3

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUCESIONES BASICAS EN F-ESPACIOS Y LA EXTENSION DE *Hahn-Banach*.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

PAULO ROBERTO CARRILLO ROUSE

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. ANGEL MANUEL CARRILLO HOYO

MEXICO, D. F. 2002

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Sucesiones básicas en F-espacios y la extensión de Hahn-Banach"

realizado por Paulo Roberto Carrillo Rouse

con número de cuenta 9332640-3 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo
Propietario	Dr. Hugo Arizmendi Peimbert
Propietario	Dr. Carlos Hernández Garciadiego
Suplente	Dr. Armando García Martínez
Suplente	Dr. Ricardo Gómez Aiza

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Agradecimientos.

A mis padres, Eva y Roberto, por su amor, apoyo y por todo lo que tengo en la vida.

A Edysa y a Cesar, mis hermanos favoritos, por quererme tanto.

A mi amada Sele por compartir conmigo tu vida y estar a mi lado siempre.

A todos mis amigos por los grandes momentos que he tenido con ustedes.

A la Maestra Ana Irene Ramírez por su confianza y apoyo.

Un agradecimiento muy especial al Maestro Angel M. Carrillo por todo lo que me ha enseñado durante todo este tiempo que hemos trabajado juntos.

Finalmente gracias a todos los maestros y maestras que he tenido a lo largo de mi carrera por motivarme a seguir aprendiendo.

Contenido

Prólogo

A finales de la década de los setenta, P. Duren y W. Romberg (ver [4]) realizaron trabajos sobre los espacios métricos lineales, no localmente convexos H^p, con $0 < p < 1$, llamados de Hardy. En particular, caracterizaron sus duales y mostraron que en ellos hay subespacios propios que son cerrados, en la métrica, y débilmente densos, lo cual implica la existencia en H^p de subespacios cerrados en los que están definidas funcionales lineales continuas que no admiten una extensión del mismo tipo a todo H^p. Esta clase de espacios se sumó a otros ejemplos ya conocidos de familias de espacios no localmente convexos, como $L_p[0,1]$ y l_p, con $0 < p < 1$, que fallan en tener la propiedad de que toda funcional lineal continua definida en cualquiera de sus subespacios cerrados tiene una extensión lineal continua a todo el espacio, la cual es llamada la *Propiedad de extensión de Hahn-Banach (PEHB)*. En contraste, es ampliamente conocido que los espacios localmente convexos tienen la *PEHB*. A partir de estos hechos se planteó el problema de si la convexidad local de un espacio métrico lineal equivale a que tenga la *PEHB*.

La respuesta a ese problema es afirmativa, en el caso de que el espacio es además completo, o sea, cuando se trata de un $F-$espacio.

La primera respuesta en esa dirección fue dada, en 1970, por J. Shapiro en [19] donde demostró que si un $F-$espacio tiene una base de Schauder y la *PEHB*, entonces es localmente convexo. En 1974, N.J. Kalton dio en [9] la respuesta general al establecer condiciones para la existencia de sucesiones básicas en espacios métricos lineales y con esto, aprovechar el trabajo previo de Shapiro.

Después vinieron algunas generalizaciones de la *PEHB* y de la noción de sucesión básica; por ejemplo, N.J. Kalton y J. Shapiro trabajaron en [10] con las sucesiones básicas llamadas de Markushevich, o simplemente M-básicas; y recientemente, en 1994, J. Kakol y P. Sorjonen en [8] aprovecharon todas las técnicas y resultados obtenidos por esos autores y por otros como N.T. Peck, J. Roberts y L. Drewnowski y obtuvieron algunos resultados interesantes sobre las extensiones continuas de funcionales y trabajaron con espacios lineales metrizables, pero que no son necesariamente $F-$espacios. Dos de sus resultados que aquí reproducimos son: para F-espacios la Propiedad de extensión de Markushevisch-Hahn-Banach (*PEMHB*), que es más débil que la *PEHB*, es equivalente a la convexidad local; y para un espacio métrico lineal, no necesariamente completo, la *PEMHB* implica que el espacio es localmente convexo o su compleción tiene un dual que no separa puntos.

En este trabajo hacemos un desarrollo detallado de lo anteriormente mencionado y presentamos también otros resultados que son consecuencia de la existencia de sucesiones básicas en espacios lineales topológicos metrizables.

Dividimos el material en 4 capítulos, los dos primeros dedicados a sustentar lo expuesto en los finales y a hacer a este trabajo autocontenido. Procedemos a describir a cada uno de ellos.

En el primer capítulo damos definiciones y conceptos básicos en la teoría de espacios lineales topológicos, destacando los que se refieren a los localmente convexos. Enunciamos y demostramos alguños resultados sobre funcionales lineales, en particular se recuerda el Teorema de extensión de Hahn-Banach y algunas consecuencias de éste que son empleadas más adelante. El capítulo concluye con una sección dedicada a los pares duales y se estudian las topologías débil y de Mackey asociadas a un espacio lineal topológico.

En el Capítulo 2 se dedica, casi exclusivamente, a los espacios métricos lineales, los cuales, de acuerdo a los resultados que aparecen en la primera sección, pueden ser identificados biunívocamente con los llamados F^*—espacios que son aquellos espacios lineales topológicos en los que la topología está dada a través de una función real y no negativa llamada F—norma. Cuando un F^*—espacio es completo, entonces es llamado F—espacio y cuando éste es además localmente convexo, entonces se llama un espacio de Frèchet.

Uno de los resultados de este capítulo afirma que toda topología lineal puede ser generada por una familia de F—seminormas, lo cual nos recuerda el muy conocido hecho de que toda topología lineal localmente convexa puede generarse por una familia de seminormas. Damos también las versiones para F—espacios, de tres resultados básicos en la teoría de espacios de Banach y del propio análisis funcional, que son: el Principio de acotamiento uniforme, el Teorema de la función abierta y el Teorema de la gráfica cerrada.

Terminamos este capítulo con algunos ejemplos de F—espacios no localmente convexos: $L_p[0,1]$, l_p y H^p, $0 < p < 1$, y vemos que no tienen la *PEHB*.

En el tercer capítulo se inicia la parte central del trabajo y está dedicado a las sucesiones básicas en F—espacios. Este capítulo es tal vez el más importante en tanto que es nuestra referencia más frecuente; en él desarrollamos, primordialmente el trabajo [9] de N. J. Kalton, después de que dedicamos su primera parte a las bases y sucesiones básicas en espacios lineales topológicos.

El resultado principal de este capítulo, y de todo el trabajo, es el Teorema 3.3.5 que permite construir, bajo ciertas condiciones, sucesiones básicas en F^*—espacios, esto permite probar más adelante lo que ya hemos anunciado antes: que todo F—espacio con la *PEHB* es localmente convexo. El Teorema 3.3.5 tiene otras aplicaciones que exponemos en la última sección del capítulo, por ejemplo, se da una generalización del Teorema de Eberlein-Šmulian.

En el capítulo final presentamos las últimas generalizaciones a los resultados obtenidos por Kalton; introducimos los conceptos de sucesiones M-básicas y algunas propiedades de extensión relativas a las funcionales lineales continuas. Dichas generalizaciones consisten, principalmente, en analizar bajo que condiciones un F^*—espacio tiene esas propiedades (*PEMHB* y *PAHB*) y como se relacionan éstas con la convexidad local.

Espero en verdad que este trabajo pueda ser de utilidad a cualquier persona que se interese en la teoría de espacios lineales topológicos y, en general, a todo aquel que guste del análisis funcional lineal.

Agradezco profundamente al profesor Angel Manuel Carrillo Hoyo por el trabajo, tiempo, experiencia y más dedicado a este trabajo. También doy las gracias a los sinodales, los doctores: Hugo Arizmendi Peimbert, Armando García Martínez, Ricardo Gómez Aíza y Carlos Hernández Garciadiego, por el tiempo y atención que han prestado a esta tesis.

1

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo damos las definiciones y resultados básicos que usaremos durante el resto del trabajo; principalmente se refieren a la teoría de los espacios lineales topológicos y pueden encontrarse en [12], [13], [16], [17] y [20].

Con X denotaremos, a menos que otra cosa se diga, a un espacio lineal (vectorial) sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Para $\alpha \in \mathbb{F}$ y $A, B \subset X$ definimos:

$$\alpha A = \{\alpha x : x \in A\} \text{ y } A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}.$$

Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se dice que X es un espacio lineal real.

1.1 Espacios lineales topológicos y localmente convexos

Definición 1.1.1 *Sea $A \subset X$.*

i) A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda x \in A$ si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $|\lambda| \leq \alpha$.

ii) A es balanceado si $\lambda A \subset A$ para toda $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $|\lambda| \leq 1$.

iii) A es convexo si $\alpha x + \beta y \in A$ para $x, y \in A$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$.

Proposición 1.1.2 *Sea $\mathcal{F}$ una familia arbitraria de subconjuntos de X y hagamos $I = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.*

i) Si cada $A \in \mathcal{F}$ es convexo, entonces I es convexo.

ii) Si cada $A \in \mathcal{F}$ es balanceado, entonces I es balanceado.

Corolario 1.1.3 *Sea $A \subset X$. La intersección $C(A)$ $(B(A))$ de todos los subconjuntos convexos (balanceados) de X que contienen a A es el mínimo conjunto convexo (balanceado) de X que contiene a A y es llamado la envolvente convexa (balanceada) de A en X. La envolvente balanceada de la envolvente convexa de A se llama la envolvente balanceada y convexa de A y se denota como $BC(A)$.*

Definición 1.1.4 *Sea τ una topología en X. Decimos que (X, τ), o simplemente X, es un espacio lineal topológico (e.l.t.) si satisface las siguientes dos condiciones:*

s) La suma

$$\underset{(x,y)}{X \times X} \underset{\to x+y}{\to X}$$

es continua

m) La multiplicación por un escalar

$$\underset{(\lambda,x)}{\mathbb{F} \times X} \underset{\to \lambda x}{\to X}$$

es continua.
En este caso se dice que τ es una topología lineal (vectorial) para X.

Proposición 1.1.5 *Sea X un c.l.t.*

- *(i) Para cualquier $x_0 \in X$ y cada escalar $\lambda_0 \neq 0$, la transformación $x \to \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X en si mismo; en particular, toda traslación y la multiplicación por un escalar distinto de cero (homotecia) es un homeomorfismo.*
- *(ii) Para cualquier subconjunto A de X y cualquier base local de cero $\mathcal{V}(0)$ se cumple $\overline{A} = \bigcap \{A + U : U \in \mathcal{V}(0)\}$.*
- *(iii) Si A y B son subconjuntos de X y A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.*

Definición 1.1.6 *Si para una topología τ de X toda traslación es un homeomorfismo, entonces se dice que X es τ-invariante.*

Corolario 1.1.7 *X es τ-invariante para toda topología lineal τ de X.*

Proposición 1.1.8 *Sean X un c.l.t. y $x \in X$. Una base de vecindades de x está dada por la familia*

$$\mathcal{N}(x) = \{x + V : V \text{ es una vecindad de } 0\}$$

Más aún, si $\mathcal{V}(0)$ es una base de vecindades (base local) de 0, entonces

$$\mathcal{V}(x) = \{x + V : V \in \mathcal{V}(0)\}$$

es una base de vecindades de x.

Dado un e.l.t. (X, τ) denotaremos por $\mathcal{N}(X, \tau)$ a las vecindades de cero en X con respecto a τ, o simplemente por $\mathcal{N}(X)$, si no hay lugar a confusión.

Proposición 1.1.9 *Sea (X, τ) e.l.t., y $\mathcal{V}(0)$ una base de vecindades de cero. X es de Hausdorff si, y sólo si,*

$$\{0\} = \bigcap \{U : U \in \mathcal{V}(0)\}.$$

Proposición 1.1.10 *Si M es un subespacio de un e.l.t. (X, τ), entonces la cerradura $\bar{M}$ en (X, τ) es un subespacio de X.*

Demostración.
De $s)$ se sigue que $\bar{M} + \bar{M} \subset \bar{M}$, y de $m)$ se tiene que $\mathbb{F}\bar{M} \subset \bar{M}$.◆

Proposición 1.1.11 *Sean X un e.l.t. y V una vecindad del cero, entonces V es absorbente.*

Demostración.
Para todo $x \in X$ se tiene que $0 \cdot x = 0$, por tanto, por la continuidad de la multiplicación por un escalar, existe en $\mathbb{F}$ una bola cerrada I con centro en 0 tal que si $\lambda \in I$, entonces $\lambda x \in V$, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que si $|\lambda| \leq \alpha$, entonces $\lambda x \in V$; por tanto, V es absorbente. ◆

Proposición 1.1.12 *Sean A y B subconjuntos convexos de un e.l.t. X entonces:*

(a) El interior A° de A es convexo.

(b) $A + B$ es convexo.

(c) λA es convexo para todo escalar λ.

Proposición 1.1.13 *Si un subconjunto convexo A de un e.l.t. X tiene interior A° no vacío, entonces $\overline{A} = \overline{A^\circ}$.*

Demostración.
Como $A^\circ \subset A$, se tiene $\overline{A^\circ} \subset \overline{A}$. Ahora tomemos $x \in A$ y $y \in A^\circ$; para $0 < t < 1$ tenemos

$$tx + (1 - t)\, y \in tA + (1 - t)\, A^\circ \subset A\,,$$

pero $tA + (1 - t)\, A^\circ$ es abierto, de donde, $tx + (1 - t)\, y \in A^\circ$, entonces $x \in \overline{A^\circ}$ y así $A \subset \overline{A^\circ}$.◆

Proposición 1.1.14 *Si una topología τ es lineal para X, entonces tiene una base de vecindades $\mathcal{V}(0)$ de 0 con las siguientes propiedades:*

i) Para cualesquiera U y V en $\mathcal{V}(0)$, existe $W \in \mathcal{V}(0)$ tal que $W \subset U \cap V$.

ii) Para todo $V \in \mathcal{V}(0)$ existe $U \in \mathcal{V}(0)$ tal que $U + U \subset V$.

iii) Todo $V \in \mathcal{V}(0)$ es balanceado y absorbente.

Inversamente, si $\mathcal{V}(0)$ es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X que satisfacen las 3 condiciones anteriores, entonces $\mathcal{V}(0)$ es una base de vecindades de cero para una topología lineal en X.

Proposición 1.1.15 *Todo e.l.t. tiene una base de vecindades de cero cuyos elementos son cerrados y balanceados.*

Demostración.
Sea $\mathcal{V}(0)$ una base de vecindades de cero que satisface las condiciones i),ii) y iii) de la Proposición 1.1.14. Sea $U \in \mathcal{V}(0)$ y escojamos $V \in \mathcal{V}(0)$, en particular V es balanceado, tal que $V + V \subset U$; entonces $\overline{V} \subset V + V$, ya que si $x \in \overline{V}$ se tiene $(x - V) \cap V \neq \emptyset$ y por tanto, $x \in V + V$. Además $\overline{V}$ es balanceado por ser la cerradura de un balanceado.◆

Definición 1.1.16 *Dos espacios lineales topológicos X y Y son isomorfos (topológicamente) si existe un isomorfismo algebraico entre ellos, que es además un homeomorfismo.*

Proposición 1.1.17 *Si (X,τ) es un e. l. t. de dimensión finita n sobre $\mathbb{F}$, entonces X es topológicamente isomorfo a $\mathbb{F}^n$ con su norma usual. Más precisamente,*

$$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \longrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$$

es un isomorfismo topológico de $\mathbb{F}^n$ sobre X, para cada base $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de X.

Teorema 1.1.18 *Sea Φ una colección de topologías en un conjunto X. Entonces existe una única topología, denotada por $\bigvee \Phi$, o bien $\sup \Phi$, tal que para toda red (x_α) en X, $x_\alpha \rightarrow a$ en $(X, \bigvee \Phi)$ si, y sólo si, $x_\alpha \rightarrow a$ en (X,τ) para toda $\tau \in \Phi$. Además para cualquier espacio topológico. Z se cumple que una función $f : Z \longrightarrow (X, \bigvee \Phi)$ es continua si, y sólo si, $f : Z \longrightarrow (X,\tau)$ es continua para cada $\tau \in \Phi$. Esta topología es llamada la topología supremo de la familia Φ*

Demostración.
Definamos $\bigvee \Phi$ como el conjunto de todas las uniones de intersecciones finitas de miembros de $\bigcup \Phi$.♦

Definición 1.1.19 *Sea M un subespacio lineal de un e.l.t. (X,τ). En el espacio cociente X/M definimos de la manera usual las operaciones de suma y producto por un escalar y éste es entonces un espacio lineal. Además, el homomorfismo natural*

$$q : X \rightarrow X/M$$

que asigna a cada elemento $x \in X$ su clase de equivalencia $x + M$, es lineal. En X/M se define la llamada topología cociente inducida por τ que es la topología más fina con respecto a la cual q es continua y con ella X/M es un e.l.t.

La dimensión de X/M es llamada la codimensión de M.

Definición 1.1.20 *Un subespacio H de X es llamado un hiperespacio homogéneo de X si X es el único subespacio que lo contiene propiamente. Es decir,*

$$X = H + \mathbb{F}a,$$

para todo $a \notin H$ o lo que es lo mismo H tiene codimensión 1.

Definición 1.1.21 *Un hiperespacio M es el trasladado de un hiperespacio homogéneo, o sea*

$$M = x + H$$

para algún $x \in X$ y un subespacio H de codimensión 1.

Corolario 1.1.22 *En un e.l.t. un hiperespacio es cerrado o denso.*

Proposición 1.1.23 *Si M es un subespacio de un e.l.t. (X,τ), entonces X/M es un espacio de Hausdorff si, y sólo si, M es cerrado en X.*

Proposición 1.1.24 *Sea X un espacio lineal y $Y \subset X$ un subespacio. Sean τ, γ dos topologías lineales en X tales que $\tau < \gamma$ y Y es $\gamma-$denso. Entonces $\tau \mid Y < \gamma \mid Y$.*

Demostración.

En general, por ser Y subespacio de X se tiene $\tau \mid Y \leq \gamma \mid Y$ y además, por ser denso, $\overline{G}^{\gamma} = \overline{G \cap Y}^{\gamma}$ para todo $G \subset X$ que es $\gamma-$abierto. Supongamos $\tau \mid Y = \gamma \mid Y$ y sea $V \subset X$ una $\tau-$ vecindad cerrada de 0. Entonces $U \cap Y \subset \operatorname{Int}(V) \cap Y \subset V \cap Y$ para alguna $\tau-$ vecindad abierta de 0. De donde,

$$U \subset V.$$

Por tanto, $\tau = \gamma$ en X, contradiciendo la hipótesis.◆

Definición 1.1.25 *Un subconjunto A de un e.l.t. X es acotado si para toda vecindad de cero V, existe $\epsilon > 0$ tal que $tA \subset V$ para $|t| < \epsilon$.*

Proposición 1.1.26 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un subconjunto A en un e.l.t.:*

(a) A es acotado.

(b) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ y toda sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ con $\alpha_n \to 0$, se tiene $\alpha_n x_n \to 0$.

(c) $(\frac{1}{n})x_n \to 0$, para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b). Sea U una vecindad de cero, existe $\epsilon > 0$ tal que $tA \subset U$ para $|t| < \epsilon$. Como $|\alpha_n| < \epsilon$ para todo n suficientemente grande se sigue que $\alpha_n x_n \in \alpha_n A \subset U$ para todo n suficientemente grande.

(b)$\Rightarrow$(c). Es trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que A no es acotado, entonces existe una vecindad balanceada U de cero tal que para todo $\epsilon > 0$ existe$|t| < \epsilon$ tal que $tA \nsubseteq U$. Como U es balanceada $\epsilon A \nsubseteq U$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $(\frac{1}{n})A \nsubseteq U$; así existe $x_n \in A$, para cada $n \geq 1$, tal que $(\frac{1}{n})x_n \notin U$, es decir, $(\frac{1}{n})x_n \not\to 0$.◆

Teorema 1.1.27 *Sea Φ una colección de topología lineales en X y $S \subset X$. Entonces S es acotado en $(X, \bigvee \Phi)$ si, y sólo si, S es acotado en (X, τ), para cada $\tau \in \Phi$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Se sigue fácilmente, ya que $\tau \leq \bigvee \Phi$, $\tau \in \Phi$.

$\Leftarrow$) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en S, por la Proposición 1.1.26 $\frac{1}{n}x_n \to 0$ para toda $\tau \in \Phi$ y de la definición de la topología $\bigvee \Phi$ se tiene que $\frac{1}{n}x_n \to 0(\bigvee \Phi)$.◆

Teorema 1.1.28 *Sean C un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones $f : C \to Y_f$, donde Y_f es un espacio topológico para cada $f \in \mathcal{F}$. Existe un única topología en C, $\tau(C, \mathcal{F})$, llamada la topología generada por $\mathcal{F}$ o topología débil con respecto a $\mathcal{F}$ tal que si $(x_a)_{a \in A}$ es una red en C y $x \in C$, entonces $x_a \to x\,(\tau(C, \mathcal{F}))$ si, y sólo si, $f(x_a) \to f(x)$ en Y_f para todo $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración.
Sea $\tau(C,\mathcal{F})$ la topología en C que tiene por subbase a la familia

$$\left\{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F} \text{ y } U \text{ es un abierto en } Y_f\right\}.$$

Sean $(x_a)_{a\in A}$ una red en C y $x \in C$. Supongamos $x_a \to x$. Dada $f \in \mathcal{F}$ y U abierto en Y_f que contiene a $f(x)$ existe $b \in A$ tal que para $a \geq b$ se tiene $x_a \in f^{-1}(U)$, es decir, $f(x_a) \in U$ para $a \geq b$. O sea, $f(x_a) \to f(x)$ en Y_f.

Por otro lado, supongamos $f(x_a) \to f(x)$ en Y_f para todo $f \in \mathcal{F}$ y sea $V \in \tau(X,\mathcal{F})$ que contenga a x, por definición de la topología $\tau(C,\mathcal{F})$ existen $f_i \in \mathcal{F}$ y U_i abierto en Y_{f_i} para $1 \leq i \leq n$ tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i) \subset V,$$

Para cada $i = 1,..,n$ existe $b_i \in A$ tal que $a \geq b_i$ implica $f_i(x_a) \in U_i$, entonces tomando $b \geq b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ se sigue que $x_a \in V$ para todo $a \geq b$.

Es fácil probar que la topología arriba definida es la única con la propiedad requerida.◆

Corolario 1.1.29 *La topología $\tau(C,\mathcal{F})$ del teorema anterior es la más gruesa para la que cada $f \in \mathcal{F}$ es continua.*

Definición 1.1.30 *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones lineales, todas ellas definidas en el espacio lineal X y con valores en espacios lineales topológicos. En este caso a la topología débil $\tau(X,\mathcal{F})$ con respecto a $\mathcal{F}$ la denotamos por $\sigma\mathcal{F}$. Es fácil ver que $\sigma\mathcal{F}$ es una topología lineal. Cuando $\mathcal{F}$ tiene un sólo elemento f, usamos la notación σf.*

Proposición 1.1.31 *Sea $f : X \to Y$ una función lineal de un espacio lineal X a un e.l.t. Y. Para $S \subset X$ se tiene S es $\sigma f-$acotado si, y sólo si, $f(S)$ es acotado.*

Demostración.
Supongamos que S es $\sigma f-$acotado. Sea U una vecindad de cero en Y, entonces $f^{-1}(U)$ es una $\sigma f-$vecindad de cero en X y existe un escalar s tal que $tS \subset f^{-1}(U)$ si $|t| < s$; así, $tf(S) \subset U$ si $|t| < s$, es decir, $f(S)$ es acotado en Y.

Recíprocamente, supongamos que $f(S)$ es acotado en Y. Si V es una $\sigma f-$vecindad de cero en X, entonces V contiene a $f^{-1}(U)$, para alguna U vecindad de cero en Y, y el resultado se sigue de forma similar a la vista en el párrafo anterior.◆

Corolario 1.1.32 *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones lineales de definidas en un espacio lineal X y con valores en espacios lineales topológicos. Un subconjunto $S \subset X$ es acotado en $(X,\sigma\mathcal{F})$ si, y sólo si, $f(S)$ es acotado para cada $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración.
Se sigue inmediatamente del Teorema 1.1.27 ya que

$$\sigma\mathcal{F} = \bigvee\{\sigma f : f \in \mathcal{F}\}.◆$$

Teorema 1.1.33 *En un espacio topológico Z de Hausdorff las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Z es numerablemente compacto.

(ii) Cada subconjunto infinito de Z tiene un punto de acumulación.

Definición 1.1.34 *Se dice que un subconjunto A de un e.l.t. X es totalmente acotado si para cada vecindad U de 0 en X existe un subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de X tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$.*

Proposición 1.1.35 *Si A es un subconjunto totalmente acotado de un e.l.t. X, entonces A es acotado.*

Demostración.

Sean $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A, $U \in \mathcal{N}(X)$ y $V \in \mathcal{N}(X)$ balanceada tal que $V + V \subset U$, como A es totalmente acotado existen $x_1, ..., x_k$ en X tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$. Podemos elegir $N > 0$ tal que $x_i \in NV \subset nV$ para toda $n \geq N$ y todo $i = 1, ..., k$, entonces

$$\frac{1}{n} y_n \in \bigcup_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} x_i + \frac{1}{n} V \right) \subset V + V \subset U \text{ si } n \geq N,$$

es decir, $\frac{1}{n} y_n \to 0$ y por tanto, A es acotado.◆

Teorema 1.1.36 *Un conjunto K de un e.l.t. X es compacto si, y sólo si, tiene las siguientes dos propiedades:*

i) es totalmente acotado, es decir para cada vecindad U de 0 en X existe un subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de X tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$

ii) es completo, o sea, toda red de Cauchy en K es convergente.

Teorema 1.1.37 *Sea X un e.l.t. de Hausdorff que tiene una vecindad de cero totalmente acotada. Entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración.

Sea $U \in \mathcal{N}(X)$ totalmente acotada. Por la proposición anterior U es acotada y entonces $\left\{ \frac{1}{2^n} U : n \in \mathbb{N} \right\}$ es una base de vecindades de cero, ya que si V es una vecindad de cero, que podemos suponer balanceada, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \subset 2^n V$.

Existe un subconjunto finito F_0 de X tal que

$$U \subset F_0 + \frac{1}{2} U,$$

Si $F = \langle F_0 \rangle$, entonces F es cerrado en X, por ser de dimensión finita y

$$\begin{aligned} U &\subset F + \frac{1}{2} U \subset F + \frac{1}{2} \left(F + \frac{1}{2} U \right) = F + \frac{1}{2^2} U \subset ... \\ &\subset F + \frac{1}{2^n} U \subset ..., \end{aligned}$$

de donde por (ii) de la Proposición 1.1.5

$$U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ F + \frac{1}{2^n} U \right\} = \overline{F} = F.$$

Por último, si $x \in X$ existe un escalar α tal que $x \in \alpha U \subset \alpha F \subset F$, esto es, $X = F$.♦

Corolario 1.1.38 *Todo e.l.t. localmente compacto tiene dimensión finita.*

Teorema 1.1.39 *Si A es un subconjunto de un e.l.t. X tal que toda sucesión en A, con rango infinito, tiene un punto de acumulación en X, entonces A es totalmente acotado. En particular, cada subconjunto de un espacio X numerablemente compacto es totalmente acotado.*

Definición 1.1.40 *Sea U un subconjunto balanceado de X. Definimos la siguiente función real no negativa,*

$$p_U(x) = \inf \{t > 0 : x \in tU\}$$

la cual se denomina la funcional de Minkowski de U. Una seminorma en X es la funcional de Minkowski de algún subconjunto de X, convexo, balanceado y absorbente. Una norma es una seminorma p para la cual $p(x) = 0$ implica $x = 0$.

Proposición 1.1.41 *Una función real p es una seminorma en X si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones,*

i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *si* $x, y \in X$,

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *si* $\lambda \in \mathbb{F}, x \in X$.

Proposición 1.1.42 *Supongamos que p y q son dos seminormas en X y que $q(x) \leq 1$ si $p(x) < 1$. Entonces $q(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración.

Para cada $\epsilon > 0$, $p(\frac{x}{p(x)+\epsilon}) < 1$, por tanto hipótesis $q(\frac{x}{p(x)+\epsilon}) \leq 1$. Así, $q(x) \leq p(x) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, de donde se sigue que $q(x) \leq p(x)$.

También es cierta la proposición si la hipótesis se cambia a $q(x) \leq 1$ si $p(x) \leq 1$.

Definición 1.1.43 *Si $\|\|$ es una norma en X, entonces $(X, \|\|)$ es llamado un espacio normado y éste es un e.l.t. cuando en X se considera la topología generada por dicha norma, es decir aquella que está inducida por la métrica $d(x,y) = \|x - y\|$. Por otra parte, se dice que un e.l.t. X es normable cuando su topología coincide por la generada por una norma en X.*

Proposición 1.1.44 *Un e.l.t. de Hausdorff X es normable si, y sólo si, X posee una vecindad de cero acotada y convexa.*

Definición 1.1.45 *Una topología lineal para X es llamada localmente convexa si posee una base de vecindades convexas de 0. Esto equivale a que para todo $x \in X$ y toda vecindad V de x, V contiene una vecindad convexa de x. Un e.l.t. X se dice que es un espacio localmente convexo (e.l.c.) si su topología es localmente convexa.*

Proposición 1.1.46 *Toda topología localmente convexa en X está generada por una familia de seminormas, por ejemplo, por la familia de las funcionales de Minkowski de todas sus vecindades del 0, convexas y balanceadas. Si (X,τ) es un e.l.c. y P es una familia de seminormas que genera su topología, entonces escribimos (X,P).*

Ejemplo 1.1.47 *Sea ω $(=\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ el espacio de todas las sucesiones reales, para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos $P_n:\omega\to\mathbb{R}$ por*

$$P_n(x)=x_n,$$

estas son llamadas las proyecciones canónicas. Consideremos la topología en ω generada por ellas, esto es, $\sigma\{P_n:n\geq 1\}$, está es una topología lineal y de hecho localmente convexa ya que por definición es la topología determinada por las seminormas $|P_n|$.

Proposición 1.1.48 *La compleción $\widetilde{X}$ de un e.l.c. X es un e.l.c. y su topología está generada por las extensiones continuas a $\widetilde{X}$ de los elementos de cualquier familia de seminormas que generen la topología de X.*

Definición 1.1.49 *Se dice que una familia S de funciones en X y con valores en algún espacio lineal es total en X si $f(x)=0$ para todo $f\in S$ implica $x=0$.*

Proposición 1.1.50 *Un e.l.c. (X,P) es de Hausdorff si, y sólo si, P es total en X.*

Demostración.
Supongamos (X,P) es de Hausdorff y sea $x\in X$ tal que $p(x)=0$ para toda $p\in P$, entonces como para toda $U\in\mathcal{N}(X,P)$ existen $p_1,...,p_k$ y escalares $a_1,...,a_k$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{k}\{x:p_i(x)<a_i\}\subset U,$$

tenemos que $x\in U$ para toda $U\in\mathcal{N}(X,P)$ y por 1.1.9 $x=0$.
Por otro lado, si P es total en X y $x\in U$ para toda $U\in\mathcal{N}(X,P)$, se tiene que $p(x)=0$ para toda $p\in P$ y $x=0$, de donde de nuevo por 1.1.9 (X,P) es de Hausdorff.♦

Proposición 1.1.51 *Sea S un conjunto en un e.l.c. (X,P). Un subconjunto S es acotado en (X,P) si, y sólo si, $p(S)$ es acotado para cada $p\in P$.*

Demostración.
Supongamos que S es acotado en X. El conjunto $U=\{x:p(x)<1\}$ es una vecindad de cero en X para cada $p\in P$, y por tanto $S\subset mU$ para algún $m>0$, y entonces $p(x)<m$ para todo $s\in S$.
Inversamente, si $p(S)$ es acotado para cada $p\in P$, entonces $p(\frac{x_n}{n})\to 0$ para cada $p\in P$ y cada sucesión (x_n) en S; de donde $\frac{x_n}{n}\to 0$ en X.♦

Definición 1.1.52 *Un espacio lineal topológico se dice que es metrizable (pseudometrizable) si existe una métrica (pseudométrica) que genera su topología.*

Todo espacio lineal topológico pseudometrizable tiene una base local del 0 numerable.

Ejemplo 1.1.53 *En el ejemplo anterior* $(\omega, \sigma\{P_n\})$ *es metrizable ya que por Teorema 1.1.28 está es la única topología con las propiedades allí mencionadas y se puede ver fácilmente que,*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

es una métrica en ω *que genera una topología con las propiedades señaladas en dicho teorema.*

Teorema 1.1.54 (Absorción de sucesiones) *Si* X *es e.l.t. pseudometrizable y* A *es un subconjunto de* X *que absorbe a cada sucesión que converge a cero, entonces* A *es una vecindad de cero.*

Demostración.
Sea $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ una base local de cero en X tal que $U_{n+1} \subset U_n$ para todo $n \geq 1$. Supongamos que A no es vecindad de cero. Entonces para cada $n \geq 1$ se puede encontrar $x_n \in \left(\frac{1}{n}U_n\right) - A$, ya que de lo contrario habría un n_0 tal que $\frac{1}{n_0}U_{n_0} \subset A$ y A sería vecindad de cero. Consideremos la sucesión (nx_n), entonces

$$nx_n \to 0, \text{ cuando } n \to \infty \text{ y } nx_n \notin nA, \text{ para todo } n \geq 1$$

por tanto, A no absorbe a la sucesión $(nx_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a cero, con lo que se contradice la hipótesis.◆

Definición 1.1.55 *En un e.l.t.* X *un conjunto bornívoro es un subconjunto de* X *que absorbe a todos los conjuntos acotados.*

Corolario 1.1.56 *Sea* X *un e.l.t. pseudometrizable. Entonces todo bornívoro es una vecindad de cero.*

Demostración.
Se sigue de teorema anterior y de la caracterización de conjuntos acotados (1.1.26).◆

Definición 1.1.57 *Un espacio bornológico es un espacio localmente convexo de Hausdorff en el cual todo subconjunto bornívoro balanceado y convexo, es una vecindad de cero.*

Corolario 1.1.58 *Un e.l.c. metrizable es bornológico.*

1.2 Funcionales lineales y el Teorema de Hahn-Banach

Definición 1.2.1 *Sean* X *y* Y *dos espacios lineales. Un operador lineal de* X *en* Y *es una función lineal* $T : X \to Y$. *Si* $Y = \mathbb{F}$ *entonces el operador es llamado una funcional (lineal) de* X. *Al conjunto* X^{*} *de todas las funcionales de* X *se le designa como el dual algebraico de* X. *Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función,* X^{*} *resulta ser es un espacio lineal sobre el mismo campo* $\mathbb{F}$.

Teorema 1.2.2 *Sea $f : X \to \mathbb{F}$ una funcional en X, no nula, entonces su núcleo $H = f^{-1}(0)$ es un hiperespacio homogéneo.*

El núcleo de una funcional f es denotado por $\ker f$.

Proposición 1.2.3 *Un subconjunto $M \subset X$ es un hiperespacio si, y sólo si, $M = f^{-1}(\alpha)$ para alguna $\alpha \in \mathbb{F}$ y alguna $f \in X^*$ no nula, f y α son únicas para M excepto por un factor común $\beta \in \mathbb{F}$ distinto de 0. A cualquiera de los múltiplos de f lo llamamos una funcional que determina a M.*

Demostración.

Supongamos que $M = f^{-1}(\alpha)$ para alguna $\alpha \in \mathbb{F}$ y alguna $f \in X^*$ no nula, entonces $H = f^{-1}(0)$ es un hiperespacio homogéneo de X; si además $x_0 \in X$ es tal que $f(x_0) = \alpha$, entonces $M = f^{-1}(\alpha) = x_0 + M$, lo que muestra que M es un hiperespacio.

Recíprocamente, si M es un hiperespacio, $M = x_0+H$, donde H es un hiperespacio homogéneo de X tal que $\dim X/H = 1$, así que X/H es algebraicamente isomorfo a $\mathbb{F}$. Sea q el homomorfismo natural de X a X/H y g el isomorfismo de X/H sobre $\mathbb{F}$; entonces $f = g \circ q$ es una funcional en X, no nula, tal que $M = f^{-1}(\alpha)$ donde $\alpha = f(x_0)$. ◆

Proposición 1.2.4 *Sea X un espacio lineal y $g, g_1, ..., g_r \in X^*$, entonces se tiene que $\bigcap_{i=1}^{r} \ker g_i \subset \ker g$ si, y sólo si, $g \in \langle g_1, ..., g_r\rangle$.*

Definición 1.2.5 *Sea (X,τ) un e.l.t. El subespacio lineal X' de X^* formado por todas las funcionales que son $\tau-$continuas, es llamado el dual topológico de (X,τ), o simplemente el dual de X si no hay motivo de confusión.*

Definición 1.2.6 *Para un subespacio M de un e.l.t. X definimos*

$$M^{\perp} = \{f \in X' : f(M) = 0\},$$

y lo llamaremos el espacio ortogonal de M.

Proposición 1.2.7 *Sea X un e.l.t. y $M \subset X$ un subespacio, entonces hay un isomorfismo algebraico:*

$$M^{\perp} \cong (X/M)' ,$$

dado por $f \to \bar{f}$, donde $\bar{f}(q(x)) = f(x)$ y q es la función cociente.

Proposición 1.2.8 *Sean X un e.l.t. y $M \subset X$ un subespacio. Si $g_1, ..., g_{n+1}$ en X' son tales que sus clases, $\overline{g_1}, ..., \overline{g_{n+1}}$ en $X'/M^{\perp}$ son linealmente independientes, entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i|_M) \subsetneqq \ker(g_{n+1}|_M) .$$

Demostración.

En caso contrario, por 1.2.4 $g_{n+1}|_M \in \langle g_i|_M\rangle_{i=1}^{n}$ y por tanto, existen escalares $a_1, ..., a_n$ tales que $g_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \in M^{\perp}$ y $\overline{g_{n+1}} \in \langle\overline{g_i}\rangle_{i=1}^{n}$, contradiciendo la independencia lineal de $\{\overline{g_1}, ..., \overline{g_{n+1}}\}$.◆

Proposición 1.2.9 *Sean X, M y $g_1, ..., g_n$ como en la proposición anterior. Para cada $x \in X$ existe $m(x) \in M$ tal que $g_i(x) = g_i(m(x))$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demostración.

Procedemos por inducción sobre n. Supongamos $n = 1$; $\overline{g_1} \neq 0$ de donde, $g_1 \notin M^{\perp}$ y por tanto, existe $m_1 \in M$ tal que $g_1(m_1) \neq 0$. Dado $x \in X$ sea $m(x) = \frac{g_1(x) m_1}{g_1(m_1)} \in M$, entonces $g_1(x) = g_1(m_1(x))$.

Supongamos válido el resultado para n y sean $g_1, ..., g_{n+1} \in X'$ tales que $\overline{g_1}, ..., \overline{g_{n+1}}$ son linealmente independientes en $X'/M^{\perp}$. Por hipótesis de inducción dado $x \in X$ existe $m_x \in M$ tal que $g_i(x) = g_i(m_x)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por la proposición anterior existe $m_0 \in M$ tal que $m_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i)$ y $g_{n+1}(m_0) \neq 0$. Sea $\lambda = g_{n+1}(x - m_x)$ y $m(x) = \frac{\lambda m_0}{g_{n+1}(m_0)} + m_x \in M$, entonces se comprueba fácilmente que $g_i(x) = g_i(m(x))$ para toda $i = 1, ..., n+1$.♦

Definición 1.2.10 *Sean X y Y e.l.t. y $T : X \to Y$ un operador lineal. Decimos que T es acotado si $T(B)$ es un subconjunto acotado de Y siempre que B es un subconjunto acotado de X.*

Teorema 1.2.11 *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal entre dos e.l.t., entonces los dos siguientes enunciados son equivalentes,*

(a) T es continuo en X ,

(b) T es continuo en 0,

Cada uno de los anteriores implican el siguiente, y los tres son equivalentes si la topología de X es metrizable.

(c) T es acotado.

Demostración.

(b)⇒(a). Supongamos que T es continuo en 0. Sean $x \in X$ y V una vecindad de cero en Y. Como T es continuo existe U vecindad de cero en X tal que

$$T(U) \subset V,$$

entonces

$$T(x + U) = T(x) + T(U) \subset T(x) + V,$$

es decir, T es continua en x. Entonces (b) es equivalente a (a), ya que claramente (a)⇒(b).

(a)⇒(c). Supóngase que T es continua, B es un subconjunto acotado de X, y V es una vecindad de cero en Y. Por la continuidad de T existe una vecindad de cero U en X tal que $T(U) \subset V$, y como B es acotado existe un escalar positivo s tal que

$$B \subset tU, \text{ si } t \geq s.$$

Entonces

$$T(B) \subset tT(U) \subset tV, \text{si } t \geq s,$$

de donde $T(B)$ es acotado en Y.

(c)⇒(b) Supongamos que la topología de X está inducida por una métrica, que T es acotado, y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X convergente a cero. Se probará que $(T(y_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, y por tanto, T es continuo, haciendo ver que cualquiera de sus subsucesiones tiene una subsucesión que converge a cero. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Para cada entero positivo k, hay un entero positivo n_k tal que $n \geq n_k$ implica que kx_n está en la bola de radio k^{-1} centrada en el origen; de donde se sigue que existe una sucesión no decreciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos tal que

$$kx_{n_k} \longrightarrow 0.$$

Como el conjunto $\{kx_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ y el operador son acotados se tiene que

$$\{kT(x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \text{ es acotado.}$$

Sea W una vecindad de cero en Y y sea s un número positivo tal que

$$\{kT(x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \subset tW \text{ si } t \geq s,$$

por consiguiente,

$$kT(x_{n_k}) \subset kW$$

si $k \geq s$; o sea, $T(x_{n_k}) \in W$, para k suficientemente grande. Así la subsucesión $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ converge a cero.♦

Corolario 1.2.12 *Una funcional f en un e.l.t. X es continua si, y sólo si, es acotada en alguna vecindad de* 0.

Definición 1.2.13 *Al espacio lineal de toda las transformaciones acotadas de un e.l.t. X en un e.l.t. Y, lo denotamos por $B(X,Y)$.*

Proposición 1.2.14 *Sea X un espacio seminormado y Y un espacio de Banach. Entonces $B(X,Y)$ es un espacio de Banach, con la norma*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Proposición 1.2.15 *Sea X un e.l.c. cuya topología está definida por una familia de seminormas P y sea $f \in X^*$. Entonces $f \in X'$ si, y sólo si, existen $M > 0$ y $p_1, ..., p_n \in P$ tales que $|f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$, para todo $x \in X$.*

Demostración.

Si f es continua, entonces el conjunto $\{x : |f(x)| \leq 1\}$ es una vecindad de cero, y por consiguiente contiene al conjunto

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x : p_i(x) < \epsilon\}$$

para una familia finita $\{p_1, ..., p_n\} \subset P$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} p_i(x) < \epsilon$ implica $|f(x)| \leq 1$ y así, $|f(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$.♦

Inversamente, si existen $M > 0$ y $p_1, ..., p_n \in P$ tales que $|f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$, para toda $x \in X$, entonces f es continua en cero y por tanto $f \in X'$.♦

Definición 1.2.16 *Sea (X,τ) un e.l.t.. $\sigma X'$ es llamada la topología débil en X . Se acostumbra escribir simplemente σ, en lugar de $\sigma X'$. Esta topología está determinada por la familia de seminormas $\{p_f : f \in X'\}$, donde $p_f(x) = |f(x)|$ para cada $x \in X$ y $f \in X'$.*

Teorema 1.2.17 *Sea (X,τ) un e.l.t. Entonces $(X,\tau)' = (X,\sigma)'$.*

Demostración.
Se sigue inmediatamente de que σ es la mínima topología en X para la que cada elemento de X' es continua, en particular $\sigma \leq \tau$, de la proposición anterior y de la Proposición 1.2.4.

