neutrinos sólo podemos encontrar el valor de la diferencia del cuadrado de las masas. Estos valores van a depender del modelo que se utilice para ajustar los experimentos, por ejemplo  $\Delta M^2 \leq 10^{-11} \text{ eV}^2$  para oscilaciones en el vacío y  $\Delta M^2 \leq 10^{-5} \text{ eV}^2$  para oscilaciones en materia [11]. Sin embargo, hay algunos experimentos que nos pueden brindar información directa acerca de la masa individual de cada neutrino como, el decaimiento  $\beta$  en tritio  ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \nu_e$ . Los rangos que actualmente exploran estos métodos se encuentran muy alejados en comparación con el correspondiente al de las oscilaciones.
- ¿Cómo se mezcla un neutrino en términos de los estados de masa? Para que un neutrino oscile, debemos de escribir a los neutrinos en términos de los eigenestados de masa, esto se hace con la matriz Maki-Nakagawa-Sakata  $U^{MNS}$ , en analogía a la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa  $V^{CKM}$ , para la mezcla de quarks. Los elementos de esta matriz pueden ser determinados experimentalmente.
- ¿Los neutrinos son partículas de Dirac o de Majorana? Si los neutrinos tienen masa pueden ser de Dirac, como cualquier otro fermión. Pero si son de Majorana, ver 3.1, pueden tener propiedades diferentes a la de los otros fermiones. La forma más viable para saber que tipo de partículas son los neutrinos, es a través del decaimiento doble  $\beta$ , sección 3.5. Cuando los neutrinos no tienen masa no es posible distinguir si son partículas de Dirac o de Majorana.
- ¿Las oscilaciones de neutrinos violan CP? El estudio de efectos que violen CP, nos puede ayudar a contestar la pregunta anterior, además de que permite obtener información acerca de los elementos de la matriz  $U^{MNS}$ .
- ¿Cuáles son las propiedades electromagnéticas de los neutrinos? Los neutrinos no tienen carga eléctrica, sin embargo esto no implica que no sientan interacciones electromagnéticas, tengan o no masa. Cuando los neutrinos tienen masa, las propiedades electromagnéticas de los neutrinos van a depender si estos son partículas de Dirac o de Majorana. Para el caso de neutrinos de Dirac, se pueden definir hasta 4 factores de forma electromagnéticos, mientras que si son partículas de Majorana solamente hay un factor de forma [69]. El momento magnético de los neutrinos se cancela para neutrinos de Majorana o para neutrinos de Dirac sin masa. Los últimos valores experimentales para el momento magnético de los neutrinos son:  $< 1.5 \times 10^{-10} \mu_B$ ,  $< 7.4 \times 10^{-10} \mu_B$  y  $< 5.4 \times 10^{-7} \mu_B$  para el neutrino del electrón, neutrino del muón y neutrino del tau respectivamente ( $\mu_B$  es el magnetón de Bhor) [48]. En el modelo estándar los neutrinos no tienen masa, pero en el modelo electrodébil extendido para incluir neutrinos con masa, se encuentra que el momento magnético es  $\mu_\nu = 3eG_F m_\nu / (8\pi^2 \sqrt{2})$ , donde  $m_\nu$  es la masa del neutrino  $\nu$  [27, 48]. Las propiedades electromagnéticas llevan a distintas consecuencias, como ciertas transiciones para los eigenestados de masa. Varios límites para los valores de estas propiedades han sido tema de estudio en varios trabajos.
- ¿Cuáles son los tiempos de vida de los neutrinos? Si los neutrinos tienen masa, esperamos que los neutrinos sean inestables, a excepción del más ligero, ya que en general no existe simetría

alguna que prevenga este decaimiento. Para poder contestar esta pregunta, debemos entender varias propiedades de los neutrinos, tales como sus propiedades electromagnéticas.

- ¿Cuál es la dependencia de los neutrinos con respecto a la temperatura? Esta es una pregunta importante ya que varios neutrinos que llegan a la Tierra provienen de Sol así como de otras estrellas y Supernovas, y su estudio nos puede dar información acerca de estos cuerpos. Un ejemplo es la dependencia del flujo de neutrinos solares con respecto a la temperatura central del Sol [18].

La evidencia de la masa de los neutrinos es bastante convincente, sin embargo, apenas estamos comenzando a entender sus implicaciones. En esta tesis se estudian algunas propiedades de las oscilaciones de los neutrinos en el vacío. En particular se encuentra la probabilidad de oscilación de un neutrino cuando se incluyen simultáneamente masas de Dirac y de Majorana, en el caso de una y de dos familias (capítulo 4). Estos resultados son utilizados para calcular el flujo de neutrinos solares detectados por distintos métodos, comparandolos con los resultados experimentales, con el fin de determinar los valores de los parámetros que aparecen en las fórmulas de oscilación (capítulo 5). Estos parámetros son el ángulo de mezcla y una o tres diferencias de masas al cuadrado dependiendo del modelo.

### 1.3 Resumen de la tesis.

A continuación se da un breve resumen de cada capítulo de esta tesis.

- Capítulo 2** En este capítulo se da una breve introducción sobre las interacciones débiles en el modelo estándar. Se menciona cómo con el grupo  $SU(2) \otimes U(1)$  se explican las interacciones débiles, cual es el Lagrangiano que las describe y el significado de cada uno de sus componentes.
- Capítulo 3** Aquí se mencionan algunas propiedades de los neutrinos. Se explican cuáles son las diferencias entre las partículas de Dirac y las de Majorana. En particular se ven algunas propiedades suponiendo que los neutrinos son de Majorana, así como algunas de las herramientas matemáticas para trabajar con los neutrinos en las distintas representaciones.
- Capítulo 4** En este capítulo se encuentran los eigenestados de masa de los neutrinos, considerando que tienen masas de Dirac y de Majorana distintas de cero. Con estos resultados se estudia la probabilidad de oscilación suponiendo que el estado inicial es un  $\nu_{eL}$  en el caso de una y dos familias. Para ambos casos, las probabilidades son analizadas en varias aproximaciones.
- Capítulo 5** Utilizando los resultados encontrados en el capítulo 4, se estudia el efecto sobre el flujo de  $\nu_e$  provenientes del Sol. Los cálculos son comparados con los resultados reportadas en 5 experimentos distintos. Finalmente, utilizando el programa de minimización MINUIT [1], se encuentra el valor de los parámetros que aparecen en la probabilidad de oscilación.
- Capítulo 6** En este capítulo se discuten los resultados encontrados para el flujo de neutrinos solares y se presentan las conclusiones de este trabajo.
- Apéndice** Aquí se encuentran algunas propiedades de las matrices  $\gamma$  utilizadas para calcular varias propiedades. Además se muestran algunas subrutinas usadas para calcular los flujos y los parámetros.

## Capítulo 2

# Interacciones Electro débiles

El objetivo de este capítulo es el de presentar en forma breve algunos conceptos sobre las interacciones electro débiles, que se utilizan más adelante para el estudio de interacciones de neutrinos.

### 2.1 Interacciones Débiles

En 1932, con la finalidad de explicar el decaimiento  $\beta$  en  $n \rightarrow pe^{-}\nu^c$ , Fermi adoptó la teoría electromagnética para construir una teoría de interacciones débiles. Su propuesta para esta reacción fue utilizar la densidad del Lagrangiano<sup>1,2</sup> [34, 35]:

$$L = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{p}\gamma_\lambda n] [\bar{e}\gamma^\lambda \nu] + c.h. \quad (2.1)$$

donde  $c.h.$  es el conjugado hermitiano,  $p$ ,  $n$ ,  $e$  y  $\nu$  los vectores que describen al protón, neutrón, electrón y neutrino respectivamente. La constante de Fermi  $G_F$  es

$$G_F \simeq \frac{10^{-5}}{m_p^2} \quad (2.2)$$

con  $m_p$  la masa del protón.

Posteriormente, en 1956 se encontró que las interacciones débiles no conservan la simetría de paridad [63, 80], lo cual llevó a la formulación de la teoría V-A<sup>3</sup>, la cual dice que las interacciones débiles se describen de acuerdo al Lagrangiano (2.1) dado por:

$$L = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda^\dagger J^\lambda + c.h. \quad (2.3)$$

donde  $J_\lambda$  es la corriente débil. Esta corriente se compone de dos partes, una leptónica y otra hadrónica:

$$J_\lambda = J_{\lambda l} + J_{\lambda h} \quad (2.4)$$

La diferencia entre la corriente en (2.1) y (2.3) radica en el hecho de que los neutrinos sólo interactúan a través de una corriente izquierda, por lo que la corriente leptónica tiene la forma

$$J_l^\lambda = \bar{\nu}\gamma^\lambda (1 - \gamma_5) e \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>La expresión (2.1) es la densidad del Lagrangiano, pero en todo este trabajo va a ser referida como el Lagrangiano, haciendo mención especial cuando nos refiramos a la integral de la densidad.

<sup>2</sup>En esta tesis los términos con  $\bar{p}$  se refieren a los vectores reongión de  $p$ .

<sup>3</sup>Pronunciada teoría V menos A. V representa un vector y A un vector axial

Algo similar ocurre para la corriente hadrónica, sólo que a diferencia de (2.1), se deben utilizar los quarks en vez del protón y el neutrón.

La parte cargada de la corriente débil puede escribirse en general como:

$$J_h^\lambda = \bar{u}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)Vd + \bar{\nu}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)e \quad (2.6)$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_c \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

y  $V$  es la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Esta expresión muestra el hecho de que los quarks se pueden mezclar entre sí gracias a la matriz  $V$  [29, 48, 69].

El Lagrangiano (2.3) es exitoso en describir datos experimentales, pero sólo a bajas energías y no es renormalizable. Esto ocurre debido a que las contribuciones de órdenes mayores son divergentes y no pueden ser organizadas de tal forma que las divergencias se absorban en una redefinición de los parámetros de la teoría. Este problema está relacionado con la violación de unitariedad. Esto se debe a que los diagramas que describen ciertos procesos violan los límites impuestos por la unitariedad de la teoría a altas energías.

### Bosón intermedio

Las interacciones descritas por (2.3), se interpretan como interacciones que son puntuales, como se representa en la figura de la derecha de 2.1.

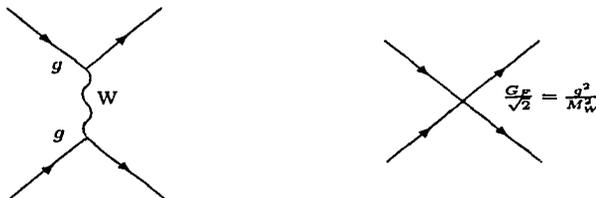


Figura 2.1: Interacción mediante un bosón intermedio.

Cuando se desarrolló la teoría débil, se hizo en analogía a las interacciones electromagnéticas en las cuales existe un bosón intermedio en la interacciones, el fotón. Por lo que se introdujo un bosón intermedio que se acopla a  $J_\mu$ . Pero a diferencia de las interacciones electromagnéticas, las débiles son de corto alcance por lo que este nuevo campo  $W_\mu$  debe ser muy masivo. De esta forma el Lagrangiano para las interacciones débiles se puede escribir como

$$L_W = g(J_\mu W^\mu + c.h.) \quad (2.8)$$

Así el Lagrangiano de (2.3) representa una aproximación de baja energía de (2.8). En esta aproximación, los diagramas de la figura 2.1 son iguales con  $g^2/M_W^2 = G_F/\sqrt{2}$ .

El éxito de QED radica en el hecho de que el fotón no tiene masa y consecuentemente la teoría es de norma. Sin embargo, los bosones intermedios de la fuerza débil tienen masa. Esta masa es necesaria para que la fuerza sea de corto alcance, pero también hace que la teoría no sea de norma. Para solucionar este problema se amplió esta teoría al grupo  $SU(2) \otimes U(1)$  y se recurrió al concepto de rompimiento espontáneo de simetría. [7, 29, 49, 51]

## 2.2 $SU(2) \otimes U(1)$

Para describir las fuerzas débiles se debe de introducir un bosón intermedio, el problema es que este bosón es masivo, y por ello la teoría no es de norma. Este problema se resolvió con el rompimiento espontáneo de simetría, dando lugar a la unificación del electromagnetismo con las fuerzas débiles. La simetría usada es  $SU(2) \otimes U(1)$ .

### 2.2.1 Construcción de $SU(2) \otimes U(1)$

La interacción débil esta dada por (2.6) y (2.8), las interacciones electromagnéticas vienen dadas por

$$L_{em} = eJ_{\lambda}^{em} A^{\lambda} \quad (2.9)$$

donde la corriente es

$$J_{\lambda}^{em} = -\bar{\psi}\gamma_{\lambda}e \quad (2.10)$$

En una teoría de norma necesitamos tres bosones de norma,  $W^{\pm}$  y el fotón, que se acoplen a las corrientes  $J$ ,  $J^{\dagger}$  y  $J^{em}$ . El grupo más sencillo es  $SU(2)$ , sin embargo, las corrientes no forman una álgebra cerrada. Para corregir esto hay dos posibilidades teóricas:

1 Introducir un cuarto bosón de norma acoplado a las cargas débiles, generando  $SU(2) \otimes U(1)$ . Esta elección finalmente mostró ser la correcta.

2 La otra opción es aumentar fermiones, modificando las corrientes (2.5) y (2.10) de tal manera que las cargas electrodébiles formen una álgebra cerrada. Esta teoría fue propuesta por Georgi y Glashow en 1972 [44], sin embargo, fue descartada en 1973 por el descubrimiento de las corrientes débiles.

### 2.2.2 Números cuánticos de $SU(2) \otimes U(1)$ .

Para esta parte se trabaja con un de las tres familias de fermiones (2.7). La forma de obtener la parte derecha o izquierda de una partícula es por medio del proyector derecho  $(1 + \gamma_5)/2$  o el proyector izquierdo  $(1 - \gamma_5)/2$ .

A partir de las corrientes (2.5) y (2.10) se pueden definir a las cargas débiles, las cuales generan al grupo  $SU(2)$ . Estos generadores son

$$T_{+} = \int (\nu_{eL}^{\dagger} e_L + u_L^{\dagger} d_L) d^3x$$

$$T_{-} = (T_{+})^{\dagger} \quad (2.11)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} [T_{+}, T_{-}]$$

La carga del grupo  $U(1)$  debe ser la carga eléctrica  $Q$

$$Q = \int \left( -e^{\dagger} e + \frac{2}{3} u^{\dagger} u - \frac{1}{3} d^{\dagger} d \right) d^3x \quad (2.12)$$

Con estas 4 cargas se puede construir una álgebra que conmute ya que

$$[Q - T_3, T_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

Es conveniente elegir

$$Y = 2(Q - T_3) \quad (2.14)$$

conocida como la **hipercarga débil** la cual es el generador del grupo  $U(1)$ . Con las relaciones (2.11), (2.12) y (2.14) se encuentra

$$\begin{aligned} Y(l_L) &= -1, & Y(e_R) &= -2, & Y(q_L) &= \frac{1}{3} \\ Y(u_R) &= \frac{4}{3}, & Y(d_R) &= -\frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde

$$l_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

son los dobletes de  $SU(2)$  y  $e_R$ ,  $u_R$  y  $d_R$  son singuletes.

Los mismos resultados pueden obtenerse para las demás partículas elementales cambiando  $(u, d, e, \nu_e)$  por  $(c, s, \mu, \nu_\mu)$  o  $(t, b, \tau, \nu_\tau)$ .

Como en el grupo  $SU(2)$  sólo hay componentes izquierdos, y el grupo  $U(1)$  es generado por la hipercarga, entonces en las interacciones débiles el grupo  $SU(2) \otimes U(1)$  se denota como  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ .

### 2.3 Lagrangiano "débil."

Al elegir el grupo  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  se encuentra que el Lagrangiano invariante de norma para los campos vectoriales es

$$L_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.18)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

En principio este Lagrangiano corresponde a 4 bosones sin masa  $(A^i, B)$ .

La interacción de los fermiones con el campo de norma se puede escribir como

$$L_2 = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \quad (2.19)$$

con

$$D_\mu\psi = \left( \partial_\mu - ig\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi \quad (2.20)$$

llamada derivada covariante. Esta es una teoría de norma en el sentido de que el Lagrangiano  $L_1 + L_2$  permanece invariante ante la siguiente transformación de campos

$$\begin{aligned} \psi_R &\rightarrow \psi'_R = \exp(ia(x)Y) \psi_R = U_1 \psi_R \\ \psi_L &\rightarrow \psi'_L = \exp(ia(x) \cdot \mathbf{T}) \psi_L = U_2 \psi_L \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu &\rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}'_\mu = U_2 \mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{T} U_2^{-1} + \frac{i}{g} U_2 (\partial_\mu U_2^{-1}) \\ B_\mu &\rightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{2}{g'} U_1 (\partial_\mu U_1)^{-1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $a(x)$  y  $\mathbf{a}(x)$  son funciones arbitrarias.

### 2.3.1 Rompimiento espontáneo de la simetría.

Para que la teoría anterior describa las fuerzas electrodébiles correctamente se debe encontrar un mecanismo que genere masas para los bosones  $A_\mu$  y  $B_\mu$  manteniendo la invariancia de norma. Para esto introducimos un conjunto de campos escalares  $\Phi$  que tengan un valor esperado no nulo en el vacío  $\langle \Phi \rangle_0$ . De tal manera que al romper la simetría obtengamos tres bosones de norma con masa ( $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z$ ) y uno sin masa (el fotón).

Para romper la simetría del grupo  $SU(2)$  hay que usar un doblete formado por dos escalares complejos [7, 29, 49]. Pero para poder mantener  $U(1)_{em}$  invariante ante  $\langle \Phi \rangle_0$ , una componente de  $\Phi$  debe ser neutra. La elección es

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad Y(\Phi) = 1 \quad (2.22)$$

con la cual Lagrangiano invariante de norma es

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \quad (2.23)$$

donde  $L_1$  esta definido en (2.17),  $L_2$  en (2.19), y

$$L_3 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (2.24)$$

con  $D_\mu$  definido en (2.20) y

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.25)$$

y

$$L_4 = f^c \bar{l}_L \Phi e_R + f^u \bar{q}_L \Phi u_R + f^d \bar{q}_L \Phi d_R + c.h. \quad (2.26)$$

donde se define al isodoublete  $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$ .

Es posible corroborar que si adicionalmente a las transformaciones (2.21), se tiene que el campo escalar se transforma como  $\tilde{\Phi}' = U_2 \tilde{\Phi}$  (ver ecuación (2.28)) la teoría se mantiene invariante.

Para valores positivos de  $\mu^2$  y  $\lambda$  se tiene que el rompimiento espontaneo ocurre en

$$\langle \Phi \rangle_0 \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{con } v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (2.27)$$

El término  $L_1$  da la energía cinética y las autointeracciones de los bosones  $W^\pm$ ,  $Z$  y el fotón. El término  $L_2$  representa la energía cinética de los quarks y los leptones, y sus interacciones con los bosones  $W^\pm$ ,  $Z$  y el fotón.  $L_3$  introduce el potencial necesario para que los bosones  $W^\pm$ ,  $Z$ , y el bosón de Higgs adquieran masa y muestra los acoplamientos de los 5 bosones. El último término,  $L_4$ , da los acoplamientos de los leptones y los quarks, al bosón de Higgs, así como las masas de los leptones cargados.

Esta presentación de las interacciones electrodébiles se hace en la norma unitaria el cual es un caso particular de las normas de t'Hooft.

### 2.3.2 Espectro de masas.

En la sección anterior se vio cómo romper espontáneamente la simetría, ahora se menciona cómo al aplicar el mecanismo de Higgs, los bosones adquieren masa. Esto se logra tomando el escalar:

$$\Phi = U^{-1}(\zeta) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$U(\zeta) = \exp[i\zeta \cdot \sigma / v]$$

donde

$$\langle \zeta_i \rangle_0 = \langle \eta \rangle_0 = 0 \quad (2.29)$$

Donde  $\zeta_i$  y  $\eta$  son 4 campos reales con los cuales se parametriza  $\Phi$ . Para obtener las masas de los bosones, se hace una transformación de norma, definiendo el campo  $\Phi' = U(\zeta)\Phi$ . Con esta nueva  $\Phi'$ , se escribe cada término  $L_i$  de (2.23) en términos de los nuevos campos. Los valores de las masas se extraen de los términos cuadráticos de los campos.

- Masa escalar. Esta es la partícula de Higgs

$$m_\eta = \sqrt{2}\mu \quad (2.30)$$

- Masa de los fermiones:

$$m_c = f^c \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = f^u \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_d = f^d \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.31)$$

- Masa de los bosones. La masa esta contenida en el término  $(D_\mu)^2$  de  $L_3$ :

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi')^2 &= \frac{v^2}{8} \left\{ g^2 \left[ (A'^1_\mu)^2 + (A'^2_\mu)^2 \right] + (gA'^3_\mu - g'B'_\mu)^2 \right\} \\ &\equiv M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde definimos

$$W_\mu^\pm = \frac{(A'^1_\mu \mp A'^2_\mu)}{\sqrt{2}} \quad (2.33)$$

y

$$M_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad (2.34)$$

Para el bosón neutro

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \begin{pmatrix} A'^3_\mu & B'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^3_\mu \\ B'_\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde se ha diagonalizado la matriz de masa (ver sección 4.1), con

$$Z_\mu = \cos \theta_W A'^3_\mu - \sin \theta_W B'_\mu \quad (2.36)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W A'^3_\mu + \cos \theta_W B'_\mu$$

y

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (2.37)$$

donde  $\theta_W$  es el ángulo de débil introducido por Glashow, cuyo valor es  $\sin \theta_W \simeq 0.231$  [48], y la masa de  $Z$  es

$$M_Z^2 = \frac{v^2 (g^2 + g'^2)}{4} \quad (2.38)$$

Como el bosón  $A_\mu$  no tiene masa, corresponde al fotón. Los valores experimentales más recientes [48] dan que  $M_W = 80.419 \pm 0.056$  GeV y  $M_Z = 91.1882 \pm 0.0022$  GeV.

La mayor prueba de que esta teoría va por buen camino fue la detección experimental de la masa de  $W$  y  $Z$ . El siguiente paso es la detección experimental de la partícula de Higgs. El modelo estándar, aun con una sola familia de fermiones tiene siete parámetros: la carga  $e$ ,  $\text{sen}\theta_W$ ,  $M_W$ ,  $m_\tau$ ,  $m_c$ ,  $m_u$ ,  $m_d$ . O en términos del Lagrangiano, los siete parámetros son los dos acoplamientos de norma  $g$  y  $g'$ , dos escalares  $\mu^2$  y  $\lambda$ , y los tres parámetros de acoplamiento de Yukawa  $f^c$ ,  $f^u$  y  $f^d$ . En cierto sentido la unificación electrodébil no esta completa: necesitamos introducir 2 constantes de acoplamiento  $g$  y  $g'$  para obtener los dos tipos de interacción. La búsqueda de una unificación completa puede encontrarse en varios trabajos [29].

### 2.3.3 Corrientes cargadas y neutras.

Una vez determinadas las masas de los bosones electrodébiles, veamos cómo determinar las corrientes cargadas y neutras. Al escribir  $L_2$  en términos de los fermiones definidos en (2.7), se obtiene

$$\begin{aligned} & \bar{l}'_L \left( \frac{g}{2} T \cdot A' - \frac{g'}{2} B' \right) l'_L + \bar{q}'_L \left( \frac{g}{2} T \cdot A' - \frac{g'}{6} B' \right) q'_L \\ & \equiv \left( g J_\mu^1 A'^{1\mu} + g J_\mu^2 A'^{2\mu} \right) + \left( g J_\mu^3 A'^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B'^\mu \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde  $A' = A'_\mu \gamma^\mu$ . El primer término derecho de esta expresión es la corriente cargada, dada por

$$\begin{aligned} L_{cc} &= \left( g J_\mu^1 A'^{1\mu} + g J_\mu^2 A'^{2\mu} \right) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left( J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $W^\pm$  está dado en (2.33) y

$$J_\mu^\pm = J_\mu^1 \pm i J_\mu^2 = \bar{\nu}'_L \gamma_\mu e'_L + \bar{u}'_L \gamma_\mu d'_L \quad (2.41)$$

Para las interacciones a bajas energías la corriente efectiva es

$$L_{cf}^{cc} = -\frac{g^2}{2M_W^2} J_\mu^+ J^{-\mu} \quad (2.42)$$

recuperando el resultado mostrado en la figura 2.1

El segundo término a la derecha de (2.39) corresponde a la corriente neutra, que usando (2.14), (2.36) y (2.37) se escribe como

$$\begin{aligned} L_{CN} &= g J_\mu^3 A'^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B'^\mu \\ &= e J_\mu^{em} A^\mu + \left( \frac{g}{\cos\theta_W} \right) J_\mu^0 Z^\mu \end{aligned} \quad (2.43)$$

con

$$e = g \text{sen}\theta_W \quad J_\mu^0 = J_\mu^3 - \text{sen}\theta_W J_\mu^{em} \quad (2.44)$$

y la aproximación a bajas energías es

$$J_{cf}^{CN} = \frac{-g^2}{2M_W^2} J_\mu^0 J^{0\mu} \quad (2.45)$$

## 2.4 ¿Cuántas familias de neutrinos hay?

Como se menciona en las secciones 4.2 y 4.3, se puede tratar el caso de  $N$  familias de neutrinos, lo cual nos conduce a la pregunta: ¿cuántos neutrinos interactúan con la fuerza débil y cuántos son estériles? Para contestar a la primera parte de la pregunta, tomemos los resultados experimentales. Los resultados más precisos provienen de estudiar la producción de bosones  $Z$  en colisiones  $e^+e^-$ . Esto es porque mientras más familias de neutrinos hay, más ancha es la línea  $Z$  ya que cada neutrino ligero ( $m_\nu \ll M_Z/2$ ), tiene la misma contribución al ancho  $Z$ . El ancho total está dado por

$$\Gamma_{total} = \Gamma_{had} + 3\Gamma_l + \Gamma_N \quad (2.46)$$

es decir, la suma de las contribuciones de los hadrones  $\Gamma_{had}$ , los 3 leptones cargados  $\Gamma_l$  y la contribución de  $N_\nu$  familias de neutrinos ligeros  $\Gamma_N$ . Cada uno contribuyendo a  $\Gamma_{total}$  según el modelo estándar como

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu_i \bar{\nu}_i) = \frac{\sqrt{2}G_F M_Z^3}{24\pi} \rho \quad (2.47)$$

donde  $\rho$  se relaciona con el acoplamiento axial de los leptones cargados al bosón  $Z$ :  $\rho = (2g_A^l)^2$  con  $g_A^l = -0.50102 \pm 0.00030$  que es un promedio de los resultados experimentales. Para reducir la dependencia del modelo, el valor en el modelo estándar de la razón entre los anchos del neutrino y de los leptones cargados,  $(\Gamma_\nu/\Gamma_l)_{ME} = 1.991 \pm 0.001$ , se usa en vez de  $(\Gamma_\nu)_{ME}$ , para determinar el número de tipos de neutrinos ligeros

$$N_\nu = \frac{\Gamma_{inv}}{\Gamma_l} \left( \frac{\Gamma_l}{\Gamma_\nu} \right)_{ME} \quad (2.48)$$

Tomando en cuenta los distintos experimentos realizados que miden las cantidades en la ecuación (2.48), resulta que el actual valor promedio de  $N_\nu$  es [48]

$$N_\nu = 3.00 \pm 0.06 \quad (2.49)$$

Estos resultados apoyan fuertemente la suposición de que sólo hay tres familias de neutrinos ligeros interactuantes con la fuerza débil.

El problema surge al querer ajustar los datos observados en los distintos experimentos. Para poder ajustar simultáneamente las oscilaciones solares, atmosféricas y los resultados del LSND, es necesaria la introducción de por lo menos un cuarto neutrino estéril [55, 67, 69], sin embargo, existen modelos que utilizan los tres neutrinos que conocemos [50, 77], para explicar los experimentos por separado.

Ahora la pregunta obligada es ¿cuántos neutrinos estériles hay? Actualmente existen varios modelos que incluyen un sólo neutrino estéril para explicar los experimentos, sin embargo, también se encuentran modelos con 6 neutrinos: 3 activos y 3 estériles [21, 28, 38]. Para poder construir modelos con neutrinos estériles, hay que tomar en cuenta no sólo los resultados experimentales, también hay que tomar en cuenta otras restricciones, como las cosmológicas, que por ejemplo implica que la masa de los neutrinos es menor o igual a 8 eV [36], aunque también existen conclusiones de que  $\sum m_{\nu i} \sim 1$  keV, [45, 64].

Para poder decidir cuál modelo es mejor, hay que esperar más resultados experimentales, en especial los resultados que permiten corroborar o rechazar los del LSND.

## 2.5 ¿Qué sigue?

El modelo estándar se basa en el grupo de norma  $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . La simetría electrodébil  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  es rota con el doblete de Higgs  $\langle H^0 \rangle = v_{débil} \simeq 250$  GeV [29] lo cual da masa a los bosones de norma y a todos los fermiones con excepción de los neutrinos. Uno tiene que ir más allá del modelo estándar para poder explicar la masa. Hay varios mecanismos por los cuales los neutrinos

pueden adquirir masa, aun incluso cuando nos restringimos al caso en que los neutrinos son partículas de Majorana. Estas extensiones al modelo estándar pueden incluir o no a neutrinos derechos.

Un ejemplo de estos modelos es el modelo simétrico izquierdo-derecho [67, 69], en el cual al introducir al neutrino derecho, la simetría  $B - L^4$  es de norma y el grupo es  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$  [71, 78], del cual surge el mecanismo de "see-saw".

Al introducir un modelo que trate con neutrinos masivos es deseable encontrar algún mecanismo con el cual sea posible entender por qué los neutrinos tienen masas tan pequeñas, tabla 1.1, por ejemplo el mecanismo de "see-saw" visto en la sección 4.3, [55, 67, 69].

---

<sup>4</sup> $B - L$  es el número cuántico obtenido de restar del número leptónico del número bariónico. En el caso en que no hay bariones involucrados, se recupera la conservación del número leptónico.

## Capítulo 3

# Propiedades de los Neutrinos.

Todos los fermiones fundamentales – a excepción de los neutrinos – son partículas de Dirac como consecuencia de la conservación de la carga. Por lo tanto, satisfacen la ecuación de Dirac y son descritas por espinores complejos de 4 componentes. Si los neutrinos no tienen masa, pueden ser descritos por espinores complejos de dos componentes, llamados espinores de Weyl. Sin embargo, durante los últimos años, los resultados experimentales sugieren que los neutrinos tienen masa [6, 41].

Si los neutrinos tienen masa, uno podría pensar que pueden ser representados por los espinores de Dirac, al igual que  $e$ ,  $\mu$  y  $\tau$ . Sin embargo, hay una diferencia muy importante entre los neutrinos y el resto de los fermiones: los neutrinos no tienen carga eléctrica. Esto nos da la opción de tratarlos desde un nuevo punto de vista, que es verlos como partículas de Majorana. En este capítulo se mencionan cuáles son las propiedades de las partículas de Majorana y su diferencia con las de Dirac.

### 3.1 Partículas de Dirac vs. Partículas de Majorana

Antes de comenzar con el formalismo matemático conviene discutir la diferencia entre las partículas de Dirac y las de Majorana. En la naturaleza sólo se han identificado neutrinos con helicidad negativa (neutrinos izquierdos  $\nu_L$ ), y antineutrinos con helicidad positiva (antineutrinos derechos  $(\nu^c)_R$ ). La transformación  $CPT$  de  $\nu_L$  es  $(\nu_L)^c$ , lo cual se representa en la figura 3.1, (como se verá más adelante  $(\nu_L)^c = (\nu^c)_R$ ).

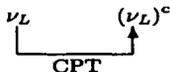


Figura 3.1: La transformación  $CPT$  de un neutrino izquierdo, es un antineutrino derecho.

Supongamos que un neutrino se mueve en dirección  $\hat{z}$ . Si los neutrinos son masivos, su velocidad es menor a 1.<sup>1</sup> Esto implica que es posible encontrar un sistema de referencia el cual se mueva en dirección  $\hat{z}$  con una velocidad mayor a la del neutrino. En este nuevo sistema de referencia, el neutrino se mueve en dirección  $-\hat{z}$ , pero con el mismo espín que antes. Es decir, que a partir de un 'boost' de Lorentz se obtiene un neutrino derecho  $\nu_R$ .

Ahora surge la pregunta, ¿los estados  $\nu_R$  y  $(\nu_L)^c$  son iguales?

Si  $\nu_R$  y  $(\nu_L)^c$  son distintos entonces  $\nu_R$  tiene su imagen  $CPT$  que es  $(\nu_R)^c$ . Un segundo 'boost' de Lorentz lleva este nuevo estado al estado  $(\nu_L)^c$ , obteniendo 4 estados con la misma masa, como se ve en

<sup>1</sup>En unidades naturales donde  $\hbar = c = 1$ .

la figura 3.2. Este conjunto de estados es conocido como neutrinos de Dirac. Los estados obtenidos a través del 'boost' de Lorentz también se pueden obtener a través de una acción de un campo magnético externo, en el caso de que los neutrinos tuviesen momento magnético.

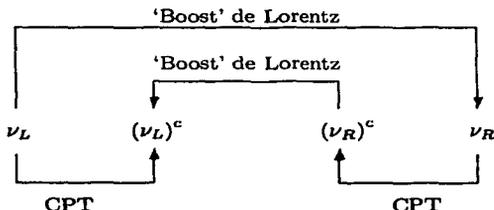


Figura 3.2: Transformaciones de los neutrinos de Dirac.

Por otro lado, si  $\nu_R$  y  $(\nu_L)^c$  son iguales, sólo tenemos dos estados con la misma masa. A este conjunto se le llama neutrinos de Majorana. Como se ve en la figura 3.3, al aplicar  $CPT$  se obtiene lo mismo que al aplicar un 'boost' de Lorentz. Este modelo fue propuesto en 1937 por Majorana [65].

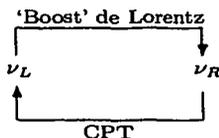


Figura 3.3: Transformaciones de una partícula de Majorana.

Uno se puede preguntar ¿cómo es posible que a partir de una partícula y un 'boost' de Lorentz se pueda encontrar la antipartícula? Para contestar la pregunta hay que tomar en cuenta que la partícula y la antipartícula están definidos con respecto a algún número cuántico conservado. Si no hay números cuánticos que distingan a la partícula de la antipartícula, entonces la partícula puede ser su propia antipartícula. Si los neutrinos son partículas de Majorana, sólo tiene sentido hablar de neutrinos izquierdos o derechos y no de neutrinos y antineutrinos.

Hay aun otro esquema, que es suponer que las partículas son de Weyl. Este puede ser confundido con el esquema de Majorana. Ambos esquemas representan a los neutrinos con espinores de dos componentes, pero las partículas de Weyl no tienen masa. Así que si  $\nu_L$  se mueve, lo hace a velocidad 1, haciendo imposible encontrar a  $\nu_R$ , por lo que la componente derecha no es necesaria para obtener un esquema covariante de Lorentz. Similarmente  $(\nu^c)_R$ , no tiene un compañero izquierdo. Una vez discutido de forma muy sencilla la diferencia entre los dos tipos de partículas, comencemos a verlas utilizando el formalismo matemático.

### 3.2 Ecuación de Dirac y campos de Majorana.

La ecuación que describe a un fermión libre  $\psi$  con masa  $m$ , es la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (3.1)$$

donde las  $\gamma^\mu$  son las llamadas matrices de Dirac. Esta ecuación se puede deducir utilizando el principio variacional a partir del siguiente Lagrangiano<sup>2</sup>

$$L = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (3.2)$$

donde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . La solución a la ecuación (3.1) es un espinor de 4 componentes que se puede escribir como

$$\psi^{(+)} = e^{-ip \cdot x} \varphi_s \quad \psi^{(-)} = e^{+ip \cdot x} \chi_s \quad (3.3)$$

Los espinores  $\psi^{(+)}$  y  $\psi^{(-)}$  son las soluciones de onda plana de energía positiva y energía negativa respectivamente con proyección del espín  $s$ . Las ecuaciones que satisfacen estos espinores son

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m) \varphi_s(\mathbf{p}) &= 0 \\ (\gamma^\mu p_\mu + m) \chi_s(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Escrito como operador de campo, el fermión se puede representar como

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( f_s(\mathbf{p}) \varphi_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + f_s^\dagger(\mathbf{p}) \chi_s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.5)$$

donde el operador  $f_s(\mathbf{p})$  aniquila un estado de partícula con momento  $\mathbf{p}$  y proyección del espín  $s$  en la dirección del momento. De igual forma  $f_s^\dagger(\mathbf{p})$  aniquila y  $f_s^\dagger(\mathbf{p})$  crea un estado de antipartícula. Si escribimos  $\Psi^*$ , esta va a depender de  $f_s^\dagger(\mathbf{p})$  y de  $f_s(\mathbf{p})$ . Como la partícula de Majorana es igual a su antipartícula, esperamos que  $\Psi(x)$  se relacione con  $\Psi^*(x)$ . Sin embargo, el imponer

$$\Psi(x) = \Psi^*(x) \quad (3.6)$$

es incorrecto, ya que para que  $\Psi(x)$  tenga significado físico, debe ser covariante de Lorentz. La relación anterior no lo es. Sin embargo, si se toma la definición de conjugación de carga como:<sup>3</sup>

$$\psi^c(x) \equiv \gamma_0 C \psi^*(x) \quad (3.7)$$

podemos elegir a  $C$  como una matriz que garantice que  $\psi^c$  se transforma de igual forma que  $\psi$  bajo las transformaciones de Lorentz. En el apéndice A.1 se demuestra que la matriz  $C$  debe cumplir con las propiedades  $\gamma_0 C \sigma_{\mu\nu}^* = -\sigma_{\mu\nu} \gamma_0 C$ . La forma específica de  $C$  depende de la representación de las matrices  $\gamma$ .

Cuando trabajamos con partículas de Majorana, en general debemos pedir que

$$\Psi(x) = e^{i\theta} \Psi^c(x) \quad (3.8)$$

donde hemos introducido una fase global arbitraria  $\theta$ .

A partir de la (3.5) y de (3.8) se puede deducir que el operador de campo de Majorana es

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( f_s(\mathbf{p}) \varphi_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \lambda f_s^\dagger(\mathbf{p}) \chi_s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.9)$$

Esta ecuación implica que la partícula es la misma que la antipartícula, salvo una fase  $\lambda$ . Esta fase es conocida como la fase de creación ya que aparece en el operador de creación, esto es sólo convención ya que pudo haber aparecido con el operador de aniquilación sin cambiar el resultado.

<sup>2</sup> Al igual que en la sección 2.1, (3.2) es la densidad del Lagrangiano, pero va a ser referido como Lagrangiano.

<sup>3</sup>  $\psi^c$  representa a la antipartícula de  $\psi$ , y no  $\bar{\psi}$ , el cual se refiere al vector  $\psi$  transpuesto.

Si utilizamos las ecuaciones (3.7) y (3.9) y las propiedades

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= 1 \\ C\gamma_0\varphi_s^*(p) &= \chi_s(p) \\ C\gamma_0\chi_s^*(p) &= \varphi_s(p) \end{aligned} \quad (3.10)$$

encontramos que

$$\Psi^c(x) = \lambda^* \Psi(x) \quad (3.11)$$

de donde podemos deducir que  $\lambda = e^{i\theta}$ .

### 3.3 Representaciones de las matrices de $\gamma^\mu$ y $C$

Las  $\gamma^\mu$ s de la ecuación (3.1) son las matrices de Dirac definidas por las propiedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (3.12)$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \quad (3.13)$$

donde  $g^{\mu\nu}$  es el tensor de la métrica, ver apéndice A. Aparte de estas propiedades, las matrices  $\gamma$  son arbitrarias. En cuanto a  $C$ , se ve en el apéndice A.1 que satisface

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \quad (3.14)$$

Además, si queremos que la normalización de  $\Psi$  implique la de  $\Psi^c$  entonces  $C$  debe ser unitaria. Estas dos condiciones definen a  $C$  salvo una fase. Para evitar esta fase, definimos

$$\bar{\Psi}^c = -\Psi^T \gamma_0 \gamma_0^T C^{-1} \quad (3.15)$$

En el apéndice A se mencionan varias propiedades de las matrices  $\gamma^\nu$ . Como veremos más adelante, nos conviene definir una quinta matriz  $\gamma^5$  definida como

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (3.16)$$

#### 3.3.1 Representación de Dirac.

Para las matrices  $\gamma_\mu$ , Dirac eligió

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^l = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ -\sigma^l & 0 \end{pmatrix} \quad l = 1, 2, 3 \quad (3.17)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$  y las  $\sigma^l$ s son las matrices de Pauli (apéndice A). En esta representación la matriz  $\gamma^5$  se ve de la siguiente manera.

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

La matriz  $C$  definida en la sección 3.3, puede elegirse como

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

En esta representación, las soluciones de onda plana son

$$\varphi_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad \text{y} \quad \chi_s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \quad (3.20)$$

que son normalizadas por

$$\varphi_s^\dagger(\mathbf{p}) \varphi_{s'}(\mathbf{p}) = \chi_s^\dagger(\mathbf{p}) \chi_{s'}(\mathbf{p}) = 2E_p \delta_{ss'} \quad (3.21)$$

Tomando la expresión explícita de las matrices  $\gamma$  (3.17), en las ecuaciones (3.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_s(\mathbf{p}) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \Phi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \Phi_s \end{pmatrix} \\ \chi_s(\mathbf{p}) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \Phi'_s \\ \Phi'_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde

$$\Phi_{+\frac{1}{2}} = -\Phi'_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{-\frac{1}{2}} = \Phi'_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

### 3.3.2 Representación de Majorana

Esta es una representación bastante útil cuando se trabaja con partículas de Majorana. En ésta sí se puede considerar  $\Psi = \Psi^*$ , a diferencia de (3.7). Esto es porque en esta representación  $\sigma_{\mu\nu}$  definido en el apéndice A.1, es imaginario. Eso ocasiona que la partícula de Majorana sea simplemente un espinor con componentes reales. En este caso las matrices  $\gamma^\mu$  son imaginarias, lo que asegura que  $\sigma_{\mu\nu}$  sea imaginario. La forma explícita de las matrices es

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

y la matriz de conjugación es  $C = -\gamma^0$ .

### 3.3.3 Representación quirál.

En general un espinor se puede descomponer en sus componentes con quiralidad izquierda y derecha  $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$  donde

$$\Psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi \quad (3.25)$$

$$\Psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi \quad (3.26)$$

En la representación quirál esta descomposición adquiere una forma muy sencilla

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \varphi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

En esta representación las matrices  $\gamma^\mu$  se definen como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Con lo cual

$$P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

La matriz de conjugación de carga toma la forma

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

En esta representación es fácil demostrar que

$$(\Psi_{L,R})^c = (\Psi^c)_{R,L} \quad (3.32)$$

### 3.3.4 Otras representaciones.

Las representaciones mencionadas anteriormente son sólo algunas de las posibles. En general se puede encontrar una nueva representación a partir de alguna conocida. Dichas representaciones se relacionan por medio de la transformación

$$\gamma'^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U \quad (3.33)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria. Con una transformación como la anterior, se puede ver que si las matrices  $\gamma$  de cualquier representación cumplen con las ecuaciones (3.12) y (3.13), también las  $\gamma'$  las cumplen.

Por ejemplo, si los términos primados son la representación quirral y los no primados la de Dirac, entonces  $U$  está dada por

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_5\gamma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

La relación entre las soluciones de ambas representaciones es simplemente  $\psi_q = U\psi_D$ . Y la nueva matriz de conjugación de carga es

$$C' = U^\dagger C U \quad (3.35)$$

La representación que elijamos va a depender del problema a tratar, hay ciertas relaciones que son independientes de la representación, como la definición de la conjugación de carga dada en (3.7), sin embargo, otras se simplifican si se elige la representación adecuada.

## 3.4 Simetrías discretas y los neutrinos de Majorana.

Si los neutrinos son de Majorana, entonces son su propia antipartícula, por lo que esperamos que tengan propiedades especiales bajo las simetrías discretas de  $C$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $CP$  y  $CPT$ .

### 3.4.1 Conjugación de carga $C$ .

Bajo la transformación de  $C$  el campo de un fermión se transforma como

$$C\Psi(\mathbf{x}, t)C^{-1} = \eta_c^* \Psi^c(\mathbf{x}, t) \quad (3.36)$$

donde  $\eta_c$  es una fase y  $C$  es el operador de conjugación de carga (no confundir con la matriz de carga  $C$ ). Con la propiedad (3.11), los neutrinos de Majorana cumplen con

$$C\Psi(\mathbf{x}, t)C^{-1} = (\eta_c\lambda)^* \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.37)$$

Escribiendo la solución de Majorana (3.9) como operador y aplicándole la transformación de carga encontramos que

$$\begin{aligned} C f_s(\mathbf{p}) C^{-1} &= (\eta_c \lambda)^* f_s(\mathbf{p}) \\ C f_s^\dagger(\mathbf{p}) C^{-1} &= (\eta_c \lambda) f_s^\dagger(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando la unitariedad del operador C, observamos que para que se cumplan las últimas 2 expresiones necesitamos que

$$(\eta_c \lambda)^* = \eta_c \lambda \quad (3.39)$$

Si se Considera el estado de un neutrino con momento  $\mathbf{p}$  y espín  $s$   $|\mathbf{p}, s\rangle$  que se obtiene aplicando el operador de creación  $f_s^\dagger(\mathbf{p})$ , es decir

$$|\mathbf{p}, s\rangle = f_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \quad (3.40)$$

es posible demostrar, utilizando 3.38, que

$$\begin{aligned} C |\mathbf{p}, s\rangle &= C f_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = (\eta_c \lambda)^* f_s^\dagger(\mathbf{p}) C |0\rangle \\ &= (\eta_c \lambda) f_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = \eta_c \lambda |\mathbf{p}, s\rangle \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde se supuso que el vacío es invariante ante la conjugación de carga (es decir que  $C|0\rangle = |0\rangle$ ). Por lo tanto, una partícula de Majorana es un eigenestado del operador de conjugación de carga con eigenvalor real.

### 3.4.2 Transformaciones bajo P.

Para el operador fermiónico de campo, la paridad está dada por

$$P \Psi(\mathbf{x}, t) P^{-1} = \eta_P \gamma_0 \Psi(-\mathbf{x}, t) \quad (3.42)$$

Si se toma en cuenta que para un espinor de Dirac se cumple

$$P \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \eta_P \gamma_0 \bar{\Psi}(-\mathbf{x}, t) \quad (3.43)$$

es fácil encontrar que

$$\gamma_0 \varphi_s(\mathbf{p}) = \varphi_s(\mathbf{p}), \quad \gamma_0 \chi_s(\mathbf{p}) = -\chi_s(\mathbf{p}) \quad (3.44)$$

La validez de ésta última relación se puede comprobar en la representación de Dirac y generalizarse a las demás de acuerdo a lo visto en la subsección 3.3.4. Para la representación quiral tenemos que

$$\gamma_0 \Psi(-\mathbf{x}) = - \begin{pmatrix} \chi_s(-\mathbf{x}) \\ \varphi_s(-\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Es decir que la parte derecha ahora tiene como espinor el que antes era izquierdo y viceversa, ver (3.27).

### 3.4.3 Transformaciones bajo T.

A diferencia de las dos transformaciones anteriores, la transformación T es antilineal, es decir que

$$T(\alpha |\zeta\rangle) = \alpha^* T|\zeta\rangle \quad (3.46)$$

lo que implica que

$$\langle T\zeta | T\xi \rangle = \langle \xi | \zeta \rangle \quad (3.47)$$

Como consecuencia de esto, el operador CPT es antilineal. La expresión explícita de esta transformación es

$$T \Psi(\mathbf{x}, t) T = \eta_T i \gamma^1 \gamma^3 \Psi(\mathbf{x}, -t) \quad (3.48)$$

Al igual que con C y P, los neutrinos violan T, ya que todo parece indicar que se cumple CPT

### 3.4.4 Transformaciones bajo CP.

Tomando los resultados 3.36 y 3.42, y definiendo  $\Xi = CP$ , encontramos que

$$\Xi \Psi(\mathbf{x}, t) \Xi^{-1} = (\eta_{\Xi} \lambda)^* \gamma_0 \Psi(-\mathbf{x}, t) \quad (3.49)$$

Considerando la expresión de Majorana en ambos lados de la ecuación anterior se encuentran las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \Xi f_s(\mathbf{p}) \Xi^{-1} &= (\eta_{\Xi} \lambda)^* f_s(-\mathbf{p}) \\ \Xi f_s^\dagger(\mathbf{p}) \Xi^{-1} &= -(\eta_{\Xi} \lambda)^* f_s^\dagger(-\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Con estas dos relaciones se muestra que  $\eta_{\Xi} \lambda = -(\eta_{\Xi} \lambda)^*$ , por lo que dicho valor es imaginario. Ahora es posible demostrar que una partícula de Majorana cumple con la propiedad

$$\Xi |p, s\rangle = \eta_{\Xi} \lambda |-p, s\rangle \quad (3.51)$$

ante la transformación de CP.

### 3.4.5 Transformaciones bajo CPT.

Utilizando los resultados de 3.4.3 y 3.4.4 y definiendo  $\Theta = CPT$ , se puede demostrar que

$$\Theta \Psi(\mathbf{x}) \Theta^{-1} = -\eta_{\Theta}^* \gamma_5 \Psi^*(-\mathbf{x}) = -\eta_{\Theta}^* \gamma_5 \gamma_0 C^{-1} \Psi(-\mathbf{x}) \quad (3.52)$$

Usando el hecho de que T es antilineal se tiene que

$$\begin{aligned} \Theta f_s(\mathbf{p}) \Theta^{-1} &= \eta_{\Theta}^* \lambda^* (-1)^{s-\frac{1}{2}} f_{-s}(\mathbf{p}) \\ \Theta f_s^\dagger(\mathbf{p}) \Theta^{-1} &= -\eta_{\Theta}^* \lambda (-1)^{s-\frac{1}{2}} f_{-s}^\dagger(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donde hemos usado las relaciones de espinores

$$\begin{aligned} \gamma_5 \varphi_s(\mathbf{p}) &= (-1)^{s-\frac{1}{2}} \chi_{-s}(\mathbf{p}) \\ \gamma_5 \chi_s(\mathbf{p}) &= (-1)^{s-\frac{1}{2}} \varphi_{-s}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Analizando la ecuación(3.53) se encuentra que  $\eta_{\Theta} = -\eta_{\Theta}^*$ , por lo que la fase de CPT es imaginaria.

Aplicando (3.53) al vacío que es simétrico ante CPT, se obtiene

$$\Theta |p, s\rangle = \eta_{\Theta} \lambda (-1)^{s-\frac{1}{2}} |p, -s\rangle \quad (3.55)$$

La interacción CPT es la más importante de todas las simetrías, ya que en la fuerza débil, las simetrías no se conservan a excepción de CPT. Así que cualesquiera que sean las propiedades del campo libre de Majorana, podemos decir que las mismas propiedades están presentes en la partícula física.

De hecho la ecuación (3.52) puede tomarse como definición de partícula de Majorana. En un mundo donde no se conserva C ni CP, ésta es la única forma de decirlo.

## 3.5 Decaimiento doble $\beta$ .

Para saber si los neutrinos son partículas de Majorana, se puede buscar el decaimiento doble beta (emisión de dos electrones), en el laboratorio, [57]. Este decaimiento se muestra en la figura 3.4.

El decaimiento doble beta es el proceso Núcleo  $\rightarrow$  Núcleo' + 2e<sup>-</sup>, en el cual un núcleo decae en otro emitiendo dos electrones. El decaimiento es denotado como el decaimiento  $\beta\beta_{0\nu}$ . Si los neutrinos son

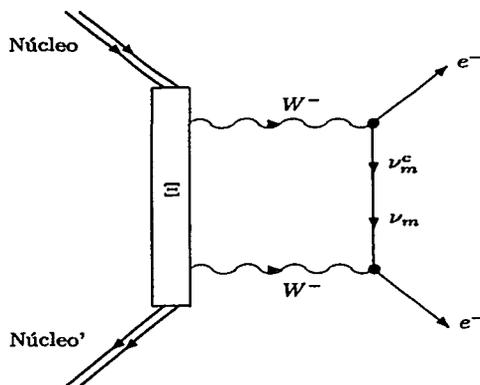


Figura 3.4: Diagrama de intercambio de neutrinos para el decaimiento  $Nucleo \rightarrow Nucleo' + \beta\beta_{0\nu}$ . Si este decaimiento es observado, entonces los neutrinos son partículas de Majorana.

de Majorana, entonces  $\nu_m^c = \nu_m$ , donde  $\nu_m$  son los neutrinos que tienen masa definida, el neutrino del electrón es una suma de estos estados. Esto se explica en el siguiente capítulo.

En el diagrama 3.4 dos bosones virtuales  $W^-$  son emitidos. Estos bosones intercambian un neutrino que tiene masa definida para crear los electrones salientes. Supongamos que el neutrino  $\nu_m$  se crea en el vértice superior del diagrama y recordando que el modelo estándar conserva el número leptónico, encontramos que la partícula creada en el vértice superior junto con  $e^-$  debe de ser un antineutrino  $\nu_m^c$ . Sin embargo, este neutrino es absorbido por el vértice inferior. Por conservación del número leptónico, para producir un  $e^-$  la partícula absorbida tiene que ser un neutrino y no un antineutrino. Por lo tanto, si el número leptónico se conserva, el diagrama no puede ocurrir a menos que  $\nu_m = \nu_m^c$ . Por lo tanto, una observación del decaimiento doble beta demostraría que los neutrinos  $\nu_m$  son partículas de Majorana. Y no sólo eso, sino que la amplitud del decaimiento sería una medida de una masa efectiva, la cual no sería una traducción directa de la masa del neutrino, pero implicaría una masa de Majorana distinta de cero para el neutrino.

Hay que tratar con cuidado este problema ya que existen mecanismos en los cuales ocurre el decaimiento doble beta sin la intervención de neutrinos [69], por lo que se debe asegurar que el experimento distinga los procesos distintos al diagrama de la figura 3.4.

## Capítulo 4

# Masas y oscilaciones de Neutrinos.

En este capítulo se estudia el fenómeno de oscilaciones de neutrinos en el vacío. En particular se determinan las probabilidades para que un neutrino izquierdo oscile a otro neutrino o antineutrino, después de viajar una distancia dada. Estas probabilidades incluyen el caso de la oscilación de un neutrino izquierdo a otros neutrinos de la misma familia y/o neutrinos de otra familia. Para este propósito, primero se estudia el Lagrangiano para neutrinos libres considerando la posibilidad de tener términos de masa tipo Dirac y de Majorana. Después de analizar la diagonalización del término de masa, se discuten diversos esquemas para la oscilación de neutrinos.

### 4.1 Diagonalización de Matrices.

En la siguiente sección se estudiará la matriz de masas cuando se incluyen términos de Dirac y de Majorana. Esta matriz no tiene por qué ser diagonal, de hecho no tiene porque ser hermitiana. Para poder encontrar los eigenvalores de la matriz de masa debemos diagonalizarla. El problema es que no hay garantía que los eigenvalores sean positivos. Los eigenvalores negativos no pueden interpretarse como valores de masa. Para solucionar este problema se puede utilizar el teorema que dice que cualquier matriz  $M$  puede ser diagonalizada por una transformación biunitaria tal que los eigenvalores sean no negativos. Esto quiere decir que dada  $M$ , existen matrices unitarias  $U$  y  $V$  tales que

$$U^\dagger M V = M_{diag} \quad (4.1)$$

En este caso, si el término original que aparece en el Lagrangiano es  $\bar{\psi} M \chi$ , entonces la base que diagonaliza a la matriz de masa esta dada por

$$\bar{\psi}_{diag} = \bar{\psi} U \quad \text{y} \quad \chi_{diag} = V^\dagger \chi \quad (4.2)$$

Cabe señalar que las matrices  $U$  y  $V$  no son únicas.

Un caso de particular interés es cuando la matriz  $M$  es simétrica. En ese caso, a partir de  $M = U M_{diag} V^\dagger$  se obtiene  $M^T = V^* M_{diag} U^T$ . Pero si la matriz  $M$  es simétrica,  $M = M^T$ , por lo que es posible elegir  $V = U^*$ , es decir que si  $M$  es una matriz simétrica, existe una matriz unitaria  $U$  tal que  $U^T M U$  es diagonal con elementos no negativos. Hay que tener cuidado con la última expresión, ya que se puede demostrar que si  $M$  es hermitiana y real, se puede elegir una matriz ortogonal  $O$  tal que  $O^T M O$  es diagonal, pero los elementos en la diagonal no son necesariamente positivos. Esto se arregla fácilmente, si hay un elemento negativo en el  $n$ -ésimo lugar de la diagonal, se puede definir  $U = K O$  donde  $K$  es una matriz diagonal con  $\sqrt{-1}$  en el  $n$ -ésimo lugar, y un 1 en el resto de la diagonal. Con esta elección  $U^T M U$  es diagonal no negativa, pero a diferencia de  $O$ ,  $U$  no es ortogonal. Otra forma de

obtener una matriz diagonal no negativa, es tomando  $V^\dagger$  como  $UK^2$  donde  $K^2$  es una matriz diagonal con un  $-1$  en el lugar donde la matriz diagonal  $M_{masa}$  tiene una masa negativa, y 1 en el resto de los elementos.

## 4.2 El Lagrangiano de los neutrinos.

Las interacciones de los neutrinos fueron estudiadas en la sección 2.3, llegando al Lagrangiano dado por la ecuación (2.23). Para considerar las oscilaciones de neutrinos en el vacío necesitamos el término libre de  $L_2$  (2.19) y (2.20) que describe la propagación de neutrinos.

El Lagrangiano que describe a los neutrinos libres es

$$L = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (4.3)$$

donde identificaremos a  $\psi$  con un neutrino  $\nu_l$  donde  $l = e, \mu, \tau, \dots$ . Para simplificar el análisis, es conveniente separar al Lagrangiano en un término cinético y uno de masa,  $L = L_{cin} + L_{masa}$ . Por el momento se tratará el caso de una sola familia de leptones por lo que se suprimirá el subíndice  $l$ .

### 4.2.1 Término $L_{masa}$

El término de masa es  $-L_{masa} = \bar{\nu} m \nu$ . Si se considera la descomposición  $\nu = \nu_L + \nu_R$  definida en 3.3.3, entonces se tiene que en general  $L_{masa}$  puede incluir términos del tipo  $\bar{\nu}_j \nu_k$  con  $j, k = L, R$ . Es fácil demostrar, utilizando (3.25), (3.26) y las propiedades de  $\gamma^5$  dadas en el apéndice A, que<sup>1</sup>

$$\bar{\nu}_L \nu_L = \bar{\nu}_R \nu_R = 0 \quad (4.4)$$

por lo que el Lagrangiano de masa toma la forma

$$-L_{masa} = \bar{\nu}_L m \nu_R + \bar{\nu}_R m \nu_L \quad (4.5)$$

Lo anterior muestra que los términos de masa conectan la parte izquierda con la derecha. Usualmente  $m$  es el único término de masa que se incluye para los fermiones cargados, dicho término se conoce como masa de Dirac. Sin embargo en el caso de los neutrinos, debido a que son partículas neutras, se pueden incluir las llamadas masas de Majorana. Para ello recordamos que las operaciones de conjugación de carga para fermiones se definen como

$$\psi^c = C\gamma^0\psi^* \quad \bar{\psi}^c = \psi^T C \quad (4.6)$$

Para las proyecciones izquierdas y derechas se tiene

$$\begin{aligned} \psi_L^c &\equiv (\psi_L)^c = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi^c = (\psi^c)_R \\ \psi_R^c &\equiv (\psi_R)^c = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi^c = (\psi^c)_L \end{aligned} \quad (4.7)$$

es decir que  $\psi_L^c$  y  $\psi_R^c$  son campos de quiralidad derecha e izquierda respectivamente. Recordando que los términos de masa conectan partes de diferente quiralidad, los siguientes términos de masa son válidos

$$\overline{(\nu^c)_L} \nu_R, \quad \overline{(\nu^c)_R} \nu_L, \quad \overline{(\nu^c)_L} (\nu^c)_R \quad (4.8)$$

a los anteriores hay que agregar sus conjugados hermitianos (c.h.). Se ve que gracias a (3.25) y (3.26), los términos  $\overline{(\nu^c)_L} \nu_L$ ,  $\overline{(\nu^c)_R} \nu_R$ ,  $\overline{(\nu^c)_L} (\nu^c)_L$ ,  $\overline{(\nu^c)_R} (\nu^c)_R$  y sus conjugados hermitianos se anulan, tal como (4.4).

<sup>1</sup> Cuando utilizamos  $L$  como subíndice, nos referimos exclusivamente a la parte izquierda. No tiene nada que ver con el Lagrangiano  $L$  como en (4.10).

Se puede pensar que los tres términos en (4.8) contribuyen a  $L_{masa}$ , sin embargo, es fácil demostrar que

$$\overline{(\nu^c)}_L (\nu^c)_R = \bar{\nu}_L \nu_R \quad (4.9)$$

Con esta última propiedad, se ve que el tercer término de (4.8) no aporta nada nuevo. Sin embargo, los primeros dos términos de la ecuación (4.8) pueden utilizarse para dar lugar a los términos de masa tipo Majorana

$$\begin{aligned} -L_L &= \frac{M_L}{2} \left[ \overline{(\nu^c)}_R \nu_L + \bar{\nu}_L (\nu^c)_R \right] \\ -L_R &= \frac{M_R}{2} \left[ \overline{(\nu^c)}_L \nu_R + \bar{\nu}_R (\nu^c)_L \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Utilizando la propiedad  $(\nu^c)_{R,L} = (\nu_{L,R})^c$  e incluyendo los términos de masa de Majorana y de Dirac se tiene que el Lagrangiano  $L_{masa}$  se puede escribir como

$$-L_{masa} = m (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) + \frac{M_L}{2} \left( \overline{(\nu_L)}^c \nu_L + \bar{\nu}_L (\nu_L)^c \right) + \frac{M_R}{2} \left( \overline{(\nu_R)}^c \nu_R + \bar{\nu}_R (\nu_R)^c \right) \quad (4.11)$$

donde la masa de Dirac  $m$  y las de Majorana  $M_{L,R}$ , son reales y positivas. Con la propiedad (4.9), el primer término a la derecha de la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{m}{2} (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) + \frac{m}{2} \left( \overline{(\nu_L)}^c (\nu_R)^c + \overline{(\nu_R)}^c (\nu_L)^c \right) \quad (4.12)$$

Definiendo los espinores

$$\begin{aligned} \chi &= \nu_L + (\nu_L)^c \\ \omega &= \nu_R + (\nu_R)^c \end{aligned} \quad (4.13)$$

y con las ecuaciones (4.11) y (4.12), después de un poco de álgebra, se puede escribir al Lagrangiano total de masa como

$$L_{masa} = -\frac{1}{2} \left( \bar{\chi} \quad \bar{\omega} \right) \begin{pmatrix} M_L & m \\ m & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

La matriz de la ecuación (4.14) se puede diagonalizar mediante una rotación de la forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

donde

$$\tan 2\theta = \frac{2m}{M_L - M_R} \quad (4.16)$$

Al hacer la rotación, se obtiene una matriz diagonal cuyas entradas son

$$m_i = \frac{M_R + M_L \pm \sqrt{(M_R - M_L)^2 + 4m^2}}{2} \quad (4.17)$$

donde el  $i = 1$  corresponde al signo  $+$ ,  $i = 2$  al signo  $-$ . Los valores de  $m$ ,  $M_L$  y  $M_R$  están dados por

$$m = \frac{m_1 - m_2}{2} \text{sen} 2\theta$$

$$M_L = m_1 \cos^2 \theta + m_2 \text{sen}^2 \theta \quad (4.18)$$

$$M_R = m_1 \text{sen}^2 \theta + m_2 \cos^2 \theta$$

Sin embargo, el término  $m_2$  puede ser negativo. Si  $m_2 < 0$ , no se puede interpretar como masa. Como se comento en la sección 4.1, una forma de solucionar esto es tomar  $U$  definida en (4.15) y a  $UK^2$  definida como:

$$UK^2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Así la matriz diagonal es

$$U^\dagger \begin{pmatrix} M_L & m \\ m & M_R \end{pmatrix} UK^2 = \begin{pmatrix} |m_1| & 0 \\ 0 & |m_2| \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

En este caso la base  $(\nu_1 \ \nu_2)$  en la que la matriz de masas es diagonal se relaciona con la base original  $(\chi \ \omega)$  a través de

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = UK^2 \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Así el Lagrangiano de masa, en la base diagonal es

$$\begin{aligned} L_{\text{masa}} &= -(\bar{\nu}_1 \ \bar{\nu}_2) \begin{pmatrix} |m_1| & 0 \\ 0 & |m_2| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \\ &= -\bar{\nu}_1 |m_1| \nu_1 - \bar{\nu}_2 |m_2| \nu_2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

de donde vale la pena resaltar que  $\nu_1$  y  $\nu_2$  tienen masa definida,  $(|m_1|)$  y  $(|m_2|)$  respectivamente, por lo que son buenos candidatos para ser eigenestados de masa<sup>2</sup>.

Para completar estos resultados a continuación se muestran algunas propiedades que tienen los estados  $\nu_1$  y  $\nu_2$ . La expresión explícita de  $\nu_1$  dada por (4.21) es

$$\nu_1 = \cos \theta (\nu_L + (\nu_L)^c) + \text{sen} \theta (\nu_R + (\nu_R)^c) \quad (4.23)$$

al tomar la operación de conjugación de carga se obtiene

$$\nu_1^c = \cos \theta ((\nu_L)^c + \nu_L) + \text{sen} \theta ((\nu_R)^c + \nu_R) = \nu_1 \quad (4.24)$$

es decir que  $\nu_1^c = \nu_1$ .

Mientras que para  $\nu_2$  se tiene

$$\nu_2 = \cos \theta (\nu_R - (\nu_R)^c) + \text{sen} \theta (\nu_L - (\nu_L)^c) \quad (4.25)$$

Nuevamente al aplicar la conjugación de carga se obtiene

$$\nu_2^c = C\gamma_0\nu_2^* = \cos \theta ((\nu_R)^c - \nu_R) + \text{sen} \theta ((\nu_L)^c - \nu_L) = -\nu_2 \quad (4.26)$$

así que  $\nu_2 = -\nu_2$ . De las últimas expresiones se observa que  $\nu_1$  y  $\nu_2$  cumplen con la ecuación (3.11) por lo que son partículas de Majorana. Lo anterior muestra que al incluir los términos más generales de masa, se tiene que un campo fermiónico se puede descomponer en dos partículas de Majorana, con masas  $m_1$  y  $m_2$ .

Como se mencionó en 4.1, las matrices que diagonalizan la matriz de (4.14) con valores no negativos, no son únicas, por lo que la forma explícita de los eigenestados de masa  $\nu_{1,2}$ , puede cambiar, sin embargo, seguirán siendo partículas de Majorana, y su interpretación física es la misma.

Resumiendo, se empezó con el Lagrangiano de masa definido en (4.3), para un neutrino de una sola generación. Posteriormente al separar a los neutrinos en su parte derecha e izquierda, y con un poco de

<sup>2</sup>En lo que resta de este trabajo denotaremos con un número en el subíndice a los neutrinos que son eigenestados de masa.

álgebra, se encontró que el Lagrangiano más general puede tener 3 masas distintas: masa de Dirac  $m$ , y dos de Majorana  $M_L$  y  $M_R$ . Por último se diagonalizó la matriz de masa de tal forma que los valores en la diagonal fuesen no negativos. Una vez hecho esto, se encontró que el Lagrangiano total de masa es (4.22). De esta última expresión se mostró que los eigenestados de masa son partículas de Majorana con masas distintas. Es decir, que las 4 componentes del neutrino (neutrino y antineutrino derechos e izquierdos) se reducen a dos eigenestados de masa tipo Majorana.

#### 4.2.2 Término $L_{cin}$

Para escribir el término  $L_{cin}$  dado por

$$L_{cin} = i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu \quad (4.27)$$

en términos de sus proyecciones  $\nu_L$  y  $\nu_R$  se utilizan las propiedades de la matriz  $\gamma^5$  dadas en el apéndice A, para obtener

$$\bar{\nu}_{R,L}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{R,L} \neq 0 \quad (4.28)$$

$$\bar{\nu}_{R,L}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{L,R} = 0$$

Tomando en cuenta la propiedad  $\bar{\nu}_L^c\gamma_\mu\nu_L^c = \bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L$  y la ecuación (4.28), se encuentra que la ecuación (4.27) se puede escribir como

$$L_{cin} = \frac{i}{2}(\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu + \bar{\nu}^c\gamma^\mu\partial_\mu\nu^c) \quad (4.29)$$

y utilizando la base dada en (4.23) y (4.25) es fácil ver que (4.29) se vuelve

$$L_{cin} = \frac{1}{2}i\nu_1\gamma^\mu\partial_\mu\nu_1 + \frac{1}{2}i\nu_2\gamma^\mu\partial_\mu\nu_2 \quad (4.30)$$

Así que el Lagrangiano total para los neutrinos de una sola generación está dado por (4.22) y (4.30) como

$$L = \frac{1}{2}(i\nu_1\gamma^\mu\partial_\mu\nu_1 - |m_1|\bar{\nu}_1\nu_1) + \frac{1}{2}(i\nu_2\gamma^\mu\partial_\mu\nu_2 - |m_2|\bar{\nu}_2\nu_2) \quad (4.31)$$

Como se anticipó al final de la subsección anterior, el problema original dado por un campo fermiónico (4.3) descrito por cuatro componentes con masas de Dirac y de Majorana, se reduce a la descripción de 2 partículas libres de Majorana con masas distintas.

#### 4.2.3 Caso general.

En las subsecciones pasadas sólo se trabajó con una familia de leptones. Ahora se verá qué sucede cuando existen  $N$  familias. En este caso el Lagrangiano de masa se vuelve

$$-L_{masa} = \sum_{l,l'}^N \bar{\nu}_{l,R} m_{ll'} \nu_{l,L} + \frac{1}{2} \sum_{l,l'}^N (\bar{\nu}_{l,L})^c M_{l'l} \nu_{l,L} + \frac{1}{2} \sum_{l,l'}^N (\bar{\nu}_{l,R})^c M_{l'l} \nu_{l,R} + \text{c.h.} \quad (4.32)$$

donde  $l, l' = e, \mu, \tau, \dots$ . Esta ecuación se puede escribir de la misma forma que la ecuación (4.14), para esto se debe reemplazar la matriz de ésta ecuación por

$$\begin{pmatrix} M_L & m \\ m^T & M_R \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Donde  $M_L$ ,  $M_R$  y  $m$  ahora representan matrices de  $N \times N$  y  $\nu_L$  y  $\nu_R$  son vectores de  $N$  componentes.

La nueva matriz de masa puede ser diagonalizada, de igual forma que en 4.2.1, y en este caso se obtendrán  $2N$  partículas de Majorana. Por ejemplo, según el modelo estándar  $N=3$ , por lo que se encontrarán 6 neutrinos que son eigenestados de masa.

Los términos de masa en (4.33) son predichos por varias teorías de gran unificación (GUT), y proveen un marco de trabajo bastante simple para el mecanismo de "see-saw."

Tal vez lo más interesante de este Lagrangiano es la gran cantidad de fenómenos que predice, como la oscilación de neutrinos, decaimientos como  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$ ,  $\tau \rightarrow e + \pi^0$ ,  $\mu^- + (Z, A) \rightarrow (Z + 1, A) + e^-$  y el decaimiento doble beta  $(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^-$ .

### 4.3 Mecanismo de "see-saw."

Al suponer que los neutrinos tienen masa, como el resto de los fermiones, estos pueden ser descritos por el Lagrangiano dado en la expresión (4.3). Sin embargo, el tratarlos como fermiones masivos no explica por qué su masa es tan pequeña, en comparación con el resto de los fermiones. Un método relativamente sencillo es el método de "see-saw", el cual justifica la masa tan pequeña del neutrino introduciendo un neutrino con una masa muy grande. A continuación se ve en términos muy generales como funciona este mecanismo.

Para empezar se tratará el caso de una sola familia,  $N=1$ , por lo que la matriz de masa (4.33) se reduce a la matriz de la ecuación (4.14). Hagamos la suposición que  $M_R \gg M_L$ , así la matriz de masas se puede aproximar por

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M_R \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Esta matriz se diagonaliza con una matriz  $U$  dada por (4.15) que se vuelve

$$UK^2 = \begin{pmatrix} \frac{m}{M_R} & 1 \\ 1 & -\frac{m}{M_R} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

la cual también se puede escribir en términos de un ángulo  $\theta$  tal que  $\tan \theta = \frac{M_R}{m}$ .

La matriz diagonal de masa es

$$M_{diag} \simeq \begin{pmatrix} M_R & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{M_R} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

y la base que diagonaliza a la matriz de masa es

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{m}{M_R} (\nu_L + (\nu_L)^c) + (\nu_R + (\nu_R)^c) \\ \nu_2 &= (\nu_R - (\nu_R)^c) + \frac{m}{M_R} (\nu_L - (\nu_L)^c) \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde usamos la definición de (4.23) y (4.25). Los eigenvalores de la matriz de masa son

$$m_1 \simeq M_R \quad \text{y} \quad m_2 \simeq \frac{m^2}{M_R} \quad (4.38)$$

Al observar el Lagrangiano (4.3), es razonable suponer que  $m$  es del orden de la masa del leptón cargado de la familia, es decir, si se trata al neutrino del electrón,  $m \simeq m_e \simeq 0.511$  MeV. Si además se pide que  $M_R \gg m$ , entonces  $m \gg m_2$ , lo que significa que existe un neutrino con masa mucho menor a la de los fermiones, todo esto a cambio de introducir un neutrino masivo de masa  $M_R$ . A pesar de que  $\nu_1$  y  $\nu_2$  no son los neutrinos observados, en este límite es posible suponer que la masa del neutrino izquierdo es la masa del eigenestado de masa ligero ( $m_2$ ), y que el neutrino derecho tiene una masa muy pesada ( $m_1$ ). Este es precisamente el mecanismo de "see-saw."