Lema 1.2.18 *Sea $f : X \to \mathbb{F}$ una funcional en X, no nula. Hagamos*

$$H = f^{-1}(0) \text{ y } V = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$$

y supongamos $f(a) = 1$. Si U es un conjunto balanceado, entonces

$$(a+U) \cap H = \emptyset \tag{1.1}$$

si, y sólo si, $U \subset V$.

Demostración.
Supongamos $U \subset V$. Para $x \in U$ tenemos

$$f(a+x) = 1 + f(x) \neq 0$$

ya que $x \in V$, por tanto $(a+U) \cap H = \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que $|f(x)| \geq 1$ para algún $x \in U$. Entonces

$$y = -\frac{x}{f(x)} \in U,$$

por ser U balanceado, y

$$f(a+y) = 0,$$

o sea, $(a+U) \cap H \neq \emptyset$.◆

Teorema 1.2.19 *Sea f una funcional en un e.l.t. X. f es continua si, y sólo si, el subespacio* $\ker f = f^{-1}(0)$ *es cerrado en X.*

Demostración.
Si f es continua, entonces $\ker f = f^{-1}(0)$ es cerrado por ser $\{0\}$ un subconjunto cerrado de $\mathbb{F}$.
Por otro lado, supongamos que f no es nula y que $\ker f = f^{-1}(0)$ es cerrado en X. Sean $a \in X$ tal que $f(a) = 1$ y

$$V = \{x : |f(x)| < 1\}$$

Como $a \notin H$, existe U vecindad de cero en X tal que $(a+U) \cap \ker f = \emptyset$; por el lema anterior $U \subset V$, lo que quiere decir que f es acotada en una vecindad de cero y entonces es continua (Corolario 1.2.12).◆

Corolario 1.2.20 *Un hiperespacio H es cerrado si, y sólo si, toda funcional que lo determina es continua.*

Corolario 1.2.21 *Sea X un e.l.t. Todo subespacio de X es cerrado si, y sólo si, $X' = X^*$.*

Demostración.
Si todo subespacio de X es cerrado, entonces para toda $f \in X^*$, $H = f^{-1}(0)$ es cerrado y por el teorema anterior $f \in X'$. Por tanto, $X' = X^*$.

Por otro lado, como todo subespacio lineal de un espacio lineal es la intersección de todos los hiperespacios que lo contienen, basta probar que si $X' = X^*$ entonces todo hiperespacio de X es cerrado, pero esto es inmediato del corolario anterior.♦

Lema 1.2.22 *Si X es un espacio lineal complejo y H un hiperespacio homogéneo real de X. Entonces $H \cap iH$ es un hiperespacio homogéneo complejo.*

Demostración.
Es claro que iH es también un hiperespacio homogéneo real de X. Supongamos

$$a \notin H \cap iH,$$

digamos que $a \notin H$. Entonces $ia \notin iH$ y

$$a = \alpha ia + b$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y un elemento $b \in iH$; entonces,

$$(1 + \alpha i)b = (1 + \alpha^2)a \notin H,$$

lo que implica que $b \notin H$.

Sea $x \in X$,

$$x = \beta b + y$$

para un $\beta \in \mathbb{R}$ y algún $y \in H$.

Por su parte,

$$y = \gamma ib + z$$

para un $\gamma \in \mathbb{R}$ y algún $z \in iH$.

Como

$$z = y - \gamma ib \in H$$

tenemos que $z \in H \cap iH$ y

$$x = (\beta + \gamma i)b + z = (\lambda + i\mu)a + z,$$

donde $(\lambda + i\mu) = (\beta + \gamma i)\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha i}$, es decir, $X = \mathbb{C}a + (H \cap iH)$.

Si $a \in iH$ se procede de modo similar.♦

Lema 1.2.23 *Sea X un e.l.t. de Hausdorff sobre $\mathbb{R}$ de dimensión al menos 2. Si B es un conjunto en X, abierto, convexo y que no contiene a 0, entonces existe un subespacio de X de dimensión 1 que no intersecta a B.*

Demostración.

Sea M un subespacio de X de dimensión 2. Si $M \cap B = \emptyset$, no hay nada que probar.

Supongamos que $B_1 = M \cap B \neq \emptyset$, entonces B_1 es un subconjunto abierto y convexo de M que no contiene al cero. Por la proposición 1.1.17 podemos identificar a M con $\mathbb{R}^2$.

Una vez identificado, proyectemos B_1 sobre un subconjunto del círculo unitario S^1 mediante la función

$$f(x,y) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}), \text{ donde } r = \|(x,y)\|$$

La función f es continua en $M - \{0\}$ y $f(B_1)$ es conexo, además se puede verificar geométricamente que f es abierta por lo que $f(B_1)$ es un subconjunto de S^1 abierto y conexo, esto es, $f(B_1)$ es un segmento de arco.

Supongamos ahora que $f(B_1)$ subtiende un ángulo mayor que π, entonces existen dos puntos antípodas en $f(B_1)$, digamos

$$a = (\cos\theta, sen\theta) \quad \text{y} \quad b = (\cos(\theta + \pi), sen(\theta + \pi))$$

Entonces $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ están en B_1 y en la recta que forma un ángulo θ con el eje x. Por ser B_1 convexo esto implica que B_1 contiene al cero, lo que no es posible. Por tanto, $f(B_1)$ subtiende un ángulo menor que π, de donde se sigue el resultado ya que entonces existe una recta L que no intersecta al arco $f(B_1)$ y entonces, $f^{-1}(L)$ es también un subespacio unidimensional de $\mathbb{R}^2$que no intersecta a B_1; de hecho $f^{-1}(L) = L$.◆

Teorema 1.2.24 *Sea X un e.l.t. y supongamos que M es un subespacio afín de X, y A es un subconjunto de X abierto, convexo, no vacío y que no intersecta a M. Existe un hiperespacio cerrado H de X, que contiene a M y no intersecta a A. Si M es un subespacio, entonces H se puede tomar homogéneo.*

Demostración.

Supongamos primero que X es un e.l.t. sobre $\mathbb{R}$.

Después de una traslación, si es necesario, podemos suponer que $0 \in M$, es decir, M es un subespacio de X. Sea $\mathcal{M}$ la familia de los subespacios cerrados de X que contienen a M y que no intersectan a A. $\mathcal{M}$ no es vacía ya que por 1.1.10 $\bar{M}$ es un subespacio de X, y como A es abierto y $M \cap A = \emptyset$, se sigue que $\bar{M} \cap A = \emptyset$, por lo que $\bar{M} \in \mathcal{M}$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una cadena en $\mathcal{M}$, $\overline{\cup_i M_i}$ es un subespacio cerrado que contiene a , o sea, $\{M_i\}_{i\in I}$ tiene cota superior en $\mathcal{M}$ y por Zorn tenemos entonces que $\mathcal{M}$ tiene un elemento maximal H_0.

El espacio X/H_0 es un espacio de Hausdorff (1.1.23) porque H_0 es cerrado, además como $A \neq \emptyset$ tiene dimensión positiva.

Supongamos que $\dim X/H_0 \geq 2$. Como el mapeo canónico $\theta : X \to X/H_0$ es lineal y abierto, $\theta(A) = B$ es un subconjunto abierto y convexo de X/H_0 que no contiene al cero ya que A no intersecta a H_0. Por el lema anterior existe un subespacio unidimensional L de X/H_0 tal que no intersecta a B. θ es continua y L es cerrado, por ser de dimensión finita, entonces $H = \theta^{-1}(L)$ es un subespacio cerrado de X que contiene propiamente a H_0 y que no intersecta a A. Esto contradice la maximalidad de H_0 en $\mathcal{M}$; así que X/H_0 tiene dimensión 1, es decir, H_0 es un hiperespacio cerrado de X que contiene a M y no intersecta a A.

Si X es un e.l.t. sobre $\mathbb{C}$, también lo es sobre $\mathbb{R}$. Siguiendo la demostración anterior existe H_0 hiperespacio real en X tal que no intersecta a A y contiene a M. Por el Lema 1.2.22 $H = H_0 \cap iH_0$ es un hiperespacio en X que contiene a $M \cap iM = M$ y que no intersecta a A.◆

Corolario 1.2.25 *Existe en X una funcional f continua y no nula si, y sólo si, X contiene un subconjunto propio abierto, convexo y no vacío.*

Demostración.
Si f es una funcional continua en X , no trivial, entonces

$$A = \{x : |f(x)| < 1\}$$

es un subconjunto propio de X, no vacío, abierto y convexo.

Recíprocamente, supongamos que A es un subconjunto propio de X, abierto, convexo y no vacío. Sea $x_0 \notin A$; por el teorema anterior existe un hiperespacio cerrado de X que no intersecta a A y que contiene a $\{x_0\}$. Del Corolario 1.2.20 se sigue la existencia en X de una funcional continua y nula.◆

Proposición 1.2.26 *Sea A un subconjunto convexo de un e.l.t. X con interior, A° no vacío y sea B un subconjunto convexo no vacío de X tal que $A^\circ \cap B = \emptyset$. Entonces existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y una funcional lineal, real y continua definida en X tal que*

(a) $A \subset \{x : f(x) \geq \alpha\}$ *y*

(b) $B \subset \{x : f(x) \leq \alpha\}$.

En este caso se dice que el hiperespacio real cerrado $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ separa a A y a B. Si además las desigualdades en (a) y en (b) son estrictas se dice que H separa estrictamente a A y a B.

Demostración.
Por la Proposición 1.1.12 A° y $A^\circ - B$ son convexos, además este último es abierto y no contiene a cero ya que $A^\circ \cap B = \emptyset$. Por el teorema anterior existe un hiperespacio cerrado $H_0 = \{x : g(x) = 0\}$, con $g \in X'$, que contiene a cero y no intersecta a $A^\circ - B$. Sea $f = \operatorname{Re} g$, entonces f es una funcional lineal, real y continua. De la continuidad de f, se sigue que $f(A^\circ - B)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ que no contiene al cero. Sin perder generalidad podemos suponer que

$$f(x - y) > 0 \text{ si } x \in A^\circ \text{ y } y \in B$$

Sea $\alpha = \inf f(A^\circ)$, entonces $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ separa a A° y a B, pero $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es cerrado en X, de donde, por 1.1.13, $A \subset \overline{A^\circ} \subset \{x : f(x) \geq \alpha\}$, por tanto, H separa a A y B.◆

Corolario 1.2.27 *Si en la proposición anterior A y B son abiertos, la separación puede hacerse estricta.*

Proposición 1.2.28 *Sean A y B dos subconjuntos convexos, no vacíos y ajenos entre sí, de un e.l.c. X tales que A es cerrado y B compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado real en X que separa estrictamente a A y B.*

Demostración.
Sean $b \in B$ y $U_b \in \mathcal{N}(X)$ tales que $b - U_b$ no intersecta a A. Consideremos la cubierta de B

$$\{b - U_b : b \in B\},$$

Existen $b_1, \ldots, b_n \in B$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} (b_i - U_{b_i})$. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{b_i}$, entonces $U \in \mathcal{N}(X)$ y $(B - U) \cap A = \emptyset$. Como X es localmente convexo existe W vecindad de 0 en X, convexa, balanceada y abierta tal que $W \subset U$ y así $B \cap (A + W) = \emptyset$. Tomemos $V = \frac{1}{2}W$, entonces $A + V$ y $B + V$ son convexos, abiertos y ajenos entre sí: el resultado se sigue del corolario anterior.◆

Corolario 1.2.29 *Todo subconjunto convexo, cerrado, no vacío de un e.l.c. X es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen y que son de la forma $\{x : f(x) \leq \alpha\}$, donde f es una funcional lineal, real, continua y definida en X y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demostración.
Sea A un subconjunto convexo, cerrado, no vacío de X. Para todo $y \notin A$, el conjunto $\{y\}$ es compacto y convexo por lo que podemos aplicar la proposición anterior y encontrar una funcional lineal, real y continua f_y definida en X y $\alpha_y \in \mathbb{R}$ tales que

$$A \subset \{x : f_y(x) < \alpha_y\} \text{ y } , \{y\} \subset \{x : f_y(x) > \alpha_y\} \tag{1.2}$$

entonces

$$A \subset \bigcap_{y \notin A} \{x : f_y(x) \leq \alpha_y\}.$$

Para ver la desigualdad contraria, sea $z \notin A$, entonces por 1.2 $f_z(z) > \alpha_z$, de donde $z \notin \bigcap_{y \notin A} \{x : f_y(x) \leq \alpha_y\}$.◆

Teorema 1.2.30 (de extensión de Hahn-Banach, caso real) *Sea p una seminorma en el espacio real X, y M un subespacio de X. Si f es una funcional en M tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe f_1 funcional en X que extiende a f y además $|f_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración.
Supongamos que $f \neq 0$ y $M \neq \{0\}$, ya que en cualquier otro caso el resultado es trivial. Consideremos a X como e.t.l. con la topología determinada por la seminorma p y sea

$$U = \{x \in X : p(x) < 1\}.$$

Este conjunto. es abierto en X, balanceado, convexo y no vacío.
Tomemos $a \in M$ tal que $f(a) = 1$ y sea $A = a + U$. Sea $H = f^{-1}(0)$, el cual es un hiperespacio en M, y hagamos

$$V = \{x \in M : |f(x)| < 1\},$$

entonces $U \cap M \subset V$ y por el lema 1.2.18

$$(a + (U \cap M)) \cap H = \emptyset ,$$

Por tanto,

$$A \cap H = \emptyset .$$

Por el teorema anterior existe un hiperplano homogéneo H_1 de X que contiene a H y que no intersecta a A.

Como

$$H_1 \cap M \neq M \quad (a \notin H_1), \quad H \subset H_1$$

y H es un hiperespacio de M se tiene que

$$H_1 \cap M = H.$$

Sea f_1 la funcional en X tal que

$$H_1 = f_1^{-1}(0) \quad \text{y} \quad f_1(a) = 1.$$

Esto y la igualdad $H_1 \cap M = H$ implican que

$$f(x) = f_1(x) \text{ para toda } x \in M,$$

esto es, f_1 es una extensión de f en X.

De nuevo por el lema 1.2.18 tenemos que

$$U \subset V_1 = \{x : |f_1(x)| < 1\} ,$$

ya que

$$(a + U) \cap H_1 = A \cap H_1 = \emptyset,$$

De ésto y la Proposición 1.1.42 se sigue que $|f_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.◆

Teorema 1.2.31 (de extensión de Hahn-Banach) *Sea p una seminorma en el espacio X, y M un subespacio de X. Si f es una funcional en M tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe f_1 funcional en X que extiende a f y además $|f_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración.

Sólo falta probar el caso en que X es un e.l. complejo. Si $g : M \to \mathbb{C}$ es una funcional, entonces $\mathrm{Re}(g)$ e $\mathrm{Im}(g)$ son funcionales reales en M. Sea $f = \mathrm{Re}(g)$, entonces $\mathrm{Im}(g)(x) = -f(\mathrm{i}\, x)$ para todo $x \in X$. A partir de la hipótesis se tiene $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Por tanto, existe una funcional real f_1 en X que extiende a f y satisface$|f_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. La funcional compleja $g_1(x) = f_1(x) - \mathrm{i}\, f_1(\mathrm{i}x)$ extiende a g y satisface$|g_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$, puesto que $|g_1(x)| = e^{\mathrm{i}\,\theta}\, g_1(x)$ para algún real θ y por tanto $|g_1(x)| = g_1(e^{\mathrm{i}\theta}x) = f_1(e^{\mathrm{i}\theta}x) \leq p\,(e^{\mathrm{i}\theta}x) = p(x)$.◆

Corolario 1.2.32 *Sea X un espacio seminormado y $f \in M'$, donde M es un subespacio lineal de X. Entonces f puede extenderse a X, de manera continua y sin variar el valor de la norma de la funcional.*

Demostración.
Sea $p(x) = \|f\| \|x\|$, como $f \in M'$ tenemos

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| = p(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Por teorema de Hahn Banach. f tiene una extensión F a todo X, con $|F(x)| \leq p(x)$,para todo $x \in X$; de donde, $F \in X'$ y $\|F\| \leq \|f\|$. La igualdad $\|F\| = \|f\|$ se sigue de que F es una extensión de f.◆

Proposición 1.2.33 *Sea X seminormado, M un subespacio y $x \in X \setminus \overline{M}$. Existe $f_x \in X'$ con $f_x(x) = 1$, $f_x(M) = 0$ y $\|f_x\| = \frac{1}{d(x,M)}$.*

Demostración. Definamos $f \in (M + \langle x \rangle)^*$ mediante la fórmula $f(y + tx) = t$. Claramente $f(x) = 1$, $f(M) = 0$. Sea $d = d(x, M)$. Para $z = y + tx$, con $t \neq 0$, tenemos

$$\|z\| = |t| \left\| x - \left(-\frac{y}{t}\right) \right\| \geq |t|\, d = |f(z)|\, d,$$

y por tanto,

$$\|f\| = \sup \{|f(z)| : \|z\| \leq 1\} \leq \frac{1}{d};$$

en particular f es continua. Además, para $y \in M$

$$1 = f(x - y) \leq \|f\| \|x - y\|,$$

y, entonces, $1 \leq \|f\|\, d$. Por tanto, $\|f\| = \frac{1}{d(x,M)}$ y por el corolario anterior existe $f_x \in X'$ con las propiedades del enunciado.◆

Proposición 1.2.34 *Sea X un espacio seminormado. El encaje natural de X en X'' $(x \longrightarrow \hat{x})$ es una isometría lineal, esto es, $\|x\| = \|\hat{x}\|$ para cada x. Cuando X es normado el encaje es uno a uno.*

Demostración.
Por Proposición 1.2.14 X' y X'' son espacios de Banach . A cada x le asociamos la funcional $\hat{x} : X' \longrightarrow \mathrm{F}$, dada por $\hat{x}(f) = f(x)$, la cual es lineal y continua ya que

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \tag{1.3}$$

y además vemos que $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.
Si $\|x\| = 0$ se tiene que $\hat{x} = 0$ ya que X'' es normado. Si $\|x\| \neq 0$, entonces aplicamos la proposición anterior con $M = \{0\}$ y $y = \frac{x}{\|x\|}$ y tenemos que existe $f \in X'$ tal que con

$$\|f\| = 1 = f(y) = \frac{1}{\|x\|} f(x),$$

y así,

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\|,$$

por lo que $\|\hat{x}\| \geq \|x\|$.◆

Corolario 1.2.35 *Sea X un e.l.t. cuya topología es localmente convexa. Si f es una funcional continua definida en un subespacio M de X, entonces f tiene una extensión lineal continua a todo X.*

Demostración.
Sea

$$V = \{x \in M : |f(x)| \leq 1\}.$$

Como f es continua, V es una vecindad de cero en M, así, existe U vecindad de cero en X, convexa y balanceada tal que

$$U \cap M \subset V.$$

La funcional de Minkowski ρ de U es una seminorma tal que $\rho(x) \leq 1$, si $x \in U$.

La condición $U \cap M \subset V$ y la observación que sigue a la Proposición 1.1.42 implican $|f(x)| \leq \rho(x)$ en M.

Por el teorema de extensión de Hahn-Banach existe una extensión f_1 de f en X tal que $|f_1(x)| \leq \rho(x)$ en X, de donde se sigue su continuidad.◆

Definición 1.2.36 *Un subespacio M de un e.l.t. X es llamado subespacio de Hahn Banach* (HB) *de X si toda funcional lineal y continua definida en M tiene una extensión lineal y continua al espacio X.*

Definición 1.2.37 *Decimos que un e.l.t. X tiene la Propiedad de Extensión de Hahn-Banach (*PEHB*) si todo subespacio cerrado de X es* HB.

Corolario 1.2.38 *Todo espacio localmente convexo tiene la* PEHB.

Proposición 1.2.39 *Sean X un e.l.t. con la* PEHB, *Y un subespacio de X y $x \in X \diagdown \overline{Y}$. Entonces existe $f \in X'$ tal que $f(Y) = 0$ y $f(x) = 1$.*

Demostración.
Definamos

$$f(y + tx) = t, \text{ para } y \in Y \text{ y } t \in \mathbb{F}.$$

Y es un hiperespacio de $Y + \langle x \rangle$ que no es denso en $Y + \langle x \rangle$, pues de serlo $x \in \overline{Y}$; de donde, por corolario 1.1.22, Y es cerrado en $Y + \langle x \rangle$ y tenemos que f es continua. Por hipótesis, f tiene una extensión lineal continua a X y por construcción satisface las propiedades requeridas.◆

Corolario 1.2.40 *Sea X un e.l.c., Y un subespacio y $x \in X - \overline{Y}$. Entonces existe $f \in X'$ tal que $f(Y) = 0$ y $f(x) = 1$.*

Corolario 1.2.41 *Un subespacio Y de un e.l.c. X es denso si, y sólo si, para $f \in X'$ con $f(Y) = 0$ implica $f \equiv 0$.*

Definición 1.2.42 *Se dice que el dual de un e.l.t. (X, τ) separa puntos o que X tiene la propiedad de separación de puntos (*PSP*), si dados x y y en X distintos, existe $f \in X'$ tal que $f(x) \neq f(y)$ o lo que es equivalente, para cada $x \neq 0$ existe $f \in X'$ tal que $f(x) \neq 0$.*

Proposición 1.2.43 *Todo e.l.t. de Hausdorff con la* PEHB *tiene la* PSP.

Demostración.

Sea (X,τ) con la $PEHB$ y sea x_0 en X un elemento distinto de cero. Definamos $f : \langle x_0 \rangle \to \mathbb{F}$ como $f(tx_0) = t$. Como $\langle x_0 \rangle$ es dimensión finita, es cerrado por la Proposición 1.1.17. Además, f es continua ya que $f^{-1}(0) = \{0\}$, entonces existe $F \in X'$ que extiende a f y por tanto, X tiene la PSP.♦

Lema 1.2.44 *Sean p, q seminormas en un espacio lineal X. Sea $f \in X^*$ tal que $|f(x)| \leq p(x)+q(x)$ para todo $x \in X$. Entonces existen $g, h \in X^*$ con $|g(x)| \leq p(x)$ y $|h(x)| \leq q(x)$ y $f(x) = g(x) + h(x)$, para todo $x \in X$.*

Demostración.

Sea $Y = X \times X$,

$$r(x,y) = p(x) + q(y)$$

es una seminorma en Y. Definimos la funcional lineal u en la diagonal de Y como $u(x,x) = f(x)$, entonces

$$|u(x,x)| \leq r(x,x), \text{ para todo } x \in X.$$

Por el teorema de Hahn-Banach u puede extenderse a todo Y de modo que

$$|u(x,y)| \leq r(x,y), \text{ para todo } (x,y) \in Y.$$

Al definir $g(x) = u(x,0)$ y $h(x) = u(0,x)$, para $x \in X$, tenemos $g, h \in X^*$, $f(x) = g(x)+h(x)$ y $|g(x)|$. Entonces $f \leq p(x)$ y $|h(x)| \leq q(x)$, para todo $x \in X$.♦

Lema 1.2.45 *Sea Φ una colección de topologías l.c. en X. Para cada $T \in \Phi$ sea P_T el conjunto de todas las seminormas continuas en (X,T). Entonces $(X,T) = (X, P_T)$, más aún $\bigcup \{P_T : T \in \Phi\}$ genera la topología $\bigvee \Phi$. En particular, $\bigvee \Phi$ es una topología l.c.*

Lema 1.2.46 *Sea Φ una colección de topologías l.c. en X. Entonces $f \in (X, \bigvee \Phi)'$ si, y sólo si, existen colecciones finitas $T_1, ..., T_n \in \Phi$ y $g_1, ..., g_n \in X^*$, con cada $g_i \in (X, T_i)'$, tales que $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$.*

Demostración.

Supongamos que existen colecciones finitas $T_1, ..., T_n \in \Phi$ y $g_1, ..., g_n \in X^*$, con cada $g_i \in (X, T_i)'$ y tales que $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Cada g_i es continua en $(X, \bigvee \Phi)$ ya que $T_i \leq \bigvee \Phi$. De donde, $f \in (X, \bigvee \Phi)'$

Inversamente, para cada $T \in \Phi$ sea P_T el conjunto de todas las seminormas continuas en (X,T). Entonces $(X,T) = (X, P_T)$, más aún $\bigcup \{P_T : T \in \Phi\}$ genera a la topología $\bigvee \Phi$.

Por proposición 1.2.15 existen $p_1, ..., p_n \in \bigcup P_T$ y $M > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

y el resultado se sigue del lema anterior.♦

1.3 Dualidad

Definición 1.3.1 *Sean X y Y dos son espacios lineales sobre F. Decimos que (X, Y) es un par dual si existe una funcional bilineal $B : X \times Y \rightarrow F$, a la cual denotamos como,*

$$B(x, y) = [x, y]\,.$$

Decimos que el par separa puntos de X, si

$$[x, y] = 0 \text{ para todo } y \in Y \text{ implica } x = 0.$$

Análogamente, el par separa puntos de Y si

$$[x, y] = 0 \text{ para todo } x \in X \text{ implica } y = 0.$$

Cuando el par separa puntos de X y de Y, (X, Y) es llamado un sistema dual.

Ejemplo 1.3.2 *Sea X un espacio lineal y Y cualquier subespacio lineal de X^*. Entonces (X, Y) es un par dual que separa puntos de Y, con la función bilineal dada por*

$$[x, f] = f(x) \text{ para } x \in X \text{ y } f \in Y.$$

En particular si (X, τ) es un e.l.t.(X, X') es un par dual.

Nota 1.3.3 *Dado un par dual (X, Y), que separa puntos de Y hay una identificación natural de Y con un subespacio de X^*, es decir cada $y \in Y$ determina una única funcional lineal $\widehat{y}$ en X, dada por*

$$\widehat{y}(x) = [x, y]\,.$$

A la imagen de Y bajo esta identificación la denotamos por $\widehat{Y}$ o por Y misma. Por supuesto la dualidad permite de la misma forma identificar a X con $\widehat{X}$ en Y^*, cuando el par separa puntos de X.

Definición 1.3.4 *Sea (X, Y) un par dual. A la topología débil $\sigma\widehat{Y}$ en X generada por $\widehat{Y}$ la denotamos por $\sigma(X, Y)$ y la llamamos la topología débil de X con respecto a Y o simplemente la topología débil de X, si no hay lugar a confusión. Cuando X es un e.l.t. y $Y = X'$ se obtiene la topología débil de X, σ que fue introducida en la Definición 1.2.17.*

Ejemplo 1.3.5 *Sea φ el conjunto de todas las sucesiones escalares que se estacionan en cero, es decir,*

$$\varphi = \{x \in \omega : x_n \neq 0 \text{ sólo para un número finito de } n\}\,.$$

Entonces (ω, φ) es un par dual, considerando la función bilineal

$$[x, f] = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n,$$

la cual está bien definida por la definición de φ.

Proposición 1.3.6 *Sean (X,τ) un e.l.t., $\sigma=\sigma(X,X')$ su topología débil y M un subespacio cerrado de X. Entonces*

$$\sigma/M=\sigma\left(X/M,(X/M,\tau/M)'\right),$$

donde σ/M es la topología cociente inducida por la topología débil de X.

Demostración.

Denotemos por σ' a la topología débil del cociente $\sigma\left(X/M,(X/M,\tau/M)'\right)$. Sea $f\in(X/M,\tau/M)'$, entonces si $q:X\to X/M$ es la función cociente, f induce la funcional lineal $F=f\circ q$ en X que es $\tau-$continua y por tanto $\sigma-$continua, pero entonces f es $\sigma/M-$continua por la caracterización de las funciones continuas en el cociente y así, toda funcional lineal en X/M que es $\tau/M-$continua es también $\sigma/M-$continua. Por ser σ' la topología más débil con respecto a la cual todas estas funcionales son continuas se tiene que $\sigma'\leq\sigma/M$.

Probaremos ahora que $\sigma/M\leq\sigma'$. Sean $f_1,...,f_n\in X'$ y $\epsilon>0$ y consideremos la vecindad de cero básica en σ/M

$$V=\{q(x):|f_i(x)|<\epsilon,\text{ para toda } i=1,...,n\}.$$

Si $f_i\in M^{\perp}$ para toda $1\leq i\leq n$, entonces cada una de estas funcionales define una $\widetilde{f_i}\in(X/M)'$ con $\widetilde{f_i}(q(x))=f_i(x)$ y se tiene que

$$V=\left\{q(x):\left|\widetilde{f_i}(q(x))\right|<\epsilon,\text{ para toda } i=1,...,n\right\},$$

es una vecindad básica de cero en σ'.

Supongamos que $f_i\notin M^{\perp}$ para alguna $1\leq i\leq n$. Sea Y el subespacio de X' generado por $M^{\perp}$ y por las f_i, $1\leq i\leq n$,

$$Y=M^{\perp}+\langle f_1,...,f_n\rangle,$$

de aquí se sigue que $Y/M^{\perp}\cong\langle\overline{f_1},...,\overline{f_n}\rangle$ y $\dim Y/M^{\perp}<\infty$, y además está dimensión es positiva ya que de lo contrario $M^{\perp}$ contendría a todas las f_i.

Sea $\{\overline{g_1},...,\overline{g_r}\}$ una base de $Y/M^{\perp}$, por tanto

$$Y=M^{\perp}+\langle g_1,...,g_r\rangle, \tag{1.4}$$

y por la Proposición 1.2.9, para cada x existe $m(x)\in M$ tal que $g_i(x)=g_i(m(x))$ para toda $1\leq i\leq n$, así

$$g(x-m(x))=0\text{ para toda } g\in\langle g_1,...,g_r\rangle. \tag{1.5}$$

Por (1.4), para cada $i=1,...,n$, existen $h_i\in M^{\perp}$ y $g_{f_i}\in\langle g_1,...,g_r\rangle$, tales que $f_i=h_i+g_{f_i}$. Y por (1.5) $f_i(x-m(x))=h_i(x-m(x))$ para todo $x\in X$. Sea

$$W=\left\{q(x):\left|\widetilde{h_i}(q(x))\right|<\epsilon\right\},$$

donde $\widetilde{h_i}(q(x))=h_i(x)$, para cada $i=1,...,n$ y $x\in X$.

Afirmamos que $W\subset V$. Para $x\in X$

$$\begin{aligned}\widetilde{h_i}(q(x)) &= \widetilde{h_i}(q(x-m(x)))=h_i(x-m(x))\\ &= f_i(x-m(x)),\end{aligned}$$

de donde, si $q(x)\in W$, entonces $|f_i(x-m(x))|<\epsilon$ para todo $1\leq i\leq n$ y por tanto, $q(x-m(x))=q(x)\in V$. Así, V es una vecindad de cero en σ' y $\sigma/M\leq\sigma\left(X/M,(X/M,\tau/M)'\right)$.♦

Proposición 1.3.7 *Sea (X,τ) e.l.t., X tiene la* PSP *si, y sólo si, su topología débil σ es de Hausdorff.*

Demostración.
Supongamos X tiene la *PSP* y sea $x_0 \neq 0$ en X, entonces existe $f \in X'$ tal que $f(x_0) \neq 0$. La $\sigma-$vecindad de 0

$$U = \{z \in X : |f(z)| < |f(x_0)|\},$$

es tal que $x_0 \notin U$. Por tanto, $\sigma(X,X')$ es de Hausdorff..
Sea $x_0 \neq 0$ en X, si $\sigma(X,X')$ es de Hausdorff existe una $U \in \mathcal{N}(X,\sigma)$ tal que $x_0 \notin U$. Ahora por definición de $\sigma(X,X')$, existen $f_1,...f_n \in X'$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x : |f_i(x)| < \epsilon\} \subset U,$$

o sea, $f_i(x_0) \neq 0$ para alguna $1 \leq i \leq n$ y así, X tiene la *PSP*.♦

Proposición 1.3.8 *Sea (X,τ) un e.l.t. y $M \subset X$ un subespacio cerrado de X.*

(i) Si M es $\sigma-$cerrado, entonces dado $x \in X - M$ existe $f \in X'$ tal que $f(M) = 0$ y $f(x) \neq 0$.

(ii) M es $\sigma-$denso si, y sólo si, dado $f \in X'$ tal que $f(M) = 0$ implica $f \equiv 0$.

Demostración.
(i) Sea $x \in X - M$, como M es $\sigma-$cerrado y σ es l.c., se sigue del Corolario 1.2.39 y el Teorema 1.2.17 que existe $f \in (X,\sigma)' = (X,\tau)'$ tal que $f(M) = 0$ y $f(x) = 1$.
(ii) Se sigue de que $(X,\tau)' = (X,\sigma)'$ y el Corolario 1.2.41.

Definición 1.3.9 *Sea (X,Y) un par dual. Llamamos a la topología $\sigma\widehat{X}$ en Y la topología débil* en Y inducida por X, y la denotamos por $\sigma(Y,X)$ o simplemente w^* si es claro a que dualidad nos estamos refiriendo.*

Proposición 1.3.10 *$S \subset X^*$ es denso en (X^*,w^*) si, y sólo si, S es total en X.*

Demostración.
Supongamos que S es w^*-denso en X^* y sea $x \in X$ tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in S$, entonces si $\hat{x}$ es la funcional lineal w^*-continua en X^* determinada por x, tenemos

$$\hat{x}^{-1}(0) = \{g \in X^* : \hat{x}(g) = g(x) = 0\},$$

es w^*-cerrado y contiene a S, de donde $\hat{x}^{-1}(0) = X^*$, por la densidad de S, y por tanto, $x = 0$, es decir, S es total en X.
Recíprocamente, supongamos que S es total en X y sea $g \in (X^*,w^*)'$ tal que $g(S) = 0$,entonces $g = \hat{x}$ para alguna $x \in X$, de donde $f(x) = 0$ para toda $f \in S$ y por la suposición $x = 0$, entonces por Corolario 1.2.41 S es denso en (X^*,w^*) .♦

Proposición 1.3.11 *Sea (X,Y) un par dual, donde X es un e.l.t. $B \subset X$ es $\sigma(X,Y)-$acotado si, y sólo si, $\{[x,y] : x \in B\}$ es acotado para cada $y \in Y$.*

Demostración.

Se sigue de inmediato del Corolario 1.1.32, ya que la topología $\sigma(X,Y)$ coincide con $\sigma\widehat{Y}$.

Definición 1.3.12 *Decimos que una topología l.c. τ en un espacio lineal X es admisible para el par dual (X,Y), que separa puntos de Y, si*

$$(X,\tau)' = Y.$$

Por ejemplo, si (X,τ) es un e.l.t. entonces la topología débil $\sigma(X,X')$ es admisible para el par dual (X,X'). (Teorema 1.2.17)

Observación. Se acostumbra también decir que τ es compatible con el par dual; sin embargo, reservaremos este nombre para otro concepto que se usa en el capítulo 3 (Definición 3.5.1).

Proposición 1.3.13 *Si (X,τ) es un e.l.t., la topología débil σ es la topología l.c. más gruesa que es admisible para el par dual (X,X').*

Demostración.

Se sigue del corolario del Teorema 1.1.28 y del Teorema 1.2.17.

Proposición 1.3.14 *Sea (X,Y) un par dual que separa puntos de Y. Una topología l.c. τ en X es admisible para el par si, y sólo si, los conjuntos convexos cerrados según τ y $\sigma(X,Y)$ son los mismos.*

Demostración.

Sea τ una topología localmente convexa en X. Supongamos que τ y $\sigma(X,Y)$ tienen los mismos conjuntos convexos y cerrados. En particular, si $f \in (X,\tau)'$ entonces $\ker f$ es un subespacio $\tau-$cerrado y por tanto, $\sigma(X,Y)$ – cerrado; de donde, $f \in (X,\sigma(X,Y))' = Y$ y así, $(X,\tau)' \subset Y$. Análogamente se da la contención contraria, es decir, $(X,\tau)' = (X,\sigma(X,Y))' = Y$.

Inversamente, sabemos que $\sigma(X,Y) \leq \tau$, lo que implica que cualquier conjunto que cerrado con respecto a $\sigma(X,Y)$ lo es respecto a τ.

Por otro lado, por el corolario de la Proposición 1.2.28, si A es un subconjunto no vacío, convexo y cerrado con respecto a τ, entonces es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen y que son de la forma $\{x : f(x) \leq \alpha\}$, donde f es una funcional lineal, real, continua y definida en X y $\alpha \in \mathbb{R}$, y cada uno de tales conjuntos es $\sigma(X,Y)$ cerrado ya que la funcional correspondiente f es la parte real de una funcional f_y para alguna $y \in Y$.♦

Proposición 1.3.15 *Considérese el par dual (ω,φ) del ejemplo anterior. Entonces $\sigma(\omega,\varphi)$ está definida por la familia de seminormas $\{|P_n| : n \geq 1\}$, donde cada P_n es la proyección canónica definida en el ejemplo 1.1.47. Es decir, en este espacio la topología débil coincide con la topología usual en ω, la cual es metrizable.*

Demostración.

Denotemos por τ a la topología definida por $\{|P_n| : n \geq 1\}$. Para mostrar que $\sigma(\omega,\varphi) < \tau$ basta ver, según la proposición anterior, que τ es admisible para el par dual (ω,φ).

Sea $f \in \varphi - \{0\}$, es decir, $f = (f_i)_{i=1}^{\infty}$ donde $f_i = 0$ para casi todo i; supongamos $f_i = 0$ para $i > k$. Sea (x_a) una red en ω tal que $x_a \longrightarrow x(\tau)$, donde $x \in \omega$. Suponemos $x_a = (x_{ai})_{i=1}^{\infty}$ para cada a y $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ Por definición

$$f(x_a) = [x_a, f] = \sum_{i=1}^{k} x_{ai} f_i \text{ y}$$

$$f(a) = [x, f] = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i,$$

pero $x_a \longrightarrow a(\tau)$ implica, por definición de τ, que $x_a \longrightarrow a_i$ para todo $i = 1, 2, ..$ y por tanto, $f(x_a) \longrightarrow f(a)$ de donde $f \in (\omega, \sigma\{P_n\})'$.

Por otro lado, si $f \in (\omega,\tau)'$, entonces $U = \{x \in \omega : |f(x)| < 1\}$, es una $\tau-$vecindad de cero, de donde existen $n_1, ...n_k$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \omega : |P_{n_i}(x)| < \epsilon\} \subset U.$$

Para cada $n \geq 1$ denotamos por e_n a la sucesión cuyos términos son todos iguales a cero, excepto el $n-$ésimo que vale 1. $P_n(x) = [x, e_n] = x_n$,entonces

$$\bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \omega : |[x, e_{n_i}]| < \epsilon\} \subset U,$$

de donde U es una $\sigma(\omega,\varphi)-$vecindad de cero y $f \in (\omega, \sigma(\omega.\varphi))' = \varphi$. Con lo anterior queda probado que $\sigma(\omega,\varphi)$ y τ son compatibles, de donde $\sigma(\omega,\varphi) < \tau$.

Como $P_n(x) = [x, e_n]$ para cada $n \geq 1$, las proyecciones P_n son continuas con respecto a la topología $\sigma(\omega,\varphi)$, pero τ es la topología más pequeña con respecto a la cual todas las P_n son continuas; por tanto, $\tau \subset \sigma(\omega,\varphi)$.◆

Proposición 1.3.16 *Todos los subespacios de φ son $\sigma(\varphi,\omega)-$cerrados.*

Demostración.

Por Corolario 1.2.21 basta probar que $(\varphi, \sigma(\varphi,\omega))' = \varphi^*$. Sea $g \in \varphi^*$, como $\{e_n : n \geq 1\}$ es una base de Hamel para φ se tiene que g está totalmente determinada por los valores que toma en estos elementos, hagamos

$$g(e_i) = g_i.$$

Sean $x = (g_i)_{i=1}^{\infty} \in \omega$ y $y = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \in \varphi$

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i = [y, x] = \hat{x}(y),$$

y se sigue que g es $\sigma(\varphi,\omega)-$continua. Por tanto, $(\varphi, \sigma(\varphi,\omega))' = \varphi^*$.◆

Corolario 1.3.17 *Ningún subespacio propio de φ puede ser total en ω.*

Demostración.

Por la proposición anterior si S es un subespacio propio de φ, entonces éste es $\sigma(\varphi,\omega)$ —cerrado y por la Proposición 1.3.10 S no puede ser total.

Corolario 1.3.18 *La topología $\sigma(\omega,\varphi)$ en ω es minimal entre las topologías localmente convexas de Hausdorff.*

Demostración.

Supongamos que existe en ω una topología localmente convexa Hausdorff τ con

$$\tau \leq \sigma(\omega,\varphi).$$

Denotamos a $(\omega,\tau)'$ por ω'

$$\sigma(\omega,\omega') \leq \tau \leq \sigma(\omega,\varphi). \tag{1.6a}$$

Observemos que $\sigma(\omega,\omega')$ es de Hausdorff ya que (ω,τ) tiene la *PEHB* por ser localmente convexo y está implica que también tiene la *PSP*. Así, ω' es total en ω.

Si $f \in \omega'$, es decir, f es $\tau-$continua, entonces por (1.6a) f es $\sigma(\omega,\varphi)$ —continua, o sea

$$f \in (\omega,\sigma(\omega,\varphi))' = \varphi,$$

y así ω' es un subespacio de φ. Como ω' es total en ω, se sigue del corolario anterior que $\omega' = \varphi$, o sea,.

$$\sigma(\omega,\omega') = \tau = \sigma(\omega,\varphi). \blacklozenge$$

Teorema 1.3.19 *Sea (X,Y) un par dual que separa puntos de Y. Todas las topologías l.c. en X admisibles con el par dual (X,Y) tienen los mismos conjuntos acotados.*

Demostración.

Sean τ_1 y τ dos topologías l.c. en X compatibles con el par dual. Cada subconjunto $B \subset X$, τ_1-acotado es $\sigma(X,Y)-$acotado, ya que $\sigma(X,Y) \leq \tau_1$.

Para probar que B es $\tau-$acotado es suficiente mostrar, por la Proposición 1.1.51, que para cada seminorma p que sea $\tau-$continua, $p(B)$ es acotado. Sea p una seminorma $\tau-$continua, y sea $Z = (X,p)$. Por 1.2.14, $Z' = (Z,p)'$ es de Banach.

Para $b \in B$, sea $\hat{b}(f) = f(b)$, para toda $f \in Z'$, entonces $\hat{b} \in Z''$. Mostraremos que

$$\hat{B} = \left\{\hat{b} : b \in B\right\},$$

es w^*-acotado en Z'', esto es, $\sigma(Z'',Z')-$acotado. Por Corolario 1.1.32 es suficiente mostrar que $\left\{\hat{b}(f) : b \in B\right\}$ es acotado para cada $f \in Z'$. Tomemos f en Z', y sea (x_a) una red en X tal que $x_a \to 0$ en τ, entonces

$$p(x_a) \to 0,$$

ya que p es $\tau-$continua y como f es $p-$continua se tiene que

$$f(x_a) \longrightarrow 0,$$

y por tanto f es $\tau-$continua.