Ahora la pregunta es ¿de qué orden es la masa de los neutrinos masivos? Para poder contestar esta pregunta hay que revisar varios argumentos. Por ejemplo, existen argumentos cosmológicos que restringen la masa de cualquier neutrino estable para que sea  $\leq 30$  eV, [69], aunque actualmente este límite está en discusión, el último valor es de  $\sim 1$  keV. Por ejemplo si  $\nu_\tau$  es menor a 30 eV, (4.38) implica que  $M_R \geq 10^8$  GeV, si  $m \simeq m_\tau$ . El problema con esto es que este valor de masa es mayor que la escala de la fuerza débil que es  $\simeq 10^2$  GeV. Esta gran diferencia de escalas en el modelo es el problema conocido como jerarquía de masas. Esta diferencia de masa hace que el modelo sea poco atractivo, a menos que se introduzca una teoría unificada.

La generalización de este método para  $N$  familias es simple. Ahora la matriz  $M_L$  de (4.33) es despreciable.<sup>3</sup> Suponiendo que los eigenvalores de la matriz  $M_R$  son grandes comparados con los de la matriz  $m$ , se encuentra que las masas de los eigenestados de masa se divide en una masa ligera y una pesada. Los neutrinos ligeros tienen una matriz de masa de  $N \times N$

$$(M_\nu)_{LIGERO} = mM_R^{-1}m^T \quad (4.39)$$

mientras que la matriz de masa de los estados pesados es

$$(M_\nu)_{PESADO} = M_R \quad (4.40)$$

**Fórmula de "see-saw" tipo I** Este tipo de "see-saw" es precisamente el obtenido en la ecuación (4.39). Esta fórmula es usada si se supone que la masa de los neutrinos sigue cierta jerarquía,  $m_{\nu_e} \ll m_{\nu_\mu} \ll m_{\nu_\tau}$ , al igual que el resto de los leptones,  $m_e \ll m_\mu \ll m_\tau$ .

**Fórmula de "see-saw" tipo II** En este caso, la masa ligera es

$$M_\nu \simeq f \frac{v_w^2 k}{v_R} - mM_R^{-1}m^T \quad (4.41)$$

donde el primer término a la derecha se compone de términos que provienen de la teoría de interacciones electrodébiles y el segundo término es el que aparece en el tipo I. [67]

Este tipo de fórmula surge al considerar que la masa de los neutrinos puede ser degenerada en vez de seguir una jerarquía, es decir que  $m_{\nu_e} \sim m_{\nu_\mu} \sim m_{\nu_\tau}$ . Este caso proviene de pedir que los neutrinos constituyan una fracción importante de la materia oscura del universo.

**Fórmula de "see-saw" tipo III** Los dos tipos de fórmulas anteriores son útiles para construir modelos con neutrinos con masas muy ligeras. Sin embargo, hay ocasiones en que estos modelos no pueden usarse. Un ejemplo es cuando, al aumentar ciertas simetrías, se obtiene una matriz  $M_R$  singular, cuya matriz inversa no existe. Una forma alternativa para poder aplicar un método similar al "see-saw" involucra una matriz de  $3 \times 3$  en vez de una de  $2 \times 2$  como la que se ha mencionado. Este modelo, llamado del tipo III [67], consiste en tomar 3 fermiones, para una familia, dos de los fermiones son los usuales neutrinos  $\nu_L$  y  $\nu_R$  y el tercer fermión es un neutrino estéril  $\nu_s$ . La matriz equivalente a (4.34) es

$$\begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ m & 0 & M \\ 0 & M & \mu' \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Donde  $m$  es la masa de Dirac,  $M$  y  $\mu'$  son masas construidas en términos de las masas del neutrino estéril,  $M_L$  y  $M_R$ . Asumiendo que  $\mu', m \ll M$ , la masa del neutrino es

$$m_\nu = \frac{m^2 \mu'}{M^2} \quad (4.43)$$

<sup>3</sup>Una matriz es despreciable si sus eigenvalores lo son.

La generalización para las tres familias es inmediata. El punto importante es que si la matriz  $M_R$  es singular, se pueden construir dos matrices  $\mu'$  y  $M$ , tales que  $\mu'$  sea la matriz singular en vez de  $M$ . Todo a cambio de introducir un nuevo neutrino estéril por familia. En esta tesis sólo se utiliza el tipo I.

#### 4.4 Oscilaciones de Neutrinos en el vacío

A continuación se dará una descripción del fenómeno de oscilaciones de neutrinos. Las oscilaciones se dividen en dos tipos: (A) oscilaciones de quiralidad y C, un ejemplo en el primer caso es  $\nu_L \rightarrow \nu_R$  y en el segundo, la oscilación neutrinos antineutrinos como  $\nu_{eL} \rightarrow (\nu_e^c)_L$ ; (B) oscilaciones entre neutrinos de distintas familias como  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . En general las oscilaciones pueden ocurrir entre neutrinos y antineutrinos de distintas familias [33, 36, 55, 69, 72]. Como se ve más adelante, la probabilidad oscilar de un neutrino activo a uno estéril es del orden  $M^2/E^2$ , donde  $M$  y  $E$  son la masa y la energía del estado de masa del neutrino, por lo que en muchos casos pueden ser despreciadas. En la literatura se encuentran varios trabajos que tratan la oscilación de neutrinos, algunos trabajos que se estudiaron para esta tesis son [17, 19, 26, 31, 36, 62, 72].

##### 4.4.1 Oscilaciones con cambio de quiralidad o C (una sola familia).

Si bien el caso más conocido es de oscilaciones con cambio de sabor entre dos o más familias, se pueden tener oscilaciones con cambio de quiralidad o C, dentro de una sola familia. En este caso se tiene por ejemplo, que un haz inicialmente compuesto por  $\nu_L$  oscile, dando lugar a una composición posterior que incluye  $\nu_R$ ,  $(\nu_L)^c$  y  $(\nu_R)^c$ .

Para encontrar las oscilaciones dentro de una sola familia es necesario encontrar cómo se propagan los eigenestados de masa. Suponemos que los neutrinos tienen un momento  $\mathbf{p}$  bien definido que se puede expresar en términos de los estados  $\nu_1$  y  $\nu_2$  que tienen masas bien definidas de acuerdo a las ecuaciones (4.19) y (4.21). Como los eigenestados  $\nu_1$  y  $\nu_2$  satisfacen la ecuación de Dirac, en general pueden escribirse como la suma de 4 soluciones ortonormales de la ecuación de Dirac, obteniendo:

$$\nu_{1,2} = u^+(p) e^{-iEt} + u^-(p) e^{-iEt} + v^+(p) e^{iEt} + v^-(p) e^{iEt} \quad (4.44)$$

donde  $u$  y  $v$  son los espinores de energía positiva y negativa respectivamente,  $+$  y  $-$  denotan la helicidad [24, 53].

Conviene escribir el Lagrangiano (4.31) de la siguiente forma

$$2L = \bar{\nu}_1 \not{p} \nu_1 + \bar{\nu}_2 \not{p} \nu_2 - \bar{\nu}_1 m_1 \nu_1 - \bar{\nu}_2 m_2 \nu_2 \quad (4.45)$$

A partir de este Lagrangiano, escribimos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \not{p} \nu_1 - m_1 \nu_1 &= 0 \\ \not{p} \nu_2 - m_2 \nu_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Las soluciones tienen helicidad  $\lambda$ , recordando que el operador de helicidad se define como

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda \quad (4.47)$$

con  $\lambda = \pm 1$ . Con las matrices  $\gamma^\mu$  en la representación quiral se encuentra que

$$\not{p} = \begin{pmatrix} 0 & -E - \lambda p \\ -E + \lambda p & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Por lo que la primera ecuación de (4.46), puede escribirse

$$\begin{pmatrix} -m_1 & -\lambda p \\ \lambda p & -m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{1L} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{1L} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

En la ecuación anterior identificamos a la matriz que aparece en el lado izquierdo con el Hamiltoniano  $\hat{H}_1$ . Este Hamiltoniano es fácilmente diagonalizable con una matriz

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\text{sen} \varphi_1 \\ \text{sen} \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

donde

$$\tan 2\varphi_1 = -\frac{m_1}{\lambda p} \quad (4.51)$$

Los eigenvalores de la energía son

$$\begin{aligned} E_A &= \sqrt{p^2 + m_1^2} = E_1 \\ E_B &= -E_1 \end{aligned} \quad (4.52)$$

y la base donde  $\hat{H}_1$  es diagonal es

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{1L} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Para la segunda ecuación de (4.46) se encuentra el mismo resultado cambiando el subíndice 1 por 2.

Supongamos que al tiempo  $t = 0$  se tiene un neutrino puramente izquierdo, al tiempo  $t$  queremos determinar la probabilidad de encontrar cualquier otro neutrino de la misma familia. Recordando que para neutrinos izquierdos  $\lambda = -1$  y utilizando las ecuaciones (4.21) y (4.53) podemos expresar a  $\nu_L$  en términos de los estados  $\eta_1, \eta_2, \xi_1$  y  $\xi_2$  como

$$|\nu_L\rangle = \cos \theta (\text{sen} \varphi_1 |\eta_1\rangle + \cos \varphi_1 |\xi_1\rangle) + \text{sen} \theta (\text{sen} \varphi_2 |\eta_2\rangle + \cos \varphi_2 |\xi_2\rangle) \quad (4.54)$$

a la cual es posible aplicar el operador de evolución  $e^{(-i\hat{H}t)}$ , obteniendo

$$\begin{aligned} |\nu_L(t)\rangle &= \cos \theta (\text{sen} \varphi_1 e^{-iE_1 t} |\eta_1\rangle + \cos \varphi_1 e^{iE_1 t} |\xi_1\rangle) \\ &+ \text{sen} \theta (\text{sen} \varphi_2 e^{-iE_2 t} |\eta_2\rangle + \cos \varphi_2 e^{iE_2 t} |\xi_2\rangle) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Expresando  $\eta_1, \eta_2, \xi_1$  y  $\xi_2$  en términos de  $\nu_L, \nu_R, (\nu_L)^c$  y  $(\nu_R)^c$  con (4.21) y (4.53), y utilizando las ecuaciones (4.51) y (4.52) para escribir los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en función de las masas y energías de los neutrinos, se obtiene

$$\begin{aligned} |\nu_L(t)\rangle &= \left[ \cos^2 \theta \cos E_1 t + \text{sen}^2 \theta \cos E_2 t - i \left( \cos^2 \theta \frac{p}{E_1} \text{sen} E_1 t + \text{sen}^2 \theta \frac{p}{E_2} \text{sen} E_2 t \right) \right] |\nu_L\rangle \\ &+ \left[ \cos E_1 t - \cos E_2 t - i \left( \frac{p}{E_1} \text{sen} E_1 t - \frac{p}{E_2} \text{sen} E_2 t \right) \right] \cos \theta \text{sen} \theta |(\nu_R)^c\rangle \\ &- i \left[ \frac{|m_1|}{E_1} \cos^2 \theta \text{sen} E_1 t - \frac{|m_2|}{E_2} \text{sen}^2 \theta \text{sen} E_2 t \right] |(\nu_L)^c\rangle \\ &- i \left[ \frac{|m_1|}{E_1} \text{sen} E_1 t + \frac{|m_2|}{E_2} \text{sen} E_2 t \right] \cos \theta \text{sen} \theta |\nu_R\rangle \end{aligned} \quad (4.56)$$

de donde se ve claramente que a pesar de que al tiempo  $t = 0$  sólo existe  $\nu_L$ , al tiempo  $t$  pueden encontrarse  $\nu_R, (\nu_R)^c$  y  $(\nu_L)^c$ . Las probabilidades de estas transiciones son

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R; t) = |\langle \nu_R | \nu_L(t) \rangle|^2 = \left( \frac{|m_1|}{E_1} \text{sen} E_1 t + \frac{|m_2|}{E_2} \text{sen} E_2 t \right)^2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta \quad (4.57)$$

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_L)^c; t) = |\langle (\nu_L)^c | \nu_L(t) \rangle|^2 = \left( \frac{|m_1|}{E_1} \cos^2 \theta \text{sen} E_1 t - \frac{|m_2|}{E_2} \text{sen}^2 \theta \text{sen} E_2 t \right)^2 \quad (4.58)$$

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_R)^c; t) = |\langle (\nu_R)^c | \nu_L(t) \rangle|^2 = \left( (\cos E_1 t - \cos E_2 t)^2 + \left( \frac{|p_L|}{E_1} \sin E_1 t - \frac{|p_L|}{E_2} \sin E_2 t \right)^2 \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (4.59)$$

y la probabilidad de supervivencia de  $\nu_L$  es

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_L; t) = |\langle \nu_L | \nu_L(t) \rangle|^2 = (\cos^2 \theta \cos E_1 t + \sin^2 \theta \cos E_2 t)^2 + \left( \frac{|p_L|}{E_1} \cos^2 \theta \sin E_1 t + \frac{|p_L|}{E_2} \sin^2 \theta \sin E_2 t \right)^2 \quad (4.60)$$

donde  $\theta$  está definida en (4.16) y  $m_{1,2}$  por (4.17). Es fácil comprobar que la suma de las cuatro probabilidades es 1. A continuación se ven algunos casos especiales.

#### Casos especiales.

**Masas de Majorana.** Cuando la masa de Dirac es cero ( $m = 0$ ), se tiene que  $\sin(2\theta) = 0$  y las probabilidades se reducen a

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R; t) = P(\nu_L \rightarrow (\nu_R)^c; t) = 0 \quad (4.61)$$

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_L)^c; t) = \left( \frac{|m_1|}{E_1} \sin E_1 t \right)^2 \quad (4.62)$$

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_L; t) = 1 - \left( \frac{|m_1|}{E_1} \sin E_1 t \right)^2 \quad (4.63)$$

es decir que el neutrino sólo se acopla al antineutrino. Lo anterior está de acuerdo con el hecho discutido anteriormente de que los términos de Majorana violan la conservación del número leptónico.

**Igualmas de Majorana** En este caso  $M_L = M_R = M$  lo que implica que  $\theta = \pi/4$  y  $m_{1,2} = M \pm m$ . En este caso las 4 probabilidades (4.57)-(4.60) son distintas de cero.

**Neutrino de Dirac.** En este caso el neutrino no tienen masas de Majorana ( $M_L = M_R = 0$ ), entonces  $E_1 = E_2$  y  $m_1 = -m_2 = m$ , transformando las probabilidades en

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_R)^c; t) = P(\nu_L \rightarrow (\nu_L)^c; t) = 0 \quad (4.64)$$

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R; t) = \left( \frac{|m|}{E_1} \sin E_1 t \right)^2 \quad (4.65)$$

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_L; t) = 1 - \left( \frac{|m|}{E_1} \sin E_1 t \right)^2 \quad (4.66)$$

**Caso ultrarrelativista.** En este caso se toma en cuenta que las masas de  $\nu_1$  y  $\nu_2$  son muy pequeñas comparadas con las energías,  $E_i \simeq p$ . Las probabilidades son

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R) \simeq \frac{m^2}{p^2} \sin^2 2\theta \sin^2 pt \simeq 0 \quad (4.67)$$

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_L)^c) \simeq \frac{\sin^2 pt}{p^2} (|m_2| \sin^2 \theta - |m_1| \cos^2 \theta)^2 \simeq 0 \quad (4.68)$$

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_R)^c) \simeq \text{sen}^2(2\theta) \text{sen}^2\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{4|p|}t\right) \quad (4.69)$$

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_L) \simeq 1 - \text{sen}^2(2\theta) \text{sen}^2\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{4|p|}t\right) \quad (4.70)$$

Recuperando la fórmula originalmente propuesta por Pontecorvo para la probabilidad de supervivencia [31, 32, 76]. Nótese que, además de los factores de supresión, las probabilidades de que el neutrino cambie de quiralidad y las pobabilidades de que no lo haga, tienen diferentes periodos de oscilación. Si se desprecian los términos  $(m_i/p)^2$ , entonces las probabilidades dependen de la diferencia del cuadrado de las masas y la oscilación se da sólo entre neutrinos izquierdos.

Las expresiones (4.57) a (4.60), pueden aplicarse a dos tipos de experimentos distintos. El primer tipo son los llamados "experimentos de aparición". Estos experimentos se basan en detectar un neutrino  $\nu_{l'}$  de un flujo que inicialmente se componía de  $\nu_l$  con  $l \neq l'$ . El segundo tipo de experimentos son llamados "experimentos de desaparición" y se basan en medir la reducción en el flujo de  $\nu_l$  a un tiempo dado o una distancia dada de su fuente. Estos dos tipos de experimentos no miden necesariamente lo mismo. Por ejemplo, si en un experimento de desaparición, se detecta una reducción el flujo de neutrinos  $\nu_l$ , no se puede saber si el neutrino osciló a algún neutrino que interacciona vía una corriente neutra u osciló a un neutrino estéril, el cual no interacciona.

**Caso de "Seew-Saw".** En este caso se tiene una masa pesada ( $m_1$ ) y una masa ligera ( $m_2$ ). Con estas suposiciones se puede encontrar que  $\theta$  satisface

$$\cos \theta = \frac{|m_2|}{|m_1|} \quad (4.71)$$

Como la masa  $m_2$  es ligera, podemos suponer que  $\nu_2$  es ultrarrelativista, lo cual no necesariamente se cumple para  $\nu_1$ . En este caso las probabilidades de oscilación son

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R; t) \simeq \left(\frac{|m_1|}{E_1} \text{sen} E_1 t\right)^2 \frac{|m_2|}{|m_1|} \quad (4.72)$$

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_L)^c; t) \simeq \left(\frac{\text{sen} E_1 t}{E_1} - \frac{\text{sen} E_2 t}{E_2}\right)^2 m_2^2 \quad (4.73)$$

$$P(\nu_L \rightarrow (\nu_R)^c; t) \simeq \left(\cos E_1 t - \cos E_2 t\right)^2 + \left(\frac{E_2}{E_1} \text{sen} E_1 t - \text{sen} E_2 t\right)^2 \frac{|m_2|}{|m_1|} \quad (4.74)$$

$$\simeq 4 \text{sen}^2\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{4|p|}t\right)$$

donde el segundo renglón de la última ecuación ocurre si el neutrino con masa  $m_1$  también es ultrarrelativista.

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_L; t) = 1 - P(\nu_L \rightarrow \nu_R; t) - P(\nu_L \rightarrow (\nu_L)^c; t) - P(\nu_L \rightarrow (\nu_R)^c; t) \quad (4.75)$$

Cuando se toma en cuenta el valor de  $|m_2|/|m_1|$  tabla 4.1, la razón entre las masas es muy pequeña, por lo que las oscilaciones son casi cero.

#### 4.4.2 Oscilaciones de sabor (2 familias).

Ahora se tratará el caso cuando tenemos dos familias de neutrinos, digamos  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ . Podemos Suponer que los dos neutrinos están relacionados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\varphi |\nu_I\rangle + \text{sen}\varphi |\nu_{II}\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\text{sen}\varphi |\nu_I\rangle + \cos\varphi |\nu_{II}\rangle \end{aligned} \quad (4.76)$$

donde  $\nu_I$  y  $\nu_{II}$  representan cada uno a los 2 eigenestados de masa asociados a  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  respectivamente; y  $\varphi$  es el ángulo de mezcla el cual se determina experimentalmente. Al escribir los términos de masa para los estados  $\nu_I$  y  $\nu_{II}$  (incluyendo masas de Dirac y Majorana) se obtienen masas  $m_{I1}$ ,  $m_{I2}$ ,  $m_{II1}$  y  $m_{II2}$ .

Si pedimos que al tiempo  $t = 0$  solamente existan neutrinos izquierdos del electrón, la primera ecuación de (4.76) se vuelve

$$|\nu_{eL}\rangle = \cos\varphi |\nu_{IL}\rangle + \text{sen}\varphi |\nu_{IIL}\rangle \quad (4.77)$$

Para encontrar  $|\nu_{eL}(t)\rangle$ , se procede de igual forma que en la sección anterior encontrando

$$|\nu_{eL}(t)\rangle = \cos\varphi |\nu_{IL}(t)\rangle + \text{sen}\varphi |\nu_{IIL}(t)\rangle \quad (4.78)$$

donde  $\nu_{I,II L}(t)$  están dados por la ecuación (4.56).

A partir de las ecuaciones (4.76) y (4.78), y después de un poco de álgebra se encuentra que las probabilidades de que un neutrino izquierdo del electrón, oscile a otro neutrino de alguna de las dos familias son:

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) = \cos^2\varphi \text{sen}^2\varphi [(A_I - A_{II})^2 + (B_I - B_{II})^2] \quad (4.79)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eL})^c; t) = [\cos^2\varphi C_I + \text{sen}^2\varphi C_{II}]^2 \quad (4.80)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu L})^c; t) = \cos^2\varphi \text{sen}^2\varphi [C_I - C_{II}]^2 \quad (4.81)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eR})^c; t) = [\cos^2\varphi D_I + \text{sen}^2\varphi D_{II}]^2 + [\cos^2\varphi F_I + \text{sen}^2\varphi F_{II}]^2 \quad (4.82)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu R})^c; t) = \cos^2\varphi \text{sen}^2\varphi [(D_I - D_{II})^2 + (F_I - F_{II})^2] \quad (4.83)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR}; t) = [\cos^2\varphi G_I + \text{sen}^2\varphi G_{II}]^2 \quad (4.84)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}; t) = \cos^2\varphi \text{sen}^2\varphi [G_I - G_{II}]^2 \quad (4.85)$$

y la probabilidad de que  $\nu_{eL}$  sobreviva es

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) = [\cos^2\varphi A_I + \text{sen}^2\varphi A_{II}]^2 + [\cos^2\varphi B_I + \text{sen}^2\varphi B_{II}]^2 \quad (4.86)$$

donde hemos usado las siguientes definiciones<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Todas las masas  $m_{i1}$ ,  $m_{i2}$  y la magnitud del momento  $p$  se refieren a los valores positivos.

$$\begin{aligned}
A_i &= \cos^2 \theta_i \cos E_{i1}t + \sin^2 \theta_i \cos E_{i2}t \\
B_i &= \cos^2 \theta_i \frac{p}{E_{i1}} \sin E_{i1}t + \sin^2 \theta_i \frac{p}{E_{i2}} \sin E_{i2}t \\
C_i &= \cos^2 \theta_i \frac{m_i^2}{E_{i1}^2} \sin E_{i1}t - \sin^2 \theta_i \frac{m_i^2}{E_{i2}^2} \sin E_{i2}t \\
D_i &= (\cos E_{i1}t - \cos E_{i2}t) \cos \theta_i \sin \theta_i \\
F_i &= \left( \frac{p}{E_{i1}} \sin E_{i1}t - \frac{p}{E_{i2}} \sin E_{i2}t \right) \cos \theta_i \sin \theta_i \\
G_i &= \left( \frac{m_i^2}{E_{i1}^2} \sin E_{i1}t + \frac{m_i^2}{E_{i2}^2} \sin E_{i2}t \right) \cos \theta_i \sin \theta_i
\end{aligned} \tag{4.87}$$

con  $i = I, II$ . De la ecuación (4.16), se encuentra

$$\tan(2\theta_i) = \frac{2m_i}{M_{iL} - M_{iR}} \tag{4.88}$$

donde  $m_i$  son las masas de Dirac y  $M_{iL}, M_{iR}$  las masas de Majorana. Las masas  $m_{i1,2}$  están definidas por (4.17) donde se debe agregar el subíndice  $i$  a cada una de las masas. Como es de esperarse, se cumple que

$$\sum_j P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_j) = 1 \tag{4.89}$$

Si se cumple que  $\varphi = 0$ ,  $n\frac{\pi}{2}$ , con  $n$  entero, se tiene

$$\begin{aligned}
|\nu_e\rangle &= |\nu_I\rangle \\
|\nu_\mu\rangle &= |\nu_{II}\rangle
\end{aligned} \tag{4.90}$$

y en este caso no hay oscilaciones entre neutrinos de distintas familias, recuperando el caso tratado en la sección 4.4.1. Sólo tendremos oscilaciones entre familias cuando  $\varphi \neq n\frac{\pi}{2}$ .

El problema con estas oscilaciones es que las fórmulas contienen 7 parámetros: 2 masas de Dirac, 4 masas de Majorana y el ángulo  $\varphi$ . Este número de parámetros se puede reducir dependiendo de las aproximaciones hechas. Ahora veamos algunos casos especiales.

#### Casos especiales.

**Masas de Majorana.** En este caso las dos masas de Dirac valen cero, y procediendo análogamente a los casos especiales de la sección 4.4.1, se ve que  $\nu_{eL}$  sólo oscila hacia los neutrinos izquierdos y los antineutrinos derechos, que son los neutrinos activos. Estas probabilidades son:

$$\begin{aligned}
P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) &\simeq [\cos^2 \varphi \cos E_{I1}t + \sin^2 \varphi \cos E_{II1}t]^2 + \\
&\quad \left[ \cos^2 \varphi \frac{p}{E_{I1}} \sin E_{I1}t + \sin^2 \varphi \frac{p}{E_{II1}} \cos E_{II1}t \right]^2
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) \simeq \frac{\sin^2(2\varphi)}{4} \left[ (\cos E_{I1}t - \cos E_{II1}t)^2 + \left( \frac{p}{E_{I1}} \sin E_{I1}t - \frac{p}{E_{II1}} \sin E_{II1}t \right)^2 \right] \tag{4.92}$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eL})^c; t) \simeq \left[ \cos^2 \varphi \frac{m_{I1}}{E_{I1}} \text{sen} E_{I1} t + \text{sen}^2 \varphi \frac{m_{II1}}{E_{II1}} \text{sen} E_{II1} t \right]^2 \quad (4.93)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu L})^c; t) \simeq \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{4} \left[ \frac{m_{I1}}{E_{I1}} \text{sen} E_{I1} t - \frac{m_{II1}}{E_{II1}} \text{sen} E_{II1} t \right]^2 \quad (4.94)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR}) = P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}) = P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eR})^c) = P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu R})^c) = 0 \quad (4.95)$$

**Masas de Majorana iguales.** Si  $M_{iL} = M_{iR} = M_i$ , entonces  $\theta_i = \pi/4$  y  $m_{i1,2} = M_i \pm m_i$ . En este caso las 8 probabilidades son distintas de cero.

**Neutrinos de Dirac.** Al igual que en 4.4.1, ahora tenemos que  $M_{iL} = M_{iR} = 0$ , lo que implica que  $\theta_i = \pi/4$  y que  $|m_{i1}| = |m_{i2}| = m_i$  (masas de Dirac solamente), y  $E_{i1} = E_{i2} = E_i$  por lo que las probabilidades se vuelven

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) \simeq [\cos^2 \varphi \cos E_I t + \text{sen}^2 \varphi \cos E_{II} t]^2 + \left[ \cos^2 \varphi \frac{p}{E_I} \text{sen} E_I t + \text{sen}^2 \varphi \frac{p}{E_{II}} \cos E_{II} t \right]^2 \quad (4.96)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) \simeq \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{4} \left[ (\cos E_I t - \cos E_{II} t)^2 + \left( \frac{p}{E_I} \text{sen} E_I t - \frac{p}{E_{II}} \text{sen} E_{II} t \right)^2 \right] \quad (4.97)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR}; t) \simeq \left[ \cos^2 \varphi \frac{m_I}{E_I} \text{sen} E_I t + \text{sen}^2 \varphi \frac{m_{II}}{E_{II}} \text{sen} E_{II} t \right]^2 \quad (4.98)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}; t) \simeq \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{4} \left[ \frac{m_I}{E_I} \text{sen} E_I t - \frac{m_{II}}{E_{II}} \text{sen} E_{II} t \right]^2 \quad (4.99)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eL})^c) = P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu L})^c) = P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eR})^c) = P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu R})^c) = 0 \quad (4.100)$$

es decir que no existen oscilaciones a las antipartículas.

#### 4.4.3 Caso ultrarrelativista.

En este caso, se tienen las 8 posibilidades de oscilación pero al igual que antes, algunas de estas están suprimidas y pueden aproximarse a cero. Dependiendo de la aproximación, vamos a tener distintos resultados para las probabilidades, en este trabajo despreciaremos términos que tengan  $m^2/p^2$ . Con esta suposición tenemos que las probabilidades son

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) \simeq \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{4} [2 - \text{sen}^2(2\theta_I) \text{sen}^2 E_{I-} - \text{sen}^2(2\theta_{II}) \text{sen}^2 E_{II-} - 2 \cos(E_{I+} - E_{II+}) [\cos E_{I-} \cos E_{II-} + \cos(2\theta_I) \cos(2\theta_{II}) \text{sen} E_{I-} \text{sen} E_{II-}] + 2 \text{sen}(E_{I+} - E_{II+}) (\cos(2\theta_{II}) \cos E_{I-} \text{sen} E_{II-} - \cos(2\theta_I) \cos E_{II-} \text{sen} E_{I-})] \quad (4.101)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eR})^c; t) \simeq \cos^4 \varphi \text{sen}^2(2\theta_I) \text{sen}^2 E_{I-} + \text{sen}^4 \varphi \text{sen}^2(2\theta_{II}) \text{sen}^2 E_{II-} \\ + \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{2} \text{sen}^2(2\theta_I) \text{sen}^2 2\theta_{II} \text{sen} E_{I-} \text{sen} E_{II-} \cos(E_{I+} - E_{II+}) \quad (4.102)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu R})^c; t) = \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{4} [\text{sen}^2(2\theta_I) \text{sen}^2 E_{I-} + \text{sen}^2(2\theta_{II}) \text{sen}^2 E_{II-} \\ - 2\text{sen}(2\theta_I) \text{sen}(2\theta_{II}) \text{sen} E_{I-} \text{sen} E_{II-} \cos(E_{I+} - E_{II+})] \quad (4.103)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) \simeq \cos^4 \varphi [1 - \text{sen}^2(2\theta_I) \text{sen}^2 E_{I-}] + \text{sen}^4 \varphi [1 - \text{sen}^2(2\theta_{II}) \text{sen}^2 E_{II-}] \\ + \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{4} [\cos(E_{I+} - E_{II+}) (\cos E_{I-} \cos E_{II-} + \cos(2\theta_I) \cos(2\theta_{II}) \text{sen} E_{I-} \text{sen} E_{II-}) \\ - \text{sen}(E_{I+} - E_{II+}) (\text{sen} E_{I-} \cos E_{II-} \cos(2\theta_I) + \cos E_{I-} \text{sen} E_{II-} \cos(2\theta_{II}))] \quad (4.104)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu L})^c; t) = P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eL})^c; t) = P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR}; t) = P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}; t) = 0 \quad (4.105)$$

donde hemos definido

$$E_{i+} = \frac{E_{i1} + E_{i2}}{2} t \quad E_{i-} = \frac{E_{i1} - E_{i2}}{2} t = \frac{m_{i1}^2 - m_{i2}^2}{4p} t \quad (4.106)$$

Los resultados anteriores aun incluyen muchos términos por lo cual conviene considerar simplificaciones extras.

**Masas de Majorana** Para este caso las dos masas de Dirac son cero, y las probabilidades distintas de cero son:

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) = \text{sen}^2(2\varphi) \text{sen}^2 \left( \frac{m_{I1}^2 - m_{II1}^2}{4p} t \right) \quad (4.107)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) \simeq 1 - \text{sen}^2(2\varphi) \text{sen}^2 \left( \frac{m_{I1}^2 - m_{II1}^2}{4p} t \right) \quad (4.108)$$

El mismo resultado se obtiene si se considera el limite relativista en las ecuaciones (4.91) a (4.95)

**Masas de Majorana iguales.** La suposición  $M_{iL} = M_{iR}$  da las siguientes probabilidades:

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) \simeq \frac{1}{4} \text{sen}^2(2\varphi) [2 - \text{sen}^2 E_{I-} - \text{sen}^2 E_{II-} \\ - 2 \cos(E_{I+} - E_{II+}) \cos E_{I-} \cos E_{II-}] \quad (4.109)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eR})^c; t) = \cos^4 \varphi \text{sen}^2 E_{I-} + \text{sen}^4 \varphi \text{sen}^2 E_{II-} \\ + \frac{\text{sen}^2(2\varphi)}{2} \text{sen} E_{I-} \text{sen} E_{II-} \cos(E_{I-} - E_{II-}) \quad (4.110)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu R})^c; t) = \frac{1}{4} \text{sen}^2 2\varphi [\text{sen}^2 E_{I-} + \text{sen}^2 E_{II-} \\ - 2 \text{sen} E_{I-} \text{sen} E_{II-} \cos(E_{I+} - E_{II+})] \quad (4.111)$$

electrón	muón	tau
$\frac{m_2}{m_1} < 3.45 \times 10^{-11}$	$\frac{m_2}{m_1} < 3.23 \times 10^{-6}$	$\frac{m_2}{m_1} < 1 \times 10^{-4}$

Tabla 4.1: Cocientes de las masas en el caso de "see-saw".

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) \simeq \cos^4 \varphi \cos^2 E_{I-} + \sin^4 \cos^2 E_{II-} \\ + \frac{1}{2} \sin^2 (2\varphi) \cos (E_{I+} - E_{II+}) \cos E_{I-} \cos E_{II-} \quad (4.112)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu L})^c; t) = P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eL})^c; t) = P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR}; t) = P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}; t) = 0 \quad (4.113)$$

**Neutrinos de Dirac** Para este caso las 4 masas de Majorana son cero, y encontramos que las probabilidades distintas de cero son:

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) = \sin^2 (2\varphi) \sin^2 \left( \frac{m_{I1}^2 - m_{II1}^2}{4p} t \right) \quad (4.114)$$

$$P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) \simeq 1 - \sin^2 (2\varphi) \sin^2 \left( \frac{m_{I1}^2 - m_{II1}^2}{4p} t \right) \quad (4.115)$$

Comparando (4.107) y (4.108) con (4.114) y (4.115), vemos que los casos ultrarrelativistas de Majorana y de Dirac coinciden con las formulas conocidas para la oscilación entre 2 familias. De esto podemos ver que en el límite ultrarrelativista, las diferencias entre los neutrinos de Majorana y los de Dirac tienden a desaparecer.

#### Mecanismo de "See-Saw".

Este caso ocurre cuando  $m_i, M_{iL} \ll M_{iR}$ , con  $i = I, II$  y eso hace que

$$\cos \theta_i \simeq \frac{m_i}{M_{iR}} = \sqrt{\frac{m_{i2}}{m_{i1}}} \quad (4.116)$$

Utilizando los valores dados en la tabla 1.1 y recordando que  $m_1 \simeq m_{\text{electron}}^2/m_2$  y  $m_2 \simeq m_\nu$ , los cocientes de las masas se muestran en la tabla 4.1. Éstos valores pueden aproximarse a cero. Como las masas  $m_{i2}$  son las masas ligeras, se puede suponer que  $p_{i2}/E_{i2} \simeq 1$  y  $m_{i2}/E_{i2} \simeq 0$ . Es decir, el valor de  $m_{i2}$  es tan pequeño que se vuelve ultrarrelativista. Así las definiciones dadas en (4.87) se convierten en

$$A_i \simeq \cos E_{i2} t \\ B_i \simeq \frac{p}{E_{i2}} \sin E_{i2} t \simeq \sin E_{i2} t \\ C_i \simeq m_{i2} \left( \frac{\sin E_{i1} t}{E_{i1}} - \frac{\sin E_{i2} t}{E_{i2}} \right) \simeq 0 \\ D_i \simeq (\cos E_{i1} t - \cos E_{i2} t) \sqrt{\frac{m_{i2}}{m_{i1}}} \\ F_i \simeq \left( \frac{p}{E_{i1}} \sin E_{i1} t - \sin E_{i2} t \right) \sqrt{\frac{m_{i2}}{m_{i1}}} \\ G_i \simeq \left( \frac{m_{i1}}{E_{i1}} \sin E_{i1} t \right) \sqrt{\frac{m_{i2}}{m_{i1}}} \quad (4.117)$$

Al escribir las probabilidades (4.79)-(4.86) con estas definiciones, las oscilaciones a neutrinos estériles (4.82)-(4.85) se vuelven cero, ya que en ellas aparece alguno de los términos  $D_i^2$ ,  $F_i^2$  o  $G_i^2$ , los cuales son  $\leq \cos \theta_i \simeq 0$ .

El término  $C_i$  también se anula ya que

$$\frac{m_{i2}}{E_{i2}} \leq \frac{m_{i2}}{m_{i1}} \simeq 0 \quad (4.118)$$

anulando las oscilaciones hacia antineutrinos derechos, (4.80) y (4.81).