Al ser τ admisible para el dual (X, Y), se sigue que $f = \hat{y}$, para alguna $y \in Y$. Como B es $\sigma(X, Y)-$acotado, $\{\hat{y}(b) : b \in B\}$ es acotado para cada $y \in Y$, pero $\hat{y}(b) = f(b) = \hat{b}(f)$, por tanto, $\hat{B}$ es w^*-acotado. Es decir, $\hat{B}$ es puntualmente acotado y por el Teorema del acotamiento uniforme, para espacios de Banach, $\hat{B}$ es uniformemente acotado en Z''. Por último, utilizando que el encaje natural $(Z \longrightarrow Z'')$ es una isometría, tenemos que B es acotado en Z, que es lo mismo que decir que la seminorma p es acotada en B.◆

Teorema 1.3.20 *Sea (X, Y) un par dual, que separa puntos de Y definimos*

$$m(X, Y) = \bigvee \{\tau : \tau \text{ es una topología l.c. en } X \text{ admisible para el par dual } (X, Y)\}.$$

Entonces $m(X, Y)$ es una topología l.c. admisible para el par dual y es la más grande con está propiedad.

Demostración.

Por el Lema 1.2.46 tenemos que es admisible para el par dual y es localmente convexa, ya que está generada por una familia de seminormas según Lema 1.2.45, además por construcción es la más grande con está propiedad.◆

Definición 1.3.21 *A la topología $m(X, Y)$ del teorema anterior se la llama la topología de Mackey asociada al par dual (X, Y). Si (X, τ) es un e.l.t. llamaremos a $m(X, X')$ la topología de Mackey de (X, τ).*

Definición 1.3.22 *Un espacio l.c. de Hausdorff (X, τ) es llamado un espacio de Mackey si $\tau = m(X, X')$.*

Teorema 1.3.23 *Un espacio bornológico (X, τ) es de Mackey, es decir, $\tau = m(X, X')$.*

Demostración.

Sea τ_1 una topología l.c. admisible para (X, X') y U una vecindad de 0 balanceada y convexa en la topología τ_1. Por el teorema anterior τ y τ_1 tienen los mismos conjuntos acotados, así U es $\tau-$bornívoro, y como (X, τ) es bornológico U es vecindad de 0 en la topología τ, y por tanto $\tau_1 \leq \tau$. Por definición de la topología de Mackey, $\tau = m(X, X')$.◆

Corolario 1.3.24 *Un espacio l.c. pseudometrizable es de Mackey.*

Demostración.

Se sigue del Corolario 1.1.58 y del teorema anterior.◆

Capítulo 2

Espacios Métricos Lineales

En este capítulo X sigue denotando a un espacio lineal sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2.1 Espacios Métricos Lineales

En está sección, así como en la que sigue, introducimos algunos de los conceptos y propiedades más importantes sobre espacios métricos lineales. Para un estudio más profundo se puede consultar [15].

Definición 2.1.1 *Decimos que el espacio métrico (X, d), o simplemente X, es un espacio métrico lineal (e.m.l.) si las operaciones de suma y producto por escalares son continuas con respecto a la métrica $d(x, y)$. Es decir, si X es un e.l.t. con la topología inducida por la métrica d.*

Definición 2.1.2 *Una métrica $d(x, y)$ en X es llamada invariante (bajo traslaciones) si*

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \text{ si } x, y, z \in X.$$

Teorema 2.1.3 *Sea (X, d) un espacio métrico lineal. Entonces existe una métrica invariante $\tilde{d}(x, y)$ equivalente a la métrica original $d(x, y)$.*

Demostración.
Sea U una vecindad balanceada de cero. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U(n) = \overbrace{U + ... + U}^{n}$$

Es claro que

$$U(n + m) = U(n) + U(m) \tag{2.1}$$

si $n, m \in \mathbb{N}$.

Por la proposición 1.1.14 podemos elegir una vecindad balanceada de 0, $U(\frac{1}{2})$, tal que

$$U(\frac{1}{2}) + U(\frac{1}{2}) \subset U(1)$$

Además, podemos pedir que $U(\frac{1}{2})$ también satisfaga:

$$U(\frac{1}{2}) \subset \left\{x : d(x,0) < \frac{1}{2}\right\}$$

Prosiguiendo de esta misma forma podemos construir una sucesión $C : \{U(\frac{1}{2^n})\}_{n=1}^{\infty}$ donde cada $U(\frac{1}{2^n})$ es una vecindad balanceada de 0 y para cada n se tiene que:

$$U(\frac{1}{2^{n+1}}) + U(\frac{1}{2^{n+1}}) \subset U(\frac{1}{2^n}), \tag{2.2}$$

y

$$U(\frac{1}{2^n}) \subset \left\{x : d(x,0) < \frac{1}{2^n}\right\}, \tag{2.3}$$

para $n \geq 1$.

Sea r un número racional positivo, con expresión diádica finita, esto es,

$$r = n + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_m}{2^m}$$

donde $a_i = 0$ o 1 para $i = 1, 2, ..., m$.

Definimos

$$U(r) = U(n) + a_1 U(\frac{1}{2}) + a_2 U(\frac{1}{2^2}) + ... + a_m U(\frac{1}{2^m})$$

$U(r)$ es una vecindad balanceada de 0 por ser suma (suprimidos los sumandos 0) de vecindades balanceadas de 0.

Para dos racionales positivos p y q con expresiónes diádicas finitas afirmamos que

$$U(p) + U(q) \subset U(p+q) \tag{2.4}$$

La afirmación es trivial si p y q son enteros positivos, supongamos entonces que por lo menos p no es un entero. Agregando ceros si es necesario podemos escribir a p y a q de la siguiente forma:

$$p = n_1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_m}{2^m} \quad \text{y} \quad q = n_2 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + ... + \frac{b_m}{2^m}$$

La prueba la haremos por inducción sobre m.

Si $m = 1$, tenemos los siguientes casos:

i) $a_1 = b_1 = 1$, de donde $p + q = n_1 + n_2 + 1$ y entonces de (2.1) y de la definición de $U(n)$ para n entero positivo, se sigue que:

$$\begin{aligned} U(p) + U(q) &= U(n_1) + U(n_2) + U(\frac{1}{2}) + U(\frac{1}{2}) \subset \\ &\subset U(n_1 + n_2) + U(1) = U(p+q). \end{aligned}$$

ii) $a_1 = 1$ y $b_1 = 0$, de donde $p + q = n_1 + n_2 + \frac{1}{2}$ y por tanto,

$$\begin{aligned} U(p) + U(q) &= U(n_1) + U(n_2) + U(\frac{1}{2}) = \\ &= U(n_1 + n_2) + U(\frac{1}{2}) = U(p+q) \ ; \end{aligned}$$

Supongamos que la afirmación es válida para $k < m$

i) Si $a_m = b_m = 1$, entonces

$$p + q = n_1 + n_2 + \frac{a_1 + b_1}{2} + \dots + \frac{a_{m-1} + b_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}}$$

que en forma diádica se escribe como

$$p + q = n + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}},$$

donde $n \geq n_1 + n_2$.

Por hipótesis de inducción y por (2.1) tenemos:

$$\begin{aligned} U(p) + U(q) &= U(p - \frac{1}{2^m}) + U(q - \frac{1}{2^m}) + U(\frac{1}{2^m}) + U(\frac{1}{2^m}) \subset \\ &\subset U(p + q - \frac{1}{2^{m-1}}) + U(\frac{1}{2^{m-1}}) \subset U(p + q) \ ; \end{aligned}$$

ii) Si $a_m = 1$ y $b_m = 0$, entonces

$$p + q = n_1 + n_2 + \frac{a_1 + b_1}{2} + \dots + \frac{a_{m-1} + b_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m},$$

que en forma diádica se escribe como

$$p + q = n + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{c_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m},$$

donde $n \geq n_1 + n_2$, entonces:

$$\begin{aligned} U(p) + U(q) &= U(p - \frac{1}{2^m}) + U(q) + U(\frac{1}{2^m}) \subset \\ &\subset U(p + q - \frac{1}{2^m}) + U(\frac{1}{2^m}) = U(p + q) \end{aligned}$$

Por tanto, en cualquier caso $U(p) + U(q) \subset U(p + q)$.

Sea

$$\tilde{d}(x, y) = \inf \{r \in \mathbb{Q}^+ : x - y \in U(r), \ r \text{ con expresión diádica finita}\}$$

Mostraremos que $\tilde{d}(x, y)$ es una métrica invariante equivalente con la métrica $d(x, y)$.

Es claro que es invariante ya que

$$\tilde{d}(x+z, y+z) = \inf \{r : (x + z) - (y + z) \in U(r)\} = \inf \{r : x - y \in U(r)\} = \tilde{d}(x, y)$$

Como cada $U(r)$ es balanceada, tenemos

$$\tilde{d}(x, y) = \tilde{d}(y, x)$$

La inclusión (2.4) implica la desigualdad del triángulo, ya que

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,z)+\tilde{d}(z,y) &= \inf\{r_1 : x-z\in U(r_1)\}+\inf\{r_2 : z-y\in U(r_2)\}\\ &= \inf\{r_1+r_2 : x-z\in U(r_1), z-y\in U(r_2)\}\\ &\geq \inf\{r_1+r_2 : (x-z)+(z-y)\in U(r_1)+U(r_2)\}\\ &\geq \inf\{r_1+r_2 : x-y\in U(r_1+r_2)\}\\ &= \inf\{r : x-y\in U(r)\}=\tilde{d}(x,y).\end{aligned}$$

Veremos

$$\lim \tilde{d}(x_n,x)=0 \text{ si, y sólo si, } \lim d(x_n,x)=0,$$

y por tanto, $\tilde{d}(x,y)=0$ si, y sólo si, $d(x,y)=0$ si, y sólo si, $x=y$.

Supongamos que $\tilde{d}(x_n,x)$ tiende a cero, es fácil verificar que si $p\leq q$ entonces $U(p)\subset U(q)$.

Sea $\epsilon>0$, y sea m un natural tal que $\frac{1}{2^m}\leq\epsilon$. Existe $N>0$ tal que

$$\tilde{d}(x_n,x)<\frac{1}{2^m} \text{ si } n\geq N,$$

lo que implica que $x_n-x\in U(r)\subset U(\frac{1}{2^m})$ para alguna $r<\frac{1}{2^m}$ y por (2.3)

$$x_n-x\in\left\{x : d(x,0)<\frac{1}{2^m}\right\} \text{ si } n\geq N,$$

o sea, $d(x_n-x,0)$ tiende a cero. La continuidad de la suma implica que $\lim d(x_n,x)=0$.

Por otra parte, si $\lim d(x_n,x)=0$, de nuevo por la continuidad de la suma se tiene que x_n-x tiende a cero. Como las $U(\frac{1}{2^n})$ son vecindades de cero, para n arbitraria, existe un índice k_0 tal que $x_k-x\in U(\frac{1}{2^n})$ para $k>k_0$.

Esto implica que para $k>k_0$ $\tilde{d}(x_k;x)<\frac{1}{2^n}$. De la arbitrariedad de n se sigue que $\lim\tilde{d}(x_n,x)=0$.♦

Teorema 2.1.4 *Sea (X,d) un espacio métrico lineal y completo. Sea $\tilde{d}(x,y)$ una métrica invariante equivalente a $d(x,y)$. Entonces el espacio $(X,\tilde{d})$ es completo.*

La demostración se basa en los siguientes lemas:

Lema 2.1.5 *Sea (X,d) un espacio métrico completo. Supóngase que X está contenido en un espacio métrico $(\widetilde{X},\tilde{d})$ y que en X las métricas $d(x,y)$ y $\tilde{d}(x,y)$ son equivalentes. Entonces X es un conjunto G_δ en $\widetilde{X}$.*

Demostración.

Como d y $\tilde{d}$ son equivalentes en X , para cada $x\in X$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $0<r_n(x)<\frac{1}{n}$ tal que

$$\left\{y\in X : \tilde{d}(x,y)<r_n(x)\right\}\subset\left\{y\in X : d(x,y)<\frac{1}{n}\right\}.$$

Sean

$$\begin{aligned}U_n(x) &= \left\{y\in\widetilde{X} : \tilde{d}(x,y)<r_n(x)\right\},\\ G_n &= \bigcup_{x\in X}U_n(x) \text{ y } G_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n.\end{aligned}$$

Los conjuntos $U_n(x)$, y por tanto los G_n, son abiertos en $\widetilde{X}$; así G_0 es un conjunto G_δ en $\widetilde{X}$. Claramente $X \subset G_0$.

Sea $x_0 \in G_0$, entonces $x_0 \in G_n$ para todo $n \geq 1$. Por definición de los conjuntos G_n existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\tilde{d}(x_n, x_0) < r_n(x_n) < \frac{1}{n},$$

de lo cual se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a $x_0 \in \widetilde{X}$ en la métrica $\tilde{d}$.

Sean $\epsilon > 0$ y n un entero positivo tal que $\frac{2}{n} < \epsilon$. Existe un entero positivo k_0 tal que

$$\frac{1}{k_0} < r_n(x_n) - \tilde{d}(x_n, x_0).$$

Si $k > k_0$, entonces

$$\tilde{d}(x_k, x_n) \leq \tilde{d}(x_k, x_0) + \tilde{d}(x_0, x_n) \leq \frac{1}{k_0} + \tilde{d}(x_n, x_0) < r_n(x_n),$$

Por la definición de $r_n(x_n)$ se sigue

$$d(x_k, x_n) < \frac{1}{n}$$

si $k > k_0$.

Lo anterior significa que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy con respecto a la métrica $d(x,y)$ y como tenemos que (X,d) es completo existe un elemento $x^0 \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^0) = 0.$$

Las métricas d y $\tilde{d}$ son equivalentes en X por lo que $x_0 = x^0$, es decir, $x_0 \in X$. Por tanto, $X = G_0$♦

Lema 2.1.6 *Sea (X,d) un e.m.l. completo, con una métrica invariante d. Sea X_0 un subespacio lineal denso en X. Si X_0 es de tipo G_δ, entonces $X = X_0$.*

Demostración.

Si X_0 es G_δ, entonces

$$X_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

donde cada G_n es abierto.

Como X_0 es denso en X, también lo es cada G_n. Esto implica que los conjuntos $X - G_n$ son densos en ninguna parte; así, $X - X_0$ es un conjunto de la primera categoría y entonces X_0 es de la segunda categoría, pues X lo es.

Supongamos que el conjunto $X - X_0$ es no vacío y sea $x \in X - X_0$. Por hipótesis X_0 es un subespacio lineal, por lo que

$$x + X_0 \subset X - X_0.$$

Como la traslación es un homeomorfismo y X_0 es de la segunda categoría tenemos que $x + X_0$ también lo es, pero esto es una contradicción ya que todo subconjunto de un conjunto de la primera categoría es de la misma categoría.♦

Demostración del Teorema 2.1.4.

Sea $(Y, \tilde{d})$ la compleción de $(X, \tilde{d})$. Por lema 2.1.5 X es un conjunto G_δ denso en Y. Así que por lema 2.1.6 $X = Y$.♦

2.2 F-seminormas y F-espacios

Definición 2.2.1 *Una F-seminorma en X es una función real no negativa p que satisface las siguientes 5 condiciones:*

f1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *si* $x, y \in X$, *por tanto,* $p(x) = 0$;

f2. $p(ax) = p(x)$ *para todo escalar* a *tal que* $|a| = 1$.

En las siguientes tres propiedades $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión escalar y* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión en* X *:*

f3. $\lim_{n\to\infty} p(a_n x) = 0$, *si* $x \in X$ *y* $a_n \to 0$;

f4. $\lim_{n\to\infty} p(a x_n) = 0$ *si* a *es un escalar y* $x_n \to 0$;

f5. $\lim p(a_n x_n) = 0$ *si* $x_n \to 0$ *y* $a_n \to 0$.

Si además $p(x) = 0$ *implica que* $x = 0$, *llamamos a* p *una F-norma y entonces usualmente se denota por* $\|\|$.

Definición 2.2.2 *Sea p una F-seminorma en X, entonces la colección formada por los subconjuntos*

$$\{x \in X : p(x) < \epsilon\},$$

con $\epsilon > 0$, forma una base de vecindades de 0 para una topología lineal de X. Al e.l.t. que tiene esta topología se le denota por (X, p) y es llamado un espacio $F-$seminormado.

Definición 2.2.3 *Decimos que una F-seminorma p en X es no decreciente o monótona si satisface*

$$p(ax) \leq p(x) \quad si\ 0 \leq a \leq 1\ y\ x \in X.$$

Proposición 2.2.4 *Para toda F-seminorma p en X se cumplen las siguientes propiedades*

1) *Sean* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X *y* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión escalar. Si se tiene* $p(x_n - x) \to 0$ *y* $a_n \to a$, *entonces* $p(a_n x_n - ax) \to 0$.

2) $|p(x) - p(y)| \leq p(x \pm y) \leq p(x) + p(y)$, *si* $x, y \in X$.

3) $\frac{1}{n}p(x) \leq p(\frac{1}{n}x)$ *y* $p(nx) \leq np(x)$ *para cada* $x \in X$ *y* $n \in \mathbb{N}$.

4) $p(|a|x) = p(ax)$ *si* a *es un escalar y* $x \in X$.

5) *Si* $p(x) > r > 0$, *entonces existe* $0 < t < 1$ *tal que* $p(tx) = r$.

Si p es monótona, entonces se cumplen las siguientes dos propiedades

6) $p(ax) \leq p(bx)$ *si* $x \in X$ *y* $0 \leq a \leq b$.

7) $p(ax) = 0$ *y* $p(x) \neq 0$ *implican* $a = 0$.

Si p es una F—norma monótona, entonces

8) $\lim_{n\to\infty} p(a_n x_n) = 0$ *y* $p(x_n) \geq \epsilon$ *para algún* $\epsilon > 0$ *y todo* $n \geq 1$ *implica* $a_n \to 0$.

9) $\lim_{n\to\infty} p(a_n x) = 0$ *y* $x \neq 0$ *implica* $a_n \to 0$.

10) $(p(a_n x))_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy y* $x \neq 0$ *implica* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy.*

Demostración.

1) Por la desigualdad del triángulo

$$p(a_n x_n - ax) \leq p((a_n - a)(x_n - x)) + p((a_n - a)x) + p(a(x_n - x)).$$

Usando f3. - f5. de la Definición 2.2.1 tenemos que el lado derecho tiende a cero , de donde se sigue la afirmación.

2), 3) y 4) se siguen inmediatamente de f1. y f2.

5) Las funciones $t \to tx$ de $\mathbb{F}$ en (X,p) y $y \to p(y)$ de (X,p) en $\mathbb{R}$ son continuas. Por tanto, la función

$$\begin{matrix} \mathbb{F} \to \mathbb{R} \\ t \to p(tx) \end{matrix}$$

es continua. De f3. se sigue que existe un natural n tal que

$$p\left(\frac{x}{n}\right) < r < p(x)$$

Por el teorema del valor intermedio existe $\frac{1}{n} < t < 1$ tal que $p(tx) = r$.

6) Supongamos que p es monótona. Si $b = 0$ el resultado se sigue inmediatamente. Así, supongamos que $b > 0$, entonces $0 < \frac{a}{b} \leq 1$ y por la monotonía de p se tiene

$$p(\frac{a}{b}y) \leq p(y) \text{ para todo } y \in X,$$

en particular para $y = bx$; de donde se obtiene el resultado.

7) Supongamos que $a \neq 0$, Entonces

$$p(ax) = p(|a|\,x) \geq \frac{1}{n}p(x) > 0 \text{ para un natural } n \text{ suficientemente grande}$$

lo que contradice la hipótesis

En lo que sigue, supongamos que p es una F—norma monótona.

8) Por 4) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} p(|a_n|\,x_n) = 0$$

Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a cero entonces $|a_n| \geq \frac{1}{k}$ para algún $k \geq 1$ y una infinidad de índices n. De 6) y 3) se sigue

$$p(|a_n|\,x_n) \geq p\left(\frac{1}{k}x_n\right) \geq \frac{1}{k}\epsilon$$

para una infinidad de índices n, lo que contradice $p(|a_n|\,x_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$.

9) Es consecuencia inmediata de 8).

10) Por 4) se tiene que $(p(|a_n|\,x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$ sea $N > 0$ tal que

$$p(|a_n - a_N|\,x) < p(\epsilon x) \tag{2.5}$$

si $n \geq N$. Por tanto, $|a_n - a_N| < \epsilon$ si $n \geq N$, pues en caso contrario, por 5), no se cumple 2.5. ◆

Proposición 2.2.5 *Si una función $\rho : X \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad*

$$\rho(ax) \leq \rho(x) \text{ si } 0 \leq a \leq 1 \text{ y } x \in X.$$

y las propiedades f1. y f2. de la definición de F - seminorma, entonces

$$\rho(tx) \leq (|t| + 1)\,\rho(x)$$

para cada escalar t y $x \in X$. En particular toda F-seminorma monótona tiene esta propiedad.

Demostración.

Observamos que debido a las hipótesis son válidas las propiedades 2) a 4) de la proposición anterior.

Con $[r]$ denotamos, como es costumbre, al mayor entero menor o igual que el real r. Sean $x \in X$ y $n = [|t| + 1]$.

Entonces

$$\frac{1}{n}\rho(|t|\,x) \leq \rho\left(\frac{|t|}{n}x\right) \leq \rho(x)$$

Así,

$$\rho(tx) = \rho(|t|\,x) \leq \rho(x) \leq (|t| + 1)\,\rho(x)\,.\blacklozenge$$

Proposición 2.2.6 *Una función real no negativa p definida en X es una F-seminorma monótona en X si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones para $x, y \in X$ y $t \in \mathbb{F}$*

F1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

F2. $p(ax) \leq p(bx)$ *si* $|a| \leq |b|$,

F3. $\lim\limits_{n\to\infty} p(\frac{1}{n}x) = 0$ *para cualquier* $x \in X$.

Demostración.

Sea p una F-seminorma monótona.

Por la definición de F-seminorma y por 4) y 6) de la Proposición 2.2.4 , p satisface F1 y F2. Y F3 se sigue de f3 de la Definición 2.2.1.

Recíprocamente, sea p una función real no negativa que satisface las tres condiciones anteriores.

La condición f1 coincide con F1; de F2 se sigue fácilmente f2.

Sólo resta demostrar que p satisface f3., f4. y f5.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión escalar tal que $a_n \to 0$ y $x \in X$. Supongamos que $p(a_n x) \nrightarrow 0$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $p(a_{n_k}x) > \epsilon$ para una subsucesión $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Por F3. existe n_0 tal que $p(\frac{1}{n_0}x) < \epsilon$. Sea k suficientemente grande para que $|a_{n_k}| < \frac{1}{n_0}$, entonces por F2. $p(a_{n_k}x) \leq p(\frac{1}{n_0}x) < \epsilon$, lo que contradice la elección de $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Con esto queda probado f3.

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $p(x_n) \to 0$ y sea $a \in X$.

Por la Proposición 2.2.5, se tiene

$$p(ax_n) \leq (|a| + 1)\,p(x_n),$$

de donde, $p(ax_n) \to 0$. Así, f4. también se satisface.

Finalmente, sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares que tienden a cero y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $p(x_n) \to 0$.

Sea $\epsilon > 0$, existe N tal que

$$\begin{aligned} |a_n| &< 1 \text{ y} \\ p(x_n) &< \epsilon , \end{aligned}$$

si $n \geq N$

Entonces

$$p(a_n x_n) \leq p(x_n) < \epsilon \text{ si } n \geq N,$$

y (f5) se tiene.◆

Observación. Esta proposición continúa siendo valida si F2 y F3 se sustituyen por

F2′. $p(tx) \leq p(x)$ si $|t| \leq 1$ y $x \in X$ y

F3′. $\lim_{t\to 0} p(tx) = 0$ para cualquier $x \in X$.

Lema 2.2.7 *Existe una relación biunívoca entre las F-normas y las métricas invariantes en X; es decir, cada F-norma $\|\|$ en X induce una métrica invariante dada por*

$$d(x,y) = \|x - y\| .$$

Y, por otro lado,

$$d(x,0) = \|x\|$$

es una F—norma, si $d(x,y)$ es una métrica invariante en X.

Definición 2.2.8 *Un F^*-espacio es un espacio lineal X equipado con una F-norma $\|\|$, y en este caso se denota por $(X, \|\|)$. Con la distancia invariante inducida por $\|\|$ el espacio $(X, \|\|)$ es métrico lineal y si es completo entonces es llamado un F -espacio. Un F—espacio localmente convexo es llamado un espacio de Frechet.*

Teorema 2.2.9 *Todo espacio métrico lineal (completo) (X,d) es un F^*-espacio (F-espacio).*

Demostración. Por los teoremas 2.1.3 y 2.1.4 X tiene una métrica invariante $\tilde{d}$ equivalente a d, y además $\left(X, \tilde{d}\right)$ es completo si (X,d) lo es.◆

Definición 2.2.10 *Se dice que dos F-seminormas p y q son equivalentes si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se satisface*

$$p(x_n) \to 0 \Leftrightarrow q(x_n) \to 0$$

Lo anterior significa que las pseudométricas inducidas en X por éstas normas son equivalentes.

Proposición 2.2.11 *En todo F^*-espacio $(X, \|\|)$ cualquier norma equivalente a $\|\|$ es una función continua.*

Ejemplo 2.2.12 *En el ejemplo 1.1.53, tenemos que $(\omega, \sigma\{P_n\})$ es un e.l.t. metrizable, y que la métrica*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|P_n(x-y)|}{1+|P_n(x-y)|},$$

genera su topología. Además, es claro que $d(x,y)$ es una métrica invariante. Así, $\|x\| = d(x,0)$ es una $F-$norma en ω. Más aún, $(\omega, \|\|)$ es un $F-$ espacio y por la Proposición (1.3.15), $(\omega, \sigma(\omega, \Psi))$ es un $F-$espacio.

En efecto, sea $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ω, donde $x_k = (x_{kn})_{n=1}^{\infty}$ para cada $k \geq 1$. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y $U_n = \{x \in \omega : |P_n(x)| < \epsilon\}$, entonces existe $N > 0$ tal que si $k, k' \geq N$ se tiene

$$x_k - x_{k'} \in U_n,$$

esto es,

$$|P_n(x_k - x_{k'})| < \epsilon,$$

de donde $(x_{kn})_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $n \geq 1$, por lo que existe un número real, digamos x_n, tal que $x_{kn} \to x_n$, cuando $k \to \infty$, en $\mathbb{R}$. Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$; se puede comprobar que $x_k \to x$ en ω y por tanto, $(\omega, \|\|)$ es un $F-$ espacio.◆

Teorema 2.2.13 *Sea $(X, \|\|)$ un F^*-espacio. Entonces la F-norma*

$$\|x\|^{\sim} = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|tx\|$$

es equivalente a $\|\|$ y es monótona.

Demostración.

Es claro de su definición que $\|x\|^{\sim}$ satisface la condición de monotonía

$$\|ax\|^{\sim} \leq \|x\|^{\sim} \text{ si } 0 \leq a \leq 1 \text{ y } x \in X. \tag{2.6}$$

y además, $\|x\|^{\sim} \geq \|x\|$ para todo $x \in X$.

Probaremos ahora que $\|x\|^{\sim}$ es una F-norma:

Es inmediato que $\|x\|^{\sim} = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$\|x+y\|^{\sim} = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|t(x+y)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|tx\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|ty\| = \|x\|^{\sim} + \|y\|^{\sim}.$$

Si $|a| = 1$, entonces

$$\|ax\|^{\sim} = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|tax\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|tx\| = \|x\|.$$

Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares que tiende a cero. Para cada $x \in X$ la función de t, $\|tx\|$, es continua y como el intervalo $[0,1]$ es compacto, entonces para cada $n \geq 1$ existe $0 \leq b_n \leq 1$, tal que

$$\|t_n x\|^{\sim} = \|t_n b_n x\|.$$

La sucesión $(t_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, así $\|t_n x\|^{\sim} \to 0$.

Sea $\|x_n\|^{\sim} \to 0$. Como ya vimos que $\|\|^{\sim}$ satisface f1. y f2. de la definición de F-seminorma y la desigualdad (2.6) tenemos por la Proposición 2.2.5

$$\|tx_n\|^{\sim} \leq (|t|+1)\|x_n\|^{\sim}$$

De donde $\|tx_n\|^{\sim} \to 0$.

Finalmente sean $t_n \to 0$ y $\|x_n\|^{\sim} \to 0$. Como antes podemos encontrar una sucesión $(t_n b_n)_{n=1}^{\infty}$, $0 \leq b_n \leq 1$, tal que para cada n se cumple

$$\|t_n x_n\|^{\sim} = \|t_n b_n x_n\|.$$

De nuevo la sucesión $(t_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a cero y como $\|x_n\|^{\sim} \geq \|x_n\|$ para todo n, tenemos

$$\|t_n b_n x_n\| \to 0.$$

Por tanto, $\|t_n x_n\|^{\sim} \to 0$.

Por último veremos que $\|\|^{\sim}$ es equivalente a $\|\|$.

De $\|x\|^{\sim} \geq \|x\|$ para todo $x \in X$, se sigue que si una sucesión converge a 0 según $\|\|^{\sim}$ entonces también converge a 0 según $\|x\|$.

Supóngase ahora que la implicación contraria es falsa, es decir, que existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|x_n\| \to 0$ y $\|x_n\|^{\sim} \geq \epsilon$ para alguna $\epsilon > 0$ y todo $n \geq 1$. Para cada $n \geq 1$ existe $0 \leq a_n \leq 1$, tal que

$$\|x_n\|^{\sim} = \|a_n x_n\|.$$

Podemos suponer sin perdida de generalidad que $a_n \to a$ para alguna a, ya que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Por la continuidad del producto por escalares tenemos que

$$\|x_n\|^{\sim} = \|a_n x_n\| \to 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\|x\|^{\sim}$ y $\|x\|$ son equivalentes.♦

Proposición 2.2.14 *Sea $(X, \|\|)$ un F^*-espacio(F-espacio) y Y un subespacio lineal de X. El espacio cociente X/Y es un F^*-espacio (F-espacio) con la F-norma definida como*

$$\|\overline{z}\| = \inf\{\|z\| : z \in \overline{z}\}.$$

para cada $\overline{z} \in X/Y$.

Proposición 2.2.15 *Sean $(X_i, \|\|_i), i = 1, ..., n$, un colección de n F^*-espacios (F-espacios). El espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es un F^*-espacio (F-espacio) con la F-norma*

$$\|(x_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i.$$

2.3 Las topologías lineales y las F-seminormas

El resultado principal de esta sección establece que toda topología lineal en X está generada por una familia de F-seminormas monótonas [5].

Proposición 2.3.1 *Sea Γ una colección no vacía de F-seminormas monótonas en X. La topología τ_Γ, en X que tiene por subbase a los conjuntos de la forma*

$$\{x \in X : q(x) < \epsilon\}$$

donde $q \in \Gamma$ y $\epsilon > 0$ es un a topología lineal y es llamada la topología generada por la familia Γ de $F-$seminormas. A X con esta topología se le denota por (X, τ_Γ) o bien (X, Γ).

Demostración.
Sean $q_1, q_2, ..., q_n \in \Gamma$ y $\epsilon > 0$. Basta comprobar que los conjuntos de la forma

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : q_i(x) < \epsilon\} \tag{2.7}$$

satisfacen las propiedades i), ii) y iii) de la proposición 1.1.14.

i) si U y V son de la forma (2.7) es claro que $U \cap V$ vuelve a ser de esa misma forma.

ii) Sea U como en (2.7);

Si

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{x \in X : q_i(x) < \frac{\epsilon}{2}\right\},$$

entonces

$$V + V \subset U.$$

iii) U es balanceado ya que si a un escalar, con $|a| \leq 1$, entonces

$$aU \subset U,$$

ya que

$$q_i(ax) < q_i(x) < \frac{\epsilon}{2},$$

por ser cada q_i una F-seminorma monótona.

Para ver que U es absorbente notamos que para $x \in X$ y cada $i = 1, ..., n$ se tiene

$$q_i(\frac{1}{n}x) \to 0,$$

así que existe $N > 0$, $1 \leq i \leq n$, tal que

$$q_i(\frac{1}{n}x) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ si } n > N,$$

para toda $1 \leq i \leq n$, es decir, $x \in nU$ si $n > N$.

Por todo lo anterior τ_Γ es una topología lineal en X.◆

En lo que sigue suponemos que Γ es una colección no vacía de F-seminormas monótonas en X

Corolario 2.3.2 *τ_Γ es la topología lineal más débil de X tal que cada $q \in \Gamma$ es continua. Es de Hausdorff si, y sólo si, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, hay una $q \in \Gamma$ tal que $q(x) > 0$.*

Definición 2.3.3 *Decimos que una familia Γ de F -seminormas es dirigida si todo subconjunto finito de Γ tiene una cota superior en Γ con respecto al orden puntual de la funciones reales.*

Proposición 2.3.4 *Si Γ es una familia dirigida de F -seminormas monótonas, entonces los conjuntos de la forma*

$$\{x \in X : q(x) < \epsilon\},$$

para alguna $q \in \Gamma$ y $\epsilon > 0$ forman una base local en (X, τ_Γ).

Demostración.
Sean $q_1, ..., q_n \in \Gamma$ y $\epsilon > 0$, como Γ es dirigida existe $q \in \Gamma$ tal que

$$q(x) \geq q_i(x), \text{ para toda } x \in X, \ i = 1, .., n,$$

de donde

$$\{x \in X : q(x) < \epsilon\} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : q_i(x) < \epsilon\},$$

y como los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : q_i(x) < \epsilon\}$$

forman una sub-base local de (X, τ_Γ), se tiene la afirmación.◆

Proposición 2.3.5 *Si Γ es una familia de F -seminormas monótonas, entonces la familia $\bar{\Gamma}$ de todos los máximos de subconjuntos finitos, no vacíos, de Γ es una familia dirigida de F-seminormas monótonas en X.*

Demostración.
Sea $q \in \bar{\Gamma}$, esto es,

$$q(x) = \max\{q_i(x) : i = 1, ..., n\}, \text{ donde } q_1, ..., q_n \in \Gamma.$$

De acuerdo a la observación de la de la Proposición 2.2.6, basta ver que q satisface F1, F2′ F3′.

Sean $x, y \in X$,

$$q(x+y) = \max\{q_i(x+y) : i = 1, ..., n\} \leq \max\{q_i(x) + q_i(y) : i = 1, ..., n\} = q(x)+q(y),$$

de donde q satisface F1.

Sean ahora $x \in X$ y $a \in \mathbb{F}$, con $|a| \leq 1$, entonces

$$q(ax) = \max\{q_i(ax) : i = 1, ..., n\} \leq \max\{q_i(x) : i = 1, ..., n\} = q(x),$$

y por tanto q cumple también F2′.

Por último, sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$; como cada q_i es una F-seminorma, tenemos

$$\lim_{t \to 0} q_i(tx) = 0.$$

Así existe $\delta > 0$ tal que $q_i(tx) < \epsilon$ si $|t| < \delta$, $i = 1, ...n$. Entonces

$$q(tx) < \epsilon, \text{ si } |t| < \delta,$$

es decir,

$$\lim_{t \to 0} q(tx) = 0,$$

y q satisface F3$'$. Por tanto q es una F-seminorma monótona en X. Es además claro que $\bar{\Gamma}$ es dirigida..◆

Proposición 2.3.6 *Las topologías τ_Γ y $\tau_{\bar{\Gamma}}$ coinciden.*

Teorema 2.3.7 *Sea (X, τ) un e.l.t., Entonces la familia Γ de todas las $F-$seminormas monótonas y continuas en (X, τ) es dirigida y genera a τ, esto es, $\tau = \tau_\Gamma$. A esta familia dirigida Γ de $F-$seminormas monótonas que generan la topología τ la denotamos por D_τ.*

Demostración.

$\tau_\Gamma \leq \tau$ es inmediato del corolario 2.3.2.

Sea $\mathcal{V}_0$ una base de vecindades de cero en (X, τ). Sea $U \in \mathcal{V}_0$, al igual que en la demostración del Teorema 2.1.3 construyamos una sucesión $(U(n))_{n \in \mathbf{N}}$, con $U(n) = U + ... + U$ (n veces). Para $n \geq 1$ sea

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right) \in \mathcal{V}_0,$$

balanceada tal que

$$U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \subset U\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

si $n \geq 1$ (ver demostración del Teorema 2.1.3)

Sea r un número racional positivo con expresión diádica finita, esto es,

$$r = n + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_m}{2^m}$$

donde $a_i = 0$ o 1 para $i = 1, 2, ..., m$. Definimos

$$U(r) = U(n) + a_1 U(\frac{1}{2}) + a_2 U(\frac{1}{2^2}) + ... + a_m U(\frac{1}{2^m}),$$

$U(r)$ es una vecindad de cero balanceada, absorbente y que se satisface que para cualesquiera dos números diádicos p y r:

$$U(p) + U(r) \subset U(p + r). \tag{c3}$$

(ver demostración del Teorema 2.1.3)

Para $x \in X$, definimos

$$q_U(x) = \inf \{r \in \mathbb{Q}^+ : x \in U(r),\ r \text{ con expresión diádica finita}\}$$

Entonces la función $q_U : X \to \mathbb{R}^+$, está bien definida ya que U es balanceada y absorbente. Satisface además F2 de la Proposición 2.2.6, ya que $U(r)$ es balanceada para todo r. Para ver que satisface F3, usamos de nuevo que cada $U(r)$ es absorbente, esto es, para cada $x \in X$, existe n_0 tal que $x \in n_0 U(r)$ si $n \geq n_0$, de donde tenemos

$$q_U(\frac{1}{n}x) \leq q_U(\frac{1}{n_0}x) < r \text{ si } n \geq n_0,$$

así, $q_U(\frac{1}{n}x) \to 0$.

Por último sean $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Existen números diádicos p, r tales que

$$x \in U(p),\ y \in U(r), p \leq q_U(x) + \frac{\epsilon}{2}, \text{y } r \leq q_U(y) + \frac{\epsilon}{2},$$

de aquí tenemos y (2.3) tenemos

$$x + y \in U(p + r),$$

y por tanto,

$$q_U(x + y) \leq p + r \leq q_U(x) + q_U(y) + \epsilon,$$

de donde se sigue F1. Entonces q_U es una F-seminorma monótona en X.

Sea $\hat{\Gamma}$ la familia de las F-seminormas q_U. Para cada $\epsilon > 0$ tenemos que

$$\{x \in X : q_U(x) < \epsilon\} = \bigcup \{U(r) : r \text{ número diádico}, r < \epsilon\}.$$

Lo cual muestra que $\tau_{\hat{\Gamma}} \leq \tau$.

Sea $U \in \mathcal{V}_0$. Para $p < r$,

$$U(p) \subset U(p) + U(r - p) \subset U(r).$$

Entonces

$$\{x \in X : q_U(x) < 1\} \subset U(1) = U,$$

de donde $\tau \leq \tau_{\hat{\Gamma}} \leq \tau_\Gamma$. Observamos que bastan las $F-$seminormas q_U para obtener la topología τ.♦

Corolario 2.3.8 *Sea (X, τ) un e.l.t. (Hausdorff). Si τ tiene una base local de cero numerable, entonces puede ser generada por una sola $F-$seminorma ($F-$norma), esto es, τ es pseudometrizable (metrizable).*

Demostración.

Sea $(U_n)_{n=1}^\infty$ una base numerable de vecindades balanceadas de cero en la topología τ. Podemos suponer, sin perder generalidad, que las U_n forman una sucesión decreciente que satisface la siguiente condición:

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n, \text{ para todo } n \geq 1.$$

La construcción del teorema anterior, aplicada $aU_1(n) = U_1 + ... + U_1$ y $U_1\left(\frac{1}{2^n}\right) = U_{n+1}$ para $n \geq 0$, define una $F-$seminorma q_{U_1} continua en la topología τ y tal que

$$\{x \in X : q_{U_1}(x) < \epsilon\} = \bigcup \{U_1(r) : r \text{ número diádico}, r < \epsilon\}$$

para cada $\epsilon > 0$. En particular,

$$\{x \in X : q_{U_1}(x) < \epsilon\} \subset U_1(\epsilon)$$

si ϵ es un número diádico. Así,

$$\left\{x \in X : q_{U_1}(x) < \frac{1}{2^n}\right\} \subset U_{n+1}$$

para todo $n \geq 1$.

Por tanto, $\tau = \tau_{\{q\}}$, ya que (U_n) es base de cero en τ; de donde, τ es pseudometrizable, además si τ es de Hausdorff, entonces del corolario 2.3.2 se sigue que q debe ser una $F-$norma y entonces τ es metrizable.♦

Corolario 2.3.9 *Sea (X, τ) un e.l.t. (Hausdorff). τ tiene una base local de cero numerable si y sólo si τ es pseudometrizable (metrizable).*

Proposición 2.3.10 *Sea (X, τ) un F^*-espacio, con $F-$ norma $\|\|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por U_n a la envolvente convexa de $\left\{x : \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$. Entonces $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base local para la topología de Mackey $m(X, X')$. Consecuentemente $m(X, X') \leq \tau$ y $m(X, X')$ es pseudometrizable. Si X' separa puntos de X, entonces $m(X, X')$ es metrizable.*

Demostración.

Es fácil ver que $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface las condiciones i), ii) y iii) de la Proposición 1.1.14 y por tanto, es una base de vecindades de 0 para una topología localmente convexa τ_0 en X. Además, por definición M_n contiene a $\left\{x : \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$, para cada $n \geq 1$, y así cada U_n es también $\tau-$vecindad de cero, entonces τ_0 es más débil que τ.

Mostraremos ahora que $(X, \tau)' = (X, \tau_0)'$. Como $\tau_0 \leq \tau$, toda funcional lineal τ_0-continua es también $\tau-$continua. Sea f una funcional lineal $\tau-$continua en X, entonces es acotada en alguna vecindad $B_n = \left\{x : \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$, esto es, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \text{ para todo } x \in B_n.$$

Si $y \in U_n$, es decir, $y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$, con $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1, a_i \geq 0$ y $x_i \in B_n$; entonces tenemos

$$|f(y)| \leq \sum_{i=1}^{k} a_i |f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{k} a_i M = M,$$

y así f es también τ_0-continua; por tanto, $X' = (X, \tau_0)'$. Como τ_0 tiene una base numerable (X, τ_0) es pseudometrizable, por el corolario anterior, y, por el Corolario 1.3.24, (X, τ_0) es de Mackey. Así $\tau_0 = m(X, X')$.

La última afirmación se sigue de que $\sigma(X, X') \subset m(X, X')$ y $\sigma(X, X')$ es Hausdorff si y sólo si X' separa puntos de X.♦

Proposición 2.3.11 *Sea (X,τ) un e.l.t. metrizable y $M \subset X$ un subespacio. Entonces M es un subespacio* HB *si, y sólo si,* $m(X,X') \mid M = m(M,M')$.

Demostración.

Por la Proposición 2.3.10 $m(X,X')$ es una topología pseudometrizable y localmente convexa, por lo que su restricción, $m(X,X') \mid M$ a G es pseudometrizable y localmente convexa, de donde, por el Corolario 1.3.24 tenemos que $(M, m(X,X') \mid M)$ es de Mackey, esto es

$$m(X,X') \mid M = m(M,(M,m(X,X') \mid M)'),$$

así que sólo hay que probar que $M' = (M,\tau)' = (M,m(X,X') \mid M)'$.

Como $m(X,X') \leq \tau$ (Proposición 2.3.10), tenemos $m(X,X') \mid M \leq \tau \mid M$, de donde toda funcional lineal f en M que sea $m(X,X') \mid M-$continua es también $\tau \mid M-$continua. Sea $f \in M'$, como M es un subespacio HB existe $F \in X'$ que extiende a f, pero $m(X,X')$ y τ tienen el mismo dual, entonces F es también $m(X,X')-$continua y por tanto, f es $m(X,X') \mid M-$continua. Así

$$m(X,X') \mid M = m(M,M').$$

Inversamente, sea $f : M \to \mathbb{F}$ una funcional lineal $\tau \mid M-$continua, entonces es también $m(X,X') \mid M-$continua ya que $m(M,M')$ y τ_M definen el mismo dual en M y $m(X,X') \mid M = m(M,M')$. Como $(X,m(X,X'))$ es localmente convexo existe una extensión lineal y $m(X,X')-$continua de f, y por tanto $\tau-$continua. Así, M es un subespacio *HB*.

2.4 Tres principios básicos

En está sección se probarán, para $F-$espacios, 3 teoremas muy útiles y que son ampliamente conocidos en la teoría de los espacios de Banach, estos son: el principio de acotamiento uniforme, el teorema de la gráfica cerrada y el teorema de la función abierta. Las versiones aquí dadas se pueden encontrar en [13], [12] y [3], respectivamente.

Definición 2.4.1 *Una familia $\mathcal{F}$ de operadores lineales de un e.l.t. X en un e.l.t. Y es uniformemente acotada si*

$$\bigcup \{T(B) : T \in \mathcal{F}\}$$

es un subconjunto acotado de Y siempre que B es un subconjunto acotado de X.

Proposición 2.4.2 *Una familia $\mathcal{F}$ de operadores lineales de un e.l.t. X en un e.l.t. Y es equicontinua en* 0 *si y sólo si es uniformemente equicontinua en X.*

Proposición 2.4.3 *Si una familia $\mathcal{F}$ de operadores lineales de un F^*-espacio X en un e.l.t. Y es uniformemente acotada, entonces es equicontinua en* 0 *y por tanto, uniformemente equicontinua en X.*

Demostración.

Sea V una vecindad de 0 en Y. Existe $\lambda > 0$ tal que

$$\bigcup\{T(B) : T \in \mathcal{F}\} \subset \lambda V$$

donde B es la bola abierta unitaria en X. Por tanto, $\frac{1}{\lambda}B$ es una vecindad de 0 en X que satisface:

$$T(\frac{1}{\lambda}B) \subset V \text{ para todo } T \in \mathcal{F}.\blacklozenge$$

Teorema 2.4.4 (Principio de Acotamiento Uniforme para F-espacios) *Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de operadores lineales acotados de un F−espacio X en un e.l.t. Y. Supóngase que $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ es acotado para cada $x \in X$. Entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada y por tanto, uniformemente equicontinua en X.*

Demostración.

Sean B un subconjunto acotado de X y U una vecindad balanceada de cero en Y. Escojamos una vecindad balanceada de cero V en Y tal que

$$\overline{V+V} \subset U$$

y sea

$$S = \bigcap_{T\in\mathcal{F}} T^{-1}(\bar{V}),$$

S es cerrado por la continuidad de cada $T \in \mathcal{F}$ (Teorema 1.2.11). Sea $x \in X$, como $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ es acotado existe un entero positivo n_x tal que

$$\{T(x) : T \in \mathcal{F}\} \subset n_x V,$$

y así que $x \in n_x S$. De donde,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nS.$$

X es de la segunda categoría por ser X un espacio métrico completo. Entonces uno de los conjuntos cerrados nS, y por tanto S, debe tener interior no vacío. Sea x_0 un punto en el interior S° y $W = x_0 - S^\circ$; W es una vecindad de cero en X y para cada $T \in \mathcal{F}$ tenemos

$$T(W) \subset Tx_0 - T(S) \subset \bar{V} - \bar{V} \subset \overline{V+V} \subset U.$$

Como B es acotado en X, existe $t > 0$ tal que $B \subset tW$. Si $T \in \mathcal{F}$ entonces

$$T(B) \subset tT(W) \subset tU,$$

y por tanto,

$$\bigcup\{T(B) : T \in \mathcal{F}\} \subset tU.\blacklozenge$$

Corolario 2.4.5 *Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales acotados de un $F-$espacio X a un e.l.t. de Hausdorff Y tal que*

$$\lim_{n\to\infty} T_n x \text{ existe para cada } x \in X.$$

Sea $T : X \to Y$ dado por

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx.$$

Entonces T es un operador lineal acotado de X en Y.

Demostración.

Notamos que T está bien definida ya que Y es de Hausdorff.

La continuidad de las operaciones de espacio lineal de Y y la linealidad de cada T_n implica la linealidad de T. Sea B un subconjunto acotado de X. La convergencia de $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ para cada x en X implica que

$$\{T_n x : n \geq 1\} \text{ es acotado,}$$

para cada $x \in X$; por el teorema anterior se tiene que

$$\bigcup \{T_n(B) : n \geq 1\} \text{ es acotado.}$$

Entonces $T(B)$ como subconjunto del conjunto acotado

$$\overline{\bigcup \{T_n(B) : n \geq 1\}},$$

es también acotado, o sea, T es un operador acotado.◆

Teorema 2.4.6 (de la gráfica cerrada) *Sea T un operador lineal de un e.l.t. X a un $F-$espacio $(Y, \|\|)$ tal que satisface las siguientes dos condiciones:*

(i) la gráfica de T es cerrada en $X \times Y$, y

(ii) para cada V vecindad de cero en Y la cerradura de $T^{-1}(V)$ es una vecindad de cero en X.

Entonces T es continuo.

Demostración.

Por los teoremas 2.1.3 y 2.1.4 existe una métrica invariante d en Y que induce su topología y con respecto a la cual Y es completo. Sean $\epsilon > 0$ y

$$B_\epsilon = \{y \in Y : \|y\| < \epsilon\}.$$

Basta probarque

$$\overline{T^{-1}(B_\epsilon)} \subset T^{-1}(B_{2\epsilon}),$$

ya que por (ii) $\overline{T^{-1}(B_\epsilon)}$ es una vecindad de cero en X.

Sea $x \in \overline{T^{-1}(B_\epsilon)}$; construiremos por inducción una sucesión $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ en Y tal que

(a) $y_0 = 0, \|y_n - y_{n+1}\| < \frac{\epsilon}{2^{n-1}}$ $(n = 1, 2, ...)$, y

(b) $x \in \overline{T^{-1}\left(y_n + B_{\frac{\epsilon}{2^n}}\right)}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$.

Claramente y_0 satisface (a) y (b). Supóngase que $y_0, ..., y_n$ han sido escogidos. Por (ii)

$$\overline{T^{-1}\left(B_{\frac{\epsilon}{2^{n+1}}}\right)} \text{ es una vecindad de cero en } X,$$

y por (b) existe $z \in X$ tal que

$$T(z) \in y_n + B_{\frac{\epsilon}{2^n}}, \text{ y}$$
$$x \in z + \overline{T^{-1}\left(B_{\frac{\epsilon}{2^{n+1}}}\right)} \subset \overline{T^{-1}\left(T(z) + B_{\frac{\epsilon}{2^{n+1}}}\right)}.$$

Sea $y_{n+1} = T(z)$, entonces (a) y (b) se satisfacen.

Por (a), $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en Y, y por tanto convergente, digamos a y.

Para $n = 1, 2, ...$ sea

$$W_n = y_n + B_{\frac{\epsilon}{2^n}}.$$

Tenemos $y \in B_{2\epsilon}$, ya que

$$B_{2\epsilon} \supset y_m + B_\epsilon \text{si } m \geq 0$$

y

$$y \in y_m + B_\epsilon \text{ para } m \text{ suficientemente grande.}$$

Afirmamos que $(x, y) \in \overline{\text{graf}(T)}$. Sean U y V vecindades de x y y, respectivamente. Existe n suficientemente tal que

$$W_n \subset V,$$

de donde, por (b), se sigue que

$$x \in \overline{T^{-1}(W_n)} \subset \overline{T^{-1}(V)},$$

y, por tanto,

$$U \cap T^{-1}(V) \neq \emptyset$$

o equivalentemente,

$$(U \times V) \cap \text{graf}(T) \neq \emptyset,$$

y entonces $(x, y) \in \overline{\text{graf}(T)}$, que por hipótesis es igual a graf(T) o sea $y = T(x)$. Como $y \in B_{2\epsilon}$, tenemos

$$\overline{T^{-1}(B_\epsilon)} \subset T^{-1}(B_{2\epsilon}), \text{ para toda } \epsilon > 0,$$

así, T es continuo.◆

Corolario 2.4.7 *Si en el Teorema anterior X es de la segunda categoría, por ejemplo si X es también un $F-$ espacio, entonces basta que se cumpla (i) para que el teorema sea verdadero, pues en ese caso (ii) se satisface automáticamente.*

Demostración.

Mostraremos que (ii) del teorema anterior se satisface. Para cada vecindad U de cero en Y, sea V una vecindad balanceada de 0 en Y tal que $V - V \subset U$.

Por ser $T^{-1}(V)$ balanceado y absorbente tenemos

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT^{-1}(V)$$

Como X es de la segunda categoría se sigue que para alguna n el conjunto $\overline{nT^{-1}(V)}$ tiene interior no vacío. Por tanto, el interior de $\overline{T^{-1}(V)}$ es no vacío y

$$\overline{T^{-1}(V)} - \overline{T^{-1}(V)} \text{ es una vecindad de 0 en } X.$$

Así,

$$\overline{T^{-1}(V)} - \overline{T^{-1}(V)} \subset \overline{T^{-1}(V) - T^{-1}(V)} \subset \overline{T^{-1}(V - V)} \subset \overline{T^{-1}(U)},$$

de donde, $\overline{T^{-1}(U)}$ es una vecindad de cero en X.◆

Teorema 2.4.8 (de la función abierta) *Bajo un operador continuo y suprayectivo entre dos $F-$espacios, la imagen de todo conjunto abierto es un abierto, es decir, el operador es abierto.*

Demostración.

Sean X y Y dos $F-$espacios y $T : X \to Y$ una función lineal, continua y sobre.

Se mostrará primero que la cerradura $\overline{T(V)}$ de la imagen de cualquier vecindad de cero V en X es una vecindad de cero en Y.

Dada V, vecindad de 0 en X, existe U, vecindad de 0 en X, tal que $U - U \subset V$. Para cada $x \in X$, $\frac{x}{n} \to 0$; así, $x \in nU$ para n suficientemente grande. Entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU \text{ y } Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U).$$

Como Y es un $F-$espacio, él es de la segunda categoría y, por tanto, alguno de los conjuntos $\overline{nT(U)}$ contiene un conjunto abierto no vacío. Y debido a que la función $y \to ny$ es un homeomorfismo en Y, se tiene que $\overline{T(U)}$ contiene un abierto W de Y, no vacío. Así,

$$W - W \subset \overline{T(U)} - \overline{T(U)} \subset \overline{T(U) - T(U)} \subset \overline{T(V)}$$

como $0 \in W - W$ y $W - W$ es abierto, entonces esta diferencia es una vecindad de 0 en Y. Por tanto, la cerradura de la imagen de cualquier vecindad de 0 en X es una vecindad de 0 en Y.

Para cualquier $\epsilon > 0$, sean B_ϵ y S_ϵ las bolas abiertas con centro en 0, en X y Y, respectivamente.

Sea $\epsilon_0 > 0$ arbitrario y $(\epsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\epsilon_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i < \epsilon_0$. Entonces, por lo visto en el párrafo anterior, existe una sucesión $\{\eta_i : i = 0, 1, \ldots\}$ con $\eta_i > 0$, $\eta_i \to 0$, y tal que

$$\overline{T(B_{\epsilon_i})} \supset S_{\eta_i}. \tag{2.8}$$

Sea $y \in S_{\eta_0}$. Por (2.8)hay un elemento $x_0 \in B_{\epsilon_0}$, tal que

$$\|y - T(x_0)\| < \eta_1,$$

o sea, $y - T(x_0) \in S_{\eta_1}$ y de nuevo por (2.8) existe $x_1 \in B_{\epsilon_1}$ tal que

$$\|y - T(x_0) - T(x_1)\| < \eta_2.$$

Continuando este proceso, encontramos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \in B_{\epsilon_n}$, y

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\right\| < \eta_{n+1}, n = 0, 1, \dots \tag{2.9}$$

Sea $z_m = x_0 + \dots + x_m$. Para $m > n$, se tiene

$$\|z_m - z_n\| = \|x_{n+1} + \dots + x_m\| < \epsilon_{n+1} + \dots + \epsilon_m,$$

y por nuestra elección de las ϵ_i se sigue que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X, por lo que la serie $x_0 + x_1 + \dots$ converge a algún punto x de X tal que

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| 2\epsilon_0, \text{ es decir } x \in B_{2\epsilon_0}.$$

Como T es continua se sigue de 2.9 que $y = T(x)$. Así, $S_{\eta_0} \subset T(B_{2\epsilon_0})$. Entonces la imagen bajo T de cualquier bola abierta en X, con centro en 0, es una vecindad de cero en Y y por tanto es un operador continuo.

Corolario 2.4.9 *Un operador continuo y biyectivo entre dos $F-$espacios, tiene inversa continua.*

Corolario 2.4.10 *Si un espacio lineal es $F-$espacio bajo dos métricas, y una de las 2 topologías generadas es más débil que la otra, entonces las dos topologías coinciden, es decir las métricas son topológicamente equivalentes.*

Demostración.

Sean τ_1 y τ_2 las dos topologías para las cuales los espacios $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ son $F-$espacios. Si $\tau_1 \leq \tau_2$,consideremos la función identidad

$$(X, \tau_2) \to (X, \tau_1),$$

que por el corolario anterior es un isomorfismo; por tanto, $\tau_1 = \tau_2$.◆

2.5 Ejemplos

En está sección veremos algunos ejemplos de $F-$espacios que no son localmente convexos y fallan en tener la *PEHB* (ver Definición 1.2.37).

Ejemplo 1 $L_p = L_p[0,1]$, con $0 < p < 1$. Este es el espacio de funciones Lebesgue medibles en $[0,1]$ para las cuales

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt < \infty,$$

con la convención de identificar las funciones que son iguales casi donde quiera. $\|f\|_p$ es una $F-$norma en L_p con respecto a la cual es completo, o sea, L_p es un $F-$espacio. Más aún, esa norma es una *$p-$norma*, es decir, para todo escalar λ se cumple

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda|^p \|f\|_p.$$

Por esto L_p se dice que es un *espacio p-normado*.

Se puede probar que $\dim L_p = 2^{\aleph_0}$.

Proposición 2.5.1 *L_p es localmente acotado.*

Demostración.
Las bolas $B_r = \left\{f \in L_p : \|f\|_p < r\right\}$, $r > 0$, forman una base de vecindades de cero para la topología inducida por $\|f\|_p$ en L_p. Es fácil ver que

$$B_1 = r^{\frac{-1}{p}} B_r, \text{ para toda } r > 0,$$

de donde B_1 es acotada y por tanto, L_p es localmente acotado.

Proposición 2.5.2 *L_p no es localmente convexo.*

Demostración.
Sea $V \subset L_p$ un subconjunto, convexo, abierto y que contiene al cero. Entonces $B_r \subset V$ para alguna $r > 0$. Sea $f \in L_p$, como $1 - p > 0$ existe n tal que

$$\|f\|_p < rn^{1-p}.$$

Por la continuidad de $F(x) = \int_0^x |f(t)|^p\,dt$, existen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ tales que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p\,dt = \frac{1}{n}\|f\|_p, i = 1, \ldots n.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos

$$g_i(t) = \begin{cases} nf(t) & \text{si } x_{i-1} < t \le x_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que $g_i \in B_r$ para todo $i \geq 1$, ya que

$$\|g_i\|_p = \int_0^1 |g_i(t)|^p\,dt = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |nf(t)|^p\,dt = n^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p\,dt = n^{p-1}\|f\|_p < r,$$

así cada g_i está en V, que es convexo, y por consiguiente $f = \frac{1}{n}(g_1 + \ldots + g_n) \in V$. Por tanto, $V = L_p$, de donde L_p no es localmente convexo, ya que no contiene subconjuntos propios que sean convexos y abiertos.◆

Corolario 2.5.3 *Sea $T : L_p \to Y$ una función lineal continua de L_p en un espacio de Hausdorff localmente convexo Y. Entonces T es la transformación nula. O sea, L_p tiene dual trivial.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base local convexa de Y. Si $W \in \mathcal{B}$ entonces $T^{-1}(W)$ es convexo, abierto y no vacío en L_p. Entonces $T(L_p) \subset W$ para toda $W \in \mathcal{B}$ y por tanto $T \equiv 0$.♦

Corolario 2.5.4 *L_p no tiene la* PEHB.

Ejemplo 2 l_p, con $0 < p < 1$. Es el espacio de todas las sucesiones escalares, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$\|x\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Con la F-norma $\|x\|_p$ l_p es un $F-$espacio.

Proposición 2.5.5 *l_p es localmente acotado.*

Demostración.
Es idéntica a la demostración hecha para el caso L_p, de hecho en esa prueba lo que se uso es que la $F-$ norma es también una $p-$norma, lo cual en este caso también se tiene.♦

Proposición 2.5.6 *En l_p existen funcionales lineales continuas no triviales.*

Demostración. Sea P_n, la funcional lineal definida por $P_n\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) = x_n$, para cada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p$. Esta una funcional lineal continuas ya que para n fija y $\epsilon > 0$

$$|x_n| < \epsilon \text{ si } \|x\|_p < \epsilon^p.♦$$

Corolario 2.5.7 *l_p tiene la* PSP.

Nota 2.5.8 *Contrariamente al ejemplo de L_p, en este caso acabamos de ver que l_p contiene suficientes funcionales continuas como para separar puntos, sin embargo veremos más adelante que no tiene la* PEHB *y por tanto no es localmente convexo.*

Teorema 2.5.9 *Sea (X, τ) un $F-$espacio. X contiene un subespacio propio $\tau-$cerrado y débilmente denso (*PCDD*) si, y sólo si, X tiene una imagen lineal continua en un $F-$espacio de dimensión infinita con dual trivial.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que X contiene un subespacio PCDD , digamos K. Entonces X/K es un $F-$espacio y es imagen lineal continua de X bajo la función cociente. En el capítulo 4 se probará (Lema 4.1.7) que X/K es un espacio no trivial con dual trivial.

Supongamos que K tiene codimensión finita, entonces existe un espacio H de dimensión finita que es complemento algebraico de K. H es cerrado por ser de dimensión finita, y la topología en él inducida por τ es la de un espacio euclidiano.

Entonces H tiene una funcional lineal continua no trivial que puede ser extendida a X, definiéndola como cero en K, de manera continua, ya que H y K son cerrados; ésto contradice que K es débilmente denso (Proposición 1.3.8). Por tanto, K tiene codimensión infinita.

$\Leftarrow$) Sea Y $F-$ espacio de dimensión infinita y con dual trivial. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y suprayectivo. El subespacio $\ker T$ es un subespacio propio y cerrado de X. Afirmamos que $\ker T$ es débilmente denso. Supongamos lo contrario, entonces por la Proposición 1.3.8 existe $f \in X'$ no nula tal que $f(\ker T) = 0$. Sea $q : X \to X/\ker T$ la función cociente. La funcional lineal $\tilde{f}$ en $X/\ker T$ dada por la fórmula

$$\tilde{f} \circ q = f.$$

es continua y no nula en el cociente.

$X/\ker T$ es algebraicamente isomorfo a Y vía el operador S dada por la fórmula

$$S \circ q = T,$$

y como T es continuo se sigue que S también lo es y por tanto, S es un isomorfismo por el Teorema de la función abierta. Así,

$$S^{-1} \circ \tilde{f},$$

define una funcional lineal continua no trivial en Y, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, $\ker T$ es débilmente denso.♦

Teorema 2.5.10 *Todo espacio $p-$normado, con $0 < p < 1$, completo y separable es imagen lineal continua de l_p.*

Demostración.

Sea $(Y, \|\|)$ un espacio $p-$normado completo y separable; en particular Y es un $F-$espacio. Sea

$$A = \{e_n : n \geq 1\},$$

un subconjunto denso de $B = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$. Si $z = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p$ y n y k son enteros positivos, entonces

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=n}^{n+k} z_j e_j\right\| &\leq \sum_{j=n}^{n+k} \|z_j e_j\| = \sum_{j=n}^{n+k} |z_j|^p \|e_j\| \\ &\leq \sum_{j=n}^{n+k} |z_j|^p,\end{aligned}$$

por tanto, la sucesión

$$\left(\sum_{j=1}^{n} z_j e_j\right)_{n=1}^{\infty} \text{ es de Cauchy en } Y \text{ y converge a un elemento } \sum_{j=1}^{\infty} z_j e_j.$$

Definamos $T : l_p \to Y$ como

$$T(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j e_j,$$

de donde,

$$\|T(z)\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} z_j e_j\right\| = \|z\|_p,$$

y por tanto T es continua.

Afirmamos que $T(l_p) = Y$. Por f3. de la definición de $F-$seminorma, dado $y \in Y$ existe un escalar $s > 0$ tal que $\|sy\| \leq 1$; por consiguiente, para probar nuestra afirmación basta probar que dado $y \in Y$, con $\|y\| \leq 1$, existe $x \in l_p$ tal que $T(x) = y$. Como A es denso en B existe un índice n_0 tal que

$$\|y - e_{n_0}\| \leq 2^{-p},$$

entonces $y - e_{n_0} \in \frac{1}{2}B$ ya que $\|2(y - e_{n_0})\| \leq 2^p \|y - e_{n_0}\| \leq 1$.

Como $\frac{1}{2}B$ contiene como subconjunto denso a $\frac{1}{2}A$, existe un índice n_1 tal que

$$\left\|y - e_{n_0} - \frac{1}{2}e_{n_1}\right\| \leq 4^{-p} = (2^2)^{-p}.$$

Al continuar inductivamente este proceso obtenemos una sucesión $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ tal que

$$\left\|y - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} e_{n_i}\right\| \leq 2^{-(k+1)p}.$$

La sucesión $x = (z_n)_{n=0}^{\infty}$, con $z_{n_j} = \frac{1}{2^j}$ para $j \geq 1$ y $z_n = 0$ para $n \neq n_j$, pertenece a l_p y

$$T(x) = y. \blacklozenge$$

Nota 2.5.11 *Como veremos en el capítulo 4, un $F-$espacio contiene un subespacio* PCDD *si, y sólo si, no tiene la* PAHB, *que es una propiedad de extensión más débil que la* PEHB. *Por tanto, que un $F-$espacio contenga este tipo de subespacio implica que no tiene la* PEHB, *de ahí la parte final del siguiente*

Corolario 2.5.12 *l_p, con $0 < p < 1$, contiene subespacios* PCDD *y por tanto no tiene la* PEHB.

Demostración.

L_p es un $F-$espacio, separable, $p-$normado, por lo que por el teorema anterior existe un operador lineal continua de l_p sobre L_p. Como L_p es de dimensión finita y tiene dual trivial, se sigue por Teorema 2.5.9 que l_p contiene subespacios *PCDD*.◆

Corolario 2.5.13 *l_p no es localmente convexo.*

Demostración.

Sabemos que todo espacio no loacalmente convcexo tiene la *PEHB*.◆

Corolario 2.5.14 *Todo $F-$espacio que tiene a l_p, con $0 < p < 1$, como imagen lineal continua contiene subespacios* PCDD.

Demostración.
Sea Y un $F-$espacio y supongamos que existe $T : Y \longrightarrow l_p$ lineal continua y sobre. Al igual antes usamos el hecho de que existe un operador$T' : l_p \longrightarrow L_p$ lineal, continua y sobre. Considerando $S = T' \circ T : Y \rightarrow L_p$ el resultado se sigue del Teorema 2.5.9.♦

Ejemplo 3 H^p, con $0 < p < 1$. Este es el espacio de funciones analíticas en el disco unitario, tales que

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right) < \infty.$$

Con la F-norma $\|f\|_{H^p}$, H^p es un $F-$espacio.

Como puede verse en el Libro de Duren [4], H^p con $0 < p < 1$ es un $F-$espacio no localmente convexo. Además en este libro se ve de dos formas distintas que H^p contiene subespacios *PCDD*, en la primera de éstas, tales subespacios se construyen directamente y en la segunda se da una transformación lineal continua sobre l_p, y se aprovecha el Corolario 2.5.14 para concluir que H^p contiene este tipo de subespacios, lo que, como habíamos mencionado, implica que H^p con $0 < p < 1$ no tiene la *PEHB*.

Hay otros ejemplos de $F-$espacios, distintos a los aquí dados, que son no localmente convexos y fallan en tener la *PEHB*. Sin embargo, estos no son tan conocidos e interesantes; a este respecto se puede consultar [18], de Shapiro.

Capítulo 3

Sucesiones básicas en F-espacios

Este capítulo es el primero de los que constituyen la parte central de este trabajo, aquí daremos las definiciones y propiedades relevantes sobre bases y sucesiones básicas (ver [6]) y principalmente desarrollaremos el artículo [9] de N.J. Kalton en el cual se da una forma de construir sucesiones básicas en F^*-espacios bajo ciertas condiciones, lo que se utiliza más adelante para demostrar la existencia de estas sucesiones en $F-$espacios no minimales. En la última sección veremos varias aplicaciones de los resultados mencionados arriba, entre éstas destaca lo que ya hemos anunciado en el prólogo, es decir, que *todo $F-$espacio con la PEHB es localmente convexo.*

3.1 Bases y sucesiones básicas

Definición 3.1.1 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un e.l.t. (X,τ) es llamada una base topológica (b.t.) si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{F}$ tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

A cada b.t. (x_n) en (X,τ) podemos asociarle la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en X^*, donde

$$f_n(x) = a_n \ si \ x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Por lo que en este caso, para cada $x \in X$ podemos escribir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n$$

Cada f_n es llamado un coeficiente funcional (asociado a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$).

Claramente $\{x_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema biortogonal, es decir, $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker).

Para referirnos a una b.t $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un e.l.t. X , a veces escribiremos $\{x_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ para resaltar que los coeficientes funcionales asociados a la b. t. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ son los f_n.

Definición 3.1.2 *Sea $\{x_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una b. t. para un e.l.t. X , Para cada $n \geq 1$ definimos el operador*

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i,$$

al que llamamos la $n-$ésima proyección asociada a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, o simplemente la proyección $n-$ésima.

Definición 3.1.3 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un e.l.t. (X, τ) se dice que:*

i) es w-linealmente independiente (w-l.i.) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$, donde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbb{F}$, implica $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

ii) w-genera un subespacio lineal Y de X si cada $y \in Y$ se puede expresar como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ para alguna sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{F}$.

Proposición 3.1.4 *Una sucesión en un e.l.t. (X, τ) es una b.t. si, y sólo si, es w-l.i. y w-genera a X.*

Definición 3.1.5 *Una base topológica $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un e.l.t. (X, τ) se llamará una base de Schauder (b.S.), si cada $f_n \in X'$.*

Ejemplo 3.1.6 *Consideremos el $F-$espacio $(\omega, \|\|)$ de todas las sucesiones reales (Ejemplo 1.1.47) y la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $e_n = \left(\overbrace{0, ...0, 1}^{n}, 0, ...\right)$. Tomemos $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ en ω, para cualesquiera dos enteros positivos k y m se tiene*

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} x_n e_n - x\right\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

de donde, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ converge a x, es decir $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base topológica de ω.

Proposición 3.1.7 *Todo $F-$espacio con base es separable.*

Definición 3.1.8 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un e.l.t. (X, τ) es llamada:*

(a) Completa en X si $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$, donde $[x_n]_{n=1}^{\infty} \equiv \overline{\langle x_n : n \geq 1 \rangle}$ y $\langle x_n : n \geq 1 \rangle$ es el subespacio lineal generado por $\{x_n : n \geq 1\}$, y;

(b) Schauder básica (S.b.) [resp. básica)] si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una b.S. [resp. b.t.] de $[x_n]_{n=1}^{\infty}$,

En algunas fuentes una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es llamada una sucesión básica si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una b.t. de la cerradura de $\langle x_n : n \geq 1 \rangle$ en la compleción de X , esto facilita el enunciado de varios resultados, pero la consideramos menos natural, por eso escogemos la definición aquí dada.

(c) *Regular Schauder básica (S.b.) [resp. regular básica)] si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es Schauder básica (S.b.) [resp. básica)] y está alejada de* 0*, es decir, existe una vecindad* V *de* 0 *tal que* $x_n \notin V$ *para todo* $n \geq 1$.

Proposición 3.1.9 *Sea* (X, τ) *un e.l.t. con base* $(x_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$. X *es isomorfo (lineal y topológicamente) al espacio de sucesiones*

$$Y = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ en } \mathbb{F} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge en } X \right\} =$$
$$= \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ en } \mathbb{F} : f_n(x) = a_n \text{ para algún } x \in X \text{ y todo } n \geq 1\},$$

cuando en éste se considera la topología de identificación determinada por el isomorfismo lineal $u : X \to Y$ *dado como* $u(x) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, *para* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. *La sucesión* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, *donde* $e_n = \left(\overbrace{0, ...0, 1}^{n}, 0, .. \right)$, *es una base topológica de* Y *que es de Schauder si, y sólo si,* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es de Schauder.*

Observamos que si $(X, \|\|)$ *es un* F^* *espacio con base, entonces la topología considerada en* Y *está dada por la* $F-$*norma* $\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_s = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|$.

Demostración

Para probar la última afirmación observamos que cada coeficiente funcional P_n asociado a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ puede escribirse como $f_n \circ u^{-1} = P_n$; así P_n es continua si, y sólo si, f_n es continua.◆

Lema 3.1.10 *Sea* $(X, \|\|)$ *un* F^*-*espacio con b. t.* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *Sea*

$$\|x\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|,$$

si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Entonces $\|\|_1$ es una $F-$norma en X y $\|x\| \leq \|x\|_1$.

Teorema 3.1.11 *Toda base topológica para un* $F-$*espacio es de Schauder.*

Demostración.

Por la proposición anterior podemos tomar a X como un espacio de sucesiones con base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y con su topología generada por una $F-$norma monótona $\|\|$. Sea S_n la $n-$ésima proyección asociada a la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y $\|\|_1$ definida como en el lema anterior o sea,

$$\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|.$$

Entonces

$$\|S_n(x)\| \leq \|x\|_1 \text{ y } \|S_n(x)\|_1 \leq \|x\|_1, \tag{3.1}$$

para cada $n \geq 1$ y $x \in X$. Por consiguiente, cada S_n es continua en $(X, \|\|_1)$.

Sea $n \geq 1$ y $S_0 \equiv 0$,

$$P_n(x)\, e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x),$$

para todo $x \in X$. Así,

$$\|P_n(x)\, e_n\|_1 \leq 2\, \|x\|_1\,, \tag{3.2}$$

de aquí se sigue que P_n es continua en $(X, \|\|_1)$, ya que si $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ es un sucesión en X convergente a 0, entonces $\|P_n(z_m)e_n\|_1 \to 0$, cuando $m \to \infty$, lo que implica por 9) de la Proposición 2.2.4, $P_n(z_m) \to 0$, cuando $m \to \infty$.

Como $\|\| \leq \|\|_1$, basta probar que $(X, \|\|_1)$ es completo, ya que entonces tenemos, por el teorema de la función abierta, que la función

$$i : (X, \|\|_1) \to (X, \|\|) \text{ es un isomorfismo.}$$

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \|\|_1)$. Supongamos que para cada $n \geq 1$, $a_n = (a_{nk})_{k=1}^{\infty}$. Por (3.2)

$$\|P_k(a_n - a_m)\, e_k\|_1 \leq 2\, \|a_n - a_m\|_1\,,$$

para toda $k \geq 1$. Por 10) de la Proposición 2.2.4 la sucesión $(a_{nk})_{k=1}^{\infty} = (P_k(a_n))_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy para cada $k \geq 1$. Sea $\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk}$, para cada k. Mostraremos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \text{ converge en } (X, \|\|). \tag{3.3}$$

Para r, s enteros positivos tenemos

$$\left\|\sum_{k=r}^{s} \alpha_k e_k\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{s} a_{nk} e_k\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=r}^{s} a_{nk} e_k\right\|. \tag{3.4}$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $N > 0$ tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$\|(a_m - a_n)\|_1 < \epsilon,$$

Para $n > N$ tenemos

$$\left\|\sum_{k=r}^{s} a_{nk} e_k\right\| \leq \left\|\sum_{k=r}^{s} (a_{nk} - a_{Nk})\, e_k\right\| + \left\|\sum_{k=r}^{s} a_{Nk} e_k\right\| < 4\epsilon,$$

para r y s suficientemente grandes ya que.

Por 3.4, tomando el límite cuando n tiende a ∞, obtenemos

$$\left\|\sum_{k=r}^{s} a_k e_k\right\| \leq 4\epsilon \text{ para } r \text{ y } s \text{ suficientemente grandes,}$$

esto prueba 3.3, ya que $(X, \|\|)$ es completo.

Sea $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ y $\epsilon > 0$. Escojamos N como arriba; así, $n, m \geq N$ implica

$$\left\|\sum_{k=1}^{s} (a_{nk} - a_{mk})\, e_k\right\| \leq \|a_m - a_n\|_1 < \epsilon,$$

por lo que para cualquier $s \geq 1$ se tiene

$$\left\| \sum_{k=1}^{s} (a_{nk} - \alpha_k) e_k \right\| \leq \epsilon \text{ si } n \geq N,$$

entonces por la definición de $\|\|_1$ concluimos

$$\|a_n - \alpha\|_1 < \epsilon \text{ si } n \geq N,$$

de donde, $(X, \|\|_1)$ es completo.◆

Corolario 3.1.12 *Si (X, τ) es un $F-$espacio no nulo y $X' = \{0\}$, entonces X no tiene una base topológica.*

Corolario 3.1.13 *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de un $F-$espacio $(X, \|\|)$, entonces existe una norma $\|\|_1$ en X equivalente a $\|\|$ tal que para toda sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, se cumple*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|_1$$

si $n \geq m$.

Demostración.
Podemos suponer que $\|\|$ es monótona. La $F-$norma $\|\|_1$ en el espacio de sucesiones asociado a $(X, \|\|)$ (Proposición 3.1.9) considerada en la demostración del teorema anterior tiene la propiedad 3.1. Dicha $F-$norma determina en X la siguiente $\|x\|_1 = \sup \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$, y ésta tiene las propiedades requeridas.

Teorema 3.1.14 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un e.l.t. de Hausdorff (X, τ), con $x_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Sea D una familia dirigida de $F-$seminormas monótonas que genera la topología τ (Teorema 2.3.7). Si para cada $p \in D$ existen $q \in D$ y $M > 0$ tales que*

$$p\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) \leq Mq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right), \tag{3.5}$$

para cualesquiera dos naturales $m \leq n$ y escalares $a_1, ..., a_n$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión Schauder básica en (X, τ). En particular, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es completa en X, entonces es una base de Schauder de (X, τ).

Demostración.
La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es w-linealmente independiente, ya que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$, entonces por la desigualdad 3.5 concluimos que para cada $p \in D$ existen $q \in D$ y $M > 0$ tales que

$$p\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) \leq Mq\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = 0 \tag{3.6}$$

para todo $m \geq 1$. En particular $p(a_1 x_1) = 0$ para una $p \in D$ tal que $p(x_1) \neq 0$, por lo que $a_1 = 0$ (ver 6) de la Proposición 2.2.4). Supongamos que se ha probado que $a_m = 0$ para $m < n$. Entonces por la desigualdad 3.6 se tiene que $p(a_n x_n) = 0$ para una $p \in D$ tal que $p(x_n) \neq 0$ y entonces $a_n = 0$.

Para cada $n \geq 1$ sea $X_n = \langle x_i : 1 \leq i \leq n \rangle$ el subespacio lineal generado por $\{x_i : i = 1, ..., n\}$. Introducimos las funciones

$$P_{nm} : X_n \to X_m,$$

definidas como

$$P_{nm}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \text{si } n \leq m \\ \sum_{i=1}^{m} c_i x_i & \text{si } n > m \end{cases}$$

Por la desigualdad (3.5) P_{nm} es un operador lineal continuo para cualesquiera $n, m \geq 1$.

Sean

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ y } P_m : Y \to X_m \text{ dada por } P_m(x) = P_{nm}(x) \text{ si } x \in X_n,$$

cada P_m es también continua, por ser $\{X_n : n \geq 1\}$ una cubierta cerrada de Y. Denotemos por P_m a la única extensión continua a $\overline{Y} = [x_n]_{n=1}^{\infty}$ $(= \overline{\langle x_i : i \geq 1 \rangle})$ de P_m. Probaremos que $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión equicontinua en $\overline{Y}$. Sea $y \in \overline{Y}$, entonces existe una red (y_α) en Y tal que $y_\alpha \to y$.

Dado $p \in D$, sean $q \in D$ y $M > 0$ como en (3.5), entonces

$$p(P_m(y_\alpha)) \leq Mq(y_\alpha)) \text{ para todo } \alpha \text{ y } m \geq 1;$$

de la continuidad de P_m se obtiene

$$p(P_m(y_\alpha)) \to_\alpha p(P_m(y)).$$

Asimismo,

$$q(y_\alpha) \to_\alpha q(y),$$

y entonces

$$p(P_m(y)) \leq Mq(y) \text{ para todo } m \geq 1 \text{ y } y \in \overline{Y}; \tag{3.7}$$

de donde, $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ es equicontinua en 0 y por tanto, en $\overline{Y}$.

Sean $p \in D$, $y \in \overline{Y}$ y $\epsilon > 0$, existen $q \in D$ y $M > 0$ que satisfacen la desigualdad (3.7). Sea

$$r = \max\{p, q\};$$

existe $z \in X_N$, para alguna N, tal que $r(y - z) < \epsilon$, ya que $y \in \overline{Y}$ y $r \in D$.

Por (3.7) y ya que $P_n(z) = z$ si $n \geq N$, tenemos

$$\begin{aligned} p(P_n(y) - y) &\leq p(P_n(y) - z) + p(z - y) \\ &= p(P_n(y - z)) + p(z - y) \\ &\leq Mq(y - z) + p(z - y) \\ &\leq (M + 1)r(y - z) < (M + 1)\epsilon, \end{aligned}$$

para todo $n \geq N$, es decir, $\lim_n P_n(y) = y$ en $\overline{Y}$.

Definimos $f_i \in \overline{Y}'$ como $f_i(y)x_i = (P_i - P_{i-1})(y)$, donde $P_0 = 0$; entonces cada f_i es continua y $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Por consiguiente,

$$P_n(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y)x_i \text{ para } y \in \overline{Y} \text{ y } y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y)x_i$$

Por todo lo anterior $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de $\overline{Y} = [x_n]_{n=1}^{\infty}$, y por tanto, una sucesión Schauder básica de $(X;\tau)$. Por supuesto si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es completa tenemos entonces que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una b.S. de X.◆

Corolario 3.1.15 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de términos distintos de cero en un $F-$espacio $(X, \|\|)$ y supongamos que $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$. Entonces, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder en X si, y sólo si, existe una $F-$norma $\|\|_1$ equivalente a $\|\|$ para la que existe$M > 0$ tal que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|_1 \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_1 ,$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \geq m$, y escalares $a_1, ..., a_n$.

Demostración.
Esta se sigue del teorema anterior y el Corolario3.1.13.◆

Corolario 3.1.16 *Toda subsucesión de una sucesión básica en un $F-$espacio X es una sucesión básica en X.*

Definición 3.1.17 *Los coeficientes funcionales f_n y los operadores proyección S_n pueden definirse en $\langle x_n : n \geq 1\rangle$ para cualquier conjunto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ linealmente independiente de vectores en X, mediante las fórmulas*

$$f_n(x) = \lambda_n \;\; y \;\; S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

si $x \in \langle x_n : n \geq 1\rangle$ y $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$, donde, por supuesto, $\lambda_i = 0$ excepto para un número finito de índices i.

Corolario 3.1.18 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión l.i. en un e.l.t. metrizable (X, τ) y sea $[x_n]^{\sim}$ la cerradura de $Y = \langle x_n : n \geq 1\rangle$ en la compleción de (X, τ). Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una b.S. de $[x_n]^{\sim}$ si, y sólo si. la sucesión de proyecciones $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua en Y. Obsérvese que si $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua en Y, entonces cada S_n puede extenderse a $[x_n]^{\sim}$ de manera que la nueva familia, compuesta por las extensiones, es equicontinua.*

Demostración.
Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una b.S. de $[x_n]^{\sim}$. Cada S_n es continua ya que así lo son los coeficientes funcionales f_n asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que están definidos en $[x_n]^{\sim}$. Denotemos por S_n misma a la única extensión continua de S_n a $[x_n]^{\sim}$.

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una b.S. de $[x_n]^{\sim}$, se tiene que $S_n(x) \longrightarrow x$ para $x \in [x_n]^{\sim}$ de donde $\{S_n(x) : n \geq 1\}$ es acotado para cada $x \in [x_n]^{\sim}$ y, por el Teorema 2.4.4, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua en $[x_n]^{\sim}$ y por consiguiente, en Y.

Inversamente, supongamos que la sucesión de proyecciones $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua en Y. De nuevo denotamos por S_n misma a la única extensión continua de S_n a $[x_n]^{\sim}$. $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es entonces equicontinua en $[x_n]^{\sim}$. Las extensiones de los coeficientes funcionales f_i a $[x_n]^{\sim}$ forman una familia continua.

Sean $x \in [x_n]^{\sim}$ y $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $y_m \longrightarrow x$. Debido a la equicontinuidad de $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ tenemos

$$S_n(y_m) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y_m)x_i \longrightarrow S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i,$$

cuando $m \longrightarrow \infty$ y uniformemente en n.

Además para cada $y \in Y$ y cada $n \geq 1$ tenemos, $S_n(y) \longrightarrow y$, en particular $S_n(y_m) \longrightarrow y_m$, cuando $n \longrightarrow \infty$, para cada $m \geq 1$.

Sea $\epsilon > 0$, elijamos M y N positivos tales que

$$\|y_M - x\| < \frac{\epsilon}{3} \text{ y } \|S_n(y_M) - S_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3} \text{ para todo } n \geq 1$$

y

$$\|S_n(y_M) - y_M\| < \frac{\epsilon}{3}, \text{ si } n \geq N.$$

Entonces,

$$\|S_n(x) - x\| \leq \|S_n(y_M) - S_n(x)\| + \|S_n(y_M) - y_M\| + \|y_M - x\| < \epsilon$$

si $n \geq N$. Por tanto, $S_n(x) \longrightarrow x$ de donde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder en $[x_n]^{\sim}$.◆

Proposición 3.1.19 *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica regular en la compleción de un F^*−espacio (X,τ), entonces la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funcionales asociadas es equicontinua en $\langle x_n : n \geq 1\rangle$.*

Demostración.