Las únicas sobrevivientes son las oscilaciones hacia  $\nu_{\mu L}$  y  $\nu_{e L}$ , y después de un poco de álgebra y con las definiciones de (4.117), las probabilidades son

$$\begin{aligned} P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) &= \text{sen}^2(2\varphi) \text{sen}^2\left(\frac{m_{12}^2 - m_{13}^2}{4p} t\right) \\ P(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}; t) &= 1 - \text{sen}^2(2\varphi) \text{sen}^2\left(\frac{m_{12}^2 - m_{13}^2}{4p} t\right) \end{aligned} \quad (4.119)$$

Los cuales coinciden nuevamente con las formulas usuales para oscilaciones en el caso de 2 familias.

#### 4.4.4 Aproximación para N familias.

Si  $l$  representa la familia de leptones, se pueden escribir los neutrinos en términos de los eigenestados de masa como

$$|\nu_l\rangle = \sum_{s=1} U_{ls} |\nu_s\rangle \quad (4.120)$$

donde  $U_{ls}$  es la matriz equivalente a la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa que mezcla a los quarks.  $U_{ls}$  es una matriz de  $N \times 2N$ , que en el modelo estándar es de  $3 \times 6$ , ya que por cada neutrino, existen dos eigenestados de masa (ver sección 4.2.1).

La aproximación se hace suponiendo que el mecanismo de "see-saw" (4.3) es válido, por lo que uno espera que las contribuciones de los neutrinos pesados en (4.120) sean despreciables, por lo que la masa de los neutrinos es prácticamente la masa del eigenestado de masa ligero. Como consecuencia de esto, la matriz  $U_{ls}$  se puede escribir como una matriz de  $N \times N$ . En lo que resta de esta subsección, los neutrinos que mencionamos son izquierdos aunque omitiremos el subíndice L.

La función de onda que representa a un haz de neutrinos  $|\nu_l\rangle$ , creados en el tiempo  $t = 0$  con momento  $p$ , es

$$|\psi(x, t = 0)\rangle = \sum_s U_{ls} |\nu_s\rangle \quad (4.121)$$

Los eigenestados  $|\nu_s\rangle$ , en general no tienen una energía definida, pero con las suposiciones que hemos hecho podemos decir que

$$|\psi(x, t)\rangle = \sum_s U_{ls} e^{-iE_s t} |\nu_s\rangle \quad (4.122)$$

donde

$$E_s = \sqrt{p^2 + M_s^2} \quad (4.123)$$

En la última relación se expresa el hecho de que los eigenestados de masa tienen todos el mismo momento, pero masas y energías distintas. Al escribir a los eigenestados de masa en términos de los neutrinos, se llega a

$$|\nu_s\rangle = \sum_{l=e, \mu, \tau} U_{ls}^* |\nu_l\rangle \quad (4.124)$$

Así la ecuación (4.122) se vuelve

$$|\psi(x, t)\rangle = \sum_{l'} \left[ \sum_s U_{ls} e^{-iE_s t} U_{l's}^* \right] |\nu_{l'}\rangle = \sum_{l'} A_{ll'} |\nu_{l'}\rangle \quad (4.125)$$

donde el término  $A_{ll'}$  es la amplitud de probabilidad de tener un neutrino  $l'$  al tiempo  $t$ , si inicialmente sólo teníamos un neutrino  $l$ .

La forma de entender la oscilación es sencilla. Como  $M_i \neq M_j$ , los eigenestados de masa evolucionan de forma distinta. Es decir, al viajar los estados de masa, después de un tiempo  $t$ , los estados más ligeros habrán recorrido una distancia mayor, ocasionando un desfaseamiento con respecto a los demás estados. Esto ocasiona que al sumar los estados al tiempo  $t$ , la suma pueda dar un neutrino  $l'$ .

La probabilidad de encontrar un neutrino  $l'$  al tiempo  $t$  es

$$\begin{aligned} P(l \rightarrow l', t) &= |A_{ll'}|^2 = \left| \sum_s U_{ls} e^{-iE_s t} U_{l's}^* \right|^2 \\ &= \sum_s |U_{ls}|^2 |U_{l's}|^2 \\ &+ \sum_{s \neq s'} \operatorname{Re} U_{ls}^* U_{l's} U_{ls'} U_{l's'}^* \cos(E_{s'} - E_s) t \\ &+ \sum_{s \neq s'} \operatorname{Im} U_{ls}^* U_{l's} U_{ls'} U_{l's'}^* \operatorname{sen}(E_{s'} - E_s) t \end{aligned} \quad (4.126)$$

En la aproximación ultrarrelativista, la masa de los neutrinos es mucho menor a la energía, por lo que

$$E_s \simeq |p| + \frac{M_s^2}{2|p|} \quad (4.127)$$

Esto ocasiona que la probabilidad sea

$$\begin{aligned} P(l \rightarrow l', t) &= \sum_s U_{ls}^2 U_{l's}^2 \\ &+ \sum_{s \neq s'} \operatorname{Re} U_{ls}^* U_{l's} U_{ls'} U_{l's'}^* \cos\left(2\pi \frac{t}{L_{ss'}}\right) \\ &+ \sum_{s \neq s'} \operatorname{Im} U_{ls}^* U_{l's} U_{ls'} U_{l's'}^* \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{L_{ss'}}\right) \end{aligned} \quad (4.128)$$

donde

$$L_{ss'} = 2\pi \frac{2|p|}{M_s^2 - M_{s'}^2} \quad (4.129)$$

$L_{ss'}$  es conocida como la longitud de oscilación entre  $\nu_s$  y  $\nu_{s'}$ . En esta aproximación,  $M_s \ll p$  implica que  $x \simeq t$ , por lo que (4.128) es la probabilidad de encontrar  $\nu_{l'}$  a una distancia  $x$ , la cual depende de los elementos de la matriz  $U$ .

De las últimas expresiones hay que resaltar que si todas las masas  $M_s$  son iguales, no existe oscilación ya que  $L_{ss'} \rightarrow \infty$ . De manera similar, si los estados de masa coinciden con los de sabor,  $\nu_l = \nu_s$ , entonces  $\nu_l$  no oscila a  $\nu_{l'}$  con  $l \neq l'$ . Es decir, para que los neutrinos oscilen, es necesario que tengan masa y que sean una combinación no trivial de los estados de masa.

Para este desarrollo, se supuso que todos los eigenestados de masa tienen el mismo momento, sin embargo, el cálculo puede repetirse suponiendo que tienen la misma energía y momentos distintos, llegando al mismo resultado. Por el principio de incertidumbre, la función de onda del neutrino debe de tener un momento de ancho  $\Delta p \gg \hbar/L_{ss'}$ , por lo que un estudio riguroso debe realizarse con paquetes de ondas, sin embargo, este tratamiento da esencialmente los mismos resultados a los casos tratados con momento fijo [55].

**Oscilación  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ .**

Si los neutrinos  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  tienen la misma combinación que en (4.76), entonces

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\varphi |\nu_1\rangle + \text{sen}\varphi |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\text{sen}\varphi |\nu_1\rangle + \cos\varphi |\nu_2\rangle \end{aligned} \quad (4.130)$$

Pero en este caso  $\nu_1$  y  $\nu_2$  son directamente los eigenestados de masa ligera. Siguiendo los pasos explicados en la sección 4.4, se encuentra que al tiempo  $t$  tenemos

$$\begin{aligned} |\nu_e(t)\rangle &= \cos\varphi e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \text{sen}\varphi e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \\ &= [\cos^2\varphi e^{-iE_1 t} + \text{sen}^2\varphi e^{-iE_2 t}] |\nu_e\rangle + [\cos\varphi \text{sen}\varphi (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t})] |\nu_\mu\rangle \\ &= A_{ee} |\nu_e\rangle + A_{e\mu} |\nu_\mu\rangle \end{aligned} \quad (4.131)$$

de donde el cálculo de las probabilidades es inmediato.

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) &= 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\varphi) [1 - \cos(E_2 - E_1)t] \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &= \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\varphi) [1 - \cos(E_2 - E_1)t] \end{aligned} \quad (4.132)$$

Como las masas de los neutrinos son pequeñas, se trata con el caso ultrarrelativista. Así a una distancia  $x$ , la probabilidad de oscilación es

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; x) = \text{sen}^2(2\varphi) \text{sen}^2\left(2\pi \frac{x}{L_{21}}\right) \quad (4.133)$$

donde  $L_{21}$  está dado en la ecuación (4.129). Expresando al momento en MeV, la diferencia de masas en eV y la longitud en metros, la expresión anterior se puede escribir como

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; x) \simeq \text{sen}^2(2\varphi) \text{sen}^2\left(1.27 \frac{(M_1^2 - M_2^2) [\text{eV}^2] x [\text{m}]}{|p| [\text{MeV}]}\right) \quad (4.134)$$

La probabilidad de oscilación depende del factor  $\text{sen}^2(2\varphi)$  y del factor cinemático que depende de la distancia recorrida  $x$ . Para que la oscilación sea significativa,  $\text{sen}^2(2\varphi)$  debe ser de orden  $O(1)$ , y el factor cinético

$$(M_1^2 - M_2^2) [\text{eV}^2] x [\text{m}] / |p| [\text{MeV}] \geq O(1) \quad (4.135)$$

**4.4.5 Matriz de mezcla  $U^{MKS}$** 

Las dimensiones de esta matriz dependen del modelo en el que se trabaje. En el caso de tres familias y en el que sólo hay 3 eigenestados de masa, la matriz es de  $3 \times 3$  y se puede escribir en términos de tres ángulos de mezcla  $\theta_{ij}$ , definidos en la figura 4.1, y de tres fases complejas  $\delta_{ij}$ . La matriz de mezcla  $U^{MKS}$  puede expresarse como el producto de tres rotaciones [58]

$$U^{MKS} = U_{23} U_{13} U_{12} \quad (4.136)$$

donde

$$\begin{aligned}
 U_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \text{sen} \theta_{23} e^{-i\delta_{23}} \\ 0 & -\text{sen} \theta_{23} e^{-i\delta_{23}} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \\
 U_{13} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \text{sen} \theta_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \theta_{13} e^{-i\delta_{13}} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \\
 U_{12} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \text{sen} \theta_{12} e^{-i\delta_{12}} & 0 \\ -\text{sen} \theta_{12} e^{-i\delta_{12}} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.137}$$

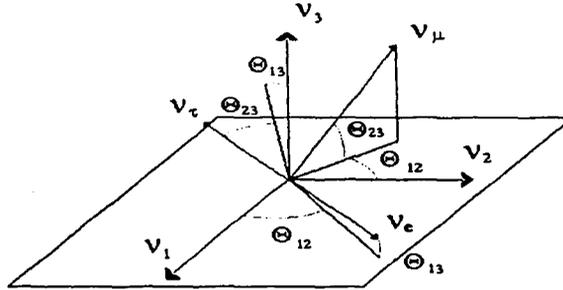


Figura 4.1: Ángulos de mezcla entre los neutrinos  $\nu_{e,\mu,\tau}$  y los eigenestados de masa  $\nu_{1,2,3}$ .

El valor de las fases puede ajustarse según el modelo, por ejemplo al pedir que  $\delta_{23} = \delta_{12} = 0$ , la matriz toma una forma parecida a la de la matriz  $V^{CKM}$ , que mezcla a los quarks. Los ángulos  $\theta_{ij}$  pueden tomar cualquier valor en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , y las fases  $\delta_{ij}$  en  $[0, 2\pi)$  [47].

Si ignoramos las fases, las relaciones entre los neutrinos  $\nu_{e,\mu,\tau}$ , y los eigenestados de masa  $\nu_{1,2,3}$  son el producto de tres rotaciones (figura 4.1).

#### 4.4.6 Aplicación de la probabilidad de oscilación.

Como aplicación sencilla se aplicó la probabilidad de oscilación de los neutrinos en una sola familia, ecuaciones (4.57)-(4.60), utilizando los datos promedio de la supernova SN1987A [69]. Esto se hizo considerando la posible emisión de neutrinos derechos inmediatamente después del colapso de la supernova. Los neutrinos derechos  $\nu_R$  escapan libremente de la supernova debido al alto valor del camino libre medio de éstos, comparado con el radio de la supernova.

La luminosidad de la emisión de estos neutrinos puede ser calculada como [9, 10]

$$Q_{\nu_R} = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E f(E, \bar{\mu}, T) P(\nu_L \rightarrow \nu_R) \tag{4.138}$$

donde  $V$  es el volumen de la supernova,  $E$  la energía que se llevan los neutrinos y  $f(E, \bar{\mu}, T)$  la distribución de Fermi-Dirac. Los valores promedio de los parámetros utilizados en la integral son:

$V = 8 \times 10^{12} \text{ m}^3$ ,  $\bar{\mu} \simeq 160 \text{ MeV}$ ,  $T = [30, 60] \text{ MeV}$ . Suponiendo que las emisiones duran aproximadamente un segundo, la luminosidad esta acotada por  $Q_{\nu R} \leq 10^{53} \text{ erg/s}$ .

Para la probabilidad, se tomó el caso ultrarrelativista dado en la ecuación (4.67) suponiendo neutrinos de Dirac. Con esto se encontró que  $m_\nu \leq 358 \text{ MeV}$ , lo cual es un límite poco restrictivo, comparado con los límites encontrados por otros métodos (ver tabla 1.1). Si tomamos alguna otra aproximación para la probabilidad, encontramos el mismo resultado, pero para una masa efectiva, la cual depende de  $m_1$ ,  $m_2$  y de  $\theta$ , y aun en estos casos, la cota es mayor a la reportada en la tabla 1.1.

## Capítulo 5

# Oscilaciones de neutrinos solares.

El objetivo de este capítulo es analizar el problema de los neutrinos solares. Esto se hace suponiendo que el flujo de neutrinos debido a las distintas reacciones dentro del Sol se ve modificado en el trayecto hacia la Tierra debido al fenómeno de oscilaciones. Las probabilidades de oscilación entre dos familias, encontradas en la sección 4.4.2 se utilizan para determinar el flujo de neutrinos que debería llegar a la Tierra, de acuerdo a los diversos esquemas y valores de los parámetros. Finalmente se comparan los resultados teóricos con los resultados experimentales, encontrando el mejor ajuste para los parámetros que aparecen en las ecuaciones de las probabilidades de oscilación.

### 5.1 Producción de neutrinos solares.

Los físicos nucleares han trabajado por más de medio siglo tratando de explicar detalladamente las reacciones nucleares que ocurren en el interior del Sol. Las principales reacciones por las cuales el Sol brilla y responsables de la mayoría de los neutrinos solares, se muestran en la tabla 5.1, la cual representa la cadena pp de generación de energía. La cadena pp tiene como resultado neto convertir protones en partículas  $\alpha$ . Una segunda cadena, de menor importancia para la producción de neutrinos solares, es el ciclo CNO. En este ciclo la fusión de cuatro protones para formar una partícula  $\alpha$  se consigue a través de reacciones que involucran carbón, nitrógeno y oxígeno, tabla 5.2. Una discusión muy completa sobre estas reacciones puede encontrarse en [13].

En la reacción pp, dos protones sufren un decaimiento  $\beta$ , formando un deuterio ( ${}^2\text{H}$ ). Esta reacción (número 1a (pp) en la tabla 5.1), produce la mayoría de los neutrinos solares, desafortunadamente algunos experimentos no son sensibles a energías tan bajas. La reacción 1b ocurre con una frecuencia relativa de uno a 250, pero su energía es mayor a dos veces la masa del electrón, por lo que es más probable en algunos experimentos detectar los neutrinos de dicha reacción. El  ${}^2\text{H}$  producido por 1a y 1b, se combina con un protón (reacción 2), para formar  ${}^3\text{He}$ .

El 85% de las reacciones terminan con dos núcleos de  ${}^3\text{He}$  fusionándose para formar una partícula  $\alpha$  y 2 protones (reacción 3). En el 15% de las reacciones restantes, un núcleo de  ${}^3\text{He}$ , captura una partícula  $\alpha$  ya existente para formar  ${}^7\text{Be}$  mas un rayo gamma (reacción 4). Los neutrinos formados después de este proceso son detectados por los experimentos basados en  ${}^{37}\text{Cl}$ . La mayoría de las veces el núcleo de  ${}^7\text{Be}$  absorbe un electrón (reacción 5), produciendo neutrinos con una energía de 0.861 MeV, lo cual afecta a las mediciones hechas por los experimentos de  ${}^{37}\text{Cl}$  y  ${}^{71}\text{Ga}$ . El  ${}^7\text{Be}$  puede capturar un protón para formar un núcleo radioactivo de  ${}^8\text{B}$  (reacción 7). El  ${}^8\text{B}$  decae al  ${}^8\text{Be}$  que es inestable, produciendo dos partículas  $\alpha$ , un positrón y un  $\nu_e$  (reacciones 8 y 9). Dichos neutrinos tienen una energía que llega casi a 15 MeV. La contribución del  ${}^8\text{B}$  al flujo de neutrinos es muy importante ya que muchos de los neutrinos de esta fuente son suficientemente energéticos para ser detectados en varios

	Reacción	Energía del $\nu_e$ (MeV)
6	1a (pp) $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$	$\leq 0.420$
	1b (pep) $p + e^- + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu_e$	1.442
6	2 ${}^2\text{H} + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	
	3 ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow \alpha + 2p$	
6	4 ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	
	5 ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	(90%) 0.861 (10%) 0.383
6	6 ${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2\alpha$	
	7 ${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	
6	8 ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$	$\leq 15$
	9 ${}^8\text{Be}^* \rightarrow 2\alpha$	
6	10 (hep) ${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$	$\leq 18.77$

Tabla 5.1: Cadena pp de producción de neutrinos en el Sol.

	Reacción	Energía del $\nu_e$ (MeV)
1	$p + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma$	
2	${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	$\leq 1.19$
3	$p + {}^{13}\text{C} \rightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma$	
4	$p + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma$	
5	${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	$\leq 1.732$
6	$p + {}^{15}\text{N} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \alpha$	
7	${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e$	$\leq 1.740$

Tabla 5.2: Ciclo CNO de producción de neutrinos en el Sol.

experimentos. La última reacción (10) es la menos frecuente, ocurriendo alrededor de dos veces por cada  $10^7$  ciclos de la cadena pp. A pesar de este hecho, los neutrinos de esta reacción tienen la energía suficientemente alta para ser detectados. Los resultados que se mencionan son predicciones hechas por el modelo estándar solar [16]. Para las líneas de pep y  ${}^7\text{Be}$ , la forma del espectro de los neutrinos se produce por el movimiento térmico de los electrones. En realidad estas líneas tienen un ancho  $\sim 1$  keV que proviene de tomar la probabilidad de que se cree un neutrino con energía  $q$  a una temperatura  $T$  promediada sobre la distribución de masa del Sol.

Las reacciones principales del ciclo CNO se muestran en la tabla 5.2. Las reacciones 2 y 5, proporcionan información acerca del ciclo CNO, mientras que el flujo de los neutrinos producidos por la reacción 7 dan una medida del oxígeno inicial en el interior del Sol.

Los espectros de energía predichos por el modelo estándar solar, se muestran en la figura 5.1, donde pp es la reacción iniciada por dos protones, pep se refiere a las reacción iniciada por  $p + e + p$  y hep a  ${}^3\text{He} + p$  (reacciones 1a, 1b y 10 de la tabla 5.1).

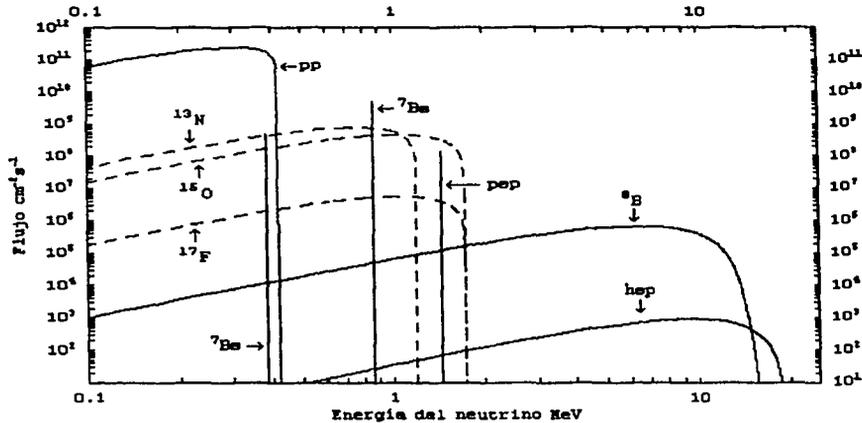


Figura 5.1: Espectro de energía de los neutrinos solares. Datos predichos por el modelo estándar solar de Bahcall-Pinnoseault 2000. Los flujos provenientes de la cadena pp están dibujados con líneas sólidas, y los provenientes del espectro CNO están dibujados con líneas punteadas. Los errores de estas curvas se muestran en la tabla 5.3. [12, 13, 16]

## 5.2 Flujo de neutrinos solares en la Tierra.

Tal y como se comentó en el capítulo anterior, el flujo de neutrinos solares que arriba a la Tierra depende de las posibles oscilaciones que tienen lugar en el viaje. Para estudiar dicha contribución se consideraron dos modelos: Modelo A, el cual contiene 2 parámetros en las ecuaciones de probabilidad; Modelo B, que contiene 4 parámetros.

### 5.2.1 Modelo A, modelo mínimo.

Para empezar, se trató el caso presentado en la mayoría de los textos. Este caso consiste en considerar el caso de dos familias,  $\nu_e$  y  $\nu_a$ , donde  $a = \mu, \tau$  (caso activo) o  $a = s$  (caso estéril). De acuerdo a lo discutido en la sección anterior, las probabilidades de oscilación se reducen considerablemente si además de considerar el límite ultrarrelativista, se supone alguna de las siguientes hipótesis:

- sólo existen masas de Dirac  $M_{iL} = M_{iR} = 0$
- sólo existen masa de Majorana  $m_i = 0$
- dentro de cada familia opera el mecanismo de 'see-saw.'

En todos estos casos sólo tenemos lugar a oscilaciones  $\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eL}$  y  $\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}$ , con la expresión usual para las probabilidades de oscilación dependiendo de dos parámetros  $\varphi$  y  $\Delta m^2$ .

Si  $\nu_{eL}$  es producido en el Sol, la probabilidad de que sobreviva al arribar a la Tierra está dada por <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Para simplificar la notación, vamos a suprimir el subíndice L, de los neutrinos. A continuación los neutrinos mencionados se refieren a neutrinos izquierdos, a menos que se especifique algún otro caso.

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; R) = 1 - \sin^2(2\varphi) \sin^2\left(\frac{\pi R}{L}\right) \quad (5.1)$$

Esta probabilidad proviene de la ecuación (4.132), en donde se mezclan dos familias en donde la segunda familia puede ser activa o no. Una fórmula de este tipo también se encuentra para varios casos límites de las oscilaciones en una familia, ecuaciones (4.63), (4.66) y (4.70); y en dos familias, ecuaciones (4.108), (4.115) y (4.119). Para cada una de estas probabilidades, los parámetros representan cantidades distintas, y en algunas la oscilación es a un sólo tipo de neutrino (activo o estéril), y en otras la oscilación puede ser a cualquier tipo de neutrino.

Para la probabilidad,  $L = 4\pi E/\Delta m^2$  y  $R$  es la distancia entre la fuente y el detector, que para el sistema Tierra-Sol oscila alrededor de 1 AU (1 AU  $\simeq 1.496 \times 10^8$  km). Al introducir todas las constantes para obtener las unidades se llega a

$$\frac{\pi R}{L} = 1.9 \times 10^{11} \left(\frac{1 \text{ MeV}}{E}\right) \left(\frac{\Delta m^2}{\text{eV}^2}\right) \left(\frac{R}{1 \text{ AU}}\right) \quad (5.2)$$

lo cual puede escribirse en términos de un parámetro  $D$  como

$$\frac{\pi R}{L} = 0.19 \frac{\text{MeV}}{E} D \quad (5.3)$$

donde  $D$  está definido como

$$D = \frac{M_1^2 - M_2^2}{\text{eV}^2} \frac{R}{1 \text{ AU}} \times 10^{12} \quad (5.4)$$

La probabilidad de obtener un neutrino tipo  $a$  es

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_a; R) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e; R) = \sin^2(2\varphi) \sin^2\left(\frac{\pi R}{L}\right) \quad (5.5)$$

### 5.2.2 Modelo B, modelo extendido.

El objetivo de este trabajo es el analizar las oscilaciones de neutrinos cuando se incluyen simultáneamente la masa de Dirac y de Majorana. En el capítulo anterior se mostró que aun en el límite ultrarrelativista las amplitudes de oscilación son bastante complicadas, dependiendo en general de 7 parámetros. Este número de parámetros es difícil de determinar tomando en cuenta lo limitado de la información experimental. Para ejemplificar los posibles efectos de incluir simultáneamente masas de Dirac y de Majorana en las probabilidades de oscilación para dos familias, se consideró un caso especial en el cual el número de parámetros se reduce a cuatro. Este modelo B supone el límite ultrarrelativista y además que la masa de Majorana derecha es igual a la izquierda para cada familia ( $M_{iR} = M_{iL}$ ). En este caso  $\theta_i = \pi/4$  y tenemos en principio cinco parámetros,  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{111}$ ,  $m_{112}$ , y el ángulo de mezcla  $\varphi$ . Al escribir explícitamente la probabilidad de supervivencia a partir de (4.112) se obtiene

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; R) = \cos^4(\varphi) \cos^2(0.19 \frac{D_1}{E}) + \sin^4(\varphi) \cos^2(0.19 \frac{D_2}{E}) + \frac{1}{2} \sin^2(2\varphi) \cos(0.19 \frac{D_1}{E}) \cos(0.19 \frac{D_2}{E}) \cos(0.19 \frac{D_3}{E}) \quad (5.6)$$

donde las  $D_i$  se definen como

$$D_1 = \frac{m_{11}^2 - m_{12}^2}{\text{eV}^2} \frac{R}{1 \text{ AU}} \times 10^{12} \quad (5.7)$$

$$D_2 = \frac{m_{111}^2 - m_{112}^2}{\text{eV}^2} \frac{R}{1 \text{ AU}} \times 10^{12} \quad (5.8)$$

$$D_3 = \frac{(m_{\nu 1}^2 + m_{\nu 2}^2) - (m_{\nu 11}^2 + m_{\nu 12}^2)}{eV^2} \frac{R}{1 \text{ AU}} \times 10^{12} \quad (5.9)$$

A partir de la ecuación (4.109), la probabilidad de oscilar a  $\nu_\mu$  es

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; R) = \frac{1}{4} \text{sen}^2(2\varphi) \left[ 2 - \text{sen}^2\left(0.19 \frac{D_1}{E}\right) - \text{sen}^2\left(0.19 \frac{D_2}{E}\right) - 2 \cos\left(0.19 \frac{D_1}{E}\right) \cos\left(0.19 \frac{D_2}{E}\right) \cos\left(0.19 \frac{D_3}{E}\right) \right] \quad (5.10)$$

Lo que muestra que las probabilidades de oscilación se pueden expresar como función de 4 parámetros: el ángulo de mezcla  $\varphi$  y tres diferencias cuadráticas de masas  $m_{\nu 1}^2 - m_{\nu 2}^2$ ,  $m_{\nu 11}^2 - m_{\nu 12}^2$  y  $(m_{\nu 1}^2 + m_{\nu 2}^2) - (m_{\nu 11}^2 + m_{\nu 12}^2)$ . Adicionalmente a las probabilidades presentadas, hay dos probabilidades que no se anulan que son  $P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{eR})^c)$  y  $P(\nu_{eL} \rightarrow (\nu_{\mu R})^c)$ .

### 5.3 Experimentos para la detección de neutrinos solares.

Varios experimentos han sido desarrollados para la detección de los neutrinos solares. Estos experimentos siguen fenómenos físicos diferentes y se pueden clasificar en dos tipos: los basados en la absorción de neutrinos y los basados en la dispersión elástica de éstos. A continuación se explican ambos.

#### 5.3.1 Experimentos basados en absorción de neutrinos.

Estos experimentos se basan en la absorción del  $\nu_e$  para formar un átomo inestable el cual decae en unos cuantos días. Los experimentos se basan en la detección de este decaimiento.

Los resultados teóricos y experimentales están expresados en términos de la unidad de neutrino solar, (SNU), que es el producto del flujo de neutrinos solares de alguna fuente en particular (unidades de  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ), por la sección eficaz de absorción (unidades de  $\text{cm}^2$ ). El SNU tiene unidades de número de eventos por átomos por segundo, y conviene definir 1 SNU =  $10^{-36} \text{ s}^{-1}$ . Esta razón se escribe como

$$R_{\text{observado}} [\text{SNU}] = \sigma \phi \quad (5.11)$$

Como se muestra de la figura 5.1, existen distintas fuentes de neutrinos solares, por lo que el resultado final medido por un experimento es

$$R_{\text{observado}} [\text{SNU}] = \sum_i \sigma_i \phi_i \quad (5.12)$$

donde el subíndice  $i$  representa cada una de las distintas fuentes de neutrinos solares.

Este tipo de experimentos también son conocidos como experimentos radioquímicos debido al método usado para la detección de neutrinos. Una ventaja de este tipo de experimentos es que tienen un umbral de energía bastante bajo, por lo cual algunos de éstos son sensibles a las reacciones pp, que representa el flujo más importante. Sin embargo, hay varias desventajas en estos experimentos, la primera es que los neutrinos no son contados en tiempo real, sino que hay que esperarse varios días para poder contarlos, una segunda desventaja es que estos experimentos sólo detectan neutrinos del electrón, por lo que no es posible saber si el neutrino oscila a un neutrino de distinto sabor. Con esto en mente se desarrollaron los experimentos basados en la dispersión elástica de los neutrinos.

#### 5.3.2 Experimentos basados en dispersión de neutrinos.

Este tipo de experimentos se basan en la medición de un electrón dispersado a través de

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e' + e' \quad (5.13)$$

donde  $x = e, \mu, \tau$ . Utilizando la conservación del momento y la energía se puede demostrar que la relación entre la energía cinética del electrón ( $T$ ), la energía del neutrino incidente ( $q$ ) y el coseno del ángulo de dispersión del electrón ( $\mu$ ), es

$$q = \frac{T + |\mu| \sqrt{T(T+2)}}{(T+2)\mu^2 - T} \quad (5.14)$$

donde  $T$  y  $q$  están dadas en unidades de la masa del electrón  $m_e$ . El valor máximo posible de la energía del electrón es

$$T_{max}(q) = \frac{2q^2}{1+2q} \quad (5.15)$$

Para conocer cual es el espectro de electrones dispersados, se deben conocer las secciones eficaces de interacción de los neutrinos. Para calcular estas secciones, es posible utilizar las expresiones analíticas obtenidas en el modelo estándar [29] página 365. En términos de la energía cinética del electrón, la sección eficaz diferencial es

$$\frac{d\sigma}{dT} = \sigma_e \left[ g_L^2 + g_R^2 \left(1 - \frac{T}{q}\right)^2 - g_L g_R \frac{T}{q^2} \right] \quad (5.16)$$

donde

$$\sigma_e = \frac{2G_F^2 m_e^2}{\pi \hbar^4} = 88.083 \times 10^{-46} \text{ cm}^2 \quad (5.17)$$

y los acoplamientos de las corrientes débiles están dados por

$$g_L = \pm \frac{1}{2} + \sin^2 \Theta_W \quad g_R = \sin^2 \Theta_W \quad (5.18)$$

El signo superior es para la dispersión  $\nu_e - e$ , el signo inferior para la dispersión  $\nu_\mu - e$  y  $\Theta_W$  es el ángulo débil definido en la sección 2.3.2. Integrando la expresión (5.16) podemos obtener la sección eficaz total. Los cocientes de las secciones eficaces ( $\nu_e e$ ) a ( $\nu_\mu e$ ) son de particular importancia y están dados por

$$\frac{\sigma(\nu_\mu e)}{\sigma(\nu_e e)} = \frac{(g_L^e)^2 + \frac{1}{3}(g_R^e)^2}{(1 + g_L^e)^2 + \frac{1}{3}(g_R^e)^2} \simeq \frac{1}{7} \text{ a } \frac{1}{6} \quad (5.19)$$

El espectro de energía de los electrones ( $N(T)$ ) se puede expresar como [22]

$$N(T) = N_0 \int_0^{T_{max}} dT' R(T|T') \times \int_{q_{min}}^{q_{max}} dq' \phi_i(q) \left[ P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \frac{d\sigma_e}{dT'} + \zeta_a P(\nu_e \rightarrow \nu_a) \frac{d\sigma_a}{dT'} \right] \quad (5.20)$$

En el caso de que  $\nu_e$  oscila a  $\nu_\mu$ ,  $a = \mu$  y  $\zeta_a = 1$ , mientras que si oscila a un neutrino estéril  $a = s$  y  $\zeta_a = 0$ .

$N_0$  es un factor de normalización que depende de las unidades,  $R(T|T')$  es la función de resolución del detector (la cual para el Super-K se puede aproximar por una Gaussiana [22, 37]),  $d\sigma_e/dT$  y  $d\sigma_\mu/dT$  son las secciones eficaces diferenciales para el neutrino del electrón y del muón respectivamente, y  $\phi_i$  son los flujos de neutrinos  $\nu_e$  a los que es sensible el detector en el rango de energía de  $q_{min}$  a  $q_{max}$ . Las probabilidades de oscilación toman en cuenta el hecho de que los flujos  $\phi_i$  producidos en el Sol se vean modificados en su trayectoria hacia la Tierra. A la expresión anterior se le puede agregar el promedio sobre la región de creación de los neutrinos solares, y el promedio sobre la distancia Tierra Sol, sin embargo el efecto no es muy importante.

Usualmente este tipo de experimentos reportan el valor observado por (5.20) dividido por el valor dado por el modelo estándar solar de Bahcall-Pinnoseault, el cual es obtenido con la ecuación (5.20)

haciendo  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1$  y  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 0$ . Así la ecuación (5.20) normalizada da la razón de eventos observados contra los eventos esperados para una energía cinética del electrón  $T$  fija. Para obtener el valor promedio del flujo total se debe promediar sobre las distintas energías que puede medir el detector.

En estos experimentos hay varias ventajas que no se encuentran en los experimentos radioquímicos. Por ejemplo, con la dispersión se puede saber si los neutrinos detectados provienen del Sol, ya que los electrones son dispersados, principalmente en la dirección de los neutrinos incidentes. Otra ventaja es que dan tiempos de llegada exactos para cada evento, lo cual permite hacer pruebas con fuentes de neutrinos dependientes del tiempo o estudiar el efecto noche - día. La dispersión neutrino-electrón es sensible a neutrinos de cualquier sabor, aunque las secciones eficaces para neutrinos  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$  son menores que la de éste, por un factor entre 6 y 7. Cuando se combina el número total de eventos por dispersión, con los eventos de experimentos de absorción que son sensibles sólo al  $\nu_e$ , es posible determinar el sabor de los neutrinos incidentes. La distribución de energía final de los electrones, refleja el espectro de energía del haz incidente, por lo que estos experimentos también pueden utilizarse para probar las distintas predicciones de los modelos solares. Sin embargo, hay algunas desventajas, por ejemplo, en este tipo de interacciones los neutrinos no tienen ninguna huella característica, por lo que cualquier partícula neutra incidente capaz de dispersar un electrón se "ve" igual que un neutrino, por ejemplo un rayo gamma. Por esta razón se debe mantener un buen control de la radiación de fondo, y es por eso que la energía del electrón a partir de la cual se empieza a detectar es relativamente alta ( $\sim 6$  MeV). Esto implica que los experimentos sólo detectan neutrinos provenientes del  $^8B$ , y de *hep*.

## 5.4 Efecto de promediar sobre la energía.

Lo que en realidad miden los experimentos es el flujo promedio de neutrinos que llegan a la Tierra. El tipo de promedios que se deben hacer va a depender de las características de cada experimento, sin embargo, para todos los tipos de experimentos en principio se debe promediar sobre la región del Sol donde se producen los neutrinos, la región de absorción en la Tierra (ya que la distancia Tierra Sol varía a lo largo del año) y el espectro de energía de cada fuente. Este triple promedio es denotado como

$$\langle \phi_i \sigma_i \rangle = \left\langle \int dE \phi_{\text{modelo},i}(E) \sigma_i(E) P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \right\rangle_{\text{Sol, Tierra}} \quad (5.21)$$

donde incluimos la probabilidad de sobrevivir del electrón, ya que éste puede estar oscilando en su viaje del Sol a la Tierra. El efecto de promediar sobre la región del Sol donde se producen los neutrinos contribuye con un factor del orden de  $10^{-4}$  al resultado final, y la contribución del promedio sobre la distancia Tierra Sol es del orden de  $10^{-2}$ , según [13]. Para simplificar el cálculo, en este análisis sólo se promedió sobre la energía, que produce el efecto más importante tomando en cuenta que para la mayoría de los procesos las fuentes emiten sobre un rango amplio de energías.

### 5.4.1 Promedio para el modelo A.

Para entender el efecto sobre la probabilidad de supervivencia que tiene el promedio sobre la energía, definimos una probabilidad efectiva que toma en cuenta la sección eficaz de absorción de  $\nu_e$ . Esta probabilidad se encuentra normalizando el flujo que incluye la oscilación con el flujo calculado cuando no hay oscilaciones, esto se escribe como

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = \frac{\sigma \phi(D)}{\sigma \phi(D=0)} = \frac{\int \phi(E) \sigma(E) P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) dE}{\int \phi(E) \sigma(E) dE} \quad (5.22)$$

Utilizando la expresión para  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  dada por (5.1) y (5.2), en la figura 5.2 se muestra el resultado como función de  $D$ , para un ángulo  $\varphi = 45^\circ$ .

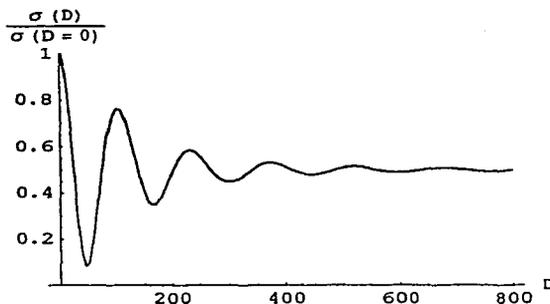


Figura 5.2: La gráfica muestra la dependencia del flujo normalizado de neutrinos provenientes del  ${}^8B$  contra una cantidad  $D$  definida en la ecuación (5.4). La figura es para una probabilidad dada por (5.1) con  $\varphi = 45^\circ$ .

Para  $D \geq 300$  el efecto de promediar sobre la energía tiende a  $\frac{1}{2}$  con  $\varphi = 45^\circ$ . Con este promedio, para  $D \geq 300$  la probabilidad efectiva es

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\varphi) \quad (5.23)$$

que es independiente de  $\Delta m^2$ . De la figura 5.2 se observa que una reducción importante del flujo de  $\nu_e$  se obtiene para valores de  $D \sim 30$  lo cual de acuerdo a la ecuación (5.4) corresponde a una diferencia  $\Delta m^2 \sim 5 \times 10^{-11} \text{ eV}^2$ , lo cual corresponde al rango de valores para oscilaciones en el vacío que podrían explicar la supresión observada en el flujo de neutrinos solares ("just-so solution").

#### 5.4.2 Promedio para el modelo B.

Cuando el promedio sobre la energía definido en (5.22) se realiza utilizando la probabilidad (5.6), el promedio efectivo sufre mayores reducciones, como podemos ver en las figuras 5.3 y 5.4. Para estas gráficas los límites de las integrales, la sección eficaz y el ángulo  $\varphi$  son los mismos con los que calculó la gráfica de la figura 5.2. En las figuras se grafica el promedio efectivo contra un parámetro  $D$  que para la figura 5.3 se define como  $D_1 = D_2 = D_3 = D$ ; y para la figura 5.4 es  $D_1 = D$ ,  $D_2 = 0.001D$ ,  $D_3 = 100D$ .

El hecho de que las gráficas de las figuras 5.3 y 5.4 tiendan asintóticamente a un valor menor que en el modelo A, se debe a que en este caso existen cuatro canales a los que el  $\nu_e$  puede oscilar, que son  $\nu_{eL}$ ,  $\nu_{\mu L}$ ,  $(\nu_{eR})^c$  y  $(\nu_{\mu R})^c$ .

### 5.5 Experimentos para detección de neutrinos solares.

A continuación se da una breve explicación de algunos de los experimentos que se han realizado para la detección de los neutrinos solares. Al final de esta sección se encuentra la tabla 5.3 donde se dan los resultados de los experimentos mencionados.

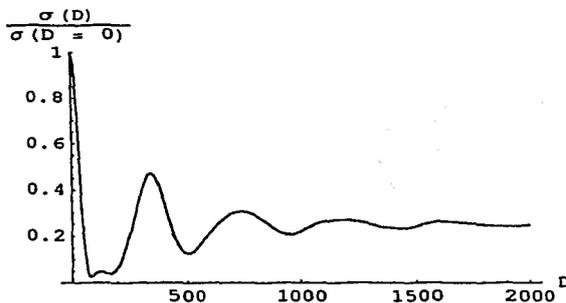


Figura 5.3: La gráfica muestra la dependencia del flujo de neutrinos provenientes del  ${}^8B$  contra una cantidad  $D$  definida como  $D = D_1 = D_2 = D_3$  y por las ecuaciones (5.7), (5.8) y (5.9). La figura es para la probabilidad (5.6) con  $\varphi = 45^\circ$ .

**Homestake [16, 30]** Este experimento se basa en la detección de neutrinos  $\nu_e$  usando  ${}^{37}Cl$ , mediante la reacción de decaimiento beta inverso



La energía mínima para que ésta ocurra es de 0.814 MeV, por lo que estos experimentos detectan a la mayoría de las fuentes de neutrinos, con excepción de los neutrinos  $pp$  y los provenientes de la línea del  ${}^7Be$ , figura 5.1. La cantidad predicha por el modelo estándar solar es de  $7.6_{-1.1}^{+1.3}$  SNU, y la contribución de cada una de las fuentes de neutrinos se encuentra en la tabla 5.4. Sin embargo, el valor experimental es de  $2.56 \pm 0.23$  SNU, es decir que el valor observado es aproximadamente una tercera parte del valor esperado. Esta diferencia entre los valores fue detectada hace más de 30 años. En este experimento los neutrinos inciden sobre un tanque que contiene  $10^5$  galones de  $C_2Cl_4$ . La captura de los neutrinos produce una pequeña cantidad de átomos de  ${}^{37}Ar$ . Estos átomos creados tienen una energía tal que son capaces de romper el enlace con la molécula de cloro y penetrar en el líquido que los rodea. Los átomos de argón son fácilmente retirados utilizando gas de helio. La vida media del argón es de 35 días.

El tanque se encuentra en la mina de Homestake a 1478 metros de profundidad para evitar la producción de argón por rayos cósmicos. Cuando los neutrinos inciden sobre el tanque se encuentran con  $2.2 \times 10^{30}$  átomos de  ${}^{37}Cl$ . Con esta cantidad de átomos de cloro se encuentra que un átomo de  ${}^{37}Ar$  producido al día equivale a 5.35 SNU, es decir que en promedio detecta un  $\nu_e$  cada dos días.

Los resultados experimentales y los teóricos se ven en la tabla 5.3, y las contribuciones de cada una de las fuentes de neutrinos para este experimento están en la tabla 5.4. Para calcular el valor del flujo detectado por el cloro se utilizó la ecuación (5.21) promediando sólo sobre la energía, y tomando en cuenta neutrinos con energías mayores a 0.814 MeV. En la tabla 5.5 se muestran los valores promedio de las secciones eficaces para cada fuente.

**GALLEX y GNO [16, 20]** Este experimento se basa en la reacción:



la cual, para ocurrir, necesita que el neutrino incida con una energía mayor a 0.233 MeV. Esto permite que este tipo de experimentos sean capaces de detectar neutrinos de todas las fuentes, en particular los neutrinos  $pp$ , ver figura 5.1, a diferencia de los que sucede en los experimentos basados en cloro.

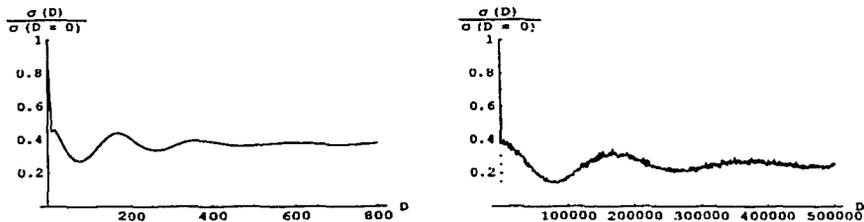


Figura 5.4: La gráfica muestra la dependencia del flujo de neutrinos provenientes del  ${}^8\text{B}$  contra una cantidad  $D$  definida en estas gráficas como  $D_1 = D$ ,  $D_2 = 0.001D$  y  $D_3 = 100D$  y por las ecuaciones (5.7), (5.8) y (5.9). Las gráficas son para una probabilidad dada por (5.6) con  $\varphi = 45^\circ$ . En la gráfica superior se muestra cómo para un valor  $D$  alrededor de 1000 el promedio tiende a 0.37, mientras que en la gráfica inferior se muestra cómo para valores muy grandes de  $D$ , el promedio tiende a 0.25 como en la figura 5.3.

El experimento GNO (Gallium Neutrino Observatory) es el sucesor del experimento GALEX (Gallium experiment). Estos experimentos se localizan en el Laboratorio Subterráneo de Gran Sasso (LNGS), en Italia. Este experimento utiliza 100 toneladas de  $\text{GaCl} - \text{HCl}$ , de las cuales 30.3 toneladas son de  ${}^{71}\text{Ga}$ .

Cuando un átomo de  ${}^{71}\text{Ge}$  es creado por la reacción (5.25), se forma la molécula  $\text{GeCl}_4$ . Esta última es extraída de la solución con burbujas de aire o de nitrógeno. Después el gas pasa por unos tubos donde el  $\text{GeCl}_4$  es absorbido por agua, posteriormente, por medio de  $\text{NaBH}_4$  se extrae el gas  $\text{GeH}_4$ . El  $\text{GeH}_4$ , junto con xenón es introducido en un contador donde el número de átomos de  ${}^{71}\text{Ge}$  es determinado observando su decaimiento radioactivo. La vida media del  ${}^{71}\text{Ge}$  es de 11.43 días.

El resultado que se encuentra en la tabla 5.3 es el valor promedio de los experimentos de GALEX y del GNO. En la tabla 5.4 se encuentran las contribuciones teóricas de cada una de las fuentes de neutrinos para el galio según el modelo estándar solar. En la tabla 5.5 se muestran los valores promedio de las secciones eficaces para cada fuente.

**SAGE [5, 16, 43]** SAGE es el experimento "Russian American Gallex Experiment." Al igual que con GALEX+GNO, este es un experimento basado en galio. La detección de los neutrinos se lleva a cabo en el observatorio de neutrinos de Baksan al sur de Rusia. SAGE ha medido los neutrinos generados por la reacción (5.25) a través de 50 toneladas de  $\text{GaCl} - \text{HCl}$  desde 1990. El método para el conteo de neutrinos es muy parecido al realizado por GALEX+GNO.

Para la detección de neutrinos por medio de la dispersión de electrones, se utiliza agua, debido a sus bajas concentraciones de contaminantes radioactivos. La detección de los electrones es a través de su radiación Cerenkov, la cual es capturada por fotomultiplicadores localizados en las paredes del tanque donde el agua está contenida.

**Super-Kamiokande o Super-K [40, 41, 42]** Este experimento comenzó a operar en abril de 1996. Se localiza en la mina Kamioka Mozumi en Japón. El detector es un tanque de agua de 50,000 toneladas que tiene una geometría cilíndrica, con 39.3 m de diámetro y 41.4 m de altura. El cilindro se divide en 3 cilindros concéntricos. El primero, 36.2 m de altura y 33.8 m de diámetro, tiene 40% de su superficie cubierta por 11,146 fotomultiplicadores. El segundo cilindro es una capa de 2.6 a 2.75 m de agua y el

tercer cilindro es un detector rodeado por 1885 fotomultiplicadores. El tercer cilindro se utiliza para reducir la radiación de fondo. El cilindro interior está rodeado por hojas negras de 0.6 m de espesor que impiden la transmisión de luz. Cuando un electrón es dispersado, su radiación Cerenkov es detectada por los fotomultiplicadores. Cada fotomultiplicador emite una señal que dura 200 ns. Este evento es registrado si en una ventana de 200 ns. son activados N fotomultiplicadores, este número N ha variado de 40 a 28. La energía cinética de dispersión del electrón varía de 5.0 a 20.0 MeV, a excepción de los primeros 280 días, cuando el umbral fue de 6.5 MeV. Esto porque la radiación de fondo dominante ocurre por debajo de esta energía.

Una ventaja sobre los experimentos radioquímicos es que Super-K es capaz de registrar neutrinos distintos a  $\nu_e$ . La sensibilidad con la que se detectan los neutrinos depende del sabor de éstos.

Super-K, no sólo da el flujo total, también reporta el flujo para 19 intervalos de energía cinética del electrón (puntos con barras de error en la figura 5.6); y la diferencia entre el flujo para diferentes tiempos del día. Con esto último se puede ver si hay alguna diferencia debido a la interacción de los neutrinos con la materia que atraviesan antes de llegar al detector, lo que se resume en ver la diferencia entre el flujo de noche y de día. El valor reportado en la tabla 5.3 es el promedio de todos estos valores, el cual es

$$\phi(\nu_x) = 2.32 \pm 0.03 (stat)_{-0.07}^{+0.08} (sist) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (5.26)$$

que corresponde a  $45.1 \pm 0.5 (stat)_{-1.4}^{+1.6} (sist) \%$  del valor predicho por el modelos solar [16]. La asimetría entre el flujo de noche y el de día es

$$\frac{\phi_n - \phi_d}{\phi_{prom}} = 0.033 \pm 0.022 (stat)_{-0.012}^{+0.013} (sist) \quad (5.27)$$

La forma más útil de usar estos resultados se compararlos con los reportados de siguiente experimento.

**Sudbury Neutrino Observatory (SNO) [6]** El SNO mide el flujo de neutrinos solares provenientes del  $^8B$  a través de las siguientes reacciones:



La reacción (5.28) es una reacción de corriente cargada (CC), la cual es sensible solamente a neutrinos del electrón; la reacción (5.29) (corriente neutra CN) es sensible a neutrinos de todos los sabores ( $x = e, \mu, \tau$ ); y la última reacción (5.30) es una dispersión elástica sensible a todos los sabores con distintas sensibilidades a cada uno. Como las secciones eficaces del rompimiento del deuterón son mayores que las secciones eficaces de la dispersión elástica de neutrinos, SNO tiene un volumen menor al de Super-K.

La forma más práctica de utilizar los resultados del SNO, es comparar el flujo de los  $\nu_e$  sobrevivientes (implicado por la reacción (5.28)) con el flujo total de neutrinos (dado por la reacción (5.29)). Esto debido a que los tres sabores de neutrinos contribuyen de igual forma para CN, siendo así una medida de todos los neutrinos provenientes del Sol, independientemente de las oscilaciones que ocurran en el camino a la Tierra, siempre y cuando no existan oscilaciones hacia neutrinos estériles. Para tener una medida más confiable de la reacción (5.29), al agua pesada se le agregó  $NaCl$ , para que cuando los neutrinos sean capturados por el núcleo de cloro, se emita un rayo gamma de 8 MeV, el cual es fácilmente detectado.

El detector se localiza en la mina INCO, Ltd. Creighton cerca de Sudbury en Canadá. Este experimento utiliza un detector de agua pesada,  $D_2O$ , contenida en un tanque esférico de 12 m de diámetro. Esta esfera es rodeada por un escudo de  $H_2O$  contenida en una cavidad con forma de barril de 34 m

de altura y un diámetro máximo de 22 m. La radiación Cerenkov es detectada por 9456 fotomultiplicadores. Aproximadamente el 55% de la luz producida dentro de 7 m del centro del detector, llega a un fotomultiplicador. La energía cinética de los electrones a partir de la cual empieza la detección es actualmte de 6.75 MeV, aunque se espera reducir a 5 MeV como Super-K.

Los primeros resultados obtenidos son de eventos registrados entre el 2 de noviembre de 1999 y el 15 de enero de 2001 antes que *NaCl* fuese agregado. Estos son

$$\phi^{CC}(\nu_e) = 1.75 \pm 0.07 \text{ (stat.)}_{-0.11}^{+0.12} \text{ (sis.)} \pm 0.05 \text{ (teo.)} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (5.31)$$

$$\phi^{ES}(\nu_x) = 2.39 \pm 0.34 \text{ (stat.)}_{-0.14}^{0.16} \text{ (sis.)} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (5.32)$$

Al igual que Super-K, SNO reporta estos flujos para distintos intervalos de energía cinética del electrón (puntos con barras de error en 5.7).

Cuando se combinan los resultados del SNO con los resultados del Super-K, se encuentra

$$\phi(\nu_x) = 5.44 \pm 0.99 \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (5.33)$$

El cual coincide con el valor predicho por el modelo estándar solar (ver tabla 5.3 y [16]) para el flujo del  $^8\text{B}$ . Los resultados de las corrientes neutras (5.29) no han sido publicados. Lo anterior es sumamente importante ya que es muy probable que finalmente se esté cerca de la solución del enigma de los neutrinos solares, mostrando que efectivamente ocurre el fenómeno de oscilaciones de neutrinos. Sin embargo aun existe mucho trabajo por realizar para determinar el mecanismo de oscilaciones que tiene lugar, así como los valores de los parámetros en cuestión y sus implicaciones.

Experimento	Valor teórico	Valor experimental	$E_0$ MeV	$\nu$
Homestake (Cl)	$7.6_{-1.1}^{+1.3}$	$2.56 \pm 0.23$	0.814	$\nu_e$
GALLEX + GNO (Ga)	$128_{-7}^{+9}$	$74.1_{-7.8}^{+6.7}$	0.233	$\nu_e$
SAGE (Ga)	$128_{-7}^{+9}$	$75.4_{-7.4}^{+7.8}$	0.233	$\nu_e$
$^8\text{B}$ -Kamiokande	$5.05 (1.00_{-0.16}^{+0.20})$	$2.80 (1.00 \pm 0.14)$	6.5	$\nu_{\alpha,s}$
$^8\text{B}$ -Super-K	$5.05 (1.00_{-0.16}^{+0.20})$	$2.32 \pm 0.085$	5.0	$\nu_{\alpha,s}$
<i>hep</i> -Super-K	9.3	$11.3 (1 \pm 0.8)$	5.0	$\nu_{\alpha,s}$
$^8\text{B}$ -SNO		$1.75 \pm 0.148$	6.75	$\nu_e$

Tabla 5.3: Resultados experimentales comparados con los resultados teóricos. Las unidades de los flujos para los experimentos Homestake, GALLEX + GNO y SAGE son SNU. Para los flujos de  $^8\text{B}$  y de *hep*, las unidades son  $10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  y  $10^3 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ , respectivamente. El valor de Super-K para el  $^8\text{B}$  corresponde a  $0.451 \pm 0.0167$  del flujo teórico. En la cuarta columna se muestra la energía  $E_0$  en MeV a partir de la cual se mide en cada experimento. En la última columna se muestran los neutrinos a los que el experimento es sensible, SNO es sensible a todos los neutrinos pero el valor experimental reportado es sensible sólo a  $\nu_e$ . Datos tomados de [6, 16] y referencias mencionadas en el texto.

Fuente	Flujo ( $10^{10} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ )	Cl (SNU)	Ga (SNU)
<i>pp</i>	5.95 ( $1.00^{+0.01}_{-0.01}$ )	0.0	69.7
<i>pep</i>	$1.40 \times 10^{-2}$ ( $1.00^{+0.015}_{-0.015}$ )	0.22	2.8
<i>hep</i>	$9.3 \times 10^{-7}$	0.04	0.1
${}^7\text{Be}$	$4.77 \times 10^{-1}$ ( $1.00^{+0.10}_{-0.10}$ )	1.15	34.2
${}^8\text{B}$	$5.05 \times 10^{-4}$ ( $1.00^{+0.20}_{-0.20}$ )	5.76	12.1
${}^{13}\text{N}$	$5.48 \times 10^{-2}$ ( $1.00^{+0.21}_{-0.17}$ )	0.09	3.4
${}^{15}\text{O}$	$4.80 \times 10^{-2}$ ( $1.00^{+0.25}_{-0.25}$ )	0.33	5.5
${}^{17}\text{F}$	$5.05 \times 10^{-4}$ ( $1.00^{+0.25}_{-0.25}$ )	0.003	0.1
Total		$7.6^{+1.3}_{-1.1}$	$128^{+9}_{-7}$

Tabla 5.4: Resultados teóricos para los flujos predichos por el modelo estándar solar. Estos datos corresponden a la actual luminosidad del Sol de  $3.842 \times 10^{33} \text{ ergs}^{-1}$ . [16]

Fuente	$\sigma_{\text{Cl}}$	$\sigma_{\text{Ga}}$
<i>pp</i>	0.0 ( $1.00 \pm .06$ )	11.72 ( $1.00 \pm .023$ )
<i>pep</i>	16 ( $1.00 \pm .06$ )	204 ( $1.00^{+0.17}_{-0.07}$ )
<i>hep</i>	3.9 ( $1.00 \pm .10$ )	7.14 ( $1.00^{+0.32}_{-0.18}$ )
${}^7\text{Be}$	2.4 ( $1.00 \pm .06$ )	71.7 ( $1.00^{+0.07}_{-0.03}$ )
${}^8\text{B}$	1.06 ( $1.00 \pm .10$ )	2.40 ( $1.00^{+0.33}_{-0.15}$ )
${}^{13}\text{N}$	1.7 ( $1.00 \pm .06$ )	60.4 ( $1.00^{+0.03}_{-0.03}$ )
${}^{15}\text{O}$	6.8 ( $1.00 \pm .06$ )	113.7 ( $1.00^{+0.12}_{-0.05}$ )
${}^{17}\text{F}$	6.9 ( $1.00 \pm .06$ )	113.9 ( $1.00^{+0.12}_{-0.05}$ )

Tabla 5.5: Secciones eficaces para el cloro [16] y el galio [14], debido a las distintas fuentes de neutrinos. Las unidades son  $10^{-46} \text{ cm}^2$ , a excepción de las fuentes *hep* y  ${}^8\text{B}$  cuyas unidades son  $10^{-42} \text{ cm}^2$ .

## 5.6 Ajuste a los experimentos.

Una vez que se tienen los resultados experimentales, el siguiente paso es ver qué tan bien se pueden explicar utilizando los modelos planteados, y que en el caso estudiado dan lugar a las probabilidades de supervivencia: ecuaciones (5.1) y (5.6). Para eso se procedió a minimizar la función  $\chi^2$  definida como

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(f_i(\alpha) - e_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (5.34)$$

donde  $f_i$  son los valores teóricos que dependen del vector de parámetros  $\alpha$  a determinar y las  $\sigma_i$  son los errores correspondientes al valor experimental  $e_i$ . Los experimentos utilizados para encontrar los parámetros son el Homestake, GALLEX+GNO, SAGE, Super-K y SNO. No se utilizaron los resultados de Kamiokande porque los resultados del Super-K dan un valor más preciso de la misma medición. Tampoco se tomó en cuenta el resultado del Super-K para *hep* ya que su error reportado es del 80%. Para los errores solamente se utilizaron los experimentales y no los teóricos. Esto porque se analizó la aproximación más sencilla, y para incluir los errores teóricos se debería introducir un matriz de errores donde se incluyan las correlaciones entre los datos. No se pueden simplemente sumar los errores teóricos a las  $\sigma_i$ , porque se introducirían los mismos errores de los flujos a distintos experimentos sin tomar en cuenta de manera correcta las correlaciones. El introducir los errores teóricos de esta manera aumenta demasiado el error dando valores de  $\chi^2$  muy pequeños para casi cualquier vector de parámetros  $\alpha$ . En una etapa posterior se planea llevar a cabo un análisis más detallado de los errores.

Para determinar si una  $\chi^2$  es suficientemente pequeña, se trabaja con una  $\chi^2$  normalizada, para lo cual se divide  $\chi^2$  entre el número de grados de libertad definido como el número de datos, menos el número de parámetros utilizados.

$$\chi_{Norm}^2 = \frac{\chi^2}{\# \text{ datos} - \# \text{ parámetros}} \quad (5.35)$$

Se normaliza a  $\chi^2$  de esta manera ya que se espera que mientras más datos se tengan,  $\chi^2 \approx \# \text{ datos} - \# \text{ parámetros}$ , [74].

Para cada valor de grados de libertad, se busca el valor  $\chi_{Norm}^2$  en las tablas de la función  $\chi^2$ , [79]. Ese valor es la probabilidad porcentual de encontrar  $\chi^2 \geq \chi_{Norm}^2$  (calidad del ajuste), mientras más grande es el valor, mejor es el ajuste. En base a esa probabilidad rechazamos o no el modelo que nos da las  $f_i$ . Los criterios más comunes para rechazar un modelo son si  $P(\chi^2 \geq \chi_{Norm}^2) \leq 5\%$  o  $1\%$ , y entonces se dice que se rechaza la hipótesis que las  $f_i$  propuestas ajustan a los experimentos a un nivel de confianza del  $5\%$  o del  $1\%$ , según sea el caso [79].<sup>2</sup>

La distribución de la probabilidad esta dada por

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \chi^{n-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (5.36)$$

donde  $n$  es el número de grados de libertad y se puede demostrar que la  $\chi^2$  de (5.34) es un caso particular de la  $\chi^2$  que aparece en (5.36), [74], el caso general incluye las correlaciones entre los experimentos.

La función  $\chi^2$  se minimizó utilizando el programa MINUIT.F[1]. Este programa es capaz de encontrar los valores de los parámetros, así como sus errores para distintos niveles de confianza. MINUIT.F compara los resultados experimentales con los flujos teóricos (funciones  $f_i$ ), los cuales son calculados con unas subrutinas que escribí con este fin.

A continuación se mencionan las distintas funciones  $f_i$  utilizadas para cada experimento.

<sup>2</sup>Otra forma de expresar esto es decir que un modelo se rechaza si la probabilidad de encontrar un mejor modelo  $P(\chi^2 \leq \chi_{Norm}^2) \geq 95\%$  o  $99\%$ .

**Homestake** Para este caso la función  $f_i$  corresponde al flujo promedio calculado de acuerdo a las ecuaciones (5.12) y (5.21), donde se utilizó la sección eficaz de absorción del cloro  $\sigma_{Cl}$ . El promedio sobre la energía va desde 0.814 MeV hasta el valor máximo de cada fuente. La suma se hace sobre todas las fuentes a excepción de la línea de  ${}^7Be$  menos energética y el flujo de  $pp$ . Los valores de la sección eficaz  $\sigma_{Cl}(E)$  se obtuvieron de la página en línea de Bahcall [12], los valores promedio aparecen en la tabla 5.5.  $\sigma_{Cl}(E)$  se aproximó utilizando dos polinomios de sexto grado. El primer polinomio aproxima la región de 0.814 MeV hasta 6 MeV, y el segundo de 6 MeV en adelante. Esto se debe a que el intervalo de las secciones eficaces es muy grande, desde  $\sigma(E = 1\text{MeV}) = 5 \times 10^{-42} \text{cm}^{-2}$  hasta  $\sigma(E = 20\text{MeV}) = 3 \times 10^6 \times 10^{-42} \text{cm}^{-2}$ , y encontrar un sólo polinomio que se ajustara a ese intervalo no fue posible. No se buscaron polinomios de mayor grado, porque estos polinomios tienen oscilaciones violentas lo cual altera el valor de la integral. Los espectros de energía de neutrinos son los predichos por el modelo estándar solar, mostrados en la figura 5.1, y obtenidos de [12]. Para la distancia entre la Tierra y el Sol se tomó el promedio de 1 AU.

En la tabla 5.9 se muestran las contribuciones de los neutrinos provenientes de cada reacción en el Sol, predichos para los experimentos de cloro.

**GALEX, GNO y SAGE** Al igual que con el cloro, utilizamos las ecuaciones (5.12) y (5.21), pero en este caso el promedio de la energía se hace desde 0.233 MeV, por lo que la suma incluye a todas las fuentes de neutrinos solares. La curva de la sección eficaz  $\sigma_{Ga}(E)$  varía desde  $\sigma(E = 0.24) = 13.1 \times 10^{-42} \text{cm}^{-2}$  hasta  $\sigma(E = 20) = 6.3 \times 10^5 \times 10^{-42} \text{cm}^{-2}$ . En este caso la sección eficaz se ajustó con tres polinomios de sexto grado que variaban entre 0, 3, 10 y 18 MeV. Los demás valores son los mismos que los usados para el experimento de cloro.

Las contribuciones de cada uno de los neutrinos provenientes de las reacciones solares se ven en la tabla 5.10

**Super-K y SNO** Para ajustar estos experimentos utilizamos la ecuación (5.20) normalizada por el resultado del modelo estándar solar, sin tomar en cuenta la resolución del detector. Las secciones eficaces diferenciales utilizadas para las dos probabilidades están dadas por las ecuaciones (5.18) y (5.16). Para ambos experimentos la integral (5.20) va de  $q_{min}$  a  $q_{max}$ . El mínimo valor  $q_{min}$  para la energía del neutrino incidente se obtiene de (5.14) para un ángulo de dispersión cero ( $\mu = 1$ ).  $q_{max}$  es el valor máximo posible para la energía del neutrino la cual depende del proceso en cuestión. Para obtener el número de eventos para Super-K, calculamos la integral de  $T$  para los 19 intervalos mostrados en la figura 5.6. El número total de eventos es el número promedio de eventos calculado a partir de los 19 intervalos. Para SNO, se hace el mismo cálculo, pero con los 11 intervalos mostrados en la figura 5.7.

Para ambos experimentos, el único flujo con el que se trabajó fue el del boro, porque el flujo de  $hep$  ya ha sido excluido del análisis de los datos experimentales.

### 5.6.1 Distintas Soluciones

En esta subsección se presentan las distintas soluciones obtenidas que se encontraron para los mejores ajustes. Los mínimos encontrados corresponden al modelo A que contiene dos parámetros, y al modelo B que tiene 4 parámetros.

- Solución I, esta es encontrada ajustando ambos modelos a los valores del flujo promedio reportados por Homestake, GALEX+GNO, SAGE, Super-Kamiokande y SNO (ver tabla 5.3). Para este ajuste se supone que  $\nu_e$  oscila a un neutrino estéril  $\nu_s$ , por lo que en la ecuación (5.20) sólo se incluyó la probabilidad  $P(\nu_e \rightarrow \nu_s)$ , con su respectiva sección eficaz de dispersión.

De aquí en adelante todas las soluciones suponen que el neutrino al que se oscila es activo por lo que en el caso de Super-K se incluyen las probabilidades  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  y  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  con sus respectivas secciones eficaces de dispersión.

- Solución II, esta solución es muy parecida a la solución anterior, sólo que aquí se incluyen neutrinos activos.
- Solución III, esta tercera solución consiste en ajustar los parámetros con los 19 datos del espectro de energía que reporta Super-K, sin incluir ningún otro experimento.
- Solución IV. Esta solución se encontró tomando simultáneamente los flujos promedio de Homestake, GALLEX+GNO, SAGE, SNO (tabla 5.3) y los 19 puntos de Super-K.
- Solución V. La última solución se encuentra tomando los flujos promedio de Homestake, GALLEX+GNO y SAGE (tabla 5.3), los 19 puntos de Super-K y 11 puntos del espectro de energía que reporta SNO.

Los experimentos de GALLEX+GNO y SAGE son tomados como dos resultados independientes y ambos son ajustados con el mismo valor de  $f_i$ . En varios ajustes encontrados en la literatura, se ajusta el promedio de estos dos experimentos con el valor teórico. No se hizo esto, por que en ese caso tendríamos 4 datos y 4 parámetros para el modelo B. Ésto hace que  $\chi^2$  no esté definida, por lo que no es posible utilizar el criterio mencionado para  $\chi^2$ .

## 5.7 Resultados de optimizar $\chi^2$ .

A continuación se presentan los resultados encontrados al optimizar la función  $\chi^2$ , cuando las probabilidades de oscilación están dadas por el modelo A, ecuaciones (5.1) y (5.5), y el modelo B, ecuaciones (5.6) y (5.10).

### 5.7.1 Resultados para el modelo A (2 parámetros).

Los valores de los parámetros que mejor ajustan los experimentos se muestran en las tablas 5.6 y 5.7. En la primera se dan los parámetros tal como aparecen en las fórmulas, y en la segunda se dan los valores de las diferencias de masas, el seno y la tangente del ángulo, que es como usualmente se reportan estos datos. Como en la ecuación (5.1), aparece el término  $\sin^2(2\varphi)$ , se puede usar el ángulo  $\varphi$  o  $90 - \varphi$ , como se reporta en la tabla 5.7. Cabe mencionar que cuando se toman en cuenta las interacciones con la materia, se pierde esta simetría ocasionando que  $\varphi$  y  $90 - \varphi$  den valores distintos del flujo final. [39]

	D	$\varphi$
Sol. I	$78.136^{+1.2081}_{-1.0628}$	$62.585^{+0.45119}_{-0.47701}$
Sol. II	$77.814^{+1.8155}_{-1.1655}$	$61.913^{+0.56480}_{-0.62757}$
Sol. III	$79.667^{+1.7800}_{-1.8525}$	$64.111^{+0.23137}_{-0.23378}$
Sol. IV	$78.672^{+0.74491}_{-0.76491}$	$63.753^{+0.21665}_{-0.21822}$
Sol. V	$78.994^{+0.74637}_{-0.80429}$	$63.382^{+0.19951}_{-0.19927}$

Tabla 5.6: Valores de los parámetros que minimizan  $\chi^2$  en las distintas soluciones del modelo A.

En la tabla 5.8, donde se muestra el valor de la  $\chi^2$  y la probabilidad de encontrar  $\chi'^2 \geq \chi^2$ , se ve que a un nivel de 5% de confianza, la fórmula de probabilidad se rechaza para todas las soluciones con excepción de las soluciones I y II. En cualquier caso los ajustes no resultan ser muy buenos.

	$\Delta M_{12}^2$	$\text{sen}^2 2\varphi$	$\tan^2 \varphi$	$\tan^2 (90 - \varphi)$
Sol. I	$7.81 \times 10^{-11}$	0.788	3.717	0.269
Sol. II	$7.78 \times 10^{-11}$	0.690	3.511	0.285
Sol. III	$7.97 \times 10^{-11}$	0.617	4.245	0.235
Sol. IV	$7.87 \times 10^{-11}$	0.629	4.113	0.243
Sol. V	$7.90 \times 10^{-11}$	0.642	3.963	0.251

Tabla 5.7: Valores de los parámetros que minimizan  $\chi^2$  en las distintas soluciones del modelo A. Las diferencias de masas cuadradas están dadas en  $\text{eV}^2$ . No se incluyen los errores de estos parámetros, pero su cálculo es inmediato a partir de la tabla 5.6.

Modelo A	$\chi^2$	$P(\chi'^2 \geq \chi^2)$ , calidad del ajuste
Sol. I	11.43248	1.003%
Sol. II	6.586325	8.97%
Sol. III	46.29792	< 0.1%
Sol. IV	67.17406	< 0.1%
Sol. V	94.74568	< 0.1%

Tabla 5.8: Probabilidad de encontrar  $\chi'^2 \geq \chi^2$  para las distintas soluciones del modelo A.

En la figura 5.5 se muestran los rangos permitidos para valores de los parámetros que mejor ajustan los datos. Las curvas de las gráficas de la figura 5.5 se obtienen variando las dos variables alrededor de los valores de la tabla 5.6, puntos negros en cada gráfica. Estas curvas dan los niveles de confianza. Las curvas son generadas con la subrutina MNCONT del programa MINUIT. Lo que hace esta subrutina es que para las 2 variables, toma el rango dado por  $\pm\sigma$  (la desviación estándar de cada una), luego, el rectángulo definido por los rangos es dividido en 25 intervalos en el eje vertical y en el horizontal. Las curvas se dibujan uniendo los puntos dentro de estas divisiones, donde la función  $\chi^2$  vale  $\chi_{MINIMO}^2 + UP * \sigma^2$ . Para las curvas de la figura 5.5,  $UP = 1, 4, 9$ , con lo cual se obtienen curvas a  $+\sigma$ ,  $+2\sigma$  y  $+3\sigma$  (desviación estándar) respectivamente.

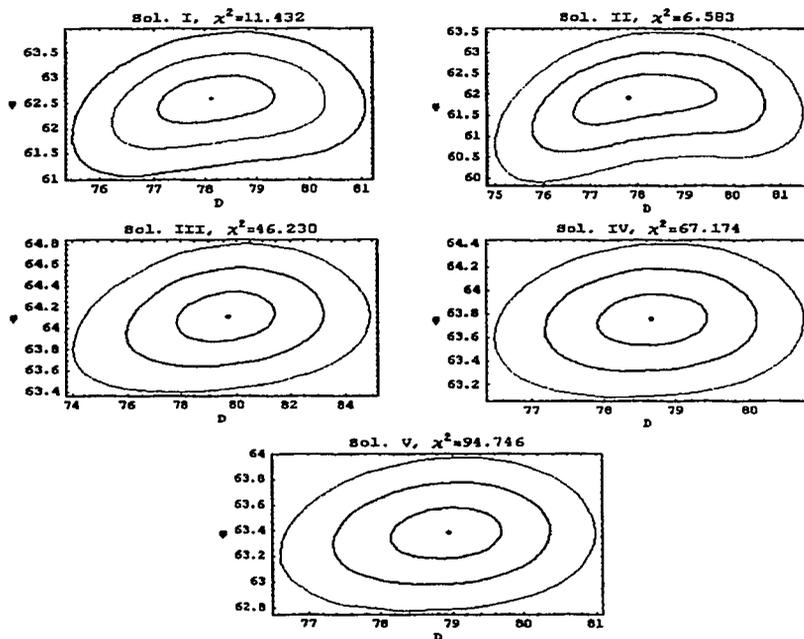


Figura 5.5: Valores de los parámetros del modelo A para ajustar: a) Solución I (5 flujos); b) Solución II (5 flujos con oscilación  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  para Super-K); c) Solución III (sólo ajustamos los 19 datos de Super-K); d) Solución IV (4 flujos y 19 datos del Super-K); e) Solución V (3 flujos, 19 puntos de Super-K y 11 puntos de SNO). Las curvas que aparecen en las gráficas se obtienen tomando  $\chi^2 = \chi^2_{MIN} + i\sigma$ , con  $i = 1, 2, 3$  de adentro hacia afuera.