Sea $\|\|$ la F−norma monótona que define a τ. Por el Corolario 3.1.18 se tiene que las proyecciones $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$, para $n \geq 1$ y $x \in \langle x_n : n \geq 1\rangle$ forman una familia equicontinua en $\langle x_n : n \geq 1\rangle$. Supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ no es equicontinua en $\langle x_n : n \geq 1\rangle$; entonces existe un natural r tal que para todo $\delta > 0$ existen $x_\delta \in \langle x_n : n \geq 1\rangle$ y $n_\delta \geq 1$ tales que

$$\|x_\delta\| < \delta \text{ y } |f_{n_\delta}(x_\delta)| \geq \frac{1}{r};$$

Por ser $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ regular, existe $\lambda > 0$ tal que $\|x_n\| > \lambda$ para todo $n \geq 1$; y en vista de la equicontinuidad de $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ existe $\delta_0 > 0$ tal que $\|S_n(x)\| < \frac{\lambda}{2r}$ si $\|x\| < \delta_0$ y para todo $n \geq 1$. Así,

$$\|f_n(x)x_n\| < \frac{1}{r}\lambda \text{ si } \|x\| < \delta_0 \text{ y para todo } n \geq 1. \tag{3.8}$$

Por las propiedades de las F-normas vistas en la Proposición 2.2.4, tenemos

$$\left\| f_{n_{d_0}}(x_{\delta_0})\, x_{n_{d_0}} \right\| = \left\| \left| f_{n_{d_0}}(x_{\delta_0}) \right| x_{n_{d_0}} \right\| \geq \left\| \frac{1}{r} x_{n_{d_0}} \right\| \geq \frac{1}{r}\lambda.$$

lo que contradice a 3.8.◆

Definición 3.1.20 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un e.l.t. (X,τ) es llamada semibásica si*

$$x_k \notin [x_i : i > k]^{\tau}, \text{ donde } [x_i : i > k]^{\tau} \equiv \overline{\langle x_i : i > k \rangle}^{\tau}$$

para cada $k \geq 1$.

Proposición 3.1.21 *Una sucesión l.i. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es semibásica en (Y,τ) si, y sólo si, $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X_0'$, donde $X_0 = \langle x_n : n \geq 1 \rangle$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración.

Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es semibásica. Para cada $n \geq 1$, sea N_n el núcleo de f_n; entonces N_n es un hiperespacio de X_0. Es claro que $N_1 = \langle x_i : i \geq 2 \rangle$, y como $x_1 \notin \overline{N_1}$ se sigue que N_1 es cerrado en Y, pues en otro caso se contradice la maximalidad de N_1, por tanto, f_1 es continua.

Sea $n \geq 2$,

$$N_n = \langle x_i : i \neq n \rangle = \langle x_i : i < n \rangle + \langle x_i : i > n \rangle;$$

así,

$$\overline{N_n} = \langle x_i : i < n \rangle + \overline{\langle x_i : i > n \rangle},$$

por ser $\langle x_i : i < n \rangle$ de dimensión finita.

Supongamos que $x_n \in \overline{N_n}$, entonces

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i + y,$$

donde $y \in \overline{\langle x_i : i > n \rangle}$. Como $x_n \notin \overline{\langle x_i : i > n \rangle}$, hay un primer índice j entre 1 y $n-1$ tal que $t_j \neq 0$, de donde obtenemos que $x_j \in \overline{\langle x_i : i > j \rangle}$, lo que es una contradicción. Así, $x_n \notin \overline{N_n}$ y por consiguiente N_n es cerrado en Y y f_n es continua..

Recíprocamente, si $(f_i)_{i=1}^{\infty} \subset X_0'$, entonces cada N_n es cerrado en Y ya que f_n es continua en Y y por tanto, $x_n \notin N_n = \overline{N_n}$. Es decir, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es semibásica.◆

Corolario 3.1.22 *Toda base de Schauder en un e.l.t. X es una sucesión semibásica.*

Definición 3.1.23 *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones, con $x_n \neq 0$ y $y_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, en un espacio lineal X. La sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es llamado un bloque básico (bl.b.) con respecto a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, si existe una sucesión de enteros $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_n < m_{n+1} < \ldots$ y otra de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que*

$$y_n = \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i x_i, \text{ para todo } n \geq 1$$

Teorema 3.1.24 *Toda sucesión que es un bloque básico con respecto a una base de Schauder en un e.l.t. X, es una sucesión básica en ese espacio.*

Demostración.
Sea $\{x_n; f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una b.S. en X y sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ un bloque básico con respecto a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ también lo es y además $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es semibásica ya que si $y_k \in [y_i : i > k]$ para alguna k, entonces se tiene que $y_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i x_i \in [x_i : i > m_k]$, pero esto no es posible ya que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es semibásica, por ser base de Schauder, y $y_k \neq 0$.

Por la proposición la sucesión de funcionales $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ asociada a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y', donde $Y = \langle y_n : n \geq 1\rangle$. Denotemos por h_n misma a la única extensión continua de h_n a $\overline{Y}$.

Sea $y \in Y$, es decir, $y = \sum\limits_{k=1}^{r} g_k(y) y_k$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene $m_{j-1} + 1 \leq i \leq m_j$ para un entero positivo j. Si $1 \leq j \leq r$, es claro que

$$f_i(y) = h_j(y) f_i(y_j) \tag{3.9}$$

Esta igualdad es también válida si $j > r$, ya que entonces $f_i(y) = h_j(y) = 0$.
Para $y \in \overline{Y}$, existe una red $(z_d) \subset Y$ tal que $z_d \longrightarrow y$ y entonces

$$f_i(z_d) = h_j(z_d) f_i(y_j),$$

de donde al tomar el límite obtenemos

$$f_i(y) = h_j(y) f_i(y_j),$$

es decir, (3.9) se cumple para toda $y \in \overline{Y}$. Así, para $y \in \overline{Y}$ tenemos

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{\infty} f_j(y) x_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} f_i(y) x_i \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} h_j(y) f_i(y_j) x_i \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} h_j(y) \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} f_i(y_j) x_i = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(y) y_j, \end{aligned}$$

y, por tanto, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para $\overline{Y}$, es decir, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X.♦

3.2 Topologías polares

Definición 3.2.1 *Sean ρ y τ dos topologías lineales en el espacio lineal X. Decimos que τ es ρ-polar si τ tiene una base de vecindades de cero formados por conjuntos ρ-cerrados.*

Por ejemplo, toda topología localmente convexa τ en X es $\sigma(X, X')-$polar, ya que τ tiene una base formada por convexos y cerrados y éstos son $\sigma(X, X')$-cerrados (Proposición 1.3.14).

Proposición 3.2.2 *Si τ es ρ-polar en X, entonces τ puede ser generada por una colección de F-seminormas monótonas $\{\eta_\alpha : \alpha \in A\}$ de la forma*

$$\eta_\alpha(x) = \sup\{\lambda(x) : \lambda \in \Lambda_\alpha\}$$

donde Λ_α es una colección de F-seminormas monótonas ρ-continuas. Si τ es metrizable entonces τ puede ser definida por una sola F-norma de este tipo.

Demostración.
Sea $\{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia dirigida de F−seminormas monótonas que genera a τ, la cual existe por Teorema 2.3.7, entonces toda τ-vecindad de cero contiene un conjunto de la forma

$$\{x : \gamma_\alpha(x) < \epsilon\}, \text{para alguna } \alpha \in A \text{ y } \epsilon > 0;$$

Sea Λ la colección de todas la F-seminormas ρ-continuas. Para cada $\alpha \in A$ y $\delta \in \Lambda$, definimos

$$\lambda_\delta^\alpha(x) = \inf\{\delta(y) + \gamma_\alpha(z) : y + z = x\}.$$

Como $\lambda_\delta^\alpha \le \delta$ tenemos que λ_δ^α satisface (F3′) de la observación que sigue a la Proposición 2.2.6 en donde se caracteriza a las F−seminormas monótonas de un e.l. .

Sean $x, w \in X$, por definición

$$\lambda_\delta^\alpha(x+w) \le \delta(y) + \gamma_\alpha(z), \text{ para todos } y, z \text{ tales que } y + z = x + w,$$

Sean $y_0, z_0, y_1, z_1 \in X$ tales que

$$y_0 + z_0 = x \text{ y } y_1 + z_1 = w, \text{ entonces}$$
$$\lambda_\delta^\alpha(x+w) \le \delta(y_0 + y_1) + \gamma_\alpha(z_0 + z_1) \le \delta(y_0) + \gamma_\alpha(z_0) + \delta(y_1) + \gamma_\alpha(z_1),$$

de donde,

$$\lambda_\delta^\alpha(x+w) \le \lambda_\delta^\alpha(x) + \lambda_\delta^\alpha(w).$$

O sea, λ_δ^α satisface (F1) de la Proposición 2.2.6.

Para ver que satisface (F2′), tomamos $t \in K, |t| \le 1$, y y, z tales que $y + z = x$ y observamos que $ty + tz = tx$; por tanto,

$$\delta(ty) + \gamma_\alpha(tz) \le \delta(y) + \gamma_\alpha(z),$$

es decir,

$$\lambda_\delta^\alpha(tx) \le \lambda_\delta^\alpha(x)$$

Por todo lo anterior $\lambda_\delta^\alpha(x)$ es una F-seminorma monótona y como $\lambda_\delta^\alpha \le \delta$ tenemos que es ρ-continua, Hagamos $\Lambda_\alpha = \{\lambda_\delta^\alpha : \delta \in \Lambda\}$ para cada $\alpha \in A$.

Para $\alpha \in A$ definamos

$$\eta_\alpha(x) = \sup\{\lambda_\delta^\alpha(x) : \delta \in \Lambda\},$$

Sea $x \in X$

$$\lambda_\delta^\alpha(x) \le \gamma_\alpha(x), \text{ para toda } \delta \in \Lambda,$$

de donde $\eta_\alpha \leq \gamma_\alpha$ y como γ_α es una $F-$seminorma se sigue que η_α satisface (F3′) y además es $\tau-$continua.

Sean $x, y \in X$.

$$\eta_\alpha(x+y) = \sup\{\lambda_\delta^\alpha(x+y) : \delta \in \Lambda\} \leq \sup\{\lambda_\delta^\alpha(x) + \lambda_\delta^\alpha(y) : \delta \in \Lambda\} \leq \eta_\alpha(x)+\eta_\alpha(y),$$

es decir, η_α también satisface (F1).

Para ver que cumple con (F2′), tomamos $|a| \leq 1$ y observamos que

$$\eta_\alpha(ax) = \sup\{\lambda_\delta^\alpha(ax) : \delta \in \Lambda\} \leq \sup\{\lambda_\delta^\alpha(x) : \delta \in \Lambda\} = \eta_\alpha(x).$$

Concluimos que η_α es una F -seminorma monótona para cada $\alpha \in A$.

Veremos que $\{\eta_\alpha : \alpha \in \Lambda_\alpha\}$ genera a τ. Sea U una $\tau-$vecindad de 0. Como τ es $\rho-$polar y está generada por $\{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$, podemos suponer que U es $\rho-$cerrado y tomar $\alpha_1 \in A$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\overline{\{x : \gamma_{\alpha_1}(x) \leq \epsilon\}}^\rho \subset U. \tag{3.10}$$

Sean $x_0 \in \{x : \eta_{\alpha_1}(x) < \epsilon\}$, $\delta \in \Lambda$ y $r > 0$. Por definición de η_{α_1} tenemos que

$$\lambda_\delta^{\alpha_1}(x_0) < \epsilon, \text{ para toda } \delta \in \Lambda,$$

en particular para $\hat{\delta} = a\delta$, donde $\frac{\epsilon}{r} < a$; así, existen y_0 y z_0 en X tales que $y_0 + z_0 = x_0$ y

$$\hat{\delta}(y_0) + \gamma_{\alpha_1}(z_0) < \epsilon,$$

de donde se sigue que

$$(x_0 - \{x : \delta(x) < r\}) \bigcap \{x : \gamma_{\alpha_1}(x) \leq \epsilon\} \neq \emptyset,$$

y por tanto, $x_0 \in \overline{\{x : \gamma_{\alpha_1}(x) \leq \epsilon\}}^\rho$. Entonces por (3.10) tenemos que $x_0 \in U$ y así,

$$\{x : \eta_{\alpha_1}(x) < \epsilon\} \subset U,$$

es decir, $\{\eta_\alpha : \alpha \in \Lambda_\alpha\}$ genera a τ.

En el caso de que τ sea metrizable, A puede tomarse formada por un solo elemento, debido al corolario del teorema 2.3.7 y por consiguiente τ puede ser generada por una sola $F-$norma de la forma indicada.♦

Corolario 3.2.3 *Sean X un espacio lineal y ρ y τ dos topologías lineales en X. Entonces τ es $\rho-$polar si, y sólo si, existe una familia de $F-$seminormas $\rho-$semicontinuas por abajo ($\rho-$l.s.c.) que genera a τ.*

Demostración.

Supongamos τ es $\rho-$polar, por la proposición anterior τ está generada por una colección de F-seminormas monótonas $\{\eta_\alpha : \alpha \in A\}$ de la forma

$$\eta_\alpha(x) = \sup\{\lambda(x) : \lambda \in \Lambda_\alpha\},$$

donde, para cada $\alpha \in A$, Λ_α es una colección de F-seminormas monótonas ρ-continuas. Sea $r > 0$, dada una $F-$seminorma $\lambda \in \Lambda_\alpha$ tenemos que

$$\{x \in X : \lambda(x) \leq r\} \text{ es } \rho - \text{cerrado},$$

por la ρ–continuidad de λ. Sea $\alpha \in A$, entonces el conjunto

$$\begin{aligned}\{x \in X : \eta_\alpha(x) \leq r\} &= \{x \in X : \sup\{\lambda(x) : \lambda \in \Lambda_\alpha\} \leq r\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda_\alpha} \{x \in X : \lambda(x) \leq r\},\end{aligned}$$

es $\rho-$ cerrado y por tanto, η_α es $\rho-$l.s.c.

Recíprocamente, sea $\{\eta_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de $F-$seminormas $\rho-$semicontinuas por abajo que genera a τ, entonces los conjuntos de la forma

$$\{x \in X : \eta_{\alpha_i}(x) \leq r\},$$

con $1 \leq i \leq n$, para algún $n \geq 1$, y $r > 0$, forman una base local para τ y estos conjuntos son $\rho-$cerrados.♦

Proposición 3.2.4 *Sea (X, τ) un $F-$espacio. Supóngase que $\rho < \tau$ es una topología lineal en X.*

(i) Si una red (x_a) es tal que $x_a \to 0(\rho)$ y $x_a \nrightarrow 0(\tau)$, entonces existen topologías lineales α, β en X tales que

  (a) $\rho \leq \alpha < \beta \leq \tau$;

  (b) β es metrizable y $\alpha-$polar;

  (c) $x_a \to 0(\alpha)$ y $x_a \nrightarrow 0(\beta)$.

(ii) Si U es una $\tau-$vecindad de 0, pero no una $\rho-$vecindad, entonces existen topologías lineales α y β que satisfacen (a), (b) y

  (c′) U es $\beta-$vecindad de 0 pero no $\alpha-$vecindad de 0.

(iii) Si τ es localmente acotada entonces existe una topología α tal que $\alpha < \tau$ y τ es $\alpha-$polar.

Demostración.

(i) Sea una red (x_a) tal que $x_a \to 0(\rho)$ y $x_a \nrightarrow 0(\tau)$. Con Υ_{x_a} denotamos a la colección de todas las topologías lineales γ en X tales que $x_a \to 0(\gamma)$ y $\rho \leq \gamma \leq \tau$. $\Upsilon_{x_a} \neq \emptyset$ ya que contiene a ρ. Cada $\gamma \in \Upsilon_{x_a}$ está generada por una familia S_γ de F-seminormas monótonas. Sea

$$S = \bigcup_{\gamma \in \Upsilon_{x_a}} S_\gamma,$$

entonces S es también una familia de $F-$seminormas monótonas y genera una topología lineal α en X. Por construcción esta topología α es la más grande de las topologías lineales γ en X que satisfacen que $x_a \to 0(\gamma)$ y $\rho \leq \gamma \leq \tau$.

Sea $\mathcal{U}_0$ una base numerable de vecindades de cero en (X, τ), que existe ya que τ es metrizable, y sea

$$\overline{\mathcal{U}_0} = \{\overline{U}^\alpha : U \in \mathcal{U}_0\},$$

es fácil ver que $\overline{\mathcal{U}_0}$ satisface las condiciones de la Proposición 1.1.14. Sea β la topología lineal en X que tiene como base local a $\overline{\mathcal{H}}$. Probaremos que $\alpha \leq$

$\beta \leq \tau$. Sea V una $\alpha-$vecindad cerrada de cero, como $\alpha \leq \tau$, V también es una $\tau-$vecindad de cero, así existe $U \in \mathcal{U}_0$ tal que $U \subset V$, tomando $\alpha-$cerraduras tenemos

$$\overline{U}^{\alpha} \subset V,$$

por lo que V es $\beta-$vecindad de 0. Se sigue que $\alpha \leq \beta$. Como $U \subset \overline{U}^{\alpha}$ para cada $U \in \mathcal{U}_0$, se tiene que $\overline{U}^{\alpha}$ es $\tau-$vecindad de cero, es decir, $\beta \leq \tau$. Por su definición β es $\alpha-$polar y es metrizable por tener una base local de cero numerable.

Afirmamos que $\alpha < \beta$, pues en caso contrario la función identidad

$$i : (X, \alpha) \longrightarrow (X, \tau),$$

satisface las hipótesis del Teorema de la gráfica cerrada (Teorema 2.4.6), o sea: (X, τ) es un $F-$espacio, la $\alpha-$cerradura de la imagen inversa de toda $\tau-$vecindad de cero es $\alpha-$vecindad de cero ya que supusimos que $\alpha = \beta$ y claramente i tiene gráfica cerrada por ser ésta la diagonal de $X \times X$ y α, τ son topologías de Hausdorff, con $\alpha \leq \tau$. Por tanto, i es continua, y $\alpha = \tau$, lo cual contradice nuestra hipótesis sobre la red (x_a) . Así, $\alpha < \beta$,y $x_a \nrightarrow 0(\beta)$ por la maximalidad de α dentro de las topologías lineales γ en X que satisfacen que $x_a \to 0(\gamma)$ y $\rho \leq \gamma \leq \tau$.

(ii) Sea Υ_U la colección de todas las topologías lineales γ en X tales que $\rho \leq \gamma \leq \tau$ y U no es $\gamma-$vecindad de cero. De nuevo $\Upsilon_U \neq \emptyset$ ya que $\rho \in \Upsilon_U$. Si $\{\gamma_a\}_{a \in A}$ es una cadena, respecto al orden dado por la contención entre topologías, en Υ_U, entonces definimos

$$\chi = \bigcup_{a \in A} \chi_{\gamma_a},$$

donde χ_{γ_a} es una base local de cero de γ_a. La topología lineal que tiene como base de cero a χ es una cota superior para la cadena en Υ_U. Por el Lema de Zorn existe en Υ_U una topología lineal maximal α. En particular, $\rho \leq \alpha \leq \tau$ y U no es $\alpha-$vecindad de cero. Para terminar la prueba procedemos exactamente como en (i).

(iii) Sea U una $\tau-$vecindad de cero acotada y balanceada que no es $\rho-$vecindad, por (ii) hay topologías lineales α, β que satisfacen (a),(b) y (c'). Entonces U es $\beta-$vecindad de cero y es acotada en β, porque $\beta \leq \tau$. Por tanto, $\beta = \tau$ ya que $\{\frac{1}{n}U\}_{n=1}^{\infty}$ es también una base local en (X, β).♦

3.3 Construcción de sucesiones básicas

Lema 3.3.1 *Sea X un e.l.t. de Hausdorff de dimensión finita y supóngase que $V \subset X$ es un subconjunto cerrado y balanceado. Si V no es acotado, entonces existe $z \in X$ no nulo tal que $\langle z \rangle \subset V$.*

Demostración.

Como X es de dimensión finita podemos suponer que es normado (1.1.17). Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en V tal que $\|x_n\| \to \infty$, cuando $n \longrightarrow \infty$. Por el teorema de Hiene-Borel podemos suponer, seleccionando una subsucesión si es necesario, que

$$\|x_n\|^{-1} x_n \longrightarrow z \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Para todo natural N hay un natural m tal que para $n \geq m$, se cumple

$$\|x_n\| \geq N$$

y por tanto, por ser V es balanceado,

$$\|x_n\|^{-1} x_n \subset \|x_n\|^{-1} V \subset N^{-1} V.$$

Y como $N^{-1}V$ es cerrado tenemos que

$$z \in N^{-1}V \text{ para todo natural } N;$$

o sea, $\langle z \rangle \subset V$.♦

Lema 3.3.2 *Sean $\|\|$ una $F-$norma en X y $\theta > 0$. Definimos*

$$\|x\|^* = \min(\theta, \|x\|),$$

entonces obtenemos una $F-$norma equivalente a $\|\|$.

Demostración.
Es fácil ver que $\|\|^*$ es una $F-$norma en X. Para probar que es equivalente a $\|x\|$ observamos que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X entonces

$$x_n \longrightarrow 0 \ (\|\|) \text{ si, y sólo si, } x_n \longrightarrow 0 \ (\|\|^*).\blacklozenge$$

Lema 3.3.3 *Supongamos que (X, τ) es un e.l.t. metrizable y $\rho < \tau$ es una topología lineal tal que τ es $\rho-$polar. Sea*

$$\|x\| = \sup\{\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\},$$

la $F-$ norma introducida en la Proposición 3.2.2 que genera a topología τ, donde Λ es una colección de F-seminormas monótonas y ρ-continuas.

Supongamos que la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en X y $\theta > 0$ son tales que satisfacen las siguientes 3 propiedades:

(i) $\|z_n\| \geq 4\theta$ *para todo* $n \geq 1$.

(ii) $B \cap X_n$ *es compacto en* τ *para cada natural* n, *donde* $B = \{x : \|x\| \leq \theta\}$ *y* $X_n = \langle z_1, ..., z_n \rangle$.

(iii) *Para* $n \geq 1$ *y* $1 \leq k \leq 2^{n+3}$ *definimos el conjunto*

$$W_k^n = \left\{x \in X : \|x\| = k2^{-(n+3)}\theta\right\} \cap X_n;$$

Por ii) W_k^n *es compacto; sea* $U_k^n \subset W_k^n$ *una* $2^{-(n+3)}\theta-$ *red finita de* W_k^n.
Para cada $n \geq 1$ *sea* $U^n = \bigcup_{k=1}^{2^{n+3}} U_k^n$, *y para* $u \in U^n$ *sea* $\lambda_u \in \Lambda$ *tal que*

$$\lambda_u(u) \geq \|u\| - 2^{-(n+3)}\theta.$$

Supongamos

$$que \lambda_u(z_{n+1}) \leq 2^{-(n+3)}\theta,$$

para todo $u \in U^n$.

Entonces,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+1} t_i z_i\right\|^* \geq \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\|^* - 2^{-(n+1)}\theta. \tag{3.11}$$

para cada sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares, donde $\|\|^*$ es la $F-$ norma definida en el lema anterior.

Demostración.

Consideremos una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ que satisface (i), (ii) y (iii). Para $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq 2^{n+3}$ el conjunto

$$W_k^n = \left\{x \in X : \|x\| = k2^{-(n+3)}\theta\right\} \cap X_n;$$

es compacto ya que es un conjunto cerrado de X contenido en $B \cap X_n$. Para cada $w \in W_k^n$ existe $u \in U_k^n$ que satisface la siguiente desigualdad

$$\|w - u\| \leq 2^{-(n+3)}\theta. \tag{3.12}$$

Para cada $n \geq 1$ sea $U^n = \bigcup_{k=1}^{2^{n+3}} U_k^n$, y para $u \in U^n$ sea $\lambda_u \in \Lambda$ tal que

$$\lambda_u(u) \geq \|u\| - 2^{-(n+3)}\theta. \tag{3.13}$$

Por hipótesis se satisface

$$\lambda_u(z_{n+1}) \leq 2^{-(n+3)}\theta, \tag{3.14}$$

para toda $u \in U^n$.

Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares. Para cada $n \geq 1$ escojamos el mayor entero k tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\|^* \geq k2^{-(n+3)}\theta,$$

entonces $0 \leq k \leq 2^{n+3}$, ya que $\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\|^* \leq \theta$. Si $k = 0$, no hay nada que probar pues tenemos entonces que

$$2^{-(n+1)}\theta > 2^{-(n+3)}\theta > \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\|^*,$$

y entonces la desigualdad (3.11) se satisface trivialmente.

Si $k \geq 1$, escojamos un escalar s con $|s| \leq 1$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} s t_i z_i\right\| = k2^{-(n+3)}\theta,$$

así, $\sum_{i=1}^{n} s t_i z_i \in W_k^n$; por tanto, existe $u \in U_k^n$ tal que se cumple (3.12), es decir,

$$\left\|u - \sum_{i=1}^{n} s t_i z_i\right\| \leq 2^{-(n+3)}\theta.$$

Si $|st_{n+1}| \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned} \|u + st_{n+1}z_{n+1}\| &\geq \lambda_u(u + st_{n+1}z_{n+1}) \\ &\geq \lambda_u(u) - \lambda_u(st_{n+1}z_{n+1}) \\ &\geq \lambda_u(u) - \lambda_u(z_{n+1}). \end{aligned}$$

De las desigualdades (2.1.5) y (2.1.6) se sigue

$$\begin{aligned} \|u + st_{n+1}z_{n+1}\| &\geq \|u\| - 2^{-(n+3)}\theta - 2^{-(n+3)}\theta \\ &= (k-2)2^{-(n+3)}\theta. \end{aligned}$$

Si $|st_{n+1}| \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned} \|u + st_{n+1}z_{n+1}\| &\geq \|st_{n+1}z_{n+1}\| - \|u\| \\ &\geq \|z_{n+1}\| - \|u\| \geq 3\theta \\ &\geq (k-2)2^{-(n+3)}\theta. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \left\| s\sum_{i=1}^{n+1} t_i z_i \right\| &\geq \|u + st_{n+1}z_{n+1}\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} st_i z_i - u \right\| \\ &\geq (k-2)2^{-(n+3)}\theta - 2^{-(n+3)}\theta \\ &= (k-3)2^{-(n+3)}\theta = (k+1)2^{-(n+3)}\theta - 2^{-(n+1)}\theta. \end{aligned}$$

Por la elección de k obtenemos

$$\left\| s\sum_{i=1}^{n+1} t_i z_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \right\|^* - 2^{-(n+1)}\theta.$$

Como $|s| \leq 1$, tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} t_i z_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \right\|^* - 2^{-(n+1)}\theta, \tag{3.15}$$

de donde se sigue la desigualdad (3.11).♦

Corolario 3.3.4 *Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente.*

Demostración.
De la desigualdad (3.15) obtenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} t_i z_i \right\| \geq \frac{\theta}{2} \text{ si } \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \right\| \geq \theta.$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y escalares $t_1, ..., t_{n+1}$ tal que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i z_i = 0$. Por lo anterior se cumple

$$\left\| s \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \right\| \leq \theta,$$

para todo escalar s. Así, $\langle \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \rangle \subset B \cap X_n$, y como este último es compacto, también lo es $\langle \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \rangle$; por tanto, $\sum_{i=1}^{n} t_i z_i = 0$, y $t_{n+1} = 0$. Procediendo de esta forma podemos ver $t_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n+1$.◆

Teorema 3.3.5 *Sean (X, τ) un e.l.t. metrizable y ρ una topología lineal en X tal que τ es ρ−polar. Supongamos que $z_1 \in X$, $z_1 \neq 0$ y $(x_a)_{a \in D}$ es una red que satisface $x_a \longrightarrow 0(\rho)$ y $x_a \not\rightarrow 0(\tau)$. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ en D tal que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica regular en la compleción de (X, τ), donde $z_n = x_{a_n}$, para $n \geq 2$. En particular, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión regular Schauder básica en (X, τ).*

Demostración.

Por proposición 3.2.2 podemos suponer que τ está generada por la F−norma $\|\|$

$$\|x\| = \sup \{\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\},$$

donde Λ es la colección de las F−seminormas ρ−continuas. La F−norma $\|\|$ es ρ−inferiormente semicontinua (l.s.c.). (Corolario 3.2.3).

Sea $\theta > 0$ tal que

(a) $\|z_1\| \geq 4\theta$

(b) Para toda $a \in D$, existe $b \geq a$ tal que $\|x_b\| \geq 4\theta$, ya que $x_a \not\rightarrow 0(\tau)$.

Sea

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq \theta\},$$

consideremos el subespacio $\langle z_1 \rangle$ generado por z_1. Así, $B \cap \langle z_1 \rangle$ es compacto en $\langle z_1 \rangle$, y por tanto en X, por ser cerrado y acotado en un e. l. t. de dimensión finita.

Construiremos la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ por inducción de tal forma que

$$\|z_n\| \geq 4\theta$$

y si

$$X_n = \langle z_1, z_2, ..., z_n \rangle,$$

entonces $B \cap X_n$ es compacto. Más aun, $z_n = x_{a_n}$ para $n \geq 2$, donde $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente en D.

Sea $n \geq 1$, supóngase que $z_1, ..., z_n$ han sido ya escogidos de modo tal que $B \cap X_n$ es compacto y $z_i = x_{a_i}$, con $a_i < a_{i+1}$, para $2 \leq i \leq n$.

Para $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq 2^{n+3}$ definimos el conjunto

$$W_k^n = \left\{ x \in X : \|x\| = k 2^{-(n+3)} \theta \right\} \cap X_n;$$

el cual resulta compacto por ser un subconjunto cerrado de $B \cap X_n$. Sea $U_k^n \subset W_k^n$ una $2^{-(n+3)}\theta-$ red finita de W_k^n y $U^n = \bigcup_{k=1}^{2^{n+3}} U_k^n$.

Para cada $u \in U^n$ sea $\lambda_u \in \Lambda$ tal que

$$\lambda_u(u) \geq \|u\| - 2^{-(n+3)}\theta. \tag{3.16}$$

Debido a que $x_a \to 0(\rho)$, todo $\lambda \in \Lambda$ es $\rho-$continua y U^n es finito, podemos escoger $b > a_n$, donde a_n es arbitrario si $n = 1$, tal que si $c \geq b$, entonces

$$\lambda_u(x_c) \leq 2^{-(n+3)}\theta, \tag{3.17}$$

para todo $u \in U^n$.

Sea $(x_d)_{d\in E}$ una subred de $(x_c)_{c\geq b}$ tal que $\|x_d\| \geq 4\theta$, para todo $d \in E$.

Supongamos que para todo $d \in E$ el conjunto cerrado y balanceado $B \cap \langle X_n, x_d\rangle$ es no acotado. Por el Lema 3.3.1, para cada $d \in E$, existe $y \in \langle X_n, x_d\rangle$ distinto de 0, $y = t_d x_d + u_d$ con $u_d \in X_n$ y $t_d \in \mathbb{K}$, tal que

$$\langle y\rangle = \langle t_d x_d + u_d\rangle \subset B \cap \langle X_n, x_d\rangle \subset B.$$

Se tiene que $u_d \neq 0$ ya que de lo contrario $x_d \in B$, pero esto no es posible pues $\|x_d\| \geq 4\theta$. Podemos suponer que $\|u_d\| = \theta$, ya que existe un escalar $s \neq 0$ tal que $\|su_d\| \leq \theta$ y si no hubiera un escalar, digamos s_0, donde se diera la igualdad tendríamos que $\langle u_d\rangle \subset B \cap X_n$, lo que es una contradicción, pues $B \cap X_n$ es compacto. Basta entonces cambiar y por $s_0 y$.

Entonces,

$$\|t_d x_d\| \leq \|t_d x_d + u_d\| + \|u_d\| \leq 2\theta,$$

y así $|t_d| \leq 1$. De esto y debido a que $x_d \to 0(\rho)$, concluimos $t_d x_d \to 0(\rho)$.

Por la compacidad de $B \cap X_n$ podemos también suponer, si es necesario tomando una subred, que $u_d \to u$ en X_n y entonces $\|u\| = \theta$.

Para cualquier $t \in \mathbb{F}$ se cumple

$$\|tu\| \leq \liminf_d \|t(t_d x_d + u_d)\|,$$

debido a la $\rho-$semicontinuidad por abajo de $\|\|$. Y como $\langle t_d x_d + u_d\rangle \subset B$ se sigue

$$\|tu\| \leq \theta, \text{ para todo } t \in \mathbb{F},$$

es decir, $\langle u\rangle \subset B \cap X_n$ lo cual es una contradicción a la compacidad de $B \cap X_n$.

Por lo anterior, el conjunto cerrado $B \cap \langle X_n, x_d\rangle$ es acotado, para algún $d \in E$, y por consiguiente, compacto. O sea, podemos escoger $a_{n+1} > b > a_n$ tal que

$$\|x_{a_{n+1}}\| \geq 4\theta \text{ y } B \cap X_{n+1} \text{ es compacto},$$

donde $X_{n+1} = \langle X_n, x_{a_{n+1}}\rangle$.

Sea $\|x\|^* = \min(\theta, \|x\|)$, por los Lemas 3.3.2 y 3.3.3 tenemos que $\|\|^*$ es una $F-$norma equivalente a $\|\|$ y

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+1} t_i z_i\right\|^* \geq \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\|^* - 2^{-(n+1)}\theta, \tag{3.18}$$

para toda sucesión $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ de escalares; además por el corolario anterior $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión linealmente independiente.

Usamos dos veces la desigualdad (3.18) con $x = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i \in X_n$, para obtener

$$\|x\|^* + 2^{-n}\theta = \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\|^* + 2^{-n}\theta \geq \left\|\sum_{i=1}^{n-1} t_i z_i\right\|^* \text{ y}$$

$$\|x\|^* + 2^{-n}\theta + 2^{-(n-1)}\theta \geq \left\|\sum_{i=1}^{n-1} t_i z_i\right\|^* + 2^{-(n-1)}\theta \geq \left\|\sum_{i=1}^{n-2} t_i z_i\right\|^*,$$

al continuar con este procedimiento obtenemos la siguiente desigualdad que será útil en lo que sigue:

$$\|x\|^* + \sum_{i=m+1}^{n} 2^{-i}\theta \geq \left\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\right\|^* = \|P_{nm}(x)\|^*, \tag{3.19}$$

si $n > m$

Sea $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Consideramos las funciones

$$P_{nm} : X_n \to X_m, P_m : Y \to X_m,$$

definidas en la demostración del teorema 3.1.14.

Afirmamos que cada P_{nm} es $\tau-$continua; ésto es claro si $n \leq m$, ya que en tal caso P_{nm} es la identidad. Por otra parte, sea $n > m$, y supongamos que P_{nm} no es $\tau-$continua; existe entonces una sucesión $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ en X_n con $w_i \to 0$ y $P_{nm}(w_i) \nrightarrow 0$ en (X_m, τ). Podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que $\|P_{nm}(w_i)\| > \epsilon$ para todo $i \geq 1$ y para algún $\epsilon > 0$.

Tenemos dos casos. Primero, existe i_0 tal que $P_{nm}(w_i) \in B$ para todo $i \geq i_0$. Por ser $B \cap X_m$ un conjunto compacto existen una subsucesión de $(P_{nm}(w_i))$, la cual podemos suponer que es ella misma, y $z \in B \cap X_m$ tal que $P_{nm}(w_i) \to z(\tau)$. Obsérvese que $\|z\| \geq \epsilon$ y por consiguiente, $z \neq 0$. Sea k un natural tal que $\|kz\| > \theta$, tal k existe ya que de lo contrario $\langle z\rangle \subset B \cap X_m$. y esto es una contradicción a la compacidad de $B \cap X_m$. Así,

$$\|kP_{nm}(w_i)\| \geq \theta,$$

para i suficientemente grande, por lo que utilizando (3.19)

$$\theta = \|kP_{nm}(w_i)\|^* \leq \|kw_i\|^* + \sum_{i=m+1}^{n} 2^{-i}\theta,$$

de donde,

$$\|kw_i\|^* \geq \frac{\theta}{2}, \text{ para } i \geq i_0,$$

pero esto es una contradicción a que $w_i \to 0(\tau)$.

En el segundo caso, para cada i_0 existe $i \geq i_0$ tal que $\|P_{nm}(w_i)\| > \theta$. De nuevo al utilizar (3.19) tenemos

$$\|w_i\|^* \geq \theta(1 - \sum_{i=m+1}^{n} 2^{-i}) > \frac{\theta}{2},$$

lo que contradice que $w_i \to 0\,(\tau)$. Así, cada P_{nm} es $\tau-$continua y por tanto, cada P_m también lo es.

Denotemos por P_m misma a la única extensión continua de P_m a la cerradura $\overline{Y}^{\sim}$ de Y en la compleción $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}\right)$ de (X, τ), tal como se hizo en la demostración del Teorema 3.1.14.

Gracias a (3.19) tenemos

$$\|P_m(x)\|^* \leq 2\,\|x\|^*, \text{ para todo } n \text{ y } x \in \overline{Y}^{\sim},$$

y concluimos que $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ es equicontinua en $\overline{Y}^{\sim}$ y por tanto $(z_n)_{i=n}^{\infty}$ es una base de Schauder de $\overline{Y}^{\sim} = [z_n]^{\sim}$; así, es una sucesión (Schauder) básica regular de $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}\right)$.

Debido a que $\overline{Y} = \overline{Y}^{\sim} \cap X$, se tiene que $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ es también una base de Schauder de $\overline{Y} = [z_n]$, y por tanto $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión Schauder básica regular de (X, τ).♦

Corolario 3.3.6 *Bajo las hipótesis del teorema anterior supóngase que μ es una topología metrizable en X con $\mu \leq \rho$. Entonces la sucesión básica regular $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ del teorema anterior puede ser escogida de tal forma que $z_n \to 0(\mu)$.*

Demostración.

Existe una $F-$seminorma $\rho-$continua λ_μ tal que si $\|\|_\mu$ es la $F-$norma que determina a μ, entonces

$$\|x\|_\mu \leq \lambda_u(x)$$

para todo $x \in X$. Como $x_a \to 0(\rho)$ podemos escoger el elemento b para el cual se cumple la desigualdad (3.17) de tal forma que también se satisfaga

$$\lambda_\mu(x_c) \leq \frac{1}{n},$$

si $c \geq b$.

Así, $z_n \to 0(\mu)$.♦

Corolario 3.3.7 *Sean (X, τ) un $F-$espacio y ρ una topología lineal en X tal que $\rho < \tau$. Supongamos que $(x_a)_{a \in D}$ es una red que satisface $x_a \to 0(\rho)$ y $x_a \nrightarrow 0(\tau)$ y sea $z_1 \neq 0 \in X$. Existe una sucesión estrictamente creciente $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ en D tal que la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es semibásica en (X, τ), donde $z_n = x_{a_n}$ para $n \geq 2$.*

Demostración.

Por la Proposición 3.2.4 entonces existen topologías lineales α, β en X tales que

(a) $\rho \leq \alpha < \beta \leq \tau$;

(b) β es metrizable y $\alpha-$polar;

(c) $x_a \to 0(\alpha)$ y $x_a \nrightarrow 0(\beta)$.

Por el Teorema 3.3.5 existe una sucesión estrictamente creciente $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ en D tal que sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ con $z_n = x_{a_n}$ para $n \geq 2$, es Schauder básica regular en (X,β); en particular, cada coeficiente funcional f_n asociado a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\beta-$continuo y por tanto, $\tau-$continuo, y el resultado se sigue de la Proposición 3.1.21.♦

3.4 Existencia de sucesiones básicas

En el último teorema de la sección anterior es muy importante la suposición de la existencia de una topología lineal estrictamente más débil que la original. En casi todos los $F-$espacios de dimensión infinita es posible encontrar topologías lineales de Hausdorff más débiles que la original; de hecho, sólo se conoce un ejemplo, excepto ismorfismos, en el que esto no es así, es decir, hay un único ejemplo de un $F-$espacio minimal de dimensión infinita, este es el espacio ω de todas las sucesiones reales con la métrica usual (Ejemplo 2.2.12). Es por eso que en está sección, así como a lo largo del trabajo, lo tratamos de modo especial. Como ya hemos observado este espacio tiene una base de Schauder (Ejemplo 3.1.6), por lo que si este fuera el único $F-$espacio minimal podríamos enunciar el Teorema 3.4.5 como "Todo $F-$espacio tiene sucesiones básicas". La existencia de otro $F-$espacio minimal es aún un problema abierto.

Lema 3.4.1 *Sea X y Y dos $F-$espacios, donde Y es además localmente convexo. Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal con rango cerrado. Entonces el adjunto $T' : Y' \to X'$, de T, definido como $T'(f) = f \circ T$, es sobre si, y sólo si, T' es inyectiva.*

Demostración.

Supongamos que T es sobre y sea $f \in Y'$ tal que $T'(f) = f \circ T = 0$. Si $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$, de donde $f(T(x)) = f(y) = 0$ y por tanto f es idénticamente nula y T es inyectiva.

Supongamos que T no es sobre y tomemos $y \in Y$ tal que $y \notin T(X)$. Por hipótesis $T(X)$ es cerrado en Y y éste es un espacio localmente convexo; por el Corolario 1.2.40 existe $f \in Y'$ tal que

$$f(T(X)) = 0 \text{ y } f(y) = 1,$$

por lo tanto T' no es inyectiva, ya que $T'(f) = 0$ y f no es idénticamente nula.♦

Recordamos que ω es el $F-$espacio de todas las sucesiones reales, con la topología τ_ω dada por la $F-$norma

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|}.$$

la cual puede también generarse por las seminormas

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_n = |x_n|$$

para todo $n \geq 1$ y el dual de ω se identifica con el espacio φ de todas las sucesiones que se estacionan en 0, mediante la función bilineal

$$\langle (a_1, .., a_n, 0, 0, ...), (x_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Además, $\tau_{\omega} = \sigma(\omega, \varphi)$.

Lema 3.4.2 *Sea (X, τ) un $F-$espacio de dimensión infinita tal que $\tau = \sigma(X, X')$, entonces $X \cong \omega$.*

Demostración.

Denotemos por B_n a la bola en X, de radio $\frac{1}{n}$ y alrededor del cero. Debido a que $\tau = \sigma(X, X')$, para cada $n \geq 1$ existen $f_{1n}, ... f_{m_n n} \in X'$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{x \in X : |f_{in}(x)| < 1\} \subset B_n.$$

Numerando a los elementos $\{f_{ij} : 1 \leq j \leq n, \ 1 \leq i \leq m_n\}$ tenemos una sucesión $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ de la que podemos extraer una sucesión maximal linealmente independiente, digamos $(g_m)_{m=1}^{\infty}$.

Definamos $T : X \to \omega$ por

$$T(x) = (g_m(x))_{m=1}^{\infty}.$$

T es continua, ya que si $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $x_m \to 0$, entonces $g_n(x_m) \to 0$ para cada g_n, con $n \geq 1$, y así $T(x_m) \to 0$ y T es continua.

$T(x) = 0$ implica $g_m(x) = 0$ para todo $m \geq 1$, de donde $x \in B_n$ para todo $n \geq 1$ y por tanto, $x = 0$; es decir T es inyectiva.

Afirmamos que el operador T es sobre, para probarlo veremos primero que T tiene rango cerrado. Sea $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $T(X)$ convergente, digamos a $a \in \omega$. Para cada $m \geq 1$ tenemos $y_m = (g_n(x_m))_{n=1}^{\infty}$ para algún $x_m \in X$. La convergencia de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ a $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ implica $g_n(x_m) \to a_n$, para todo $n \geq 1$. La sucesión $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy ya que dado un número finito de naturales $n_1, ..., n_k$ se tiene que $\|g_{n_i}(x_m - x_k)\|$, con $1 \leq i \leq k$, es tan pequeño como se quiera si m y k son suficientemente grandes, donde $\|\|$ es la F-norma que define a τ. Por ser X un F espacio x_m converge en X, digamos a x, así $g_n(x) = a_n$ y T tiene rango cerrado.