En la figura 5.6 se compara el espectro de la energía de retroceso del electrón medido por Super-K (puntos con barras de error) con el predicho por las soluciones (puntos unidos por la curva). La gráfica superior de la figura 5.6 muestra el espectro cuando utilizamos la solución I y II, y en la gráfica inferior de la figura 5.6, el espectro dado por las soluciones III, IV y V. Para las últimas 3 soluciones se ajustó explícitamente el espectro mostrado en las gráficas de la figura 5.6. En ambas gráficas se observa que el ajuste logrado no es bueno. En la figura 5.7 se muestra el espectro para la energía de retroceso del electrón correspondiente al experimento del SNO.

En la figura 5.8 se muestra la variación temporal del flujo para el presente modelo (puntos unidos por la curva), comparada con la variación reportada por Super-K.

En la tabla 5.9 se muestran las contribuciones parciales a los flujos provenientes de los diversos procesos que se predicen para el experimento de cloro, para las distintas soluciones. En la tabla 5.10, se presenta lo equivalente para los experimentos con galio. Finalmente en la tabla 5.11 se muestran los valores totales que se predicen para los flujos correspondientes a cada experimento. Para estas tres tablas, los flujos se calcularon en base al modelo solar, por lo que se usaron los errores dados por este (obtenidos de las tablas 5.4 y 5.5). Los errores introducidos por las incertidumbres de los parámetros aumentan los errores, haciendo que los errores varíen desde los dados por el modelo solar, hasta:  $\pm 1.70$  para el Homestake,  $\pm 10.14$  para los de galio,  $\pm 20.5\%$  para Super-K y SNO.

Fuente	Sol. I	Sol. II	Sol. III	Sol. IV	Sol. V	Modelo Solar
<i>pp</i>	-	-	-	-	-	-
<i>pep</i>	0.071	0.068	0.091	0.079	0.078	0.22
<i>hep</i>	0.019	0.019	0.021	0.020	0.020	0.04
${}^7\text{Be}$	0.529	0.509	0.682	0.592	0.586	1.15
${}^8\text{B}$	2.258	2.144	2.525	2.462	2.40	5.76
${}^{13}\text{N}$	0.062	0.061	0.065	0.064	0.063	0.09
${}^{15}\text{O}$	0.218	0.215	0.223	0.223	0.221	0.33
${}^{17}\text{F}$	0.003	0.003	.003	0.003	0.003	0.003
Total	3.090	2.950	3.520	3.360	3.280	$7.6^{+1.3}_{-1.1}$

Tabla 5.9: Contribuciones de los flujos para el experimento de Homestake. Esto valores son calculados con los parámetros que mejor ajustan los resultados experimentales. Todos los resultados están expresados en SNU y son para el modelo A. Las contribuciones de *pp* no se calcularon ya que el experimento no las detecta. Los errores de los valores se pueden calcular fácilmente a partir de las tablas 5.4 y 5.5. El error de los flujos totales de las soluciones es  $\pm 1.70$ .

Para calcular la variación escribimos la distancia Tierra Sol como

$$R = \frac{b^2}{a(1 - \epsilon^2 \cos^2 \vartheta)} [1 + \epsilon \cos \vartheta] \quad (5.37)$$

donde  $\epsilon = 0.017$  es la excentricidad de la órbita,  $a = 1.002687$  AU es el semieje mayor de la órbita y  $b = 1.002548$  AU es el semieje menor de la órbita. Con estos valores la distancia Tierra-Sol varía de  $\sim 1.02$  AU en el afelio que ocurre alrededor del 4 de julio,  $\vartheta = 0^\circ$ , hasta  $\sim 0.98$  AU, en el perihelio que ocurre alrededor del 4 de enero,  $\vartheta = 180^\circ$ . Los resultados son compatibles con una recta horizontal que no muestra dependencia observable con la estación del año.

Para completar estos resultados, en la figura 5.9 se muestran las gráficas para la dependencia de  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  y  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  como función de la energía para las 5 soluciones discutidas. En todos los casos se observan oscilaciones bruscas para energías bajas y luego, en el caso de  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ , dos mínimos son claros: uno alrededor de 3 MeV y otro en 8 MeV, los cuales afectan principalmente a los neutrinos de  ${}^8\text{B}$ , mientras que las gráficas a la derecha muestran que en todos los casos  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  tiene un mínimo

Fuente	Sol. I	Sol. II	Sol. III	Sol. IV	Sol. V	Modelo Solar
<i>pp</i>	45.132	44.429	47.127	46.462	46.077	69.7
<i>pep</i>	1.75710	1.804	1.511	1.699	1.601	2.3
<i>hep</i>	0.031	0.030	0.033	0.033	0.032	0.1
${}^7\text{Be}$	12.888	12.516	16.264	14.209	14.008	34.2
${}^8\text{B}$	5.066	4.829	5.634	5.489	5.361	12.1
${}^{13}\text{N}$	2.193	2.161	2.264	2.253	2.228	3.4
${}^{15}\text{O}$	3.750	3.700	3.850	3.840	3.801	5.5
${}^{17}\text{F}$	.044	0.044	0.045	0.045	.045	0.1
<b>Total</b>	<b>70.860</b>	<b>69.510</b>	<b>76.728</b>	<b>74.021</b>	<b>73.091</b>	<b>128<math>^{+9}_{-7}</math></b>

Tabla 5.10: Contribuciones de los distintos flujos para los experimentos de galio en el modelo A. Estos valores son calculados para los valores que mejor ajustan a los datos experimentales. Todos los datos están dados en SNU. El valor que se muestra para  ${}^7\text{Be}$ , es la suma de las dos contribuciones (ver figura 5.1). Los errores de los valores del se pueden calcular fácilmente a partir de las tablas 5.4 y 5.5. El error total de los flujos de las soluciones es  $\pm 10.14$ .

cerca de 5 MeV. En las gráficas de la figura 5.10 también se muestran las mismas probabilidades que en la figura 5.9, pero ahora la energía esta en una escala logarítmica, y se sobre cada probabilidad se superpone el espectro de flujos de neutrinos dados en la figura 5.1. En la figura 5.10, es más fácil ver que a energías menores a 1 MeV, la probabilidad de supervivencia tiende a  $\sim 0.7$  mientras que la probabilidad de oscilar hacia otro neutrino es  $\sim 0.3$ .

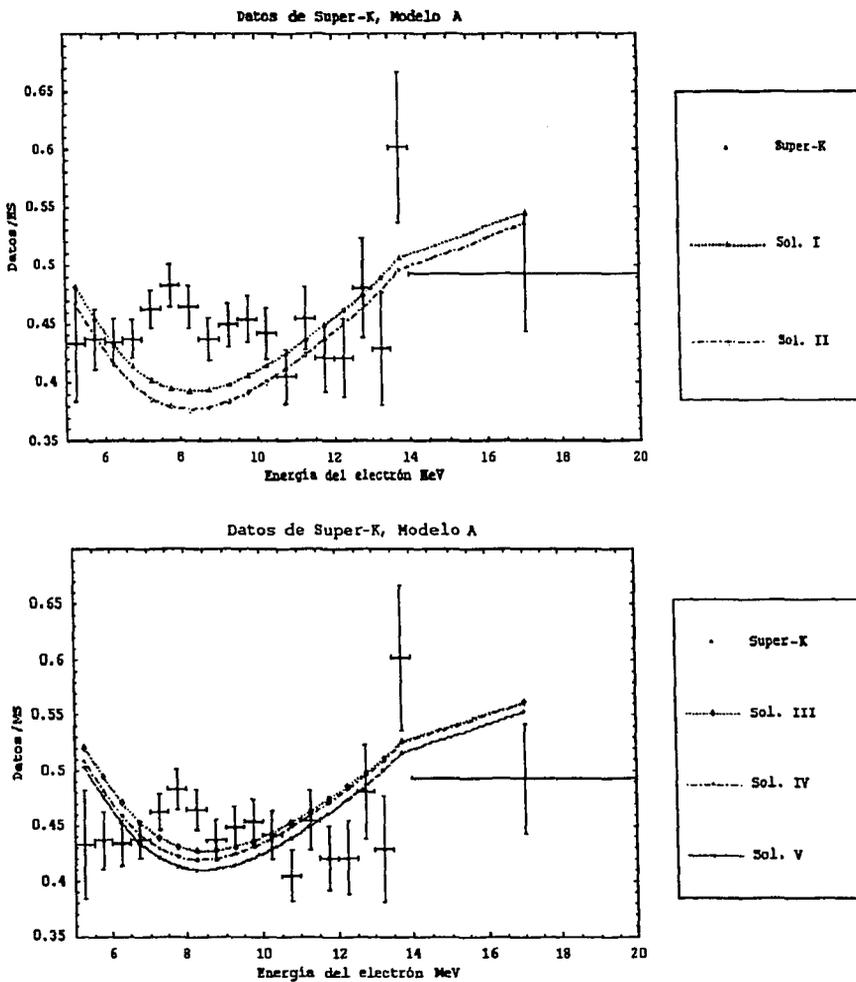


Figura 5.6: Espectro reportado por Super-K (puntos con barras de error) [41], comparado con los espectros obtenidos por las soluciones para el modelo A. En la gráfica superior se muestran las soluciones I y II mientras que en la inferior, las soluciones III, IV y V. En ambas gráficas el ajuste no es bueno, aunque en la gráfica inferior los resultados están más cercanos al espectro

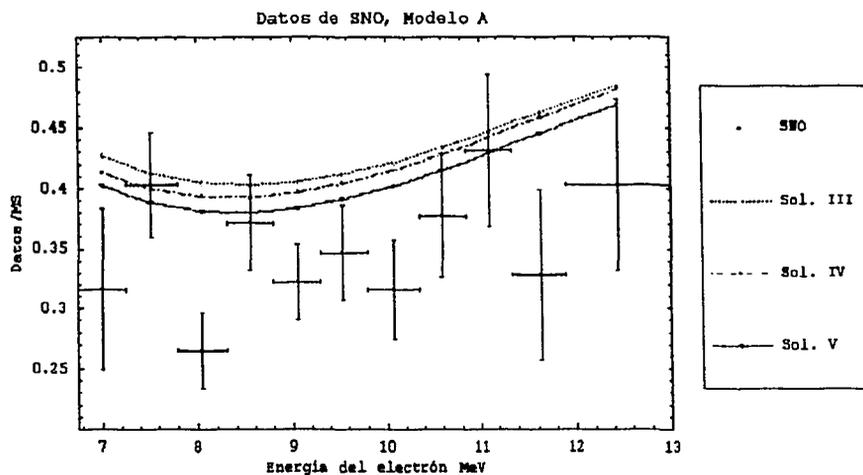
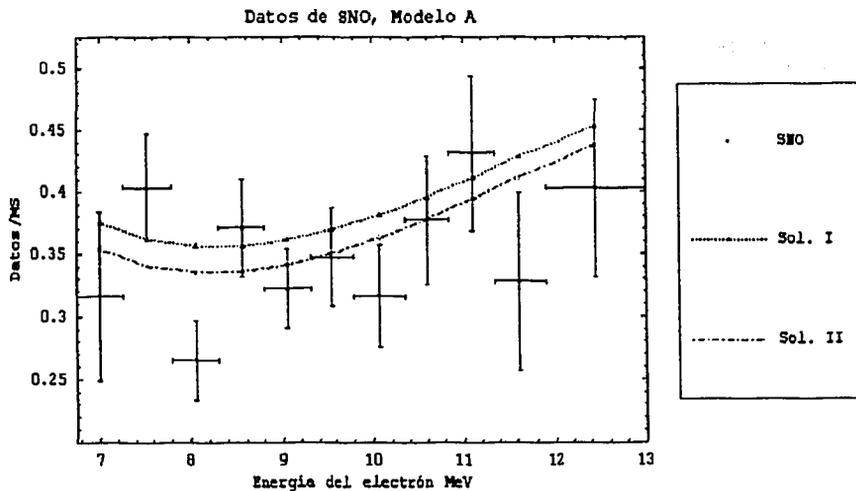


Figura 5.7: Espectro reportado por SNO (puntos con barras de error) [6], comparado con los espectros obtenidos para las 5 soluciones, modelo A. En la gráfica superior se muestran las soluciones I y II, y en la inferior, las soluciones III, IV y V. Los resultados son compatibles con una distribución plana.



## Modelo A

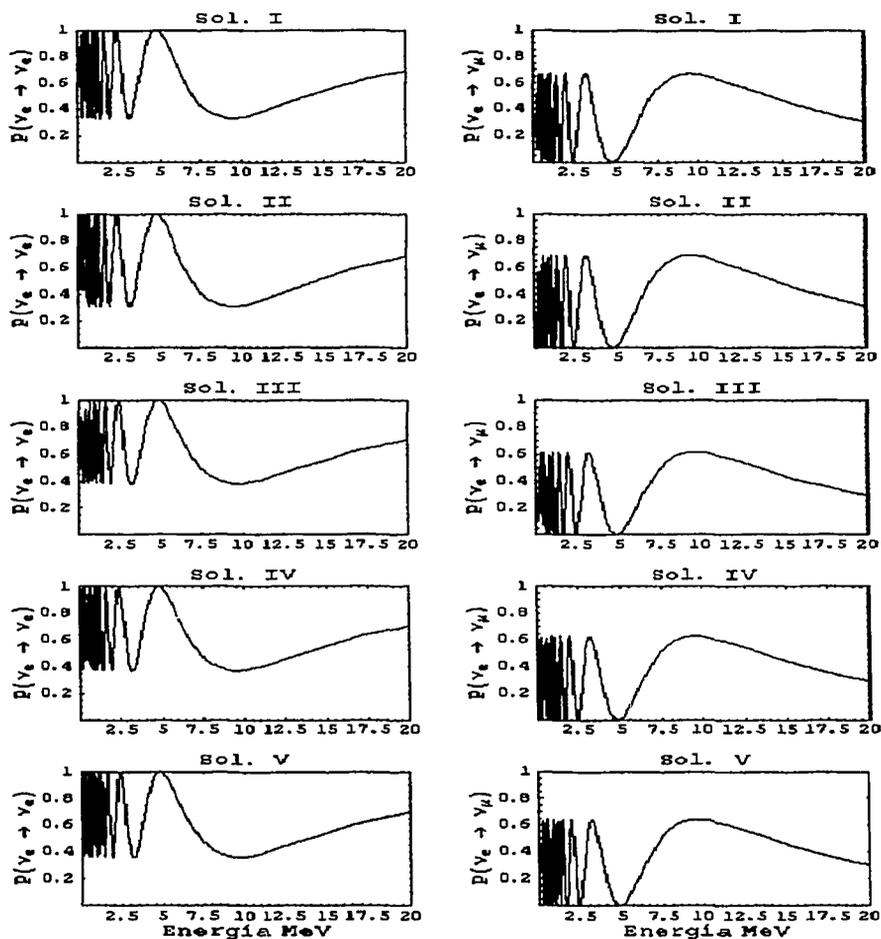


Figura 5.9: Modelo A. Probabilidades de supervivencia y de oscilación como función de la energía del neutrino para las 5 soluciones encontradas. Las gráficas de la izquierda corresponden a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  y las de la derecha corresponden a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . Las gráficas son para una distancia Tierra Sol de 1 AU.

## Modelo A

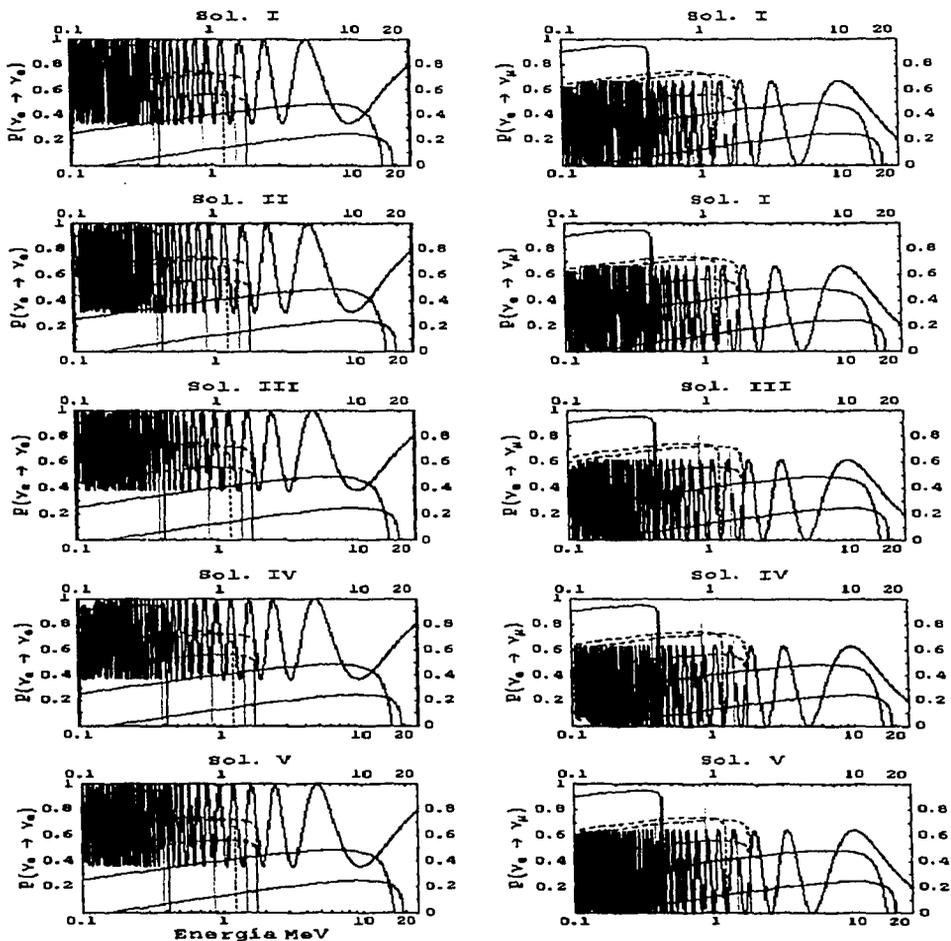


Figura 5.10: Modelo A. Probabilidades de supervivencia y de oscilación como en la figura 5.9, comparadas con los flujos de neutrinos de la figura 5.1. Las gráficas de la izquierda corresponden a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  y las de la derecha corresponden a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . Las gráficas son para una distancia Tierra Sol de 1 AU. En estas gráficas se ve como para energías bajas, la probabilidad puede aproximarse a  $\sim 0.7$  y  $\sim 0.3$  para  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  y  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  respectivamente.

	Homestake	GALLEX + GNO	SAGE	Super-K	SNO		
Experimento	$2.56 \pm 0.23$	$74.1 \pm 7.8$	$75.4 \pm 7.8$	$0.451 \pm 0.0167$	$1.75 \pm 0.148$	$\Delta M_{12}^2 \times 10^{-11} \text{ eV}^2$	$\text{sen}^2 2\rho$
Sol. I	3.085006	70.857233	70.857233	0.418139	1.952230	7.81	0.788
Sol. II	2.946216	69.509198	69.509198	0.425430	1.857037	7.78	0.690
Sol. III	(3.518405)	(76.727590)	(76.727590)	(0.470200)	(2.163140)	7.97	0.617
Sol. IV	3.359773	74.021634	74.021634	(0.463670)	2.120503	7.87	0.629
Sol. V	3.281547	73.091503	73.091503	(0.455475)	(2.058718)	7.90	0.642

Tabla 5.11: Valores para los distintos experimentos predichos por las distintas soluciones. Los resultados de Homestake, GALLEX+GNO y SAGE están dados en SNU, los de Super-K no tienen unidades ya que están normalizados por el modelo estándar solar [16], y los de SNO están dados en  $10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Los datos que aparecen en paréntesis para Super-K y SNO son el promedio de los 19 y 11 datos usados para ajustar los experimentos, en el caso de las 2 soluciones IV. Los datos en paréntesis para el cloro y el galio fueron calculados con el valor de los parámetros, pero no fueron usados para el ajuste. Por ejemplo para la solución III se ajustó el espectro de la energía de retroceso de los electrones. Estos datos son calculados cuando se ajusta el modelo A. Los errores de los valores calculados son:  $\pm 1.70$  para Homestake,  $\pm 10.14$  para los experimentos de galio, 20% para Super-K y SNO. Los valores de los parámetros son tomados de la tabla 5.6.

## 5.7.2 Resultados para el modelo B (4 parámetros).

Para el modelo B utilizamos las expresiones (5.6) y (5.10) para las probabilidades de supervivencia y de oscilación ( $\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}$ ) respectivamente. En este caso son 4 los parámetros a determinar y obtenemos nuevamente 5 soluciones, bajo las condiciones mencionadas en la sección 5.6.1.

En las tablas 5.12 y 5.13 se muestran los valores de los parámetros. En la primera se dan los resultados en términos de los parámetros  $D1$ ,  $D2$ ,  $D3$  y  $\varphi$  que aparecen en las fórmulas de probabilidad, y en la segunda tabla se dan los valores expresados como función del ángulo de mezcla  $\varphi$  y de las diferencias de masas cuadráticas  $\Delta m_{I12}^2 \equiv m_{I1}^2 - m_{I2}^2$ ,  $\Delta m_{II12}^2 \equiv m_{II1}^2 - m_{II2}^2$ , y  $\Delta M_{II}^2 \equiv (m_{I1}^2 + m_{I2}^2) - (m_{II1}^2 + m_{II2}^2)$ .

	D1	D2	D3	$\varphi$
Sol. I	$2.0533 \times 10^{-8} \pm 0.92218$	$5.2423^{+0.27796}_{-0.28454}$	$171.13^{+3.3834}_{-3.5223}$	$63.394^{+0.46629}_{-0.47133}$
Sol. II	$6.68062 \times 10^{-5} \begin{matrix} +0.86240 \\ -0.86239 \end{matrix}$	$5.1814^{+0.28244}_{-0.28223}$	$171.18^{+2.9851}_{-3.1147}$	$62.769^{+0.57115}_{-0.56317}$
Sol. III	$29.745^{+1.3775}_{-1.6810}$	$29.745^{+1.3775}_{-1.6810}$	$226.43^{+11.433}_{-12.156}$	$68.837^{+0.663713}_{-0.64677}$
Sol. IV	$38.347^{+9.5457}_{-6.5852}$	$25.261^{+0.55124}_{-0.85194}$	$204.04^{+6.7674}_{-8.0254}$	$67.255^{+0.42308}_{-1.0283}$
Sol. V	$2.5406 \times 10^{-9} \pm 0.91311$	$5.1923^{+0.28263}_{-0.28117}$	$166.19^{+2.4164}_{-2.4717}$	$63.762^{+0.20268}_{-0.20330}$

Tabla 5.12: Valores de los parámetros para las distintas soluciones del modelo B.

	$\Delta m_{I12}^2$	$\Delta m_{II12}^2$	$\Delta M_{II}^2$	$\sin^2 2\varphi$	$\tan^2 \varphi$
Sol. I	$\leq 9.22 \times 10^{-13}$	$5.24 \times 10^{-12}$	$1.71 \times 10^{-10}$	0.641	3.986
Sol. II	$\leq 8.62 \times 10^{-13}$	$5.18 \times 10^{-12}$	$1.71 \times 10^{-10}$	0.662	3.776
Sol. III	$2.97 \times 10^{-11}$	$2.97 \times 10^{-11}$	$2.26 \times 10^{-10}$	0.453	6.672
Sol. IV	$3.83 \times 10^{-11}$	$2.53 \times 10^{-11}$	$2.04 \times 10^{-10}$	0.508	5.690
Sol. V	$\leq 9.13 \times 10^{-13}$	$5.19 \times 10^{-12}$	$1.66 \times 10^{-10}$	0.629	4.116

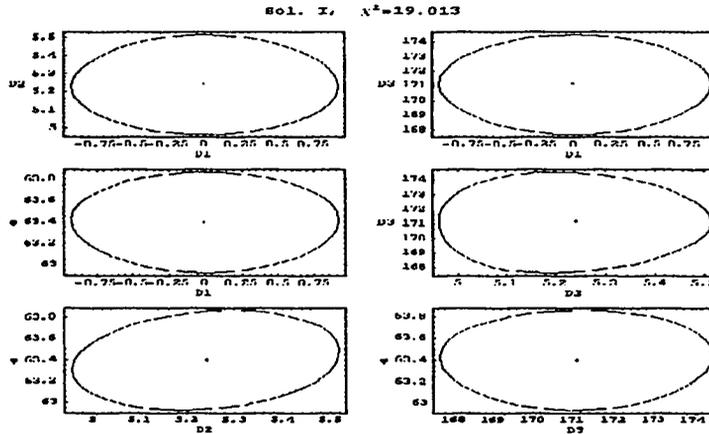
Tabla 5.13: Valores de los parámetros para las distintas soluciones del modelo B. Las diferencias de masas cuadradas están dadas en  $eV^2$ . No se incluyen los errores de los valores, pero su cálculo es inmediato a partir de tabla 5.12.

En la tabla 5.14 se muestran las probabilidades de encontrar  $\chi^2 \geq \chi^2$ .

Las gráficas de las figuras 5.11 - 5.15 muestra los rangos de los valores de los parámetros que ajustan cada solución. Las curvas de las gráficas son hechas manteniendo los dos parámetros no graficados fijos en los valores de la tabla 5.12, mientras se varían los otros 2 parámetros. En todas las gráficas, los puntos negros son los puntos dados en la tabla 5.12. Las curvas son los puntos donde la función  $\chi^2$  vale  $\chi_{MINIMO}^2 + UP * \sigma^2$ , donde  $UP = 1, 4, 9$ , para la solución III y  $UP = 1$  para el resto de las soluciones. Con  $UP = 1, 4, 9$  se obtienen curvas a  $+\sigma$ ,  $+2\sigma$  y  $+3\sigma$ .

En la figura 5.16 se compara el espectro para la energía de retroceso de los electrones medido por Super-K (puntos con barras de error) con el predicho por las soluciones (puntos unidos por la curva). La gráfica superior de la figura 5.16 muestra el espectro cuando utilizamos la solución I y II, y en la

Modelo B	$\chi^2$	$P(\chi'^2 \geq \chi^2)$ , calidad del ajuste
Sol. I	19.01280	< 0.1%
Sol. II	15.86866	< 0.1%
Sol. III	14.382892	50.29%
Sol. IV	64.463652	< 0.1%
Sol. V	101.0474	< 0.1%

Tabla 5.14: Probabilidad de encontrar  $\chi'^2 \geq \chi^2$  para las distintas soluciones del modelo B.Figura 5.11: Valores que ajustan la Solución I del modelo B. La curva se obtiene tomando  $\chi^2 = \chi_{MIN}^2 + 1\sigma$ .

gráfica inferior de la figura, el espectro dado por las soluciones III, IV y V. En las gráficas de la figura 5.17 se muestra lo mismo que en las figuras 5.16 pero ahora se compara con el espectro de SNO.

En la tabla 5.15 se muestran las contribuciones parciales al flujo para los diferentes procesos para el experimento de cloro, para las distintas soluciones. En la tabla 5.16, se presenta lo equivalente pero para los experimentos con galio. En la tabla 5.17 se muestran los valores de los flujos dados por las distintas soluciones. Para estas tres tablas, los flujos se calcularon en base al modelo solar, por lo que se usaron los errores dados por este (obtenidos de las tablas 5.4 y 5.5). Los errores introducidos por las incertidumbres de los parámetros aumentan los errores, haciendo que los errores varíen desde los dados por el modelo solar, hasta:  $\pm 1.70$  para el Homestake,  $\pm 10.14$  para los de galio,  $\pm 20.5\%$  para Super-K y SNO.

En la figura 5.18 se muestra la variación temporal del flujo para las soluciones comparada con la variación reportada por Super-K. La variación es calculada utilizando la expresión (5.37) para calcular la variación de la distancia Tierra-Sol.

Por último, en la figura 5.19 se muestran las gráficas para las probabilidades  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  y  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  como función de la energía del neutrino. En este caso notamos que además de las oscilaciones bruscas a

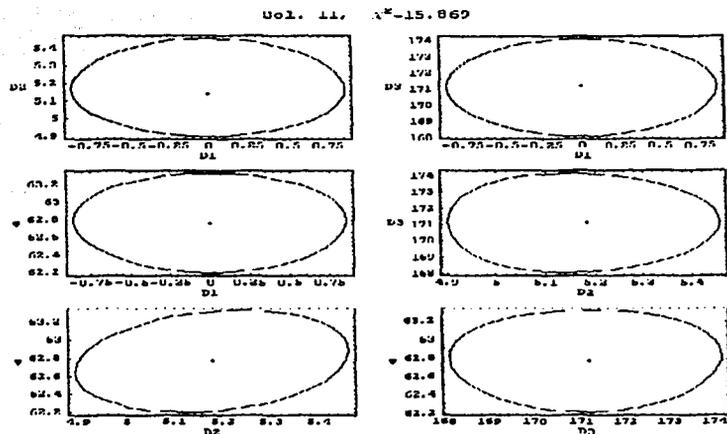


Figura 5.12: Valores que ajustan la Solución II del modelo B. La curva se obtiene tomando  $\chi^2 = \chi^2_{MIN} + 1\sigma$ .

energías pequeñas, la probabilidad de supervivencia puede cancelarse para ciertos valores de la energía. En la figura 5.20 se muestran estas mismas probabilidades pero la energía se encuentra en una escala logarítmica, además las probabilidades se comparan con el espectro de neutrinos solares, figura 5.1. De las figuras 5.9 y 5.10, se ve que a bajas energías la probabilidad en promedio es menor que en el modelo A, esto se traduce en que la contribución del espectro  $pp$  sea menor al del modelo A, afectando principalmente al valor encontrado del experimento de galio. También se ve que las soluciones III y IV tienen un mínimo en la probabilidad de supervivencia entre 2 y 4 MeV, esto afecta a la contribución del  ${}^8B$  y de  $hep$  en esa región, sin embargo el comportamiento de la probabilidad para otras energías hace que ese mínimo se compense, dando como resultado final valores del experimento de cloro mayores que en las soluciones I, II y V.

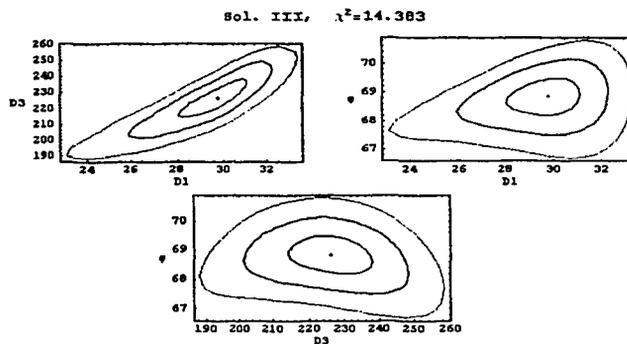


Figura 5.13: Valores que ajustan la Solución III del modelo B. Las curvas se obtienen tomando  $\chi^2 = \chi^2_{MIN} + i\sigma$  con  $i = 1, 2, 3$ . Sólo se muestran tres gráficas porque el mínimo se encontró haciendo  $D1 = D2$ .

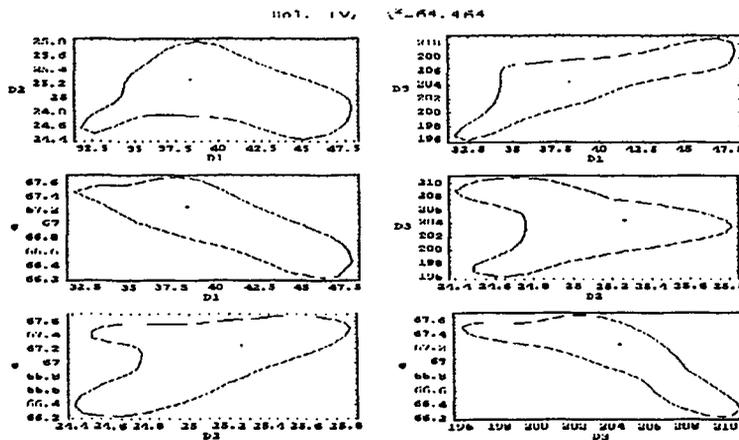


Figura 5.14: Valores que ajustan la Solución IV del modelo B. La curva se obtiene tomando  $\chi^2 = \chi^2_{MIN} + 1\sigma$ .

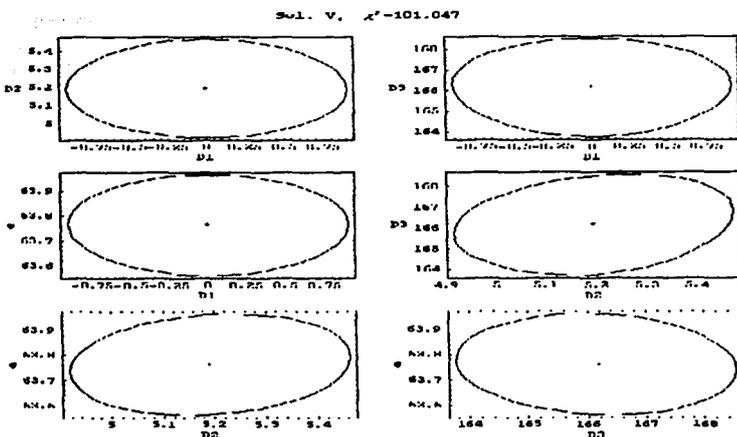


Figura 5.15: Valores que ajustan la Solución V del modelo B. La curva se obtiene tomando  $\chi^2 = \chi^2_{MIN} + 1\sigma$ .

Fuente	Sol. I	Sol. II	Sol. III	Sol. IV	Sol. V	Modelo Solar
<i>pp</i>	-	-	-	-	-	-
<i>pep</i>	0.058	0.061	0.194	0.068	0.045	0.22
<i>hep</i>	0.019	0.018	0.020	0.019	0.019	0.04
${}^7\text{Be}$	0.434	0.459	1.449	0.506	0.336	1.15
${}^8\text{B}$	2.398	2.291	2.755	2.670	2.435	5.76
${}^{13}\text{N}$	0.021	0.022	0.044	0.017	0.021	0.09
${}^{15}\text{O}$	0.110	0.111	0.110	0.156	0.116	0.33
${}^{17}\text{F}$	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.003
Total	3.040	2.960	4.574	3.438	2.970	$7.6^{+1.3}_{-1.1}$

Tabla 5.15: Contribuciones de los flujos para el experimento de Homestake. Estos valores son calculados para los parámetros del modelo B que mejor ajustan los resultados experimentales. Los parámetros no se determinaron ajustando estos datos. Todos los resultados están expresados en SNU. Las contribuciones de *pp* no se calcularon ya que el experimento no las detecta. Los errores de los valores se pueden calcular fácilmente a partir de las tablas 5.4 y 5.5. El error de los flujos totales de las soluciones es  $\pm 1.70$ .

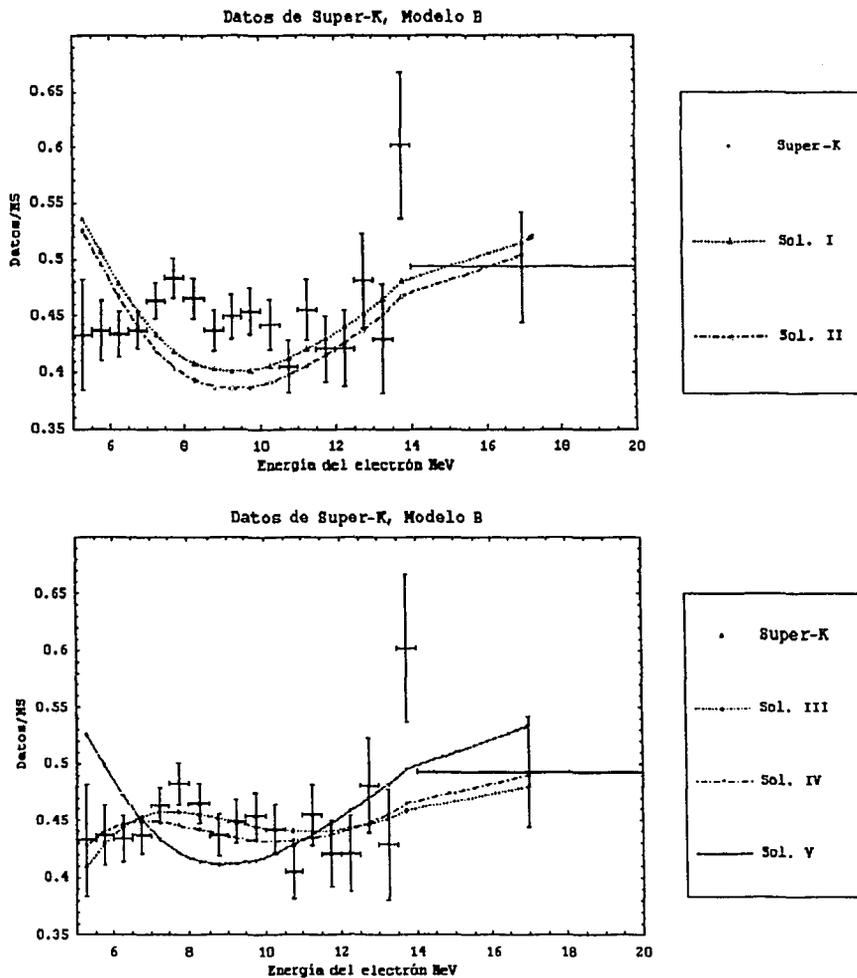


Figura 5.16: Espectro reportado por Super-K (puntos con barras de error) [41], comparado con los espectros obtenidos por las soluciones para el modelo B. En la gráfica superior se muestran las soluciones I Y II, y en la inferior, las soluciones III, IV y V. A excepción de las soluciones III y IV, los ajustes no son buenos,



Fuente	Sol. I	Sol. II	Sol. III	Sol. IV	Sol. V	Modelo Solar
<i>pp</i>	37.626	37.007	24.708	27.135	37.760	69.7
<i>pep</i>	0.606	0.585	1.129	2.065	0.531	2.3
<i>hep</i>	0.030	0.029	0.032	0.031	0.031	0.1
${}^7\text{Be}$	10.923	11.483	33.903	12.802	8.079	34.2
${}^8\text{B}$	5.470	5.261	5.650	5.577	5.508	12.1
${}^{13}\text{N}$	1.692	1.702	1.874	2.528	1.771	3.4
${}^{15}\text{O}$	0.584	0.597	1.357	0.986	0.577	5.5
${}^{17}\text{F}$	0.020	0.020	0.020	0.030	0.021	0.1
Total	56.950	56.684	68.685	51.154	54.270	128 $^{+9}_{-7}$

Tabla 5.16: Contribuciones a los flujos parciales para los experimentos de galio. Estos valores son calculados para los parámetros que mejor ajustan a los datos experimentales para el modelo B. Los parámetros no se determinaron ajustando cada una de las contribuciones, sólo ajustando al valor total. Todos los datos están dados en SNU. El valor que se muestra para  ${}^7\text{Be}$ , es la suma de las dos contribuciones (ver figura 5.1). Los errores de los valores del se pueden calcular fácilmente a partir de las tablas 5.4 y 5.5. El error total de los flujos de las soluciones es  $\pm 10.14$ .

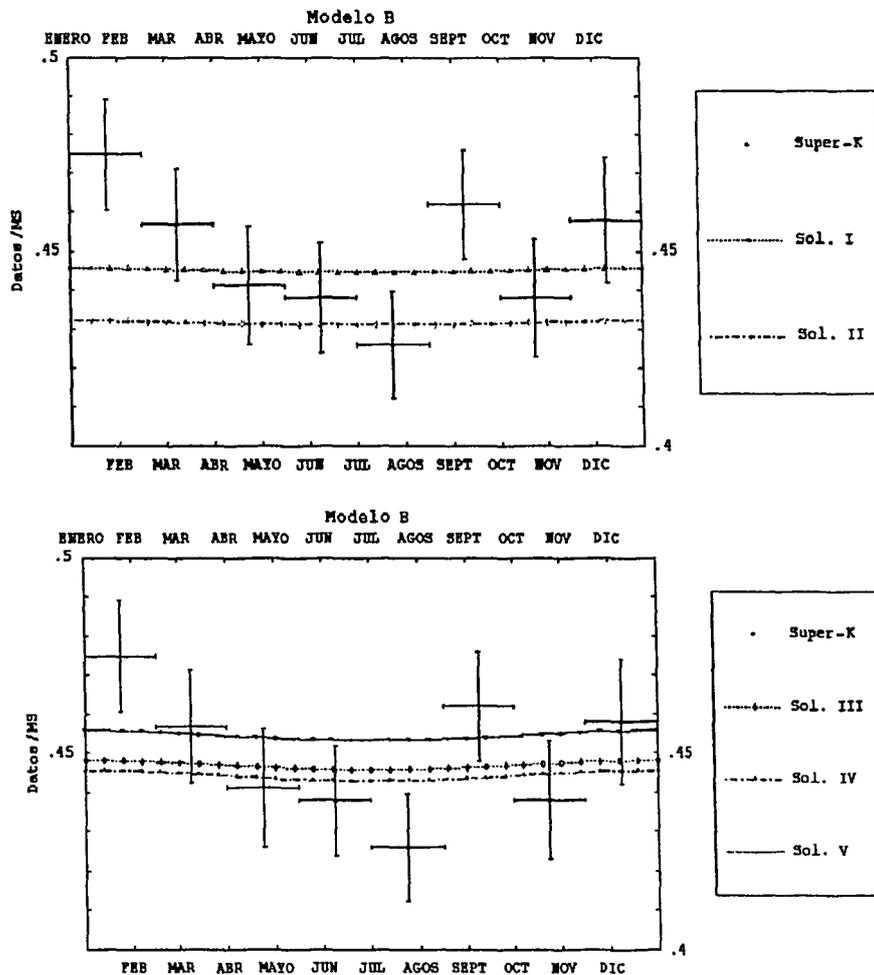


Figura 5.18: Variación temporal del flujo de neutrinos para el modelo B, comparada con Super-K. Los puntos de los datos se encuentran con las soluciones I y II, mientras que en la inferior están las soluciones III, IV y V. En este caso la variación temporal de las oscilaciones en el vacío es muy pequeña y no ajustan bien los resultados experimentales.

## Modelo B

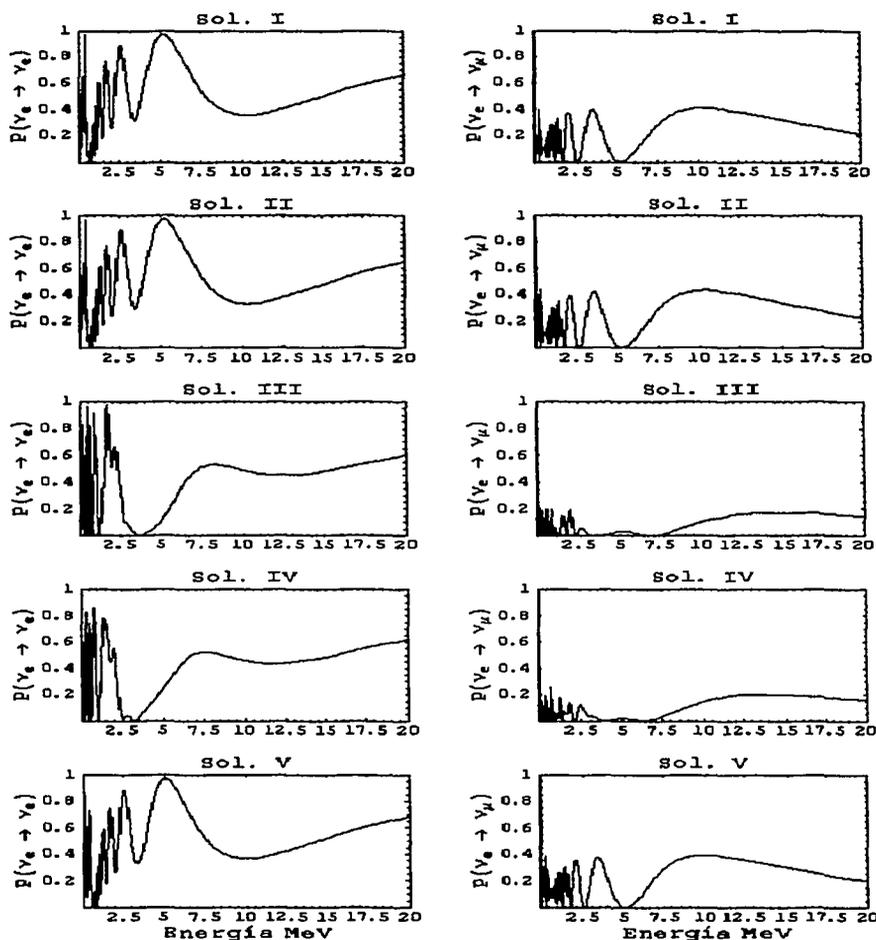


Figura 5.19: Probabilidades de oscilación como función de la energía del neutrino calculadas para las 5 soluciones obtenidas para el modelo B. Las gráficas de la izquierda corresponden a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  y las de la derecha a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . Las gráficas son para una distancia Tierra Sol de 1 AU.

## Modelo B

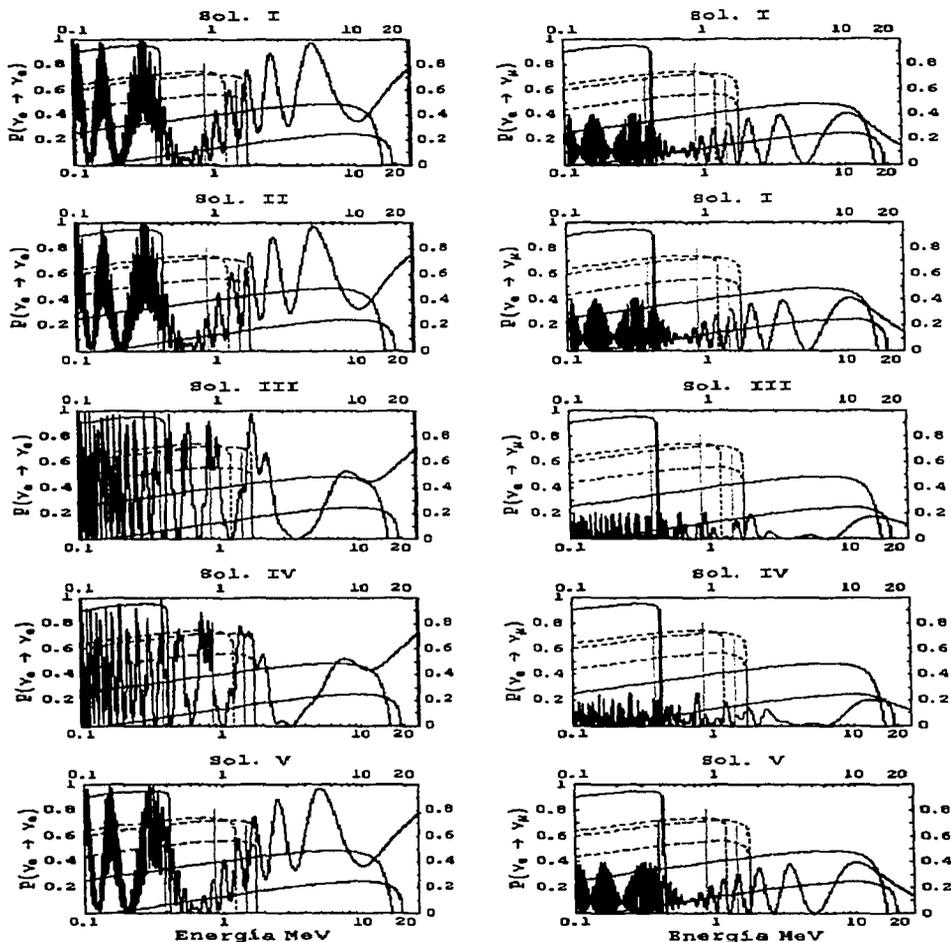


Figura 5.20: Modelo B. Probabilidades de supervivencia y de oscilación como la figura 5.19, comparadas con los flujos de neutrinos de la figura 5.1. Las gráficas de la izquierda corresponden a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  y las de la derecha corresponden a la probabilidad  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . Las gráficas son para una distancia Tierra Sol de 1 AU. En estas gráficas se ve como para energías bajas, en promedio la probabilidad de supervivencia, es menor que en el modelo A, lo cual implica un resultado menor para los experimentos de galio cuya principal contribución proviene de neutrinos  $pp$ .

	$\Delta m_{112}^2$	$\Delta m_{212}^2$	$\Delta M_{11}^2$	$\sin^2 2\phi$
Sol. I	$\leq 9.22 \times 10^{-13}$	$5.24 \times 10^{-12}$	$1.71 \times 10^{-10}$	0.641
Sol. II	$\leq 8.62 \times 10^{-13}$	$5.18 \times 10^{-12}$	$1.71 \times 10^{-10}$	0.662
Sol. III	$2.97 \times 10^{-11}$	$2.97 \times 10^{-11}$	$2.26 \times 10^{-10}$	0.453
Sol. IV	$3.83 \times 10^{-11}$	$2.53 \times 10^{-11}$	$2.04 \times 10^{-10}$	0.508
Sol. V	$\leq 9.13 \times 10^{-13}$	$5.19 \times 10^{-12}$	$1.66 \times 10^{-10}$	0.629

	Homestake	GALLEX + GNO	SAGE	Super-K	SNO
Experimento	$2.56 \pm 0.23$	$74.1 \pm 7.8$	$75.4 \pm 7.8$	$0.451 \pm 0.0167$	$1.75 \pm 0.148$
Sol. I	3.037442	56.945026	56.945026	0.427045	1.970831
Sol. II	2.958547	56.675492	56.675492	0.431007	1.872969
Sol. III	(4.574173)	(68.685046)	(68.685046)	(0.446802)	(2.387533)
Sol. IV	3.437753	51.154451	51.154451	(0.444447)	2.295429
Sol. V	2.974657	54.268573	54.268573	(0.454113)	(2.045973)

Tabla 5.17: En la tabla superior se muestran los valores de los parámetros (tabla 5.13) donde las diferencias de masas están dadas en  $eV^2$ . En la tabla inferior se presentan los valores para los distintos experimentos predichos por las distintas soluciones. Los resultados de Homestake, GALLEX+GNO y SAGE están dados en SNU, los de Super-K no tienen unidades ya que están normalizados por el modelo estándar solar [16], y los de SNO están dados en  $10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Los datos que aparecen en paréntesis fueron calculados con el valor de los parámetros, pero no fueron usados para el ajuste. Estos valores son para el modelo B. Los errores de los valores calculados son:  $\pm 1.70$  para Homestake,  $\pm 10.14$  para los experimentos de galio, 20% para Super-K y SNO.

## 5.8 Otros modelos.

Para terminar este capítulo, en esta sección se muestran los resultados reportados en la literatura con relación a posibles soluciones del problema de los neutrinos solares, en base a un esquema de oscilaciones. Los tres primeros casos corresponden a oscilaciones que incluyen el efecto MSW, es decir que las oscilaciones tienen lugar dentro del Sol por medio de un efecto resonante. Los dos últimos corresponden a oscilaciones en el vacío. En todos los casos se utiliza una expresión sencilla para las probabilidades de oscilación en términos de dos parámetros. Los resultados se toman del artículo de Bahcall, Gonzalez García y Peña Garay [11].

- LMA, Large Mixing Angle, ésta corresponde a un ángulo de mezcla grande tomando en cuenta las oscilaciones en materia.
- SMA, Small Mixing Angle, ésta corresponde a un ángulo de mezcla pequeño tomando en cuenta las oscilaciones en materia.
- LOW, low mass solution, ésta corresponde a una masa pequeña tomando en cuenta las oscilaciones en materia.
- VAC, este es el caso de oscilaciones en el vacío.
- Just So, esta solución supone que la distancia Tierra-Sol, y el valor de los parámetros es tal que la probabilidad de oscilación se encuentra en el primer mínimo de la figura 5.2. Esta solución es para oscilaciones en el vacío.

Algunas de las soluciones se encontraron suponiendo oscilaciones hacia neutrinos activos y otros a neutrinos estériles, ver tabla 5.18.

Los valores de los parámetros mostrados en la tabla 5.18 fueron calculados en [11], ajustando 5 datos: el flujo obtenido del experimento del cloro, el de GALLEX + GNO, el de SAGE, el de Super-K, y el de SNO. Estos flujos son los valores totales que reporta cada experimento. De esta tabla se ve que la mejor solución es para oscilaciones en el vacío a un neutrino activo, y las peores son las oscilaciones a neutrinos estériles.

Solución	$\Delta M_{12}^2$	$\tan^2 \varphi$	$\chi^2$	$P(\chi^2 \geq \chi^2)$
VAC	$7.9 \times 10^{-11}$	0.29(3.45)	3.50	17%
LMA	$2.1 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-1}$	3.99	14%
SMA	$6.9 \times 10^{-6}$	$1.6 \times 10^{-3}$	5.25	7%
LOW	$9.7 \times 10^{-8}$	$6.5 \times 10^{-1}$	8.61	1.4%
VAC estéril	$1.1 \times 10^{-10}$	0.29(3.45)	10.1	0.63%
SMA estéril	$4.9 \times 10^{-6}$	$5.3 \times 10^{-4}$	18.0	0.01%

Tabla 5.18: En esta tabla se muestra el valor de los parámetros obtenidos por Bahcall, Gonzalez García y Peña Garay [11], ajustando los modelos con 5 valores experimentales que son el Homestake, GALLEX + GNO, SAGE, Super-K y SNO.

En la tabla 5.19 se muestran los valores cuando se utilizaron 41 datos experimentales para ajustar los parámetros. 38 corresponden al espectro de energía de Super-K, 19 del espectro de día, y 19 del de noche; los otros son: el resultado obtenido del experimento de cloro; el flujo obtenido promediando los dos experimentos de galio y el flujo reportado por SNO. De estos valores se ve que las mejores soluciones ocurren para oscilaciones en materia con ángulos grandes, las oscilaciones en el vacío de neutrinos activos

Solución	$\Delta M_{12}^2$	$\tan^2 \varphi$	$\chi_{\min}^2$	$P(\chi^2 \geq \chi^2)$
LMA	$4.5 \times 10^{-5}$	$4.1 \times 10^{-1}$	35.3	59%
LOW	$1.0 \times 10^{-7}$	$7.1 \times 10^{-1}$	38.4	45%
VAC	$4.6 \times 10^{-10}$	2.4	39.0	42%
SMA	$4.7 \times 10^{-6}$	$3.9 \times 10^{-4}$	45.4	19%
Just $\text{So}^2$	$5.5 \times 10^{-12}$	0.67(1.5)	45.7	18%
Just $\text{So}^2$ estéril	$5.5 \times 10^{-12}$	0.67(1.5)	45.8	18%
SMA estéril	$4.5 \times 10^{-6}$	$3.1 \times 10^{-4}$	46.6	16%
VAC estéril	$4.7 \times 10^{-10}$	$2.7 \times 10^{-1}$	47.2	15%

Tabla 5.19: Distintas soluciones para modelos con 2 parámetros. Para este ajuste, Bahcall, Gonzalez García y Peña Garay [11], utilizaron 38 datos para de Super-K (19 para el espectro de día y 19 para el de noche) y 3 flujos (cloro, galio y SNO). Los experimentos de galio, GALLEX + GNO y SAGE se promediaron para dar un sólo valor. [11]

son la tercer mejor solución. Al igual que en la tabla 5.18, las peores soluciones son las oscilaciones hacia neutrinos estériles.

De las dos tablas, se ve que las soluciones más favorecidas involucran ángulos de mezcla  $\varphi$  grandes: LMA, LOW y VAC; e involucran oscilaciones hacia neutrinos activos, aunque no descartan la posibilidad de neutrinos estériles.

## Capítulo 6

# Conclusiones

En resumen, lo que se hizo en este trabajo fue lo siguiente:

- Para empezar se escribió la densidad de Lagrangiano para la interacción de neutrinos, suponiendo que existen 4 neutrinos por familia: neutrino y antineutrinos derechos e izquierdos. En esta densidad de Lagrangiano aparecen 3 masas que en general son distintas. Después, se mostró que esta densidad se puede escribir como la densidad de Lagrangiano de dos neutrinos de Majorana cada uno con masa definida, referidos como eigenestados de masa, ecuación (4.31). A partir de esta ecuación se encontró como se propagan en el tiempo los eigenestados de masa y de allí se llegó a la propagación de un neutrino izquierdo en el tiempo, ecuación (4.56), de donde se encontraron las probabilidades de que  $\nu_L$  oscile a cualquiera de los 4 neutrinos de una familia, ecuaciones (4.57) - (4.60). Después se estudiaron varios casos límites, encontrando que en cada resultado las oscilaciones dependen de dos parámetros, un ángulo de mezcla y una diferencia de masas cuadradas. El significado de este último parámetro depende del caso que se estudie.
- El segundo paso fue encontrar las probabilidades de que  $\nu_{eL}$  oscile a cualquiera de los cuatro neutrinos de la familia de los neutrinos del electrón y a cualquiera de los cuatro neutrinos de una segunda familia, la cual puede ser activa o no. Estas probabilidades se dan en las ecuaciones (4.79) - (4.86). Al igual que con una familia, se analizaron varios casos límites, encontrando que en general las probabilidades encontradas para oscilación dentro de una familia no se deducen de las oscilaciones en dos familias, salvo en un caso en particular.
- Por último, se utilizaron las probabilidades de oscilación en dos familias para ajustar el flujo de neutrinos solares con los resultados experimentales de 5 experimentos distintos. Para este ajuste se trabajó con dos modelos: modelo A, que consiste en probabilidades de oscilación que contienen 2 parámetros, un ángulo de mezcla y una diferencia de masas cuadradas, ecuación (5.1); modelo B, el cual es un caso límite de las probabilidades (4.79) - (4.86) donde estas se reducen a las probabilidades (4.109) - (4.113), que dependen de cuatro parámetros, un ángulo de mezcla y 3 diferencias de masas cuadradas. En ambos modelos el neutrino al que se oscila puede ser activo o estéril.

Los experimentos con los que se ajustaron los modelos son: Homestake [30] que da el flujo total de neutrinos; GALLEX+GNO [20] que reporta el flujo total de neutrinos; SAGE [5, 43] que da el flujo total de neutrinos; Super-Kamiokande [40, 41, 42], que da 38 puntos del espectro de energías (19 de día y 19 de noche), además de dar el flujo total que es el promedio de los 38 datos; Sudbury Neutrino Observatory (SNO) [6], que da 11 datos para el espectro de neutrinos y el promedio de estos datos. Homestake, GALLEX+GNO y SAGE son sensibles a  $\nu_e$ , Super-Kamiokande es sensible a todos los neutrinos pero con mayor sensibilidad a  $\nu_e$ , SNO además de medir lo mismo

que Super-Kamiokande, detecta todos los neutrinos activos a través de una corriente neutra y el  $\nu_e$  por medio de una corriente cargada.

A continuación se dan las conclusiones del ajuste de los resultados experimentales.

- Para el modelo A, tablas 5.8, 5.11, se ve que la solución que mejor ajusta a los flujos totales, lo da la solución II, donde se utilizan los flujos promedios de cada experimento, y se toma en cuenta la oscilación hacia un neutrino activo  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . Sin embargo el agregar los puntos correspondientes al espectro de energía medido por Super-K no es posible encontrar soluciones aceptables a un nivel de confianza del 5% en este modelo.
- Si sólo consideramos el ajuste al espectro de energía medido por Super-K, la solución que tiene el mejor ajuste, es la solución III del modelo B. Esta solución también da el mejor valor del flujo detectado por galio dentro de las soluciones del modelo B, sin embargo, da el peor valor para el flujo detectado por cloro de todas las soluciones. Nuevamente no se encuentra solución aceptable que ajuste todos los resultados experimentales conocidos.
- Basándonos en las tablas 5.8 y 5.14, al nivel de 5% de confianza, sólo las dos soluciones mencionadas son aceptables y se rechazan las otras soluciones. Al nivel de confianza de 1%, además de estas soluciones, también la solución I del modelo A, que involucra oscilaciones a neutrinos estériles, es aceptable. De cualquier manera, insistimos que el objetivo es ajustar simultáneamente todos los resultados experimentales, cosa que no fue posible.
- En general el modelo B no es bueno para ajustar los experimentos de galio, cuando se ajustan todos los experimentos, esto se puede ver en las gráficas de las figuras 5.9, 5.10, 5.19 y 5.20. En las primeras dos (modelo A), se ve que para energías bajas, la probabilidad de oscilación es en promedio de 0.7 mientras que en las últimas dos (modelo B), la probabilidad es de alrededor de 0.4, lo cual se traduce en una reducción del flujo de neutrinos provenientes de la reacción  $pp$ , la cual es la principal contribución para los experimentos de galio.
- De los 2 modelos estudiados, en ambos casos se favorece la oscilación hacia neutrinos activos, aunque no se descarta la oscilación a neutrinos estériles.
- El valor de los parámetros encontrados en el modelo A,  $\Delta m^2 \simeq 8 \times 10^{-11} \text{ eV}^2$  y  $\sin^2 2\varphi \simeq 0.6 \sim 0.7$ , son muy parecidos al valor reportado en la literatura [11], en la solución de oscilaciones en el vacío (VAC) hacia un neutrino activo, dado en la tabla 5.18. Ver tablas 5.7 y 5.18. Sin embargo cabe destacar que el valor que se encontró para  $\chi^2$  es considerablemente mayor que el de las referencias [11], esto seguramente se puede arreglar con un tratamiento adecuado de los errores teóricos.
- De las gráficas 5.8 y 5.18, se ve que la variación temporal del flujo con el mes (en el vacío) es muy pequeña,  $\sim 10^{-3}$ . En las referencias [13, 41], se menciona que este cambio es  $\sim 10^{-2}$ , pero en esos casos se consideran las interacciones de los neutrinos con la materia. Cuando se trabaje con materia, se deberá introducir la variación de la distancia Tierra-Sol en el cálculo del flujo.
- Ambos modelos dan buenos ajustes de los experimentos por separado, como se puede ver en las tablas 5.11 y 5.17. El problema surge al querer aproximar todos los experimentos juntos. Creo que no hay alguna restricción para no comparar todos los resultados a la vez. Para los dos tipos de experimentos (absorción de neutrinos y dispersión de electrones) se tomó en cuenta la física de cada uno en el ajuste. El programa que calcula los flujos se divide en 5 rutinas, una por cada experimento. Cada rutina calcula el flujo de neutrinos tomando en cuenta las características de cada experimento independientemente de lo que hagan las otras rutinas. Lo único que tienen en común las rutinas es la subrutina que se usa para calcular las integrales y el valor de los flujos de neutrinos dados por el modelo solar estándar [12].

## 6.1 Recomendaciones a trabajos futuros.

Para mejorar los ajustes, el siguiente paso es introducir los errores teóricos, para eso hay que construir la matriz de error que incluye los errores teóricos y experimentales. El tamaño de esta matriz es de  $l \times l$ , donde  $l$  es el número de datos experimentales. En esta matriz, además de incluir los errores de cada dato, se deben incluir las correlaciones entre los errores de manera consistente.

Otro elemento que se puede agregar para mejorar el ajuste es promediar sobre la región del Sol donde se producen los neutrinos; el promediar sobre la distancia Tierra Sol sólo dará cambios del orden de  $\sim 10^{-3}$ . También para los datos de Super-K y SNO, se debe agregar la sensibilidad de cada detector (función  $R(T|T')$  de la ecuación (5.20)).

Tal y como se comentó, el agregar de manera consistente los errores teóricos podrían mejorar las soluciones obtenidas. De cualquier manera se puede observar de manera general que las oscilaciones en el vacío no producen los mejores ajustes a los resultados experimentales, por lo cual muy probablemente la solución del problema de los neutrinos solares requiere incluir efectos resonantes en la materia a través del efecto MSW. De acuerdo a los resultados de la tabla 5.19 [11], dos regiones que dan un buen ajuste corresponden a las soluciones LMA ( $\Delta m^2 \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ ,  $\tan^2 \varphi \simeq 4.1 \times 10^{-1}$ ) y LOW ( $\Delta m^2 \simeq 1.0 \times 10^{-7} \text{ eV}^2$ ,  $\tan^2 \varphi \simeq 7.1 \times 10^{-1}$ ), sin embargo la solución en el vacío no está totalmente descartada. Una ventaja que se tiene al introducir oscilaciones en materia, es que en este caso se podrán utilizar los datos del espectro de energía para la noche y el día, dados por Super-K.

También se debe seguir estudiando el modelo solar y el modelo estándar para encontrar mejores valores del espectro de neutrinos solares y secciones eficaces, lo cual dará valores más precisos del flujo de neutrinos solares. Por ejemplo en el análisis de Super-K se hace la distinción entre neutrinos provenientes de  ${}^8\text{B}$  y de  $\text{hep}$ , sin embargo el error teórico para neutrinos de  $\text{hep}$  es muy grande, 5.3, por lo que ese valor no puede utilizarse para aproximar los resultados. Aunque la contribución de los neutrinos de  $\text{hep}$  es  $\sim 10^{-3}$  de la contribución total, forman una parte importante del flujo observado a energías mayores a 16 MeV. Si mejora este error y el experimental, va a ser posible utilizar un dato más para el ajuste.

En cuanto a las probabilidades de oscilación (4.79) a (4.86) que incluyen de manera general el efecto simultáneo de masas de Dirac y Majorana, a pesar de que tienen muchos parámetros y que no ajustan muy bien las oscilaciones en el vacío, no deben desecharse ya que pueden presentar efectos interesantes al tomar en cuenta interacciones con materia.

Aun hay que esperar más resultados experimentales, por ejemplo futuras medidas del SNO que reporten el efecto día noche, más datos que confirmen el espectro de la energía y la razón entre la corriente neutra y la cargada. Estos resultados reducirán las regiones permitidas de los parámetros. Además, los experimentos del LSND [2], KamLAND [75] y BOREXINO [8] permitirán explorar distintos escenarios de oscilaciones de neutrinos.

## Apéndice A

### Propiedades de la matrices $\gamma$

Para que el Hamiltoniano  $H = \gamma^0 (\gamma \cdot \mathbf{p} + m)$ , del cual se definen las matrices  $\gamma$ , reproduzca la relación  $E^2 = p^2 + m^2$ , se debe pedir que se cumpla

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

donde

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Dado que el Hamiltoniano es un operador hermitiano, es necesario que  $\gamma^0$  y  $\gamma^0 \gamma^i$  sean hermitianos, esta propiedad se satisface si se cumple

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \quad (\text{A.3})$$

Propiedades de las matrices  $\gamma$

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = i\gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0 = \gamma_5^\dagger \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} (\gamma_5)^2 &= I & \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 &= \gamma^{\mu\dagger} \\ \{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0 & \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 &= -\gamma^5 \\ \gamma^\nu \gamma^\mu &= g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu} & \gamma^0 (\gamma_5 \gamma^\mu) \gamma^0 &= \gamma_5 \gamma^\mu \\ \gamma_5 \sigma^{\nu\mu} &= \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Matriz de conjugación de carga:

$$\begin{aligned} C\gamma_\mu C^{-1} &= -\gamma_\mu^T \\ C\gamma_5 C^{-1} &= \gamma_5^T \\ C(\gamma_5 \gamma_\mu) C^{-1} &= (\gamma_5 \gamma_\mu)^T \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Matrices de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Representación de Dirac.

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 &= \sigma^3 \otimes I & \sigma^{0l} &= i\sigma^3 \otimes \sigma^l \\
 \gamma^l &= i\sigma^2 \otimes \sigma^l & \sigma^{kl} &= \varepsilon_{klm} I \otimes \sigma^m \\
 \gamma^5 &= \sigma^1 \otimes I & C^T &= -C \\
 \gamma^5 \gamma^0 &= -i\sigma^2 \otimes I & C C^\dagger &= C^\dagger C = -C^2 = I \\
 \gamma^5 \gamma^l &= -\sigma^3 \otimes \sigma^l
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Representación quiral.

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 &= -\sigma^1 \otimes I & \sigma^{0l} &= i \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & -\sigma^l \end{pmatrix} \\
 \gamma^l &= i\sigma^2 \otimes \sigma^l & \sigma^{kl} &= \varepsilon_{klm} \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & -\sigma^m \end{pmatrix} \\
 \gamma^5 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} & C &= -i\sigma^3 \otimes \sigma^2
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

## A.1 Transformación de Lorentz

Bajo una transformación de Lorentz las coordenadas se transforman como:

$$x \rightarrow x' \equiv \Lambda x \tag{A.10}$$

donde  $x$  es el cuadrivector de posición y  $\Lambda^\mu_\nu = g^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ . La ecuación de Dirac (3.1) es invariante ante transformaciones de Lorentz, si  $\psi(x)$  satisface la ecuación (3.1), entonces la transformada de Lorentz,  $\psi'(x')$  también lo hace. Debe encontrarse relación entre ambas soluciones tal que un observador que encuentra a  $\psi'$  pueda construir a  $\psi$ . Se puede suponer que esta relación es lineal:

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \tag{A.11}$$

donde  $S(\Lambda)$  es una matriz de  $4 \times 4$  no singular. Con esta última relación y con la ecuación (3.1) se obtiene

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \gamma^\nu \tag{A.12}$$

A partir de la definición de  $\Lambda$  se escribe  $\Lambda^{-1}$ , llegando a

$$\begin{aligned}
 S(\Lambda) &= I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \dots \\
 S(\Lambda)^{-1} &= I + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \dots
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

donde  $\sigma_{\mu\nu}$  es una matriz antisimétrica en  $\mu\nu$ . A primer orden en  $\omega$ , (A.12) da:

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i (g^\mu_\alpha \gamma_\beta - g^\mu_\beta \gamma_\alpha) \tag{A.14}$$

Las matrices  $\sigma_{\alpha\beta}$  están definidas a partir de las matrices  $\gamma$  como

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \tag{A.15}$$

Así la transformación del espinor es

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}\right) \psi(x) \tag{A.16}$$

Tomando el conjugado de esta expresión

$$\psi^*(x') = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^* \omega^{\alpha\beta}\right) \psi^*(x) \tag{A.17}$$

$\sigma_{\alpha\beta}$  no tiene por que ser imaginaria por lo que la expresión anterior no es equivalente a (A.16). Por esto no es buena elección pedir  $\psi = \psi^*$ . Por esta razón se eligió la definición de la ecuación (3.7), con la cual  $\psi'$  se transforma como

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right)\psi(x) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right)\gamma_0 C \psi^*(x)\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

Con las ecuaciones (A.16) y la (3.7) es fácil obtener

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \gamma_0 C \psi'^*(x') \\ &= \gamma_0 C \exp\left(\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}^*\omega^{\alpha\beta}\right)\psi^*(x)\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

Para que lo anterior sea válido, la matriz  $C$  satisface la propiedad

$$\gamma_0 C \exp\left(\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}^*\omega^{\alpha\beta}\right) = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right)\gamma_0 C \quad (\text{A.20})$$

es decir

$$\gamma_0 C \sigma_{\alpha\beta}^* = -\sigma_{\alpha\beta} \gamma_0 C \quad (\text{A.21})$$

Con esta propiedad la expresión (3.7) es invariante ante transformaciones de Lorentz [69, 53].

De la ecuación (3.7) se puede ver que para que  $\psi$  este normalizada, debemos pedir que  $\gamma_0 C$  sea unitaria. Usando las propiedades de  $\gamma_0$ , esta propiedad se cumple si  $C^\dagger = C^{-1}$ . A partir de la ecuación (A.21) se encuentra que  $C \sigma_{\alpha\beta}^* C^{-1} = -\gamma_0 \sigma_{\alpha\beta} \gamma_0$  que a su vez puede usarse para ver que  $C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$ . De esta última propiedad se implica que  $C C^* = -1$ , es decir que  $C^T = -C$ .

## Apéndice B

# Programas.

En esta sección se explica brevemente el método usado para resolver integrales definidas y para minimizar funciones.

### B.1 Resolución de integrales definidas.

Para resolver la integral definida

$$G = \int_a^b g(x) dx \quad (\text{B.1})$$

utilizamos el método de Bode [61]. Éste requiere dividir al intervalo  $[a, b]$  en  $N$  particiones, las cuales deben ser un múltiplo de 4, para poder aplicar la fórmula

$$\int_{x_0}^{x_4} g(x) dx = \frac{2h}{45} (7g(x_0) + 32g(x_1) + 12g(x_2) + 32g(x_3) + 7g(x_4)) \quad (\text{B.2})$$

donde

$$h = \frac{b-a}{N} \quad (\text{B.3})$$

con  $N$  el número de particiones. Para encontrar el valor  $G$ , aplicamos la ecuación B.2 para los intervalos  $[x_0, x_4], [x_4, x_8], [x_8, x_{12}], \dots, [x_{N-4}, x_N]$  donde  $x_0 = a$  y  $x_N = b$ , y sumamos los  $N/4$  términos. En este método se desprecian términos del orden de  $h^7$ . La subrutina que realiza la integral se ve en INTEGRAL.F

### B.2 Minimización de funciones utilizando MINUIT

Para la minimización de funciones utilizamos el programa MINUIT.F creado en el CERN. El programa y varios manuales pueden encontrarse en varios sitios como [1], los programas necesarios para correr MINUIT, se encuentran en los paquetes *packlib* y *kernelib*, los cuales se encuentran en la librería *cernlib* del CERN [1].