Finalmente recordando que la topología en ω coincide con $\sigma(\omega, \varphi)$ se ve fácilmente que T' es inyectiva ya que si $a = (a_1, ...a_k, 0, 0, ..) \in \varphi$ es tal que

$$T'(a) = a_1 g_1 + ... + a_k g_k = 0,$$

se sigue de la independencia lineal de $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ que $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ y por tanto, T es sobre, por el lema anterior.

Por último, T es un isomorfismo debido al Teorema de la función abierta.◆

Proposición 3.4.3 *El espacio $(\omega, \sigma(\omega, \varphi))$ es un espacio minimal, es decir no existe en ω una topología lineal y de Hausdorff estrictamente más gruesa que $\sigma(\omega, \varphi)$.*

Demostración.
Supongamos que no es minimal, por la Proposición 3.2.4 existe una red $(x_a)_{a\in D}$ y topologías lineales y Hausdorff ρ, α, β tales que

1. $\rho \leq \alpha < \beta \leq \sigma$,
2. β es metrizable, y por tanto, definida por una $F-$norma $\|\|$,
3. β es $\alpha-$polar y
4. $x_a \to 0(\alpha)$ y $x_a \not\to 0(\beta)$.

Por el Teorema 3.3.5 existe una sucesión $(a_k)_{k=2}^{\infty}$ en D tal que $a_{k+1} > a_k$ para todo $k \geq 2$ y la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica regular en la compleción de (X, β), donde $z_n = x_{a_n}$, $n \geq 2$. En particular, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una b.S. regular de $X_1 = [z_n]^{\beta}$: Existe $\theta > 0$ tal que $\|z_n\| \geq \theta$ para todo $n \geq 1$. Sea $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes funcionales asociada a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sea $X = [z_n]^{\sigma}$, entonces (X, σ) es un $F-$espacio ya que $(\omega, \sigma(\omega, \varphi))$ lo es. Por el lema anterior $(\omega, \sigma) \cong (X, \sigma)$. La familia $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ induce en X, una topología lineal de Hausdorff y localmente convexa $\sigma(\{h_n\})$, más débil que σ. Vimos en el capítulo 1 (Corolario 1.3.18) que (ω, σ) es un e.l.t. minimal con respecto a las topologías localmente convexas, así que $\sigma(\{h_n\}) = \sigma$ en X. Como

$$h_i(z_n) \longrightarrow 0 \text{ para cada } i \geq 1,$$

tenemos:

$$z_n \longrightarrow 0(\sigma), \text{ y por tanto, } z_n \longrightarrow 0(\beta)$$

y esto contradice nuestra elección de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.♦

Lema 3.4.4 *Sea $(X, \|\|)$ un $F-$espacio y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica regular de X. Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que satisface $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty$, y definamos $y_n = x_n + u_n$ para cada $n \geq 1$. Si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es $w-$linealmente independiente, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión básica en X.*

Demostración.
Sea $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión escalar tal que $|t_k| \leq M$ para todo $k \geq 1$. Entonces

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} t_k u_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|t_k u_k\| \leq M \sum_{k=n}^{m} \|u_k\|,$$

y por tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k u_k$ converge por ser X un $F-$espacio

Sea $S : l_\infty \longrightarrow X$ operador lineal dado por

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k u_k.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos $S_m : l_\infty \longrightarrow X$ por

$$S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} t_k u_k.$$

El operador S_m es continuo para cada $m \geq 1$ y en vista de que $\lim_{m\to\infty} S_m(t)$ existe para cada $t \in l_\infty$, se sigue del corolario del Teorema 2.4.4 que S es continuo.

Sea $\epsilon > 0$, supóngase que $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en l_∞ tal que

$$\sup_{n\geq 1} \|t_n\|_\infty < \infty, \tag{3.20}$$

y $t_n \in c_0$ para cada $n \geq 1$, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0 \text{ para cada } k \geq 1, \tag{3.21a}$$

donde $t_n = (t_{nk})_{k=1}^{\infty}$ para $n \geq 1$.

Sean M' y N' dos enteros positivos tales que $\sup\limits_n \|t_n\|_\infty \leq M'$ y

$$\sum_{k=N'+1}^{\infty} \|u_n\| < \frac{\epsilon}{2M'}.$$

Por (3.21a), para cada $k = 1, ..., N'$ elijamos $N_k > 0$ tal que $\|t_{nk}u_k\| < \frac{\epsilon}{2N'}$ si $n \geq N_k$. Definamos $N = \max\{N_k\}$, entonces $\|S(t_n)\| < \epsilon$ si $n \geq N$.

Hemos probado,

$$S(t_n) \to 0 \tag{3.22}$$

siempre que $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en c_0 tal que $\sup\limits_{n\geq 1} \|t_n\| < \infty$.

Sea $E = [x_n]$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funcionales asociada. Si $x \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ porque $f_n(x)x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es regular.

Definamos $R : E \to c_0$ por

$$R(z) = (f_n(z))_{n=1}^{\infty}.$$

Si $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en E convergente a $z \in E$, entonces, por la equicontinuidad de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ (Proposición 3.1.19) obtenemos

$$\|(f_n(z_k))_{n=1}^{\infty} - (f_n(z))_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |f_n(z_k) - f_n(z)| \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \to \infty,$$

de donde, R es continua. Definamos el operador lineal $T : E \to X$ por

$$T = I_E + S \circ R.$$

T es continuo, y para $z \in E$ tenemos

$$\begin{aligned} T(z) &= z + S((f_n(z))_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)u_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)y_n, \end{aligned}$$

y se sigue por hipótesis que $T(z) = 0$ implica $x = 0$, es decir, T es inyectivo.

Como $T(x_n) = y_n$, para $n \geq 1$, basta probar que $T(E)$ es cerrado para obtener el resultado enunciado.

Supongamos lo contrario; es decir, supongamos que existe una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en E tal que

$$(T(z_n))_{n=1}^{\infty} \text{ converge y } (z_n)_{n=1}^{\infty} \text{ no converge.}$$

Si

$$\sup_{n\geq 1} \|R(z_n)\|_{\infty} < \infty,$$

entonces por 3.22 tenemos

$$S(R(z_n)) \longrightarrow 0.$$

Ahora

$$z_n = T(z_n) - S(R(z_n)),$$

y por tanto, $\lim_n z_n$ existe, contradiciendo la elección de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

Supongamos que

$$\sup_{n\geq 1} \|R(z_n)\|_{\infty} = \infty,$$

entonces podemos suponer , tomando, si es necesario, una subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, que $\|R(z_n)\|_{\infty} \longrightarrow \infty$ y que $\|R(z_n)\|_{\infty} \neq 0$ para toda $n \geq 1$. Así, $\frac{1}{\|R(z_n)\|_{\infty}} \longrightarrow 0$.

Tenemos $\frac{R(z_n)}{\|R(z_n)\|_{\infty}} \in c_0$ y $\left\|\frac{R(z_n)}{\|R(z_n)\|_{\infty}}\right\|_{\infty} = 1$ para cada $n \geq 1$, por (3.22) concluimos $S\left(\frac{R(z_n)}{\|R(z_n)\|_{\infty}}\right) \longrightarrow 0$.

La sucesión $\left(\frac{z_n}{\|R(z_n)\|_{\infty}}\right)_{n=1}^{\infty}$ tiende a cero en E, ya que

$$\left\|\frac{z_n}{\|R(z_n)\|_{\infty}}\right\| \leq \left\|\frac{1}{\|R(z_n)\|_{\infty}} T(z_n)\right\| + \left\|S\left(\frac{R(z_n)}{\|R(z_n)\|_{\infty}}\right)\right\|,$$

y ambos sumandos de la derecha tienden a 0 cuando n tiende a infinito.

Al aplicar R a la sucesión anterior se tiene

$$R\left(\frac{z_n}{\|R(z_n)\|_{\infty}}\right) = \frac{1}{\|R(z_n)\|_{\infty}} R(z_n) \longrightarrow 0,$$

lo cual es imposible. Por tanto, T tiene rango cerrado.◆

Teorema 3.4.5 *Todo $F-$espacio no minimal tiene una sucesión básica.*

Demostración.

Sea (X,τ) un $F-$espacio no minimal. Sea $\{U_n : n \geq 1\}$ una base de vecindades de cero en (X,τ). Sin perder generalidad supongamos que U_1 no es vecindad de cero en alguna topología lineal más débil que τ. Por la Proposición 3.2.4 existen topologías lineales α y β tales que $\alpha < \beta \leq \tau$, β es metrizable, $\alpha-$polar y además U_1 es $\beta-$vecindad de cero, pero no $\alpha-$vecindad. Por Teorema 3.3.5 existe una sucesión básica regular $\left(w_k^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ en (X,β). Sean $\gamma_1 = \beta, F_1 = \left\langle w_k^{(1)} : k \geq 1\right\rangle$ y $E_1 = \overline{F_1}^{\tau}$.

Para cada $n \geq 1$, construiremos por inducción sucesiones $\left(w_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$; espacios $F_n = \left\langle w_k^{(n)} : k \geq 1\right\rangle$, $E_n = \overline{F_n}^{\tau}$ y topologías metrizables γ_n en E_n, definidas por $F-$normas $\|\|_n$, tales que $\left(w_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ es b.S. de (E_n,γ_n) para cada $n \geq 1$. Además

(a) $\left(w_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ es un bloque básico con respecto a $\left(w_k^{(n-1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ para $n \geq 2$, y así, $F_n \subset F_{n-1}$ y $E_n \subset E_{n-1} (n \geq 2)$,

(b) la topología γ_n en E_n es más fina que la restricción de γ_{n-1} a E_n y más débil que τ, para $n \geq 2$,

(c) $U_n \cap E_n$ es una γ_n-vecindad de cero en E_n.

Para $n = 1$ se satisface lo anterior ya que $\overline{F_1}^{\tau} \subset \overline{F_1}^{\gamma_1}$ y $\left(w_k^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ es b.S. de $\overline{F_1}^{\gamma_1}$, y $U_1 \cap E_1$ es una γ_1-vecindad de cero en E_1.

Para $n > 1$ supongamos que $\left(w_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, F_n, E_n y γ_n ya han sido escogidos.

Si $U_{n+1} \cap E_n$ es γ_n-vecindad de cero en E_n, entonces hacemos $\gamma_{n+1} = \gamma_n$ y $w_k^{(n+1)} = w_k^{(n)}$ para todo $k \geq 1$, con lo que claramente se satisfacen todas las condiciones requeridas.

Si $U_{n+1} \cap E_n$ no es γ_n-vecindad de cero en E_n, entonces por la Proposición 3.2.4 existen topologías α y γ_{n+1} en E_n tales que $\gamma_n \leq \alpha < \gamma_{n+1} \leq \tau$, γ_{n+1} es metrizable, $\alpha-$polar y $U_{n+1} \cap E_n$ es $\gamma_{n+1}-$vecindad de cero en E_n, pero no $\alpha-$vecindad de cero.

Al ser F_n un subconjunto $\tau-$ denso de E_n, también es $\gamma_{n+1}-$denso, ya que $\overline{F_n}^{\tau} \subset \overline{F_n}^{\gamma_{n+1}}$ y entonces $\alpha < \gamma_{n+1}$ en F_n. Por el Corolario 3.3.6 existe una sucesión $(z_k)_{k=1}^{\infty}$en F_n que es s.b. regular en la compleción de (F_n, γ_{n+1}) y tal que $z_k \to 0(\gamma_n)$.

Como $z_k \in F_n$ para todo $k \geq 1$, tenemos

$$z_k = \sum_{i=1}^{q(k)} c_{k,i} w_i^{(n)}.$$

Observamos que dado $k \geq 1$ existe $k' > k$ tal que $q(k') > q(k)$, pues en caso contrario se contradiría la independencia lineal de $(z_k)_{k=1}^{\infty}$.

Debido a que las funcionales $g_i^{(n)}$asociadas a $\left(w_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}$, son γ_n-continuas se sigue

$$g_i^{(n)}(z_k) \to 0, \text{ cuando } k \to \infty, \text{ para todo } i \geq 1,$$

esto significa entonces que

$$\lim_{k\to\infty} c_{k,i} = 0, \text{ para todo } i \geq 1,$$

y por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \left\| c_{k,i} w_i^{(n)} \right\|_{n+1} = 0, \text{ para todo } i \geq 1,$$

Podemos escoger sucesiones de enteros positivos $1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_j < \ldots$ y $q(k_1) < q(k_2) < \ldots < q(k_j) < \ldots$ tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^{q(k_{j-1})} c_{k_j,i} w_i^{(n)} \right\|_{n+1} \leq \sum_{i=1}^{q(k_{j-1})} \left\| c_{k_j,i} w_i^{(n)} \right\|_{n+1} < \frac{1}{2^{j-1}}, \text{ para } j \geq 2.$$

Para $j \geq 1$, sea

$$y_j = z_{k_j} = \sum_{i=1}^{q(k_j)} c_{k_j,i} w_i^{(n)}$$

y

$$w_j^{(n+1)} = \sum_{i=q(k_{j-1})+1}^{q(k_j)} c_{k_j,i} w_i^{(n)}, \text{ donde } q(0) = 0,$$

entonces $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en la compleción de (F_n, γ_{n+1}) (Corolario 3.1.16) y $\left(w_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{\infty}$ es un bloque básico con respecto a $\left(w_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum \left\| y_j - w_j^{(n+1)} \right\|_{n+1} < \infty. \tag{3.23}$$

Además, como γ_{n+1} es más fina que γ_n, tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k w_k^{(n+1)} = 0(\gamma_{n+1}) \text{ implica } \sum_{k=1}^{\infty} t_k w_k^{(n+1)} = 0(\gamma_n),$$

y como las funcionales $\left(g_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}$ son γ_n−continuas tenemos que $t_k = 0$ para todo $k \geq 1$ siempre que $\sum_{k=1}^{\infty} t_k w_k^{(n+1)} = 0\left(\gamma_{n+1}\right)$, ésto junto con la desigualdad (3.23) nos permite aplicar el Lema 3.4.4 y concluir que $\left(w_i^{(n+1)}\right)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en la compleción de $\left(F_n, \gamma_{n+1}\right)$ y por tanto, en $\left(F_n, \gamma_{n+1}\right)$. Definimos $F_{n+1} = \left\langle w_k^{(n+1)} : k \geq 1 \right\rangle$ y $E_{n+1} = \overline{F_{n+1}}^{\tau}$. Puesto que $F_{n+1} \subset E_{n+1} \subset \overline{F_{n+1}}^{\gamma_{n+1}}$ tenemos $\left(w_i^{(n+1)}\right)_{i=1}^{\infty}$ es una b.S. de E_{n+1}, y ésto termina la construcción por inducción.

Por último tomemos la sucesión diagonal

$$v_n = w_n^{(n)},$$

entonces, por la condición (a), $(v_k)_{k=n}^{\infty}$ es bloque básico con respecto a $\left(w_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ y por 3.1.24 es sucesión básica en (E_n, γ_n). En particular $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ es bloque básico con respecto a $\left(w_k^{(1)}\right)_k$ y sucesión básica en (E_1, γ_1). Sea (f_k) la sucesión de coeficientes funcionales asociada a $(v_k)_{k=1}^{\infty}$; cada f_k es γ_1−continua y por tanto. τ−continua. Extendemos cada f_k a $H = \overline{\langle v_k : k \geq 1 \rangle}^{\tau}$. en realidad la podemos extender hasta $\overline{\langle v_k : k \geq 1 \rangle}^{\gamma_1}$ y la denotamos de la misma manera, f_k.

Probemos que si $x \in H$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) v_k = x(\tau).$$

Dada $U \in \mathcal{N}(0, \tau)$, sea $n \geq 1$ tal que $U_n \subset U$. Definimos

$$R_n(x) = x - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) v_k, \text{ para } x \in H.$$

Debido a que $\overline{\langle v_k : k \geq n\rangle}^{\tau} = \bigcap_{k=1}^{n-1} f_k^{-1}(0)$, tenemos

$$R_n(x) \in \overline{\langle v_k : k \geq n\rangle}^{\tau},$$

es decir, $R_n(x)$ está en E_n y en $\overline{\langle v_k : k \geq n\rangle}^{\gamma_n}$.

Por ser $(v_k)_{k=n}^{\infty}$ una sucesión básica en (E_n, γ_n), se sigue que

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) v_k, (\gamma_n).$$

de donde, existe N tal que $m \geq N$ implica

$$R_n(x) - \sum_{k=n}^{m} f_k(x) v_k \in U_n \cap E_n \subset U_n, \text{ y entonces}$$

$$x - \sum_{k=1}^{m} f_k(x) v_k \in U_n \subset U,$$

por tanto,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) v_k, (\tau) \text{ y}$$

$(v_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en (X, τ).♦

Teorema 3.4.6 *Sea (X, τ) un $F-$espacio de dimensión infinita; las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X no tiene sucesiones básicas.

(ii) Todo subespacio cerrado de X con dual que separa puntos, es de dimensión finita.

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que X tiene una sucesión básica, digamos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ésta es b.S. de $[x_n]^{\tau}$, y este es un subespacio cerrado de X de dimensión infinita cuyo dual separa puntos, ya que los coeficientes funcionales asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ separan puntos de $[x_n]^{\tau}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si E es un subespacio cerrado de X con dual que separa puntos, entonces E es un $F-$espacio, y la topología débil σ en E es de Hausdorff y es menor que τ. Se supuso que X no contiene sucesiones básicas. por lo que si E es de dimensión infinita tampoco tiene sucesiones básicas; por el teorema anterior, E tiene que ser minimal, esto es, $\sigma = \tau$ y así, $E \cong \omega$, por el Lema 3.4.2, y por tanto, tiene base de Schauder, lo que contradice (i). Por tanto, E es de dimensión finita.♦

3.5 Aplicaciones

Definición 3.5.1 *Decimos que dos topologías lineales son compatibles en X si ellas definen los mismos subespacios lineales cerrados en X.*

Proposición 3.5.2 *Sea (X,τ) un e.l.t. Dos topologías lineales en X que son compatibles definen el mismo dual topológico.*

Demostración.
Se sigue inmediatamente del Teorema 1.2.19.

Corolario 3.5.3 *Sea (X,τ) un e.l.t. Dos topologías localmente convexas en X son admisibles para el par dual (X,X'), si y sólo si, ellas son compatibles.*

Demostración.
Si dos topologías l.c. en X son compatibles, entonces son admisibles para (X,X') por la proposición anterior.

Por otro lado, si son dos topologías l.c. en X son admisibles, entonces definen los mismos conjuntos convexos cerrados (Proposición 1.3.14) y, por tanto, son compatibles.

Teorema 3.5.4 *(i) Sea (X,τ) un $F-$espacio y supóngase que $\rho \leq \tau$ es una topología lineal en X compatible con τ. Entonces todo conjunto $\rho-$acotado es $\tau-$acotado.*

(ii) En el espacio lineal X sean $\rho \leq \tau$ dos topologías lineales en X compatibles y tales que τ es $\rho-$polar. Entonces, todo conjunto $\rho-$acotado es $\tau-$acotado.

Demostración.
(i) El teorema es obvio si $\rho = \tau$. Supongamos $\rho < \tau$ y sea A un subconjunto de X, $\rho-$acotado y no $\tau-$acotado y tomemos $x_0 \neq 0$ en X. Existen dos sucesiones: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A y $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares, con $t_n \neq 0$ y $t_n \to 0$, tales que

$$y_n \to 0(\rho) \text{ y } y_n \not\to 0(\tau),$$

donde $y_n = t_n(t_n x_n + x_0)$ para $n \geq 1$. Por Corolario 3.3.7. existe una subsucesión $(y_{m_n})_{n=2}^{\infty}$ de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ tal que la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $z_1 = x_0$ y $z_n = y_{m_n}$, si $n \geq 2$, es una sucesión semibásica en (X,τ).

Por lo anterior, $t_{m_n}^{-1} z_n \to x_0(\rho)$, lo que implica

$$x_0 \in [z_n : n \geq 2]^{\rho},$$

De la compatibilidad de ρ y τ, se sigue que $[z_n : n \geq 2]^{\rho} = [z_n : n \geq 2]^{\tau}$; así, $x_0 \in [z_n : n \geq 2]^{\tau}$ y esto contradice que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\tau-$semibásica.

(ii) Supongamos que A es un subconjunto de X, $\rho-$acotado y no $\tau-$acotado. Existen dos sucesiones: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A y $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares, con $t_n \neq 0$ y $t_n \to 0$, tales que

$$t_n x_n \to 0(\rho) \text{ y } q(t_n x_n) \not\to 0, \tag{3.24}$$

para alguna $F-$seminorma q, $\rho-$l.s.c., de una familia que genera a τ (Corolario 3.2.3). Así, $N = \{x \in X : q(x) = 0\}$ es $\rho-$cerrado. El espacio cociente X/N, es de Hausdorff con la topología cociente $\hat{\rho}$ inducida por ρ, y además es metrizable para la topología determinada por la $F-$norma $\hat{q}(\hat{x}) = \inf_{y \in N} q(x+y)$, $\hat{x} \in X/N$.

La función canónica

$$\Phi : (X, \tau) \to (X/N, \hat{q}),$$

es $\tau-$continua. Si Y es un subespacio $\hat{q}-$cerrado de X/N, entonces $\Phi^{-1}(Y)$ es un subespacio $\tau-$cerrado de X y, por la compatibilidad de τ y ρ, $\Phi^{-1}(Y)$ es $\rho-$cerrado. Por tanto, todo subespacio $\hat{q}-$cerrado de X/N es $\hat{\rho}-$cerrado. Es fácil ver que $\hat{q}$ es $\hat{\rho}-$l.s.c, de donde, cada conjunto de la forma $\{\overline{y} \in X/N : \hat{q}(\overline{y}) \leq \epsilon\}$ es $\hat{\rho}-$cerrado y por tanto, $\hat{q}$ es $\hat{\rho}-$polar. Obsérvese que

$$t_n\widehat{x_n} \to 0(\hat{\rho}), \text{ en tanto que } t_n\widehat{x_n} \not\to 0(\hat{q}),$$

donde $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es la imagen en X/N de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por teorema 3.3.5 existe una sucesión básica regular $(\widehat{z_n})_{n=1}^{\infty}$en $(X/N, \hat{q})$, donde $\widehat{z_n} = \widehat{y_{m_n}}$, con $\widehat{y_n} = t_n(t_n\widehat{x_n} + \widehat{x_0})$, para $n \geq 2$ y $\widehat{z_1} = \widehat{x_0} \neq 0$. Al proceder como en (i) concluimos que $\widehat{x_0} \in [z_n : n \geq 2]^{\hat{\rho}}$ y por la compatibilidad de $\hat{\rho}$ y $\widehat{q}$ tenemos $\widehat{x_0} \in [z_n : n \geq 2]^{\hat{q}}$, lo que contradice que $(\widehat{z_n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica.◆

Corolario 3.5.5 *Sea (X, τ) un $F-$espacio y $\rho \leq \tau$ una topología lineal, pseudometrizable y compatible con τ. Entonces $\rho = \tau$.*

Demostración.

Sea (U_n) una base numerable de cero en (X, τ). Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $x_n \to 0(\rho)$. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\rho-$acotada y por el teorema anterior es también $\tau-$acotada, por tanto absorbida por cada U_n. Por el Teorema 1.1.54 (absorción de sucesiones) cada U_n es una $\rho-$vecindad de cero. O sea, $\rho = \tau$.◆

Corolario 3.5.6 *Sea (X, τ) un $F-$espacio con la* PEHB. *Entonces X es localmente convexo.*

Demostración.

Sea σ la topología débil en X, entonces $\sigma \leq \tau$. Además si Y es un subespacio $\tau-$cerrado en X y $x \notin Y$, entonces existe, por la Proposición 1.2.39 , $f_x \in X'$ tal que $f_x(Y) = 0$ y $f_x(x) = 1$, y por tanto, Y es $\sigma-$cerrado, es decir, σ y τ son compatibles.

Sea m la topología de Mackey en X, entonces por proposición 2.3.10

$$\sigma \leq m \leq \tau \text{ y } m \text{ es pseudometrizable;}$$

y por corolario anterior

$$m = \tau,$$

de donde, τ es localmente convexa.◆

Corolario 3.5.7 *Sea (X, τ) un $F-$espacio y $\rho \leq \tau$ una topología lineal compatible con τ. Entonces τ es $\rho-$polar.*

Demostración.

Sea γ la topología lineal inducida por las $\rho-$cerraduras de las $\tau-$vecindades de cero, entonces $\rho \leq \gamma \leq \tau$ y γ es metrizable. Así por el corolario 3.5.5 $\gamma = \tau$.♦

Teorema 3.5.8 *Sea (X,τ) un $F-$espacio y sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una base de (X,ρ) donde $\rho \leq \tau$ es una topología compatible con τ. Entonces $(x_n)_{i=1}^{\infty}$ es una base de (X,τ).*

Demostración.

Por elcorolario anterior y por el Corolario 3.2.3, τ está definida por una $F-$norma $\|\|$ $\rho-$l.s.c.. Para cada $x \in X$ se tiene

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i, (\rho),$$

donde las $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, los que no necesariamente son $\rho-$continuos. Para cada $x \in X$, la sucesión

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right)_{n=1}^{\infty},$$

es $\rho-$acotada y por Teorema 3.5.4 es $\tau-$acotada, por lo que

$$\|x\|^* = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| < \infty.$$

Se puede ver fácilmente que $\|\|^*$ satisface las condiciones (F1) y (F2) de la Proposición 2.2.6, y además $\lim_{t\to 0} \|tx\|^* = 0$ ya que $\lim_{t\to 0} ty = 0$ uniformemente para y en un conjunto acotado (en ρ o τ, da lo mismo por el Teorema 3.5.4), es decir, también satisface (F3′) de la observación de aquella misma proposición, y así es una $F-$seminorma; más aún, es una $F-$norma por la inyectividad de las f_i.

Para todo $x \in X$, se cumple $\|x\| \leq \|x\|^*$, ya que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i \underset{n}{\rightarrow} x\,(\rho),$$

y como $\|x\|$ es $\rho-$l.s.c., tenemos

$$\|x\| \leq \liminf_n \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| \leq \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| = \|x\|^*.$$

Afirmamos que las normas $\|x\|$ y $\|x\|^*$ son equivalentes, para probarlo basta hacer ver, por el segundo corolario del Teorema de la función abierta, que $(X, \|\|^*)$ es completo.

Sea (y_n) una sucesión de Cauchy en $(X, \|\|^*)$, donde $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,(y_n)\,x_i(\rho)$. Como

$$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n - y_m\|^*,$$

se sigue que (y_n) es $\tau-$convergente, digamos a y. Sea $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\|y_n - y_m\|^* = \sup_k \left\| \sum_{i=1}^{k} f_i(y_n - y_m)x_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ si } n, m \geq N :$$

Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} f_i(y_n - y_m)x_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para } n, m \geq N \text{ y para todo } k, \tag{3.25}$$

lo que implica

$$\|f_i(y_n - y_N)x_i\| < \epsilon, \text{ para } n \geq N \text{ y para todo } i,$$

y así por (10) de la Proposición 2.2.4 $(f_i(y_n))_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo i, por lo que

$$\lim_n f_i(y_n) = t_i \text{ existe.} \tag{3.26}$$

Por la desigualdad (3.25)

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k} f_i(y_n)x_i = \sum_{i=1}^{k} t_i x_i (\tau), \tag{3.27}$$

uniformemente en k para la topología τ.

Para la topología ρ tenemos

$$\lim_k \sum_{i=1}^{k} t_i x_i = \lim_k \lim_n \sum_{i=1}^{k} f_i(y_n)x_i = \lim_n \lim_k \sum_{i=1}^{k} f_i(y_n)x_i = y,$$

gracias a la convergencia uniforme de (3.27). Así, $f_i(y) = t_i$, de donde se sigue por (3.27) que

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k} f_i(y_n)x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i(y)x_i \ (\tau),$$

uniformemente en k y que $\|y_n - y\|^* \to 0$.

Por tanto, $\|x\|$ y $\|x\|^*$ son equivalentes. Los operadores proyección (S_n) asociados a (x_n) forman una familia equicontinua en $\langle x_n \rangle$ ya que

$$\|S_n(x)\|^* \leq \|x\|^* \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y } x \in \langle x_n \rangle .$$

Por Teorema 3.1.18, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en $(X, \|\|)$, esto es, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de $[x_n]^\tau$, pero

$$[x_n]^\tau = [x_n]^\rho = X,$$

por la compatibilidad de ρ y τ ◆

Definición 3.5.9 *Sea (X, τ) un e.l.t. y B un subconjunto de X. B es un $\tau-$barril si B es convexo, balanceado, absorbente y cerrado.*

Definición 3.5.10 *Un e.l.t (X, τ) se llama espacio barrilado si todo $\tau-$barril es una vecindad de cero.*

Proposición 3.5.11 *Sea (X,τ) un $F-$espacio. Si m es su topología de Mackey, entonces (X,m) es un espacio barrilado.*

Demostración. Sea $C \subset X$ un $m-$barril , entonces C es $\tau-$cerrado, ya que $m \leq \tau$ (Proposición 2.3.10), además por ser C absorbente y balanceado tenemos

$$X = \bigcup_n nC.$$

Por tanto, por ser X métrico completo, C tiene $\tau-$interior no vacío. Sea G el interior de C y consideremos la envolvente balanceada y convexa de G, $BC(G)$, entonces

$$\frac{1}{2}G - \frac{1}{2}G \subset \frac{1}{2}BC(G) + \frac{1}{2}BC(G) = BC(G) \subset C.$$

C es entonces una $\tau-$vecindad de cero y por consiguiente contiene al conjunto $V_n = \{x : \|x\| < \frac{1}{n}\}$, para un natural n suficientemente grande, donde $\|\|$ es la $F-$norma que define a τ. Más aún, C contiene a la envolvente convexa de tal conjunto, V_n. De la Proposición 2.3.10 se sigue que C es una $m-$vecindad de cero y (X,m) es un espacio barrilado.◆

Teorema 3.5.12 *Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una base débil de un $F-$espacio (X,τ), cuyo dual separa puntos. Entonces la funcionales asociadas $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ son continuas en (X,τ).*

Demostración.
Sea σ la topología débil y m la topología de Mackey en (X,τ), esta última es metrizable porque el dual de X separa puntos(Proposición 2.3.10), sea $\|\|$ una $F-$norma que define a m y hagamos

$$\|x\|^* = \sup_k \left\| \sum_{i=1}^{k} f_i(x)x_i \right\|,$$

la cual está bien definida porque $\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x)x_i\right)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión $\sigma-$acotada, por ser $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una base débil, y porque σ y m tienen los mismos conjuntos acotados.

Al igual que en el teorema anterior se puede ver fácilmente que $\|\|^*$ es una $F-$norma para X. Sea m^* la topología en X definida por $\|\|^*$ y sea $\hat{X}$ la compleción de (X,m^*). Sea $n \geq 1$, la funcional f_n es m^*-continua, ya que

$$\|f_n(x)x_n\| \leq 2\,\|x\|^*,$$

Consideremos la función identidad

$$i : (X,m) \to (\hat{X},m^*).$$

Si i es continua, como probaremos más adelante, entonces $m^* \leq m\,(\leq \tau)$ y por tanto, f_n es $\tau-$continua para todo $n \geq 1$.

Para probar que i es continua, mostraremos que satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema de la gráfica cerrada (2.4.6). Para ver que se cumple (i), tomamos una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$z_n \to z(m) \text{ y } z_n \to z^*(m^*),$$

entonces $\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(z_n)x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (X, m) uniformemente en k ya que

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} f_i(z_n - z_{n'})x_i\right\| \leq \|z_n - z_{n'}\|^*, \text{ para todo } k \geq 1, \tag{3.28}$$

y al igual que en el teorema anterior tenemos que $\lim_n f_i(z_n)$ existe, para cada $i \geq 1$. Sea

$$\lim_n f_i(z_n) = t_i$$

para cada $i \geq 1$; por tanto, $\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(z_n)x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a $\sum_{i=1}^{k} t_i x_i$ en (X, m) uniformemente en k. Como $\sigma \leq m$, tenemos que de acuerdo a la topología σ se dan las siguientes igualdades:

$$\lim_k \sum_{i=1}^{k} t_i x_i = \lim_k \lim_n \sum_{i=1}^{k} f_i(z_n)x_i = \lim_n \lim_k \sum_{i=1}^{k} f_i(z_n)x_i = z,$$

entonces $f_i(z) = t_i$ y

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k} f_i(z_n - z)x_i = 0,$$

en (X, m) uniformemente en k y por tanto $z_n \to z$ en (X, m^*). Entonces $z = z^*$ y la transformación i tiene la gráfica cerrada.

Por último, Sea V una vecindad de cero en $(\hat{X}, m^*)$, convexa, balanceada y absorbente. Entonces $\overline{i^{-1}(V)}^m$ es un $m-$barril y por proposición anterior una $m-$vecindad de cero en X. Con lo que se satisface (ii) del Teorema de la gráfica cerrada. Por tanto, i es continua.◆

Lema 3.5.13 *Sean (X, τ) un $F-$espacio y $\rho \leq \tau$ una topología lineal de Hausdorff en X compatible con τ.*

Si $(\hat{X}, \widehat{\rho})$ es la compleción de (X, ρ) y

$$Y = \left\{ y \in \hat{X} : \text{ existe una red } (x_a) \text{ en } X, \rho-\text{acotada y tal que } x_a \to y \ (\widehat{\rho}) \right\},$$

entonces Y es metrizable con una $F-$norma $\|\|^*$ tal que

$$\|x\|^* = \|x\|, \tag{3.29}$$

para $x \in X$, donde $\|\|$ es una $F-$norma $\rho-$l.s.c. que define a τ. Claramente Y es un subespacio lineal de $\hat{X}$, con $X \subset Y$. Además de (3.29) se sigue que $(X_0, \|\|^*)$ es un $F-$espacio para todo subespacio lineal $\tau-$cerrado, X_0, de X.

Demostración.
ea $B_k = \{x \in X : \|x\| \leq k\}$, con $k > 0$. Para $y \in Y$ definamos

$$\|y\|^* = \inf\left\{k > 0 : y \in \overline{B_k}^{\widehat{\rho}}\right\},$$

$\|\|^*$ está bien definida, ya que por el Teorema 3.5.4 toda red $\rho-$acotada es $\tau-$acotada.

Afirmamos que $\|\|^*$ es una $F-$norma en Y. Sean $y_1, y_2 \in Y$ y $k_1, k_2 > 0$ tales que $y_1 \in \overline{B_{k_1}}^{\widehat{\rho}}$ y $y_2 \in \overline{B_{k_2}}^{\widehat{\rho}}$, entonces $y_1 + y_2 \in \overline{B_{k_1+k_2}}^{\widehat{\rho}}$ lo que implica que $\|y_1 + y_2\|^* \leq \|y_1\|^* + \|y_2\|^*$. Sea $y \in Y$ y una escalar a, con $|a| \leq 1$; supongamos que $k > 0$, $y \in \overline{B_k}^{\widehat{\rho}}$, y V es una $\widehat{\rho}-$vecindad balanceada de 0, entonces existe $y_1 \in B_k$ tal que $y - y_1 \in V$, por tanto $ay_1 \in B_k$ y $ay - ay_1 \in aV \subset V$, o sea, $ay \in \overline{B_k}^{\widehat{\rho}}$, lo que implica que $\|ay\|^* \leq \|y\|^*$. Finalmente, si $y \in Y$, entonces $y \in \overline{B_{\sup_a \|x_a\|}}^{\widehat{\rho}}$, donde x_a es una red en X, $\tau-$acotada y tal que $x_a \to y$ en $\widehat{\rho}$. Así, $ty \in \overline{B_{\sup_a \|tx_a\|}}^{\widehat{\rho}}$ para todo $t > 0$ y entonces

$$\lim_{t \to 0} \|ty\|^* \leq \lim_{t \to 0} \sup_a \|tx_a\| = 0.$$

Hasta ahora tenemos que $\|\|^*$ es una $F-$seminorma en Y. Supongamos que $\|y\|^* = 0$, entonces para todo $k > 0$ y toda $\widehat{\rho}-$vecindad de cero, V, podemos encontrar $x_{k,V} \in X$ tal que $x_{k,V} - y \in V$ y $\|x_{k,V}\| < k$. El conjunto

$$\{(k, V) : k > 0,\ V \text{ es } \widehat{\rho} - \text{vecindad de cero}\}.$$

puede ser dirigido, mediante el orden $(k, V) \geq (k^*, V^*)$ si, y sólo si, $k^* \geq k$ y $V \subset V^*$, y la red $(x_{k,V})$ es tal que $x_{k,V} \to 0(\tau)$ y por tanto, $x_{k,V} \to 0\ (\rho)$, y como $x_{k,V} \to y(\widehat{\rho})$, tenemos $y = 0$. Entonces $\|\|^*$ es una $F-$norma en Y. Denotemos por τ^* la topología en Y inducida por $\|\|^*$.

Además $\|\|^*$ es $\widehat{\rho}-$l.s.c. en Y, ya que para todo $\epsilon > 0$

$$\bigcap_{k>\epsilon} \overline{B_k}^{\widehat{\rho}} \cap Y = \{y \in Y : \|y\|^* \leq \epsilon\},$$

y por tanto, $\{y \in Y : \|y\|^* \leq \epsilon\}$ es $\widehat{\rho}-$cerrado en Y. Por esto, τ^* es $\widehat{\rho}-$polar en Y.

Si $x \in X$, entonces

$$\|x\|^* = \|x\|, \tag{3.30}$$

ya que $x \in \overline{B_{\|x\|}}^{\widehat{\rho}}$ y por tanto, $\|x\|^* \leq \|x\|$, y como $\|\|$ es $\rho-$l.s.c., B_k es $\rho-$cerrado para todo $k > 0$, entonces $\|x\| \leq k$ para todo $k > 0$, tal que $x \in \overline{B_k}^{\rho}\ (= B_k)$ y así, $\|x\| \leq \|x\|^*$.

Por lo anterior, $(X_0, \|\|^*)$ es un $F-$espacio para todo subespacio lineal X_0 de X. ♦

Teorema 3.5.14 (de Eberlein-Šmulian generalizado) *Sean (X, τ) un $F-$espacio y $\rho \leq \tau$ una topología lineal de Hausdorff en X compatible con τ. Para todo $K \subset X$, los siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) K es $\rho-$compacto.

(ii) K es $\rho-$compacto por sucesiones,

(iii) K es $\rho-$numerablemente compacto.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato de las definiciones.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se sigue del Teorema 1.1.33.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por el Teorema 1.1.39 K es totalmente acotado en (X, ρ), así que por teorema 1.1.36 basta que mostremos que K es completo.

Sea $\|\|$ una $F-$norma que define a τ, por Corolario 3.5.7 τ es $\rho-$polar y entonces por el Corolario de 3.2.2 podemos suponer $\|\|$ es $\rho-$l.s.c.

Para mostrar que K es $\rho-$completo, tomamos una red $\rho-$Cauchy (x_a) en K, entonces

$$x_a \longrightarrow y \text{ en } (\hat{X}, \widehat{\rho}) \tag{3.31}$$

para alguna $y \in Y$.

Analizaremos tres casos. Supongamos primero que $\|x_a - y\|^* \longrightarrow 0$, entonces $(x_a - y)_a$ es de Cauchy en (Y, τ^*) y esto implica que $(x_a)_a$ es de Cauchy en (X, τ) ya que por (3.30)

$$\|(x_a - y) - (x_b - y)\|^* = \|x_a - x_b\|^* = \|x_a - x_b\|,$$

de donde, por la ser (X, τ) completo, existe $z \in X$ tal que $x_a \longrightarrow z(\tau)$; así, $x_a \longrightarrow z(\rho)$ y por (3.31) $z = y \in X$. Si $y \neq x_a$ para todo a, entonces, por la metrizabilidad de (X, τ), existe una sucesión (a_n) de rango infinito tal que $x_{a_n} \longrightarrow y(\tau)$ y por tanto, $x_{a_n} \longrightarrow y(\rho)$; de donde, y es el único $\rho-$punto de acumulación de $(x_{a(n)})_n$ en X, por el Teorema 1.1.33, $y \in K$. Por tanto, K es completo.

Ahora supongamos que $\|x_a - y\|^* \nrightarrow 0$ y $y \notin X$. Como $y \neq 0$, podemos suponer, por (3.31) , que $x_a \notin V$ para todo a y alguna $\rho-$vecindad de 0, V. Tenemos entonces que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3.5, esto es, en el espacio Y, la topología τ^* es $\widehat{\rho}-$polar, $x_a - y \longrightarrow 0(\widehat{\rho})$, $x_a - y \nrightarrow 0(\tau^*)$. Entonces existe una sucesión básica regular $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en (Y, τ^*) tal que

a. $z_1 = y$,

b. $z_n = w_n - y$, donde $w_n = x_{a_n}$, para alguna sucesión creciente a_n,

c. $\inf \|z_n\|^* > 0$.

Sea $Z = \overline{\langle z_n : n \geq 1 \rangle}^{\tau^*}$ y sea $W = \overline{\langle w_n : n \geq 2 \rangle}^{\tau^*}$. Es claro que $Z = W + \mathbb{F} z_1$ y debido a que $z_1 \notin X$ y $W \subset X$ tenemos que W es un subespacio cerrado de codimensión 1 en Z. Sea F la funcional lineal continua en (Z, τ^*) tal que $F(z_1) = 1$ y $F(W) = 0$. Definamos el operador τ^*-continuo $A : Z \longrightarrow Z$ como

$$A(z) = z - F(z) z_1.$$

Para $n \geq 2$ tenemos,

$$A(z_n) = A(w_n) - A(z_1) = w_n,$$

Sea $B : Z \longrightarrow Z$ el operador continuo definido como $B(z) = z - g_1(z) z_1$, donde g_1 es el primer coeficiente funcional asociado a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. O sea

$$B\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i z_i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} t_i z_i.$$

Además,

$$B(w_n) = B(z_1 + z_n) = z_n$$

para $n \geq 2$, de donde

$$BA(z_n) = z_n \text{ y } AB(z_n) = z_n$$

para $n \geq 2$, y por tanto, A es un isomorfismo de $\overline{\langle z_n : n \geq 2\rangle}^{\tau^*}$ en su imagen, es decir, $\overline{\langle z_n : n \geq 2\rangle}^{\tau^*} \cong W$, y así $(w_n)_{n=2}^{\infty}$ es una base de (W, τ^*) ya que

$$w = A(z) = A\left(\sum_{i=2}^{\infty} t_i z_i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} t_i w_i,$$

para todo $w \in W$. Por ser W un subespacio de X y debido a que $\|x\| = \|x\|^*$ para $x \in X$; resulta que $(w_n)_{n=2}^{\infty}$ es una sucesión básica de Schauder en $(X, \|\|)$.

Debido a que $w_n \in K$ para $n \geq 2$, $(w_n)_{n=2}^{\infty}$ tiene un $\rho-$punto de acumulación $w_0 \in K$; lo que implica, por la compatibilidad de ρ y τ que $w_0 \in \overline{\langle w_n : n \geq 2\rangle}^{\tau}$ $(= W)$ y así, $w_0 = \sum\limits_{i=2}^{\infty} f_i(w) w_i$,donde $(f_i)_{i=2}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociadas a $(w_n)_{n=2}^{\infty}$. Cada f_i es entonces $\rho-$continua. Por esto y por ser w_0 un $\rho-$punto de acumulación de $\langle w_n : n \geq 2\rangle$ se tiene que para cada $i \geq 1$ y $\epsilon > 0$ existe $n > i$ tal que $w_n - w_0 \in f_i^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$. Entonces $f_i(w_n - w_0) = f_i(w_0) \in (-\epsilon, \epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$ lo que implica $f_i(w_0) = 0$. Por tanto, $w_0 = 0$, lo que no es posible pues supusimos que $x_a \notin V$ para todo a y alguna $\rho-$vecindad de 0 y $w_n = x_{a_n}$.

Por último, supongamos que$\|x_a - y\|^* \not\to 0$ y $y \in X$. Entonces

$$x_a - y \longrightarrow 0(\rho),$$

ya que $x_a \longrightarrow y(\hat{\rho})$, y $y \in X$. Asimismo, $x_a - y \in X$ para cada a y por tanto

$$\|x_a - y\|^* = \|x_a - y\|,$$

de donde $x_a - y \longrightarrow 0(\tau)$. Por el Teorema 3.3.5 existe una sucesión básica regular (de Schauder) $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en (X, τ) que satisface $z_1 \neq 0$ y $z_n = w_n - y$ donde $w_n = x_{a(n)}$, para $n \geq 2$ y alguna sucesión creciente $a(n)$.

La sucesión $(w_n)_{n=2}^{\infty}$ está en K y por consiguiente tiene un $\rho-$punto de acumulación $w_0 \in K$. Así $w_0 - y$ es un $\rho-$punto de acumulación de $(z_n)_{n=2}^{\infty}$. Como τ y ρ son compatibles

$$w_0 - y \in \overline{\langle z_n : n \geq 2\rangle}^{\tau},$$

y se sigue que

$$w_0 - y = \sum_{i=2}^{\infty} f_i(w_0 - y) z_i,$$

donde cada f_i es $\tau-$continua y por tanto $\rho-$continua, entonces haciendo lo mismo que en el caso anterior tenemos que $w_0 - y = 0$ y $y \in K$. Por tanto, K es completo, con lo que finaliza la demostración.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en K, de elementos distintos entre sí, y $x_0 \in K$ un $\rho-$punto de acumulación de $\{x_n\}$. Si x_0 es un $\tau-$punto de acumulación de $\{x_n\}$ entonces existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que τ-converge a x_0 y por tanto, también $\rho-$ converge a x_0 y K es $\rho-$ compacto por sucesiones.

Si x_0 no es un $\tau-$punto de acumulación de $\{x_n\}$, entonces existe una red (z_a) en $\{x_n\}$ tal que $(z_a) \longrightarrow x_0\,(\rho)$ y $z_a \not\longrightarrow x_0\,(\tau)$ y podemos encontrar una sucesión básica (de Schauder) $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en (X,τ) con $u_1 \neq 0$ $u_n = z_{a(n)} - x_0$ para $n \geq 2$ y alguna sucesión creciente $(a(n))$.

Sea w un $\rho-$punto de acumulación de $\left(z_{a(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ en K, entonces

$$w - x_0 \in \overline{\langle u_n : n \geq 2\rangle}^{\tau} ,$$

y al igual que en la prueba (iii)$\Rightarrow$(i) concluimos que $w - x_0 = 0$ y así, x_0 es el único $\rho-$punto de acumulación de $\left(z_{a(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Sabemos que $z_{a(n)} \longrightarrow x_0\,(\rho)$ y el rango de $\left(z_{a(n)}\right)$ es infinito, pues en otro caso $u_n = 0$ para algún $n \geq 1$ y esto no es posible, por ser u_n parte de una sucesión básica. Por tanto, $\left(z_{a(n)}\right)$ contiene una subsucesión que es un rearreglo de una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y K es ρ-compacto por sucesiones.◆

Capítulo 4

Propiedades de extensión en F*-espacios

En el capítulo anterior obtuvimos, como consecuencia de la existencia de sucesiones básicas en F−espacios, que todo espacio de este tipo con la *PEHB* tiene que ser necesariamente localmente convexo (Corolario 3.5.6). En este capítulo vemos algunas generalizaciones de esto. Primero definimos otro tipo de sucesiones que generalizan el concepto de sucesión básica y otras propiedades de extensión relacionadas con las nuevas sucesiones, además estudiamos cierto tipo de subespacios: los propios cerrados debilmente densos. A partir de estos nuevos conceptos analizamos que pasa en el caso de los espacios lineales metrizables, no necesariamente completos, que gozan de ciertas caractertísticas: separabilidad, dual que separa puntos, etc. En los dos últimos Teoremas, 4.3.15 y 4.3.16, vemos no sólo la relación que guardan las propiedades de extensión con la convexidad local sino también con los espacios minirnales.

4.1 Sucesiones M-básicas y propiedades de extensión.

4.1.1 Sucesiones M-básicas

Nuevamente, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un e.l.t. (X,τ) escribiremos $[x_n]^\tau$ para denotar al subespacio $\overline{\langle x_n \rangle}^\tau$. Si no hay lugar a confusión escribiremos simplemente $[x_n]$.

Definición 4.1.1 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un F^*−espacio (X,τ) es M (Markushevich)-básica , si es semibásica y existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funcionales lineales continuas en $[x_n]$ tal que*

(i) $\{x_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es un sistema biortogonal,*

(ii) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *es total en* $[x_n]$.

En este caso se dice que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ está asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definición 4.1.2 *Una sucesión M-básica, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un F^*−espacio es llamada M-básica fuertemente regular si la sucesión asociada de funcionales, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, es equicontinua en $[x_n]$.*

Proposición 4.1.3 *Sea (X,τ) un $F-$espacio y supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica fuertemente regular si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [x_n]$, donde $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*

Demostración.
Sea $G = [x_n]$ y supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica fuertemente regular. Supongamos $x \in G$ y $\epsilon > 0$, como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua en G existe una vecindad U de 0 en X tal que

$$|f_n(z)| < \epsilon \text{ si } z \in U \cap G \text{ y para todo } n \geq 1.$$

Por la elección de x se tiene

$$(x - U) \cap \langle x_n \rangle \neq \emptyset,$$

lo que implica

$$x = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + u$$

para algún $m \in \mathbb{N}$, $u \in U \cap G$ y $a_i \in \mathbb{F}$ para $1 \leq i \leq m$. De donde $|f_n(x)| < \epsilon$ para $n \geq m+1$, y por tanto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

El recíproco se sigue fácilmente de el Principio de acotamiento uniforme (Teorema 2.4.4) ya que $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado para todo $x \in X$ y G es un $F-$espacio.◆

Proposición 4.1.4 *Sea (X,τ) un $F-$espacio, entonces*

(i) Toda sucesión básica regular es M-básica fuertemente regular,

(ii) Toda sucesión M-básica fuertemente regular es M-básica regular.

Demostración.
(i) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica regular. Como X es un F-espacio se tiene por el Teorema 3.1.11 que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión Schauder básica regular y por tanto, por Corolario 3.1.22, semibásica. Por lo anterior, cada uno de los coeficientes funcionales asociados a la s.b.S $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es continua y se satisfacen (i) y (ii) de la Definición 4.1.1; o sea, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión M-básica. Finalmente, si $x \in [x_n]$, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n$; por esto y la regularidad de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se concluye que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y por consiguiente, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica fuertemente regular.

(ii) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión M-básica fuertemente regular con $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ como sucesión de funcionales a ella asociada. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica por definición y por la equicontinuidad de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

$$U = \left\{ x \in [x_n] : \sup_n |f_n(x)| < 1 \right\},$$

es una vecindad de cero en $[x_n]$ y $x_n \notin U$ para todo $n \geq 1$. Como $U = V \cap [x_n]$ para alguna vecindad V de 0 en X, tenemos que $x_n \notin V$ para todo $n \geq 1$ y por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es regular.◆

Definición 4.1.5 *Se dice que un F^*-espacio X tiene la Propiedad de Extensión de Markushevich-Hahn-Banach* (PEMHB) *si la cerradura en F^* del subespacio lineal generado por cualquier sucesión M-básica fuertemente regular es un subespacio* HB.

Definición 4.1.6 *Un e.l.t. (X, τ) tiene la Propiedad Aproximada de Hahn-Banach* (PAHB) *si para todo subespacio propio cerrado M de X, existe $f \in X'$ no trivial tal que $f(M) = 0$.*

4.1.2 Propiedades de extensión

Lema 4.1.7 *Sea (X, τ) un e.l.t. Si σ es su topología débil y M es un subespacio de X, entonces:*

(a) (X, τ) *tiene la* PSP *(Definición 1.2.42) si, y sólo si, todo subespacio de X de dimensión finita tiene la* PEHB,

(b) M es $\sigma-$cerrado si, y sólo si, X/M tiene la PSP,

(c) M es un subespacio propio $\tau-$cerrado débilmente denso (PCDD) *si, y sólo si, X/M, es un espacio no trivial con dual trivial.*

Demostración.

(a) Si X tiene la *PSP*, entonces, por la Proposición 1.3.7. su topología débil es de Hausdorff y por tanto, su topología original también lo es. Así cualquier subespacio, en particular los de dimensión finita, son de Hausdorff y los de dimensión finita son entonces isomorfos a $\mathbb{F}^n$ para a algún $n \geq 1$. De donde, todo subespacio de X de dimensión finita tiene la *PEHB*.

Por otro lado, supongamos que todos los subespacios de dimensión finita de X tienen la *PEHB*. Sea $x_0 \neq 0$ en X, y consideremos el subespacio $\langle x_0 \rangle$ por él generado. Definamos $f : \langle x_0 \rangle \longrightarrow \mathbb{F}$ por

$$f(tx_0) = t,$$

está es una funcional lineal continua y por hipótesis tiene una extensión F lineal y continua, a todo X. Así $F(x_0) = 1$ y por tanto X tiene la *PSP*.

(b) Supongamos que M es $\sigma-$cerrado. Entonces por la Proposición 1.1.23 X/M es de Hausdorff con la topología cociente inducida por σ, pero ésta coincide con la topología débil en X/M para la topología cociente inducida por la original en X (Proposición 1.3.6), de donde por la Proposición 1.3.7 X/M tiene la *PSP*.

Recíprocamente, si X/M tiene la *PSP*, entonces, por la Proposición 1.3.7, su topología débil es de Hausdorff y por tanto M es $\sigma-$cerrado.◆

(c) Supongamos que M es un subespacio lineal *PCDD*. Entonces X/M no es trivial, por ser M propio. Si f es una funcional lineal continua en X/M y $q : X \longrightarrow X/M$ es la función canónica, entonces e $f \circ q$ es una funcional lineal continua en X que se anula en M, de donde, por la $\sigma-$densidad de M, $f \circ q \equiv 0$, y por tanto $f \equiv 0$. Entonces X/M es un espacio no trivial con dual trivial.

Por otra parte, si X/M es no trivial, entonces M es propio. Sea $g \in X'$ con $g(M) = 0$. Esta funcional determina una funcional lineal continua f en X/M, tal que $f \circ q = g$, pero como X/M tiene dual trivial tenemos que $f \equiv 0$ y por tanto $g \equiv 0$. Por tanto, M es *PCDD*.◆

Lema 4.1.8 *Si el e.l.t.* (X,τ) *tiene la* PEHB *y* $M \subset X$ *es un subespacio cerrado, entonces* X/M *tiene la* PEHB.

Demostración. Sea N un subespacio cerrado de X/M y $f \in N'$. Entonces, $q^{-1}(N)$ es cerrado en X y contiene a M, donde $q: X \to X/M$ es la función cociente.

Definamos $f_* = f \circ q\,|_{q^{-1}(N)}$, entonces

$$\ker f_* = q^{-1}(\ker f),$$

de donde $\ker f_*$ es cerrado y por tanto $f_* \in (q^{-1}(N))'$. X tiene la *PEHB*, por lo que f_* tiene una extensión F lineal y continua en X. Así, $F(M) = 0$, y F induce una funcional lineal continua $\bar{f}$ en X/M tal que

$$\bar{f} \circ q = F,$$

Si $\hat{x} \in N$ donde $\hat{x}$ denota la clase de x, entonces

$$\bar{f}(\hat{x}) = F(x) = f_*(x) = f(\hat{x});$$

es decir, $\bar{f}$ es una extensión continua de f a X/M. Por tanto, X/M tiene la *PEHB*.♦

Lema 4.1.9 *Sea* (X,τ) *un e.l.t. y* σ *su topología débil, entonces:*

(a) X *tiene la* PEHB *si, y sólo si, todo subespacio* $\tau-$*cerrado de* X *es* $\sigma-$*cerrado.*

(b) X *tiene la* PAHB *si, y sólo si, todo subespacio* $\sigma-$ *denso de* X *es* $\tau-$*denso.*

Demostración.

(a) Supongamos que X tiene la PEHB . Sea M un subespacio $\tau-$cerrado de X, por el lema anterior X/M tiene la PEHB y por la Proposición 1.2.43 tiene la PSP. Del Lema 4.1.7 se sigue que M es $\sigma-$cerrado.

Inversamente, supongamos que todo subespacio lineal $\tau-$cerrado de X es $\sigma-$cerrado. Sea M un subespacio lineal $\tau-$cerrado y $f \in M'$ no trivial, entonces, $M = \mathbb{F}x_0 + \ker f$ para algún $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) \neq 0$. El subespacio $\ker f$ es $\tau-$cerrado en M, y por tanto, en X. Por hipótesis, $N = \ker f$ es $\sigma-$cerrado. Por la Proposición 1.3.8 existe $F \in X'$ tal que $F(N) = 0$ y $F(x_0) = f(x_0)$, es decir, F es una extensión lineal continua de f a todo X. Por tanto, X tiene la *PEHB*.

(b) Supongamos que X tiene la *PAHB* y que M es un subespacio $\sigma-$denso que no es $\tau-$denso, entonces $M \subset \overline{M} \subsetneq X$; de donde $\overline{M}$ es también $\sigma-$denso. Es decir, $\overline{M}$ es un subespacio *PCDD* y por el Lema 4.1.7 $X/\overline{M}$ es no trivial con dual trivial, por tanto, (X,τ) no tiene la *PAHB* ya que de tenerla existe $f \in X'$ no trivial tal que $f(\overline{M}) = 0$ y está induce una funcional distinta de cero en el cociente.

Finalmente, supongamos que todo subespacio lineal $\sigma-$ denso de X es $\tau-$denso y sea M un subespacio cerrado y propio con la siguiente propiedad: $f(M) = 0$ implica que $f \equiv 0$ para cualquier $f \in X'$. Entonces M es $\sigma-$denso y por hipótesis es $\tau-$denso, lo cual es una contradicción a que sea cerrado y propio. Por tanto, X tiene la *PAHB*.♦

4.2 Generalizaciones

Esta sección se basa principalmente en [10].

Proposición 4.2.1 *Sea (X,τ) un $F-$espacio minimal y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión M-básica en X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica equivalente a la base usual de ω.*

Demostración. Para cada $n \geq 1$ sea $L_n = \overline{\langle x_k : k \geq n\rangle}$. Es fácil ver que los conjuntos de la forma $L_n + U$ donde U es una τ-vecindad balanceada de 0 , satisfacen las condiciones dadas en Proposición 1.1.14 y por consiguiente son una base local de una topología lineal λ en X. Además de las igualdades

$$\bigcap_{n,U}(L_n + U) = \bigcap_{n}\bigcap_{U}(L_n + U) = \bigcap_{n}\overline{L_n} = \bigcap_{n} L_n,$$

se sigue que λ es de Hausdorff, ya que $\bigcap_n L_n = \{0\}$ por ser $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ M-básica, pues $x \in \bigcap_n L_n$ implica $f_n(x) = 0$ para todo n. Como $U \subset L_n + U$, tenemos $\lambda \leq \tau$ y como τ es minimal, entonces $\lambda = \tau$. Para cualquier sucesión de escalares $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ se satisface

$$\sum_{k=n+1}^{m} t_k x_k \in L_n + U \text{ para toda } U \in \mathcal{N}(X,\tau) \text{ y } m \geq n+1,$$

y entonces $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ converge. Por consiguiente, $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n$, para todo $x \in [x_n]$ ya que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es total en $[x_n]$, es decir, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en (X,τ) y es claramente equivalente a la base usual $(e_n)_{n=1}^{\infty}$de ω (ver Ejemplo 3.1.6).♦

Teorema 4.2.2 *Sean (X,τ) un $F-$espacio y ρ una topología lineal en X, tql que $\rho < \tau$. Supongamos que $(x_a)_{a\in D}$ es una red que satisface $x_a \to 0\,(\rho)$ y $x_a \nrightarrow 0(\tau)$ y sea $z_1 \in X$ con $z_1 \neq 0$. Existe una sucesión creciente $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ en D tal que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, con $z_n = x_{a_n}$, para $n \geq 2$, es una sucesión M-básica fuertemente regular en (X,τ) y $z_n \to 0(\rho)$.*

Demostración.

Igual que en la demostración del Corolario 3.3.7 encontramos una topología lineal y metrizable $\rho \leq \beta \leq \tau$ en X y una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ de la forma señalada en el enunciado tal que $z_n \to 0(\rho)$, es Schauder básica regular en la topología β y semi-básica para τ. Por tanto, si $x \in [x_n]^{\tau} \subset [x_n]^{\beta}$ se tiene

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n \ (\beta),$$

donde $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. De aquí se sigue que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es total en $[x_n]^{\tau}$ y entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica. También se tiene que $f_n(x)x_n \to 0(\rho)$, para todo $x \in [x_n]$ y como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\beta-$regular se cumple $f_n(x) \to 0$, para todo $x \in [x_n]$; es decir, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es fuertemente regular.♦

Corolario 4.2.3 *Sean (X,τ) un $F-$espacio y ρ una topología lineal en X, tal que $\rho < \tau$. Sea $(x_a)_{a\in D}$ una red $\tau-$regular tal que $x_a \to 0\,(\rho)$ y sea $z_1 \in X$ con $z_1 \neq 0$.*

(i) Si τ es $\rho-$polar, entonces existe una sucesión estrictamente creciente $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ en D tal que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica regular en (X,τ), donde $z_n = x_{a_n}$, para $n \geq 2$.

(ii) De modo más general, existe una sucesión creciente $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ en D tal que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión M-básica regular en (X,τ), donde $z_n = x_{a_n}$, para $n \geq 2$.

Demostración.
(i) es consecuencia inmediata del Teorema 3.3.5, en tanto que (ii) lo es del teorema anterior.

Teorema 4.2.4 *Sea (X,τ) un $F-$espacio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para X:*

(i) no es minimal,

(ii) contiene una sucesión M-básica regular,

(iii) contiene una sucesión M-básica fuertemente regular,

(iv) contiene una sucesión básica regular.

Demostración.
(iv)$\Rightarrow$(ii) Esta implicación es parte de la Proposición 4.1.4.

(ii)$\Rightarrow$(i) Supongamos que X contiene una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es M-básica regular y que X es minimal. Por la Proposición 4.2.1 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica regular equivalente a la base usual de ω, pero esto no es posible, ya que está última no es regular. Así, X no es minimal.

(i)$\Rightarrow$(iii) Existe una topología lineal $\rho < \tau$ y el resultado se sigue del Teorema 4.2.2.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión M-básica fuertemente regular, $Y = [x_n]$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funcionales asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por ser $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ equicontinua en Y, el conjunto

$$U = \left\{ y \in Y : \sup_n \{|f_n(x)|\} < 1 \right\},$$

es una $\tau-$vecindad de 0 en Y, pero no lo es en la topología $\sigma\left((f_n)_{n=1}^{\infty}\right)$, ya que no existen índices $n_1, ..., n_k$ tales que

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in Y : |f_{n_i}(y)| < 1\} \subset U,$$

puesto que $x_j \in V$ y $x_j \notin U$ si $j \neq n_1, ..., n_k$. Por tanto, $\sigma\left((f_n)_{n=1}^{\infty}\right) < \tau$ en Y. Entonces (Y,τ) es un $F-$espacio no minimal y por el Teorema 3.4.5 contiene una sucesión básica $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ con funcionales asociadas $(g_n)_{n=1}^{\infty}$.

Para $y \in Y$, $f_n(y) \longrightarrow 0$, por ser $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión M-básica fuertemente regular y $\sup_n |f_n(y)| < \infty$.

Definimos la siguiente norma en Y

$$\|y\| = \sup_n |f_n(y)| .$$

Esta norma es $\tau-$continua, ya que para cada $\epsilon > 0$, el conjunto

$$\{y \in Y : \|y\| < \epsilon\} = \left\{y \in Y : \sup_n \{|f_n(x)|\} < \epsilon\right\},$$

es una $\tau-$vecindad de cero por la equicontinuidad de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Por último, afirmamos que la sucesión básica $\left(\|y_n\|^{-1} y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es regular en (X,τ), ya que por lo anterior el conjunto $W = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$, es una $\tau-$vecindad de cero en Y y $\|y_n\|^{-1} y_n \notin V$ para todo $n \geq 1$.♦

4.3 Convexidad local y propiedades de extensión.

En lo que sigue desarrollaremos parte de un trabajo realizado por Kakol y Sorjonen ([8]) en 1994, a fin de generalizar los resultados obtenidos por Kalton y Shapiro en la decada de los 70 y así obtener condiciones más precisas bajo las cuales un espacio lineal topológico metrizable, no necesariamente completo, tiene propiedades de extensión.

Teorema 4.3.1 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión M-básica fuertemente regular en un e.l.t. metrizable (X,τ) tal que $x_n \longrightarrow 0$ en la topología de Mackey $m(X,X')$. Entonces $G = [x_n]^{\tau}$ no es* HB *en (X,τ).*

Demostración.

Supongamos que G es HB en (X,τ), entonces por la Proposición 2.3.11 tenemos $m(X,X')|G = m(G,G')$.

La sucesión de funcionales $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\tau-$equicontinua y total en G. Por la compatibilidad de $\tau|G$ y $m(G,G')$ cada f_n es $m(G,G')-$continua, de donde por el Teorema 2.4.4 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es $m(G,G')-$equicontinua y así, $U = \{x \in G : \sup_n |f_n(x)| < 1\}$ es una $m(G,G')-$vecindad de cero, que no contiene a ninguno de los elementos x_n. Tenemos, $U = V \cap G$ para alguna $V \in \mathcal{N}(m(X,X'))$ y por lo anterior $x_n \notin V$ para todo $n \geq 1$, lo cual es una contradicción a que $x_n \longrightarrow 0$ en $m(X,X')$. Por tanto, G no es HB.♦

Corolario 4.3.2 *Sea (X,τ) un $F-$espacio. Los siguientes son equivalentes:*

(i) (X,τ) *es localmente convexo,*

(ii) (X,τ) *tiene la* PEMHB,

(iii) τ *es $\sigma(X,X')-$polar y todo subespacio cerrado en (X,τ) que tiene una base regular es* HB.

Demostración.

(i)$\Rightarrow$(iii) τ tiene una base de vecindades de 0 formada por cerrados y convexos. Por la Proposición 1.3.14 los elementos de dicha base son $\sigma(X,X')$ -cerrados, o sea τ es $\sigma(X,X')-$polar y por el Corolario 1.2.38 todo subespacio cerrado de X es *HB*.

(i) $\Rightarrow$(ii) Se sigue del Corolario 1.2.38.

(ii)$\Rightarrow$(i) Supongamos que (X,τ) no es localmente convexo, entonces por la Proposición 2.3.10 $m(X,X') < \tau$, y por el Teorema 4.2.2 podemos encontrar una sucesión M-básica fuertemente regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en (X,τ) tal que $x_n \to 0(m(X,X'))$. Del Teorema 4.3.1 se sigue que $[x_n]^{\tau}$ no es un subespacio *HB* en (X,τ), es decir, X no tiene la *PEMHB*.

(iii)$\Rightarrow$(i) Supongamos que se satisface (iii) y (X,τ) no es localmente convexo, entonces τ es $\sigma(X,X')-$polar y $m(X,X') < \tau$. Por la Proposición 1.3.14 τ es $m(X,X')-$polar y por el Corolario 4.2.3 existe una sucesión básica regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en (X,τ) tal que $x_n \to 0$ en $m(X,X')$. De la Proposición 4.1.4 y el Teorema 4.3.1 se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión M -básica fuertemente regular y $G = [x_n]^{\tau}$ no es HB, lo que contradice a (iii)♦

Corolario 4.3.3 *Sea (X,τ) un e.l.t. metrizable con la* PEMHB. *Si θ es una topología lineal en X tal que $\theta \leq \tau$ y τ es $\theta-$polar, entonces*

$$\tau = \sup\left\{m(X,X'),\theta\right\}.$$

Demostración.

Hagamos $\tau' = \sup\{m(X,X'),\theta\}$. Sea θ una topología con las propiedades mencionadas, entonces τ es $\tau'-$polar ya que los $\theta-$cerrados son también $\tau'-$cerrados por definición de la topología supremo. Supongamos

$$\tau' < \tau.$$

Por el Teorema 3.3.5 podemos encontrar en (X,τ) una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es básica regular, y por tanto $M-$ básica fuertemente regular, tal que $x_n \to 0\,(\tau')$. Así, $x_n \to 0\,(m(X,X'))$ y el Teorema 4.3.1 implica que $[x_n]^{\tau}$ no es *HB*, lo que contradice que X tiene la *PEMHB*. Por consiguiente, $\tau = \tau'$.♦

Lema 4.3.4 *Sea X un espacio lineal y $G \subset X$ un subespacio. Sean ρ y τ dos topologías lineales en X tales que $\rho \leq \tau$ y ρ y τ inducen topologías iguales en G y en X/G. Entonces $\rho = \tau$.*

Demostración.

Sea $U \in \mathcal{N}(X,\tau)$. Escojamos $U_1 \in \mathcal{N}(X,\tau)$ tal que $U_1 + U_1 \subset U$. Existe $V \in \mathcal{N}(X,\rho)$ tal que

$$U_1 \cap G = V \cap G.$$

Tomemos $V_1 \in \mathcal{N}(X,\rho)$ tal que $V_1 - V_1 \subset V$. Así,

$$(V_1 - V_1) \cap G \subset U_1 \cap G \subset U_1. \tag{4.1}$$

$U_1 \cap V_1 \in \mathcal{N}(X,\tau)$, ya que $\rho \leq \tau$ y como ρ y τ inducen la misma topología en X/G, tenemos

$$(U_1 \cap V_1) + G \in \mathcal{N}(X,\rho),$$

Hagamos

$$W = ((U_1 \cap V_1) + G) \cap V_1,$$

entonces $W \in \mathcal{N}(X, \rho)$.

Sea $w \in W$, existen $x \in U_1 \cap V_1$ y $y \in G$ tales que $w = x + y$, lo que implica

$$y \in (W - (U_1 \cap V_1)) \cap G \subset (V_1 - V_1) \cap G \subset U_1,$$

de donde, $w = x + y \in U_1 + U_1$, es decir, $W \subset U_1 + U_1 \subset U$ y por tanto, $U \in \mathcal{N}(X, \rho)$. ♦

Corolario 4.3.5 *Sea (X, τ) un e.l.t. metrizable con la* PEMHB *y cuya topología no es minimal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (X, τ) es localmente convexo,

(ii) τ es $\sigma(X, X')$−polar,

(iii) existe en X una topología lineal l.c. $\theta \le \tau$ tal que τ es θ−polar,

(iv) toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \rightarrow 0\,(\sigma)$ y $x_n \nrightarrow 0\,(\tau)$ tiene una subsucesión que es M-básica fuertemente regular en τ.

(v) (X, τ) tiene una sucesión básica regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en la compleción de (X, τ) tal que $X/[x_n]^{\tau}$ es localmente convexo.

Demostración.

(i)⇒(ii) τ tiene una base de vecindades de 0 formada por cerrados y convexos. Por Proposición 1.3.14 los elementos de dicha base son $\sigma(X, X')$ -cerrados, o sea τ es $\sigma(X, X')$−polar.

(i)⇒(v) Por el Teorema 3.3.5 (X, τ) tiene una sucesión básica regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en la compleción de (X, τ) ya que es metrizable, localmente convexo y no minimal. Además, claramente $X/[x_n]^{\tau}$ también es localmente convexo.

(ii)⇒(iii) Tomemos $\theta = \sigma(X, X')$.

(iii)⇒(i) Por el corolario anterior

$$\tau = \sup\left\{m(X, X'), \theta\right\},$$

y de la definición de la topología supremo, se sigue que ésta es localmente convexa por serlo $m(X, X')$ y θ.

(ii)⇒(iv) Por el Teorema 3.3.5 toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \rightarrow 0\,(\sigma)$ y $x_n \nrightarrow 0\,(\tau)$ tiene una subsucesión que es básica regular en (X, τ) y por tanto, M-básica fuertemente regular.

(iv)⇒(i) Supongamos que (X, τ) no es localmente convexo. Por la Proposición 2.3.10 $m(X, X') < \tau$ y podemos construir una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \rightarrow 0\,(m)$, y por tanto $x_n \rightarrow 0\,(\sigma)$, y $x_n \nrightarrow 0\,(\tau)$. De (iv) se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que es M-básica fuertemente regular y por el Teorema 4.3.1, $[x_n]$ no es *HB*, lo cual contradice que (X, τ) tiene la *PEMHB*.

(v)⇒(i) Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica regular en la compleción de (X, τ), $G = [x_n]^{\tau}$ y $\widetilde{G}$ la cerradura de $\langle x_n \rangle$ en la compleción de (X, τ). Supongamos que X/G es localmente convexo. Por el Lema 4.3.4 basta probar que τ y $m(X, X')$

inducen las mismas topologías en G y en X/G. Denotemos a las topologías inducidas en G por cada una de ellas por τ_G y $m(X,X')_G$, y a las inducidas en X/G por τ/G y $m(X,X')/G$.

Por hipótesis τ/G es l.c. y además es metrizable por lo que es de Mackey (Corolario 1.3.24), esto es

$$\tau/G = m\left(X/G, (X/G, \tau/G)'\right). \tag{4.2}$$

Por otro lado, $m(X,X')/G$ también es de Mackey pues es l.c. y pseudo-metrizable (Corolario 1.3.24) , es decir

$$m(X,X')/G = m\left(X/G, (X/G, m(X,X')/G)'\right), \tag{4.3}$$

Para probar que $\tau/G = m(X,X')/G$ basta que veamos que son topologías compatibles en X/G. Como $m(X,X')/G \leq \tau/G$ tenemos $(X/G, m(X,X')/G)' \subset (X/G, \tau/G)'$. Si $f \in (X/G, \tau/G)'$ y $q : (X,\tau) \to X/G$ es la función cociente, entonces $f o q$ es $\tau-$continua y por tanto, $m-$continua, lo que implica que f es $m/G-$continua. Por tanto,

$$(X/G, m(X,X')/G)' = (X/G, \tau/G)',$$

de donde por (4.2) y (4.3) $\tau/G = m(X,X')/G$.

Sea $\tilde{X}$ la compleción de (X,τ) y denotemos por $\|\|$ la $F-$norma que induce su topología, entonces $\|\|$ restringida a X es una $F-$norma que induce τ. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es S.b. en $\left(\tilde{X},\tau\right)$, las proyecciones S_n son equicontinuas en $\tilde{G}$. Para cada $x \in \tilde{G}$ definimos

$$\|x\|^* = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\|,$$

y al igual que en la prueba del Teorema 3.5.8 se ve que $\|x\|^*$ es una F-norma en $\tilde{G}$ equivalente a $\|x\|$. Dado $\epsilon > 0$

$$\left\{x \in \tilde{G} : \|x\|^* \leq \epsilon\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \tilde{G} : \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| \leq \epsilon\right\},$$

y al intersectar cada miembro con G, tenemos

$$\{x \in G : \|x\|^* \leq \epsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in G : \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| \leq \epsilon\right\},$$

de donde τ_G es $\sigma(G,G')-$polar por ser $\left\{x \in G : \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| \leq \epsilon\right\}$ $\sigma(G,G')-$cerrado para cada $n \geq 1$. Como $\sigma \leq m(G,G')$, tenemos que τ_G es $m(G,G')-$polar y así, por el Corolario 4.3.3

$$\tau_G = m(G,G').$$

La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica fuertemente regular en X, pues por hipótesis así lo es en $\tilde{X}$. El subespacio G es HB porque X tiene la $PEMHB$ y la Proposición 2.3.11 asegura que $m(G,G') = m(X,X')_G$. Entonces por el Lema 4.3.4 τ coincide con $m(X,X')$ y es por consiguiente una topología localmente convexa.◆

Lema 4.3.6 *Sea (X,τ) un e.l.t. con la* PEMHB *y ρ una topología lineal en X tal que*

$$m(X,X') \leq \rho \leq \tau.$$

Entonces (X,ρ) tiene la PEMHB.

Demostración.
Sea $\{x_n, f_n\}$ una sucesión M-básica fuertemente regular en (X,ρ). Veremos primero que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión M-básica fuertemente regular en (X,τ). Como $\rho \leq \tau$, tenemos $[x_n]^{\tau} \subset [x_n]^{\rho}$, de donde, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es semi-básica en (X,τ); $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\tau-$equicontinua en $[x_n]^{\tau}$, por ser $\rho-$equicontinua en $[x_n]^{\rho}$; y es claro que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es total en $[x_n]^{\tau}$ por serlo en $\langle x_n\rangle$ y por que cada f_n es continua en $[x_n]^{\tau}$. Por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica fuertemente regular en (X,τ).

Sea f una funcional lineal $\rho-$continua en $[x_n]^{\rho}$, entonces es $\tau-$continua en $[x_n]^{\tau}$ y como por hipótesis X tiene la *PEMHB* existe $F : X \longrightarrow \mathbb{F}$ lineal $\tau-$continua tal que $f(x) = F(x)$ para $x \in [x_n]^{\tau}$, además por la compatibilidad de τ y de $m(X,X')$, y porque $m(X,X') \leq \rho$, tenemos que F es $\rho-$continua. Así, sólo resta comprobar que $f(x) = F(x)$ para $x \in [x_n]^{\rho}$, pero esto se sigue de que $[x_n]^{\tau}$ es $\rho-$denso en $[x_n]^{\rho}$.♦

Definición 4.3.7 *Sean X y Y dos $F-$espacios. Un operador $K : X \longrightarrow Y$ es compacto si existe una vecindad de cero U en X tal que $K(U)$ es relativamente compacto en Y.*

Lema 4.3.8 *Sean X y Y dos $F-$espacios y $A : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo lineal sobre su imagen. Si $K : X \longrightarrow Y$ es compacto, entonces $A+K$ tiene rango cerrado.*

Demostración.
Sea $U \in \mathcal{N}(X)$ tal que $K(U)$ es relativamente compacto en Y. Sean $N = \ker(A+K)$, $q : X \longrightarrow X/N$ la función cociente y $S : X/N \longrightarrow Y$ el operador continuo dado por $S \circ q = (A+K)$: S es inyectivo.

Más adelante se probará que S es un isomorfismo sobre su imagen; por ahora, supongámoslo. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(A+K)(X)$ convergente, digamos a y. Para cada $n \geq 1$, tenemos $y_n = S(\overline{x_n}) = (A+K)(x_n)$ para algún $x_n \in X$, donde $\overline{x_n}$ representa la clase de x_n en X/N. Al aplicar la inversa de S a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, obtenemos, ya que supusimos que S es un isomorfismo sobre su imagen, que $(\overline{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por tanto, converge, digamos a $\bar{x}$. Entonces

$$y_n = S(\overline{x}_n) \longrightarrow S(\bar{x}) = (A+K)(x) = y,$$

de donde $(A+K)(X)$ es cerrado en Y.

Demostramos ahora que S es un isomorfismo sobre su imagen. Supongamos lo contrario, entonces existe una sucesión $(S(\overline{u}_n))_{n=1}^{\infty}$ en $S(X/N)$ tal que $S(\overline{u}_n) \longrightarrow 0$ y $(\overline{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a cero, podemos suponer, tomando de ser necesario una subsucesión, que existe una vecindad de cero en X/N que no contiene a ninguna $\overline{u}_n$, es decir existe $W \in \mathcal{N}(X)$ tal que $\overline{u}_n \notin q(W)$ para todo $n \geq 1$. Sea $|||\,|||$ la $F-$norma en X/N y sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta \subset q(U)$, donde B_δ es la bola abierta de radio δ alrededor del cero en X/N, está contenida en $q(U)$, sin perder generalidad podemos suponer que $q(W) \subset B_\delta$. Sea $0 < \epsilon < \delta$ tal que $B_\epsilon \subset q(W)$ y por último tomamos $V \in \mathcal{N}(X)$ con $q(V) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}$.

Como para cualquier $\overline{x} \in X/N$ la función real $t \longrightarrow \|t\overline{x}\|$ es continua podemos elegir una sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, con $0 < a_n < 1$ para todo $n \geq 1$, tal que

$$\frac{\epsilon}{2} < \|a_n\overline{u}_n\| < \delta,$$

y por tanto,

$$a_n\overline{u}_n \notin q(V) \text{ y } a_n\overline{u}_n \in q(U).$$

Sea $a_n\overline{u}_n = q(x_n)$ donde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en U. Así, $(K(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en el conjunto $K(U)$, que es relativamente compacto, por lo que tiene una subsucesión convergente, que podemos suponer que es ella misma, es decir, escribimos $K(x_n) \longrightarrow y$ para alguna $y \in Y$, además

$$S(q(x_n)) = (A+K)(x_n) \longrightarrow 0,$$

de donde, $A(x_n) \longrightarrow -y$; y debido a que A es un isomorfismo sobre su imagen, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X y por consiguiente, $x_n \longrightarrow x$ para alguna $x \in X$, ya que X es un $F-$espacio. Entonces $A(x) = -y, K(x) = y$ y $x \in N$, esto es, $q(x) = 0$ y $(q(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, lo cual es una contradicción ya que $q(x_n) = a_n\overline{u}_n \notin q(V)$ para todo $n \geq 1$.♦

Lema 4.3.9 *Sea (X,τ) un $F-$espacio con $F-$norma $\|\|$, separable y con dual que separa puntos. Supongamos que X tiene una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es M-básica fuertemente regular y tal que $x_n \longrightarrow 0(m(X,X'))$, donde $m(X,X')$ es la topología de Mackey de X. Entonces existe un operador compacto $K : [x_{2n}]^{\tau} \longrightarrow X$ tal que el rango R del operador $T = J+K$, donde $J : [x_{2n}]^{\tau} \longrightarrow X$ es la inclusión, es un subespacio* PCDD *de X.*

Demostración.

Por la Proposición 2.3.10, $m(X,X')$ es metrizable, supongamos que $\|\|_{m(X,X')}$ es una $F-$norma que determina esa topología.

Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X, para cada $n \geq 1$ escojamos un escalar $0 < a_n < 1$ tal que

$$\|a_n z_n\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

En vista de que

$$a_k^{-1}x_n \longrightarrow 0\,(m(X,X')),$$

para cada $k \geq 1$, podemos construir inductivamente una sucesión de naturales l_k tal que

$$\|a_1^{-1}x_{2l_1}\|_{m(X,X')} \leq \frac{1}{2},$$

y

$$2l_k > 2l_{k-1} \text{ y } \|a_k^{-1}x_{2l_k}\|_{m(X,X')} \leq \frac{1}{2^k},$$

En resumen, las dos sucesiones hasta aquí consideradas cumplen las siguientes desigualdades

$$\|a_n z_n\| \leq \frac{1}{2^n}, \text{ si } n \geq 1 \text{ y } a_n^{-1}x_{2l_n} \longrightarrow 0(m(X,X')). \tag{4.4}$$

para todo $n \geq 1$

Sea $H = [x_{2n} : n \geq 1]^{\tau}$, definamos al operador $K : H \longrightarrow X$ como

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_{2l_n}(x) z_n,$$

donde $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. El operador K está bien definido ya que si $x \in [x_n]^{\tau}$, en particular si $x \in [x_{2n}]^{\tau}$, entonces, por la Proposición 4.1.3, $f_n(x) \longrightarrow 0$ y por tanto, $|f_j(x)| < 1$ para j suficientemente grande, de donde

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=j}^{j+m} a_n f_{2l_n}(x) z_n \right\| &\leq \sum_{n=j}^{j+m} \|a_n f_{2l_n}(x) z_n\| \\ &\leq \sum_{n=j}^{j+m} \|a_n z_n\| \leq \frac{1}{2^j} + \ldots + \frac{1}{2^{j+m}}, \end{aligned}$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_{2l_n}(x) z_n$ converge.

Sea

$$U = \{x \in H : f_{2l_n}(x) \leq 1 \text{ para todo } n \geq 1\},$$

está es una vecindad de cero en H ya que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua en $[x_n]^{\tau}$.

Sean $V, W \in \mathcal{N}(X)$ tales que $W + W \subset V$. Existe $r > 0$ tal que $B_r \subset W$, donde B_r es la bola abierta en X de radio r y con centro en 0. Existe un entero positvo N_r tal que si $x \in U$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N_r+1}^{\infty} a_n f_{2l_n}(x) z_n \right\| &\leq \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \|a_n f_{2l_n}(x) z_n\| \\ &\leq \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \|a_n z_n\| < r, \end{aligned}$$

Sea $U_r = \left\{x \in U : x = \sum_{n=N_r+1}^{\infty} a_n f_{2l_n}(x) z_n\right\}$, entonces $U_r \subset B_r$.

Definimos el operador $K_r : H \longrightarrow X$ como

$$K_r(x) = \sum_{n=1}^{N_r} a_n f_{2l_n}(x) z_n,$$

se tiene que $K_r(X)$ es de dimensión finita y $K_r(U) \subset K_r(X)$ es acotado ya que

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_r} a_n f_{2l_n}(x) z_n \right\| \leq 1 \text{ para } x \in U,$$

y por tanto, $K_r(U)$ es totalmente acotado en X. Entonces existe un conjunto finito $F \subset X$ tal que $K_r(U) \subset F + W$. Tenemos

$$K(U) \subset K_r(U) + U_r \subset F + W + B_r \subset F + V,$$

es decir, $K(U)$ es totalmente acotado y como X es un $F-$espacio, entonces $K(U)$ es relativamente compacto y K es compacto.

Sea $J : H \longrightarrow X$ la inclusión y $R = (J + K)(H)$. Por lema anterior, R es un subespacio cerrado de X, y afirmamos que R es *PCDD*.

Veamos que R es propio. Sea $q : X \longrightarrow X/H$ la función cociente. El operador compacto $q \circ (J + K)$ no es sobre, ya que de lo contrario, dado $\overline{y} \in X/H$ existe $x \in H$ tal que $q(J + K)(x) = \overline{y}$ y existe un entero positivo n tal que $x \in nU$, de donde se sigue que

$$X/H = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{q(J + K)(U)},$$

y como X/H es un $F-$espacio concluimos que $\overline{q(J + K)(U)}$ tiene interior no vacío y entonces $\overline{q(J + K)(U)}$ es una vecindad compacta de cero en el cociente y por otro lado, $\dim X/H = \infty$ ya que la familia $\{\overline{x}_{2n-1} : n \geq 1\}$ es linealmente independiente. Estos hechos contradicen que todo e.l.t. localmente compacto es de dimensión finita, así que $q(J + K)$ no es sobre y por tanto $J + K$ tampoco puede serlo , es decir, R es un subespacio cerrado propio de X.