MINUIT es un programa diseñado para optimizar funciones del tipo  $\chi^2$  (B.4) y de tipo logarítmicas. MINUIT puede minimizar funciones de hasta 100 parámetros de los cuales hasta 35 pueden ser variables

al mismo tiempo.

$$\chi^2 = \frac{(f_{teorico} - f_{experimental})^2}{\Delta f^2} \quad (B.4)$$

Cuando la relación anterior se expande en serie de Taylor alrededor del mínimo, se obtiene

$$\chi^2 = \chi_{MIN}^2 + \vec{g}^T \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}^T G \vec{x} \quad (B.5)$$

donde las componentes del vector  $\vec{g}^T$  son la derivadas  $\partial\chi^2/\partial x_i$  y las componentes de la matriz  $G$  son  $G_{ij} = \partial^2\chi^2/\partial x_i\partial x_j$ . Ambas derivadas están evaluadas en el mínimo, alrededor del cual, el vector  $\vec{g}$  se aproxima a cero y los valores  $G$  son no negativos.

**Parámetros** Los parámetros pueden ser constantes o variables. Si son variables, pueden fijarse y/o liberarse mientras corre el programa. Los parámetros pueden estar restringidos a variar dentro de un intervalo  $[a, b]$ . Para calcular el valor en esos límites, MINUIT utiliza la expresión

$$P_{int} = \arcsen \left( 2 \frac{P_{ext} - a}{b - a} - 1 \right) \quad (B.6)$$

donde  $P_{int}$  puede tomar cualquier valor, y  $P_{ext}$  toma valores entre  $a$  y  $b$ . MINUIT utiliza  $P_{int}$  para la optimización. El hecho de que la última expresión no sea lineal, hace que el cálculo tarde un poco más y que aumente el error del parámetro, en especial cuando éste se acerca a alguno de los límites. Si se utilizan límites, lo más conveniente es encontrar el mínimo con estos, y quitarlos para calcular el error.

**Errores** Una vez que MINUIT encontró el valor de los parámetros que minimizan la función, el error para el N-ésimo parámetro se calcula dejando fijos los N-1 parámetros y variando el parámetro de tal forma que el valor de la función  $\chi^2 \leq \chi_{min}^2 + \sigma'$  donde  $\sigma'$  es un valor definido por el usuario que por lo general es 1, 2 o 3 veces la desviación estándar. En este caso, los errores calculados son proporcionales a los errores del experimento. Si los errores experimentales no se conocieran, sólo los errores relativos entre los parámetros tendrían significado. MINUIT también es capaz de encontrar la correlación entre los parámetros a partir de la matriz  $G$  de B.5.

Otra opción muy útil que ofrece MINUIT es la posibilidad de hacer curvas de nivel alrededor del mínimo. Esto lo hace variando 2 parámetros, dejando los demás fijos, de tal forma que B.4 tenga un valor fijo definido por el usuario. Estas gráficas pueden hacerse tomando o no en cuenta la correlación entre parámetros.

## B.3 Programas

En esta sección se encuentran los programas usados para calcular las integrales del capítulo 5.

**MINIMO.F** En este programa se indican los pasos a seguir para encontrar el mínimo de la función  $\chi^2$ . En esta rutina se definen los parámetros y se dan las instrucciones que debe seguir MINUIT.F. Para encontrar los valores no fue necesario fijar y liberar los parámetros, por lo que no se incluyen esas instrucciones.

```
PROGRAM MINIMO
IMPLICIT DOUBLEPRECISION (A-H,O-Z)
EXTERNAL FCN
DIMENSION NPRM(4), VSTRT(4), STP(4), ANGLIS(10), xpt(100), ypt(100)
CHARACTER*10 PNAH(4)
DATA NPRM / 1, 2, 3, 4 /
DATA PNAH / 'd1', 'd2', 'd3', 'alpha' /
```

```

DATA (STP(I),I=1,4)/0.01, 0.01, 0.01, 0.01/
OPEN (8,FILE='minimo-',STATUS='NEW',FORM='FORMATTED')
OPEN (9,FILE='cont-',STATUS='NEW',FORM='FORMATTED')
PRINT *, 'Dame d1'
READ *,VSTR1(1)
PRINT *, 'Dame d2'
READ *,VSTR1(2)
PRINT *, 'Dame d3'
READ *,VSTR1(3)
PRINT *, 'Dame alpha'
READ *,VSTR1(4)
AMIN=0
AMAX=90
NPT=50
CALL MNINIT(5,8,7)
FUTIL=0
ZERO = 0.
DO 11 I= 1, 4
!definicion de parametros IF(1.EQ.4) THEN
    CALL MNPARM(NPRM(I),PNAM(I),VSTR1(I),STP(I),AMIN,AMAX,IERFLG)
ELSE
    CALL MNPARM(NPRM(I),PNAM(I),VSTR1(I),STP(I),ZERO,ZERO,IERFLG)
ENDIF
IF (IERFLG.NE.0) THEN
    WRITE (8,'(A,I)') ' No se puede definir el parametro #',I
    STOP
ENDIF
11 CONTINUE
CALL MNSETI('flujos pesados por la prob de sobrevivir')
! Request FCN to read in data (IFLAG=1)
ARGLIS(1) = 1.
CALL MNEEXCM(FCN, 'CALL FCN', ARGLIS ,1,IERFLG,futil)
ARGLIS(1) = 0.
CALL MNEEXCM(FCN, 'SET PRINT', ARGLIS ,1,IERFLG,futil)
CALL MNEEXCM(FCN, 'MIGRAD', ARGLIS ,0,IERFLG,futil)
CALL MNEEXCM(FCN, 'MINOS', ARGLIS ,0,IERFLG,futil)
CALL PRTErr
ARGLIS(1) = 3.
CALL MNEEXCM(FCN, 'CALL FCN', ARGLIS , 1,IERFLG,futil)
CALL PRTErr
DO 11=1 ,4,1
    DO 111=11,4,1
        CALL MNCOMT(FCN,11,111,NPT,XPT,YPT,NFOUND,FUTIL)
        WRITE (9,*) 'XPT YPT' 11,111
        DO 13 I=1,NPT
            WRITE (9,*) ' ',XPT(I), ' ', YPT(I), ' '
        13 CONTINUE
        DO 23 I=1,NPT
            XPT(I)=0
            YPT(I)=0
        23 CONTINUE
    END DO
END DO
CALL MNEEXCM(FCN, 'STOP ', ARGLIS,0,IERFLG,futil)
STOP
END

```

FCN.F Este es el programa que contiene las instrucciones para calcular los flujos para cada experimento. Los datos experimentales y sus respectivos errores son los que se muestran en la tabla 5.3. Las unidades de los flujos son las mismas que los datos de la tabla. Sólo se muestra la parte del programa que ajusta los flujos, la parte que ajusta a los espectros es muy similar pero es más largo.

## B.3. PROGRAMAS

95

```

SUBROUTINE FCN(NPAR,GIM,F,X,I,FLAG,FUTIL)
IMPLICIT DOUBLEPRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION FLUEXP(36),FLUTED(36),ERREXP(36),CHISQ(36)
DIMENSION I(+),GIM(*)
! Datos de los experimentos cuando usamos los promedios
DATA (FLUEXP(I),I=1,5)/2.56D0, 74.1D0, 75.4D0,
+ 0.451D0, 1.75D0/
DATA (ERREXP(I),I=1,5)/ 0.23D0, 7.8D0, 7.8D0,
+ 0.016763D0, 0.148D0/
! Datos de los experimentos cuando utilizamos los espectros de superk y de sno
! SUPERKAMIOKANDE
DATA (FLUEXP(I),I=1,33)/0.433, 0.437, 0.434, 0.437, 0.463, 0.483, 0.465, 0.437, 0.449,
+ 0.454, 0.442, 0.405, 0.455, 0.421, 0.421, 0.481, 0.429, 0.602, 0.493,
+ 2.56, !CLORD
+ 74.1, !GALIO
+ 75.4, !SAGE !GALIO
!SNO
+ 0.316, 0.403, 0.265, 0.371, 0.322, 0.347, 0.316, 0.377, 0.431, 0.328, 0.403/
DATA (ERREXP(I),I=1,33)/0.0490, 0.0261, 0.0201, 0.0161, 0.0161, 0.0181, 0.0181, 0.0181,
+ 0.0191, 0.0201, 0.0221, 0.0229, 0.0271, 0.0289, 0.0332, 0.0422, 0.0482,
+ 0.0653, 0.0492, 0.23, !CLORD
+ 7.8, !GALLEX
+ 7.8, !SAGE
! SNO
+ 0.06710526, 0.04342105, 0.03157895, 0.03947368, 0.03157895, 0.03947368, 0.04105263,
+ 0.05131579, 0.06315789, 0.07105263, 0.07105263/ D1=X(1)
D2=X(2)
D3=X(3)
ALPHA=X(4)
!SI SE CALCULAN PROMEDIOS, SE DEBE INCLUIR LO SIGUIENTE
IF (IFLAG .NE. 1) GO TO 300
!CALCULA VALORES TEORICOS
!CLORD
I=1
CALL CLORD(FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
!GALIO
I=2
CALL GALIO(FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
!SAGE
FLUTED(3)=FLUTED(2)
!SUPERKAM
I=4
CALL SUPERK8B(FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
!SNO
I=5
CALL SNO1(FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
CHISQT=0
WRITE (8,*) 'FLUJOS DE NEUTRINOS SOLARES'
WRITE (8,*) 'EXPERIMENTO TEORICO EXPERIMENTAL ERROR EXP'
DO 100 I=1,5
WRITE (8, 44) I, FLUTED(I), FLUEXP(I), ERREXP(I), ERRTED(I)
44 FORMAT (5X,I5,4F12.6)
100 CONTINUE
WRITE (8,'(A)') 'EXPERIMENTO CHI CUADRADA'
DO I=1,5,1
CHISQ(I)=-((FLUTED(I)-FLUEXP(I))**2)/(ERREXP(I)**2+ERRTED(I)**2)
CHISQT=CHISQT+CHISQ(I)
WRITE (8,*) I, CHISQ(I)
IF (I.EQ.5) WRITE(8,*) 'CHI CUADRADA'
END DO
TOTAL=' ,CHISQT,D1,D2,D3,ALPHA

```

```

F=CHISQT
CHISQT=0
300 CONTINUE
I=1
  CALL CLORO (FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
I=2
  CALL GALIO (FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
  FLUTED(3)=FLUTED(2)
I=4
  CALL SUPERK88 (FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
I=5
  CALL SNO1 (FLUTED(I),D1,D2,D3,ALPHA)
DO I=1,5,1
  CHISQ(I)=((FLUTED(I)-FLUEXP(I))**2)/(ERREXP(I)**2+ERRTED(I)**2)
  CHISQT=CHISQT+CHISQ(I)
  TOTAL=' ,CHISQT,D1,D2,D3,ALPHA
  IF (I.EQ.5) PRINT * , 'CHI 2=' ,CHISQT 1,D1,D2,D3,ALPHA
END DO F=CHISQT
CHISQT=0
IF (IFLAG.EQ.3) THEN
  WRITE (8,*) 'FIN DE LA OPTIMIZACION'
  CHISQT=0
  WRITE(8,*) 'EXPERIMENTO CHI2'
  DO I=1,5,1
    CHISQ(I)=((FLUTED(I)-FLUEXP(I))**2)/(ERREXP(I)**2+ERRTED(I)**2)
    CHISQT=CHISQT+CHISQ(I)
    WRITE(8,*) I,CHISQ(I)
    IF (I.EQ.5) WRITE(8,*) 'CHI CUADRADA TOTAL=' , CHISQT
  END DOWRITE(8,*) 'EXP TEORICO EXP ERREXP ERRTEO'
  DO 135 I=1,5
    WRITE (8, 48) I, FLUTED(I),FLUEXP(I),ERREXP(I),ERRTED(I)
  48   FORMAT (5X,I6,4F12.6)
135 CONTINUE
  WRITE(8,*) '*****'
END IF
RETURN
END

```

CLORO.F GALIO.F SUPERK.F SNO.F En estas rutinas se encuentran los comandos con los cuales se calculan los flujos con el programa INTEGRAL.F. En cada subrutina se encuentran solamente los espectros de energía que contribuyen a cada experimento, así como los límites donde estos ocurren (ver figura 5.1). Cada subrutina regresa los flujos en las mismas unidades que los resultados de la tabla 5.3.

INTEGRAL.F No se incluye todo el programa debido a su tamaño ya que cada espectro de energía contribuye de forma distinta a cada experimento. Sólo se anexa la contribución del boro en el experimento del cloro. Para el experimento del Super-K y del SNO, el procedimiento es análogo, sólo hay que introducir la sección eficaz para las probabilidades  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  y  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ . El programa resuelve la integral por el método de Bode, sección B.1.

```

SUBROUTINE INTEGRAL (EMIN,EMAX,FLU,EX,EN,D1,D2,D3,ALPHA)
IMPLICIT DOUBLEPRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLEPRECISION EMIN,EMAX,FLU,EX,EN
DOUBLEPRECISION ALPHA,D1,D2,D3
R=5000.0D0
H=(EMAX-EMIN)/R
X=EMIN
I=0
J=MOD(I,4)
FLU=0.0

```

```

I=0
DO WHILE (X .LE. EMAX)
  IF ((J .EQ. 0) .AND. (I.NE.0) .AND. (I.NE. R)) THEN
    FACTOR=14.0DO
  ELSEIF ((J.EQ.1) .OR. (J.EQ.3)) THEN
    FACTOR=32.0DO
  ELSEIF (J.EQ.2) THEN
    FACTOR=12.0DO
  ELSE
    FACTOR=7.0DO
  ENDIF
  F=SIGMACLB(X)*BORO(X)*FACTOR*2.0DO*(H/45.0DO)*PROBA(X,D1,D2,D3,ALPHA)
  FLU=FLU+F
  I=I+1
  X=X+H
  J=MOD(I,4)
END DO
END

```

Para los datos de Super-K se introducen las secciones eficaces, por lo que los flujos se calculan usando

```

G=PROBA(X,D1,D2,D3,ALPHA)*SECEL(T,X)
G1=PROBANUMU(X,D1,D2,D3,ALPHA)*SECMU(T,X)
F=BORO(X)*FACTOR*2.0DO*(H/45.0DO)*(G+G1)
F2=BORO(X)*FACTOR*2.0DO*(H/45.0DO)*(SECEL(T,X)+SECMU(T,X))
FLUXB1(K)=FLUXB1(K)+F
FLUXB2(K)=FLUXB2(K)+F2
FLSK(K)=FLUXB1(K)/FLUXB2(K)

```

dando como resultado el cociente del flujo con oscilaciones entre el flujo esperado sin oscilaciones. SECEL.F y SECMU.F dan las secciones eficaces.

```

DOUBLEPRECISION FUNCTION SECEL(T,X)
IMPLICIT DOUBLEPRECISION
TN=T/0.510998902
Q=X/0.510998902
MU=((1+Q)/Q)*((1+Q)/Q)*(TN/(TN+2))
SIGTOTAL=(0.73117**2)+(0.23117**2)*((1-TN/Q)**2)
SECEL=SIGTOTAL-(0.73117)*(0.23117)*(TN/(Q**2))
END

```

```

DOUBLEPRECISION FUNCTION SECMU(T,X)
IMPLICIT DOUBLEPRECISION
TN=T/0.510998902
Q=X/0.510998902
MU=((1+Q)**2/Q**2)*(TN/(TN+2))
SIGTOTAL=(0.26883**2)+(0.23117**2)*((1-TN/Q)**2)
SECMU=SIGTOTAL-(-0.26883)*(0.23117)*(TN/(Q**2))
END

```

APROX.F En esta subrutina se encuentran las fórmulas de las probabilidades y las aproximaciones de los espectros de energía para los flujos y las secciones eficaces.

En las figuras B.1-B.6 se muestran los valores para los 6 espectros continuos de energía. Los puntos rojos son los valores del modelo solar estándar, y la curva continua es la aproximación utilizada en los cálculos. En las figuras B.7 y B.8 se muestran las curvas con las que se aproximaron las secciones eficaces.

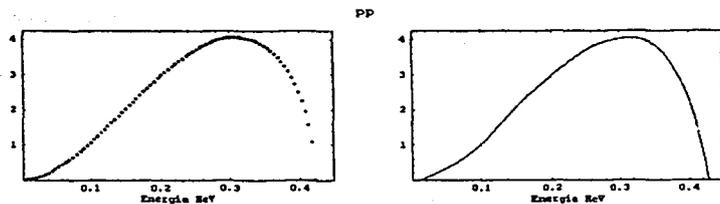


Figura B.1: Datos del espectro de neutrinos provenientes del  $pp$ , y la curva con la que se aproximó.

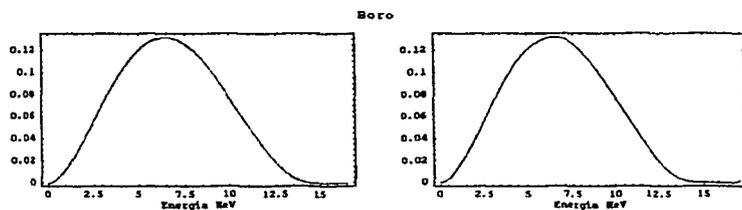


Figura B.2: Datos del espectro de neutrinos provenientes del  ${}^8B$ , y la curva con la que se aproximó.

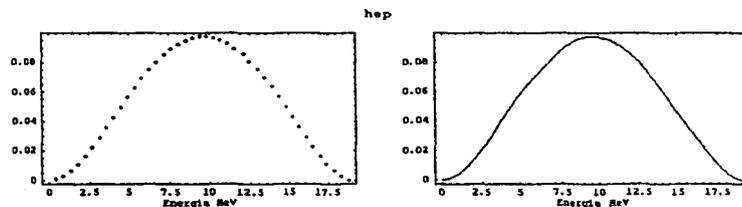


Figura B.3: Datos del espectro de neutrinos provenientes del  $hep$ , y la curva con la que se aproximó.

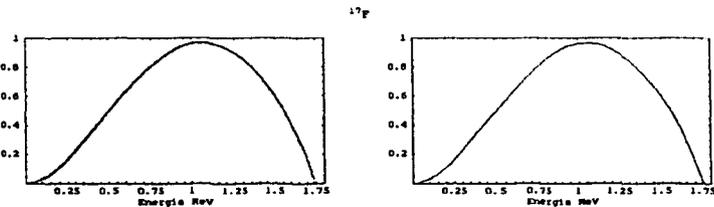


Figura B.4: Datos del espectro de neutrinos provenientes del  ${}^{17}F$ , y la curva con la que se aproximó.

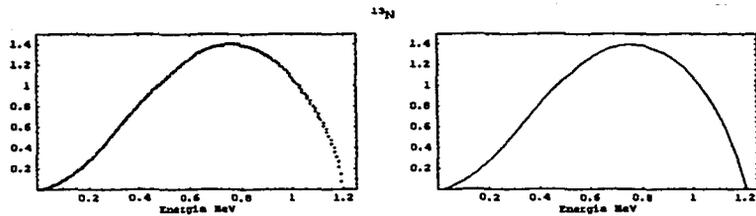


Figura B.5: Datos del espectro de neutrinos provenientes del  $^{13}\text{N}$ , y la curva con la que se aproximó.

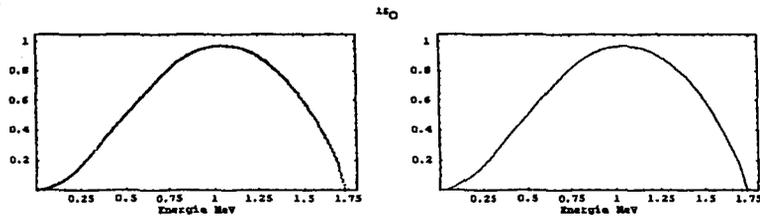


Figura B.6: Datos del espectro de neutrinos provenientes del  $^{15}\text{O}$ , y la curva con la que se aproximó.

## Cloro

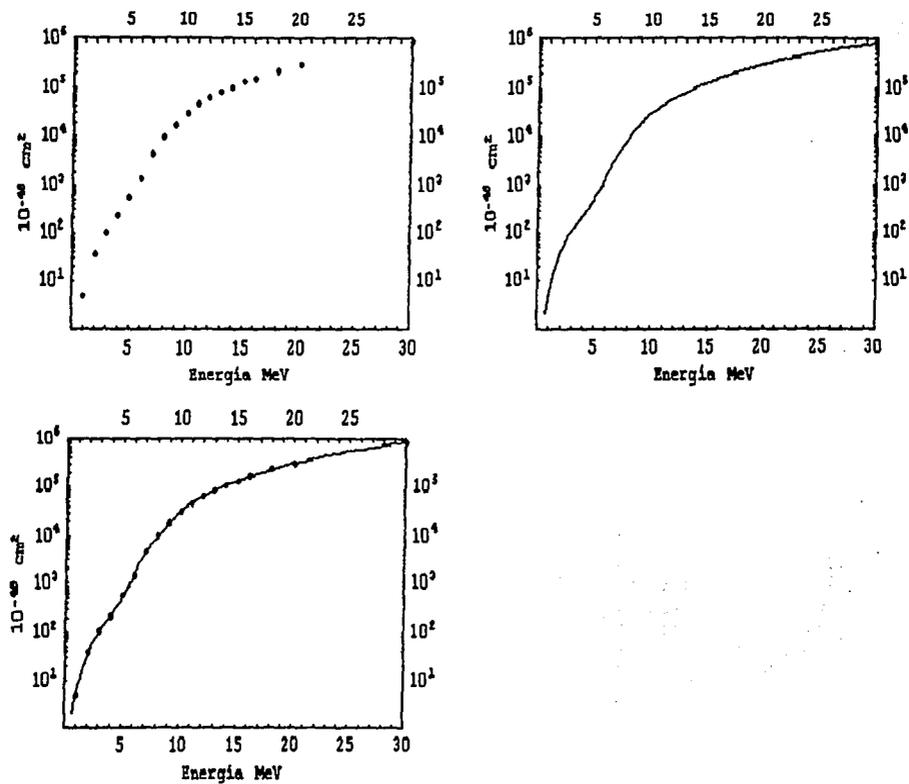


Figura B.7: Datos de la sección eficaz del cloro  $\sigma_{Cl}$ , y las curvas con las que se aproximó. La gráfica inferior es la superposición de las dos superiores.

## Galio

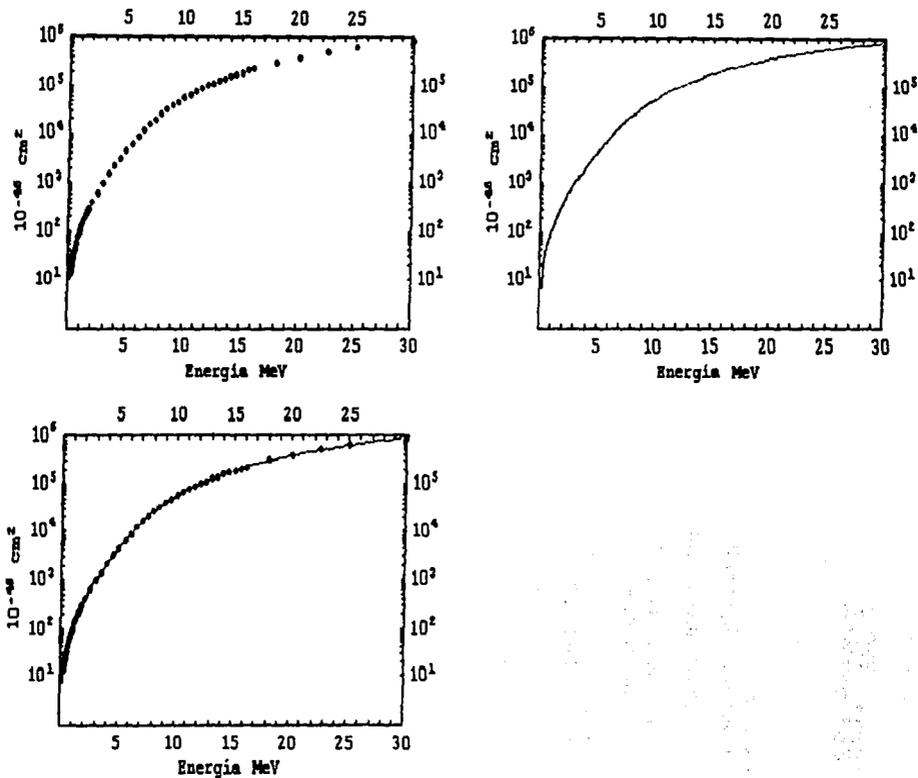


Figura B.8: Datos de la sección eficaz del galio  $\sigma_{Ga}$ , y las curvas con las que se aproximó. La gráfica inferior es la superposición de las dos superiores.

# Bibliografía

- [1] <http://www.cern.ch> <http://wwwinfo.cern.ch/asdoc/minuit/minmain.html>  
<http://cernlib.web.cern.ch/cernlib/>.
- [2] <http://www.neutrino.lanl.gov/lsnd>. Aquí se encuentran ligas a las publicaciones del experimento.
- [3] Proceedings of the icfa/ecfa workshop neutrino factories based on muon storage rings ( $\nu$ fact'99). In *Nucl. Instrum. Meth. A*, volume 451, 2000.
- [4] Proceedings of the international workshop nufact'00 muon storage ring for a neutrino. In *Nucl. Instrum. Meth. A*, volume 472, 2001.
- [5] J. Abdurashitov, et al. Results from sage (the russian-american gallium solar neutrino experiment). *Phys. Lett. B*, 328:234, 1994.
- [6] Q. Ahmad, et al. Measurement of charged current interactions produced by  $^8\text{B}$  solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 87:071301, 2001. <http://www.sno.queensu.ca> arXiv:nucl-ex/0106015.
- [7] I. J. R. Aitchison. *An Informal Introduction to Gauge Field Theories*. Cambridge University Press, 1982.
- [8] G. Alimonti, et al. (BOREXINO collaboration). Science and technology of borexino: a real time detector for low energy solar neutrinos. *Astropart. Phys.*, 16:205-234, 2000. arXiv:hep-ex/0012030.
- [9] A. Ayala, J. C. D'Olivo, M. Torres. Bound on the neutrino magnetic moment from chirality flip in supernovae. *Phys. Rev. D*, 59:111901, 1999.
- [10] A. Ayala, J. C. D'Olivo, M. Torres. Right-handed neutrino production in dense and hot plasmas. *Nucl. Phys. B*, 564:204, 2000.
- [11] J. Bahcall, M. Gonzalez-Garcia, C. Pena-Garay. Global analysis of solar neutrino oscillations including sno cc measurement. *JHEP*, 0108:014, 2001. arXiv:hep-ph/0106258.
- [12] J. N. Bahcall. <http://www.sns.iap.edu/~jnb/>.
- [13] J. N. Bahcall. *Neutrino Astrophysics*. Cambridge University Press, 1989.
- [14] J. N. Bahcall. Gallium solar neutrino experiments: Absorption cross sections, neutrino spectra and predicted event rates. *Phys. Rev. C*, 56(6):3391, 1997.
- [15] J. N. Bahcall, R. D. Jr., P. Parker, A. Smirnov, R. Ulrich, editors. *Solar Neutrinos: The First thirty years*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley, 1995.

- [16] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, S. Basu. Solar models: current epoch and time dependences, neutrinos and helioseismological properties. *Astrophys. J.*, 555:990-1012, 2001. arXiv:astro-ph/0010346.
- [17] J. N. Bahcall, H. Primakof. Neutrino-antineutrino oscillations. *Phys. Rev. D*, 18:3463, 1978.
- [18] J. N. Bahcall, A. Ulmer. Temperature dependence of solar neutrino fluxes. *Phys. Rev. D*, 56:4202, 1996.
- [19] V. Barger, P. Langacker, P. Leveille, S. Pakvasa. Consequences of majorana and dirac mass mixing for neutrino oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 45:692, 1980.
- [20] E. Belloti. First results from gno. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, 91:44, 2001.
- [21] Z. Berezhiani, R. N. Mohapatra. Reconciling present neutrino puzzles. *Phys. Rev. D*, 52:6607, 1995.
- [22] C. M. Bhat, P. C. Bhat, M. Paterno, H. Prosper. Study of the solar neutrino survival probability. *Phys. Rev. Lett.*, 81(23):5056, 1998.
- [23] J. D. Bjorken. *Relativistic Quantum Fields*. McGraw Hill, 1964.
- [24] J. D. Bjorken, S. D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw Hill, 1964.
- [25] F. Boehm, P. Vogel. *Physics of Massive Neutrinos*. Cambridge University Press, 1987.
- [26] L. G. Cabral-Rosetti. Introducción a las oscilaciones de neutrinos. *Rev. Mex. Fís. No. de Referencia* 2332. Actualmente en revisión (25 Oct. 2001).
- [27] L. G. Cabral-Rosetti, J. Bernabéu, J. Vidal, A. Zepeda. Charge and magnetic moment of the neutrino in the background field method and in the  $r_\xi$  gauge. *Eur. Phys. J. C.*, 12:633, 2000. arXiv:hep-ph/9907249 FUTV/99-47 IFIC/99-49.
- [28] Z. Chacko, R. N. Mohapatra. Sterile neutrinos in e-6 and a natural understanding of vacuum oscillation solution to the solar neutrino puzzle. *Phys. Rev. D*, 61:053002, 2000. arXiv:hep-ph/9905388.
- [29] T.-P. Cheng, L.-F. Li. *Gauge Theory of Elementary Particles*. Oxford Science Publications, 1991.
- [30] B. T. Cleveland, et al. Measurement of the solar electron neutrino flux with the homestake chlorine detector. *Astrophys. J.*, 496:505, 1998.
- [31] S. Episoto. Flavour-conserving oscillations of dirac-majorana neutrinos. *Int. J. Mod. Phys.*, A13:5023-5036, 1998. preprint arXiv:hep-ph/9802336.
- [32] S. Episoto, N. Tancredi. Pontecorvo neutrino-antineutrino oscillations: theory and experimental limits. *Mod. Phys. Lett.*, A12:1829-1838, 1997. arXiv:hep-ph/9705351.
- [33] S. Episoto, N. Tancredi. Flavour transitions of dirac-majorana neutrinos. *Eur. Phys. J.*, C4:221-230, 1998. preprint arXiv:hep-ph/9803471.
- [34] E. Fermi. *Nuovo Cimento*, 11(1), 1934.
- [35] E. Fermi. Versuch einer theorie der  $\beta$ -strahlen. *Z. Phys.*, 88:161, 1934. Escrito en alemán.
- [36] Fisher, B. Kayser, McFarland. Neutrino mass and oscillation. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 49:481, 1999. arXiv:hep-ph/9906244.

- [37] G. L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino. The solar neutrino problem after three hundred days of data at superkamiokande. *Astro. Part. Phys.*, 9:1119, 1998. arXiv:hep-ph/9709473, Resultados tomados de la tabla II.
- [38] R. Foot, R. Volkas. Neutrino physics and the mirror world: How exact parity symmetry explains the solar neutrino deficit, the atmosphere neutrino anomaly and the lsnd experiment. *Phys. Rev. D*, 52:6595, 1995.
- [39] A. Friedland. Mikheyev-smirnov-wolfenstein effects in vacuum oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 85(5):936, 2000.
- [40] S. Fukuda, et al. Constraints on neutrino oscillations using 1258 days of super-kamiokande solar neutrino data. *Phys. Rev. Lett.*, 86(25):5656, 2001.
- [41] S. Fukuda, et al. Solar  $\delta^b$  and hep neutrino measurements from 1258 days of super-kamiokande. *Phys. Rev. Lett.*, 86(25):5651, 2001.
- [42] Y. Fukuda, et al. Measurements of the solar neutrino flux from super-kamiokande's first 300 days. *Phys. Rev. Lett.*, 81(6):1158, 1998.
- [43] V. Gavrin. Solar neutrino results from sage. *Phys. B. (Proc. Suppl.)*, 91:36, 2001.
- [44] H. Georgi, S. L. Glashow. Unified weak and electromagnetic interactions without neutral currents. *Phys. Rev. Lett.*, 28:1494, 1972.
- [45] G. F. Giudice, E. W. Kolb, A. Riotto, D. V. Semikoz, I. Tkachev. Standard model neutrinos as warm dark matter. *Phys. Rev. D*, 64:043512, 2001.
- [46] C. Giunti. Four neutrino oscillations. *Nucl. Instrum. Meth. A*, 451:51, 2000.
- [47] J. Gluza, M. Zralek. Parameters' domain in three flavour neutrino oscillations. *Phys. Lett. B*, 517:158-166, 2001. arXiv:hep-ph/0106283.
- [48] D. E. Groom, et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *The European Physical Journal C*, 15, 2000. and 2001 partial update for edition 2002 (URL:<http://pdg.lbl.gov>).
- [49] F. Halzen. *Quarks & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. J. Wiley, 1984.
- [50] O. Haug, A. Faessler, J. D. Vergados. Can lsnd be included in a 3-neutrino framework? *J. Phys. G*, 27:1743-1756, 2001. arXiv:hep-hp/0005068.
- [51] K. Huang. *Quarks, Leptons & Gauge Theory*. World Scientific, 1992.
- [52] C. Itzikson, J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw Hill, 1980.
- [53] M. Kaku. *Quantum Field Theory: A modern Introduction*. Oxford University, 1993.
- [54] B. Kayser. On the quantum mechanics of neutrino oscillation. *Phys. Rev. D*, 24:110, 1981.
- [55] B. Kayser. *The Physics of Massive Neutrinos*, volume 25 of *World Scientific Lecture Notes in Physics*. World Scientific, 1989.
- [56] B. Kayser. Neutrino mass: The present and the future. arXiv:hep-hp/0010206, Octubre 2000.
- [57] B. Kayser. Neutrino properties. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 91:299-305, 2000. arXiv:hep-ph/0010065.

- [58] S. F. King. Neutrino oscillations: Status, prospects and opportunities at a neutrino factory. *J. Phys. G.*, 27:2149–2170, 2001. arXiv:hep-ph/0105261.
- [59] D. Kirilova, M. Chizhov. Neutrino oscillations in the early universe. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 100:360–362, 2001. arXiv:hep-ph/0102114.
- [60] K. Kodama, et al. (DONUT Collaboration). Observation tau neutrino interactions. *Phys. Lett. B*, 504:218–224, 2001.
- [61] S. E. Koonin. *Computational Physics*. Addison Wesley, 1986.
- [62] P. Langacker, J. Wang. Neutrino-antineutrino transitions. *Phys. Rev. D*, 58(093004), 1998.
- [63] T. D. Lee, C. N. Yang. Question of parity conservation in weak interactions. *Phys. Rev.*, 104:254, 1956.
- [64] C. Liu, J. Song. A model for neutrino warm dark matter and neutrino oscillations. *Phys. Lett. B*, 512:247, 2001.
- [65] E. Majorana. *Nuovo Cimento*, 14:171, 1937.
- [66] M. Maltoni. Analysis of the atmospheric neutrino data in terms of  $3\nu$  oscillations. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 95:108–115, 2001. arXiv:hep-ph/0012158.
- [67] R. N. Mohapatra. Theories of neutrino masses and mixings. arXiv:hep-ph/9910365 Para aparecer en “Current aspects of neutrino physics” D. Caldwell Editor (Springer-Verlag), Octubre 1999.
- [68] R. N. Mohapatra. Origin of neutrino masses and mixings. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 91:313–320, 2001. arXiv:hep-ph/0008232.
- [69] R. N. Mohapatra, P. B. Pal. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, volume 41 of *World Scientific Lecture Notes in Physics*. World Scientific, 2 edition, 1998.
- [70] L. B. Okun. *Leptons and Quarks*. North Holland, 1982.
- [71] J. C. Pati, A. Salam. Lepton number as a fourth “color”. *Phys. Rev. D*, 10:275, 1974.
- [72] R. D. Peccei. Neutrino physics. In J. C. D’Olivo, G. López, M. Mondragón, editors, *Particles and Fields, Eight Mexican School*, page 80. AIP Conference Proceedings 490, 1999.
- [73] J. Peltoniemi. <http://cupp oulu.fi/neutrino//>.
- [74] C. C. Peters, W. R. V. Voorhis. *Statistical Procedures and their Mathematical Bases*. McGraw Hill, 1940. Capitulo XIV.
- [75] A. Piepke, et al. (KamLAND collaboration). Kamland: A reactor neutrino experiment testing the solar neutrino anomaly. *Nucl. Phys. B*, 91:16–21, 2000. Proc. of the XIXth International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics.
- [76] B. Pontecorvo. Mesonium and antimesonium. *Sov. Phys. JETP*, 6:429, 1958.
- [77] H. Schlattl. Can three-flavor oscillations solve the solar neutrino problem? *Phys. Rev. D*, 64:013009, 2001 2001. arXiv:hep-ph/0102063.
- [78] G. Senjanović, R. N. Mohapatra. Exact left-right symmetry and spontaneous violation of parity. *Phys. Rev. D*, 12:1502, 1975.

- [79] J. R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis, The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. University Science Books, 1997.
- [80] C. S. Wu, et al. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Phys. Rev.*, 105:1413, 1957.