Veamos ahora que R es $\sigma-$denso. Sea $f \in X' \left(= (X, m(X, X'))'\right)$ tal que $f(R) = 0$. Si $x \in X$, entonces hay una sucesión $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $z_{n_k} \longrightarrow x(\tau)$, observemos que

$$a_{n_k}^{-1}\left(x_{2l_{n_k}} + a_{n_k} z_{n_k}\right) = (J + K)\left(a_{n_k}^{-1} x_{2l_{n_k}}\right) \in R, \tag{4.5}$$

y por tanto, $f\left(a_{n_k}^{-1}\left(x_{2l_{n_k}} + a_{n_k} z_{n_k}\right)\right) = 0$, o lo que es lo mismo

$$f\left(a_{n_k}^{-1} x_{2l_{n_k}}\right) = -f(z_{n_k}),$$

de donde por la $m(X, X')$ y $\tau-$continuidad de f y por (4.4)

$$f\left(a_{n_k}^{-1} x_{2l_{n_k}}\right) \longrightarrow 0 \text{ y } f(z_{n_k}) \longrightarrow f(x),$$

entonces $f(x) = 0$. Así R es un subespacio *PCDD* de X.♦

Teorema 4.3.10 *Sea (X, τ) un $F-$espacio, con $F-$norma $\|\|$, separable y con dual que separa puntos. Si X no es localmente convexo entonces X contiene subespacios* PCDD, *y por tanto, por el Lema 4.1.9, X no tiene la* PAHB.

Demostración.

Si μ denota la topología de Mackey de X, entonces $\mu < \tau$, ya que X no es localmente convexo, y así, por el Teorema 4.2.2 existe una sucesión M-básica fuertemente regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en (X, τ) con $x_n \longrightarrow 0\,(\mu)$. Por el lema anterior X tiene un subespacio *PCDD*.♦

Teorema 4.3.11 *Sea (X, τ) un $F-$espacio con dual que separa puntos.*

(a) Un subespacio G de (X, τ) tiene la PEMHB *si. y sólo si. G es localmente convexo.*

(b) Si (X, τ) es separable, entonces un subespacio G tiene la PAHB *si, y sólo si, G es localmente convexo.*

Demostración.

En ambos casos podemos suponer sin pérdida de generalidad que G es denso en X, ya que de lo contrario podemos considerar a $\bar{G}$ como el $F-$espacio original.

(a) Si G es localmente convexo entonces tiene la *PEMHB* ya que tiene la *PEHB* (Corolario 1.2.38)

Supongamos que G tiene la *PEMHB*. Así, el subespacio G es *HB* en X y por la Proposición 2.3.11,

$$m(X,X')|G = m(G,G') \leq \tau|G.$$

La topología de Mackey $m(X,X')$ es metrizable porque X' separa puntos de X. Sea ρ la topología lineal en X que tiene como base de vecindades de cero a las $m(X,X')-$cerraduras de las $\tau-$vecindades de cero. De manera similar a como se hizo en la Proposición 3.2.4 se obtiene

$$m(X,X') \leq \rho \leq \tau, \ \rho \text{ es metrizable y } \rho \text{ es } m(X,X') - \text{polar},$$

Por el Lema 4.3.6 $(G,\rho|G)$ tiene la *PEMHB*, de donde por el corolario 4.3.3

$$\rho|G = m(G,G') = m(X,X')|G,$$

Por la Proposición 1.1.24 se obtiene $\rho = m(X,X')$, y de la definición de ρ se sigue que la transformación identidad

$$i : (X, m(X,X')) \longrightarrow (X,\tau),$$

satisface las hipótesis del Teorema de la Gráfica cerrada, por tanto, $m(X,X') = \tau$ y τ es localmente convexa.

(b) Supongamos que (X,τ) es separable.

Si G es localmente convexo, entonces tiene la *PEHB* y por tanto, la *PAHB*.

Supongamos que G no es localmente convexo y tiene la *PAHB*. Sea ρ la topología lineal considerada en (a), entonces ρ es metrizable, ρ es $m(X,X')-$polar y $m(X,X') \leq \rho \leq \tau$; de estas desigualdades se sigue que ρ y τ son compatibles. La topología ρ no puede ser localmente convexa, ya que de serlo $\rho = m(X,X')$ y se obtendría, del modo en que se hizo en la parte final del inciso anterior, que τ es localmente convexa, lo que es contrario a nuestra suposición; entonces

$$m(X,X') < \rho \leq \tau, \ \rho \text{ es metrizable y } \rho \text{ es } m(X,X') - \text{polar}.$$

Denotemos por γ a la topología lineal en G cuya base de vecindades de cero está formada por las $m(G,G')$ $-$cerraduras de las $\tau|G-$vecindades de cero. Entonces γ es metrizable, separable y

$$m(X,X')|G = m(G,G') < \rho|G \leq \gamma \leq \tau|G.$$

Por el Teorema 3.3.5 podemos encontrar en (G,γ) una sucesión básica regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \to 0\,(m(G,G'))$.

Sea $\left(\widetilde{G},\widetilde{\gamma}\right)$, la compleción de (G,γ) y $\|\|$ la $F-$norma que define la topología $\widetilde{\gamma}$, sea $\{z_n : n \geq 1\}$ una sucesión $\gamma-$densa en G. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es M-básica fuertemente regular en el $F-$espacio $\left(\widetilde{G},\widetilde{\gamma}\right)$. Al igual que en la demostración del

Lema 4.3.9 podemos escoger sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, con $0 < a_n < 1$, y $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$\|a_n w_n\| \leq \frac{1}{2^n} \text{ para toda } n \text{ y } a_n^{-1} x_{2l_n} \to 0 \left(m(G, G')\right). \tag{4.6}$$

Y si $H = [x_{2n} : n \geq 1]^{\tilde{\gamma}}$ y el operador $K : H \longrightarrow \tilde{G}$ está dado por

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_{2l_n}(x) z_n,$$

entonces K es compacto, y $T = J + K$, donde $J : H \longrightarrow \tilde{G}$ es la inclusión, es tal que su rango $T(H)$ es un subespacio *PCDD* en $\tilde{G}$. Afirmamos que $T(H \cap G) \cap G$ es un subespacio $\gamma-$cerrado en G y $\sigma(G, G')-$denso en G, para lo cual comprobaremos:

(i) $\overline{T(H \cap G) \cap G}^{\gamma} \neq G$ y

(ii) $T(H \cap G) \cap G$ es $m(G, G')-$denso en G.

Para (i), supongamos que se da la igualdad, entonces

$$G = \overline{T(H \cap G) \cap G}^{\gamma},$$

de donde,

$$\tilde{G} = \overline{G}^{\tilde{\gamma}} \subset \overline{T(H)}^{\tilde{\gamma}} = T(H),$$

ya que $T(H)$ es $\tilde{\gamma}-$cerrado, lo que contradice que $T(H) \subsetneq \tilde{G}$, por tanto, $\overline{T(H \cap G) \cap G}^{\gamma} \neq G$.

Para (ii), mostraremos que $\overline{T(H \cap G) \cap G}^{m(G,G')} = G$, de donde se seguirá, por la Proposición 1.3.14 que $T(H \cap G) \cap G$ es $\sigma(G, G')-$denso en G. Sea $y \in G$, hay una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $w_{n_k} \to y(\gamma)$. Al proceder de maner similar a como se hizo en la demostración del Lema 4.3.9 obtenemos

$$a_{n_k}^{-1}\left(x_{2l_{n_k}} + a_{n_k} w_{n_k}\right) = T\left(a_{n_k}^{-1} x_{2l_{n_k}}\right) \in T(H \cap G) \cap G,$$

así de (4.6) se tiene que $T\left(a_{n_k}^{-1} x_{2l_n}\right) \to y\left(m(G, G')\right)$, es decir,

$$\overline{T(H \cap G) \cap G}^{m(G,G')} = G.$$

Finalmente tomemos el subespacio de G

$$M = \overline{T(H \cap G) \cap G}^{\tau|G},$$

el cual, por lo anterior, es propio, ya que $M \subset \overline{T(H \cap G) \cap G}^{\gamma} \neq G$, $\tau|G-$cerrado y $\sigma(G, G')-$denso en G. Entonces $(G, \tau|G)$ tiene subespacios *PCDD*, lo que es una contradicción a que G tenga la *PAHB* (Lema 4.1.9).◆

Corolario 4.3.12 *Un e.l.t. metrizable (separable) con la* PEMHB *(*PAHB*) es localmente convexo o el dual de su compleción no separa puntos.*

Demostración.
Si el dual de su compleción separa puntos, entonces X es localmente convexo, por el teorema anterior.◆

Corolario 4.3.13 *Un e.l.t. metrizable X con una base con proyecciones equicontinuas tiene la* PAHB *si, y sólo si, X es localmente convexo.*

Demostración.

Del Corolario 3.1.18 se sigue que la base de X lo es también de su compleción y este último espacio es un F-espacio separable con un dual que separa puntos, pues los coeficientes funcionales asociados a la base lo hacen; así, por el inciso (b) del teorema anterior X tiene la *PAHB* si, y sólo si, X es localmente convexo.◆

El siguiente es un ejemplo para mostrar que el recíproco del corolario 4.3.12 es falso, esto es, que existe un e.l.t. metrizable sin la *PEMHB* y cuya compleción tiene un dual que no separa puntos.

EJEMPLO.Sea (X,τ) un espacio de Banach de dimensión infinita con una base regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $G = \langle x_n : n \geq 1\rangle$. Entonces G es $\tau-$denso en X y $\dim X = 2^{\aleph_0}$, de donde, $\dim (X/G) = 2^{\aleph_0}$, ya que $\dim G = \aleph_0$, además $(X/G, \tau/G)$ no es Hausdorff porque G no es $\tau-$cerrado.

Sabemos que $\dim L_p = 2^{\aleph_0}$ para toda $0 < p < \infty$, por lo que para un real fijo $0 < p < 1$ podemos encontrar un isomorfismo algebraico $L_p \xrightarrow{\varphi} X/G$.

Sea γ la topología de identificación en X/G determinada por el isomorfismo φ y cuando en L_p se considera la topología usual. Con esta topología φ es un isomorfismo topológico. En particular, $(X/G,\gamma)$ es metrizable y separable y $(X/G,\gamma)' = \{0\}$ ya que L_p tiene esas tres propiedades topológicas.

Una vez más dada una topología α en X, denotamos por α/G a la topología cociente que induce α en X/G y usaremos $\mathcal{N}(X,\alpha)$ para denotar a un base de vecindades de 0 en la topología α.

Sea β la topología débil en X determinada por las funciones $I_d : X \longrightarrow (X,\tau)$ y la función cociente $q : X \longrightarrow (X/G,\gamma)$. Esto es la que tiene por base de vecindades de 0 a

$$\mathcal{N}(X,\beta) = \{U \cap q^{-1}(V) : U \in \mathcal{N}(X,\tau) \text{ y } V \in \mathcal{N}(X/G,\gamma)\}, \qquad (4.7)$$

Como τ y γ son topologías de Hausdorff que tienen bases de vecindades de cero numerables, entonces β también la tiene y es de Hausdorff, ya que $\tau \leq \beta$; por tanto, β es metrizable (Corolario). Además, β tiene las siguientes propiedades:

(1) (X,β) es separable,

(2) $\tau < \beta$,

(3) G es $\beta-$cerrado,

(4) $\tau|G = \beta|G$ y

(5) $\beta/G = \gamma$,

(6) τ es admisible para (X,β)

como ahora probamos:

(1) (X,τ) es separable por tener una b.t, y $(X/G,\gamma)$ también lo es por serlo (X,γ). Entonces, τ y γ tienen bases topológicas numerables, digamos V_1 y V_2 respectivamente. Por la definición de β, la familia numerable $\{U \cap q^{-1}(V) : U \in V_1 \text{ y } V \in V_2\}$ es una base topológica de β.

(2) $\tau \leq \beta$, ya que $I_d : (X,\beta) \to (X,\tau)$ es continua. Supongamos $\tau = \beta$, entonces $q : (X,\tau) \to (X/G,\gamma)$ es continua, lo que implica que $\gamma \leq \tau/G$, ya que la topología cociente inducida por τ es la más grande de las topologías con respecto a la cual la función cociente es continua. La topología γ es metrizable y por tanto, de Hausdorff; en tanto que como ya se dijo τ/G no lo es, lo que contradice $\gamma \leq \tau/G$. Por consiguiente, $\tau < \beta$.

(3) $q : (X,\beta) \to (X/G,\gamma)$ es continua y $G = q^{-1}(\{0\})$.

(4) Por (2), $\tau < \beta$, entonces $\tau \mid G \leq \beta \mid G$. Sea $V \in \mathcal{N}(G,\beta \mid G)$, esto es, $V = H \cap G$ para algún $H \in \mathcal{N}(X,\beta)$; por la definición de β existen $U \in \mathcal{N}(X,\tau)$ y $W \in \mathcal{N}(X/G,\gamma)$ tales que $U \cap q^{-1}(W) \cap G \subset V$, pero $G \subset q^{-1}(W)$ y entonces $U \cap G \subset V$; ésto significa que $V \in \mathcal{N}(G,\tau \mid G)$, por tanto, $\beta \mid G \leq \tau \mid G$ y se sigue (4).

(5) La función cociente $q : (X,\beta) \to (X/G,\gamma)$ es continua. Por consiguiente, $\gamma \leq \beta/G$. El operador $T = \varphi^{-1} \circ q : (X,\beta) \to \left(L_p, \|\|_p\right)$ es continuo, sobre y $\ker T = G$, de donde, existe un ismorfismo $\overline{T} : (X/G,\beta/G) \to \left(L_p, \|\|_p\right)$, tal que $T = \overline{T} \circ q$. Así, $\beta/G = \gamma$.

(6)Como τ es l.c. y $\tau < \beta$,

$$(X,\tau)' \subset (X,\beta)'.$$

Sea $f \in (X,\beta)'$, $f \mid G$ es $\beta \mid G-$continua y por (4) $\tau \mid G-$continua. Al ser G $\tau-$denso, existe un extensión lineal $g : X \to \mathbb{F}$ de f, la cual es $\tau-$continua, y por (2), $\beta-$continua. La funcional $h = f - g$ es $\beta-$continua y $h \mid G = 0$; de (5) se sigue que h induce una funcional lineal $\gamma-$continua en X/G, lo que implica que $h = 0$. Entonces, $(X,\beta)' \subset (X,\tau)'$y τ y β son compatibles.

El ejemplo que buscamos es (X,β), así que a continuación probaremos:

(i) (X,β) no tiene la *PEMHB*.

(ii) El dual de la compleción de (X,β) no separa puntos.

(i) Supongamos que (X,β) tiene la *PEMHB*. Sea $x_0 \in X \setminus G$ y definamos una funcional lineal f_0 en $Z = G + \mathbb{F}x_0 = \langle x_n : n \geq 0 \rangle$; dada por $f_0(g + tx_0) = t$. Esta funcional es $\beta-$continua, ya que si $z_n = g_n + t_n x_0$, $n \geq 1$, es una sucesión en Z tal que $z_n \to 0\,(\beta)$ entonces $q(z_n) = t_n q(x_0) \to 0\,(\beta/G)$, y como $x_0 \notin G$, se tiene, $t_n \to 0$. La funcional f_0 puede extenderse continuamente a $[x_n : n \geq 0]^{\beta}$.

Sea $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes funcionales asociados a la base regular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X. Las funcionales g_n, $n \geq 1$, forman un familia $\tau-$equicontinua y total en $\overline{G}^{\tau} = X$, pues $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es base regular de X. Como $\tau < \beta$, esa familia es también $\beta-$equicontinua. En particular, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua y total en $[x_n : n \geq 0]^{\beta}$.

Para cada $n \geq 1$, definimos $f_n = g_n - f_0$, entonces: $(x_n, f_n)_{n=0}^{\infty}$ es un sistema biortogonal, $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión equicontinua y total en $[x_n : n \geq 0]^{\beta}$; y como $[x_n : n \geq 0]^{\beta} \subset [x_n : n \geq 0]^{\tau}$, tenemos que, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión M-básica fuertemente regular. Y así, por nuestra suposición f_0 tiene una extensión lineal $\beta-$continua a todo X, digamos $f : X \to \mathbb{F}$. Además como vimos anteriormente τ es admisible para (X,β) y entonces f es $\tau-$continua. De donde,

$$U = \{x \in X : |f(x)| < 1\} \in \mathcal{N}(X,\tau).$$

Si $u \in U$, entonces $x_0 + u$ no está en G ya que en caso contrario $0 = f_0(u + x_0) = f_0(u) + 1$, esto es, $f_0(u) = -1$ y $|f(u)| = 1$, lo que es una contradicción a que $u \in U$. Entonces,

$$(x_0 + U) \cap G = \emptyset,$$

lo cual contradice la $\tau-$densidad de G en X. Por tanto, (X, β) no tiene la *PEMHB*.

(ii) Sean $(\widetilde{X}, \widetilde{\beta})$ la compleción de (X, β) y $y \in \widetilde{X} \setminus X$. Existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \to y\left(\widetilde{\beta}\right)$ y es de Cauchy en (X, β). Como $\tau < \beta$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es también $\tau-$Cauchy. (X, τ) es de Banach, por lo que $x_n \to x(\tau)$, con $x \in X$. Por hipótesis $y \neq x$ y debido a que τ es admisible para (X, β), para cada cada $f \in \widetilde{X}'$ tenemos

$$f(x - y) = f(x - y_n) + f(y_n - y) \to 0.$$

es decir, $f(x) = f(y)$ pero $x \neq y$. Por tanto, $\widetilde{X}$ tiene un dual que no separa puntos.♦

Definición 4.3.14 *Sea (X, τ) un e.l.t., a la compleción de $(X, m(X, X'))$ se le llama la envolvente de Mackey de (X, τ).*

Teorema 4.3.15 *Sean (X, τ) un e.l.t. metrizable con la* PEMHB, $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}\right)$ *su compleción y*

$$\ker\left(\widetilde{X}\right) = \left\{y \in \widetilde{X} : f(y) = 0 \text{ para todo } f \in \widetilde{X}'\right\}.$$

Entonces la envolvente de Mackey de (X, τ) es isomorfa al espacio cociente $\widetilde{X} / \ker\left(\widetilde{X}\right)$ y $\ker\left(\widetilde{X}\right)$ es un espacio minimal.

Demostración.

Supongamos que (X, τ) no es localmente convexo, ya que en caso contrario $\tau = m(X, X')$ y claramente se tiene el resultado. Entonces, por el Corolario 4.3.12, $\widetilde{X}$ tiene un dual que no separa puntos, en otras palabras $\ker\left(\widetilde{X}\right) \neq \{0\}$. Además, $\ker\left(\widetilde{X}\right) = \bigcap_{f \in \widetilde{X}'} \ker f$, y por consiguiente es un subespacio cerrado en $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}\right)$.

Como X tiene la *PEMHB*, su dual separa puntos ya que cualquier subespacio de dimensión finita es *HB* (Teorema 4.1.7), entonces

$$X \cap \ker\left(\widetilde{X}\right) = \{0\},$$

ya que de lo contrario existe $x \in X$ distinto de cero tal que $f(x) = 0$ para toda funcional $f \in \widetilde{X}'$ y como X es HB en $\widetilde{X}$ por ser denso, se tiene que $g(x) = 0$ para toda funcional $g \in X'$ contradiciendo que X tiene un dual que separa puntos, de donde existe en $\widetilde{X}$ un complemento algebraico H de $\ker\left(\widetilde{X}\right)$, con $X \subset H$. Entonces H es un subespacio de $\widetilde{X}$ que es denso, porque X lo es, y tiene dual que separa puntos ya que $H \cap \ker\left(\widetilde{X}\right) = \{0\}$.

Sea $q : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right)$ la función cociente, entonces como H es complemento algebraico de $\ker\left(\widetilde{X}\right)$

$$q \mid H : H \to \left(\widetilde{X} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right), \widetilde{\tau} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right)\right),$$

es un isomorfismo algebraico, $\tau-$continuo. Sea ρ la topología de identificación en H inducida por $q \mid H$, entonces

$$q \mid H : (H, \rho) \to \left(\widetilde{X} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right), \widetilde{\tau} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right)\right), \tag{4.8}$$

es un isomorfismo topológico . Tenemos $\rho \leq \widetilde{\tau} \mid H$. Como $\ker\left(\widetilde{X}\right)$ es un subespacio cerrado de $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}\right)$, se sigue que $\left(\widetilde{X} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right), \widetilde{\tau} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right)\right)$ es un $F-$espacio y entonces (H, ρ) es también es un $F-$espacio.

Veremos que las topologías en X, τ y $\rho \mid X$ definen el mismo dual en X. De $\rho \leq \widetilde{\tau} \mid H$ se sigue $\rho \mid X \leq \widetilde{\tau} \mid X = \tau$, así, $(X, \rho \mid X)' \subset (X, \tau)'$.

Por otro lado, cada $f \in (X, \tau)'$, define $\widetilde{f} \in \widetilde{X}'$ y como $\widetilde{f}\left(\ker\left(\widetilde{X}\right)\right) = \{0\}$ se tiene que $\widetilde{f}$ induce una funcional lineal en el cociente, $\overline{f} : \widetilde{X} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right) \to \mathbb{F}$, definida por $\widetilde{f} = \overline{f} \circ q$, la cual es $\widetilde{\tau} \diagup \ker\left(\widetilde{X}\right)-$continua. Como $q \mid H$ es un isomorfismo $\widetilde{f} \mid H$ es $\rho-$continua, de donde $\widetilde{f} \mid X = f$ es $(\rho \mid X)-$continua, y así

$$(X, \tau)' \subset (X, \rho \mid X)'.$$

Por tanto, τ y $\rho \mid X$ definen el mismo dual en X, así que $m\left(X, (X, \tau)'\right) = m\left(X, (X, \rho \mid X)'\right)$. De la Proposición 2.3.10 concluimos

$$m\left(X, X'\right) \leq \rho \mid X \leq \tau,$$

y así por el Lema 4.3.6 el espacio $(X, \rho \mid X)$ tiene la *PEMHB*; además (H, ρ) es un F-espacio con dual que separa puntos y X es un subespacio de H, entonces el teorema 4.3.11 asegura que $(X, \rho \mid X)$ es localmente convexo, por lo que

$$m\left(X, X'\right) = \rho \mid X, \tag{4.9}$$

Así, (H, ρ) es un $F-$espacio tal que X es $\rho-$denso en H. Por cumplirse (4.9), tenemos que la envolvente de Mackey de X es isomorfa a (H, ρ).

Veremos ahora que $\ker\left(\widetilde{X}\right)$ es minimal. Supongamos que no lo es. Por el Teorema 3.4.5, $\ker\left(\widetilde{X}\right)$ contiene una sucesión básica regular $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $\|\|\|$ la $F-$norma que define a $\widetilde{\tau}$, al ser X $\widetilde{\tau}-$denso podemos elegir una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\|x_n - y_n\| < 2^{-n} \text{ para cada } n \geq 1, \tag{4.10}$$

entonces de la demostración del Lema 3.4.4 hay un isomorfismo

$$T : [y_n]^{\widetilde{\tau}} \to [x_n]^{\widetilde{\tau}} \text{ tal que } T(y_n) = x_n.$$

Ahora por (4.10) se tiene

$$q(x_n) = q(x_n - y_n) \to 0 \left(\widetilde{\tau}\diagup \ker\left(\widetilde{X}\right)\right),$$

sabemos que $q \mid H : (H,\rho) \to \left(\widetilde{X}\diagup \ker\left(\widetilde{X}\right), \widetilde{\tau}\diagup \ker\left(\widetilde{X}\right)\right)$ es un isomorfismo, de donde $x_n \to 0\,(\rho)$ y por (4.9) $x_n \to 0\,(m(X, X'))$.

Finalmente, usando el Teorema 4.3.1 y gracias a que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es también M-básica fuertemente regular, por ser básica regular, tenemos que $[x_n]^{\tau}$ no es *HB*, lo que contradice que X tiene la *PEMHB*. Por tanto, $\ker\left(\widetilde{X}\right)$ es minimal.◆

Teorema 4.3.16 *Sea X un $F-$espacio separable con la* PAHB. *Entonces X es localmente convexo o* $\ker X$ *es un espacio minimal no trivial.*

Con la prueba de este Teorema se cierra este trabajo.Para poderla dar veremos antes algunas definiciones y resultados que aparecen en [2] y [1].

Definición 4.3.17 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de un e.l.t. X es $m-$independiente si para cada sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$ se cumple que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$.*

Si M es un subespacio cerrado de X y $q : X \to X\diagup M$ es la función cociente diremos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es $m-$independiente de M si $(q(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es $m-$independiente en $X\diagup M$, en particular esta última condición implica que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $m-$independiente en X.

Lema 4.3.18 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión linealmente independiente en un e.l.t. X. Dada $V \in \mathcal{N}(X)$ y una sucesión $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares positivos existe una sucesión de escalares positivos $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, con $\alpha_n < r_n$, tal que si $|a_n| \leq \alpha_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in V$.*

Demostración.

Sean $V \in \mathcal{N}(X)$ y $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares positivos. Escojamos $V_0 \in \mathcal{N}(X)$ tal que $\overline{V_0} \subset V$ y consideremos una sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de vecindades balanceadas de cero que satisfagan

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \text{ para toda } n \geq 0.$$

Elijamos ahora $\alpha_n > 0$ para cada $n \geq 1$, tal que $\alpha_n x_n \in V_n$, con $r_n > \alpha_n$.

Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que $|a_n| \leq \alpha_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, entonces para cada k fija se tiene

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n \in V_1 + V_2 + \dots + V_k \subset V_0,$$

y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in V$.◆

Proposición 4.3.19 *Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión linealmente independiente de un e.l.t. X. Entonces existen $\gamma_n > 0$ tal que $(\gamma_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $m-$independiente.*

Demostración.
Notemos que para cada sucesion $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares positivos, y cada $n \geq 1$ el conjunto

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_n x_n : |a_i| \leq \beta_i \text{ para } i = 1, ...n-1 \text{ y } \frac{1}{2}\beta_n \leq a_n \leq \beta_n\right\},$$

es compacto y cerrado en X, ya que es la imagen en $\langle x_1, .., x_n\rangle$ del compacto en $\mathbb{F}^n$

$$\left\{(a_1, ..., a_n) : |a_i| \leq \beta_i \text{ para } i = 1, ...n-1 \text{ y } \frac{1}{2}\beta_n \leq a_n \leq \beta_n\right\},$$

bajo la transformación continua $\underset{(a_1,...,a_n)\to a_1x_1+...+a_nx_n}{\mathbb{F}^n \to \langle x_1, .., x_n\rangle}$, y además no contiene a cero ya que $\beta_n > 0$.

Sea $\gamma_1 > 0$, por lo mencionado arriba se tiene que el conjunto

$$X \diagdown \left\{a_1 x_1 : \frac{1}{2}\gamma_1 \leq |a_1| \leq \gamma_1\right\} = V_1.$$

está en $\mathcal{N}(X)$.

Podemos encontrar una sucesión de escalares positivos $(\alpha_{1n})_{n=1}^{\infty}$ que satisface las conclusiones del lema anterior para la sucesión $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ y la vecindad V_1, en particular

$$\left\{x \in X : x = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x_i \text{ con } |a_i| \leq \alpha_{1i} \text{ para todo } i \geq 2\right\} \subset V_1.$$

Sea $\gamma_2 = \alpha_{12}$, entonces el conjunto

$$X \diagdown \left\{a_1 x_1 + a_2 x_2 : |a_1| \leq \gamma_1 \text{ y } \frac{1}{2}\gamma_2 \leq |a_2| \leq \gamma_2\right\} = V_2.$$

está en $\mathcal{N}(X)$ y al aplicar otra vez el lema anterior para la vecinadad V_2 y la sucesión $(\alpha_{1n})_{n=1}^{\infty}$, encontramos una sucesión de escalares positivos $(\alpha_{2n})_{n=1}^{\infty}$ con $\alpha_{2n} < \alpha_{1n}$ para todo $n \geq 1$ y tal que

$$\left\{x \in X : x = \sum_{i=3}^{\infty} a_i x_i \text{ con } |a_i| \leq \alpha_{2i} \text{ para todo } i \geq 3\right\} \subset V_2,$$

Con este proceso inductivo, construimos, para cada $n \geq 1$, una sucesión escalar $(\alpha_{ni})_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\alpha_{ni} < \alpha_{(n-1)i} \text{ para todo } i \geq 2 \text{ y } n \geq 2,$$

$$\left\{x \in X : x = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \text{ con } |a_i| \leq \alpha_{ni} \text{ para todo } i \geq n+1\right\} \subset V_n,$$

donde,

$$V_n = X \setminus \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : |a_i| \leq \gamma_i \text{ para } i = 1, ...n-1 \text{ y } \frac{1}{2}\gamma_n \leq a_n \leq \gamma_n \right\}$$

y $\gamma_n = \alpha_{(n-1)n}$ para $n \geq 2$.

Por la antes dicho se verifica fácilmente que para todo $n \geq 2$ se satisface

$$\left\{ x \in X : x = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \text{ con } |a_i| \leq \gamma_i \text{ para todo } i \geq n+1 \right\} \tag{4.11}$$
$$\subset X \setminus \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : |a_i| \leq \gamma_i \text{ para } i = 1, ...n-1 \text{ y } \frac{1}{2}\gamma_n \leq |a_n| \leq \gamma_n \right\}.$$

Observemos que si $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión escalartal que $|b_n| \leq \gamma_n$ para todo $n \geq 1$, $|b_{n_0}| \geq \frac{1}{2}\gamma_{n_0}$ para alguna $n_0 \geq 1$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ converge entonces $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \neq 0$ ya que de lo contrario

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n_0} -b_i x_i \in \left\{ \sum_{i=1}^{n_0} a_i x_i : |a_i| \leq \gamma_i \text{ para } i = 1, ...n_0 - 1 \text{ y } \frac{1}{2}\gamma_{n_0} \leq |a_{n_0}| \leq \gamma_{n_0} \right\},$$

contradiciendo 4.11.

Finalmente, sea $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i \gamma_i x_i$ converge. Supongamos que la sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es distinta de la sucesión nula, hagamos

$$t = \sup_n \{|t_n|\} = \|(t_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} > 0.$$

Podemos encontrar un índice n_0 tal que $\frac{1}{2}t < |t_{n_0}| \leq t$. Elijamos un escalar $k > 0$ tal que

$$\frac{1}{2|t_{n_0}|} \leq k \leq \frac{1}{t},$$

entonces para la sucesión $(kt_n\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ tenemos

$$|kt_n\gamma_n| \leq \gamma_n \text{ para todo } n \geq 1, \ |kt_{n_0}\gamma_{n_0}| \geq \frac{1}{2}\gamma_{n_0} \text{ y}$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} kt_i\gamma_i x_i = k\sum_{i=1}^{\infty} t_i\gamma_i x_i,$$

de donde, por la observación anterior, $\sum_{i=1}^{\infty} kt_i\gamma_i x_i = k\sum_{i=1}^{\infty} t_i\gamma_i x_i \neq 0$ y por tanto. $\sum_{i=1}^{\infty} t_i\gamma_i x_i \neq 0$. Entonces $(\gamma_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $m-$independiente.♦

Proposición 4.3.20 *Sea M un subespacio cerrado de un e.l.t. X y $q : X \to X/M$ la función cociente. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es $m-$independiente de M entonces:*

(a) $M \cap \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : (t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty} \right\} = \{0\}$,

(b) $(c_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es* $m-$*independiente de* M *para cualquier sucesión* $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$ *con* $c_n \neq 0$ *para todo* $n \geq 1$.

Sea W *un subespacio de* X *transversal a* M, *es decir, tal que* $W \cap M = \{0\}$.

(c) Todo subespacio de W *de dimensión numerable tiene una base de Hamel* $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ *que es* $m-$*independiente de* M.

(d) Si X/M *es separable, metrizable y* $\overline{M+W} = X$, *entonces* W *contiene una sucesión* $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ *que es* $m-$*independiente de* M *y tal que* $\overline{M + \langle w_n : n \geq 1\rangle} = E$.

Demostración.

(a) Sea $y \in M \cap \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : (t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty} \right\}$, entonces $y = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ para alguna sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$ y $q(y) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n q(x_n) = 0$, de donde, como $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es $m-$independiente de M, tenemos que $t_n = 0$ para todo $n \geq 1$ y $y = 0$.

(b) Sea $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$ con $c_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n q(c_n x_n) = 0$ para cualquier $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$, entonces de la linealidad de q y como $(t_n c_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$, se sigue facilmente que $t_n c_n = 0$ para toda n y por tanto $t_n = 0$ para tod $n \geq 1$, es decir, $(c_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $m-$independiente de M.

(c) Sea $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de un subespacio H de W, en particular $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente. Como W es transversal a M, $(q(w_n))_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente en X/M de donde por la Proposición 4.3.19 existen $\gamma_n > 0$ tal que $(\gamma_n q(w_n))_{n=1}^{\infty}$ es $m-$independiente en X/M. Así, $(\gamma_n w_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de H y $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ que es $m-$independiente de M.

(d) Sea $(q(a_n))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X/M, como $\overline{M+W} = X$ para cada $n \geq 1$ existe una red $(w_{n\alpha} + y_{n\alpha})_{\alpha \in A}$, donde $w_{n\alpha} \in W$ y $y_{n\alpha} \in M$ tal que

$$a_n = \lim_{\alpha} (w_{n\alpha} + y_{n\alpha}), \text{ de donde } q(a_n) = \lim_{\alpha} q(w_{n\alpha}).$$

En vista de que el cociente X/M es metrizable podemos extraer una sucesión $(w_{nk})_{k=1}^{\infty}$ de $(w_{n\alpha})_{\alpha \in A}$ tal que

$$q(a_n) = \lim_{k \to \infty} q(w_{nk}). \tag{4.12}$$

Selecionamos una base $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ de $\{w_{nk} : n, k \geq 1\}$.

Por el inciso anterior podemos suponer que $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ es $m-$linealmente independiente de M.

Afirmamos que $\overline{M + \langle w_j : j \geq 1\rangle} = X$. Sean $y \in X \setminus M$ y $U \in \mathcal{N}(E)$. Escojamos $V \in \mathcal{N}(X)$ tal que $V + V \subset U$. Como $(q(a_n))_{n=1}^{\infty}$ es densa en X/M, existe $n \geq 1$ tal que

$$q(a_n - y) \in q(V),$$

de donde, existe $x_1 \in M$ tal que

$$a_n - y + x_1 \in V,$$

Por (4.12), existen $k \geq 1$ y $x_2 \in M$ tales que

$$w_{nk} + x_2 - a_n \in V.$$

Como $w_{nk} \in \langle w_j : j \geq 1 \rangle$ y

$$(w_{nk} + x_1 + x_2) - y \in V + V \subset U,$$

concluimos que $y \in \overline{M + \langle w_j : j \geq 1 \rangle}$.♦

Lema 4.3.21 *Sean X y Z dos subespacios cerrados de un $F-$espacio E. Supóngase que $Z \subset X$, y sea $K : Z \to E$ un operador compacto inyectivo cuyo rango $K(Z)$ está contenido en un subespacio W, transversal a X. Si $J : Z \to E$ es la inclusión, entonces $T = J + K$ es un isomorfismo sobre el subespacio cerrado $Y = T(Z)$, y $X \cap Y = W \cap Y = \{0\}$. Más aún, si $\dim Z = \infty$, entonces $X + Y$ no es cerrado, y si $K(Z)$ es denso en W, entonces $\overline{X+Y} = \overline{X+W}$.*

Demostración.

Por Lema 4.3.8 Y es un subespacio cerrado de E. Si $Tz = z + Kz$ está en X para alguna $z \in Z$, entonces que $Kz \in X$ ya que $Z \subset X$, pero $K(Z) \subset W$ y W es transversal a X; por tanto, $Kz = 0$ y $z = 0$ por la inyectividad de K.

De lo anterior se sigue que $X \cap Y = \{0\}$, en particular, T es inyectiva, y del Teorema de la función abierta se sigue que T es un isomorfismo de Z sobre Y.

Ahora, si $z \in Z$ es tal que $T(z) = z + Kz$ está en W, entonces $z \in W \cap X = \{0\}$, es decir, $W \cap Y = \{0\}$.

Si $\dim Z = \infty$, entonces K no es un isomorfismo sobre su imagen, ya que de lo contrario $T(Z)$ es localmente compacto y esto contradice al Corolario 1.1.38; así, podemos encontrar una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en Z que satisface $Kz_n \to 0$ y $z_n \nrightarrow 0$. Supongamos que $X + Y$ es un subespacio cerrado y por tanto, es un $F-$ espacio. Del Corolario 2.4.7 se sigue que la proyección $P : \underset{x+y}{X + Y} \underset{\to}{\to} \underset{x}{X}$ es continua, pero esto no es posible ya que $z_n - Tz_n\,(= -Kz_n) \in X + Y$ para todo $n \geq 1$, $z_n - Tz_n \to 0$, y $z_n \nrightarrow 0$. Por tanto, $X + Y$ no es cerrado.

Finalmente, supongamos que $W \subset \overline{K(Z)}$. Sean $x \in X$ y $w \in W$. Existe una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en Z tal que $Kz_n \to w$, y así $x + Kz_n \to x + w$. Observamos que $x + Kz_n = (x - z_n) + Tz_n$ y así $x + w \in \overline{X+Y}$ y $X + W \subset \overline{X+Y}$. Por otro lado, si $x \in X$ y $y \in Y$, $x + y = x + Tz = (x + z) + Kz$ y $(x + z) + Kz \in X + W$, es decir, $X + Y \subset X + W$. Por consiguiente, $\overline{X+Y} = \overline{X+W}$.♦

Teorema 4.3.22 *Sea X un subespacio cerrado de un $F-$espacio E. Si X no es minimal y $\dim(E/X) = \infty$. entonces existe un subespacio cerrado Y de E tal que $X \cap Y = \{0\}$ y $X + Y$ no es cerrado. Si además E/X es separable, entonces Y puede ser escogido de tal forma que $\overline{X+Y} = E$.*

Demostración.

Si $\dim(E/X) = \infty$, entonces por (c) de la Proposición 4.3.20 existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en E que es $m-$independiente de X y cuyo generado lineal W es transversal a X. Por (b) de la misma proposición podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$.

Del Teorema 4.2.4 se sigue que si X es no minimal, entonces X contiene una sucesión básica regular $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, la cual es M-fuertemente regular por la Proposición 4.1.4. Sea $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funcionales asociada a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, las cuales son equicontinuas en $Z = [z_n : n \geq 1]$. Definimos $K : Z \to E$ como

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)\, y_n,$$

que como en la demostración del Lema 4.3.9 se puede probar que es compacto, y además es inyectivo pues $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es $m-$independiente y $h_n(z) \in l^{\infty}$ para cada $z \in Z$.

Sea $W_1 = K(Z)$, entonces W_1 es un subespacio transversal a X por el inciso (a) de la Proposición 4.3.20. A partir del lema anterior obtenemos que $X \cap Y = \{0\}$, donde $Y = T(Z)$, $T = J + K$ y J es la inclusión de Z en E, y además $X + Y$ no es cerrado en E y $\overline{X+Y} = \overline{X+W_1}$.

Si además E/X es separable, entonces podemos escoger a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de tal modo que $(q(y_n))_{n=1}^{\infty}$ sea un conjunto numerable y denso en E/X, donde $q : E \to E/X$ es la función cociente. Es fácil probar, observando que $(y_n : n \geq 1) \subset W$ que $\overline{X+W} = E$ y por lo anterior $\overline{X+Y} = E$.♦

Demostración del Teorema 4.3.16.

Si X no es localmente convexo, entonces $\dim(X) = \infty$ y, por el Teorema 4.3.11, su dual no separa puntos, de donde, $\ker X$ es no trivial. Supongamos que $\ker X$ no es minimal.

Si $\dim(X/\ker X) < \infty$, entonces existe un subespacio Y de X, de dimensión finita, tal que

$$X = \ker X + Y.$$

Por tanto, Y es un subespacio propio cerrado de X.

Si por el contrario $\dim(X/\ker X) = \infty$, entonces por el teorema anterior aplicado a $\ker X$, existe un subespacio cerrado Y de X tal que $Y \cap \ker X = \{0\}$ y $Y + \ker X$ es un subespacio propio y denso en X. O sea,

$$Y \subsetneq X \text{ y } \ker X + Y \text{ es denso en } X \tag{4.13}$$

Por lo que en cualquiera de las 2 posibilidades para $\dim(X/\ker X)$, existe un subespacio cerrado Y de X que satisface 4.13.

Sea $f \in X'$ tal que $f(Y) = 0$, entonces $f(Y + \ker X) = 0$ lo que implica que $f \equiv 0$ y por tanto, Y es debilmente denso, es decir, Y es un subespacio PCDD de X, pero esto es una contradicción a que X tiene la PAHB.♦

Bibliografía

[1] L. Drewnowski, I. Labuda y Z. Lipecki, *Existence of quasi-bases for separable topological linear spaces*, Arch. Math. (Basel), 37 (1981), 454-456.

[2] L. Drewnowski, *Quasi-complements in F-spaces*, Studia Math., 77 (1984), 373-391.

[3] Nelson Dunford, James Pettis, *Linear operators, part I: General theory*, Interscience, New York, 1958.

[4] Peter Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic press, New York, 1970.

[5] Hans Jarchow, *Locally convex spaces*, B.G. Teubner Stuttgart, 1981.

[6] Kamthan y M. Gupta, *Theory of bases and cones*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985.

[7] P.K. Kamthan y M. Gupta, *Characterization of bases in topological vector spaces*, Tamkang. J. Math., 7 (1976), 51-55.

[8] J. Kakol, P. Sorjonen, *Basic sequences and the Hahn-Banach extension property*, Acta Sci. Math. (Szeged), 59 (1994), 161-171.

[9] Nigel J. Kalton, *Basic Sequences in F-spaces and their applications*, Proc. Edimburgh Math. Soc. vol. 19 (1974), 151-167.

[10] Nigel Kalton y J.H. Shapiro, *Bases and basic sequences in F-spaces*, Studia Math., 56 (1976), 47-61.

[11] Nigel J. Kalton, Tenney Peck y James Roberts, *An F-space sampler*, London Mathematical Society Lecture notes series, vol. 89, Cambridge University Press, 1984.

[12] John Kelley, Isaac Namioka, *Linear topological spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol.36, Springer-Verlag, New York,1976.

[13] Robert E.Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol.183, Springer-Verlag, New York,1998.

[14] A. Robertson, W. Robertson, *Topological vector spaces*. Cambridge 1964.

[15] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, PWN , Warsaw, 1972.

[16] Walter Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[17] Helmut Shaefer, *Topological vector spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol.3, Springer-Verlag, New York,1970.

[18] J.H. Shapiro, *Examples of proper closed weakly dense subspaces in some F-spaces of analitic functions*, Israel J. Math., 7 (1969), 369-380.

[19] J.H. Shapiro, *Extension of linear functionals on F-spaces with bases*, Duke Math. J., 37 (1970), 639-645.

[20] A. Wilansky, *Modern Methods in topological vector spaces*, McGraw-Hill, 1978.